HỘI THẢO KH CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHU VỰC DHĐBBB

LẦN THỨ XV

TÊN CHUYÊN ĐỀ: MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ ĐA THỨC DÀNH CHO HỌC SINH GIỎI BẬC THPT

Tháng 7 năm 2023

LỜI CẢM ƠN

Trong hành trình phát triển của nền giáo dục VN, hệ thống các trường THPT Chuyên ngày càng khẳng định được vị thế quan trọng của mình trong việc phát hiện, tuyển chọn và bồi dưỡng nhân tài, chấp cánh những ước mơ bay cao bay xa tới chân trời tri thức và thành công. Đối với các trường THPT Chuyên công tác học sinh giỏi luôn được đặt lên hàng đầu, là nhiệm vụ trọng tâm của mỗi năm học. Hội thảo khoa học các trường THPT chuyên khu vực Duyên Hải và Đồng bằng Bắc Bộ là một hoạt động bổ ích. Đây là dịp gặp gỡ, giao lưu, học hỏi, trao đổi kinh nghiệm giảng dạy, phát hiện, tuyển chọn và bồi dưỡng học sinh giỏi Quốc gia, Quốc tế giữa các trường THPT chuyên trong khu vực.

Tại hội thảo lần này, chúng tôi tập trung vào những vấn đề mới mẻ, thiết thực và có ý nghĩa đối với việc bồi dưỡng học sinh giỏi, để quý thầy cô đã, đang và sẽ đảng nhiệm công tác này tiếp tục trao đổi, học tập nâng cao hơn nữa năng lực chuyên môn của mình.

Xin chân thành cảm ơn sự cộng tác của các quý thầy cô đế từ các trường THPT chuyên khu vực Duyên Hải và Đồng bằng Bắc Bộ cùng các trường THPT chuyên với vai trò quan sát viên. Chúng tôi hy vọng sẽ tiếp tục nhận được nhiều hơn nữa sự phản hồi, đóng góp, trao đổi của quý thầy cô để các chuyên đề khoa học hoàn thiện hơn.

Tháng 7 năm 2023

Chương 1

Nhắc lại kiến thức về đa thức

Một tập con V của $\mathbb{C}$ được gọi là *vành con* nếu $1 \in V$ và phép cộng, phép trừ, phép nhân đều đóng trong V (tức là $1 \in V$ và $a+b, a-b, ab \in V$ với mọi $a, b \in V$). Trong suôt chương này, luôn giả thiết V là vành con của $\mathbb{C}$. Một vành con K của C được gọi là một *trường con* nếu mọi phần tử khác 0 của K đều khả nghịch (tức là $a^{-1} = 1/a \in K$ với mọi $0 \neq a \in K$). Trong suốt chương này, luôn giả thiết K là một trường con của $\mathbb{C}$.

1.1 Phép chia với dư và ước chung lớn nhất

Một đa thức một biến với hệ số trong V là một biểu thức có dạng

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

trong đó x là một kí hiệu, gọi là *biến* và a_i là các phần tử của V , gọi là *hệ số* của $f(x)$. Ta có thể viết $f(x) = \sum a_i x^i$, trong đó $a_i = 0$ với mọi $i > n$. Nếu $a_n \neq 0$ thì n được gọi là bậc của $f(x)$ và ta viết $deg f(x) = n$. Hai đa thức $\sum a_i x^i$ và $\sum b_i x^i$ là bằng nhau nếu $a_i = b_i$ với mọi i. Tập các đa thức biến x với hệ số trong V được kí hiệu là $V[x]$. Trong tiết này chúng ta nhắc lại một số kết quả về phép chia đa thức với hệ số trên trường K. Trước hết chúng ta nhắc lại Định lí chia với dư rất quen biết

Định lý 1.1.1. *Cho $f(x), g(x) \in K[x]$ với $g(x) \neq 0$. Khi đó tồn tại duy nhất một cặp đa thức $q(x), r(x) \in K[x]$ sao cho*
$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, với $r(x) = 0$ hoặc $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Trong đinh lí trên, $q(x)$ được gọi là thương và $r(x)$ được gọi là dư của phép chia $f(x)$ cho $g(x)$. Nếu dư của phép chia $f(x)$ cho $g(x)$ là 0 thì tồn tại $q(x) \in K[x]$ sao cho $f(x) = g(x)q(x)$. Trong trường hợp này, ta nói rằng $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ hay $g(x)$ là ước của $f(x)$.

Hệ quả 1.1.2. *Cho $a \in K$. Khi đó dư của phép chia $f(x) \in K[x]$ cho $x - a$ là $f(a)$.*

Chứng minh. Chia $f(x)$ cho $(x - a)$, dư hoặc bằng 0 hoặc là một đa thức bậc 0 vì bậc của $(x - a)$ bằng 1. Vì vậy, dư là một phần tử $r \in K$. Ta có $f(x) = (x - a)q(x) + r$. Thay $x = a$ vào đẳng thức ta được $r = f(a)$. □

Định nghĩa 1.1.3. *Một đa thức $d(x) \in K[x]$ được gọi là một ước chung lớn nhất của các đa thức $f_1(x), \ldots, f_s(x) \in K[x]$ nếu $d(x)$ là một ước chung của $f_i(x)$ với mọi $i = 1, \ldots, s$ và nếu $t(x) \in K[x]$ là một ước chung của $f_i(x)$ thì $d(x)$ chia hết cho $t(x)$.*

Chú ý rằng nếu ước $d(x)$ là một ước chung lớn nhất của $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ thì các ước chung của $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ có dạng $ad(x)$ với $0 \neq a \in K$. Trong số này, có duy nhất một đa thức $d^*(x)$ là ước chung lớn nhất của $f_1, \ldots, f_s$ và có hệ số cao nhất bằng 1.

Do đó ta kí hiệu $\gcd(f_1, \ldots, f_s) = d * (x)$. Ta có thể tìm ước chung lớn nhất của nhiều đa thức bằng quy nạp dựa theo công thức

$$\gcd(f_1, \ldots, f_s) = \gcd(\gcd(f_1, \ldots, f_{s-1}), f_s).$$

Vì thế để tìm ước chung lớn nhất của hữu hạn các đa thức, ta chỉ cần tìm ước chung lớn nhất của hai đa thức.

Bổ đề 1.1.4. *Cho $f, g, q, r \in K[x]$ là những đa thức thỏa mãn $g(x) \neq 0$ và $f = gq + r$ và $r = 0$ hoặc $\deg r < \deg g$. Khi đó ước chung lớn nhất của f và g bằng ước chung lớn nhất của g và r.*

Chứng minh. Giả sử $d(x)$ là một ước chung lớn nhất của f và g. Khi đó $d(x)$ là một ước của $f - gq$. Do đó $d(x)$ là ước của $r(x)$. Vì thế $d(x)$ là một ước chung của g và r. Giả sử $t(x)$ là một ước chung của g và r. Khi đó $t(x)$ là một ước của $f - gq$. Suy ra $t(x)$ là ước của $f(x)$. Vì thế $t(x)$ là một ước chung của g và f. Suy ra $t(x)$ là ước của $d(x)$. Vậy $d(x)$ là một ước chung lớn nhất của g và r. Ngược lại, giả sử $d(x)$ là một ước chung lớn nhất của g và r. Hoàn toàn tương tự ta có thể chỉ ra rằng $d(x)$ là một ước chung lớn nhất của f và g. □

Định lý 1.1.5. (Thuật toán Euclid tìm ước chung lớn nhất). *Giả sử $f, g \in K[x]$ và $g(x) \neq 0$. Thực hiện liên tiếp các phép chia ta có*

$$\begin{cases} f = gq + r, r \neq 0, \deg r < \deg g \\ g = rq_1 + r_1, r_1 \neq 0, \deg r_1 < \deg r \\ r = r_1q_2 + r_2, r_2 \neq 0, \deg r_2 < \deg r_1 \\ \dots \\ r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k, r_k \neq 0, \deg r_k < \deg r_{k-1} \\ r_{k-1} = r_kq_{k+1}. \end{cases}$$

Khi đó r_k là một ước chung lớn nhất của f và g.

Chứng minh. Chia f cho g ta được phần dư r. Nếu $r \neq 0$ thì chia g cho r ta được phần dư r_1. Nếu $r_1 \neq 0$ thì chia r cho r_1 ta được dư là r_2. Qúa trình trên phải chấm dứt sau một số hữu hạn bước vì dãy giảm các số tự nhiên.

$$\deg g > \deg r > degr_1 > \dots$$

phải dừng. Theo Bổ đề 1.1.4, ước chung lớn nhất của f và g là r_k. □

Từ thuật toán Euclid tìm ước chung lớn nhất ta suy ra rằng nếu $f_1, \ldots, f_s \in K[x]$ là các đa thức không đồng thời bằng 0 thì tồn tại ước chung lớn nhất của $f_1, \ldots, f_s$ trong $K[x]$. Kết quả sau cho thấy ước chung lớn nhất là tổ hợp tuyến tính của đa thức.

Định lý 1.1.6. *Giả sử $f(x), g(x) \in K[x]$ và $d(x) \in K[x]$ là ước chung lớn nhất của $f(x), g(x)$. Khi đó tồn tại $u(x), v(x) \in K[x]$ sao cho*

$$d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x).$$

Chứng minh. Ta chứng minh Định lí theo thuật toán sau đây, gọi là *thuật toán Euclid mở rộng*. Trong các phép chia liên tiếp ở thuật toán Euclid tìm ước chung lớn nhất, $d(x) = r_k(x)$. Đặt $u_1(x) = 1, v_1(x) = -q_k(x)$, từ đẳng thức giáp cuối ta có

$$d(x) = r_{k-2}(x)u_1(x) + r_{k-1}(x)v_1(x).$$

Thay $r_{k-1}(x)$ từ đẳng thức giáp cuối ta được

$$r_{k-1}(x) = r_{k-3}(x) - r_{k-2}(x)q_{k-1}(x)$$

vì thế ta có $d(x) = r_{k-3}(x)u_2(x) + r_{k-2}(x)v_2(x)$, trong đó $u_2(x) = v_1(x)$ và $v_2(x) = u_1(x) - v_1(x)q_{k-1}(x)$. Cứ tiếp tục đi từ dưới lên, đến các đẳng thức đầu tiên ta có kết quả. □

1.2 Nghiệm của đa thức

Định nghĩa 1.2.1. Phần tử $\alpha \in \mathbb{C}$ được gọi là một *nghiệm* của đa thức

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in K[x]$$

nếu $f(\alpha) = a_n \alpha^n + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0$.

Từ Hệ quả 1.1.2 ta có ngay kết quả sau:

Hệ quả 1.2.2. *Phần tử $a \in K$ là nghiệm của đa thức $f(x) \in K[x]$ nếu với chỉ nếu tồn tại đa thức $g(x) \in K[x]$ sao cho $f(x) = (x - a)g(x)$.*

Cho $k > 0$ là một số nguyên. Một phần tử $a \in \mathbb{C}$ được gọi là một *nghiệm bội k* của đa thức $f(x) \in K[x]$ nếu trong $\mathbb{C}[x]$, đa thức $f(x)$ chia hết cho $(x-a)^k$ nhưng không chia hết cho $(x-a)^{k+1}$. Nếu $k = 1$ thì a được gọi là *nghiệm đơn*. Nếu $k = 2$ thì a được gọi là *nghiệm kép*.

Hệ quả 1.2.3. *Phần tử $a \in K$ là nghiệm bội k của đa thức $f(x) \in K[x]$ nếu với chỉ nếu $f(x) = (x - a)^k g(x)$ với $g(x) \in K[x]$ với $g(a) \neq 0$.*

Chứng minh. Gỉa sử $a \in K$ là nghiệm bội k của $f(x)$. Vì $f(x)$ chia hết cho $(x - a)^k f(x) = (x - a)^k g(x)$ với $g(x) \in K[x]$. Nếu $g(a) = 0$ thì theo Hệ quả 1.2.2 ta có $g(x) = (x - a)h(x)$ với $h(x) \in K[x]$ với do đó $f(x)$ chia hết cho $(x - a)^{k+1}$, vô lí. Vậy $g(a) \neq 0$. Ngược lại, với $f(x) = (x - a)^k g(x)$ nên $f(x)$ chia hết cho $(x - a)^k$. Nếu $f(x)$ chia hết cho $(x - a)^{k+1}$ thì $f(x) = (x - a)^{k+1} h(x)$ với $h(x) \in K[x]$. Do đó

$$(x - a)^k g(x) = (x - a)^{k+1} h(x).$$

Do K là trường nên giản ước hai vế cho $(x - a)^k$ ta được $g(x) = (x - a)h(x)$ Suy ra $g(a) = 0$, mâu thuẫn. Vậy $f(x)$ không chia hết cho $(x - a)^{k+1}$. □

Hệ quả 1.2.4. *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_r \in K$ là những nghiệm phân biệt của $f(x) \in K[x]$. Gỉa sử a_i là nghiệm bội k_i của $f(x)$ với $i = 1, \ldots, r$.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo r.Trường hợp $r = 1$ được suy ra từ Hệ quả 1.2.3. Cho $r > 1$. Theo giả thiết quy nạp, tồn tại $h(x) \in K[x]$ sao cho

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_{r-1})^{k_{r-1}} h(x)$$

trong đó $h(x) \in K[x]$ với $h(a_i) \neq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, r-1$. Với a_r là nghiệm của $f(x)$ nên ta có

$$0 = f(a_r) = (a_r - a_1)^{k_1}(a_r - a_2)^{k_2} \ldots (a_r - a_{r-1})^{k_{r-1}} h(x).$$

Do $a_r \neq a_i$ với mọi $i = 1, \ldots, r-1$ nên $h(a_r) = 0$. Gỉa sử $h(x) = (x - a_r)^t u(x)$ trong đó $u(x) \in K[x], u(a_r) \neq 0$ với $t > 0$ à một số nguyên. với $h(a_i) \neq 0$ nên $u(a_i) \neq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, r-1$. Do a_r là nghiệm bội k_r của $f(x)$ nên $t \leq k_r$. Hơn nữa, $f(x)$ có sự phân tích $f(x) = (x - a_r)^{k_r} v(x)$, trong đó $v(x) \in K[x]$ với $v(a_r) \neq 0$. Vì thế ta có

$$f(x) = (x - a)^{k_r} v(x) = (x - a_1)^{k_1} \ldots (x - a_{r-1})^{k_{r-1}} (x - a_r)^t u(x).$$

Chú ý rằng K là trường, vì thế giản ước cả hai vế cho $(x - a_r)^t$ ta được

$$(x - a_r)^{k_r - t} v(x) = (x - a_1)^{k_1} \ldots (x - a_{r-1})^{k_{r-1}} (x - a_r)^{k_r} u(x)$$

trong đó $u(a_i) \neq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, r$. □

Hệ quả 1.2.5. *Cho $f(x) \in K[x]$ là một đa thức khác 0.Khi đó số nghiệm của $f(x)$, mỗi nghiệm tính với số bội của nó, không vượt quá bậc của $f(x)$. Đặc biệt, nếu $f(x), g(x) \in K[x]$ có bậc không quá n và nhận giá trị bằng nhau tại $n+1$ phần tử khác nhau của K thì $f(x) = g(x)$.*

Chứng minh. Gỉa sử $a_1, \ldots, a_r$ là các nghiệm của $f(x)$ với số bội lần lượt là $k_1, \ldots, k_r$. Theo Hệ quả 1.2.4 ta có

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_r)^{k_r} g(x),$$

trong đó $g(x) \in K[x]$. Do K là trường nên ta có

$$\deg f(x) = \deg g(x) + \sum_{i=1}^{r} k_i \geq \sum_{i=1}^{r} k_i.$$

□

1.3 Định lí cơ bản của Đại số và Công thức Viete

Trước hết ta nhắc lại Định lí cơ bản của đại số

Định lý 1.3.1. (Định lí cơ bản của đại số). *Cho* $f(x) \in \mathbb{C}$ *là đa thức có bậc* $n > 0$. *Khi đó* $f(x)$ *có đúng n nghiệm trong* $\mathbb{C}$, *mỗi nghiệm được tính với số bội của nó.*

Hệ quả 1.3.2.

(i) *Mỗi đa thức với hệ số phức đều phân tích thành tích các đa thức bậc nhất với hệ số phức.*

(ii) *Mỗi đa thức với hệ số thực phân tích được thành tích của các đa thức bậc nhất hoặc bậc hai với hệ số thực.*

(iii) *Nếu* $f(x)$ *là đa thức với hệ số thực và số phức* $a + bi$ *(với* $a, b \in \mathbb{R}$*) là nghiệm của* $f(x)$ *thì* $a - bi$ *cũng là nghiệm của* $f(x)$.

Tiếp theo chúng ta trình bày công thức Viete. Công thức Viete cho chúng ta mối quan hệ giữa các nghiệm phức của một đa thức với các hệ số của đa thức đó.

Định lý 1.3.3. (Công thức Viete). *Cho*

$$f(x) = a_n x_n + a_{n-a} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x].$$

Gỉa sử $f(x)$ *có n nghiệm* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. *Khi đó*

$$\begin{cases} a_{n-1}a_n^{-1} & = & -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \\ a_{n-2}a_n^{-1} & = & \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n-k}a_n^{-1} & = & (-1)^k \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_1 a_n^{-1} & = & (-1)^{n-1} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_{n-1}} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_{n-1}} \\ a_0 a_n^{-1} & = & (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n. \end{cases}$$

Chứng minh. Theo Định lí cơ bản của đại số, gọi $\alpha_1, ..., \alpha_n$ là n nghiệm của $f(x)$. Ta có

$$f(x) = (x - \alpha_1)...(x - \alpha_n)g(x)$$

trong đó $g(x)$ là một đa thức nào đó của $\mathbb{C}[x]$, với $f(x)$ có bậc n nên $\deg g(x) = 0$. Vì thế $g(x) = b \in \mathbb{C}$. Do đó ta có

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & a_n x_n + a_{n-a} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ & = & b(x - \alpha_1)...(x - \alpha_n). \end{array}.$$

Khai triển đa thức $b(x - \alpha_1)...(x - \alpha_n)$ rồi đồng nhất các hệ số của đa thức này với các hệ số của đa thức $a_n x_n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ta được $b = a_n$ và

$$\begin{cases} a_{n-1} a_n^{-1} & = & -(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n) \\ a_{n-2} a_n^{-1} & = & \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j \\ .... \\ a_{n-k} a_n^{-1} & = & (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_k} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} ... \alpha_{i_k} \\ .... \\ a_1 a_n^{-1} & = & (-1)^{n-1} \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_{n-1}} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} ... \alpha_{i_{n-1}} \\ a_0 a_n^{-1} & = & (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n. \end{cases}$$

Nhân cả hai vế với $a_n^{-1} = 1/a$ ta có kết quả. □

Ví dụ 1.3.4. Nếu $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ là hai nghiệm của $ax^2 + bx + c$ thì

$$\begin{cases} -b/a & = & \alpha_1 + \alpha_2 \\ c/a & = & \alpha_1 \alpha_2. \end{cases}$$

Ví dụ 1.3.5. Nếu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ là hai nghiệm của $ax^3 + bx^2 + cx + d$ thì

$$\begin{cases} -b/a & = & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ c/a & = & \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 \\ -d/a & = & \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3. \end{cases}$$

1.4 Đa thức bất khả quy

Bổ đề 1.4.1. *Đa Đa thức $f(x)$ với hệ số trên một trường K là bất khả quy nếu và chỉ nếu* $\deg f(x) > 0$ *và $f(x)$ không phân tích được thành tích của hai đa thức có bậc bé hơn. Nếu* $\deg f(x) > 0$ *và $f(x)$ không bất khả quy thì ta nói $f(x)$ là khả quy.*

Chú ý rằng các đa thức bậc nhất luôn bất khả quy; Đa thức bậc 2 và bậc 3 là bất khả quy nếu và chỉ nếu nó không có nghiệm trong K. Đa thức $f(x)$ là bất khả quy nếu và chỉ nếu đa thức $f(x+a)$ là bất khả quy với mọi $a \in K$. Nếu $f(x)$ có bậc lớn hơn 3 và có nghiệm trong K thì $f(x)$ khả quy. Phần tử $a \in \mathbb{C}$ được gọi là *đại số* trên K nếu nó là nghiệm của một đa thức khác 0 trong $K[x]$.

Mệnh đề 1.4.2. *Cho $a \in \mathbb{C}$ là phần tử đại số trên K. Khi đó tồn tại duy nhất một đa thức $p(x) \in K[x]$ bất khả quy nhận a làm nghiệm và có hệ số cao nhất bằng* 1. *Hơn nữa, nếu $g(x) \in K[x]$ nhận a làm nghiệm thì $g(x)$ là bội của $p(x)$.*

Chứng minh. Vì a đại số trên K nên a là nghiệm của đa thức 0 với hệ số trong K. Gọi $f(x) \in K[x]$ là đa thức khác 0 có bậc bé nhất nhận a làm nghiệm. Đặt $p(x) = b^{-1}f(x)$, trong đó b là hệ số cao nhất của $f(x)$. Khi đó $p(x) \in K[x]$ là đa thức có bậc bé nhất nhận a làm nghiệm với các hệ số cao nhất bằng 1. Ta chứng minh $p(x)$ bất khả quy. Giả sử $p(x)$ không bất khả quy. Khi đó $p(x)$ phân tích được thành tích của hai đa thức trong $K[x]$ với bậc bé hơn, và do đó một trong hai đa thức này phải nhận a làm nghiệm, điều này mẫu thuẫn với cách chọn $p(x)$. Giả sử $g(x) \in K[x]$ nhận a làm nghiệm. Nếu $p(x)$ không là ước của $g(x)$ thì vì $p(x)$ bất khả quy nên $\gcd(g(x), p(x)) = 1$. Do đó tồn tại $q(x), h(x) \in K[x]$ sao cho $1 = p(x)q(x) + g(x)h(x)$. Thay $x = a$

vào cả hai vế ta được $1 = 0$, điều này là vô lí. Vậy $g(x)$ chia hết cho $p(x)$. Giả sử $q(x) \in K[x]$ cũng là đa thức bất khả quy dạng chuẩn nhận a làm nghiệm. Theo chứng minh trên, $q(x)$ là bội của $p(x)$. Viết $q(x) = p(x)k(x)$ với $k(x) \in K[x]$. Vì $q(x)$ bất khả quy nên $k(x)$ khả nghịch, tức là tồn tại $0 \neq b \in K$ sao cho $k(x) = b$. Do đó $q(x) = bp(x)$. Đồng nhất hệ số cao nhất của hai với với chú ý rằng $q(x)$ với $p(x)$ đều có dạng chuẩn, ta suy ra $b = 1$. Vì thế $p(x) = q(x)$. $\square$

Giả sử $a \in \mathbb{C}$ là một phần tử đại số trên K. Khi đó tồn tại duy nhất một đa thức $p(x) \in K[x]$ bất khả quy nhận a làm nghiệm với các hệ số cao nhất bằng 1. Ta gọi $p(x)$ là *đa thức bất khả quy* của a.

Ví dụ 1.4.3. Đa thức $x^3 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$ là đa thức bất khả quy của phần tử $\sqrt[3]{5} \in \mathbb{R}$; đa thức $x^2 + 3 \in \mathbb{R}[x]$ là đa thức bất khả quy của phần tử $i\sqrt{3} \in \mathbb{C}$.

Cho $f(x), g(x) \in K[x]$. Nếu $f(x)$ là ước của $g(x)$ thì ta viết $f(x)|g(x)$.

Mệnh đề 1.4.4. *Gỉa sử $p(x) \in K[x]$ là đa thức có bậc dương. Nếu $p(x)$ là bất khả quy với $p(x)|a(x)b(x)$ thì $p(x)|a(x)$ hoặc $p(x)|b(x)$ với mọi $a(x), b(x) \in K[x]$.*

Chứng minh. Cho $p(x)|a(x)b(x)$. Giả sử $p(x)$ không là ước của $a(x)$ và cũng không là ước của $b(x)$. Do $p(x)$ bất khả quy nên $\gcd(p(x), a(x)) = 1$ và $\gcd(p(x), a(x)) = 1$. Do đó tồn tại $s(x), r(x) \in K[x]$ sao cho $1 = s(x)p(x) + r(x)a(x)$. Tương tự, tồn tại $e(x), f(x) \in K[x]$ sao cho $1 = e(x)p(x) + f(x)b(x)$. Nhân vế với vế của hai đẳng thức này ta có

$$1 = p(x)g(x) + r(x)f(x)a(x)b(x)$$

với $g(x) \in K[x]$ là một đa thức nào đó. Vì $p(x)|a(x)b(x)$ nên đa thức bên phải của đẳng thức trên là bội của $p(x)$, trong khi đó đa thức bên vế trái là 1 không chia hết cho $p(x)$. Điều này vô lí. $\square$

Định lý 1.4.5. *Mỗi đa thức bậc dương trong $K[x]$ đều có thể phân tích được thành tích của các đa thức bất khả quy và sự phân tích này là duy nhất nếu không kể đến thứ tự các nhân tử và các nhân tử là ước của đơn vị.*

Chứng minh. Trước hết, chúng ta chứng minh sự tồn tại phân tích bằng quy nạp theo bậc của đa thức. Giả sử $f(x) \in K[x]$ là đa thức bậc $d > 0$. Nếu $d = 1$ thì $f(x)$ là bất khả quy nên sự phân tích bất khả quy của $f(x)$ là $f(x) = f(x)$, kết quả đúng cho trường hợp $d = 1$. Cho $d > 1$ với giả sử kết quả đã đúng cho các đa thức có bậc nhỏ hơn d. Nếu $f(x)$ bất khả quy thì $f(x)$ có sự phân tích bất khả quy là $f(x) = f(x)$. Vì thế ta giả sử $f(x)$ không bất khả quy. Khi đó $f(x) = g(x)h(x)$ với $\deg g(x), \deg h(x) < \deg f(x)$. Theo giả thiết quy nạp, $g(x)$ và $h(x)$ phân tích được thành tích của hữu hạn đa thức bất khả quy.

Bây giờ ta chứng minh tính duy nhất của phân tích. Giả sử $f(x)$ có hai phân tích thành nhân tử bất khả quy

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)...p_n(x) = q_1(x)q_2(x)...q_m(x).$$

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n rằng $n = m$ và có một phép hoán vị δ của $\{1, 2, ..., n\}$ ta có $p_i(x) = a_i q_{\delta(i)}(x)$, trong đó $a_i \in K$ với mọi $i = 1, ..., n$. Cho $n = 1$. Khi đó ta có $p_1(x) = q_1(x)q_2(x)...q_m(x)$. Suy ra $p_1(x)|q_1(x)q_2(x)...q_m(x)$. Do $p_1(x)$ là bất bất khả quy nên $p_1(x)$ là ước của một nhân tử $q_i(x)$ nào đó, không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $p_1(x)|q_1(x)$. Biểu diễn $q_1(x) = p_1(x)t_1(x)$. Vì $q_1(x)$ bất khả quy nên $t_1(x) = a_1 \in K$. Do đó $q_1(x) = a_1p_1(x)$. Nếu $m > 1$ thì $1 = q2(x)...q_m(x)$, điều này vô lí. Vậy, kết quả đúng cho $n = 1$. Cho $n > 1$. Vì $p_1(x)|q_1(x)q_2(x)...q_m(x)$ và $p_1(x)$ là bất khả quy nên không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $p_1(x)|q_1(x)$. Lại do $q_1(x)$ là bất khả quy và $p_1(x), q_1(x)$ đều có dạng chuẩn tương tự nên lập luận như trên ta có $p_1(x) = a_1q_1(x)$. Giản ước hai vế cho

$p_1(x)$ ta được

$$p_2(x)p_3(x)...p_n(x) = q_2^*(x)q_3(x)...q_m(x),$$

trong đó $q_2^*(x) = a_1^{-1}q_2(x)$ là đa thức bất khả quy. Theo gỉa thiết quy nạp ta có $n - 1 = m - 1$ và bằng việc đánh số lại thứ tự các nhân tử bất khả quy ở vế phải ta suy ra $p_i(x) = a_iq_i(x)$ với mọi $i = 2, ..., n$. $\square$

Chương 2

Một số dạng toán thi học sinh giỏi về đa thức

2.1 Một số bài toán đơn giản

Lời giải của bài toán sau đây chỉ cần dùng đến định nghĩa hai đa thức bằng nhau.

Bài toán 2.1.1. *Cho* $0 \leq m \leq n$ *là các số tự nhiên với* m *chẵn. Với* $0 \leq k \leq n$*, ký hiệu* $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ *là số tổ hợp châpj* k *của* n *phần tử. Chứng minh rằng*

$$\left|C_n^0 C_n^m - C_n^1 C_n^{m-1} + C_n^2 C_n^{m-2} - ... + C_n^m C_n^0\right| = C_n^{m-2}.$$

Chứng minh. Ta có

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1$$

hay

$$(x-1)^n (x+1)^n = (x^2-1)^n.$$

Khai triển nhị thức, ta được:

$$\begin{aligned}
(x-1)^n &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i (-1)^{n-1} x^i, \\
(x+1)^n &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i.
\end{aligned}$$

Từ đó nhân các đa thức trên ta được

$$(x-1)^n(x+1)^n = \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i+j=k}(-1)^{n-1}C_n^iC_n^j\right)x^k.$$

Mặt khác, khai triển $(x^2-1)^n$ ta được

$$(x^2-1)^n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^ix^{2i}.$$

Theo trên hai đẳng thức đó bằng nhau ta đồng nhất các hệ số của x^m, ta được $2i = m$, suy ra $i = \frac{m}{2}$ và $k = m$. Khi đó

$$(-1)^n\sum_{i+j=m}(-1)^iC_n^iC_n^j = (-1)^{n-\frac{m}{2}}C_n^{\frac{m}{2}}$$

suy ra

$$\left|(-1)^n\sum_{i+j=m}(-1)^iC_n^iC_n^j\right| = \left|(-1)^{n-\frac{m}{2}}C_n^{\frac{m}{2}}\right|$$

hay

$$\left|\sum_{i+j=m}(-1)^iC_n^iC_n^j\right| = C_n^{\frac{m}{2}}.$$

Vậy

$$\left|C_n^0C_n^m - C_n^1C_n^{m-1} + C_n^2C_n^{m-2} - ... + C_n^mC_n^0\right| = C_n^{m-2}.$$

□

Lời giải bài toán sau đây có sử dụng định lí chia với dư.

Bài toán 2.1.2. *Tìm phần dư khi* $x^2016 + x^2015 + ... + x + 1$ *chia bởi* $x+1$.

Lời giải. Áp dụng định lý chia với dư, thì phần dư khi chia bởi $x+1$ còn lại là

$$(-1)^{2016} + (-1)^{2015} + ... + (-1) + 1 = 1.$$

Do

$$(-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{nếu k chẵn} \\ -1 & \text{nếu k lẻ} \end{cases}$$

Vậy phần dư là 1.

Bình luận. Trong việc phân tích đa thức, việc nhóm nhiều hạng tử cũng giúp ta định hướng lời giải nhanh chóng. Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{2016} + x^{2015} + ... + x + 1 \\ &= (x^{2016} + x^{2015}) + (x^{2014} + x^{2013}) + ... + (x^2 + x) + 1 \\ &= x^{2015}(x+1) + x^{2013}(x+1) + ... + x(x+1) + 1 \end{aligned}$$

Bài toán 2.1.3. *Gọi r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của đa thức*

$$f(x) = 3x^3 - 14x^2 + x + 62$$

Giả sử α_i với $1 \leq i \leq 3$ là 3 nghiệm của đa thức $g(x)$ có bậc 3 thỏa mãn $\alpha_i = r_i + 1$. Tìm đa thức $g(x)$.

Lời giải. Đặt $g(x) = f(x-1)$, nếu nghiệm của $f(x) = 0$ là các $r_i, 1 \leq i \leq 3$, thì $g(r_i + 1) = f(r_i) = 0$, khi đó $g(x)$ là đa thức cần tìm. Từ giả thiết ta có $\alpha_i = r_i + 1$ nên $r_i = \alpha_i - 1$, do r_i là nghiệm của $f(x)$ nên $f(r_i) = 0$, hay $f(\alpha_i - 1) = 0$. Thay $x = \alpha_i - 1$ vào đa thức $f(x)$ ta được:

$$f(\alpha_i - 1) = 3(\alpha_i - 1)^3 - 14(\alpha_i - 1)^2 + (\alpha_i - 1) + 62.$$

Mà $f(\alpha_i - 1) = g(\alpha_i)$ nên

$$g(\alpha_i) = 3(\alpha_i - 1)^3 - 14(\alpha_i - 1)^2 + (\alpha_i - 1) + 62.$$

Vậy đa thức cần tìm là

$$g(x) = 3(x_i - 1)^3 - 14(x_i - 1)^2 + (x_i - 1) + 62.$$

Nghĩa là

$$g(x) = 3x^3 - 23x^2 + 38x + 44.$$

Lời giải bài toán sau cần đến tính chất nghiệm của đa thức.

Bài toán 2.1.4. (AIME 1995). *Tìm b biết phương trình* $x^4 ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ *với hệ số thực và có 4 nghiệm phức, trong đó 2 trong số 4 nghiệm là* $3 + 4i$ *và* $13 + i$.

Lời giải. Ta có $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, gọi bốn nghiệm của phương trình là x_1, x_2, x_3, x_4 thì không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 = 3 + 4i, x_3 = 13 + i$. Từ Định lí cơ bản của Đại số và Hệ quả 1.3.2 (iii) ta có $x_2 = 3 - 4i, x_4 = 13 - i$. Đặt

$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32,$

$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = b.$

Theo Đinh lí Viete ta có $sigma_1 = -a$, suy ra $a = -32$. Lại có

$$x_1x_2 = (3 + 4i)(3 - 4i) = 25.$$

$$x_1x_3 = (3 + 4i)(13 + i) = 35 + 55i.$$

$$x_1x_4 = (3 + 4i)(13 - i) = 39 - 3i + 52i - 4i^2 = 43 + 49i.$$

$$x_2x_3 = (13 + i)(3 - 4i) = 39 - 52i + 3i - 4i^2 = 43 - 49i.$$

$$x_2x_4 = (3 - 4i)(13 - i) = 39 - 3i - 52i + 4i^2 = 35 - 55i.$$

$$x_3x_4 = (13 + i)(13 - i) = 170.$$

Suy ra $b = 25 + 35 + 55i + 43 + 49i + 43 - 49i + 35 - 55i + 170 = 351.$

Vậy $b = 351$.

Bài toán 2.1.5. *Tìm tất cả các nghiệm của phương trình*

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Lời giải. Các nghiệm nguyên nếu có của phương trình là ước của 6 gồm

$$\{\pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1\}.$$

Thay $x = 1$ vào thấy thỏa mãn phương trình $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ nên phương trình đã cho viết lại là

$$(x-1)(x_2 - x - 6) = 0.$$

Do đó phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1, x = -2, x = 3$.

Bài toán 2.1.6. *Tìm tất cả các nghiệm của phương trình*

$$x^4 - 14x^3 + 64x^2 - 114x + 63 = 0$$

trong khoảng $(0, 14)$.

Lời giải. Các nghiệm nguyên nếu có của phương trình là ước của 63 gồm

$$\{\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 9, \pm 21, \pm 63\}.$$

Thay $x = 1$ vào thấy thỏa mãn phương trình $x^4-14x^3+64x^2-114x+63 = 0$ nên phương trình đã cho viết lại là

$$(x-1)(x^3 - 13x^2 + 51x - 63) = 0.$$

Phương trình $x^3 - 13x^2 + 51x - 63 = 0$ có nghiệm là $x = 3$. Vậy ta viết lại là

$$(x-1)(x-3)(x^2 - 10x + 21) = 0.$$

Do đó phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1, x = 3, x = 7$.

2.2 Sử dụng nghiệm của đa thức

Lời giải bài toán sau đây cần đến tính chất nghiệm của đa thức $x^n - 1$.

Bài toán 2.2.1. *Cho $P_1, ..., P_n$ là các đỉnh của một đa giác đều nội tiếp đường tròn bán kính bằng 1. Gọi P_iP_j là khoảng cách giữa hai điểm P_i, P_j. Chứng minh rằng*

$$P_1P_2 \times P_1P_3 \times ... \times P_1P_n = n.$$

Chứng minh. Đa thức $x^n - 1$ có n nghiệm, đó là căn bậc n của đơn vị.

$$\epsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Ta có

$$\epsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = \epsilon_1^k$$

với mọi $k = 0, 1, ..., n-1$. Rõ ràng $\epsilon_0 = 1$. Vì thế

$$\begin{aligned} x^n - 1 &= (x-1)(x-\epsilon_1)...(x-\epsilon_{n-1}) \\ &= (x-1)(x-\epsilon_1)(x-\epsilon_1^2)...(x-\epsilon_1^{n-1}). \end{aligned}$$

Suy ra

$$f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = (x-\epsilon_1)...(x-\epsilon_{n-1}).$$

Chú ý rằng $\dfrac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1$. Suy ra

$$n = |f(1)| = |(1-\epsilon_1)...(1-\epsilon_{n-1})|.$$

Biểu diễn các số phức trên mặt phẳng, khi đó các nghiệm của $x^n - 1$ biểu diễn các đỉnh của một đa giác đều n cạnh nội tiếp đường tròn bán kính bằng 1. Do đó ta có thể đồng nhất các điểm $1, \epsilon_1, \epsilon_1^2, ..., \epsilon_1^{n-1}$ lần lượt là các đỉnh $P_1, ..., P_n$. Khi đó $P_1P_j = |1 - \epsilon_1^{j-1}|$ với mọi $j = 2, ..., n$. Chú ý rằng môđun của tích các số phức bằng tích môđun của các số phức. Suy ra

$$\begin{aligned} P_1P_2 \times P_1P_3 \times \cdots \times P_1P_n &= |1-\epsilon_1| \times |1-\epsilon_1^2| \times \cdots \times |1-\epsilon_1^{n-1}| \\ &= |(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_1^2)...(1-\epsilon_1^{n-1})| = |f(1)| = n. \end{aligned}$$

□

Bài toán 2.2.2. (USAMO 1975). *Gỉa sử $p(x)$ là đa thức có bậc $n \geq 1$ sao cho $p(k) = k/(k+1)$ với mọi $k = 0, 1, \ldots, n$. Tìm $p(n+1)$.*

Lời giải. Đặt $Q(x) = (x+1)P(x) - x$, khi đó Q là đa thức có bậc là $n+1$. Hơn nữa từ $n+1$ số $0, 1, ..., n$ là các nghiệm của Q nên ta có thể viết

$$Q(x) = cx(x-1)...(x-n).$$

Ta sẽ xác định số c. Vì $Q(x) = (x+1)P(x) - x$ nên ta có

$$Q(-1) = (-1+1)P(-1) - (-1) = 1.$$

Mặt khác vì $Q(x) = cx(x-1)...(x-n)$ nên ta có $c(-1)(-2)...(-1-n) = 1$ hay $c = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Với $x = n+1$,

$$Q(n+1) = c(n+1)n...1 = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(n+1)! = (-1)^{n+1}.$$

Từ $Q(x) = (x+1)P(x) - x$, ta có

$$Q(n+1) = (n+2).P(n+1) - (n+1).$$

Suy ra $(-1)^{n+1} = (n+2).P(n+1) - (n+1)$ hay

$$P(n+1) = \frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}.$$

Bài toán sau đây cần sử dụng Định lí chia với dư.

Bài toán 2.2.3. (Đề thi Olympic Liên Xô). *Một đa thức khi chia cho* $(x-1)$ *dư* 2, *và dư* 1 *khi chia cho* $x-2$. *Tìm phần dư khi chia đa thức cho* $()x-1)(x-2)$.

Lời giải. Gọi đa thức cần tìm là $f(x)$. Theo Định lý chia với dư, $f(1) = 2$ và $f(2) = 1$. Ta tìm $r(x)$ với

$$f(x) = q(x)(x-1)(x-2) + r(x),$$

trong đó $q(x)$ là thương và $r(x)$ là dương trong phép chia.

Ta biết rằng bậc của $r(x)$ nhỏ hơn bậc của $(x-1)(x-2)$ nên $r(x) = ax+b$, thay $x = 1$ ở trên, ta có

$$f(1) = r(1) = a + b.$$

$$f(2) = r(2) = 2a + b.$$

Hay ta có hệ

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$

Giải hệ này được

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

Vậy $r(x) = -x + 3$.

Bài toán 2.2.4. *(Canada 1988). Tìm các số nguyên a sao cho các phương trình* $8891x^2 + ax + 8891 = 0$ *và* $8891^2_x + ax + 1988 = 0$ *có một nghiệm chung.*

Lời giải. Trừ các phương trình cho nhau ta được

$$(8891 - 1988)x^2 - (8891 - 1988) = 0$$

hay là $x = \pm 1$. Thay $x = 1$ vào một trong hai phương trình ta nhận được $(1988 + 8891) + a = 0$, tức là $a = -10879$.

Vậy với $a = -10879$ thì hai phương trình có một nghiệm chung.

Bình luận. Ta không cần kiểm tra $x = -1$ nữa vì không cần thiết (nếu thay $x = -1$ vào phương trình đầu, ta có $a = 10879$,tương tự, thay vào phương trình thứ hai ta cũng có $a = 10879$ thì hai phương trình có nghiệm chung). Vậy $a = \pm 10879$ thì hai phương trình có nghiệm chung.

Lời giải bài toán sau chỉ cần hiểu thế nào là tổng các hệ số của một đa thức.

Bài toán 2.2.5. *(ARML - 1989). Cho $P(x)$ là một đa thức ẩn x và $x^{23} + 23x^{17} - 18x^{16} - 24x^{15} + 108x^{14} = (x^4 - 3x^2 - 2x + 9)P(x)$ với mọi x. Tính tổng các hệ số của $P(x)$.*

Lời giải. Ta biết khi $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ thì tổng các hệ số của $f(x)$ là $f(1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$. Chú ý rằng tổng các hệ số của đa thức đánh giá tại $x = 1$. Từ giả thiết

$$x^{23} + 23x^{17} - 18x^{16} - 24x^{15} + 108x^{14} = (x^4 - 3x^2 - 2x + 9)P(x)$$

hay $h(x) = g(x)P(x)$, trong trường hợp này, ta cần tính $P(1)$. Ta có $h(1) = g(1)P(1)$ hay $P(1) = \dfrac{90}{5} = 18$.

Vậy tổng các hệ số cần tìm của $P(x)$ là $P(1) = 18$.

Bài toán 2.2.6. *(MuAlphaTheta 1991). Giả sử đa thức*

$$f(x) = 3x^3 - 14x^2 + x + 62$$

có ba nghiệm là a, b, c. Xác đinh

$$\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3}.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3} &= \frac{(b+3)(c+3) + (a+3)(c+3) + (a+3)(b+3)}{(a+3)(b+3)(c+3)} \\
&= \frac{(ab+bc+ca) + 6(a+b+c) + 27}{abc + 3(ab+bc+ca) + 9(a+b+c) + 27} \\
&= \frac{\sigma_2 + 6\sigma_1 + 27}{\sigma_3 + 3\sigma_2 + 9\sigma_1 + 27}.
\end{aligned}$$

Mà theo giả thiết a, b, c là nghiệm của đa thức

$$f(x) = 3x^3 - 14x^2 + x + 62$$

nên theo công thức Viete ta có

$$\begin{cases} \sigma_1 &= \quad a+b+c = \dfrac{14}{3} \\ \sigma_2 &= ab+bc+ac = \dfrac{1}{3} \\ \sigma_3 &= \quad abc = \dfrac{-62}{3}. \end{cases}$$

Vậy

$$\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3} = \frac{\frac{1}{3}+28+27}{\frac{-62}{3}+1+52+27} = \frac{166}{178} = \frac{83}{89}.$$

Bài toán 2.2.7. (USAMO 1974). *Cho P là đa thức với hệ số nguyên. Tồn tại hay không các số nguyên a, b, c thỏa mãn $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$.*

Lời giải. Đặt

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \cdots + a_1 x + a_0$$

là đa thức với hệ số nguyên. Giả sử phản chứng rằng $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$. Khi đó

$$\begin{aligned} P(a) - P(b) \quad &= (a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} \cdots + a_1 a + a_0) \\ &\quad -(a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} \cdots + a_1 b + a_0) \\ &= a_n(a^n - b^n) + \cdots + a_1(a - b). \end{aligned}$$

Do đó $P(a) - P(b)$ chia hết cho $a - b$. Tương tự $P(b) - P(c)$ chia hết cho $b - c, P(c) - P(a)$ chia hết cho $c - a$.

Từ giả sử phản chứng $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$ nên $a - b$ là ước của $P(a) - P(b) = b - c$. Tương tự $b - c$ là ước của $c - a, c - a$ là ước của $a - b$. Do vậy ta có $|a - b| = |b - c| = |c - a|$.

Nếu $a-b=b-c$ thì ta có

$$\begin{aligned}0 &= |a-b+b-c+c-a|4\\ &= |2(a-b)+(c-a)|\\ &\geq 2|a-b|-|c-a|\\ &= |a-b|.\end{aligned}$$

Dó đó, $a=b$. Vì $a-b=b-c$ nên suy ra $a=b=c$, điều này là vô lý.

Nếu $a-b=c-b$ thì lập luận tương tự như trên, ta suy ra $a=c$, và do đó $a=b=c$, điều này cũng vô lý.

Vậy không tồn tại các số nguyên a,b,c thỏa mãn $P(a)=b, P(b)=c, P(c)=a$.

Bài toán 2.2.8. *Cho f là đa thức bậc n thỏa mãn $P(k)=\dfrac{k+1}{k+2}$ với $k=0,1,\ldots,n.$. Tìm $P(n+1)$.*

Lời giải. Đặt $Q(x)=(x+2)P(x)-(x+1)$. Vì theo giả thiết $P(k)=\dfrac{k+1}{k+2}$. Xét $P(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ hay $(x+2)P(x)=x+1$.

Q là đa thức có bậc là $n+1$. Hơn nữa từ $n+1$ số $0,1,\ldots,n$ là các nghiệm của Q. Khi đó

$$Q(x)=cx(x-1)\ldots(x-n).$$

Ta có

$$Q(-2)=(-2+2)P(-2)-(-2+1)=1.$$

Mặt khác

$$Q(-2) = c(-2)(-3)\dots(-2-n) = (-1)c(-1)(-2)\dots(-n-2)$$
$$= c(-1)^{n+3}(n+2)!.$$

Suy ra $c(-1)^{n+3}(n+2)! = 1$, kéo theo $c = \dfrac{(-1)^{n+3}}{(n+2)!}$. Cho $x = n+1$ ta có

$$Q(n+1) = c(n+1)n(n-1)\dots 1 = c(n+1)!,$$

mà $Q(n+1) = (n+3)P(n+1) - (n+2)$. Khi đó

$$\frac{(-1)^{n+3}}{(n+2)!}(n+1)! = (n+3)P(n+1) - (n+2),$$

điều đó tương đương với

$$(n+3)P(n+1) = (n+2) + \frac{(-1)^{n+3}}{n+2},$$

suy ra

$$P(n+1) = \frac{(n+2)^2 + (-1)^{n+3}}{(n+2)(n=3)}.$$

Lời giải các bài toán sau đây tương tự Bài toán 2.2.4

Bài toán 2.2.9. *Cho số nguyên m. Tìm m để hai phương trình sau*

$$2015x^2 + mx + 5102 = 0 \ \text{ và } \ 5102x^2 + mx + 2015 = 0$$

có nghiệm chung.

Bài toán 2.2.10. *Cho p và q là hai số nguyên tố khác nhau, a là số nguyên dương. Tìm a để hai phương trình sau có nghiệm chung* $px^2 + ax + q = 0$ *và* $qx^2 + ax + p = 0$.

2.3 Sử dụng đa thức bất khả quy

Bài toán 2.3.1. *Cho* $a \in \mathbb{C}$ *là nghiệm của một đa thức khác 0 trong Q và* $g(x)$ *là đa thức với hệ số hữu tỷ sao cho* $g(a) \neq 0$. *Chứng minh rằng tồn tại*

$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *sao cho* $\dfrac{1}{g(a)} = f(a)$.

Chứng minh. Gọi $0 \neq p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ là đa thức bất khả quy của a. Chia $g(x)$ cho $p(x)$ ta được $g(x) = p(x)q(x) + r(x)$, trong đó với $q(x), r(x) \in Q[x]$ và $r(x) = 0$ hoặc $\deg r(x) < \deg p(x)$. Vì $g(a) \neq 0$ và $p(a) = 0$ nên ta có $r(x) \neq 0$ và ta có $g(a) = r(a)$. Do $p(x)$ bất khả quy và $\deg r(x) < \deg p(x)$ nên $\gcd(p(x), r(x)) = 1$. Do đó có các đa thức $f(x), t(x) \in Q[x]$ sao cho $1 = r(x)f(x) + p(x)t(x)$. Do a là nghiệm của $p(x)$ nên $1 = r(a)f(a)$. Vì thế $1 = g(a)f(a)$ hay $\dfrac{1}{g(a)} = f(a)$. □

Bài toán 2.3.2. *Trục căn thức ở mẫu của phân số sau*

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}.$$

Lời giải. Đặt $g(x) = 1 + x + 2x^2$. Khi đó mẫu số của phân số là $g(\sqrt[3]{2})$. Đa thức bất khả quy của phần tử $\sqrt[3]{2}$ là $p(x) = x^3 - 2$. Vì $\deg g(x) < \deg p(x)$ nên $\gcd(p(x), g(x)) = 1$. Thực hiện phép chia liên tiếp

$$\begin{aligned} 4p(x) &= g(x)(2x-1) - x - 7 \\ g(x) &= (-x-7)(-2x+13) + 92 \\ -x-7 &= 92\left(-\frac{x}{92} - \frac{7}{92}\right) + 0. \end{aligned}$$

Suy ra $92 = g(x) + (-x-7)(2x-13)$. Do đó

$$92 = g(x) + \left(4p(x) - g(x)(2x-1)\right)(2x-13).$$

Vì thế $92 = 4(2x-13)p(x) + 4(-x^2+7x-3)g(x)$. Vậy,

$$23 = (2x-13)p(x) + (-x^2+7x-3)g(x).$$

Suy ra $23 = (-\sqrt[3]{4} + 7\sqrt[3]{2} - 3)(1 + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4})$. Do đó

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}} = \frac{-\sqrt[3]{4}+7\sqrt[3]{2}-3}{23}.$$

Bài toán 2.3.3. *Cho $a_1, \dots, a_n$ là các số nguyên phân biệt. Chứng minh rằng đa thức $f(x) = (x - a_1)\dots(x - a_n) + 1$ là bất khả quy trên $\mathbb{Z}$ (tức là $f(x)$ không là tích của hai đa thức có hệ số nguyên và có bậc bé hơn).*

Chứng minh. Giả sử ngược lại, khi đó $f(x) = g(x)h(x)$ với $g(x), h(x)$ là hai đa thức có hệ số nguyên và có bậc bé hơn n. Vì $f(a_i) = 1$ với mọi $i = 1, \dots, n$ nên ta có $g(a_i)h(a_i) = 1$ với mọi $i = 1, \dots, n$ Do $g(a_i)$ và $h(a_i)$ là các số nguyên nên ta có $g(a_i) = \pm 1$ và $h(a_i) = \pm 1$ với mọi $i = 1, \dots, n$. Vì n lẻ và $g(a_1), \dots, g(a_n) \in \{1, -1\}$, ắt phải có $(n + 1)/2$ chỉ số i sao cho $g(a_i) = 1$ (hoặc $g(a_i) = -1$). Không mất tính tổng quát ta giả thiết $g(a_i) = 1$ với ít nhất $(n + 1)/2$ chỉ số i. Vì các ai là phân biệt nên đa thức $g(x) - 1$ có ít nhất $(n + 1)/2$ nghiệm. Suy ra $\deg g(x) \geq (n + 1)/2$. Tương tự ta suy ra $\deg h(x) \geq (n + 1)/2$. Suy ra

$$n = \deg f(x) = \deg g(x) + \deg h(x) \geq (n + 1)/2 + (n + 1)/2 = n + 1,$$

điều này vô lí. □

Tiêu chuẩn Eisenstein. *Cho*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \cdots + a_1 x + a_0$$

là đa thức bậc n dương với hệ số nguyên. Nếu có một số nguyên tố p sao cho p không là ước của a_n và p là ước của a_i với $i < n$, đồng thời p^2 không là ước của a_0 thì $f(x)$ là đa thức bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ (tức là $f(x)$ không là tích của hai đa thức có hệ số nguyên và có bậc bé hơn n).

Lời giải bài toán sau đây cần sử dụng tiêu chuẩn Eisenstein.

Bài toán 2.3.4. *Cho p nguyên tố. Chứng minh rằng*

$$f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$$

là bất khae quy trên $\mathbb{Q}$

Chứng minh. Đặt $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ có

$$f(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1},$$

nên

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \frac{(x+1)^p - 1}{x} \\ &= x^{p-1} + C_p^1 x^{p-2} + \cdots + C_p^{p-2} x + C_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Với $1 \leq k \leq p-1$, ta có

$$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} \vdots p \quad \text{với } C_p^k = a_i.$$

Do p nguyên tố,

$$C_p^{p-1} == \frac{p!}{1!(p-1)!} = p \not\vdots\, p^2, a_n = 1 \not\vdots\, p \quad \text{với } C_p^k = C_p^{p-k}.$$

Theo tiêu chuẩn Eisenstein thì $f(x+1)$ là bất khả quy nên $f(x)$ bất khả quy.

Bài toán sau đây có cách giải tương tự bài toán trên. □

Bài toán 2.3.5. (IMO 1993). *Cho số nguyên $n > 1$. Chứng minh rằng $x^n + 5x^{n-1} + 3$ là bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.*

2.4 Sử dụng công thức Viete

Lời giải bài toán sau đây cần đến công thức Viete.

Bài toán 2.4.1. *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là hai dãy số sao cho $a_i \neq a_j; b_i \neq b_j$ với mọi $i \neq j$ và $a_i + b_j \neq 0$ với mọi i, j. Cho n^2 số c_{jk} với $j, k = 1, 2, \ldots n$ sao cho với i và k ta có*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{c_{jk}}{a + i + b_j} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i,k=1}^{n} c_{jk} = a_1 + \cdots + a_n + b_1 + \cdots + b_n.$$

Chứng minh. Xét các đa thức

$$\begin{aligned} f(x) =& (x+b1)(x+b2)(x+bn) \\ & - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk}(x+b_1)...(x+b_{j-1})(x+b_{j+1})...(x+b_n). \end{aligned}$$

(như vậy trong kết quả cuối có chứa tất cả $(x+b_l)$ trừ khi $l=j$). Khi đó, f là đa thức bậc n, hệ số của x^{n-1} là

$$\sum_{l=1}^{n} b_l - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk}.$$

Khi đó a_i là a của đa thức này với mỗi i, các số này đều khác nhau, chúng đều là hệ số nguyên của f. Vậy theo Định lí Viete hệ số của x^{n-1} là $-\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Để chứng minh điều ta giả sử chọn a bởi a_i, nhân cả hai vế với $(a_i + b_1)(a_i+b_2)\ldots(a_i+b_n)$, ta được

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} c_{jk}(a_i+b_1)\ldots(a_i+b_{j-1})(a_i+b_{j+1})\ldots(a_i+b_n) \\ & = \begin{cases} (a_i+b_1)(a_i+b_2)\ldots(a_i+b_n) & \text{nếu} \quad i=k, \\ 0 & \text{nếu} \quad i \neq k. \end{cases} \end{aligned}$$

Ta thay tất cả các giá trị có thể của k, khi đó $i=k$ đúng ta nhận được:

$$\begin{aligned} & \sum_{j}\sum_{k} c_{jk}(a_i+b_1)\ldots(a_i+b_{j-1})(a_i+b_{j+1})\ldots(a_i+b_n) \\ & = (a_i+b_1)(a_i+b_2)\ldots(a_i+b_n) \end{aligned}$$

trong đó $f(a_i) = 0$. □

Bài toán 2.4.2. *Tìm tất cả các cặp số (x, y, z) thỏa mãn:*

$$\begin{cases} x + y + z = 17 \\ xy + xz + yz = 94 \\ xyz = 168 \end{cases}$$

Lời giải. Theo giả thiết $\sigma_1 = 17, \sigma_2 = 94, \sigma_3 = 168$. Khi đó x, y, z là các nghiệm của phương trình:

$$f(a) = a^3 - 17a^2 + 94a - 168 = 0.$$

Nhận thấy 7 là ước của 168, ta chọn $a = 7$ là một kết quả và

$$\frac{f(a)}{a-7} = a^2 - 10a + 24$$

hay

$$f(a) = (a-7)(a-4)(a-6)$$

do đó tất cả các bộ số (x, y, z) thỏa mãn bài toán là 6 hoán vị của $(4, 6, 7)$.

Lời giải bài toán sau đây cần đến khai triển Newton.

Bài toán 2.4.3. AIME 2001. *Tìm tổng đối xứng của tất cả các nghiệm thực và phức (không thực) của phương trình*

$$x^{2001} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^{2001} = 0.$$

Lời giải. Trước hết ta nhắc lại khai triển nhị thức Newton

$$\begin{aligned}(a-b)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}(-1)^k b^k \\ &= C_0^n a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a(-1)^{n-1} b^{n-1} + C_n^n (-1)^n b^n.\end{aligned}$$

Ở đây ta luôn kí hiệu $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ với $k, n \in \mathbb{N}$ và $k \leq n$.

Ta có

$$\begin{aligned}
x^{2001} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^{2001} &= x^{2001} + \sum_{k=0}^{2001} C_{2001}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2001-k} (-x)^k \\
&= x^{2001} + C_{2001}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{2001} + C_{2001}^{1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2000} (-x) \\
&\quad + \cdots + C_{2001}^{1999} \left(\frac{1}{2}\right)^{2} (-x)^{1999} \\
&\quad + C_{2001}^{2000} \left(\frac{1}{2}\right) (-x)^{2000} + C_{2001}^{2001} (-x)^{2001} \\
&= C_{2001}^{2000} \left(\frac{1}{2}\right) x^{2000} - C_{2001}^{1999} \left(\frac{1}{2}\right)^{2} x^{1999} + C_{2001}^{1998} \left(\frac{1}{2}\right)^{3} x^{1998} \\
&\quad - \cdots - C_{2001}^{1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2000} x + C_{2001}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{2001}.
\end{aligned}$$

Khi đó, đa thức này có bậc là 2000. Như vậy ta có tổng đối xứng cần tìm là $\dfrac{-a_{1999}}{a_{2000}}$, trong đó a_i là hệ số của x_i. Khi đó

$$\sigma_{2000} = \frac{-a_{1999}}{a_{2000}} = -\frac{-C_{2001}^{2}(\frac{1}{2}^{2})}{C_{2001}^{1}(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{2001.2000}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2001} = 500,$$

do $C_n^k = C_n^{n-k}$. Vậy $\sigma_{2000} = 500$.

Bài toán 2.4.4. (USA 1984). *Biết rằng tích của hai trong bốn nghiệm khác không của phương trình bậc 4*

$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$$

là -32. Tìm k.

Lời giải. Gọi bốn nghiệm của bài toán đã cho là r, s, t, u, không mất tính tổng quát ta giả sử $rs = -32$. Từ công thức Viete cho ta

$$\begin{cases} r + s + u + t = 18 \\ rs + rt + ru + st + su + tu = k \\ rst + rsu + rtu + stu = -200 \\ rstu = -1984 \end{cases} \tag{2.1}$$

Do $rs = -32$, từ $rstu = -1984$ suy ra $tu = 62$. Thay vào phương trình thứ 3 ta được $rs(t+u)+tu(r+s) = -200$ hay là $-32(t+u)+62(r+s) = -200$. Đặt

$$\begin{cases} u + t = a \\ r + s = b \end{cases}$$

khi đó ta được $-32a + 62b = -200$. Từ $r + s + u + t = 18$ ta có $a + b = 18$ nên

$$\begin{cases} a + b = 18 \\ 16a - 31b = 100 \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{cases} a = 14 \\ b = 4 \end{cases}$$

Từ phương trình $rs + rt + ru + st + su + tu = k$ ta có

$$k = rs + (r + s)(t + u) + tu = -32 + 14.4 + 62$$

hay $k = 86$.

Bài toán 2.4.5. (Canada 2001). *Cho $P(x)$ là một đa thức bậc hai với hệ số nguyên sao cho*

(a) *Cả hai nghiệm của nó là các số nguyên dương.*

(b) *Tổng các hệ số của nó là số nguyên tố.*

(c) *Tồn tại số nguyên k thỏa mãn $P(k) = -55$.*

Chứng minh rằng một trong các nghiệm của nó là 2. Tìm các nghiệm còn lại.

Chứng minh. Đặt $P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$, trong đó r_1, r_2 là hai nghiệm và a, b, c nguyên. Theo giả thiết $a + b + c = p$ (với p nguyên tố), không mất tính tổng quát giả sử $r_1 \leq r_2$, từ $P(1) = a + b + c = p$ và

$P(1) = a(1 - r_1)(1 - r_2)$.

Vì $a \in \mathbb{Z}$ nên $a \in \{1; -1; p; -p\}$ (do p nguyên tố).

Nếu $a = p$ thì $(1 - r_1)(1 - r_2) = 1$ nên hệ

$$\begin{cases} r_1 = r_2 = 0 \\ r_1 = r_2 = 2 \end{cases}$$

không xảy ra vì điều kiện (c) có $P(k) = -55$.

Nếu $a = -p$ thì $(1 - r_1)(1 - r_2) = -1$ nên $r_1 = 0$ và $r_2 = 2$ (mâu thuẫn).

Bây giờ, vì $P(k) = a(k - r_1)(k - r_2) = -5.11$, ta có hai khả năng

$$\begin{cases} a = 1 \\ k - r_1 = 55 \\ k - r_2 = 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

hoặc

$$\begin{cases} a = 1 \\ k - r_1 = 11 \\ k - r_2 = 5 \end{cases} \tag{2.3}$$

Xét hệ 2.2 có $r_2 = r_1 + 54$ mà $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} = -b$ suy ra $b = -2r_1 - 54, r_1 r_2 = \dfrac{c}{a} = c$ ta được $c = r_1(r_1 + 54)$.

Vì $a + b + c = p$ nên $1 + (-2r_1 - 54) + r_1^2 + 54r_1 = p$ hay $r_1^2 + 52r_1 - (53 + p) = 0$ nên

$$\begin{aligned} r_1 = \frac{-52 \pm \sqrt{52^2 + 4(53 + p)}}{2} &= -26 \pm \sqrt{26^2 + 53 + p} \\ &= -26 \pm \sqrt{27^2 + p} \end{aligned}$$

Đặt $h^2 = 27^2 + p$ khi đó $p = (h + 27)(h - 27)$, do p nguyên tố nên $h - 27 = 1$ suy ra $h = 28$ ta được $p = 55$ không là số nguyên tố nên không thoả mãn (Trường hợp $h + 27 = 1$ thì $h = -26$ cũng không thỏa mãn). Xét hệ 2.3, từ hệ 2.3 ta có

$$\begin{cases} r_2 = r_1 + 6 \\ b = -2r_1 - 6 \\ c = r_1(r_1 + 6) \end{cases}$$

mà $p = a+b+c, a = 1$ nên $p = 10(2r_1+6)+r_1^2+6r_1$ hay $r_1^2+4r_1-(5+p) = 0$ phương trình này cho ta $r = -2 \pm \sqrt{3^2+p}$.

Đặt $i^2 = 3^2 + p$ hay $p = (i+3)(i-3)$, do p nguyên tố nên $i - 3 = 1$ hay $i = 4$ khi đó $p = 7$ (nguyên tố). Vậy $r_1 = 2, r_2 = 8$. Tóm lại đa thức $P(x)$ thoả mãn cả ba diều kiện trên là $P(x) = (x-2)(x-8)$ với hai nghiệm $x = 2, x = 8$. $\square$

Bài toán sau đây cần sử dụng đến Định lí Viete.

Bài toán 2.4.6. (Canada 1996). *Gọi α, b, c là ba nghiệm của phương trình $x^3 - x - 1 = 0$. Tìm* $A = \dfrac{1-a}{1+a} + \dfrac{1-b}{1+b} + \dfrac{1-c}{1+c}$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{(1-a)(1+b)(1+c) + (1-b)(1+a)(1+c) + (1-c)(1+a)(1+b)}{(1+a)(1+b)(1+c)} \\ &= \frac{3 + (a+b+c) - (bc+ab+ac) - 3abc}{1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc} \\ &= \frac{3 + \sigma_1 - \sigma_2 - 3\sigma_3}{1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} \end{aligned}$$

Vì a, b, c là nghiệm của phương trình $x^3 - x - 1 = 0$ nên ta có

$$\sigma_1 = a + b + c = 0,$$

$$\sigma_2 = ab + bc + ca = -1,$$

$$\sigma_3 = abc = -1$$

từ đó

$$A = \frac{3+0+1+0}{1+0-1-1} = -7.$$

Bài toán 2.4.7. (USSR Olympiad Problems Book). *Chứng minh rằng nếu α, β là hai nghiệm của phương trình*

$$x^2 + px + 1 = 0 \tag{2.4}$$

và γ, δ là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 + qx + 1 = 0 \tag{2.5}$$

thì

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) = q^2 - p^2.$$

Chứng minh. Vì α, β là hai nghiệm của phương trình 2.4, theo Viete ta có

$$\alpha + \beta = -p,\ \alpha\beta = 1.$$

Tương tự γ, δ là hai nghiệm của phương trình 2.5 nên ta có $\gamma + \delta = -q$, $\gamma\delta = 1$ và

$$\gamma^2 + \gamma q + 1 = 0 \Rightarrow \gamma^2 + 1 = -\gamma q$$
$$\delta^2 + \delta q + 1 = 0 \Rightarrow \delta^2 + 1 = -\delta q.$$

Biến đổi với chú ý rằng $\gamma\delta = 1$, ta có

$$\begin{aligned}
&(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta)\\
&= [\alpha\beta - (\alpha + \beta)\gamma + \gamma^2][\alpha\beta - (\alpha + \beta)\delta + \delta^2]\\
&= (1 + p\gamma + \gamma^2)(1 - p\delta + \delta^2)\\
&= (p\gamma - q\gamma)(-p\delta - \delta q)\\
&= \gamma\delta(q^2 - p^2)\\
&= q^2 - p^2.
\end{aligned}$$

□

Bằng cách đặt $-z = t$, lời giải bài toán sau tương tự lời giải của Bài toán 2.4.2

Bài toán 2.4.8. *Tìm các bộ số* (x, y, z) *thỏa mãn*

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ zx - xy + yz = 27 \\ xyz = 54. \end{cases}$$

2.5 Đồng nhất thức Newton

Trước hết chúng tôi nhắc lại công thức của đồng nhất thức Newton. Đặt $S_n = r_1^n + r_2^n + \cdots + r_n^n$, với r_i là các nghiệm của đa thức $P(x)$. Ta có

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n)$$

và hệ số a_i tương ứng với x_i (với $1 \leq i \leq n$). Khi đó đồng nhất thức Newton hay tổng của Newton cho

$$\begin{aligned} a_nS_1 + a_{n-1} = 0 \\ a_nS_2 + a_{n-1}S_1 + 2a_{n-2} = 0 \\ a_nS_3 + a_{n-1}S_2 + a_{n-2}S_1 + 3a_{n-3} = 0. \end{aligned}$$

Tổng quát ta có

$$a_nS_d + a_{n-1}S_{d-1} + a_{n-2}S_{d-2} + \cdots + a_{n-d+1}S_1 + da_{n-d} = 0.$$

Có nhiều cách chứng minh Đồng nhất thức Newton trong đó có cách dùng phương pháp quy nạp toán học. Ở đây, tác giả không chứng minh mà chỉ áp dụng vào giải toán.

Lời giải các bài toán sau cần đến công thức của Đồng nhất thức Newton.

Bài toán 2.5.1. *Gọi a, b, c là các nghiệm của phương trình*

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0.$$

Tìm $a^2 + b^2 + c^2$.

Lời giải. Ta có $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$$

Định lí Viêt cho ta

$$\begin{cases} a + b + c = -2, \\ ab + bc + ca = 3 \end{cases}$$

nên $a^2 + b^2 + c^2 = -2$.

Bài toán 2.5.2. *Gọi a, b, c là ba nghiệm của phương trình $7x^3 - 21x^2 + 9x + 2 = 0$. Tính $a^4 + b^4 + c^4$.*

Lời giải. Ta cần tìm $S_4 := a^4 + b^4 + c^4$. Áp dung đồng nhất thức Newton:

$$\begin{aligned}
&7S_1 - 21 = 0 \quad \text{ta có} \quad S_1 = 3. \\
&7S_2 - 21S_1 + 2.9 = 0 \quad \text{ta có} \quad S_2 = \frac{45}{7}. \\
&7S_3 - 21S_2 + 9S_1 + 3.2 = 0 \quad \text{ta có} \quad S_3 = \frac{102}{7}. \\
&7S_4 - 21S_3 + 9S_2 + 2S_1 + 4.0 = 0 \quad \text{ta có} \quad S_4 = \frac{1695}{49}.
\end{aligned}$$

Bài toán 2.5.3. (AIME 2003). *Gọi các nghiệm của phương trình $x^4 - x^3 - x^2 - 1 = 0$ là a, b, c, d. Tìm $p(a) + p(b) + p(c) + p(d)$ trong đó $p(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x$.*

Lời giải. Đặt $z = p(a) + p(b) + p(c) + p(d)$, ta có

$$\begin{aligned} z &= (a^6 - a^5 - a^3 - a^2 - a) + (b^6 - b^5 - b^3 - b^2 - b) \\ &\quad + (c^6 - c^5 - c^3 - c^2 - c) + (d^6 - d^5 - d^3 - d^2 - d) \\ &= (a^6 + b^6 + c^6 + d^6) - (a^5 + b^5 + c^5 + d^5) - (a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \\ &\quad - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d) \\ &= S_6 - S_5 - S_3 - S_2 - S_1. \end{aligned}$$

Áp dụng đồng nhất thức Newton với $d = 6$ với các nghiệm của $x^4 - x^3 - x^2 - 1$, ta được

$$a_4S_6 + a_3S_5 + a_2S_4 + a_1S_3 + a_0S_2 + a_{-1}S_1 + 6a_{-2} = 0.$$

Suy ra

$$S_6 - S_5 - S_4 + 0.S_3 - S_2 + 0.S_1 + 6.0 = 0.$$

Hay

$$S_6 - S_5 - S_4 - S_2 = 0.$$

Cộng $S_4 - S_3 - S_1$ cho cả hai vế của

$$S_6 - S_5 - S_4 - S_2 = 0,$$

ta được

$$S_6 - S_5 - S_4 - S_2 + (S_4 - S_3 - S_1) = S_4 - S_3 - S_1.$$

Đẳng thức trên tương đương với

$$S_6 - S_5 - S_3 - S_2 - S_1 = S_4 - S_3 - S_1.$$

Lần nữa ta có $a_nS_1 + a_{n-1} = 0$. Suy ra $1.S_1 - 1 = 0$. Vò thế $S_1 = 1$ và

$$a_nS_2 + a_{n-1}S_1 + 2a_{n-2} = 0,$$

ở đây ta có

$$1.S_2 + (-1).1 + 2.(-1) = 0.$$

Do đó $S_2 = 3$. Tương tự ta có

$$a_n S_3 + a_{n-1} S_2 + a_{n-2} S_1 + 3a_{n-3} = 0.$$

Suy ra $1.S_3 - S_2 - S_1 + 3.0 = 0$ hay $S_3 - 3 - 1 - 0 = 0$ nên $S_3 = 4$. Ta có

$$a_n S_4 + a_{n-1} S_3 + a_{n-2} S_2 + a_{n-3} S_1 + 4a_{n-4} = 0.$$

Suy ra $S_4 - S_3 - S_2 + 0.S_1 + 4.(-1) = 0$ hay $S_4 - 4 - 3 - 4 = 0$ nên $S_4 = 11$. Vậy $z - S_4 - S_3 - S_1 = 11 - 4 - 1 = 6$.

Bài toán 2.5.4. (APMO 2003). *Giả sử đa thức với hệ số thực*

$$P(x) = x^8 - 4x^7 + 7x^6 + a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

có các nghiệm đều là số thực dương. Tìm tất cả các giá trị có thể có của a_0.

Lời giải. Đây là đa thức bậc 8, gọi 8 nghiệm thực dương của $P(x)$ là $r_1, r_2, \ldots, r_8$. Áp dụng công thức Viet, ta có $r_1 + r_2 + \cdots + r_8 = 4 = \sigma_1$ và $\sigma_2 = 7$ (chú ý là $\sigma_2 = r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + \cdots + r_7r_8 = 7$). Các giá trị của σ_2 không đặc biệt hữu ích trong việc tìm a_0, vì vậy, chúng ta có thể sử dụng đồng nhất thức Newton

$$a_8 S_2 + a_7 S_1 + 2a - 6 = 0,$$

hay $1.S_2 + (-4).4 + 2.7 = 0$, trong đó

$$S_2 = r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_8^2 = 2,$$

$$S_1 = r_1 + r_2 + \cdots + r_8$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ và $y_1, y_2, \dots, y_n$, ta có

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \le (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n} \quad \text{với mọi } y_j \neq 0, j = \overline{1, n}.$$

Ở đây coi

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_8 = 1, \quad y_i = r_i,\, i = \overline{1, 8}.$$

Có

$$(r_1 + r_2 + \cdots + r_8)^2 \le 8(r_1^2 + r_2 +^2 \cdots + r_8^2).$$

Chú ý rằng, dấu bằng xảy ra khi

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_8 = \frac{1}{2}.$$

Khi đó $a_0 = r_1r_2 \dots r_8 = \dfrac{1}{256}$.

Bài toán 2.5.5. *Tìm tất cả các số thực hoặc phức thỏa mãn hệ phương trình*

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + x^2 = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta giả sử x, y, z là các nghiệm của đa thức với hệ số của số hạng cao nhất bằng 1. Định lí Viete cho ta $x+y+z = 3$, ta có $a_2 = -3$. Khi đó đa thức có dạng $f(r) = r^3 - 3r^2 + a_1r + a_0$, bằng tổng của Newton ta có

$$a_3S_2 + a_2S_1 + 2a_1 = 0$$

ở đây $a_3 = 1, a_2 = -3, S_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 3, S_1 = x + y + z = 3$ nên $1.3 + (-3).3 + 2.a_1 = 0$, suy ra $a_1 = 3$.

Mặt khác, $a_3S_3 + a_2S_3 + a_1S_1 + 3a_0 = 0, S_3 = x^3 + y^3 + z^3 = 3$ hay $1.3 + (-3).3 + 3.3 + 3.a_0 = 0$ suy ra $a_0 = -1$ nên $f(r) = r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = (r-1)^3$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = z = 1$.

Kết luận và Đề nghị

Chuyên đề trình bày lời giải một số dạng toán về đa thức dành cho học sinh giỏi bậc trung học phổ thông. Chuyên đề được viết chủ yếu dựa theo cuốn sách Polynomials của G. D. Carroll (2011) và cuốn sách Polynomials của V. V. Prasolov (2004). Chuyên đề cũng tham khảo một số kiến thức cơ sở trong Giáo trình Lý thuyết đa thức của Lê Thị Thanh Nhàn (2015) và cuốn sách Ideals, Varieties and Algorithms của D. Cox, Little J., D. O'Shea (2006).

Trong chuyên đề này, chúng tôi đã thực hiện được các nội dung sau.

- Nhắc lại kiến thức cơ sở về đa thức phục vụ cho lời giải các bài toán ở Chương 2.

- Trình bày lời một số dạng toán về đa thức dành cho học sinh giỏi bậc trung học phổ thông (bao gồm nhiều bài toán khó và bài toán đã được thi hoặc đề cử thi học sinh giỏi toán quốc tế). Các bài toán được chia theo 5 chủ đề mà lời giải tương ứng với các kiến thức về phép chia với dư và ước chung lớn nhất; nghiệm của đa thức; Công thức Viete; đa thức bất khả quy; Đồng nhất thức Newton.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Lê Thị Thanh Nhàn (2015), Lý thuyết đa thức (Giáo trình Sau đại học), NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

Tiếng Anh

[2] Carroll G. D. (2011), Polynomials, Lecture Notes, http://ebookbrowsee.net/gabriel-carroll-pdf-d200255276.

[3] Cox D., Little J., O'Shea D. (2006), Ideals, Varieties and Algorithms, Springer.

[4] Prasolov V. V. (2004), Polynomials, Springer (second edition).