HỘI THẢO CÁC TRƯỜNG CHUYÊN KHU VỰC
DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ

---------🕮----------

CHUYÊN ĐỀ

VẬN DỤNG BỔ ĐỀ VỀ MŨ ĐÚNG TRONG CÁC BÀI TOÁN SỐ HỌC

Hà Nam, tháng 8 năm 2021

A. PHẦN MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Số học có thể nói là một lĩnh vực xuất hiện sớm nhất trong lịch sử toán học. Khi những con số được con người sử dụng thì cũng là lúc Số học ra đời. Ngạn ngữ Pháp có câu: "Toán học là vua của các khoa học nhưng Số học là Nữ hoàng". Điều đó đã cho thấy tầm quan trọng của Số học trong đời sống và khoa học. Trải qua một quá trình phát triển lâu dài nhưng Số học vẫn giữ được vẻ đẹp sơ khai của nó. Vẻ đẹp ấy được thể hiện qua cách phát biểu đơn giản của một bài toán. Chính vì cách phát biểu đơn giản nhưng cần những suy luận sâu sắc và tinh tế nên những bài toán Số học trong các kì thi học sinh giỏi thường là những thách thức thực sự và thường được dùng để phân loại học sinh.

Đối với phân môn Số học trong trương trình toán THPT chuyên thì các kiến thức về Bổ đề nâng lũy thừa là một kết quả hay và có nhiều ứng dụng. Việc sử dụng thành thạo các tính chất về số mũ đúng cùng sự kết hợp khéo léo với các định lý cơ bản của số học như định lý Euler, định lý Fecmat, kiến thức về cấp của một số…sẽ giúp chúng ta có thể giải quyết được các phương trình Diophante hoặc các bài toán chia hết liên quan đến số mũ. Chính vì vậy nhóm tác giả đã quyết định viết chuyên đề: **"Vận dụng bổ đề về mũ đúng trong các bài toán Số học".**

2. Mục đích của đề tài

Trong chuyên đề này, tác giả trình bày một hệ thống lý tuyết về Bổ đề nâng lũy thừa và một số kiến thức hỗ trợ cho phương pháp **LTE** trong việc giải quyết các bài toán Số học. Các bài toán trong chuyên đề đều được nhóm tác giả tìm kiếm, chọn lọc, tổng hợp, trình bày lời giải một cách chi tiết kèm theo những phân tích, bình luận và đặt nó trong sự kết nối với các bài tập khác. Chuyên đề được viết với mong muốn phục vụ trực tiếp cho công tác giảng dạy của nhóm tác giả đồng thời cũng hy vọng sẽ là tài liệu có ích cho các thầy cô, các em học sinh tham khảo và học tâp.

3. Cấu trúc của đề tài

Chuyên đề bao gồm 3 phần chính như sau:

A. Phần mở đầu.

B. Phần nội dung.

C. Phần kết luận.

B. PHẦN NỘI DUNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa. Cho p là số nguyên tố, a là số nguyên và α là số tự nhiên. Ta nói p^{α} là ước đúng của a (exact power) và α là số mũ đúng của a nếu $p^{\alpha} \mid a$ và $p^{\alpha+1} \nmid a$. Khi đó ta viết $p^{\alpha} \parallel a$ và kí hiệu $\alpha = v_p(a)$.

2. Tính chất. Cho a,b,c là các số nguyên, khi đó ta có

- $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$
- $v_p(a^n) = n.v_p(a)$
- $v_p(a+b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$. Đẳng thức xảy ra khi $v_p(a) \neq v_p(b)$
- $v_p(n!) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{n}{p^i} \right]$ (Định lý Legendre)

3. Hai bổ đề

3.1. Bổ đề 1. Cho x, y là hai số nguyên (không nhất thiết phải nguyên dương) và n là số nguyên dương. Cho p là số nguyên tố bất kỳ sao cho

$(n, p) = 1,\ p \mid x - y,\ p \nmid x,\ p \nmid y$. Ta có

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y)$$

Chứng minh.

Ta có $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1})$

Do $p \mid x - y$ nên $x \equiv y \pmod p$

$\Rightarrow x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1} \equiv nx^{n-1} \not\equiv 0 \pmod p$

Ta có đpcm.

3.2. Bổ đề 2. Cho x, y là các số nguyên (không nhất thiết phải nguyên dương), n là số nguyên dương lẻ và p là số nguyên tố bất kỳ thỏa mãn

$(n, p) = 1, p \mid x + y, p \nmid x,\ p \nmid y$. Ta có

$$v_p(x^n + y^n) = v_p(x + y)$$

Chứng minh.

Sử dụng **Bổ đề 1** ta có $v_p\left(x^n+y^n\right)=v_p\left(x^n-(-y)^n\right)=v_p\left(x-(-y)\right)=v_p\left(x+y\right)$

4. Lifting The Exponent Lemma (LTE)

4.1. Định lý 1. Cho x, y là hai số nguyên (không nhất thiết phải nguyên dương), n là một số nguyên dương và p là một số nguyên tố lẻ thỏa mãn $p \mid x-y$ và $p \nmid x, p \nmid y$. Ta có

$$v_p\left(x^n-y^n\right)=v_p\left(x-y\right)+v_p\left(n\right)$$

Chứng minh.

Ta sẽ chứng minh quy nạp theo $v_p(n)$. Trước hết, ta chứng minh khẳng định sau:

$$v_p\left(x^p-y^p\right)=v_p\left(x-y\right)+1 \qquad (1)$$

Để chứng minh (1), ta cần chỉ ra rằng

$$p \mid x^{p-1}+x^{p-2}y+\ldots+xy^{p-2}+y^{p-1} \qquad (2)$$

Và

$$p^2 \nmid x^{p-1}+x^{p-2}y+\ldots+xy^{p-2}+y^{p-1} \qquad (3)$$

Thật vậy, ta có: $x^{p-1}+x^{p-2}y+\ldots+xy^{p-2}+y^{p-1} \equiv px^{p-1} \equiv 0 \pmod p$

Với (3), ta đặt $y=x+kp, k\in\mathbb{N}^*$, khi đó với $t=\overline{1; p-1}$

$$\begin{aligned}
x^{p-1-t}y^t &= x^{p-1-t}\left(x+kp\right)^t \\
&= x^{p-1-t}\left(x^t+tkpx^{t-1}+\frac{t(t-1)}{2}(kp)^2x^{t-1}+\ldots.+(kp)^t\right) \\
&\equiv x^{p-1-t}\left(x^t+tkpx^{t-1}\right) \\
&\equiv x^{p-1}+tkpx^{p-2} \pmod{p^2}
\end{aligned}$$

Do đó

$$
\begin{aligned}
& x^{p-1}+x^{p-2}y+\ldots+xy^{p-2}+y^{p-1}\\
& \equiv x^{p-1}+x^{p-1}+kpx^{p-2}+x^{p-1}+2kpx^{p-2}+\ldots+x^{p-1}+\left(p-1\right)kpx^{p-2}\\
& \equiv px^{p-1}+\left(1+2+\ldots+p-1\right)kpx^{p-2}\\
& \equiv px^{p-1}+\frac{p\left(p-1\right)}{2}kpx^{p-2}\\
& \equiv px^{p-1}+\frac{p-1}{2}kp^2x^{p-2}\\
& \equiv px^{p-1}\not\equiv 0\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow (3)$ được chứng minh.

Vậy $v_p\left(x^p-y^p\right)=v_p\left(x-y\right)+1$

Trở lại bài toán, ta đặt $n=p^{\alpha}.k$ với $\alpha,k\in\mathbb{N},\left(p,k\right)=1$. Sử dụng **Bổ đề 1** và (1), ta có

$$
\begin{aligned}
v_p\left(x^n-y^n\right) &= v_p\left(x^{p^{\alpha}k}-y^{p^{\alpha}k}\right) = v_p\left(\left(x^{p^{\alpha}}\right)^k-\left(y^{p^{\alpha}}\right)^k\right)\\
&= v_p\left(x^{p^{\alpha}}-y^{p^{\alpha}}\right) = v_p\left(\left(x^{p^{\alpha-1}}\right)^p-\left(y^{p^{\alpha-1}}\right)^p\right)\\
&= v_p\left(x^{p^{\alpha-1}}-y^{p^{\alpha-1}}\right)+1 = v_p\left(x^{p^{\alpha-2}}-y^{p^{\alpha-2}}\right)+2\\
&= v_p\left(x^p-y^p\right)+\alpha-1 = v_p\left(x-y\right)+\alpha\\
&= v_p\left(x-y\right)+v_p\left(n\right)
\end{aligned}
$$

Định lý được chứng minh.

4.2. Định lý 2. Cho x,y là hai số nguyên, n là một số nguyên dương lẻ và p là một số nguyên tố lẻ thỏa mãn $p\mid x+y$ và $p\nmid x, p\nmid y$. Ta có

$$v_p\left(x^n+y^n\right)=v_p\left(x+y\right)+v_p\left(n\right)$$

Chứng minh.

Áp dụng **Định lý 1** và điều kiện n lẻ ta có:

$$v_p\left(x^n + y^n\right) = v_p\left(x^n - (-y)^n\right)$$
$$= v_p\left(x - (-y)\right) + v_p(n)$$
$$= v_p(x + y) + v_p(n)$$

4.3. Định lý 3. *(Cho trường hợp $p = 2$)* Cho x, y là hai số nguyên lẻ sao cho $4 \mid x - y$. Ta có

$$v_2\left(x^n - y^n\right) = v_2(x - y) + v_2(n)$$

Chứng minh.

Theo **Bổ đề 1**, nếu $(n, p) = 1,\ p \mid x - y,\ p \nmid x,\ p \nmid y$ thì

$$v_p\left(x^n - y^n\right) = v_p(x - y)$$

Tức là nếu $p = 2$, n là số lẻ và $2 \mid x - y$ thì

$$v_2\left(x^n - y^n\right) = v_2(x - y)$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh Định lý trong trường hợp n là lũy thừa của 2.

Tức là:

$$v_2\left(x^{2^n} - y^{2^n}\right) = v_2(x - y) + n$$

Thật vậy, ta có:

$$x^{2^n} - y^{2^n} = \left(x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}\right)\left(x^{2^{n-2}} + y^{2^{n-2}}\right)....\left(x^2 + y^2\right)(x + y)(x - y)$$

Vì $x \equiv y \equiv \pm 1 \pmod 4 \Rightarrow x^{2^k} \equiv y^{2^k} \equiv 1 \pmod 4$

$\Rightarrow x^{2^k} + y^{2^k} \equiv 2 \pmod 4$

$\Rightarrow v_2\left(x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}\right) = v_2\left(x^{2^{n-2}} + y^{2^{n-2}}\right) = ... = v_2\left(x^2 + y^2\right) = 1$

Lại có $4 \mid x - y,\ x, y$ là số lẻ nên $x + y \equiv 2 \pmod 4$

$\Rightarrow v_2\left(x^{2^n} + y^{2^n}\right) = v_2(x - y) + n$

4.4. Định lý 4. *(Cho trường hợp $p = 2$)* Cho x, y là hai số nguyên lẻ và n là một số nguyên dương chẵn. Ta có

$$v_2\left(x^n - y^n\right) = v_2\left(x - y\right) + v_2\left(x + y\right) + v_2\left(n\right) - 1$$

Chứng minh.

Do x, y lẻ $\Rightarrow 4 \mid x^2 - y^2$, ta đặt $n = 2^k.m, \left(m, 2\right) = 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow v_2\left(x^n - y^n\right) &= v_2\left(x^{2^k m} - y^{2^k m}\right) \\
&= v_2\left(x^{2^k} - y^{2^k}\right) \\
&= v_2\left(\left(x^2\right)^{2^{k-1}} - \left(y^2\right)^{2^{k-1}}\right) \\
&= v_2\left(x^2 - y^2\right) + k - 1 \\
&= v_2\left(x - y\right) + v_2\left(x - y\right) + k - 1 \\
& v_2\left(x - y\right) + v_2\left(x - y\right) + v_2\left(n\right) - 1
\end{aligned}$$

5. Một số nhận xét.

5.1. Sai lầm thường gặp nhất khi sử dụng bổ đề nâng lũy thừa là việc không kiểm tra điều kiện $p \mid x \pm y$.

5.2. Với n là số nguyên dương thì $\log_p n \le v_p\left(n\right) < n$. Thật vậy

Đặt $n = p^\alpha k$ với $\left(p, k\right) = 1$, khi đó $v_p\left(n\right) = \alpha$

$v_p\left(n\right) = \alpha < p^\alpha \le p^\alpha k = n$

Ta cũng có $\log_p n = r + \log_p \alpha \ge r$.

5.3. Nếu a, b là hai số tự nhiên, p là một số nguyên tố, ta có

$a \mid b \Leftrightarrow v_p\left(a\right) \le v_p\left(b\right)$

5.4. Với p là một ước nguyên tố của a. Đặt $a = p^m k$ với $m, k \in \mathbb{N}^*$, ta có

i) $a \ge p^{v_p(a)}$

ii) $p^m k \ge m + \alpha$ với $m \ge \beta$. Do đó $a \ge v_p\left(a\right) + \alpha$ với $v_p\left(a\right) \ge \beta$ hay $a \ge p^\beta$.

II. VẬN DỤNG BỔ ĐỀ VỀ MŨ ĐÚNG TRONG GIẢI TOÁN

Trước hết ta xét một số bài toán mà việc lựa chọn Bổ đề LTE và chọn số p là điều dễ dàng quan sát thấy.

Bài toán 1. (AIME 2020 I- Problem 12) Cho n là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $149^n - 2^n \vdots 3^3.5^5.7^7$. Tìm số các ước nguyên dương của n.

Phân tích bài toán

Đề bài xuất hiện $149^n - 2^n$, ta nghĩ ngay đến sử dụng **bổ đề LTE**. Kiểm tra điều kiện bổ đề đều thỏa mãn trong các trường hợp $p=3, p=7$. Tuy nhiên $149-2 \not\vdots 5$ nên ta chưa thể áp dụng ngay bổ đề LTE trong trường hợp $p=5$. Để giải quyết vấn đề này ta nghĩ đến việc xét các trường hợp của n

Lời giải

Áp dụng **Định lý 1**, ta có

$$v_3\left(149^n - 2^n\right) = v_3(149-2) + v_3(n) = 1 + v_3(n).$$

Để $149^n - 2^n \vdots 3^3.5^5.7^7$ thì

$v_3\left(3^3.5^5.7^7\right) \le v_3\left(149^n - 2^n\right) \Rightarrow 3 \le 1 + v_3(n) \Rightarrow v_3(n) \ge 2 \Rightarrow n \vdots 3^2$.

Lại áp dụng **Định lý 1**, ta có

$$v_7\left(149^n - 2^n\right) = v_7(149-2) + v_7(n) = 2 + v_7(n).$$

Để $149^n - 2^n \vdots 3^3.5^5.7^7$ thì

$v_7\left(3^3.5^5.7^7\right) \le v_7\left(149^n - 2^n\right) \Rightarrow 7 \le 2 + v_7(n) \Rightarrow v_7(n) \ge 5$, ta được $n \vdots 7^5$.

Ta có $149^n - 2^n \vdots 5 \Leftrightarrow n = 4s, s \in \mathbb{N}$.

Xét $149^4 - 2^4 \equiv (-1)^4 - 16 \equiv 0 \pmod 5$, hay $149^4 - 2^4 \vdots 5$.

Áp dụng **Định lý 1**, ta có

$$v_5\left(149^n - 2^n\right) = v_5\left(149^{4s} - 2^{4s}\right) = v_5\left(149^4 - 2^4\right) + v_5(s),$$

Mặt khác, ta cũng có $149^4 - 2^4 \equiv (-1)^4 - 16 \equiv -15 \pmod{25}$ nên $149^4 - 2^4 \not\vdots 25$.

Vậy $v_5\left(149^4 - 2^4\right) = 1$.

Để $149^n - 2^n \vdots 3^3.5^5.7^7$ thì

$v_5\left(3^3.5^5.7^7\right) \le v_5\left(149^n - 2^n\right) \Rightarrow 5 \le 1 + v_5(s) \Rightarrow v_5(s) \ge 4$, ta được $s \vdots 5^4 \Rightarrow n \vdots 4.5^4$.

Do $3^2, 7^5, 4.5^4$ nguyên tố cùng nhau nên $n \vdots 2^2.3^3.5^4.7^5$, do n là số nguyên dương nhỏ nhất nên $n = 2^2.3^3.5^4.7^5$.

Vậy số các ước của n là $(2+1)(3+1)(4+1)(5+1) = 270$.

Lời giải khác

Theo Công thức khai triển Nhị thức Newton, ta có

$$149^n - 2^n = (147+2)^n - 2^n$$

$$= C_n^1.147.2^{n-1} + C_n^2.147^2.2^{n-2} + C_n^3.147^3.2^{n-3} + \cdots + 147^n.$$

Ta kiểm tra điều kiện để $149^n - 2^n \vdots 3^3$.

Do $3 \| 147$ nên các số hạng chứa $147^3, 147^4, \cdots$ sẽ đều chia hết cho 3^3, tức là ngoại trừ hai số hạng đầu, thì các số hạng còn lại đã chia hết cho 3^3.

Do đó ta cần

$$3^3 \mid C_n^1.147.2^{n-1} + C_n^2.147^2.2^{n-2} = n.147.2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}.147^2.2^{n-2}$$

$$= n.147.2^{n-1} + n(n-1).147^2.2^{n-3} = 147n.2^{n-3}(147n - 143),$$

tức là $3^2 \mid n$ (do $147n - 143 \not\vdots 3$).

Ta kiểm tra điều kiện để $149^n - 2^n \vdots 7^7$.

Vì $7^2 \| 147$ nên các số hạng chứa $147^4, 147^5, \cdots$ đều chia hết cho 7^7, tức là ngoại trừ ba số hạng đầu thì các số hạng còn lại đều chia hết cho 7^7.

Do đó, ta cần

$$7^7 \mid C_n^1.147.2^{n-1} + C_n^2.147^2.2^{n-2} + C_n^3.147^3.2^{n-3}$$

$$= n.147.2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}.147^2.2^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.147^3.2^{n-3}$$

$$= n.147.2^{n-1} + n(n-1).147^2.2^{n-3} + n(n-1)(n-2).\frac{147^3}{3}.2^{n-4}$$

$$= 147n.2^{n-4}\left(8 + (n-1)147.2 + \left(n^2 - 3n + 2\right)7203\right)$$

$$=147n.2^{n-4}\left(7203n^2-21903n+14120\right),$$

tức là $7^5 \mid n$ (do $7203n^2-21903n+14120 \not\vdots\, 7$).

Ta kiểm tra điều kiện để $149^n-2^n \vdots 5^5$.

Ta có

$$149^n-2^n \equiv 4^n-2^n=2^n\left(2^n-1\right)\left(\bmod 5\right),$$

nên để $149^n-2^n \vdots 5^5$ thì $4 \mid n$.

Đặt $n=4m$ và đặt $c=149^4-2^4=\left(149^2-2^2\right)\left(149^2+2^2\right)=147.151.22205$.

Kiểm tra được rằng $5 \| c$.

Theo Công thức khai triển Nhị thức Newton, ta có

$$\left(149^4\right)^m-\left(2^4\right)^m=(c+16)^m-(16)^m$$

$$=C_m^1\cdot c\cdot 16^{m-1}+C_m^2\cdot c^2\cdot 16^{m-2}+C_m^3\cdot c^3\cdot 16^{m-3}+C_m^4\cdot c^4\cdot 16^{m-4}+\cdots+c^m.$$

Do $5 \| c$ nên các số hạng chứa $c^5, c^6, \cdots$ đều chia hết cho 5^5, tức là ngoại trừ bốn số hạng đầu thì các số hạng còn lại đều chia hết cho 5^5.

Bằng cách lập luận tương tự như trên, ta cũng có $5^5 \mid cm$, và do $5 \| c$ nên $5^4 \mid m$.

Theo cách đặt $n=4m$ nên $4.5^4 \mid n$.

Tổng hợp các điều kiện thì $3^2\left(2^2.5^4\right).7^5 \mid n$.

Với n là số nguyên dương nhỏ nhất thì $n=3^2\left(2^2.5^4\right).7^5$. Số các ước nguyên dương của n là 270.

Bài toán 2. (Balkan MO 2013) Tìm các số nguyên dương x, y, z sao cho $x^5+4^y=2013^z$.

Phân tích bài toán

Từ giả thiết, không khó để nhận ra có thể giải quyết bài toán bằng cách sử dụng **Bổ đề LTE** với $p=3,11,61$ là các ước của 2013. Tuy nhiên, ban đầu số mũ của x và 4 khác nhau nên ta chưa thể áp dụng Bổ đề LTE ngay được. Dễ dàng kiểm tra được rằng $y=5t$, khi đó phương trình có dạng $x^5+4^{5t}=2013^z$.

Lời giải.

Xét modulo 11, ta có $11 | 2013$ nên $x^5 + 4^y \equiv 0 \pmod{11}$. Mà

$x^5 \equiv 0,1,-1 \pmod{11}$ nên $4^y \equiv -1,0,1 \pmod{11}$. Do đó, các nghiệm trong modulo 11 là $\left(x^5, 4^y\right) \in \left\{(0,0),(1,-1),(-1,1)\right\} \pmod{11}$.

Ta có $4^y \equiv 4,5,9,3,1 \pmod{11}$, nên ta cần $4^y \equiv 1 \pmod{11}$.

Mặt khác, vì $ord_{11}(4) = 5$ nên $5 | y$. Khi đó, đặt $y = 5t$, ta có

$$x^5 + 4^{5t} = 2013^z, \text{ hay } x^5 + \left(4^t\right)^5 = 2013^z.$$

Vì $x + 4^t | x^5 + \left(4^t\right)^5 = 2013^z$, mà $2013 = 3.11.61$ và $x + 4^t \neq 1$ nên $x + 4^t = 3^i 11^j 61^k$ với $i, j, k \in \mathbb{Z}^+$.

Ta kiểm tra được rằng $4^t \not\vdots\, 3,11,61$ nên $x \not\vdots\, 3,11,61$.

Áp dụng **Định lý 2**, ta có

$$v_3\left(x^5 + \left(4^t\right)^5\right) = v_3\left(x + 4^t\right) + v_3(5)$$

do đó $v_3\left(2013^z\right) = v_3\left(x + 4^t\right)$, hay $z = v_3\left(x + 4^t\right)$ nên $3^z \,\|\, x + 4^t$.

Tương tự, ta chứng minh được $11^z \,\|\, x + 4^t$ và $61^z \,\|\, x + 4^t$.

Do $x + 4^t = 3^i 11^j 61^k$ nên $x + 4^t$ chỉ có các ước nguyên tố trong tập $\{3,11,61\}$.

Lại thêm với kết quả vừa chứng minh được, $3^z \,\|\, x + 4^t$, $11^z \,\|\, x + 4^t$, $61^z \,\|\, x + 4^t$ nên $x + 4^t = 2013^z$.

Điều này dẫn đến mâu thuẫn, vì $2013^z = x^5 + \left(4^t\right)^5 > x + 4^t = 2013^z$.

Vậy phương trình này không có nghiệm.

Lời giải khác.

Ta vẫn sử dụng kết quả $5 | y$ như chứng minh trên. Đặt $y = 5t$.

Khi đó, vế trái trở thành

$$\left(x^5 + 4^{5t}\right) = \left(x + 4^t\right)\left(x^4 - 4^t x^3 + 4^{2t} x^2 - 4^{3t} x + 4^{4t}\right).$$

Hơn nữa, vì

$$\left(x^4-4^t x^3+4^{2t}x^2-4^{3t}x+4^{4t}\right)=\left(x+4^t\right)\left(x^4-2.4^t x^3+3.4^{2t}x^2-4.4^{3t}x\right)+5.4^{4t}$$

nên $x+4^t$ và $x^4-4^t x^3+4^{2t}x^2-4^{3t}x+4^{4t}$ nguyên tố cùng nhau. Thật vậy, mọi ước chung d của chúng phải là ước của 2013 và 5.4^{4t}, mà $\gcd\left(2013,5.4^{4t}\right)=1$ nên $d=1$.

Từ phương trình $x^5+4^y=2013^z$, thì $x^5+1^y\equiv 0\pmod 3$ nên $3\nmid x^5$, do đó $3\nmid x$. Điều này dẫn đến

$$x^4-4^t x^3+4^{2t}x^2-4^{3t}x+4^{4t}\equiv 1-x+1-x+1\equiv -2x\not\equiv 0\pmod 3$$

Từ phương trình $x^5+4^y=2013^z$ thì $x^5+0\equiv 1\pmod 2$ nên x là lẻ. Điều này dẫn đến

$$x^4-4^t x^3+4^{2t}x^2-4^{3t}x+4^{4t}\equiv 1\pmod 4.$$

Ta có $2013^z=\left(x^5+4^{5t}\right)=\left(x+4^t\right)\left(x^4-4^t x^3+4^{2t}x^2-4^{3t}x+4^{4t}\right)$ và $2013=3.11.61$.

Vì $3\nmid x^4-4^t x^3+4^{2t}x^2-4^{3t}x+4^{4t}$ nên $3\mid x+4^t$, kéo theo $x\equiv 2\pmod 3$. Do đó

$$x^4-4^t x^3+4^{2t}x^2-4^{3t}x+4^{4t}\equiv -2x\equiv 2\pmod 3$$

Vì $2\nmid n$ và ta chứng minh ở trên thì $x+4^t$ và $x^4-4^t x^3+4^{2t}x^2-4^{3t}x+4^{4t}$ nguyên tố cùng nhau, nên $x^4-4^t x^3+4^{2t}x^2-4^{3t}x+4^{4t}$ phải có dạng $11^z, 61^z, (11.61)^z$.

Ta lập bảng kiểm tra

$$x^4-4^t x^3+4^{2t}x^2-4^{3t}x+4^{4t}\equiv 2\pmod 3 \text{ và}$$

$$x^4-4^t x^3+4^{2t}x^2-4^{3t}x+4^{4t}\equiv 1\pmod 4.$$

$x^4-4^t x^3+$ $4^{2t}x^2-4^{3t}x+4^{4t}$	modulo 3	Điều kiện của z để $x^4-4^t x^3+4^{2t}x^2$ $-4^{3t}x+4^{4t}\equiv 2\pmod 3$	modulo 4	Điều kiện của z để $x^4-4^t x^3+4^{2t}x^2$ $-4^{3t}x+4^{4t}\equiv 1\pmod 4$

11^z	2^z	Lẻ	3^z	Chẵn
61^z	1^z	Không thỏa mãn	1^z	Luôn thỏa mãn
$(11.61)^z$	2^z	Lẻ	3^z	Chẵn

Nếu $x^4 - 4^t x^3 + 4^{2t} x^2 - 4^{3t} x + 4^{4t}$ có dạng 11^z hoặc $(11.61)^z$ thì z không thể vừa là số lẻ, vừa là số chẵn.

Nếu $x^4 - 4^t x^3 + 4^{2t} x^2 - 4^{3t} x + 4^{4t}$ có dạng 61^z thì không có số nguyên z thỏa mãn.

Vậy phương trình này không có nghiệm.

Bài toán 3. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn phương trình $x^{2009} + y^{2009} = 7^z$.

Lời giải.

Dễ thấy $x \neq y$ (vì nếu $x = y$ thì $x^{2009} + y^{2009} = 2x^{2009} \neq 7^z$)

Ta có $x + y \mid x^{2009} + y^{2009}$ đồng thời $x + y > 1 \Rightarrow 7 \mid x + y$. Đến đây ta xét hai trường hợp sau

TH1: Nếu $7 \nmid x$, $7 \nmid y$, Áp dụng **Định lý 2,** ta có

$v_7\left(x^{2009} + y^{2009}\right) = v_7(x + y) + v_7(2009)$

$\Rightarrow v_7\left(x^{2009} + y^{2009}\right) = v_7(x + y) + 2$

$\Rightarrow x^{2009} + y^{2009} = 49.k.(x + y)$ với $7 \nmid k$ điều này mâu thuẫn với giả thiết $x^{2009} + y^{2009}$ chỉ có ước là 7.

TH2: Nếu một trong hai số x hoặc y chia hết cho 7 thì số còn lại cũng chia hết cho 7 hay $x, y \vdots 7$.

Không giảm tổng quát, giả sử $v_7(x) \geq v_7(y) = k \Rightarrow x = 7^k.x_1$ và $y = 7^k.y_1$ với $x_1, y_1 \in \mathbb{N}^*, y_1 \not\vdots 7, y_1 > x_1$ do $x_1 \neq y_1$.

Khi đó ta có $x^{2009} + y^{2009} = 7^{2009k}\left(x_1^{2009} + y_1^{2009}\right) = 7^z \Rightarrow \left(x_1^{2009} + y_1^{2009}\right) = 7^{z-2009k}$ là lũy thừa của 7. Mà $y_1 \not\vdots 7 \Rightarrow x_1 \not\vdots 7$ quay về **TH1** ta có điều mâu thuẫn.

Vậy phương trình trên không có nghiệm nguyên dương.

Tiếp theo ta xét bài toán ở dạng Tổng quát hơn

Bài toán 4. (European Mathematical Cup 2012, Senior Division). Tìm số nguyên dương a,b,n và số nguyên tố p thỏa mãn $a^{2013}+b^{2013}=p^n$.

Phân tích bài toán.

Ở đây, a và b có cùng số mũ 2013, tuy nhiên đề bài không có dữ kiện $a \not\vdots p, b \not\vdots p$ và $a+b \vdots p$.

Bằng cách đặt $a'=\dfrac{a}{(a,b)}, b'=\dfrac{b}{(a,b)}$ thì ta có $p \nmid a'$ và $p \nmid b'$ và

$a^{2013}+b^{2013} \vdots a'+b' \vdots p$.

Lời giải.

Đặt $d=(a,b)$ và $x=\dfrac{a}{d}, y=\dfrac{b}{d}$. Ta có $d^{2013}\left(x^{2013}+y^{2013}\right)=p^n$, nên

$x^{2013}+y^{2013}=p^m$, hay

$$(x+y)\left(x^{2012}-x^{2011}y+x^{2010}y^2-\cdots-xy^{2011}+y^{2012}\right)=p^m.$$

Do x,y là các số tự nhiên nên $x+y>1$ nên $p \mid x+y$. Mà theo cách đặt $x=\dfrac{a}{d}, y=\dfrac{b}{d}$ với $d=(a,b)$ thì x,y nguyên tố cùng nhau, kéo theo $p \nmid x$ và $p \nmid y$.

Áp dụng **Định lý 2**, ta có

$$v_p\left(x^{2013}+y^{2013}\right)=v_p(x+y)+v_p(2013).$$

Mà $v_p\left(x^{2013}+y^{2013}\right)=v_p(x+y)+v_p\left(x^{2012}-x^{2011}y+x^{2010}y^2-...-xy^{2011}+y^{2012}\right)$

nên $v_p(2013)=v_p\left(x^{2012}-x^{2011}y+x^{2010}y^2-...-xy^{2011}+y^{2012}\right)$.

Xét $2013=3.11.61$ nên $v_p(2013)=0$ nếu p là số nguyên tố khác $3,11,61$, và $v_p(2013)=1$ nếu p là một trong các số nguyên tố $3,11,61$.

+) Nếu $(x,y)=(1,1)$ thì $x^{2012}-x^{2011}y+x^{2010}y^2-\cdots-xy^{2011}+y^{2012}=1$.

+) Nếu $(x,y)\neq(1,1)$, không giảm tổng quát, giả sử $x\geq y$ ta có

$$x^{2012}-x^{2011}y+x^{2010}y^2-\cdots-xy^{2011}+y^{2012}$$
$$=x^{2011}\left(x-y\right)+x^{2009}y^2\left(x-y\right)+\cdots+xy^{2010}\left(x-y\right)+y^{2012}.$$

Biểu thức này lớn hơn 61 khi $\left(x,y\right)\neq\left(1,1\right)$ và $x\geq y$.

Đến đây, ta xét hai trường hợp.

TH1: Nếu $v_p\left(2013\right)=1$ thì $v_p\left(x^{2012}-x^{2011}y+x^{2010}y^2-\cdots-xy^{2011}+y^{2012}\right)=1$ và $p\in\left\{3,11,61\right\}$ nên $x^{2012}-x^{2011}y+x^{2010}y^2-\cdots-xy^{2011}+y^{2012}\in\left\{3,11,61\right\}$, điều này không thể xảy ra vì $x^{2012}-x^{2011}y+x^{2010}y^2-\cdots-xy^{2011}+y^{2012}>61$ theo chứng minh trên.

TH2: Nếu $v_p\left(2013\right)=0$ thì $\left(x,y\right)=\left(1,1\right)$. Do đó $a=b$.

Vì $a^{2013}+b^{2013}=p^n$ nên $p^n=2.a^{2013}$, do đó $p=2$.

Ta có nghiệm $a=b=2^k,n=2013k+1,p=2,\forall k\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải khác.

Đặt $d=\left(a,b\right),x=\frac{a}{d},y=\frac{b}{d}$. Khi đó, ta có $d^{2013}\left(a^{2013}+b^{2013}\right)=p^n$, nên d cũng phải là lũy thừa của p, do đó $d=p^k,k\in\mathbb{N}$.

Do đó $p^{2013k}\left(a^{2013}+b^{2013}\right)=p^n$, nên $a^{2013}+b^{2013}=p^m$ (với $m=n-2013k$).

Đặt $A=x^{671}$ và $B=y^{671}$ thì ta có $A^3+B^3=p^m$, nên $\left(A+B\right)\left(A^2-AB+B^2\right)=p^m$.

Theo cách đặt $d=\left(a,b\right),x=\frac{a}{d},y=\frac{b}{d}$ thì x,y nguyên tố cùng nhau nên A,B cũng nguyên tố cùng nhau.

Ta xét ba trường hợp.

TH1: Nếu $A+B=1$. Điều này không xảy ra do A và B là các số nguyên dương.

TH2: Nếu $A^2-AB+B^2=1$ hay $(A-B)^2+AB=1$, xảy ra khi $A=B=1$. Do đó $a=b$.

Vì $a^{2013}+b^{2013}=p^n$ nên $p^n=2.a^{2013}$, do đó $p=2$.

Ta có nghiệm $a=b=2^k,n=2013k+1,p=2,\forall k\in\mathbb{N}^*$.

TH3: Nếu cả $A+B$ và A^2-AB+B^2 đều lớn hơn 1, thì $p\mid A+B$ và

$p\mid A^2-AB+B^2=(A+B)^2-3AB$ nên $p\mid 3AB$.

+) Nếu $p\mid AB$, kết hợp với $p\mid A+B$ thì ta có $p\mid A$ và $p\mid B$, mâu thuẫn với điều kiện A và B nguyên tố cùng nhau.

+) Nếu $p\mid 3$ thì $p=3$. Ta có hai trường hợp nhỏ.

- $A^2-AB+B^2=3\Leftrightarrow (A-B)^2+AB=3$, nên $A=2,B=1$ hoặc $A=1,B=2$.

  Nhưng theo cách đặt $A=x^{671}$ và $B=y^{671}$ thì $2=x^{671}$ không có nghiệm nguyên dương.

- $A^2-AB+B^2>3$ thì $3^2\mid A^2-AB+B^2$. Ta có $3\mid A+B$ nên $3^2\mid (A+B)^2$ và

  $3^2\mid A^2-AB+B^2=(A+B)^2-3AB$. Điều này dẫn đến $3^2\mid 3AB$, hay $3\mid AB$.

Như chứng minh trên, ta có nếu $p\mid AB$, kết hợp với $p\mid A+B$ thì ta có $p\mid A$ và $p\mid B$, mâu thuẫn với điều kiện A và B nguyên tố cùng nhau. Do đó, trường hợp này cũng không cho ta nghiệm của phương trình.

Vậy tất cả các nghiệm của phương trình là $a=b=2^k, n=2013k+1, p=2, \forall k\in\mathbb{N}^*$.

Bài toán 5. (**Romania 2019)** Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho tồn tại các số nguyên dương n và m với $m\geq 2$ sao cho $3^k+5^k=n^m$.

Lời giải.

Hiển nhiên ta thấy rằng n là số chẵn.

Ta xét các trường hợp sau:

TH1: Nếu k chẵn thì $3^k+5^k\equiv 0\pmod 2$ và $3^k+5^k\equiv 2\pmod 4$ nên

$v_2\left(3^k+5^k\right)=1$, kéo theo $m=1$. Điều này không thỏa mãn $m\geq 2$.

TH2: Nếu k lẻ. Áp dụng **Định lý 2**, ta có

$$mv_2(n)=v_2\left(3^k+5^k\right)=v_2(3+5)+v_2(k)=v_2(8)+0=3\Rightarrow m\mid 3$$

với $m\geq 2 \Rightarrow m=3$.

+) Nếu $k=1$, ta có $(k,n,m)=(1,2,3)$.

+) Nếu $k>1\Rightarrow n^3\equiv 5^k\pmod 9\Leftrightarrow 3\mid k$.

Đặt $k=3t, t\in\mathbb{N}^*$. Khi đó ta có $\left(3^t\right)^3+\left(5^t\right)^3=n^3$, mà ta biết rằng phương trình này có dạng $a^3+b^3=n^3$ nên không có nghiệm nguyên dương.

Vậy $k=1$.

Bài toán 6. (Italy TST 2003) Tìm các số nguyên dương x, y và số nguyên tố p sao cho $2^x+p^y=19^x$.

Lời giải.

Ta có $2^x+p^y=19^x \Leftrightarrow 19^x-2^x=p^y$. Mà $VT=17\,|\,19^x-2^x$ nên $p^y \vdots 17 \Rightarrow p=17$.

Do $2^x+17^y=19^x=\left(2+17\right)^x>2^x+17^x$ với $x\geq 2$. Do đó ta xét hai trường hợp sau.

TH1: Nếu $x\geq 2$ thì $y>x$. Áp dụng **Định lý 1** thì

$$v_{17}\left(17^y\right)=v_{17}\left(19^x-2^x\right)=v_{17}\left(19-2\right)+v_{17}\left(x\right)\Rightarrow y=1+v_{17}\left(x\right).$$

Mà $y=1+v_{17}\left(x\right)\leq 1+x$. Do đó $y=1+x$ và $v_{17}\left(x\right)=x$. Điều này không xảy ra.

TH2: Nếu $x=1$ thì $y=1$.

Vậy $\left(x,y,p\right)=\left(1,1,17\right)$ là nghiệm duy nhất của bài toán này.

Bài toán 7. (Russia MO – 1996) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x,y,k thỏa mãn $\left(x,y\right)=1$, $k\geq 2$ và $3^n=x^k+y^k$.

Lời giải.

Nếu một trong hai số x hoặc y chia hết cho 3 thì số còn lại cũng chia hết cho 3, điều này mâu thuẫn. Do đó cả x và y đều không chia hết cho 3.

Nếu k chẵn thì $x^k\equiv y^k\equiv 1\left(\bmod 3\right)$ nên x^k+y^k không chia hết cho lũy thừa của 3. Do đó k lẻ.

Gọi p là ước nguyên tố của $x+y$.

Vì k lẻ $\Rightarrow$ $x^k+y^k \vdots x+y \vdots p$ hay $3^n \vdots p \Rightarrow p=3$

Do đó $x+y=3^m$ với m là số nguyên dương.

Áp dụng **Định lý 2,** ta có $v_3\left(3^n\right)=v_3\left(x^k+y^k\right)=v_3\left(x+y\right)+v_3\left(k\right)$

$\Rightarrow n=m+v_3\left(k\right)$. Đến đây ta xét các trường hợp sau

TH1: Nếu $m>1$. Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp được rằng $3^a\geq a+2$ với mọi số nguyên $a\geq 1$, và $v_3\left(k\right)\leq k-2$.

Đặt $M=\max\left(x,y\right)$, do $x+y=3^m\geq 9$ nên $M\geq 5$. Khi đó

$$x^k+y^k\geq M^k=\underbrace{M}_{\geq\frac{(x+y)}{2}=\frac{1}{2}.3^m}.\underbrace{M^{k-1}}_{\geq 5^{k-1}}>\frac{1}{2}3^m.5^{k-1}$$

$$>3^m.5^{k-2}\geq 3^{m+k-2}\geq 3^{m+v_3(k)}=3^n$$ mâu thuẫn giả thiết.

TH2: Nếu $m=1\Rightarrow x+y=3$ nên $x=1,y=2$ hoặc $x=2,y=1$. Kéo theo $3^{1+v_3(k)}=1+2^k$. Nhưng ta có $3^{v_3(k)}\mid k\ \Rightarrow\ 3^{v_3(k)}\leq k$. Do đó

$1+2^k=3^{v_3(k)+1}=3.\underbrace{3^{v_3(k)}}_{\leq k}\leq 3k\Rightarrow 2^k+1\leq 3k$ mà k là số lẻ $\Rightarrow k=3$.

Khi $k=3,x=2,y=1$ hoặc $k=3,x=1,y=2$ thì $n=2$.

Bài toán 8. (Balkan 1993) Cho p là số nguyên tố và $m>1$ là số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu tồn tại các số nguyên dương $x>1,y>1$ mà $\dfrac{x^p+y^p}{2}=\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^m$ thì $m=p$.

Lời giải.

Ta có bất đẳng thức quen thuộc $\dfrac{x^p+y^p}{2}\geq\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^p$ với mọi số nguyên dương p.

Kết hợp giả thiết $\dfrac{x^p+y^p}{2}=\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^m\Rightarrow m\geq p$.

Đặt $d=\left(x,y\right)$, $\Rightarrow x=dx_1,y=dy_1$ với $\left(x_1,y_1\right)=1$, $x_1,y_1\geq 1$ và không đồng thời bằng 1

Ta có $\frac{x^p+y^p}{2}=\left(\frac{x+y}{2}\right)^m \Leftrightarrow 2^{m-1}\left(x_1^p+y_1^p\right)=d^{m-p}\left(x_1+y_1\right)^m$. Ta có hai trường hợp

TH1: Nếu p lẻ

Gọi q là ước nguyên tố bất kì của x_1+y_1. Đặt $v=v_q\left(x_1+y_1\right)\geq 1$

- Nếu q lẻ, áp dụng **Định lý 2**, ta có $v_q\left(2^{m-1}\left(x_1^p+y_1^p\right)\right)=v+v_q\left(p\right)$

  Mà $v_q\left(d^{m-p}\left(x_1+y_1\right)^m\right)\geq mv \Rightarrow v+v_q\left(p\right)\geq mv \Rightarrow mv\leq v+1$

  (Vì $\left[\begin{array}{lll} v_q\left(p\right)=1 & khi & q=p \\ v_q\left(p\right)=0 & khi & q\neq p \end{array}\right.$)

  $\Rightarrow v\left(m-1\right)\leq 1$

Do đó $m\leq 2 \Rightarrow p\leq m\leq 2$ mâu thuẫn.

- Nếu $q=2$ thì $m-1+v\geq mv$, nên $v\leq 1$ và $x_1+y_1=2$, hay $x=y$, suy ra $m=p$.

TH2: Nếu $p=2$

- Nếu $\left(x,y\right)=\left(1,2\right)$ hoặc $\left(x,y\right)=\left(2,1\right)$ thay vào ta thấy không thỏa mãn
- Nếu $x,y\geq 2 \Rightarrow x+y\geq 4$

  Ta có $x+y\geq 4 \Rightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^m=\frac{x^2+y^2}{2}<2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^3$

  $\Rightarrow m\leq 3$ mà $m\geq p=2 \Rightarrow m=2$.

  Vậy $m=p=2$

Bài toán 9. (**Romanian Junior Balkan TST 2008**) Cho số nguyên tố $p\neq 3$ và các số nguyên a,b thỏa mãn $p\mid a+b$ và $p^2\mid a^3+b^3$. Chứng minh rằng $p^2\mid a+b$ hoặc $p^3\mid a^3+b^3$.

Lời giải.

Do $p\mid a+b$, nên nếu $p\mid a$ thì $p\mid b$ và khi đó $p^3\mid a^3+b^3$.

Nếu $p\nmid a$ thì $p\nmid b$, lại có $p\mid a+b$

Áp dụng **Định lý 2,** ta có

$$v_p\left(a^3+b^3\right)=v_p\left(a+b\right)+v_p\left(3\right)\Rightarrow v_p\left(a^3+b^3\right)=v_p\left(a+b\right).$$

Mà $p^2 \mid a^3+b^3$ nên $v_p\left(a^3+b^3\right)\geq 2$, kéo theo $v_p\left(a+b\right)\geq 2$, hay $p^2 \mid a+b$

Cách giải khác.

Do $p \mid a+b$, nên nếu $p \mid a$ thì $p \mid b$ kéo theo $p^3 \mid a^3+b^3$.

Nếu $p \nmid a$ thì $p \nmid b$. Ta có $p^2 \mid a^3+b^3=\left(a+b\right)\left(\left(a+b\right)^2-3ab\right)$, mà $p \nmid a,b$ nên $p \nmid \left(\left(a+b\right)^2-3ab\right)$.

Ta có

$$v_p\left(a^3+b^3\right)=v_p\left(\left(a+b\right)\left(\left(a+b\right)^2-3ab\right)\right)$$

$$=v_p\left(a+b\right)+v_p\left(\left(a+b\right)^2-3ab\right)=v_p\left(a+b\right).$$

(vì $p \nmid \left(\left(a+b\right)^2-3ab\right)$ nên $v_p\left(\left(a+b\right)^2-3ab\right)=0$)

Mà $p^2 \mid a^3+b^3$ nên $v_p\left(a^3+b^3\right)\geq 2$, kéo theo $v_p\left(a+b\right)\geq 2$, hay $p^2 \mid a+b$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 10. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, p thỏa mãn $p^x - y^p = 1$ với p là một số nguyên tố.

Lời giải.

Ta xét các trường hợp sau

TH1: Nếu $p=2 \Rightarrow 2^x - y^2 = 1$

$\Rightarrow y$ là số lẻ. Khi đó $2^x = y^2+1 \equiv 2 \pmod 4$

$\Rightarrow x=1, y=1$

TH2: Nếu p là số nguyên tố lẻ, ta có $y^p+1=p^x$

Áp dụng Định lý Fecmat nhỏ ta có $p^x = y^p+1 \equiv y+1 \pmod p$

$\Rightarrow p \mid y+1$. Khi đó áp dụng **Định lý 2** ta có

$$v_p\left(y^p+1\right)=v_p\left(y+1\right)+v_p\left(p\right)=v_p\left(y+1\right)+1$$

$\Rightarrow x-1=v_p\left(y+1\right)$

Mặt khác $y^p+1=\left(y+1\right)\left(y^{p-1}-y^{p-2}+...-y+1\right)=p^{x-1}$

Do đó $\begin{cases} y+1=p^{x-1} \\ y^{p-1}-y^{p-2}+...-y+1=p \end{cases}$

- Nếu $y=1$ thì $p=2$ (loại)
- Nếu $y=2\Rightarrow p^{x-1}=3\Rightarrow p=3; x=2$ (thỏa mãn)
- Nếu $y>2$, ta có

$$y^{p-1}-y^{p-2}+...-y+1=y^{p-2}\left(y-1\right)+y^{p-4}\left(y-1\right)+...+y\left(y-1\right)+1$$

$$>y^{p-2}+y^{p-4}+...+y+1>y+1$$

$\Rightarrow p>p^{x-1}$

$\Rightarrow x=1\Rightarrow v_p\left(y+1\right)=0$ (vô lý vì $p\mid y+1$)

Vậy bộ $\left(x,y,p\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left(1,1,2\right);\left(2,2,3\right)$

Bài toán 11. (Trung Quốc 2009) Tìm cặp số nguyên tố $\left(p,q\right)$ thỏa mãn $pq\mid 5^p+5^q$.

Lời giải.

Ta xét các trường hợp sau

TH1: Nếu $p=q=5$ thỏa mãn.

TH2: Nếu một trong hai số bằng 5 và số còn lại khác 5. Không giảm tổng quát, giả sử $p=5, q\neq 5$. Ta có

$$5q\mid 5^5+5^q \Leftrightarrow q\mid 5^4+5^{q-1}$$

Nhưng theo **Định lý Fecmat bé** ta có $5^{q-1}\equiv 1\left(\mod q\right)$

$\Rightarrow q\mid 5^4+1=626\Rightarrow q=2$ hoặc $q=313$.

Trường hợp này ta có bốn nghiệm $\left(5,2\right);\left(5,313\right);\left(2,5\right);\left(313,5\right)$

TH3: Nếu một trong hai số bằng 2 và số còn lại khác 5. Không giảm tổng quát giả sử $p=2, q\neq 5$

$\Rightarrow 15+5^q \equiv 0 \pmod{2q}$

Mà theo Định lý Fecmat bé ta thu được $5^q \equiv 5 \pmod{q}$ và $5^q \equiv 5 \pmod{2}$ do đó $30 \equiv 0 \pmod{2q} \Rightarrow q=3$

Trường hợp này ta có hai nghiệm $(2,3);(3,2)$

TH4: Nếu p, q khác 2 và 5

Ta có $5^p \equiv 5 \pmod{p}, 5^q \equiv 5 \pmod{q}$, kết hợp với giả thiết

$$\Rightarrow \begin{cases} 5^{p-1}+1 \vdots q \\ 5^{q-1}+1 \vdots p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{2(p-1)}-1 \vdots q \\ 5^{2(q-1)}-1 \vdots p \end{cases}$$

Đặt $m = ord_q 5 \Rightarrow m \mid 2(p-1) \Rightarrow v_2(m) \le 1+v_2(p-1)$

Mặt khác $5^{p-1}+1 \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow 5^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{q} \Rightarrow m \nmid p-1$

$\Rightarrow v_2(m) = 1+v_2(p-1)$

Lại có $5^{q-1} \equiv 1 \pmod{q} \Rightarrow m \mid (q-1) \Rightarrow v_2(m) \le v_2(q-1)$

Do đó $1+v_2(p-1) \le v_2(q-1) \Rightarrow v_2(p-1) < v_2(q-1)$

Tương tự khi xét theo modulo p ta lại có $v_2(q-1) < v_2(p-1)$ (Vô lý).

Vậy các cặp số thỏa mãn là $(p,q) = (2,5);(5,2);(5,5);(5,313);(313,5)$

Bài toán 12. Cho p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng không tồn tại các số $x, y \in \mathbb{Z}$ sao cho $x^p + y^p = p\left[(p-1)!\right]^p$.

Lời giải.

Giả sử tồn tại x, y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do $p \nmid (p-1)! \Rightarrow p \nmid \left[(p-1)!\right]^p \Rightarrow p^2 \nmid p\left[(p-1)!\right]^p$. Ta xét các trường hợp sau

TH1: Nếu $p \mid x$ mà $p \mid x^p + y^p \Rightarrow p \mid y$. Mà p là số nguyên tố lẻ nên $p \ge 3$, ta có

$$p^2 \mid x^p, p^2 \mid y^p \Rightarrow p^2 \mid x^p + y^p = p\left[(p-1)!\right]^p.$$ Mâu thuẫn.

TH2: Nếu $p \nmid x$ mà $p \mid x^p + y^p = p\left[(p-1)!\right]^p$ nên $p \nmid y$.

Theo Định lý **Fermat nhỏ**, ta có $x^p + y^p \equiv x + y \pmod{p} \Rightarrow x + y \vdots p$.

Áp dụng **Bổ đề 2,** ta có

$$v_p\left(x^p+y^p\right)=v_p\left(x+y\right)+v_p\left(p\right)\geq 2\Rightarrow x^p+y^p \vdots p^2 \text{ (Mâu thuẫn)}$$

Vậy không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đề bài.

Bài toán 13. (IMO shortlist 2014) Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $\left(x, y, p\right)$, thỏa mãn $x+y^{p-1}$ và $x^{p-1}+y$ đều là lũy thừa của p, trong đó p là số nguyên tố.

Phân tích bài toán.

Ý tưởng là xét bài toán theo p. Ta sẽ tìm cách giới hạn lại p

Dễ dàng xét với trường hợp $p=2$

Với trường hợp $p\geq 3$, vì $x+y^{p-1}$ và $x^{p-1}+y$ đều chứa các số hạng có số mũ là $p-1$ nên ta nghĩ đến sử dụng **Định lý Fecmat,** do đó cần xét các trường hợp p có là ước của x, y không. Đồng thời giả thiết $x+y^{p-1}$ và $x^{p-1}+y$ đều là lũy thừa của p gợi ý cho ta nghĩ đến việc sử dụng **Bổ đề LTE.**

Lời giải.

Ta xét hai trường hợp sau

TH1: $p=2$, dễ dàng thấy bộ $\left(x, 2^k-x, 2\right)$ thỏa mãn bài toán

TH2: $P\geq 3$

+) Ta thấy rằng nếu p là ước của một trong hai số x hoặc y thì p cũng là ước của số còn lại

Giả sử $v_p\left(x\right)=a, v_p\left(y\right)=b,\ a, b>0$

Không giảm tổng quát giả sử $a\geq b$

Ta có $v_p\left(x^{p-1}\right)=a^{p-1}>b\Rightarrow v_p\left(x^{p-1}+y\right)=b\Rightarrow x^{p-1}+y=p^b$ điều này vô lý vì $x^{p-1}+y>y>p^b$

+) Nếu p không là ước của x và y

Theo định lý Fecmat, ta có $x^{p-1}-1 \vdots p, y^{p-1}-1 \vdots p$

Trước hết ta chứng minh $x \neq y$. Thật vậy giả sử $x = y \Rightarrow x^{p-1} + x$ là lũy thừa của p

$v_p\left(x^{p-1} + x\right) = a \Rightarrow x^{p-1} + x = p^a$ mà $x^{p-1} + x > x = p^a$ (vô lý)

Không giảm tổng quát giả sử $x > y \Rightarrow x^{p-1} + y > x + y^{p-1}$

Đặt $x^{p-1} + y = p^m, y^{p-1} + x = p^n \Rightarrow m > n$. Ta có

$p^n = x + y^{p-1} \mid x^{p-1} + y \Rightarrow p^n \mid y^{p-2}\left(x^{p-1} + y\right) - \left(x + y^{p-1}\right)$

$\Rightarrow p^n \mid x\left(x^{p-2}y^{p-2} - 1\right)$

$\Rightarrow p^n \mid (xy)^{p-2} - 1$

Mà $x \equiv -y^{p-1}\left(\bmod p^n\right) \Rightarrow x^{p-2} \equiv -y^{(p-1)(p-2)}\left(\bmod p^n\right)$

$\Rightarrow (xy)^{p-2} - 1 \equiv -y^{p(p-2)} - 1\left(\bmod p^n\right)$

Hay $y^{p(p-2)} + 1 \vdots p^n$

Lại có $y^{p-1} \equiv 1\left(\bmod p\right) \Rightarrow y^p \equiv y\left(\bmod p\right)$

$\Rightarrow y^{p(p-2)} + 1 \equiv y^{p-2} + 1\left(\bmod p\right) \Rightarrow y^{p-2} + 1 \equiv 0\left(\bmod p\right)$

Áp dụng **Định lý 2,** ta có $v_p\left(y^{p(p-2)} + 1\right) = v_p\left(y^{p-2} + 1\right) + 1 \Rightarrow y^{p-2} + 1 \vdots p^{n-1}$

$\Rightarrow p\left(y^{p-2} + 1\right) \geq p^n = x + y^{p-1} > y + y^{p-1} = y\left(1 + y^{p-2}\right)$

$\Rightarrow p > y$

$\Rightarrow p \geq y + 1$

Lại có $x^{p-1} - 1 \vdots p \Rightarrow x^{p-1} + y - (y+1) \vdots p \Rightarrow y + 1 \vdots p \Rightarrow y + 1 \geq p$

Do đó $y + 1 = p$

Ta có $x + y^{p-1} = p^n \mid p\left(y^{p-2} + 1\right) = (y+1)\left(y^{p-2} + 1\right)$

$\Rightarrow x + y^{p-1} \mid y^{p-1} + \left(y^{p-2} + y + 1\right) < 2y^{p-1} + 2x$

$\Rightarrow x + y^{p-1} = p\left(y^{p-2} + 1\right) = p^n \Rightarrow (p-1)^{p-2} + 1 = p^{n-1}$

+) Nếu $p = 3 \Rightarrow y = 2; x = 5$

+) Nếu $p>3$ Ta có $\left(p-1\right)^{p-2}+1>P$ và

$$\begin{aligned}\left(p-1\right)^{p-2}&=\sum_{i=0}^{p-2}C_{p-2}^{i}p^{p-2-i}\left(-1\right)^{i}\\&\equiv C_{p-2}^{p-3}\left(-1\right)^{p-3}p+\left(-1\right)^{p-2}\\&\equiv p\left(p-2\right)-1\left(\text{mod }p^{2}\right)\end{aligned}$$

$\Rightarrow\left(p-1\right)^{p-2}+1\equiv p\left(p-2\right)-1+1\equiv-2p\left(\text{mod }p^{2}\right)$ (vô lý)

Vậy tất cả các bộ cần tìm là $\left(x,y,p\right)=\left(x,2^{k}-x,2\right),\left(2,5,3\right),\left(5,2,3\right)$.

Bài toán 14. (IMO 1999) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $\left(n,p\right)$ sao cho p là số nguyên tố và $\left(p-1\right)^{n}+1$ chia hết cho n^{p-1}.

Phân tích bài toán.

Với bài toán này việc tìm ra các yếu tố p,a,b để áp dụng **Bổ đề LTE** không phải là điều dễ dàng. Nó đòi hỏi ở người làm toán phải có **Kinh nghiệm** và vận dụng một cách linh hoạt các định lý số học. Trong bài toán này việc sử dụng **Định lý Fecmat** là điều mà chúng ta có thể nghĩ đến.

Lời giải.

Nếu $n=1$ thì p là số nguyên tố bất kỳ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $n\geq 2$, ta xét các trường hợp sau

TH1: Nếu $p=2$ thì $2\vdots n\Rightarrow n=2$

TH2: Nếu $p>2$. Gọi q là ước nguyên tố nhỏ nhất của n, q là số lẻ

Ta có $\left(p-1\right)^{n}\equiv-1\left(\text{mod}\,q\right)\Rightarrow\left(p-1\right)^{2n}\equiv1\left(\text{mod}\,q\right)$ và $\left(p-1,q\right)=1$

Gọi $t=ord_{q}\left(p-1\right)\Rightarrow t\,|\,2n$

Áp dụng **Định lý Fecmat nhỏ**, ta có $\left(p-1\right)^{q-1}\equiv1\left(\text{mod}\,q\right)\Rightarrow t\,|\,q-1$

Nếu $\left(t,n\right)>1$, gọi d là một ước nguyên tố của t và $n\Rightarrow d\,|\,n$

Mà $d\,|\,t\Rightarrow d\leq t\leq q-1\Rightarrow d<q$. Do đó d,q đều là ước của n và $d<q$ mâu thuẫn với cách chọn q.

Vậy $\left(t,n\right)=1$. Khi đó $t\,|\,2\Rightarrow t=2$ hay $\left(p-1\right)^{2}\equiv1\left(\text{mod}\,q\right)$

$\Rightarrow p(p-2)\equiv 0 \pmod q$. Ta có 2 khả năng sau

+) Nếu $q \mid p-2$ thì

$(p-1)^n+1\equiv 1^n+1\equiv 2 \pmod q \Rightarrow q=2 \Rightarrow (p-1)^n+1 \vdots 2 \Rightarrow p$ là số chẵn (mâu thuẫn).

+) Nếu $q \mid p$. Khi đó $p\geq 3$ và $(p-1)^n+1\equiv (-1)^n+1 \pmod q$

Nếu n chẵn thì

$(p-1)^n+1\equiv (-1)^n+1\equiv 2 \pmod q \Rightarrow q=2 \Rightarrow q=2 \Rightarrow (p-1)^n+1 \vdots 2 \Rightarrow p$ là số chẵn (mâu thuẫn). Vậy n là số lẻ

Áp dụng **Định lý 2,** ta có $v_q\left((p-1)^n+1\right)=v_q(p)+v_q(n)\geq (p-1)v_q(n)$

$\Rightarrow v_q(p)\geq (p-2)v_q(n)$

Đặt $p=q^a b$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$. Ta chứng minh quy nạp được rằng $q^a b\geq a+2$ với $q\geq 3$

$\Rightarrow p\geq v_q(p)+2$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=1, q=3$

$\Rightarrow p-2\geq v_q(p)\geq (p-2)v_q(n) \Rightarrow v_q(n)=1$ và $a=b=1, q=3=p$

$\Rightarrow v_3(n)=1$. Đặt $n=3k$, với $k\in\mathbb{N}^*, (k,3)=1$, k là số lẻ.

Từ giả thiết ta có $8^k+1 \vdots 9k^2$.

Nhận xét $8^k+1 \vdots 9$. Do đó ta cần tìm k sao cho $8^k+1 \vdots k^2$

+) Với $k=1 \Rightarrow n=3$ thỏa mãn

+) Với $k\geq 2$, tương tự cách chứng minh trên, ta gọi r là ước nguyên tố nhỏ nhất của k và $s=ord_r 8$. Khi đó $s\mid 2 \Rightarrow s=2$

$\Rightarrow r \mid 8^2-1$ hay $r=7$ (vô lý vì $8^k+1\equiv 2 \pmod 7$)

Vậy cặp số (n,p) thỏa mãn là $(1,p),(2,2),(3,3)$

Bài toán 15. (TST Romania 2009) Cho $a,n\geq 3$ là hai số nguyên dương sao cho tồn tại số tự nhiên $k\geq 2$ thỏa mãn $n \mid (a-1)^k$. Chứng minh rằng n là ước của $a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1$.

Lời giải.

Ta có $a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1=\dfrac{a^n-1}{a-1}$

Gọi p là một ước nguyên tố của n. Ta có $p\mid n\mid (a-1)^k$ và $(a,p)=1$

Áp dụng **Định lý 2,** Ta có $v_p\left(a^n-1\right)=v_p\left(a-1\right)+v_p\left(n\right)$

$\Rightarrow v_p\left(\dfrac{a^n-1}{a-1}\right)=v_p\left(n\right)$.

$\Rightarrow n\mid \dfrac{a^n-1}{a-1}$(đpcm).

Bài toán 16. Cho a,n là hai số nguyên dương và p là một số nguyên tố lẻ thỏa mãn $a^p\equiv 1\left(\text{mod } p^n\right)$. Chứng minh rằng $a\equiv 1\left(\text{mod } p^{n-1}\right)$.

Lời giải.

Vì $a^p\equiv 1\left(\text{mod } p^n\right)$ nên $(a,p)=1$.

Theo **Định lý Fermat nhỏ,** ta có $a^{p-1}=1\left(\text{mod } p\right)$.

Do đó $a^p=a^{p-1}\left(\text{mod } p\right)$ mà $(a,p)=1$ nên $p\mid a-1$.

Áp dụng **Định lý 2,** ta có

$$v_p\left(a^p-1\right)=v_p\left(a-1\right)+v_p\left(p\right)\ge n\Leftrightarrow v_p\left(a-1\right)\ge n-1.$$

Vậy $a\equiv 1\left(\text{mod } p^{n-1}\right)$.

Bài toán 17. Tìm tất cả các số nguyên dương $a,b>1$ thỏa mãn $b^a\mid a^b-1$.

Lời giải.

Gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của b.

Đặt $m=ord_pa$. Trước tiên, ta chỉ ra $m=1$. Thật vậy

+) Nếu $p=2$ hoặc $a\,\vdots\, p$ thì ta có $m=1$.

+) Nếu p là số nguyên tố lẻ và $p\nmid a$.

Do $p\mid b\mid b^a\mid a^b-1\Rightarrow p\mid a^b-1$ nên $m\mid b$.

Do $a\not\vdots\, p$, theo **Định lí Fermat nhỏ**, ta có $p\mid a^{p-1}-1$ nên $m\mid p-1$.

Do đó $m \mid (b, p-1)$.

Vì p là ước nguyên tố nhỏ nhất của b nên $(p-1, b) = 1$. Vậy $m = 1$.

Trở lại bài toán, ta xét hai trường hợp sau

TH1: Nếu p lẻ

Áp dụng **Định lý 1,** ta có

$$v_p(a^b - 1) = v_p(a-1) + v_p(b) \geq v_p(b^a) = a.v_p(b)$$

nên $v_p(a-1) \geq (a-1)v_p(b) \geq a-1$, điều này vô lí.

TH2: Nếu $p = 2$. Ta suy ra b chẵn, $a^b - 1$ cũng chẵn nên a lẻ.

Áp dụng **Định lý 4**, ta có

$$v_2(a^b - 1) = v_2(a-1) + v_2(a+1) + v_2(b) - 1 \geq av_2(b)$$

$$\Rightarrow v_2(a-1) + v_2(a+1) \geq (a-1)v_2(b) + 1 \geq (a-1) + 1 = a$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = 3, v_2(b) = 1$.

Đặt $b = 2s$ với s là lẻ, yêu cầu đề bài trở thành $2^3 s^3 \mid 3^{2s} - 1$.

- Nếu $s = 1$ thì $b = 2, a = 3$ thỏa mãn yêu cầu.
- Nếu $s > 1$. Đặt q là ước nguyên tố nhỏ nhất của s nên q cũng là lẻ.

Đặt $n = ord_q 3$. Tương tự như trên, ta cũng chỉ ra $n = 1$. Thật vậy:

+) Nếu $q = 3$ thì $n = 1$.

+) Nếu $q \neq 3$ thì $n \mid q \mid s \Rightarrow n \mid s$ và theo định lí Fermat nhỏ, ta có $q \mid 3^{q-1} - 1$ nên $n \mid q - 1$.

Từ đó $n \mid (s, q-1)$, mà q là ước nguyên tố nhỏ nhất của s nên $(s, q-1) = 1 \Rightarrow n = 1$.

Khi đó $q \mid 3 - 1 = 2$, điều này mâu thuẫn với q lẻ do s lẻ.

Vậy cặp số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(a, b) = (3, 2)$.

Bài toán 18. Cho số nguyên dương $a > 1$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $2^{2000} \mid a^n - 1$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $v_2\left(a^n-1\right)\geq 2000$

Ta có $a^n\equiv 1\left(\bmod 2^{2000}\right)$. Theo Định lý Euler kết hợp giả thiết n nhỏ nhất suy ra

$n\,|\,\varphi\left(2^{2000}\right)=2^{1999}$

$\Rightarrow n$ là lũy thừa của $2\Rightarrow 2=2^k$ với $k\geq 0$. Khi đó

$a^n-1=a^{2^k}-1=\left(a-1\right)\left(a+1\right)\left(a^2+1\right)...\left(a^{2^{k-1}}+1\right)$

$v_2\left(a^n-1\right)=v_2\left(a^2-1\right)+v_2\left(a^2+1\right)+...+v_2\left(a^{2^{k-1}}+1\right)$

Mà $a^{2^i}+1\equiv 2\left(\bmod 4\right)\Rightarrow v_2\left(a^{2^i}+1\right)=2$ với $i=\overline{1,k-1}$

Vậy $v_2\left(a^n-1\right)=v_2\left(a^2-1\right)+k-1\geq 2000$

$\Rightarrow k\geq 2001-v_2\left(a^2-1\right)$

Vậy chọn k thỏa mãn $\begin{cases} k=2001-v_2\left(a^2-1\right) & khi\, v_2\left(a^2-1\right)\leq 2001 \\ k=0 & khi\, v_2\left(a^2-1\right)>2001 \end{cases}$

Khi đó $n=2^k$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 19. (China TST 2009) Cho hai số nguyên dương $a>b>1$ và b lẻ, n là số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu $b^n\,|\,a^n-1$ thì $a^b>\frac{3^n}{n}$.

Phân tích bài toán.

Nếu gọi p là một ước nguyên tố của b khi đó $p^n\,|\,b^n\,|\left(a^n-1\right)$ và $\left(p,a\right)=1$ theo **Định lý Fecmat bé,** ta có $a^{p-1}\equiv 1\left(\bmod p\right)\Rightarrow p\,|\,a^{p-1}-1$. Lúc này ta đủ điều kiện sử dụng **Bổ đề LTE** với nhận xét $a^n-1\,|\left(\left(a^{p-1}\right)^n-1\right)$

Lời giải

Gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của b. Do b lẻ nên p là số nguyên tố lẻ

Do $p^n\,|\,b^n\,|\,a^n-1\Rightarrow n\leq v_p\left(b^n\right)\leq v_p\left(a^n-1\right)$

Lại có $v_p\left(a^n-1\right)\le v_p\left(\left(a^{p-1}\right)^n-1\right)=v_p\left(a^{p-1}-1\right)+v_p\left(n\right)=v_p\left(n\left(a^{p-1}-1\right)\right)$

$$\Rightarrow p^n\le n\left(a^{p-1}-1\right)\Rightarrow a^{p-1}\ge\frac{p^n}{n}+1\Rightarrow a^b>a^{p-1}>\frac{p^n}{n}\ge\frac{3^n}{n}$$

Vậy $a^b>\frac{3^n}{n}$

Bài toán 20. (Bulgaria 1997) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn 3^n-2^n là lũy thừa của một số nguyên tố. Chứng minh rằng n là số nguyên tố.

Lời giải.

Đặt $3^n-2^n=p^k$ với p là một số nguyên tố

Ta chứng minh bằng phản chứng

Giả sử n không phải là số nguyên tố. Suy ra tồn tại số nguyên tố p sao cho $n=qr$, $r\in\mathbb{N},r>1$

Ta có $3^q-2^q\mid\left(3^{qr}-2^{qr}\right)\Rightarrow p\mid 3^q-2^q$

Áp dụng **Định lý 2,** ta có $k=v_p\left(3^{qr}-2^{qr}\right)=v_p\left(3^q-2^q\right)+v_p\left(r\right)$. Đến đây ta xét hai trường hợp sau

TH1: $p\nmid r\Rightarrow v_p\left(3^{qr}-2^{qr}\right)=v_p\left(3^q-2^q\right)=k$

$\Rightarrow 3^{qr}-2^{qr}=3^q-2^q=2^k$ điều này không xảy ra vì

$$3^{qr}-2^{qr}=\left(3^q-2^q\right)\left(3^{q(r-1)}+3^{q(r-2)}2+...+2^{q(r-1)}\right)>3^q-2^q$$

TH2: $p\mid r\Rightarrow 3^p-2^p\mid 3^r-2^r\mid 3^n-2^n$

$\Rightarrow p\mid 3^p-2^p$

Hay $3^p-2^p\equiv 0\left(\bmod p\right)$

Áp dụng **Định lý Euler**, ta có $3^p\equiv 3\left(\bmod p\right),2^p\equiv 2\left(\bmod p\right)$

$\Rightarrow 3^p-2^p\equiv 3-2\equiv 1\left(\bmod p\right)$(mâu thuẫn)

Vậy n thỏa mãn điều kiện phải là một số nguyên tố.

Bài toán 21. Chứng minh rằng không tồn tại cặp số (a,n) nguyên dương $n>2$ sao cho $(a+1)^n-a^n$ là lũy thừa của 5.

Lời giải.

Giả sử tồn tại số nguyên dương m sao cho $(a+1)^n-a^n=5^m$

Nhận xét rằng nếu $a+1$ chia hết cho 5 thì số còn lại cũng chia hết cho 5(vô lý). Do đó cả hai số $a+1$ và a đều không chia hết cho 5. Ta xét các trường hợp sau

TH1: $a\equiv 1(\bmod 5)\Rightarrow 0\equiv (a+1)^n-a^n\equiv 2^n-1(\bmod 5)\Rightarrow 4\,|\,n$

TH2: $a\equiv 2(\bmod 5)\Rightarrow 0\equiv (a+1)^n-a^n\equiv 3^n-2^n(\bmod 5)\Rightarrow 2\,|\,n$

TH3: $a\equiv 3(\bmod 5)\Rightarrow 0\equiv (a+1)^n-a^n\equiv 4^n-3^n(\bmod 5)\Rightarrow 4\,|\,n$

Do đó n luôn là số chẵn, đặt $n=2n_1, n_1\in\mathbb{N}, n_1\geq 2$. Ta có

$$5^m=(a+1)^{2n_1}-a^{2n_1}=\left((a+1)^2-a^2\right)\left((a+1)^{2(n_1-1)}+...+(a+1)^2a^{2(n_1-2)}+a^{2(n_1-1)}\right)$$

$$=(2a+1)\left((a+1)^{2(n_1-1)}+...+(a+1)^2a^{2(n_1-2)}+a^{2(n_1-1)}\right)$$

$$\Rightarrow 5\,|\,2a+1$$

và

$$v_5\left((a+1)^{2(n_1-1)}+...+(a+1)^2a^{2(n_1-2)}+a^{2(n_1-1)}\right)=v_5\left((a+1)^{2n_1}-a^{2n_1}\right)-v_5(2a+1)$$

Mặt khác, áp dụng **Định lý 1,** ta có

$$v_5\left((a+1)^{2n_1}-a^{2n_1}\right)=v_5(2a+1)+v_5(2n_1)=v_5(2a+1)+v_5(n_1)$$

Do đó $v_5\left((a+1)^{2(n_1-1)}+...+(a+1)^2a^{2(n_1-2)}+a^{2(n_1-1)}\right)=v_5(n_1)$

Mà $(a+1)^{2(n_1-1)}+...+(a+1)^2a^{2(n_1-2)}+a^{2(n_1-1)}$ là lũy thừa của 5 nên

$$n_1\,\vdots\,(a+1)^{2(n_1-1)}+...+(a+1)^2a^{2(n_1-2)}+a^{2(n_1-1)}$$

(Vô lý vì $(a+1)^{2(n_1-1)}+...+(a+1)^2a^{2(n_1-2)}+a^{2(n_1-1)}>n_1$ với $a+1\geq 2, n_1\in\mathbb{N}^*$)

Vậy không tồn tại cặp số (a,n) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 22. Cho b,m,n là các số nguyên dương thỏa mãn $m>1; m\neq n$. Biết b^m-1 và b^n-1 có cùng tập hợp các ước nguyên tố. Chứng minh rằng $b+1$ là lũy thừa của 2.

Lời giải.

Từ giả thiết, gọi p là ước nguyên tố bất kì của b^m-1 và b^n-1

Áp dụng một kết quả quen thuộc $\left(b^m-1,b^n-1\right)=b^{(m,n)}-1$, đặt $\alpha=(m,n)$

Ta suy ra $p\,|\,b^\alpha-1$

Với $\alpha=(m,n)\Rightarrow \exists k,l\in\mathbb{N}^*$ sao cho $m=\alpha k, n=\alpha l$ với $(k,l)=1$

Đặt $a=b^\alpha$, từ giả thiết ta suy ra tập hợp các ước nguyên tố của $a-1, a^k-1, a^l-1$ là trùng nhau.

Do $m\neq n$ suy ra trong hai số k và l phải có ít nhất một số lớn hơn 1. Giả sử $k>1$.

Ta sẽ chứng minh $a+1$ là lũy thừa của 2. Thật vậy, ta xét các trường hợp sau

TH1: Nếu k là số chẵn, đặt $k=2^\beta k_1$ với k_1 lẻ

Ta có $a^k-1=\left(a^{k_1}-1\right)\left(a^{k_1}+1\right)\left(a^{2k_1}+1\right)...\left(a^{2^{\beta-1}k_1}+1\right)$

Do đó mọi ước nguyên tố q của $a^{k_1}+1$ cũng là ước của $a-1$

Mà với k_1 lẻ thì $a^{k_1}+1\,\vdots\, a+1$, $(a-1,a+1)=1$ hoặc $2\Rightarrow 2\,\vdots\, q\Rightarrow q=2$

Do đó $a^{k_1}+1$ là lũy thừa của $2\Rightarrow a+1$ cũng là lũy thừa của 2

TH2: Nếu k là số lẻ, ta có $a^k-1=(a-1)\left(a^{k-1}+...+a+1\right)$

Gọi q là ước nguyên tố bất kì của $a^{k-1}+...+a+1$. Do $a^{k-1}+...+a$ là tổng của chẵn số tự nhiên nên nó là số chẵn $\Rightarrow a^{k-1}+...+a+1$ là số lẻ $\Rightarrow q$ là số lẻ và là ước của $a^k-1\Rightarrow q$ cũng là ước của $a-1$

Ta có $v_q\left(a^k-1\right)=v_q(a-1)+v_q\left(a^{k-1}+...+a+1\right)$

Áp dụng **Định lý 1,** ta có $v_q\left(a^k-1\right)=v_q(a-1)+v_q(k)$

Suy ra $v_q\left(a^{k-1}+...+a+1\right)=v_q\left(a^k-1\right)-v_q(a-1)=v_q(k)$

$\Rightarrow k \vdots \left(a^{k-1}+...+a+1\right)$(vô lý vì $a^{k-1}+...+a+1>k$)

Vậy $a+1=b^{\alpha}+1$ là lũy thừa của 2

$b^{\alpha}+1$ là lũy thừa của 2 nên b là số lẻ

+) Nếu α là số chẵn thì $b^{\alpha}+1=\left(b^{\alpha}\right)^2+1\equiv 2\left(\bmod 4\right)$ là lũy thừa của $2\Rightarrow b=1$

+) Nếu α là số lẻ thì $b^{\alpha}+1=\left(b+1\right)\left(b^{\alpha-1}+...+b+1\right)$ nên $b+1$ cũng là lũy thừa của 2

Vậy trong mọi trường hợp thì $b+1$ là lũy thừa của 2

Tiếp theo ta xét một số bài toán sử dụng **Bổ đề mũ đúng** dưới dạng **Định lý Lengedre.**

Bài toán 23. (IMO 2019) Tìm các cặp số nguyên dương $\left(n,k\right)$ sao cho $k!=\left(2^n-1\right)\left(2^n-2\right)\left(2^n-4\right)....\left(2^n-2^{n-1}\right)$.

Phân tích bài toán.

Ý tưởng chính của bài toán là cố gắng giới hạn lại $\left(n,k\right)$, chỉ xét tại hữu hạn trường hợp.

Vế phải chứa các thừa số dạng $\left(2^n-2^i\right)$, vế trái là $k!$ nên ta nghĩ đến sử dụng **bổ đề LTE** và **Định lý Legendre** với $p=2,3$

Lời giải.

Xét $v_2\left(k!\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{k}{2^i}\right]\le k$

$$v_2\left(\left(2^n-1\right)\left(2^n-2\right)\left(2^n-4\right)....\left(2^n-2^{n-1}\right)\right)=1+2+...+n-1=\frac{n\left(n-1\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{n\left(n-1\right)}{2}\le k \qquad (1)$$

Xét $v_3\left(k!\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{k}{3^i}\right]\ge \frac{k}{3}$

Mặt khác

$$v_3\left(\left(2^n-1\right)\left(2^n-2\right)\left(2^n-4\right)....\left(2^n-2^{n-1}\right)\right)=\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}1+v_3\left(i\right)$$

$$=\left[\frac{n}{2}\right]+v_3\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)\le\frac{n}{2}+\frac{n}{4}$$

Do đó $\frac{k}{3}\le\frac{n}{2}+\frac{n}{4}$ $\quad\quad\left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra $\frac{n\left(n-1\right)}{2}\le k\le\frac{9n}{4}\Rightarrow n\le 4$

Bây giờ ta kiểm tra và suy ra $\left(n,k\right)=\left(1,1\right);\left(2,3\right)$.

Bài toán 24. ***(HSG Hà Nam 2016)*** Cho q là số nguyên tố lẻ và đặt $A=\left(2q\right)^{2q}+\left(2q\right)!+\left(\left(2q\right)!\right)^{2q}$. Chứng minh rằng A có một ước nguyên tố $p>2q$.

Phân tích bài toán.

Ý tưởng của bài toán là chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Tìm dạng phân tích tiêu chuẩn của A. Để ý vế phải các số hạng đều là lũy thừa của $2q$ với cơ số là $2q$ và $\left(2q\right)!$ từ đó nghĩ đến sử dụng **Bổ đề LTE** và **Định lý Legendre** với $p=2,q$.

Lời giải.

Giả sử ngược lại, mọi ước nguyên tố p của A đều không vượt quá $2q$. Khi đó ta có:

$$p\,|\left(2q\right)! \text{ và } p\,|\left(\left(2q\right)!\right)^{2q} \text{ do đó } p\,|\,2q$$

Từ đó suy ra $p=2$ hoặc $p=q$

$\Rightarrow A$ có dạng $2^m.q^n$ với $m,n\in\mathbb{N}$.

Ta có $v_2\left(\left(2q\right)^{2q}\right)=2q;v_2\left(\left(\left(2q\right)!\right)^{2q}\right)>2q$

Và $v_q\left(\left(q\right)^{2q}\right)=2q>2;v_q\left(\left(\left(2q\right)!\right)^{2q}\right)>2q$

Mặt khác, theo **Định lý Legendre** suy ra

$$v_2\left(\left(2q\right)!\right) \le \frac{2q}{2} + \frac{2q}{2^2} + ... \le 2q\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ...\right) < 2q \text{ và } v_q\left(\left(2q\right)!\right) = 2 \text{ vì } q > 2$$

Từ đó suy ra $m = v_2\left(A\right) < 2q, n = v_q\left(A\right) < 2$

$\Rightarrow A < 2^{2q}q^2 < \left(2q\right)^{2q}$ vô lý.

Vậy A có ước nguyên tố lớn hơn $2q$.

Bài toán 25. (Rumani 2010) Cho a, n là các số nguyên dương sao cho tất cả các ước nguyên tố của a đều lớn hơn n. Chứng minh rằng $\left(a-1\right)\left(a^2-1\right)....\left(a^{n-1}-1\right)$ chia hết cho $n!$.

Phân tích bài toán.

Ta sẽ chỉ ra rằng nếu p là một ước nguyên tố của n thì

$$v_p\left(n!\right) \le v_p\left(\left(a-1\right)\left(a^2-1\right)....\left(a^{n-1}-1\right)\right)$$

Lời giải.

Vì tất cả các ước nguyên tố của a đều lớn hơn n nên $\left(a, n\right) = 1$. Gọi p là ước nguyên tố của $n!$. Khi đó $\left(a, p\right) = 1$

Áp dụng **Định lý Fecmat nhỏ**, ta có $a^{p-1} \equiv 1\left(\text{mod } p\right) \Rightarrow a^{k(p-1)} \equiv 1\left(\text{mod } p\right)$ với $\forall k \ge 1$

Theo **Định lý Lengendre,** suy ra

$$v_p\left(n!\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right] \le \sum_{i=1}^{\infty}\frac{n}{p^i} = \sum_{i=1}^{k}\frac{n}{p^i} \text{ với } k \in \mathbb{N}^*, p^k \le n < p^{k+1}$$

$$v_p\left(n!\right) \le \sum_{i=1}^{k}\frac{n}{p^i} = n.\frac{\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p^k}\right)}{1-\frac{1}{p}} \le n.\frac{\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1-\frac{1}{p}} = \frac{n-1}{p-1}$$

$$\Rightarrow v_p\left(n!\right) \le \left[\frac{n-1}{p-1}\right] \quad (1)$$

Lại có $v_p\left(\left(a-1\right)\left(a^2-1\right)....\left(a^{n-1}-1\right)\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(a^k-1\right) \ge \sum_{k=1}^{k(p-1)\le n}\left(a^{k(p-1)}-1\right)$

$$\geq \sum_{k=1}^{k(p-1)\leq n} 1 = \left[\frac{n}{p-1}\right] \geq \left[\frac{n-1}{p-1}\right] \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $v_p(n!) \leq v_p\left((a-1)(a^2-1)....(a^{n-1}-1)\right)$ (đpcm)

Bài toán 26. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $(n^2-1)!$ chia hết cho $(n!)^n$.

Phân tích bài toán.

Trước hết ta thử một vài giá trị ban đầu của n và nhận thấy $n=1$ thỏa mãn, $n=2,3,4$ không thỏa mãn bài toán. Đồng thời ta nhận thấy nếu $n=p$ là một số nguyên tố thì hoàn toàn có thể kiểm tra kết quả của bài toán dựa vào **Bổ đề LTE** và **Định lý Legendre.**

Lời giải.

Trước tiên ta chứng minh rằng $n=4$ và $n=p$ là số nguyên tố thì

$(n^2-1)! \not\vdots (n!)^n$

Thật vậy

- Nếu $n=4$ thì $v_2(4!)^4 = 4v_2(4!) = 12 > 11 = v_2(4^2-1)$, do đó $(n^2-1)! \not\vdots (n!)^n$
- Nếu $n=p$ là một số nguyên tố thì $v_p(p!)^p = p.v_p(p!) = p > p-1 = v_p\left((p^2-1)!\right)$ do đó $(n^2-1)! \not\vdots (n!)^n$

Tiếp theo, ta chứng minh rằng khi $n \neq 4$ và n không phải là số nguyên tố thì $(n^2-1)! \vdots (n!)^n$. Thật vậy

Gọi p là một ước nguyên tố bất kì của n.

Ta sẽ chứng minh $nv_p(n!) \leq v_p(n^2-1)!$

Đặt $n = p^d k$, với $k,d \in \mathbb{N}^*, (k,d)=1$

$nv_p(n!) \leq v_p(n^2-1)! \Leftrightarrow nv_p(n!) \leq v_p(n^2!) - v_p(n^2) = v_p(n^2!) - 2d$

$$\Leftrightarrow 2d + p^d k\sum_{j\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{p^d k}{p^j}\right] \le \sum_{j\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{p^{2d}k^2}{p^j}\right]$$ **(định lý Legendre)**

Lại có $\sum_{j\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{p^{2d}k^2}{p^j}\right] = \sum_{j\in\mathbb{N}^*}\left[p^d.k.\frac{p^d k}{p^j}\right] = p^d.k.\sum_{j\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{p^d k}{p^j}\right] + \sum_{j\in\mathbb{N}^*}\left[p^d.k.\left\{\frac{p^d k}{p^j}\right\}\right]$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{j\in\mathbb{N}^*}\left[p^d.k.\left\{\frac{p^d k}{p^j}\right\}\right] \ge 2d \Leftrightarrow \sum_{j=d+1}^{2d}\left[p^d.k.\left\{\frac{p^d k}{p^j}\right\}\right] \ge 2d$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{d}\left[p^d.k.\left\{\frac{k}{p^j}\right\}\right] \ge 2d$$

Với nhận xét $x, y \in \mathbb{N}^*$ và $x \not\vdots\, y$, ta có $\left\{\frac{y}{x}\right\} \ge \frac{1}{x}$. Do đó

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{d}\left[p^d.k.\left\{\frac{k}{p^j}\right\}\right] \ge \sum_{j=1}^{d}\left[p^d.k.\frac{1}{p^j}\right] = \sum_{j=0}^{d-1}\left[p^j.k\right] = \sum_{j=0}^{d-1}\left(p^j.k\right) = k\left(1+p+...+p^{d-1}\right)$$

Ta cần chứng minh $k\left(1+p+...+p^{d-1}\right) \ge 2d \quad (*)$

Ta chứng minh $(*)$ bằng quy nạp theo d

- Nếu $d=0$ thì $(*)$ đúng
- Nếu $d=1$, vì $n = p^d k$ và n là số nguyên tố nên $k \ge 2$, BĐT (*) đúng.
- Nếu $d=2$ ta cần chứng minh $k(1+p) \ge 4$

  $p=2 \Rightarrow n = 2^2 k \ne 4 \Rightarrow k \ge 2$ do đó BĐT đúng

  $p \ge 3$ thì BĐT luôn đúng
- Nếu $d \ge 3$ ta có $k\left(1+p+...+p^{d-1}\right) \ge 1+2+...+2^{d-1} = 2^d - 1 \ge 2d$

Do đó $(*)$ được chứng minh

Vậy $n \ne 4$ và n không phải là số nguyên tố là tất cả các giá trị cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ngoài việc Bổ đề số mũ đúng được vận dụng trực tiếp vào lời giải thì phương pháp này còn được dùng để tìm dạng vô hạn trong các bài toán chia hết. Ta xét một số bài toán sau

Bài toán 27. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho $v_2\left(n^{n-1}-1\right)=2015$.

Lời giải.

Nếu n là số chẵn thì $n^{n-1}-1 \not\vdots\, 2$, không thỏa mãn với đề bài $v_2\left(n^{n-1}-1\right)=2015$.

Vậy n là số lẻ.

Áp dụng **Định lý 4** ta có

$$v_2\left(n^{n-1}-1\right)=v_2(n-1)+v_2(n+1)+v_2(n-1)-1$$

$$=2v_2(n-1)+v_2(n+1)-1.$$

Do đó $2v_2(n-1)+v_2(n+1)=2016$.Ta xét các trường hợp sau

TH1: Nếu $n\equiv 1 \pmod 4, n+1\equiv 2\pmod 4$ thì $v_2(n+1)=1$, nên $2v_2(n-1)=2016-1=2015$, vô lí.

TH2: Nếu $n\equiv 3\pmod 4, n-1\equiv 2\pmod 4$ thì $v_2(n-1)=1$, ta có $2+v_2(n+1)=2016 \Rightarrow v_2(n+1)=2014$. Khi đó $n+1=2^{2014}k\Rightarrow n=2^{2014}k-1$ với mọi số nguyên dương k.

Đặt $k=2m+1$ thì $n=2^{2015}m+2^{2014}-1 \left(m\in\mathbb{N}\right)$ là các số thỏa mãn đề bài.

Bài toán 28. Cho k là số nguyên dương. Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn $3^k \mid 2^n-1$.

Lời giải.

Ta xét các trường hợp sau:

TH1: Nếu n lẻ thì $2^n-1\equiv 1\pmod 3 \Rightarrow 2^n-1 \not\vdots\, 3^k$ (loại).

TH2: Nếu n chẵn, ta đặt $n=2m, m\in\mathbb{N}^*$. Khi đó $2^n-1=4^m-1$.

Áp dụng **Định lý 1**, ta có

$$v_3\left(4^m-1\right)=v_3(4-1)+v_3(m)=1+v_3(m).$$

Để $3^k \mid 4^m-1$ thì $v_3\left(4^m-1\right)\ge k$ hay $v_3(m)\ge k-1$.

Do đó $m=3^{k-1}s, s\in\mathbb{N}^*$.

Vậy $n=2.3^{k-1}s$ với $s\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 29. (Romania 2012) Chứng minh tồn tại vô hạn số nguyên dương n thỏa mãn $2^{2^n+1}+1\vdots n$.

Phân tích bài toán.

Nhận thấy $n=3$ thỏa mãn bài toán. Ta tiếp tục thử và thấy $n=9,27$ đều thỏa mãn. Từ đây ta dự đoán $n=3^k$ sẽ là một dạng của n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh $a_n=3^n, n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Áp dụng **Định lý 2**, ta có

$$v_3\left(2^{a_n}+1\right)=v_3\left(2+1\right)+v_3\left(a_n\right)=n+1$$

Và $v_3\left(2^{2^{a_n}+1}+1\right)=v_3\left(2+1\right)+v_3\left(2^{a_n}+1\right)=n+2>v_3\left(a_n\right)$

$\Rightarrow a_n\,|\,2^{2^{a_n}}+1.$

Lời giải khác.

Ta sẽ chứng minh số nguyên dương $a_n=\dfrac{2^{3^n}+1}{9}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Áp dụng **Định lý 2**, ta có

$v_3\left(a_n\right)=v_3\left(3\right)+v_3\left(3^n\right)-2=n-1$

$\Rightarrow a_n=3^{n-1}.m$, với $m\in\mathbb{N}\left(3,m\right)=1$. Ta có

$v_3\left(2^{2^{a_n}+1}+1\right)=1+v_3\left(2^{a_n}+1\right)=2+v_3\left(a_n\right)=n+1>n-1$

Do đó $3^{n-1}\,|\,2^{2^{a_n}+1}+1.$

Lại áp dụng **Định lý 2,** ta có

$v_3\left(2^{a_n}+1\right)=v_3\left(2+1\right)+v_3\left(a_n\right)=n$

$\Rightarrow 3^n\,|\,2^{a_n}+1\Rightarrow 2^{3^n}+1\,|\,2^{2^{a_n}+1}+1$. Mà $m\,|\,2^{2^{a_n}+1}+1$ và $\left(3,m\right)=1$

$\Rightarrow a_n\,|\,2^{2^{a_n}+1}+1$

Bài toán 30. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên n thỏa mãn $n\,|\,3^n+1$

Phân tích bài toán.

Với dạng toán này, ta chỉ cần tìm một trong các dạng của n thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bằng cách thử một vài trường hợp đầu của n, ta có $5 \mid 3^2+1^2$, đồng thời để ý đến các điều kiện a,b,p trong **Định lý 2** ta thấy $5^{n+1} \mid 3^{2.5^n}+1^{2.5^n}$. Do đó ta chỉ cần chứng minh $a_n = 2.5^n$ là một dạng cần tìm.

Lời giải.

Áp dụng **Định lý 2,** ta có $v_5\left(3^{2.5^n}+1\right)=v_5\left(3^2+1\right)+v_5\left(5^n\right)=n+1>n$

$\Rightarrow 5^n \mid 3^{2.5^n}+1$

Mặt khác $2 \mid 3^{2.5^n}+1 \Rightarrow 2.5^n \mid 3^{2.5^n}+1$

Do đó tồn tại vô hạn số dạng $a_n = 2.5^n$ thỏa mãn $a_n \mid 3^{a_n}+1$

Bài toán 31. Cho số nguyên $k>1$. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho $n \mid 1^n+2^n+3^n+\cdots+k^n$.

Lời giải.

Ta xét các trường hợp sau

TH1: k không là lũy thừa của 2

Ta nhận xét với p là ước nguyên tố lẻ bất kì của k thì $n=p^m$ với $m\in\mathbb{N}^*$ bất kỳ thỏa mãn yêu cầu bài toán, tức là $p^m \mid 1^n+2^n+\cdots+k^n$. Thật vậy

Xét $i^n+(p-i)^n$, với $i=1,2,3\ldots,p-1$. Theo **Định lý 2**, ta có

$$v_p\left(i^n+(p-i)^n\right)=v_p(p)+v_p(n)=m+1.$$

Do đó $p^{m+1} \mid i^n+(p-i)^n$.

Do $i=1,2,3,\ldots,p-1$ nên $p^{m+1} \mid 2\left(1^n+2^n+\cdots+(p-1)^n\right)$, suy ra

$$p^{m+1} \mid 1^n+2^n+\cdots+(p-1)^n+p^n+(p+1)^n+\cdots+k^n \Rightarrow p^m \mid 1^n+2^n+\cdots+k^n$$

TH2: k là lũy thừa của 2.

Với p là ước nguyên tố lẻ của $k+1$. Chứng minh tương tự phần trên, ta có $n = p^m$ với mọi số nguyên dương m.

Bài toán 32. (Romanian MO 2005) Giải phương trình nghiệm nguyên dương $3^x = 2^x y + 1$.

Phân tích bài toán.

Ý tưởng của bài toán là sử dụng **Bổ đề LTE** trong trường hợp $p = 2$ và sử dụng nhận xét sau

Với p là một ước nguyên tố của $a = p^m k$ với $m, k \in \mathbb{N}^*$ thì

- $a \geq p^{v_p(a)}$
- $p^m k \geq m + \alpha$ với $m \geq \beta$. Kéo theo $a \geq v_p(a) + \alpha$ với $v_p(a) \geq \beta$ hay $a \geq p^\beta$.

Lời giải

Xét hai trường hợp saus

TH1: Nếu x là số lẻ

Áp dụng **Bổ đề 1**, ta có $v_2\left(3^x - 1\right) = v_2(3-1) = 1 \Rightarrow v_2\left(2^x y\right) = 1$

$\Rightarrow x = 1$. Khi đó $y = 1$

TH2: Nếu x là số chẵn

Áp dụng **Định lý 4,** Ta có $v_2\left(3^x - 1\right) = v_2(3-1) + v_2(3+1) + v_2(x) - 1$

$\Rightarrow v_2\left(3^x - 1\right) = 2 + v_2(x)$

Do đó $v_2\left(2^x y\right) = v_2(x) + 2$

Hay $x + v_2(y) = v_2(x) + 2 \Rightarrow x \leq v_2(x) + 2$ (*)

Đến đây ta tìm cách giới hạn lại x

Đặt $x = 2^m k$, với $m, k \in \mathbb{N}^*$ và $(k, 2) = 1$.

+) Với $m \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 8$, ta chứng minh quy nạp được $2^m k > m + 2$ với mọi $m \in \mathbb{N}, m \geq 3$

Do đó $x > v_2(x) + 2$. Điều này mâu thuẫn với (*)

+) Vậy $m<3 \Rightarrow x<8$ mà x là số chẵn nên $x \in \{2,4,6\}$. Thử các trường hợp trên ta tìm được $(x,y)=(1,1),(2,2),(4,5)$

Sau đây, ta xét thêm một số bài toán có ý tưởng tương tự

Bài toán 33. (Iran 2008) Chứng minh rằng nếu a là số nguyên dương thỏa mãn $4(a^n+1)$ là số lập phương đúng với mọi n thì $a=1$.

Phân tích bài toán.

Nhận xét: Số $4(a^n+1)$ là số lập phương đúng với mọi n nếu với mọi số nguyên tố p ta đều có $v_p(4(a^n+1))=2v_p(2)+v_p(a^n+1) \vdots 3$

Nếu a là số chẵn dễ dàng chọn $p=2$

Nếu a là số lẻ, chọn $p \neq 2$, khi đó

$$v_p(4(a^n+1))=2v_p(2)+v_p(a^n+1)=v_p(a^n+1)$$

Lời giải.

Ta xét các trường hợp sau

TH1: Nếu a chẵn, chọn $n=1$. Ta có $8 \nmid 4(a+1)$ nên $4(a+1)$ không thể là số lập phương đúng.

TH2: Nếu a lẻ và $a>1$ thì $a^2+1 \equiv 2 \pmod 4$ và $a^2+1>2$ nên $a^2+1 \neq 2^s, s>1$. Do đó a^2+1 có ước nguyên tố lẻ. Gọi p là số nguyên tố lẻ là ước của a^2+1.

Áp dụng bổ đề LTE, ta có

$$v_p(a^{2p}+1)=v_p(a^2+1)+v_p(p)=v_p(a^2+1)+1.$$

Do $4(a^{2p}+1)$ và $4(a^2+1)$ đều là các số lập phương đúng (ứng với $n=2p$ và $n=2$) nên $v_p(a^{2p}+1) \vdots 3$ và $v_p(a^2+1) \vdots 3$, điều này dẫn đến $v_p(a^{2p}+1) \neq v_p(a^2+1)+1$.

Trong trường hợp này, ta không có số a thỏa mãn.

TH3: $a=1$, ta kiểm tra được rằng $4\left(a^n+1\right)=8$ là số lập phương đúng với mọi n.

Vậy nếu a là số nguyên dương thỏa mãn $4\left(a^n+1\right)$ là số lập phương đúng với mọi n thì $a=1$.

Bài toán 34. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n, tồn tại số nguyên m sao cho $7^n \mid 2^m+3^m+4^m-1$.

Lời giải.

Xét $m=3.7^{n-1}$. Ta sẽ chứng minh $2^{3.7^{n-1}}+3^{3.7^{n-1}}+4^{3.7^{n-1}}-1 \vdots 7^n$.

Ta có $2^{3.7^{n-1}}+3^{3.7^{n-1}}+4^{3.7^{n-1}}-1=\left(8^{7^{n-1}}-1^{7^{n-1}}\right)+\left(3^{3.7^{n-1}}+4^{3.7^{n-1}}\right)$.

Áp dụng **Định lý 1**, ta có

$$v_7\left(8^{7^{n-1}}-1^{7^{n-1}}\right)=v_7\left(8-1\right)+v_7\left(7^{n-1}\right)=n,$$

$$v_7\left(3^{3.7^{n-1}}+4^{3.7^{n-1}}\right)=v_7\left(83+4\right)+v_7\left(3.7^{n-1}\right)=n.$$

Do đó $2^{3.7^{n-1}}+3^{3.7^{n-1}}+4^{3.7^{n-1}}-1 \vdots 7^n$.

Bài toán 35. Romanian Junior Balkan TST 2008 Cho số nguyên tố $p\neq 3$ và các số nguyên a,b thỏa mãn $p \mid a+b$ và $p^2 \mid a^3+b^3$. Chứng minh rằng $p^2 \mid a+b$ hoặc $p^3 \mid a^3+b^3$.

Lời giải,

Do $p \mid a+b$, nên nếu $p \mid a$ thì $p \mid b$ và khi đó $p^3 \mid a^3+b^3$.

Nếu $p \nmid a$ thì $p \nmid b$, lại có $p \mid a+b$

Áp dụng **Định lý 2,** ta có

$$v_p\left(a^3+b^3\right)=v_p\left(a+b\right)+v_p\left(3\right)\Rightarrow v_p\left(a^3+b^3\right)=v_p\left(a+b\right).$$

Mà $p^2 \mid a^3+b^3$ nên $v_p\left(a^3+b^3\right)\geq 2$, kéo theo $v_p\left(a+b\right)\geq 2$, hay $p^2 \mid a+b$

Lời giải khác.

Do $p \mid a+b$, nên nếu $p \mid a$ thì $p \mid b$ kéo theo $p^3 \mid a^3+b^3$.

Nếu $p\nmid a$ thì $p\nmid b$. Ta có $p^2\mid a^3+b^3=(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right)$, mà $p\nmid a,b$ nên $p\nmid\left((a+b)^2-3ab\right)$.

Ta có

$$v_p\left(a^3+b^3\right)=v_p\left((a+b)\left((a+b)^2-3ab\right)\right)$$
$$=v_p(a+b)+v_p\left((a+b)^2-3ab\right)=v_p(a+b).$$

(vì $p\nmid\left((a+b)^2-3ab\right)$ nên $v_p\left((a+b)^2-3ab\right)=0$)

Mà $p^2\mid a^3+b^3$ nên $v_p\left(a^3+b^3\right)\ge 2$, kéo theo $v_p(a+b)\ge 2$, hay $p^2\mid a+b$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 36. ***(Chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội 2016)*** Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương m có n chữ số, chỉ gồm các chữ số $1,2,3$ và chia hết cho $S(m)$ (với $S(m)$ là tổng các chữ số của m).

Lời giải.

Trường hợp 1. n là lũy thừa của 3. Đặt $n=3^t$

Theo **Định lý 1**, ta có $v_3\left(10^{3^t}-1\right)=v_3(10-1)+v_3\left(3^t\right)=t+2$

$$\Rightarrow 3^{t+2}\,\|\left(10^{3^t}-1\right)$$

$$\Rightarrow\ 3^t\,\|\,\frac{10^{3^t}-1}{9}$$

Ta chọn $m=\dfrac{10^n-1}{9}=111..11$ (n số 1)$\Rightarrow m=\dfrac{10^n-1}{9}\,\vdots\, n$

Trường hợp 2. n không là lũy thừa của 3. Khi đó tồn tại số x sao cho $3^x<n<3^{x+1}$

Ta chọn $S(m)=3^{x+1}$. Ta sẽ chỉ ra tồn tại số m có tổng các chữ số là 3^{x+1} và $m\,\vdots\,3^{x+1}$. Thật vậy,

- Nếu $n \le 2.3^x$, đặt $n = 3^x + t$, $t \in \mathbb{N}^*$. Ta chọn $m = 111...1333...3222...2$, trong đó gồm t chữ số 1, t chữ số 2 và $3^x - t$ chữ số 3

  Khi đó $m = \dfrac{\left(10^t + 2\right)\left(10^{3^x} - 1\right)}{9}$

  Ta có $v_3\left(\left(10^t + 2\right)\left(10^{3^x} - 1\right)\right) = v_3\left(10^t + 2\right) + v_3\left(10^{3^x} - 1\right) = 3 + x$

  $\Rightarrow m = \dfrac{\left(10^t + 2\right)\left(10^{3^x} - 1\right)}{9} \vdots 3^{x+1}$

- Nếu $n > 2.3^x$. Đặt $n = 2.3^x + t$, $t \in \mathbb{N}^*$. Ta chọn $m = 111...1222...2111...1$ trong đó theo thứ tự từ trái sang phải gồm $3^x + t$ số 1, $3^x - t$ số 2, t số 1

  Khi đó $m = \dfrac{\left(10^{3^x + t} + 10^t + 1\right)\left(10^{3^x} - 1\right)}{9}$

  Ta có

  $v_3\left(\left(10^{3^x + t} + 10^t + 1\right)\left(10^{3^x} - 1\right)\right) = v_3\left(10^{3^x + t} + 10^t + 1\right) + v_3\left(10^{3^x} - 1\right) = 1 + x + 2$

  $\Rightarrow m = \dfrac{\left(10^{3^x + t} + 10^t + 1\right)\left(10^{3^x} - 1\right)}{9} \vdots 3^{x+1}$

  Vậy ta có đpcm.

C. PHẦN KẾT LUẬN

1. Rút ra những vấn đề quang trọng của đề tài

Chuyên đề đã đưa ra hệ thống lý thuyết và bài tập liên quan đến bổ đề về mũ đúng giúp học sinh có thể tiếp cận từng bước, theo từng mức độ từ dễ đến khó. Đồng thời trong mỗi bài toán, tác giả đã đưa ra những phân tích, bình luận cụ thể để học sinh có thể thấy được cơ sở và lối tư duy tự nhiên nhất trong lời giải của từng bài toán.

2. Những đề xuất, ý kiến hợp lý

Chuyên đề **"Vận dụng bổ đề về mũ đúng trong các bài toán Số học"** chỉ là một mảng nhỏ trong phân môn Số học đa dạng, phong phú. Tuy nhiên, nếu biết vận dụng kiến thức về bổ đề LTE, thì việc giải quyết một số bài toán Số học sẽ cho lời giải đẹp và đôi khi rất gọn gàng. Chuyên đề này hy vọng sẽ là một tài liệu tốt cho học sinh giỏi, giúp các em tiếp cận với những ứng dụng của **Bổ đề LTE**, hiểu sâu bản chất vấn đề và tư duy trong giải toán.

Tuy đã có nhiều cố gắng nhưng chuyên đề không thể tránh khỏi những sai sót. Nhóm tác giả rất mong nhận được sự góp ý quý báu của các thầy cô để chuyên đề được hoàn thiện hơn. Xin chân thành cảm ơn!

Tài liệu tham khảo

[1] Amir Hossein Parvardi. Lifting The Exponent Lemma (LTE), 2011.

[2] Văn Phú Quốc. Đột phá đỉnh cao bồi dưỡng học sinh giỏi chuyên đề số học, 2015.

[3] Trường đông miền Nam 2019- Hướng tới kỳ thi VMO 2020.

[4] Các diễn đàn toán học:

Diendantoanhoc.net/forum

Forum.mathscope.org

Mathlinks.ro.