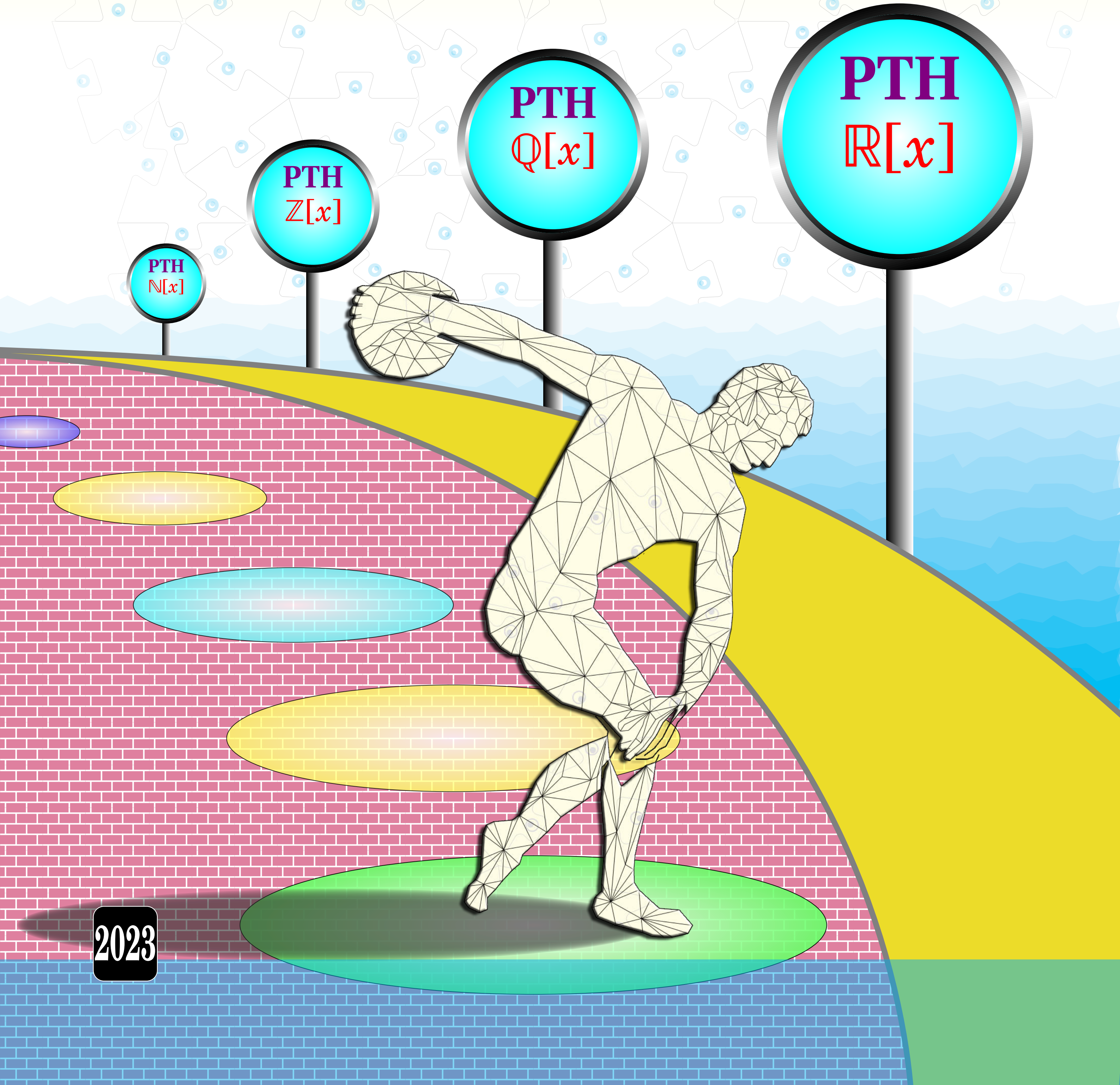
Chuyên đề môn toán học

CHUYÊN ĐỀ HỘI THẢO
DUYÊN HẢI BẮC BỘ 2023

PHƯƠNG TRÌNH HÀM

ĐA THỨC



MỤC LỤC

PHẦN

I

MỞ ĐẦU

1) **Lý do chọn đề tài**
Đa thức được học từ lớp 7, 8, bổ sung dần dần đến lớp 12 và hoàn chỉnh ở bậc Đại học. Đa thức có vị trí rất quan trọng trong Toán học, không những như một đối tượng nghiên cứu trọng tâm của Đại số mà còn là một công cụ đắc lực của Giải tích trong lí thuyết xấp xỉ, lí thuyết biểu diễn, lí thuyết điều khiển, tối ưu,... Ngoài ra lí thuyết đa thức còn được sử dụng nhiều trong toán cao cấp, toán ứng dụng. Đa thức là một chuyên đề quan trọng thuộc chương trình chuyên toán trong các trường THPT chuyên. Các bài toán liên quan đến đa thức thường là những bài tập khó, thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi môn Toán cấp quốc gia, khu vực, quốc tế, và Olympic sinh viên. Phương trình hàm đa thức là một dạng toán khó và thường gặp trong các kỳ thi học sinh giỏi Toán. Để giải được các Phương trình hàm đa thức, chúng ta cần nắm rõ không những các kỹ thuật giải phương trình hàm mà còn cả các tính chất và các đặc trưng cơ bản của đa thức như nghiệm, hệ số, bậc, tính liên tục, tính hữu hạn nghiệm, tính khả vi... Như vậy, bài toán Phương trình hàm đa thức là một sự kết hợp hết sức đẹp đẽ giữa kỹ năng, phương pháp giải Phương trình hàm với các kiến thức và phương pháp giải toán về Đa thức.

2) **Mục đích nghiên cứu**
Đề tài "Phương trình hàm đa thức" được chúng tôi lựa chọn trao đổi cùng các đồng nghiệp về các phương pháp giải phương trình hàm đa thức, phân loại các phương trình hàm đa thức. Thông qua đề tài này, chúng tôi muốn nhấn mạnh, làm rõ tầm quan trọng của Đa thức, Phương trình hàm, Phương trình hàm đa thức trong các bài toán Đại số, Số học, Giải tích trong các kì thi học sinh giỏi Quốc gia và Quốc tế.

3) **Nhiệm vụ nghiên cứu**
Nghiên cứu các phương pháp giải bài toán Phương trình hàm đa thức, phân loại bài toán Phương trình hàm đa thức, trong các kì thi học sinh giỏi toán quốc tế, quốc gia Việt Nam, khu vực và các nước trên thế giới. Cung cấp một tài liệu đầy đủ, công phu, từ cơ bản đến chuyên sâu về phương pháp dạy học phân môn Đa thức, Phương trình hàm cho các đồng nghiệp dạy chuyên toán. Đồng thời cung cấp một tài liệu tham khảo hữu ích cho học sinh chuyên toán tự nghiên cứu và học tập.

4) **Đối tượng và khách thể nghiên cứu**
Đối tượng nghiên cứu của đề tài là học sinh chuyên Toán, đội tuyển học sinh giỏi quốc gia môn toán.

5) **Phạm vi nghiên cứu**

- ☑ Kiến thức trong phạm vi chương trình thi học sinh giỏi quốc gia của Bộ Giáo dục và Đào tạo.
- ☑ Nghiên cứu các đề thi học sinh giỏi toán quốc tế, đề thi học sinh giỏi toán quốc gia Việt Nam và các nước.
- ☑ Nghiên cứu các tài liệu Đa thức, Phương trình hàm có liên quan.

6) **Phương pháp nghiên cứu**

- ☑ Nghiên cứu lý luận: nghiên cứu các tài liệu, chương trình của Bộ Giáo dục và Đào tạo, các tài liệu Đa thức hiện hành, các tạp chí toán học trong và ngoài nước, các tài liệu từ internet,...
- ☑ Trao đổi, tọa đàm với các giáo viên chuyên toán và học sinh chuyên toán trong nước.
- ☑ Tổng hợp, tổng kết kinh nghiệm.

PHẦN

II

NỘI DUNG

Quy ước. Trong toàn bộ chuyên đề này, khi cho đa thức nếu không có giả thiết gì thêm thì ta hiểu đó là đa thức hệ số thực. Bậc của đa thức $P(x)$ được kí hiệu là $\deg(P)$ hoặc $\deg P$.
Kí hiệu. Để nói rằng $f(x)$ là đa thức có hệ số thuộc $\mathbb{K}$, ta kí hiệu: $f(x) \in \mathbb{K}[x]$. Vậy ta có quan hệ $\mathbb{N}[x] \subset \mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x]$.

BÀI 1. ĐA THỨC XÁC ĐỊNH BỞI PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỐI SỐ

A. CƠ SỞ LÝ THUYẾT VÀ MỘT SỐ VÍ DỤ GIẢI TOÁN

Một một số kiến thức về đa thức thường dùng trong bài toán Phương trình hàm đa thức.

1) Nếu đa thức $P(x)$ thỏa mãn $P(x) = P(x+a), \forall x \in \mathbb{R}$ (với a là một hằng số khác không nào đó) thì $P(x) \equiv c$ (với c là hằng số tùy ý). Hay một hàm số đa thức và tuần hoàn là hàm hằng.

2) Nếu đa thức $P(x)$ có vô số nghiệm thì $P(x) \equiv 0$, tức là $P(x) = 0, \forall x$. Quá trình làm toán ta hay gặp những tình huống áp dụng tính chất này như sau:

   i) Nếu số nghiệm của đa thức $P(x)$ lớn hơn $\deg(P)$ thì $P(x) = 0, \forall x$.

   ii) Nếu hai đa thức bằng nhau tại vô số điểm thì hai đa thức đó trùng nhau, tức là đa thức hiệu sẽ là đa thức không.

3) Nếu $P(x)$ là đa thức thỏa mãn $P(x) = P(-x)$ với mọi x (P là đa thức và là hàm chẵn) thì tồn tại đa thức $Q(x)$ sao cho $P(x) = Q\left(x^2\right)$.

4) Nếu $P(x)$ là đa thức thỏa mãn $P(-x) = -P(x)$ với mọi x (P là đa thức và là hàm lẻ) thì tồn tại đa thức $Q(x)$ sao cho $P(x) = xQ\left(x^2\right)$.

5) Một đa thức $P(x)$ còn được viết thành $P(x) = G\left(x^2\right) + xL\left(x^2\right)$ với $G(x), L(x)$ là những đa thức.

6) Một hàm số f được gọi là hàm hữu tỷ (hay còn gọi là hàm phân thức hữu tỉ) nếu f có dạng là thương của hai đa thức; hay $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x), Q(x)$ là những đa thức.

Bài 1. Chứng minh rằng nếu đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P(x) = P(x+a), \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } a \text{ là một hằng số khác không nào đó)}$$

thì $P(x) \equiv c$ (với c là hằng số tùy ý).

Lời giải

Giả sử $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Xét đa thức:

$$Q(x) = P(x) - a_0 = a_n x^n + \cdots + a_1 x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó $Q(0) = 0$. Mặt khác, với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có:

$$Q(x+a) = P(x+a) - a_0 = P(x) - a_0 = Q(x).$$

Suy ra đa thức $Q(x)$ có vô số nghiệm: $0, a, 2a, 3a, \ldots$
Do đó $Q(x)$ là đa thức không hay $P(x) = a_0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 2. Hãy tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn:

$$P(x+2011) = P(x+2009) + 70, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải

Trong (1) thay x bởi $x - 2009$ được $P(x+2) = P(x) + 70, \forall x \in \mathbb{R}$. (2)
Đặt $P(x) = 35x + G(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $G(x) \in \mathbb{R}[x]$. Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned}
&35(x+2) + G(x+2) = 35x + G(x) + 70, \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &G(x+2) = G(x), \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &G(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}\, (c \text{ là hằng số bất kì}).
\end{aligned}$$

Vậy $f(x) = 35x + c, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Tất cả các đa thức thỏa mãn đề bài là

$$P(x) = 35x + c, \forall x \in \mathbb{R}\, (c \text{ là hằng số bất kì}).$$

Cách khác. Đặt $P(0) = 2c$. Trong (2) lấy $x = 0, 2, 4, 6, \ldots, 2n$ ta được

$$\begin{cases} P(2) = P(0) + 70 \\ P(4) = P(2) + 70 \\ P(6) = P(4) + 70 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(2n) = P(2n-2) + 70 \end{cases} \Rightarrow P(2n) = P(0) + 70n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra $P(2n) = 35.2n + c, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Bởi vậy đa thức $P(x) - 35x - c$ có vô số nghiệm. Suy ra

$$P(x) - 35x - c \equiv 0.$$

Hay $P(x) = 35x + c, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 3. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn:

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải

Đặt $P(x) = G(x) + x^2$. Khi đó $G(x)$ cũng là đa thức hệ số thực.
Thay vào (1) ta được $G(x+1) = G(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $G(x) \equiv c$ (hằng số). Suy ra

$$P(x) = x^2 + c, \forall x \in \mathbb{R}\, (\text{với } c \text{ là hằng số tùy ý}).$$

Thử lại thấy thỏa mãn.
Cách khác. Đặt $P(1) = c$. Trong (1) lần lượt lấy $x = 1, 2, 3, \ldots, m$ ta được

$$\begin{cases} P(2) = P(1) + 3 \\ P(3) = P(2) + 5 \\ \ldots\ldots\ldots \\ P(m+1) = P(m) + 2m + 1 \end{cases} \Rightarrow P(m+1) = P(1) + (3 + 5 + \cdots + 2m + 1).$$

Suy ra $P(m+1) = c + (m+1)^2, \forall m = 1, 2, \ldots$, từ đó $P(x) = c + x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy tất cả các đa thức cần tìm là

$$P(x) = x^2 + c, \forall x \in \mathbb{R}\, (\text{với } c \text{ là hằng số tùy ý}).$$

Bài 4. Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn:

$$P\left(x+\frac{1}{n}\right)+P\left(x-\frac{1}{n}\right)=2P(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải

Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow P\left(x+\frac{1}{n}\right)-P(x)=P(x)-P\left(x-\frac{1}{n}\right), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Xét đa thức $Q(x)=P\left(x+\frac{1}{n}\right)-P(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (2), ta được:

$$Q(x)=Q\left(x-\frac{1}{n}\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Như vậy $Q(x)$ là đa thức hằng. Suy ra:

$$\begin{aligned}
& P\left(x+\frac{1}{n}\right)-P(x)=c, \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & P\left(x+\frac{1}{n}\right)-P(x)=cn\left[\left(x+\frac{1}{n}\right)-x\right], \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & P\left(x+\frac{1}{n}\right)-cn\left(x+\frac{1}{n}\right)=P(x)-cnx, \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & R\left(x+\frac{1}{n}\right)=R(x), \forall x \in \mathbb{R} \;\; (\text{với } R(x)=P(x)-cnx) \\
\Rightarrow & R(x)=b, \forall x \in \mathbb{R} \; (b \text{ là hằng số tùy ý}) \\
\Rightarrow & P(x)=cnx+b, \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Thử lại ta thấy đa thức $P(x)=ax+b, \forall x \in \mathbb{R}$ (a, b là những hằng số) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Lưu ý. Do ba số $\left(x-\frac{1}{n}\right), x, \left(x+\frac{1}{n}\right)$ cách đều nhau (lập thành cấp số cộng) nên dễ nhận ra đẳng thức: $\left(x+\frac{1}{n}\right)-x=x-\left(x-\frac{1}{n}\right)$.

Bài 5. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$(x-1)P(x-1)-(x+2)P(x)=0, \;\forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải

Trong (1) lần lượt lấy $x=1, x=2, \ldots, x=n$ $(n \in \mathbb{Z}, n>3)$, ta được $x=1, x=2, \ldots, x=n$ là nghiệm của $P(x)$. Vậy $P(x)$ có vô số nghiệm nên $P(x) \equiv 0$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 6. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn điều kiện

$$xP(x-4)=(x-2016)P(x), \;\forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải

Trong (1) lần lượt thay x bởi $0, 4, 8, \ldots, 2016$ ta suy ra $0, 4, 8, \ldots, 2012$ là nghiệm của $P(x)$. Đặt

$$P(x)=x(x-4)(x-8)\ldots(x-2012)Q(x), \;\forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó $Q(x)$ cũng là đa thức và thay vào (1) được

$$Q(x-4) = Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4, 8, \ldots, 2016\}.$$

Suy ra $Q(x)$ là đa thức hằng, do đó:

$$P(x) = Cx(x-4)(x-8)\ldots(x-2012),\ \forall x \in \mathbb{R}\ (C \text{ là hằng số}).$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 7. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn điều kiện

$$xP(x-4) = (x-2015)P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải

Trong (1) lần lượt thay x bởi 2015, 2011,..., $2015-4n$ ta suy ra

$$2011, 2007, \ldots, 2015 - 4(n+1)$$

là nghiệm của $P(x)$. Vậy $P(x)$ có vô số nghiệm, suy ra $P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lưu ý. Sự khác nhau cơ bản của bài toán 6 và bài toán 7 là:

$$\frac{2016}{4} \in \mathbb{N}^*, \frac{2015}{4} \notin \mathbb{N}^*.$$

Bài 8. Cho số nguyên dương k. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$(x-2015)^k P(x) = (x-2016)^k P(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải

Từ (1) lấy $x = 2016$ ta được $P(2016) = (2016-2016)^k P(2017)$, suy ra 2016 là nghiệm bội lớn hơn hoặc bằng k của $P(x)$. Đặt

$$P(x) = (x-2016)^k Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó $Q(x)$ là đa thức thỏa mãn

$$(x-2015)^k (x-2016)^k Q(x) = (x-2016)^k (x-2015)^k Q(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hay $Q(x) = Q(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R}$, nghĩa là $Q(x)$ là đa thức hằng số.
Thử lại ta thấy đa thức $P(x) \equiv C(x-2016)^k$ (C là hằng số) thỏa mãn yêu cầu đề bài.

B. BÀI TẬP

1. Đề bài

Bài 9. Chứng minh rằng một hàm hữu tỷ tuần hoàn là hàm hằng.

Bài 10. Chứng minh rằng nếu $R(x)$ là hàm hữu tỷ và $R(x) = R\left(x^2\right)$, thì $R(x)$ là hàm hằng

Bài 11. Cho hàm hữu tỷ $R(x)$ thỏa mãn $R(x) = R(-x)$ (hàm chẵn). Chứng minh rằng tồn tại một hàm hữu tỷ $S(x)$ sao cho $R(x) = S\left(x^2\right)$.

Bài 12. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(1) = 2014$ và

$$(x+1)(x+2)P(x) = x^2 P(x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 13 (Đề nghị thi Olympic 30/4/2010).
Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn:

$$(x+4)\,P(x)+2x = xP(x+2),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài 14 (Olympic Moldova-2004). Tìm đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$, thỏa mãn:

$$(x^3+3x^2+3x+2)P(x-1) = (x^3-3x^2+3x-2)P(x), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài 15. Cho n là một số nguyên dương. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực f, g thỏa mãn

$$\left(x^2+x+1\right)^n f\left(x^2-x+1\right) = \left(x^2-x+1\right)^n g\left(x^2+x+1\right),$$

với mọi số thực x.

Bài 16. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$, $Q(x)$ sao cho

$$P(x)Q(x+1) = P(x+2016)Q(x).$$

Bài 17. Cho số nguyên dương n. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ và $Q(x)$ thỏa mãn

$$P(x)P(x+1)\cdots P(x+n) = Q(x)Q(x+1)\cdots Q(x+n),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài 18. Tìm các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn điều kiện:

$$P(x)P(x+3) = P(x+1)P(x+2),\ \forall x.$$

Bài 19. Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn điều kiện

$$P(xy) = P(x)P(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Bài 20. Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn điều kiện

$$P(u^2-v^2) = P(u+v)P(u-v),\ \forall u,v\in\mathbb{R}.$$

Bài 21 (Baltic Way 2015). Cho $n\in\mathbb{Z}$, $n>1$. Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ khác hằng số và thỏa mãn điều kiện

$$P(x)P(x^2)P(x^3)\dots P(x^n) = P\left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài 22 (Gia Lai TST 2018). Cho n là số nguyên lớn hơn 1. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực, khác hằng số và thỏa mãn điều kiện

$$P(x)P(x^3)P(x^5)\dots P(x^{2n-1}) = P(x^{n^2}), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài 23 (TST Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa ngày 1 năm học 2019-2020).
Tìm tất cả các cặp đa thức $(P,\ Q)$ với hệ số thực thỏa mãn:

$$P\left(x+Q\left(y\right)\right)=Q\left(x+P\left(y\right)\right)$$

với mọi số thực x và y.

Bài 24 (China TST 2009). Tìm tất cả các đa thức hệ số nguyên $P(x)$ thỏa mãn điều kiện: với mọi bộ ba số nguyên (a,b,c) sao cho $a+b+c\neq 0$, ta luôn có $\dfrac{P(a)+P(b)+P(c)}{a+b+c}$ là một số nguyên.

2. Lời giải

Bài 9. Giả sử $R(x)$ là hàm hữu tỉ tuần hoàn, tức là $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x), Q(x)$ là hai đa thức nguyên tố cùng nhau; và tồn tại $T\neq 0$ sao cho $R(x)=R(x+T)$. Lấy $a\in\mathbb{R}$ sao cho $Q(a)\neq 0$.
Do $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ và $R(a)=R(a+T)=R(a+2T)=\cdots$
(hay $R(a)=\dfrac{P(a)}{Q(a)}=\dfrac{P(a+T)}{Q(a+T)}=\dfrac{P(a+2T)}{Q(a+2T)}=\cdots$) nên mọi số hạng của dãy số

$$a,a+T,a+2T,\ldots,a+nT,a+(n+1)T,\ldots$$

(có thể trừ ra những số $a+\ell T$ sao cho $Q(a+\ell T)=0$) đều là nghiệm của phương trình

$$P(x)=R(a)Q(x),$$

do đó đa thức $P(x)-R(a)Q(x)$ có vô số nghiệm; cho nên $P(x)=R(a)Q(x)$ với mọi x sao cho $Q(x)\neq 0$. Do đó $R(x)=R(a)$ với mọi x. Hay $R(x)$ là hàm hằng.

Bài 10. Giả sử $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Ta chọn số $M>1$ sao cho với mọi nghiệm r của đa thức $Q(x)$, ta có $|r|<M$. Cố định số thực $t>M$ bất kỳ. Khi đó $C=R(t)$ là một số xác định. Ta có

$$C=R(t)=R\left(t^2\right)=R\left(t^4\right)=\cdots=R\left(t^{2^n}\right)=\cdots$$

Do đó phương trình $P(x)-CQ(x)=0$ có vô số nghiệm, cho nên $P(x)=CQ(x)$ với mọi x; hay $R(x)=C$ với mọi x.
Lưu ý.

1) Giả sử $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, ta cần chứng minh $P(x)=CQ(x)$ với mọi x (với C là hằng số).

2) Để chứng minh $P(x)=CQ(x)$ với mọi x ta chỉ cần chứng minh đa thức $P(x)-CQ(x)=0$ có vô số nghiệm.

3) Để chứng minh đa thức $P(x)-CQ(x)=0$ có vô số nghiệm ta chỉ cần chứng minh có vô số t sao cho $C=R(t)=\dfrac{P(t)}{Q(t)}$.

Bài 11. Ta có $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức nguyên tố cùng nhau. Theo giả thiết ta có
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=R(x)=R(-x)=\frac{P(-x)}{Q(-x)};$$
do đó $P(x)Q(-x)=Q(x)P(-x)$. (1)
Do $\gcd(P(x),Q(x))=1$, nên từ $Q(x)\mid P(x)Q(-x)$ ta suy ra $Q(x)\mid Q(-x)$. (2)
Mà $Q(x)$ và $Q(-x)$ là hai đa thức cùng bậc nên từ (2) suy ra $Q(-x)=CQ(x)$ (C là hằng số); thay vào (1) ta được $P(-x)=CP(x)$. Từ $P(-x)=CP(x)$, so sánh hệ số dẫn đầu ta suy ra $C=\pm1$.

1) Trường hợp 1: $C=1$. Khi đó $P(x)=P(-x)$ và $Q(x)=Q(-x)$.

- ☑ Do $P(x)=P(-x)$ nên tồn tại $P_1(x)\in\mathbb{R}[x]$ sao cho $P(x)=P_1\left(x^2\right)$.
- ☑ Do $Q(x)=Q(-x)$ nên tồn tại $Q_1(x)\in\mathbb{R}[x]$ sao cho $Q(x)=Q_1\left(x^2\right)$.

Xét hàm hữu tỷ $S(x)=\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$. Khi đó
$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1\left(x^2\right)}{Q_1\left(x^2\right)}=S\left(x^2\right).$$

2) Trường hợp 2: $C=-1$. Khi đó $P(-x)=-P(x)$ và $Q(-x)=-Q(x)$.

- ☑ Do $P(-x)=-P(x)$ nên tồn tại $P_2(x)\in\mathbb{R}[x]$ sao cho $P(x)=xP_2\left(x^2\right)$.
- ☑ Do $Q(-x)=-Q(x)$ nên tồn tại $Q_2(x)\in\mathbb{R}[x]$ sao cho $Q(x)=xQ_2\left(x^2\right)$.

Xét hàm hữu tỷ $S(x)=\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$. Khi đó
$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_2\left(x^2\right)}{Q_2\left(x^2\right)}=S\left(x^2\right).$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 12. Xét đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn $P(1)=2014$ và
$$(x+1)(x+2)P(x)=x^2P(x+1),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$
Từ (1) cho $x=0$ ta được $P(0)=0$, cho $x=-2$ được
$$4P(-1)=0\Rightarrow P(-1)=0.$$
Vậy $0,-1$ là nghiệm của $P(x)$. Do đó $P(x)$ có dạng
$$P(x)=x(x+1)Q(x),\ \forall x\in\mathbb{R} \tag{2}$$
với $Q(x)$ là đa thức hệ số thực. Thay (2) vào (1) ta được
$$\begin{aligned}&x(x+1)(x+1)(x+2)Q(x)=x^2(x+1)(x+2)Q(x+1),\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&(x+1)Q(x)=xQ(x+1),\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{3}$$
Từ (3) cho $x=0$ ta được $Q(0)=0$. Vậy $Q(x)$ có dạng
$$Q(x)=xR(x),\ \forall x\in\mathbb{R} \tag{4}$$

với $R(x)$ là đa thức hệ số thực. Thay (4) vào (3) ta được

$$\begin{aligned} & x(x+1)R(x) = x(x+1)R(x+1), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & R(x) = R(x+1), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & R(x) = C, \forall x \in \mathbb{R} \ \left(\text{với } C \text{ là hằng số}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Do (5) và (4) nên $Q(x) = Cx, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $P(x) = Cx^2(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$. Vì $P(1) = 2014$ nên

$$2C = 2014 \Leftrightarrow C = 1007.$$

Vậy $P(x) = 1007x^2(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý. Từ (3) suy ra $(x+1)Q(x) \vdots x$, mà hai đa thức $x+1$ và x nguyên tố cùng nhau nên $Q(x) \vdots x$, suy ra $\frac{Q(x)}{x}$ là đa thức. Do đó từ (3) ta thu được

$$\begin{aligned} & \frac{Q(x)}{x} = \frac{Q(x+1)}{x+1}, \forall x \notin \{0, -1\} \\ \Rightarrow & Q(x) = Cx, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bài 13. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn:

$$(x+4)\,P(x) + 2x = xP(x+2), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Đặt $P(x) = Q(x) + ax$, thay vào (1) được

$$(x+4)\left[Q(x) + ax\right] + 2x = x\left[Q(x+2) + a(x+2)\right], \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2) suy ra cần chọn hằng số a sao cho

$$\begin{aligned} & (x+4)\,ax + 2x = ax\,(x+2), \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & ax^2 + (4a+2)x = ax^2 + 2ax, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & 4a + 2 = 2a \Leftrightarrow 2a = -2 \Leftrightarrow a = -1. \end{aligned}$$

Vậy nếu đặt $P(x) = Q(x) - x, \ \forall x \in \mathbb{R}$, thay vào (1) được

$$(x+4)\,Q(x) = xQ(x+2), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Đến đây ta làm tương tự như bài toán 5 hoặc 6 hoặc 7.

Bài 14. Trước hết ta tìm các nghiệm của đa thức $P(x)$. Từ giả thiết ta có

$$(x+2)(x^2+x+1)P(x-1) = (x-2)(x^2-x+1)P(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây chọn $x = -2$ suy ra $P(-2) = 0$, chọn $x = -1$ suy ra $P(-1) = 0$ (do theo trên ta có $P(-2) = -9P(-1)$), chọn $x = 0$ suy ra $P(0) = 0$, chọn $x = 1$ suy ra $P(1) = 0$. Vậy $P(x) = x(x-1)(x+1)(x+2)Q(x)$, với $Q(x)$ là đa thức hệ số thực. Tiếp theo thay $P(x)$ vào đẳng thức ở đề bài ta được

$$\begin{aligned} & [(x+2)(x^2+x+1)](x-1)(x-2)x(x+1)Q(x-1) \\ = & [(x-2)(x^2-x+1)]x(x-1)(x+1)(x+2)Q(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&(x^2+x+1)Q(x-1)=(x^2-x+1)Q(x),\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,1,-2,2\}\\ \Rightarrow&(x^2+x+1)Q(x-1)=(x^2-x+1)Q(x),\forall x\in\mathbb{R}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Cách 1. Từ (1) suy ra

$$(x^2-x+1)Q(x)\,\vdots\,(x^2+x+1). \qquad (2)$$

Mà $\left(x^2+x+1,x^2-x+1\right)=1$ nên từ (1) suy ra $Q(x)\,\vdots\,(x^2+x+1)$, hay đa thức $Q(x)$ có dạng: $Q(x)=(x^2+x+1)R(x)$, với $R(x)$ là đa thức hệ số thực. Lúc này (1) trở thành:

$$\begin{aligned}&\frac{Q(x-1)}{x^2-x+1}=\frac{Q(x)}{x^2+x+1},\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&\frac{Q(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)+1}=\frac{Q(x)}{x^2+x+1},\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&R(x-1)=R(x),\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Suy ra $R(x)\equiv C$ (hằng số), vậy $Q(x)\equiv C(x^2+x+1)$. Do đó

$$P(x)=C(x^2+x+1)x(x-1)(x+1)(x+2),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại:

$$\begin{aligned}&(x+2)(x^2+x+1)C(x^2-x+1)(x-1)(x-2)x(x+1)\\ =&(x-2)(x^2-x+1)C(x^2+x+1)x(x-1)(x+1)(x+2)\ \text{(thỏa mãn)}.\end{aligned}$$

Cách 2. Từ (1) ta có

$$\frac{Q(x)}{x^2+x+1}=\frac{Q(x-1)}{x^2-x+1}=\frac{Q(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)+1} \qquad (3)$$

Xét hàm hữu tỷ $H(x)=\dfrac{Q(x)}{x^2+x+1}$; khi đó theo (3) ta có $H(x)=H(x-1)$ hay hàm hữu tỷ H tuần hoàn chu kỳ 1. Do đó theo bài toán 9 (ở trang 12) suy ra H là hàm hằng. Cho nên

$$Q(x)\equiv C(x^2+x+1).$$

Dẫn tới

$$P(x)=C(x^2+x+1)x(x-1)(x+1)(x+2),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại đúng.

Bài 15. Giả sử tồn tại các đa thức hệ số thực f,g thỏa mãn

$$\left(x^2+x+1\right)^n f\left(x^2-x+1\right)=\left(x^2-x+1\right)^n g\left(x^2+x+1\right), \qquad (1)$$

với mọi số thực x.Đặt $R(x)=\dfrac{f(x)}{x^n}$, $S(x)=\dfrac{g(x)}{x^n}$. Khi đó do (1) nên

$$R\left(x^2-x+1\right)=S\left(x^2+x+1\right).$$

Đặt $T(x)=R\left(x^2-x+1\right)=S\left(x^2+x+1\right)$. Khi đó

$$T(1-x)=R\left((1-x)^2-(1-x)+1\right)=R\left(x^2-x+1\right)=T(x)$$

$$= S\left(x^2+x+1\right) = S\left((-x-1)^2+(-x-1)+1\right) = T(-x-1).$$

Như vậy $T(1-x) = T(-x-1)$ với mọi x. Từ đây, thay x bởi $1-x$, ta được $T(x) = T(x-2)$. Áp dụng bài toán 9 (ở trang 12) suy ra $T(x)$ là hàm hằng. Dẫn tới $R(x) = S(x) = C$ là hằng số. Do đó $f(x) = g(x) = Cx^n$ (với $n \in \mathbb{N}$).

Bài 16. Giả sử tồn tại các đa thức hệ số thực $P(x)$, $Q(x)$ sao cho

$$P(x)Q(x+1) = P(x+2016)Q(x). \tag{1}$$

Xét đa thức $R(x) = P(x)P(x+1)\cdots P(x+2015)$. Khi đó

$$\begin{aligned} Q(x)R(x+1) &= Q(x)P(x+1)P(x+2)\cdots P(x+2016) \\ Q(x+1)R(x) &= Q(x+1)P(x)P(x+1)\cdots P(x+2015) \end{aligned}$$

cho nên

$$\begin{aligned} &\frac{Q(x)R(x+1)}{Q(x+1)R(x)} = \frac{Q(x)P(x+2016)}{Q(x+1)P(x)} \\ \Rightarrow &\frac{R(x+1)}{R(x)} = \frac{P(x+2016)}{P(x)} \overset{(1)}{=} \frac{Q(x+1)}{Q(x)} \\ \Rightarrow &\frac{Q(x+1)}{R(x+1)} = \frac{Q(x)}{P(x)}. \end{aligned}$$

Như vậy $\dfrac{Q(x)}{R(x)} = \dfrac{Q(x+1)}{R(x+1)}$. Nghĩa là hàm hữu tỷ $\dfrac{Q(x)}{R(x)}$ tuần hoàn chu kỳ 1. Áp dụng bài toán 9 (ở trang 12) ta suy ra $\dfrac{Q(x)}{R(x)}$ là hàm hằng. Do đó

$$Q(x) = CR(x) = CP(x)P(x+1)\cdots P(x+2015).$$

Vậy $P(x)$ là đa thức hệ số thực tùy ý và $Q(x) = CP(x)P(x+1)\cdots P(x+2015)$ (với C là hằng số).

Bài 17. Giả sử tồn tại các đa thức hệ số thực $P(x)$ và $Q(x)$ thỏa mãn

$$P(x)P(x+1)\cdots P(x+n) = Q(x)Q(x+1)\cdots Q(x+n), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Từ (1) thay x bởi $x+1$ ta được

$$Q(x+1)\cdots Q(x+n)Q(x+n+1) = P(x+1)\cdots P(x+n)P(x+n+1), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$P(x)Q(x+n+1) = Q(x)P(x+n+1), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Cách 1. Đặt $D(x) = \gcd(P(x), Q(x))$. Khi đó

$$\gcd(P(x+n+1), Q(x+n+1)) = D(x+n+1).$$

Đặt $P(x) = D(x)A(x)$ và $Q(x) = D(x)B(x)$, với $A(x)$ và $B(x)$ là những đa thức không có nhân tử chung. Từ (3) ta có

$$D(x)A(x)D(x+n+1)B(x+n+1) = D(x)B(x)D(x+n+1)A(x+n+1)$$

hay
$$A(x+n+1)B(x) = A(x)B(x+n+1). \tag{4}$$
Từ (4) ta có $B(x)A\,(x+n+1) \vdots A(x)$, mà $(A(x), B(x)) = 1$ nên
$$A\,(x+n+1) \vdots A(x). \tag{5}$$
Từ (4) ta có $B(x+n+1)A(x) \vdots A(x+n+1)$, mà $(A(x+n+1), B(x+n+1)) = 1$ nên
$$A(x) \vdots A(x+n+1). \tag{6}$$
Để ý rằng $A\,(x+n+1)$, $A(x)$ là hai đa thức cùng bậc và cùng hệ số dẫn đầu nên từ (5), (6) ta suy ra
$$A\,(x+n+1) = A(x). \tag{6}$$
Từ (6) và (4) ta có
$$B\,(x+n+1) = B(x). \tag{7}$$
Từ (7) và (6) suy ra $A(x)$, $B(x)$ là những đa thức hằng; do đó $P(x) = kQ(x)$ với k là hằng số. Thay vào (1) ta được $k^{n+1} = 1$. Như vậy, ta thu được kết quả như sau:

- Nếu n chẵn (khi đó $k = 1$) thì $P(x) = H(x)$, $G(x) = H(x)$ với $H(x)$ là đa thức hệ số thực tùy ý.
- Nếu n lẻ (khi đó $k = 1$ hoặc $k = -1$) thì
  - $P(x) = H(x)$, $G(x) = H(x)$ với $H(x)$ là đa thức hệ số thực tùy ý.
  - $P(x) = T(x)$, $G(x) = -T(x)$ với $T(x)$ là đa thức hệ số thực tùy ý.

Cách 2. Xét hàm số $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Từ (3) ta có
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x+n+1)}{Q(x+n+1)} \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(x+n+1).$$
Như vậy φ là hàm phân thức hữu tỷ và là hàm tuần hoàn; do đó φ là hàm hằng (do áp dụng kết quả bài toán 9 ở trang 12). Suy ra $P(x) = kQ(x)$ với k là hằng số. Đến đây ta trình bày như cách 1.

Bài 18. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn điều kiện:
$$P(x)P(x+3) = P(x+1)P(x+2),\ \forall x. \tag{1}$$
Cách 1. Dễ thấy đa thức hằng số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Giả sử đa thức $P(x)$ (với $\deg P \geq 1$) thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Đặt S là tập tất cả các nghiệm (kể cả nghiệm phức) của $P(x)$, khi đó S là tập hữu hạn và $S \neq \emptyset$. Giả sử $z \in S$. Do $P(z) = 0$ nên trong (1) lấy $x = z$ ta được
$$P(z+1)P(z+2) = 0.$$
Suy ra $(z+1) \in S$ hoặc $(z+2) \in S$. Lập luận tương tự dẫn đến S là tập vô hạn, vô lí.
Vậy $P(x) = c$ (với c là hằng số tùy ý).
Cách 2. Xét hàm hữu tỷ $R(x) = \dfrac{P(x)}{P(x+1)}$. Khi đó
$$R(x+2) = \frac{P(x+2)}{P(x+3)} \overset{(1)}{=} \frac{P(x)}{P(x+1)} = R(x).$$
Như vậy R là hàm phân thức hữu tỷ và là hàm tuần hoàn; do đó R là hàm hằng (do áp dụng kết quả bài toán 9 ở trang 12). Suy ra $P(x) = kP(x+1)$ với k là hằng số. Dễ thấy $k = 1$, do đó $P(x)$ là đa thức hằng. Thử lại thấy $P(x) = c$ (với c là hằng số tùy ý) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Bài 19. Giả sử tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn điều kiện

$$P(xy) = P(x)P(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Dễ thấy đa thức $P(x) \equiv 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.
Tiếp theo xét $P(x) \not\equiv 0$. Giả sử $\deg(P) = n \geq 0$. Trong (1) cho $x = y = 0$ ta được

$$P(0) = [P(0)]^2 \Leftrightarrow P(0) \in \{0, 1\}.$$

- Nếu $P(0) = 1$ thì từ (1) lấy $y = 0$ ta nhận được $P(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $P(0) = 0$ thì $P(x) = xQ(x)$, với $Q(x)$ là đa thức có bậc nhỏ hơn $\deg(P)$ một đơn vị. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} & xyQ(xy) = xyQ(x)Q(y), \, \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & Q(xy) = Q(x)Q(y), \, \forall x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(do từ $Q(xy) = Q(x)Q(y)$, $\forall x \neq 0, y \neq 0$, suy ra $Q(xy) - Q(x)Q(y) \equiv 0$). Sử dụng kết quả ở trên ta được $Q(x) \equiv 1$ hoặc $Q(x) \equiv xQ_1(x)$, với $Q_1(x)$ là đa thức thỏa mãn điều kiện $\deg(Q_1) = \deg(Q) - 1$ và

$$Q_1(xy) = Q_1(x)Q_1(y), \, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vì bậc của đa thức khác không, cho trước là hữu hạn nên tiếp tục quá trình trên sau hữu hạn bước ta thu được $P(x) \equiv 1$ hoặc $P(x) \equiv x^n$.

Sau khi thử lại ta kết luận: Các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x) \equiv 0, \ P(x) \equiv 1, \ P(x) \equiv x^n \ \ (n \in \mathbb{N}^*).$$

Bài 20. Giả sử tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn điều kiện

$$P(u^2 - v^2) = P(u+v)P(u-v), \ \forall u, v \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Cách 1. Đặt $x = u + v$, $y = u - v$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$P(xy) = P(x)P(y), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sau đó sử dụng bài toán 19.
Cách 2. Ta có

$$P(x^2 - y^2) = P(x+y)P(x-y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Dễ thấy đa thức $P(x) \equiv 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.
Tiếp theo giả sử $P(x) \not\equiv 0$. Đặt $\deg(P) = d \geq 0$. Trong (2) cho $y = 0$ ta được

$$P\left(x^2\right) = P(x)^2, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dễ thấy $P(x)$ monic, do đó ta có $P(x) = x^d + R(x)$ với $\deg R(x) < d$. Ta có

$$x^{2d} + R\left(x^2\right) = x^{2d} + R(x)^2 + 2x^d R(x).$$

Do đó

$$R\left(x^2\right) = R(x)^2 + 2x^d R(x). \tag{3}$$

Giả sử $\deg R(x) = r \geq 1$; khi đó bậc của $R\left(x^2\right)$ là $2r$ và bậc của $R(x)^2 + 2x^d R(x)$ là

$$\max\{2r, r + d\} = r + d;$$

suy ra $2r = r + d \Rightarrow r = d$, ta gặp mâu thuẫn. Vậy $\deg R(x) = r \leq 0$. Nếu $R(x) = C$ (với C là hằng số khác 0) thì thay vào (3) ta nhận được điều vô lý. Do đó $R(x) = 0$ và $P(x) = x^d$. Thử lại đúng. Do đó, các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài bao gồm $P(x) = 0$, $P(x) = x^d$ với $d \in \mathbb{N}$.

Cách 3. Giả sử đa thức $P(x)$ có nghiệm $r \neq 0$ (r thực hoặc phức). Ta xét các số x, y thỏa mãn $x - y = r$. Khi đó

$$x^2 - y^2 = r(x+y) = r\left(2x - (x-y)\right) = r(2x - r),$$

và $P(r(2x-r)) = 0$ với mỗi x (x cũng có thể là số phức). Do $r \neq 0$, nên với mỗi số thực t, chọn $x = \dfrac{r^2+t}{2r}$ (để cho $t = 2rx - r^2$), khi đó $P(t) = 0$. Như vậy $P(t) = 0$ với mọi số thực t. Do đó $P(x) = 0$. Như vậy, nếu $P(x)$ có nghiệm khác 0 thì $P(x)$ là đa thức 0. Do đó nếu $P(x)$ khác đa thức không thì $P(x)$ chỉ có nghiệm $x = 0$; cho nên $P(x) = cx^d$ với $c \neq 0$ và $d \in \mathbb{N}$. Thay vào (1) ta được $P(x) = x^d$ với $d \in \mathbb{N}$. Vậy các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài bao gồm $P(x) = 0$, $P(x) = x^d$ với $d \in \mathbb{N}$.

Bài 21. Giả sử tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ khác hằng số và thỏa mãn điều kiện

$$P(x)P(x^2)P(x^3)\dots P(x^n) = P\left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Ta chia ra các trường hợp như sau:

- Trường hợp $P(x) = ax^m$ $(a \neq 0, m \in \mathbb{N}^*)$. Thay vào (1), ta được:

$$\begin{aligned}
&ax^m.ax^{2m}\dots ax^{nm} = ax^{\frac{mn(n+1)}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &a^n x^{m(1+2+\dots+n)} = ax^{\frac{mn(n+1)}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &a^{n-1}x^{\frac{mn(n+1)}{2}} = ax^{\frac{mn(n+1)}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &a^{n-1} = a \Leftrightarrow a(a^{n-2}-1) = 0.
\end{aligned}$$

  Như vậy, nếu n lẻ thì $a = 1$, nếu n chẵn và $n > 2$ thì $a = \pm 1$, nếu $n = 2$ thì a là số khác 0 bất kì.

- Tiếp theo giả sử $P(x) = ax^m + Q(x)$, trong đó $a \neq 0$, Q là đa thức khác đa thức không và $\deg(Q) = k < m$. Thay vào (1), ta được:

$$\begin{aligned}
&\left[ax^m + Q(x)\right]\left[ax^{2m} + Q(x^2)\right]\dots\left[ax^{nm} + Q(x^n)\right]\\
=&\left[ax^{\frac{mn(n+1)}{2}} + Q\left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)\right], \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{2}$$

  Bậc của đa thức $Q\left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$ là $\dfrac{kn(n+1)}{2}$.
  Bậc của đa thức $Q(x).ax^{2m}\dots ax^{nm}$ là

$$\begin{aligned}
&k + (2m + \dots + nm) = k + m\left(1 + 2 + \dots + n\right) - m\\
=&k + \frac{mn(n+1)}{2} - m = k + \frac{m(n^2+n-2)}{2} = k + \frac{m(n-1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

  Như vậy so sánh bậc của đơn thức cao thứ 2 ở hai vế của (2), ta được:

$$\frac{kn(n+1)}{2} = k + \frac{m(n-1)(n+2)}{2}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow k\left(n^2+n-2\right)=m(n-1)(n+2)\\
&\Leftrightarrow k(n-1)(n+2)=m(n-1)(n+2)\\
&\Leftrightarrow (n-1)(n+2)(k-m)=0. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Do $n>1$ nên từ (3) suy ra $k=m$, điều này mâu thuẫn với $m>k$.

Sau khi thử lại, ta kết luận: các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

- $P(x)=x^m$ nếu n lẻ.
- $P(x)=\pm x^m$ nếu n chẵn.

Bài 22. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực, khác hằng số và thỏa mãn điều kiện

$$P(x)P(x^3)P(x^5)\dots P(x^{2n-1})=P\left(x^{n^2}\right),\forall x\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

Ta chia ra các trường hợp như sau:

- Trường hợp $P(x)=ax^m\ (a\neq 0, m\in\mathbb{N}^*)$. Thay vào (1), ta được:

$$\begin{aligned}
&ax^m.ax^{3m}\dots ax^{(2n-1)m}=ax^{m.n^2},\ \forall x\in\mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &a^nx^{m(1+3+\dots+2n-1)}=ax^{m.n^2},\ \forall x\in\mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &a^nx^{m.n^2}=ax^{m.n^2},\ \forall x\in\mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &a^n=a\Leftrightarrow a(a^{n-1}-1)=0.
\end{aligned}$$

  Như vậy, nếu n chẵn thì $a=1$, nếu n lẻ thì $a=\pm1$.

- Tiếp theo giả sử $P(x)=ax^m+Q(x)$, trong đó $a\neq 0$, Q là đa thức khác đa thức không và $\deg(Q)=k<m$. Thay vào (1), ta được:

$$\begin{aligned}
&[ax^m+Q(x)]\left[ax^{3m}+Q(x^3)\right]\dots\left[ax^{(2n-1)m}+Q(x^{2n-1})\right]\\
=&\left[ax^{mn^2}+Q\left(x^{n^2}\right)\right],\ \forall x\in\mathbb{R}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

  Bậc của đa thức $Q\left(x^{n^2}\right)$ là kn^2.
  Bậc của đa thức $Q(x).ax^{3m}\dots ax^{(2n-1)m}$ là

$$\begin{aligned}
&k+[3m+\dots+(2n-1)m]=k+m\,(1+3+5+\dots+2n-1)-m\\
=&k+mn^2-m=k+m(n^2-1).
\end{aligned}$$

  Như vậy so sánh bậc của đơn thức cao thứ 2 ở hai vế của (2), ta được:

$$k+m(n^2-1)=kn^2\Leftrightarrow m(n^2-1)=k(n^2-1). \qquad (3)$$

  Do $n>1$ nên từ (3) suy ra $k=m$, điều này mâu thuẫn với $m>k$.

Sau khi thử lại, ta kết luận: các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

- $P(x)=x^m$ nếu n chẵn.
- $P(x)=\pm x^m$ nếu n lẻ.

Bài 23. Xét $P(x+Q(y)) = Q(x+P(y)),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. (1)

- Nếu $P(x)$ là đa thức hằng tức là $P(x) = a$, khi đó từ (1) ta có $a = Q(x+a)$. Thay x bởi $x-a$ ta có $a = Q(x)$ suy ra $P(x) = Q(x) = a$. Thử lại thấy đúng.
- Nếu $Q(x)$ là đa thức hằng thì tương tự như trường hợp trên ta cũng có được
$$P(x) = Q(x) = a.$$
- Nếu $P(x)$ và $Q(x)$ đều không phải là đa thức hằng, đặt
$$\begin{aligned} P(x) &= ax^n + bx^{n-1} + R(x) \\ Q(x) &= cx^m + dx^{m-1} + S(x), \end{aligned}$$
với mọi $m \geq 1,\ n \geq 1,\ a \neq 0,\ c \neq 0, \deg R < n-1, \deg S < m-1$.
Ta thấy $P(x+Q(y))$ là đa thức ẩn x có bậc là n và hệ số của số mũ cao nhất là a và $Q(x+P(y))$ là đa thức ẩn x có bậc là m và hệ số của số mũ cao nhất là c. Vì có (1) nên $a = c$, $m = n$, khi đó
$$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + R(x),\ Q(x) = ax^n + dx^{n-1} + S(x).$$
Suy ra
$$\begin{aligned} P(x+Q(y)) &= a(x+Q(y))^n + b(x+Q(y))^{n-1} + R(x+Q(y)) \\ &= ax^n + naQ(y)x^{n-1} + bx^{n-1} + \cdots \end{aligned}$$
Do đó hệ số của x^{n-1} trong $P(x+Q(y))$ là $naQ(y) + b$.
Tương tự hệ số của x^{n-1} trong $Q(x+P(y))$ là $naP(y) + d$. Suy ra
$$\begin{aligned} & naQ(y) + b = naP(y) + d,\ \forall y \\ \Leftrightarrow & na[Q(y) - P(y)] = d - b,\ \forall y \\ \Rightarrow & Q(y) - P(y) = \frac{d-b}{na},\ \forall y. \end{aligned}$$
Đặt $\dfrac{d-b}{na} = t$. Ta có
$$\begin{aligned} & Q(y) - P(y) = t,\ \forall y \\ \Leftrightarrow & Q(y) = P(y) + t,\ \forall y. \end{aligned}$$
Thay y bởi x ta có
$$Q(x) = P(x) + t,\ \forall x. \quad (2)$$
Nếu $t = 0$ thì $Q(y) = P(y),\ \forall y \ \Rightarrow Q \equiv P$. Thử lại thấy đúng.
Nếu $t \neq 0$ thì thay (2) vào (1) ta có
$$P(x + P(y) + t) = Q(x + Q(y) - t).$$
Thay x bởi $x - P(y)$ ta có
$$\begin{aligned} & P(x - P(y) + P(y) + t) = P(x - P(y) + P(y)) + t \\ \Leftrightarrow & P(x+t) = P(x) + t. \end{aligned}$$
Chọn
$$x = 0 \Rightarrow P(t) = P(0) + t$$

$$\begin{aligned} x = t &\Rightarrow P(2t) = P(t) + t \\ x = 2t &\Rightarrow P(3t) = P(2t) + t \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x = (k-1)t &\Rightarrow P(kt) = P[(k-1)t] + t. \end{aligned}$$

Suy ra

$$P(kt) = P(0) + kt \Rightarrow P(kt) - kt - P(0) = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Xét $h(x) = P(x) - x - P(0)$. Do (3) nên $h(x)$ có vô số nghiệm, mà $h(x)$ là đa thức bậc n nên $h(x) \equiv 0$, suy ra

$$P(x) = x + P(0) \Rightarrow P(x) = x + a. \tag{4}$$

Do đó

$$Q(x) = x + t = x + a + t = x + b \Rightarrow Q(x) = x + b. \tag{5}$$

Thử (4), (5) vào (1) ta có

$$P(x + y + b) = Q(x + y + a) \Leftrightarrow x + y + b + a = x + y + b + a \text{ (luôn đúng)}.$$

Như vậy đáp số của bài toán là

$$P(y) \equiv Q(x); \text{ hoặc } P(x) = x + a, \ Q(x) = x + b, \ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}.$$

Bài 24. Theo giả thiết, với mọi bộ ba số nguyên (a, b, c) sao cho $a + b + c \neq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \dfrac{P(a) + P(b) + P(c)}{a + b + c} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{P(a+b) + P(0) + P(c)}{a + b + c} \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{P(a+b) + P(0) + P(c)}{a + b + c} - \frac{P(a) + P(b) + P(c)}{a + b + c} \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \frac{P(a+b) - P(a) - P(b) + P(0)}{a + b + c} \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{1}$$

Với mọi số nguyên a, b cho trước, ta có thể lấy số nguyên c đủ lớn sao cho $a + b + c \neq 0$ và $a + b + c$ lớn tùy ý, do đó từ (1) suy ra

$$\begin{aligned} &P(a+b) - P(a) - P(b) + P(0) = 0, \ \forall a, b \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow &P(a+1) = P(a) + P(1) - P(0), \ \forall a \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow &P(a+1) = P(a) + \alpha, \ \forall a \in \mathbb{Z} \ (\alpha = P(1) - P(0) \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \tag{2}$$

Đặt $P(x) - \alpha x = G(x)$, $\forall x \in \mathbb{Z}$. Khi đó $G(x)$ là đa thức hệ số nguyên, và do (2) nên:

$$\begin{aligned} &\alpha(a+1) + G(a+1) = \alpha a + G(a) + \alpha, \ \forall a \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow &G(a+1) = G(a), \ \forall a \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Như vậy G là đa thức hằng. Từ đó, $P(x) = \alpha x + C, \ \forall x \in \mathbb{Z}$ (với C là hằng số nguyên). Vì thế nên

$$\frac{P(a) + P(b) + P(c)}{a + b + c} = \frac{\alpha(a + b + c) + 3C}{a + b + c} \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra $3C \vdots a + b + c$ với mọi số nguyên a, b, c sao cho $a + b + c \neq 0$.
Từ đây suy ra $C = 0$. Vậy $P(x) = \alpha x, \ \forall x \in \mathbb{Z}$ (với α là hằng số nguyên). (3)
Thử lại thấy đa thức xác định bởi (3) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.
Vậy đa thức cần tìm là: $P(x) = \alpha x, \ \forall x \in \mathbb{Z}$ (với α là hằng số nguyên).

BÀI 2. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT NGHIỆM VÀ SO SÁNH BẬC, HỆ SỐ

A. CƠ SỞ LÝ THUYẾT VÀ MỘT SỐ VÍ DỤ GIẢI TOÁN

Sau đây là một số lưu ý khi giải toán:

1) Đa thức $P(x)$ nhận số a làm nghiệm khi và chỉ khi $P(a) = 0$.

2) Đa thức $P(x)$ có $\deg(P) \geq 1$ chỉ có hữu hạn nghiệm.

3) Nếu phân số tối giản $\frac{p}{q}$ (tức là $p, q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1$) là nghiệm của đa thức với hệ số nguyên $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ thì q là ước của a_n và p là ước của a_0. Đặc biệt nếu $a_n = \pm 1$ thì nghiệm hữu tỉ đó là nguyên.

4) Nếu đa thức $P(x)$ có vô số nghiệm thì $P(x) \equiv 0$, tức là $P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, nói riêng, nếu số nghiệm của đa thức $P(x)$ lớn hơn $\deg(P)$ thì
$$P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

5) Mọi đa thức bậc lẻ đều có nghiệm thực.

6) Nếu $P(r) = 0$ thì ta có thể biểu diễn $P(x) = (x-r)^k Q(x)$ với đa thức $Q(x)$ sao cho $Q(r) \neq 0$ và k là số nguyên dương.

7) Nếu $\deg P(x) = d$ thì ta có thể biểu diễn $P(x) = a_d x^d + Q(x)$ với $Q(x)$ là đa thức sao cho $\deg Q(x) < d$.

8) Xét đa thức hệ số nguyên $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Nếu a, b là các số nguyên (hoặc hữu tỉ) và $\sqrt{c}$ là số vô tỉ thì $P(a \pm b\sqrt{c})$ có dạng
$$P(a + b\sqrt{c}) = k + m\sqrt{c}, \quad P(a - b\sqrt{c}) = k - m\sqrt{c},$$
trong đó k, m là các số nguyên (hoặc hữu tỉ). Đặc biệt nếu đa thức $P(x)$ có nghiệm là $x = a + b\sqrt{c}$ thì nó cũng có cả nghiệm $x = a - b\sqrt{c}$ $\Big($cách chứng minh như sau: chứng minh bằng quy nạp rằng nếu $(a + b\sqrt{c})^n = d + e\sqrt{c}$ thì
$$(a - b\sqrt{c})^n = d - e\sqrt{c},$$
trong đó a, b, d, e là các số nguyên (hoặc hữu tỉ), $n \in \mathbb{N}^*$. Sau đó thay vào $P(x)\Big)$.

9) Cho hai đa thức
$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \;\; Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \;\; (\text{quy ước } x^0 = 1).$$
Khi đó
$$P(x).Q(x) = \sum_{i=0}^{2n} c_i x^i \text{ với } c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0, \;\; k = 0, 1, \ldots, 2n.$$

Bài 1 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2002).
Tìm đa thức không đồng nhất không, bậc nhỏ nhất có hệ số nguyên nhận $1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ làm nghiệm.

Lời giải

Từ

$$\begin{aligned}&x=1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\Rightarrow x\left(1+\sqrt[3]{2}\right)=1+\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=3\Rightarrow x\sqrt[3]{2}=3-x\\ \Rightarrow&2x^3=(3-x)^3=27-27x+9x^2-x^3\Rightarrow x^3-3x^2+9x-9=0.\end{aligned}$$

Vậy $1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ là nghiệm của đa thức bậc ba hệ số nguyên

$$f(x)=x^3-3x^2+9x-9.$$

Nếu $f(x)$ có nghiệm hữu tỉ thì $f(x)$ có nghiệm nguyên là ước của 9. Các số $\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 9$ không là nghiệm của $f(x)$, do đó $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ và $1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ là số vô tỉ. Dẫn tới $1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ không là nghiệm của đa thức bậc nhất có hệ số nguyên. Giả sử $1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ là nghiệm của đa thức bậc hai $g(x)$ với hệ số nguyên. Chia $f(x)$ cho $g(x)$, giả sử được là

$$f(x)=g(x).q(x)+r(x),\text{với } \deg(r)<2.$$

Vì $f(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})=0$ nên $r(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})=0$, do đó $r(x)\equiv 0$. Bởi vậy

$$f(x)=g(x).q(x),$$

với $q(x)$ là đa thức có bậc 1 và có hệ số hữu tỉ. Suy ra $f(x)$ có nghiệm hữu tỉ, điều này mâu thuẫn với $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ. Vậy $f(x)$ là đa thức bậc nhỏ nhất có hệ số nguyên nhận $1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ làm nghiệm.
Lưu ý. Qua lời giải trên ta còn thu được phương pháp chứng minh một số nào đó là số vô tỉ.

Bài 2. Tìm đa thức hệ số nguyên có bậc nhỏ nhất nhận $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ làm một trong các nghiệm của nó.

Lời giải

Từ

$$\begin{aligned}&x=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\Rightarrow(x-1)-\sqrt{2}=\sqrt{3}\Rightarrow(x-1)^2-2\sqrt{2}(x-1)+2=3\\ \Rightarrow&x^2-2x=2\sqrt{2}(x-1)\Rightarrow x^4-4x^3+4x^2=8(x^2-2x+1)\\ \Rightarrow&x^4-4x^3-4x^2+16x-8=0.\end{aligned}$$

Vậy đa thức $Q(x)=x^4-4x^3-4x^2+16x-8$ là đa thức hệ số nguyên nhận $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ làm nghiệm và dễ thấy rằng $\deg(Q)=4$. Giả sử $P(x)$ là một đa thức hệ số nguyên nhận $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ làm nghiệm. Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được biểu diễn sau

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^k=a_k+b_k\sqrt{2}+c_k\sqrt{3}+d_k\sqrt{6},\forall k=1,2,\ldots$$

trong đó a_k,b_k,c_k,d_k là các số nguyên. Khi đó vẫn dựa vào nguyên lí quy nạp ta có

$$\begin{cases}(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})^k=a_k-b_k\sqrt{2}+c_k\sqrt{3}-d_k\sqrt{6}\\(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})^k=a_k+b_k\sqrt{2}-c_k\sqrt{3}-d_k\sqrt{6}\\(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})^k=a_k-b_k\sqrt{2}-c_k\sqrt{3}+d_k\sqrt{6}.\end{cases}$$

Bởi vậy tồn tại các số nguyên A,B,C,D sao cho

$$P(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})=A+B\sqrt{2}+C\sqrt{3}+D\sqrt{6}$$

và khi đó

$$P(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}) = A - B\sqrt{2} + C\sqrt{3} - D\sqrt{6}$$
$$P(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) = A + B\sqrt{2} - C\sqrt{3} - D\sqrt{6}$$
$$P(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}) = A - B\sqrt{2} - C\sqrt{3} + D\sqrt{6}.$$

Ta có $P(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0 = 0 + 0.\sqrt{2} + 0.\sqrt{3} + 0\sqrt{6}$, do đó

$$P(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0 - 0.\sqrt{2} + 0.\sqrt{3} - 0\sqrt{6} = 0$$
$$P(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) = 0 + 0.\sqrt{2} - 0.\sqrt{3} - 0\sqrt{6} = 0$$
$$P(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}) = 0 - 0.\sqrt{2} - 0.\sqrt{3} + 0\sqrt{6} = 0.$$

Vậy $P(x)$ có ít nhất bốn nghiệm, do đó $\deg(P) \geq 4$. Vậy $Q(x)$ chính là đa thức hệ số nguyên có bậc nhỏ nhất và nhận $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ làm nghiệm.

Bài 3 (HSG Quốc gia năm 1997-bảng B).
Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ với hệ số hữu tỉ có bậc nhỏ nhất mà $f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) = 3+\sqrt[3]{9}$.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:
Bổ đề. Nếu $u, v \in \mathbb{Q}$ và $s = u\sqrt[3]{3} + v\sqrt[3]{9} \in \mathbb{Q}$ thì $u = v = 0$.
Chứng minh bổ đề. Giả sử phản chứng u và v không đồng thời bằng 0. Khi ấy giả sử $u \neq 0$ (nếu không thì lí luận hoàn toàn tương tự). Từ

$$x = \sqrt[3]{3} = \frac{s - v\sqrt[3]{9}}{u} \Rightarrow ux - s = -v\sqrt[3]{9} \overset{\text{do } x=\sqrt[3]{3}}{=} -vx^2 \Rightarrow vx^2 + ux - s = 0.$$

Do đó đa thức $R(x) = vx^2 + ux - s$ nhận $\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm. Xét đa thức $G(x) = x^3 - 3$. Ta thấy rằng $G(x)$ không có nghiệm hữu tỉ và $G(\sqrt[3]{3}) = 0$. Thực hiện phép chia $G(x)$ cho $R(x)$ ta có

$$G(x) = h(x)R(x) + r(x) \text{ (ở đây } \deg(r) < \deg(R)).$$

Trường hợp 1. $r(x) \equiv 0$, khi đó $G(x) = h(x)R(x)$. Vì $\deg(G) = 3, \deg(R) = 2$ nên suy ra $\deg(h) = 1$. Vì u, v, s là các số hữu tỉ nên $G(x), R(x)$ là các đa thức hệ số hữu tỉ, do đó $h(x)$ cũng là đa thức hệ số hữu tỉ. Hơn nữa từ $\deg(h) = 1$ suy ra $h(x)$ có nghiệm hữu tỉ. Bởi vậy $G(x)$ cũng có nghiệm hữu tỉ, điều này mâu thuẫn với $G(x)$ không có nghiệm hữu tỉ. Do đó trường hợp này không xảy ra.
Trường hợp 2. $r(x) \not\equiv 0$. Nếu $r(x) \equiv c \neq 0$ (c là hằng số) thì

$$G(\sqrt[3]{3}) = h(\sqrt[3]{3})R(\sqrt[3]{3}) + c \Rightarrow c = 0 \, (\text{do } G(\sqrt[3]{3}) = R(\sqrt[3]{3}) = 0).$$

Do đó $r(x) \equiv 0$, vô lí. Bởi vậy $\deg(r) = 1$, suy ra $r(x) = ax + b$. Do $G(x), R(x)$ thuộc $\mathbb{Q}[x]$ nên $h(x), r(x)$ cũng là các đa thức hệ số hữu tỉ. Ta có

$$r(\sqrt[3]{3}) = G(\sqrt[3]{3}) - h(\sqrt[3]{3})R(\sqrt[3]{3}) = 0$$

nghĩa là $\sqrt[3]{3}$ là nghiệm vô tỉ của đa thức bậc nhất $r(x)$ với hệ số hữu tỉ. Điều vô lí này chứng tỏ trường hợp này cũng không xảy ra. Tóm lại giả thiết phản chứng là sai. Vậy bổ đề được chứng minh. Trở lại bài toán đang xét. Dễ thấy đa thức đồng nhất 0 không thỏa mãn các yêu cầu của đề bài. Xét khi $f(x) \equiv c$ (c là hằng số hữu tỉ). Từ $f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) = 3+\sqrt[3]{9}$ suy ra $c = 3+\sqrt[3]{9} \Rightarrow c - 3 = \sqrt[3]{9}$, điều này mâu thuẫn với $c-3$ là số hữu tỉ. Xét khi $f(x)$ là đa thức bậc nhất: $f(x) = ax + b$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Từ

$$f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) = 3+\sqrt[3]{9} \Rightarrow 3+\sqrt[3]{9} = a(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) + b$$

ta có $(a-1)\sqrt[3]{9}+a\sqrt[3]{3}=3-b$. Do $3-b\in\mathbb{Q}$ nên theo bổ đề suy ra $a-1=0$ và $a=0$. Điều vô lí này chứng tỏ không tồn tại đa thức bậc nhất với hệ số hữu tỉ thỏa mãn đề bài. Xét khi $f(x)$ là đa thức bậc hai với hệ số hữu tỉ: $f(x)=ax^2+bx+c$. Từ giả thiết suy ra

$$\begin{aligned}
&f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})=3+\sqrt[3]{9}\Rightarrow a(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})^2+b(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})+c=3+\sqrt[3]{9}\\
\Rightarrow &a(\sqrt[3]{9}+6+3\sqrt[3]{3})+b(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})+c=3+\sqrt[3]{9}\\
\Rightarrow &(3a+b)\sqrt[3]{3}+(a+b-1)\sqrt[3]{9}=3-c-6a.
\end{aligned}$$

Vì $3-c-6a, 3a+b, a+b-1$ là các số hữu tỉ nên theo bổ đề suy ra

$$\begin{cases}3a+b=0\\ a+b-1=0\end{cases}\Leftrightarrow (a;b)=\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$$

và khi đó $3-c-6a=0\Leftrightarrow c=3-6a\Rightarrow c=6$. Vậy tồn tại duy nhất đa thức bậc hai

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+6$$

thỏa mãn các yêu cầu của đề bài.

Bài 4 (HSG Quốc gia 1997-bảng A).

a) Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ với hệ số hữu tỉ có bậc nhỏ nhất mà

$$f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})=3+\sqrt[3]{3}.$$

b) Tồn tại hay không đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên mà

$$f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})=3+\sqrt[3]{3}.$$

Lời giải

a) Tương tự như bài toán 3 ta được kết quả: có duy nhất một đa thức thỏa mãn đề bài là

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x.$$

b) Đặt $\alpha=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\Rightarrow\alpha^3=3+9+3\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)=12+9\alpha$. Như vậy đa thức

$$g(x)=x^3-9x-12$$

nhận α làm nghiệm. Nếu $f(x)$ là đa thức hệ số nguyên thỏa mãn đề bài thì

$$f(x)=g(x)h(x)+r(x),$$

với $h(x), r(x)$ là các đa thức hệ số nguyên với $\deg(r)<3$. Vì $g(\alpha)=0$ nên

$$r(\alpha)=f(\alpha)=3+\sqrt[3]{3},$$

điều này không thể xảy ra (nếu tiến hành giải câu a) sẽ thấy được điều này). Vậy không tồn tại đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên mà $f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})=3+\sqrt[3]{3}$.

Bài 5. Tìm đa thức không đồng nhất không với hệ số nguyên có bậc nhỏ nhất nhận $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ là nghiệm.

Lời giải

Từ

$$\begin{aligned} x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3} &\Rightarrow (x-\sqrt{2})^3=3 \Rightarrow x^3-3x^2\sqrt{2}+6x-2\sqrt{2}=3\\ \Rightarrow &(x^3+6x-3)^2=2(3x^2+2)^2\\ \Rightarrow &x^6+36x^2+9+12x^4-6x^3-36x=18x^4+24x^2+8\\ \Rightarrow &x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0. \end{aligned}$$

Vậy $Q(x)=x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1$ là đa thức hệ số nguyên không đồng nhất 0 và nhận $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm. Dễ thấy $\deg(Q)=6$. Giả sử có một đa thức có bậc không lớn hơn 5 với hệ số nguyên

$$G(x)=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

cũng nhận $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm. Ta có

$$\begin{aligned} G(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})=&a_5(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^5+a_4(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^4\\ &+a_3(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^3+a_2(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^2+a_1(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})+a_0=0. \end{aligned}$$

Thực hiện phép khai triển và rút gọn ta được

$$b_0+b_1\sqrt{2}+b_2\sqrt[3]{3}+b_3\sqrt[3]{9}+b_4\sqrt{2}\sqrt[3]{3}+b_5\sqrt{2}\sqrt[3]{9}=0, \tag{1}$$

trong đó

$$\begin{aligned} &b_0=a_0+2a_2+3a_3+4a_4+50a_5,\ \ b_1=a_1+2a_3+12a_4+4a_5\\ &b_2=a_1+6a_3+3a_4+20a_5,\ \ b_3=3a_2+12a_4+3a_5\\ &b_4=2a_2+8a_4+15a_5,\ \ \ b_5=3a_3+20a_5. \end{aligned}$$

Vì $a_i\in\mathbb{Z},\forall i=\overline{0,5}$ nên b_i cũng là số nguyên, $\forall i=\overline{0,5}$. Từ (1) ta suy ra $b_i=0,\forall i=\overline{0,5}$, do đó thay vào hệ trên được $a_0=a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=0$. Vậy $Q(x)$ là đa thức đồng nhất không, do đó mọi đa thức không đồng nhất không, có bậc bé hơn hoặc bằng 5 không thể nhận $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm. Vậy $Q(x)$ chính là đa thức cần tìm.

Lưu ý. Rõ ràng cách giải trên là dài dòng nhưng có ý tưởng tự nhiên nhất.

Bài 6 (CentroAmerican Olympiad 2008).
Tìm tất cả các đa thức $p(x)$ hệ số thực thỏa mãn: $p(1)=210$ và

$$(x+10)\,p(2x)=(8x-32)\,p(x+6),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $p(x)$ không thể là đa thức hằng. Giả sử:

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0, a_n\neq 0.$$

So sánh hệ số của lũy thừa cao nhất ở hai vế của (1), ta được:

$$a_n2^n=8a_n\Leftrightarrow 2^n=2^3\Leftrightarrow n=3.$$

Vậy $p(x)$ là đa thức bậc ba. Từ (1) lấy $x=-10$, ta được: $p(-4)=0$. Từ (1) lấy $x=-2$, ta được:

$$-48p(4)=8p(-4)=0\Rightarrow p(4)=0.$$

Từ (1) lấy $x = 4$, ta được:

$$14p(8) = 0.p(10) = 0.$$

Như vậy: $p(x) = a(x-4)(x+4)(x-8)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Do $p(1) = 210$ nên: $105a = 210$ hay $a = 2$. Như thế:

$$p(x) = 2(x-4)(x+4)(x-8),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Thử lại: với $p(x)$ là đa thức xác định bởi (2), ta có:

$$\begin{aligned}(x+10)\,p(2x) &= (x+10)2(2x-4)(2x+4)(2x-8)\\ &= 16(x+10)(x-2)(x+2)(x-4). \qquad (3)\\ (8x-32)\,p(x+6) &= 8(x-4)2(x+2)(x+10)(x-2)\\ &= 16(x+10)(x-2)(x+2)(x-4). \qquad (4)\end{aligned}$$

Từ (3) và (4) suy ra đa thức xác định bởi (2) thỏa mãn (1). Vậy có duy nhất một đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $p(x) = 2(x-4)(x+4)(x-8)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 7. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(2) = 12$ và

$$P(x^2) = x^2(x^2+1)P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

Giả sử tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(2) = 12$ và

$$P(x^2) = x^2(x^2+1)P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Từ (1) cho $x = 0$ ta được $P(0) = 0$, cho $x = 1$ được $P(1) = 2P(1)$ hay $P(1) = 0$, cho $x = -1$ được $P(1) = 2P(-1) \Rightarrow P(-1) = 0$. Vậy $P(x)$ có ba nghiệm là $0, 1, -1$. Giả sử $P(x)$ có nghiệm thực $t \notin \{0, 1, -1\}$, khi đó từ (1) suy ra t^2 cũng là nghiệm của $P(x)$, tương tự suy ra t^4 cũng là nghiệm của $P(x)$, nhưng với $t \notin \{0, 1, -1\}$ thì tất cả các phần tử của dãy $t, t^2, t^4, \ldots, t^{2^n}, \ldots$ là khác nhau đôi một nên suy ra $P(x)$ có vô số nghiệm, suy ra $P(x) \equiv 0$, mâu thuẫn với $P(2) = 12$. Vậy $P(x)$ chỉ có ba nghiệm thực là $0, 1, -1$. Giả sử $\deg(P) = n$. Từ (1) suy ra

$$2n = n + 4 \Leftrightarrow n = 4.$$

Vậy $P(x)$ có một trong ba dạng sau:

$$P(x) = ax^2(x-1)(x+1),\ P(x) = ax(x-1)^2(x+1),\ P(x) = ax(x-1)(x+1)^2.$$

Do $P(2) = 12$ nên $a = 1$ hoặc $a = 2$ hoặc $a = \dfrac{2}{3}$. Thử lại chỉ có

$$P(x) = x^2(x-1)(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Lưu ý. Sau khi chứng minh được $\deg(P) = 4$, $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$, ta có thể giả sử:

$$P(x) = x(x-1)(x+1)(ax+b),\ \forall x \in \mathbb{R}\ (a \neq 0).$$

Từ đây dựa vào (1) và giả thiết $P(2) = 12$ tìm ra a và b.

B. BÀI TẬP

1. Đề bài

Bài 8. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho

$$P(P(x))P(x^2-1) = P(3x)^3 - P(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 9. Tìm tất cả các đa thức không đồng nhất không, bậc nhỏ nhất, có hệ số nguyên và nhận số $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ làm nghiệm.

Bài 10. Cho p là số hữu tỉ và không là lập phương của số hữu tỉ. Đặt $\alpha = \sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{p^2}$. Hãy tìm đa thức khác đa thức không, có bậc bé nhất, có hệ số hữu tỉ, nhận α làm nghiệm.

Bài 11 (Olympiad Toán học Suisse TST 2022).
Cho n là số nguyên dương. Tìm tất cả các đa thức P hệ số thực thỏa mãn

$$P\left(x^2+x-n^2\right) = P(x)^2 + P(x)$$

với mọi số thực x.

Bài 12 (TST Đại học Vinh ngày 1 năm học 2019-2020).
Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thoả mãn $P(1) = \dfrac{1}{2}$ và $xP(x)P(1-x) \le x^5$, với mọi số thực x.

Bài 13. Tìm tất cả các đa thức hệ số nguyên $P(x)$ thỏa mãn

$$P\left(P'(x)\right) = P'(P(x))$$

với mọi số thực x.

Bài 14. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực sao cho với mọi số thực x khác không ta có

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Bài 15 (Albanian TST 2009). Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ có hệ số không âm và thỏa mãn

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) \le [P(1)]^2, \ \forall x > 0. \tag{*}$$

Bài 16. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc $d > 0$ thỏa mãn

$$P(1) + P(x) + \cdots + P\left(x^d\right) = \left(1 + x + \cdots + x^d\right)P(x).$$

Bài 17. Cho d là một số nguyên dương. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$\left(1+x^d\right)P(x) = P\left(x^2\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 18 (Azerbaijan National Olympiad 2015).
Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P\Big(P(x)\Big) = (x^2 + x + 1)P(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 19 (TST Hưng Yên ngày 1 năm học 2019-2020).
Cho m, n là các số nguyên dương, $n < m$ và $a_1, a_2, \ldots, a_m$ là các số thực phân biệt. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực và có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n thỏa mãn điều kiện: Với mọi $1 \leq i < j \leq m$, ta có

$$|P(a_i) - P(a_j)| = |a_i - a_j|.$$

Bài 20 (Trại hè Hùng Vương 2019). Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực, có bậc nhỏ hơn 2019, sao cho tồn tại 2019 số thực đôi một phân biệt là a_1, a_2, ..., a_{2019} thỏa mãn điều kiện với mỗi $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2019\}$ ta có

$$\Big|P\left(a_i\right) - P\left(a_j\right)\Big| = 2019\left|a_1 - a_j\right|.$$

Bài 21. Tìm các đa thức với hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$P\left(P(x) + x\right) = P(x)P(x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 22 (Mongolian Mathematical Olympiad 2015).
Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn

$$P(x + P(x)) = P(P(x)) + P(x)^d + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

với d là bậc của đa thức $P(x)$.

Bài 23. Cho số nguyên dương n. Tìm tất cả các đa thức hệ số phức $P(x)$ thỏa mãn

$$P\left(x^n + P(x)\right) = \left(2^n - 1\right) x^{n^2} + P\left(x^n\right)$$

Bài 24 (Hải Dương TST 2018-2019 vòng 2).
Tìm các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(P(x)) = P(x^n) + P(x) - 1$$

với mọi x, trong đó n là bậc của đa thức.

Bài 25 (Swiss IMO Team Selection Test 2011).
Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ khác đa thức không và thỏa mãn điều kiện: với mọi $k = 0, 1, \ldots, (\deg P)^2$ ta có $P(P(k)) = P(k)^2$.

Bài 26. Tìm tất cả các đa thức P bậc $n \geq 1$ chỉ có nghiệm thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P(x) - x_i} = \frac{n^2}{xP'(x)}$$

với mọi số thực $x \neq 0$.

Bài 27 (Mongolian Mathematical Olympiad 2016).
Cho hai đa thức hệ số thực $P(x)$ và $Q(x)$ thỏa mãn $P(x)^2 = 1 + Q(x)^3$ với mọi số thực x. Chứng minh rằng cả hai đa thức $P(x), Q(x)$ đều là đa thức hằng.

Bài 28. Tìm các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn phương trình hàm

$$[P(x)]^2 - 1 = 4P(x^2 - 4x + 1),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 29 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2012).
Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực và thỏa mãn điều kiện

$$[P(x)]^2 - 2 = 2P(2x^2 - 1),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 30. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, thỏa mãn

$$P\left(x^2+1\right) = P^2(x) - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trong đó $P^2(x) = (P(x))^2$.

Bài 31. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P^2(x) - 1 = P\left(x^2 + 2x - 3\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 32 (Olympic Romania-2001). Tìm các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P(x)P(2x^2-1) = P(x^2)P(2x-1),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 33. Cho số nguyên $k \geq 2$. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x)P\left(2x^k - 1\right) = P\left(x^k\right)P(2x-1).$$

Bài 34 (Olympic Bulgaria-2001). Tìm các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P(x)P(2x^2+1) = P(x^2)\left[P(2x+1) - 4x\right],\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 35 (TST Hải Phòng, ngày 2, năm học 2019-2020).
Xác định các đa thức $P(x), Q(x)$ hệ số thực thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau

(i) $Q(x)$ khác đa thức không và $\deg Q(x) < 2$.

(ii) $P(x^3-1) - x^3P(x-1)[P(x+1)+4] = x^6Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$

2. Lời giải

Bài 8. Nếu $n = \deg P$ thì $n^2 + 2n = 3n \Leftrightarrow n^2 - n = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 0 \\ n = 1. \end{array}\right.$

- Với $P(x) \equiv c, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $c^3 - c^2 - c = 0 \Leftrightarrow c \in \left\{0, \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.
- Với $P(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$ thì số hạng cao nhất của vế trái là $a^2x.ax^2 = a^3x^3$ và số hạng cao nhất của vế phải là $(3ax)^3 = 27a^3x^3$. Do đó $a = 0$. Quay trở lại trường hợp trên.

Vậy các đa thức $P(x)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x) \equiv 0,\ P(x) \equiv \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ P(x) \equiv \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Bài 9. Ta có

$$\begin{aligned} &x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \Rightarrow x\left(1 - \sqrt[3]{2}\right) = 1 - \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = -1 \Rightarrow x\sqrt[3]{2} = 1 + x \\ \Rightarrow &2x^3 = (1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Vậy $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là nghiệm của đa thức bậc ba hệ số nguyên

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1.$$

Nếu $f(x)$ có nghiệm hữu tỉ thì $f(x)$ có nghiệm nguyên là ước của -1. Các số 1, -1 không là nghiệm của $f(x)$, do đó $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ và $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là số vô tỉ. Do đó $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ không là nghiệm của đa thức bậc nhất có hệ số nguyên. Giả sử $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là nghiệm của đa thức bậc hai $g(x)$ với hệ số nguyên. Chia $f(x)$ cho $g(x)$, giả sử được là

$$f(x) = g(x).q(x) + r(x), \text{với } \deg(r) < 2$$

Vì $f(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) = 0$ nên $r(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) = 0$, do đó $r(x) \equiv 0$. Bởi vậy

$$f(x) = g(x).q(x),$$

với $q(x)$ là đa thức có bậc 1 và có hệ số hữu tỉ. Suy ra $f(x)$ có nghiệm hữu tỉ, điều này mâu thuẫn với $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ. Vậy $f(x)$ là đa thức bậc nhỏ nhất có hệ số nguyên nhận $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ làm nghiệm.

Bài 10. Tiến hành tương tự như chứng minh bổ đề trong bài toán 3, ta chứng minh được bổ đề sau: Nếu $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\beta \in \mathbb{Q}$ và $\alpha\sqrt[3]{p} + \beta\sqrt[3]{p^2} \in \mathbb{Q}$ thì $\alpha = \beta = 0$.

Bài 11. Giả sử tồn tại đa thức P hệ số thực thỏa mãn

$$P\left(x^2 + x - n^2\right) = P(x)^2 + P(x) \tag{1}$$

với mọi số thực x. Dễ thấy đa thức $P(x) = 0$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Bây giờ ta giả sử P khác đa thức không. Từ (1) cho $x = n$, ta được $P(n) = 0$. Do $x = n$ là nghiệm của đa thức P nên

$$P(x) = (x-n)^r Q(x),$$

với $r \in \mathbb{Z}^+$, $Q \in \mathbb{R}[x]$ và $Q(n) \neq 0$. Thay vào (1) ta được

$$\left(x^2 + x - n - n^2\right)^r Q\left(x^2 + x - n^2\right) = (x-n)^{2r}Q(x)^2 + (x-n)^r Q(x). \tag{2}$$

Chia cả hai vế của (2) cho đa thức $(x-n)^r$, ta được

$$(x+n+1)^r Q\left(x^2+x-n^2\right) = (x-n)^r Q(x)^2 + Q(x). \tag{3}$$

Từ (3) cho $x=n$, ta được

$$(2n+1)^r Q(n) = Q(n) \Rightarrow (2n+1)^r = 1,$$

đây là điều vô lý. Vậy có duy nhất đa thức thỏa yêu cầu đề bài là $P \equiv 0$.

Bài 12. Từ giả thiết ta có

$$x^5 - xP(x)P(1-x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Hiển nhiên $P(x) \equiv c$ (hằng số) không thỏa mãn. Đặt $n = \deg P(x)$ và $P(x) = ax^n + Q(x)$, với $\deg Q(x) \leq n-1$. Số hạng có bậc cao nhất của $xP(x)P(1-x)$ là $(-1)^n a^2 x^{2n+1}$. Để (1) xảy ra với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì vế trái (1) phải là đa thức bậc chẵn. Do đó $2n+1=5$ và $(-1)^n a^2 = 1$ hay $n=2, a=\pm 1$.

(1) Trường hợp 1: $a=1$. Khi đó $P(x)$ có dạng

$$P(x) = x^2 + bx + c, \quad \text{với } b, c \in \mathbb{R}.$$

Ta có (1) tương đương

$$2x^4 + \left(b^2+b-2c-1\right)x^3 - (b^2+b-2c)x^2 - c(b+c+1)x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Do đa thức vế trái của (2) có nghiệm $x=0$ nên để (2) xảy ra thì $x=0$ phải là nghiệm bội chẵn. Suy ra $c(b+c+1)=0$. Kết hợp với $P(1) = \frac{1}{2}$ hay

$$1+b+c = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b+c = -\frac{1}{2}$$

ta có $b = -\frac{1}{2}, c = 0$. Khi đó (2) tương đương

$$2x^4 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2\left(8x^2-5x+1\right) \geq 0$$

đúng với mọi x.

(2) Trường hợp 2: $a=-1$. Khi đó $P(x)$ có dạng

$$P(x) = -x^2 + bx + c, \quad \text{với } b, c \in \mathbb{R}.$$

Ta có (1) tương đương

$$2x^4 + (b^2-b+2c-1)x^3 - (b^2-b+2c)x^2 + c(b+c-1)x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Suy ra $c(b+c-1)=0$. Kết hợp với $P(1) = \frac{1}{2}$ hay $b+c = \frac{3}{2}$ ta có $b = \frac{3}{2}, c=0$. Khi đó (3) tương đương

$$2x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2\left(8x^2-x-3\right) \geq 0$$

không thoả mãn với mọi x.

Vậy $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x$.

Bài 13. Giả sử tồn tại đa thức hệ số nguyên $P(x)$ thỏa mãn

$$P\left(P'(x)\right) = P'(P(x)),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giả sử

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0 \neq 0.$$

Ta có

$$P'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.$$

Từ (1), so sánh hệ số của $x^{(n-1)n}$ ta được

$$a_0(na_0)^n = na_0a_0^{n-1} \Rightarrow a_0^{n+1} \cdot n^n = a_0^n \cdot n \Rightarrow a_0n^{n-1} = 1.$$

Do đó $a_0 = \frac{1}{n^{n-1}}$, mà a_0 là số nguyên, nên ta suy ra $n = 1$ và $a_0 = 1$.
Do đó $P(x) = x + a_1$, $P'(x) = 1$. Từ $P\left(P'(x)\right) = P'(P(x))$ suy ra $1 + a_1 = 1$ hay $a_1 = 0$.
Do đó $P(x) = x$.

Bài 14. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực sao cho với mọi số thực x khác không ta có

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) = 1. \tag{1}$$

1) Nếu $P(x) = cx^d$ (với c là số thực và d là số tự nhiên) thì thay vào (1) ta được

$$c^2 = 1 \Leftrightarrow c = \pm 1;$$

do đó $P(x) = \pm x^d$.

2) Nếu đa thức P không có dạng $P(x) = cx^d$ (với c là số thực và d là số tự nhiên) thì ta viết

$$P(x) = a_dx^d + \cdots + a_kx^k$$

với $k < d$ và a_k, a_d cùng khác không (k có thể bằng 0 và chú ý rằng $x^0 = 1$). Thay vào (1) ta được

$$\left(a_dx^d + \cdots + a_kx^k\right)\left(a_dx^{-d} + \cdots + a_kx^{-k}\right) = 1 \tag{2}$$

Nhân cả hai vế của (2) với $x^d \neq 0$ ta được

$$\left(a_dx^d + \cdots + a_kx^k\right)\left(a_kx^{d-k} + \cdots + a_d\right) = x^d. \tag{3}$$

Từ (3) so sánh hệ số của x^k hai vế ta được $a_ka_d = 0$, ta gặp mâu thuẫn.

Vậy các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài bao gồm $P(x) = x^d$, $P(x) = -x^d$.

Bài 15. **Cách 1.** Dễ thấy đa thức hằng $P(x) = \alpha$ (với $\alpha \geq 0$) thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Bây giờ ta giả sử $\deg P(x) = d \geq 1$. Đặt

$$P(x) = a_dx^d + \cdots + a_1x + a_0$$

Khi đó $a_i \geq 0,\ \forall i = \overline{0,d}$. Với mọi $x > 0$, theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$P(x)P(x^{-1}) = (a_dx^d + \cdots + a_1x + a_0)(a_dx^{-d} + \cdots + a_1x^{-1} + a_0)$$

$$\geq (a_d + \cdots + a_1 + a_0)^2 = [P(1)]^2.$$

Kết hợp với giả thiết $(*)$ ta được

$$\begin{aligned}
&P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) = [P(1)]^2,\ \forall x > 0\\
\Leftrightarrow &(a_dx^d + \cdots + a_1x + a_0)(a_dx^{-d} + \cdots + a_1x^{-1} + a_0) = [P(1)]^2,\ \forall x > 0\\
\Leftrightarrow &(a_dx^d + \cdots + a_1x + a_0)(a_d + \cdots + a_1x^{d-1} + a_0x^d) = [P(1)]^2x^d,\ \forall x > 0.
\end{aligned}$$

Từ đây, so sánh hệ số của $x^{d+1}, x^{d+2}, \ldots, x^{2d}$ ở hai vế ta được

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{d-1} = 0.$$

Vậy $P(x) = a_dx^d$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy đa thức $P(x) = a_dx^d$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (với $a_d \geq 0$) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Cách 2. Dễ thấy đa thức hằng $P(x) = \alpha$ (với $\alpha \geq 0$) thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Bây giờ ta giả sử $\deg P(x) = n \geq 1$. Ta sẽ chứng minh $P(x) = cx^n$. Thật vậy, giả sử rằng hệ số tự do của $P(x)$ là $a_0 > 0$. Khi đó ta đặt

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

với $a_i \geq 0$, $\forall i = \overline{1; n-1}$; $a_0 > 0$, $a_n > 0$; suy ra

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{1}{x}\right) + a_0.$$

Như vậy

$$P(x).P\left(\frac{1}{x}\right) = a_na_0x^n + \cdots + a_0a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n.$$

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x).P\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$; mâu thuẫn với $(*)$. Vậy $a_0 = 0$. Gọi a_k là hệ số khác 0 của $P(x)$ với k bé nhất có thể. Giả sử rằng $k < n$. Khi đó ta đặt

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_kx^k$$

với $a_i \geq 0, \forall i = \overline{k+1; n-1}$; $a_k > 0$, $a_n > 0$. Suy ra

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \cdots + a_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)^{k+1} + a_k\left(\frac{1}{x}\right)^k.$$

Như vậy $P(x)\cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = a_na_kx^{n-k} + \cdots + a_ka_n\left(\frac{1}{x}\right)^{n-k}$. Suy ra

$$\lim_{x\to\infty} P(x)\cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty;$$

mâu thuẫn với $(*)$. Vậy điều giả sử sai, hay nói cách khác hệ số khác 0 duy nhất của $P(x)$ là a_n. Do đó $P(x) = cx^n$, với c là hằng số dương. Thử lại thỏa mãn. Vậy tất cả các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng

$$P(x) = cx^n \text{ (với } c \text{ là hằng số không âm).}$$

Lưu ý.

1) Ở bài này toán 15 này, ta sử dụng tính chất giải tích cơ bản của đa thức về giới hạn, đó là nếu $\deg P(x) > 0$ thì $\lim_{x\to+\infty} P(x) = \pm\infty$.

2) Nếu chính xác mà nói thì việc xét hệ số tự do là không cần thiết trong cách giải 2 này, nhưng việc xét hệ số tự do khác 0 chính là chìa khóa dẫn tới ý tưởng "gọi a_k là hệ số khác 0 của $P(x)$ với k bé nhất có thể".

Bài 16. Giả sử tồn tại đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc d sao cho

$$P(1) + P(x) + \cdots + P\left(x^d\right) = \left(1 + x + \cdots + x^d\right) P(x). \tag{1}$$

Từ (1) so sánh bậc hai vế ta được $d^2 = 2d$ hay $d = 2$. Do đó (1) trở thành

$$P(1) + P(x) + P\left(x^2\right) = \left(x^2 + x + 1\right) P(x).$$

Do đó, $P(1) + P\left(x^2\right) = \left(x^2 + x\right) P(x)$. (2)
Giả sử $P(x) = ax^2 + bx + c$. Thay vào (2) ta được

$$ax^4 + bx^2 + a + b + 2c = \left(x^2 + x\right)\left(ax^2 + bx + c\right). \tag{3}$$

Từ (3) so sánh hệ số của x^3 hai vế ta được $a + b = 0$. Do đó (3) trở thành

$$ax^4 - ax^2 + 2c = \left(x^2 + x\right)\left(ax^2 - ax + c\right). \tag{4}$$

Từ (4) so sánh số hạng hằng số hai vế ta được $c = 0$. Do đó (4) trở thành

$$ax^4 - ax^2 = \left(x^2 + x\right)\left(ax^2 - ax\right). \tag{5}$$

Đẳng thức cuối cùng này đúng với mọi x, a. Do đó $P(x) = a\left(x^2 - x\right)$.

Bài 17. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$\left(1 + x^d\right) P(x) = P\left(x^2\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Dễ thấy $P(x) = 0$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Bây giờ ta giả sử $P(x)$ khác đa thức 0. Đặt $\deg P(x) = D \geq 0$. Ta có $\deg P\left(x^2\right) = 2D$, bậc của đa thức $\left(1 + x^d\right) P(x)$ là $d + D$. Do đó Từ (1) suy ra $d + D = 2D$ hay $D = d$. Ta đặt

$$P(x) = a\left(x^d - 1\right) + Q(x), \quad a \neq 0, \quad \deg Q(x) < d.$$

Khi đó

$$\left(1 + x^d\right) P(x) = \left(1 + x^d\right)\left(a\left(x^d - 1\right) + Q(x)\right) = a\left(x^{2d} - 1\right) + \left(1 + x^d\right) Q(x)$$

và

$$P\left(x^2\right) = a\left(x^{2d} - 1\right) + Q\left(x^2\right).$$

Thay vào (1) ta suy ra

$$\left(1 + x^d\right) Q(x) = Q\left(x^2\right), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Nếu $\deg Q(x) = k \geq 0$ thì từ (2) ta suy ra $d + k = 2k$ hay $k = d$, ta gặp mâu thuẫn. Do đó $Q(x) = 0$. Vậy

$$P(x) = a\left(x^d - 1\right)$$

với a là hằng số tùy ý.

Bài 18. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P\Big(P(x)\Big) = (x^2 + x + 1)P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

- ☑ Trường hợp 1: $P(x)$ là đa thức hằng, $P(x) = d$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được: $P(x) \equiv 0$.

- ☑ Trường hợp 2: $P(x)$ khác hằng số. Giả sử $\deg(P) = n$, với $n \in \mathbb{N}^*$.
  Do (1) nên: $n^2 = 2 + n \Leftrightarrow n^2 - n - 2 = 0 \Leftrightarrow n = 2$ (do $n \in \mathbb{N}^*$). Như vậy:

  $$P(x) = ax^2 + bx + c,\ \forall x \in \mathbb{R}\ (a \neq 0).$$

  Thay vào (1), ta được:

  $$\begin{cases} a^3 = a \\ 2a^2b = a + b \\ 2a^2c + ab^2 + ab = a + c + b \\ 2abc + bc + c = b + c \\ ac^2 + bc + c = c \end{cases} \overset{\text{do } a\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a \in \{1; -1\} \\ a = b \\ 2a^2c + ab^2 + ab = a + c + b \\ 2abc + bc = b \\ ac^2 + bc = 0 \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 1 \\ 2c + 1 + 1 = c + 2 \\ 2c + c = 1 \\ c^2 + c = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = b = -1 \\ 2c - 1 + 1 = c - 2 \\ 2c - c = -1 \\ c^2 + c = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0. \end{cases}$$

Kết luận: các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R};\ P(x) = x^2 + x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 19. Không mất tổng quát, giả sử $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$. Đặt

$$d_i = P(a_i) - P(a_{i+1}),\ T = |d_1| + |d_2| + \cdots + |d_{m-1}|.$$

Ta có

$$\begin{aligned} T &= |d_1| + |d_2| + \cdots + |d_{m-1}| \\ &= |P(a_1) - P(a_2)| + |P(a_2) - P(a_3)| + \cdots + |P(a_{m-1}) - P(a_m)| \\ &= |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_{m-1} - a_m| \\ &= a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{m-1} - a_m \\ &= a_1 - a_m = |a_1 - a_m| \\ &= |P(a_1) - P(a_m)| \\ &= |P(a_1) - P(a_2) + P(a_2) - P(a_3) + \cdots + P(a_{m-1}) - P(a_m)| \\ &= |d_1 + d_2 + \cdots + d_{m-1}|. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ cùng dấu. Chỉ có 2 trường hợp sau là có thể xảy ra:

- ☑ **Trường hợp 1:** Các số $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ đều dương.
  Giả thiết của bài toán dẫn đến

  $$P(a_1) - P(a_2) = a_1 - a_2 \Rightarrow P(a_1) - a_1 = P(a_2) - a_2.$$

Tương tự ta có $P(a_2) - a_2 = P(a_3) - a_3$ và

$$P(a_3) - a_3 = P(a_4) - a_4; \ldots; P(a_{m-1}) - a_{m-1} = P(a_m) - a_m.$$

Như vậy

$$P(a_1) - a_1 = P(a_2) - a_2 = P(a_3) - a_3 = \cdots = P(a_{m-1}) - a_{m-1} = P(a_m) - a_m = k$$

với k là hằng số nào đó. Suy ra đa thức $P(x) - x - k$ là một đa thức có bậc không vượt quá n, có m nghiệm phân biệt (cụ thể là $a_1, a_2, \ldots, a_m$) do đó phải là đa thức không. Hay $P(x) = x + k$ với k là hằng số nào đó.

- **Trường hợp 2:** Các số $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ đều âm.
Giả thiết của bài toán dẫn đến

$$P(a_1) - P(a_2) = a_2 - a_1 \Rightarrow P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2.$$

Tương tự trường hợp trên ta có

$$P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2 = P(a_3) + a_3 = \cdots = P(a_{m-1}) + a_{m-1} = P(a_m) + a_m = k$$

với k là hằng số nào đó. Suy ra đa thức $P(x) + x - k$ là một đa thức có bậc không vượt quá n, có m nghiệm phân biệt (cụ thể là $a_1, a_2, \ldots, a_m$) do đó phải là đa thức không. Hay $P(x) = -x + k$ với k là hằng số nào đó.

Thử lại ta thấy các đa thức $P(x) = x + k$, $P(x) = -x + k$ (với $k \in \mathbb{R}$) thỏa mãn bài toán. Vậy đó là các đa thức cần tìm.

Bài 20. Xét các điểm M_k có hoành độ là a_k trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{P(x)}{2019}$. Cố định mỗi chỉ số k thì từ giả thiết ta có ngay các điểm M_i còn lại sẽ chỉ thuộc một trong hai đường thẳng d_k hoặc d'_k, trong đó d_k là đường thẳng đi qua M_k và có hệ số góc bằng 1, còn d'_k là đường thẳng đi qua M_k và có hệ số góc bằng -1. Để ý rằng d_k vuông góc với d'_k. Nếu 2019 điểm M_i $(i = 1, 2, \ldots, 2019)$ không thẳng hàng thì phải có 3 điểm không thẳng hàng trong 2019 điểm đó, và ta giả sử đó là 3 điểm A, B, C. Ta có ngay được điều mâu thuẫn do là ΔABC có cả ba góc vuông. Vậy là 2019 điểm M_i $(i = 1, 2, \ldots, 2019)$ phải thẳng hàng, các điểm đó lại là giao điểm của một đường thẳng với đồ thị của một hàm đa thức có bậc bé hơn 2019, cho nên cái đồ thị kia chính là đường thẳng kẻ qua 2019 điểm M_i, tức là hàm số $y = \dfrac{P(x)}{2019}$ là hàm đa thức bậc nhất. Nó lại có đồ thị, là đường thẳng có hệ số góc là 1 hoặc -1, do đó

$$P(x) = 2019\,(x + c)\,,\ \ P(x) = -2019\,(x + c)\,.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 21. Giả sử tồn tại thức với hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$P\left(P(x) + x\right) = P(x)P(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Nếu $P(x) \equiv c$ (đa thức hằng) thì thay vào (1) ta thu được

$$c = c^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = 1. \end{array}\right.$$

Vậy $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv 1$ là các đa thức hằng thỏa mãn bài ra.
Bây giờ ta giả sử $\deg(P) = n \geq 1$. So sánh bậc của hai vế của (1) ta thu được

$$n^2 = 2n \Leftrightarrow n = 2.$$

Do đó $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. So sánh hệ số cao nhất trong (1) thu được
$$a^3 = a^2 \Leftrightarrow a = 1.$$
Vậy
$$P(x) = x^2 + bx + c, \text{ với } b, c \in \mathbb{R}. \tag{2}$$
Khi đó
$$\begin{aligned} P(x)P(x+1) &= P(x)\left(x^2 + bx + c + 2x + b + 1\right) \\ &= P(x)\left[P(x) + 2x + b + 1\right] \\ &= [P(x)]^2 + 2xP(x) + bP(x) + P(x) \\ &= [P(x) + x]^2 + b\left[P(x) + x\right] + c - x^2 - bx - c + P(x) \\ &= P\left(P(x) + x\right), \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
Vậy đa thức xác định bởi (2) thỏa mãn (1).
Tất cả các đa thức cần tìm là
$$P(x) \equiv 0, \ P(x) \equiv 1, \ P(x) \equiv x^2 + bx + c \ \ (b, c \in \mathbb{R}).$$
Lưu ý. Bài toán 21 này còn giúp ta giải được bài toán 5 ở trang 93

Bài 22. Ta có $\deg P(x) = d$ và
$$P(x + P(x)) = P(P(x)) + P(x)^d + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{*}$$
Nếu $d = 1$, thì $P(x) = ax + b$ với $a \neq 0$. Khi đó
$$P(x + P(x)) = a(x + ax + b) + b = \left(a^2 + a\right)x + ab + b$$
và
$$P(P(x)) + P(x)^d + 1 = a(ax + b) + ax + 2b + 1 = \left(a^2 + a\right)x + ab + 2b + 1.$$
Do đó $b = -1$ và $P(x) = ax - 1$. Bây giờ ta giả sử $d > 1$. Từ (1), so sánh hệ số dẫn đầu (hệ số của x^{d^2}) hai vế ta được
$$a_d^{d+1} = a_d^{d+1} + a_d^d;$$
suy ra $a_d^d = 0$, ta gặp mâu thuẫn. Vậy $P(x) = ax - 1$ (với a là hằng số khác 0).

Bài 23. Giả sử tồn tại đa thức hệ số phức $P(x)$ thỏa mãn
$$P\left(x^n + P(x)\right) = \left(2^n - 1\right)x^{n^2} + P\left(x^n\right). \tag{1}$$
Gọi $k = \deg P$. Nếu $k > n$ thì vế trái của (1) là một đa thức bậc k^2, vế phải của (1) là một đa thức bậc nk, vô lý. Nếu $k < n$ thì vế trái của (1) là một đa thức bậc nk, vế phải của (1) là một đa thức bậc n^2, vô lý. Vậy $\deg P = n$. Đặt
$$P(x) = ax^n + Q(x), \ Q(x) \in \mathbb{C}[x], \ \deg Q = q \leq n - 1, \ a \neq 0.$$
Khi đó
$$\begin{aligned} P\left(x^n\right) &= ax^{n^2} + Q\left(x^n\right), \\ x^n + P(x) &= (a+1)x^n + Q(x), \\ P\left(x^n + P(x)\right) &= a((a+1)x^n + Q(x))^n + Q\left((a+1)x^n + Q(x)\right). \end{aligned}$$

Thay vào (1) ta được

$$a((a+1)x^n + Q(x))^n + Q\left((a+1)x^n + Q(x)\right) = \left(a + 2^n - 1\right)x^{n^2} + Q\left(x^n\right).$$

Do đó

$$\begin{aligned} &a\left((a+1)^n x^{n^2} + n(a+1)^{n-1}x^{n(n-1)}Q(x) + \cdots\right) + Q\left((a+1)x^n + Q(x)\right) \\ &= \left(a + 2^n - 1\right)x^{n^2} + Q\left(x^n\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Đồng nhất hệ số của x^{n^2} ở hai vế của (2) ta được

$$a(a+1)^n = a + 2^n - 1.$$

Khi đó (2) trở thành

$$a\left(n(a+1)^{n-1}x^{n(n-1)}Q(x) + \cdots\right) = Q\left(x^n\right) - Q\left((a+1)x^n + Q(x)\right). \tag{3}$$

1) Trường hợp $a = -1$. Khi đó $2^n - 2 = 0 \Rightarrow n = 1$; khi đó $P(x) = x + b$ và

$$P\left(x + P(x)\right) = x + P\left(x\right) \Rightarrow x + x + b + b = x + x + b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow P(x) = x.$$

2) Trường hợp $a \neq -1$. Nếu $Q(x)$ khác đa thức không thì đa thức ở vế trái của (3) có bậc $n(n-1) + q$, đa thức ở vế phải của (3) có bậc nhỏ hơn hoặc bằng nq; mà

$$n(n-1) + q - nq = n(n-1) - q(n-1) = (n-1)(n-q) > 0$$

nên ta nhận được điều vô lý. Vậy $Q(x)$ là đa thức không. Do đó $P(x) = ax^n$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} &a(x^n + ax^n)^n = \left(2^n - 1\right)x^{n^2} + ax^{n^2} \\ \Leftrightarrow &ax^{n^2}(1+a)^n = \left(a + 2^n - 1\right)x^{n^2} \\ \Leftrightarrow &a(1+a)^n = a + 2^n - 1. \end{aligned}$$

Vậy các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài có dạng $P(x) = ax^n$, với a là nghiệm của phương trình

$$x(x+1)^n = x + 2^n - 1.$$

Bài 24. Ta sẽ xét các trường hợp dựa theo số bậc của đa thức $P(x)$.

- ☑ Nếu $n = 0$ thì $P(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- ☑ Nếu $n = 1$ thì $P(x) = ax + b, a \neq 0$. Khi đó $a(ax+b) + b = 2(ax+b) - 1$, suy ra $a^2 = 2a$ và $ab + b = 2b - 1$. Giải ra ta được $a = 2, b = -1$. Vậy $P(x) = 2x - 1$.
- ☑ Nếu $n \geq 2$ và có ít nhất hai số hạng trong $P(x)$, gọi bậc của số hạng có bậc cao thứ hai của $P(x)$ là m. Khi đó

$$P(x) = a_n x^n + a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0,$$

với $a_n, a_m \neq 0$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} P(P(x)) &= a_n P(x)^n + a_m P(x)^m + a_{m-1}P(x)^{m-1} + \cdots + a_0. \\ P(x)^n &= \left(a_n x^n + a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0\right)^n \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (a_n x^n)^{n-k} \cdot (a_m x^m + \cdots + a_0)^k.$$

Lúc này ta tìm bậc của số hạng có bậc cao thứ hai của $P(P(x))$ bằng cách cho $k = 1$, khi đó bậc của số hạng là $n^2 - n + m$. Ta có

$$P(x^n) = a_n (x^n)^n + a_m (x^n)^m + \cdots + a_0 = a_n x^{n^2} + a_m x^{mn} + \cdots + a_0.$$

Bậc của số hạng cao thứ hai của $P(x^n) + P(x) - 1$ là nm. Do

$$n^2 - n + m = n(n-1) + m > m(n-1) + m = nm$$

nên ta có điều mâu thuẫn.

- Vậy $P(x) = ax^n$, từ yêu cầu của bài toán

$$P(P(x)) = P(x^n) + P(x) - 1$$

ta có $a(ax^n)^n = ax^{n^2} + ax^n - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, đây là điều vô lí. Do đó không tồn tại đa thức $P(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán trong trường hợp này.

Vậy có hai đa thức thỏa mãn yêu cầu bài toán là $P(x) = 1$ hoặc $P(x) = 2x - 1$.

Bài 25. Giả sử tồn tại đa thức hệ số thực $P(x)$ khác đa thức không và thỏa mãn điều kiện: với mọi $k = 0, 1, \ldots, (\deg P)^2$ ta có $P(P(k)) = P(k)^2$. Đặt $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_0$.

1) Trường hợp $d = 0$.
Khi đó $P(x) = c$. Do đó $c = c^2$, nghĩa là $c = 0$ hoặc $c = 1$. Mà $c \neq 0$, nên $P(x) = 1$.

2) Trường hợp $d = 1$. Khi đó $P(x) = ax + b$. Mà $P(P(x)) = P(x)^2$, $\forall x \in \{0, 1\}$ nên

$$a(ax + b) + b = (ax + b)^2, \ \forall x \in \{0, 1\}.$$

Do đó

$$\begin{cases} ab + b = b^2 \\ a^2 + ab + b = (a + b)^2 \end{cases}$$

Nếu $b \neq 0$ thì $a + 1 = b$; khi đó

$$\begin{aligned} & a^2 + a(a+1) + a + 1 = (2a+1)^2 \\ \Leftrightarrow & 2a^2 + 2a + 1 = 4a^2 + 4a + 1 \\ \Leftrightarrow & 2a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = -1 \Rightarrow b = 0; \end{aligned}$$

ta gặp mâu thuẫn. Vậy $b = 0$ và đa thức $P(x) = ax$ (với a là hằng số khác 0) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

3) Trường hợp $d \geq 2$. Ta có

$$P(P(x)) = P(x)^2, \ \forall x \in \{0, 1, 2, \ldots, d^2\}.$$

Do đó đa thức $Q(x) = P(P(x)) - P(x)^2$ có $1 + d^2$ nghiệm đôi một phân biệt.
Mà $\deg Q(x) \leq d^2$, nên $Q(x) = 0$ hay $P(P(x)) = P(x)^2$. Suy ra $d^2 = 2d$ hay $d = 2$. Do đó

$$P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Ta có

$$P\left(a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right) = \left(a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right)^2.$$

Ta có

$$P\left(a_2x^2+a_1x+a_0\right)=a_2\left(a_2x^2+a_1x+a_0\right)^2+a_1\left(a_2x^2+a_1x+a_0\right)+a_0,$$

cho nên so sánh hệ số của x^4, ta được $a_2^3=a_2^2$. Vậy $a_2=1$ và

$$a_1\left(x^2+a_1x+a_0\right)+a_0=0.$$

Suy ra $a_1=a_0=0$, do đó $P(x)=x^2$. Thử lại đúng.

Vậy, các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài bao gồm:

$$P(x)=1, P(x)=ax \text{ (với } a \text{ là hằng số khác 0)}, P(x)=x^2.$$

Bài 26. Ta có

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x-x_i)}\Rightarrow\frac{P'\left(P(x)\right)}{P\left(P(x)\right)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{P(x)-x_i}=\frac{n^2}{xP'(x)}.$$

Do đó $xP'(x)P'\left(P(x)\right)=n^2P\left(P(x)\right)$ với vô số x; suy ra

$$xP'(x)P'\left(P(x)\right)=n^2P\left(P(x)\right),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

1) Trường hợp 1: $P(0)\neq 0$. Từ (1) cho $x=x_i$ ta được

$$x_iP'(x_i)P'(0)=n^2P(0),\ \forall i=1,2,\ldots,n. \tag{2}$$

Do $P(0)\neq 0$ nên từ (2) suy ra $P'(0)\neq 0$; từ đó

$$x_iP'(x_i)-\frac{n^2P(0)}{P'(0)}=0,\ \forall i=1,2,\ldots,n$$

Như thế, đa thức $xP'(x)-\dfrac{n^2P(0)}{P'(0)}$ có bậc n và nhận n số thực $x_1,x_2,\ldots,x_n$ làm nghiệm; suy ra

$$xP'(x)-\frac{n^2P(0)}{P'(0)}=mP(x) \tag{3}$$

với m là hằng số. Đặt $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ $(a_n\neq 0)$. Khi đó

$$P'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1;$$
$$xP'(x)=na_nx^n+(n-1)a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x.$$

Do đó, từ (3) đồng nhất hệ số ta được

$$\begin{cases} m=n \\ a_i=0,\ \forall i=1,\ldots,n-1 \end{cases}$$

Như vậy (3) trở thành

$$-\frac{n^2P(0)}{P'(0)}=na_0\Rightarrow -nP(0)=P'(0)a_0\Rightarrow -na_0=0\Rightarrow a_0=0;$$

mâu thuẫn với $a_0\neq 0$.

2) Trường hợp 2: $P(0) = 0$. Đặt $P(x) = x^k Q(x)$ với $Q(x) \in \mathbb{R}[x], k \in \mathbb{Z}^+, k \leq n, Q(0) \neq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} P'(x) &= kx^{k-1}Q(x) + x^k Q'(x); \\ xP'(x) &= kx^k Q(x) + x^{k+1}Q'(x); \\ P'(P(x)) &= kP(x)^{k-1}Q(P(x)) + P(x)^k Q'(P(x)). \end{aligned}$$

Thay vào (1) ta được

$$n^2 P(x)^k Q(P(x)) = \left(kx^k Q(x) + x^{k+1}Q'(x)\right)\left(kP(x)^{k-1}Q(P(x)) + P(x)^k Q'(P(x))\right)$$

hay

$$n^2 P(x) Q(P(x)) = \left(kx^k Q(x) + x^{k+1}Q'(x)\right)\left(kQ(P(x)) + P(x)Q'(P(x))\right)$$

hay

$$n^2 x^k Q(x) Q(P(x)) = \left(kx^k Q(x) + x^{k+1}Q'(x)\right)\left(kQ(P(x)) + P(x)Q'(P(x))\right)$$

hay

$$n^2 Q(x) Q(P(x)) = \left(kQ(x) + xQ'(x)\right)\left(kQ(P(x)) + P(x)Q'(P(x))\right). \tag{4}$$

Từ (4) cho $x = 0$ ta được $n^2 Q(0)^2 = k^2 Q(0)^2$, mà $Q(0) \neq 0$ nên $n = k$.
Do đó $P(x) = ax^n$ $(a \neq 0)$. Thử lại thỏa mãn.

Vậy đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là $P(x) = ax^n$ $(a \neq 0)$.

Bài 27. Từ giả thiết ta có

$$(P(x) - 1)(P(x) + 1) = Q(x)^3, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Gọi $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ lần lượt là tập nghiệm của đa thức $P(x) - 1$, $P(x) + 1$. Vì hai đa thức $P(x) - 1$ và $P(x) + 1$ không có nghiệm chung nên $A \cap B = \varnothing$ và $A \cup B$ chính là tập nghiệm của đa thức $Q(x)$. Do đó từ (1) suy ra

$$P(x) - 1 = A(x)^3, \quad P(x) + 1 = B(x)^3.$$

với $A(x), B(x)$ là những đa thức. Ta có

$$B(x)^3 - A(x)^3 = 2.$$

Do đó $B(x) - A(x)$, $B(x)^2 + A(x)B(x) + A(x)^2$ là những đa thức hằng. Mà

$$B(x)^2 + A(x)B(x) + A(x)^2 = (B(x) - A(x))^2 + 3A(x)B(x),$$

nên $A(x)B(x)$ là đa thức hằng. Do đó $A(x)$ và $B(x)$ là những đa thức hằng; suy ra $P(x)$ và $Q(x)$ là những đa thức hằng.

Bài 28. Giả sử tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn phương trình hàm

$$[P(x)]^2 - 1 = 4P(x^2 - 4x + 1), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giả sử $P(x)$ không phải là đa thức hằng. Giả sử

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \ a_n \neq 0.$$

Từ (1) ta có

$$\begin{aligned}&\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\right)^2-1\\=&4\left[a_n(x^2-4x+1)^n+a_{n-1}(x^2-4x+1)^{n-1}+\cdots+a_1(x^2-4x+1)+a_0\right].\end{aligned}$$

So sánh hệ số của x^{2n} ở hai vế ta được $a_n^2=4a_n\Rightarrow a_n=4$. Hệ số của x^{2n-1} trong $P(x)^2-1$ là $2a_na_{n-1}$, hệ số của x^{2n-1} trong $4P(x^2-4x+1)$ chỉ xuất hiện ở $a_n(x^2-4x+1)^n$, mà $a_n=4$ nên $a_{n-1}\in\mathbb{Q}$. Hệ số của x^{2n-2} trong $P(x)^2-1$ là $2a_na_{n-2}+a_{n-1}^2$, trong khi đó hệ số của x^{2n-2} trong $4P(x^2-4x+1)$ chỉ xuất hiện ở $a_n(x^2-4x+1)^n+a_{n-1}(x^2-4x+1)^{n-1}$, mà $a_n=4$, $a_{n-1}\in\mathbb{Q}$ nên $a_{n-2}\in\mathbb{Q}$. Lập luận tương tự dẫn đến $P(x)\in\mathbb{Q}[x]$. Xét $a=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$. Khi đó $a=a^2-4a+1$. Trong (1) lấy $x=a$ ta được

$$[P(a)]^2-1=4P(a)\Leftrightarrow[P(a)]^2-4P(a)-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}P(a)=2+\sqrt{5}\\P(a)=2-\sqrt{5}.\end{array}\right.$$

Do $P(x)\in\mathbb{Q}[x]$ nên $P(a)=P\left(\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)=p+q\sqrt{21}$, với p,q là những số hữu tỉ. Vậy không thể xảy ra $P(a)=2+\sqrt{5}$, vì nếu $P(a)=2+\sqrt{5}$ thì

$$\begin{aligned}&p+q\sqrt{21}=2+\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{5}=p-2+q\sqrt{21}\\\Rightarrow&5=(p-2)^2+21q^2+2(p-2)q\sqrt{21}\Rightarrow\sqrt{21}\in\mathbb{Q}\ \text{(vô lí)}.\end{aligned}$$

Tương tự, cũng không thể có $P(a)=2-\sqrt{5}$. Vậy $P(x)$ là đa thức hằng. Thay vào (1) được hai đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x)=\frac{5+\sqrt{21}}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}\text{ và }P(x)=\frac{5-\sqrt{21}}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài 29. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực và thỏa mãn điều kiện

$$[P(x)]^2-2=2P(2x^2-1),\ \forall x\in\mathbb{R}.\tag{1}$$

Giả sử $P(x)$ không phải là đa thức hằng. Đặt $P(1)=a$. Trong (1) lấy $x=1$ ta được

$$a^2-2a-2=0.$$

Giả sử $P(x)=(x-1)P_1(x)+a,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&(x-1)^2[P_1(x)]^2+2a(x-1)P_1(x)+a^2-2=2\left[\left(2x^2-2\right)P_1\left(2x^2-1\right)+a\right]\\\Leftrightarrow&(x-1)^2[P_1(x)]^2+2a(x-1)P_1(x)=2\left[\left(2x^2-2\right)P_1\left(2x^2-1\right)\right]\\\Rightarrow&(x-1)[P_1(x)]^2+2aP_1(x)=4(x+1)P_1\left(2x^2-1\right),\ \forall x\neq1.\end{aligned}\tag{2}$$

Do hàm đa thức $P_1(x)$ liên tục nên từ (2) cho $x\to1$ ta được

$$2aP_1(1)=8P_1(1)\Leftrightarrow P_1(1)=0\ \ (\text{do }2a\neq8).$$

Từ đó $P_1(x)=(x-1)P_2(x)$. Dẫn tới $P(x)=(x-1)^2P_2(x)+a,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$(x-1)^4[P_2(x)]^2+2a(x-1)^2P_2(x)=2\left[\left(2x^2-2\right)^2P_2\left(2x^2-1\right)\right]$$

$$\Rightarrow (x-1)^2[P_2(x)]^2 + 2aP_2(x) = 8(x+1)^2 P_2\left(2x^2-1\right),\ \forall x \neq 1. \quad (3)$$

Do hàm đa thức $P_2(x)$ liên tục nên từ (3) cho $x \to 1$ ta được

$$2aP_2(1) = 32P_2(1) \Leftrightarrow P_2(1) = 0\ \text{ (do } 2a \neq 32).$$

Từ đó $P_2(x) = (x-1)P_3(x)$. Dẫn tới $P(x) = (x-1)^3 P_3(x) + a,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Tiếp tục như trên ta được: $P(x) = (x-1)^n Q(x) + a,\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ (Q(1) \neq 0)$.
Thay vào (1) ta được:

$$(x-1)^{2n}[Q(x)]^2 + 2a(x-1)^n Q(x) = 2\left[\left(2x^2-2\right)^n Q\left(2x^2-1\right)\right]$$

$$\Rightarrow (x-1)^n[Q(x)]^2 + 2aQ(x) = 2^{n+1}(x+1)^n Q\left(2x^2-1\right),\ \forall x \neq 1. \quad (4)$$

Do hàm đa thức $Q(x)$ liên tục nên từ (4) cho $x \to 1$ ta được

$$2aQ(1) = 2^{2n+1}Q(1) \Leftrightarrow Q(1) = 0\ \left(\text{do } 2a \neq 2^{2n+1}\right).$$

Đến đây ta gặp mâu thuẫn. Vậy $P(x)$ là đa thức hằng: $P(x) \equiv a$. Thay vào (1) suy ra kết luận: Có hai đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x) = 1 + \sqrt{3},\ \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \ P(x) = 1 - \sqrt{3},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 30. Giả sử tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P\left(x^2+1\right) = P^2(x) - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Xét 2 trường hợp.

1) Trường hợp 1: P là đa thức hằng, hay $P(x) = c$. Khi đó

$$c = c^2 - 1 \Rightarrow c = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

2) Trường hợp 2: $\deg P \geqslant 1$. Phương trình $x^2 + 1 = x$ có nghiệm $x = x_0 = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Thay $x = x_0$ vào phương trình đã cho thì $P(x_0) = c$ $(c = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2})$. Đặt

$$P(x) = (x - x_0)^n Q(x) + c$$

với $Q(x_0) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Thay vào phương trình đã cho, ta được

$$\left(x^2 + 1 - x_0\right)^n Q\left(x^2+1\right) + c = \left[(x-x_0)^n Q(x) + c\right]^2 - 1$$

Với $x \in \mathbb{R}$, ta biến đổi

$$\left(x^2 + 1 - \left(x_0^2 + 1\right)\right)^n Q\left(x^2+1\right) + c = (x-x_0)^{2n} Q^2(x) + 2c(x-x_0)^n Q(x) + c^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)^n (x+x_0)^n Q\left(x^2+1\right) = (x-x_0)^{2n} Q^2(x) + 2c(x-x_0)^n Q(x) + c^2 - c - 1$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)^n (x+x_0)^n Q\left(x^2+1\right) = (x-x_0)^{2n} Q^2(x) + 2c(x-x_0)^n Q(x)$$

$$\Rightarrow (x+x_0)^n Q\left(x^2+1\right) = (x-x_0)^n Q^2(x) + 2cQ(x), \quad x \neq x_0$$

$$\Rightarrow (x+x_0)^n Q\left(x^2+1\right) = (x-x_0)^n Q^2(x) + 2cQ(x).$$

Cho $x = x_0$, ta được

$$(2x_0)^n Q\left(x_0^2+1\right) = 2cQ(x_0) \Leftrightarrow 2^n x_0^n Q(x_0) = 2cQ(x_0).$$

Mà $Q(x_0) \neq 0$ nên $(1 \pm i\sqrt{3})^n = 1 \pm \sqrt{5}$. $\quad (*)$

Ta có $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Vậy nếu $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n = 1+\sqrt{5}$ thì $2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{3} + i\sin\dfrac{n\pi}{3}\right) = 1+\sqrt{5}$ hay

$$\begin{cases} 2^n\cos\dfrac{n\pi}{3} = 1+\sqrt{5} \\ 2^n\sin\dfrac{n\pi}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^n\cos\dfrac{n\pi}{3} = 1+\sqrt{5} \\ \sin\dfrac{n\pi}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pm 2^n = 1+\sqrt{5} \\ \sin\dfrac{n\pi}{3} = 0 \end{cases} \quad \text{(vô lý)}$$

Tương tự thì các đẳng thức

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^n = 1-\sqrt{5}, \left(1-i\sqrt{3}\right)^n = 1+\sqrt{5}, \left(1-i\sqrt{3}\right)^n = 1-\sqrt{5}$$

cũng không thể xảy ra. Vậy $(*)$ không thể xảy ra.

Kết luận: tất cả các đa thức cần tìm là $P(x) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $P(x) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Lưu ý. Mấu chốt của cách giải này là đẳng thức $(1 \pm i\sqrt{3})^n = 1 \pm \sqrt{5}$ không có nghiệm $n \in \mathbb{N}^*$ và do đó bài toán chỉ có nghiệm là các đa thức hằng.

Bài 31. Giả sử tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P^2(x) - 1 = P\left(x^2+2x-3\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cách 1.

1) Trường hợp 1: P là đa thức hằng, hay $P(x) = c$. Khi đó

$$c = c^2 - 1 \Leftrightarrow c^2 - c - 1 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

2) Trường hợp 2: $\deg P \geqslant 1$.

Xét phương trình $x = x^2 + 2x - 3$, ta được $x = x_0 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Suy ra $P(x_0) = c$.

Đặt $P(x) = (x-x_0)^n Q(x) + c$ với $Q(x_0) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Thay vào phương trình đã cho, ta được

$$\left[(x-x_0)^n Q(x) + c\right]^2 - 1 = \left(x^2+2x-3-x_0\right)^n Q\left(x^2+2x-3\right) + c, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (x-x_0)^{2n} Q(x)^2 + 2c(x-x_0)^n Q(x) = \left(x^2+2x-3-x_0\right)^n Q\left(x^2+2x-3\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mà

$$\begin{aligned} x^2+2x-3-x_0 &= x^2+2x-3-\left(x_0^2+2x_0-3\right) = \left(x^2-x_0^2\right) + 2(x-x_0) \\ &= (x-x_0)(x+x_0+2) \end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}&(x-x_0)^{2n}Q(x)^2+2c(x-x_0)^nQ(x)\\=&(x-x_0)^n(x+x_0+2)^nQ\left(x^2+2x-3\right),\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Do đó

$$(x-x_0)^nQ^2(x)+2cQ(x)=(x+x_0+2)^nQ\left(x^2+2x-3\right),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Cho $x=x_0$, ta có

$$\begin{aligned}&2cQ\left(x_0\right)=2^n\left(x_0+1\right)^nQ\left(x_0^2+2_0-3\right)\\\Leftrightarrow&2cQ\left(x_0\right)=2^n\left(x_0+1\right)^nQ\left(x_0\right)\\\Leftrightarrow&2c=2^n\left(x_0+1\right)^n.\end{aligned}\tag{2}$$

Với $c=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ và $x_0=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ ta thấy (2) không xảy ra.

Vậy tất cả các đa thức cần tìm là

$$P(x)=\frac{1+\sqrt{5}}{2},P(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Cách 2.

1) Trường hợp 1: P là đa thức hằng, hay $P(x)=c$. Khi đó

$$c=c^2-1\Leftrightarrow c^2-c-1=0\Leftrightarrow c=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

2) Trường hợp 2: $\deg P\geqslant 1$. Giả sử

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\ a_n\neq 0.$$

Từ (1) ta có

$$\begin{aligned}&\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\right)^2-1\\=&a_n(x^2+2x-3)^n+a_{n-1}(x^2+2x-3)^{n-1}+\cdots+a_1(x^2+2x-3)+a_0.\end{aligned}$$

So sánh hệ số của x^{2n} ở hai vế ta được $a_n^2=a_n\Rightarrow a_n=1$. Hệ số của x^{2n-1} trong $P(x)^2-1$ là $2a_na_{n-1}$, hệ số của x^{2n-1} trong $P(x^2+2x-3)$ chỉ xuất hiện ở $a_n(x^2+2x-3)^n$, mà $a_n=1$ nên $a_{n-1}\in\mathbb{Q}$. Hệ số của x^{2n-2} trong $P(x)^2-1$ là $2a_na_{n-2}+a_{n-1}^2$, trong khi đó hệ số của x^{2n-2} trong $P(x^2+2x-3)$ chỉ xuất hiện ở $a_n(x^2+2x-3)^n+a_{n-1}(x^2+2x-3)^{n-1}$, mà $a_n=1, a_{n-1}\in\mathbb{Q}$ nên $a_{n-2}\in\mathbb{Q}$. Lập luận tương tự dẫn đến $P(x)\in\mathbb{Q}[x]$.

Xét $a=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$. Khi đó $a=a^2+2a-3$. Trong (1) lấy $x=a$ ta được

$$[P(a)]^2-1=P(a)\Leftrightarrow[P(a)]^2-P(a)-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}P(a)&=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\P(a)&=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}\right.$$

Do $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ nên $P(a) = P\left(\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right) = p + q\sqrt{21}$, với p, q là những số hữu tỉ. Vậy không thể xảy ra $P(a) = 2+\sqrt{5}$, vì nếu $P(a) = 2+\sqrt{5}$ thì

$$\begin{aligned}&p+q\sqrt{21} = 2+\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5} = p-2+q\sqrt{21}\\ \Rightarrow &5 = (p-2)^2 + 21q^2 + 2(p-2)q\sqrt{21} \Rightarrow \sqrt{21} \in \mathbb{Q} \text{ (vô lí).}\end{aligned}$$

Tương tự, cũng không thể có $P(a) = 2-\sqrt{5}$.

Vậy tất cả các đa thức cần tìm là

$$P(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, P(x) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Bài 32. Giả sử tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P(x)P(2x^2-1) = P(x^2)P(2x-1),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Dễ thấy đa thức hằng thỏa mãn các yêu cầu đề bài.
Giả sử $\deg(P) = n \geq 1$ và $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\ \ (a_n \neq 0)$. Khi đó

$$\begin{aligned}P(2x-1) &= a_n(2x-1)^n + a_{n-1}(2x-1)^{n-1} + \cdots + a_1(2x-1) + a_0\\ &= 2^n P(x) + R(x),\end{aligned} \tag{2}$$

với $R(x)$ là đa thức không hoặc $R(x)$ là đa thức có $\deg(R) = m < n$. Giả sử $R(x) \not\equiv 0$, thay (2) vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&P(x)\left[2^n P(x^2) + R(x^2)\right] = P(x^2)\left[2^n P(x) + R(x)\right],\ \forall x \in \mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &P(x)R(x^2) = P(x^2)R(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{3}$$

Từ (3) so sánh bậc ở hai vế ta được $n + 2m = 2n + m \Leftrightarrow m = n$, mâu thuẫn. Vậy $R(x) \equiv 0$ và $P(2x-1) \equiv 2^n P(x)$. Từ đây, đặt $x = t+1$ ta được

$$\begin{aligned}&P(2t+1) = 2^n P(t+1),\ \forall t \in \mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &Q(2t) = 2^n Q(t),\ \forall t \in \mathbb{R}\ \ (\text{với } Q(t) = P(t+1),\ \forall t \in \mathbb{R}).\end{aligned} \tag{4}$$

Vì $Q(x) = P(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên đa thức $Q(x)$ có dạng

$$Q(x) = a_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Thay vào (4) thu được

$$\begin{aligned}&a_n(2x)^n + b_{n-1}(2x)^{n-1} + \cdots + b_1(2x) + b_0\\ =&2^n\left(a_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0\right),\ \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{5}$$

Từ (5), đồng nhất hệ số ta được

$$2^{n-k}b_{n-k} = 2^n b_{n-k}, \forall k = 1, 2, \ldots n,$$

hay $b_{n-k} = 0$, $\forall k = 1, 2, \ldots n$. Vì thế $Q(x) = a_n x^n,\ \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra

$$P(x) = a_n(x-1)^n,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy tất cả các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x) = \alpha(x-1)^n,\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ (\alpha \text{ là hằng số tùy ý}, n \in \mathbb{N}).$$

Bài 33. Dễ thấy đa thức hằng thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Bây giờ ta giả sử $\deg P \geq 1$.
Đặt $R(x) = \dfrac{P(2x-1)}{P(x)}$. Khi đó $R(x) = R\left(x^k\right)$. Ta chọn số $M > 1$ sao cho với mọi nghiệm β của đa thức $P(x)$, ta có $|\beta| < M$. Ta xét số thực $t > M$ bất kỳ, khi đó $C = R(t)$ là một số xác định. Ta có

$$C = R(t) = R\left(t^k\right) = R\left(t^{k^2}\right) = \cdots = R\left(t^{k^n}\right) = \cdots$$

Do đó phương trình $P(2x-1) - CP(x) = 0$ có vô số nghiệm, cho nên

$$P(2x-1) = C \cdot P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\ (C \text{ là hằng số}). \tag{1}$$

Giả sử $r = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là một nghiệm của $P(x)$. Xét dãy số (r_n) như sau:

$$r_1 = r; r_{n+1} = 2r_n - 1,\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Từ (1) suy ra mọi số hạng của dãy số (r_n) đều là nghiệm của $P(x)$. Ta có

$$r_{n+1} - 1 = 2(r_n - 1),\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Do đó $r_n - 1 = 2(r_{n-1} - 1) = 2^2(r_{n-2} - 1) = \cdots = 2^{n-1}(r_1 - 1)$; suy ra

$$r_n = 2^{n-1}(r-1) + 1,\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Nếu tồn tại $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $m \neq n$ sao cho $r_m = r_n$ thì

$$2^{n-1}(a + bi - 1) + 1 = 2^{m-1}(a + bi - 1) + 1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{n-1}(a-1) = 2^{m-1}(a-1) \\ 2^{n-1}b = 2^{m-1}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r = 1.$$

Do đó, nếu $r \neq 1$ thì dãy số (r_n) có vô số phần tử khác nhau; dẫn tới đa thức $P(x)$ có vô số nghiệm; mâu thuẫn với $\deg P \geq 1$. Như vậy $r = 1$. Do 1 là nghiệm duy nhất của đa thức P nên $P(x) = A(x-1)^d$ với A là hằng số khác 0 và $d \geq 1$ là hằng số nguyên. Thử lại đúng. Tất cả các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài bao gồm

$$P(x) = A(x-1)^d$$

với A là hằng số và $d \geq 0$ là số nguyên.

Bài 34. Giả sử tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P(x)P(2x^2+1) = P(x^2)\left[P(2x+1) - 4x\right],\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Nếu $P(x) \equiv c$ (hằng số) thì thay vào (1) ta được $c = 0$.
Tiếp theo giả sử $\deg(P) = n \geq 1$ và

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\ \ (a_n \neq 0).$$

Khi đó

$$\begin{aligned} P(2x+1) &= a_n(2x+1)^n + a_{n-1}(2x+1)^{n-1} + \cdots + a_1(2x+1) + a_0 \\ &= 2^n P(x) + R(x), \end{aligned} \tag{2}$$

với $R(x)$ là đa thức không hoặc $R(x)$ là đa thức có $\deg(R) = m < n$. Thay (2) vào (1) ta được

$$P(x)\left[2^n P(x^2) + R(x^2)\right] = P(x^2)\left[2^n P(x) + R(x) - 4x\right],\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow P(x)R(x^2) = P(x^2)\left[R(x) - 4x\right],\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

• Nếu $R(x) \equiv 0$ thì từ (3) suy ra $P(x) \equiv 0$, mâu thuẫn.
• Nếu $m \geq 2$ thì từ (3) suy ra $n + 2m = 2n + m \Leftrightarrow m = n$, mâu thuẫn.
• Giả sử $m = 1$. Khi đó $\deg\left(R(x) - 4x\right) = k \leq 1$. Từ (3) ta có

$$n + 2 = 2n + k \Leftrightarrow n = 2 - k. \tag{4}$$

Do $n > m = 1$ và $k \leq 1$ nên kết hợp với (4) suy ra $k = 0$ và $n = 2$. Vậy

$$P(2x+1) = 4P(x) + 4x + \alpha,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Trong (1) cho $x = 1$ ta được $P(1) = 0$. Giả sử $P(x) = ax^2 + bx + c,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Từ (5) lần lượt lấy $x = 1$, $x = 0$ ta được

$$\alpha = P(3) - 4 = 9a + 3b + c - 4, \alpha = -4P(0) = -4c.$$

Từ (5) ta có

$$a(2x+1)^2 + b(2x+1) + c = 4(ax^2 + bx + c) + 4x - 4c,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đồng nhất hệ số ta được $\begin{cases} 4a + 2b = 4b + 4 \\ a + b + c = 0. \end{cases}$

Kết hợp với trên ta được hệ $\begin{cases} 4a - 2b = 4 \\ a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + 5c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -1. \end{cases}$

Vậy $P(x) \equiv x^2 - 1$. Thử lại thấy thỏa mãn.
Kết luận: $P(x) \equiv 0,\ P(x) = x^2 - 1$.

Bài 35. Xét mệnh đề $P(x^3 - 1) - x^3 P(x-1)[P(x+1) + 4] = x^6 Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$ (1)
Dễ thấy $P(x)$ khác đa thức hằng.
Thay $x = 0$ vào (1) ta được $P(-1) = 0$, do đó

$$P(x) = (x+1)^n P_1(x)\ (\text{với } n \in \mathbb{N}^*, P_1(x) \in \mathbb{R}[x], P_1(-1) \neq 0).$$

Ta có $\deg P(x) \leq 3$, vì nếu $\deg P(x) \geq 4$ thì $\deg x^6 Q(x) = 3 \deg P(x) \geq 12$, suy ra

$$\deg Q(x) \geq 12 - 6 = 6,$$

mâu thuẫn. Vậy $3 \geq \deg P(x) \geq n$.
Trường hợp 1: $n = 1$. Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x^3 P_1(x^3 - 1) - x^4 P_1(x-1)[P(x+1) + 4] = x^6 Q(x) \\ &\Leftrightarrow P_1(x^3 - 1) - x P_1(x-1)[P(x+1) + 4] = x^3 Q(x) \end{aligned} \tag{2}$$

Thay $x = 0$ vào (2) ta được $P_1(-1) = 0$, mâu thuẫn, vậy loại $n = 1$.
Trường hợp 2: $n = 2$. Ta có $\deg P_1(x) = \deg P(x) - 2 \leq 1$.
Suy ra $P_1(x) = a$ hoặc $P_1(x) = ax + b$.

- ☑ Trường hợp $P_1(x) = a\ (a \neq 0)$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow ax - a[a(x+2)^2 + 4] = xQ(x). \tag{3}$$

Thay $x = 0$ vào (3) ta được $4a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -1$.
Do đó $P(x) = -(x+1)^2$, $Q(x) = -x - 5$.

☑ Trường hợp $P_1(x) = ax + b$ $(a \neq 0; a \neq b)$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow (ax^3 - a + b)x - (ax - a + b)[(ax + a + b)(x + 2)^2 + 4] = xQ(x). \tag{4}$$

So sánh hệ số của x^4 suy ra $a - a^2 = 0 \Rightarrow a = 1$.
Thay $x = 0$ vào (4) ta được $b = -2 \Rightarrow P(x) = (x - 2)(x + 1)^2, Q(x) = 9x - 3$.

Trường hợp 3: $n = 3$, khi đó $P(x) = a(x + 1)^3$ $(a \neq 0)$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&ax^9 - ax^6[a(x + 2)^3 + 4] = x^6Q(x)\\ \Leftrightarrow &Q(x) = ax^3 - a^2x^3 - 6a^2x^2 - 12a^2x - 8a^2 - 4a \quad \text{(loại)}.\end{aligned}$$

Vậy $P(x) = -(x + 1)^2$, $Q(x) = -x - 5$ hoặc $P(x) = (x - 2)(x + 1)^2$, $Q(x) = 9x - 3$, thử lại thỏa mãn bài toán.

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH HÀM CÓ ĐIỀU KIỆN LÀ ĐẲNG THỨC

Trong bài này ta sẽ xét một lớp phương trình hàm đa thức với cặp biến (hoặc bộ ba biến) có ràng buộc bởi những đẳng thức.

A. BÀI TẬP

Bài 1. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(a + b) = P(a) + 7P(b),$$

với $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $ab(a + b) = 2b^3$.

Bài 2. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thoả mãn

$$P(a + b) = \frac{P(a) + P(b)}{2}$$

với mọi số phức a và b sao cho $a^2 + b^2 + 5ab = 0$.

Bài 3 (Đề thi HSG TP. HCM, năm học 2004-2005).
Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn:

$$P(a + b + c) = 7P(a) + 4P(b) - 5P(c)$$

với a, b, c là các số thực và $(a + b)(b + c)(c + a) = 2a^3 + b^3 - 2c^3$.

Bài 4. Cho số thực k. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x + y + z) = P(x) + P(y) + P(z),$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $xy + yz + zx = k$.

Bài 5. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x + y + z) = P(x)P(y)P(z),$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mà $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$.

Bài 6. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x)+P(y)+P(z)+P(x+y+z)=P(x+y)+P(y+z)+P(z+x),$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Bài 7. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x-y)+P(y-z)+P(z-x)+P(x+y+z)=3[P(x)+P(y)+P(z)],$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Bài 8. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(2x+2y-z)+P(2y+2z-x)+P(2z+2x-y)=9[P(x)+P(y)+P(z)],$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Bài 9 (Benelux MO 2010). Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x+y-2z)+P(y+z-2x)+P(z+x-2y)=3[P(x-y)+P(y-z)+P(z-x)]$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Bài 10. Cho số thực k. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x-y)+P(y-z)+P(z-x)=3[P(x)+P(y)+P(z)],$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ và $x+y+z=k$.

Bài 11. Cho số thực k. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x-y)+P(y-z)+P(z-x)=2[P(x)+P(y)+P(z)],$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ và $xy+yz+zx=k$.

Bài 12 (Olympic toán quốc tế 2004). Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

với $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $ab+bc+ca=0$.

Bài 13 (Mở rộng IMO 2004). Cho số thực k. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x-y)+P(y-z)+P(z-x)=2\cdot P(x+y+z),$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ và $xy+yz+zx=k$.

Bài 14 (Costa Rican Math Olympiad 2008).
Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực và thỏa mãn : với a,b,c là ba số thực bất kì thì

$$\begin{aligned}&P(\sqrt{3}(a-b))+P(\sqrt{3}(b-c))+P(\sqrt{3}(c-a))\\=&P(2a-b-c)+P(-a+2b-c)+P(-a-b+2c).\end{aligned}$$

Bài 15 (Thanh Hóa TST 2018-2019). Tìm tất cả các đa thức hệ số thực P sao cho với mọi số thực x, y, z thỏa mãn $x+y+z=0$ thì các điểm $(x,P(x))$, $(y,P(y))$ và $(z,P(z))$ trong mặt phẳng tọa độ thẳng hàng.

Bài 16. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$xP(y-z)+yP(z-x)+zP(x-y)=(z-y)P(x)+(x-z)P(y)+(y-x)P(z),(*)$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Bài 17. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$x^2P(y-z)+y^2P(z-x)+z^2P(x-y)=\left(z^2-y^2\right)P(x)+\left(x^2-z^2\right)P(y)+\left(y^2-x^2\right)P(z),$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Bài 18 (Chọn đội tuyển KHTN 2020). Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$(y+4z)P(x)+(z+4x)P(y)+(x+4y)P(z)=xP(2y-z)+yP(2z-x)+zP(2x-y),$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ và $3(x+y+z)=xyz$.

Bài 19 (Azerbaijan TST 2016). Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P^3(x+y)+P^3(y+z)+P^3(z+x)=3P((x+y)(y+z)(z+x))$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ và $x+y+z=0$.

Bài 20 (2022 Thailand October Camp 2.6).
Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(xy)+P(yz)+P(zx)=P(xy+yz+zx),$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ và $x+y+z=0$.

Bài 21. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x)P(y)+P(y)P(z)+P(z)P(x)=P(xy+yz+zx),$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ và $x+y+z=0$.

Bài 22. Cho số thực $k\neq 0$. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(xy+yz+zx)=P(xy)+P(yz)+P(zx)+2P(x)P(y)P(z),$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ mà $x+y+z=k^2xyz$.

Bài 23 (Đề thi HSG Tỉnh Gia Lai, năm học 2006-2007).
Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P^2(x)-P^2(y)=P(x+y).P(x-y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Bài 24 (Đề thi HSG Tỉnh Gia Lai-2009).
Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$[P(x)]^2+[P(y)]^2=P(x^2+y^2),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Bài 25 (Đề chọn đội tuyển KHTN 2022-2023).
Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ sao cho với mọi bộ số nguyên x,y,z nguyên tố cùng nhau và $x^2+y^2=z^2$ thì

$$P(x+y)^2=P(z)^2+2P(xy).$$

Bài 26. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P^2(a) + P^2(b) + P^2(c) = P^2(a+b+c)$$

với $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 0$.

Bài 27. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P^2(x) + P^2(y) + P^2(z) = 2[P(x)P(y) + P(y)P(z) + P(z)P(x)]$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x + y + z = 0$.

Bài 28. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P^2(x) + P^2(y) + P^2(z) = 2[P(xy) + P(yz) + P(zx)],$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x + y + z = 0$.

Bài 29. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P^2(x) + P^2(y) + P^2(z) = 2P(xy + yz + zx),$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x + y + z = 0$.

Bài 30. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P\left(x^2\right) + P\left(y^2\right) + P\left(z^2\right) = 2P(xy + yz + zx)$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x + y + z = 0$.

Bài 31. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P\left(x^2\right) + P\left(y^2\right) + P\left(z^2\right) = 2[P(xy) + P(yz) + P(zx)],$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x + y + z = 0$.

Bài 32. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P\left(x^2\right) + P\left(y^2\right) + P\left(z^2\right) = 2[P(x)P(y) + P(y)P(z) + P(z)P(x)],$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x + y + z = 0$.

Bài 33. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 4[P(xy) + P(yz) + P(zx)],$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ mà $x + y + z = 0$.

Bài 34. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 4[P(x)P(y) + P(y)P(z) + P(z)P(x)],$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x + y + z = 0$.

Bài 35. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 2\left[P\left(x^2\right) + P\left(y^2\right) + P\left(z^2\right)\right]$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x + y + z = 0$.

Bài 36. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P\left(x^2+y^2+z^2\right)=2\left[P^2(x)+P^2(y)+P^2(z)\right],$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ và $x+y+z=0$.

Bài 37 (2019 USAMO 6, by Titu Andreescu and Gabriel Dospinescu).
Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$\frac{P(x)}{yz}+\frac{P(y)}{zx}+\frac{P(z)}{xy}=P(x-y)+P(y-z)+P(z-x)$$

với mọi bộ số thực x,y,z khác 0 và thỏa mãn $2xyz=x+y+z$.

Bài 38. Cho số thực $k\neq 0$. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$2xP(x)+2yP(y)+2zP(z)=(x+y+z)[P(x-y)+P(y-z)+P(z-x)],$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ mà $x+y+z=kxyz$.

B. LỜI GIẢI

Bài 1. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(a+b)=P(a)+7P(b), \tag{1}$$

với $a,b\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $ab(a+b)=2b^3$.
Nếu $P(x)$ là đa thức hằng thì $P(x)\equiv 0$.
Giả sử $\deg(P)=n\geq 1$. Trong (1) cho $a=b=0$ ta được $P(0)=0$. Với mọi $x\in\mathbb{R}$, bộ $(x;x)$ thỏa mãn điều kiện $ab(a+b)=2b^3$. Do đó thay vào (1) ta được

$$P(2x)=8P(x),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Giả sử $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x$, với $a_n\neq 0$ (do $P(0)=0$). Thay vào (2) ta được

$$a_n(2x)^n+a_{n-1}(2x)^{n-1}+\cdots+a_1(2x)=8a_nx^n+8a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+8a_1x$$
$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^n a_i\left(2^i-8\right)x^i=0\Leftrightarrow a_i\left(2^i-8\right)=0,\forall i=1,2,\ldots,n \tag{3}$$

Ta có $2^i-8=0\Leftrightarrow 2^i=2^3\Leftrightarrow i=3$. Kết hợp với (3) suy ra với mọi $i\in\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{3\}$ ta có $a_i=0$. Vậy $P(x)=mx^3,\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy tất cả các đa thức cần tìm là

$$P(x)=mx^3,\forall x\in\mathbb{R}\ \text{(với } m \text{ là hằng số tùy ý).}$$

Bài 2. Gọi (a,b) là một cặp số khác $(0;0)$ và thỏa mãn điều kiện $a^2+5ab+b^2=0$. Khi đó,

$$a^2+b^2+5ab=0\Leftrightarrow\frac{a^2}{b^2}+5\cdot\frac{a}{b}+1=0\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}.$$

Đặt $\lambda=\dfrac{-5+\sqrt{21}}{2}$. Khi đó, với mọi số thực t, cặp $(a,b)=(\lambda t,t)$ thoả mãn $a^2+b^2+5ab=0$.
Giả sử $P(x)=\sum\limits_{i=0}^n a_ix^i$. Thay vào

$$P(a)+P(b)=2P(a+b)$$

ta được
$$\sum_{i=0}^{n} a_i\lambda^i t^i + \sum_{i=0}^{n} a_i t^i = 2\sum_{i=0}^{n} a_i(\lambda+1)^i t^i$$
với mọi số thực t. So sánh hệ số t^i với $a_i \neq 0$, ta có
$$1+\lambda^i = 2(1+\lambda)^i. \tag{1}$$
Ta có (1) đúng với $i=0$ và $i=3$ và không đúng với $i=1$ và $i=2$. Giả sử $i \geq 3$ và thỏa mãn (1). Từ (1), suy ra λ là một nghiệm của đa thức
$$f(x) = 2(x+1)^i - x^i - 1.$$
Ta có λ là một nghiệm của $g(x) = x^2+5x+1$, nên $g(x) \mid f(x) \in Z[x]$, nghĩa là
$$2(x+1)^i - x^i - 1 = \left(x^2+5x+1\right)h(x) \tag{2}$$
với $h(x)$ là đa thức hệ số với hệ số nguyên. Ta cho $x=-1$ vào (2), có
$$-(-1)^i - 1 = -3h(-1),$$
chứng tỏ rằng $(-1)^i \equiv -1 \pmod 3$, vì vậy i là số lẻ. Do $0<\lambda+1<1$ nên $P(i) = 2(1+\lambda)^i$ là hàm số giảm theo biến i. Hàm số $q(i) = 1+\lambda^i$ với i lẻ có thể viết lại thành,
$$q(i) = 1-(-\lambda)^i.$$
Vì $0 < -\lambda < 1$ nên hàm số $q(i)$ tăng theo biến i. Vậy phương trình (1) có nhiều nhất một nghiệm $i \geq 3$. Ta thấy rằng $i=3$ thoả mãn (1). Như thế nghiệm của (1) là $i=0$, $i=3$. Do đó đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài có dạng $P(x) = a_3x^3 + a_0$.

Bài 3. Giả sử tồn tại đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn:
$$P(a+b+c) = 7P(a) + 4P(b) - 5P(c) \tag{1}$$
với a,b,c là các số thực và $(a+b)(b+c)(c+a) = 2a^3+b^3-2c^3$. (2)
Bộ $(a;b;c) = (3x;2x;x)$ thỏa mãn (2). Do đó thay vào (1) ta được
$$P(6x) = 7P(3x) + 4P(2x) - 5P(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$
Giả sử $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ (quy ước $x^0 = 1$). Thay vào (3) ta được
$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} a_i(6x)^i = 7\sum_{i=0}^{n} a_i(3x)^i + 4\sum_{i=0}^{n} a_i(2x)^i - 5\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &\sum_{i=0}^{n} a_i\left(6^i - 7.3^i - 4.2^i + 5\right)x^i = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &\left(6^i - 7.3^i - 4.2^i + 5\right)a_i = 0, \quad \forall i = 0,1,2,\ldots,n. \qquad (4)
\end{aligned}$$
Với $i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$, giả sử
$$\begin{aligned}
&6^i - 7.3^i - 4.2^i + 5 = 0 \Leftrightarrow 3^i(2^i-7) - 4(2^i-7) = 23\\
\Leftrightarrow &(3^i-4)(2^i-7) = 23 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^i - 4 = 23 \\ 2^i - 7 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow i = 3.
\end{aligned}$$

Vậy kết hợp với (4) ta suy ra: khi $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\} \setminus \{3\}$ thì $a_i = 0$. Bởi vậy

$$P(x) = mx^3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại: Ta có hằng đẳng thức

$$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

Do đó với a, b, c thỏa mãn (2) và $P(x) = mx^3, \forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned}
&P(a+b+c) = 7P(a) + 4P(b) - 5P(c) \\
\Leftrightarrow &m(a+b+c)^3 = m(7a^3 + 4b^3 - 5c^3) \\
\Leftrightarrow &m[a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)] = m(7a^3+4b^3-5c^3) \\
\Leftrightarrow &m[a^3+b^3+c^3+3(2a^3+b^3-2c^3)] = m(7a^3+4b^3-5c^3) \text{ (đúng).}
\end{aligned}$$

Vậy tất cả các đa thức cần tìm là

$$P(x) = mx^3, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (với } m \text{ là các hằng số bất kì).}$$

Bài 4. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x) + P(y) + P(z) = P(x+y+z), \tag{*}$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $xy + yz + zx = k$. Nếu P là đa thức hằng, hay $P(x) \equiv c$, thì thay vào $(*)$ ta được $c = 0$. Do đó $P(x) \equiv 0$ là một nghiệm của bài toán. Bây giờ ta giả sử $\deg P = n > 0$. Đặt

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Thay $x = y = t, z = \dfrac{k-t^2}{2t}$ vào $(*)$, ta có

$$2P(t) + P\left(\frac{k-t^2}{2t}\right) = P\left(\frac{k+3t^2}{2t}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Do $t \neq 0$ nên nhân hai vế với $2^n t^n$, ta được

$$2^{n+1}t^n P(t) + 2^n t^n P\left(\frac{k-t^2}{2t}\right) = 2^n t^n P\left(\frac{k+3t^2}{2t}\right), \forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Bây giờ cả hai vế là các đa thức theo t. So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được

$$a_n 2^{n+1} + a_n(-1)^n = a_n 3^n \overset{a_n \neq 0}{\iff} 2^{n+1} + (-1)^n = 3^n. \tag{**}$$

Nhận thấy $n = 1$ và $n = 2$ thỏa $(**)$. Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$3^n > 2^{n+1} + 1 \geq 2^{n+1} + (-1)^n, \forall n \geq 3.$$

Do đó $(**)$ chỉ có nghiệm $n = 1, n = 2$.

☑ Khi $\deg P = 1$, đặt $P(x) = ax + b$ (với $a \neq 0$). Thay vào $(*)$, ta có

$$a(x+y+z) + 3b = a(x+y+z) + b$$

hay $b = 0$. Do đó $P(x) = ax$ (với $a \neq 0$) là một nghiệm của bài toán.

☑ Khi $\deg P = 2$, đặt $P(x) = ax^2 + bx + c$ (với $a \neq 0$). Thay vào $(*)$, ta có

$$\begin{aligned} &a\left(x^2+y^2+z^2\right) + b(x+y+z) + 3c \\ =&a(x+y+z)^2 + b(x+y+z) + c = a\left(x^2+y^2+z^2\right) + b(x+y+z) + 2ak + c \end{aligned}$$

hay $c = ak$. Do đó $P(x) = ax^2 + bx + ak$ (với $a \neq 0$) là một nghiệm của bài toán.

Vậy $P(x) = ax^2 + bx + ak$ (a, b là hệ số thực bất kỳ) là tất cả đa thức cần tìm.

Chú ý 1.

1) Với các số thực x, y, z mà $xy + yz + zx = k$, ta có đẳng thức

$$(x+y+z)^2 + k = x^2 + k + y^2 + k + z^2 + k.$$

từ đó ta xây dựng được bài toán 4.

2) Trong đề thi Olympic KHTN 2017 có bài toán sau: Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x) + P(y) + P(z) = P(x+y+z),$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $xy + yz + zx = -1$.

Bài 5. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x)P(y)P(z) = P(x+y+z), \tag{1}$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ và $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$. Nếu P là đa thức hằng, hay $P(x) \equiv c$, thì thay vào (1), ta được $c^3 = c$ hay $c = 0$, $c = \pm 1$. Do đó $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv 1$, $P(x) \equiv -1$ là các nghiệm của bài toán. Giả sử $\deg P = n > 0$, thay $y = -x$, $z = 1$ vào (1), ta có

$$P(x)P(-x)P(1) = P(1), \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Nếu $P(1) \neq 0$ thì $P(x)P(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, vô lý vì $\deg P(x)P(-x) = 2n > 0$, suy ra $P(1) = 0$. Do đó, ta đặt $P(x) = (x-1)^n Q(x)$, với $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $Q(1) \neq 0$. Khi đó

$$(x-1)^n(y-1)^n(z-1)^n Q(x)Q(y)Q(z) = (x+y+z-1)^n Q(x+y+z), \tag{2}$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mà $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$.

Dễ thấy rằng, nếu $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$ thì $xy + yz + zx = xyz$, cho nên

$$\begin{aligned} (x-1)(y-1)(z-1) &= (x-1)(yz - y - z + 1) \\ &= xyz - (xy + yz + zx) + (x+y+z) - 1 \\ &= x + y + z - 1. \end{aligned}$$

Do đó, từ (2) ta có

$$Q(x)Q(y)Q(z) = Q(x+y+z), \tag{3}$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mà $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$. Thay $z = \dfrac{xy}{xy - x - y}$ vào (3), ta được

$$Q(x)Q(y)Q\left(\frac{xy}{xy-x-y}\right) = Q\left(\frac{xy(x+y) - x^2 - y^2 - xy}{xy - x - y}\right); \tag{4}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ và $x+y \neq xy$. Từ (4) thay y bởi $-x$ ta được

$$Q(x)Q(-x)Q(1) = Q(1), \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}.$$

Mà $Q(1) \neq 0$ nên $Q(x)Q(-x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. Suy ra $Q(x) \equiv c$, hay $P(x) = c(x-1)^n$. Thay vào (1), ta có

$$c^3(x+y+z-1)^n = c(x+y+z-1)^n;$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mà $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 1$. Do đó $c \in \{0,1,-1\}$. Vậy $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv \pm 1$ và $P(x) = \pm(x-1)^n$ là tất cả đa thức cần tìm.

Bài 6. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x)+P(y)+P(z)+P(x+y+z) = P(x+y)+P(y+z)+P(z+x), \tag{*}$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$. Thay $x=y=z=0$ vào $(*)$, ta được $P(0) = 0$.

1) Giả sử P là đa thức hằng, hay $P(x) \equiv c$. Thay vào $(*)$, ta có $c = 0$. Do đó $P(x) \equiv 0$ là một nghiệm của bài toán.

2) Giả sử $\deg P = n > 0$. Đặt

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Thay y, z bởi x vào $(*)$, ta có

$$3P(x) + P(3x) = 3P(2x).$$

So sánh hệ số của x^n ở hai vế, ta được

$$3a_n + a_n 3^n = 3a_n 2^n \quad \overset{a_n \neq 0}{\Longleftrightarrow} 3^{n-1} + 1 = 2^n \Leftrightarrow n = 2.$$

Mà $P(0) = 0$ nên đặt $P(x) = ax^2 + bx$ (với $a \neq 0$). Thay vào $(*)$ thỏa mãn.

Vậy $P(x) = ax^2 + bx$ (a, b là hằng số thực bất kỳ) là tất cả đa thức cần tìm.
Chú ý 2. Với mọi số thực x, y, z, ta có đẳng thức

$$x^2 + y^2 + z^2 + (x+y+z)^2 = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2,$$

từ đó ta xây dựng được bài toán 6.

Bài 7. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x-y)+P(y-z)+P(z-x)+P(x+y+z) = 3[P(x)+P(y)+P(z)], \tag{*}$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$. Thay $x=y=z=0$ vào $(*)$, ta được $P(0) = 0$. Thay $y=z=0$ vào $(*)$, ta được

$$P(-x) = P(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $P(x)$ là hàm chẵn, hay $P(x)$ chỉ chứa các số hạng có mũ chẵn.

1) Giả sử P là đa thức hằng, hay $P(x) \equiv c$. Thay vào $(*)$, ta có $c = 0$. Do đó $P(x) \equiv 0$ là một nghiệm của bài toán.

2) Giả sử $\deg P = n > 0$. Đặt

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Thay $y = x, z = 0$ vào $(*)$, ta có

$$4P(x) = P(2x).$$

So sánh hệ số của x^n ở hai vế, ta được

$$4a_n = a_n 2^n \overset{a_n \neq 0}{\Longleftrightarrow} n = 2.$$

Mà $P(0) = 0$ nên $P(x) = ax^2$ (với $a \neq 0$). Thay vào $(*)$ thỏa mãn.

Vậy $P(x) = ax^2$ (a là hệ số thực bất kỳ) là tất cả đa thức cần tìm.
Lưu ý. Với mọi số thực x, y, z, ta có đẳng thức

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + (x+y+z)^2 = 3\left(x^2+y^2+z^2\right),$$

từ đó ta xây dựng được bài toán 7.

Bài 8. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(2x+2y-z) + P(2y+2z-x) + P(2z+2x-y) = 9[P(x)+P(y)+P(z)], \qquad (*)$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$. Thay $x = y = z = 0$ vào $(*)$, ta được $P(0) = 0$. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng, hay $P(x) \equiv c$ thì thay vào $(*)$, ta có $c = 0$. Do đó $P(x) \equiv 0$ là một nghiệm của bài toán. Bây giờ ta giả sử $\deg P = n \geq 1$. Đặt

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Thay $y = z = 0$ vào $(*)$, ta có

$$2P(2x) + P(-x) = 9P(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của x^n ở hai vế, ta được

$$2a_n 2^n + a_n(-1)^n = 9a_n \overset{a_n \neq 0}{\Longleftrightarrow} 2^{n+1} + (-1)^n = 9 \Leftrightarrow n = 2.$$

Mà $P(0) = 0$ nên đặt $P(x) = ax^2 + bx$ (với $a \neq 0$). Thay vào $(*)$, ta có

$$\begin{aligned} &a\left[(2x+2y-z)^2 + (2y+2z-x)^2 + (2z+2x-y)^2\right] + 3b(x+y+z) \\ =&9a\left(x^2+y^2+z^2\right) + 9b(x+y+z), \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

hay $b = 0$. Do đó $P(x) = ax^2$ (với $a \neq 0$) là một nghiệm của bài toán.
Vậy $P(x) = ax^2$ (a là hệ số thực bất kỳ) là tất cả đa thức cần tìm.
Chú ý 3. Với mọi số thực x, y, z, ta có đẳng thức

$$(2x+2y-z)^2 + (2y+2z-x)^2 + (2z+2x-y)^2 = 9\left(x^2+y^2+z^2\right);$$

từ đó ta xây dựng được bài toán 8.

Bài 9. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x+y-2z)+P(y+z-2x)+P(z+x-2y)=3[P(x-y)+P(y-z)+P(z-x)] \qquad (1)$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$. Thay $x=y=z=0$ vào (1), ta được $P(0)=0$. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng, hay $P(x)\equiv c$, thì thay vào (1), ta có $c=0$; do đó $P(x)\equiv 0$ là một nghiệm của bài toán. Bây giờ ta giả sử $\deg P=n>0$. Đặt

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \quad a_n\neq 0.$$

Thay $y=z=0$ vào (1), ta có

$$2P(x)+P(-2x)=3P(x)+3P(-x).$$

So sánh hệ số của x^n ở hai vế, ta được

$$2a_n+a_n(-2)^n=3a_n+3a_n(-1)^n \overset{a_n\neq 0}{\iff} 2+(-2)^n=3+3\cdot(-1)^n. \qquad (2)$$

- Nếu n lẻ thì (2) trở thành $2^n=2$, hay $n=1$.
- Nếu n chẵn thì (2) trở thành $2^n=4$, hay $n=2$.

Như vậy (2) tương đương $n=1$ hoặc $n=2$.

- Khi $\deg P=1$, mà $P(0)=0$ nên đặt $P(x)=ax$ (với $a\neq 0$). Thay vào (1) thỏa mãn.
- Khi $\deg P=2$, mà $P(0)=0$ nên đặt $P(x)=ax^2+bx$ (với $a\neq 0$). Thay vào (1) thỏa mãn.

Vậy $P(x)=ax^2+bx$ (a,b là hệ số thực bất kỳ) là tất cả các đa thức cần tìm.
Chú ý 4. Với mọi số thực x,y,z, ta có đẳng thức

$$(x+y-2z)^2+(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2=3\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right],$$

từ đó ta xây dựng được bài toán 9.

Bài 10. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x-y)+P(y-z)+P(z-x)=3[P(x)+P(y)+P(z)], \qquad (1)$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ và $x+y+z=k$. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng, hay $P(x)\equiv c$ thì thay vào $(*)$, ta có $c=0$. Do đó $P(x)\equiv 0$ là một nghiệm của bài toán. Bây giờ ta giả sử $\deg P=n\geq 1$. Đặt

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \quad a_n\neq 0.$$

Thay $x=y=t$, $z=k-2t$ vào (1), ta có

$$P(0)+P(-k+3t)+P(k-3t)=6P(t)+3P(k-2t), \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^n ở hai vế, ta được

$$a_n3^n+a_n(-3)^n=6a_n+3a_n(-2)^n \overset{a_n\neq 0}{\iff} 3^n+(-3)^n=6+3\cdot(-2)^n. \qquad (2)$$

Nếu n lẻ thì (2) trở thành $2^n=2$, hay $n=1$.
Nếu n chẵn thì (2) trở thành $2\cdot 3^n=6+3\cdot 2^n$ hay $3^{n-1}=2^{n-1}+1$. (3)
Nhận thấy $n=2$ thỏa (3). Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$3^{n-1}>2^{n-1}+1, \forall n\geq 4.$$

Do đó (2) chỉ có nghiệm $n=1$, $n=2$.

- Khi $\deg P = 1$, đặt $P(x) = ax + b$ (với $a \neq 0$). Thay vào (1), ta có
$$3b = 3a(x+y+z) + 9b = 3ak + 9b,$$
với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x + y + z = k$. Vậy $b = -\dfrac{ak}{2}$. Do đó $P(x) = ax - \dfrac{ak}{2}$ (với $a \neq 0$) là nghiệm của bài toán.

- Khi $\deg P = 2$, đặt $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Thay vào (1), ta có
$$\begin{aligned} a\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right] + 3c &= 2a\left(x^2+y^2+z^2\right) - 2a(xy+yz+zx) + 3c \\ &= 2a\left(x^2+y^2+z^2\right) - a(k^2 - x^2 - y^2 - z^2) + 3c \\ &= 3a\left(x^2+y^2+z^2\right) - ak^2 + 3c \\ &= 3a\left(x^2+y^2+z^2\right) + 3b(x+y+z) + 9c \\ &= 3a\left(x^2+y^2+z^2\right) + 3bk + 9c \end{aligned}$$
hay $c = -\dfrac{ak^2}{6} - \dfrac{bk}{2}$. Do đó $P(x) = ax^2 + bx - \dfrac{ak^2}{6} - \dfrac{bk}{2}$ (với $a \neq 0$) là nghiệm của bài toán.

Vậy $P(x) = ax^2 + bx - \dfrac{ak^2}{6} - \dfrac{bk}{2}$ (với a, b là hệ số thực bất kỳ).
Chú ý 5. Khi $k = 0$ ta thu được bài toán trong đề thi chọn đội tuyển KHTN 2010.

Bài 11. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn
$$P(x-y) + P(y-z) + P(z-x) = 2[P(x) + P(y) + P(z)], \tag{*}$$
với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $xy + yz + zx = k$. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng, hay $P(x) \equiv c$ thì thay vào $(*)$, ta có $c = 0$. Do đó $P(x) \equiv 0$ là một nghiệm của bài toán. Bây giờ ta giả sử $\deg P = n \geq 1$. Đặt
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$
Thay $x = y = t$, $z = \dfrac{k - t^2}{2t}$ vào $(*)$, ta có
$$P(0) + P\left(\frac{-k+3t^2}{2t}\right) + P\left(\frac{k-3t^2}{2t}\right) = 4P(t) + 2P\left(\frac{k-t^2}{2t}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$
Do $t \neq 0$ nên nhân hai vế với $2^n t^n$, ta được
$$2^n P(0) t^n + 2^n t^n P\left(\frac{-k+3t^2}{2t}\right) + 2^n t^n P\left(\frac{k-3t^2}{2t}\right) = 2^{n+2} t^n P(t) + 2^{n+1} t^n P\left(\frac{k-t^2}{2t}\right)$$
với mọi $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Bây giờ cả hai vế là các đa thức theo t. So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được
$$a_n 3^n + a_n(-3)^n = a_n 2^{n+2} + 2a_n(-1)^n \overset{a_n \neq 0}{\Longleftrightarrow} 3^n + (-3)^n = 2^{n+2} + 2\cdot(-1)^n. \tag{**}$$

- Nếu n lẻ thì $(**)$ trở thành $2^{n+1} = 1$, vô lý.

- ☑ Nếu n chẵn thì $(**)$ trở thành $3^n = 2^{n+1} + 1$. Nhận thấy $n = 2$ thỏa $(**)$. Bằng quy nạp, ta chứng minh được
$$3^n > 2^{n+1} + 1, \forall n \geq 4.$$

Do đó $(**)$ chỉ có nghiệm $n = 2$. Vậy $\deg P = 2$.
Đặt $P(x) = ax^2 + bx + c$ (với $a \neq 0$). Thay vào (*), ta có

$$\begin{aligned} & a\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right] + 3c = 2a\left(x^2+y^2+z^2\right) + 2b(x+y+z) + 6c \\ \Rightarrow & 2a\left(x^2+y^2+z^2\right) - 2ak + 3c = 2a\left(x^2+y^2+z^2\right) + 2b(x+y+z) + 6c; \end{aligned}$$

suy ra $b = 0$, $c = -\dfrac{2ak}{3}$. Do đó $P(x) = ax^2 - \dfrac{2ak}{3}$ (với $a \neq 0$) là một nghiệm của bài toán. Vậy

$$P(x) = ax^2 - \frac{2ak}{3} \text{ (với } a \text{ là hằng số thực bất kỳ)}$$

là tất cả đa thức cần tìm.

Bài 12. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c), \tag{1}$$

với $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 0$.
Trước hết ta tìm một nghiệm nguyên của phương trình

$$ab + bc + ca = 0.$$

Chọn $a = 6$ ta được $6b + 6c + bc = 0$. Chọn $b = 3$ ta được

$$18 + 6c + 3c = 0 \Rightarrow c = -2.$$

Vậy bộ $(a; b; c) = (6; 3; -2)$ là một nghiệm nguyên của $ab + bc + ca = 0$. Suy ra với mọi $x \in \mathbb{R}$, bộ $(6x; 3x; -2x)$ thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 0$. Do đó thay vào (1) ta được

$$P(3x) + P(5x) + P(-8x) = 2P(7x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Giả sử $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ (quy ước $x^0 = 1$). Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n} a_i(3x)^i + \sum_{i=0}^{n} a_i(5x)^i + \sum_{i=0}^{n} a_i(-8x)^i = 2\sum_{i=0}^{n} a_i(7x)^i, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=0}^{n} a_i\left(3^i + 5^i + (-8)^i\right)x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i(2.7^i)x^i, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=0}^{n} a_i\left(3^i + 5^i + (-8)^i - 2.7^i\right)x^i = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ta thu được

$$\left(3^i + 5^i + (-8)^i - 2.7^i\right)a_i = 0, \quad \forall i = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Đặt $\lambda_i = 3^i + 5^i + (-8)^i - 2.7^i$, $\forall i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Ta thử tính một vài giá trị ban đầu của dãy số $\{\lambda_i\}_{i=0}^{n}$

$$\lambda_0 = 1 > 0, \quad \lambda_1 = 3 + 5 - 8 - 2.7 < 0, \quad \lambda_2 = 9 + 25 + 64 - 2.49 = 0$$

$$\lambda_3 = 27 + 125 - 512 - 2.343 < 0, \ \ \lambda_4 = 81 + 625 + 4096 - 4802 = 0.$$

Vậy ta nhận thấy rằng với $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ thì: $\lambda_i < 0$ với i lẻ ; $\lambda_i > 0$ khi $i = 0$ hoặc $i \geq 6$ và chẵn ; $\lambda_i = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} i = 2 \\ i = 4. \end{array}\right.$ Vậy kết hợp với (3) ta suy ra: khi $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\} \setminus \{2, 4\}$ thì $a_i = 0$. Bởi vậy $P(x) = mx^2 + nx^4, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy tất cả các đa thức cần tìm là

$$P(x) = mx^2 + nx^4, \forall x \in \mathbb{R} \ \text{(với } m \text{ và } n \text{ là các hằng số bất kì).}$$

Lưu ý. Ta có thể giải phương trình

$$3^i + 5^i + (-8)^i - 2.7^i = 0 \ (i = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

như sau:

- Khi i lẻ, $i = 2j + 1$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, phương trình (3) trở thành:

$$3^{2j+1} + 5^{2j+1} = 8^{2j+1} + 2.7^{2j+1}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{2j+1} + \left(\frac{5}{7}\right)^{2j+1} = \left(\frac{8}{7}\right)^{2j+1} + 2. \tag{5}$$

  Do hàm số mũ $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < a < 1$ nên

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{2j+1} + \left(\frac{5}{7}\right)^{2j+1} < \left(\frac{3}{7}\right)^{0} + \left(\frac{5}{7}\right)^{0} < 2, \ \left(\frac{8}{7}\right)^{2j+1} + 2 > 2.$$

  Suy ra (5) vô nghiệm.

- Khi i chẵn, $i = 2j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, phương trình (3) trở thành:

$$3^{2j} + 5^{2j} + 8^{2j} = 2.7^{2j} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{49}\right)^j + \left(\frac{25}{49}\right)^j + \left(\frac{64}{49}\right)^j = 2. \tag{6}$$

  Dễ thấy $j = 1, j = 2$ thỏa mãn (6). Khi $j \geq 3$ thì $\left(\frac{64}{49}\right)^j > 2$, suy ra (6) vô nghiệm.

Vậy (4) $\Leftrightarrow i \in \{2; 4\}$.

Bài 13. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x-y) + P(y-z) + P(z-x) = 2 \cdot P(x+y+z), \tag{*}$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $xy + yz + zx = k$. Thay $z = 0$ vào $(*)$, ta có

$$P(x-y) + P(y) + P(-x) = 2 \cdot P(x+y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, xy = k. \tag{1}$$

Gọi $T(u, v)$ là phép thế $x = u, y = v$ vào (1). Chú ý rằng

$$xy = yx = (-x)(-y) = (-y)(-x) = k,$$

nên lần lượt thực hiện $T(y, x), T(-x, -y), T(-y, -x)$, ta có

$$P(y-x) + P(x) + P(-y) = 2 \cdot P(x+y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, xy = k \tag{2}$$
$$P(y-x) + P(-y) + P(x) = 2 \cdot P(-x-y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, xy = k \tag{3}$$

$$P(x-y)+P(-x)+P(y)=2\cdot P(-x-y), \quad \forall x,y\in\mathbb{R}, xy=k \tag{4}$$

Lấy $(1)+(2)-(3)-(4)$, ta được

$$P(x+y)=P(-x-y), \quad \forall x,y\in\mathbb{R}, xy=k$$

Từ đây dễ dàng suy ra $P(x)$ là hàm chẵn, suy ra $P(x)$ chỉ chứa các số hạng có mũ chẵn. Khi P là đa thức hằng, hay $P(x)\equiv c$, thay vào $(*)$ ta được $c=0$. Do đó $P(x)\equiv 0$ là một nghiệm của bài toán. Bây giờ ta giả sử $\deg P=n\geq 2$, với n chẵn. Ta đặt

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \quad a_n\neq 0.$$

Thay $x=2t, y=t, z=\dfrac{k-2t^2}{3t}$ vào $(*)$, ta có

$$P(t)+P\left(\frac{-k+5t^2}{3t}\right)+P\left(\frac{k-8t^2}{3t}\right)=2P\left(\frac{k+7t^2}{3t}\right), \quad \forall t\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Do $t\neq 0$ nên nhân hai vế với 3^nt^n, ta được

$$3^nt^nP(t)+3^nt^nP\left(\frac{-k+5t^2}{3t}\right)+3^nt^nP\left(\frac{k-8t^2}{3t}\right)=2\cdot 3^nt^nP\left(\frac{k+7t^2}{3t}\right), \quad \forall t\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Bây giờ cả hai vế là các đa thức theo t. So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được

$$a_n3^n+a_n5^n+a_n8^n=2a_n7^n \overset{a_n\neq 0}{\Longleftrightarrow} 3^n+5^n+8^n=2\cdot 7^n. \tag{*}$$

Nhận thấy $n=2$ và $n=4$ thỏa $(**)$. Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$3^n+5^n+8^n>2\cdot 7^n, \forall n\geq 6.$$

Do đó $(**)$ chỉ có nghiệm $n=2, n=4$.

- Khi $\deg P=2$, đặt $P(x)=ax^2+b$ (với $a\neq 0$). Thay vào $(*)$, ta có

$$2a\left(x^2+y^2+z^2\right)-2ak+3b=2a\left(x^2+y^2+z^2\right)+4ak+2b,$$

  suy ra $b=6ak$. Do đó $P(x)=ax^2+6ak$ (với $a\neq 0$) là một nghiệm của bài toán.

- Khi $\deg P=4$, đặt $P(x)=ax^4+bx^2+c$ $(a\neq 0)$. Thay vào $(*)$, ta có

$$\begin{aligned}
&a\left[(x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4\right]+b\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]+3c\\
=&2a(x+y+z)^4+(2b-12ak)\left(x^2+y^2+z^2\right)-6ak^2-2bk+3c\\
=&2a(x+y+z)^4+2b(x+y+z)^2+2c\\
=&2a(x+y+z)^4+2b\left(x^2+y^2+z^2\right)+4bk+2c,
\end{aligned}$$

  hay $ak=0, c=6bk$.

Như vậy, nếu $k=0$ thì $P(x)=ax^4+bx^2$ (với a,b là hệ số thực bất kỳ); nếu $k\neq 0$ thì

$$P(x)=ax^2+6ak \text{ (với } a \text{ là hệ số thực bất kỳ)}$$

là tất cả đa thức cần tìm.

Bài 14. Dễ thấy đa thức hằng số thỏa mãn các yêu cầu đề bài.
Tiếp theo giả sử $\deg P = h \geq 1$. Đặt $x = a - c, y = b - a, z = c - b$.
Khi đó $x + y + z = 0$. Từ giả thiết suy ra

$$P(\sqrt{3}x) + P(\sqrt{3}y) + P(\sqrt{3}z) = P(x - y) + P(y - z) + P(z - x),$$

với x, y, z là ba số thực sao cho $x + y + z = 0$. Như vậy thay bộ $(x; y; z)$ bởi bộ $(x; x; -2x)$ ta được

$$2P(\sqrt{3}x) + P(-2\sqrt{3}x) = P(0) + P(3x) + P(-3x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giả sử $P(x) = \sum_{i=0}^{h} a_i x^i$ ($a_h \neq 0$, quy ước $x^0 = 1$). Thay vào (1) ta được

$$2\sum_{i=0}^{h} a_i(\sqrt{3}x)^i + \sum_{i=0}^{h} a_i(-2\sqrt{3}x)^i = a_0 + \sum_{i=0}^{h} a_i(3x)^i + \sum_{i=0}^{h} a_i(-3x)^i. \quad (2)$$

So sánh hệ số của x^h ở hai vế của (2) ta được

$$2(\sqrt{3})^h + (-2\sqrt{3})^h = 3^h + (-3)^h. \quad (3)$$

Dễ thấy $h = 1, h = 2$ thỏa mãn (3). Tiếp theo xét $h \geq 3$. Từ (3) ta thấy rằng h phải là số chẵn : $h = 2k$, với $k \geq 2$. Khi đó (3) trở thành

$$2.3^k + 12^k = 2.9^k \Leftrightarrow 2 + 4^k = 2.3^k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 2. \end{array}\right.$$

Tóm lại từ (3) suy ra h chỉ có thể là $h = 1, h = 2, h = 4$.

- Trường hợp $h = 1$. Khi đó $P(x) = mx + n, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào phương trình hàm đã cho ở đầu bài thấy thỏa mãn.

- Trường hợp $h = 2$. Khi đó $P(x) = mx^2 + nx + p, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào phương trình hàm đã cho ở đầu bài ta được

$$\begin{aligned} &3m\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \\ =&m\left[(2a-b-c)^2 + (2b-c-a)^2 + (2c-a-b)^2\right] \text{ (đúng).} \end{aligned}$$

- Trường hợp $h = 4$. Khi đó $P(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + e, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Trong phương trình hàm đã cho ở đầu bài, thay bộ $(a; b; c)$ bởi $(x; 0; 0)$ ta được

$$P(\sqrt{3}x) + P(0) + P(-\sqrt{3}x) = P(2x) + 2P(-x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Thay $P(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + e, \ \forall x \in \mathbb{R}$ vào (4) ta được

$$\begin{aligned} &9mx^4 + 3\sqrt{3}nx^3 + 3px^2 + \sqrt{3}qx + 9mx^4 - 3\sqrt{3}nx^3 + 3px^2 - \sqrt{3}qx \\ =&16mx^4 + 8nx^3 + 4px^2 + 2qx + 2mx^4 - 2nx^3 + 2px^2 - 2qx, \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hay $18mx^4 = 18mx^4 + 6nx^3, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $n = 0$. Vậy

$$P(x) = mx^4 + px^2 + qx + e, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay vào phương trình hàm đã cho ở đầu bài ta được

$$9m\left[(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4\right] + 3p\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$

$$\begin{aligned}&=m\left[(2a-b-c)^4+(2b-c-a)^4+(2c-a-b)^4\right]\\&+p\left[(2a-b-c)^2+(2b-c-a)^2+(2c-a-b)^2\right].\end{aligned}\quad (5)$$

Tiếp theo ta chứng minh đẳng thức

$$\begin{aligned}&9\left[(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4\right]\\&=(2a-b-c)^4+(2b-c-a)^4+(2c-a-b)^4.\end{aligned}\quad (6)$$

Đặt $x=a-c, y=b-a, z=c-b$. Khi đó $x+y+z=0$. Ta có

$$9\left[(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4\right]=9(x^4+y^4+z^4).\quad (7)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}&(2a-b-c)^4+(2b-c-a)^4+(2c-a-b)^4\\&=(x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4\\&=2(x^4+y^4+z^4)-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3\\&-4y^3z+6y^2z^2-4yz^3-4z^3x+6z^2x^2-4zx^3\\&=2(x^4+y^4+z^4)-4x^3(y+z)-4y^3(x+z)-4z^3(x+y)\\&+6(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2).\end{aligned}\quad (8)$$

Do $x+y+z=0$ nên $x^2+y^2+z^2=-2(xy+yz+zx)$. Suy ra

$$\begin{aligned}&x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\\&=4[x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyx(x+y+z)]=4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2).\end{aligned}$$

Như vậy $x^4+y^4+z^4=2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$. Thay vào (8) ta được

$$(2a-b-c)^4+(2b-c-a)^4+(2c-a-b)^4=9(x^4+y^4+z^4).\quad (9)$$

Từ (7) và (9) suy ra (6) được chứng minh. Do đó (5) đúng, nghĩa là đa thức

$$P(x)=mx^4+px^2+qx+e,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Kết luận : Các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là :

$$\begin{aligned}&P(x)=mx+n,\ \forall x\in\mathbb{R};\\&P(x)=mx^2+nx+p\ (m\neq 0),\ \forall x\in\mathbb{R};\\&P(x)=mx^4+px^2+qx+e\ (m\neq 0),\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Lưu ý. Từ (4) ta so sánh hệ số của x^h ở hai vế cũng suy ra được h chỉ có thể là $h=1$, $h=2$, $h=4$.

Bài 15. Dễ thấy các đa thức $P(x)=1$ và $P(x)=x$ thỏa mãn đề bài.
Các điểm $(x,P(x))$, $(y,P(y))$ và $(z,P(z))$ thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{x-y}{x-z}=\frac{P(x)-P(y)}{P(x)-P(z)}\Leftrightarrow (x-y)P(z)+(y-z)P(x)+(z-x)P(y)=0.\quad (*)$$

Vì $x+y+z=0$ nên

$$\begin{aligned}
&(x-y)z^3+(y-z)x^3+(z-x)y^3\\
=&(x-y)z^3+(y-z)x^3-[(x-y)+(y-z)]\,y^3\\
=&(x-y)\left(z^3-y^3\right)+(y-z)\left(x^3-y^3\right)\\
=&(x-y)(z-y)\left[z^2+zy+y^2-\left(x^2+xy+y^2\right)\right]\\
=&(x-y)(z-y)\left[z^2-x^2+zy-xy\right]\\
=&-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)\\
=&0.
\end{aligned}$$

Do đó, $P(x)=x^3$ cũng thỏa mãn bài toán. Giả sử

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

là một đa thức với hệ số thực thỏa mãn bài toán. Thay $(x;y;z)$ bởi $(x;2x;-3x)$ ta có

$$-xP(-3x)+5xP(x)-4xP(2x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra $a_k\left((-3)^k+4\cdot2^k-5\right)=0$ với mọi $k=1,2,\ldots n$. Tuy nhiên ta thấy

- Với mọi $k\geq 2$, k chẵn thì $(-3)^k+4\cdot2^k-5>(-3)^2+4\cdot2^2-5>0$.
- Với mọi $k\geq 5$, k lẻ thì

$$\begin{aligned}
-\left((-3)^k+4\cdot2^k-5\right)&=(2+1)^k-4\cdot2^k+5\\
&\geq 2^k+k\cdot2^{k-1}+\frac{k(k-1)}{2}\cdot2^{k-2}-4\cdot2^k+5\\
&\geq 2^k\left(1+\frac{5}{2}+\frac{5\cdot4}{8}-4\right)+5\\
&>0.
\end{aligned}$$

Vậy với mọi $k\neq 0;1;3$ ta luôn có $a_k=0$.
Do đó $P(x)=ax^3+bx+c$ (với a,b,c bất kì thuộc $\mathbb{R}$).

Bài 16. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$xP(y-z)+yP(z-x)+zP(x-y)=(z-y)P(x)+(x-z)P(y)+(y-x)P(z),\qquad (*)$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng, hay $P(x)\equiv c$ thì thay vào $(*)$, ta có $c=0$. Do đó $P(x)\equiv 0$ là một nghiệm của bài toán. Bây giờ ta giả sử $\deg P=n>0$. Đặt

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad a_n\neq 0.$$

Do $P(x)\not\equiv 0$ nên $\exists t_0\in\mathbb{R}$ sao cho $P(t_0)\neq 0$. Thay $x=y=z=t_0$ vào $(*)$, ta có $P(0)=0$.
Thay $y=x$, $z=0$ vào $(*)$, ta được

$$xP(x)+xP(-x)=-xP(x)+xP(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Hay $xP(-x)=-xP(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó

$$P(-x)=-P(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\};$$

mà $P(0)=0$ nên $P(-x)=-P(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $P(x)$ là hàm lẻ, suy ra $P(x)$ chỉ chứa các số hạng có mũ lẻ. Thay $x=3t, y=2t, z=t$ vào $(*)$, ta có

$$3tP(t)+2tP(-2t)+tP(t)=-tP(3t)+2tP(2t)-tP(t),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Hay

$$5tP(t)+tP(3t)=4tP(2t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{n+1} ở hai vế, ta được

$$5a_n+a_n3^n=4a_n2^n \overset{a_n\neq 0}{\Longleftrightarrow} 5+3^n=2^{n+2}. \tag{**}$$

Nhận thấy $n=1$ và $n=3$ thỏa $(**)$. Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$3^n+5>2^{n+2}, \forall n \geq 4.$$

Do đó $(**)$ chỉ có nghiệm $n=1$ hoặc $n=3$.

- ☑ Khi $\deg P=1$, đặt $P(x)=ax$ (với $a\neq 0$). Thay vào $(*)$ thỏa mãn.
- ☑ Khi $\deg P=3$, đặt $P(x)=ax^3+bx$ (với $a\neq 0$). Thay vào $(*)$ thỏa mãn.

Vậy $P(x)=ax^3+bx$ (a,b là hằng số thực bất kỳ) là tất cả đa thức cần tìm.
Chú ý 6. Với mọi số thực x,y,z, ta có đẳng thức

$$x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3=(z-y)x^3+(x-z)y^3+(y-x)z^3;$$

từ đó ta xây dựng được bài toán 16.

Bài 17. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$x^2P(y-z)+y^2P(z-x)+z^2P(x-y)=\left(z^2-y^2\right)P(x)+\left(x^2-z^2\right)P(y)+\left(y^2-x^2\right)P(z), \tag{*}$$

Nếu $P(x)$ là đa thức hằng, hay $P(x)\equiv c$ thì thay vào $(*)$, ta có $c=0$. Do đó $P(x)\equiv 0$ là một nghiệm của bài toán. Bây giờ ta giả sử $\deg P=n>0$. Đặt

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \quad a_n\neq 0.$$

Do $P(x)\neq 0$ nên $\exists t_0\in\mathbb{R}$ sao cho $P(t_0)\neq 0$. Thay $x=y=z=t_0$ vào $(*)$, ta có $P(0)=0$. Thay $y=x, z=0$ vào $(*)$, ta được

$$x^2P(x)+x^2P(-x)=-x^2P(x)+x^2P(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Hay

$$P(-x)=-P(x), \quad \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Mà $P(0)=0$ nên $P(-x)=-P(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó $P(x)$ là hàm lẻ, suy ra $P(x)$ chỉ chứa các số hạng có mũ lẻ. Thay $x=3t, y=2t, z=t$ vào $(*)$, ta có

$$9t^2P(t)+4t^2P(-2t)+t^2P(t)=-3t^2P(3t)+8t^2P(2t)-5t^2P(t),\ \forall t\in\mathbb{R}$$

hay

$$5t^2P(t)+t^2P(3t)=4t^2P(2t), \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{n+2} ở hai vế, ta được

$$5a_n+a_n3^n=4a_n2^n \overset{a_n\neq 0}{\Longleftrightarrow} 5+3^n=2^{n+2}. \tag{**}$$

Nhận thấy $n=1$ và $n=3$ thỏa $(**)$. Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$3^n+5>2^{n+2}, \forall n\geq 4.$$

Do đó $(**)$ chỉ có nghiệm $n=1$ hoặc $n=3$.

- Khi $\deg P = 1$, đặt $P(x) = ax$ (với $a \neq 0$). Thay vào $(*)$ thỏa mãn.
- Khi $\deg P = 3$, đặt $P(x) = ax^3 + bx$ (với $a \neq 0$). Thay vào $(*)$ thỏa mãn.

Vậy $P(x) = ax^3 + bx$ (a, b là hằng số thực bất kỳ) là tất cả đa thức cần tìm.
Chú ý 7. Với mọi số thực x, y, z, ta có đẳng thức

$$x^2(y-z)^3 + y^2(z-x)^3 + z^2(x-y)^3 = \left(z^2 - y^2\right)x^3 + \left(x^2 - z^2\right)y^3 + \left(y^2 - x^2\right)z^3;$$

từ đó ta xây dựng được bài toán 17.

Bài 18. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$(y+4z)P(x) + (z+4x)P(y) + (x+4y)P(z) = xP(2y-z) + yP(2z-x) + zP(2x-y), \quad (1)$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ mà $3(x+y+z) = xyz$. Thay $x = y = z = \pm 3$ vào (1), ta được

$$P(3) = P(-3) = 0.$$

Nếu P là đa thức hằng, hay $P(x) \equiv d$, thay vào (1) ta được $d = 0$. Do đó $P(x) \equiv 0$ là một nghiệm của bài toán. Giả sử $\deg P = n > 0$, đặt

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Thay $x = t, y = -t, z = 0$ vào (1), ta có

$$-tP(t) + 4tP(-t) - 3tP(0) = tP(-2t) - tP(-t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{n+1} ở hai vế, ta được

$$-a_n + 4a_n(-1)^n = a_n(-2)^n - a_n(-1)^n \overset{a_n \neq 0}{\Longleftrightarrow} 5 \cdot (-1)^n = (-2)^n + 1. \quad (2)$$

Rõ ràng (2) chỉ có nghiệm $n = 2$. Mà $P(3) = P(-3) = 0$ nên $P(x) = a(x-3)(x+3)$ (với $a \neq 0$). Thử lại thỏa mãn. Vậy $P(x) = a(x-3)(x+3)$ (với a là hệ số thực bất kỳ) là tất cả đa thức cần tìm.

Bài 19. Bài toán tương đương với tìm tất cả $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa

$$P^3(x) + P^3(y) + P^3(z) = 3P(xyz) \quad (1)$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x + y + z = 0$. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng, hay $P(x) \equiv c$ thì thay vào (1), ta có $c \in \{0, 1, -1\}$. Do đó $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv 1$, $P(x) \equiv -1$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Bây giờ ta giả sử $\deg P = n > 0$. Thay $y = -x, z = 0$ vào (1), ta có (đặt $c = -P^3(0) + 3P(0)$)

$$P^3(x) + P^3(-x) = -P^3(0) + 3P(0) = c, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Thay $y = 1, z = -1 - x$ vào (1), kết hợp (2), ta được

$$P^3(x) + P^3(1) + c - P^3(x+1) = 3P[-x(x+1)], \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (3), so sánh bậc hai vế, ta có $3n - 1 = 2n$, hay $n = 1$. Đặt $P(x) = ax + b$ (với $a \neq 0$). Thay vào (1), ta có

$$\begin{aligned}(ax+b)^3 + (ay+b)^3 + (az+b)^3 &= a^3\left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 3a^2b\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 3b^3 \\ &= 3a^3xyz + 3a^2b\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 3b^3 \\ &= 3axyz + 3b\end{aligned}$$

hay $a = \pm 1, b = 0$. Do đó $P(x) = \pm x$ là nghiệm của bài toán.
Vậy $P(x) = 0$, $P(x) = \pm 1$ và $P(x) = \pm x$ là tất cả đa thức cần tìm.

Chú ý 8. Với các số thực x, y, z mà $x+y+z=0$, ta có đẳng thức

$$x^3+y^3+z^3=3xyz.$$

Từ đó ta xây dựng được bài toán 19.

Bài 20. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(xy)+P(yz)+P(zx)=P(xy+yz+zx), \tag{1}$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x+y+z=0$. Thay $x=y=z=0$ vào (1), ta có $P(0)=0$. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng, hay $P(x) \equiv c$ thì thay vào (1), ta có $c=0$. Do đó $P(x) \equiv 0$ là một nghiệm của bài toán. Bây giờ ta giả sử $\deg P = n > 0$. Đặt

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Thay $x=y=t, z=-2t$ vào (1), ta có

$$P\left(t^2\right)+2P\left(-2t^2\right)=P\left(-3t^2\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được

$$a_n+2a_n(-2)^n=a_n(-3)^n \overset{a_n\neq 0}{\Longleftrightarrow} 1-(-2)^{n+1}=(-3)^n. \tag{2}$$

Nhận thấy $n=1, n=2$ thỏa (2). Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$3^n > 2^{n+1}+1 > 2^{n+1}-1, \forall n \geq 3.$$

Nếu n chẵn và $n \geq 4$ thì (2) trở thành $1+2^{n+1}=3^n$, vô lý.
Nếu n lẻ và $n \geq 3$ thì (2) trở thành $1-2^{n+1}=-3^n \Leftrightarrow 2^{n+1}-1=3^n$, vô lý.
Do đó (2) chỉ có nghiệm $n=1$ và $n=2$.

1) Khi $\deg P = 1$, do $P(0)=0$ nên đặt $P(x)=ax$ (với $a \neq 0$). Thay vào (1) thỏa mãn.

2) Khi $\deg P = 2$, do $P(0)=0$ nên đặt $P(x)=ax^2+bx$ (với $a \neq 0$). Thay vào (1) thỏa mãn.

Vậy $P(x)=ax^2+bx$ (với a, b là hệ số thực bất kỳ) là tất cả đa thức cần tìm.
Chú ý 9. Với các số thực x, y, z mà $x+y+z=0$, ta có dãy đẳng thức

$$2\left(x^4+y^4+z^4\right)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=4(xy+yz+zx)^2=4\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right),$$

từ đó ta xây dựng được các bài toán 20, 21, 33, 34

Bài 21. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(x)P(y)+P(y)P(z)+P(z)P(x)=P(xy+yz+zx), \tag{1}$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x+y+z=0$. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng, hay $P(x) \equiv c$ thì thay vào (1), ta có $c=0$ hoặc $c=\dfrac{1}{3}$. Do đó các đa thức $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv \dfrac{1}{3}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Bây giờ ta giả sử $\deg P = n > 0$. Đặt

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Thay $x = t, y = -t, z = 0$ vào (1), ta có

$$P(t)P(-t) + P(0)[P(t) + P(-t)] = P\left(-t^2\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được $a_n = 1$. Thay $x = y = t, z = -2t$ vào (1), ta có

$$P^2(t) + 2P(t)P(-2t) = P\left(-3t^2\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được

$$1 - (-2)^{n+1} = (-3)^n. \tag{2}$$

Nhận thấy $n = 1, n = 2$ thỏa (2). Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$3^n > 2^{n+1} + 1 > 2^{n+1} - 1, \forall n \geq 3.$$

Nếu n chẵn và $n \geq 4$ thì (2) trở thành $1 + 2^{n+1} = 3^n$, vô lý.
Nếu n lẻ và $n \geq 3$ thì (2) trở thành $1 - 2^{n+1} = -3^n \Leftrightarrow 2^{n+1} - 1 = 3^n$, vô lý.
Do đó (2) chỉ có nghiệm $n = 1$ và $n = 2$.

1) Khi $\deg P = 1$, đặt $P(x) = x + b$. Thay vào (1), ta được $b = 0$ hoặc $b = \frac{1}{3}$. Do đó $P(x) = x$, $P(x) = x + \frac{1}{3}$ là các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài.

2) Khi $\deg P = 2$, đặt $P(x) = x^2 + bx + c$ (với $a \neq 0$). Thay vào (1), ta có

$$\begin{aligned}&x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + \left(b^2 - 4c\right)(xy + yz + zx) - 3bxyz + 3c^2\\ =&(xy + yz + zx)^2 + b(xy + yz + zx) + c,\end{aligned}$$

hay $b = c = 0$. Do đó $P(x) = x^2$ là một nghiệm của bài toán.

Vậy $P(x) = 0$, $P(x) = \frac{1}{3}$, $P(x) = x$, $P(x) = x + \frac{1}{3}$ và $P(x) = x^2$ là tất cả đa thức cần tìm.

Bài 22. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(xy + yz + zx) = P(xy) + P(yz) + P(zx) + 2P(x)P(y)P(z), \tag{1}$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ mà $x + y + z = k^2xyz$ $(k \neq 0)$. Thay $x = y = z = 0$ vào (1), ta có

$$P^3(0) + P(0) = 0 \Leftrightarrow P(0) = 0.$$

Nếu P là đa thức hằng, hay $P(x) \equiv c$, thì thay vào (1), ta được $c = 0$. Do đó $P(x) \equiv 0$ là một nghiệm của bài toán. Giả sử $\deg P = n > 0$, đặt

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Thay $y = \frac{2}{k^2x}, z = x + \frac{2}{k^2x}$ (khi đó $x + y + z = 2x + \frac{4}{k^2x} = k^2xyz$) vào (1), ta có

$$\begin{aligned}&P\left(x^2 + \frac{4}{k^4x^2} + \frac{6}{k^2}\right) - P\left(x^2 + \frac{2}{k^2}\right) - P\left(\frac{2}{k^2}\right)\\ =&P\left(\frac{4}{k^4x^2} + \frac{2}{k^2}\right) + 2P(x)P\left(\frac{2}{k^2x}\right)P\left(x + \frac{2}{k^2x}\right), \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.\end{aligned} \tag{2}$$

Với $x \neq 0$, nhân hai vế của (2) với x^{2n}, ta được

$$\begin{aligned}
&x^{2n}P\left(x^2+\frac{4}{k^4x^2}+\frac{6}{k^2}\right)-x^{2n}P\left(x^2+\frac{2}{k^2}\right)-x^{2n}P\left(\frac{2}{k^2}\right)\\
=&x^{2n}P\left(\frac{4}{k^4x^2}+\frac{2}{k^2}\right)+2x^{2n}P(x)P\left(\frac{2}{k^2x}\right)P\left(x+\frac{2}{k^2x}\right), \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.
\end{aligned}$$

Bây giờ cả hai vế là các đa thức theo biến x, so sánh bậc ta được $4n-2=3n$, hay $n=2$. Mà $P(0)=0$ nên đặt $P(x)=ax^2+bx$ (với $a\neq 0$). Thay vào (1), ta có

$$\begin{aligned}
&a(xy+yz+zx)^2+b(xy+yz+zx)\\
=&a\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)+b(xy+yz+zx)+2ak^2x^2y^2z^2\\
=&a\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)+b(xy+yz+zx)+2xyz(ax+b)(ay+b)(az+b),
\end{aligned}$$

hay $a=\pm k$, $b=0$. Do đó $P(x)=\pm kx^2, \forall x\in\mathbb{R}$ là nghiệm của bài toán. Vậy $P(x)\equiv 0$, $P(x)=\pm kx^2$ là tất cả đa thức cần tìm.

Bài 23. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P(x+y).P(x-y)=P^2(x)-P^2(y), \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Cách 1. Dễ thấy trong các đa thức hằng số, chỉ có đa thức $P(x)\equiv 0$ thỏa mãn đề bài. Bây giờ ta xét $P(x)$ là đa thức bậc n, với $n\geq 1$. khi đó $P(x)$ không đồng nhất 0, nghĩa là: $\exists x_0\in\mathbb{R}$: $P(x_0)\neq 0$. Trong (1) cho $x=y=\dfrac{x_0}{2}$ ta được $P(x_0).P(0)=0\Rightarrow P(0)=0$. Trong (1) lấy $y=2x$ ta được

$$P(3x).P(-x)=P^2(x)-P^2(2x), \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Giả sử $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x$, với $a_n\neq 0$ (do $P(0)=0$). Thay vào (2) ta được:

$$\begin{aligned}
&\left[a_n(3x)^n+a_{n-1}(3x)^{n-1}+\cdots+a_1(3x)\right]\left[a_n(-x)^n+\cdots+a_1(-x)\right]\\
=&\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x\right)^2-\left[a_n(2x)^n+a_{n-1}(2x)^{n-1}+\cdots+a_1(2x)\right]^2.
\end{aligned}$$

So sánh hệ số của x^{2n} ở hai vế ta được

$$a_n^2 3^n(-1)^n=a_n^2\left(1-4^n\right)\Leftrightarrow 1=(-3)^n+4^n. \tag{3}$$

Dễ thấy $n=0,2,4,\ldots$ không thỏa (3). Khi n lẻ, ta có

$$4^n-3^n=1\Leftrightarrow 4^n=1+3^n\Leftrightarrow 1=\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n\Leftrightarrow n=1$$

(do hàm số mũ $y=a^x$ nghịch biến khi $0<a<1$). Vậy bậc của đa thức $P(x)$ bằng 1, kết hợp với $P(0)=0$ suy ra $P(x)=mx, \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy tất cả các đa thức cần tìm là:

$$P(x)=mx, \forall x\in\mathbb{R}\ \text{(với } m \text{ là hằng số tùy ý).}$$

Cách 2. Trong (1), lấy $x=y=0$, ta được $P(0)=0$. Do hàm số đa thức luôn có đạo hàm nên từ (1), đạo hàm hai vế theo biến x ta được

$$P'(x+y)P(x-y)+P'(x-y)P(x+y)=2P(x).P'(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Trong (4), lấy $y=x$, ta được

$$P'(0)P(2x)=2P(x).P'(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

- ☑ Nếu $P'(0) = 0$ thì từ (5) suy ra $P(x).P'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, do đó $P(x)$ là đa thức hằng số, kết hợp với $P(0) = 0$, suy ra $P(x) \equiv 0$.

- ☑ Nếu $P'(0) \neq 0$ thì gọi $\deg P(x) = n$, khi đó vế trái của (5) là đa thức bậc n, còn vế phải của (5) là đa thức bậc $2n - 1$, do đó $n = 2n - 1 \Leftrightarrow n = 1$. Kết hợp với $P(0) = 0$, suy ra $P(x) \equiv ax$ (a là hằng số). Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy tất cả các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x) = ax, \ \forall x \in \mathbb{R} \ (a \text{ là hằng số tùy ý}).$$

Bài 24. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P(x^2 + y^2) = [P(x)]^2 + [P(y)]^2, \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Trong (1) lấy $x = 0$ và $y = 0$ ta được:

$$P(0) = 2[P(0)]^2 \Leftrightarrow P(0)[1 - 2P(0)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P(0) = 0 \\ P(0) = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Nếu $P(x) \equiv C$, với C là hằng số thì từ (1) có $C = 2C^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 0 \\ C = 0,5. \end{array}\right.$

Tiếp theo ta giả sử bậc của $P(x)$ là n (với $n = 1, 2, \ldots$). Trong (1) lấy $y = x$ ta được

$$P(2x^2) = 2[P(x)]^2, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Giả sử $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, với $a_n \neq 0$. Thế vào (2) được

$$\begin{aligned} &\left[a_n(2x^2)^n + a_{n-1}(2x^2)^{n-1} + \cdots + a_1(2x^2) + a_0\right] \\ =&2\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)^2, \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

So sánh hệ số của x^{2n} ở hai vế ta được:

$$a_n 2^n = 2(a_n)^2 \Leftrightarrow 2^n = 2a_n \Leftrightarrow a_n = 2^{n-1}.$$

Ta viết lại (1) như sau:

$$P(a^2 + b^2) = [P(a)]^2 + [P(b)]^2, \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Ta có: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + (c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)$. Do đó

$$a^2 + b^2 = (a + b + c)^2 \Leftrightarrow c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0.$$

Vậy (3) viết lại:

$$P((a + b + c)^2) = [P(a)]^2 + [P(b)]^2, \tag{4}$$

với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho

$$c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0. \tag{5}$$

Trong $c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0$ lấy $c = 2$ ta được

$$ab + 2b + 2a = -2 \Leftrightarrow b(a + 2) = -2a - 2 \Leftrightarrow b = \frac{-2a - 2}{a + 2} \Leftrightarrow b = -2 + \frac{2}{a + 2}.$$

Với $a \in \mathbb{Z}, a \neq -2$ thì $b \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $a+2$ là ước của 2. Vậy chọn $a=-3$ ta được $b=-4$. Vậy $(a;b;c)=(-3;-4;2)$ thỏa mãn $c^2+2ab+2bc+2ca=0$. Do đó với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $(-3x;-4x;2x)$ thỏa mãn (5). Thay vào (4) ta được

$$P(25x^2)=P^2(-3x)+P^2(-4x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Vì $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, với $a_n=2^{n-1}$ nên thay vào (6) ta được

$$\begin{aligned}
&\left[a_n(25x^2)^n+a_{n-1}(25x^2)^{n-1}+\cdots+a_1(25x^2)+a_0\right]\\
=&\left[a_n(-3x)^n+a_{n-1}(-3x)^{n-1}+\cdots+a_1(-3x)+a_0\right]^2\\
+&\left[a_n(-4x)^n+a_{n-1}(-4x)^{n-1}+\cdots+a_1(-4x)+a_0\right]^2.
\end{aligned}$$

So sánh hệ số của x^{2n} ở hai vế ta được

$$\begin{aligned}
&25^n=a_n(9^n+16^n), \forall n=1,2,\ldots\\
\Leftrightarrow&25^n=2^{n-1}(9^n+16^n), \forall n=1,2,\ldots\\
\Leftrightarrow&2.25^n=18^n+32^n, \forall n=1,2,\ldots
\end{aligned}$$

Vậy $n=1$, do đó $P(x)$ có dạng $P(x)=x+b, \forall x \in \mathbb{R}$. Do $P(0)=0$ hoặc $P(0)=\frac{1}{2}$ nên $b=0$ hoặc $b=\frac{1}{2}$. Sau khi thử lại ta kết luận: Tất cả các đa thức thỏa mãn đề bài là:

$$P(x)\equiv 0,\ P(x)\equiv \frac{1}{2},\ P(x)\equiv x.$$

Cách khác. Trong (1) lấy $x=0$ và $y=0$ ta được

$$P(0)=2[P(0)]^2 \Leftrightarrow P(0)[1-2P(0)]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P(0)=0\\ P(0)=0,5.\end{array}\right.$$

Nếu $P(x)\equiv C$, với C là hằng số thì từ (1) ta có $C=2C^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C=0\\ C=0,5.\end{array}\right.$

Tiếp theo ta giả sử bậc của $P(x)$ là n (với $n=1,2,\ldots$). Giả sử

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\ \text{với } a_n\neq 0.$$

Trong (1) lần lượt thay $x=t, y=t$ và $x=t, y=0$, ta nhận được

$$\left\{\begin{array}{l} P(2t^2)=2\left[P(t)\right]^2\\ P(t^2)=\left[P(t)\right]^2+\left[P(0)\right]^2.\end{array}\right. \tag{2}$$

So sánh hệ số bậc cao nhất trong (2), ta có

$$\left\{\begin{array}{l} 2^na_n=2a_n^2\\ a_n=a_n^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n=1\\ n=1.\end{array}\right.$$

Vậy $P(x)$ có dạng $P(x)=x+b, \forall x \in \mathbb{R}$. Do $P(0)=0$ hoặc $P(0)=\frac{1}{2}$ nên $b=0$ hoặc $b=\frac{1}{2}$. Sau khi thử lại ta kết luận: Tất cả các đa thức thỏa mãn đề bài là

$$P(x)\equiv 0,\ P(x)\equiv \frac{1}{2},\ P(x)\equiv x.$$

Đa thức $P(x)=x+\frac{1}{2}$ không thỏa mãn điều kiện đề bài. Để chứng minh điều này, chỉ cần thay $x=1$ và $y=0$ vào (1), ta thấy ngay (1) không thỏa mãn.

Bài 25. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực sao cho với mọi bộ số nguyên x,y,z thỏa mãn $\gcd(x,y,z)=1$ và $x^2+y^2=z^2$ thì

$$P(x+y)^2=P(z)^2+2P(xy).$$

Chọn $(x,y,z)=(m^2-1,2m,m^2+1)$ với m là số nguyên dương chẵn, ta suy ra

$$P\left(m^2+2m-1\right)^2=P\left(m^2+1\right)^2+2P\left(2m\left(m^2-1\right)\right),\forall m\in 2\mathbb{Z}.$$

Do đó, ta suy ra

$$P\left(x^2+2x-1\right)^2\equiv P\left(x^2+1\right)^2+2P\left(2x\left(x^2-1\right)\right). \tag{1}$$

Giả sử $\deg P(x)\geqslant 2$. Đặt $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$. Từ (1), so sánh hệ số của x^{4n-1} ở hai vế, ta thấy hệ số của x^{4n-1} ở vế trái là $a_n^2\cdot 4n$ nhưng ở vế phải là 0, vô lý. Do đó, $\deg P(x)\leqslant 1$. Đặt $P(x)=ax+b$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$\left(a\left(x^2+2x-1\right)+b\right)^2=\left(a\left(x^2+1\right)+b\right)^2+4ax\left(x^2-1\right)+2b,\forall x\in\mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của x^3, ta được

$$4a^2=4a\Rightarrow a\in\{0;1\}$$

- Nếu $a=0$ thì suy ra $b=0$ hay $P(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$.
- Nếu $a=1$ thì so sánh hệ số tự do, ta được

$$(b-1)^2=(b+1)^2+2b\Leftrightarrow 6b=0\Leftrightarrow b=0.$$

  Điều này có nghĩa là $P(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài bao gồm: $P(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$; $P(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 26. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P^2(a)+P^2(b)+P^2(c)=P^2(a+b+c), \tag{1}$$

với $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $ab+bc+ca=0$.
Trong (1) cho $a=b=c=0$ ta được $P(0)=0$. Với mọi $x\in\mathbb{R}$, bộ $(6x;3x;-2x)$ thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=0$. Do đó thay vào (1) ta được

$$P^2(6x)+P^2(3x)+P^2(-2x)=P^2(7x),\forall x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

Nếu $P(x)$ là đa thức hằng thì $P(x)\equiv 0$. Giả sử $\deg(P)=n\geq 1$. Khi đó $P(x)$ có dạng $P(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$ với $a_n\neq 0$ (quy ước $x^0=1$). Thay vào (2) ta được

$$\left(\sum_{i=0}^{n}a_i6^ix^i\right)^2+\left(\sum_{i=0}^{n}a_i3^ix^i\right)^2+\left(\sum_{i=0}^{n}a_i(-2)^ix^i\right)^2=\left(\sum_{i=0}^{n}a_i7^ix^i\right)^2$$

So sánh hệ số của x^{2n} ở hai vế ta được

$$a_n^2(36^n+9^n+4^n)=a_n^249^n\Leftrightarrow 36^n+9^n+4^n=49^n$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{36}{49}\right)^n+\left(\frac{9}{49}\right)^n+\left(\frac{4}{49}\right)^n=1\Leftrightarrow n=1$$

(do hàm số mũ $y=a^x$ nghịch biến khi $0<a<1$). Vậy bậc của đa thức $P(x)$ bằng 1, kết hợp với $P(0)=0$ suy ra $P(x)=mx,\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy tất cả các đa thức cần tìm là

$$P(x)=mx,\forall x\in\mathbb{R}\ \text{(với } m \text{ là hằng số tùy ý).}$$

Bài 27. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P^2(x)+P^2(y)+P^2(z)=2[P(x)P(y)+P(y)P(z)+P(z)P(x)] \quad (1)$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ và $x+y+z=0$. Thay $x=y=z=0$ vào (1), ta có $P(0)=0$. Thay $x=t$, $y=-t$, $z=0$ vào (1), ta có

$$P^2(t)+P^2(-t)=2P(t)P(-t) \quad \Leftrightarrow [P(t)-P(-t)]^2=0 \quad (\forall t\in\mathbb{R})$$

hay $P(-t)=P(t), \forall t\in\mathbb{R}$. Do đó $P(x)$ là hàm chẵn, suy ra $P(x)$ chỉ chứa các số hạng có mũ chẵn. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng, hay $P(x)\equiv c$ thì thay vào (1) ta được $c=0$. Do đó $P(x)\equiv 0$ là nghiệm của bài toán. Bây giờ ta giả sử $\deg P=n>0$. Đặt

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \quad a_n\neq 0.$$

Thay $x=t, y=t, z=-2t$ vào (1), ta có

$$P^2(2t)=4P(t)P(2t), \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được

$$a_n^2 2^{2n}=4a_n^2 2^n \overset{a_n\neq 0}{\Longleftrightarrow} n=2.$$

Mà $P(x)$ chẵn và $P(0)=0$ nên $P(x)=ax^2$ (với $a\neq 0$). Thay vào (1) thỏa mãn. Vậy $P(x)=ax^2$ (với a là hệ số thực bất kỳ) là tất cả đa thức cần tìm.

Bài 28. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P^2(x)+P^2(y)+P^2(z)=2[P(xy)+P(yz)+P(zx)], \quad (1)$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ và $x+y+z=0$. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng, hay $P(x)\equiv d$ thì thay vào (1) ta được $d=0$, $d=2$. Do đó $P(x)\equiv 0$, $P(x)\equiv 2$ là nghiệm của bài toán. Bây giờ ta giả sử $\deg P=n>0$. Đặt

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \quad a_n\neq 0.$$

Thay $x=t, y=-t, z=0$ vào (1), ta có

$$P^2(t)+P^2(-t)+P^2(0)=2P\left(-t^2\right)+4P(0), \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được

$$a_n^2+a_n^2=2a_n(-1)^n \Leftrightarrow a_n=(-1)^n.$$

Thay $x=y=t, z=-2t$ vào (1), ta có

$$2P^2(t)+P^2(-2t)=2P\left(t^2\right)+4P\left(-2t^2\right), \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được

$$\begin{aligned}
&2a_n^2+a_n^2 2^{2n}=2a_n+4a_n(-2)^n\\
\Leftrightarrow & 2+2^{2n}=2(-1)^n+4(-1)^n(-2)^n && (\text{do } a_n=(-1)^n)\\
\Leftrightarrow & 2+2^{2n}=2(-1)^n+4\cdot 2^n\\
\Leftrightarrow & 2^{2n-1}+1=2^{n+1}+(-1)^n. && (2)
\end{aligned}$$

Nhận thấy $n=1, n=2$ thỏa (2). Với $n\geq 3$ thì $2n-1>n+1$, do đó

$$2^{2n-1}+1>2^{n+1}+1>2^{n+1}-1, \forall n\geq 3.$$

Vậy (2) chỉ có nghiệm $n=1, n=2$.

1) Khi $\deg P = 1$, đặt $P(x) = -x + b$. Thay vào (1), ta được $b = 0$ hoặc $b = 2$. Do đó $P(x) = -x$, $P(x) = -x + 2$ là những nghiệm của bài toán.

2) Khi $\deg P = 2$, đặt $P(x) = x^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Thay vào (1), ta có

$$\begin{aligned}&x^4 + y^4 + z^4 - \left(2b^2 + 4c\right)(xy + yz + zx) + 6bxyz + 3c^2\\=&2\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right) + 2b(xy + yz + zx) + 6c,\end{aligned}$$

hay $b = c = 0$. Do đó $P(x) = x^2$ là một nghiệm của bài toán.

Vậy $P(x) = 0$, $P(x) = 2$, $P(x) = -x$, $P(x) = -x + 2$ và $P(x) = x^2$ là tất cả các đa thức cần tìm.

Bài 29. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P^2(x) + P^2(y) + P^2(z) = 2P(xy + yz + zx), \tag{1}$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x + y + z = 0$. Nếu P là đa thức hằng, hay $P(x) \equiv d$, thì thay vào (1) ta được $d = 0$, $d = \dfrac{2}{3}$. Do đó $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv \dfrac{2}{3}$ là những nghiệm của bài toán. Giả sử $\deg P = n > 0$, đặt

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Thay $x = t$, $y = -t$, $z = 0$ vào (1), ta có

$$P^2(t) + P^2(-t) + P^2(0) = 2P\left(-t^2\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được $2a_n^2 = 2a_n(-1)^n$ hay $a_n = (-1)^n$. Thay $x = y = t$, $z = -2t$ vào (1), ta có

$$2P^2(t) + P^2(-2t) = 2P\left(-3t^2\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được

$$2a_n^2 + a_n^2 2^{2n} = 2a_n(-3)^n \quad \overset{a_n=(-1)^n}{\Longleftrightarrow} \quad 3^n = 2^{2n-1} + 1. \tag{2}$$

Nhận thấy $n = 1$, $n = 2$ thỏa (2). Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$2^{2n-1} + 1 > 3^n, \forall n \geq 3.$$

Do đó (2) chỉ có nghiệm $n = 1$, $n = 2$.

- ☑ Khi $\deg P = 1$, đặt $P(x) = -x + b$. Thay vào (1), ta được $b = 0$, $b = \dfrac{2}{3}$. Do đó $P(x) = -x$, $P(x) = -x + \dfrac{2}{3}$ là những nghiệm của bài toán.

- ☑ Khi $\deg P = 2$, đặt $P(x) = x^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Thay vào (1), ta có

$$\begin{aligned}&x^4 + y^4 + z^4 - \left(2b^2 + 4c\right)(xy + yz + zx) + 6bxyz + 3c^2\\=&2(xy + yz + zx)^2 + 2b(xy + yz + zx) + 2c,\end{aligned}$$

  hay $b = c = 0$. Do đó $P(x) = x^2$ là một nghiệm của bài toán.

Vậy $P(x)=0$, $P(x)=\dfrac{2}{3}$, $P(x)=-x$, $P(x)=-x+\dfrac{2}{3}$ và $P(x)=x^2$ là tất cả đa thức cần tìm.

Bài 30. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P\left(x^2\right)+P\left(y^2\right)+P\left(z^2\right)=2P(xy+yz+zx) \tag{1}$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ và $x+y+z=0$. Thay $x=y=z=0$ vào (1), ta có $P(0)=0$. Thay $x=t$, $y=-t$, $z=0$ vào (1), ta có

$$P\left(t^2\right)=P\left(-t^2\right),\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

suy ra $P(-x)=P(x)$, với vô số $t\in\mathbb{R}^+$. Mà $P(x)$ là đa thức nên $P(-x)=P(x)$ với mọi số thực x, do đó $P(x)$ là hàm chẵn, suy ra $P(x)$ chỉ chứa các số hạng có mũ chẵn. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng, hay $P(x)\equiv d$, thì thay vào (1) ta được $d=0$. Do đó $P(x)\equiv 0$ là nghiệm của bài toán. Giả sử $\deg P=n>0$, đặt

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad a_n\neq 0.$$

Thay $x=t$, $y=t$, $z=-2t$ vào (1), ta có

$$2P\left(t^2\right)+P\left(4t^2\right)=2P\left(3t^2\right),\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được

$$2a_n+a_n4^n=2a_n3^n \overset{a_n\neq 0}{\Longleftrightarrow} 3^n=2^{2n-1}+1. \tag{2}$$

Nhận thấy $n=2$ thỏa (2). Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$2^{2n-1}+1>3^n,\forall n\geq 4.$$

Do đó $n=2$ là số nguyên dương chẵn duy nhất mà thỏa mãn (2). Do $P(x)$ là hàm chẵn và $P(0)=0$ nên $P(x)=ax^2$ (với $a\neq 0$). Thử lại vào (1) thấy thỏa mãn. Vậy $P(x)=ax^2$ (với a là hệ số thực bất kỳ) là tất cả đa thức cần tìm.

Bài 31. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P\left(x^2\right)+P\left(y^2\right)+P\left(z^2\right)=2[P(xy)+P(yz)+P(zx)], \tag{1}$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ và $x+y+z=0$. Thay $x=y=z=0$ vào (1), ta có $P(0)=0$. Thay $x=t$, $y=-t$, $z=0$ vào (1), ta có

$$P\left(t^2\right)=P\left(-t^2\right),\quad \forall t\in\mathbb{R},$$

hay $P(-x)=P(x)$, với vô số $t\in\mathbb{R}^+$. Mà $P(x)$ là đa thức nên $P(-x)=P(x)$ với mọi số thực x; hay $P(x)$ là hàm chẵn, suy ra $P(x)$ chỉ chứa các số hạng có mũ chẵn.

- Khi $P(x)$ là đa thức hằng, hay $P(x)\equiv c$, thay vào (1) ta được $c=0$. Do đó $P(x)\equiv 0$ là một nghiệm của bài toán.
- Khi $\deg P=n>0$, với n chẵn, đặt

  $$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad a_n\neq 0.$$

  Thay $x=t$, $y=t$, $z=-2t$ vào (1), ta có

  $$P\left(4t^2\right)=4P\left(2t^2\right),\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

  So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được $4^n\cdot a_n=4\cdot 2^n\cdot a_n$ hay $n=2$. Mà $P(x)$ chẵn và $P(0)=0$ nên $P(x)=ax^2$ (với $a\neq 0$). Thử lại đúng.

Vậy $P(x) = ax^2$ (với a là hệ số thực bất kỳ) là tất cả đa thức cần tìm.

Bài 32. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P\left(x^2\right) + P\left(y^2\right) + P\left(z^2\right) = 2[P(x)P(y) + P(y)P(z) + P(z)P(x)], \tag{1}$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x + y + z = 0$. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng, hay $P(x) \equiv d$, thì thay vào (1) ta được $d = 0$ hoặc $d = \frac{1}{2}$. Do đó $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv \frac{1}{2}$ là những nghiệm của bài toán. Giả sử $\deg P = n > 0$, đặt

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Thay $x = t, y = -t$, $z = 0$ vào (1), ta có

$$2P\left(t^2\right) + P(0) = 2P(t)P(-t) + 2P(0)[P(t) + P(-t)], \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được $2a_n = 2a_n^2(-1)^n$ hay $a_n = (-1)^n$. Thay $x = y = t$, $z = -2t$ vào (1), ta có

$$2P\left(t^2\right) + P\left(4t^2\right) = 2P^2(t) + 4P(t)P(-2t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được

$$\begin{aligned}
& 2a_n + a_n 4^n = 2a_n^2 + 4a_n^2(-2)^n \\
\Leftrightarrow & 2(-1)^n + (-1)^n \cdot 2^{2n} = 2 + 4(-2)^n && \text{(do } a_n = (-1)^n\text{)} \\
\Leftrightarrow & (-1)^n + (-1)^n \cdot 2^{2n-1} = 1 + 2(-2)^n \\
\Leftrightarrow & 2^{2n-1} + 1 = 2^{n+1} + (-1)^n.
\end{aligned}$$

Nhận thấy $n = 1$, $n = 2$ thỏa (2). Với số nguyên $n \geq 3$, ta có $2n - 1 > n + 1$ nên

$$2^{2n-1} + 1 > 2^{n+1} + 1 > 2^{n+1} - 1, \forall n \geq 3.$$

Do đó (2) chỉ có nghiệm $n = 1$, $n = 2$.

- Khi $\deg P = 1$, đặt $P(x) = -x + b$. Thay vào (1), ta được $b = 0$, $b = \frac{1}{2}$. Do đó $P(x) = -x$, $P(x) = -x + \frac{1}{2}$ là những nghiệm của bài toán.

- Khi $\deg P = 2$, đặt $P(x) = x^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Thay vào (1), ta có

$$\begin{aligned}
& x^4 + y^4 + z^4 - 2b(xy + yz + zx) + 3c \\
= & 2\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right) + \left(2b^2 - 8c\right)(xy + yz + zx) - 6bxyz + 6c^2,
\end{aligned}$$

  hay $b = c = 0$. Do đó $P(x) = x^2$ là một nghiệm của bài toán.

Vậy $P(x) = 0$, $P(x) = \frac{1}{2}$, $P(x) = -x$, $P(x) = -x + \frac{1}{2}$ và $P(x) = x^2$ là tất cả đa thức cần tìm.

Bài 33. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P\left(x^2+y^2+z^2\right) = 4[P(xy)+P(yz)+P(zx)], \tag{1}$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ mà $x+y+z=0$. Thay $x=y=z=0$ vào (1), ta có $P(0)=0$. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng, hay $P(x) \equiv c$ thì thay vào (1), ta có $c=0$. Do đó $P(x) \equiv 0$ là một nghiệm của bài toán. Bây giờ ta giả sử $\deg P = n > 0$. Đặt

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Thay $x=t, y=-t, z=0$ vào (1), ta có

$$P\left(2t^2\right) = 4P\left(-t^2\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được

$$2^n a_n = 4(-1)^n a_n \Leftrightarrow 2^n = 4(-1)^n \Leftrightarrow n = 2.$$

Mà $P(0)=0$ nên đặt $P(x)=ax^2+bx$ (với $a \neq 0$). Thay vào (1), ta có

$$4a\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right) - 2b(xy+yz+zx) = 4a\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right) + 4b(xy+yz+zx),$$

hay $b=0$. Do đó $P(x)=ax^2$ là đa thức thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Vậy $P(x)=ax^2$ (với a là hệ số thực bất kỳ) là tất cả đa thức cần tìm.

Bài 34. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P\left(x^2+y^2+z^2\right) = 4[P(x)P(y)+P(y)P(z)+P(z)P(x)], \tag{1}$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x+y+z=0$. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng, hay $P(x) \equiv c$ thì thay vào (1) ta được $c=0$, $c=\dfrac{1}{12}$. Do đó $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv \dfrac{1}{12}$ là những nghiệm của bài toán. Bây giờ ta giả sử $\deg P = n > 0$. Đặt

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Thay $x=t, y=-t, z=0$ vào (1), ta có

$$P\left(2t^2\right) = 4P(t)P(-t) + 4P(0)[P(t)+P(-t)], \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được

$$2^n a_n = 4(-1)^n a_n^2 \Leftrightarrow 2^{n-2} = (-1)^n a_n \Leftrightarrow a_n = (-2)^{n-2}.$$

Thay $x=y=t, z=-2t$ vào (1), ta có

$$P\left(6t^2\right) = 4P^2(t) + 8P(t)P(-2t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được

$$a_n 6^n = 4a_n^2 + 8a_n^2(-2)^n \Leftrightarrow 6^n = 4a_n + 8a_n(-2)^n.$$

Mà $a_n = (-2)^{n-2}$ nên

$$6^n = 4(-2)^{n-2} + 8(-2)^{n-2}(-2)^n$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 6^n = (-2)^n - (-2)^{2n+1}\\
&\Leftrightarrow (-2)^n(-3)^n = (-2)^n - (-2)^{2n+1}\\
&\Leftrightarrow (-3)^n = 1 - (-2)^{n+1}\\
&\Leftrightarrow (-3)^n(-1)^n = (-1)^n - (-1)^n(-2)^{n+1}\\
&\Leftrightarrow (-1)^n + 2^{n+1} = 3^n.
\end{aligned}$$

Nhận thấy $n = 1, n = 2$ thỏa (2). Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$3^n > 2^{n+1} + 1 > 2^{n+1} - 1, \forall n \geq 3.$$

Do đó (2) chỉ có nghiệm $n = 1, n = 2$.

1) Khi $\deg P = 1$, đặt $P(x) = -\frac{1}{2}x + b$. Thay vào (1), ta được $b = 0$ hoặc $b = \frac{1}{12}$. Do đó $P(x) = -\frac{1}{2}x$, $P(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}$ là những nghiệm của bài toán.

2) Khi $\deg P = 2$, đặt $P(x) = x^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Thay vào (1), ta có

$$\begin{aligned}
&\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 - 2b(xy+yz+zx) + c\\
=&4\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right) + \left(4b^2-16c\right)(xy+yz+zx) - 12bxyz + 12c^2
\end{aligned}$$

hay $b = c = 0$. Do đó $P(x) = x^2$ là một nghiệm của bài toán.

Vậy $P(x) = 0$, $P(x) = \frac{1}{12}$, $P(x) = -\frac{1}{2}x$, $P(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}$ và $P(x) = x^2$ là tất cả đa thức cần tìm.

Bài 35. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P\left(x^2+y^2+z^2\right) = 2\left[P\left(x^2\right) + P\left(y^2\right) + P\left(z^2\right)\right] \tag{1}$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x + y + z = 0$. Thay $x = y = z = 0$ vào (1), ta có $P(0) = 0$. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng, hay $P(x) \equiv d$, thì thay vào (1) ta được $d = 0$. Do đó $P(x) \equiv 0$ là một nghiệm của bài toán. Giả sử $\deg P = n > 0$, đặt

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Thay $x = t, y = -t, z = 0$ vào (1), ta có

$$P\left(2t^2\right) = 4P\left(t^2\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được $2^na_n = 4a_n$ hay $n = 2$. Mà $P(0) = 0$ nên đặt $P(x) = ax^2 + bx$ (với $a \neq 0$). Thay vào (1), ta có

$$a\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 + b\left(x^2+y^2+z^2\right) = 2a\left(x^4+y^4+z^4\right) + 2b\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

hay $b = 0$. Do đó $P(x) = ax^2$ là một nghiệm của bài toán. Vậy $P(x) = ax^2$ (với a là hệ số thực bất kỳ) là tất cả đa thức cần tìm.

Bài 36. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P\left(x^2+y^2+z^2\right)=2\left[P^2(x)+P^2(y)+P^2(z)\right], \tag{1}$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ và $x+y+z=0$. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng, hay $P(x)\equiv d$, thì thay vào (1) ta được $d=0$, $d=\dfrac{1}{6}$. Do đó $P(x)\equiv 0$, $P(x)\equiv\dfrac{1}{6}$ là những nghiệm của bài toán. Giả sử $\deg P=n>0$, đặt

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad a_n\neq 0.$$

Thay $x=t, y=-t, z=0$ vào (1), ta có

$$P\left(2t^2\right)=2P^2(t)+2P^2(-t)+2P^2(0),\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được

$$2^na^n=2a_n^2+2a_n^2\Leftrightarrow 2^n=4a_n\Leftrightarrow a_n=2^{n-2}.$$

Thay $x=y=t, z=-2t$ vào (1), ta có

$$P\left(6t^2\right)=4P^2(t)+2P^2(-2t),\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

So sánh hệ số của t^{2n} ở hai vế, ta được

$$a_n6^n=4a_n^2+2a_n^22^{2n}\overset{a_n=2^{n-2}}{\Longleftrightarrow}3^n=2^{2n-1}+1. \tag{2}$$

Nhận thấy $n=1, n=2$ thỏa (2). Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$2^{2n-1}+1>3^n,\forall n\geq 3.$$

Do đó (2) chỉ có nghiệm $n=1, n=2$.

- ☑ Khi $\deg P=1$, đặt $P(x)=\dfrac{1}{2}x+b$. Thay vào (1), ta được $b=0$, $b=\dfrac{1}{6}$. Do đó $P(x)=\dfrac{1}{2}x$, $P(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{6}$ là những nghiệm của bài toán.
- ☑ Khi $\deg P=2$, đặt $P(x)=x^2+bx+c$ $(a\neq 0)$. Thay vào (1), ta có

$$\begin{aligned}&\left(x^2+y^2+z^2\right)^2+b\left(x^2+y^2+z^2\right)+c\\ =&2\left(x^4+y^4+z^4\right)+\left(2b^2+4c\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)+12bxyz+6c^2,\end{aligned}$$

  hay $b=c=0$. Do đó $P(x)=x^2$ là một nghiệm của bài toán.

Vậy $P(x)=0$, $P(x)=\dfrac{1}{6}$, $P(x)=\dfrac{1}{2}x$, $P(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{6}$ và $P(x)=x^2$ là tất cả đa thức cần tìm.

Bài 37. Nếu P là đa thức hằng, $P(x)=c$, thì thay vào

$$\frac{P(x)}{yz}+\frac{P(y)}{zx}+\frac{P(z)}{xy}=P(x-y)+P(y-z)+P(z-x)$$

ta được $\frac{c}{yz}+\frac{c}{zx}+\frac{c}{xy}=3c$; mà $\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}=2$ nên $c=0$. Bây giờ xét trường hợp $\deg P=n\geq 1$. Phương trình đã cho được viết lại

$$xP(x)+yP(y)+zP(z)=xyz[P(x-y)+P(y-z)+P(z-x). \tag{1}$$

với mọi bộ số thực x,y,z khác 0 và thỏa mãn $2xyz=x+y+z$.

Cố định $x>0$. Giả sử $0<z<\frac{1}{2x}$. Bây giờ, để thỏa mãn điều kiện giả thiết, ta chọn

$$y=\frac{x+z}{2xz-1}.$$

Khi đó phương trình (1) viết lại thành

$$\begin{aligned}&xP(x)+\frac{x+z}{2xz-1}P\left(\frac{x+z}{2xz-1}\right)+zP(z)\\=&\frac{xz(x+z)}{2xz-1}\left[P\left(x-\frac{x+z}{2xz-1}\right)+P\left(\frac{x+z}{2xz-1}-z\right)+P(z-x)\right].\end{aligned} \tag{2}$$

Xét hàm số $g(z)=\frac{x+z}{2xz-1}$; khi đó

$$g'(z)=\frac{2xz-1-2x(x+z)}{(2xz-1)^2}=-\frac{1+2x^2}{(2xz-1)^2}.$$

Xét hàm số $h(z)=\frac{xz(x+z)}{2xz-1}$; khi đó

$$\begin{aligned}h'(z)&=\frac{x(x+z)}{2xz-1}-\frac{xz(1+2x^2)}{(2xz-1)^2}=\frac{x\left((x+z)(2xz-1)-z-2x^2z\right)}{(2xz-1)^2}\\&=\frac{x\left(2xz^2-x-2z\right)}{(2xz-1)^2}\end{aligned}$$

Vậy nên từ (2), lấy đạo hàm hai vế theo z được

$$\begin{aligned}&-\frac{2x^2+1}{(2xz-1)^2}P\left(\frac{x+z}{2xz+1}\right)-\frac{(x+z)\left(2x^2+1\right)}{(2xz-1)^3}P'\left(\frac{x+z}{2xz-1}\right)+P(z)+zP'(z)\\=&\frac{x\left(2xz^2-x-2z\right)}{(2xz-1)^2}\left[P\left(x-\frac{x+z}{2xz-1}\right)+P\left(\frac{x+z}{2xz-1}-z\right)+P(z-x)\right]\\+&\frac{xz(x+z)}{2xz-1}\left(\frac{2x^2+1}{(2xz-1)^2}P'\left(x-\frac{x+z}{2xz-1}\right)-\left[\frac{2x^2+1}{(2xz-1)^2}+1\right]P'\left(\frac{x+z}{2xz-1}-z\right)+P'(z-x)\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Khi $z\to 0^+$ thì

$$\begin{aligned}&\frac{1+2x^2}{(2xz-1)^2}\to 1+2x^2;\quad \frac{x+z}{2xz-1}\to -x;\\&\frac{(x+z)\left(2x^2+1\right)}{(2xz-1)^3}\to -x\left(2x^2+1\right);\quad \frac{x\left(2xz^2-x-2z\right)}{(2xz-1)^2}\to -x^2;\end{aligned}$$

do đó, từ (3), cho $z\to 0^+$, ta được

$$-(1+2x^2)P(-x)+x\left(2x^2+1\right)P'(-x)+P(0)=-x^2\left[P(2x)+P(-x)+P(-x)\right]$$

hay

$$\left(2x^2+1\right)\left[xP'(-x)-P(-x)\right]+P(0)=-x^2[P(2x)+2P(-x)]. \quad (4)$$

Hai đa thức ở hai vế của phương trình trên nhận giá trị bằng nhau tại vô số giá trị dương của x nên chúng đồng nhất với nhau.

1) Giả sử $P(x)=ax+b$ với $a\neq 0$. Khi đó phương trình (4) được viết lại thành

$$\left(2x^2+1\right)(2ax-b)+b=-3bx^2, \forall x\in\mathbb{R}.$$

So sánh hệ số x^3 hai vế được $a=0$, mâu thuẫn.

2) Giả sử $\deg P=2$. Khi đó đa thức $P(x)$ có dạng $P(x)=ax^2+bx+c$ với $a\neq 0$. Thay lại vào phương trình (4) và rút gọn, ta được

$$4bx^3+(c-3a)x^2+2bx=0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra $b=0$ và $c=3a$. Do đó $P(x)=a\left(x^2+3\right), \forall x\in\mathbb{R}$.

3) Giả sử $\deg P=n\geq 3$. Gọi c là hệ số cao nhất của $P(x)$. So sánh hệ số x^{n+2} ở hai vế của phương trình (4) được,

$$\begin{aligned} &2\left[na(-1)^{n-1}-a(-1)^n\right]=-\left[2^n a+2a(-1)^n\right]\\ \Leftrightarrow\, &n(-1)^{n-1}-(-1)^n=-2^{n-1}-(-1)^n \end{aligned}$$

Hay $n(-1)^{n-1}=-2^{n-1}$. Tuy nhiên phương trình này không có nghiệm với mọi $n\geq 3$.

Vậy các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài bao gồm $P(x)=0$ và $P(x)=a\left(x^2+3\right)$ (với a là hằng số khác 0).

Bài 38. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$2xP(x)+2yP(y)+2zP(z)=(x+y+z)[P(x-y)+P(y-z)+P(z-x)], \quad (1)$$

với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$ mà $x+y+z=kxyz$. Thay $y=-x$, $z=0$ vào (1), ta có

$$xP(x)=xP(-x), \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

mà hiển nhiên $P(-0)=P(0)$, nên $P(-x)=P(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Như vậy $P(x)$ là hàm chẵn, suy ra $P(x)$ chỉ chứa các số hạng với mũ chẵn. Nếu P là đa thức hằng, hay $P(x)\equiv d$, thì thay vào (1), ta được $c=0$. Do đó $P(x)\equiv 0$ là một nghiệm của bài toán. Giả sử $\deg P=n>0$, với n chẵn. Đặt

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \quad a_n\neq 0.$$

Thay $y=\dfrac{2}{kx}$, $z=x+\dfrac{2}{kx}$ (khi đó $x+y+z=2x+\dfrac{4}{kx}=kxyz$) vào (1), ta có

$$\begin{aligned} &2xP(x)+\frac{4}{kx}P\left(\frac{2}{kx}\right)+\left(2x+\frac{4}{kx}\right)P\left(x+\frac{2}{kx}\right)\\ =&\left(2x+\frac{4}{kx}\right)\left[P\left(x-\frac{2}{kx}\right)+P(x)+P\left(\frac{2}{kx}\right)\right], \ \forall x\neq 0. \end{aligned}$$

Suy ra

$$x^2P(x)+\frac{2}{k}P\left(\frac{2}{kx}\right)+\left(x^2+\frac{2}{k}\right)P\left(x+\frac{2}{kx}\right)$$

$$= \left(x^2 + \frac{2}{k}\right)\left[P\left(x - \frac{2}{kx}\right) + P(x) + P\left(\frac{2}{kx}\right)\right],\ \forall x \neq 0.$$

Suy ra

$$\left(x^2 + \frac{2}{k}\right)\left[P\left(x + \frac{2}{kx}\right) - P\left(x - \frac{2}{kx}\right)\right] = \frac{2}{k}P(x) + x^2 P\left(\frac{2}{kx}\right), \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Do $x \neq 0$ nên nhân hai vế với x^n, ta được

$$x^n\left(x^2 + \frac{2}{k}\right)\left[P\left(x + \frac{2}{kx}\right) - P\left(x - \frac{2}{kx}\right)\right] = \frac{2}{k}x^n P(x) + x^{n+2} P\left(\frac{2}{kx}\right), \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Bây giờ cả hai vế là các đa thức theo biến x và

$$\deg VT = 2n, \quad \deg VP = \max\{2n, n+2\}.$$

Nếu $\deg P = n \geq 4$ thì $\deg VP = 2n$. Khi đó, so sánh hệ số của x^{2n} hai vế, ta được

$$\frac{4n}{k}a_n x^{2n} = \frac{2}{k}a_n x^{2n},$$

vô lý, do đó $\deg P = 2$. Đặt $P(x) = ax^2 + b$ (với $a \neq 0$). Thay vào (1), ta có

$$\begin{aligned}
&2a\left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 2b(x+y+z)\\
=&2a\left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 2bkxyz\\
=&a(x+y+z)\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right] + 3b(x+y+z)\\
=&2a\left(x^3 + y^3 + z^3\right) + (3bk - 6a)xyz
\end{aligned}$$

hay $b = \dfrac{6a}{k}$. Do đó $P(x) = ax^2 + \dfrac{6a}{k}$ (với $a \neq 0$) là một nghiệm của bài toán.

Vậy $P(x) = ax^2 + \dfrac{6a}{k}$ (với a là hệ số thực bất kỳ) là tất cả đa thức cần tìm.

Lưu ý. Phép thay $y = \dfrac{2}{kx}, z = x + \dfrac{2}{kx}$ được tìm ra như sau. Để thu gọn (1), ta cần chọn x, y, z thỏa mãn $x + y + z = kxyz$ và có thể giản ước được các số hạng ở hai vế của (1). Vì vậy ta cho

$$\begin{cases} x+y+z = kxyz \\ 2z = x+y+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z = kxyz \\ z = x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y = kxy(x+y) \\ z = x+y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = kxy \\ z = x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2}{kx} \\ z = x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2}{kx} \\ z = x + \dfrac{2}{kx}. \end{cases}$$

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $P(F)P(G) = P(H)$

Bài toán tổng quát 1. Giả sử $f(x)$, $g(x)$ và $h(x)$ là các đa thức hệ số thực cho trước thỏa mãn điều kiện: $\deg(f) + \deg(g) = \deg(h)$. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ sao cho

$$P(f(x)) \cdot P(g(x)) = P(h(x)), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Nghiệm của (1) có nhiều tính chất đặc biệt giúp chúng ta có thể xây dựng được tất cả các nghiệm của nó từ các nghiệm bậc nhỏ.

Định lí 1. *Nếu $P(x)$, $Q(x)$ là nghiệm của phương trình hàm* (1) *thì đa thức $H(x) = P(x) \cdot Q(x)$ cũng là nghiệm của phương trình hàm* (1).

Chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned} H(h(x)) &= P(h(x)) \cdot Q(h(x)) = P(f(x)) \cdot P(g(x)) \cdot Q(f(x)) \cdot Q(g(x)) \\ &= P(f(x)) \cdot Q(f(x)) \cdot P(g(x)) \cdot Q(g(x)) \\ &= H(f(x)) \cdot H(g(x)). \end{aligned}$$

Vậy đa thức $H(x) = P(x) \cdot Q(x)$ cũng là nghiệm của phương trình hàm (1).
Từ định lý 1 này, ta có hệ quả sau đây.
Hệ quả 1. Nếu $P(x)$ là nghiệm của (1) thì $P(x)^n$ cũng là nghiệm của (1).

Trong khá nhiều trường hợp hệ quả trên cho phép ta mô tả hết các nghiệm của (1). Để làm điều này ta có định lí quan trọng sau đây:
Định lí 2. *Nếu f, g, h là các đa thức hệ số thực thỏa mãn điều kiện*

$$\deg(f) + \deg(g) = \deg(h)$$

và thỏa mãn một trong hai điều kiện sau đây:

(1) $\deg(f) \neq \deg(g)$;

(2) $\deg(f) = \deg(g)$ *và* $f^* + g^* \neq 0$, *trong đó* f^*, g^* *là hệ số của luỹ thừa cao nhất của các đa thức* f *và* g *tương ứng.*

Khi đó với mọi số nguyên dương n tồn tại nhiều nhất một đa thức hệ số thực $P(x)$ có bậc n và thỏa mãn (1).

Chứng minh. Giả sử P là đa thức bậc n thỏa mãn (1). Gọi P^*, f^*, g^*, h^* lần lượt là hệ số của luỹ thừa cao nhất của P, f, g, h. So sánh hệ số của luỹ thừa cao nhất hai vế của các đa thức trong (1) ta có

$$P^*.(f^*)^n.P^*.(g^*)^n = P^*.(h^*)^n \Rightarrow P^* = \left(\frac{h^*}{f^*.g^*}\right)^n.$$

Như vậy nếu giả sử ngược lại, tồn tại một đa thức Q hệ số thực bậc n, khác P, thỏa mãn (1) thì $Q^* = P^*$ và ta có

$$Q(x) = P(x) + R(x), \text{ với } 0 \leq r = \deg(R) < n$$

(ta quy ước bậc của đa thức đồng nhất không bằng $-\infty$, do đó $r \geq 0$ đồng nghĩa R không đồng nhất không). Do đa thức $Q(x) = P(x) + R(x)$ thỏa mãn phương trình hàm (1) nên

$$\begin{aligned} & [P(f(x)) + R(f(x))].[P(g(x)) + R(g(x))] = P(h(x)) + R(h(x)) \\ \Leftrightarrow & P(f(x))P(g(x)) + P(f(x))R(g(x)) + R(f(x))P(g(x)) + R(f(x))R(g(x)) \\ & \quad = P(h(x)) + R(h(x)) \\ \Leftrightarrow & P(f(x))R(g(x)) + R(f(x))P(g(x)) + R(f(x))R(g(x)) = R(h(x)). \end{aligned} \tag{2}$$

Trường hợp 1. $\deg(f) \neq \deg(g)$. Giả sử $\deg(f) > \deg(g)$. Khi đó bậc của các đa thức ở vế trái của (2) là

$$n\deg(f) + r\deg(g), r\deg(f) + n\deg(g), r\deg(f) + r\deg(g).$$

Để ý rằng

$$(n-r)\deg(f) > (n-r)\deg(g) \Rightarrow n\deg(f) + r\deg(g) > r\deg(f) + n\deg(g).$$

Do đó
$$n\deg(f)+r\deg(g)>r\deg(f)+n\deg(g)>r\deg(f)+r\deg(g).$$
Vậy vế trái của (2) có bậc là $n\deg(f)+r\deg(g)$. Trong khi đó vế phải có bậc là
$$r\deg(h)=r(\deg(f)+\deg(g))<n\deg(f)+r\deg(g)\ \text{(mâu thuẫn)}.$$

Trường hợp 2. $\deg(f)=\deg(g)$. Khi đó hai đa thức đầu tiên ở vế trái của (2) có cùng bậc là $n\deg(f)+r\deg(g)$ và có thể xảy ra sự triệt tiêu khi thực hiện phép cộng. Tuy nhiên, xét hệ số cao nhất của hai đa thức này, ta có hệ số của $x^{n\deg(f)+r\deg(g)}$ trong đa thức thứ nhất và đa thức thứ hai lần lượt là $P^*.(f^*)^n.R^*.(g^*)^r,\ R^*.(f^*)^r.P^*.(g^*)^n$. Như thế bậc của $x^{n\deg(f)+r\deg(g)}$ trong tổng hai đa thức bằng
$$\begin{aligned}&P^*.(f^*)^n.R^*.(g^*)^r+R^*.(f^*)^r.P^*.(g^*)^n\\ =&P^*R^*(f^*)^r(g^*)^r[(f^*)^{n-r}+(g^*)^{n-r}]\neq 0\ (\text{do } f^*+g^*\neq 0)\end{aligned}$$
Như vậy bậc của vế trái của (2) vẫn là $n\deg(f)+r\deg(g)$, trong khi đó bậc của vế phải là
$$r\deg(h)=r(\deg(f)+\deg(g))<n\deg(f)+r\deg(g)\ \text{(mâu thuẫn)}.$$

Định lí được chứng minh hoàn toàn.

Chú ý 10. Sử dụng định lí 2 và hệ quả 2, ta thấy rằng nếu $P_1(x)$ là một đa thức bậc nhất thỏa mãn (1) với f,g,h là các đa thức thỏa mãn điều kiện của định lí (2) thì tất cả các nghiệm của (1) là
$$P(x)\equiv 0, P(x)\equiv 1, P(x)=\left(P_1(x)\right)^n\ \text{(với } n=1,2,\dots).$$

Bài 1. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn
$$P(x)P(x+1)=P(x^2+x+1),\forall x\in\mathbb{R} \tag{1}$$

Lời giải

Cách 1 (Tương tự như bài toán tổng quát). Dễ thấy $P(x)\equiv 0$ và $P(x)\equiv 1$ thỏa mãn phương trình hàm (1). Xét trường hợp $P(x)$ có bậc nhất, $P(x)=ax+b$, với a,b là hằng số, $a\neq 0$. Thay vào (1) ta được
$$\begin{aligned}&[ax+b]\,[ax+a+b]=a(x^2+x+1)+b,\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&a^2x^2+(a+b)ax+abx+b(a+b)=ax^2+ax+a+b,\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&(a^2-a)x^2+(a+2b-1)ax+b(a+b)-a-b=0,\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}a^2-a=0\\ a(a+2b-1)=0\\ b(a+b)-a-b=0.\end{cases}\end{aligned}$$

Hệ này vô nghiệm do $a\neq 0$. Vậy không tồn tại đa thức bậc nhất thỏa mãn (1). Tiếp theo ta xét trường hợp $P(x)$ có bậc 2,
$$P(x)=ax^2+bx+c,\ \text{ với } a\neq 0$$
Thay vào (1) và đồng nhất hệ số như trên ta được $a=1,b=0,c=1$. Vậy đa thức bậc hai thỏa mãn (1) là $P(x)\equiv x^2+1$. Xét các đa thức
$$f(x)\equiv x, g(x)\equiv x+1, h(x)=x^2+x+1.$$

Khi đó $\deg(f)=\deg(g)=1,\deg(f)+\deg(g)=2=\deg(h)$. Tiếp theo ta chứng minh với mọi số nguyên dương n tồn tại nhiều nhất một đa thức hệ số thực $P(x)$ có bậc n và thỏa mãn

(1). Giả sử P là đa thức bậc n thỏa mãn (1). Gọi P^* là hệ số cao nhất của P. So sánh hệ số cao nhất hai vế của các đa thức trong (1) ta có

$$(P^*)^2 = P^* \Rightarrow P^* = 1 \text{ (do } P^* \neq 0).$$

Như vậy nếu giả sử tồn tại một đa thức Q hệ số thực bậc n, khác P, thỏa mãn (1) thì $Q^* = P^* = 1$ và ta có

$$Q(x) = P(x) + R(x), \text{ với } 0 \leq r = \deg(R) < n$$

(ta quy ước bậc của đa thức đồng nhất không bằng $-\infty$, do đó $r \geq 0$ đồng nghĩa R không đồng nhất không). Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}
&[P(f)+R(f)].[P(g)+R(g)] = P(h)+R(h)\\
\Leftrightarrow &P(f)P(g)+P(f)R(g)+R(f)P(g)+R(f)R(g) = P(h)+R(h)\\
\Leftrightarrow &P(f)R(g)+R(f)P(g)+R(f)R(g) = R(h). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Hai đa thức đầu tiên ở vế trái của (2) có cùng bậc là $n+r$ và có thể xảy ra sự triệt tiêu khi thực hiện phép cộng. Tuy nhiên, xét hệ số cao nhất của hai đa thức này, ta có hệ số của x^{n+r} trong đa thức thứ nhất và đa thức thứ hai lần lượt là $P^*.R^*,\ R^*.P^*$. Như thế bậc của x^{n+r} trong tổng hai đa thức bằng

$$P^*.R^* + R^*.P^* = 2P^*.R^*$$

Như vậy bậc của vế trái của (2) là $n+r$, trong khi đó bậc của đa thức ở vế phải là $2r$, nhưng $2r < n+r$, đến đây ta gặp mâu thuẫn. Vậy với mọi số nguyên dương n tồn tại nhiều nhất một đa thức hệ số thực $P(x)$ có bậc n và thỏa mãn (1). Kết hợp với hệ quả (2) suy ra tất cả các đa thức thỏa mãn đề bài là

$$P(x) \equiv 0, P(x) \equiv 1, P(x) = (x^2+1)^n \text{ (với } n = 1, 2, \ldots).$$

Cách 2: Sử dụng tính chất nghiệm và so sánh bậc. Nếu $P(x) \equiv a$ (a là hằng số) thì thay vào (1) ta được

$$a^2 = a \Leftrightarrow a(a-1) = 0 \Leftrightarrow a \in \{0, 1\}.$$

Bây giờ ta xét $P(x)$ là đa thức có bậc lớn hơn hoặc bằng 1. Khi đó $P(x)$ chỉ có hữu hạn nghiệm. Nếu $P(x) = 0$ thì theo (1) suy ra $P(x^2+x+1) = 0$. Vậy nếu x_0 là nghiệm thực của $P(x)$ thì các số sau cũng là nghiệm của $P(x)$

$$x_0,\ x_1 = x_0^2 + x_0 + 1,\ x_2 = x_1^2 + x_1 + 1, \ldots,\ x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 1, \ldots$$

Do $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$ nên suy ra $P(x)$ có vô số nghiệm, điều này mâu thuẫn với $P(x)$ chỉ có hữu hạn nghiệm. Vậy $P(x)$ không có nghiệm thực, suy ra $P(x)$ là đa thức bậc chẵn, giả sử $\deg(P) = 2m$. Gọi hệ số dẫn đầu của đa thức P là β, khi đó từ (1) suy ra

$$\beta = \beta^2 \Rightarrow \beta = 1.$$

Vậy $P(x)$ được biểu diễn dưới dạng

$$P(x) = (x^2+1)^m + G(x), \text{ với } \deg(G) < 2m. \qquad (3)$$

Thay (3) vào (1) ta được

$$\begin{aligned}
&\left[(x^2+1)^m + G(x)\right]\left[(x^2+2x+2)^m + G(x+1)\right]\\
=&\left[(x^2+x+1)^2+1\right]^m + G(x^2+x+1).
\end{aligned}$$

Vì $(x^2+1)(x^2+2x+2) = x^4+2x^3+3x^2+2x+2 = (x^2+x+1)^2+1$ nên theo trên ta có

$$(x^2+1)^m G(x+1) + (x^2+2x+2)^m G(x) + G(x)G(x+1) = G(x^2+x+1). \tag{4}$$

Nếu $G(x)$ không đồng nhất 0 thì giả sử $\deg(G) = p < 2m$. Khi đó vế phải của (4) là đa thức có bậc $2p$, còn vế trái của (4) có bậc là $2m+p$. Suy ra $2m+p = 2p$, suy ra $2m = p$, mâu thuẫn với $2m > p$. Vậy $G(x) \equiv 0$. Vậy $P(x) \equiv (x^2+1)^m$. Thử lại thấy thỏa mãn. Do đó tất cả các đa thức thỏa mãn đề bài là

$$P(x) \equiv 0, P(x) \equiv 1, P(x) = (x^2+1)^m \ \text{(với } m = 1,2,\ldots).$$

Lưu ý. Do ta dự đoán được $P(x) = x^2+1$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài nên mới có ý tưởng biểu diễn $P(x)$ có dạng như ở (3). Bài toán này còn được đề cập trong bài 6: Sử dụng số phức để giải phương trình hàm đa thức.

Bài 2. (Đề thi vào Khoa Toán học tính toán và Điều khiển- Đại học Tổng hợp Quốc gia Matxcơva năm 2002). Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện

$$P(x^2) = P^2(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải

Ta có các hàm $f(x) = x, g(x) = x, h(x) = x^2$ thỏa mãn các điều kiện của định lí 2 ở trang 89, và hàm $P(x) = x$ là hàm bậc nhất thỏa mãn (1) do đó các hàm $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv 1$, $P(x) \equiv x^n$ (với $n = 1,2,\ldots$) là tất cả các nghiệm của (1).

Bài 3 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2011).
Tìm các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn phương trình hàm

$$P(2x+1)P(2x+2) = P(4x^2+6x+3), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải

Đặt $t = 2x+1$. Khi đó (1) trở thành

$$P(t)P(t+1) = P(t^2+t+1), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Bài 4 (HSG Quốc gia-2006). Hãy xác định tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực, thỏa mãn hệ thức sau:

$$P(x^2) + x[3P(x) + P(-x)] = (P(x))^2 + 2x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải

Thay x bởi $-x$ vào (1), ta được

$$P(x^2) - x[3P(-x) + P(x)] = (P(-x))^2 + 2x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Trừ (1) cho (2), ta được

$$\begin{aligned} 4x[P(x) + P(-x)] &= P^2(x) - P^2(-x) \\ \Leftrightarrow [P(x) + P(-x)][P(x) - P(-x) - 4x] &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Do (3) đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, nên ta phải có: Hoặc $P(x) + P(-x) = 0$ đúng với vô số các giá trị x hoặc $P(x) - P(-x) - 4x = 0$ đúng với vô số các giá trị x. Do P là đa thức nên từ đây ta suy ra: Hoặc $P(x) + P(-x) = 0$ đúng với mọi x hoặc $P(x) - P(-x) - 4x = 0$ đúng với mọi x.
Ta xét các trường hợp $P(x) + P(-x) \equiv 0$. Khi đó ta có phương trình

$$P(x^2) + 2xP(x) = [P(x)]^2 + 2x^2 \Leftrightarrow P(x^2) - x^2 = [P(x) - x]^2.$$

Đặt $Q(x) = P(x) - x$ thì $Q(x^2) = Q^2(x)$. Theo bài toán 2 thì

$$Q(x) \equiv 0, Q(x) \equiv 1, Q(x) \equiv x^n.$$

Từ đó $P(x) \equiv x, P(x) \equiv x + 1, P(x) \equiv x^n + x$. So sánh với điều kiện

$$P(x) + P(-x) \equiv 0,$$

ta chỉ nhận các nghiệm: $P(x) \equiv x,\ P(x) \equiv x^{2k+1} + x, (k = 0, 1, 2 \ldots)$.
Tiếp theo xét trường hợp $P(x) - P(-x) - 4x \equiv 0$. Khi đó ta có phương trình

$$\begin{aligned} &P(x^2) + x[4P(x) - 4x] = P^2(x) + 2x^2 \\ \Leftrightarrow &P(x^2) - 2x^2 = [P(x) - 2x]^2. \end{aligned}$$

Đặt $Q(x) = P(x) - 2x$ thì $Q(x^2) = Q^2(x)$ và như thế

$$Q(x) \equiv 0,\ Q(x) \equiv 1, Q(x) \equiv x^n.$$

Từ đó $P(x) \equiv 2x, P(x) = 2x + 1, P(x) = x^n + 2x$.
So sánh với điều kiện $P(x) - P(-x) - 4x = 0$, ta chỉ nhận các nghiệm:

$$P(x) \equiv 2x,\ P(x) \equiv 2x + 1,\ P(x) \equiv x^{2k} + 2x\ (k = 1, 2, \ldots).$$

Tổng hợp hai trường hợp, ta có tất cả nghiệm của (1) là các đa thức là:

$$P(x) \equiv x,\ P(x) \equiv 2x,\ P(x) \equiv 2x + 1,\ P(x) = x^{2k+1} + x,\ P(x) = x^{2k} + 2x$$

với $k = 1, 2, 3, \ldots$

Bài 5. Cho a và b là hai số thực. Tìm tất cả các đa thức P hệ số thực thỏa mãn

$$P\left(x^2 + ax + b\right) = P(x)P(x + 1).$$

Lời giải

Giả sử tồn tại đa thức P hệ số thực thỏa mãn

$$P\left(x^2 + ax + b\right) = P(x)P(x + 1). \tag{1t}$$

Nếu $P(x) = \alpha$ (α là hằng số) thì $\alpha^2 = \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha = 1. \end{array}\right.$

Đặt $Q(x) = \left(x^2 + ax + b\right) - x = x^2 + (a - 1)x + b$. Ta có

$$\begin{aligned} Q(x)Q(x + 1) &= Q(x)\left((x + 1)^2 + (a - 1)(x + 1) + b\right) \\ &= Q(x)\left(x^2 + 2x + 1 + (a - 1)x + (a - 1) + b\right) \\ &= Q(x)\left(Q(x) + 2x + 1 + (a - 1)\right) \\ &= Q(x)^2 + 2xQ(x) + Q(x) + (a - 1)Q(x) \\ &= \left(Q(x)^2 + 2xQ(x) + x^2\right) + Q(x) - x^2 + (a - 1)Q(x) \\ &= (x + Q(x))^2 + (a - 1)x + b + (a - 1)Q(x) \\ &= (x + Q(x))^2 + (a - 1)\left(x + Q(x)\right) + b \\ &= Q\left(x + Q(x)\right) \\ &= Q\left(x^2 + ax + b\right). \end{aligned}$$

Do đó $Q(x)$ là một đa thức thỏa mãn (1t) (bạn đọc có thể xem lại bài toán 21 ở trang 32).

Bổ đề 1. Nếu $P(x)$, $Q(x)$ là nghiệm của phương trình hàm

$$P\left(f(x)\right)\cdot P\left(g(x)\right)=P\left(h(x)\right),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

thì đa thức $H(x)=P(x)\cdot Q(x)$ cũng là nghiệm của phương trình hàm (1).

Chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned}H\left(h(x)\right)&=P\left(h(x)\right)\cdot Q\left(h(x)\right)=P\left(f(x)\right)\cdot P\left(g(x)\right)\cdot Q\left(f(x)\right)\cdot Q\left(g(x)\right)\\&=P\left(f(x)\right)\cdot Q\left(f(x)\right)\cdot P\left(g(x)\right)\cdot Q\left(g(x)\right)\\&=H\left(f(x)\right)\cdot H\left(g(x)\right).\end{aligned}$$

Vậy đa thức $H(x)=P(x)\cdot Q(x)$ cũng là nghiệm của phương trình hàm (1).
Từ bổ đề 1 này, ta có hệ quả sau đây.

Hệ quả 2. Nếu $P(x)$ là nghiệm của phương trình hàm

$$P\left(f(x)\right)\cdot P\left(g(x)\right)=P\left(h(x)\right),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

thì $P(x)^n$ $(n=1,2,\ldots)$ cũng là nghiệm của (1).

Bổ đề 2. Với mỗi số nguyên dương n, tồn tại nhiều nhất một đa thức hệ số thực $P(x)$ có bậc n và thỏa mãn (1t).

Chứng minh. Giả sử $P(x)$ là đa thức bậc n thỏa mãn (1). Gọi hệ số dẫn đầu của đa thức P là α, khi đó do (1t) nên $\alpha=\alpha^2\Leftrightarrow\alpha=1$. Giả sử phản chứng rằng tồn tại đa thức $Q(x)$ bậc n thỏa mãn (1) và đa thức $Q(x)$ khác đa thức $P(x)$. Khi đó đa thức $Q(x)$ có hệ số dẫn đầu là 1 và đa thức $R(x)=P(x)-Q(x)$ khác đa thức không, $\deg R\le n-1$. Do đa thức $P(x)=Q(x)+R(x)$ là nghiệm của (1t) nên

$$\begin{aligned}&Q\left(x^2+ax+b\right)+R\left(x^2+ax+b\right)=\left(Q(x)+R(x)\right)\left(Q(x+1)+R(x+1)\right)\\&=Q(x)Q(x+1)+Q(x)R(x+1)+R(x)Q(x+1)+R(x)R(x+1).\end{aligned} \tag{*}$$

Mà $Q\left(x^2+ax+b\right)=Q(x)Q(x+1)$ nên từ $(*)$ ta rút gọn được

$$R\left(x^2+ax+b\right)=Q(x)R(x+1)+R(x)Q(x+1)+R(x)R(x+1). \tag{**}$$

Đa thức ở vế trái của $(**)$ có bậc $2\deg R$, đa thức ở vế phải của $(**)$ có bậc $n+\deg R$ (chú ý $\deg R\le n-1$); do đó từ $(**)$ suy ra

$$\deg R=n+\deg R\Leftrightarrow n=\deg R;$$

mâu thuẫn với $\deg R\le n-1$. Vậy bổ đề 2 được chứng minh.
Quay lại bài toán. Đa thức Q có biệt thức $\Delta=(a-1)^2-4b$.

1) Trường hợp 1: $(a-1)^2\neq 4b$. Khi đó $Q(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Giả sử tồn tại đa thức $R(x)$ bậc lẻ ($\deg R=m\not\vdots 2$) và thỏa mãn (1t).
   Theo hệ quả 2, suy ra đa thức $R(x)^2$ cũng thỏa mãn (1t). (2t)
   Do đa thức $Q(x)$ thỏa mãn (1t) nên theo hệ quả 2, suy ra đa thức $Q(x)^m$ cũng thỏa mãn phương trình hàm (1t). (3t)
   Mà hai đa thức $R(x)^2$ và $Q(x)^m$ đều có bậc là $2m$ nên theo bổ đề 2 suy ra

$$\begin{aligned}&R(x)^2=Q(x)^m,\ \forall x\in\mathbb{R}\\\Leftrightarrow&R(x)^2=(x-x_1)^m(x-x_2)^m,\ \forall x\in\mathbb{R};\end{aligned}$$

   đây là điều vô lý vì đa thức $R(x)^2$ chỉ có nghiệm bội chẵn, mà m lẻ. Do đó không tồn tại đa thức bậc lẻ thỏa mãn (1t). Như vậy, nếu $(a-1)^2\neq 4b$ thì tất cả các đa thức hệ số thực bậc dương và thỏa mãn yêu cầu đề bài đều dạng

$$P(x)=\left(x^2+(a-1)x+b\right)^n,\ \forall x\in\mathbb{R}\ (n=1,2,\ldots)$$

2) Trường hợp 2: $(a-1)^2 = 4b$. Khi đó đa thức $Q(x)$ có nghiệm kép $x_0 = -\dfrac{a-1}{2}$ và

$$Q(x) = \left(x + \frac{a-1}{2}\right)^2.$$

Xét đa thức $T(x) = x + \dfrac{a-1}{2}$. Ta có

$$T(x)T(x+1) = \left(x + \frac{a-1}{2}\right)\left(x + 1 + \frac{a-1}{2}\right) = \left(x + \frac{a-1}{2}\right)\left(x + \frac{a+1}{2}\right);$$

$$\begin{aligned} T\left(x^2+ax+b\right) &= T\left(x^2+ax+\frac{(a-1)^2}{4}\right) = x^2+ax+\frac{(a-1)^2}{4} + \frac{a-1}{2} \\ &= x^2+ax+\frac{a-1}{2}\left(\frac{a-1}{2}+1\right) \\ &= x^2+ax+\frac{a-1}{2}\cdot\frac{a+1}{2}. \end{aligned}$$

Do đó đa thức $T(x) = x + \dfrac{a-1}{2}$ thỏa mãn (1t); từ đây áp dụng hệ quả 2 và bổ đề 2 suy ra tất cả các đa thức hệ số thực bậc dương và thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng

$$P(x) = \left(x + \frac{a-1}{2}\right)^n, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ta kết luận:

- ☑ Nếu $(a-1)^2 \neq 4b$ thì các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài bao gồm

$$P(x) = 0; \quad P(x) = 1; \quad P(x) = \left(x^2 + (a-1)x + b\right)^n \ (n = 1, 2, \ldots).$$

- ☑ Nếu $(a-1)^2 = 4b$ thì các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài bao gồm

$$P(x) = 0; \quad P(x) = 1; \quad P(x) = \left(x + \frac{a-1}{2}\right)^n \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Bài 6. Tìm tất cả các đa thức bậc dương hệ số thực $f(x)$ chỉ có nghiệm thực và thỏa mãn

$$f\left(-x^2\right) = f(x)f(-x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

Giả sử tồn tại đa thức bậc dương hệ số thực $f(x)$ chỉ có nghiệm thực và thỏa mãn

$$f\left(-x^2\right) = f(x)f(-x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giả sử r là một nghiệm thực của đa thức $f(x)$. Thay $x = r$ vào (1) suy ra $-r^2$ cũng là một nghiệm thực của đa thức $f(x)$. Xét dãy số $(x_n)_{n\geq 0}$ như sau:

$$x_0 = r; \ x_1 = -r^2; \ x_{n+1} = -x_n^2, \ \forall n \geq 1.$$

Nếu $|r| > 1$ thì $|x_0| < |x_1| < |x_2| < \cdots$ (dãy $(x_n)_{n\geq 0}$ tăng nghiêm ngặt), và mọi số hạng của dãy $(x_n)_{n\geq 0}$ đều là nghiệm của đa thức $f(x)$, suy ra đa thức $f(x)$ có vô số nghiệm, mâu thuẫn với giả thiết đa thức $f(x)$ bậc dương. Nếu $0 < |r| < 1$ thì $|x_0| > |x_1| > |x_2| > \cdots$ (dãy $(x_n)_{n\geq 0}$ giảm nghiêm ngặt), và mọi số hạng của dãy $(x_n)_{n\geq 0}$ đều là nghiệm của đa thức $f(x)$, suy ra đa thức $f(x)$ có vô số nghiệm, mâu thuẫn với giả thiết đa thức $f(x)$ bậc dương. Do đó nghiệm thực của đa thức $f(x)$ chỉ có thể là 0, 1, -1; cho nên $f(x) = Cx^r(x-1)^s(x+1)^t$ với r, s, t là những số tự nhiên sao cho $s+t+r > 0$, C là hằng số khác 0. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x)f(-x) &= Cx^r(x-1)^s(x+1)^t C(-x)^r(-x-1)^s(-x+1)^t \\ &= C^2(-1)^{r+s+t}x^{2r}\left(x^2-1\right)^{s+t}; \\ f\left(-x^2\right) &= C(-x^2)^r(-x^2-1)^s(-x^2+1)^t \\ &= C(-1)^{r+s+t}x^{2r}\left(x^2+1\right)^s\left(x^2-1\right)^t. \end{aligned}$$

Cho nên

$$C^2(-1)^{r+s+t}x^{2r}\left(x^2-1\right)^{s+t} = C(-1)^{r+s+t}x^{2r}\left(x^2+1\right)^s\left(x^2-1\right)^t, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $C = 1$ và $s = 0$. Do đó

$$f(x) = x^r(x+1)^t,$$

với r, t là những số tự nhiên sao cho $r + t > 0$.

Bây giờ chúng ta đề cập đến bài toán 7 sau đây, bản thân bài toán 7 là một bài toán rất hay và thú vị, ngoài ra nó còn là một công cụ hữu hiệu giúp ta có được một lời giải ngắn gọn cho một bài toán rất khó 8.

Bài 7. Bạn Diệp Ánh đã viết ra một tập hợp hữu hạn các số thực riêng biệt (có thể chỉ là một số). Sau đó, cô ta bình phương tất cả chúng, và sau đó trừ đi một từ mỗi số. Cô ấy thu được một tập hợp hữu hạn các số thực riêng biệt mà cô ấy đã bắt đầu, theo thứ tự nào đó. Hãy xác định tập hợp hữu hạn các số ban đầu.

Lời giải

Giả sử tập hợp hữu hạn các số thực ban đầu là $A = \{a_1, \ldots, a_d\}$. Tập hợp hữu hạn các số thu được sau đó là

$$\left\{a_1^2-1, a_2^2-1, \ldots, a_d^2-1\right\}.$$

Theo giả thiết ta có

$$A = \{a_1, \ldots, a_d\} = \left\{a_1^2-1, a_2^2-1, \ldots, a_d^2-1\right\}. \tag{1}$$

Đặt $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Khi đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình

$$x = x^2 - 1.$$

Ta có $x^2 - x - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < x \Leftrightarrow x_2 < x < x_1$. Với mỗi $a \in A$, do (1) nên tồn tại duy nhất $b \in A$ sao cho $a = b^2 - 1$; suy ra $a \geq -1$. Như vậy, nếu $a \in A$ thì $a \geq -1$. (2)

Gọi m là số lớn nhất của A. Vì $m^2 - 1 \in A$, nên $m^2 - 1 \leq m$. Do đó $m \leq x_1$.

Như vậy, với mọi $a \in A$, ta có $a \leq x_1$. (3)

Giả sử tồn tại $a \in A$ sao cho $0 < a < x_1$. Khi đó $a = b^2 - 1$ với $b \in A$. Ta tính được $b = \pm\sqrt{1+a}$. Hơn nữa, do $b \geq -1 > -\sqrt{1+a}$, nên $b = \sqrt{1+a}$. Vậy $\sqrt{1+a} \in A$ và

$$0 < a < \sqrt{1+a} < x_1$$

(nếu $a \geq \sqrt{1+a}$ thì $a^2 \geq a+1$, dẫn đến $a > x_1$, mâu thuẫn với (3); nếu $1 + a = x_1^2$ thì $1 + a = x_1 + 1 \Rightarrow a = x_1$, ta gặp mâu thuẫn). Xét dãy số (c_n) như sau:

$$c_0 = a, c_{n+1} = \sqrt{1+c_n}, \ \forall n = 0, 1, \ldots$$

Ta chứng minh quy nạp được rằng $c_n \in A,\ \forall n = 0, 1, \ldots$ và dãy (c_n) tăng nghiêm ngặt. Do đó dãy (c_n) có vô số phần tử khác nhau, suy ra tập A có vô hạn phần tử, mâu thuẫn với giả thiết A là tập hữu hạn. Do đó, nếu $a \in A$ thì $a = x_1$ hoặc $-1 \le a \le 0$. (4)
Giả sử tồn tại $a \in A$ sao cho $-1 \le a \le 0$. Khi đó $a = b^2 - 1$ với $b \in A$. Ta có $b = \pm\sqrt{1+a}$. Nếu $b = \sqrt{1+a}$ thì $0 \le \sqrt{1+a} \le 1 \le x_1$, mâu thuẫn với (4); do đó $b = -\sqrt{1+a}$. Như vậy

$$-\sqrt{1+a} \in A, \quad -1 \le -\sqrt{1+a} \le 0.$$

Lặp lại các lập luận trên đối với $-\sqrt{1+a}$ ta thu được

$$-\sqrt{1-\sqrt{1+a}} \in A, \quad -1 \le -\sqrt{1-\sqrt{1+a}} \le 0.$$

Xét hàm số

$$g(x) = -\sqrt{1-\sqrt{1+x}},\ \forall x \in [-1;0].$$

Ta có

$$g'(x) = -\frac{\left(1-\sqrt{1+x}\right)'}{2\sqrt{1-\sqrt{1+x}}} = -\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{2\sqrt{1-\sqrt{1+x}}} > 0,\ \forall x \in [-1;0]$$

cho nên hàm số g tăng nghiêm ngặt trên $[-1;0]$. Xét dãy số (d_n) như sau:

$$d_0 = a; \quad d_{n+1} = g(d_n),\ \forall n = 0, 1, \ldots$$

Ta quy nạp được rằng với mọi $n = 0, 1, \ldots$ thì $d_n \in A$ và $d_n \in [-1;0]$. Nếu $d_0 \ne d_1$ thì do g tăng nghiêm ngặt trên $[-1;0]$ nên dãy (d_n) tăng nghiêm ngặt, suy ra tập A có vô hạn phẫn tử, mâu thuẫn với giả thiết. Do đó $d_0 = d_1$ hay

$$\begin{aligned} a = -\sqrt{1-\sqrt{1+a}} &\Leftrightarrow a^2 = 1 - \sqrt{1+a} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1+a} = 1 - a^2 \Leftrightarrow 1 + a = 1 - 2a^2 + a^4 \\ &\Leftrightarrow a^4 - 2a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a\left(a^3 - 2a - 1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow a(a+1)\left(a^2 - a - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -1 \\ a = x_2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Như vậy, các phần tử của A chỉ có thể là $0, -1, x_1, x_2$. Dễ thấy 0 và -1 phải cùng thuộc A hoặc cùng không thuộc A (vì $0 = (-1)^2 - 1$ và $-1 = 0^2 - 1$). Ta kết luận

$$A = \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}, \{0, -1\}, \{0, -1, x_1\}, \{0, -1, x_2\}, \{0, -1, x_1, x_2\}.$$

Tiếp theo ta sẽ xét một bài toán thỏa mãn bài toán tổng quát nhưng không thỏa mãn định lí 2 ở trang 89, đó là bài toán 8 sau đây.
Bài 8. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, có bậc dương, chỉ có nghiệm thực và thỏa mãn điều kiện

$$P(x)P(-x) = P(x^2 - 1),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

Giả sử tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, có $\deg P \ge 1$, chỉ có nghiệm thực, thỏa mãn điều kiện

$$P(x)P(-x) = P(x^2 - 1),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Đặt $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \overline{\phi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$; khi đó $\overline{\phi} < 0 < 1 < \phi$; và $\phi, \overline{\phi}$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$ (cho nên $\phi^2 = \phi + 1, \overline{\phi}^2 = \overline{\phi} + 1$).
Cách 1. Từ (1) lần lượt cho $x = 0, x = -1$ ta được

$$P(-1) = P(0)^2,\ P(0) = P(1)P(-1). \tag{*}$$

Do $(*)$ nên 0 là nghiệm của $P(x)$ khi và chỉ khi -1 là nghiệm của $P(x)$. Do (1) nên nếu $\alpha \in \mathbb{R}$ là nghiệm của $P(x)$ thì mọi số hạng trong dãy sau cũng là nghiệm của $P(x)$:

$$\alpha, \alpha^2-1, \left(\alpha^2-1\right)^2-1, \left(\left(\alpha^2-1\right)^2-1\right)^2-1, \ldots \qquad (**)$$

Bổ đề 3. Đa đa thức

$$P_{j,k,\ell}(x) = \left(x^2+x\right)^j(\varphi-x)^k(\overline{\varphi}-x)^\ell \ (j,k,\ell \in \mathbb{N}, j+k+\ell>0)$$

thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Chứng minh. Ta có $P_{j,k,\ell}$ là đa thức hệ số thực, có $\deg P_{j,k,\ell} \geq 1$, chỉ có nghiệm thực. Ta có

$$\begin{aligned} P_{j,k,\ell}(-x) &= \left(x^2-x\right)^j(\varphi+x)^k(\bar{\varphi}+x)^\ell; \\ P_{j,k,\ell}(x)P_{j,k,\ell}(-x) &= \left(x^4-x^2\right)^j(\varphi^2-x^2)^k(\bar{\varphi}^2-x^2)^\ell \\ &= \left(x^4-x^2\right)^j(\varphi+1-x^2)^k(\bar{\varphi}+1-x^2)^\ell; \qquad (2) \\ P_{j,k,\ell}(x^2-1) &= \left(x^4-x^2\right)^j\left(\varphi-x^2+1\right)\left(\overline{\varphi}-x^2+1\right). \qquad (3) \end{aligned}$$

Mà $\phi^2 = \phi+1, \overline{\phi}^2 = \overline{\phi}+1$ nên từ (3) và (2) thấy rằng $P_{j,k,\ell}(x)$ thỏa mãn (1). Vậy bổ đề 3 được chứng minh.

Bổ đề 4. Nếu $P(x) = Q(x)G(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$ và hai đa thức $P(x), Q(x)$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài thì đa thức $G(x)$ thỏa mãn (1).

Chứng minh. Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned} Q(x)G(x)Q(-x)G(-x) &= P(x)P(-x) = P\left(x^2-1\right) \\ &= Q\left(x^2-1\right)G\left(x^2-1\right) \\ &= Q(x)Q(-x)G\left(x^2-1\right). \end{aligned}$$

Từ đây và để ý rằng P, Q, R là các đa thức; đa thức $Q(x)$ khác đa thức hằng nên chỉ có hữu hạn nghiệm; cho nên

$$G(x)G(-x) = G\left(x^2-1\right), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó đa thức G thỏa mãn (1). Bổ đề 4 được chứng minh.

Bổ đề 5. Đặt $A = \{x \in \mathbb{R} | P(x) = 0\}$. Khi đó, nếu $a \in A$ thì $a \in \{0, -1, \phi, \overline{\phi}\}$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo bậc của $P(x)$.

(1) Giả sử $\deg P = 1$. Khi đó P có dạng $P(x) = mx+n$ với $m \neq 0$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} &(mx+n)(-mx+n) = m\left(x^2-1\right)+n, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &-m^2x^2+n^2 = mx^2+n-m, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -m^2 = m \\ n^2 = n-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n \in \{\phi, \overline{\phi}\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó $P(x) = -x+\phi$, $P(x) = -x+\overline{\phi}$. Suy ra $a \in \{\phi, \overline{\phi}\} \subset \{0, -1, \phi, \overline{\phi}\}$.

(2) Giả sử bổ đề 5 đúng với mọi đa thức P thỏa mãn các yêu cầu đề bài mà có $\deg P < k$ (với $k \geq 2$). Bây giờ ta xét P là đa thức thỏa mãn các yêu cầu đề bài và có bậc k. Trước hết, ta sẽ chứng minh tồn tại a_0 thuộc tập hợp A sao cho $a_0 \in \{0, -1, \phi, \overline{\phi}\}$. Giả sử phản chứng rằng, mỗi $a \in A$ đều có $a \notin \{0, -1, \phi, \overline{\phi}\}$. Khi đó do (1) nên $a^2 - 1 \in A$, và hiển nhiên $a^2 - 1 > -1$. Gọi x_0 là số bé nhất thuộc tập hợp $A \cap (-1; +\infty)$. Chỉ có các trường hợp sau có thể xảy ra: $x_0 > \phi$, $x_0 < \overline{\phi}$, $\overline{\phi} < x_0 < \phi$.

- Trường hợp $x_0 > \phi$. Khi đó $x_0^2 - x_0 - 1 > 0$. Cho nên $x_1 = x_0^2 - 1 > x_0 > \phi$ và $x_1 \in A$. Tiếp tục quá trình suy luận này sẽ có một dãy tăng nghiêm ngặt (x_n) $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ được xác định bởi
$$x_{n+1} = x_n^2 - 1,\ \forall n = 0, 1, 2, \ldots$$
mà mọi số hạng đều thuộc A. Điều này mâu thuẫn với tính hữu hạn của A.
- Trường hợp $\overline{\phi} < x_0 < \phi$. Khi đó $-1 < x_1 = x_0^2 - 1 < x_0$ và $x_1 \in A$. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa x_0.
- Trường hợp $x_0 < \overline{\phi}$. Khi đó
$$\begin{aligned} x_2 = x_1^2 - 1 = \left(x_0^2 - 1\right)^2 - 1 &= x_0 + \left(\left(x_0^2 - 1\right)^2 - 1 - x_0\right) \\ &= x_0 + x_0\left(x_0^3 - 2x_0 - 1\right) \\ &= x_0 + x_0\left(x_0 + 1\right)\left(x_0^2 - x_0 - 1\right) \\ &= x_0 + x_0\left(x_0 + 1\right)\left(x_0 - \phi\right)\left(x_0 - \overline{\phi}\right). \end{aligned} \tag{4}$$
Do $x_0 \in A \cap (-1; +\infty)$ nên $x_0 > -1$. Như vậy $-1 < x_0 < \overline{\phi} < 0 < \phi$, nên
$$x_0\left(x_0 + 1\right)\left(x_0 - \phi\right)\left(x_0 - \overline{\phi}\right) < 0$$
do đó từ (4) ta thu được $\left(x_0^2 - 1\right)^2 - 1 < x_0$. Nhưng $x_2 = x_1^2 - 1 = \left(x_0^2 - 1\right)^2 - 1$ lại là nghiệm của $P(x)$, mâu thuẫn với cách chọn x_0.

Như vậy, tất cả các trường hợp đều dẫn tới mâu thuẫn, do đó điều giả sử mỗi a thuộc tập A đều có $a \notin \{0, -1, \phi, \overline{\phi}\}$ là sai, cũng có nghĩa là tồn tại a_0 thuộc tập hợp A sao cho $a_0 \in \{0, -1, \phi, \overline{\phi}\}$. Ta sẽ chứng minh rằng: nếu tồn tại $a \neq a_0$ và a thuộc tập hợp A thì $a \in \{0, -1, \phi, \overline{\phi}\}$. Thật vậy, giả sử tồn tại $a \neq a_0$ và a thuộc tập hợp A. Chỉ có các trường hợp sau có thể xảy ra: $a_0 \in \{0, -1\}$, $a_0 = \phi$, $a_0 = \overline{\phi}$.

- Trường hợp $a_0 = 0$. Khi đó, do $-1 = a_0^2 - 1 \in A$ nên $-1 \in A$. Suy ra $P(x)$ có dạng
$$P(x) = x(x+1)Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\ (\text{với } Q(x) \in \mathbb{R}[x]). \tag{5}$$
Nếu $\{0, -1\} = A$ thì hiển nhiên ta có điều phải chứng minh.
Nếu $\{0, -1\}$ là tập con thực sự của A thì $1 \leq \deg Q < k$. Theo bổ đề 3 và bổ đề 4 suy ra đa thức $Q(x)$ cũng thỏa mãn (1). Ta có $a \in A \setminus \{0\}$. Từ (5) ta có $Q(a) = 0$, do đó theo giả thiết quy nạp suy ra $a \in \{0, -1, \phi, \overline{\phi}\}$.
- Trường hợp $a_0 = -1$. Khi đó, do $0 = a_0^2 - 1 \in A$ nên $0 \in A$. Suy ra $P(x)$ có dạng
$$P(x) = x(x+1)Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\ (\text{với } Q(x) \in \mathbb{R}[x]).$$
Nếu $\{0, -1\} = A$ thì hiển nhiên ta có điều phải chứng minh.
Nếu $\{0, -1\}$ là tập con thực sự của A thì $1 \leq \deg Q < k$. Theo bổ đề 3 và bổ đề 4 suy ra đa thức $Q(x)$ cũng thỏa mãn (1). Ta có $a \in A \setminus \{-1\}$. Mà $Q(a) = 0$, do đó theo giả thiết quy nạp suy ra $a \in \{0, -1, \phi, \overline{\phi}\}$.

- Trường hợp $a_0 = \phi$. Khi đó P có dạng

$$P(x) = (x - \phi)\, Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ với } Q(x) \in \mathbb{R}[x]. \tag{6}$$

Nếu $\{\phi\} = A$ thì hiển nhiên ta có điều phải chứng minh.
Nếu $\{\phi\}$ là tập con thực sự của A thì $1 \le \deg Q < k$. Theo bổ đề 3 và bổ đề 4 suy ra đa thức $Q(x)$ cũng thỏa mãn (1). Ta xét $a \in A \setminus \{\phi\}$. Từ (6) ta có $Q(a) = 0$, do đó theo giả thiết quy nạp suy ra $a \in \{0, -1, \phi, \overline{\phi}\}$.

- Trường hợp $a_0 = \overline{\phi}$. Khi đó P có dạng

$$P(x) = \left(x - \overline{\phi}\right) Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ với } Q(x) \in \mathbb{R}[x]. \tag{7}$$

Nếu $\left\{\overline{\phi}\right\} = A$ thì hiển nhiên ta có điều phải chứng minh.
Nếu $\left\{\overline{\phi}\right\}$ là tập con thực sự của A thì $1 \le \deg Q < k$. Theo bổ đề 3 và bổ đề 4 suy ra đa thức $Q(x)$ cũng thỏa mãn (1). Ta xét $a \in A \setminus \left\{\overline{\phi}\right\}$. Từ (7) ta có $Q(a) = 0$, do đó theo giả thiết quy nạp suy ra $a \in \left\{0, -1, \phi, \overline{\phi}\right\}$.

Tóm lại, nếu $a \in A$ thì $a \in \left\{0, -1, \phi, \overline{\phi}\right\}$. Như vậy bổ đề 5 được chứng minh.

Theo bổ đề 5, đa thức P thỏa mãn yêu cầu đề bài sẽ có dạng

$$P(x) = P_{j,k,\ell}(x)Q(x) \text{ (với } Q(x) \in \mathbb{R}[x], Q(0) \neq 0, Q(-1) \neq 0, Q(\phi) \neq 0, Q(\overline{\phi}) \neq 0) \tag{8}$$

với j, k, ℓ là các số tự nhiên, $j + k + \ell > 0$. Theo bổ đề 4 suy ra

$$Q\left(x^2 - 1\right) = Q(x)Q(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}; \tag{9}$$

Tức là $Q(x)$ cũng thỏa mãn (1). Ta sẽ chứng minh $Q(x)$ là đa thức hằng. Giả sử phản chứng rằng, $Q(x)$ không phải là đa thức hằng. Khi đó; nếu đa thức $Q(x)$ có nghiệm phức $z = a + bi$ (với a, b là các số thực, $b \neq 0$) thì dĩ nhiên z cũng là nghiệm phức của đa thức $P(x)$, ta gặp mâu thuẫn; do đó $Q(x)$ chỉ có nghiệm thực, nhưng lúc này sử dụng bổ đề 5 suy ra các nghiệm thực đó chỉ có thể là 0, -1, ϕ, $\overline{\phi}$; điều này lại mâu thuẫn với (8). Do đó $Q(x)$ là đa thức hằng. Thay vào (1) ta được $Q(x) \equiv 0$ (loại) và $Q(x) \equiv 1$ (nhận). Kết hợp kết quả này với (8) và bổ đề 3 suy ra: tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài đều có dạng

$$P(x) = \left(x^2 + x\right)^j (\varphi - x)^k (\bar{\varphi} - x)^\ell,\ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \text{(với } j, k, \ell \text{ thuộc } \mathbb{N}, j + k + \ell > 0)$$

Cách 2. Đặt $\deg P = d$ và hệ số dẫn đầu của P là a_d $(a_d \neq 0)$. Từ (1), so sánh hệ số của x^d ở hai vế ta được

$$(-1)^d a_d^2 = a_d \Leftrightarrow a_d = (-1)^d.$$

Gọi $r_1, \ldots, r_d$ là tất cả các nghiệm thực của P. Khi đó

$$P(x) = (r_1 - x)\,(r_2 - x) \cdots (r_d - x)\,.$$

Ta có

$$P(-x) = (r_1 + x)\,(r_2 + x) \cdots (r_d + x)\,.$$

Do đó

$$P(x)P(-x) = \left(r_1^2 - x^2\right)\left(r_2^2 - x^2\right) \cdots \left(r_d^2 - x^2\right).$$

Mặt khác

$$P\left(x^2 - 1\right) = \left(r_1 + 1 - x^2\right)\left(r_2 + 1 - x^2\right) \cdots \left(r_d + 1 - x^2\right).$$

Từ (1) suy ra $P\left(x^2-1\right)$ chỉ có nghiệm thực, do đó

$$r_i+1 \geq 0,\ \forall i=1,\ldots,d$$

(vì nếu tồn tại $i \in \{1,\ldots,d\}$ sao cho $r_i+1<0$ thì đa thức $T(x)=r_i+1-x^2$ có nghiệm phức, suy ra $P\left(x^2-1\right)$ có nghiệm phức, ta gặp mâu thuẫn). Do đó

$$P\left(x^2-1\right)=\left(\sqrt{r_1+1}-x\right)\left(\sqrt{r_1+1}+x\right)\cdots\left(\sqrt{r_d+1}-x\right)\left(\sqrt{r_d+1}+x\right).$$

Như vậy (1) trở thành

$$\left(r_1^2-x^2\right)\left(r_2^2-x^2\right)\cdots\left(r_d^2-x^2\right)=\left(r_1+1-x^2\right)\left(r_2+1-x^2\right)\cdots\left(r_d+1-x^2\right).$$

Suy ra $\{r_1^2,\ldots,r_d^2\}=\{r_1+1,\ldots,r_d+1\}$. Do đó $r_1^2,\ldots,r_d^2$ là một hoán vị của $r_1+1,\ldots,r_d+1$; suy ra $r_1^2-1,\ldots,r_d^2-1$ là một hoán vị của $r_1,\ldots,r_d$. Do đó, theo bài toán 7 (ở trang 96) suy ra các nghiệm thực của đa thức P chỉ có thể là -1, 0, ϕ, $\overline{\phi}$ (0 và -1 cùng là nghiệm hoặc cùng không là nghiệm). Do đó P có dạng

$$P(x)=\left(x^2+x\right)^j(\varphi-x)^k(\bar{\varphi}-x)^\ell,\ \forall x\in\mathbb{R}. \qquad \text{(với } j,k,\ell \text{ thuộc } \mathbb{N},\ j+k+\ell>0)$$

Thử lại đúng.

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $P(F)P(G)=P(H)+Q$

Bài toán tổng quát 2. Giả sử $f(x), g(x), h(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức hệ số thực cho trước thỏa mãn điều kiện: $\deg(f)+\deg(g)=\deg(h)$. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ sao cho

$$P\left(f(x)\right).P\left(g(x)\right)=P\left(h(x)\right)+Q(x), \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Với phương trình (1), nếu Q không đồng nhất 0 thì ta sẽ không còn tính chất "nhân tính" như ở bài toán tổng quát 1 ở trang 88. Vì thế, việc xây dựng nghiệm trở nên khó khăn. Đây chính là khác biệt cơ bản của toán tổng quát 2 với toán tổng quát 1. Tuy nhiên, ta vẫn có thể chứng minh được định lý duy nhất, được phát biểu như sau:

Định lí 1. *Cho f,g,h là các đa thức không hằng thỏa mãn điều kiện*

$$\deg(f)+\deg(g)=\deg(h)$$

Q là một đa thức cho trước, ngoài ra $\deg(f)\neq\deg(g)$ hoặc $\deg(f)=\deg(g)$ và $f^*+g^*\neq 0$. Khi đó, với mỗi số nguyên dương n và số thực a, tồn tại nhiều nhất một đa thức P thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$i)\quad \deg(P)=n; \qquad ii)\quad P^*=a; \qquad iii)\quad P(f)P(g)=P(h)+Q.$$

Phép chứng minh định lý này tương tự với phép chứng minh định lý 2.

Hệ quả 1. Trong các điều kiện của định lý, với mỗi số nguyên dương n, tồn tại nhiều nhất 2 đa thức $P(x)$ có bậc n thỏa mãn phương trình

$$P(f)P(g)=P(h)+Q.$$

Chứng minh. Hệ số cao nhất của P phải thỏa mãn phương trình

$$P^{*2}(f^*g^*)^n=P^*(h^*)^n+\text{ Hệ số của } x^{nh} \text{ trong } Q.$$

Suy ra P^* chỉ có thể nhận nhiều nhất 2 giá trị.

Bài 1. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình

$$P^2(x) - P(x^2) = 2x^4, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải

Nếu P là đa thức hằng $P(x) = c$ thì thay vào (1) ta nhận được điều vô lý; vậy $\deg P \geq 1$.
Nếu đặt $P(x) = ax^k + R(x)$, với $a \neq 0$, $\deg(R) = r < k$ thì ta có

$$P^2(x) - P(x^2) = (a^2 - a)x^{2k} + 2ax^k R(x) + R^2(x) - R(x^2).$$

Từ đó suy ra $\deg(P^2(x) - P(x^2))$ hoặc bằng $2k$ nếu $a \neq 1$, hoặc bằng $k + r$ nếu $a = 1$ và $r \geq 0$, hoặc bằng $-\infty$ khi $a = 1$ và $r = -\infty$ (tức là đồng nhất 0). Từ đó, suy ra $k \leq 4$. Đến đây, ta dễ dàng tìm được các nghiệm của (1) là

$$P(x) \equiv x^4 + 1, P(x) \equiv x^3 + x, P(x) \equiv 2x^2, P(x) \equiv -x^2.$$

Bài 2. Tìm tất cả đa thức $P(x)$ hệ số thực sao cho

$$P^2(x) - P\left(x^2\right) = cx^{2018}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

Bổ đề 6. Nếu đa thức $P(x)$ là tổng của ít nhất 3 đơn thức thì $P^2(x) - P\left(x^2\right)$ có ít nhất hai số hạng.

Chứng minh. Gọi $ax^m + bx^n$ là tổng của hai đơn thức có bậc thấp nhất của $P(x)$ với $m > n \geq 0$. Khi đó, trong $P^2(x)$ sẽ có chứa số hạng $2abx^{m+n}$. Tuy nhiên, vì $2n < m + n < 2m$ nên số hạng này chắc chắn không thể bị triệt tiêu. Tương tự nếu xét tổng hai đơn thức bậc cao nhất. Bổ đề 6 được chứng minh. Trở lại bài toán, Ta xét các trường hợp sau.

- Nếu $P(x) = ax^n$ thì $P^2(x) - P\left(x^2\right) = \left(a^2 - a\right)x^{2n}$ nên đồng nhất hệ số có

$$2n = 2018, a^2 - a = c$$

nên $c \geq -\dfrac{1}{4}$.

- Nếu $P(x) = ax^n + bx^m$ thì

$$P^2(x) - P\left(x^2\right) = \left(a^2 - a\right)x^{2n} + 2abx^{m+n} + \left(b^2 - b\right)x^{2m}$$

thì phải có $a = b = 1$ và $2x^{m+n} = cx^{2018}$ nên $c = 2, m + n = 2018$.

Vậy nếu $c < -\dfrac{1}{4}$ thì không tồn tại đa thức thỏa đề; nếu $c \geq -\dfrac{1}{4}, c \neq 2$ thì có đúng một đa thức thỏa mãn có dạng ax^n với $a^2 - a = c$; nếu $c = 2$ thì có các đa thức thỏa đề là

$$-x^{1009}, 2x^{1009}, x^m + x^n \text{ với } m + n = 2018, m, n \in \mathbb{N}.$$

Bài 3. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn phương trình

$$P(x^2 - 2) = P^2(x) - 2, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải

Có 2 đa thức hằng thỏa mãn phương trình là đa thức đồng nhất -1 và đa thức đồng nhất 2. Với các đa thức bậc lớn hơn hay bằng 1, áp dụng hệ quả 1 ở trang 101 ta suy ra với mỗi số nguyên dương n, tồn tại không quá 1 đa thức $P(x)$ thỏa mãn (1). Điểm khó ở đây là ta không có cơ chế đơn giản để xây dựng các nghiệm. Dùng phương pháp đồng nhất hệ số, ta tìm được các nghiệm bậc 1, 2, 3, 4 lần lượt là:

$$x, x^2-2, x^3-3x, x^4-4x^2+2.$$

Từ đây, có thể dự đoán được quy luật của dãy nghiệm như sau:

$$P_0 = 2, P_1 = x, P_{n+1} = xP_n - P_{n-1}, n = 1,2,3,\ldots \tag{2}$$

Cuối cùng, để hoàn tất lời giải bài toán, ta chỉ cần chứng minh các đa thức thuộc dãy đa thức xác định bởi (2) thỏa mãn phương trình (1). Ta có thể thực hiện điều này bằng cách sử dụng quy nạp toán học hoặc bằng cách như sau: Xét x bất kỳ thuộc $[-2,2]$, đặt $x = 2\cos t$ thì từ công thức (2), ta suy ra

$$P_2(x) = 4\cos^2 t - 2 = 2\cos 2t, P_3(x) = 2\cos t.2\cos 2t - 2\cos t = 2\cos 3t,$$

và nói chung $P_n(x) = 2\cos(nt)$. Từ đó

$$\begin{aligned} P_n(x^2-2) &= P_n(4\cos^2 t - 2) = P_n(2\cos 2t) = 2\cos(2nt) \\ &= 4\cos^2(nt) - 2 = P_2(x) - 2. \end{aligned}$$

Đẳng thức này đúng với mọi x thuộc $[-2,2]$ do đó đúng với mọi x. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Bài 4 (T11/483-Toán học & Tuổi trẻ, tháng 9 năm 2017).
Cho $R(x)$ là một đa thức bậc 2017. Chứng minh rằng tồn tại vô số các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P\left[\left(R^{2017}(t)+R(t)+1\right)^2-2\right] = P^2\left(R^{2017}(t)+R(t)+1\right)-2. \tag{1}$$

Hãy tìm một hệ thức liên hệ giữa các đa thức $P(x)$ đó.

Lời giải

Đặt $x = R^{2017}(t)+R(t)+1$, khi đó (1) trở thành

$$P(x^2-2) = (P(x))^2 - 2. \tag{2}$$

Để giải quyết bài toán, trước hết ta cần bổ đề sau

Bổ đề 7. Cho $a \neq 0$, b, c là những số thực bất kỳ và $n \geq 1$ là số tự nhiên. Khi đó tồn tại nhiều nhất một đa thức $P(x)$ bậc n thỏa mãn điều kiện

$$P(ax^2+bx+c) = a\left(P(x)\right)^2 + bP(x) + c. \tag{3}$$

Chứng minh. Giả sử $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$, là đa thức thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó, từ (3) ta có

$$\begin{aligned} & a_0(ax^2+bx+c)^n + a_1(ax^2+bx+c)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(ax^2+bx+c) + a_n \\ = \; & a(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)^2 + b(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) + c. \end{aligned}$$

Trong (2) ta đem so sánh các hệ số của $x^{2n}, x^{2n-1}, \ldots, x^n$ ta được

$$\begin{aligned} & a_0a^n = a_0^2a, \\ & \varphi_1(a_0,a,b,c) = 2aa_0a_1, \\ & \varphi_2(a_0,a_1,a,b,c) = aa_1^2 + 2aa_0a_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_3(a_0, a_1, a_2, a, b, c) = 2aa_1a_2 + 2aa_0a_3,\\
&\dots\\
&\varphi_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a, b, c) = 2aa_0a_n + 2a_0a_nb,
\end{aligned}$$

trong đó φ_1, φ_2, ..., φ_n là các đa thức. Do $a_0 \neq 0$ và $a \neq 0$ nên từ hệ trên ta suy ra các hệ số a_0, a_1, ..., a_n là duy nhất. Vậy với mỗi số tự nhiên $n \geq 1$ luôn tồn tại duy nhất một đa thức $P(x)$ với $\deg P(x) = n$ thỏa mãn (3). Bây giờ ta quay lại với bài toán ban đầu. Trước hết theo bổ đề 7 (ở trang 103) thì với mỗi số tự nhiên $n \geq 1$ tồn tại duy nhất một đa thức $P_n(x)$ bậc n thỏa mãn $P_n(x^2-2) = P_n^2(x) - 2$. So sánh các hệ số của x trong mỗi đa thức ta thu được:

$$\begin{aligned}
&P_1(x) = x, && P_2(x) = x^2 - 2,\\
&P_3(x) = x^3 - 3x, && P_4(x) = x^4 - 4x^3 + 2,\\
&P_5(x) = x^5 - 5x^3 + 5x.
\end{aligned}$$

Ta rút ra

$$P_3(x) = xP_2(x) - P_1(x), \qquad P_4(x) = xP_3(x) - P_2(x).$$

và dự đoán rằng

$$P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) - P_n(x)\ (n \geq 1). \tag{4}$$

Ta chứng minh (4) bằng quy nạp theo n. Dễ thấy với $n = 1$, $n = 2$ thì (4) đúng.
Giả sử với n nào đó thì các đa thức $P_n(x)$, $P_{n+1}(x)$ thỏa mãn (2). Ta chứng minh $P_{n+2}(x)$ xác định theo hệ thức (4) thỏa mãn (2). Thật vậy,

$$\begin{aligned}
&P_{n+2}(x^2-2) - P_{n+2}(x) + 2\\
=\ &(x^2-2)P_{n+1}(x^2-2) - P_n(x^2-2) - [xP_{n+1}(x) - P_n(x)]^2 + 2\\
=\ &(x^2-2)\left[P_{n+1}^2(x) - 2\right] - \left[P_n^2(x) - 2\right] - x^2P_{n+1}^2(x) + 2xP_{n-1}(x)P_n(x) - P_n^2(x) + 2\\
=\ &-2P_{n+1}^2(x) - 2P_n^2(x) + 2xP_n(x)P_{n-1}(x) - 2x^2 + 8\\
=\ &-2Q_n(x)
\end{aligned}$$

với $Q_n(x) = P_{n+1}^2(x) + P_n^2(x) - xP_n(x)P_{n-1}(x) + x^2 - 4$. Nhưng lại có

$$\begin{aligned}
Q_n(x) &= [xP_n(x) - P_{n-1}(x)]^2 + P_n^2(x) - x\left[xP_n(x) - P_{n-1}(x)\right]P_n(x) + x^2 - 4\\
&= P_n^2(x) + P_{n-1}^2(x) - xP_n(x)P_{n-1}(x) + x^2 - 4\\
&= Q_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

Bằng phương pháp lùi ta dẫn đến

$$Q_n(x) = Q_{n-1}(x) = \dots = Q_1(x) = (x^2-2)^2 + x^2 - x(x^2-2)x + x^2 - 4 = 0.$$

Từ đó suy ra $P_{n+2}(x^2-2) = P_{n+2}^2(x) - 2$, tức là (4) đúng.
Vậy tất cả các đa thức $P_n(x)$ bậc n được xác định bởi

$$\begin{cases} P_1(x) = x; P_2(x) = x^2 - 2\\ P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x), n \geq 3. \end{cases}$$

BÀI 6. SỬ DỤNG SỐ PHỨC ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC

Nghiệm của đa thức đóng vai trò quan trọng trong việc xác định một đa thức. Cụ thể, nếu đa thức $P(x)$ bậc n $(n \in \mathbb{N}^*)$ có n nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thì $P(x)$ có dạng

$$P(x) = c\,(x - x_1)\,(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Tuy nhiên nếu chỉ xét các nghiệm thực thì trong nhiều trường hợp sẽ không đủ số nghiệm. Hơn nữa trong bài toán phương trình hàm đa thức, nếu chỉ xét các nghiệm thực thì lời giải sẽ không hoàn chỉnh. Định lí cơ bản của đại số vì vậy đóng một vai trò hết sức quan trọng trong dạng toán này.

- **Định lí cơ bản của đại số.** Mọi đa thức bậc n hệ số phức (thực)

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ (với } a_n \neq 0)$$

  đều có đủ n nghiệm phức (phân biệt hay trùng nhau).

- **Định lí Viet thuận:** Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n nghiệm (phân biệt hay trùng nhau) của đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ thì:

$$\begin{aligned}
&S_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}\\
&S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}\\
&S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&S_n = x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n.\frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned}$$

- **Định lí Viet đảo:** Nếu n số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + \cdots + x_n = S_1\\
&x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = S_2\\
&x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = S_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_1x_2\ldots x_n = S_n
\end{aligned}$$

  thì $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là nghiệm của phương trình

$$x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}S_{n-1}x + (-1)^n S_n = 0.$$

- Cho hai số phức z_1 và z_2. Khi đó:
  $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$
  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $z_1 = kz_2$, với $k \geq 0$.
  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.

Bài 1 (Olympic Hồng Kông-1999). Cho k là số nguyên dương. Tìm các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P\,(P(x)) = [P(x)]^k,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

Giả sử tồn tại đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P(P(x)) = [P(x)]^k, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Xét trường hợp $P(x) \equiv C$ (C là hằng số). Từ (1) được $C = C^k$. Khi $k = 1$ thì C là hằng số bất kì. Khi $k > 1$ thì:

$$C = C^k \Leftrightarrow C\left(C^{k-1} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 0 \\ C^{k-1} = 1. \end{array}\right.$$

Nếu k chẵn thì $C = 1$ hoặc $C = 0$, nếu k lẻ thì $C = 0$ hoặc $C = 1$ hoặc $C = -1$.
Nếu $\deg P = 1$ thì thay vào (1) ta được kết quả:

- Nếu $k = 1$ thì $P(x) = x$.
- Nếu $k > 1$ thì không có đa thức bậc nhất nào thỏa mãn.

Tiếp theo ta xét trường hợp $\deg P \geq 1$. Vì đa thức $P(x) - x$ luôn có nghiệm (xét cả nghiệm phức) nên với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, tồn tại $\alpha_n \in \mathbb{C}$ sao cho $P(\alpha_n) = \alpha_n$. Từ đó

$$P(\alpha_n) = P(P(\alpha_n)) \overset{\text{theo (1)}}{=} [P(\alpha_n)]^k = \alpha_n^k, \ \forall n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Từ (2) suy ra đa thức $P(x) - x^k$ có vô số nghiệm, hay $P(x) - x^k \equiv 0$, nghĩa là $P(x) \equiv x^k$. Thử lại thấy thỏa mãn.
Kết luận: Nếu $k = 0$ thì $P(x) \equiv C$ (C là hằng số bất kì). Nếu $k > 1$ thì các đa thức thỏa mãn đề bài là

$$P(x) \equiv 0, \ P(x) \equiv 1, \ P(x) \equiv x^k.$$

Bài 2. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P\left(x^2\right) = P\left(x + \frac{1}{2}\right) P\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Lời giải

Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ thỏa mãn

$$P\left(x^2\right) = P\left(x + \frac{1}{2}\right) P\left(x - \frac{1}{2}\right). \tag{1}$$

Giả sử $P(x)$ khác đa thức hằng. Khi đó $P(x)$ có nghiệm. Gọi α là một nghiệm của $P(x)$ mà có mô-đun lớn nhất. Từ (1), lần lượt thay $x = \alpha + \frac{1}{2}$, $x = \alpha - \frac{1}{2}$, ta có

$$P\left(\left(\alpha \pm \frac{1}{2}\right)^2\right) = 0.$$

Do đó

$$\left|\left(\alpha \pm \frac{1}{2}\right)^2\right| \leq |\alpha|.$$

Theo bất đẳng thức tam giác, ta có

$$\left|\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2\right| + \left|\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2\right| \geq \left|\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2\right| = 2|\alpha|. \tag{2}$$

Do $|\alpha|$ là lớn nhất, nên từ (2) suy ra

$$\left|\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2\right| = \left|\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\right| = |\alpha| \tag{3}$$

và $\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2 = k\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2$ với $k \leq 0$. (4)
Từ (3) và (4) suy ra $k=-1$, do đó

$$\begin{aligned}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2 = -\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2 &\Leftrightarrow \alpha^2+\alpha+\frac{1}{4} = -\alpha^2+\alpha-\frac{1}{4}\\ &\Leftrightarrow \alpha^2 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

Vậy

$$P(x) = \left(x^2+\frac{1}{4}\right)^m Q(x) \tag{3}$$

với $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ và $Q(x)$ không chia hết cho đa thức $\left(x^4+\frac{1}{4}\right)$. Thay (3) vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&\left(x^4+\frac{1}{4}\right)^m Q(x^2) = \left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\right)^m Q\left(x+\frac{1}{2}\right)\left((x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\right)^m Q\left(x-\frac{1}{2}\right)\\ \Leftrightarrow &\left(x^4+\frac{1}{4}\right)^m Q(x^2) = \left(x^2+\frac{1}{2}-x\right)^m Q\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}-x\right)^m Q\left(x-\frac{1}{2}\right)\\ \Leftrightarrow &Q\left(x^2\right) = Q\left(x+\frac{1}{2}\right)Q\left(x-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Vậy $Q(x)$ cũng thỏa (1). Nếu như $Q(x)$ có nghiệm thì ta làm tương tự như trên, nghiệm có môđun lớn nhất phải là $\pm\frac{1}{2}i$. Nhưng điều này không thể vì $Q(x)$ không chia hết cho $\left(x^2+\frac{1}{4}\right)$. Bởi vậy $Q(x)$ là hằng số. Giả sử đó là c, thay vào (1) ta được $c=1$. Vậy

$$P(x) = (x^2+1)^m.$$

Thử lại ta kết luận: tất cả các đa thức thỏa mãn đề bài là

$$P(x) \equiv 0, P(x) \equiv 1, P(x) = \left(x^2+\frac{1}{4}\right)^m \text{ (với } m = 1,2,\ldots)$$

Bài 3. Tìm số thực c lớn nhất, sao cho tồn tại một đa thức khác hằng $P(x)$ thỏa mãn

$$P\left(x^2\right) = P(x-c)P(x+c)$$

với mọi số thực x.

Lời giải

Nếu $c=\frac{1}{2}$ thì theo bài toán 2 thấy rằng tồn tại đa thức khác hằng $P(x)$ thỏa mãn

$$P\left(x^2\right) = P(x-c)P(x+c)$$

với mọi số thực x. Bây giờ ta giả sử $c > \frac{1}{2}$ và giả sử tồn tại một đa thức khác hằng $P(x)$ thỏa mãn $P\left(x^2\right) = P(x-c)P(x+c)$ với mọi số thực x. Gọi r là một nghiệm của $P(x)$ mà có mô-đun lớn nhất. Lần lượt thay $x = r - c$ và $x = r + c$, suy ra $(r-c)^2$ và $(r+c)^2$ là những nghiệm của $P(x)$. Theo bất đẳng thức tam giác ta có

$$\left|(r+c)^2\right| + |(r-c)|^2 \geq \left|(r+c)^2 - (r-c)^2\right| = 4c \cdot |r|.$$

Như vậy, trong hai số $|(r+c)^2|, |(r-c)|^2$ phải có ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng $2c\,|r|$, mà $2c\,|r| > r$ nên ta gặp mâu thuẫn. Vậy số thực c lớn nhất là $c = \frac{1}{2}$.

Bài 4. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn:

$$P(x)P(x+1) = P(x^2+x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

Giả sử tồn tại đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn:

$$P(x)P(x+1) = P(x^2+x+1), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Nếu $P(x) \equiv a$ (a là hằng số) thì thay vào (1) ta được

$$a^2 = a \Leftrightarrow a(a-1) = 0 \Leftrightarrow a \in \{0, 1\}.$$

Bây giờ ta xét $P(x)$ là đa thức có bậc lớn hơn hoặc bằng 1. Giả sử a là một nghiệm của $P(x)$. Khi đó a^2+a+1 cũng là nghiệm. Trong (1) thay x bởi $x-1$ ta được

$$P(x-1)P(x) = P(x^2-x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì $P(a) = 0$ nên suy ra $P(a^2-a+1) = 0$, vậy a^2-a+1 cũng là nghiệm của $P(x)$. Chọn a là nghiệm có môđun lớn nhất (nếu có nhiều nghiệm như thế thì ta chọn một trong chúng). Từ cách chọn suy ra

$$\left|a^2+a+1\right| \leq |a|, \quad \left|a^2-a+1\right| \leq |a|.$$

Theo bất đẳng thức về môđun ta có

$$\begin{aligned}
|2a| &= \left|\left(a^2+a+1\right) + \left(-a^2+a-1\right)\right| \leq \left|a^2+a+1\right| + \left|-a^2+a-1\right| \\
&= \left|a^2+a+1\right| + \left|a^2-a+1\right| \leq |a| + |a| = 2|a| = |2a|.
\end{aligned}$$

Như vậy dấu bằng phải xảy ra ở các bất đẳng thức trên, suy ra

$$\left|\left(a^2+a+1\right) + \left(-a^2+a-1\right)\right| = \left|a^2+a+1\right| + \left|-a^2+a-1\right|,$$

suy ra tồn tại số thực $s \geq 0$ sao cho $a^2+a+1 = s\left(-a^2+a-1\right)$.
Nếu $\left|a^2+a+1\right| < \left|a^2-a+1\right|$ thì:

$$2\left|a^2-a+1\right| > \left|a^2-a+1\right| + \left|a^2+a+1\right| \geq |2a| \Rightarrow \left|a^2-a+1\right| > |a|.$$

Tương tự nếu $\left|a^2+a+1\right| > \left|a^2-a+1\right|$ thì $\left|a^2+a+1\right| > |a|$, mâu thuẫn với cách chọn a. Vậy $\left|a^2-a+1\right| = \left|a^2+a+1\right|$. Từ đó $s = 1$ và ta có

$$a^2+a+1 = -a^2+a-1 \Leftrightarrow a^2 = -1 \Leftrightarrow a = \pm i.$$

Vậy $P(x) = (x^2+1)^m Q(x)$, trong đó $Q(x)$ là đa thức không chia hết cho x^2+1. Thay vào (1), ta có

$$(x^2+1)^m Q(x)(x^2+2x+2)^m Q(x+1) = [(x^2+x+1)^2+1]^m Q(x^2+x+1).$$

Hay $Q(x)Q(x+1) = Q(x^2+x+1)$. Vậy $Q(x)$ cũng thỏa (1). Nếu như $Q(x)$ có nghiệm thì ta làm tương tự như trên, nghiệm có môđun lớn nhất phải là i, $-i$. Nhưng điều này không thể vì $Q(x)$ không chia hết cho x^2+1. Bởi vậy $Q(x)$ là hằng số. Giả sử đó là c, thay vào (1) ta được $c = 1$. Vậy $P(x) = (x^2+1)^m$. Thử lại ta kết luận: tất cả các đa thức thỏa mãn đề bài là

$$P(x) \equiv 0, P(x) \equiv 1, P(x) = (x^2+1)^m \ \text{(với } m = 1, 2, \dots)$$

Bài 5. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn:

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3+x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn:

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3+x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Với đa thức hằng $P(x) \equiv a$, ta có $a^2 = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1. \end{array}\right.$

Vậy $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv 1$ thỏa mãn bài ra. Tiếp theo xét trường hợp $P(x)$ khác hằng số. Giả sử

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ với } a_n \neq 0$$

là đa thức thỏa mãn các yêu cầu bài toán. Từ (1) ta có

$$\begin{aligned} &(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0)\left[a_n(2x^2)^n + \dots + a_1(2x^2) + a_0\right] \\ \equiv &\left[a_n(2x^3+x)^n + \dots + a_1(2x^3+x) + a_0\right]. \end{aligned}$$

So sánh hệ số của x^{3n} và hệ số tự do ở hai vế ta được

$$\begin{cases} 2^n a_n^2 = 2^n a_n \\ a_0^2 = a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n^2 = a_n \\ a_0 \in \{0, 1\} \end{cases} \overset{\text{do } a_n \neq 0}{\Rightarrow} \begin{cases} a_n = 1 \\ a_0 \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Trường hợp 1. $a_n = 1$ và $a_0 = 0$. Khi đó

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x = x^\ell P_1(x),\ \text{với } \ell \in \mathbb{N}^*,\ P_1(0) \neq 0.$$

Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} &x^\ell P_1(x)(2x^2)^\ell P_1(2x^2) = (2x^3+x)^\ell P_1(2x^3+x),\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow &P_1(x)(2x^2)^\ell P_1(2x^2) = (2x^2+1)^\ell P_1(2x^3+x),\ \forall x \neq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Do hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$, nên từ (2), cho $x \to 0$ ta được $P_1(0) = 0$, đến đây ta gặp mâu thuẫn. Vậy trường hợp 1 không xảy ra.

Trường hợp 2. $a_n = 1$ và $a_0 = 1$. Giả sử α là một nghiệm thực của $P(x)$. Khi đó do $a_0 = 1$ nên $\alpha \neq 0$. Ta có $P(2\alpha^3 + \alpha) = P(\alpha)P(2\alpha^2) = 0$. Suy ra $2\alpha^3 + \alpha$ cũng là một nghiệm của $P(x)$. Xét dãy số (α_n) như sau:

$$\alpha_0 = \alpha \neq 0;\ \alpha_{n+1} = 2\alpha_n^3 + \alpha_n,\ \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Nếu $\alpha > 0$ thì (α_n) là dãy tăng nghiêm ngặt, nếu $\alpha < 0$ thì (α_n) là dãy giảm nghiêm ngặt. Từ đây suy ra nếu $P(x)$ có một nghiệm thực khác không thì nó sẽ có vô số nghiệm thực. Điều này không thể xảy ra. Kết hợp $P(0) = 1 \neq 0$ suy ra $P(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra $P(x)$ chỉ có nghiệm phức $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Theo định lí Viet ta có

$$z_1.z_2 \ldots z_n = (-1)^n \Rightarrow |z_1|\,|z_2| \ldots |z_n| = 1. \tag{3}$$

Nếu tồn tại z_k sao cho $|z_k| > 1$. Điều này dẫn đến

$$\left|2z_k^2 + 1\right| = \left|2z_k^2 - (-1)\right| \geq \left|2z_k^2\right| - |-1| = 2\left|z_k^2\right| - 1 > 1.$$

Do đó $|2z_k^3 + z_k| = |z_k|\,|2z_k^2 + 1| > |z_k|$, suy ra $P(x)$ có vô số nghiệm, điều này không thể xảy ra. Vậy với mọi $k = 1, 2, \ldots n$ thì $|z_k| \leq 1$, từ đây và từ (3) suy ra $|z_k| = 1$, $\forall k = \overline{1, n}$. Giả sử $\alpha = \cos\phi + i\sin\phi$ là nghiệm phức của $P(x)$, khi đó $2\alpha^3 + \alpha$ cũng là nghiệm của $P(x)$ và

$$\begin{aligned} 1 = \left|2\alpha^3 + \alpha\right| &= |\alpha| . \left|2\alpha^2 + 1\right| = \left|2\alpha^2 + 1\right| = |2\cos 2\phi + 2i\sin 2\phi + 1| \\ &= |(2\cos 2\phi + 1) + (2\sin 2\phi)\, i| = \sqrt{(2\cos 2\phi + 1)^2 + (2\sin 2\phi)^2}. \end{aligned}$$

Từ đó

$$(2\cos 2\phi + 1)^2 + (2\sin 2\phi)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos 2\phi = -1 \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Suy ra $\alpha = \pm i$. Do đó $P(x) = (x^2 + 1)^k$, $k \in \mathbb{N}$. Thử lại thấy thỏa mãn.
Vậy tất cả các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x) \equiv 0;\ P(x) \equiv (x^2 + 1)^k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Lưu ý. Trong trường hợp 1, để suy ra $P_1(0) = 0$ (để tạo ra mâu thuẫn) mà không cần dùng giới hạn ta có thể làm như sau: Từ (2) suy ra đa thức

$$P_1(x)(2x^2)^\ell P_1(2x^2) - (2x^2 + 1)^\ell P_1(2x^3 + x)$$

có vô số nghiệm nên nó là đa thức không, nghĩa là

$$P_1(x)(2x^2)^\ell P_1(2x^2) = (2x^2 + 1)^\ell P_1(2x^3 + x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây cho $x = 0$ ta được $P_1(0) = 0$, mâu thuẫn.

Bài 6. Tìm các đa thức $P(x)$ có hệ số thực thỏa mãn điều kiện:

$$P(x).P(2x^2) = P(x^3 + x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

Giả sử tồn tại hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$P(x).P(2x^2) = P(x^3 + x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Với đa thức hằng $P(x) \equiv a$, ta có $a^2 = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1. \end{array}\right.$ Ta thấy $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv 1$ thỏa mãn bài ra. Tiếp theo xét trường hợp $P(x)$ khác hằng số:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Từ (1) ta có $P(0) = 0$ hoặc $P(0) = 1$. Do đó $a_0 = 0$ hoặc $a_0 = 1$.
Trường hợp 1. $a_0 = 0$. Khi đó giả sử

$$P(x) = x^m Q(x),\ Q(0) \neq 0,\ m \in \mathbb{N}^*.$$

Thay vào (1) ta được

$$x^m Q(x).(2x^2)^m.Q(2x^2) = (x^3+x)^m Q(x^3+x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow Q(x).(2x^2)^m Q(2x^2) = (x^2+1)^m Q(x^3+x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Từ (3), cho $x=0$ ta được $Q(0)=0$, đến đây ta gặp mâu thuẫn.
Trường hợp 2. $a_0 = 1$. Đồng nhất hệ số bậc cao nhất ở (1) ta được

$$a_n.a_n.2^n = a_n \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{2^n}.$$

Từ (1) suy ra nếu $P(x_0)=0$ thì $P(x_0^3+x_0)=0$, vậy nếu x_0 là nghiệm thực của $P(x)$ thì $x_0^3+x_0$ cũng là nghiệm của $P(x)$. Xét dãy số (x_n) như sau:

$$x_0 \neq 0;\ \ x_{n+1} = x_n^3 + x_n,\ \forall n = 0,1,2,\ldots$$

Nếu $x_0 > 0$ thì (x_n) là dãy tăng nghiêm ngặt, nếu $x_0 < 0$ thì (x_n) là dãy giảm nghiêm ngặt. Từ đây suy ra nếu $P(x)$ có một nghiệm thực khác không thì nó sẽ có vô số nghiệm thực. Điều này không thể xảy ra. Kết hợp $P(0) = 1 \neq 0$ suy ra $P(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra $P(x)$ chỉ có nghiệm phức $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Theo định lí Viet ta có

$$z_1.z_2\ldots z_n = (-1)^n.2^n \Rightarrow |z_1|\,|z_2|\ldots|z_n| = 2^n.$$

Vì vậy tồn tại z_k sao cho $|z_k| \geq 2$. Điều này dẫn đến

$$\left|z_k^2+1\right| = \left|z_k^2-(-1)\right| \geq \left|z_k^2\right| - |-1| = \left|z_k^2\right| - 1 \geq 3.$$

Do đó $\left|z_k^3+z_k\right| = |z_k|\left|z_k^2+1\right| > |z_k|$, vậy $P(x)$ có vô số nghiệm, điều này không thể xảy ra. Vậy chỉ có hai đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv 1$.
Lưu ý. Bài toán 5 và bài toán 6 được tổng quát hoá thành bài toán 7 sau đây.

Bài 7. Cho số thực $\alpha \in [0;2]$. Tìm tất cả các đa thức khác không $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn đồng nhất thức

$$P(x)P(2x^2) = P(\alpha x^3 + x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

- Khi $\alpha = 0$ thì $P(x)P(2x^2) = P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$, dẫn tới $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv 1$.
- Khi $\alpha = 2$, tiến hành tương tự như bài toán 5.
- Khi $0 < \alpha < 2$, tiến hành tương tự như bài toán 6.

Bài 8 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2011).
Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn phương trình hàm

$$P(x)P(3x^2) = P(3x^3+x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 9. Tìm tất cả các đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$f(\sin x + \cos x) = f(\sin x) + f(\cos x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

Giả sử tồn tại đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$f(\sin x + \cos x) = f(\sin x) + f(\cos x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Dễ thấy đa thức $f(x) \equiv c$ (c là hằng số) thỏa mãn (1) thì $c = 0$.
Tiếp theo giả sử $\deg(f) = n \geq 1$. Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, khi đó

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Vậy (1) trở thành

$$f\left(\frac{1+2x-x^2}{1+x^2}\right)=f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)+f\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right). \tag{2}$$

Giả sử $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k+a_0$. Nhân cả hai vế của (2) với $(1+x^2)^n$, rồi thay x bởi i (i là đơn vị ảo, $i^2=-1$) ta được

$$a_n(2+2i)^n=a_n\left[(2i)^n+2^n\right]\Leftrightarrow(1+i)^n=1+i^n. \tag{3}$$

Số phức $(1+i)^n$ có môđun là $\sqrt{2}^n$. Ta có

$$\begin{aligned}1+i^n&=1+\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n=1+\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\\ \Rightarrow|1+i^n|&=\sqrt{\left(1+\cos\frac{n\pi}{2}\right)^2+\sin^2\frac{n\pi}{2}}=\sqrt{2+2\cos\frac{n\pi}{2}}=\sqrt{4\cos^2\frac{n\pi}{4}}.\end{aligned}$$

Do đó từ (3) suy ra

$$2^n=4\cos^2\frac{n\pi}{4}\Leftrightarrow2^{n-2}=\cos^2\frac{n\pi}{4}. \tag{4}$$

Khi $n=1$ thì (4) đúng. Khi $n=2$ thì (4) không đúng. Khi $n>2$ thì $2^{n-2}>2>\cos^2\frac{n\pi}{4}$, vậy (4) không đúng khi $n>2$. Tóm lại (4) $\Leftrightarrow n=1$. Do đó $\deg(f)=1$ hay $f(x)=ax+b$. Thay vào (1) được $b=0$. Vậy $f(x)\equiv ax$. Các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x)\equiv0,\; f(x)\equiv ax\ (a \text{ là các hằng số, } a\neq0).$$

Bài 10. Cho $m\in\mathbb{Z}$, $m\geq2$. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn: nếu $x_1^m+x_2^m=1$ thì

$$P\left(x_1\right)+P\left(x_2\right)=1.$$

Lời giải

Giả sử tồn tại đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn: nếu $x_1^m+x_2^m=1$ thì

$$P\left(x_1\right)+P\left(x_2\right)=1$$

($m\geq2$ là số nguyên cho trước). Gọi ω ($\omega\neq1$) là một căn bậc m của 1. Khi đó

$$1=x_1^m+x_2^m=x_1^m+\omega^mx_2^m.$$

Theo giả thiết ta có $P\left(x_1\right)+P\left(x_2\right)=1=P\left(x_1\right)+P\left(\omega x_2\right)$. Do đó $P\left(x_2\right)=P\left(\omega x_2\right)$ với vô hạn số x_2. Suy ra $P(x)=P(\omega x)$ với mọi số thực x. Giả sử

$$P(x)=a_dx^d+a_{d-1}x^{d-1}+\cdots+a_1x+a_0.$$

Từ $P(x)=P(\omega x),\ \forall x\in\mathbb{R}$; so sánh hệ số của x^k ta được

$$a_k\omega^k=a_k\Leftrightarrow a_k(\omega^k-1),$$

do đó hoặc $a_k=0$ hoặc m chia hết cho k. Như vậy hệ số a_j của đa thức $P(x)$ hoặc là bằng 0 hoặc là có chỉ số j chia hết cho m. Do đó

$$P(x)=a_0+a_mx^m+a_{2m}x^{2m}+\cdots+a_d\left(x^m\right)^{\frac{d}{m}}=Q\left(x^m\right).$$

với $Q(x)\in\mathbb{R}[x]$. Do $x_1^m+x_2^m=1$, ta có $Q\left(x_1^m\right)+Q\left(x_2^m\right)=P(x_1)+P(x_2)=1$. Suy ra

$$Q(z)+Q(1-z)=1$$

với vô hạn số thực z. Mà $Q(x)$ là đa thức nên

$$Q(z) + Q(1-z) = 1,\ \forall z \in \mathbb{R}.$$

Từ đó,

$$Q\left(\frac{1}{2}+z\right) - \frac{1}{2} + Q\left(\frac{1}{2}-z\right) - \frac{1}{2} = 0. \tag{*}$$

Giả sử

$$Q\left(\frac{1}{2}+z\right) - \frac{1}{2} = b_k z^k + b_{k-1}z^{k-1} + \cdots + b_1 z + b_0.$$

Khi đó

$$Q\left(\frac{1}{2}-z\right) - \frac{1}{2} = b_k(-z)^k + b_{k-1}(-z)^{k-1} + \cdots + b_1(-z) + b_0.$$

Kết hợp với $(*)$ ta được

$$2b_0 + 2b_2 z^2 + \cdots 2b_{2j} z^{2j} = 0,\ \forall z \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $b_0 = b_2 = \cdots = 0$, do đó đa thức $Q\left(\frac{1}{2}+z\right) - \frac{1}{2}$ có dạng

$$Q\left(\frac{1}{2}+z\right) - \frac{1}{2} = zR\left(z^2\right)$$

với $R(z)$ là đa thức hệ số thực. Như vậy

$$Q(z) = \frac{1}{2} + \left(z - \frac{1}{2}\right) R\left(\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

Từ đó

$$P(x) = Q\left(x^m\right) = \frac{1}{2} + \left(x^m - \frac{1}{2}\right) R\left(\left(x^m - \frac{1}{2}\right)^2\right).$$

Thử lại đúng.

Bài 11. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực f, g thỏa mãn:

$$f\left(g(x)\right) = f(x)g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải

Nếu $g(x) \equiv 0$ thì từ (1) suy ra $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $f(0) = 0$.
Nếu $f(x) \equiv 0$ thì mọi đa thức $g(x)$ đều thỏa mãn yêu cầu đề bài.
Tiếp theo giả sử $f(x) \not\equiv 0$ và $g(x) \not\equiv 0$. Từ (1) suy ra:

$$\deg(f).\deg(g) = \deg(f) + \deg(g). \tag{2}$$

Do $\deg(f), \deg(g)$ là những số tự nhiên nên (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \deg(f) = \deg(g) = 0 \\ \deg(f) = \deg(g) = 2. \end{array}\right.$

- Khi $\deg(f) = \deg(g) = 0$. Giả sử $f(x) \equiv a$, $g(x) = b$ (a, b là những hằng số khác 0). Thay vào (1), ta được: $a = ab \Leftrightarrow b = 1$.

- Giả sử $\deg(f) = \deg(g) = 2$. Gọi x_0 là một nghiệm của đa thức $g(x)$ (x_0 có thể là số phức). Từ (1) suy ra:
$$f(0) = f(g(x_0)) = f(x_0)g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx \ (a \neq 0).$$
Lúc này (1) trở thành:
$$\begin{aligned} & a[g(x)]^2 + bg(x) = \left(ax^2 + bx\right) g(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & ag(x) + b = ax^2 + bx, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & g(x) = ax^2 + \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Kết luận: các cặp đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là
$$\begin{aligned} & f(x) \equiv a_n x^n + \cdots + a_1 x, \ \ g(x) \equiv 0 \\ & f(x) \equiv 0, \ g(x) \text{ là đa thức hệ số thực} \\ & f(x) \equiv a, \ \ g(x) \equiv 1 \ (a \text{ là hằng số khác } 0) \\ & f(x) \equiv ax^2 + bx, \ \ g(x) \equiv ax^2 + \frac{b}{a}x - \frac{b}{a} \ (a, b \text{ là hằng số}, a \neq 0). \end{aligned}$$

BÀI 7. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG DÃY SỐ, GIỚI HẠN TRONG PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC

A. PHƯƠNG PHÁP VÀ VÍ DỤ GIẢI TOÁN

Sử dụng dãy số, giới hạn trong giải toán nói chung, trong việc xác định các đa thức nói riêng là một phương pháp hay, đặc sắc, bất ngờ. Để vận dụng được phương pháp này đòi hỏi bạn đọc phải có nền tảng kiến thức (đặc biệt là giải tích) vững vàng, đa dạng và khả năng tư duy linh hoạt. Sau đây là một vài lưu ý, kinh nghiệm, kết quả mà bạn đọc có thể vận dụng cho phương pháp này khi giải toán.

- Những bài toán mà giả thiết của nó có "tính lặp" thì chúng ta có thể đưa dãy số vào. Chẳng hạn như một đa thức $P(x)$ thỏa mãn
$$P\left(x^2 + 1\right) = P(x)^2 + 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$$
thì ta có thể xét dãy số (a_n) thỏa mãn hệ thức truy hồi
$$a_{n+1} = a_n^2 + 1, \ \forall n = 1, 2, \ldots$$
khi đó sẽ có
$$P(a_{n+1}) = P\left(a_n^2 + 1\right) = P(a_n)^2 + 1, \ \forall n = 1, 2, \ldots$$
từ đây một tính chất nào đó của đa thức có thể sẽ được suy ra từ tính chất của $P(a_1)$.
- Dãy số là một công cụ hữu hiệu để chứng minh hai đa thức bằng nhau. Chúng ta thường gặp tình huống: hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ thỏa mãn
$$P(a_n) = Q(a_n), \ \forall n = 1, 2, \ldots$$
và như thế ta chỉ cần chứng minh tập giá trị của dãy số (a_n) là một số nguyên dương lớn hơn bậc của đa thức $P(x) - Q(x)$ thì ta kết luận được hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ bằng nhau (ta thường chứng minh dãy số (a_n) đơn điệu ngặt).

- ☑ Việc sử dụng dãy số trong phương trình hàm đa thức cũng đã được đề cập ở các bài toán 1 (ở trang 102), 3 (ở trang 102), 4 (ở trang 103).
- ☑ Việc sử dụng giới hạn cũng rất đa dạng nên đòi hỏi sự linh hoạt, chẳng hạn như nếu

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

là đa thức có bậc dương thì

- $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } a_n > 0 \\ -\infty & \text{nếu } a_n < 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{x^n} = a_n;$
- $\lim\limits_{x\to\beta} P(x) = P(\beta).$

Bài 1. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ không đồng nhất không và thỏa mãn

$$P(1960) = 1992, \quad P(x) = \sqrt{P(x^2+1) - 33} + 32, \forall x \geq 0.$$

Lời giải

Giả sử $P(x)$ là đa thức thỏa mãn đề bài. Khi đó ta có

$$P(x^2+1) = [P(x) - 32]^2 + 33, \forall x \geq 0.$$

Suy ra $P\left(1960^2+1\right) = (1992-32)^2 + 33 = 1960^2 + 33$. Gọi $x_0 = 1960$, ta có

$$x_0 + 32 = 1992, \ P(x_0) = x_0 + 32 \text{ (do } P(1960) = 1992).$$

Xét dãy $\{x_n\}$ như sau:

$$x_0 = 1960, \ x_1 = x_0^2 + 1, \ \ x_{n+1} = x_n^2 + 1, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Khi đó $P(x_0) = x_0 + 32$ và

$$\begin{aligned} P(x_1) &= P(x_0^2+1) = [P(x_0) - 32]^2 + 33 = x_0^2 + 33 = (x_0^2+1) + 32 = x_1 + 32, \\ P(x_2) &= P(x_1^2+1) = [P(x_1) - 32]^2 + 33 = x_1^2 + 33 = (x_1^2+1) + 32 = x_2 + 32. \end{aligned}$$

Bằng quy nạp ta được

$$P(x_n) = x_n + 32, \forall n = 0, 1, 2, \ldots \tag{*}$$

Vì dãy số $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ là dãy tăng nghiêm ngặt nên từ $(*)$ suy ra $P(x) \equiv x + 32$. Sau khi thử lại ta kết luận: Có duy nhất một đa thức thỏa mãn đề bài là

$$P(x) \equiv x + 32.$$

Bài 2. Cho hai đa thức hệ số thực $P(x)$ và $Q(x)$ thỏa mãn

$$P\left(1 + x + Q(x) + (Q(x))^2\right) = Q\left(1 + x + P(x) + (P(x))^2\right), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh nếu phương trình $P(x) = Q(x)$ có nghiệm thực thì $P(x) \equiv Q(x)$.

Lời giải

Giả sử $a \in \mathbb{R}$ mà $P(a) = Q(a)$. Xét

$$b = 1 + a + Q(a) + (Q(a))^2 = 1 + a + P(a) + (P(a))^2.$$

Từ giả thiết suy ra $P(b) = Q(b)$. Để ý rằng $b = \dfrac{3}{4} + a + \left[Q(a) + \dfrac{1}{2}\right]^2 > a$. Do đó nếu xét dãy số (x_n), với $x_0 = a$ và

$$x_{n+1} = 1 + x_n + Q(x_n) + (Q(x_n))^2, \ \forall n = 0, 1, 2, \ldots$$

thì chứng minh bằng quy nạp theo n theo cách như trên ta có

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$$

và $P(x_i) = Q(x_i), \ \forall i = 0, 1, 2, \ldots$ Từ đó suy ra $P(x) \equiv Q(x)$.

Bài 3. Tìm các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(0) = 0$ và

$$P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1, \ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Lời giải

Ta có $P(0) = 0, \ P(1) = 0^2 + 1, \ P(2) = 1^2 + 1, \ P(5) = 2^2 + 1.$ (2)

Xây dựng dãy số (a_n) như sau: $a_0 = 0$ và $a_{n+1} = a_n^2 + 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Ta có $a_1 = 1 > a_0$. Giả sử $a_{n+1} > a_n$. Do $a_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $a_{n+1}^2 > a_n^2$, dẫn tới

$$a_{n+2} = a_{n+1}^2 + 1 > a_n^2 + 1 = a_{n+1}.$$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra dãy (a_n) tăng thực sự, do đó dãy (a_n) gồm vô số số hạng phân biệt. Do (2) nên

$$P(a_0) = a_0, \ P(a_1) = a_1, \ P(a_2) = a_2.$$

Giả sử $P(a_k) = a_k \ (k \in \mathbb{N})$. Khi đó sử dụng (1) ta được

$$P(a_{k+1}) = P(a_k^2 + 1) = (P(a_k))^2 + 1 = a_k^2 + 1 = a_{k+1}.$$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra $P(a_n) = a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Xét đa thức hệ số thực

$$Q(x) = P(x) - x.$$

Do $P(a_n) = a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$ nên $Q(x)$ nhận a_n làm nghiệm với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vì dãy (a_n) gồm vô số số hạng phân biệt nên suy ra $Q(x) \equiv 0$ hay $P(x) \equiv x$. Thử lại thấy đúng. Vậy có duy nhất một đa thức thỏa mãn các yêu cầu đề bài, đó là $P(x) \equiv x$.

Bài 4. Tìm tất cả các đa thức bậc lẻ $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn:

$$P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1, \ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Lời giải

Trong (1) thay x bởi $-x$ được $P(x^2 + 1) = (P(-x))^2 + 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P^2(x) = P^2(-x), \ \forall x \in \mathbb{R}$, hay

$$[P(x) - P(-x)]\,[P(x) + P(-x)] = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Từ (3) suy ra ít nhất một trong hai đa thức $P(x) - P(-x)$, $P(x) + P(-x)$ sẽ có vô số nghiệm. Nếu đa thức $P(x) - P(-x)$ có vô số nghiệm thì

$$P(x) = P(-x), \ \forall x \in \mathbb{R};$$

do đó tồn tại đa thức $Q(x)$ sao cho

$$P(x) = Q(x^2), \ \forall x \in \mathbb{R};$$

suy ra $\deg P$ là số chẵn, ta gặp mâu thuẫn. Vậy $P(x) + P(-x)$ có vô số nghiệm. Do đó

$$P(x) + P(-x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (4)$$

Từ (4) cho $x = 0$ ta được $P(0) = 0$. Đến đây sử dụng bài toán 3 ở trang 116 ta được $P(x) \equiv x$.

Bài 5. Tìm các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ có $\deg(P) \geq 1$ và thỏa mãn

$$P(x^2+1) = (P(x))^2 + 1, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải

Trường hợp 1: $P(0) = 0$. Sử dụng bài toán 3 ở trang 116 ta được

$$P(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp 2: $P(0) \neq 0$. Giả sử $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, với $a_0 \neq 0$. Thay vào (1) được

$$\begin{aligned} &\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)^2 + 1 \\ =&a_n\left(x^2+1\right)^n + a_{n-1}\left(x^2+1\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(x^2+1\right) + a_0, \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

So sánh hệ số của x được $2a_0a_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0$. Sau đó so sánh hệ số x^3 được

$$2a_3a_0 + 2a_1a_2 = 0 \Leftrightarrow a_3 = 0 \ \ (\text{do } a_1 = 0).$$

Tiếp tục quá trình này ta được những hệ số của x mũ lẻ bằng 0. Do đó $P(x) = Q(x^2)$, ở đây $Q(t)$ là đa thức. Từ (1) ta có

$$Q\left((x^2+1)^2\right) = P\left(x^2+1\right) = [P(x)]^2 + 1 = \left[Q(x^2)\right]^2 + 1, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Xét đa thức $H(t)$ sao cho $H(t) = Q(t-1)$. Thay vào (2) được

$$H\left((x^2+1)^2+1\right) = \left[H(x^2+1)\right]^2 + 1, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Do tập hợp $\{x^2+1 | x \in \mathbb{R}\}$ có vô số phần tử khác nhau nên từ (3) suy ra

$$H\left(x^2+1\right) - [H(x)]^2 - 1 \equiv 0 \Leftrightarrow H\left(x^2+1\right) = [H(x)]^2 + 1, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Nghĩa là $H(x)$ thỏa điều kiện bài toán và $\deg(H) < \deg(P)$. Nếu $H(0) = 0$ thì theo trên

$$H(x) \equiv x \Rightarrow P(x) \equiv Q(x^2) \equiv H(x^2+1) \equiv x^2+1.$$

Nếu $H(0) \neq 0$ thì tiến hành tương tự như đối với $P(x)$, ta thu được đa thức $H_1(x)$ cũng thỏa mãn yêu cầu đề bài và $\deg(H_1) < \deg(H)$. Dễ thấy quá trình này tiếp tục chỉ hữu hạn bước, nghĩa là đến một thời điểm chắc chắn sẽ đến đa thức x. Suy ra nếu một đa thức $P(x)$ thỏa mãn tính chất (1) thì nó sẽ trùng với một đa thức nào đó trong dãy

$$P_0(x) = x, \ P_1(x) = x^2+1, \ldots, P_{n+1}(x) = P_n(x^2+1), \ldots \tag{5}$$

Ngược lại, ta sẽ chứng minh rằng, mọi đa thức trong dãy trên thỏa mãn điều kiện bài toán.

- Dễ thấy $P_0(x) = x, \ P_1(x) = x^2+1$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.
- Giả sử đa thức $P_i(x)$ $(\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\})$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài, ta sẽ chứng minh rằng $P_{n+1}(x)$ cũng thỏa mãn yêu cầu đề bài. Ta có

  $$P_{n+1}\left(x^2+1\right) \overset{(5)}{=} P_n\left((x^2+1)^2+1\right).$$

  Mà theo giả thiết quy nạp, ta có

  $$P_n\left((x^2+1)^2+1\right) = P_n\left(x^2+1\right)^2 + 1 = P_{n+1}(x)^2 + 1.$$

  Do đó $P_{n+1}\left(x^2+1\right) = P_{n+1}(x)^2 + 1$; nghĩa là đa thức $P_{n+1}(x)$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Như vậy, mọi đa thức trong dãy (5) đều thỏa mãn yêu cầu đề bài. Do đó, tất cả các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài đều được xác định từ dãy (5).

Lưu ý. Ở trường hợp 2, có thể thu được kết quả $P(x) = Q(x^2)$ bằng cách khác như sau. Từ (1) suy ra $P^2(x) = P^2(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}$, hay

$$[P(x) - P(-x)]\,[P(x) + P(-x)] = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ít nhất một trong hai đa thức $P(x) - P(-x)$, $P(x) + P(-x)$ sẽ có vô số nghiệm. Nếu đa thức $P(x) + P(-x)$ có vô số nghiệm thì $P(x) + P(-x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$; suy ra $P(0) = 0$; mâu thuẫn với $P(0) \neq 0$. Vậy đa thức $P(x) - P(-x)$ có vô số nghiệm; cho nên

$$P(x) = P(-x),\ \forall x \in \mathbb{R};$$

do đó tồn tại đa thức $Q(x)$ sao cho

$$P(x) = Q(x^2),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 6 (Cristinel Mortici - Gazeta Matematică).
Tìm tất cả các đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ (với a là số thực và b, c là những số nguyên) thỏa mãn

$$n - 2\sqrt{n} < P\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < n - \sqrt{n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải

Với số nguyên dương n ta có

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}};$$

hay

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}};$$

do đó

$$2\sqrt{n+1} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1. \tag{t1}$$

Do $\lim\limits_{n \to +\infty} (2\sqrt{n+1} - 2) = +\infty$ nên $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$; vì thế từ

$$n - 2\sqrt{n} < P\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

cho $n \to +\infty$ ta được

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty \Rightarrow a > 0.$$

Do $a > 0$, $\deg P = 2$ nên hàm số $P(x)$ tăng nghiêm ngặt trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$. Tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho

$$-\frac{b}{2a} < 2\sqrt{n+1} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1,\ \forall n \geq n_0.$$

Do đó

$$P(2\sqrt{n+1} - 2) < P\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < P(2\sqrt{n} - 1),\ \forall n \geq n_0.$$

Với số nguyên dương $n \geq n_0$, kết hợp với giả thiết, ta có

$$P(2\sqrt{n}-1) > n - 2\sqrt{n}, \quad P(2\sqrt{n+1}-2) < n - \sqrt{n}$$

Từ

$$\begin{aligned} 0 < P(2\sqrt{n}-1) - (n-2\sqrt{n}) &= a\left(2\sqrt{n}-1\right)^2 + b\left(2\sqrt{n}-1\right) + c - (n-2\sqrt{n}) \\ &= a\left(4n - 4\sqrt{n}+1\right) + b\left(2\sqrt{n}-1\right) + c - (n-2\sqrt{n}) \\ &= (4a-1)\,n + (2b-4a+2)\sqrt{n} + a - b + c, \ \forall n \geq n_0; \end{aligned} \tag{1}$$

cho $n \to +\infty$, suy ra $a \geq \dfrac{1}{4}$. Từ

$$\begin{aligned} 0 > P(2\sqrt{n+1}-2) - (n-\sqrt{n}) &= a\left(2\sqrt{n+1}-2\right)^2 + b\left(2\sqrt{n+1}-2\right) + c - (n-\sqrt{n}) \\ &= a\left(4n+4-8\sqrt{n+1}+4\right) + 2b\sqrt{n+1} - 2b + c - n + \sqrt{n} \\ &= (4a-1)\,n + (2b-8a)\sqrt{n+1} + \sqrt{n} + 8a - 2b + c, \ \forall n \geq n_0; \end{aligned} \tag{2}$$

cho $n \to +\infty$, suy ra $a \leq \dfrac{1}{4}$. Vậy $a = \dfrac{1}{4}$. Lúc này (1) trở thành

$$0 < (2b+1)\sqrt{n} + \frac{1}{4} - b + c, \forall n \geq n_0. \tag{3}$$

Từ (3) cho $n \to +\infty$ ta suy ra $2b+1 \geq 0 \Leftrightarrow b \geq -\dfrac{1}{2}$.
Do $a = \dfrac{1}{4}$ nên (2) trở thành

$$\begin{aligned} 0 &> (2b-2)\sqrt{n+1} + \sqrt{n} + 1 - 2b + c \\ &= \sqrt{n+1}\left(2b - 2 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1-2b+c}{\sqrt{n+1}}\right), \forall n \geq n_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Nếu $2b-1>0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2b-2+\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1-2b+c}{\sqrt{n+1}}\right) = 2b-1 > 0$ nên

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}\left(2b-2+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}+\frac{1-2b+c}{\sqrt{n+1}}\right)\right) = +\infty;$$

do đó, từ (4) cho $n \to +\infty$ ta nhận được điều vô lý; như vậy $2b-1 \leq 0 \Rightarrow b \leq \dfrac{1}{2}$. Ta có b là số nguyên nên từ $-\dfrac{1}{2} \leq b \leq \dfrac{1}{2}$ suy ra $b = 0$. Cho nên

$$P(x) = \frac{x^2}{4} + c, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cho $x = 1$ ta được

$$-1 < P(1) = \frac{1}{4} + c < 0 \Rightarrow -\frac{5}{4} < c < -\frac{1}{4}.$$

Mà c là số nguyên nên $c = -1$. Do đó

$$P(x) = \frac{x^2}{4} - 1. \tag{5}$$

Sau đây ta sẽ thử lại. Thay (5) vào

$$n - 2\sqrt{n} < P\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < n - \sqrt{n}$$

ta được

$$\begin{aligned}
& n - 2\sqrt{n} < \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{4} - 1 < n - \sqrt{n} \\
\Leftrightarrow & n - 2\sqrt{n} + 1 < \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{4} < n - \sqrt{n} + 1 \\
\Leftrightarrow & 4(\sqrt{n} - 1)^2 < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 < 4\left(n - \sqrt{n} + 1\right) \\
\Leftrightarrow & 2\left(\sqrt{n} - 1\right) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n - \sqrt{n} + 1}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Như vậy, để chứng minh đa thức xác định bởi (5) thỏa mãn các yêu cầu đề bài ta cần chứng minh bất đẳng thức (6); do (t1) nên ta chỉ cần chứng minh

$$2\sqrt{n+1} - 2 > 2(\sqrt{n} - 1) \text{ và } 2\sqrt{n} - 1 < 2\sqrt{n - \sqrt{n} + 1}.$$

Mà $2\sqrt{n+1} - 2 > 2(\sqrt{n} - 1)$ là hiển nhiên, còn

$$2\sqrt{n} - 1 < 2\sqrt{n - \sqrt{n} + 1} \Leftrightarrow 4n - 4\sqrt{n} + 1 < 4n - 4\sqrt{n} + 4. \qquad \text{(đúng)}$$

Vậy $P(x) = \dfrac{x^2}{4} - 1$.

Lưu ý. Lời giải bài toán 6 này có nhiều lập luận tương tự như ở lời giải của bài toán 16 (ở trang 138).

B. BÀI TẬP

1. Đề bài

Bài 7. Cho m là số nguyên dương lẻ. Tìm các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn

$$P(2010) = 2016,\ P(x) = \sqrt[m]{P(x^m + 1) - 7} + 6,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 8 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2004).
Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn

$$P(x) - 30 = \sqrt{P(x^2 + 4) - 34} + 2, \forall x \geq 0 \text{ và } P(2004) = 2034.$$

Bài 9. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(0) = 0$ và

$$P(x^3 + x + 1) = P^3(x) + P(x) + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 10. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực thỏa mãn

$$xP(\frac{y}{x}) + yP(\frac{x}{y}) = x + y, \ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Bài 11. Tìm các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn phương trình hàm:

$$P\left(x + P(x)\right) = P(x) + P\left(P(x)\right), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 12 (International Zhautykov Olympiad 2012).
Cho P, Q, R là ba đa thức với hệ số thực sao cho

$$P(Q(x)) + P(R(x)) = c, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng hoặc $P(x)$ là đa thức hằng hoặc $R(x) + Q(x)$ là đa thức hằng.

Bài 13 (Taiwanese Team Selection Test 2012).
Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ và $Q(x)$ thỏa mãn

$$P(P(P(P(x)))) = Q(Q(Q(Q(x)))).$$

Bài 14. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn:

$$P\left(x^3 + 1\right) = [P(x+1)]^3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 15 (TST Bắc Ninh ngày 1 năm học 2019-2020).
Tìm tất cả các đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ và bậc là số tự nhiên lẻ sao cho

$$f\left(x^2 - 1\right) = f^2(x) - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 16. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên không âm và thỏa mãn: với n là số nguyên dương thì $n^{P(n)} \leq P(n)^n$.

Bài 17. Tìm tất cả các đa thức $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho với mỗi số nguyên tố p và với mỗi số nguyên dương n, tồn tại số nguyên tố q và số nguyên dương m thỏa mãn $f(p^n) = q^m$.

Bài 18 (TST trường Phổ thông năng khiếu ĐHQG TPHCM, năm học 2017-2018).
Với mỗi số nguyên $n \notin \{-1, 0, 1\}$, ký hiệu $p(n)$ là ước nguyên tố lớn nhất của n. Gọi F là tập hợp tất cả các đa thức $f(x)$ có hệ số nguyên và thỏa mãn

$$f(n + p(n)) = n + p(f(n))$$

với mọi số nguyên $n > 2017$ và $f(n) \notin \{-1, 0, 1\}$.

(1) Tìm tất cả các đa thức bậc nhất thuộc F.

(2) F có bao nhiêu phần tử?

Bài 19 (Bài toán P186, Tạp chí Pi tháng 6 năm 2018).
Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực, có hệ số tự do dương và thỏa mãn điều kiện: Với mọi số thực x, y, bất đẳng thức

$$\left|y^2 - P(x)\right| \leq 2|x|$$

xảy ra khi và chỉ khi $\left|x^2 - P(y)\right| \leq 2|y|$.

2. Lời giải

Bài 7. Từ giả thiết ta có: $P\left(x^m+1\right)=[P(x)-6]^m+7,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Đặt $P(x)=Q(x)+x+6$ thì ta có $[Q(x)+x]^m=Q(x^m+1)+x^m$ và $Q(2010)=0$. Xét dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=2010$ và $u_{n+1}=u_n^m+1$. Dễ thấy dãy (u_n) tăng nghiêm ngặt, do đó tập hợp $\{u_n|n=1,2,\ldots\}$ có vô hạn phần tử. Mà $Q(u_n)=0,\ \forall n\geq 1$. nên $Q(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, tức là $P(x)=x+6$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 8. Có duy nhất một đa thức thỏa mãn đề bài là $P(x)\equiv x+30$.

Bài 9. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(0)=0$ và

$$P(x^3+x+1)=P^3(x)+P(x)+1,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Xét dãy số (a_n) như sau: $a_0=0$ và $a_{n+1}=a_n^3+a_n+1,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Ta có $a_1=1$, $a_0<a_1$. Giả sử $a_n<a_{n+1}$, khi đó

$$a_{n+2}=a_{n+1}^3+a_{n+1}+1>a_n^3+a_n+1=a_{n+1}.$$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra dãy (a_n) là dãy số tăng nghiêm ngặt, do đó tập hợp $\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$ có vô hạn phần tử. Ta có $P(0)=0\Rightarrow P(a_0)=a_0$. Giả sử $P(a_n)=a_n$ (với $n\in\mathbb{N}$), khi đó

$$P(a_{n+1})=P\left(a_n^3+a_n+1\right)\overset{\text{theo (1)}}{=}P^3(a_n)+P(a_n)+1=a_n^3+a_n+1=a_{n+1}.$$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra $P(a_n)=a_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Kết hợp với tập hợp $\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$ có vô hạn phần tử suy ra đa thức $P(x)-x$ có vô số nghiệm, dẫn tới

$$P(x)-x\equiv 0\Leftrightarrow P(x)\equiv x.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 10. Giả sử tồn tại đa thức hệ số thực thỏa mãn

$$xP(\frac{y}{x})+yP(\frac{x}{y})=x+y,\ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{1}$$

Trong (1) lấy $y=kx$, với $k\neq 0$ và $x\neq 0$ ta được

$$xP(k)+kxP(\frac{1}{k})=x+kx,\ \forall x\neq 0,\ k\neq 0$$
$$\Rightarrow P(k)+kP(\frac{1}{k})=1+k,\ \forall k\neq 0. \tag{2}$$

Đặt $P(k)=Q(k)+1$. Khi đó do (2) nên đa thức Q thỏa mãn

$$Q(k)+1+k\left[Q(\frac{1}{k})+1\right]=1+k,\ \forall k\neq 0$$
$$\Rightarrow Q(k)+kQ(\frac{1}{k})=0\Rightarrow\frac{Q(k)}{k}=-Q(\frac{1}{k}),\ \forall k\neq 0. \tag{3}$$

- ☑ Nếu $\deg(Q)\geq 2$ thì từ (3) cho $k\to+\infty$ ta được $\dfrac{Q(k)}{k}\to\pm\infty$, trong khi đó

  $$-Q(\frac{1}{k})\to -Q(0)\ \text{(do đa thức } Q \text{ là hàm liên tục)},$$

  đến đây ta gặp mâu thuẫn.

☑ Vậy $\deg(Q) \le 1$, suy ra $P(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}
&x\left(\frac{ay}{x}+b\right)+y\left(\frac{ax}{y}+b\right)=x+y,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\\
\Leftrightarrow &ay+bx+ax+by=x+y,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\\
\Leftrightarrow &(a+b)(x+y)=x+y,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\\
\Leftrightarrow &a+b=1 \Leftrightarrow b=1-a.
\end{aligned}$$

Tất cả các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài đều có dạng

$$P(x) = ax + 1 - a,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ (trong đó } a \text{ là hằng số tùy ý).}$$

Bài 11. Giả sử tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn phương trình hàm:

$$P\left(x+P(x)\right) = P(x) + P\left(P(x)\right),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giả sử $a_n > 0$. Xét trường hợp $\deg(P) = n \ge 3$. Giả sử

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0.$$

Ta có $P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$. Do

$$\lim_{x\to+\infty}\left[P'(x) - x\right] = +\infty \ \ (\text{vì } n \ge 3,\ na_n > 0)$$

nên tồn tại n_0 sao cho với mọi $x > n_0$ thì $P'(x) > x$. Lại có

$$\lim_{x\to+\infty} P''(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots + 2a_2\right] = +\infty$$

nên tồn tại n_1 sao cho với mọi $x > n_1$ thì $P''(x) > 0$, suy ra $P'(x)$ đồng biến trên $(n_1; +\infty)$. Chọn $m = \max\{0, n_0, n_1\}$ và xét $x \in (m; +\infty)$. Từ

$$P(x) = P\left(x + P(x)\right) - P\left(P(x)\right),$$

theo định lí Lagrange, với mọi $x \in (m; +\infty)$, tồn tại $c_x \in (P(x); P(x) + x)$ sao cho

$$P'(c_x) = \frac{P\left(x+P(x)\right) - P\left(P(x)\right)}{P(x) + x - P(x)} \Rightarrow P'(c_x) = \frac{P(x)}{x}.$$

Lại có $P(0) = 0$ nên $a_0 = 0$. Do $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[P(x) - x\right] = +\infty$ và

$$\lim_{x\to+\infty}\left[P'(x) - \frac{P(x)}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k\,(k-1)\,x^{k-1}\right] = +\infty$$

nên tồn tại $m_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $x > m_0$ thì $P(x) > x$, $P'(x) > \dfrac{P(x)}{x}$. Vậy, với mọi $x > \max\{m_0, m\}$, ta có

$$P'(c_x) > P'\left(P(x)\right) > P'(x) > \frac{P(x)}{x},$$

điều này mâu thuẫn với $P'(c_x) = \dfrac{P(x)}{x}$, $\forall x > \max\{m_0, m\}$. Như vậy không thể xảy ra trường hợp $\deg(P) = n \ge 3$. Xét $\deg(P) = 2$. Giả sử

$$P(x) = ax^2 + bx,\ \forall x \in \mathbb{R} \ (\text{do } P(0) = 0).$$

Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&a\left[ax^2+b(x+1)\right]^2+b\left[ax^2+b(x+1)\right]\\ =&ax^2+bx+a\left(ax^2+bx\right)^2+b\left(ax^2+bx\right),\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}\qquad(2)$$

Từ (2) lấy $x=0$ được $ab^2+b^2=0$. Do đang xét $a>0$ nên suy ra $b=0$. Thay vào (2) được:

$$a^3x^4+abx^2=ax^2+a^3x^4+abx^2,\forall x\in\mathbb{R}\ (\text{vô lí}).$$

Tương tự, với $a_n<0$ thì cũng suy ra vô lí nếu $\deg(P)\geq 2$. Vậy xét $\deg(P)=1$. Giả sử $P(x)=ax,\ \forall x\in\mathbb{R}$, a là hằng số, thay vào (1) thấy thỏa mãn. Nếu $P(x)$ là đa thức hằng thì thay vào (1) được $P(x)\equiv 0$. Tóm lại các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là $P(x)=ax,\ \forall x\in\mathbb{R}$, a là hằng số tùy ý.

Bài 12. Ta có $P(Q(x))+P(R(x))=c,\forall x\in\mathbb{R}$. (1)

Cách 1. Giả sử $P(x)$ khác đa thức hằng. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $P(x)$ monic. Khi đó

$$P(x)=x^k+c_{k-1}x^{k-1}+\cdots+c_0.$$

Do $P(Q(x))+P(R(x))=c$ nên hai đa thức $P(Q(x))$ và $P(R(x))$ có cùng bậc, suy ra hai đa thức $R(x)$ và $Q(x)$ cùng bậc. Ta giả sử

$$R(x)=a_dx^d+\cdots+a_0,\quad Q(x)=b_dx^d+\cdots+b_0.$$

Khi đó, thay vào (1) ta suy ra $a_d^k+b_d^k=0$. Do đó k là số lẻ và $a_d+b_d=0$. Tiếp tục thay vào (1) ta thu được

$$\begin{aligned}&Q(x)^k+c_{k-1}Q(x)^{k-1}+\cdots+c_0+\left(R(x)^k+c_{k-1}R(x)^{k-1}+\cdots+c_0\right)=c\\ \Leftrightarrow&Q(x)^k+R(x)^k=-c_{k-1}\left(Q(x)^{k-1}+R(x)^{k-1}\right)-\cdots+c-2c_0\\ \Leftrightarrow&\left(R(x)+Q(x)\right)\left(R(x)^{k-1}-\cdots+Q(x)^{k-2}\right)=-c_{k-1}\left(Q(x)^{k-1}+R(x)^{k-1}\right)-\cdots\end{aligned}\qquad(2)$$

Đa thức ở vế phải của (2) có bậc nhỏ hơn hoặc bằng $d(k-1)$, đa thức

$$R(x)^{k-1}-\cdots+Q(x)^{k-1}$$

có bậc là $d(k-1)$ và hệ số dẫn đầu là ka_d^{k-1}. Do đó $R(x)+Q(x)$ là đa thức hằng.

Cách 2. Dễ thấy, nếu $P(x)=d$ là đa thức hằng thì thay vào (1) ta được

$$2d=c\Leftrightarrow d=\frac{c}{2}.$$

Vậy đa thức hằng $P(x)=\dfrac{c}{2}$ thỏa mãn (1). Bây giờ ta giả sử $\deg P\geq 1$. Ta có các nhận xét sau:

(1) Nếu Q là đa thức hằng thì R là đa thức hằng và ngược lại (thật vậy, nếu $Q(x)=d$ thì $P\left(R(x)\right)=e$, mà $\deg P\geq 1$ nên R phải là đa thức hằng, vì nếu $\deg R>1$ thì dẫn tới P là đa thức hằng và ta gặp mâu thuẫn), nên không giảm tính tổng quát ta giả sử $\deg Q>0$ và $\deg R>0$. Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}Q(x)=\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}R(x)=\infty$.

(2) $\deg Q=\deg R\geq 1$ và $\deg P=n$ là số lẻ, đồng thời $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{Q(x)}{R(x)}=-1$.

(3) Đặt $T = 1 + \frac{R(x)}{Q(x)} + \frac{R^2(x)}{Q^2(x)} + \cdots + \frac{R^{n-1}(x)}{Q^{n-1}(x)}$ thì $\lim_{x\to+\infty} T = 1$ (để ý $n-1$ chẵn).

(4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x) - a_n x^n}{x^{n-1}}$ tồn tại và hữu hạn và đặt bằng b (ở đây a_n là hệ số bậc cao nhất của đa thức $P(x)$).

Từ giả thiết ta có:

$$P(Q(x)) - a_n Q^n(x) + P(R(x)) - a_n R^n(x) = c - a_n(Q^n(x) + R^n(x)).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&\frac{P(Q(x)) - a_n Q^n(x)}{Q^{n-1}(x)} + \frac{P(R(x)) - a_n R^n(x)}{R^{n-1}(x)} . \frac{R^{n-1}(x)}{Q^{n-1}(x)}\\ =&\frac{c}{Q^{n-1}(x)} - a_n(Q(x) + R(x))T.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}&Q(x) + R(x)\\ =& -\frac{P(Q(x)) - a_n Q^n(x)}{a_n T Q^{n-1}(x)} - \frac{P(R(x)) - a_n R^n(x)}{a_n T R^{n-1}(x)} . \frac{R^{n-1}(x)}{Q^{n-1}(x)} + \frac{c}{a_n T Q^{n-1}(x)}.\end{aligned}$$

Lấy giới hạn hai vế khi cho $x \to +\infty$, ta được $\lim_{x\to+\infty}(Q(x) + R(x)) = -\frac{2b}{a_n}$.
Hay $Q(x) + R(x)$ là đa thức hằng. Vậy ta có điều phải chứng minh.
Cách 3. Giả sử $P(x)$ khác hằng. Khi đó $\deg P(x) = k$ là số lẻ và hệ số dẫn đầu của $Q(x)$ và $R(x)$ là hai số đối nhau. Theo định lý **??** (ở trang **??**), ta có

$$\lim_{|x|\to+\infty} (\sqrt[k]{|P(Q(x))|} - a|Q(x) + b|) = 0$$

và

$$\lim_{|x|\to+\infty} (\sqrt[k]{|P(R(x))|} - a|R(x) + b|) = 0.$$

Do đó

$$\lim_{|x|\to+\infty} (|Q(x) + b| - |R(x) + b|) = 0. \tag{*}$$

Mà hệ số dẫn đầu của $Q(x)$ và $R(x)$ là hai số đối nhau nên $Q(x)$ và $R(x)$ trái dấu khi x đủ lớn.
Do đó từ $(*)$ suy ra

$$\lim_{|x|\to\infty} (Q(x) + R(x)) = \pm 2b,$$

suy ra $Q(x) + R(x)$ là đa thức hằng.

Bài 13. Dễ thấy, nếu $P(x) = \alpha$ (α là hằng số) thì $Q(x) = \alpha$) và ngược lại.
Giả sử $\deg P \geq 1$. Khi đó $\deg Q = \deg P \geq 1$.
Trường hợp $P(x) = ax + b$. Khi đó $Q(x) = cx + d$.
Ta có

$$\begin{aligned}P(P(x)) &= aP(x) + b = a(ax+b) + b = a^2x + ab + b\\ P(P(P(x))) &= a\left(a^2x + ab + b\right) + b = a^3x + b\left(a^2 + a + 1\right)\\ P(P(P(P(x)))) &= a\left(a^3x + b\left(a^2 + a + 1\right)\right) + b\end{aligned}$$

$$= a^4x + b\left(a^3 + a^2 + a\right) + b$$

Do đó

$$a^4x + b\left(a^3 + a^2 + a + 1\right) = c^4x + d\left(c^3 + c^2 + c + 1\right).$$

Dẫn đến

$$\begin{cases} b\left(a^3 + a^2 + a + 1\right) = d\left(c^3 + c^2 + c + 1\right) \\ a^4 = c^4. \end{cases}$$

- Nếu $a = c$ thì $b = d \Rightarrow P(x) = Q(x)$.
- Nếu $a = 1$ và $c = -1$ thì $4b = 0d \Rightarrow b = 0$, suy ra $P(x) = x, Q(x) = -x + d$.
- Nếu $a = -1$ và $c = 1$ thì $d = 0$, suy ra $P(x) = -x + b$, $Q(x) = x$.
- Nếu $a = -c$ và $a, c \notin \{1, -1\}$ thì

$$\frac{b(a^4-1)}{a-1} = \frac{d(c^4-1)}{c-1} \Rightarrow \frac{b}{a-1} = \frac{d}{c-1} \Rightarrow \frac{b}{a-1} = \frac{-d}{a+1}$$
$$\Rightarrow d = \frac{(a+1)b}{1-a}.$$

  Do đó $P(x) = ax + b, Q(x) = -ax + \dfrac{(a+1)b}{1-a}$.

Tiếp theo ta xét trường hợp $\deg P \geq 2$.
Đặt $P(P(x)) = f(x)$ và $Q(Q(x)) = g(x)$. Khi đó $f(f(x)) = g(g(x))$. Theo bài toán **??** (ở trang **??**), ta có $f(x) = g(x)$ hoặc $f(x) + g(x) = C$ (C là hằng số).

a) Trường hợp $f(x) = g(x)$. Khi đó $P(P(x)) = Q(Q(x))$. Theo bài toán **??** (ở trang **??**), ta có $P(x) = Q(x)$ hoặc $P(x) + Q(x) = D$ (với D là hằng số). Ta xét khả năng $P(x) + Q(x) = D$. Khi đó $P(x) = D - Q(x)$; cho nên

$$Q\left(Q(x)\right) = P\left(P(x)\right) = D - Q\left(P(x)\right) = D - Q\left(D - Q(x)\right).$$

Mà tập hợp $\{Q(x) | x \in \mathbb{R}\}$ có vô hạn phần tử nên suy ra

$$\begin{aligned}
& Q(x) + Q\left(D - x\right) = D, \ \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & Q(x) - \frac{D}{2} + Q\left(D - x\right) - \frac{D}{2} = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & R(x) + R(D - x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} && \left(\text{với } R(x) = Q(x) - \frac{D}{2} \in \mathbb{R}\left[x\right]\right) \\
\Leftrightarrow & R\left(x + \frac{D}{2}\right) + R\left(-x + \frac{D}{2}\right) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow & H(-x) = -H(x), \ \forall x \in \mathbb{R} && \left(\text{với } H(x) = R\left(x + \frac{D}{2}\right) \in \mathbb{R}\left[x\right]\right) \\
\Leftrightarrow & H(x) = xT\left(x^2\right), \ \forall x \in \mathbb{R} && \left(\text{với } T(x) \in \mathbb{R}\left[x\right]\right)
\end{aligned}$$

Vậy

$$Q(x) = R(x) + \frac{D}{2} = H\left(x - \frac{D}{2}\right) + \frac{D}{2} = \frac{D}{2} + \left(x - \frac{D}{2}\right) T\left(\left(x - \frac{D}{2}\right)^2\right).$$

$$P(x) = D - Q(x) = \frac{D}{2} - \left(x - \frac{D}{2}\right) T\left(\left(x - \frac{D}{2}\right)^2\right)$$

với $T(x)$ là đa thức hệ số thực.

b) Trường hợp $f(x)+g(x)=C$. Khi đó $P(P(x))+Q(Q(x))=C$. (t1)
Tương tự như trên, từ $f(f(x))=g(g(x))$ và $f(x)+g(x)=C$, ta thu được

$$P\left(P(x)\right)=f(x)=\frac{C}{2}+\left(x-\frac{C}{2}\right)T\left(\left(x-\frac{C}{2}\right)^2\right), \tag{t2}$$

với $T(x)\in\mathbb{R}[x]$. Do đa thức ở vế phải của (t2) có bậc lẻ nên từ (t2) suy ra bậc của $P(P(x))$ là số lẻ, suy ra bậc d của đa thức $P(x)$ là số lẻ. Gọi a_d là hệ số dẫn đầu của $P(x)$. Khi đó hệ số dẫn đầu của $P(P(x))$ là a_d^{d+1}, là một số nguyên dương. Lập luận tương tự, ta suy ra hệ số dẫn đầu của $Q(Q(x))$ cũng là một số nguyên dương. Do đó $P(P(x))+Q(Q(x))$ là đa thức có bậc dương, điều này mâu thuẫn với (t1).

Vậy các đa thức $P(x)$, $Q(x)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài bao gồm

- ☑ $P(x)=N(x)$ và $Q(x)=N(x)$; với $N(x)$ là đa thức hệ số thực.
- ☑ $P(x)=ax+b$ và $Q(x)=-ax+\dfrac{(a+1)b}{1-a}$ với a là hằng số khác 1.
- ☑ $P(x)=\dfrac{D}{2}-\left(x-\dfrac{D}{2}\right)T\left(\left(x-\dfrac{D}{2}\right)^2\right)$ và $Q(x)=\dfrac{D}{2}+\left(x-\dfrac{D}{2}\right)T\left(\left(x-\dfrac{D}{2}\right)^2\right)$ với $T(x)$ là đa thức hệ số thực.

Bài 14. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn:

$$P\left(x^3+1\right)=\left[P(x+1)\right]^3,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Cách 1. Dễ thấy các đa thức hằng thỏa mãn yêu cầu đề bài là $P(x)\equiv 0$, $P(x)\equiv 1$, $P(x)\equiv -1$. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ có $\deg(P)=k\geq 1$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Đặt:

$$P(x+1)=Q(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_k\neq 0).$$

Do (1) nên đa thức $Q(x)$ thỏa mãn:

$$\begin{aligned}&Q(x^3)=[Q(x)]^3,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &a_kx^{3k}+a_{k-1}x^{3k-3}+\cdots+a_1x^3+a_0\\ =&\left(a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0\right)^3,\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2}$$

Giả sử tồn tại $a_m\in\{a_0;a_1;\ldots;a_{k-1}\}$ sao cho $a_m\neq 0$ và

$$a_i=0,\ \forall i=m+1,m+2,\ldots,k-1.$$

Do $m<k$ nên $3m<2k+m$, từ đó đồng nhất hệ số của x^{2k+m} ở hai vế của (2), ta được: $3a_k^2a_m=0$, đến đây ta gặp mâu thuẫn. Vậy $a_j=0$, $\forall j=0,1,\ldots,k-1$. Suy ra

$$Q(x)=a_kx^k,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

và (2) trở thành:

$$\begin{aligned}&a_kx^{3k}=a_k^3x^{3k},\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &a_k=a_k^3\Leftrightarrow a_k\in\{1;-1\}\ (\text{do } a_k\neq 0).\end{aligned}$$

Vậy $P(x) = Q(x-1) = \pm(x-1)^k, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.
Kết luận: các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x) \equiv 0,\ P(x) \equiv 1,\ P(x) \equiv -1,\ P(x) \equiv (x-1)^k,\ P(x) \equiv -(x-1)^k.$$

Cách 2. Dễ thấy các đa thức hằng thỏa mãn yêu cầu đề bài là $P(x) \equiv 0, P(x) \equiv 1, P(x) \equiv -1$. Giả sử tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ có $\deg(P) = k \geq 1$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Từ (1) suy ra:

$$\begin{aligned} P\left(3^{3^n}+1\right) &= \left[P\left(3^{3^{n-1}}+1\right)\right]^3 = \left[P\left(3^{3^{n-2}}+1\right)\right]^{3^2} \\ &= \cdots = \left[P\left(3^{3^0}+1\right)\right]^{3^n} = [P(4)]^{3^n},\ \forall n = 1,2,\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Đặt $P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0\ (a_k \neq 0)$. Khi đó:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{a_k x^k} = \frac{a_k}{a_k} = 1.$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n\to+\infty} \frac{P\left(3^{3^n}+1\right)}{a_k(3^{3^n}+1)^k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{[P(4)]^{3^n}}{a_k(3^{3^n}+1)^k} = \frac{1}{a_k}\lim_{n\to+\infty} \frac{[P(4)]^{3^n}}{(3^{3^n}+1)^k} \\ &= \frac{1}{a_k}\lim_{n\to+\infty} \frac{[P(4)]^{3^n}}{(3^{3^n})^k} = \frac{1}{a_k}\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{P(4)}{3^k}\right)^{3^n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Từ (1), đồng nhất hệ số của x^{3k} ở hai vế, ta được $a_k = \pm 1$.
Như thế (4) trở thành

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{P(4)}{3^k}\right)^{3^n} = \pm 1 \Rightarrow \frac{P(4)}{3^k} = \pm 1 \Rightarrow P(4) = \pm 3^k. \tag{5}$$

Thay (5) vào (3) thu được:

$$\begin{aligned} & P\left(3^{3^n}+1\right) = \left(\pm 3^k\right)^{3^n},\ \forall n = 1,2,\ldots \\ \Leftrightarrow & P\left(3^{3^n}+1\right) = \pm\left(3^k\right)^{3^n},\ \forall n = 1,2,\ldots \\ \Leftrightarrow & P\left(3^{3^n}+1\right) = \pm\left(3^{3^n}\right)^k,\ \forall n = 1,2,\ldots \\ \Rightarrow & P(x) = \pm(x-1)^k,\ \forall x = 3^{3^n}+1,\ n = 1,2,\ldots \\ \Rightarrow & P(x) = \pm(x-1)^k,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ & \text{(do dãy số } 3^{3^n}+1,\ n = 1,2,\ldots \text{ có vô số phần tử khác nhau đôi một).} \end{aligned}$$

Thử lại thấy thỏa mãn.
Kết luận: các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x) \equiv 0,\ P(x) \equiv 1,\ P(x) \equiv -1,\ P(x) \equiv (x-1)^k,\ P(x) \equiv -(x-1)^k.$$

Bài 15. Giả sử tồn tại đa thức $f(x)$ với hệ số thực và bậc là số tự nhiên lẻ sao cho

$$f\left(x^2-1\right) = f^2(x) - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Cách 1. Trong (1), thay x bởi $-x$ và đối chiếu với (1), ta được $f^2(x) = f^2(-x)$ với mọi x. Như vậy
$$[f(x) - f(-x)]\,[f(x) + f(-x)] = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$
Từ đây suy ra ít nhất một trong hai đa thức $f(x) - f(-x)$, $f(x) + f(-x)$ sẽ có vô số nghiệm nên nó sẽ là đa thức không. Nếu $f(x) - f(-x)$ có vô số nghiệm thì nó sẽ là đa thức 0, hay với mọi số thực x ta có (chú ý $\deg(f)$ lẻ)

$$\begin{aligned}
&f(x) = f(-x)\\
\Rightarrow\,& a_{2k+1}x^{2k+1} + a_{2k}x^{2k} + \cdots + a_1x + a_0 = -a_{2k+1}x^{2k+1} + a_{2k}x^{2k} - \cdots - a_1x + a_0
\end{aligned}$$

(với $a_{2k+1} \neq 0$), suy ra $a_{2k+1} = -a_{2k+1} \Rightarrow a_{2k+1} = 0$, mâu thuẫn. Vậy đa thức $f(x) + f(-x)$ có vô số nghiệm, hay
$$f(x) + f(-x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$
Hay $f(x) = -f(-x)$ với mọi x. Khi đó dễ thấy tồn tại đa thức $P(x)$ sao cho
$$f(x) = xP(x^2),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$
Thay vào phương trình (1) ta được
$$\left(x^2 - 1\right) P\left(\left(x^2 - 1\right)^2\right) = x^2P^2\left(x^2\right) - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Suy ra đa thức $(x-1)P\left((x-1)^2\right) - \left(xP^2(x) - 1\right)$ có vô số nghiệm nên nó là đa thức không, dẫn tới
$$(x-1)P\left((x-1)^2\right) = xP^2(x) - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Thay x bởi $x+1$, ta được
$$xP\left(x^2\right) = (x+1)P^2(x+1) - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$
Từ đây, dễ dàng suy ra $P(x^2) \geq -\dfrac{1}{x}$ với mọi $x > 0$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng
$$P\left(a_n\right) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \tag{3}$$
trong đó dãy (a_n) được xác định bởi $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n}$.

- ☑ Thay $x = -1$ vào phương trình (2), ta được $P(1) = 1$, do đó (3) đúng với $n = 1$.
- ☑ Giả sử (3) đúng đến $n = k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.
  Thay $x = \sqrt{a_k}$ vào phương trình (2) ta được
  $$(\sqrt{a_k} + 1)P^2\left(a_{k+1}\right) = \sqrt{a_k}P\left(a_k\right) + 1 = \sqrt{a_k} + 1.$$
  Suy ra $P^2\left(a_{k+1}\right) = 1$. Mặt khác, ta lại có
  $$P\left(a_{k+1}\right) \geq -\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{a_k}}} > -1$$
  nên $P\left(a_{k+1}\right) = 1$. Do đó, khẳng định (3) cũng đúng với $n = k+1$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có khẳng định (3) đúng với mọi n nguyên dương. Xét dãy (a_n). Từ công thức xác định của dãy, dễ thấy

$$1 \leq a_n < \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \ \forall n = 1, 2, \dots$$

Ta có

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n = 1 + \sqrt{a_n} - a_n &= \frac{a_n - (a_n - 1)^2}{\sqrt{a_n} + a_n - 1} \\ &= \frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} - a_n\right)\left(a_n - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{a_n} + a_n - 1} > 0, \end{aligned}$$

do đó dãy (a_n) tăng ngặt. Kết hợp với (3) ta suy ra phương trình $P(x) = 1$ có vô số nghiệm thực phân biệt. Do đó $P(x) \equiv 1$ hay $f(x) \equiv x$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Cách 2. Thay x bởi $-x$ ta có $f^2(-x) - 1 = f\left((-x)^2 - 1\right) = f(x^2 - 1) = f^2(x) - 1$.
Suy ra $f^2(-x) = f^2(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$\left[\begin{array}{l} f(-x) = f(x), \forall x \in A \\ f(-x) = -f(x), \ \forall x \in B \end{array}\right.$$

trong đó $A \cup B = \mathbb{R}$. Nếu tập A vô hạn hay phương trình $f(-x) - f(x) = 0$ có vô số nghiệm, mà bậc của f là hữu hạn nên $f(-x) - f(x) \equiv 0 \Rightarrow f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. $(*)$
Lại có $\deg f$ là lẻ nên trong hai giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$ có đúng một giới hạn là $+\infty$ và một giới hạn là $-\infty$, do đó tồn tại x_0 (đủ lớn) sao cho $f(x)$ và $f(-x)$ trái dấu (suy ra không bằng nhau) khi $x > x_0$ điều này mâu thuẫn với $(*)$ nên tập A không thể vô hạn. Suy ra tập B là vô hạn hay phương trình $f(x) + f(-x) = 0$ có vô số nghiệm, mà bậc của f là hữu hạn nên

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cho $x = 0$ ta được $\begin{cases} f(0) = -f(0) \\ f(-1) = f^2(0) - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-1) = -1 \end{cases}$ và $f(1) = 1$.
Xét dãy số $a_0 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$. Dễ thấy $a_n > 1, \forall n \geq 1$.
Ta chứng minh với mọi số tự nhiên n thì $a_{n+1} > a_n$. (i)
Do $a_1 = \sqrt{2} > 1 = a_0$ nên (i) đúng khi $n = 0$. Giả sử (i) đúng đến n $(n \in \mathbb{N})$, suy ra

$$a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1} + 1} > \sqrt{a_n + 1} = a_{n+1}.$$

Vậy (i) đúng với mọi số tự nhiên n.
Bây giờ ta chứng minh với mọi số tự nhiên n thì $f(a_n) = a_n$ $(2i)$
bằng quy nạp. Do $f(a_0) = f(1) = 1 = a_0$ nên $(2i)$ đúng với $n = 0$. Giả sử $f(a_n) = a_n$ ta chứng minh $f(a_{n+1}) = a_{n+1}$. Ta có

$$f^2(a_{n+1}) = 1 + f(a_{n+1}^2 - 1) = 1 + f(a_n) = 1 + a_n = a_{n+1}^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(a_{n+1}) = a_{n+1} \\ f(a_{n+1}) = -a_{n+1}. \end{array}\right.$$

Nếu $f(a_{n+1}) = -a_{n+1}$ thì

$$f^2(a_{n+2}) = 1 + f\left(a_{n+2}^2 - 1\right) = 1 + f(a_{n+1}) = 1 - a_{n+1} < 0,$$

vô lí, do đó $f(a_{n+1}) = a_{n+1}$. Vậy $(2i)$ đúng với mọi số tự nhiên n. Mà theo $(1i)$ thì dãy (a_n) tăng nghiêm ngặt, nên kết hợp với $(2i)$ suy ra phương trình $f(x) = x$ có vô số nghiệm, dẫn tới $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại ta thấy đa thức $f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài toán.

Bài 16. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên không âm và thỏa mãn

$$n^{P(n)} \leq P(n)^n, \ \forall n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Cách 1.

1) Trường hợp $\deg P \geq 2$. Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P(n)}{n} = +\infty$. Từ (1) suy ra

$$n^{P(n)-n} \leq \left(\frac{P(n)}{n}\right)^n, \ \forall n = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow n^{\frac{P(n)}{n}-1} \leq \frac{P(n)}{n}, \ \forall n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Ta có $e^x \geq x + 1, \ \forall x \geq 0$. Tồn tại số nguyên dương n_0 để

$$\frac{P(n)}{n} > 1, \ \forall n \geq n_0.$$

Chọn số nguyên dương $n = 1 + \max\{e, n_0\}$; khi đó

$$n^{\frac{P(n)}{n}-1} > e^{\frac{P(n)}{n}-1} \geq \frac{P(n)}{n};$$

mâu thuẫn với (2).

2) Trường hợp $\deg P = 1$. Giả sử $P(x) = ax + b, \ \forall x \in \mathbb{R}$ với a và b là những số tự nhiên, $a \neq 0$. Thay vào (1) ta được

$$n^{an+b} \leq (an + b)^n, \ \forall n = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow n^{a+\frac{b}{n}} \leq an + b, \ \forall n = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow n^{a+\frac{b}{n}-1} \leq a + \frac{b}{n}, \ \forall n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Nếu $a > 1$ thì $a + \dfrac{b}{n} - 1 > 0$, do đó $n^{a+\frac{b}{n}-1} \to +\infty$ khi $n \to +\infty$; trong khi đó

$$a + \frac{b}{n} \leq a + b, \ \forall n = 1, 2, \ldots;$$

nên từ (3) cho $n \to +\infty$ ta nhận được điều vô lý. Vậy $a = 1$. Lúc này (3) trở thành

$$n^{\frac{b}{n}} \leq 1 + \frac{b}{n}, \ \forall n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Nếu $b > 0$ thì với $n \geq 3$ ta có $n^{\frac{b}{n}} > e^{\frac{b}{n}} \geq \dfrac{b}{n} + 1$, mâu thuẫn với (4). Vậy $b = 0$. Do đó

$$P(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại đúng.

3) Trường hợp $P(x) = c, \ \forall x \in \mathbb{R}$ với c là hằng số tự nhiên. Thay vào (1) ta được

$$n^c \leq c^n, \ \forall n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

$$\Rightarrow n^{\frac{c}{nc}} \leq c^{\frac{n}{nc}}, \ \forall n = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow n^{\frac{1}{n}} \leq c^{\frac{1}{c}}, \ \forall n = 1, 2, \ldots \qquad (6)$$

Xét dãy số (u_n) như sau: $u_n = n^{\frac{1}{n}}, \ \forall n = 1, 2, \ldots$ Do dãy số $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k, k = 1, 2, \ldots$ tăng nghiêm ngặt đến e nên với số nguyên dương $k \geq 3$ ta có

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e < k \Rightarrow \left(\frac{k+1}{k}\right)^k < k \Rightarrow (k+1)^k < k^{k+1} \Rightarrow (k+1)^{\frac{1}{k+1}} < k^{\frac{1}{k}}.$$

Như thế, dãy (u_n) giảm ngặt kể từ số hạng thứ 3. Do đó nếu $c \geq 4$ thì

$$n^{\frac{1}{n}} < c^{\frac{1}{c}}, \ \forall n = c+1, c+2, \ldots;$$

mâu thuẫn với (6). Vậy $c \leq 3$.

- ☑ Nếu $c = 1$ thì thay vào (5) ta được $n \leq 1, \ \forall n = 1, 2, \ldots$; vô lý.
- ☑ Nếu $c = 2$ thì thay vào (5) ta được $n^2 \leq 2^n, \ \forall n = 1, 2, \ldots$; suy ra $3^2 \leq 2^3$; vô lý.
- ☑ Nếu $c = 3$ thì thay vào (5) ta được $n^3 \leq 3^n, \ \forall n = 1, 2, \ldots$ (7)
  Ta sẽ chứng minh (7) đúng.
  - Nếu $n = 1$ thì $n^3 < 3^n$.
  - Nếu $n = 2$ thì $n^3 < 3^n$.
  - Nếu $n = 3$ thì $n^3 = 3^n$.
  - Giả sử $m^3 \leq 3^m$ với $m \geq 3$ là số nguyên. (8)
    Do $m \geq 3$ nên
    $$\frac{(m+1)^3}{m^3} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^3 = 1 + \frac{3}{m} + \frac{3}{m^2} + \frac{1}{m^3} \leq 1 + 1 + \frac{3}{9} + \frac{1}{27} < 3$$
    suy ra $(m+1)^3 < 3m^3$. Do đó
    $$3^{m+1} = 3^m \cdot 3 \overset{(8)}{\geq} 3m^3 > (m+1)^3.$$
    Theo nguyên lý quy nạp, ta có $n^3 \leq 3^n, \ \forall n = 1, 2, \ldots$

  Vậy đa thức $P(x) = 3$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài bao gồm $P(x) = x$, $P(x) = 3$.
Cách 2. Ta chứng minh được $n^3 \leq 3^n, \ \forall n = 1, 2, \ldots$ (7)
dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $n = 3$ (chứng minh đã được trình bày ở cách 1).
Do (1) nên $3^{P(3)} \leq P(3)^3$.
Theo (7) thì $P(3)^3 \leqslant 3^{P(3)}$.
Suy ra $P(3)^3 = 3^{P(3)}$. Mà dấu "=" ở (7) xảy ra khi và chỉ khi $n = 3$ nên ta được $P(3) = 3$. Đặt $\deg P(x) = d$. Ta có

$$3 = P(3) \geq 3^d.$$

Do đó $d \in \{0, 1\}$.

1) Trường hợp $d = 1$. Khi đó $P(x) = ax + b, \ \forall x \in \mathbb{R}$ với a và b là những số tự nhiên, $a \neq 0$. Ta có
$$3 = P(3) = 3a + b \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0. \end{cases}$$
Vậy $P(x) = x$.

2) Trường hợp $d = 0$. Khi đó $P(x) = c,\ \forall x \in \mathbb{R}$ với c là hằng số tự nhiên. Do $P(3) = 3$ nên $c = 3$. Vậy $P(x) = 3$.

Các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài bao gồm $P(x) = x$, $P(x) = 3$.

Bài 17. Giả sử $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn điều kiện bài toán. Hiển nhiên $f(x) \not\equiv 0$. Gọi d là bậc của $f(x)$. Nếu $d = 0$, trong trường hợp này đa thức $f(x)$ là lũy thừa của một số nguyên tố với số mũ nguyên dương tùy ý. Tiếp theo ta giả sử $d \geq 1$. Lấy p là một số nguyên tố bất kì, theo giả thiết tồn tại số nguyên tố q và số nguyên dương m sao cho $f(p) = q^m$. Với mọi số tự nhiên k, ta có $p^{k(q-1)+1} - p = p(p^{k(q-1)} - 1)$ chia hết cho $p(p^{q-1} - 1)$. Theo định lí Fermat nhỏ, $p(p^{q-1} - 1) = p^q - p$ chia hết cho q. Mặt khác theo định lí Bézout

$$p^{k(q-1)+1} - p \mid f(p^{k(q-1)+1}) - f(p).$$

Từ đó ta nhận được $q \mid f(p^{k(q-1)+1}) - f(p)$, dẫn đến $q \mid f(p^{k(q-1)+1})$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Kết hợp điều này với giả thiết, ta suy ra tồn tại số nguyên dương m_k sao cho

$$f(p^{k(q-1)+1}) = q^{m_k},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mặt khác, ta thấy

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{f(p^{(k+1)(q-1)+1})}{(p^{(k+1)(q-1)+1})^d} = \lim_{k\to+\infty} \frac{f(p^{k(q-1)+1})}{(p^{k(q-1)+1})^d} = a_d,$$

với a_d là hệ số bậc cao nhất của $f(x)$. Do đó

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\dfrac{f(p^{(k+1)(q-1)+1})}{(p^{(k+1)(q-1)+1})^d}}{\dfrac{f(p^{k(q-1)+1})}{(p^{k(q-1)+1})^d}} = \frac{\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{f(p^{(k+1)(q-1)+1})}{(p^{(k+1)(q-1)+1})^d}}{\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{f(p^{k(q-1)+1})}{(p^{k(q-1)+1})^d}} = \frac{a_d}{a_d} = 1.$$

Vậy $p^{(q-1)d} = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{f(p^{(k+1)(q-1)+1})}{f(p^{k(q-1)+1})} = \lim\limits_{k\to+\infty} q^{m_{k+1}-m_k}$. Từ đây, tồn tại số nguyên dương k_0 và số nguyên M sao cho $m_{k+1} - m_k = M$ với mọi số nguyên dương $k \geq k_0$. Do đó $p^{(q-1)d} = q^M$. Điều này dẫn đến $q = p$. Nói cách khác, ta đã chứng minh được rằng với mỗi số nguyên tố p tồn tại số nguyên dương M_p sao cho $f(p) = p^{M_p}$. Gọi $(p_k)_{k\geq 1}$ là dãy tất cả các số nguyên tố theo thứ tự tăng dần bắt đầu từ p_1. Do tập hợp các số nguyên tố là vô hạn nên $\lim\limits_{k\to+\infty} p_k = +\infty$, từ đó

$$a_d = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^d} = \lim_{k\to+\infty} \frac{f(p_k)}{p_k^d} = \lim_{k\to+\infty} p_k^{M_{p_k}-d}.$$

Nói riêng a_d là số nguyên không âm và do đó $a_d \geq 1$ (vì $a_d \neq 0$). Vậy tồn tại số nguyên dương k_1 sao cho với mọi số nguyên dương $k \geq k_1$ ta có $M_{p_k} - d \geq 0$. Nói cách khác, dãy $(p_k^{M_{p_k}-d})_{k\geq k_1}$ là dãy số tự nhiên có giới hạn là a_d. Như thế, tồn tại số nguyên dương $k_2 \geq k_1$ sao cho $p_k^{M_{p_k}-d} = a_d$ với mọi số nguyên dương $k \geq k_2$. Điều này rõ ràng chỉ xảy ra khi $M_{p_k} - d = 0$ (khi đó $a_d = 1$). Nghĩa là,

$$f(p_k) = p_k^{M_{p_k}} = p_k^d,\ \forall k \geq k_2.$$

Từ đây ta suy ra $f(x) = x^d$ và dễ thấy khi đó $f(x)$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = q^m$ với q là số nguyên tố và m là số nguyên dương và $f(x) = x^d$ với d là số nguyên dương.

Bài 18. Trước hết, ta thấy rằng các đa thức hằng $f(n) \equiv 0$, $f(n) \equiv 1$, $f(n) \equiv -1$ thỏa mãn bài toán vì không có ràng buộc ở đề bài cho các giá trị này. Ta thấy rằng có hữu hạn giá trị $n > 2017$ để $f(n) \in \{0, 1, -1\}$ nên có vô hạn giá trị $n > 2017$ để $f(n) \notin \{0, 1, -1\}$, vì thế nên trong lập luận bên dưới, ta chỉ xét các giá trị n để $f(n) \notin \{0, 1, -1\}$. Ta có nhận xét rằng với mọi n nguyên và $|n| \geq 2$ thì $2 \leq p(n) \leq |n|$ và đẳng thức ở bất đẳng thức thứ hai xảy ra khi và chỉ khi n nguyên tố. Trong đẳng thức đã cho, thay $n = q > 2017$ là số nguyên tố, ta có

$$f(q + p(q)) = q + p(f(q)) \Leftrightarrow \ f(2q) = q + p(f(q)). \qquad (*)$$

Suy ra $f(2q) > q$ với mọi $q > 2017$ là số nguyên tố. Do đó, $f(n)$ không thể là đa thức hằng (khác $0, 1, -1$) và trong trường hợp $\deg f > 0$, bậc cao nhất của f cũng không thể âm (nếu không thì tồn tại q đủ lớn để $f(2q) < 0$, mâu thuẫn). Cũng từ đẳng thức trên, ta có

$$f(2q) \leq q + f(q), \ \text{ với mọi số nguyên tố } q > 2017.$$

(1) Nếu $\deg f = 1$, đặt $f(n) = an + b$ với $a \neq 0$. Bất đẳng thức ở trên đưa về

$$2aq + b \leq q + aq + b \Leftrightarrow aq \leq q \Leftrightarrow a \leq 1.$$

Theo nhận xét ở trên thì $a > 0$ nên $a = 1$ hay $f(n) = n + b$. Thay vào (*), ta có

$$2q + b = q + p(q + b) \Leftrightarrow q + b = p(q + b).$$

Từ đây suy ra $q + b$ là số nguyên tố. Chú ý rằng ta chọn được q đủ lớn để $q + b > 2017$ nên áp dụng lập luận trên khi thay q bởi $q + b$, ta có $q + 2b$ cũng phải là số nguyên tố. Tương tự như thế, suy ra $q + kb$ là số nguyên tố với k nguyên dương bất kỳ. Chọn $k = q$, ta có $q + qb = q(b + 1)$ phải là số nguyên tố. Điều này chỉ xảy ra khi $b = 0$. Do đó, $f(n) = n$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

(2) Nếu $\deg f = k \geq 2$, theo chứng minh ở trên thì $f(2q) \leq q + f(q)$ và hệ số bậc cao nhất $a > 0$. Chia hai vế cho $(2q)^k$ rồi tính giới hạn khi $q \to +\infty$, ta thấy vế trái tiến tới a trong khi vế phải tiến tới 0. Suy ra $a \leq 0$, điều mâu thuẫn này cho thấy không tồn tại đa thức bậc cao hơn 1 thỏa mãn đề bài. Vậy có tất cả 4 đa thức thỏa mãn đề bài là $f(n) \equiv 0, 1, -1$ và $f(n) = n$ thỏa mãn nên $|F| = 4$.

Lưu ý. Một bài toán tương tự như bài toán 18, nhưng xét ước nguyên tố nhỏ nhất, đó là đề thi của Thổ Nhĩ Kì 2014: *Gọi $d(n)$ là ước nguyên tố nhỏ nhất của số nguyên $n \notin \{0, 1, -1\}$ và ta kí hiệu $d(1) = 0$, $d(-1) = d(0)$. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số nguyên sao cho*

$$P(n + d(n)) = n + d(P(n)).$$

Việc thêm yêu cầu với mọi số nguyên $n > 2017$ vừa là một ràng buộc, vừa là một gợi ý khi đòi hỏi học sinh chỉ xét các số nguyên đủ lớn.

Bài 19. Giả sử $P(x)$ là đa thức thỏa mãn các yêu cầu của đề bài. Trước hết, ta chứng minh $P(x)$ là một hàm số chẵn. Từ giả thiết của bài ra, ta có, với mọi số thực x, y thì:

$$\begin{aligned} \left|y^2 - P(x)\right| \leq 2|x| &\Leftrightarrow \left|x^2 - P(y)\right| \leq 2|y| \\ &\Leftrightarrow \left|y^2 - P(-x)\right| \leq 2|x|, \\ &\Leftrightarrow P(x) - 2|x| \leq y^2 \leq P(x) + 2|x| \\ &\Leftrightarrow P(-x) - 2|x| \leq y^2 \leq P(-x) + 2|x|. \end{aligned}$$

Từ đó, do với mọi $t \geqslant 0$ luôn tồn tại $y \in \mathbb{R}$ sao cho $t = y^2$, suy ra với mọi $x \in \mathbb{R}$:

$$\Big[P(x) - 2|x|; P(x) + 2|x|\Big] \cap \mathbb{R}_+ = \Big[P(-x) - 2|x|; P(-x) + 2|x|\Big] \cap \mathbb{R}_+, \qquad (1)$$

trong đó, $\mathbb{R}_+$ ký hiệu tập số thực không âm. Vì $P(0) > 0$ và $P(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hiển nhiên tồn tại vô số số thực x sao cho $P(x) + 2|x| > 0$. Vì thế, từ (1) suy ra tồn tại vô số số thực x sao cho

$$P(x) + 2|x| = P(-x) + 2|x|.$$

Hay $P(x) = P(-x)$ với vô số số thực x. Do P là đa thức nên điều vừa nêu phải đúng với mọi số thực x; do đó, P là một hàm số chẵn. Tiếp theo, ta chứng minh $P(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại t sao cho $P(t) \leqslant 0$. Khi đó, do $P(0) > 0$ và $P(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên sẽ tồn tại s sao cho $P(s) = 0$. Vì $P(x)$ là hàm số liên tục tại $x = s$ nên sẽ tồn tại một khoảng I đủ nhỏ chứa s sao cho với mọi $y \in I$ ta có

$$|P(y)| \leq 2|y|.$$

Do đó với mọi $y \in I$ ta có $\left|0^2 - P(y)\right| \leq 2|y|$. Vì thế, theo giả thiết của bài ra, ta phải có

$$\left|y^2 - P(0)\right| \leq 0, \forall y \in I.$$

Tuy nhiên, điều này rõ ràng là không thể. Mâu thuẫn nhận được cho ta điều muốn chứng minh. Bây giờ, ta sẽ chứng minh P là đa thức bậc hai. Dễ thấy, P không phải là đa thức hằng, vì nếu ngược lại thì khi lấy $x \in \sqrt{P(0)}$ và y đủ lớn, ta sẽ có

$$\left|\left(\sqrt{P(0)}\right)^2 - P(y)\right| \leq 2|y|,$$

trong khi không thể có

$$\left|y^2 - P(\sqrt{P(0)})\right| \leq 2\left|\sqrt{P(0)}\right|$$

khi y đủ lớn, trái với giả thiết của bài ra. Vì $P(x) > 0$ với mọi x thực nên P phải có bậc chẵn. Đặt $n = \deg P$. Giả sử $n \geqslant 4$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$ chọn $y = \sqrt{P(x)}$, ta sẽ có

$$\left|\left(\sqrt{P(x)}\right)^2 - P(x)\right| \leq 2|x|.$$

Vì thế theo giả thiết của bài ra, ta phải có

$$\left|x^2 - P\left(\sqrt{P(x)}\right)\right| \leq 2\left|\sqrt{P(x)}\right|, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow P\left(\sqrt{P(x)}\right) \leq x^2 + 2\sqrt{P(x)}, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Vì n là số chẵn và $P(x) > 0$ với mọi x thực nên hệ số cao nhất của $P(x)$ phải là số thực dương. Do đó, từ tính liên tục của $P(x)$ trên $\mathbb{R}$ suy ra tồn tại các hằng số thực dương a, b và số thực dương N_0, sao cho với mọi $x > N_0$ ta có

$$bx^n > P(x) > ax^n. \tag{3}$$

Vì thế, với mọi $x > N_0$, ta có

$$\sqrt{bx^n} > \sqrt{P(x)} > \sqrt{ax^n}. \tag{4}$$

(do $P(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}, n$ chẵn và $a, b > 0$). Vì $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ và $P(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, nên tồn tại số thực dương N_1 sao cho với mọi $x > N_1$, ta có

$$\sqrt{P(x)} > N_0.$$

Chọn $N = \max\{N_0, N_1\}$. Theo (3) và (4), với mọi $x > N_1$, ta có

$$P\left(\sqrt{P(x)}\right) > a\left(\sqrt{P(x)}\right)^n > a\left(\sqrt{ax^n}\right)^n$$

và $x^2+2\sqrt{P(x)} < x^2+2\sqrt{bx^n}$. Kết hợp với (2) suy ra với mọi $x>N$ ta có

$$a\left(\sqrt{ax^n}\right)^n < x^2+2\sqrt{bx^n}. \tag{5}$$

vế trái của (5) là một đa thức với hệ số thực dương và có bậc $\frac{n^2}{2}$; vế phải của (5) là một đa thức với hệ số thực dương và có bậc $\max\{2,\frac{n}{2}\}$. Mà $\frac{n^2}{2} > \max\left\{2,\frac{n}{2}\right\}$ (do $n\geqslant 4$) nên suy ra (5) sẽ là bất đẳng thức sai, với x đủ lớn. Điều này chứng tỏ giả sử $n\geqslant 4$ là sai, và vì thế, phải có $n=2$; nghĩa là, $P(x)$ có dạng

$$P(x)=\alpha x^2+\gamma x+\beta,$$

với $\alpha>0$ (do $P(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, theo chứng minh trên) và $\beta>0$ (theo giả thiết). Vì $P(x)$ phải là hàm số chẵn (theo chứng minh trên), nên phải có

$$\alpha x^2+\gamma x+\beta=\alpha x^2-\gamma x+\beta,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

hay $\gamma x=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó, $\gamma=0$ nghĩa là, $P(x)$ phải có dạng

$$P(x)=\alpha x^2+\beta\ (\text{với } \alpha,\beta>0).$$

Dễ thấy, với x mà $|x|\geq\frac{\beta}{2}$ và với $y=\sqrt{\alpha}x$, ta có:

$$\left|y^2-P(x)\right|\leq 2|x|.$$

Vì thế theo giả thiết của đề bài ra, ta phải có

$$\left|x^2-P(\sqrt{\alpha}x)\right|\leq 2\sqrt{\alpha}|x|$$

với mọi x mà $|x|\geq\frac{\beta}{2}$ hay phải có

$$\left|(1-\alpha)x^2-\beta\right|\leq 2\sqrt{\alpha}|x|$$

với mọi x mà $|x|\geq\frac{\beta}{2}$. Rõ ràng, điều vừa nêu trên chỉ có thể xảy ra khi $\alpha=1$; nghĩa là, chỉ khi $P(x)$ có dạng

$$P(x)=x^2+\beta.$$

Khi đó, áp dụng giả thiết của bài ra cho $y=x+1$, ta được: Với mọi $x\in\mathbb{R}$, phải có

$$\left|(x+1)^2-\left(x^2+\beta\right)\right|\leq 2|x|$$
$$\Leftrightarrow\left|x^2-\left((x+1)^2+\beta\right)\right|\leq 2|x+1|;$$

hay, với mọi $x\in\mathbb{R}$, phải có

$$|2x+1-\beta|\leq 2|x|\Leftrightarrow|2x+1+\beta|\leq 2|x+1|.$$

Suy ra, với mọi $x\geq 0$, phải có

$$1\leq\beta\leq 4x+1\Leftrightarrow -4x-3\leq\beta\leq 1.$$

Rõ ràng, điều nêu trên chỉ có thể xảy ra khi $\beta = 1$. Tóm lại, nếu $P(x)$ là đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài thì

$$P(x) = x^2 + 1.$$

Ngược lại, với đa thức $P(x)$ vừa nêu trên, ta có:

$$\begin{aligned}
&\left|y^2 - P(x)\right| \leq 2|x| \\
\Leftrightarrow &\left|y^2 - x^2 - 1\right| \leq 2|x| \\
\Leftrightarrow &y^4 + x^4 + 1 - 2y^2x^2 - 2y^2 + 2x^2 \leq 4x^2 \\
\Leftrightarrow &y^4 + x^4 + 1 - 2y^2x^2 + 2y^2 - 2x^2 \leq 4y^2 \\
\Leftrightarrow &\left(x^2 - y^2 - 1\right)^2 \leq 4y^2 \Leftrightarrow \left(x^2 - P(y)\right)^2 \leq 4y^2 \\
\Leftrightarrow &\left|x^2 - P(y)\right| \leq 2|y|.
\end{aligned}$$

Vậy, $P(x) = x^2 + 1$ là đa thức duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài.
Lưu ý.

(1) Bài toán 19 đã ra là một bài toán khó. Mặc dù là một bài toán đại số nhưng khi giải bài, cần có tư duy và kiến thức giải tích đủ tốt (lân cận, liên tục, đánh giá tiệm cận), để có thể xử lý các tình huống một cách nhẹ nhàng, không bị sa đà vào các tính toán.

(2) Bài toán gốc của bài toán 19 là bài A5 trong Short List của IMO 2014.

BÀI 8. TOÁN TỔNG HỢP PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC

1. Đề bài

Bài 1. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn:

$$P(0) = 1,\ P(1) = 0,\ P'(0) = 0,\ P'(1) = 1.$$

Bài 2. Tìm tất cả các đa thức hệ số nguyên $P(x)$ thỏa mãn

$$P\left(P'(x)\right) = P'(P(x))$$

với mọi số thực x.

Bài 3 (Ninh Bình TST 2018-2019). Tìm tất cả các đa thức $P(x)$, có các hệ số là các số thực không âm. Biết rằng $P(0) = 0$, $P(1) = 1$ và $P(x) \geq x^{2018}$, với mọi $x \geq 0$.

Bài 4. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn

$$P(x+y) \geq P(x) + (x+1)P(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 5. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn:

$$1 - x^4 \leq P(x) \leq 1 + x^4,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 6. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$, $Q(x)$ thỏa mãn

$$P(x)Q(x+1) - P(x+1)Q(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 7 (TST Hưng Yên năm học 2021-2022).
Tìm các đa thức hệ số thực P, Q và số nguyên dương n thỏa mãn

$$P(x+1)Q\left(x^n\right) - Q(x+1)P\left(x^n\right) = 2021.$$

Bài 8 (Lạng Sơn TST 2018-2019 vòng 1).
Cho đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên, bậc 2 và hệ số bậc 2 bằng 1 thỏa mãn tồn tại đa thức $Q(x)$ có hệ số nguyên sao cho $P(x) \cdot Q(x)$ là đa thức có tất cả các hệ số đều bằng ± 1.

a) Chứng minh rằng nếu đa thức $P(x)$ có nghiệm thực x_0 thì $|x_0| < 2$.

b) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$.

Bài 9 (Bắc Ninh TST 2018-2019 vòng 1).
Tìm tất cả các đa thức hệ số nguyên $P(x)$ thỏa mãn tính chất $P(2^n)$ chia hết cho n, với mọi số nguyên dương n.

Bài 10. Tìm tất cả đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên thỏa mãn

$$f(n) \mid 2^n - 1$$

với mọi số nguyên dương n.

Bài 11 (Chọn ĐTQG Phú Thọ 2017). Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số nguyên sao cho $P(n)$ là ước của $10^n - 3n - 2016$ với mọi số nguyên dương n.

Bài 12 (Thailand MO 2014). Tìm tất cả các đa thức P với hệ số nguyên thỏa mãn

$$P(n) \big| 2557^n + 213 \cdot 2014, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài 13. Tìm tất cả các đa thức P với hệ số nguyên sao cho $P(n)$ và $P(2^n)$ nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên n.

Bài 14. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho phương trình $P(x) = 2^n$ có ít nhất một nghiệm $x_n \in \mathbb{N}^*$ với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 15. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$\frac{1}{\dfrac{1}{P(x)} - \dfrac{1}{P(P(x))}}$$

cũng là một đa thức.

Bài 16. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(P(n)) = \left\lfloor P(n)^2 \right\rfloor$$

với mọi số nguyên dương n.

Bài 17 (P348 Tạp chí Pi tháng 10 năm 2019).
Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên thỏa mãn tính chất sau đây: tồn tại các số nguyên $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, trong đó n là bậc của $P(x)$, sao cho $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_{n+1})$, theo thứ tự đó, là các số nguyên liên tiếp.

Bài 18 (Russian Mathematical Olympiad 2017).
Một giáo viên giao cho học sinh một nhiệm vụ như sau. Ông ấy đang nghĩ đến một đa thức monic $P(x)$ bậc 2017 với các hệ số nguyên. Sau đó, ông ta cho học sinh biết k số nguyên n_1, n_2, $\ldots$, n_k và cũng cho họ biết giá trị của biểu thức

$$P(n_1)\, P(n_2) \cdots P(n_k)\,.$$

Thầy giáo yêu cầu học sinh tìm đa thức dựa vào các dữ liệu trên. Tìm số k nhỏ nhất để tồn tại một trường hợp sao cho đa thức học sinh tìm được trùng với đa thức thầy giáo đang nghĩ đến.

Bài 19 (VMO-95). Hãy xác định tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện sau: Với mỗi số $a > 1995$ thì số nghiệm thực của phương trình: $P(x) = a$ (mỗi nghiệm được tính với số bội của nó) bằng bậc của đa thức $P(x)$, và mỗi nghiệm thực của phương trình trên đều lớn hơn 1995.

Bài 20. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $f(x)$, bậc lớn hơn hoặc bằng 1 và thỏa mãn: hàm số $g(x) = \cos(f(x))$ là hàm tuần hoàn trên $\mathbb{R}$.

Bài 21 (π in the sky, issue 15, 2011). Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực sao cho

$$\sin P(x) = P(\sin x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Bài 22 (Canadian Mathematical Olympiad 2018).
Tìm tất cả các đa thức $p(x)$ hệ số thực thỏa mãn điều kiện sau: tồn tại một đa thức hệ số thực $q(x)$ sao cho

$$p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(n) = p(n)q(n),\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Bài 23 (APMO 2018). Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho tất cả các số thực s và t, nếu $P(s)$ và $P(t)$ đều là số nguyên, thì $P(st)$ cũng là một số nguyên.

2. Lời giải

Bài 1. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn:

$$P(0) = 1,\ P(1) = 0,\ P'(0) = 0,\ P'(1) = 1. \tag{1}$$

Thực hiện phép chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $x^2(x-1)^2$, ta được:

$$P(x) = Q(x)x^2(x-1)^2 + ax^3 + bx^2 + cx + d, \tag{2}$$

với $Q(x)$ là đa thức hệ số thực. Khi đó:

$$P'(x) = Q'(x)x^2(x-1)^2 + 2Q(x)x(x-1)(2x-1) + 3ax^2 + 2bx + c. \tag{3}$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$\begin{cases} P(0) = 1 \\ P(1) = 0 \\ P'(0) = 0 \\ P'(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 0 \\ c = 0 \\ 3a + 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 1 \\ a = 3 \\ b = -4. \end{cases}$$

Vậy $P(x) = Q(x)x^2(x-1)^2 + 3x^3 - 4x^2 + 1$. Thử lại thấy thỏa mãn.
Đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $P(x) = Q(x)x^2(x-1)^2 + 3x^3 - 4x^2 + 1$, với $Q(x)$ là đa thức hệ số thực, tùy ý.

Bài 2. Giả sử tồn tại đa thức hệ số nguyên $P(x)$ thỏa mãn

$$P\left(P'(x)\right) = P'(P(x)),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giả sử

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0 \neq 0.$$

Ta có

$$P'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.$$

Từ (1), so sánh hệ số của $x^{(n-1)n}$ ta được

$$a_0(na_0)^n = na_0a_0^{n-1} \Rightarrow a_0^{n+1} \cdot n^n = a_0^n \cdot n \Rightarrow a_0n^{n-1} = 1.$$

Do đó $a_0 = \dfrac{1}{n^{n-1}}$, mà a_0 là số nguyên, nên ta suy ra $n = 1$ và $a_0 = 1$.
Do đó $P(x) = x + a_1$, $P'(x) = 1$. Từ $P\left(P'(x)\right) = P'(P(x))$ suy ra $1 + a_1 = 1$ hay $a_1 = 0$.
Do đó $P(x) = x$.

Bài 3. Giả sử tồn tại đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài. Hiển nhiên $P(x) \neq 0$. Do $P(0) = 0$ nên đa thức cần tìm có dạng

$$P(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_nx^n,\ a_m \neq 0, \text{với } m, n \text{ nguyên dương.}$$

Do $P(1) = 1$ nên

$$a_m + a_{m-1} + \cdots + a_n = 1.$$

Xét hàm số $f(x) = P(x) - x^{2018}$, do $P(x) \geq x^{2018}, \forall x \geq 0$ nên $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 trên $[0; +\infty)$ tại $x = 1$. Ta có $m \geq 2018$, vì nếu $m < 2018$ thì $f(x)$ là đa thức bậc 2018 và có hệ số của x^{2018} âm nên khi $x \geq 0$ và x đủ lớn thì $f(x) < 0$, mâu thuẫn với giả thiết. Như thế $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$, suy ra

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow P'(1) - 2018 = 0 \Leftrightarrow ma_m + (m-1)a_{m-1} + \cdots + na_n = 2018.$$

Xét đa thức $P(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_nx^n$, với m, n là các số nguyên dương thỏa mãn $m \geq n$ và $m \geq 2018$ và bộ số thực không âm $(a_m, a_{m-1}, \ldots, a_n)$ có tổng bằng 1 và thỏa mãn

$$ma_m + (m-1)a_{m-1} + \cdots + na_n = 2018.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, với mọi $x \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned}
x^{2018} &= x^{ma_m + (m-1)a_{m-1} + \cdots + na_n} = (x^m)^{a_m} \cdot \left(x^{m-1}\right)^{a_{m-1}} \cdots (x^n)^{a_n} \\
&\leq \left(\frac{a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_nx^n}{a_m + a_{m-1} + \cdots + a_n}\right)^{a_m + a_{m-1} + \cdots + a_n} \\
&= a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_nx^n,
\end{aligned}$$

do đó

$$P(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_nx^n \geq x^{ma_m + (m-1)a_{m-1} + \cdots + na_n} = x^{2018}.$$

Vậy đa thức như trên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý 11. Lời giải trên đã sử dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân dạng tổng quát sau đây:

$$x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n} \leq \left(\frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots x_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \right)^{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

với x_i, p_i là những số dương. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Bài 4. Giả sử tồn tại đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn

$$P(x+y) \geq P(x) + (x+1)P(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Cách 1. Nếu $P(x) = C$ là đa thức hằng thì $C(x+1) \leq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Từ đây chọn $x = 1$ suy ra $C \leq 0$; chọn $x = -2$ suy ra $C \geq 0$; do đó $C = 0$. Bây giờ ta giả sử $\deg P \geq 1$. Từ (1) $x = -1$, ta được $P(y-1) \geq P(-1)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Suy ra đa thức $P(x)$ có bậc chẵn và hệ số dẫn đầu dương. Từ (1) cho $x = y = 0$, ta được $P(0) \leq 0$. Từ (1) cho $x = -2$, $y = 0$ ta được $P(0) \geq 0$. Do đó $P(0) = 0$. Từ (1) cho $y = -x$, ta được

$$P(x) + (x+1)P(-x) \leq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Vế trái của (2) là một đa thức bậc lẻ và có hệ số dẫn đầu dương; do đó

$$\lim_{x \to +\infty} (P(x) + (x+1)P(-x)) = +\infty;$$

mâu thuẫn với (2). Vậy $P(x) = 0$.
Cách 2. Nếu $P(x) = C$ là đa thức hằng thì $C(x+1) \leq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Từ đây chọn $x = 1$ suy ra $C \leq 0$; chọn $x = -2$ suy ra $C \geq 0$; do đó $C = 0$. Bây giờ ta giả sử $\deg P = d \geq 1$. Từ (1) cho $y = x^2$ ta được

$$P\left(x + x^2\right) - P(x) - (x+1)P\left(x^2\right) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Đa thức $P\left(x + x^2\right) - P(x) - (x+1)P\left(x^2\right)$ có bậc $2d+1$ nên có tập giá trị là $\mathbb{R}$; mâu thuẫn với (3). Vậy $P(x) = 0$.

Bài 5. Giả sử tồn tại đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn:

$$1 - x^4 \leq P(x) \leq 1 + x^4, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Từ (1), ta có:

$$\frac{1}{x^4} - 1 \leq \frac{P(x)}{x^4} \leq \frac{1}{x^4} + 1, \forall x \neq 0. \tag{2}$$

Gọi a là hệ số của x với lũy thừa cao nhất của $P(x)$. Nhận xét rằng:

- ☑ Nếu $\deg P = 4$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{x^4} = a$.
- ☑ $\deg P < 4$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{x^4} = 0$.
- ☑ $\deg P > 4$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{x^4} = \pm\infty$.

Từ (2) cho $x \to +\infty$ ta thu được: $-1 \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{x^4} \leq 1 \Rightarrow \deg P \leq 4$.
Từ (1) cho $x = 0$ ta được $P(0) = 1$. Như vậy:

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Thay (3) vào (1), ta được:

$$\begin{aligned} & -x^4 \leq ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx \leq x^4, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \left|ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx\right| \leq \left|x^4\right|, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow & \left|ax^3 + bx^2 + cx + d\right| \leq \left|x^3\right|, \forall x \neq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Từ (4) cho $x \to 0$, ta được: $|d| \leq 0 \Leftrightarrow d = 0$. Từ đây (4) trở thành:

$$\begin{aligned} & \left|ax^3 + bx^2 + cx\right| \leq \left|x^3\right|, \forall x \neq 0 \\ \Rightarrow & \left|ax^2 + bx + c\right| \leq \left|x^2\right|, \forall x \neq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Từ (5) cho $x \to 0$, ta được: $|c| \leq 0 \Leftrightarrow c = 0$ và (5) trở thành:

$$\begin{aligned} & \left|ax^2 + bx\right| \leq \left|x^2\right|, \forall x \neq 0 \\ \Rightarrow & |ax + b| \leq |x|, \forall x \neq 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Từ (6) cho $x \to 0$, ta được: $|b| \leq 0 \Leftrightarrow b = 0$ và (6) trở thành:

$$\begin{aligned} & |ax| \leq |x|, \forall x \neq 0 \\ \Rightarrow & |a| \leq 1. \end{aligned}$$

Vậy $P(x) = ax^4 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (a là hằng số thỏa mãn $|a| \leq 1$). Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 6. Giả sử tồn tại các đa thức hệ số thực $P(x), Q(x)$ thỏa mãn

$$P(x)Q(x+1) - P(x+1)Q(x) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Từ (1) ta có

$$P(x-1)Q(x) - P(x)Q(x-1) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (1) ta được

$$\begin{aligned} & P(x)Q(x+1) - P(x+1)Q(x) = P(x-1)Q(x) - P(x)Q(x-1) \\ \Rightarrow & P(x)\left[Q(x+1) + Q(x-1)\right] = Q(x)\left[P(x+1) + P(x-1)\right], \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

Giả sử x_0 (x_0 có thể là số phức) là nghiệm của $P(x)$, khi đó $P(x_0) = 0$, thay vào (2) được $Q(x_0)\left[P(x_0+1) + P(x_0-1)\right] = 0$, nếu $Q(x_0) = 0$ thì từ (1) ta có

$$1 = P(x_0)Q(x_0+1) - P(x_0+1)Q(x_0) = 0,$$

vô lí, vậy $Q(x_0) \neq 0$, suy ra $P(x_0+1) + P(x_0-1) = 0$, hay x_0 là nghiệm của đa thức $P(x+1) + P(x-1)$, như vậy mọi nghiệm của $P(x)$ cũng là nghiệm của $P(x+1) + P(x-1)$, suy ra $P(x)$ là ước của $P(x+1) + P(x-1)$. Mà hai đa thức $P(x)$ và $P(x+1) + P(x-1)$ có cùng bậc nên

$$P(x+1) + P(x-1) = aP(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ (a \text{ là hằng số})$$

$$\Rightarrow \frac{P(x+1)}{P(x)} + \frac{P(x-1)}{P(x)} = a \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{P(x+1)}{P(x)} + \frac{P(x-1)}{P(x)}\right) = a \Rightarrow a = 2.$$

Do đó

$$\begin{aligned} &P(x+1)+P(x-1)=2P(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &P(x+1)-P(x)=P(x)-P(x-1),\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Rightarrow &P(x+1)-P(x)=b\ \ (b \text{ là hằng số}),\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Rightarrow &P(x+1)=P(x)+b,\ \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Đặt $P(x) = bx + H(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Từ (3) suy ra đa thức $H(x)$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} &b(x+1)+H(x+1)=bx+H(x)+b,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &H(x+1)=H(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Như vậy $H(x)$ là đa thức hằng, do đó $P(x) = bx + a,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (a và b là hằng số). Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned} &(bx+a)\left[Q(x+1)+Q(x-1)\right]=2(bx+a)Q(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &Q(x+1)+Q(x-1)=2Q(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tương tự như trên ta được $Q(x) = b'x + a',\ \forall x \in \mathbb{R}$ (a' và b' là hằng số). Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} &(bx+a)\left(b'x+b'+a'\right)-(bx+b+a)\left(b'x+a'\right)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &(bb'+ba'+ab')x+ab'+aa'=(ba'+bb'+ab')x+ba'+aa'+1,\ \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hay $ab' = ba' + 1$. Vậy cặp đa thức $P(x), Q(x)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$P(x) \equiv bx + a \text{ và } Q(x) \equiv b'x + a',$$

với a, a', b, b' là các hằng số thỏa mãn $ab' - ba' = 1$.
Lưu ý. Có thể tìm ra $a = 2$ như sau: Giả sử

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Từ $P(x+1) + P(x-1) = aP(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$, ta có:

$$a_n + a_n = a.a_n \Rightarrow 2a_n = a.a_n.$$

Từ đây ta biện luận $a_n = 0$ và $a_n \neq 0$ để suy ra a.

Bài 7. Giả sử tồn tại các đa thức hệ số thực P, Q và số nguyên dương n thỏa mãn

$$P(x+1)Q\left(x^n\right) - Q(x+1)P\left(x^n\right) = 2021.$$

Rõ ràng $P \neq 0$ và $Q \neq 0$; giả sử $\deg(P) = k$, $\deg(Q) = \ell$ với $k, \ell \in \mathbb{N}$ và ta thấy là nếu (P, Q) thỏa mãn yêu cầu thì với hằng số thực a cũng sẽ có $(P, Q + aP)$ thỏa mãn. Ta xét hai trường hợp sau đây:

(1) Trường hợp $n = 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} &P(x+1)Q(x)-Q(x+1)P(x)=2021\\ \Rightarrow &P(x)Q(x-1)-Q(x)P(x-1)=2021\\ \Rightarrow &P(x+1)Q(x)-Q(x+1)P(x)=P(x)Q(x-1)-Q(x)P(x-1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(x)\left(Q(x+1)+Q(x-1)\right)=Q(x)\left(P(x+1)+P(x-1)\right).$$

Do $1 \in I(P,Q)$ nên $P(x) \mid (P(x+1)+P(x-1))$ (có thể tham khảo lời giải bài toán 6), so sánh bậc và hệ số bậc cao nhất cho ta

$$P(x+1)+P(x-1)=2P(x).$$

Từ đó mà có được $P(x)=ax+b$, cũng tương tự để có nốt $Q(x)=cx+d$ với điều kiện cần phải thỏa mãn sau thử lại là $ad-bc=1$.

(2) Trường hợp $n>1$. Khi đó vì P,Q không thể cùng là đa thức hằng, nên có $k=\ell$ do

$$k+n\ell=\deg\left(P(x+1)Q\left(x^n\right)\right)=\deg\left(Q(x+1)P\left(x^n\right)+2021\right)=\ell+nk.$$

Nhưng như thế, thì với chú ý ngay từ đầu và việc chọn $a=-\dfrac{b_\ell}{a_k}$ trong đó a_k, b_ℓ lần lượt là các hệ số bậc cao nhất của P và Q cho ta luôn mâu thuẫn.

Tóm lại $n=1, P(x)=ax+b, Q(x)=cx+d$ với các hằng số thực a,b,c,d thỏa mãn $ac-bd=2021$.

Bài 8.

a) Đồng nhất hệ số tự do trong đa thức $P(x)\cdot Q(x)$ suy ra $P(x)=x^2+ax\pm 1$ với $a\in\mathbb{Z}$.
Với $a=0$ hay $a=\pm 1$, nghiệm nếu có thỏa mãn.
Nếu $|a|\geq 2$ thì $P(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2, cũng là nghiệm của

$$H(x)=P(x)\cdot Q(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,\ a_i=\pm 1.$$

Hay $H(x)=x_i^n+a_{n-1}x_i^{n-1}+\cdots+a_0$, $i\in\{1;2\}$. Vì $x_i\neq 0$, suy ra

$$\begin{aligned}1&=\left|\frac{a_{n-1}}{x_i}+\frac{a_{n-2}}{x_i^2}+\cdots+\frac{a_0}{x_i^n}\right|\leq\left|\frac{a_{n-1}}{x_i}\right|+\left|\frac{a_{n-2}}{x_i^2}\right|+\cdots+\left|\frac{a_0}{x_i^n}\right|\\&\leq\frac{1}{|x_i|}+\frac{1}{|x_i|^2}+\cdots+\frac{1}{|x_i|^n}\\&=\frac{\dfrac{1}{|x_i|}\left(1-\dfrac{1}{|x_1|^n}\right)}{1-\dfrac{1}{|x_i|}}=\frac{1-\dfrac{1}{|x_i|^n}}{|x_i|-1}\leq\frac{1}{|x_i|-1}.\end{aligned}$$

Suy ra $|x_i|<2$ với $i\in\{1;2\}$. (1)

b) $P(x)=a^2+ax\pm 1$ với $a\in\mathbb{Z}$.
Với $a=0$ hay $a=\pm 1$, ta có thể chọn $Q(x)=1$. Vậy $a=0$, $a=\pm 1$ thỏa mãn.
Nếu $|a|\geq 2$ thì $P(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2, với $|x_i|<2$ với $i\in\{1;2\}$.
Khi đó $|a|=|x_1+x_2|\leq|x_1|+|x_2|<4$.
Với $a=\pm 2$ suy ra $P(x)=x^2\pm 2x\pm 1$.
$P(x)=x^2\pm 2x-1$ có hai nghiệm $x_{1,2}=\pm 1\pm\sqrt{2}$ không thỏa mãn (1).
Với $P(x)=x^2\pm 2x+1=(x\pm 1)^2$ ta chọn $Q(x)=x\mp 1$ tương ứng thỏa mãn.
Với $a=\pm 3$ thử nghiệm, không thoả mãn (1).
Vậy các đa thức $P(x)$ thỏa mãn là

$$P(x)=x^2+1;\ P(x)=x^2\pm x\pm 1;\ P(x)=x^2\pm 2x+1.$$

Bài 9. Với mọi số nguyên dương k và mọi số nguyên tố p ta có $2^{kp} \equiv 2^k \pmod p$. Do đó ta có

$$P(2^k) \equiv P(2^{kp}) \pmod p.$$

Lại có $P(2^{kp}) \vdots kp \Rightarrow P(2^{kp}) \vdots p$ nên $P(2^k) \vdots p$. Với mỗi k cố định, cho số nguyên tố p đủ lớn ta suy ra $P(2^k) = 0$. Từ đây suy ra $P(2^k) = 0$ với mọi số nguyên dương k. Điều này kéo theo

$$P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 10. Nếu $f(x) = c$ là hằng số, khi đó c là ước của $2 - 1$; như vậy $f(x) \equiv 1, f(x) \equiv -1$. Bây giờ ta giả sử $f(x)$ là đa thức khác hằng. Khi đó $\exists n_0$ sao cho $|f(n_0)| > 1$; chọn p là một ước nguyên tố của $|f(n_0)|$. Theo giả thiết ta thu được

$$p \mid 2^{n_0} - 1 \Rightarrow 2^{n_0} \equiv 1 (\bmod p). \tag{1}$$

Mặt khác $f(n_0) \equiv f(n_0 + p) \, (\bmod p)$ nên

$$p \,| f(n_0 + p) \Rightarrow p |\, 2^{n_0+p} - 1 \Rightarrow 2^{n_0+p} \equiv 1 (\bmod p). \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$2^{n_0+p} \equiv 2^{n_0} \pmod p \Rightarrow 2^{n_0}(2^p - 1) \vdots p. \tag{3}$$

Mà p là số nguyên tố nên nếu $2^p - 1 \not\vdots\, p$ thì từ (3) suy ra $2^{n_0} \vdots p$, mâu thuẫn với (1). Do đó $2^p \equiv 1 (\bmod p)$; điều này lại mâu thuẫn với định lí Fermat nhỏ. Như vậy, các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài bao gồm $f(x) \equiv 1, f(x) \equiv -1$.

Bài 11. **Cách 1.** Giả sử đa thức $P(x)$ khác đa thức hằng. Khi đó tồn tại số tự nhiên N đủ lớn sao cho với mọi $n \geq N$, ta có $|P(n)| \geq 1$. Ta xét p là ước nguyên tố bất kỳ của $P(n)$. Ta có

$$P(n + p) - P(n) \vdots p.$$

Suy ra

$$10^n(10^p - 1) - 3p \vdots p$$

hay

$$10^n(10^p - 1) \vdots p. \tag{1}$$

Nếu $p \neq 2$ và $p \neq 5$ thì $10^n \not\vdots\, p$ nên từ (1) suy ra $(10^p - 1) \vdots p$, mà theo định lý Fermat ta có

$$10^p \equiv 10 \pmod p.$$

Từ đó suy ra p là ước của 9 hay $p = 3$. Do đó $p = 2; 3$ hoặc $p = 5$. Ta thấy rằng

$$\begin{cases} 10^n \not\vdots\, 3 \\ 3n + 2016 \vdots 3 \end{cases} \Rightarrow 10^n - 3n - 2016 \not\vdots\, 3 \Rightarrow (10^n - 3n - 2016, 3) = 1$$

do đó nên $p = 2$ hoặc 5.

- Nếu $p = 2$ thì ta có $2 | (10^n - 3n - 2016)$, suy ra n chẵn.
- Nếu $p = 5$ thì ta có $5 | (10^n - 3n - 2016)$. Do đó

$$\begin{aligned} &3n + 2016 \vdots 5 \Rightarrow 3n \equiv 2 \pmod 5 \\ &\Rightarrow \begin{cases} 3n \equiv 2 \pmod 5 \\ 5n \equiv 0 \pmod 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n \equiv 2 \pmod 5 \\ 2n \equiv -2 \pmod 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n \equiv 2 \pmod 5 \\ 2n \equiv 3 \pmod 5 \end{cases} \\ &\Rightarrow n \equiv -1 \pmod 5 \Rightarrow n \equiv 4 \pmod 5. \end{aligned}$$

Chọn được n không thỏa mãn cả hai điều kiện trên, chẳng hạn $n \equiv 1 \pmod{10}$ và $n \geq N$, khi đó ta có điều vô lý. Vậy $P(x)$ là đa thức hằng. Đặt $|P(n)| = a$, a là hằng số nguyên. Ta có

$$(10^n - 3n - 2016) \vdots a, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1) Với $n = 1$, suy ra a lẻ.

2) Với $n = 5$ ta có

$$10^n - 3n - 2016 = 10^5 - 15 - 2015 - 1 \vdots a \Rightarrow 10^5 - 15 - 2015 - 1 = ka.$$

Nếu $(a, 5) = d > 1$ thì d là ước của 1, vô lý. Do đó $(a, 5) = 1$. Nếu $a > 1$ thì gọi q là một ước nguyên tố bất kỳ của a. Nếu $(q, 10) = e > 1$ thì e là ước của 1, vô lý. Do đó $(10, q) = 1$. Theo giả thiết ta có

$$(10^q - 3q - 2016) \vdots a \Rightarrow (10^q - 3q - 2016) \vdots q.$$

Mà $10^q \equiv 10 \pmod{q}$ nên $q \mid 2006$. Theo giả thiết ta có

$$(10^{q-1} - 3(q-1) - 2016) \vdots a \Rightarrow (10^{q-1} - 3(q-1) - 2016) \vdots q.$$

Mà $10^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ nên $q \mid 2012$. Từ hai điều trên suy ra $q \mid (2006, 2012) = 2$, vô lý do a lẻ. Vậy $a = 1$.

Suy ra $P(x) \equiv 1$, $P(x) \equiv -1$, là hai đa thức cần tìm. Bài toán kết thúc.
Cách 2. Giả sử đa thức $P(x)$ khác đa thức hằng. Theo định lý Schur suy ra tồn tại số nguyên tố $p > 7$ sao cho tồn tại số nguyên n để $p \mid P(n)$. Ta có

$$P(n+p) - P(n) \vdots p.$$

Suy ra

$$10^n(10^p - 1) - 3p \vdots p$$

hay

$$10^n(10^p - 1) \vdots p. \tag{1}$$

Do số nguyên tố $p > 7$ nên $10^n \not\vdots\, p$, do đó từ (1) suy ra $(10^p - 1) \vdots p$, mà theo định lý Fermat ta có

$$10^p \equiv 10 \pmod{p}.$$

Từ đó suy ra p là ước của 9 hay $p = 3$, mâu thuẫn với $p > 7$. Vậy $P(x)$ là đa thức hằng. Đặt $|P(n)| = a$, a là hằng số nguyên. Ta có

$$(10^n - 3n - 2016) \vdots a, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Với $n = 1$, suy ra $a \mid 2009$.
- Với $n = 2$ suy ra $a \mid 1922$.

Mà $(2009, 1922) = 1$ nên $a = 1$. Suy ra $P(x) \equiv 1$, $P(x) \equiv -1$, là hai đa thức cần tìm. Bài toán kết thúc.

Bài 12. Ta có Ta có $2556 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 71$.

1) Trường hợp 1: $P(x) = c$ là đa thức hằng. Theo giả thiết ta có
$$c \mid 2557^n + 213 \cdot 2014, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
Do đó $c \mid 2557^2 + 213 \cdot 2014$ và $c \mid 2557 + 213 \cdot 2014$. Dẫn tới
$$c \mid 2557^2 - 2557 \Rightarrow c \mid 2557 \cdot 2556.$$
Mà 2557 là số nguyên tố nên $c \mid 2556$. Nếu $c \neq 1$ và $c \neq -1$ thì gọi p là một ước nguyên tố của c. Khi đó do $c \mid 2556$ nên $p \in \{2, 3, 71\}$. Tuy nhiên cả $2, 3, 71$ đều không là ước của $2557 + 213 \cdot 2014$; do đó $c = \pm 1$. Thử lại ta thấy các đa thức $P(x) = 1$, $P(x) = -1$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

2) Trường hợp 2: $\deg P \geq 1$. Theo định lý Schur, tồn tại số nguyên tố $p > 71$ sao cho tồn tại số nguyên n để $p \mid P(n)$. Khi đó
$$\begin{aligned} P(n+p) - P(n) \vdots p \Rightarrow 2557^{n+p} - 2557^n \vdots p &\Rightarrow 2557^n \left(2557^p - 1\right) \vdots p \\ &\Rightarrow 2557^n \left(2557^p - 2557 + 2556\right) \vdots p \\ &\Rightarrow 2557^n \left(2557^p - 2557\right) + 2557^n \cdot 2556 \vdots p \\ &\Rightarrow 2557^n \cdot 2556 \vdots p \\ &\Rightarrow p \in \{2, 3, 71\}; \end{aligned}$$
mâu thuẫn với $p > 71$.

Vậy đa thức thỏa yêu cầu đề bài bao gồm $P(x) = 1$, $P(x) = -1$.

Bài 13. Giả sử đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ thỏa mãn bài toán.
Ta chứng minh $\left|P(2^k)\right| = 1, \forall k \in \mathbb{N}^*$.
Giả sử $\exists k_0 \in \mathbb{N}^*:\ \left|P\left(2^{k_0}\right)\right| \geq 2$. Gọi p là ước nguyên tố của $\left|P\left(2^{k_0}\right)\right|$.
Nếu $p \geq 3$, chọn $\ell \in \mathbb{N}^*$ đủ lớn sao cho $\ell(p-1) > 2^{k_0} - k_0$.
Đặt $r = \ell(p-1) + k_0 - 2^{k_0}$ và $s = 2^{k_0} + rp$. Ta có:
$$p \left| \left(s - 2^{k_0}\right) \right| \left(P(s) - P\left(2^{k_0}\right)\right) \Rightarrow p | P(s). \tag{1}$$
Mặt khác:
$$\begin{aligned} 2^s &= 2^{2^{k_0} + rp} = 2^{2^{k_0} + r} \cdot 2^{(p-1)r} \equiv 2^{2^{k_0} + r} = 2^{\ell(p-1) + k_0} \\ &= 2^{2^{k_0}} \cdot 2^{\ell(p-1)} \equiv 2^{k_0} (\bmod p). \end{aligned}$$
Do đó $P(2^s) - P\left(2^{k_0}\right) \vdots p \Rightarrow P(2^s) \vdots p$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra $\Big(P(s), P(2^s)\Big) > 1$ (mâu thuẫn).
Nếu $p = 2$, đặt $s = 2^{k_0} + 2$. Ta có: $2 = \left(s - 2^{k_0}\right) \mid \left(P(s) - P\left(2^{k_0}\right)\right) \Rightarrow 2 | P(s)$.
Hơn nữa, $2 | \left(2^s - 2^{k_0}\right)$ nên $2 | P(2^s)$. Suy ra $(P(s), P(2^s)) > 1$ (mâu thuẫn).
Vậy $\left|P\left(2^k\right)\right| = 1, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Từ đó, suy ra $P \equiv 1$ hoặc $P \equiv -1$. Thử lại, 2 đa thức này đều thỏa mãn bài toán.

Bài 14. Giả sử $P(x) \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ trong đó $m = \deg P(x) \in \mathbb{N}^*$, $(a_i)_{i=0}^m \subset \mathbb{Z}$.

(i) Từ giả thiết suy ra $a_m > 0$ và tồn tại dãy $(x_n)_{n=n_1}^{+\infty}$ tăng ngặt, với $n_1 \in \mathbb{N}^*$ nào đó. Hơn nữa, $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ và

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^m}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^m}{P(x_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_m + \sum\limits_{i=0}^{m-1} a_i x_n^{i-m}} = \frac{1}{a_m};$$

Từ đó

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{x_{n+1}^m}{2^{n+1}}}{\frac{x_n^m}{2^n}} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^m = 2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 2^{\frac{1}{m}}.$$

Theo bất đẳng thức TBC-TBN (dấu "=" không xảy ra), ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = 2^{\frac{1}{m}} + 2^{\frac{-1}{m}} > 2$$

Vậy, tồn tại số nguyên dương $n_1 \geq n_2$ sao cho với mọi $n > n_2$ ta có

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n} > 2 \Rightarrow x_{n+1} + x_{n-1} > 2x_n \Rightarrow x_{n+1} - x_n > x_n - x_{n-1}. \qquad (1)$$

(ii) Nhưng do $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, ta có

$$(x_{n+1} - x_n) | (P(x_{n+1}) - P(x_n)) = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$$

nên $x_{n+1} - x_n$ là một lũy thừa 2 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Vì thế, từ (1) suy ra, khi $n > n_2$ thì

$$x_{n+1} - x_n \geq 2(x_n - x_{n-1}) \geq \cdots \geq 2^{n-n_2}(x_{n_2+1} - x_{n_2}).$$

Từ đó, $x_{n+1} \geq x_n + 2^{n-n_2}\left(x_{n_2+1} - x_{n_2}\right) > 2^{n-n_2}$ với mọi $n > n_2$. Vậy nếu $m > 1$ ta sẽ có

$$\frac{1}{a_m} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}^m}{2^{n+1}} \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{m(n-n_2)}}{2^{n+1}} = +\infty,$$

vô lý! Mâu thuẫn này chứng tỏ rằng $m = 1$, nghĩa là $P(x) = a_1 x + a_0$.

(iii) Bởi vì $a_1 | a_1 x_n = 2^n - a_0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, ta thấy $0 < a_1 | (2^2 - a_0) - (2^1 - a_0) = 2$.

Dễ dàng thử lại để đi đến các kết luận sau:

1. $a_1 = 1$ và $P(x) = x + a_0$ với $a_0 \in \mathbb{Z}, a_0 \leq 1$ hoặc

2. $a_1 = 2$ và $P(x) = 2x + a_0$ với $a_0 = 2b, b \in \mathbb{Z}, b \leq 0$.

Bài 15. Dễ thấy $\deg P \geq 1$.
Cách 1.

1) Trường hợp đa thức $P(P(x)) - P(x)$ không phải là đa thức hằng. Ta có

$$\frac{1}{\frac{1}{P(x)} - \frac{1}{P(P(x))}} = \frac{P(P(x))P(x)}{P(P(x)) - P(x)} = P(x) + \frac{P(x)^2}{P(P(x)) - P(x)}.$$

Do đó $\dfrac{P(x)^2}{P(P(x)) - P(x)}$ là một đa thức. (1)

a) Giả sử $\deg P(x) = d > 2$. Khi đó đa thức $P(x)^2$ có bậc là $2d$, đa thức $P(P(x)) - P(x)$ có bậc là d^2; mà $d^2 > 2d$ nên ta nhận được điều mâu thuẫn với (1). Do đó $\deg P(x) \in \{1, 2\}$. Nếu $\deg P(x) = 1$, thì $P(x) = ax + b$, với $a \neq 0$. Do $P(P(x)) - P(x)$ khác đa thức hằng nên $a \neq 1$. Do (1) nên tồn tại các số thực c, d sao cho

$$\frac{P(x)^2}{P(P(x)) - P(x)} = \frac{(ax+b)^2}{(a^2-a)\,x + ab} = cx + d$$

Khi đó

$$(ax+b)^2 = \left(\left(a^2 - a\right)x + ab\right)(cx+d).$$

Đồng nhất hệ số của x^2 ở hai vế ta được $a^2 = (a^2 - a)c \Rightarrow c = \dfrac{a}{a-1}$. So sánh hệ số tự do ở hai vế ta được $b^2 = abd \Rightarrow d = \dfrac{b}{a}$. Do đó

$$(ax+b)^2 = \left(\left(a^2 - a\right)x + ab\right)\left(\frac{a}{a-1}x + \frac{b}{a}\right).$$

Đồng nhất hệ số của x ở hai vế ta được

$$\begin{aligned} 2ab = b(a-1) + \frac{a^2 b}{a-1} \Leftrightarrow ab = \frac{a^2 b}{a-1} - b \Leftrightarrow b\left(\frac{a^2}{a-1} - 1 - a\right) = 0 \\ \Leftrightarrow b \cdot \frac{a^2 - (a^2-1)}{a-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a-1} = 0 \Leftrightarrow b = 0. \end{aligned}$$

Vậy $P(x) = ax$. Thử lại đúng.

b) Giả sử $\deg P(x) = 2$. Khi đó đa thức $P(x)^2$ có bậc là 4, đa thức $P(P(x)) - P(x)$ có bậc là 4; cho nên từ (1) suy ra tồn tại hằng số a sao cho

$$P(P(x)) - P(x) = aP(x)^2, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Do tập giá trị của $P(x)$ là vô hạn và $P(P(x)) - P(x) = aP(x)^2$ là đa thức nên từ (2) suy ra

$$P(x) = ax^2 + x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó (thử lại)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\dfrac{1}{ax+x} - \dfrac{1}{a(ax+x) + ax + x}} &= \frac{1}{\dfrac{1}{ax+x} - \dfrac{1}{(ax+x)(a+1)}} \\ &= \frac{(ax+x)(a+1)}{a} = \frac{(a+1)^2}{a}x \in \mathbb{R}[x]. \end{aligned}$$

2) Trường hợp $P(P(x)) - P(x)$ là đa thức hằng; hay $P(P(x)) - P(x) = c$ với c là hằng số. Khi đó $P(x) = x + c$. Thử lại đúng.

Vậy các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài bao gồm

$$P(x) = ax, \quad P(x) = bx^2 + x, \quad P(x) = x + c$$

(với a, b, c là những hằng số).

Cách 2.

1) Trường hợp $P(P(x)) - P(x)$ không phải là đa thức hằng, khi đó

$$\frac{P(x)^2}{P(P(x)) - P(x)}$$

là một đa thức. Do đó, đa thức $P(x)^2$ chia hết cho đa thức $P(P(x)) - P(x)$. Vì vậy, mọi nghiệm của $P(P(x)) - P(x)$ đều là nghiệm của đa thức $P(x)^2$. Suy ra mọi nghiệm của $P(P(x)) - P(x)$ đều là nghiệm của đa thức $P(x)$. Giả sử r là một nghiệm của đa thức $P(P(x)) - P(x)$. Khi đó $P(r) = 0$ và

$$P(P(r)) = P(r) = 0. \tag{3}$$

Từ $P(r) = 0$ ta suy ra $P(P(r)) = P(0)$, kết hợp với (3) ta có $P(0) = 0$ hay 0 là nghiệm của $P(x)$. Do đó $P(x) = xS(x)$ với $S(x) \in \mathbb{R}[x]$. Ta có $P(P(x)) = P(x)S(P(x))$, và do đo

$$\frac{P(x)^2}{P(P(x)) - P(x)} = \frac{P(x)^2}{P(x)S(P(x)) - P(x)} = \frac{P(x)}{S(P(x)) - 1}$$

là một đa thức.

a) Trường hợp $S(x)$ là đa thức hằng. Khi đó $P(x) = ax$.

b) Trường hợp $\deg S \geq 1$. Khi đó đa thức $S(P(x)) - 1$ là đa thức bậc dương. Gọi r là một nghiệm của $S(P(x)) - 1$, khi đó r cũng là nghiệm của $P(x)$. Do đó $S(0) = 1$. Ta viết $S(x) = 1 + xT(x)$. Khi đó

$$S(P(x)) = 1 + P(x)T(P(x)).$$

Suy ra

$$\frac{P(x)}{S(P(x)) - 1} = \frac{P(x)}{P(x)T(P(x))} = \frac{1}{T(P(x))}$$

là một đa thức. Do đó $T(x)$ là đa thức hằng.
Suy ra $S(x) = 1 + ax$ và $P(x) = x(1 + ax) = ax^2 + x$.

2) Trường hợp $P(P(x)) - P(x)$ là đa thức hằng.
Trường hợp này ta làm tương tự như ở cách 1.

Cách 3.

1) Trường hợp $P(P(x)) - P(x)$ không phải là đa thức hằng, khi đó

$$\frac{P(x)^2}{P(P(x)) - P(x)}$$

là một đa thức. Do đó, đa thức $P(x)^2$ chia hết cho đa thức $P(P(x)) - P(x)$. Giả sử

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Khi đó

$$P(P(x)) - P(x) = a_n \left(P(x)^n - x^n\right) + \cdots + a_1 \left(P(x) - x\right) \vdots P(x) - x.$$

Suy ra

$$P(x)^2 \vdots P(x) - x \Rightarrow P(x)^2 - x^2 + x^2 \vdots P(x) - x \Rightarrow x^2 \vdots P(x) - x.$$

Do đó $P(x) - x = ax^2, P(x) - x = bx, P(x) - x = c$.

2) Trường hợp $P(P(x)) - P(x)$ là đa thức hằng.
Trường hợp này ta làm tương tự như ở cách 1.

Bài 16. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$P(P(n)) = \left\lfloor P(n)^2 \right\rfloor, \ \forall n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Cách 1. Nếu $P(x) = C$ là hằng số, thì $C = \lfloor C^2 \rfloor$, do đó C là số nguyên không âm thỏa mãn

$$C \leq C^2 < C + 1$$

do đó $P(x) = 0$ hoặc $P(x) = 1$. Bây giờ ta giả sử $P(x)$ khác đa thức hằng. Do $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, nên

$$P(n)^2 - 1 < \left\lfloor P(n)^2 \right\rfloor \leq P(n)^2,$$

suy ra

$$-1 < P(P(n)) - P(n)^2 \leq 0 \tag{2}$$

với mỗi số nguyên dương n. Do $P(x)$ khác hằng nên $\lim\limits_{n\to+\infty} |P(n)| = +\infty$; vì thế nên từ (2) suy ra tồn tại số thực a sao cho

$$-1 < P(x) - x^2 \leq 0, \ \forall x \geq a. \tag{3}$$

Đa thức khác hằng thì không bị chặn, do đó từ (3) suy ra $P(x) - x^2$ là đa thức hằng. Nghĩa là $P(x) = x^2 + C$ với C là hằng số thỏa mãn $-1 < C \leq 0$. Ta có

$$P(P(n)) = \left(n^2 + C\right)^2 + C = n^4 + 2Cn^2 + C^2 + C, \ \forall n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Do (1) nên từ (3) cho $n = 1$ ta suy ra $C^2 + 3C + 1$ là một số nguyên; và từ (3) cho $n = 2$ ta suy ra $C^2 + 9C + 16$ là một số nguyên. Do đó $6C + 15$ phải là số nguyên, dẫn đến $6C$ là số nguyên. Mà $-6 < 6C \leq 0$ nên $6C \in \{-5; -4; -3; -2; -; -1; 0\}$. Tuy nhiên, nếu

$$C \in \left\{-\frac{5}{6}; -\frac{4}{6}; -\frac{3}{6}; -\frac{2}{6}; -\frac{1}{6}\right\}$$

thì $C^2 + 3C + 1 \notin \mathbb{Z}$; do đó $6C = 0$ hay $C = 0$. Vậy $P(x) = x^2$. Thử lại đúng. Các đa thức thỏa yêu cầu đề bài là

$$P(x) = 0, P(x) = 1, P(x) = x^2.$$

Cách 2. Từ (1) ta có

$$P(n)^2 - 1 < P\left(P(n)\right) \leq P(n)^2, \ \forall n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Đặt $\deg P = k$.

1) Trường hợp $k = 0$. Khi đó $P(x) = C$ là hằng số. Thay vào (1) ta được $C = \lfloor C^2 \rfloor$, do đó C là số nguyên không âm thỏa mãn

$$C \leq C^2 < C + 1$$

do đó $P(x) = 0$ hoặc $P(x) = 1$.

2) Trường hợp $k = 1$. Khi đó $P(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$. Thay vào (4) ta được

$$\begin{aligned} &(an + b)^2 - 1 < a\left(an + b\right) + b, \ \forall n = 1, 2, \ldots \\ \Leftrightarrow &a^2n^2 + 2abn + b^2 - 1 < a^2n + ab + b, \ \forall n = 1, 2, \ldots \\ \Leftrightarrow &a^2n^2 + (2ab - a^2)n + b^2 - 1 - ab - b < 0, \ \forall n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(a^2n^2 + (2ab - a^2)n + b^2 - 1 - ab - b\right) = +\infty$ nên từ (5) cho $n \to +\infty$ ta nhận được điều vô lý.

3) Trường hợp $k > 2$. Khi đó $\deg P(P(x)) = k^2 > 2k = \deg P(x)^2$.
Nếu hệ số dẫn đầu của $P(P(x))$ dương thì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(P(P(n)) - P(n)^2\right) = +\infty$, mâu thuẫn với
$$P(P(n)) \le P(n)^2,\ \forall n = 1, 2, \ldots$$
Nếu hệ số dẫn đầu của $P(P(x))$ âm thì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(P(P(n)) - (P(n)^2 - 1)\right) = -\infty$, mâu thuẫn với
$$P(n)^2 - 1 < P(P(n)),\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

4) Trường hợp $k = 2$. Đặt $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Do (4) nên
$$\left(an^2 + bn + c\right)^2 - 1 < a\left(an^2 + bn + c\right)^2 + b\left(an^2 + bn + c\right) + c,\ \forall n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$
và
$$a\left(an^2 + bn + c\right)^2 + b\left(an^2 + bn + c\right) + c \le \left(an^2 + bn + c\right)^2,\ \forall n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$
Nếu $a^3 < a^2$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\text{VP}_{(6)} - \text{VT}_{(6)}\right) = -\infty$, mâu thuẫn với (6); do đó $a^3 \ge a^2$.
Nếu $a^3 > a^2$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\text{VP}_{(7)} - \text{VT}_{(7)}\right) = -\infty$, mâu thuẫn với (7).
Vậy $a^3 = a^2$ hay $a = 1$. Do $a = 1$ nên
$$\begin{aligned}(6) &\Leftrightarrow \left(n^2 + bn + c\right)^2 - 1 < \left(n^2 + bn + c\right)^2 + b\left(n^2 + bn + c\right) + c,\ \forall n = 1, 2, \ldots\\ &\Leftrightarrow -1 < b\left(n^2 + bn + c\right) + c,\ \forall n = 1, 2, \ldots \qquad (8)\end{aligned}$$
và
$$\begin{aligned}(7) &\Leftrightarrow \left(n^2 + bn + c\right)^2 + b\left(n^2 + bn + c\right) + c \le \left(n^2 + bn + c\right)^2,\ \forall n = 1, 2, \ldots\\ &\Leftrightarrow b\left(n^2 + bn + c\right) + c \le 0,\ \forall n = 1, 2, \ldots \qquad (9)\end{aligned}$$
Nếu $b > 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(b\left(n^2 + bn + c\right) + c\right) = +\infty$, mâu thuẫn với (9).
Nếu $b < 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(b\left(n^2 + bn + c\right) + c\right) = -\infty$, mâu thuẫn với (8).
Vậy $b = 0$. Do đó từ (8), (9) suy ra $-1 < c \le 0$ và $P(x) = x^2 + c$.
Do $P(P(n)) \in \mathbb{Z},\ \forall n = 1, 2, \ldots$ nên
$$\begin{aligned}&\left(n^2 + c\right)^2 + c \in \mathbb{Z},\ \forall n = 1, 2, \ldots\\ \Leftrightarrow\ &n^4 + 2n^2c + c^2 + c \in \mathbb{Z},\ \forall n = 1, 2, \ldots\\ \Rightarrow\ &2n^2c + c^2 + c \in \mathbb{Z},\ \forall n = 1, 2, \ldots \qquad (10)\end{aligned}$$
Từ (10) cho $n = 1, 2, 3$ ta được
$$\begin{cases} 3c + c^2 \in \mathbb{Z}\\ 9c + c^2 \in \mathbb{Z}\\ 19c + c^2 \in \mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6c \in \mathbb{Z}\\ 10c \in \mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow 4c \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2c \in \mathbb{Z}.$$
Mà $-1 < c \le 0$ nên $c \in \left\{0, -\dfrac{1}{2}\right\}$.
Nếu $c = \dfrac{1}{2}$ thì $3c + c^2 = \dfrac{-3}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{-5}{4} \notin \mathbb{Z}$.
Vậy $c = 0$ và $P(x) = x^2$. Thử đúng.

Các đa thức thỏa yêu cầu đề bài là

$$P(x) = 0, P(x) = 1, P(x) = x^2.$$

Lưu ý. Lời giải bài toán 16 này có nhiều lập luận tương tự như ở lời giải của bài toán 6 (ở trang 118).

Bài 17. Dễ thấy đa thức hằng không thỏa mãn yêu cầu đề bài. Do đó, trong lời giải này, ta giả thiết tường minh rằng đa thức cần tìm là đa thức khác hằng. Trước hết, ta nhắc lại (và không chứng minh lại) kết quả rất quen thuộc sau: *Nếu $P(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên và a, b là hai số nguyên, thì $P(a) - P(b)$ chia hết cho $(a - b)$.* Trở lại bài toán. Giả sử $P(x)$ là một đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài. Khi đó, tồn tại các số nguyên $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, trong đó n là bậc của $P(x)$ ($n \geq 1$, $P(x)$ là đa thức khác hằng), sao cho $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_{n+1})$, theo thứ tự đó, là các số nguyên liên tiếp. Theo định lí nêu trên, $x_{i+1} - x_i$ phải là ước của $1\ (= P(x_{i+1}) - P(x_i))$. Vì thế, với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$, ta đều có $(x_{i+1} - x_i) \in \{-1; 1\}$. Chỉ có thể xảy ra hai trường hợp sau:

1) *Trường hợp 1*: $x_2 - x_1 = 1$. Khi đó, nếu tồn tại chỉ số i, với $2 \leq i \leq n$, sao cho

$$x_i - x_{i-1} = 1,\ \ x_{i+1} - x_i = -1$$

thì từ đó suy ra, ta có $x_{i-1} = x_{i+1}$; dẫn tới, $P(x_{i-1}) = P(x_{i+1})$, là điều vô lí. Vì thế

$$x_{i+1} - x_i = 1,\ \text{với mọi } i = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Xét đa thức $Q(x) = P(x) - x - P(x_1) + x_1$. Ta có:

$$Q(x_1) = P(x_1) - x_1 - P(x_1) + x_1 = 0.$$

Với mỗi $k = 2, 3, \ldots, n+1$, do $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_k)$, theo thứ tự đó, là k số nguyên liên tiếp, và $x_1, x_2, \ldots, x_k$, theo thứ tự đó, cũng là k số nguyên liên tiếp (theo (1)), nên ta có:

$$Q(x_k) = (P(x_k) - P(x_1)) - (x_k - x_1) = 0.$$

Do đó, $Q(x)$ có ít nhất $n + 1$ nghiệm . (2)
Mặt khác, từ định nghĩa đa thức $Q(x)$, hiển nhiên có $\deg Q(x) \leq \deg P(x) = n$. Vì thế, từ (2) suy ra, $Q(x) \equiv 0$. Do đó $P(x) = x + c$, với c là một hằng số nguyên.

2) *Trường hợp 2*: $x_2 - x_1 = -1$. Khi đó, bằng cách xét tương tự như ở trường hợp 1, ta cũng chứng minh được

$$x_{i+1} - x_i = -1,\ \text{với mọi } i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

Xét đa thức $S(x) = P(x) + x - P(x_1) - x_1$. Ta có:

$$S(x_1) = P(x_1) + x_1 - P(x_1) - x_1 = 0.$$

Với mỗi $k = 2, 3, \ldots, n+1$, do $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_k)$, theo thứ tự đó, là k số nguyên liên tiếp, và $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1$, theo thứ tự đó, cũng là k số nguyên liên tiếp (theo (3)), nên ta có:

$$S(x_k) = (P(x_k) - P(x_1)) - (x_1 - x_k) = 0.$$

Do đó, $S(x)$ có ít nhất $n + 1$ nghiệm. (4)
Mặt khác, từ định nghĩa đa thức $S(x)$, hiển nhiên có $\deg S(x) = \deg P(x) = n$. Vì thế, từ (4) suy ra, $S(x) \equiv 0$. Do đó $P(x) = -x + c$ với c là một hằng số nguyên.

Tóm lại, nếu $P(x)$ là đa thức thỏa mãn các yêu cầu đề bài thì $P(x) = x + c$, hoặc $P(x) = -x + c$, với c là một hằng số nguyên tùy ý. Ngược lại, bằng kiểm tra trực tiếp, dễ thấy, tất cả các đa thức $P(x)$ vừa nêu trên thỏa mãn tất cả các yêu cầu của đề bài. Vì thế, chúng là tất cả các đa thức cần tìm.

Bài 18. Giả sử $k \le 2016$. Ta đặt

$$Q(x) = P(x) + (x - n_1) \cdots (x - n_k).$$

Khi đó $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $Q(x)$ monic, $\deg Q(x) = 2017$, và $P(n_i) = Q(n_i)$ với $i = 1, \ldots, k$. Do đó

$$P(n_1) P(n_2) \cdots P(n_k) = Q(n_1) Q(n_2) \cdots Q(n_k),$$

Như vậy, cả hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ cùng thỏa mãn các dữ liệu thầy giáo đưa ra, do đó học sinh không thể biết chính xác đa thức mà thầy giáo đang nghĩ đến. Do đó $k \ge 2017$. Ta chứng minh với $k = 2017$ thì tồn tại một đa thức thỏa mãn các dữ liệu mà thầy giáo đưa ra. Giả sử thầy giáo chọn đa thức

$$P(x) = 1 + (x - n_1) \cdots (x - n_{2017}).$$

và $n_i = 4i$, $i = 1, \ldots, 2017$. Khi đó

$$P(n_1) P(n_2) \cdots P(n_k) = 1.$$

Giả sử đa thức mà học sinh tìm được là $Q(x)$ monic hệ số nguyên, bậc 2017. Khi đó

$$Q(n_1) Q(n_2) \cdots Q(n_k) = 1,$$

mà $Q(n_i) \in \mathbb{Z}$ nên $Q(n_i) = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, 2017)$. Giả sử có hai số phân biệt

$$r, s \in \{1, 2, \ldots, 2017\}$$

sao cho $Q(n_r) = 1$, $Q(n_s) = -1$. Do $Q(x)$ hệ số nguyên

$$2 = Q(n_r) - Q(n_s) = Q(4r) - Q(4s) \vdots 4(r - s) \Rightarrow 4 \mid 2,$$

vô lý. Do đó

$$Q(n_i) = 1,\ \forall i = 1, 2, \ldots, 2017 \quad \text{hoặc} \quad Q(n_i) = -1,\ \forall i = 1, 2, \ldots, 2017.$$

Nếu $Q(n_i) = -1,\ \forall i = 1, 2, \ldots, 2017$ thì

$$Q(n_1) Q(n_2) \cdots Q(n_{2017}) = (-1)^{2017} = -1,$$

ta gặp mâu thuẫn. Do đó

$$Q(n_i) = 1,\ \forall i = 1, 2, \ldots, 2017.$$

Mà $P(n_i) = 1,\ \forall i = 1, 2, \ldots, 2017$ nên suy ra đa thức $P(x) - Q(x)$ có ít nhất 2017 nghiệm. Lại có bậc của đa thức $P(x) - Q(x)$ nhỏ hơn hoặc bằng 2016 nên suy ra $Q(x) = P(x)$. Vậy số k nhỏ nhất để đa thức mà học sinh tìm được chắc chắn là đa thức mà thầy giáo đang nghĩ là 2017.

Bài 19. Do yêu cầu mỗi nghiệm thực của $P(x) = a$ đều lớn hơn 1995 nên chỉ xét các đa thức $P(x)$ có bậc $n \ge 1$.

- ☑ Xét đa thức $P(x)$ bậc n là hàm đơn điệu trên $(-\infty; +\infty)$ thỏa mãn đề bài. Do đồ thị hàm $P(x)$ chỉ có hữu hạn điểm uốn nên với a đủ lớn và $a > 1995$ thì $P(x) = a$ chỉ có tối đa một nghiệm (mỗi nghiệm được tính với số bội của nó), suy ra $n = 1$ và $P(x)$ có dạng $bx + c$ với $b > 0$; nghiệm của $P(x)$ là $x = \dfrac{a - c}{b}$. Ta có $x > 1995$ với mọi $a > 1995$ khi và chỉ khi $b > 0$ và $c \le 1995(1 - b)$.

☑ Xét đa thức $P(x)$ là hàm số có cực trị trên $(-\infty;+\infty)$ thỏa mãn đề bài thì $n \geq 2$. Giả sử $P(x)$ đạt cực đại tại m điểm $u_1; u_2; \ldots; u_m (m \geq 1)$ và đạt cực tiểu tại k điểm v_1; v_2; $\ldots$; v_k $(k \geq 1)$. Đặt

$$d = \max\{P(u_1); P(u_2); \ldots; P(u_m); P(v_1); P(v_2); \ldots; P(v_k)\}.$$

Do đồ thị hàm $P(x)$ chỉ có hữu hạn điểm uốn nên với a đủ lớn và $a > \max\{d, 1995\}$, thì $P(x) = a$ chỉ có tối đa hai nghiệm (mỗi nghiệm được tính với số bội của nó), suy ra $n = 2$. Nhưng nếu $P(x)$ là tam thức bậc hai với a đủ lớn và $a > 1995$ thì $P(x) = a$ chỉ có tối đa một nghiệm lớn hơn 1995, đa thức đó lại không thỏa mãn đề bài.

Vậy mọi đa thức $P(x)$ thỏa mãn đề bài có dạng $P(x) = bx + c$ với $b > 0$ và $c \leq 1995(1 - b)$.

Bài 20. Nếu $\deg(f) = 1$, tức là $f(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ thì rõ ràng

$$g(x) = \cos(ax + b)$$

là hàm số tuần hoàn. Tiếp theo ta giả sử $\deg(f) = n$, với n là số tự nhiên lớn hơn 1. Ta có bổ đề 8 sau:

Bổ đề 8. Cho hàm $h(x)$ xác định và có đạo hàm với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó nếu h là hàm số tuần hoàn thì đạo hàm của nó cũng là hàm số tuần hoàn.

Chứng minh. Vì h là hàm số tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại $T > 0$ sao cho:

$$h(x + T) = h(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$\begin{aligned} &h'(x + T)(x + T)' = h'(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &h'(x + T) = h'(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $h'(x)$ là hàm số tuần hoàn trên $\mathbb{R}$. Do đó bổ đề 8 được chứng minh.

Bổ đề 9. Nếu hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và tuần hoàn (tức là f liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $T > 0$ sao cho $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$) thì có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Chứng minh. Theo giả thiết suy ra hàm số f liên tục trên đoạn $[0; T]$, do đó suy ra hàm f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; T]$; nghĩa là tồn tại a và b thuộc đoạn $[0; T]$ sao cho

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \ \forall x \in [0; T]. \tag{1}$$

Từ giả thiết $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ta chứng minh được

$$f(x + nT) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Giả sử $x \in \mathbb{R}$, khi đó chỉ có ba khả năng sau có thể xảy ra.

(1) Khả năng 1: $x \in [0; T]$. Khi đó do (1) nên $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

(2) Khả năng 2: $x > T$. Khi đó, do

$$[0; +\infty) = [0; T) \cup [T; 2T) \cup [2T; 3T) \cup \cdots \cup [\ell T; (\ell + 1)T) \cup \cdots$$

nên tồn tại số nguyên dương n và số x_0 thuộc đoạn $[0; T]$ sao cho $x = x_0 + nT$, do đó

$$f(x) = f(x_0 + nT) \overset{(2)}{=} f(x_0) \overset{(1)}{\in} [f(a); f(b)].$$

(3) Khả năng 3: $x < 0$. Khi đó, tồn tại số nguyên n và số x_0 thuộc đoạn $[0;T]$ sao cho $x = x_0 + nT$, do đó

$$f(x) = f(x_0 + nT) \overset{(2)}{=} f(x_0) \overset{(1)}{\in} [f(a); f(b)].$$

Như vậy khả năng nào thì cũng dẫn tới kết quả $f(a) \le f(x) \le f(b)$. Điều này cũng có nghĩa là $f(a)$, $f(b)$ tương ứng là giá trị bé nhất, giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$. Bổ đề 9 được chứng minh. Quay lại bài toán 20. Do $g(x) = \cos(f(x))$ là hàm tuần hoàn nên theo bổ đề 8, hàm số

$$g'(x) = -f'(x)\sin(f(x))$$

cũng là hàm số tuần hoàn trên $\mathbb{R}$. Vì $f'(x)$ là đa thức có bậc $n-1 \ge 1$ nên

$$\lim_{x\to+\infty} |f'(x)| = +\infty.$$

Ta có $f(x)$ là đa thức nên nó là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Chỉ có thể xảy ra một trong hai trường hợp sau:

- ☑ Trường hợp 1: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Khi đó hàm số $f(x)$ đồng biến khi x đủ lớn, tức là tồn tại số $M > 0$ đủ lớn sao cho hàm số f đồng biến trên khoảng $(M; +\infty)$. Vì hàm số f liên tục nên
  tồn tại x_1 sao cho $f(x_1) = \dfrac{\pi}{2} + 1.2\pi$;
  tồn tại x_2 sao cho $f(x_2) = \dfrac{\pi}{2} + 2.2\pi$;
  tồn tại x_k sao cho $f(x_k) = \dfrac{\pi}{2} + k.2\pi$.
  Như vậy, tồn tại dãy số (x_k) $(k = 1, 2, \ldots)$ sao cho $f(x_k) = \dfrac{\pi}{2} + k.2\pi$. Ta có thể giả sử dãy số (x_k) tăng nghiêm ngặt đến $+\infty$. Thật vậy, chọn số nguyên dương k_1 đủ lớn sao cho $\dfrac{\pi}{2} + k_1.2\pi > f(M+1)$, khi đó do hàm số f liên tục và tăng nghiêm ngặt trên khoảng $(M; +\infty)$ nên $x_{k_1} > M + 1$. Do hàm số f liên tục và tăng nghiêm ngặt trên khoảng $(M; +\infty)$ nên tồn tại $x_{k_1+1} > x_{k_1}$ sao cho $f\left(x_{k_1+1}\right) = \dfrac{\pi}{2} + (k_1+1).2\pi$. Do hàm số f liên tục và đồng biến trên khoảng $(M; +\infty)$ nên tồn tại $x_{k_1+2} > x_{k_1+1}$ sao cho $f\left(x_{k_1+2}\right) = \dfrac{\pi}{2} + (k_1+2).2\pi$. Cứ như vậy suy ra tồn tại dãy số (x_k) tăng nghiêm ngặt (kể từ một chỉ số nào đó) sao cho:

  $$f(x_k) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k = 1, 2, \ldots).$$

  Dãy số (x_k) không bị chặn trên, vì nếu tồn tại số L (có thể giả sử $L > M + 1$) sao cho $|x_k| < L$ với mọi k, khi đó do

  $$\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\right) = +\infty$$

  nên tồn tại số nguyên dương ℓ sao cho $\dfrac{\pi}{2} + \ell.2\pi > f(L)$, mà f liên tục và tăng nghiêm ngặt trên khoảng $(M; +\infty)$ nên tồn tại $x_\ell > L$ sao cho $f(x_\ell) = \dfrac{\pi}{2} + \ell.2\pi$, ta gặp mâu thuẫn. Vậy dãy (x_k) tăng nghiêm ngặt và không bị chặn trên nên $x_k \to +\infty$ khi $k \to +\infty$. Ta có

  $$|g'(x_k)| = |f'(x_k)\sin(f(x_k))| = |f'(x_k)| \to +\infty \text{ (khi } k \to +\infty).$$

  Điều này trái với giả thiết $g'(x)$ là hàm tuần hoàn liên tục (do bổ đề 9).

- ☑ Trường hợp 2: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Tương tự như trường hợp 1, cũng dẫn tới điều mâu thuẫn.

Vậy đa thức thỏa mãn các yêu cầu đề bài là $f(x) = ax + b,\ \forall x \in \mathbb{R}$ trong đó a và b là hằng số, $a \neq 0$.
Lưu ý. Tương tự, ta giải được bài toán: *Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $f(x)$, bậc lớn hơn hoặc bằng 1 và thỏa mãn: hàm số $g(x) = \sin(f(x))$ là hàm tuần hoàn trên $\mathbb{R}$.*

Bài 21. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ với hệ số thực sao cho

$$\sin P(x) = P(\sin x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Trước hết ta chú ý rằng $P(x) = 0$ và $P(x) = \pm x$ là các nghiệm của bài toán. Ta sẽ chứng minh ngoài các nghiệm đó bài toán không còn nghiệm nào khác. Giả sử $P(x) = ax + b$ là nghiệm của bài toán thì

$$\sin(ax + b) = a\sin x + b,\ x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây, ta lấy $x = 0$ thu được $\sin b = b$ hay $b = 0$. Lấy $x = \pi$ ta được

$$\sin \pi a = 0 \Leftrightarrow \pi a = k\pi \Leftrightarrow a = k\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Lấy $x = \dfrac{\pi}{2}$ ta được

$$\sin\frac{\pi a}{2} = a \underset{a=k}{\overset{\text{do}}{\Leftrightarrow}} \sin\frac{k\pi}{2} = k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = \pm 1. \end{array}\right.$$

Do đó ta thu được các nghiệm đã kể trên. Giả sử $\deg P(x) \geq 2$.
Cách 1. Ta giả sử đa thức $P(x)$ có hệ số bậc cao nhất dương (trường hợp đa thức $P(x)$ có hệ số bậc cao nhất âm được giải quyết tương tự).
Do $P(x)$ là đa thức nên nó chỉ có hữu hạn nghiệm trong đoạn $[-1;1]$. Gọi $t_1, t_2, \ldots, t_n$ là tất cả các nghiệm của $P(x)$ trên đoạn đoạn $[-1;1]$. Xét phương trình

$$P(\sin x) = 0\ \ (x \in [s; s+1]). \tag{1}$$

Đặt $t = \sin x$. Khi đó (1) trở thành

$$P(t) = 0\ \ (t \in [-1;1]). \tag{2}$$

Bởi vì với mỗi $t \in [-1;1]$ thì phương trình

$$\sin x = t\ \ (x \in [s; s+1])$$

có không quá 2 nghiệm (do $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + m2\pi \end{array}\right.$ $(m, n \in \mathbb{Z})$); kết hợp với phương trình (2) có đúng n nghiệm, suy ra phương trình (1) có không quá $2n$ nghiệm.
Mặt khác, do $\deg P \geq 2$ và đa thức $P(x)$ có hệ số bậc cao nhất dương nên $\deg P' \geq 1$ và đa thức đạo hàm P' có hệ số dẫn đầu dương. Do đó tồn tại $M > 0$ để $P'(x)$ tăng ngặt trên nửa khoảng $[M; +\infty)$. Ta có $P'(x) \to +\infty$ khi $x \to +\infty$. Đặc biệt, có một đoạn $[s; s+1]$ thỏa

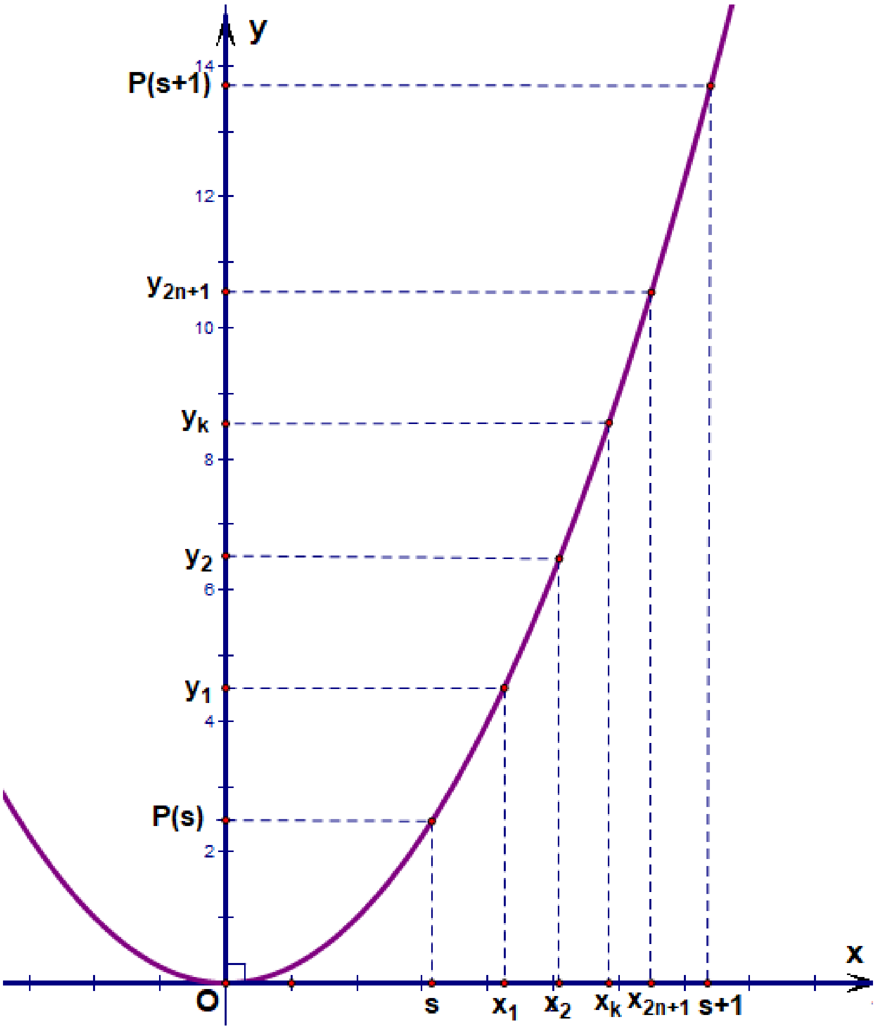
$$P'(x) > (2n+1)\pi, \forall x \in [s; s+1].$$

Theo định lí Lagrange, tồn tại $\ell \in [s; s+1]$ sao cho

$$\frac{P(s+1) - P(s)}{s + 1 - s} = P'(\ell) > (2n+1)\pi.$$

Như thế, $P(s+1) - P(s) > (2n+1)\pi$. Vì vậy, đoạn $[P(s); P(s+1)]$ chứa ít nhất $2n+1$ bội của π, giả sử là

$$y_1 = \ell_1\pi < y_2 = \ell_2\pi < \cdots < y_{2n+1} = \ell_{2n+1}\pi \left(\ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_{2n+1}; \ell_j \in \mathbb{Z}\right).$$



Do $P(x)$ là hàm liên tục nên theo định lí giá trị trung gian, tồn tại

$$s < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n+1} < s+1$$

sao cho $P(x_j) = y_j, j = 1, 2, \ldots, 2n+1$. Do

$$\sin P\left(x_j\right) = \sin y_j = \sin(\ell_j\pi) = 0,\ \forall j = 1, 2, \ldots, 2n+1$$

nên phương trình $\sin P(x) = 0$ nhận $2n+1$ số $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ làm nghiệm. Như vậy, trên đoạn $[s; s+1]$ thì phương trình $P(\sin x) = 0$ và $\sin P(x) = 0$ có số nghiệm khác nhau, do đó không thể có

$$\sin P(x) = P\left(\sin x\right),\ \forall x \in [s; s+1].$$

Vậy các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài bao gồm $P(x) = 0;\quad P(x) = x;\quad P(x) = -x.$
Cách 2. Giả sử $d = \deg P \geq 2$. Với k là số nguyên, ta có

$$\sin\left(P(x+k2\pi)\right) = P\left(\sin(x+k2\pi)\right) = P\left(\sin x\right) = \sin\left(P(x)\right).$$

Như vậy với số nguyên k và số thực x, ta có

$$\sin\left(P(x)\right) = \sin\left(P(x+k2\pi)\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(P(x)\right) = \cos\left(P(x+k2\pi)\right)\\ \cos\left(P(x)\right) = -\cos\left(P(x+k2\pi)\right).\end{array}\right. \tag{t1}$$

Từ $P(\sin x) = \sin(P(x))$, đạo hàm hai vế ta được

$$\cos x \cdot P'(\sin x) = P'(x) \cdot \cos(P(x)), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{t2}$$

Ta chọn số thực x_0 sao cho $\cos(P(x_0)) \neq 0$ và xét dãy số (x_k) như sau:

$$x_k = x_0 + k2\pi, \ k = 1, 2, \ldots, 2d.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} &\cos x_k \cdot P'(\sin x_k) = \cos x_0 \cdot P'(\sin x_0), \ \forall k = 1, 2, \ldots, 2d \\ &\overset{(t2)}{\Rightarrow} P'(x_k) \cdot \cos(P(x_k)) = P'(x_0) \cdot \cos(P(x_0)), \ \forall k = 1, 2, \ldots, 2d \end{aligned} \tag{t3}$$

Do (t1) nên từ (t3) suy ra $\left[\begin{array}{l} P'(x_k) = P'(x_0) \\ P'(x_k) = -P'(x_0) \end{array}\right.$

Như vậy nếu $\alpha \in \{x_1, x_2, \ldots, x_{2d}\}$ thì α phải là là nghiệm của đa thức $P'(x) - P'(x_0)$ hoặc là nghiệm đa thức $P'(x) + P'(x_0)$. Do đó trong hai đa thức

$$P'(x) - P'(x_0), \ P'(x) + P'(x_0)$$

phải có ít nhất một đa thức có bậc lớn hơn hoặc bằng d.

- ☑ Nếu đa thức $P'(x) + P'(x_0)$ có bậc lớn hơn hoặc bằng d, thì đa thức $P'(x)$ có bậc lớn hơn hoặc bằng d, mâu thuẫn với $d = \deg P \geq 2$.
- ☑ Nếu đa thức $P'(x) - P'(x_0)$ có bậc lớn hơn hoặc bằng d, thì đa thức $P'(x)$ có bậc lớn hơn hoặc bằng d, mâu thuẫn với $d = \deg P \geq 2$.

Trường hợp nào cũng dẫn tới mâu thuẫn. Do đó $\deg P \leq 1$.
Vậy các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài bao gồm $P(x) = 0$; $\quad P(x) = x$; $\quad P(x) = -x$.
Cách 3. Đặt $f(x) = \sin(P(x)), \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Khi đó $f'(x) = \cos(P(x)) \cdot P'(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$. (t4)
Ta giả sử đa thức $P(x)$ có hệ số bậc cao nhất dương (trường hợp đa thức $P(x)$ có hệ số bậc cao nhất âm được giải quyết tương tự). Khi đó tồn tại $N > 0$ sao cho với mỗi $y \in (N; +\infty)$, tồn tại $x \in \mathbb{R}$ để $P(x) = y$. Chọn x_0 thỏa mãn $\cos(P(x_0)) = 1$ (chọn số nguyên dương k đủ lớn để $k2\pi > N$, khi đó tồn tại x_0 để $P(x_0) = k2\pi$, và lúc này $\cos(P(x_0)) = 1$). Ta có

$$\begin{aligned} &\sin(P(x + 2n\pi)) = \sin(P(x)), \ \forall x \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \ldots \\ \Rightarrow &\cos^2(P(x + 2n\pi)) = \cos^2(P(x)), \ \forall x \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \ldots \\ \Rightarrow &|\cos(P(x + 2n\pi))| = |\cos(P(x))|, \ \forall x \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \ldots \\ \Rightarrow &|\cos(P(x_0 + 2n\pi))| = 1, \ \forall n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{t5}$$

Ta có $f'(x_0 + 2n\pi) = \cos(P(x_0 + 2n\pi)) \cdot P'(x_0 + 2n\pi) = P'(x_0 + 2n\pi)$. Như vậy

$$f'(x_0 + 2n\pi) = P'(x_0 + 2n\pi), \ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Hàm số f liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$f(x) = \sin(P(x)) = P(\sin x) = P(\sin(x + 2\pi)) = \sin(P(x + 2\pi)) = f(x + 2\pi)$$

nên hàm số f tuần hoàn với chu kỳ 2π. Theo bổ đề 8 (ở trang 155) suy ra hàm số f' cũng hoàn với chu kỳ 2π. Mà hàm số f' liên tục nên theo bổ đề 9 (ở trang 155) suy ra hàm số f' bị chặn, nghĩa là tồn tại số $M > 0$ sao cho

$$|f'(x)| \leq M, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ (t4) suy ra

$$\left|\cos\left(P(x)\right)\cdot P'(x)\right| \le M,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{t6}$$

Do $\deg P(x) \ge 2$ nên $\deg P'(x) \ge 1$; do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} |P'(x_0+2n\pi)| = +\infty$. Từ (t6) ta có

$$\left|\cos\left(P(x_0+2n\pi)\right)\cdot P'(x_0+2n\pi)\right| \le M,\ \forall n = 1,2,\ldots \tag{t7}$$

Từ (t7) và (t5) ta có

$$\left|P'(x_0+2n\pi)\right| \le M,\ \forall n = 1,2,\ldots \tag{t8}$$

Từ (t8) cho $n \to +\infty$ ta nhận được mâu thuẫn. Do đó $\deg P \le 1$.
Vậy các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài bao gồm $P(x) = 0;\quad P(x) = x;\quad P(x) = -x.$

Bài 22. Giả sử tồn tại đa thức $p(x)$ hệ số thực thỏa mãn điều kiện sau: tồn tại một đa thức hệ số thực $q(x)$ sao cho

$$p(1)+p(2)+p(3)+\cdots+p(n) = p(n)q(n),\ \forall n = 1,2,\ldots \tag{1}$$

Bổ đề 10. Với n là số nguyên dương thì $P_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ $(k \in \mathbb{N})$ là một đa thức bậc $k+1$, có hệ số của n^{k+1} là $\dfrac{1}{k+1}$.

Chứng minh. Ta có $(1+i)^{k+1} - i^{k+1} = \sum\limits_{j=0}^{k} C_{k+1}^{j} i^j$. Cho i chạy từ 1 đến n rồi cộng lại, vế theo vế, ta được

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{j=0}^{k} C_{k+1}^{j} P_j(n) = \sum_{j=0}^{k-1} C_{k+1}^{j} P_j(n) + (k+1)P_k(n).$$

Do đó

$$P_k(n) = \frac{(n+1)^{k+1} - 1 - \sum\limits_{j=0}^{k-1} C_{k+1}^{j} P_j(n)}{k+1}.$$

Từ đây, và chú ý rằng

$$1^0 + 2^0 + \cdots + n^0 = n,\ \ 1^1 + 2^1 + \cdots + n^1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

bằng quy nạp ta suy ra bổ đề 10 được chứng minh. Quay lại bài toán. Dễ thấy đa thức hằng (lúc này tồn tại đa thức $q(x) = x$) thỏa mãn các yêu cầu đề bài, do đó từ đây về sau ta giả sử $p(x)$ khác đa thức hằng, $\deg p = d > 0$ và

$$p(x) = cx^d + \cdots$$

Theo bổ đề 10 (Bạn đọc có thể tham khảo thêm bài toán **??** ở trang **??**) suy ra vế phải của (1) là một đa thức bậc $d+1$, do đó $\deg q = 1$. Do hệ số của n^{d+1} trong đa thức $\sum\limits_{k=1}^{n} k^d$ là $\dfrac{1}{d+1}$, nên hệ số của n trong $q(n)$ phải là $\dfrac{1}{d+1}$. Do đó ta đặt $q(x) = \dfrac{1}{d+1}(x+r)$. $(*)$
Ta có

$$p(1)+p(2)+p(3)+\cdots+p(n) = p(n)q(n)$$

và

$$p(1)+p(2)+p(3)+\cdots+p(n)+p(n+1) = p(n+1)q(n+1).$$

Suy ra
$$p(n+1) = p(n+1)q(n+1) - p(n)q(n).$$
Do đó
$$p(n)q(n) = p(n+1)[q(n+1) - 1]$$
với mọi số nguyên dương n. Mà p và q là những đa thức nên ta thu được
$$p(x)q(x) = p(x+1)[q(x+1) - 1]$$
với mọi số thực x. Bây giờ ta viết
$$p(x) \cdot \frac{1}{d+1}(x+r) = p(x+1)\left[\frac{1}{d+1}(x+r+1) - 1\right]$$
hay
$$(x+r)p(x) = (x+r-d)p(x+1) \tag{**}$$
Từ $(**)$ cho $x = -r$, ta được
$$(-d)p(-r+1) = 0$$
Do đó, $-r+1$ là một nghiệm của $p(x)$. Đặt $p(x) = (x+r-1)p_1(x)$. (1′)
Khi đó
$$(x+r)(x+r-1)p_1(x) = (x+r-d)(x+r)p_1(x+1)$$
hay
$$(x+r-1)p_1(x) = (x+r-d)p_1(x+1). \tag{2}$$
Nếu $d = 1$, thì $p_1(x)$ là đa thức hằng, do đó $(1')$ trở thành
$$p(x) = c(x+r-1).$$
Nếu $d > 1$ thì từ (2) cho $x = -r+1$, ta được
$$(1-d)p_1(-r+2) = 0.$$
Do đó, $-r+2$ là một nghiệm của $p_1(x)$. Đặt $p_1(x) = (x+r-2)p_2(x)$. Thay vào (2) ta được
$$(x+r-1)(x+r-2)p_2(x) = (x+r-d)(x+r-1)p_2(x+1)$$
hay
$$(x+r-2)p_2(x) = (x+r-d)p_2(x+1). \tag{3}$$
Nếu $d = 2$, thì $p_2(x)$ là đa thức hằng, do đó
$$p(x) = c(x+r-1)(x+r-2).$$
Nếu $d \geq 3$ thì tiếp tục quá trình như trên ta thu được
$$p(x) = c(x+r-1)(x+r-2)\cdots(x+r-d). \tag{4}$$
Và nếu $p(x)$ có dạng (4) thì
$$\begin{aligned}
p(x) &= c(x+r-1)(x+r-2)\cdots(x+r-d)\\
&= \frac{c(d+1)(x+r-1)(x+r-2)\cdots(x+r-d)}{d+1}\\
&= \frac{c[(x+r)-(x+r-d-1)](x+r-1)(x+r-2)\cdots(x+r-d)}{d+1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{c(x+r)(x+r-1)(x+r-2)\cdots(x+r-d)}{d+1} - \frac{c(x+r-1)(x+r-2)\cdots(x+r-d)(x+r-d-1)}{d+1}.$$

Thực hiện cộng $p(1)+p(2)+p(3)+\cdots+p(n)$ ta thu được

$$p(1)+p(2)+p(3)+\cdots+p(n) = \frac{c(n+r)(n+r-1)(n+r-2)\cdots(n+r-d)}{d+1} - \frac{cr(r-1)\cdots(r-d+1)(r-d)}{d+1}. \quad (5)$$

Từ (4) ta có

$$p(n)q(n) = c(n+r-1)(n+r-2)\cdots(n+r-d)q(n) \quad (6)$$

với $q(n)$ là đa thức theo n. Từ (6), (5), $(*)$ và giả thiết ta có

$$\frac{cr(r-1)\cdots(r-d+1)(r-d)}{d+1} = 0$$

hay $r \in \{0,1,2,\ldots,d\}$. Do đó

$$p(x) = c(x+r-1)(x+r-2)\cdots(x+r-d),$$

với $r \in \{0,1,2,\ldots,d\}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài 23. Chú ý rằng nếu $P(x)$ là một đa thức thỏa mãn, thì $P(x)+k$ và $-P(x)+k$ với k là số nguyên bất kỳ cũng là các đa thức thỏa mãn, vì vậy ta có thể giả sử rằng hệ số đầu tiên của $P(x)$ là dương và $P(0)=0$, tức là:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i, \text{ với } a_n > 0.$$

Ta sẽ chứng minh rằng $P(x) = x^n$ trong trường hợp này. Gọi p là số nguyên tố đủ lớn sao cho $p > \sum_{i=1}^{n} |a_i|$. Vì P có hệ số cao nhất dương và p đủ lớn, nên ta có thể tìm được $t \in \mathbb{R}$ sao cho $P(t) = p$. Suy ra ước chung lớn nhất của đa thức $P(x)-p$ và $P(2x)-P(2t)$ là $f(x)$ và t là một nghiệm của nó, vì vậy f là một đa thức khác hằng. Vì $P(2t)$ là một số nguyên (bằng cách sử dụng giả thuyết cho $s=2$ và t) nên $P(x)-p$ và $P(2x)-P(2t)$ là các đa thức có hệ số nguyên, vì thế có thể chọn f là đa thức với các hệ số hữu tỉ. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng f sai khác $P(x)-p$ một hằng số nhân không đổi. Giả sử $P(x)-p = f(x)g(x)$, trong đó f và g là các đa thức có bậc lớn hơn hoặc bằng 1. Khi đó tồn tại các đa thức hệ số nguyên f_1, g_1 sao cho $P(x)-p = f_1(x)g_1(x)$ trong đó

$$f_1(x) = k.f(x), \; g_1(x) = \ell.g(x), \; k, \ell \in \mathbb{Q}$$

và một trong hai đa thức f_1, g_1 có số hạng tự do là ± 1, có điều này là do

$$-p = P(0) - p = f(0)g(0)$$

với p nguyên tố. Vì vậy, $P(x)-p$ có ít nhất một nghiệm r với giá trị tuyệt đối không lớn hơn 1 (sử dụng hệ thức Vieta về tích các nghiệm đa thức), nhưng

$$|P(r)-p| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i r^i - p\right| > p - \sum_{i=1}^{n} |a_i| > 0,$$

mâu thuẫn! Do đó $P(x) - p = a.f(x)$ với a là hằng số, suy ra

$$P(2x) - P(2t) = b(P(x) - p)$$

ở đây b là hằng số vì $P(2x) - P(2t)$ và $P(x) - p$ đều cùng bậc. Bằng cách so sánh các hệ số cao nhất, ta có: $P(2x) - P(2t) = 2^n(P(x) - p)$ (tức là $b = 2^n$). So sánh phần còn lại của các hệ số, ta được $P(x) = a_n x^n$. Nếu chọn $a = b = \left(\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$, thì $P(a) = P(b) = 1$, vì vậy $P(ab)$ cũng phải là một số nguyên. Nhưng $P(ab) = \frac{1}{a_n}$. Do đó $a_n = 1$ và chứng minh hoàn tất. Vậy các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là $P(x) = x^n + k$, $P(x) = -x^n + k$ (với n một số nguyên không âm và k một số nguyên).

PHẦN III

KẾT LUẬN

1) Trong chuyên đề này, chúng tôi đã đưa ra các phương pháp giải toán, các dạng toán quan trọng nhất về Phương trình hàm Đa thức. Ở mỗi bài, chúng tôi đã cố gắng đưa ra hệ thống cở sở lý thuyết đầy đủ; các kinh nghiệm, lưu ý khi giải toán; các bài toán được lựa chọn mang tính thời sự và được sắp xếp từ dễ đến khó và có hệ thống (theo quan điểm cá nhân của tác giả). Trong mỗi bài toán, chúng tôi đã cố gắng phân tích, đưa ra ý tưởng dẫn dắt tới lời giải, phù hợp với thực tiễn giảng dạy học sinh chuyên toán trong thời kì hiện nay. Mỗi bài toán đều được trình bày lời giải cẩn thận, chi tiết, có thể có nhiều cách giải khác nhau; và sau mỗi lời giải chúng tôi có đưa ra những nhận xét, lưu ý, bình luận, và mối liên hệ với các bài toán khác.

2) Ngoài ra chúng tôi cũng đã xây dựng thêm các công cụ giải toán mới, từ đó có thể tổng quát hóa, khái quát hóa một số bài toán hay và khó. Chẳng hạn như các bài toán 9 (ở trang 12), 10 (ở trang 12), 11 (ở trang 12) được xem như các công cụ giải toán mới, giúp ta giải được các bài toán tổng quát 15 (ở trang 13), 17 (ở trang 13), 33 (ở trang 33) . . . Trong chuyên đề này có rất nhiều bài toán đã được chúng tôi biên tập lại, trình bày lại lời giải rõ ràng, dễ hiểu, dễ tiếp cận.

3) Chúng tôi cũng đã cố gắng tuyển chọn, hệ thống các bài toán từ nhiều nguồn tài liệu khác nhau, chủ yếu từ các đề thi học sinh giỏi quốc tế, khu vực, quốc gia, các nước gần đây, mục đích làm rõ các dạng toán cũng như phương pháp giải toán Phương trình hàm Đa thức.

4) Các ý tưởng về phương pháp giải toán đã được chúng tôi tổng hợp, hình thành trong nhiều năm giảng dạy chuyên toán và một số đã được chúng tôi trình bày ở những lớp bồi dưỡng đội tuyển học sinh giỏi của các tỉnh, thành phố hàng năm. Hy vọng chuyên đề nhỏ này sẽ góp một phần nhỏ vào quá trình bồi dưỡng đội tuyển học sinh giỏi quốc gia của các đồng nghiệp và chúng tôi cũng rất mong nhận được các ý kiến đóng góp của các thầy cô để chuyên đề ngày càng hoàn thiện hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Lê Hoành Phò-Nguyễn Văn Nho-Nguyễn Tài Chung, 2013, *Chuyên Khảo Đa thức*, Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà Nội.

[2] Nguyễn Tài Chung, 2014, *Phương trình hàm*, Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà Nội.

[3] Nguyễn Tài Chung, 2013, *Chuyên khảo Dãy số*, NXB Đại Học Quốc gia Hà Nội.

[4] Nguyễn Tài Chung, 2018, *Đa thức CHEBYSHEV và ứng dụng trong giải toán*, Kỷ yếu Gặp gỡ toán học.

[5] Nguyễn Tài Chung, Huỳnh Thanh Luân, Trần Minh Vũ, Nguyễn Thành Nhân, Huỳnh Kim Linh, Trịnh Khắc Tuân, 2021, *Chuyên đề Đa thức bồi dưỡng học sinh giỏi*, NXB Đại Học Quốc gia Hà Nội.

[6] Phạm Viết Huy, 2016, *Tính chất số học trong một số bài toán về đa thức nguyên*, Kỷ yếu hội thảo khoa học bồi dưỡng học sinh giỏi Duyên Hải Bắc Bộ.

[7] Đàm Văn Nhỉ-Văn Đức Chín-Trần Thị Hồng Dung-Lê Xuân Dũng-Trần Trung Tình-Đào Ngọc Dũng-Đặng Xuân Sơn-Nguyễn Anh Tuấn, 2017, *Đa thức-Chuỗi và chuyên đề nâng cao,* Nhà xuất bản Thông tin và truyền thông.

[8] Nguyễn Hữu Điển, 2003, *Đa thức và ứng dụng,* Nhà xuất bản Giáo dục.

[9] Nguyễn Văn Mậu, 2004, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỉ,* Nhà xuất bản Giáo dục.

[10] Tống Hữu Nhân, 2021, *Phương trình hàm đa thức từ đẳng thức đối xứng ba biến*, Kỷ yếu Gặp gỡ toán học.

[11] Victor V. Prasolov, 1999, *Polynomials,* Springer.

[12] Peter Borwein Tamás Erdélyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities,* Springer.

[13] John Mason, David Handscomb, 2002, *CHEBYSHEV POLYNOMIALS*, CHAPMAN & HALL/CRC; A CRC Press Company Boca Raton London New York Washington, D.C.

[14] Titu Andreescu, Navid Safaei, Alessandro Ventullo, 2019, 117 Polynomial Problems From the AwesomeMath Summer Program, XYZ Press, LLC

[15] Titu Andreescu, Navid Safaei, Alessandro Ventullo, 2021, Awesome Polynomials for Mathematics Competitions, XYZ Press, LLC