------------------ꕥꕥꕥ------------------

CHUYÊN ĐỀ :

TỪ GÓC NHÌN CỦA ƯỚC SỐ

MỤC LỤC

Chuyên đề: TỪ GÓC NHÌN CỦA ƯỚC SỐ

Phần 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

1. Lý do chọn đề tài.

Chúng ta đều biết câu ngạn ngữ ở phương tây: "Toán học là vua của mọi khoa học nhưng Số học là nữ hoàng!". Ta có cảm giác số học không có "tuổi già", mỗi lần làm việc với nó đều đem lại cho ta những cảm giác thú vị. Điều đó chứng tỏ số học có vẻ đẹp tiềm ẩn bên trong, chỉ có những ai tiếp xúc với số học mới thấy sự hấp dẫn mà nó đem lại.

Trong các đề thi học sinh giỏi Toán từ cấp huyện đến cấp quốc gia và quốc tế luôn có bài toán số học. Vai trò của bài số học thường để phân hóa thí sinh nên dĩ nhiên là khó! Mỗi con số nguyên, tự bản thân nó chứa những tính chất riêng biệt, tùy theo từng điều kiện của bài toán mà khai thác các đặc tính đó. Có thể nói *chia hết* xuất hiện khắp nơi trên mảnh đất số học, nên vấn đề *ước số* của một số liên quan khá nhiều đến các tính chất của các số như nguyên tố, chính phương, số các ước số,…. Do đó tôi đặt vấn đề nghiên cứu đặc tính "*bên trong*" của các số nguyên trong mối quan hệ chia hết và từ "*bên trong*" nhìn ra để giải quyết một số bài toán số học.

2. Mục đích nghiên cứu.

Bài viết về **"Từ góc nhìn của ước số"** là những kinh nghiệm được tích lũy trong quá trình giảng dạy. Một số bài toán số học trong các kỳ thi học sinh giỏi tỉnh, thi Olympic, thi học sinh giỏi quốc gia và các nước trên thế giới. Các bài toán sẽ được nhìn dưới con mắt *ước số* để giải quyết.

Bài viết này hướng đến phục vụ chính cho các học sinh chuyên Toán, góp phần làm sáng thêm vẻ đẹp "*nữ hoàng*". Nhằm giúp các em tiếp cận và giải quyết bài toán một cách nhẹ nhàng và hợp lý không khiên cưỡng. Mỗi bài toán số học là mỗi cách giải quyết khác nhau, tùy vào tính chất của nó, khác với Đại số và Giải tích có thể angorit được lớp các vấn đề. Đó cũng là lý do tạo nên *vẻ đẹp* của Số học.

Bài viết không tránh khỏi những sai sót do cách nhìn chủ quan, rất mong được sự trao đổi và góp ý của các bạn và quý thầy cô.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu.

Nhằm làm sáng lên vẻ đẹp của suy luận số học thông qua việc giải một số bài toán số học dưới góc nhìn của ước số, bội số; đồng thời củng cố một số cách giải toán số học cho các học sinh chuyên toán của nhà trường trong những năm qua; bài viết này góp phần nâng cao và phát triển tư duy cho học sinh chuyên toán chuẩn bị tham dự các kỳ thi học sinh giỏi tỉnh, thi Olympic khu vực và thi học sinh giỏi quốc gia.

4. Đối tượng nghiên cứu.

Đối tượng nghiên cứu là học sinh lớp 10;11;12 chuyên Toán trong các năm qua. Đặc biệt là các đội tuyển dự thi Olympic khu vực và thi học sinh giỏi quốc gia.

Ngoài ra, bài viết này còn là tài liệu tham khảo cho học sinh và các đồng nghiệp trong trường.

5. Phạm vi nghiên cứu.

Hiện nay trên lĩnh vực môn Số học có rất nhiều sách viết khá đầy đủ, đặc biệt gần đây một số tác giả trẻ đã xuất bản những quyển sách rất công phu và cập nhật các đề thi của thế giới. Vì vậy bài viết này chỉ hạn chế trong các phạm vi sau:

- Về kiến thức: dựa trên các kiến thức của chương trình Số học của Bộ giáo dục cho các trường chuyên.
- Bài viết chỉ đi sâu khai thác các tính chất về ước số trong giải toán số học. Bài viết không giải quyết hết các dạng toán số học.
- Về nội dung: giới hạn trong chương trình chuyên toán, phù hợp với đối tượng học sinh trong đội tuyển.

6. Phương pháp nghiên cứu.

- Phương pháp trao đổi với đồng nghiệp, bạn bè, các sinh viên Toán và đặc biệt là các học sinh chuyên Toán trong đội tuyển.
- Phương pháp nghiên cứu lý luận: từ các tài liệu sách vở, từ các tạp chí và trên internet. Nghiên cứu các kiến thức hỗ trợ liên quan đến tính chia hết.
- Phương pháp tổng hợp, phân loại và khái quát hóa vấn đề.

7. Cấu trúc của chuyên đề.

Gồm ba phần:

- Phần đặt vấn đề.
- Phần tóm tắt nội dung lý thuyết và các khái niệm liên quan.
- Phần phân dạng bài tập. Mỗi bài toán đều có phần "tiếp cận bài toán", cuối mỗi bài có vài dòng "lời bàn" (qua góc nhìn chủ quan người viết), bài tập tự luyện.
- Phần hướng phát triển đề tài và kết luận.

Phần 2. PHẦN NỘI DUNG.

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

Trong bài viết này chỉ giới thiệu tóm tắt các kiến thức lý thuyết có liên quan. Xin không trình bày phần chứng minh chỉ nêu định lý và công thức (phần chứng minh đã có trong các giáo trình Số học).

I.1. TÍNH CHIA HẾT TRONG TẬP SỐ NGUYÊN.

***Định nghĩa 1*: Giả sử *a; b* là hai số nguyên, ta nói *a* chia hết cho *b* nếu tồn tại số nguyên *c* sao cho $a = b.c$. Khi đó ta còn nói *b* chia hết *a*; *a* là bội của *b*, còn *b* là ước của *a*.**

Ký hiệu: $a \vdots b$ hay $b \mid a$.

***Định nghĩa 2*:** Số nguyên dương $p > 1$ chỉ có hai ước số là 1 và *p*, gọi là số nguyên tố.

- Số nguyên dương $n > 1$ có nhiều hơn hai ước số gọi là hợp số.
- Ước số nhỏ nhất lớn hơn 1 của hợp số *a* không vượt quá $\sqrt{a}$.
- Nếu một số tự nhiên $a > 1$ không có ước số nguyên tố từ 1 đến $\sqrt{a}$ thì a là số nguyên tố.

***Định nghĩa 3*:** Với hai số nguyên không âm *a* và *b* (*b* khác 0) luôn tồn tại duy nhất một cặp số nguyên *q* và *r* sao cho $a = bq + r \ (0 \le r < b)$

Tính chất: Cho các số nguyên $a;\ b;\ c;\ d$

a. Nếu $a \mid b$ và $b \mid c$ thì $a \mid c$.
b. Nếu $a \mid b$ và $a \mid c$ thì $a \mid (mb + nc)$ với *m; n* là các số nguyên.
c. Nếu $a \mid b$ và $c \mid d$ thì $ac \mid bd$.
d. Nếu $b \mid a_i \left(i = \overline{1;n}\right)$($i = \overline{1;n}$) thì $b \mid (a_1 + a_2 + \ldots. + a_n)$

I.2. ƯỚC SỐ CHUNG, BỘI SỐ CHUNG

Định nghĩa 4: Số nguyên dương *d* gọi là ƯCLN của hai số nguyên dương *a* và *b*, là số nguyên dương lớn nhất mà cả *a* và *b* cùng chia hết cho *d*, ký hiệu $d = \text{U}CLN(a;b)$ hay $d = \text{gcd}(a;b)$ hay viết gọn là $d = (a;b)$.

Khi *d* =1 ta nói hai số *a* và *b* nguyên tố cùng nhau, viết $(a;b) = 1$.

***Định nghĩa 5*:** Số nguyên dương *m* gọi là BCNN của hai số nguyên dương *a* và *b* là số nguyên dương nhỏ nhất mà chia hết cho cả *a* và *b*, ký hiệu $m = BCNN(a;b)$ hay $m = lcm(a;b)$ hay viết gọn là *m* =[*a*;*b*].

***Định nghĩa 6*:** Cho *n* số nguyên dương $a_1;\ a_2;\ldots.;a_n$.

a. Số nguyên dương *d* gọi là ƯCLN của $a_1;\ a_2;\ldots.;a_n$ nếu thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

+/ $a_i \vdots d \ \ (i = \overline{1;n})$

+/ Nếu có số nguyên dương *d'* mà $a_i \vdots d'$ $(i=\overline{1;n})$ thì $d \vdots d'$.

Ta viết $d=(a_1;\ a_2;\ldots;a_n)$

b. Số nguyên dương *m* gọi là BCNN của $a_1;\ a_2;\ldots;a_n$ nếu thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

+/ $m \vdots a_i$ $(\forall i=\overline{1;n})$

+/ Nếu có $m' \vdots a_i$ $(\forall i=\overline{1;n})$ *thì* $m' \vdots m$.

Ta viết $m=[a_1;\ a_2;\ldots;a_n]$

Các tính chất cơ bản

a. $(a;b)=d \Leftrightarrow a=d.a_1;\ b=d.b_1$ sao cho $(a_1;b_1)=1$

b. $m=[a;\ b] \Leftrightarrow m=a.b_1$ và $m=b.a_1$ sao cho $(a_1;\ b_1)=1$

c. $(a;b).[a;b]=a.b$

d. $(a;b)=(a;a+b);\ (a;\ b)=(a;a-b)$

e. $.(k.a;k.b)=k.(a;b);\ [ka;kb]=k[a;b]$.

f. $a.b \vdots c$ và $(a;c)=1$ thì $b \vdots c$

g. Nếu $(a;b)=d$ luôn tồn tại hai số nguyên *x; y* sao cho $ax+by=d$.

Thuật Toán Euclide:

Bổ đề cơ sở: Nếu $a=bq+r$ thì $(a;b)=(b;r)$

Tiếp tục quá trình đó ta có thuật toán:

$$(a;b)=(b;r_1)=(r_1;r_2)=\ldots=(r_{n-1};\ r_n)=r_n \quad (\text{với } r_{n-1}=kr_n)$$

I.3. ĐỒNG DƯ

Định nghĩa: Giả sử *a* và *b* là hai số nguyên. Ta nói *a* đồng dư với *b* modulo *m* nếu $m\,|\,(a-b)$.

Ta viết: $a\equiv b \pmod m$

Tính chất: Cho *p* là số nguyên tố

- Nếu $a\equiv b \pmod m$ thì $a=b+km$ (k là số nguyên)
- Nếu $a\equiv b \pmod m$ thì $b\equiv a \pmod m$
- Nếu $a\equiv b \pmod m$ và $b\equiv c \pmod m$ thì $a\equiv c \pmod m$
- Nếu $a\equiv b \pmod m$ và $c\equiv d \pmod m$ thì $a+c\equiv b+d \pmod m$
- Nếu *p* nguyên tố và $a.b\equiv 0 \pmod p$ thì $a\equiv 0 \pmod p$ hoặc $b\equiv 0 \pmod p$
- Nếu $a\equiv b \pmod m$ thì $a+c\equiv b+c \pmod m$; $a-c\equiv b-c \pmod m$
- Nếu $ac\equiv bc \pmod m$ và $(c;m)=1$ thì $a\equiv b \pmod m$

- Nếu $a \equiv b \pmod m$ với $k > 0$ thì $a^k \equiv b^k \pmod m$
- Nếu $a \equiv b \pmod{m_i}$ $(i = \overline{1;n})$ thì $a \equiv b \left(\bmod [m_1 m_2 \ldots m_n]\right)$
- $(a+b)^n \equiv b^n \pmod a$ $(a > 0)$

I.4. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA SỐ HỌC

Phân tích chuẩn của số nguyên dương:

***Định lý*:** Cho số nguyên dương $n > 1$, khi đó n luôn biểu diễn một cách duy nhất ở dạng phân tích chuẩn (chính tắc) $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}....p_k^{\alpha_k}$ với p_i là các số nguyên tố, $\alpha_i \in N$ (với $i = \overline{1;n}$)

+ Cho hai số nguyên dương

$a = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}....p_k^{\alpha_k}$ và $b = p_1^{\beta_1}.p_2^{\beta_2}....p_k^{\beta_k}$ $(\alpha_i \geq 0;\ \beta_i \geq 0; i = \overline{1;k})$ thì

$(a;b) = p_1^{x_1}.p_2^{x_2}....p_k^{x_k}$ $(x_i = \min(\alpha_i;\beta_i))$ và $[a;b] = p_1^{y_1}.p_2^{y_2}....p_k^{y_k}$ $(y_i = \max(\alpha_i;\beta_i))$

+ Định lý cơ bản về liên hệ giữa chia hết và số nuyên tố: Cho hai số nguyên dương *a; b* và số nguyên tố *p*. Nếu $a.b \vdots p$ thì $a \vdots p$ hoặc $b \vdots p$

Định lý Fermat: Nếu *p* nguyên tố và số nguyên *a* tùy ý thì $\left(a^p - a\right) \vdots p$

Nếu (*a; p*) = 1 thì $\left(a^{p-1} - 1\right) \vdots p$ hay $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

Định lý Euler: Cho *m* là số nguyên dương và $(a;m) = 1$ thì $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$, trong đó $\varphi(m)$ là số các số nguyên dương nhỏ hơn *m*, nguyên tố cùng nhau với *m*. ($\Phi(m)$ *hay* $\varphi(m)$ gọi phi hàm Euler)

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right).\left(1 - \frac{1}{p_2}\right).........\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \text{ với } n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\sigma_i}$$

***Định lý Wilson*:** p là số nguyên tố khi và chỉ khi $(p-1)! + 1$ chia hết cho *p* (hay $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$)

Định lý phần dư Trung Hoa: Cho n số nguyên dương: $m_1; m_2; \ldots; m_n$ nguyên tố cùng nhau từng đôi một thì hệ phương trình $\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$ có duy nhất một nghiệm $x \equiv x_0 \left(mod\ M\right)$ với $M = m_1.m_2\ldots.m_n$.

I.5. CÁC HÀM SỐ HỌC

a/ Hàm $\sigma(n)$ (tổng các ước số của *n*)

Cho số nguyên dương n, khi đó $\sigma(n)$ là tổng tất cả các ước tự nhiên của *n* (kể cả 1 và *n*)

+ hàm $\sigma(n)$ có tính chất nhân tính: $\sigma(n_1.n_2)=\sigma(n_1).\sigma(n_2)$ (với (n_1; n_2) =1)

+ Nếu p nguyên tố thì $\sigma(p)=p+1$

+ Nếu $n=p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}....p_k^{\alpha_k}$ thì $\sigma\left(n\right)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}.\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}....\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$

b/ Phi–hàm Euler $\varphi\left(n\right)$ **hay** $\phi\left(n\right)$

Cho *n* là số nguyên dương, ta định nghĩa $\varphi\left(n\right)$ là số các số không vượt quá *n* và nguyên tố cùng nhau với *n*.

+ hàm phi $\varphi\left(n\right)$ có tính chất nhân tính ($\varphi\left(ab\right)=\varphi\left(a\right)\varphi\left(b\right)$)

+ Nếu $n=p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}....p_k^{\alpha_k}$ thì $\varphi\left(n\right)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)....\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$

+ Đặc biệt nếu *p* là số nguyên tố thì $\varphi\left(p\right)=p-1$ và $\varphi\left(p^n\right)=p^n-p^{n-1}$

c/ Hàm S(n) tổng các chữ số của n

Cho *n* là số nguyên dương viết trong hệ thập phân, S(*n*) là tổng tất cả các chữ số của *n*

Các tính chất:

+ $0<S\left(n\right)\le n$, với mọi *n*

+ $S\left(n\right)=n\Leftrightarrow 0<n\le 9$

+ $S\left(m+n\right)\le S\left(m\right)+S\left(n\right)$

+ $S\left(m.n\right)\le S\left(m\right).S\left(n\right)$

d/ Hàm $\tau\left(n\right)$ (số lượng các ước số của *n*)

Cho *n* là số nguyên dương, ký hiệu $\tau\left(n\right)$ là số lượng các ước số nguyên dương của *n*

Các tính chất:

+ hàm $\tau\left(n\right)$ là hàm nhân tính

+ Nếu *p* nguyên tố thì $\tau\left(p\right)=2$

+ Nếu $n=p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}....p_k^{\alpha_k}$ thì $\tau\left(n\right)=\left(\alpha_1+1\right)\left(\alpha_2+1\right)....\left(\alpha_k+1\right)$

e/ Hàm phần nguyên $\left[x\right]$

Định nghĩa:

- Cho x là số thực, ta gọi phần nguyên của x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, ký hiệu là $[x]$
- Cho số thực x, ta gọi phần lẻ hay phần phân của x (ký hiệu là $\{x\}$) là số được định nghĩa như sau: $\{x\} = x - [x]$
- Cho số thực x, ta gọi số (x) là số nguyên gần x nhất, trong trường hợp có hai số nguyên cùng cách đều x ta quy ước chọn số nguyên lớn hơn.

Các tính chất cơ bản của $[x];\{x\},(x)$

+ $[x] = a \Leftrightarrow x = a + d$ với $0 \le d < 1;\ x - 1 < [x] \le x$

+ $[x + y] = x$ thì x là số nguyên và $0 \le y < 1$.

+ Nếu n là số nguyên thì $[n + x] = n + [x]$ và $\{n + x\} = \{x\}$

+ $[x + y] \ge [x] + [y]$

+ nếu n là số nguyên dương thì $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$

+ Nếu n là số tự nhiên $n[x] \le [nx]$

+ Với mọi số tự nhiên n và $q \ne 0$ thì $q\left[\frac{n}{q}\right] \le n$ và $n < q\left(1 + \left[\frac{n}{q}\right]\right)$

+ $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$

+ $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + ... + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$ với n là số nguyên dương

+ Trong dãy n số tự nhiên 1;2;3;…;n có đúng $\left[\frac{n}{q}\right]$ số tự nhiên chia hết cho số tự nhiên $q \ne 0$

+ (**Định lý *Legendre***) Nếu số nguyên tố p có mặt trong phân tích ra thừa số nguyên tố $n! = 1.2.3\ldots n$ thì số mũ cao nhất của p bằng

$v_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + ... + \left[\frac{n}{p^k}\right] = \frac{n - S_p(n)}{p - 1}$ (trong đó $p^k \le n < p^{k+1}$, $S_p(n)$ là tổng các chữ số của n viết tong hệ cơ số p)

+ $(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right]$, với mọi số thực x

I.6. SỐ MŨ ĐÚNG, ƯỚC ĐÚNG

***Định nghĩa*:** Cho số nguyên tố *p*, số nguyên dương *a* và α là số tự nhiên. Ta nói p^{α} là lũy thừa đúng của *a* và α là số mũ đúng của *p* trong khai triển của *a* nếu $p^{\alpha} \mid a$ và $p^{\alpha+1} \nmid a$, khi đó ta viết $p^{\alpha} \parallel a$ và ký hiệu $v_p\left(a\right) = \alpha$

Nhận xét: Nếu $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.....p_k^{\alpha_k}$ thì $v_{p_i}(n) = \alpha_i \ (i = \overline{1;k})$

Nếu $\left(a;p\right) = 1$ thì $v_p\left(a\right) = 0$

Tính chất: Cho *a* và *b* là các số nguyên dương, khi đó ta có:

+ Nếu $\alpha = v_p\left(a\right)$ thì $a = p^{\alpha}.k$

+ Nếu và $p^{\alpha} \parallel a$ và $p^{\beta} \parallel b$ thì $p^{\alpha+\beta} \parallel ab$ (hay $v_p\left(a\right) = \alpha$ và $v_p\left(b\right) = \beta \Rightarrow v_p\left(ab\right) = \alpha\beta$)

+ Nếu $p^{\alpha} \parallel a$ thì $p^{k\alpha} \parallel a^k$ (hay hay $v_p\left(a\right) = \alpha \Rightarrow v_p\left(a^k\right) = k\alpha$)

+ Nếu $p^{\alpha} \parallel a$ và $p^{\beta} \parallel b$ với $\alpha \neq \beta$ thì $p^{\min\{\alpha;\beta\}} \parallel a+b$

Tổng quát: $v_p\left(a+b\right) \ \geq \ min\{v_p\left(a\right); \ v_p\left(b\right)\}$

+ Nếu $n \mid m$ thì $v_p\left(n\right) \leq v_p\left(m\right)$

+ ***Định lý 1*:** (định lý 1 về số mũ đúng LTE: Lifting The Exponent)

Cho hai số nguyên *x; y* (không nhất thiết dương) và *n* là số nguyên dương, gọi *p* là số **nguyên tố lẻ**:

– Nếu $p \mid \left(x-y\right), p \nmid x$ và $p \nmid y$. Khi đó: $v_p\left(x^n - y^n\right) = v_p\left(x-y\right) + v_p\left(n\right)$.

– Nếu $p \mid \left(x+y\right), p \nmid x$ và $p \nmid y$, với ***n* lẻ**. Khi đó: $v_p\left(x^n + y^n\right) = v_p\left(x+y\right) + v_p\left(n\right)$.

+ ***Định lý 2:*** (định lý 2 về số mũ đúng LTE)

Cho *x; y* là hai số nguyên dương

– Nếu $x - y \ \vdots \ 4 \Rightarrow v_2\left(x^n - y^n\right) = v_2\left(x-y\right) + v_2\left(n\right)$

– Nếu *n* chẵn, $x - y \ \vdots \ 2 \Rightarrow v_2\left(x^n - y^n\right) = v_2\left(x-y\right) + v_2\left(x+y\right) + v_2\left(n\right) - 1$

hay $v_2\left(x^n - y^n\right) = v_2\left(x^2 - y^2\right) + v_2\left(n\right) - 1$.

+ ***Định lý Legendre:*** Nếu số nguyên tố *p* có mặt trong phân tích ra thừa số nguyên tố

$n! = 1.2.3\ldots n$ thì số mũ cao nhất của p bằng

$v_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right] = \frac{n - S_p(n)}{p-1}$ (trong đó $p^k \le n < p^{k+1}$, $S_p(n)$ là tổng các chữ số của n viết trong hệ cơ số p)

I.7. CẤP (hay BẬC) CỦA MỘT SỐ NGUYÊN – CĂN NGUYÊN THỦY

1. Định nghĩa 1: Cho $n > 1$ và a là một số nguyên dương, $(a,n) = 1$. Số nguyên dương k nhỏ nhất thỏa mãn $a^k \equiv 1 \pmod{n}$. được gọi là cấp của a modulo n.

Kí hiệu: $k = ord_n(a)$.

Định lý 1: Cho a, n thỏa mãn $n > 1$; $(a,n) = 1$. Khi đó: $a^x \equiv 1 \pmod{n} \Leftrightarrow x \vdots ord_n(a)$.

Định lý 2: Nếu $k = ord_n(a)$.thì $a^i \equiv a^j \pmod{n}$ khi và chỉ khi $i \equiv j \pmod{k}$

Hệ quả: Nếu a có cấp k theo modn thì các số a; a^2; ...; a^k không đồng dư với nhau từng đôi một theo modulo n.

Định lý 3: Nếu số nguyên a có cấp k theo mod n và $h > 0$ thì a^h có cấp là $\frac{k}{(h;k)}$ theo mod n

Định lý 4: Nếu $k = ord_n(a)$ và $h = ord_n(b)$ và $(h;k) = 1$ thì $ord_n(ab) = hk$

Hệ quả: Nếu $a;n;m$ là các số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau và $h = ord_n(a)$ và $k = ord_m(a)$ thì a có cấp $[h;k]$ theo modulo mn.

Hệ quả: Cho a, n thỏa mãn $n > 1$; $(a,n) = 1$. Khi đó: $\varphi(n) \vdots \varphi(n) \vdots ord_n(a)$.

2. Định nghĩa 2: Cho $n > 1$ và a là một số nguyên dương, $(a,\ n) = 1$. Nếu $\varphi(n) = ord_n(a)$ thì a được gọi là một căn nguyên thủy modulo n.

Nhận xét: Từ định nghĩa trên ta dễ dàng suy ra: nếu a là căn nguyên thủy (mod n) thì mọi số cùng lớp với a theo (mod n) đều là căn nguyên thủy (mod n).

Định lí 5: Nếu a là căn nguyên thủy (mod n) thì tập $A = \{1, a, a^2, \ldots, a^{h-1}\}$ là hệ thặng dư thu gọn (mod n) (lúc này $h = \varphi(n)$)

Định lí 6: Nếu p là một số nguyên tố thì có đúng $\varphi(p-1)$ căn nguyên thủy (mod p)

Định lí 7: Nếu p là một số nguyên tố lẻ và a là một căn nguyên thủy (mod p^2) thì a cũng là căn nguyên thủy (mod p^n) với $n \ge 3$.

3. Định lý về sự tồn tại căn nguyên thủy:

Cho m là một số nguyên, $m > 1$ khi đó m có căn nguyên thủy khi và chỉ khi m có một trong 4 dạng sau: $2,\ 4,\ p^a,\ 2p^a$ (trong đó p là số nguyên tố lẻ).

II. CÁC DẠNG TOÁN VỀ ƯỚC SỐ

II.1. SỐ NGUYÊN TỐ VÀƯỚC NGUYÊN TỐ TRONG GIẢI TOÁN

Từ định nghĩa về số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1 có đúng 2 ước số. Hai ước số đó là số 1 và chính số đó. Suy ra số tự nhiên *n* không có ước số từ 1 đến $\sqrt{n}$ là số nguyên tố. Trong các mối quan hệ về chia hết cho số nguyên tố, ta sẽ gặp một số kiến thức liên quan đến định lý Fecma nhỏ, định lý Wilson,…

Một tính chất thường được sử dụng trong giải toán về số nguyên tố là: nếu số nguyên tố *p* là ước số của tích *a.b* thì *p* là ước của *a* hoặc của *b*.

Với tính chất đặc biệt của ước số nguyên tố, ta có một số dạng toán thường gặp sau:

II.1.a. Tìm số nguyên tố thỏa điều kiện nào đó.

Ta sử dụng tính chất số nguyên tố chỉ có hai ước số là 1 và chính nó.

Bài toán 1. Tìm các số nguyên tố *p* để:

a) Các số $p+10$; $p+14$ cũng là các số nguyên tố.

b) Các số $p+2$; $p+6$; $p+8$; $p+12$; $p+14$ cũng là các số nguyên tố.

Tiếp cận bài toán: Ta thấy ba số p; $p+10$; $p+14$ đều nguyên tố mà 10 và 14 chia cho 3 dư 1 và 2, nên xét chia lớp cho 3, ta có lời giải sau:

***Bài giải*:**

a) Với $p=3$: ta có $p+10=13$ là số nguyên tố; $p+14=17$ là số nguyên tố.

Với $p=2$ thì $p+10$; $p+14$ không nguyên tố

Với $p > 3$ thì p có 2 dạng $p=3k+1; p=3k+2$:

+ Nếu $p=3k+1$ thì $p+14=3k+15$ có ước số là 3, chứng tỏ số $p+14$ có nhiều hơn 2 ước số nên $p+14$ không là nguyên tố.

+ Nếu $p=3k+2$ thì $p+10=3k+12$ có ước số là 3 nên $p+10$ không là số nguyên tố.

Vậy $p=3$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

b) Tương tự câu *a* ta có số $p=5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Lời bàn: *Dự đoán số nguyên tố $p=3$ và kiểm tra đúng,nếu $p\neq 3$ trong các số còn lại luôn có một số là hợp số vì có ước thật sự là 3. Sau đây là bài tương tự.*

Bài toán 2. Tìm số nguyên tố *p* để

a) các số $8p^2 + 1$ và $8p^2 - 1$ đều là số các số nguyên tố.

b) các số $8p^2 + 1$ và $8p^2 + 2p + 1$ đều là số các số nguyên tố.

Bài giải:

a) Giả sử *p* là số nguyên tố lớn hơn 3 thì *p* có dạng $3k \pm 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow p^2 = (3k \pm 1)^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1 = 3t + 1$

$\Rightarrow 8p^2 + 1 = 8(3t+1) + 1 = 24t + 9 \vdots 3 \Rightarrow 8p^2 + 1$ là hợp số (trái giả thiết)

Do đó: $p = 3k$, p nguyên tố $p = 3$ và

+ $8p^2 + 1 = 8.\ 3^2 + 1 = 73$ (nguyên tố)

+ $8p^2 - 1 = 8.3^2 - 1 = 71$ (nguyên tố)

Vậy *p =3* thì $8p^2 + 1$ và $8p^2 - 1$ là các số nguyên tố.

b) Tương tự trên nguyên tố $p = 3$ thỏa mãn đề bài.

Bài toán 3: Tìm tất cả các số nguyên *n* sao cho:

a. Số $n^4 + 4$ là số nguyên tố.

b. Số $n^{2021} + n^{2020} + 1$ là số nguyên tố.

Tiếp cận bài toán: Các đa thức trên có thể phân tích được thành tích nên khai thác tính chất số nguyên tố chỉ có đúng 2 ước số, trong đó có một ước số bằng 1. Bài toán sẽ giải được.

***Bài giải*:**

a. Ta có: $n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n)$

Nhận xét rằng $n^2 + 2 - 2n < n^2 + 2 + 2n$ và $n^2 + 2 - 2n$; $n^2 + 2 + 2n$ là 2 ước số của $n^4 + 4$

Nên để $n^4 + 4$ là số nguyên tố thì $\begin{cases} n^2 + 2 - 2n = 1 \\ n^2 + 2 + 2n = n^4 + 1 \end{cases}$.

Từ $n^2 + 2 - 2n = 1 \Rightarrow (n-1)^2 = 0 \Rightarrow n = 1$. Khi đó: $n^4 + 4 = 5$ là số nguyên tố.

Vậy *n* = 1, *n* = *-1* thỏa mãn bài toán.

b. Ta có $n^{2021}+n^{2020}+1=\left(n^{2021}-n^{2}\right)+\left(n^{2020}-n\right)+\left(n^{2}+n+1\right)$

Ta có:

$$n^{2021}+n^{2020}+1=n^{2}\left(n^{2019}-1\right)+n\left(n^{2019}-1\right)+\left(n^{2}+n+1\right)=\left(n^{2}+n\right)\left(n^{2019}-1\right)+\left(n^{2}+n+1\right)$$

Lại có: $n^{2019}-1=\left(n^{3}\right)^{673}-1=(n^{3}-1)\left[\left(n^{3}\right)^{672}+\left(n^{3}\right)^{671}+.......+n^{3}+1\right]$

$$=(n-1)\left(n^{2}+n+1\right)\left[\left(n^{3}\right)^{672}+\left(n^{3}\right)^{671}+.......+n^{3}+1\right]\,\vdots\left(n^{2}+n+1\right)$$

Do $n>0\Rightarrow n^{2}+n+1>1$, suy ra $n^{2}+n+1$ là ước thực sự khác 1 và khác $\left(n^{2021}+n^{2020}+1\right)$.

Vì vậy để $n^{2021}+n^{2020}+1$ là số nguyên tố thì

$$n^{2021}+n^{2020}+1=n^{2}+n+1\Rightarrow n=0;n=\pm 1$$

Kiểm tra ta thấy khi $n=1$ thì $n^{2021}+n^{2020}+1=3$ là số nguyên tố.

Lời bàn: *Các đa thức phân tích được thành tích, dĩ nhiên phải có thừa số bằng 1 hoặc chính nó. Bài toán trở nên dễ dàng.*

Bài toán 4: Cho $2^{n}-1$ là số nguyên tố, chứng minh rằng *n* là số nguyên tố.

Tiếp cận bài toán: Thử phản chứng! Nếu n là hợp số thì $2^{n}-1$ sẽ có dạng tích, và có nhiều hơn hai ước.

Bài giải:

Giả sử *n* là một hợp số thì $n=p.q\ (n>p;\ q>1,\ p;\ q\in\mathbb{N})$

Ta có: $2^{n}-1=2^{pq}-1=(2^{p})^{q}-1=\left(2^{p}-1\right)\left[2^{p(q-1)}+2^{p(q-2)}+\ldots+1\right]$

Do $p>1\Rightarrow 2^{p}-1>1$ và $2^{p(q-1)}+2^{p(q-2)}+\ldots+1>1\Rightarrow 2^{n}-1$ là hợp số. Điều này trái với giả thiết.

Nếu $n=1\Rightarrow 2^{n}-1=1$ không phải là số nguyên tố.

Vậy $2^{n}-1$ là số nguyên tố $\Rightarrow n$ là số nguyên tố.

Lời bàn: *Chỉ cần xét mệnh đề tương đương, bài toán có hướng đi quen thuộc*!

Bài toán 5. Chứng minh rằng nếu: $1+2^n+4^n$($n\in\mathbb{Z}^+$) là số nguyên tố thì $n=3^k$ với $k\in\mathbb{N}$.

Tiếp cận bài toán: Như bài toán 4, ta xét mệnh đề tương đương.

Nếu *n* có dạng $n=3^k.m\left(k\in\mathbb{N}\right)$, $m\geq 1,\left(m;3\right)=1$, ta cần chứng minh mọi ước số *m* của *n* ($m\geq 1,\left(m;3\right)=1$) không làm cho $1+2^n+4^n$($n\in\mathbb{Z}^+$) trở thành số nguyên tố, tức là nó có ước thực sự khác 1 và chính nó.

***Bài giải*:**

Đặt $n=3^k.m$ với $k\in\mathbb{N}$, $m\geq 1,\left(m;3\right)=1$ và $a=2^{3^k}$ ($a\geq 2;\ a\in\mathbb{N}$)

Do $\left(m;3\right)=1$, giả sử $m>1$, ta xét 2 trường hợp sau: $m=3x+1$và $m=3x+2$ với $x\in\mathbb{N}$

+ Nếu $m=3x+1$, ta có:

$$\begin{aligned}1+2^n+4^n &= 1+2^{3^k m}+4^{3^k m}=1+a^{3x+1}+a^{6x+2}\\ &=1+a+a^2+a\left(a^{3x}-1\right)+a^2\left(a^{6x}-1\right)\vdots\left(1+a+a^2\right)\end{aligned}$$

Ta có: $1+a^{3x+1}+a^{6x+2}>1+a+a^2>1$ nên $1+a+a^2$ là ước số thật sự của $1+a^{3x+1}+a^{6x+2}$. Do đó $1+2^n+4^n$ là hợp số, mâu thuẫn giả thiết.

+ Nếu $m=3x+2$, tương tự trên cũng dẫn đến $1+2^n+4^n$ là hợp số, mâu thuẫn!

Như vậy $m=1$ hay $n=3^k$ với $k\in\mathbb{N}$.

Lời bàn: *Biểu thức* $1+2^n+4^n$ *có dạng* $1+x+x^2$ *nên khi xét hai trường hợp m không chia hết cho 3 thì biểu thức sẽ có ước thực sự dạng* $1+x+x^2$.

Bài toán 6. (***Olympic Liên bang Nga-2018***) Giả sử rằng $a_1;a_2;a_3;...$là dãy vô hạn các số nguyên dương tăng nghiêm ngặt và $p_1;p_2;p_3;...$là dãy các số nguyên tố sao cho $p_k\mid a_k$ với mọi số nguyên dương *k*. Biết rằng $a_n-a_k=p_n-p_k$với mọi số nguyên dương *n* và *k*. Chứng minh rằng tất cả các số $a_1;a_2;a_3;...$ đều là các số nguyên tố.

Tiếp cận bài toán: Từ yêu cầu của đề bài, để $a_1;a_2;a_3;...$đều là các số nguyên tố thì khả năng cao dãy số đó cũng chính là dãy số nguyên tố $p_1;p_2;p_3;...$ tức là $a_i=p_i$. Lại có từ giả thiết thì hiệu a_i-p_i không đổi. Bài toán có hướng giải quyết!

Bài giải:

Từ giả thiết ta có: $a_n - p_n = a_k - p_k\ (\forall n; k \in N^*)$

Nên gọi $d = a_1 - p_1 = a_n - p_n \geq 0,\ \forall n$

Nếu $d = 0$ thì các a_i đều là các số nguyên tố.

Nếu $d > 0$ khi cho *n* đủ lớn ta có: $d = a_n - p_n \Rightarrow a_n = p_n + d$

Ta có $p_n < a_n = p_n + d < 2p_n$ (*). Không thể xảy ra BĐT (*) vì $p_n \mid a_n$

Vậy các số $a_1; a_2; a_3; ...$ đều là các số nguyên tố.

Lời bàn: *Từ nhận xét $a_i - p_i = d$ không đổi, loại $d > 0$ nhờ nhận xét không thể xảy ra $p \mid a$* mà $p \neq a$; $a < 2p$ *khá đơn giản và tinh tế!*

Bài toán 7: Tìm 3 số nguyên tố *p; q; r* sao cho $p^q + q^p = r$.

Tiếp cận bài toán: Từ giả thiết dễ dàng suy được tính chẵn lẻ của số nguyên tố *r*, khi đó suy được tính chẵn lẻ của *p* và *q*. Do đó biết được 2 là một nghiệm của bài toán. Khi đó bài toán trở nên dễ hơn vì chỉ còn hai biến.

Bài giải:

Giả sử tồn tại 3 số nguyên tố *p; q; r* sao cho $p^q + q^p = r$, khi đó $r > 3$ suy ra *r* lẻ.

Như vậy *p; q* khác tính chẵn, lẻ nên phải có một số chẵn và là nguyên tố nên số đó là 2, giả sử $p = 2$ khi đó $2^q + q^2 = r$.

Nếu $q > 3$ thì $q^2 \equiv 1 \pmod 3$ lại có *q* lẻ nên 3 là ước của $2^q + 1$, suy ra 3 là ước số của $2^q + q^2$. Khi đó: 3 là ước của *r* nên *r* không nguyên tố, mâu thuẫn giả thiết!

Do vậy $q \vdots 3$, *q* nguyên tố nên $q = 3$, khi đó: $r = 2^3 + 3^2 = 17$ nguyên tố.

Vì *p, q* có vai trò như nhau nên có thể $p = 3; q = 2$

Vậy có 2 bộ số được tìm là $(2;\ 3;\ 17)$ và $(3;\ 2;\ 17)$.

Lời bàn: *Nhờ đánh giá tính chẵn lẻ ta tìm được một nghiệm p=2, sau đó xét chia lớp mod3 ta có lời giải dễ hiểu và ngắn gọn!*

Bài toán 8: (***Hy lạp – 2015***) Tìm tất cả bộ ba số nguyên dương $(x; y; p)$ với *p* là số nguyên tố thỏa mãn: $\dfrac{xy^3}{x+y} = p \qquad (1)$

Tiếp cận bài toán: Ở vế trái của biểu thức (1) là phân thức có thể chưa tối giản, rõ ràng ta phải dùng ước chung của *x;y* để thu gọn biểu thức lúc đó dễ giải quyết vấn đề hơn!

Bài giải:

Gọi $d=(x;y)$ nên tồn tại các số nguyên dương $a;b$ sao cho $x=da;\ y=db$ và $(a;b)=1$.

Do đó từ (1) ta nhận được: $\dfrac{d^3ab^3}{a+b}=p \qquad (2)$

Từ $(a;b)=1$ ta được $(a;a+b)=1$ và $\left(b^3;\ a+b\right)=1$, nên từ (2) ta có $a+b \mid d^3$.

Do đó ta viết: $\dfrac{d^3}{a+b}=k$ với $k\in\mathbb{N}^* \qquad (3)$

Khi đó (2) trở thành: $kab^3=p$ và từ đây có: $b^3 \mid p \Rightarrow b=1$ và $ka=p$.

Ta có các trường hợp sau:

+) Nếu $k=p, a=1$ thì (3) trở nên: $\dfrac{d^3}{2}=p \Rightarrow 2p=d^3 \Rightarrow 2\mid d$ hay $8\mid d^3$ và $8\mid 2p$ (vô lý!)

+) Nếu $k=1$ và $a=p$ thì (3) trở nên:

$$d^3=p+1 \Rightarrow d^3-1=p \Rightarrow (d-1)\left(d^2+d+1\right)=p$$

Mà $d^2+d+1>d-1$ nên ta được: $d-1=1$ và $d^2+d+1=p \Leftrightarrow d=2$ và $p=7$

Vậy bộ ba số là $(x;y;p)=(14;2;7)$.

Lời bàn: *Khai thác tính chất đặc biệt về ước số của số nguyên tố là chỉ có 2 ước là 1 và chính nó, ta giải quyết được lớp các bài toán khá nhẹ nhàng và thú vị!*

II.1.b. Dùng tính chất ước của một tích.

Một tính chất thường được sử dụng trong giải toán về số nguyên tố là: *nếu số nguyên tố p là ước số của tích nhiều thừa số thì p là ước của ít nhất một trong các thừa số đó. Ta xét một số bài toán sau:*

Bài toán 1. (***Chọn đội tuyển KHTN Hà nội -2020-2021***) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương *a,b* sao cho $a^3+3=b^2$ và $a^2+2(a+b)$ là số nguyên tố.

Tiếp cận bài toán: Mối liên hệ giữa *a* và *b* từ hai dữ kiện của đề ta kết nối thành một biểu thức để khai thác tính chất số nguyên tố.

***Bài giải*:**

Đặt $p=a^2+2(a+b)$ thì $a^2+2a\equiv -2b \pmod p$

Khi đó: $(a^2+2a)^2\equiv 4b^2\equiv 4\left(a^3+3\right) \pmod p$

Suy ra: $(a^2+2a)^2-4a^3-12\equiv 0 \pmod p$

Mà $(a^2+2a)^2-4a^3-12=\left(a^2-2\right)\left(a^2+6\right)$ chia hết cho p suy ra p là ước số của a^2-2 hoặc a^2+6.

Ta xét hai trường hợp sau:

+ *Trường hợp 1*. Nếu $p\,|\,a^2-2<a^2+2\left(a+b\right)=p$, chứng tỏ $a^2-2\le 0\Rightarrow a=1$ $\Rightarrow p\,|\left(-1\right)$ vô lý.

+ *Trường hợp 2*. Nếu $p\,|\,a^2+6$, từ $a^3+3=b^2\Rightarrow b=\sqrt{a^3+3}\ge\sqrt{1+3}=2$

Mà $p=a^2+2(a+b)\ge a^2+2\left(1+2\right)=a^2+6$, kết hợp với $p\,|\,a^2+6$ ta được $p=a^2+6$. Như vậy các dấu đẳng thức xảy ra nên $a=1;b=2\Rightarrow p=7$. Cặp số $\left(a;b\right)=\left(1;2\right)$ thỏa mãn đề bài.

Kết luận: $\left(a;b\right)=\left(1;2\right)$

Lời bàn: *Khử b từ hai điều kiện của đề cho ta biểu thức chỉ có a và số nguyên tố p giống phương trình nghiệm nguyên khá thuận lợi cho việc giải.*

Bài toán 2. (***Đề đề nghị trường THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Yên Bái, lớp 11–2018***) Xác định tất cả các số nguyên tố p,q sao cho $\dfrac{p^{2n+1}-1}{p-1}=\dfrac{q^3-1}{q-1}$ với $n>1$, $n\in\mathbb{Z}$.

Tiếp cận bài toán: Hai phân thức ở hai vế đều rút gọn được, nhưng biểu thức sau rút gọn vế trái khá dài và phức tạp. Nếu trừ 1 vào hai vế thì hai tử số đều có dạng tích, khá thuận lợi để đi tiếp!

Bài giải:

Ta có: $\dfrac{p^{2n+1}-1}{p-1}=\dfrac{q^3-1}{q-1}\Leftrightarrow\left(p-1\right)\left(\dfrac{p^{2n+1}-1}{p-1}-1\right)=\left(p-1\right)\left(\dfrac{q^3-1}{q-1}-1\right)$

$$\Leftrightarrow p\left(p^n-1\right)\left(p^n+1\right)=\left(p-1\right)q\left(q+1\right)\qquad(1)$$

Nếu $q\le p^n-1$ thì các thừa số ở vế trái lớn hơn các thừa số tương ứng ở vế phải của (1), do đó $q\ge p^n$.

Vì q nguyên tố, còn p^n không nguyên tố nên $q\ge p^n+1$.

Từ (1), số nguyên tố q là ước số của vế trái, mà $q\ge p^n+1$, điều đó xảy ra khi $q=p^n+1$

Thay vào (1) ta được: $p\left(p^n-1\right)=\left(p-1\right)\left(p^n+2\right)$, suy ra $p^n-3p+2=0$

Từ đó $p|2$ mà p nguyên tố nên $p=2, n=2.$ Suy ra $q=p^n+1=5.$

Lời bàn: *Từ việc thêm bớt khá tinh tế ở biểu thức giả thiết, kết hợp với suy luận ước số nguyên tố ta có lời giải đẹp!*

Bài toán 3. Cho số nguyên tố lẻ p có dạng $p=2^t k+1$ với $t\in\mathbb{N}$, k là số tự nhiên lẻ. Chứng minh rằng nếu có hai số tự nhiên *a;b* thỏa mãn p là ước số của $a^{2^t}+b^{2^t}$ thì p là ước số đồng thời cả hai số *a;b*.

Tiếp cận bài toán: Hướng tiếp cận bằng phản chứng có lẽ phù hợp cho bài này. Khi p không là ước của a và b thì ta có thể áp dụng định lý Fermat nhỏ, chắc chắn sẽ dẫn đến mâu thuẫn gì đó. Thử đi hướng này!

Bài giải:

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử p không là ước của a, từ giả thiết suy ra p cũng không là ước của b. Theo định lý nhỏ Fermat ta có:

$a^{p-1}\equiv 1\pmod p;\ b^{p-1}\equiv 1\pmod p$ hay: $a^{2^t k}\equiv 1\pmod p;\ b^{2^t k}\equiv 1\pmod p$

suy ra: $a^{2^t k}+b^{2^t k}\equiv 2\pmod p \Leftrightarrow \left(a^{2^t}\right)^k+\left(b^{2^t}\right)^k\equiv 2\pmod p$

Mà k lẻ nên $\left(a^{2^t}\right)^k+\left(b^{2^t}\right)^k=\left(a^{2^t}+b^{2^t}\right)P(a;b)\equiv 2\pmod p$ (*)

Theo giả thiết $a^{2^t}+b^{2^t}\equiv 0\pmod p$

Nên $\left(a^{2^t}+b^{2^t}\right)P(a;b)\equiv 0\pmod p$ mâu thuẫn với (*)

Vậy điều giả sử trên của ta là sai.

Do đó nếu p là ước của a thì từ giả thiết suy ra p cũng là ước của b. (đpcm)

Lời bàn: *Khai thác yếu tố $a^{2^t}+b^{2^t}$ là ước của $a^{p-1}+b^{p-1}$ khi k lẻ, ta sử dụng phản chứng là phù hợp và hay nhất.*

Bài toán 4. Cho bốn số nguyên dương $a;b;c;d$ thỏa mãn $ab=cd$. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên dương n để $a^n+b^n+c^n+d^n$ là số nguyên tố.

Tiếp cận bài toán: Từ giả thiết ta có thể làm xuất hiện $a^n+b^n+c^n+d^n$ ở dạng tích để khai thác tính chất đặc biệt về ước của số nguyên tố.

Bài giải:

Giả sử tồn tại số nguyên dương n sao cho $a^n+b^n+c^n+d^n=p$ là số nguyên tố.

Từ giả thiết: $ab=cd$ suy ra $a^nb^n=(ab)^n=(cd)^n=c^nd^n$

$$pd^n=\left(a^n+b^n+c^n+d^n\right)d^n=a^nd^n+b^nd^n+c^nd^n+d^{2n}$$

$$= (a^n d^n + a^n b^n) + (b^n d^n + d^{2n}) = \left(a^n + d^n\right)\left(b^n + d^n\right)$$

Chứng tỏ *p* là ước số của $a^n + d^n$ hoặc $b^n + d^n$.

Mà ta thấy: $1 < a^n + d^n; b^n + d^n < a^n + b^n + c^n + d^n = p$, điều này không thể xảy ra.

Vậy không tồn tại *n* để $a^n + b^n + c^n + d^n$ là số nguyên tố, hay nó luôn là hợp số với mọi *n*.

Lời bàn: *Sử dụng điều vô lý để có lời giải hay: "Số nguyên tố p là ước của một trong hai số* $a^n + d^n$*;* $b^n + d^n$ *mà hai số đó lại nhỏ hơn p".*

Bài toán 5. ***(St Petersburg-2001)***

a/ Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a;b)$ với $a \neq b$ sao cho $\left(b^2 + a\right) \mid (a^2 + b)$ và $b^2 + a$ là lũy thừa của số nguyên tố.

b/ Cho $a; b > 1$ là hai số nguyên dương phân biệt thỏa mãn $\left(b^2 + a - 1\right) \mid \left(a^2 + b - 1\right)$.

Chứng minh rằng $b^2 + a - 1$ có ít nhất hai ước số nguyên tố phân biệt.

Tiếp cận bài toán: Ta có $b^2 + a$ có dạng p^m, nên p^m là ước của cả $b^2 + a$ và $b + a^2$, ta phải làm xuất hiện p^m là ước của biểu thức chỉ có một trong hai biến *a;b*. Khi đó, dựa vào tính chất nguyên tố sẽ có hướng giải phù hợp!

Bài giải:

a/ + Xét $b = 1$ thì $(a+1) \mid \left(a^2 + 1\right) \Rightarrow (a+1) \mid (a-1)(a+1) + 2$

Suy ra $(a+1) \mid 2$ do đó $a = 1$, không thỏa điều kiện $a \neq b$.

+ Xét $b > 1$, theo đề bài tồn tại số nguyên tố *p* và số nguyên dương *m* sao cho $b^2 + a = p^m$.

Lại có: $b\left(b^3 + 1\right) = b^4 + b = b^4 - a^2 + a^2 + b = \left(b^2 + a\right)\left(b^2 - a\right) + \left(a^2 + b\right)$

Ta có: $b^2 + a$ là ước của vế phải, nên $\left(b^2 + a\right) \mid b\left(b^3 + 1\right) \Rightarrow p^m \mid b\left(b^3 + 1\right)$

Lại có: $\gcd\left(b; b^3 + 1\right) = 1$ nên suy ra $b^2 + a$ là ước của *b* hoặc $b^3 + 1$, mà $b < b^2 + a$ nên $\left(b^2 + a\right) \mid (b^3 + 1)$ hay $\left(b^2 + a\right) \mid (b+1)\left(b^2 - b + 1\right)$

Dễ thấy cả hai thừa số $(b+1); \left(b^2 - b + 1\right)$ đều nhỏ hơn $b^2 + a$ nên cả hai thừa số đó đều không chia hết cho p^m. Như vậy $p \mid (b+1)$ và $p \mid \left(b^2 - b + 1\right)$

Từ đó suy ra: $p \mid \left(b^2 - b + 1\right) - (b+1)(b-2)$ hay $p \mid 3$, chứng tỏ $p = 3$.

Do $b>1$ nên $b^2+a\ge 5$ mà $b^2+a=p^m$ suy ra $m>1$.

- Nếu $m=2$ thì $b^2+a=p^m=3^2$ suy ra $a=5;b=2$.
- Nếu $m\ge 3$, từ $\left(b^2-b+1\right)-(b+1)(b-2)=3$ nên trong hai số $(b+1)$; $\left(b^2-b+1\right)$ có một số chia hết cho 3, số kia chia hết cho 3^{m-1}. Ta có: $b^2<b^2+a=3^m$ nên $b+1<3^{m/2}+1<3^{m-1}$

Như vậy $3^{m-1}\mid\left(b^2-b+1\right)$.

Lại thấy $3^2\mid 4\left(b^2-b+1\right)\Rightarrow 9\mid(2b-1)^2+3$ suy ra $3\mid(2b-1)$, dẫn đến $9\mid 3$ vô lý!

Vậy chỉ có một cặp $(a;b)=(5;2)$ thỏa mãn.

b/ Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử b^2+a-1 chỉ có một ước số nguyên tố, như vậy b^2+a-1 phải là lũy thừa của một số nguyên tố, tức là: $b^2+a-1=p^m, m\in\mathbb{N}^*$

Ta có $b^2-1+a=\left(b^2-1\right)^2-a^2$

Mà: $\left(b^2+a-1\right)\Big|\left(a^2+b-1\right)$

Nên: $b^2-1+a^2\Big|\left(b^2-1\right)^2-a^2+\left(a^2+b-1\right)=\left(b^2-1\right)^2+(b+1)$

Suy ra: $b^2-1+a^2\Big|b(b-1)\left(b^2+b-1\right)$

Ta nhận thấy: $\gcd\left(b;b-1;b^2+b-1\right)=1$ vì $b^2+b-1=(b+2)(b-1)+1$

Do đó: b^2+a-1là ước của một trong ba thừa số $b;b-1;b^2+b-1$ vì b^2+a-1 là lũy thừa của một số nguyên tố.

Dễ dàng kiểm tra $b-1<b<b^2+a-1$ nên chỉ có $b^2+a-1\Big|b^2+b-1\Rightarrow a\le b$

Lại có từ giả thiết: $\left(b^2+a-1\right)\Big|\left(a^2+b-1\right)$

Suy ra: $0\le\left(a^2+b-1\right)-\left(b^2+a-1\right)=(a-b)(a+b-1)\Rightarrow a\ge b$

Như vậy: $a=b$ (mâu thuẫn điều kiện $a\ne b$), chứng tỏ điều giả sử sai.

Vậy b^2+a-1 có ít nhất hai thừa số nguyên tố.

Lời bàn: *Bài toán này khó! Bắt đầu từ biến đổi* $b\left(b^3+1\right)=\left(b^2+a\right)\left(b^2-a\right)+\left(a^2+b\right)$ *để có* $p^m\Big|(b+1)\left(b^2-b+1\right)$ *khi đó nó trở nên quen thuộc hơn! Câu b dựa ý tưởng câu a.*

Bài toán 6. Tìm các số nguyên tố *p*, *q* thỏa mãn $\left(7^p-5^p\right)\left(7^q-5^q\right)$ chia hết cho *pq*.

Tiếp cận bài toán: *Rõ ràng phải xét p (hoặc q) là ước của một trong hai thừa số và có "bóng dáng" của định lý Fermart nên có hướng giải quyết.*

Bài giải:

Ta có nhận xét quen thuộc sau: Cho $\left(7^x-5^x\right)\vdots p$; $\left(7^y-5^y\right)\vdots p$ với *x* nhỏ nhất thì $y\vdots x$

Áp dụng:

Ta thấy $p, q \neq 5;7$

Trường hợp 1: $\left(7^p-5^p\right)\vdots p$

Theo định lí Fermat nhỏ: $7^{p-1}\equiv 1\left(\operatorname{mod} p\right)$; $5^{p-1}\equiv 1\left(\operatorname{mod} p\right)$

Suy ra: $\left(7^{p-1}-5^{p-1}\right)\vdots p \Leftrightarrow \left(7^p-5^{p-1}.7\right)\vdots p \Rightarrow 2.5^{p-1}\vdots p \Rightarrow 2\vdots p \Rightarrow p=2$

Khi đó: $\dfrac{\left(7^2-5^2\right)\left(7^q-5^q\right)}{2}\vdots q \Rightarrow 12\left(7^q-5^q\right)\vdots q$

$$\Rightarrow 12.2.5^{q-1}\vdots q \Rightarrow 12.2\vdots q \Rightarrow q\in\{2;3\}$$

Trường hợp 2: Nếu 7^p-5^p và *p* nguyên tố cùng nhau thì $7^q-5^q\vdots p$

- Nếu $7^q-5^q\vdots q$ thì tương tự như truongf hợp 1: $7^p-5^p\vdots p$
- Nếu 7^q-5^q nguyên tố cùng nhau với *q* thì $7^p-5^p\vdots q$

Như vậy: $7^p-5^p\vdots q$ và $7^q-5^q\vdots p$

Gọi $7^k-5^k\vdots q$ với *k* đạt GTNN khi ấy theo nhận xét trên thì $p\vdots k$ nên mà *p* nguyên tố nên $k=1$ hoặc $k=p$.

Khi $k=1\Rightarrow q\,|\,2\Rightarrow q=2$ và dễ tìm ra *p*.

Khi $k=p\Rightarrow 7^p-5^p\vdots q$ với *p* là số nhỏ nhất thỏa đề, khi đó dẫn đến vô lý vì vẫn còn số nhỏ hơn thỏa mãn là $7^{q-1}-5^{q-1}\vdots q$ (theo Fermat nhỏ) nên vô lý.

Do đó trường hợp này có nghiệm giống trường hợp 1.

Vậy (p,q)=(2,3),(3,2),(2,2).

Lời bàn: *Một số nguyên tố là ước của một tích hiển nhiên nó phải là ước của ít nhất một trong các thừa số đó. Sự vận dụng khéo léo và linh hoạt cho ta giải quyết một số bài toán về chia hết khá đẹp!*

Sau đây là bài toán mà việc chứng tỏ sự tồn tại ước số nguyên tố p trên cơ sở xây dựng khá công phu dãy các số nguyên phức tạp.

Bài toán 8.(SAUDI ARABIAN-TST -2021)

Cho số nguyên dương k chứng tỏ rằng tồn tại số nguyên tố p mà ta có thể chọn được các số nguyên khác nhau $a_1;a_2;...;a_{k+3} \in \{1;2;...;p-1\}$ sao cho p là ước của $a_i a_{i+1}.a_{i+2}a_{i+3} - i$ với tất cả $i = 1;2;..;k$.

Tiếp cận bài toán: Đây là bài toán quá khó! Không thể định hướng để tiếp cận ngay.Từ p là ước của tích $a_i a_{i+1}.a_{i+2}a_{i+3} - i$ điều đó tương đương với $a_i a_{i+1}.a_{i+2}a_{i+3} \equiv i \pmod p$.

Với mỗi số nguyên i mà có tích 4 số nguyên khác nhau đồng dư với i modp. Ta bắt đầu với trường hợp đặc biệt tích 4 số nguyên $abcd = i$ ($i = 1;2;..;k$) thì điều này chưa chắc đúng. Nhưng tích 4 số hữu tỉ bằng số i thì có thể! Và ta có thể xây dựng được các số đó , bằng cách cho 3 số nguyên *a;b;c* còn số hữu tỉ $d = \frac{i}{abc}$. Nhóm này có 4 số như vậy xây dưng các số sau truy hồi theo các số trước, dĩ nhiên chúng có chu kỳ là 4. Khi đó mỗi số hạng của dãy là số hữu tỉ là các phân số tối giản, việc còn lại là xây dựng các số nguyên $a_i;...;a_{i+3}$ dựa trên các tử số mẫu số của các phân số đó. Từ đó hình thành vệc chọn số nguyên tố p cho phù hợp.Chúng ta cùng nghiên cứu lời giải sau đây.

Bài giải.

Trước tiên ta chọn các số hữu tỉ dương khác nhau $r_1;r_2;...;r_{k+3}$ sao cho

$$r_i r_{i+1}.r_{i+2}r_{i+3} = i \text{ với } 1 \le i \le k$$

Gọi $r_1 = x;r_2 = y;r_3 = z$ là các số nguyên tố khác nhau lớn hơn k, số hạng còn lại thỏa mãn $r_4 = \frac{1}{r_1 r_2 r_3}$ và $r_{i+4} = \frac{i+1}{i} r_i$. Kéo theo nếu r_i là phân số tối giản, tử số là chia hết cho x nếu $i \equiv 1 \pmod 4$, là chia hết cho y nếu $i \equiv 2 \pmod 4$, là chia hết cho z nếu $i \equiv 3 \pmod 4$ và tử không chứa biến x;y;z nếu $i \equiv 0 \pmod 4$. Chú ý rằng $r_i < r_{i+4}$ do đó dãy

$$r_1 < r_5 < r_9 < ...;r_2 < r_6 < r_{10} < ...;r_3 < r_7 < r_{11} < ...;r_4 < r_8 < r_{12} < ...$$

Là dãy tăng và không có số hạng chung, khi đó tất cả các r_i đều khác nhau.

Nếu mỗi r_i đều biểu diễn ở phân số tối giản $\frac{u_i}{v_i}$ xét

$$r_i - r_j = \frac{u_i}{v_i} - \frac{u_j}{v_j} = \frac{u_i v_j - u_j v_i}{v_i v_j} \Rightarrow v_i v_j \left(r_i - r_j \right) = u_i v_j - u_j v_i$$

Do đó chọn số nguyên tố *p* không là ước của $v_i; 1 \le i \le k+1$ cũng không là ước của $v_i v_j \left(r_i - r_j \right) = v_j u_i - v_i u_j$ (khi $i < j$) và xác định a_i bởi $a_i v_i \equiv u_i \pmod p$.

Từ $r_i r_{i+1}.r_{i+2} r_{i+3} = i$ ta có $\frac{u_i}{v_i}.\frac{u_{i+1}}{v_{i+1}}.\frac{u_{i+2}}{v_{i+2}}.\frac{u_{i+3}}{v_{i+3}} = i \Leftrightarrow i.v_i.v_{i+1}.v_{i+2}.v_{i+3} = u_i.u_{i+1}.u_{i+2}.u_{i+3}$

$$\equiv a_i v_i a_{i+1} v_{i+1} a_{i+2} v_{i+2} a_{i+3} v_{i+3} \pmod p$$

Do đó $a_i a_{i+1}.a_{i+2} a_{i+3} \equiv i \pmod p$ với $1 \le i \le k$

Nếu $a_i \equiv a_j \pmod p$ thì $u_i v_i \equiv a_i v_i v_j \equiv u_j v_i \pmod p$ điều đó mâu thuẫn.

Vậy với mỗi số nguyên dương *k* luôn chọn được số nguyên tố *p* sao cho *p* là ước của tích $a_i a_{i+1}.a_{i+2} a_{i+3} - i$ với tất cả $i = 1; 2; ..; k$.

Lời bàn: *Thật là quá khó, từ ý tưởng cho đến lời giải đầy kỹ thuật. Đúng là đề TST*!

II.1.c. Chọn một ước nguyên tố phù hợp và kỹ thuật sử dụng ước đúng (bổ đề LTE) để giải toán.

Khi giải một số bài toán về tìm số nguyên *n* thỏa điều kiện là bội hay ước của biểu thức chứa *n* nào đó ta thường chọn ước nguyên tố nhỏ nhất của nó sau đó sử dụng ước đúng, số mũ đúng hoặc dùng cấp của số nguyên theo modp,… một cách phù hợp.

Bài toán 1. Cho số nguyên dương *n* có đúng 12 ước số dương khác nhau kể cả số 1 và chính nó, biết tổng các ước nguyên tố khác nhau của chúng là 20. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của *n*.

Tiếp cận bài toán: Rõ ràng kiến thức cần huy động là hàm *số các ước* của *n* là $\tau(n)$. Dĩ nhiên phải xét các khả năng phân tích số 20 thành thừa số nguyên tố. Trên cơ sở số *n* nhỏ nhất để chọn các ước nguyên tố phù hợp.

***Bài giải*:**

Ta biết số các ước số của số $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ là $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)....(\alpha_k + 1)$

Do đó: $12 = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)....(\alpha_k + 1)$ mà các khả năng phân tích của 12 là $12 = 2.6 = 3.4 = 2.2.3$

Suy ra *n* có tối đa là 3 ước số nguyên tố nên ta có thể đặt

$n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}; \alpha_i \in \mathbb{N} (i = 1; 2; 3)$

Theo đề bài ta có: $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) = 12$ và $p_1 + p_2 + p_3 = 20$.

- Nếu *n* chỉ có một ước nguyên tố, không thể thỏa yêu cầu đề bài
- Nếu *n* có hai ước nguyên tố $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}; \alpha_1;\alpha_2 \in \mathbb{N}$, mà $p_1 + p_2 = 20$ nên có hai khả năng $p_1 = 3; p_2 = 17$ hoặc $p_1 = 7; p_2 = 13$.

Do tìm *n* nhỏ nhất nên $n = p_1.p_2^5$ hoặc $n = p_1^2.p_2^3$ (1)

- Nếu *n* có đúng 3 ước nguyên tố $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}; \alpha_i \in \mathbb{N}(i = 1;2;3)$ thì $p_1 + p_2 + p_3 = 20$ do các p_i nguyên tố nên phải có một số bằng 2 giả sử $p_1 = 2$, khi đó: $p_2 + p_3 = 18$ chỉ có $5+13=18$. Giả sử $p_2 = 5; p_3 = 13$. Lại có $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) = 12 = 2.2.3$

Do cần tìm số nhỏ nhất nên chọn khả năng $n = 2^2.5.13 = 260$ (2)
So sánh (1) và (2) ta có GTNN có thể của *n* là 260.

Lời bàn: *Dựa trên sự phân tích của số 12 mà ta dự đoán có tối đa 3 ước nguyên tố phân biệt. Từ tính nhỏ nhất của n để suy ra tính nhỏ nhất các ước nguyên tố. Tính logic trong suy luận khá thú vị!*

Bài toán 2: (BMO TST - March camp-2021)Gọi $x;y;z$ là các số nguyên dương lẻ sao cho $\gcd(x;y;z) = 1$ và tổng $x^2 + y^2 + z^2$ chia hết cho $x + y + z$. Chứng minh rằng $x + y + z - 2$ không chia hết cho 3.

Tiếp cận bài toán: Ta xét mệnh đề tương đương: "Nếu $x + y + z - 2$ chia hết cho 3 thì $x + y + z$ có ước $3k + 2$". Như vậy giả sử $x + y + z$ có ước nguyên tố dạng $3k + 2$ chắc sẽ dẫn đến điều vô lý, thử xem đi hướng này.

Bài giải:

Giả sử tồn tại ước nguyên tố $p \equiv 2 \pmod 3$ là ước số của $x + y + z$.

Từ $z \equiv -(x + y) \pmod p$ ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 2\left(x^2 + y^2 + xy\right) \equiv 0 \pmod p$$

Hay $2\left(x^2 + y^2 + xy\right) \equiv 0 \pmod p \Rightarrow \left(x^2 + y^2 + xy\right) \equiv 0 \pmod p$ $do\,(2;p) = 1$

Nhân hai vế cho $(x - y)$ ta được $x^3 \equiv y^3 \pmod p$ nhưng điều này mang lại $x \equiv y \pmod p$,

Tương tự $x \equiv z \pmod p$ khi đó $3x \equiv x + y + z \equiv 0 \pmod p$ chứng tỏ $x;y;z$ chia hết cho *p* mâu thuẫn với $\gcd(x;y;z) = 1$.Từ đó $x + y + z$ không có ước nguyên tố nào có dạng $3k + 2$. Vì vậy $x + y + z - 2$ không chia hết cho 3.

Lời bàn: *Chỉ việc chọn ước nguyên tố phù hợp đã ẩn ý trong đề ta có lời giải dễ hiểu.*

Bài toán 3. (***Olympic Balkan- 2018***) Tìm tất cả các số nguyên tố *p* và *q* thỏa mãn $3p^{q-1} + 1$ là ước của $11^p + 17^p$.

Tiếp cận bài toán: Từ tính chẵn lẻ của các biểu thức, ta xét trường hợp đặc biệt của *p* là $p=2$. Khi $p>2$, giá trị 2 biểu thức chẵn, liệu nó có phải lũy thừa của 2 hay là số chẵn có dạng nào đó? Khi đó, ta hướng đến khai thác ước nguyên tố lẻ của cả $3p^{q-1}+1$ và 11^p+17^p. Sử dụng định lý Fermat và cấp sẽ tìm được *p;q*.

Bài giải:

Với $p=2$: thay vào các biểu thức, không tồn tại *q* thỏa mãn.

Với $p>2$ nên *p* lẻ khi đó $A=11^p+17^p\equiv 4\pmod 8$

Do đó 8 không là ước của số $3p^{q-1}+1>4$

Ta xét một ước nguyên tố lẻ *t* của $3p^{q-1}+1$, nên $t\notin\{3;11;17\}$, do đó tồn tại số nguyên dương *b* sao cho $17b\equiv 1\pmod t$ suy ra $17^pb^p-1\equiv 0\pmod t$

Vì vậy: $t\mid b^pA\equiv a^p+1\pmod t$, với $a=11b$.

Nên $t\mid a^{2p}-1$ nhưng *t* không là ước của a^p-1 tức là $\mathrm{ord}_t(a)\mid 2p$, nhưng $\mathrm{ord}_t(a)$ không là ước của *p*, suy ra $\mathrm{ord}_t(a)\in\{2;2p\}$.

Ta biết: nếu $\mathrm{ord}_t(a)=2$ thì $t\mid a^2-1\equiv\left(11^2-17^2\right)b^2\pmod t$ nên chỉ có $t=7$.

Lại có: nếu $\mathrm{ord}_t(a)=2p$ suy ra $2p\mid t-1$(do $a^{t-1}\equiv 1\pmod t$), khi đó mọi ước nguyên tố của $3p^{q-1}+1$ ngoài 2 và 7 đều đồng dư 1 mod(2*p*).

Vì vậy ta đặt: $3p^{q-1}+1=2^\alpha 7^\beta p_1^{r_1}...p_k^{r_k}$ $(*)$ với $p_i\notin\{2;7\}$ là các ước nguyên tố với $p_i\equiv 1\pmod{2p}$.

Ta biết: $\alpha\le 2$ và có:

$$\frac{11^p+17^p}{28}=11^{p-1}-11^{p-2}17+11^{p-3}17^2-...+17^{p-1}\equiv p.4^{p-1}\pmod 7.$$

Suy ra: 11^p+17^p không chia hết cho 7^2 do đó $\beta\le 1$

Nếu $q=2$ thì (*) trở thành $3p+1=2^\alpha 7^\beta p_1^{r_1}...p_k^{r_k}$

Lại có: $p_i\ge 2p+1$, do đó chỉ có duy nhất trường hợp $r_i=0$ với mọi *i*,

Khi đó: $3p+1=2^\alpha 7^\beta\in\{2,4,14.28\}$ các trường hợp này không thỏa.

Do đó: $q>2$ suy ra $4\mid 3p^{q-1}+1 \Rightarrow \alpha=2$.

Ta có: vế phải của (*) đồng dư với 4 hoặc 28 mod*p* suy ra $p=3$, thay vào ta có $3^{q-1}+1\mid 6244$ cho kết quả duy nhất $q=3$.

Vậy nghiệm duy nhất của bài toán: $(p;q)=(3;3)$.

Lời bàn: *Bài toán rất khó! Việc chọn ước số nguyên tố lẻ t của* $3p^{q-1}+1$ *để xét theo* mod*t và sử dụng cấp một cách linh hoạt để có bài giải: Rất kỹ thuật và sâu sắc.*

Bài toán 4. (***MEMO-2015***) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a,\ b)$ sao cho $a!+b!=a^b+b^a$.

Tiếp cận bài toán**:** Trước tiên đối với bài toán có chứa *n!* thì nên kiểm tra các số nhỏ và trường hợp đặc biệt. Khi $1<a<b$, sử dụng tính chất $p<a\Rightarrow p\mid a!$, nên so sánh số mũ của *p* trong hai vế của phương trình để đánh giá nghiệm nếu có.

Bài giải**:**

Nếu $a=b$ thì phương trình trở thành $a!=a^a$. Từ $a^a>a!\ (a\ge 2)$ ta có lời giải duy nhất cho trường hợp này là $a=b=1$.

Nếu $a=1$, phương trình trở thành $b!=b$, ta có thêm $a=1;b=2$. Ta chứng minh $a=b=1;a=1,b=2;a=2,b=1$ là các nghiệm của phương trình.

Giả sử *a;b* là các nghiệm khác thỏa mãn $1<a<b$ (trường hợp $1<b<a$ tương tự). Suy ra $a\mid b!$ kéo theo $a\mid b^a$.

Gọi *p* là ước số nguyên tố của *a*, kéo theo $p\mid b$. Ta so sánh số mũ đúng của *p* ở cả hai vế của phương trình.

Vế trái phương trình viết lại $a!\left(\frac{b!}{a!}+1\right)$. Từ $p\mid b$ và $b>a$ ta có $p\left|\frac{b!}{a!}\right.$ do đó $\frac{b!}{a!}+1$ là nguyên tố cùng nhau với *p*. Tới đây ta có số mũ của *p* trong vế trái bằng số mũ của *p* trong $a!$. Theo công thức *Legendre*, số mũ bằng $v_p(a!)=\left[\frac{a}{p}\right]+\left[\frac{a}{p^2}\right]+\left[\frac{a}{p^3}\right]+...=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a}{p^k}\right]$

Ta có: $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a}{p^k}\right]<\frac{a}{p}+\frac{a}{p^2}+\frac{a}{p^3}+...=a\left(\frac{1}{p-1}\right)\le a$.

Suy ra số mũ của *p* trong vế trái nhỏ hơn *a*.

Ta có $a<b;\ a\mid b^a$ và $p\mid a;p\mid b;\ (b>a)$ nên $v_p\left(a^b+b^a\right)>a$, mâu thuẫn!

Do đó không có nghiệm cho $a;b\ge 2$.

Vậy $(a;b)=(1;1);(1;2);(2;1)$.

Lời bàn: *Bài toán có nghiệm trong các trường hợp đặc biệt. Trường hợp* $1<a<b$ *đã chọn ước nguyên tố p của a và so sánh số mũ của p trong hai vế để loại suy khá hay!*

Bài toán 5. *(Baltic Way 2015)* Tìm các số nguyên dương n thỏa mãn sao cho $n^{n-1}-1$ chia hết cho 2^{2015}.

Tiếp cận bài toán: Từ đề cho ta có: 2 là ước của $n^{n-1}-1$ nên *n* lẻ, bài toán đi tìm *n* lẻ để có $v_2\left(n^{n-1}-1\right)=2015$. Xem như đã có hướng đi!

Bài giải:

Do $2|\ (n^{n-1}-1)$ nên n lẻ, do đó theo Bổ đề về bậc LTE ta có:

$$v_2\left(n^{n-1}-1\right)=v_2\left(n-1\right)+v_2\left(n+1\right)+v_2\left(n-1\right)-1=2015.$$

Ngoài ra $4|\ (n-1)$ hoặc $4|\ (n+1)$.

- Nếu $4|\ (n-1)$ thì $v_2\left(n+1\right)=1\Rightarrow 2v_2\left(n-1\right)=2015$, vô lý vì VT chẵn, VP lẻ.
- Nếu $4|\ (n+1)$ thì $v_2\left(n-1\right)=1\Rightarrow v_2\left(n+1\right)=2014$.

Kết luận: $n+1=2^{2014}m$ với m nguyên dương lẻ.

Lời bàn: *Bổ đề LTE là "vũ khí" khá tuyệt vời!*

Bài toán 6. ***(Olympic KHTN Hà nội 2019)*** Tìm số nguyên dương *n* để $3^n-1\vdots n^3$.

Tiếp cận bài toán: Nếu chọn ước nguyên tố *p* nhỏ nhất của *n* thì từ đề bài đã có bóng dáng của định lý Fermat và cấp! Nên bài toán có hướng giải!

Bài giải:

* Với $n=1$, thỏa mãn yêu cầu bài toán.

* Với $n\geq 2$, gọi *p* là ước nguyên tố nhỏ nhất của *n*, từ giả thiết suy ra được: $3^n\equiv 1\left(\bmod p\right)$. Mặt khác theo định lý Fermat nhỏ, ta cũng có: $3^{p-1}\equiv 1\left(\bmod p\right)$.

Gọi $h=\text{ord}_p\left(3\right)$, theo tính chất cấp ta có: $\begin{cases} h\,|\,n \\ h\,|\,p-1\end{cases}$. Như vậy, ta chỉ ra được một số bé hơn *p* là ước của *n*, để *p* là ước nguyên tố nhỏ nhất thì $h=1$. Khi đó: $3^1\equiv 1\left(\bmod p\right)\Rightarrow p=2$

Giả sử $n=2^{\alpha}.t\left(\alpha,t\in\mathbb{N}^*\right)$, t lẻ.

Khi đó: $3^n-1=\left(3^{2^{\alpha}}\right)^t-1=\left(3^{2^{\alpha}}-1\right).\left(3^{2^{\alpha}(t-1)}+3^{2^{\alpha}(t-2)}+...+3^{2^{\alpha}}+1\right)$

Vì $3^{2^{\alpha}(t-1)}+3^{2^{\alpha}(t-2)}+...+3^{2^{\alpha}}+1\equiv q\equiv 1\left(\bmod 2\right)$, nên:

$$3^n-1=\left(3^{2^{\alpha-1}}+1\right)\left(3^{2^{\alpha-2}}+1\right)...\left(3^{2^1}+1\right)\left(3^{2^0}+1\right)\left(3^{2^0}-1\right).R\ \ (R\text{ lẻ}).$$

Vì $3^{2^{\alpha-1}}+1, 3^{2^{\alpha-2}}+1, ..., 3^{2^1}+1$ là $\alpha-1$ số chẵn và $\left(3^{2^0}+1\right).\left(3^{2^0}-1\right)=8$, nên:

$$3^n-1=2^{\alpha+2}.S \text{ , } (S \text{ lẻ}).$$

Vì $3^n-1 \vdots n^3=2^{3\alpha}.t^3$, suy ra $\alpha+2\geq 3\alpha \Rightarrow \alpha\leq 1 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow n=2t$.

Giả sử *n* có ước lẻ thực sự, gọi ước lẻ nhỏ nhất của nó là *q*, và gọi $k=ord_q(3)$, theo giả thiết có: $3^n\equiv 1\pmod{q}$ và theo định lý Fermat nhỏ, ta cũng có: $3^{q-1}\equiv 1\pmod{q}$.

Từ đó suy ra: $\begin{cases} k \mid n \\ k \mid q-1 \end{cases}$.

Nếu *k* lẻ, ta chỉ ra được một ước lẻ của *n* mà nhỏ hơn *q*, trái với cách chọn *q*, vậy *k* chẵn.

Mặt khác: $n=2.t$ (*t* lẻ), do đó *k* = 2 và $n \mid 3^2-1=2^3$, do đó *n* không có ước lẻ thực sự.

Vậy $n=1; n=2$.

Lời bàn: *Chọn ước nguyên tố p nhỏ nhất của n, qua sử dụng cấp ta có được* $p=2$ *nhờ đó n có dạng* $n=2^{\alpha}.t$. *Khi đó, qua phân tích thành thừa số của* 3^n-1 *dễ tìm được số mũ đúng của 2. Từ đó tìm được* $n=2t$ *để cuối cùng có* $n=2$*, khá tự nhiên.*

Bài toán 7. Cho $a;b;c$ là các số nguyên thỏa mãn a^3 chia hết cho *b*; b^3 chia hết cho *c* và c^3 chia hết cho *a*. Chứng minh tích abc là ước của $M=(a+b+c)^{13}$.

Tiếp cận bài toán: Bài toán đã gợi cho ta xét ước nguyên tố *p* bất kỳ của tích *abc* và phải chứng tỏ số mũ đúng của *p* trong tích *abc* phải nhỏ hơn số mũ đúng của *p* trong *M*.

Bài giải:

Gọi *p* là ước nguyên tố bất kỳ của tích abc, khi đó tồn tại các số tự nhiên $\alpha;\beta;\gamma$ sao cho

$a=p^{\beta}.m;\ b=p^{\beta}n;\ c=p^{\gamma}.k; (m;n;k\in\mathbb{Z}), (p;m)=(p;n)=(p;k)=1$

Do $b \mid a^3 \Rightarrow p^{\beta}n \mid p^{3\alpha}m^3$ mà $(p;n)=1$ nên $\beta\leq 3\alpha$, tương tự có $\gamma\leq 3\beta;\ \alpha\leq 3\gamma$.

Ta có: tích $abc=p^{\alpha+\beta+\gamma}mnk; (p;mnk)=1$.

Mà p là ước nguyên tố bất kỳ của tích abc nên ta chỉ cần chứng tỏ số mũ đúng của p trong $\left(a+b+c\right)^{13}$ không nhỏ hơn $\alpha+\beta+\gamma$. (hay $v_p((a+b+c)^{13}) \geq \alpha+\beta+\gamma$)

Không mất tính tổng quát giả sử $\alpha=\min\{\alpha;\beta;\gamma\}$.

Khi đó: số mũ đúng của p trong $\left(a+b+c\right)^{13}$ là 13α.($v_p((a+b+c)^{13})=13\alpha$)

Mà ta có $\alpha+\beta+\gamma \leq \alpha+3\alpha+9\alpha=13\alpha$. Chứng tỏ $abc \mid \left(a+b+c\right)^{13}$.

Lời bàn: *Số mũ đúng (LTE) là linh hồn của bài giải!*

Bài toán 8. (***Olympic Zhautytov 2018***) Chứng minh tồn tại vô hạn bộ số $\left(m;n\right)$ thỏa mãn $m+n$ là ước của $\left(m!\right)^n+\left(n!\right)^m+1$.

***Tiếp cận bài toán*:** Yếu tố ước của biểu thức chứa lũy thừa và giai thừa rõ ràng ta phải nghĩ đến ước nguyên tố. Khả năng ước nguyên tố này là lẻ. Có vô hạn số nguyên tố lẻ như vậy trong hai số *m;n* phải có số chẵn. Trong biểu thức có chứa giai thừa lại cộng thêm 1 chia hết cho *p* có bóng dáng của định lý Wilson. Thử bắt đầu bởi các ý tưởng đó.

Bài giải:

Chúng ta sẽ tìm bộ số $\left(m;n\right)$ thỏa mãn $m+n=p$ là một số nguyên tố và n là số chẵn. Theo định lý Wilson, ta có:

$$m!=\left(p-n\right)!=\frac{\left(p-1\right)!}{\left(p-n+1\right)...\left(p-2\right)\left(p-1\right)}=\frac{-1}{-\left(n-1\right)...\left(-2\right)\left(-1\right)}=\frac{1}{\left(n-1\right)!}\equiv\frac{n}{n!}\left(\bmod p\right)$$

Theo định lý Fecma nhỏ, ta có $\left(n!\right)^p\equiv n!\left(\bmod p\right)$ nên

$$\left(m!\right)^n+\left(n!\right)^m+1\equiv\left(\frac{n}{n!}\right)^n+\left(n!\right)^{p-n}+1\equiv\frac{n^n+n!+\left(n!\right)^n}{\left(n!\right)^n}\left(\bmod p\right)$$

Do đó ta cần chứng minh tồn tại vô số số nguyên dương n chẵn sao cho

$n^n+n!+\left(n!\right)^n$ có một ước nguyên tố $p>n$.

Ta chỉ ra điều đó đúng bằng cách lấy ví dụ với mọi số có dạng $n=2q$ với $q>2$ là số nguyên tố . Thật vậy, xét: $A=\left(2q\right)^{2q}+\left(2q!\right)+\left(\left(2q\right)!\right)^{2q}$

Nếu $r<2q$ là số nguyên tố và $r\notin\left\{2;q\right\}$ thì $A\equiv\left(2q\right)^{2q}\equiv 0\left(\bmod r\right)$. Số mũ của q trong $\left(2q\right)!$ là 2 trong khi đó số mũ của $\left(2q\right)^{2q}$ và $\left(\left(2q\right)!\right)^{2q}$ lần lượt là $2q$ và $4q$, suy ra $v_p\left(A\right)=2$

Theo công thức Legendre: $v_2\left((2q)!\right)=\left[\frac{2q}{2}\right]+\left[\frac{2q}{4}\right]+\left[\frac{2q}{8}\right]+...<\frac{2q}{2}+\frac{2q}{4}+\frac{2q}{8}+...=2q$

Nên: $v_2\left((2q)!\right)<v_2\left((2q)^{2q}\right)$

Ta có: $v_2\left((2q)!\right)<v_2\left(\left((2q)!\right)^{2q}\right)$ suy ra $v_2(A)\le 2q-1$

Lại có $A>(2q)^{2q}>2^{2q-1}q^2$ nên A có một ước nguyên tố lẻ $p>2q$ (đpcm)

Lời bàn: *Bài toán khó, đầy kỹ thuật, nhưng khá hay.*

Bài toán 9. (*Đề đề nghị của trường Hùng Vương–Phú Thọ–lớp 10–2015*)

Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố có dạng $4k+1$ thì có một số tự nhiên a nhỏ hơn p sao cho a^2+1 chia hết cho p.

Tiếp cận bài toán: trước tiên ta thấy $a^2\equiv -1\pmod p$, gợi cho ta liên tưởng đến định lý Wilson $(p-1)!\equiv -1\pmod p$ khả năng tồn tại số a nhỏ hơn p. Như vậy phải có tích liên tiếp các số nguyên dương, từ $4k\equiv -1\pmod p$. Hướng giải đã lộ diện.

Bài giải:

Theo định lý Wilson: $(p-1)!+1\,\vdots\, p$ với $p=4k+1\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ thì $(4k)!+1\,\vdots\, p$ (1).

Mặt khác: $2k+i\equiv -2k+i-1\pmod p$ với $i=1,2,...,2k$.

Do đó: $(2k+1)(2k+2)....(4k)\equiv(2k)!\pmod p$

Suy ra: $(4k)!\equiv\left[(2k)!\right]^2\pmod p$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\left[(2k)!\right]^2+1\,\vdots\, p$.

Gọi a là dư của phép chia $(2k)!$ cho p thì $a<p$ và $(2k)!\equiv a\pmod p$, do đó $a^2+1\,\vdots\, p$ (đpcm).

Lời bàn: *Từ ý tưởng dùng định lý Wilson đã rất khéo trong biến đổi* $4k+1=p$ *để có biểu thức* $2k+i\equiv -2k+i-1\pmod p$. *Từ ý tưởng đến lời giải khá đẹp!*

Bài toán 10. Giả sử a,b là các số nguyên dương, sao cho $2a-1;\ 2b-1;\ a+b$ đều là các số nguyên tố. Chứng minh rằng a^a+b^b và a^b+b^a đều không chia hết cho $a+b$.

***Tiếp cận bài toán*:** Từ giả thiết suy ra $a+b$ nguyên tố lẻ nên *a;b* khác tính chẵn lẻ. Ta biết a^n+b^n chia hết cho $a+b$ khi *n* lẻ, nên khi *b* lẻ thì *a*+*b* là ước của a^b+b^b. Do đó kết hợp với giả thiết phản chứng, ta sẽ suy ra biểu thức bội của *a*+*b*. Từ đó sẽ có hướng suy luận tiếp.

Bài giải:

Có $2a-1; 2b-1$ là nguyên tố nên $a>1, b>1 \Rightarrow a+b>2$, mà $a+b$ nguyên tố, do đó $a+b$ là số lẻ, suy ra $\varphi(a+b)=a+b-1$. ("phi hàm Euler của $a+b$")

Giả sử a chẵn, b lẻ. Vì b lẻ nên $a+b$ là ước số của a^b+b^b (1)

+) Nếu $a+b$ là ước số của a^a+b^b (2)

Từ (1), (2) suy ra $a+b$ là ước số của (a^b-a^a), suy ra: $a^a(a^{b-a}-1)\vdots(a+b)$, nếu $a<b$ (*) hoặc $a^b(1-a^{a-b})\vdots(a+b)$ nếu $a>b$

- Nếu $(a+b)$ là ước số của a^a mà $(a+b)$ nguyên tố, nên $(a+b)$ là ước số của a, vô lý vì $a<a+b$.
- Nếu $(a+b)$ là ước số của a^b mà $(a+b)$ nguyên tố nên $(a+b)$ là ước số của a, vô lý vì $a<a+b$.

Từ (*) suy ra $(a+b)$ là ước số của $a^{|b-a|}-1$ hay $a^{|b-a|}\equiv 1\left(\text{mod }(a+b)\right)$.

Gọi $h=ord_{a+b}(a)\Rightarrow h\,|\left(|\,b-a\,|\right)$

Mà $h\,|\,\phi(a+b)\Rightarrow h\,|\,a+b-1 \Rightarrow \begin{cases} h\,|\,2a-1 \\ h\,|\,2b-1 \end{cases}$

Do $(2a-1), (2b-1)$ là số nguyên tố nên $h=1\Rightarrow a\equiv 1\left(\text{mod }(a+b)\right)\Rightarrow (a-1)\vdots(a+b)$, vô lý vì $0<a-1<a+b$.

+) Tương tự, nếu $a^b+b^a\vdots(a+b)$ mà $(a^b+b^b)\vdots(a+b)\Rightarrow(b^a-b^b)\vdots(a+b)$

$b^a(1-b^{b-a})\vdots(a+b)$ nếu $a<b$ hoặc $b^b(b^{a-b}-1)\vdots(a+b)$ nếu $a>b$. (**)

- Nếu $b^a\vdots(a+b)\Rightarrow b\vdots(a+b)$ do $a+b$ nguyên tố, vô lý vì $b<a+b$.
- Nếu $b^b\vdots(a+b)\Rightarrow b\vdots(a+b)$ do $(a+b)$ nguyên tố, vô lý vì $b<a+b$.

Từ (**) có $(b^{|a-b|}-1)\vdots(a+b)\Rightarrow b^{|a-b|}\equiv 1\left(\text{mod }(a+b)\right)$.

Gọi $k=ord_{a+b}(b)\Rightarrow k\,|\,(|\,a-b\,|)$.

Mà $k\,|\,a+b-1=\phi(a+b)\Rightarrow \begin{cases} k\,|\,2a-1 \\ k\,|\,2b-1. \end{cases}$

Do $2a-1; 2b-1$ là số nguyên tố $\Rightarrow k=1\Rightarrow b\equiv 1\left(\text{mod }(a+b)\right)\Rightarrow b-1\vdots(a+b)$, vô lý vì $0<b-1<a+b$.

Vậy $a^a+b^b; a^b+b^a$ đều không chia hết cho $2a-1; 2b-1$.

Lời bàn: *Ta thấy vai trò lợi hại của việc dùng cấp để chứng tỏ a+b không phải ước của* a^a+b^b *và* a^b+b^a *!*

II.1.d. Vai trò ước lẻ và ước lẻ lớn nhất trong giải toán.

Mọi số nguyên dương đều có ước số lẻ, trong các ước lẻ đó luôn tồn tại ước số lẻ lớn nhất. Khai thác tính chất chia hết của số lẻ ta có một số bài giải hay và đẹp.

Trước tiên ta tìm hiểu một số tính chất của ước lẻ lớn nhất.

Ta ký hiệu là $L(n)$ là ước lẻ lớn nhất của *n*.Ta có thể biểu diễn một số nguyên dương *n* bất kỳ dưới dạng sau: $n = 2^k.\ell$ với k ∈ N và ℓ là ước số lẻ lớn nhất. Khi đó $L(n) = \ell$.

Nhận xét:

- Mọi số nguyên dương *n* luôn tồn tại $L(n)$, và $1 \le L(n) \le n$
- $L(n) | n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Một số tính chất của ước lẻ lớn nhất:

- $L(2n) = L(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$
- $L(2n+1) = 2n+1$
- Mọi ước số lẻ của *n* đều là ước của $L(n)$.

Ta có một số hệ quả sau:

- Khi *p* nguyên tố lớn hơn 2 thì $L(p) = p$. Đặc biệt $L(p) = 1 \Leftrightarrow p = 2$.
- Với mọi số tự nhiên *n* luôn có $n.L(n)$ là số chính phương hoặc bằng 2 lần của số chính phương. Vì $n = 2^k.\ell$, nếu *k* chẵn thì $n.L(n) = 2^k.\ell^2 = a^2$, nếu *k* lẻ thì $n.L(n) = 2.\left(2^{k-1}\ell^2\right) = 2a^2$

Sau đây là một số bài toán sử dụng ước lẻ lớn nhất để giải.

Bài toán 1. Tìm tất cả các số nguyên tố *p* có dạng $p = n^n + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), biết *p* có không nhiều hơn 19 chữ số.

Tiếp cận bài toán: Ta biết tổng hai lũy thừa số mũ *n* phân tích thành tích khi *n* lẻ. Mà *n* luôn có ước số lẻ. Từ đó dùng điều kiện để số *p* là nguyên tố ta sẽ có hướng giải bài toán.

***Bài giải*:**

Ta có: $n > 0$, đặt $n = 2^k.\ell$ ($k \in$N, ℓ lẻ) $\Rightarrow p = n^{2^k \ell} + 1 = \left(n^{2^k}\right)^{\ell} + 1 \vdots (n^{2^k} + 1)$, do *p*∈P nên $\ell = 1$.

Suy ra $n = 2^k$, nếu *k* = 0 thì *n* = 1, *p* =2 thỏa.

Nếu k ≥ 1, lại tiếp tục đặt $k = 2^t.a$ (*t* ∈ N, *a* lẻ). Khi đó:

$p = \left(2^{2^t a}\right)^n + 1 = \left(2^{2^t n}\right)^a + 1 \vdots\ 2^{2^t n} + 1$, do $p \in$ P nên *a* = 1, khi đó $k = 2^t, n = 2^{2^t}, t \in N$.

- Với $t = 0,\ n = 2 \Rightarrow p = 5$.

- Với $t=1,\ n=4 \Rightarrow p=4^4+1=257$ là số nguyên tố.
- Với $t \geq 2 \Rightarrow n \geq 16 \Rightarrow p \geq 16^{16}+1 \Rightarrow p \geq 2^{64}+1 = 16.\ 1024^6+1 > 16.10^{18}$, suy ra p có nhiều hơn 19 chữ số.

Vậy $p \in \{2;5;257\}$.

Lời bàn: *Bài này khai thác tính chất* $a^n+b^n \vdots (a+b)$ *khi n lẻ nên ước lẻ lớn nhất đóng vai trò quan trọng ở bài giải này.*

Sau đây là bài cũng có tính chất như vậy.

Bài toán 2. Cho n là số nguyên dương sao cho 3^n-1 chia hết cho 2^{2021}. Chứng minh $n \geq 2^{2019}$.

***Bài giải*:**

Ta biểu diễn $n = 2^k.\ell$ ($k \in N$; $\ell \in \mathbb{N}$, ℓ là ước số nguyên lẻ lớn nhất)

Khi đó: $3^n-1=3^{2^k.\ell}-1^\ell=\left(3^{2^k}-1\right)\left(3^{2^k(\ell-1)}+3^{2^k(\ell-2)}+...+3^{2^k}+1\right)$ (1)

Ta có 3^x là số lẻ với mọi $x \in \mathbb{N}^*$ và $3^{2^k(\ell-1)}+3^{2^k(\ell-2)}+...+3^{2^k}+1$ có một số lẻ số hạng nên $3^{2^k(\ell-1)}+3^{2^k(\ell-2)}+...+3^{2^k}+1$ là số lẻ.

Từ (1) suy ra: (3^n – 1) chia hết cho 2^{2021} khi và chỉ khi $(3^{2^k}-1) \vdots 2^{2021}$ (2)

Lại có hằng đẳng thức:

$$3^{2^k}-1=\left(3^{2^{k-1}}\right)^2-1=\left(3^{2^{k-1}}+1\right)\left(3^{2^{k-1}}-1\right)=\left(3^{2^{k-1}}+1\right)\left(3^{2^{k-2}}+1\right)...\left(3^2+1\right)\left(3^2-1\right)$$

Chú ý mỗi thừa số $\left(3^{2^{k-i}}+1\right)$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 (với $i=\overline{1;k-1}$)

Ngoài ra: $3^2–1 = 8 = 2^3$. Do vậy $\left(3^{2^k}-1\right) \vdots 2^{k+2}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $\left(3^{2^k}-1\right) \vdots 2^{2021} \Leftrightarrow k+2 \geq 2021 \Leftrightarrow k \geq 2019$ (4)

Do $n=2^k.\ell$, ℓ lẻ nên $n \geq 2^k$. Vì thế từ (4) suy ra: $\left(3^n-1\right)$ chia hết cho 2^{2021} $\Leftrightarrow$ $n \geq 2^{2019}$ (đpcm)

Bài toán 3. ***(Czech – Slovak 2013)*** Gọi *L(n)* là ký hiệu ước số lẻ lớn nhất của *n*. Hãy tính tổng sau:

$$S = L(1)+L(2)+L(3)+......+L(2^{2013})$$

Tiếp cận bài toán: Dựa vào tính chất của ước lẻ lớn nhất *L(n),* ta thử tìm quy luật của *S(n)* hay tìm số hạng tổng quát của nó.

Bài giải:

Với mỗi $k\in\mathbb{N}^*$, ta có $L(2k)= L(k)$ và $L(2k-1)= 2k-1$

Ta gọi $S(n)=L(1)+L(2)+L(3)+...+L(2^n)$

Theo tính chất nêu trên, ta có

$$S(n)=\left[L(2)+L(4)+...+L(2^n)\right]+\left[L(1)+L(3)+...+L(2^n-1)\right].$$

$$S(n)=\left[L(1)+L(2)+...+L(2^n-1)\right]+\left[1+3+...+(2^n-1)\right]$$

$$=S(n-1)+\frac{(1+2^n-1)2^n}{2}=S(n-1)+4^{n-1}$$

Ta được công thức truy hồi: $S(n)=S(n-1)+4^{n-1}$ đúng với mọi số nguyên dương *n.*

Áp dụng công thức truy hồi trên ta có;

$S(n)=S(n-1)+4^{n-1}$

$S(n-1)=S(n-2)+4^{n-2}$

$S(n-2)=S(n-3)+4^{n-3}$

……………………….

$S(2)=S(1)+4^1$

$S(1)=2$

Cộng *n* đẳng thức trên ta được: $S(n)=2+4+4^2+4^3+...+4^{n-1}=2+\frac{4^n-4}{3}=\frac{4^n+2}{3}$.

Do đó theo đề bài ta tính được $S(2013)=\frac{4^{2013}+2}{3}$

Lời bàn: *Bài này có tính chất của dãy, then chốt của bài toán là tìm công thức truy hồi của S(n). Kết quả đẹp!*

Bài toán 4. *(IMO Shorlist 2014)* Cho trước số nguyên dương $n>1$. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số hạng của dãy $(a_k)_{k\ge1}$ là lẻ, trong đó $a_k=\left[\frac{n^k}{k}\right]$.

Tiếp cận bài toán: Điều kiện bài toán tương đối mở nên việc chọn *k* tùy thuộc *n* để có a_k lẻ. Chú ý bất đẳng thức phần nguyên $x-1<[x]\le x$.

Bài giải:

Nếu *n* lẻ, ta cần chọn *k* sao cho $\frac{n^k}{k}$ là số nguyên lẻ, đo đó đặt $k = n^m$ với $m = 1, 2, ...$ thì $a_k = n^{n^m - m}$ là số lẻ với mọi m.(thỏa yêu cầu đề bài)

Ta xét *n* chẵn, đặt $n = 2t$ với $t \geq 1$. Ta có $\left[\frac{n^k}{k}\right] = a \in \mathbb{N}^*$ mà luôn có $k = 2^m.\ell$ (ℓ là ước số lẻ lớn nhất của *k*), nên ta phải chọn số α đủ nhỏ để $\frac{n^k - \alpha}{2^m.\ell} = a \in \mathbb{N}^*$. Như vậy, ta cần chọn ℓ là ước số nguyên tố lẻ lớn nhất của $n^k - \alpha$ và chọn $\alpha = 2^m$.

Khi đó, với mỗi $m \geq 2$ thì $n^k - 2^m = (2t)^k - 2^m = 2^m\left(2^{k-m}.t^k - 1\right)$, do $k - m = 2^m.\ell - m > 1$, nên $2^{k-m} - 1$ có ước số nguyên tố, gọi *p* là ước nguyên tố lớn nhất. Ta đặt $k = p.2^m$, ta có $n^k - 2^m$ có ước nguyên tố *p* nên $n^k \equiv 2^m \pmod p$.

Mặt khác: từ $n^k - 2^m < n^k < n^k + 2^m(p-1)$, suy ra $\frac{n^k - 2^m}{p.2^m} < \frac{n^k}{k} < \frac{n^k + 2^m(p-1)}{p.2^m}$.

Do đó: $a_k = \left[\frac{n^k}{k}\right] = \frac{n^k - 2^m}{p.2^m} = \frac{\frac{n^k}{2^m} - 1}{p}$.

Vì $\frac{n^k}{2^m} = \frac{(2t)^{p.2^m}}{2^m}$ là số chẵn nên $\frac{n^k}{2^m} - 1$ là một số nguyên lẻ nên a_k lẻ, bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Lời bàn: *Khi n lẻ việc chọn k tương đối tự nhiên, khi n chẵn phải sử dụng kỹ thuật dùng ước lẻ để giải quyết bài toán. Rất tư duy!*

Bài toán 5. ***(Czech – Slovak– 25/3/2014)*** Cho số tự nhiên *n*, ký hiệu tất cả các ước số của *n* là $d_1;\ d_2;\ \ldots;\ d_k$ giả sử $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ (với $d_1 = 1;\ d_k = n$). Hãy xác định tất cả các giá trị của *n* thỏa mãn hai điều kiện sau: $d_5 - d_3 = 50$ và $11d_5 + 8d_7 = 3n$.

Tiếp cận bài toán: Chắc chắn rằng trong các số d_i sẽ có số này là ước của số kia và sẽ có hai ước có tích bằng *n*. Dựa vào dữ kiện đề bài sẽ tìm mối quan hệ giữa các ước, bài toán sẽ giải được.

***Bài giải*:**

Ta xét hai trường hợp:

+) Nếu *n* lẻ thì *n* là ước số lẻ lớn nhất của *n*, khi đó tất cả các ước d_i $(i=\overline{1;k})$ đều lẻ và $d_k = n$.

Từ $11d_5 + 8d_7 = 3n$ suy ra $d_7|11d_5$ và $d_5|8d_7$, do các d_i lẻ nên $d_5|d_7$. Từ giả thiết $d_7 > d_5$ và quan hệ $d_5|d_7|11d_5$ suy ra $d_7 = 11d_5$.

Từ $11d_5 + 8d_7 = 3n$, ta được $99d_5 = 3n$ hay $33d_5 = n$, suy ra 1;3;11;33 đều là ước của *n* và các ước này nhỏ hơn 50.

Từ ước thứ 5 là d_5 thỏa $d_5 = d_3 + 50 > 50$.

Như vậy ta xác định $d_1 = 1$; $d_2 = 3$; $d_3 = 11$; $d_4 = 33$ và $d_5 = d_3 + 50 = 61$ và ta có $n = 33d_5 = 33.61 = 2013$. Số 2013 thỏa điều kiện $d_7 = 11d_3 = 11.61$

+) Nếu *n* chẵn: từ đẳng thức $11d_5 + 8d_7 = 3n \Rightarrow 2 \mid d_5$ và $2 \mid d_5 - 50 \Rightarrow 2 \mid d_3$

Từ $d_1 = 1$; $d_2 = 2$ và $d_3 \neq 3$, nên $d_3 = 4$ hoặc $d_3 = 2t$ $(t > 2)$ Nếu $d_3 = 2t$ suy ra t là ước của *n*, với $d_2 < t < d_3$, không phù hợp.

Do đó $d_3 = 4$; $d_5 = d_3 + 50 = 54$ chia hết cho 3, nên $3 \mid d_5 | n \Rightarrow 3 \mid n \Rightarrow d_2 < 3 < d_3$ không xác định, nên *n* chẵn (loại).

Kết luận $n = 2013$.

Lời bàn: *Chỉ sử dụng tính chẵn lẻ của ước ta có lời giải rõ ràng dễ hiểu!*

Bài toán 6. ***(Putnam 1969)*** Cho số nguyên dương n sao cho $n+1$ chia hết cho 24. Chứng minh rằng tổng của tất cả các ước của n cũng chia hết cho 24.

***Tiếp cận bài toán*:** Từ giả thiết ta đã thấy tính chẵn lẻ của *n*, do đó tất cả các ước của *n* đều lẻ. Để ý nếu *d* là ước của *n* thì $\dfrac{n}{d}$ cũng là ước của nó. Hãy xem nó có những dạng ước nào, từ đó có hướng đi.

Bài giải:

Từ giả thiết $24 \mid n+1$, suy ra *n* là số lẻ và *n* cũng là ước số lẻ lớn nhất của *n*. Gọi *d* là ước số của *n* suy ra *d* lẻ. Do *n* không chia hết cho 3 và không chia hết cho 8 nên suy ra $d \equiv 1;2 \pmod{3}$ và $d \equiv 1,3,5;7 \pmod{8}$.

Ta có: *n* không thể là số chính phương, vì $n+1 = (a^2+1) \vdots 24 \Rightarrow (a^2+1) \vdots 3$, vô lý!

Ta có: ứng với ước số lẻ *d* của *n* thì cũng có ước số lẻ là $\dfrac{n}{d}$ và ta có $d.\dfrac{n}{d} = n$ nên để có $24 \mid (n+1)$ thì ta phải có tích $d.\dfrac{n}{d} \equiv 2 \pmod{3}$ và $d.\dfrac{n}{d} \equiv 7 \pmod{8}$, điều đó chỉ có thể xảy ra khi:

+ $d \equiv 1, \frac{n}{d} \equiv 2 \pmod{3}$ hoặc ngược lại.

+ $d \equiv 1, \frac{n}{d} \equiv 7 \pmod{8}$ hoặc ngược lại.

+ $d \equiv 3, \frac{n}{d} \equiv 5 \pmod{8}$ hoặc ngược lại.

Trong tất cả các trường hợp, ta luôn có $d+\frac{n}{d} \equiv 0 \pmod{3}$ và $d+\frac{n}{d} \equiv 0 \pmod{8}$, từ đó $24 \left| (d+\frac{n}{d}) \right.$ với $d \neq \frac{n}{d}$, không ước nào được sử dụng hai lần trong các cặp. Suy ra $24 \left| \sum_{d|n} d = \sigma(n) \right.$. Chứng tỏ tổng của tất cả các ước của n cũng chia hết cho 24.

Lời bàn: *Bài giải đã khai thác từ số n lẻ và không chia hết cho 3 và 8 kết hợp với nhận xét d và* $\frac{n}{d}$ *cùng là ước của n.Suy luận đẹp và quen thuộc*!

Bài toán 7. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m,n) thỏa mãn $\begin{cases} n \mid 2^{m-1}+1 \\ m \mid 2^{n-1}+1 \end{cases}$.

Tiếp cận bài toán: Dễ nhận ra tính chẵn lẻ của *m* và *n*. Biểu thức đề cho dạng tổng các lũy thừa bậc *n*, nó phân tích thành tích khi *n* lẻ. Do đó ước lẻ lớn nhất sẽ có vai trò trong tìm ra hướng giải.

Bài giải:

+) Nếu $m=1 \Rightarrow \begin{cases} n \mid 2^0+1 \\ m \mid 2^{n-1}+1 \end{cases} \Rightarrow n \mid 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=1 \\ n=2 \end{array} \right.$

+) Nếu $n=1 \Rightarrow \begin{cases} n \mid 2^{m-1}+1 \\ m \mid 2^0+1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array} \right.$

+) Nếu $m>1, n>1$

Có $\begin{cases} n \mid 2^{m-1}+1 \\ m \mid 2^{n-1}+1 \end{cases}$ suy ra *m*, *n* lẻ.

Giả sử $m-1=2^a.\, x\ (a \in N^*)$ và $n-1=2^b.\, y\ \ (b \in N^*)$ với *x; y* là các ước số lẻ lớn nhất của $m-1$ và $n-1$.

Gọi p là ước nguyên tố lẻ bất kỳ của $n \Rightarrow p \mid 2^{m-1}+1 \Rightarrow p \mid (2^x)^{2^a}+1$ (1)

Suy ra: $p \mid (2^x)^{2^{a+1}}-1 \Rightarrow (2^x)^{2^{a+1}} \equiv 1 \pmod{p}$

Gọi $h = ord_p\left(2^x\right)$ => $h \mid 2^{a+1}$ => $h = 2^t\left(t \le a+1\right)$. Nếu $t \le a$ thì $2^t \mid 2^a$ => $\left(2^x\right)^{2^a} \equiv 1 \pmod{p}$

Suy ra $p \mid (2^x)^{2^a}-1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $p \mid 2$ mâu thuẫn p lẻ. Do đó $t = a+1$ nên $h = 2^{a+1} \mid \varphi\left(p\right)$ => $2^{a+1} \mid (p-1) \Rightarrow p \equiv 1 \pmod{2^{a+1}} \Rightarrow p = 2^{a+1}k+1.$

Như vậy mọi ước lẻ của n đều có dạng $2^{a+1}.k+1$. Do tích của các số có dạng $2^{a+1}.k+1$ cũng là số có dạng $2^{a+1}.k+1$ nên $n \equiv 1 \pmod{2^{a+1}}$.

Ta có $n-1 = 2^{a+1}.y_1\ (y_1 \in N^*)$ mà $n-1 = 2^b.y\,(y$ lẻ$) \Rightarrow b \ge a+1$ (3)

Gọi q là ước nguyên tố bất kỳ của m.

$q \mid m \Rightarrow q \mid 2^{n-1}+1 \Rightarrow q \mid (2^x)^{2^b}+1$ tương tự trên ta cũng có $q \equiv 1 \pmod{2^{b+1}}$

$\Rightarrow q = 2^{b+1}.t+1 \Rightarrow m = 2^{b+1}.x_1+1\,(x_1 \in N^*)$

$\Rightarrow m-1 = 2^{b+1}.x_1\ (x_1 \in N^*)$, mà $m-1 = 2^a.x\,(x$ lẻ $) \Rightarrow a \ge b+1$ (4)

Từ (3) và (4) vô lý. Vậy không có $m>1, n>1$ thỏa mãn đề bài.

Kết luận: $m=1, n=1$; $m=1, n=2$; $m=2, n=1$.

Lời bàn: *Cấp và ước lẻ đóng vai trò chính cho bài giải:*

Bài toán 8. (***Chọn đội tuyển ĐH Vinh-2012***). Giả sử p là một số nguyên tố sao cho $2^{p-1}-1$ chia hết cho p^2. Chứng minh rằng với số nguyên dương n tùy ý, số $(p-1)(p!+2^n)$ có ít nhất 3 ước nguyên tố phân biệt.

Tiếp cận bài toán: Từ giả thiết đã cho ta p lẻ và cả hai $(p-1)$; $(p!+2^n)$ đều chẵn, như vậy chỉ cần chứng tỏ mỗi số đều có ít nhất một ước lẻ là xong!

Bài giải:

Vì $p-1$ là một ước của $p!$ nên ước chung lớn nhất của $p-1$ và $p!+2^n$ là một lũy thừa của 2. Bài toán quy về chứng minh $p-1$ và $p!+2^n$ đều có ít nhất một ước lẻ (vì khi đó 2 ước lẻ của chúng khác nhau, vì thế suy ra đpcm).

Giả sử $p-1=2^k$, hay $p=2^k+1$.

Nếu $s\geq 3$ là một ước lẻ của k thì $p=2^{st}+1=(2^t+1)A$, nghĩa là p không phải số nguyên tố. Do đó $k=2^t$. Từ đó suy ra

$$2^{p-1}-1=2^{2^k}-1=(2^{2^{k-1}}-1)(2^{2^{k-1}}+1)$$
$$=(2^{2^t}-1)(2^{2^t}+1)(2^{2^{t+1}}+1)...(2^{2^{k-1}}+1).$$

Rõ ràng p^2 không phải là ước của tích trên vì

$$(2^{2^t}+1,\ 2^{2^l}+1) \text{ với } l>t\text{, và } 2^{2^t}-1<p=2^{2^t+1}.$$

Do đó: $p-1$ không phải là một lũy thừa của 2, nên $p-1$ có ít nhất một ước lẻ.

Tương tự, giả sử $p!+2^n=2^k,\ k>n,$ hay $p!=2^n(2^{k-n}-1)$. Khi đó p là một ước của $2^m-1,$ ở đây $m=k-n$. Giả sử t là số nguyên dương bé nhất sao cho p là ước của 2^t-1. Khi đó t là một ước của m và t là một ước của $p-1$.

Nếu $p-1=lt$ thì $2^{p-1}-1=(2^t-1)(2^{t(l-1)}+...+2^t+1)$.

Vì $2^t\equiv 1 \pmod{p}$ nên chúng ta có $2^{t(l-1)}+...+2^t+1\equiv l\not\equiv 0 \pmod{p}$.

Do đó 2^t-1 chia hết cho p^2. Điều này kéo theo 2^m-1 chia hết cho p^2 hay $p!$ chia hết cho p^2, mâu thuẫn. Nên $p!+2^n$ có ít nhất một ước lẻ.

Vậy mỗi số $p-1$ và $p!+2^n$ đều có ít nhất một ước lẻ. Do đó số $(p-1)(p!+2^n)$ có ít nhất 3 ước nguyên tố phân biệt.

Lời bàn: *Một số không có dạng 2^n thì nó có ít nhất một ước lẻ (khác 1). Nghệ thuật phản chứng đã chỉ ra sự tồn tại ước lẻ khá hay.*

Tổng quan: Qua các bài toán đã nêu ta thấy vai trò của ước số, ước nguyên tố, ước lẻ và ước lẻ lớn nhất đã cho ta một góc nhìn khá thú vị trong giải quyết vấn đề. Đôi lúc nhìn từ "*bên trong*" ta khám phá được vẽ đẹp tiềm ẩn, những nét rất "*duyên*" và rất "*riêng*" của số học. Sự thưởng thức đó chỉ có những cư dân của "vương quốc Toán" mới cảm nhận được!

II.1.e. Bài tập tự luyện

Bài 1. ***(Hungary-2000)*** Tìm tất cả các số nguyên tố *p* sao cho tồn tại bộ ba các số nguyên dương $(x;y;n)$ thỏa mãn $x^3+y^3=p^n$.

Bài 2. Cho *a;b* là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương *m;n* sao cho *ab* là ước số của a^m+b^n-1.

Bài 3. ***(Bulgary Olympic Mathematic)*** Tìm tất cả bộ ba số nguyên dương $(a;b;c)$ sao cho $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho $a^2b;b^2c;c^2a$

Bài 4. ***(2002 Baltic Mathematics Competition)*** Tìm tất cả các số nguyên không âm *n* sao cho số $\left(2^{2m+1}+1\right)^2+1$ chia hết cho nhiều nhất hai số nguyên tố.

Bài 5. ***(IMO lần thứ 40)*** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(n;p)$ sao cho *p* nguyên tố $n\le 2p$ và $(p-1)^n+1$ chia hết cho n^{p-1}.

Bài 6. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n\ge 2$, tồn tại *n* số nguyên dương $a_1;a_2;...;a_n$ sao cho a_j-a_i là ước của a_i+a_j với $1\le i<j\le n$.

Bài 7. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n\ge 2$, số $n!$ biểu diễn thành tổng của *n* ước số khác nhau của nó.

Bài 8. Gọi $p>2$ là số nguyên tố sao cho $3\,|\,(p-2)$. Gọi $S=\{y^2-x^3-1\,|\,x;y\in\mathbb{N},0\le x;y\le p-1\}$. Chứng minh có nhiều nhất *p* phần tử của S chia hết cho *p*.

Bài 9. (***Iran 1995***) Cho số nguyên lẻ $n>3$ với phân tích chuẩn $n=p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$ (p_i là các số nguyên tố). Nếu $m=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên tố *p* sao cho *p* là ước số của 2^m-1 nhưng không là ước số của *m*.

Bài 10. (***Đài Loan 1997***) Gọi *X* là tập hợp các số nguyên có dạng $a_{2k}10^{2k}+a_{2k-2}10^{2k-2}+...+a_2 10^2+a_0$, với *k* là số nguyên không âm và $a_{2i}\in\{1;2;...;9\}$ cho $i=0;1;2;...;k$. Chứng tỏ rằng mọi số nguyên có dạng 2^p3^q với *p;q* là các số nguyên không âm là ước số của một số phần tử của *X*.

Bài 11. (***Nga-2001***) Tìm tất cả các số nguyên dương lẻ *n* lớn hơn 1 sao cho mọi ước số nguyên tố *a* và *b* của *n*, số $a+b-1$ cũng là một ước số của *n*.

Bài 12. (***IMO lần thứ 39***) Xác định tất cả các cặp số nguyên dương $(a;b)$ sao cho ab^2+b+7 là ước của a^2b+a+b.

Bài 13.

a/ Có 10 số nguyên tố nhỏ hơn 3000 chúng lập thành cấp số cọng. Tìm các số này.

b/ Chứng minh không có 11 số nguyên tố nhỏ hơn 20000 chúng có thể lập thành cấp số cọng.

Bài 14. Có *n* số $x_1;x_2;...;x_n$ mỗi số bằng $+1$ hoặc -1.

Chứng minh rằng nếu $x_1.x_2+x_2.x_3+...+x_n.x_1=0$ thì *n* là bội của 4.

Bài 15. ***(Hy lạp 2014)*** Tìm tất cả các số nguyên n sao cho số $A=\dfrac{8n-25}{n+5}$ bằng lập phương của số số hữu tỷ.

Bài 16. ***(Tuymaada Olympiad 2014, C.A Grimm USA)*** Cho *m* và *n* là hai số tự nhiên sao cho $m>n^{n-1}$ và các số $m+1;\ m+2;\ ..;\ m+n$. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên tố khác nhau $p_1;\ p_2;\ \ldots.;p_n$ sao cho $m+k$ là chia hết cho p_k với bất kỳ $k=1;2;3;\ldots.;n$.

Bài 17. ***(Austrian – MO 2016)*** Gọi a; b; c là các số nguyên sao cho $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{ac}{b}+\dfrac{bc}{a}$ là số nguyên. Chứng minh các số: $\dfrac{ab}{c};\dfrac{ac}{b}$ *và* $\dfrac{bc}{a}$ cũng là các số nguyên. (của *Gerhard J. Woeginger*)

Bài 18. ***(Thổ Nhĩ Kỳ - 2018)*** Với mỗi số nguyên *a* ký hiệu $d(a)$ là số các ước nguyên tố của *a*. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương *n* cho trước luôn tồn tại hai số nguyên dương *m*,*k* sao cho $k-m=n$ *và* $d(k)-d(m)=1$.

Bài 19. ***(Nga -2018 lớp 9)*** Giả sử $a_1;\ a_2;\ldots;a_n$ là dãy vô hạn các số nguyên dương tăng nghiêm ngặt và $p_1;\ p_2;\ldots;p_n$ là dãy các số nguyên tố sao cho $p_k\mid a_k\ (\forall k=\overline{1;n})$. Biết rằng $a_n-a_k=p_n-p_k\ (\forall n;k\in N^*)$ Chứng minh rằng tất cả các số $a_i\,(\mathrm{i}=\overline{1;n})$ đều là các số nguyên tố.

Bài 20. Tìm số nguyên dương *n* nhỏ nhất sao cho 17^n-1 chia hết cho 2^{2020}.

Bài 21. ***(Đề đề nghị trường HVT-Hòa bình-2014)*** Tìm tất cả các số tự nhiên a sao cho tồn tại số tự nhiên $n>1$ mà a^n+1 chia hết cho n^2.

Bài 22. Tồn tại hay không các số nguyên dương phân biệt $a_1,a_2,...,a_n$ thỏa mãn:

$$a_1|2^{a_2}-1;a_2|2^{a_3}-1;...;a_{n-1}\mid 2^{a_n}-1;a_n|2^{a_1}-1.$$

Bài 23. Chứng minh rằng nếu *p* là ước nguyên tố lẻ của $a^{2^n}+1\,(a\in Z,n\in N^*)$ thì $p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 2^n)$, hay *p* có dạng $p=2^{n+1}.k+1,\ k\in N^*$.

Bài 24. Cho *n* chẵn, $n>2$ và gọi *p* là một ước nguyên tố của $n-1$. Chứng minh p^{i+1} là ước của $n^{p^i}-1$ với mọi $i=0,1,...$

Bài 25. Chứng minh nếu n là số nguyên dương có k ước nguyên tố lẻ phân biệt thì $\varphi(n) \vdots 2^k$.

Bài 26.

a) Chứng minh rằng với mọi n lẻ, n>1 thì $\left(2^n+2\right) \not\vdots\, n$.

b) Chứng minh rằng có vô số số n chẵn để $\left(2^n+2\right) \vdots n$.

Bài 27. Cho k là số nguyên dương, p là số nguyên tố thỏa mãn $p \mid 2^{2^k}+1$. Chứng minh rằng $(p-1) \vdots 2^{k+1}$.

Bài 28.(**JBMO TST - April camp-2021**).

Có $n>2$ số nguyên khác 0, sao cho mỗi số trong chúng chia hết cho tổng $n-1$ số còn lại. Chứng minh rằng tổng của n số đúng bằng 0.

Bài 29. ***(Bungari MO2006)*** Cho p là số nguyên tố với $p^2 \mid 2^{p-1}-1$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì số $(p-1)\left(p!+2^n\right)$ có ít nhất ba ước số nguyên tố phân biệt.

II.2. SỐ CHÍNH PHƯƠNG NHÌN TỪ ƯỚC SỐ CỦA NÓ.

Ta biết rằng số chính phương là số bằng bình phương đúng của số tự nhiên, như vậy trong phân tích chuẩn của số chính phương thì các số mũ của các thừa số nguyên tố đều chẵn. Từ đó ta dễ dàng suy ra số các ước số của số chính phương luôn luôn lẻ. Do đó ta có các khẳng định sau: Nếu *n* là số chính phương thì theo bổ đề ước đúng ta có:

+ $\forall p; p \mid n \Rightarrow v_p(n) \vdots 2$.

+ $\tau(n) = 2k+1$

II.2.1. Số chính phương có số mũ của các thừa số nguyên tố đều chẵn.

Từ nhận xét trong phân tích chuẩn của số chính phương các số mũ đều chẵn ta có một số bài toán sau.

Bài toán 1. Tìm số chính phương nhỏ nhất có đúng 2021 ước số sao cho nó có nhiều ước số nguyên tố nhất.

Tiếp cận bài toán: Từ đề bài ta có số các ước số của *n* là $\tau(n) = 2021$. Số các ước

nguyên tố của *n* bằng số thừa số của 2021 trong phân tích chuẩn, từ đó sẽ tìm được lời giải!

Bài giải:s

Gọi *A* là số cần tìm, gọi các ước nguyên tố của *A* là $p_1; p_2; ...; p_k$.

Ta có *A* viết dạng chuẩn $A = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}; \alpha_i \in \mathbb{N}$

Theo đề bài, số các ước của *A* là 2021, do đó $\tau(A) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1) = 2021$

Mà $2021 = 1.2021 = 43.47$ nên tối đa có 2 ước nguyên tố.

Do yêu cầu bài toán tìm số chính phương nhỏ nhất nên chọn hai số nguyên tố $p_1 = 2; p_2 = 3$

So sánh $2^{42}.3^{46}$ và $2^{46}.3^{42}$, dễ dàng kết luận $A_{\min} = 2^{46}.3^{42}$.

Lời bàn: *Yêu cầu bài toán có vẽ như khó, nhưng chỉ suy luận từ hàm* $\tau(n)$ *ta có lời giải khá đẹp! Từ đó dễ dàng thay đổi số 2021 bởi số khác tùy ý, ta cũng có bài giải tương tự.*

Bài toán 2. Chứng minh rằng nếu $a;b$ là các số nguyên dương thỏa mãn $ab \mid a^2+b^2+a$ thì *a* là số chính phương.

Tiếp cận bài toán: Từ điều kiện *ab* là ước của biểu thức nên hướng xét ước nguyên tố có thể sử dụng được. Để *a* là số chính phương thì mọi ước số nguyên tố của *a* đều có lũy thừa chẵn.

Bài giải:

Từ $ab \mid a^2+b^2+a \Rightarrow a \mid a^2+b^2+a \Rightarrow a \mid b^2$

Gọi p là ước nguyên số bất kỳ của a, theo bổ đề LTE ta giả sử $v_p(a)$ là số lẻ.

Đặt $a = p^{2l+1}x$ với x nguyên dương và $gcd(x;p) = 1$.

Từ giả thiết ta có: $p^{2l+1} | a; a | b^2 \Rightarrow p^{l+1} | b$. Ta đặt $b = p^{l+1}y$ với y nguyên dương.

Ta có: $p^{2l+1}xp^{l+1}y | \left(p^{2l+1}x\right)^2 + \left(p^{l+1}y\right)^2 + p^{2l+1}x \Rightarrow p^{l+1} | p^{2l+1}x + py^2 + x$

$$\Rightarrow p | p^{2l+1}.x + py^2 + x \Rightarrow p | x$$

Mâu thuẫn với $gcd(x;p) = 1$. Do đó $v_p(a)$ là số chẵn. Vậy a chính phương.

Lời bàn: *Chỉ khai thác số mũ đúng của số nguyên tố trong số chính phương phải chẵn, cho ta lời giải hay,ngắn gọn!*

Bài toán 3. Cho 17 số tự nhiên có ước số nguyên tố không vượt quá số 7. Chứng minh luôn tồn tại ít nhất hai số có tích là số chính phương.

Tiếp cận bài toán: Rõ ràng các ước số nguyên tố chỉ cố thể là 2,3,5,7. Cần phải chỉ ra tồn tại hai số mà tích của nó có lũy thừa bậc chẵn của các thừa số nguyên tố. Tồn tại hai số trong 17 số phải chăng có bóng dáng của nguyên lý Diichlet.?!

***Bài giải*:**

Gọi 17 số tự nhiên đó là $n_1; n_2; \ldots; n_{16}; n_{17}$. Do ước số nguyên tố không vượt quá 7nên trong phân tích chuẩn ra thừa số nguyên tố của các số đó đều có dạng:

$$n_i = 2^{a_i}3^{b_i}.5^{c_i}.7^{d_i}, (a_i; b_i; c_i; d_i \in \mathbb{N}) \text{ với } i = 1; 2; \ldots, 17$$

Mỗi số $a_i; b_i; c_i; d_i$ nhận các giá trị là chẵn hoặc lẻ (xem số 0 là số chẵn). Do đó có $2^4 = 16$ dãy bốn số $(a_i; b_i; c_i; d_i)$ có tính chất chẵn lẻ khác nhau trong 4 vị trí của bộ số. Chẳng hạn như (ch; ch; ch; ch); (ch; ch; ch; lẻ); ….; (lẻ; lẻ; lẻ; lẻ) (kí hiệu: ch là chẵn)

Mà có 17 số tự nhiên khác nhau nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 2 bộ số $(a_i; b_i; c_i; d_i)$ có cùng tính chẵn lẻ của từng vị trí trong bộ số, giả sử đó là 2 số n_k và n_l khi đó tích hai số

$n_k.n_l = 2^{a_k+a_l}3^{b_k+b_l}.5^{c_k+c_l}.7^{d_k+d_l} = 2^{2a}.3^{2b}.5^{2c}.7^{2d} = (2^a.3^b.5^c.7^d)^2 = n^2$ là số chính phương.

Nhận xét: **Ta có thể nêu bài toán tổng quát**

Cho $n = 2^k + a$ $(a \in \mathbb{N}, 1 \le a < 2^k)$ *số tự nhiên có ước số nguyên tố không vượt quá số nguyên tố thứ k gọi là* p_k *(trong dãy các số nguyên tố sắp theo thứ tự tăng dần). Chứng minh rằng trong n số luôn tồn tại ít nhất hai số có tích là số chính phương.*

Chứng minh: Các số tự nhiên n có dạng phân tích chuẩn là: $p_1^{a_1}.p_2^{b_2}....p_k^{c_k}$. Mỗi số mũ của p_i nhận một trong hai giá trị chẵn hoặc lẻ. Nên có dãy gồm 2^k bộ số có tính chất chẵn lẻ khác nhau. Mà $2^k < n$ nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất 2 số có cùng tính chất chẵn lẻ của các số mũ, khi đó tích của hai số đó sẽ có số mũ chẵn, chứng tỏ tích hai số đó chính phương.

Bài toán 4. Cho hai số nguyên dương *a; b* thỏa mãn $2a^2+a=3b^2+b$. Chứng minh $a-b;2a+2b+1$ là các số chính phương.

Tiếp cận bài toán: Cần chứng minh $a-b;2a+2b+1$ là các số chính phương, như vậy tích hai số đó sẽ có liên hệ với giả thiết. Từ mối quan hệ đó ta sẽ có hướng đi.

Bài giải:

Từ $2a^2+a=3b^2+b \Leftrightarrow 2a^2-2b^2+a-b=b^2 \Leftrightarrow (a-b)(2a+2b+1)=b^2$.

Ta gọi *p* là ước số nguyên tố chung của $a-b$ và $2a+2b+1$ $(p>1)$

Khi đó theo bổ đề LTE, ta có: $V_p(a-b)\ge 1$ và $V_p(2a+2b+1)\ge 1$

suy ra: $V_p((a-b)(2a+2b+1))=V_p(a-b)+V_p(2a+2b+1)\ge 2$

Do đó: $V_p\left(b^2\right)\ge 2 \Rightarrow 2V_p(b)\ge 2 \Leftrightarrow V_p(b)\ge 1$

Suy ra: $p\,|\,b$, mà $V_p(a-b)\ge 1 \Rightarrow a-b\,\vdots\, p$ hay $p\,|\,(a-b)$

nên ta cũng có $p\,|\,a \Rightarrow p\,|\,(a+b) \Rightarrow p\,|\,(2a+2b+1) \Rightarrow p\,|\,1$ vô lý vì $p>1$.

Chứng tỏ $a-b$ và $2a+2b+1$ không có ước nguyên tố chung hay chúng nguyên tố cùng nhau, mà $(a-b)(2a+2b+1)=b^2$ nên tồn tại các số nguyên tố p_1 là ước của $a-b$ và p_2 là ước của $2a+2b+1$, mà $V_{p_1}[(a-b)(2a+2b+1)]=V_{p_1}\left(b^2\right)$

Suy ra $V_{p_1}(a-b)+V_{p_1}(2a+2b+1)=2V_{p_1}(b)$

$\Rightarrow V_{p_1}(a-b)+0=2V_{p_1}(b)$ là số chẵn, do đó $a-b$ chính phương.

+ Tương tự $2a+2b+1$ chính phương.

Lời bàn: *Vai trò rất lớn của bổ đề LTE trong việc chứng tỏ số mũ đúng của các ước số nguyên tố là chẵn! Từ ý tưởng đến lời giải khá hợp lý và thuyết phục!*

Bài toán 5. Cho 3 số nguyên dương *a; b; c* thỏa mãn điều kiện:

$$c(ac+1)^2=(2c+b)(3c+b)$$

Chứng minh *c* là số chính phương.

Tiếp cận bài toán: Từ biểu thức đề bài cho sẽ xuất hiện mối quan hệ giữa *c* và các số *a,b*. Số *c* chính phương thì số mũ của mọi ước nguyên tố *p* của nó đều chẵn.

***Bài giải*:**

Ta cần chứng minh trong phân tích chuẩn, tất cả các số mũ của các thừa số nguyên tố đều là các số chẵn.

Từ giả thiết ta có: $c(ac+1)^2=6c^2+5bc+b^2$ suy ra b^2 chia hết cho *c*.

Ta gọi *p* là *ước số nguyên tố bất kỳ* của *c*.

Ta gọi số mũ đúng của *p* trong phân tích chuẩn của số tự nhiên *n*, ký hiệu là $V_p(n)$.

Với ký hiệu đó, ta có: $c\mid b^2$ suy ra $V_p\left(b^2\right)\ge V_p(c)\Rightarrow 2\,V_p(b)\ge V_p(c)$ (1)

+ Ta giả sử: $V_p(b)\ge V_p(c)$, do $(ac+1;\ c)=1$ nên $V_p(ac+1)=0$

Do đó từ giả thiết suy ra: $V_p(c)=V_p(2c+b)+V_p(3c+b)\ge V_p(c)+V_p(c\ )$

Suy ra: $V_p(c)\le 0$ mà $V_p(c)>0$ dẫn đến vô lý. Tức là điều giả sử: $V_p(b)\ge V_p(c)$ không xảy ra.

+ Như vậy: $V_p(b)<V_p(c)$. Từ giả thiết ta cũng có:

$$V_p(c)=V_p(2c+b)+V_p(3c+b)\ge V_p(b)+V_p(b)=2V_p(b) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $2V_p(b)=V_p(c)$. Chứng tỏ số mũ của các thừa số nguyên tố *p* trong phân tích chuẩn là số chẵn. Vậy *c* là số chính phương.

Lời bàn: *Qua các bài toán trên, thấy được chứng minh số chính phương bằng cách số mũ đúng của các thừa số nguyên tố là khá hay và dễ sử dụng.*

II.2.2. M.ột số dạng khác nhìn từ ước số để giải toán số chính phương.

1. Sử dụng số chính phương xét theo lớp đồng dư modulo p

Ta thấy các số chính phương khi chia theo lớp đồng dư nào đó thì nó không thỏa đầy đủ cả hệ thặng dư, mà nó chỉ có một số lớp nào đó và sẽ có những lớp nó không bao giờ xuất hiện. Chẳng hạn như không bao giờ có số chính phương dạng $3k+2$. Các bài toán sau thể hiện quan điểm đó.

Bài toán 1. ***(Turkish– 2013)***

a/ Tìm tất cả bộ ba số nguyên tố $(p;q;r)$ sao cho $p+q+r$ không chia hết cho 3 và cả hai $p+q+r$ và $pq+qr+rp+3$ đều chính phương.

b/ Có phải bất kỳ bộ ba số nguyên tố $(p;q;r)$ sao cho $p+q+r\,\vdots\,3$ và cả hai $p+q+r$ và $pq+qr+rp+3$ đều chính phương.

Tiếp cận bài toán: Với bài này, hướng tiếp cận đầu tiên là xét tính chẵn lẻ của các số nguyên tố. Khi đó sẽ có một số nguyên tố chẵn là 2, lúc này biểu thức sẽ gọn hơn, sẽ có hướng đi tiếp.

Bài giải:

(Đáp số: Các hoán vị của $(2;\ 3;\ 11)$)

Giả sử $p+q+r=x^2$ và $pq+qr+rp+3=y^2$ với $x;\ y$ nguyên.

Chúng ta chứng tỏ rằng một trong các số nguyên tố đó là 2. Thật vậy: nếu tất cả các số nguyên tố đều lẻ, xét theo modulo 4 các số nguyên tố lẻ chỉ có hai dạng $4k\pm 1$ nên *p,q,r* đều là hoán vị của $(p;q;r)\equiv(1;1;1);(1;1;3);(1;3;3);(3;3;3)\ (\text{mod } 4)$.

Trong đó các trường hợp không xảy ra là: (1;1;1); (1;3;3) từ $x^2 = p+q+r\equiv 3(\text{mod } 4)$ và trường hợp (1;1;3); (3;3;3) từ $y^2-3 = pq+qr+rp\equiv 3(\text{mod } 4)$(vô lý).

Do đó phải có ít nhất một trong ba số *p; q; r* bằng 2, không mất tính tổng quát giả sử $p=2$ và $q\le r$. Khi đó: $q+r=x^2-2$ và $qr=y^2-2x^2+1$.

Bây giờ nếu $3|y$ thì $(q+2)(r+2)=y^2+1\equiv 1\ (\text{mod } 3)$.

Tới đây $q\equiv r\equiv 2\ (\text{mod } 3)$ hoặc $q\equiv r\equiv 0\ (\text{mod } 3)$. Nhưng khi $q\equiv r\equiv 0(\text{mod } 3)$, ta được điều vô lý $x^2\equiv 2(\text{mod } 3)$. Khi $q\equiv r\equiv 2(\text{mod } 3)$, ta được $x^2-2\equiv 1(\text{mod } 3)$ và $3\ |\ x$ mâu thuẫn giả thiết $x\not\vdots 3$, như vây $3\ |\ y$ không xảy ra.

Bây giờ, từ $x\not\vdots 3$ ta được $x^2\equiv y^2\equiv 1(\text{mod } 3)$ và như vây:
$qr=y^2-2x^2+1\equiv 0(\text{mod } 3)$

Đó là $q=3$, bây giờ $r=x^2-5$ và $3r=y^2-2x^2+1$. Do đó:
$5r=y^2-9=(y+3)(y-3)$

Cho $r=2;3;5$ không có số nguyên *x* nào. Do đó $r>5$, từ $y-3=1$ không có nghiệm, $y-3=5r=y+3$ và $r\ =11$. Khi $x=4;\ y=8$ ta được: $(p;\ q;\ r)=(2;3;11)$

b/ $(p;q;r)=(2;11;23)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Lời bàn: *Từ nhận xét số chính phương sẽ không xuất hiện ở một số dạng (theo lớp đồng dư) đã giải quyết bài toán nhẹ nhàng linh hoạt.*

Bài toán 2. Chứng minh rằng số 2^n (với *n* là số tự nhiên $n>2$) biểu diễn được thành tổng của 4 số chính phương khi và chỉ khi *n* chẵn.

Tiếp cận bài toán: Rõ ràng ta phải biểu diễn 2^n thành tổng 4 số bình phương, từ đó nên xét ước đúng của 2 ở vế phải và cần thể hiện tồn tại bộ số sao cho đẳng thức đó xảy ra.

Bài giải:

Giả sử $2^n=a^2+b^2+c^2+d^2$ (1) (với *a;b;c;d* là các số tự nhiên)

Gọi $x=V_2(a); y=V_2(b); z=V_2(c)$ và $t=V_2(d),(x;\ y;z;t\in\mathbb{N})$

Theo tính chất của số mũ đúng, ta có $a = 2^x.a';b = 2^y.b';\ c = 2^z.c';\ d = 2^t.d'$ với *a' ; b' ; c'* và *d'* là các số tự nhiên lẻ. Do vai trò của các số như nhau nên không mất tính tổng quát giả sử $x \le y \le z \le t$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 2^n = 2^{2x}.a'^2 + 2^{2y}.b'^2 + 2^{2z}.c'^2 + 2^{2t}.d'^2 \quad (2)$$

Do $V_2\left(2^n\right) \ge min\left\{V_2\left(2^{2x}.a'^2\right);\ \ldots;\ V_2\left(2^{2t}.d'^2\right)\right\} = 2x$ nên

$$(2) \Leftrightarrow 2^{n-2x} = a'^2 + 2^{2y-2x}.b' + 2^{2z-2x}.c'^2 + 2^{2t-2x}.d'^2.$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-2x} = a'^2 + (2^{y-x}.b')^2 + (2^{z-x}.c')^2 + (2^{t-x}.d')^2.\ (3)$$

Ta thấy vế phải của (3) là tổng của 4 số chính phương, vế trái (3) là số chẵn, mà đã có a' lẻ nên trong vế phải của (3) có 2 số hạng lẻ và 2 số hạng chẵn hoặc cả 4 số hạng đều lẻ.

Từ nhận xét: $(2k)^2 = 4k^2$ và $(2k+1)^2 = 4k(k+1)+1 = 8k'+1$ nên ta xét hai trường hợp:

+ Vế phải của (3) có 2 số hạng lẻ và 2 số hạng chẵn: Theo nhận xét trên thì (3) có dạng:

$$2^{n-2x} = 4K+2 \Leftrightarrow 2^{n-2x-1} = 2K+1\ \ (4)$$

- Nếu $n-2x-1>0$ thì vế phải (4) lẻ, vế trái (4) chẵn, vô lý!
- Nên $n-2x-1=0$ lúc đó: $(3) \Leftrightarrow 2 = a'^2 + (2^{y-x}.b')^2 + (2^{z-x}.c')^2 + (2^{t-x}.d')^2$, điều này cũng không thể xảy ra trên tập $\mathbb{N}$.

+ Vế phải của (3) có 4 số hạng lẻ: Cũng từ nhận xét trên ta có (3) có dạng:

$2^{n-2x} = 8K+4 \Leftrightarrow 2^{n-2x-2} = 2K+1$, tương tự trên ta có:
$n-2x-2=0 \Leftrightarrow n = 2(x+1)$

Ta nhận thấy: $2^{2(x+1)} = 2^{2x} + 2^{2x} + 2^{2x} + 2^{2x}$.

Vậy 2^n biểu diễn được thành tổng của 4 số chính phương khi và chỉ khi *n* chẵn.

Lời bàn: *Chỉ sử dụng lý luận chẵn lẻ của dạng các số chính phương để giải.*

2. Đưa về phương trình nghiệm nguyên dạng tích

Bài toán 3. ***(BMO–2015)*** Ba số nguyên dương *p; a* và *b* thỏa mãn phương trình $p^2 + a^2 = b^2$. Chứng minh rằng nếu *p* là số nguyên tố lớn hơn 3 thì *a* là bội của 12 và $2(p+a+1)$ là số chính phương. (của *Gerry Leversha*)

Tiếp cận bài toán: Từ giả thiết đã xuất hiện phương trình tích mà một vế là lũy thừa của số nguyên tố nên khá thuận lợi cho việc xét các yêu cầu của bài toán.

***Bài giải*:**

Pt $\Leftrightarrow p^2 = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$

Các ước của p^2 là 1; p ; p^2 không có trường hợp $b+a=b-a=p$, vì vậy phải xét trường hợp $b+a=p^2$ và $b-a=1$. Khi đó: $b=\dfrac{p^2+1}{2}$ và $a=\dfrac{p^2-1}{2}\Rightarrow 2a=(p-1)(p+1)$

Từ *p* lẻ $\Rightarrow$ $p+1$ và $p-1$ đều chẵn, hơn nữa trong hai số đó có số chia hết cho 4 $\Rightarrow 8\,|\,2a$ (1)

Từ *p* không chia hết cho 3 $\Rightarrow$ một trong hai số $p+1$; $p-1$ chia hết cho 3 $\Rightarrow 3\,|\,2a$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 24\,|\,2a$ hay $12\,|\,a$ (đpcm)

Xét $2(p+a+1)=2\left(p+\dfrac{p^2-1}{2}+1\right)=2p+p^2+1=(p+1)^2$ là số chính phương.

Lời bàn: *Từ tích hai thừa số khác nhau bằng p^2 nên chỉ có một số bằng 1 số kia bằng p^2. Đó là then chốt của bài này.*

Bài toán 4. ***(Thailand–2015)*** Gọi *m, n* là hai số nguyên dương sao cho $m-n$ là số lẻ. Chứng minh $(m+3n)(5m+7n)$ không thể là số chính phương.

Tiếp cận bài toán: Ta thử chứng minh phản chứng! Từ $m-n$ là số lẻ và $(m+3n)(5m+7n)$ là số chính phương nên ta cần xét quan hệ hai thừa số $(m+3n);(5m+7n)$. Rõ ràng là cần xét ước chung của chúng.

***Bài giải*:**

Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử $(m+3n)(5m+7n)$ là số chính phương.

Gọi $d=gcd(m;n)$ thì $m=dx; n=dy$ với $gcd(x;y)=1$ và

$$(m+3n)(5m+7n)=d^2(x+3y)(5x+7y) \qquad (1)$$

Từ $2\nmid(m-n)\Rightarrow 2\nmid(x-y)$

Gọi *c* là ước số chung lớn nhất của $x+3y$ và $3x+5y$. Dễ thấy $x+3y$ và $3x+5y$ đều lẻ, vì vậy *c* cũng là số nguyên *lẻ*. Từ $c\,|\,x+3y$ và $c\,|\,3x+5y$ ta có:

$$c\,\big|\,\big(5(x+3y)-(5x+7y)\big) \text{ và } c\,\big|\,\big(3(5x+7y)-7(x+3y)\big)$$

Vì vậy ta có: $c\,|\,8x$ và $c\,|\,8y$, từ *c* là số lẻ ta có: $c\,|\,x$ và $c\,|\,y$, nhưng $gcd(x;y)=1$ nên $c=1$. Do đó $gcd(x+3y;5x+7y)=1$.

Từ (1) và giả thiết $(m+3n)(5m+7n)$ là số chính phương, nên phải có: $(x+3y)(5x+7y)$ là số chính phương, mà $gcd(x+3y;5x+7y)=1$, do đo phải tồn tại hai số nguyên *a; b* sao cho: $x+3y=a^2$ và $5x+7y=b^2$ (2)

Từ $x+3y$ và $3x+5y$ đều lẻ nên *a; b* đều lẻ. Do đó $a^2-b^2\equiv 0 \pmod 8$.

Nhưng từ (2) ta có: $a^2-b^2=4(x-y)$ và $2\nmid(x-y)$. Vì vậy: $8\,|\,(a^2-b^2)$, mâu thuẫn!

Vậy $(m+3n)(5m+7n)$ không thể là số chính phương.

Lời bàn: *Tích hai số nguyên tố cùng nhau là số chính phương chỉ khi cả hai cùng chính phương, bài toán trở nên quen thuộc.*

Bài toán 5. Tìm tất cả các số nguyên dương $n \geq 1$ sao cho n^2+3^n là số chính phương.

Tiếp cận bài toán: Từ điều kiện đề bài đã ẩn chứa phương trình nghiệm nguyên. Sau khi phân tích thành tích, một vế sẽ là lũy thừa của số nguyên tố. Hướng giải đã xuất hiện!

***Bài giải*:**

Gọi *m* là số nguyên dương thỏa $n^2+3^n=m^2$

Từ $(m-n)(m+n)=3^n$ suy ra 3 là ước của cả $m-n$ và $m+n$, do đó tồn tại số nguyên $k \geq 0$ sao cho: $m-n=3^k$; $m+n=3^{n-k}$.

Từ $m-n<m+n \Rightarrow 3^k<3^{n-k} \Rightarrow k<n-k \Rightarrow n-2k \geq 1$

Nếu $n-2k=1$ thì $2n=(m+n)-(m-n)=3^{n-k}-3^k=3^k\left(3^{n-2k}-1\right)=3^k\left(3^1-1\right)=2.3^k$

Suy ra: $n=3^k=2k+1$

Ta có: $3^m=(2+1)^m=1+2m+C_m^2 2^{m-2}+...>2m+1$

Do đó $k=0; k=1$, như vậy: $n=1; n=3$

Nếu $n-2k>1$ thì $n-2k \geq 2$ và $k \leq n-k-2 \Rightarrow 3^k<3^{n-k-2}$, như vậy:

$$2n= 3^{n-k}-3^k \geq 3^{n-k}-3^{n-k-2} = 3^{n-k}-2(3^2-1) = 8^{3n-k}-2$$
$$\geq 8[1 + 2(n-k-2)] = 16n-16k-24$$

Kéo theo: $8k+ 12 \geq 7n$

Mặt khác: $n \geq 2k+ 2 \Rightarrow 7n \geq 14k+ 14$, mâu thuẫn!

Vậy chỉ có $n=1; n=3$.

Lời bàn: *Đưa bài toán về dạng tích bằng* 3^n*, rõ ràng mỗi thừa số cũng có dạng lũy thừa của 3 là bước quan trọng trong bài này.*

Bài toán 6.(**JBMO TST - April camp-2021**).

Cho dãy (a_n)được xác định bởi $a_1=45; a_n=a_{n-1}^2+15a_{n-1}$ với $n>1$. Chứng minh trong dãy không chứa số chính phương nào.

Tiếp cận bài toán: Từ công thức truy hồi dễ thấy số hạng đứng sau là bội của số liền trước. Từ đó dễ su được 45 là ước của mọi số hạng trong dãy. Đó cũng là manh mối tìm ra lời giải cho bài toán!

***Bài giải*.**

Bằng quy nạp ta chứng minh được $a_n > 0$ với mọi số nguyên dương n.

Giả sử trong dãy tồn tại số só n để a_n là số chính phương.

Ta có $a_n = a_{n-1}^2 + 15a_{n-1} = a_{n-1}\left(a_{n-1} + 15\right)$

Từ đó suy ra $a_{n-1} \mid a_n; \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra $a_1 = 45 \mid a_n$ với mọi số nguyên dương *n*.

Gọi $k > 1$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa a_k là số chính phương và $a_{k-1} = 45x$ với *x* là số nguyên dương. Ta có

$$a_k = 45x\left(45x + 15\right) = 15^2.3x\left(3x + 1\right) \text{ là số chính phương}$$

Suy ra $3x.\left(3x + 1\right)$ phải là số chính phương, mà ta thấy $\left(3x; 3x + 1\right) = 1$ nên phải có $3x$ và $3x + 1$ phải là các số chính phương, vì vậy $3x = 0$ và $3x + 1 = 0$. Điều đó không thể vì $a_n > 0$ với mọi số nguyên dương *n*.

Vậy không tồn tại số chính phương nào trong dãy đã cho.

Lời bàn: *Chỉ cần phản chứng, khai thác yếu tố 45 là ước của mọi số hạng trong dãy, ta có lời giải đẹp và "dễ thương"!*

II.2.3. Bài tập rèn luyện

Bài 1.

a/ Tìm số tự nhiên có 4 chữ số biết hai chữ số đầu giống nhau và hai chữ số cuối giống nhau.

b/ Tìm số tự nhiên có 4 chữ số biết nó bằng bình phương của tổng hai số có hai chữ số được tạo bởi hai chữ số đầu và hai chữ số cuối của số cần tìm.

Bài 2. Tìm tất cả các số chính phương có 4 chữ số:

a/ biết 4 chữ số đều chẵn.

b/ biết 4 chữ số đều lẻ.

Bài 3. ***(Belarusian –2015)*** Cho 3 số nguyên *a; b; c* thỏa mãn: $\dfrac{a^2}{a^2 + b^2} + \dfrac{c^2}{a^2 + c^2} = \dfrac{2c}{b + c}$

Chứng minh rằng tích *bc* là số chính phương.

Bài 4. ***(Hy – lạp 2015)*** Chứng minh rằng không có số nguyên dương n nào để cả hai số sau đều là chính phương $\left(n + 1\right)2^n$ và $\left(n + 3 \right)2^{n+2}$.

Bài 5. ***(Slovenia–2014)*** Tìm tất cả các số nguyên dương *n* sao cho $\left(n^2 + 11n - 4\right)n! + 33.13^n + 4$ là số chính phương.

Bài 6.(**TS lớp 10 trường THPT Chuyên Thành phố Hà Nội năm học 2016 – 2017**)

Cho số nguyên dương *n* thỏa mãn $2+2\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên. Chứng minh $2+2\sqrt{12n^2+1}$ là số chính phương.

Bài 7.(**TS lớp 10 trường THPT Chuyên Tỉnh Hải Dương năm học 2015 – 2016**)

Tìm các số nguyên *k* để $k^4-8k^3+23k^2-26k+10$ là số chính phương.

Bài 8.(**TS lớp 10 trường THPT Chuyên Tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2012 – 2013**)

Tìm tất cả bộ hai số chính phương (n;m) mà mỗi số có đúng 4 chữ số, biết rằng mỗi chữ số của m bằng chữ số tương ứng của n cọng thêm với d (với d là số nguyên dương nào đó cho trước)

Bài 9.(**TS lớp 10 trường THPT Chuyên Tỉnh Thanh Hóa năm học 2012 – 2013**)

Tìm số nguyên dương n sao cho $\frac{n(2n-1)}{26}$ là số chính phương.

Bài 10.(**TS lớp 10 trường THPT Chuyên Quốc Học Huế năm học 2011 – 2012**)

Tìm các số nguyên tố *p* sao cho sao cho hai số $2(p+1)$ và $2\left(p^2+1\right)$ đều là các số chính phương.

Bài 11. (**Mathlink contest 2004**) Cho 2004 sè nguyên không âm $a_1;a_2;...;a_{2004}$ sao cho tổng $\sum_{i=1}^{2004} a_i^n$ là số chính phương với mọi *n*. Tìm số số hạng nhỏ nhất bằng không.

II.3. DÙNG ƯỚC SỐ ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Phương trình nghiệm nguyên là một dạng toán thường xuyên xuất hiện trong các đề thi ở phần Số học. Chỉ có một số dạng phương trình nghiệm nguyên có phương pháp giải cụ thể chẳng hạn như: phương trình Diophant, phương trình Pell, phương trình Pitago, …Ngoài các dạng đó thì hầu như không có phương pháp angorit cụ thể được, khi đó tùy vào từng bài mà có hướng tiếp cận khác nhau. Lúc đó sẽ xuất hiện các lời giải độc đáo, lời giải đẹp và thú vị. Đó cũng là lý do để Số học là *nữ hoàng*!

Một trong những hướng giải phương trình nghiệm nguyên là đánh giá chia hết, một số nguyên tố là ước của vế này thì nó cũng là ước của vế kia. Tùy theo mối quan hệ giữa các biểu thức trong đề mà ta có hướng tiếp cận riên. Vì vậy trong phần này chúng tôi sẽ chọn một số bài mà hướng tiếp cận được nhìn từ ước số, chọn ước số phù hợp để “*công phá từ bên trong đánh ra*” để giải quyết bài toán.

II.3.1. Bài tập về phương trình nghiệm nguyên qua góc nhìn ước số.

Bài toán 1. ***(Olympic Balkan -2018)*** Tìm tất cả các cặp số nguyên $(m;n)$ thỏa mãn phương trình $m^5-n^5=16mn$.

Tiếp cận bài toán: Rõ ràng nếu *d* là ước của một trong hai số *m* hoặc *n* thì nó sẽ là ước của số kia. Do đó ta tiếp cận bài toán từ hướng ước chung của *m* và *n*.

Bài giải:

Nếu $m=0$ thì $n=0$ và ngược lại nên $(m;n)=(0;0)$ là nghiệm của phương trình.

Xét trường hợp $mn\neq 0$:

Gọi $d=\gcd(m;n)$, khi đó $\begin{cases} m=da \\ n=db \end{cases}$ $\left(a;b\in\mathbb{Z};\ (a;b)=1\right)$

Phương trình trở thành: $d^3a^5-d^3b^5=16ab$.

Suy ra: $a\mid d^3b^5\Rightarrow a\mid d^3$, do $(a;b)=1$. Tương tự: $b\mid d^3$.

Suy ra: $ab\mid d^3\Rightarrow d^3=abt\ (t\in\mathbb{Z})$. Do đó phương trình được viết lại:

$$abt.a^5-abt.b^5=16ab\Rightarrow t\left(a^5-b^5\right)=16$$

Như vậy: a^5-b^5 phải là ước của 16 hay $a^5-b^5\in\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm8;\pm16\}$

- Do $ab\neq0$ nên $\left|a^5-b^5\right|\neq1$
- Nếu $\left|a^5-b^5\right|=2$ thì $a=1;\ b=-1$ hoặc $a=-1;\ b=1$ suy ra $\left[\begin{array}{l}(a;b;t;d)=(1;-1;8;-2)\\(a;b;t;d)=(-1;1;-8;2)\end{array}\right.$

  Khi đó: $(m;n)=(-2;2)$.
- Nếu $\left|a^5-b^5\right|>2$ không mất tinh tổng quát giả sử $a>b;\ a>2$

Đặt $a = x+1\ (x \ge 1)$ ta được

$$\left|a^5 - b^5\right| = \left|(x+1)^5 - b^5\right| \ge \left|(x+1)^5 - b^5\right| = \left|5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1\right| \ge 31 > 16$$

Nên $\left|a^5 - b^5\right| > 2$ không xảy ra.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $(0;0);(-2;2)$.

Lời bàn: *Đi từ hướng ước số bài toán trở nên dễ dàng.*

Bài 2. ***(Đề đề nghị của trường Amstesdam –lớp 10–2017)*** Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $2^x + 21^y = z^2$ (1)

Tiếp cận bài toán: Nếu x là số chẵn thì $z^2 - 2^x$ sẽ phân tích thành tích khi đó dễ dàng xét ước số 3 và 7 của hai vế!

Bài giải:

Nếu x là số lẻ hay $x \equiv 1 (\bmod 2) \Rightarrow z^2 = 2^x + 21^y \equiv 2 (\bmod 3)$, vô lý. Vậy x chẵn.

Đặt $x = 2m (m \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow (1) \Leftrightarrow (z+2^m)(z-2^m) = 21^y$ (2)

Từ (2) ta suy ra có hai trường hợp:

+ Cả hai số $z+2^m, z-2^m$ cùng có ước nguyên tố là 3 hoặc 7 $\Rightarrow 2^{m+1} \equiv 0 (\bmod 3)$ hoặc $2^{m+1} \equiv 0 (\bmod 7)$, điều này không xảy ra.

+ $(z+2^m, z-2^m) = 1$ .Vì $1 \le z - 2^m < z + 2^m$ nên chỉ có hai khả năng sau:

$$\begin{cases} z - 2^m = 1 \\ z + 2^m = 21^y \end{cases} (3) \text{ hoặc } \begin{cases} z - 2^m = 3^y \\ z + 2^m = 7^y \end{cases} (4)$$

- Xét hệ (3) từ hai phương trình ta nhận được phương trình:
  $2^{m+1} + 1 = 21^y \Rightarrow 2^{m+1} \equiv 6 (\bmod 7)$. Điều này không xảy ra bởi vì với $m \ge 1$ thì $2^{m+1} \equiv r (\bmod 7) \Rightarrow r \in \{1,2,4\}$. Nên hệ (3) không có nghiệm nguyên dương.
- Xét hệ (4), từ hai phương trình của hệ, ta nhận được: $7^y - 3^y = 2^{m+1}$ (5)
  Nếu $y = 1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow z = 5$ vậy $(2,1,5)$ là nghiệm nguyên dương của (1).
- Nếu $y \ge 2 \Rightarrow 2^{m+1} = 7^y - 3^y \ge 40 \Rightarrow m > 4 \Rightarrow 7^y - 3^y \equiv 0 (\bmod 8) \Rightarrow y = 2n$.
  Khi đó, ta có: $(5) \Leftrightarrow (7^n + 3^n)(7^n - 3^n) = 2^{m+1}$ (6)

+ Ta có: $\forall n \in N^* \Rightarrow 7^n + 3^n \equiv (-1)^n + (-1)^n \equiv 2 (\bmod 4) \Rightarrow$ $7^n + 3^n$ có ước nguyên tố lẻ p, từ (6) ta suy ra p là ước của 2^{m+1} điều này vô lý, vậy nếu $y \ge 2$ thì phương trình (5) không có nghiệm nguyên dương. Vậy (1) có nghiệm duy nhất một nghiệm nguyên dương (2,1,5).

Lời bàn: *Sau khi lý luận được x chẵn bài trở về dạng phương trình tích, mỗi thừa số đều dạng lũy thừa của số nguyên tố, hướng giải quyết khá hay!*

Bài toán 3: Tìm số nguyên dương n để $n^2 + 3^n$ là số chính phương.

Tiếp cận bài toán: Thực chất bài này là phương trình nghiệm nguyên tương tự bài toán trên. Do đó hướng tiếp cận dùng ước số 3 để giải quyết bài toán.

Bài giải:

Giả sử $n^2+3^n=k^2\left(k\in\mathbb{N}^*\right)\Leftrightarrow 3^n=(k-n)\left(k+n\right)$ (1)

Ta thấy: vế trái là lũy thừa của 3 nên 3 là ước của tích $(k-n)\left(k+n\right)$

Ta xét số mũ đúng của số nguyên tố 3 trong biểu thức trên, theo bổ đề LTE ta có:

$$V_3\left(3^n\right)=V_3\left((k-n)\left(k+n\right)\right)\Leftrightarrow n=V_3(k-n)+V_3\left(k+n\right)$$

Gọi $a=V_3(k-n)\ge 0;\ b=V_3\left(k+n\right)\ge 0\Rightarrow a+b=n\quad(2)$

Ta thấy: trong (1) vế trái là lũy thừa của 3 nên vế phải cũng phải là lũy thừa của 3, do đó từ (2) ta phải có: $k-n=3^a$ và $k+n=3^b\left(0\le a<b\right)$

Suy ra: $3^b-3^a=2n\Leftrightarrow 3^a\left(3^{b-a}-1\right)=2n$

- Nếu $b-a=1$ thì $3^a=n\Leftrightarrow 3^a=a+b\Leftrightarrow 3^a=2a+1$ suy ra $a=0$ hoặc $a=1$, khi đó:
  - $a=0\Rightarrow n=1$
  - $a=1\Rightarrow n=3$. Thử lại cả hai trường hợp đều đúng
- Nếu $b-a\ge 2\Rightarrow b-2\ge a$ thì

$2n=3^b-3^a\ge 3^b-3^{b-2}=8.3^{b-2}=8.(1+2)^{b-2}\ge 8.(1+(b-2).2)$ (BĐT Becnuli)

$n\ge 8b-12=8(n-a)-12\Leftrightarrow 8a+12\ge 7n\Rightarrow 8a+12\ge 7\left(2a+2\right)$ (do $n>2a+2$)

$\Leftrightarrow 8a+12\ge 14a+14$, vô lý vì $a\ge 0$.

Vậy chỉ có $n=1;\ n=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Lời bàn: *Đưa bài toán về dạng phương trình tích, mỗi thừa số là lũy thừa của số 3, rất quen thuộc!*

Bài toán 4. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$.

Tiếp cận bài toán: Để ý rằng $pt\Leftrightarrow 2^x+2^{2x+1}=y^2-1$, khi đó cả hai vế đều có dạng tích và 2 là ước số của tích, nên khả năng xét tính chẵn lẻ, do đó ta cần xét theo modulo 2.

Bài giải:

Giả sử $\left(x;y\right)$ là một cặp số nguyên thỏa mãn phương trình. Dễ thấy $x\ge 0;y\ne 0$ và $\left(x;-y\right)$ cũng là một cặp nghiệm của phương trình. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp $y>0$.

Nếu $x=0$, ta có : $y=\pm 2$.

Nếu $x>0$, ta có: y là số lẻ.

Viết lại phương trình đã cho dưới dạng: $(y-1)(y+1)=2^x\left(1+2^{x+1}\right)$ (*)

Ta có: $y-1; y+1$ là hai số chẵn liên tiếp nên luôn có một số chia hết cho 4, số kia chỉ chia hết cho 2, do đó $x>2$ và phải xảy ra một trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $y-1=2^{x-1}.n$, với n là số nguyên dương lẻ, thay vào (*) và biến đổi ta được: $2^{x-2}\left(n^2-8\right)=1-n$ (1)

Do $1-n\le 0$ suy ra $n^2-8\le 0$, do vậy $n=1$. Thay vào (1), ta thấy không thỏa mãn.

Trường hợp 2: Nếu $y+1=2^{x-1}.n$, với n là số nguyên dương lẻ.

Từ (*) ta có: $2^{x-2}\left(n^2-8\right)=1+n$ (2)

Suy ra: $n^2-8>0$ và $1+n\ge 2(n^2-8)$. Do đó $n=3$. Thay vào (2), ta được $x=4$, bởi vậy $y=23$. Thử lại thấy đúng.

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)$ phải tìm là: $(0;-2)$, $(0;2)$, $(4;23)$, $(2;-23)$.

Lời bàn: *Đây là bài toán không khó, hướng giải đã có bóng dáng trong biểu thức của đề, tính chất của tích hai số chẵn liên tiếp được phát huy!*

Bài toán 5. Tìm tất cả các bộ ba $(x;y;z)$ các số tự nhiên thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=2xyz$

Tiếp cận bài toán: Dễ thấy VP là số chẵn nên dễ dàng xét tính chẵn lẻ của bộ $(x;y;z)$. Khi đó sẽ xuất hiện số 4 là ước của VP.

Bài giải:

Giả sử $(x;y;z)$ là một bộ ba số tự nhiên thỏa mãn đề bài.

Nếu $x;y;z$ là các số lẻ thì $x^2+y^2+z^2$ là số lẻ, suy ra $2xyz$ là số lẻ, vô lý!

Do đó tồn tại ít nhất một số chẵn, như vậy $2xyz$ phải chia hết cho 4, suy ra 4 là ước của $x^2+y^2+z^2$. Suy ra $x;y;z$ phải là các số chẵn.

Ta đặt: $x=2x_1; y=2y_1; z=2z_1\left(x_1;y_1;z_1\in\mathbb{N}\right)$

Phương trình trở thành $x_1^2+y_1^2+z_1^2=4x_1y_1z_1$.

Tương tự phương pháp ta sẽ chứng minh được $x_1;y_1;z_1$ là các số tự nhiên chẵn.

Tiếp tục quá trình này ta được dãy các bộ ba các số tự nhiên chẵn $(x_n;y_n;z_n)$ thỏa mãn $(x_0;y_0;z_0)=(x;y;z);(x_n;y_n;z_n)=2(x_{n+1};y_{n+1};z_{n+1})$ với mọi số tự nhiên n.

Như vậy với mỗi số nguyên dương k, cả ba số $x;y;z$ đều chia hết cho 2^k.

Do đó $x = y = z = 0$ là nghiệm của phương trình. Thử lại thấy đúng.

Vậy bộ ba phải tìm là $(0;0;0)$.

Lời bàn: *Một số nguyên có vô hạn ước (2^k ước) chỉ có duy nhất là số 0. Bài này thực chất giải bằng nguyên tắc cực hạn sẽ rõ ràng hơn.*

Bài toán 6. (*Chọn đội tuyển Belarusian– 2015*) Giải phương trình nghiệm nguyên không âm $a;b;c$: $3^a + 2^b + 2015 = 3c!$ (1) (*của I. Gorodnin*)

Tiếp cận bài toán: Ta thấy 3c! bị chặn dưới bởi 2015 nên sẽ biết được vùng nhận giá trị của *c*. Hơn nữa, mọi số nguyên không lớn hơn *c* đều là ước của *c!*. Do đó ta xét những ước đặc biệt của hai vế để tìm các giá trị thích hợp.

***Bài giải*:**

Từ $3c! > 2015$, ta có: $c \geq 6$.

+ Khi $a = 0$ từ (1) ta có: $2^b = 3(c! - 672)$ không thể xảy ra!

+ Giả sử $a = 1$, nếu $c = 6$ thì $2^b = 142$, vô nghiệm.

+ Nếu $c \geq 7$, từ (1) suy ra: $2^b + 2018$ chia hết cho 7 hoặc $2^b + 2 \equiv 0 \pmod 7$, vô lý

+ Nếu $a \geq 2$, thì 3^a chia hết cho 9, từ (1) ta có $2^b \equiv 1 \pmod 9$, do đó $b \vdots 6$

Nếu $b = 0$ thì ta có: $3^a + 2016 = 3c!$ không thể được với $c = 6$, với $c \geq 7$ ta thu được $3^a \vdots 7$, điều này vô lý.

Do đó $b \geq 6$ và từ (1) suy ra $3^a \equiv 1 \pmod{16} \Rightarrow a$ chia hết cho 4, giả sử $a = 4t,\ b = 6q$

Khi đó (1) trở thành $81^t + 64^q + 2015 = 3c!$ (2)

Trường hợp $c = 6$ kéo theo $t = q = 1$, khi đó: $a = 4,\ b = 6$

Trường hợp $c \geq 7$ ta được $4^t + 1^q + 6 \equiv 0 \pmod 7$. Đó là điều không thể.

Cuối cùng chỉ có trường hợp $(a;b;c) = (4;6;6)$.

Lời bàn: *Từ tính chất giai thừa đã giới hạn vùng của c, bài toán trở nên quen thuộc khi xét ước và chia theo lớp đồng dư.*

Bài 7. *(Chọn đội tuyển Belarusian – 2015)* Tìm tất cả các số nguyên dương *n* sao cho $n = q\left(q^2 - q - 1\right) = r(2r + 3)$ với *q* và *r* là số nguyên tố. (*của B. Gilevich*)

Tiếp cận bài toán: Rõ ràng *q,r* đều là ước của *n* và là ước của hai vế, do đó có thể biểu diễn các biểu thức theo *q* hoặc *r*. Khi đó khả năng phương trình trở thành bậc hai theo một biến nên có hướng giải.

***Bài giải*:**

Từ đề: $q\left(q^2-q-1\right)=r\left(2r+3\right)$ (1)

Nếu $q=r$ thì $r^2-r-1=2r+3$, cho ta $r=4$, không nguyên tố, nên $q\neq r$

Từ (1) suy ra: $r\,\Big|\left(q^2-q-1\right)$ suy ra $q^2-q-1=kr$ và $2r+3=kq$ (với $k\in\mathbb{N}^*$)

Thay $2r=kq-3$ vào (1) ta được phương trình: $2q^2-\left(2+k^2\right)q+3k-2=0$. (2)

Biệt số $\Delta=k^4+4k^2-24k+20$ và Δ phải chính phương.

Ta thấy: $\left(k^2\right)^2<\Delta<\left(k^2+2\right)^2$ với $k>5$

Nên $\Delta=\left(k^2+1\right)^2\Leftrightarrow 2k^2-24k+19=0$. Nhưng phương trình cuối không có nghiệm nguyên.

Nếu $k=1$ thì (2) trở thành $2k^2-3q+1=0,\ q=1$ không nguyên tố

Chú ý k là lẻ, từ $kr=q^2-q-1$ là lẻ. Nếu $k=3$ thì (2) không có lời giải

Nếu $k=5$ thì (2) trở thành $2q^2-27q+13=0$, khi đó: $q=13;\ r=31$ và $n=r\left(2r+3\right)=2015$.

Lời bàn: *Từ nhận xét r là ước của n, nên biểu diễn được qua r, khi đó có phương trình bậc hai ẩn q. Đã quy lạ về quen!*

Bài toán 8. ***(Hy lạp – 2015)*** Tìm tất cả bộ ba số nguyên dương $(x;y;p)$ với p là số nguyên tố thỏa mãn phương trình sau: $\dfrac{xy^3}{x+y}=p$ (1)

Tiếp cận bài toán: Vế trái là phân thức đối với hai biến, khả năng phân thức sẽ còn rút gọn được và rút cho ước chung lớn nhất của *x;y*. Sau khi rút gọn biểu thức sẽ đưa về dạng tích lúc đó sẽ sử dụng ước phù hợp để tìm hướng đi.

***Bài giải*:**

Gọi $d=(x;\ y)$ nên tồn tại các số nguyên dương $a;b$ sao cho $x=da;\ y=db$ và $(a;b)=1$

Do đó từ (1) ta nhận được: $\dfrac{d^3ab^3}{a+b}=p$ (2)

Từ $(a;b)=1$, ta được: $(a;a+b)=1$ và $\left(b^3;\ a+b\right)=1$, nên từ (2) ta có: $a+b\mid d^3$.

Do đó ta viết: $\dfrac{d^3}{a+b}=k$ với $k\in\mathbb{N}^*$ (3)

Khi đó, (2) trở thành: $kab^3 = p$ và từ đây có $b^3 \mid p \Rightarrow b = 1$ và $ka = p$. Ta có các trường hợp sau:

+) Nếu $k = p,\ a = 1$ thì (3) trở nên: $\dfrac{d^3}{2} = p \Rightarrow 2p = d^3 \Rightarrow 2 \mid d$ hay $8 \mid d^3$ và $8 \mid 2p$, vô lý!

+) Nếu $k = 1$ và $a = p$ thì (3) trở nên: $d^3 = p + 1 \Rightarrow d^3 - 1 = p \Rightarrow (d-1)\left(d^2 + d + 1\right) = p$

Mà $d^2 + d + 1 > d - 1$ nên ta được: $d - 1 = 1$ và $d^2 + d + 1 = p \Leftrightarrow d = 2$ và $p = 7$

Vậy nghiệm phương trình là $(x;\ y;\ p) = (14;\ 2;\ 7)$.

Lời bàn: *Chỉ dùng ước số một cách linh hoạt ta có lời giải gọn và đẹp!*

Bài toán 9. ***(Turkish –15/11/2014)*** Tìm tất cả các số nguyên dương *x; y; z* thỏa mãn:

$$x^3 = 3^y.7^z + 8 \qquad (1)$$

Tiếp cận bài toán: Từ $8 = 2^3$ nên chuyển 8 sang vế trái để có $x^3 - 2^3$ xuất hiện tích ở hai vế. Khi đó chọn ước phù hợp để xét hai vế. Bài toán có hướng giải quyết!

***Bài giải*:**

VP của (1) lẻ suy ra *x* lẻ, từ $(1) \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right) = 3^y.\ 7^z$

Gọi $d = (x-2; x^2 + 2x + 4) \Rightarrow \begin{cases} d \mid x - 2 \Rightarrow d \mid x^2 - 4x + 4 \\ d \mid x^2 + 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow d \mid 6x$.

Mà $d \mid x - 2 \Rightarrow d \mid 6x - 12 \Rightarrow d \mid 12$, do $x - 2$ lẻ nên d lẻ $\Rightarrow d \in \{1; 3\}$.

Ta có 4 trường hợp sau:

+) Nếu $x - 2 = 3^y$ và $x^2 + 2x + 4 = 7^z$. Ta suy ra $x \equiv 2 \pmod 3$, thay vào

$$x^2 + 2x + 4 \equiv 4 + 4 + 4 \equiv 7^z \pmod 3 \Leftrightarrow 1 + 1 + 1 \equiv 1 \pmod 3), \text{vô lý}$$

+) Nếu $\begin{cases} x - 2 = 7^z \\ x^2 + 2x + 4 = 3^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0 \pmod 3 \\ 0 + 0 + 4 \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$ vô lý

+) Nếu $\begin{cases} x - 2 = 3.7^z \\ x^2 + 2x + 4 = 3^{y-1} \end{cases} \Rightarrow x = 3.7^z + 2$, thay vào phương trình sau

$$\left(3.7^z + 2\right)^2 + 2\left(3.7^z + 2\right) + 4 = 3^{y-1} \Leftrightarrow 9.7^{2z} + 18.7^z + 12 = 3^{y-1} \Rightarrow y > 2$$

Chia hai vế cho $3 \Rightarrow 3.7^{2z} + 6.7^z + 4 = 3^{y-2}$, vế trái không chia hết cho 3 nên loại.

+) Nếu $\begin{cases} x-2=3^{y-1} \\ x^2+2x+4=3.7^z \end{cases} \Rightarrow x=3^{y-1}+2$, thay vào phương trình sau ta được:

$$\left(3^{y-1}+2\right)^2+2.\left(3^{y-1}+2\right)+4=3.7^z \Leftrightarrow \left(3^{y-1}+3\right)^2+3=3.7^z \quad (2)$$

Từ (2) với $y=1; y=2$ không xảy ra.

Nên $y>2$ thì $2 \mid 3^{y-1}+3 \Rightarrow 4 \mid (3^{y-1}+3)^2$, do đó từ (2) có $0+3 \equiv 3.(-1)^z \pmod 4$

$\Rightarrow z$ chẵn $\Rightarrow z=2t$, ta được: $3^{y-1}\left(3^{y-2}+2\right)=(7^t-2)\left(7^t+2\right)$, suy ra 3 là ước của vế phải.

Ta có: 7^t-2 không chia hết cho 3 nên $3 \mid 7^t+2$ suy ra: $\begin{cases} 7^t+2=3^{y-1}.q \ (q>1) \\ 7^t-2=\dfrac{3^{y-2}+2}{q} \end{cases}$

Trừ vế theo vế ta được: $4=3^{y-1}.q-\dfrac{3^{y-2}+2}{2} \geq 2.3^{y-1}-\dfrac{3^{y-2}+2}{2}$, từ $y>2$ ta được:

$4 \geq \dfrac{11.3^{y-2}}{2}-1>5.3^{y-2}-1 \geq 4$.

Do đó chỉ có một khả năng $q=1;\ 4=3^{y-1}-3^{y-2}-2$. Ta được $x=11;\ y=3;\ z=2$.

Lời bàn: *Khi phương trình đưa được về dạng tích ở một vế, vế kia là tích của hai lũy thừa của hai số nguyên tố. Khi đó vai trò của ước số và lớp đồng dư phát huy thế mạnh!*

Bài toán 10. *(Ireland–2015*) Xác định tất cả các bộ số $(p;m;n)$ với *p* nguyên tố, *m* và *n* là hai số nguyên không âm thỏa mãn phương trình: $p^m-n^3=27$.

Tiếp cận bài toán: Dễ thấy trong phương trình xuất hiện a^3+b^3 nên sẽ có dạng tích trong khi VT là p^m, như vậy mỗi thừa số là lũy thừa của *p*. Bài toán có hướng đi!

Bài giải:

$$p^m=n^3+27=(n+3)\left(n^2-3n+9\right)$$

Suy ra tồn tại *x, y* nguyên dương sao cho: $p^x=n+3;\ p^y=n^2-3n+9$.

Suy ra $n^2-3n+9-(n+3)=n^2-4n+6=(n-2)^2+2>0$

nên $p^x<p^y \Rightarrow p^x \mid p^y$, như vậy: $n+3 \mid n^2-4n+9$. Mà $n^2-4n+9=(n+3)(n-6)+27$

$\Leftrightarrow n+3 \in \{3;\ 9;\ 27\}$

– Trường hợp $n=24$ là không thể, vì $n^3+27=24^3+27=3^3\left(8^3+1\right)=3^6.19$ không là lũy thừa của một số nguyên tố.

– Trường hợp $n=0;\ n=6$ ta được: $\left(p;\ m;\ n\right)\in\left\{(3;3;0);(3;5;6)\right\}$

Lời bàn: *Tích hai số bằng lũy thừa của số p, phương pháp giải quen thuộc. Có thể thay số 27 bởi số khác VD: 64; 125….*

Bài toán 11. ***(Ireland– 2015)*** Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x^4+y^4+z^4+1008=2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2 \quad (*)$$

Tiếp cận bài toán: Nếu ta chuyển các biến về cùng vế trái và số 1008 sang vế phải, khi đó biểu thức ở VT là đẳng cấp bậc 4, nên có thể xem là phương trình trùng phương theo một biến. Ta xét thêm biệt số Δ có chính phương không, nếu có thì VT phân tích được thành nhân tử, khi đó bài toán sẽ giải quyết được!

***Bài giải*:**

$$(*)\Leftrightarrow x^4-2\left(y^2+z^2\right)x^2+\left(y^2-z^2\right)^2=-1008 \quad (**)$$

VT là tam thức bậc hai theo x^2, ta có: $\Delta=\left(y^2+z^2\right)^2-\left(y^2-z^2\right)^2=4y^2z^2=\left(2yz\right)^2$

Ta được: $x^2=y^2+z^2\pm 2yz=(y\pm z)^2$

Do đó $(**)\Leftrightarrow\left(x^2-(y+z)^2\right)\left(x^2-(y-z)^2\right)=-1008$

$$\Leftrightarrow(x+y+z)(-x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)=1008=t.u.v.w$$

Với $t=(x+y+z);\ u=(-x+y+z);\ v=(x-y+z);w=(x+y-z)$

Ta thấy: $t=u+v+w$ và $t.u.v.w=2^4.\ 3^2.\ 7$ và $v+w=2x;\ w+u=2y;\ u+v=2z$ (***)

Suy ra: $t;\ u;\ v;\ w$ có cùng tính chẵn lẻ. Mà 1008 chẵn nên cả 4 số $t;u;v;w$ có cùng tính chẵn.

Ta viết: $t=2t';\ u=2u';\ v=2v'$ và $w=2w'$ với $t';\ u';\ v';\ w'\in\mathbb{N}$

Khi đó: $t'=u'+v'+w'$ và $t'.u'.v'.w'=3^2.7$. Nhưng t' không thể bằng 1 hoặc 3, bởi vì trong trường hợp này một trong các số u',v',w' phải là bội của 7 có tổng lớn hơn t'. Mặt khác, t' không thể bằng 63 hoặc 21 vì tổng các số còn lại không quá 5. Vì vậy, chỉ có hai khả năng: $t'=7$ và $t'=9$.

Nếu $t'=7$, ta có: $u'.v'.w'=9$ và các thừa số này là 1.1.9 hoặc 1.3.3 mà có tổng bằng 7, nên: $(t';u';v';w')=(7;1;3;3)$ hoặc các tổ hợp của 3 phần tử sau.

Nếu $t'=9$, ta có $u'.v'.w'=7$ và thu được $(t';\ u';\ v';\ w')=(9;1\ ;1;7)$ hoặc các tổ hợp của 3 phần tử sau.

Từ (***), ta có $x=w'+v';\ y=w'+u'$ và $z=u'+v'$.

Vậy $(x;y;z)\in\{(8;8;2);(8;2;8);(2;8;8);(6;4;4);(4;6;4)\}$.

Lời bàn: *Khi phương trình (*) biến đổi về dược dạng trùng phương và phương trình có nghiệm nên bài toán trở nên bình thường quen thuộc!*

Bài toán 12. ***(Serbian MO –2015)*** Tìm tất cả các số nguyên không âm thỏa mãn phương trình: $\left(2^{2015}+1\right)^x+2^{2015}=2^y+1$. (của *Bojan Basíc*)

Tiếp cận bài toán: Dễ thấy 3 là ước của $2^{2015}+1$ nên 9 là ước của $(2^{2015}+1)^x$ với $x>1$. Mà 3 cũng là ước của 2^y+1 khi y lẻ, do đó từ phương trình suy ra y phải chẵn. Ta thử tiếp cận theo hướng này.

***Bài giải*:**

Chỉ có lời giải với $x\le 1$, phương trình có nghiệm là: $(x;\ y)=(0,2015);(1;2016)$

Giả sử $x>1$. Từ $2^{2015}+1$ chia hết cho 3, ta có

$\left(2^{2015}+1\right)^x+2^{2015}\equiv 2^{2015}\equiv 5\ (\text{mod } 9)$

Nên: $2^y\equiv 4(\text{mod } 9)$ hay $2^{y-2}\equiv 1(\text{mod } 9)$. Gọi $h=ord_9(2)$ hay $2^h\equiv 1(\text{mod } 9)$ mà $2^6\equiv 1(\text{mod } 9)$ nên $6\,|\,y-2$, suy ra $y=6k+2$ với $k\in\mathbb{N}$.

Ta lại có: $2^6\equiv -1(\text{mod } 13)$ nên $2^y+1=\left(2^6\right)^k.2^2+\ 1\equiv 4+1(\text{mod } 13)$ và $2^{2015}\equiv 7(\text{mod } 13)$.

Từ $2^{2015}\equiv 7(\text{mod } 13)\Rightarrow 2^{2015}+1\equiv 8(\text{mod } 13)$, do đó $\left(2^{2015}+1\right)^x+2^{2015}\equiv 8^x+7\equiv 4+1(\text{mod } 13)$. Đây là điều không thể, vì 8^x luôn luôn có một số dư là: $1;\ 5;\ 8;\ 12$ modulo 13!

Cách 2: Với $x=0\Rightarrow y=2015$, với $x=1\Rightarrow y=2016$

Khi $x>1$, ta có:

$$2^y=\left(2^{2015}+1\right)^x+2^{2015}-1=(x+1)2^{2015}+\sum_{i=2}^{x}C_x^i2^{2015i}\equiv(x+1)2^{2015}(\text{mod } 2^{2019})$$

Nhưng $y > 2019$, vì vậy ta có: $16 \mid x+1$. Bây giờ ta xét phương trình modulo 17 và dùng $2^{2015} \equiv 9 \pmod{17}$, ta được $10^x + 8 \equiv 10^{15} + 8 \equiv 9 \pmod{13}$, không thể có!

Lời bàn: *Ước số và đồng dư là linh hồn của bài giải!*

Bài toán 13. (***Chọn tuyển ĐH Vinh 2019-2020***) Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(x;y;z)$ thoả mãn: $1+2^x = 3^y + 2.4^z$.

Tiếp cận bài toán: Từ phương trình đã cho biến đổi về dạng tích, khi đó dễ thấy 2 là ước chung hai vế. Manh mối bài toán đã xuất hiện.

Bài giải:

Phương trình $\Leftrightarrow 1+2^x = 3^y + 2^{2z+1} \Leftrightarrow 1+2^x = 3^y + 2^t$ (1), với t nguyên dương lẻ, $t \ge 3$

Vì $y \ge 1$ nên $3^y > 1$, kéo theo $2^x > 2^t \Rightarrow x > t$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 2^t\left(2^{x-t} - 1\right) = 3^y - 1 \qquad (2)$$

Vì vế phải không chia hết cho 3 nên $x-t$ là số lẻ. (3)

Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. Nếu y là số lẻ.

Theo định lí LTE, ta có: $v_2\left(3^y - 1\right) = v_2(3-1) = 1$. Suy ra: $v_2\left(2^t\right) = 1 \Rightarrow t = 1$, không thoả mãn.

Trường hợp 2. Nếu y là số chẵn.

Đặt $y = 2k$; $k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó (2) trở thành: $2^t\left(2^{x-t} - 1\right) = 9^k - 1$

Xét hai khả năng:

+ *Khả năng 1.* Nếu k là số lẻ thì $v_2\left(9^k - 1\right) = v_2(9-1) = 3$ kéo theo $t = 3$ hay $z = 1$. Thay vào (1) ta được: $2^x - 9^k = 7$.

Mà từ (3) thì x chẵn, đặt $x = 2l$ $\left(l \in \mathbb{N}^*\right)$, phương trình trở thành:

$$4^l - 9^k = 7 \Leftrightarrow \left(2^l + 3^k\right)\left(2^l - 3^k\right) = 7$$

Suy ra $2^l + 3^k \le 7 \Rightarrow 3^k \le 7 \Rightarrow k = 1$. Từ đó ta tìm được: $l = 2$ hay $x = 4; y = 2$.

Vậy $(x;y;z) = (4;2;1)$.

+ *Khả năng 2.* Nếu k chẵn, đặt $k = 2m; m \in \mathbb{N}^*$ thì $y = 4m$ ta có $9^k \equiv (-1)^k \equiv 1 \pmod 5$ nên $5 \mid 2^{x-t} - 1$. Cũng theo (3) ta đặt: $x - t = 2n+1; n \in \mathbb{N}^*$ thì $5 \mid 2.4^n - 1$ suy ra

$4^n \equiv 3 \pmod 5$, nhưng điều này vô lý, do $4^n \equiv \pm 1 \pmod 5$. Vì vậy khả năng này không có nghiệm.

Vậy tất cả các bộ ba số nguyên dương là: $(x;y;z) = (4;2;1)$.

Lời bàn: *Từ 2 là ước chung nên nhờ bổ đề LTE làm công cụ, bài toán giải quyết khá ngắn gọn!*

Bài toán 14. ***(Chọn đội tuyển ĐH Vinh-2016)*** Tìm các số nguyên dương a,b,c,d thỏa mãn: $a + 2^b + 3^c = 3d! + 1$, biết rằng tồn tại các số nguyên tố p,q sao cho $a = (p+1)(2p+1) = (q+1)(q-1)^2$.

Tiếp cận bài toán: Rõ ràng việc đầu tiên phải tìm *a*, trong phương trình theo hai biến nguyên tố *p;q* ở hai vế dùng ước số lý luận để đưa về phương trình bậc hai theo một biến, sẽ tìm được *a*. Thay *a* vào phương trình ban đầu có chứa giai thừa (giống bài 6 đã nêu trên), bài toán quen thuộc.

Bài giải:

Trước hết ta tìm a.

Ta có: $(p+1)(2p+1) = (q+1)(q-1)^2 \Leftrightarrow p(2p+3) = q\left(q^2 - q - 1\right)$ (1)

Nếu $p = q$ thì (1) trở thành: $2p + 3 = p^2 - p - 1 \Leftrightarrow p = 4$, không thỏa mãn là số nguyên tố.

Suy ra $p \neq q$, khi đó $q^2 - q - 1 \,\vdots\, p$. Đặt $q^2 - q - 1 = kp$ với $k \in \mathbb{Z}^+$. Từ (1) ta có $2p + 3 = kq$ và k là số nguyên lẻ. Thay vào (1) ta được:

$$(kq-3)kq = 2q\left(q^2 - q - 1\right) \Leftrightarrow 2q^2 - \left(2 + k^2\right)q + 3k - 2 = 0 \qquad (2)$$

Xét phương trình bậc 2 ẩn q, ta có $\Delta = (2+k^2)^2 - 8(3k-2) = k^4 + 4k^2 - 24k + 20.$

Nếu $k > 5$ thì $(k^2)^2 < \Delta < (k^2+2)^2$ nên phương trình (2) có nghiệm nguyên q khi và chỉ khi $\Delta = (k^2+1)^2 \Leftrightarrow 2k^2 - 24k + 19 = 0,$ không tồn tại k nguyên.

Do đó $1 \le k \le 5.$ Vì k lẻ nên xét các trường hợp:

* $k = 1,$ suy ra $q = 1$ không thỏa mãn.

* $k = 3,$ không tồn tại $q.$

* $k = 5,$ suy ra $q = 3,$ $p = 31$ là các số nguyên tố. Khi đó $a = 2016.$

Tiếp theo ta tìm $b,$ $c,$ d thỏa mãn $2015 + 2^b + 3^c = 3d!.$ (3)

Vì $3d! > 2015$ nên $d \ge 6.$

* Xét $c = 1.$ Nếu $d = 6$ thì $2^b = 142$ không thỏa mãn.

Nếu $d \ge 7$ thì từ (3) ta có $2^b + 2018 \vdots 7$ hay $2^b + 2 \equiv 0 \pmod 7$, không thỏa mãn.

* Xét $c \ge 2.$ Ta có $3^c \vdots 9$ nên từ (3) suy ra $2^b \equiv 1 \pmod 9$, điều này chỉ xảy ra khi $b \vdots 6.$ Do đó $b \ge 6.$ Khi đó từ (3) suy ra $3^c \equiv 1 \pmod{16}$, do đó $c \vdots 4.$ Đặt $b = 6m,\ c = 4n,$ ta có (3) trở thành: $$2015 + 64^m + 81^n = 3d! \qquad (4)$$

Với $d = 6,$ thì $m = n = 1,$ hay $b = 6,\ c = 4,$ thỏa mãn.

Với $d \ge 7$ thì từ (4) suy ra $6 + 1^m + 4^n \equiv 0 \pmod 7$, hay $4^n \equiv 0 \pmod 7$, không thể xảy ra.

Vậy $a = 2016,\ b = 6,\ c = 4,\ d = 6.$

Lời bàn: *Bài toán hay vì đã lồng ghép được hai ý tưởng giải quyết khá đẹp!*

Bài toán 15.(**JBMO TST - April camp-2021**).

Tìm tất cả các số nguyên dương *a;b;c* và số nguyên tố *p* thỏa mãn:

$$73p^2 + 6 = 9a^2 + 17b^2 + 17c^2 \qquad (1)$$

Tiếp cận bài toán: Từ các số đã cho trong đề ta thấy đa phần có dạng $8k+1$, lại có mọi nguyên tố lẻ đều có dạng $8k+1$ nên ta thử đi theo hướng xét đồng dư mod8.

Bài giải:

Giả sử $b \le c$, ta phân biệt hai trường hợp liên quan đến *p*.

TH1: Nếu $p \ne 2$ => *p* lẻ, vì vậy $p^2 \equiv 1 \pmod 8$. Khi đó

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 9a^2 + 17b^2 + 17c^2 \equiv 73p^2 + 6 \equiv 7 \pmod 8 \quad (2)$$

Mặt khác $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0;1;2;3;4;5;6 \pmod 8$ mâu thuẫn với (2) nên $p > 2$ không xảy ra.

TH2: Nếu $p = 2$ thì $9a^2 + 17b^2 + 17c^2 = 73p^2 + 6 = 298$, từ $a;b;c \ge 1$

Ta có $298 = 9a^2 + 17b^2 + 17c^2 \ge 26 + 17c^2$ suy ra $c \le 4$, ta có 2 khả năng sau:

+ Nếu $b \le c = 4$ thì $9a^2 + 17b^2 = 26$ suy ra $a = b = 1$.

+ Nếu $b \le c \le 3$ thì dễ dàng kiểm tra không có số nào thỏa mãn.

Vậy (1) có duy nhất một nghiệm $(a;b;c;p) = (1;1;2;2)$.

Lời bàn: *Chỉ việc xét hai vế theo mod8 ta đã loại tất cả trường hợp lẻ. Khi p = 2 bài toán trở nên dễ dàng thông qua phương pháp kẹp và bị chặn. Khá hay!*

II.3.2. Bài tập rèn luyện

Bài 1. ***(Australian MO -2016- ngày1)*** Tìm tất cả các số nguyên dương *n* thỏa mãn $2^n + 7^n$ là số chính phương.

Bài 2. ***(Australian MO -2016- ngày 2)*** Cho ba số nguyên dương thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2^c$. Chứng minh $a = b$.

Bài 3. Chứng minh rằng phương trình $\left(y^2 - 1\right)^3 = b^2 + 1$ không có nghiệm nguyên dương.

Bài 4. Chứng minh rằng phương trình $x^4 + 4y^4 = z^2$ không có nghiệm nguyên dương**.**

Bài 5. Giải phương trình nghiệm tự nhiên sau:

a/ $1! + 2! + 3! + ... + x! = y^2$

b/ $1! + 2! + 3! + ... + x! = y^z$

Bài 6.

a/ Tìm số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ biết: $\overline{abc} = a! + b! + c!$

b/ Tìm tất cả các số tự nhiên bằng tổng các bình phương các chữ số của nó.

Bài 7. ***(IMO–2014 Shortlist)*** Xác định tất cả các cặp *(x; y)* của các số nguyên dương thỏa mãn

$$\sqrt[3]{7x^2 - 13xy + 7y^2} = |x - y| + 1$$

Bài 8. ***(Chọn đội tuyển Turkish–30/1/2013)*** Tìm các cặp số nguyên dương *(m; n)* thỏa mãn:

$$2^n + (n - \varphi(n) - 1)! = n^m + 1 \quad \text{(với φ(n) là hàm Euler)}$$

Bài 9. ***(Ireland– 2015)*** Tìm tất cả các số nguyên dương *n* sao cho cả hai số 837 + *n* và 837 – *n* là lập phương của số nguyên dương.

Bài 10. ***(Austrian MO – 2016)*** Hãy xác định tất cả các số nguyên dương *k* và *n* thỏa mãn phương trình: $k^2 - 2016 = 3^n$. (của *Stephan Wagnet*)

Bài 11. **(*Chọn đội tuyển ĐH Vinh -2014*)** Giả sử *p* là số nguyên tố thỏa mãn $5^{(p-1)^2} - 1$ không chia hết cho p^2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $p^x + 5 = y^p$.

Bài 12. Xác định tất cả các số nguyên dương *x;y* và *z* sao cho $x^5 + 4^y = 2013^z$.

Bài 13. (***Romanian MO –2015***) Tìm các số nguyên tố khác nhau *p; q; r* thỏa mãn:

$$1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{pqrs} \qquad \text{(của } \textit{Merceca Franu}\text{)}$$

II.4. ƯỚC SỐ TRONG CÁC BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ.

Ta biết rằng dãy số là hàm với biến số là các số nguyên không âm, nên giá trị của các số hạng trong dãy số cũng sẽ có những số nguyên. Khi dãy các số nguyên được xây dựng theo công thức hay quy luật nào đó nó sẽ có những tính chất đặc trưng của dãy số đó. Lúc đó, những tính chất mang đậm tính "số học" sẽ xuất hiện. Đây cũng là vấn đề lý thú về dãy số khi "*nhúng*" nó vào số học. Vấn đề Số học trong dãy số đã có nhiều bài viết, nhiều sách viết khá phong phú và hấp dẫn, bài viết này chỉ khai thác xung quanh vấn đề vai trò ước số trong các dãy số nguyên.

Những kiến thức lý thuyết về dãy số xin không trình bày ở đây (xem như các bạn đã biết)

II.4.1. Bài tập về dãy số qua góc nhìn ước số

Bài toán 1. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $u_1=0, u_2=14, u_3=-18$ và $u_{n+1}=7u_{n-1}-6u_{n-2}\,(n=3;4;...)$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố *p* thì $p \mid u_p$.

Tiếp cận bài toán: Dễ thấy dãy số đã cho bởi công thức truy hồi nên trước tiên ta thử tìm số hạng tổng quát của nó. Từ yêu cầu chứng minh $p \mid u_p$ nên có khả năng vận dụng đồng dư và các định lý liên quan.

Bài giải:

Phương trình dặc trưng của dãy là: $x^3-7x+6=0$ có nghiệm: $x_1=1; x_2=2; x_3=-3$, suy ra $u_n=a.1^n+b.2^n+c.(-3)^n$. Thay các giá trị tương ứng ta tìm được số hạng tổng quát là $u_n=1+2^n+(-3)^n$

Với *p* là số nguyên tố thì theo định lý Fermat nhỏ, ta có:

$2^p \equiv 2 \pmod p$ và $(-3)^p \equiv -3 \pmod p$

Do đó: $u_p \equiv 1+2+(-3) \pmod p \Rightarrow u_p \equiv 0 \pmod p$

Chứng tỏ $p \mid u_p$ với mọi số nguyên tố *p.*

Lời bàn: *Từ công thức số hạng tổng quát của dãy chỉ sử dụng định lý Fermat ta có lời giải cho bài toán!*

Bài toán 2. ***(Olympic Hylap 2014***) Cho dãy (x_n): $\begin{cases} x_1=1 \\ x_{n+1}=3x_n+\sqrt{5x_n^2-4} \end{cases};\quad n=1;2;3;....$

a/ Chứng minh tất cả các số hạng của dãy là số tự nhiên.

b/ Xem xét sự tồn tại số hạng của dãy chia hết cho 2011.

Tiếp cận bài toán: Dãy đã cho bởi công thác truy hồi, cần chứng minh mọi số hạng của dãy đều nguyên điều đó gợi ý cho ta phải tìm số hạng tổng quát của dãy. Công thức truy hồi có chứa căn, khả năng phải khử căn để tìm quy luật của các số hạng. Ta có 2011 là số nguyên tố nên chú ý khai thác tính chất này cho câu *b.*

***Bài giải*:**

a/ Từ giả thiết ta có: $\left(2x_{n+1}-3x_n\right)^2=5x_n^2-4 \Leftrightarrow 4x_{n+1}^2-12x_nx_{n+1}+4x_n^2=-4$

$$\Leftrightarrow x_{n+1}^2-3x_nx_{n+1}+x_n^2=-1 \qquad (1)$$

Thay n bởi n+1 vào (1) ta được: $x_{n+2}^2-3x_{n+1}x_{n+2}+x_{n+1}^2=-1$ (2)

Ta xét phương trình bậc hai: $x^2-3x.x_{n+1}+x_{n+1}^2+1=0$.

Từ (1) và (2) ta có x_n và x_{n+2} là hai nghiệm của phương trình trên nên

$$\begin{cases} x_n+x_{n+2}=3x_{n+1} \ (3) \\ x_n.x_{n+2}=x_{n+1}^2+1 \ (4) \end{cases} \quad \text{(định lý Viet)}$$

Từ (3) suy ra: $x_{n+2}=3x_{n+1}-x_n$ và từ $x_1=1$, ta có mọi số hạng của dãy đều là số tự nhiên.

b/ Giả sử rằng tồn tại số hạng thứ k của dãy mà $2011 \mid x_k$. Từ (4) suy ra: $2011 \mid x_{k+1}^2+1$

Mà tất cả các số hạng của dãy là số nguyên và $2011 \mid x_k$ nên $2011 \mid x_{k+1}^2+1 \Rightarrow$

$x_{k+1}^2 \equiv -1 (\text{mod}\, 2011) \Rightarrow \left(x_{k+1}^2\right)^{1005} \equiv (-1)^{1005} (\text{mod}\, 2011) \Rightarrow x_{k+1}^{2010} \equiv -1 (\text{mod}\, 2011)$ (5)

Mà 2011 là số nguyên tố nên $\left(x_{k+1};\ 2011\right)=1$ (thật vậy: giả sử $\left(x_{k+1};\ 2011\right)=d>1$ thì

$\begin{cases} d \mid x_{k+1} \\ d \mid 2011 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid x_{k+1} \\ d \mid x_k \end{cases}$ từ (4) $x_k.x_{k+2}=x_{k+1}^2+1$ ta có $d \mid 1 \Rightarrow$ vô lý)

Theo định lý Fecma, ta có $x_{k+1}^{2010} \equiv 1 (\text{mod}\, 2011)$ (6)

Từ (5) và (6) mâu thuẫn. Vậy không tồn tại số hạng nào của dãy chia hết cho 2011.

Lời bàn: *Sự khéo léo xem biểu thức chứa lũy thừa bậc hai là phương trình bậc hai theo một ẩn và sự tồn tại nghiệm nên từ hệ thức Viet ta có được công thức tổng quát của dãy. Khi đó dễ dàng nhận thấy mọi số hạng đều nguyên. Phần còn lại là sử dụng định lý Fermat!*

Bài toán 3. Cho dãy số (u_n) được xác định: $u_1=a; u_2=b$ và $u_{n+1}=5u_n^2-3u_{n-1}; (n=1;2;...)$ Chứng minh rằng với mọi cách chọn cặp số nguyên *a;b* thì dãy trên hoặc không có số nào chia hết cho 2021, hoặc có vô số số chia hết cho 2021.

***Tiếp cận bài toán*:** Dãy số này cho bởi công thức truy hồi nhưng phụ thuộc tham số *a;b*. Từ yêu cầu bài toán ta không thể xét trên số hạng tổng quát mà xét phép chia cho 2021 của các số hạng.

Bài giải:

Xét cặp số nguyên *a;b* tùy ý, với mỗi số $i \in \mathbb{N}$, ta có: $u_i=2021.q_i+r_i$ với $q_i \in \mathbb{Z}; r_i \in \mathbb{N}; 0 \le r_i < 2021$.

Ta xét các cặp số: $(r_0;r_1);(r_1;r_2);(r_2;r_3);...$ các cặp giá trị này là hữu hạn (do $0 \le r_i < 2021$) nên sẽ tồn tại hai số nguyên $i; j\,(0 \le i < j)$ sao cho hai cặp $(r_i;r_{i+1})$ và $(r_j;r_{j+1})$

trùng nhau, nghĩa là có $r_i = r_j$ và $r_{i+1} = r_{j+1}$, điều đó chứng tỏ
$r_i \equiv r_j \pmod{2021}$ và $r_{i+1} \equiv r_{j+1} \pmod{2021}$

Từ cách xác định dãy ta chứng minh bằng quy nạp được:

$u_{i+k} \equiv u_{j+k} \pmod{2021};\ \forall k \in \mathbb{N}$ (1)

Từ công thức truy hồi của dãy ta suy ra: $3u_{i-1} \equiv 3u_{j-1} \pmod{2021} \Rightarrow u_{i-1} \equiv u_{j-1} \pmod{2021}$

Tiếp tục quá trình đó ta có: $u_{i-k} \equiv u_{j-k} \pmod{2021};\ \forall 0 \le k \le i$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $u_{j+k} \equiv u_{i+k+(j-i)} \pmod{2021};\ \forall k \ge i$

Hay $u_n \equiv u_{n+T} \pmod{2021};\ \forall n \in \mathbb{N}; T = j - i$

- Nếu tập hợp $\{u_0; u_1; ...; u_{T-1}\}$ không có số nào là bội của 2021 thì với mọi n ta có $u_n \not\equiv 0 \pmod{2021}$ (điều này suy từ $u_n \equiv u_r \pmod{2021}$ nếu $n = kT + r; 0 \le r \le T - 1$)
- Nếu tồn tại $0 \le r \le T - 1$ để $u_r \equiv 0 \pmod{2021}$ thì $u_n \equiv 0 \pmod{2021}; \forall n = kT + r, k \in \mathbb{N}$ tức là có vô số số hạng của dãy là bội của 2021.

Do vai trò của hai số nguyên *a;b* không tham gia trong quá trình chứng minh nên mọi cách chọn cặp số nguyên *a;b* cũng không ảnh hưởng đến kết quả bài toán.

Lời bàn: *Lợi dụng tính hữu hạn của tập số dư so với vô hạn của dãy để xét tính tuần hoàn của số dư, khi đó dễ xét vai trò của tham số a;b.*

Bài toán 4. *(Olympic vùng Vịnh2016)* Cho số thực x thỏa mãn $x + \frac{1}{x} = 3$. Chứng minh rằng số $x^{3^{30}} + x^{-3^{30}}$ có ít nhất 2^{35} ước nguyên dương phân biệt.

***Tiếp cận bài toán*:** Ta thấy hai số $x^{3^{30}}; x^{-3^{30}}$ là nghịch đảo của nhau nên số $x^{3^{30}} + x^{-3^{30}}$ có thể biểu diễn qua các số đồng dạng có số mũ thấp hơn. Điều đó cho phép ta nghỉ đến xét dãy $u_n = x^{3^n} + x^{-3^n}$

Bài giải:

Đặt $u_n = x^{3^n} + x^{-3^n}$. Suy ra:

$$u_n^3 = (x^{3^n} + x^{-3^n})^3 = x^{3^{n+1}} + x^{-3^{n+1}} + 3\left(x^{3^n}\right)^2 x^{-3^n} + 3x^{3^n}\left(x^{-3^n}\right)^2 = x^{3^{n+1}} + x^{-3^{n+1}} + 3\left(x^{3^n} + x^{-3^n}\right)$$

Do đó: $u_n^3 = u_{n+1} + 3u_n$ hay $u_{n+1} = u_n^3 - 3u_n$, ta có $u_0 = x + \frac{1}{x} = 3$, suy ra mọi số hạng của dãy đều là số nguyên.

$$u_1 = x^3 + x^{-3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3^3 - 3.3 = 18 \text{ hay } u_1 = 18 = 3^2.2$$

Và $u_{n+1} = u_n\left(u_n^2 - 3\right)$. Từ đó ta thấy $3 \mid u_n; \forall n = 1;2;3...$

Ta xét ước đúng của 3 cho công thức truy hồi trên. Theo bổ đề LTE ta có:
$v_3(u_{n+1})=v_3\left(u_n\left(u_n^2-3\right)\right)$, suy ra: $v_3\left(u_{n+1}\right)=v_3\left(u_n\right)+v_3\left(u_n^2-3\right)=v_3\left(u_n\right)+1$

Do $3\,|\,u_n$ nên $\gcd\left(u_n;u_n^2-3\right)=3$ và $u_n^2-3>u_n$ nên u_n^2-3 phải có một ước nguyên tố khác tất cả các ước của u_n. Như vậy u_{30} có ít nhất 30 ước nguyên tố phân biệt và $v_3\left(u_{30}\right)=31$.

Giả sử ít nhất 30 ước nguyên tố phân biệt của u_{30} là $p_1;p_2;...;p_{30}$ nên số các ước $\tau\left(p_1p_2...p_{30}\right)\geq 2^{30}$. Suy ra số các ước nguyên dương của u_{30} có ít nhất là $2^{30}\left(31+1\right)=2^{35}$.

Lời bàn: *Từ xây dựng được dãy truy hồi, mỗi số hạng đều có ước là 3. Đã chỉ ra được* u_n^2-3 *phải có một ước nguyên tố khác tất cả các ước của* u_n*, để* u_{30} *có ít nhất 30 ước nguyên tố phân biệt.*

Bài toán 5. Cho dãy số $\left(a_m\right)$ biết rằng $a_m=m^n+n.$ Tồn tại hay không hai số nguyên dương phân biệt *p*, *q* sao cho a_p là ước số của a_q với mọi số nguyên dương *n*?

Tiếp cận bài toán: Khả năng giải bài toán bằng phản chứng, giả sử tồn tại hai số *p;q* thỏa đề ta cần chỉ ra số *n (*liên quan đến *p;q)* để a_p không là ước số của a_q.

Bài giải:

Giả sử tồn tại hai số *p*, *q* nguyên dương phân biệt sao cho p^n+n là ước số của q^n+n với mọi số nguyên dương *n*, thế thì $q^n+n>p^n+n\Rightarrow q>p$.

Giả sử *a* là một số nguyên tố lớn hơn *q* và *n* là số tự nhiên thỏa mãn $n=(p+1)(a-1)+1$.

Khi đó *n = (p+1)a –p* $\Rightarrow n\equiv -p(\text{mod}\,a)$ (1)

Vì $p<q<a$ nên $(p,\ a)=(q,\ a)=1$. Theo định lý nhỏ Fermat, ta có:

$$p^{a-1}\equiv 1(\text{mod}\,a)\Rightarrow p^{(p+1)(a-1)}\equiv 1(\text{mod}\,a)\Rightarrow p^{(p+1)(a-1)+1}\equiv p(\text{mod}\ a).$$

Do đó: $p^n\equiv p(\text{mod}\,a)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $p^n+n\equiv 0(\text{mod}\,a)$ *hay* $\left(p^n+n\right)\,\vdots\,a$ (4)

Chứng minh tương tự, ta được: $q^n\equiv q(\text{mod}\,a)$ (3) *và* $\left(q^n+n\right)\,\vdots\,a$

Từ (1) và (3) suy ra: $q^n+n\equiv q-p(\text{mod}\,a)$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra: $(q-p)\,\vdots\,a$. Điều này không thể xảy ra vì $p<q<a$

Vậy không tồn tại hai số nguyên dương phân biệt *p*, *q* sao cho q^n+n chia hết cho p^n+n với mọi số nguyên dương *n*.

Lời bàn: *Việc chọn số nguyên tố* $a>q>p$ *để xây dựng số n sao cho a là ước của* $n+p$ *là kỹ thuật hay!*

Bài toán 6. ***(Chọn ĐT KHTN Hà nội-2020)*** Cho dãy số nguyên (a_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} a_0 = 1; a_1 = 6; a_2 = 25 \\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 5a_n + a_{n-1};\ \forall n \ge 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng nếu $2^{2019} | n$ thì $2^{4039} | a_{n-1}$.

Tiếp cận bài toán**:** Từ sự xác định dãy ta suy được số hạng tổng quát của dãy là lũy thừa của các số vô tỷ liên hiệp $x = 2+\sqrt{3}; y = 2-\sqrt{3}$. Do đó xây dựng dãy $b_n = x^n + y^n$ sẽ là các số nguyên nên có điều kiện xét ước số chứa lũy thừa của 2.

Bài giải:

Ta có phương trình đặc trưng của dãy:

$$x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 - 4x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Ta tìm được số hạng tổng quát: $a_n = \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1} - 1$

Đặt $x = 2+\sqrt{3}; y = 2-\sqrt{3}$, suy ra $xy = 1; x + y = 4$, khi đó $a_n = \frac{x^{n+1} + y^{n+1}}{2} - 1$

Từ giả thiết nếu $2^{2019} | n$ suy ra $n = 2^{2019}k;\ k \in \mathbb{Z}$

Khi đó $a_{n-1} = \frac{x^{2^{2019}k} + y^{2^{2019}k}}{2} - 1 = \frac{\left(x^{2^{2018}k} - y^{2^{2018}k}\right)^2}{2}$

Mà *x;y* là nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0$ nên ta đưa về xét dãy (b_n) được xác định bởi: $b_0 = 2; b_1 = 4$ và $b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n$, khi đó ta có $b_n = x^n + y^n$

Do đó: $x^{2^{2018}k} - y^{2^{2018}k} = \left(x^k - y^k\right) b_k . b_{2k} ... b_{2^{2017}k}$

Suy ra: $a_{n-1} = \frac{1}{2}\left(x^k - y^k\right)^2 b_k^2 . b_{2k}^2 ... b_{2^{2017}k}^2$

Ta có: $x^k - y^k = (x-y)\left(x^{k-1} + x^{k-2}y + ... + xy^{k-2} + y^{k-1}\right) = 2\sqrt{3}.T_k$

Từ công thức truy hồi của dãy (b_n) ta suy ra b_k chẵn với mọi số nguyên dương *k*.

- Nếu *k* lẻ thì $x^k + y^k = (x+y)\left(x^{k-1} - x^{k-2}y + ... - xy^{k-2} + y^{k-1}\right) = 4.U_k, (U_k \in \mathbb{Z})$

Do đó: $a_{n-1} = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}.T_k\right)^2 (4U_k)^2 . b_{2k}^2 ... b_{2^{2017}k}^2 = 96 T_k^2 U_k^2 . b_{2k}^2 ... b_{2^{2017}k}^2 = 2^5.3.(2^2)^{2017}.A_k^2$

chứng tỏ $2^{4039} | a_{n-1}$

- Nếu k chẵn thì $k=2l$ (l nguyên dương) khi đó
  $x^k-y^k=\left(x^l+y^l\right).\left(x^l-y^l\right)=2\sqrt{3}.T_l.b_l$

Do đó: $a_{n-1}=6.T_l^2.b_l^2\,b_{2k}^2...b_{2^{2017}k}^2=2.3.4^2.\left(2^2\right)^{2017}.B_k$. Chứng tỏ $2^{4039}\,|\,a_{n-1}$

Vậy nếu $2^{2019}\,|\,n$ thì $2^{4039}\,|\,a_{n-1}$.

Lời bàn: *đây là bài toán khó, chứa đầy kỹ thuật biến đổi.*

Bài toán 7. Cho dãy số $\left(u_n\right)$ được xác định $u_1=2;u_n=3u_{n-1}+2n^3-9n^2+9n-3,\forall n\geq 2$. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p thì p luôn là ước số của tổng $2021\sum_{i=1}^{p-1}u_i$.

Tiếp cận bài toán: Dãy này có ẩn dạng cấp số nhân nên dễ tìm được số hạng tổng quát. Từ đó việc xét ước nguyên tố trở nên thuần số học!

Bài giải:

Ta có: $u_n=3u_{n-1}+f\left(n\right)$, do đó cần biểu diễn $f\left(n\right)=g\left(n\right)-3g\left(n-1\right)$

Dễ thấy: $f\left(n\right)=2n^3-9n^2+9n-3=-n^3-3\left(-\left(n-1\right)^3\right)$

Nên $u_n=3u_{n-1}-n^3-3\left(-\left(n-1\right)^3\right)\Leftrightarrow u_n+n^3=3(u_{n-1}+\left(n-1\right)^3)$

Đặt $v_n=u_n+f\left(n\right)$, khi đó ta có: $v_n=3v_{n-1}\Leftrightarrow v_n=3^{n-1}v_1$ và $v_1=3$ nên $v_n=3^n$

Do đó số hạng tổng quát của dãy $\left(u_n\right)$ là $u_n=3^n-n^3$

Như vậy: $S=2021\sum_{i=1}^{p-1}u_i=2021\sum_{i=1}^{p-1}\left(3^i-i^3\right)$

Ta có: $\sum_{i=1}^{p-1}u_i=\sum_{i=1}^{p-1}\left(3^i-i^3\right)=\left(3+3^2+...+3^{p-1}\right)-\left(1^3+2^3+...+\left(p-1\right)^3\right)$

Khi $p=2$, ta có: $S=2021\left(u_1\right)=2021.2$ suy ra $2\,|\,S$ hay $p\,|\,S$

Khi $p>2$, $\Rightarrow p$ nguyên tố lẻ. Ta có:

$$\left(3+3^2+...+3^{p-1}\right)=3\left(1+3+3^2+...+3^{p-2}\right)=3.\frac{3^{p-1}-1}{2}=\frac{1}{2}\left(3^p-3\right)$$

mà 3^p-3 chẵn và theo định lý Fecmart nhỏ: $3^p-3\equiv 0\left(\bmod p\right)$

Và $i^3+\left(p-i\right)^3=p^3-3p^2i+3pi^2$ suy ra $p\,|\,i^3+\left(p-i\right)^3;\forall i=\overline{1;p-1}$ nên

$$p\,\Big|\left(1^3+2^3+...+\left(p-1\right)^3\right)$$

Do đó $p \mid S$ hay $p \left| 2021\sum_{1}^{p-1} u_i \right.$

Lời bàn: *Từ số hạng tổng quát suy ra các tổng quen thuộc, việc xét ước khá quen thuộc!*

Bài toán 8. Cho dãy (a_n) với $n > 0$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} a_1 = 1;\ a_2 = 2;\ a_3 = 6;\ a_4 = 12; \\ a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n\ \ \forall n \geq 1. \end{cases}$$

a) Chứng minh a_n chia hết cho n với mọi giá trị nguyên dương của n.

b) Đặt $b_n = \dfrac{a_n}{n}$. Chứng minh tồn tại vô số số nguyên dương n để 2020 là một ước của b_n.

Tiếp cận bài toán: Yêu cầu câu *a* tương đương với chứng minh dãy (b_n) là dãy số nguyên. Khi tính các số hạng đầu của dãy (b_n) dễ nhận ra đây là dãy Fibanoxi.Con đường quy nạp là khả dĩ nhất!

Bài giải:

a) Ta có b_1=1; b_2=1; b_3 = 2; b_4=3

Dễ thấy $b_n = F_n$ với n=1; 2; 3; 4. Bằng quy nạp ta chứng minh dãy (b_n) trùng với dãy (F_n). Thật vậy:

Mệnh đề đúng với n=1; 2; 3; 4.

Giả sử mệnh đề đúng đến $n+3$. Khi đó ta có:

$$(n+4)b_{n+4} = 2(n+3)F_{n+3} + (n+2)F_{n+2} - 2(n+1)F_{n+1} - nF_n$$

Dùng công thức của dãy Fibonaci : $F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$ ta dễ dàng biến đổi vế phải thành $(n+4)F_{n+4}$ suy ra $b_{n+4} = F_{n+4}$.

Vậy mệnh đề đúng với $n+4$, do đó nó đúng với mọi n nguyên dương.

Điều đó chứng tỏ a_n luôn chia hết cho n với mọi n nguyên dương.

b) Gọi r_n là số dư của b_n cho 2020 với n=1; 2; 3;....

Trước tiên ta chứng minh (r_n) là một dãy tuần hoàn. Thật vậy:

Ta có $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n \Rightarrow r_{n+2} = r_{n+1} + r_n \pmod{2020}$

Vì có vô hạn các cặp (r_1; r_2), (r_2; r_3),..., (r_n; r_{n+1}) nhưng chỉ nhận hữu hạn giá trị khác nhau nên tồn tại ít nhất hai phần tử của dãy trùng nhau. Ta giả sử là (r_m; r_{m+1}) =(r_{m+T}; r_{m+T+1}) (với T là một số nguyên dương).

Ta chứng minh (r_n) tuần hoàn với chu kỳ T.

Ta có:

$$r_{m+2} \equiv r_{m+1} + r_m \pmod{2020};\ r_{m+T+2} \equiv r_{m+T+1} + r_{m+T} \pmod{2020}$$
$$\Rightarrow r_{m+2} \equiv r_{m+T+2} \pmod{2020} \Rightarrow r_{m+2} = r_{m+T+2}$$

Tiếp tục như vậy ta chứng minh được: $r_{m+k} = r_{m+T+k}$ với mọi $k \geq 0$ (1)

Ta có:

$$r_{m-1} \equiv r_{m+1} - r_m \pmod{2020};\ r_{m+T-1} \equiv r_{m+T+1} - r_{m+T} \pmod{2020}$$
$$\Rightarrow r_{m-1} \equiv r_{m+T-1} \pmod{2020} \Rightarrow r_{m-1} = r_{m+T-1}$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $r_{m-k} = r_{m+T-k}$ với k=1; 2;...; m-1 (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(r_n)_{n>0}$ là một dãy tuần hoàn.

Bổ sung vào dãy (b_n) phần tử $b_0 = 0$ thỏa mãn $b_0 + b_1 = b_2$ suy ra $r_0 = 0$. Khi đó dãy (r_n) là dãy tuần hoàn bắt đầu từ phần tử đầu tiên $r_0 = 0$. Do đó tồn tại vô số phần tử trong dãy (r_n) bằng 0. Như vậy câu *b* được chứng minh xong.

Lời bàn: *Chỉ việc nhận ra đây là dãy Fibanoxi quen thuộc, bài toán trở nên dễ dàng hơn!*

Bài toán 9. Cho dãy số (a_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} a_1 = -5, a_2 = -6 \\ a_{n+1} = a_n + (a_1+1)(2a_2+1)...((n-1)a_{n-1}+1)((n^2+n)a_n + 2n+1), \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng nếu với mỗi số tự nhiên n có số nguyên tố p là ước của $na_n + 1$ thì luôn tồn tại số nguyên m sao cho $m^2 \equiv 5 (\bmod p)$.

Tiếp cận bài toán: Công thức truy hồi của a_{n+1} khá phức tạp, việc đầu tiên phải tìm quy luật của nó. Phải tạo dãy mới từ quy luật đó, ngay trong đề đã gợi ý quy luật $na_n + 1$. Việc còn lại là xét sự chia hết trong dãy mới đó.

Bài giải:

Đặt $b_n = na_n + 1$ và $B_n = \prod_{i=1}^{n} b_i$.

Dễ thấy: $2 | B_1 | B_n (\forall n > 1)$. Vì vậy, $2 | a_n, \forall n > 1$.

Ta có:

$$a_{n+1} = a_n + B_{n-1}((n+1)b_n + n) = a_n + nB_{n-1} + (n+1)B_n, \forall n \geq 2$$
$$\Rightarrow (n+1)a_{n+1} + 1 = (n+1)(a_n + nB_{n-1} + (n+1)B_n) + 1$$
$$\Rightarrow b_{n+1} = (n+1)a_n + 1 + (n^2+n)B_{n-1} + (n+1)^2 B_n$$
$$\Rightarrow B_n b_{n+1} = (n+1)a_n.B_n + B_n + (n^2+n)B_{n-1}.B_n + (n+1)^2 B_n^2$$

$$\Rightarrow B_{n+1}=\left[(n+1)B_n+\frac{n}{2}B_{n-1}+\frac{a_n}{2}\right]^2+B_n-\frac{1}{4}\left(nB_{n-1}+a_n\right)^2$$

Vì vậy:

$$B_{n+1}-\frac{1}{4}\left((n+1)B_n+a_{n+1}\right)^2=B_{n+1}-\frac{1}{4}\left(2(n+1)B_n+a_n+nB_{n-1}\right)^2$$

$$=B_{n+1}-\left[(n+1)B_n+\frac{n}{2}B_{n-1}+\frac{a_n}{2}\right]^2=B_n-\frac{1}{4}\left(nB_{n-1}+a_n\right)^2$$

Suy ra:

$$B_n-\frac{1}{4}\left(nB_{n-1}+a_n\right)^2=B_2-\frac{1}{4}\left(2B_1+a_2\right)^2=-5,\forall n\ge 2$$

$$\Rightarrow B_n=\frac{1}{4}\left(nB_{n-1}+a_n\right)^2-5,\forall n\ge 2$$

Do p là ước của b_n, b_n là ước của B_n nên $p|B_n\Rightarrow p|\frac{1}{4}\left(nB_{n-1}+a_n\right)^2-5$.

Vậy tồn tại số nguyên m thỏa mãn $p|m^2-5$ (đpcm).

Lời bàn: *Khi đặt* $b_n=na_n+1$ *và* $B_n=\prod_{i=1}^{n}b_i$ *dãy mới xuất hiện, việc xét ước nguyên tố p để xuất hiện dạng* m^2-5 *là bội của p là thuật biến đổi khéo léo!*

Ta biết dãy số và đa thức có mối liên hệ với nhau, nên tính chia hết và ước số của các số trong dãy đa thức hệ số nguyên được kế thừa.

Bài toán 10. *(HV-Phú Thọ-2019)* Cho dãy các đa thức $P_n(x)$ với hệ số thực được xác định bởi: $\begin{cases}P_0(x)=x^3-4x\\ P_{n+1}(x)=P_n(1+x)P_n(1-x)-1,\forall n\in\mathbb{N}.\end{cases}$

Chứng minh rằng $P_{2020}(x)$ chia hết cho x^{2020}.

Tiếp cận bài toán: Từ công thức truy hồi có thẻ đánh giá được tính chẵn lẻ của đa thức $P_n(x)$. Qua công thức truy hồi cũng tìm được sự chia hết trong dãy, từ đó sẽ có hướng đi tiếp.

Bài giải:

Với $n\ge 1$, theo công thức truy hồi ta có P_n là hàm chẵn.

Mặt khác:

$$P_{n+2}(x)=P_{n+1}(1+x)P_{n+1}(1-x)-1$$
$$=\left[P_n(2+x)P_n(-x)-1\right]\left[P_n(2-x)P_n(x)-1\right]-1$$
$$=P_n(2+x)P_n(2-x)P_n^2(x)-\left[P_n(2+x)+P_n(2-x)\right]P_n(x)$$

Do đó $P_{n+2}(x)$ chia hết cho $P_n(x)$

Nhận xét thấy nếu $(x-2)$ là ước $P_n(x)$ thì x là ước của $P_n(2+x)+P_n(2-x)$. Thật vậy, nếu $P_n(x)$ chia hết cho $(x-2)$ thì thay x bởi $x+2$ ta có $P_n(x+2)$ chia hết cho x, suy ra $P_n(2-x)$ chia hết cho $-x$. Suy ra $P_n(2+x)+P_n(2-x)$ chia hết cho x.

Mà P_n là hàm chẵn nên x^2 là ước của $P_n(2+x)+P_n(2-x)$.

Từ đó ta có nếu $P_n(x)$ chia hết cho $x^k(x-2), k\geq 2$ thì $P_{n+2}(x)$ chia hết cho $x^{k+2}(x-2)$.

$P_0(x)=x^3-4x$ nên P_0 là hàm lẻ và $P_0(x)=x(x-2)(x+2)$ chia hết cho $x(x-2)$

$P_2(x)=P_0(2+x)P_0(2-x)P_0^2(x)+\left[P_0(2+x)+P_0(2-x)\right]P_0(x)$

$P_0(x)=x(x-2)(x+2)$ chia hết cho $x(x-2)$ nên $P_0^2(x)$ chia hết cho $x^2(x-2)$ và $P_0(2+x)+P_0(2-x)$ chia hết cho x (theo chứng minh trên).

Từ đó ta có $P_2(x)$ chia hết cho $x^2(x-2)$.

Do đó $P_{2020}(x)$ chia hết cho x^{2020}.

II.4.2. Bài tập rèn luyện

Bài 1. ***(Thi Học sinh nữ Châu Âu EGMO-2020)*** Cho *m* là số nguyên, một dãy các số $a_1;a_2;a_3;...$ thỏa mãn $a_1=a_2=1$; $a_3=4;\forall n\geq 4$, $a_n=m(a_{n-1}+a_{n-2})-a_{n-3}$. Hãy xác định số nguyên *m* sao cho mọi số hạng của dãy đều là số chính phương.

Bài 2. ***(Thi học sinh nữ Châu Âu EGMO-2020)*** Cho dãy các số nguyên $a_0;a_1;a_2;a_3;....;a_{3030}$ thỏa mãn $2a_{n+2}=a_{n+1}+4a_n$ với $n=0;1;2;...;3028$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các số $a_0;a_1;a_2;a_3;....;a_{3030}$ chia hết cho 2^{2020}.

Bài 3. Cho dãy các số nguyên dương (a_n) ($n=1;2;...$) thỏa mãn điều kiện: $0<a_{n+1}-a_n\leq 2001;\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng tồn tại vô số cặp số $(p;q)$ nguyên dương phân biệt mà $a_p\mid a_q$.

Bài 4. Cho dãy các số nguyên (a_n) ($n=1;2;...$) được xác định bởi

$$a_0=2;a_1=1;a_{n+2}=a_{n+1}+a_n;\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Chứng minh rằng: nếu *p* là một ước nguyên tố của $a_{2k}-2$ thì *p* cũng là ước nguyên t ố của $a_{2k+1}-1$.

Bài 5.(**JBMO TST - April camp-2021**).

Xét dãy $a_1;a_2;...$ biết $a_1=9$ và $a_{n+1}=\dfrac{(n+5)a_n+22}{n+3}$ với $n\ge 1$. Tìm tất cả các số nguyên dương *n* sao cho a_n là số chính phương.

Bài 6. ***(Gặp gỡ đồng hành cùng toán học 2014- đề thử sức)*** Cho dãy số (a_n) được xác định bởi công thức $a_0=0;a_1=1;a_{n+2}=2014a_{n+1}-a_n;\ \forall n\in\mathbb{N}$. Chứng minh với mọi số $n\ge 2$ thì a_n là hợp số.

Bài 7. ***(Trường Đông toán học Bắc Trung Bộ-2018)*** Cho cặp số nguyên dương $(a;b)$ với $a>b>1$. Xét dãy (x_n) được xác định bởi công thức: $x_n=\dfrac{a^n-1}{b^n-1}$; $n=1;2;...$ Trong dãy (x_n) tồn tại nhiều nhất bao nhiêu số hạng liên tiếp đều là số nguyên tố?

Bài 8. ***(Trường hè Toán học 2015)***

a/ Tìm tất cả các số nguyên dương lẻ *t* thỏa mãn tính chất: với mọi số nguyên dương *k* tồn tại số nguyên dương a_k sao cho a_k^2+t chia hết cho 2^k.

b/ Chứng minh rằng tồn tại dãy số nguyên dương (a_k) sao cho a_k^2+7 chia hết cho 2^k và $\dfrac{a_{k+1}^2+7}{2^{k+1}}$ chia hết cho $\dfrac{a_k^2+7}{2^k}$ với mọi $k=1;2;3;...$

Bài 9. Cho dãy (a_n) được xác định như sau: $a_1=5;a_2=11;a_{n+1}=2a_n-3a_{n-1};n=2;3;...$ Chứng minh rằng a_{2022} chia hết cho 11.

* ***Tổng quan:***

Nhìn chung về những dãy số nguyên, các số hạng có những tính chất đặc biệt mà ta có thể giải quyết trên cơ sở chia hết, ước số, bội số. Ta nhận được những lời giải hay và đẹp! Đồng hành cùng dãy số nguyên là các đa thức có hệ số nguyên cũng có nhiều vấn đề liên quan đến ước số, vấn đề này được nêu trong phần sau.

II.5. ƯỚC SỐ TRONG ĐA THỨC

Đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên khi ta thay $x=a\in\mathbb{Z}$ thì giá trị $P(a)$ là số nguyên. Khi đó các số nguyên *a* và $P(a)$ có những tính chất số học liên quan đến nó. Dĩ nhiên sự kết hợp giữa tính chất của đa thức với tính chất số học sẽ hấp dẫn và thú vị tạo nên những bài toán đa dạng và phong phú. Bài viết này không khai thác mối quan hệ giữa đa thức và số học vì đã có nhiều sách và chuyên đề viết về nó. Bài này chỉ viết về những bài toán đa thức hệ số nguyên dưới góc nhìn ước số của nó.

II.5.1.Bổ sung kiến thức lý thuyết của đa thức liên quan đến số học

Bài viết này không nêu lại lý thuyết về Đa thức (các bạn tham khảo lại trên các chuyên đề về đa thức) mà chỉ nêu các tính chất có liên quan đến số học vận dụng trong giải toán đa thức.

Tính chất: Cho đa thức hệ số nguyên $P(x)$, với mọi cặp số nguyên *a;b* ta luôn có

$$P(a)-P(b)\vdots(a-b) \text{ hay } (a-b)\mid(P(a)-P(b))$$

Hệ quả: Cho đa thức hệ số nguyên *P* và các số nguyên *a, b, n*. Nếu $a\equiv b\pmod{n}$ thì

$$P(a)\equiv P(b)\pmod{n}$$

Định lý Schur: Cho *P* là đa thức hệ số nguyên, khác đa thức hằng, luôn có vô hạn số nguyên tố *p* thỏa mãn: ứng với mỗi *p* tồn tại số nguyên *n* sao cho $p\mid P(n)$.

Chứng minh:

- Nếu $P(0)=0$ thì $p\mid P(p)$ với mọi số nguyên tố *p*, điều kiện bài toán được thỏa mãn.
- Nếu $P(0)=1$, giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố thỏa mãn bài toán là $p_1<p_2<...<p_k$. Vì *P* khác đa thức hằng nên ta chọn được số nguyên dương *n* đủ lớn để $n>p_k$ và $|P(n!)|\geq 2$. Ta có $n!\mid P(n!)-P(0)$ nên $P(n!)\equiv 1\pmod{n!}$. Gọi *q* là một ước nguyên tố của $P(n!)$, nếu $q\leq p_k$ thì $P(n!)-1\vdots n!\vdots q$, suy ra $1\vdots q$, vô lý, do đó $q>p_k$, nhưng điều này lại mâu thuẫn với điều giả sử. Do đó, có vô hạn số nguyên tố thỏa điều kiện bài toán.
- Nếu $P(0)=a\neq 0$, đặt $Q(x)=\dfrac{P(ax)}{a}$. Khi đó, *Q* là một đa thức hệ số nguyên với $Q(0)=1$. Theo chứng minh trên, tồn tại vô hạn số nguyên tố *p* mà ứng với mỗi *p* tồn tại số nguyên *n* sao cho $p\mid Q(n)$. Khi đó $p\mid P(an)$. (điều phải chứng minh)

II.5.2. Các bài toán về đa thức qua góc nhìn ước số

Bài toán 1. Cho các đa thức $P(x);Q(x)\in\mathbb{Z}_{[x]}$ và $a\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn $P(a)=P(a+2019)=0,Q(2018)=2020$. Chứng minh rằng phương trình $Q(P(x))=2021$ không có nghiệm nguyên.

Tiếp cận bài toán: Từ giả thiết ta thấy tính chẵn lẻ của các các nghiệm và các giá trị của nó. Nên tư tưởng bài toán xét trên tính chẵn lẻ (bội của 2).

Bài giải:

Từ giả thiết ta có $x=a$ và $x=a+2019$ là các nghiệm của $P(x)$ và $x=2018$ là nghiệm của $Q(x)-2018$ nên ta có:

+ $P(x)=(x-a)(x-a-2019)g(x)$,suy ra $P(x)$ chẵn với $\forall x\in\mathbb{Z}$.

$+Q(x)=(x-2018)h(x)+2020\Rightarrow Q(P(x))=(P(x)-2018)h(x)+2020$ chia hết cho 2

Nên $Q(P(x))\neq 2021;\forall x\in\mathbb{Z}$. Chứng tỏ $Q(P(x))=2021$ không có nghiệm nguyên.

Lời bàn: *Chỉ việc xét tính chẵn lẻ ta có lời giải đẹp*!

Bài toán sau đây cũng chỉ xét tính chẵn lẻ ta có giải hay!

Bài toán 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên *a*, phương trình:
$x^4-2021x^3+(2020+a)x^2-2019x+a=0$ không thể có hai nghiệm nguyên phân biệt.

Tiếp cận bài toán: Các hệ số chứa các số nguyên liên tiếp nên từ $f(1)$ và nghiệm của đa thức sẽ xét đọc tính chẵn lẻ của nó.

***Bài giải*:**

Đặt $f(x)=x^4-2021x^3+(2020+a)x^2-2019x+a$

Gọi α là nghiệm nguyên của $f(x)$, ta có $f(\alpha)=0$

Vì $f(1)=2a-2019$ là số lẻ nên $f(1)-f(\alpha)=2a-2019$ là số lẻ

Do $f(1)-f(\alpha)\,\vdots\,(1-\alpha)$ nên $1-\alpha$ là số lẻ, suy ra α là số chẵn

Giả sử α_1,α_2 là nghiệm nguyên phân biệt của phương trình $f(x)=0$ thì α_1,α_2 là các số chẵn.

Ta có:

$$0=\frac{f(\alpha_1)-f(\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2}=\left(\alpha_1^3+\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_2^3\right)-2021\left(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2\right)+(2020+a)(\alpha_1+\alpha_2)-2019$$

Đẳng thức trên không xảy ra vì α_1,α_2 là các số chẵn (mâu thuẫn)

Vậy phương trình $f(x)=0$ không thể có hai nghiệm nguyên phân biệt.

Bài toán 3. Cho $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu các số $f(0); f(1);...; f(m-1)$ đều không chia hết cho *m* (*m* là số nguyên dương cho trước $m\geq 2$) thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm nguyên.

Tiếp cận bài toán: Giá trị của đa thức tại *n* số nguyên liên tiếp liệu có tồn tại số chia hết cho *n* không?

Bài giải:

Giả sử $f(x)$ có một nghiệm nguyên $x=c, c\neq\{0;1;...;m\}$

Suy ra $f(x)=(x-c)g(x)$

$f(0)=(0-c)g(0)$

$f(1)=(1-c)g(1)$

………………..

$f(m-1)=(m-1-c)g(m-1)$

Do $0-c;1-c;...;m-1-c$ là *m* số nguyên liên tiếp tồn tại một số chia hết cho *m* (mâu thuẫn với giả thiết)

Vậy nếu các số $f(0); f(1);...; f(m-1)$ đều không chia hết cho *m* (*m* là số nguyên dương cho trước $m\geq 2$) thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm nguyên.

Lời bàn: *Chỉ sử dụng định lý Bezout xét cho ta đã chỉ ra tồn tại một số chia hết cho n trong số liên tiếp!*

Bài toán 4. *Cho a,b,c* là ba số nguyên phân biệt và đa thức $P(x)\in\mathbb{Z}_{[x]}$ sao cho $P(a)=P(b)=P(c)=2020$ Chứng minh rằng phương trình $P(x)-2021=0$ không có nghiệm nguyên.

Tiếp cận bài toán: Dễ nhận ra *a;b;c* là nghiệm của phương trình $P(x)-2020=0$. Nếu phương trình $P(x)-2021=0$ có nghiệm ta nên xét theo hướng ước số!

Bài giải:

Từ giả thiết ta có $P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)Q(x)+2020$ trong đó $Q(x)\in\mathbb{Z}_{[x]}$.

Giả sử phương trình $P(x)-2021=0$ có nghiệm nguyên là *d*.

Khi đó $(d-a)(d-b)(d-c)Q(d)=1$. Do đó $d-a;d-b;d-c\in\{-1;1\}$ vô lý do $d-a;d-b;d-c$ phân biệt. Từ đó ta có đpcm.

Lời bàn: *Chỉ ra số 1 không thể là tích của 3 số nguyên phân biệt, ta có lời giải đẹp! Sau đây hai bài có cùng hướng giải quyết như trên.*

Bài toán 5. Cho $f(x)$ là một đa thức bậc 5 với hệ số nguyên, nhận giá trị 2020 với 4 giá trị nguyên khác nhau của biến x. Chứng minh rằng phương trình $f(x)=2037$ không thể có nghiệm nguyên.

Bài giải:

Giả sử $f(x)=2020$ tại bốn giá trị phân biệt là $x_1;x_2;x_3;x_4$ và phương trình $f(x)=2037$ có nghiệm nguyên *a*. Khi đó ta có:

$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)H(x)+2020;\ H(x)\in\mathbb{Z}_{[x]}$

và $f(a)=2037\Leftrightarrow(a-x_1)(a-x_2)(a-x_3)(a-x_4)H(a)=17$.

Do 17 là số nguyên tố nên không thể phân tích thành tích của 4 số nguyên phân biệt điều này mâu thuẫn suy ra đpcm.

Bài toán 6. Cho $f\in\mathbb{Z}_{[x]}$.

a/ Chứng minh rằng nếu $f(x)=1$ có quá 3 nghiệm nguyên thì phương trình $f(x)=-1$ không có nghiệm nguyên.

b/ Giả sử *a,b,c* là 3 nghiệm nguyên khác nhau của phương trình $f(x)=1$. Chứng minh rằng nghiệm nguyên của phương trình $f(x)=-1$ lớn hơn $\min\{a;b;c\}$.

Bài giải:

a/ Giả sử phương trình $f(x)=1$ có bốn nghiệm $a;b;c;d\in\mathbb{Z}$ khác nhau.

Suy ra $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)Q(x)+1$ với $Q(x)\in\mathbb{Z}_{[x]}$. Do đó phương trình $f(x)=-1\Leftrightarrow(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)Q(x)=-2$, chứng tỏ -2 có 4 ước số phân biệt.

Do -2 không thể phân tích thành tích của bốn số nguyên phân biệt nên phương trình $f(x)=-1$ không thể có nghiệm nguyên.

b/ Giả sử phương trình $f(x)=1$ có 3 nghiệm nguyên *a,b,c* và phương trình $f(x)=-1$ có nghiệm nguyên *d*. Theo câu a ta suy ra phương trình $f(x)=1$ có đúng 3 nghiệm.

Khi đó $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)Q(x)+1$ với $Q(x)\neq 0;\forall x\in\mathbb{Z}$.Và

$$-1=(d-a)(d-b)(d-c)Q(d)+1\Leftrightarrow(a-d)(b-d)(c-d)Q(d)=2$$

suy ra ba số $a-d;b-d;c-d$ phân biệt và đều là ước của 2 nên tồn tại một số âm, giả sử $a-d<0\Leftrightarrow d>a\Leftrightarrow d>\min\{a;b;c\}$ (đpcm)

Bài toán 7. Cho *P(x)* và *Q(x)* là hai đa thức với hệ số nguyên. Biết rằng đa thức $xP(x^3)+Q(x^3)$ chia hết cho x^2+x+1. Gọi *d* là ƯCLN của $P(2021)$ và $Q(2021)$.Chứng minh rằng $d\geq 2020$.

Tiếp cận bài toán: Ta có x^2+x+1 là ước của x^3-1, trong đề có yếu tố lũy thừa bậc ba. Nên chăng dùng tính chất $(a-b)\,|\,P(a)-P(b)$, chỉ còn việc thêm bớt biến đổi đưa về đơn giản hơn.

Bài giải:

Ta có: $xP(x^3)+Q(x^3)=x\left(P(x^3)-P(1)\right)+\left(Q(x^3)-Q(1)\right)+xP(1)+Q(1)$

mà $x(P(x^3)-P(1))$ và $Q(x^3)-Q(1)$ cùng chia hết cho x^3-1 nên chia hết cho x^2+x+1.

Do đó $xP(1)+Q(1)$ chia hết cho x^2+x+1. Vì deg $xP(1)+Q(1)$=1≤deg(x^2+x+1)=2

nên $(xP(1)+Q(1))\equiv 0\ \Rightarrow P(1)=Q(1)=0$. Theo định lý Bezout ta có $\begin{cases}P(x)=(x-1)P_1(x)\\Q(x)=(x-1)Q_1(x)\end{cases}$

, với $P_1(x);\mathrm{Q}_1(x)$ là các đa thức với hệ số nguyên.

Do đó $P(2021)$ và $Q(2021)$ cùng chia hết cho 2020. Vì $d=(P(2021);Q(2021))$ suy ra $d\geq 2020$.

Lời bàn: *Từ nhận xét đa thức bậc nhỏ hơn chia hết cho đa thức bậc lớn hơn chỉ xảy ra khi đa thức đồng nhất 0. Nhờ định lý Bezout ta có đa thức* $P(x)=(x-1)P_1(x)$ *thuận lợi cho việc chứng minh.*

Bài toán 8. Cho đa thức $f(x)=x^{101}+ax^2+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ có ba nghiệm nguyên x_1,x_2,x_3. Chứng minh rằng $(a^{101}+b^{101}+c^{101}+1)(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)$ chia hết cho 101.

***Tiếp cận bài toán*:** Nhận xét đầu tiên 101 là số nguyên tố nên có $101|\left(x^3-x\right)$ do đó sẽ có $g\left(x_i\right)\equiv 0\left(\text{mod}101\right)$. Lúc đó sẽ có hướng đi tiếp!

Bài giải:

:- Ta có $f(x)=x^{101}-x+ax^2+\left(b+1\right)x+c$. Đặt $g(x)=ax^2+(b+1)x+c$.

Do 101 là số nguyên tố nên theo định lý Fecma nhỏ ta có $x^{101}\equiv x\left(\text{mod}101\right)$.

Từ giả thiết suy ra $g(x_i)\equiv 0$ (mod 101).

- Nếu $(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)$ chia hết cho 101 thì bài toán chứng minh xong.
- Nếu $(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)$ không chia hết cho 101.

Ta có $g(x_1)-g(x_2)\vdots 101\Rightarrow(x_1-x_2)(a(x_1+x_2)+b+1)\vdots 101\Rightarrow a(x_1+x_2)+b+1\vdots 101(1)$

Tương tự $\Rightarrow a(x_2+x_3)+b+1\vdots 101(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a(x_1-x_3)\vdots 101\Rightarrow a\vdots 101\Rightarrow b+1\vdots 101$. Mà $g(x_1)\vdots 101\Rightarrow c\vdots 101$.

Do đó $a+b+c+1\vdots 101$ mà $a^{101}+b^{101}+c^{101}+1\equiv(a+b+c+1)\left(\text{mod}101\right)$

nên $a^{101}+b^{101}+c^{101}+1\vdots 101$.

Lời bàn: *Nhờ định lý Fermat và sử dụng tính chất* $\left(a-b\right)|P\left(a\right)-P\left(b\right)$ *cho ta lời giải đẹp!*

Bài toán 9. ***(Ukraina MO 2016)*** Cho P, Q là hai đa thức hệ số nguyên không âm, khác đa thức hằng. Xét dãy số $x_n=2016^{P(n)}+Q(n),\ n\geq 1$. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố p thỏa mãn: ứng với mỗi p, tồn tại số nguyên dương m sao cho $p|x_m$.

Tiếp cận bài toán: Yêu cầu bài toán làm ta liên tưởng đến định lý Schur, từ dãy x_n ta phải làm xuất hiện đa thức để sử dụng định lý Schur, phần dư còn lại chắc phải dùng đến Fermat!

Bài giải:

Ta có
$x_n = 2016^{P(n)} + Q(n) = 2016^{P(n)} - 2016^{P(1)} + Q(n) + 2016^{P(1)} = 2016^{P(n)} - 2016^{P(1)} + R(n)$
trong đó $R(n) = Q(n) + 2016^{P(1)}$ là một đa thức hệ số nguyên, khác đa thức hằng .

Theo định lý Schur, tồn tại vô hạn số nguyên tố *p*, $p > 2016$ thỏa mãn: ứng với mỗi *p*, tồn tại số nguyên dương *n* sao cho $p \mid R(n)$.

Vì $(p, p-1) = 1$ nên theo định lý thặng dư Trung Hoa, tồn tại số nguyên m sao cho $m \equiv n (\bmod p);\ m \equiv 1 (\bmod p-1)$.

Vì $p \mid R(n)$ và $m \equiv n (\bmod p)$ nên $p \mid R(m)$.

Hơn nữa, $m \equiv 1 (\bmod p-1)$ nên $P(m) \equiv P(1) (\bmod (p-1))$, do đó $p \mid 2016^{P(m)} - 2016^{P(1)}$ (định lý Fermat nhỏ)

Suy ra $p \mid x_m$. Ta có điều phải chứng minh.

Lời bàn: *Xuất hiện da thức R(n) để dùng định lý Schur, phần còn lại có bóng dáng của định lý Fermat nhưng phải bổ sung cho hoàn thiện điều kiện nguyên tố cùng nhau! Mạch kiến thức khá rõ ràng, lời giải khá tự nhiên !*

Bài toán 10. *(Mathematical Reflections 5- 2017)* Tìm tất cả các cặp số nguyên dương phân biệt (a,b) sao cho tồn tại đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên thỏa mãn :

$$P(a^3) + 7(a+b^2) = P(b^3) + 7(b+a^2).$$

Tiếp cận bài toán: Rõ ràng áp dụng tính chất $(a-b) \mid P(a) - P(b)$, phần còn lại cũng có thừa số $a-b$,nên sẽ có hướng giải quyết tiếp.

Bài giải:

Từ giả thiết $P(a^3) + 7(a^2+b) = P(b^3) + 7(b^2+a)$ suy ra

$$P(a^3) - P(b^3) = 7(b + a^2 - a - b^2) = 7(a-b)(a+b-1)$$

Mà ta có $a^3 - b^3 \mid P(a^3) - P(b^3)$ nên

$$a^3 - b^3 \mid 7(a-b)(a+b-1), a \neq b$$

$$\Rightarrow a^2 + ab + b^2 \mid 7(a+b-1)$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a > b$. Ta thấy
$7(a+b-1) \geq a^2 + ab + b^2 = (a+b-1)(a+1) + b^2 - b + 1 > (a+b-1)(a+1) \Rightarrow 7 > a+1 \Leftrightarrow 6 > a$.

Vì vậy $b < a < 6$. Thử trực tiếp ta được $b = 1, a = 2$ và $b = 3, a = 5$

- Nếu $b = 1, a = 2$ và $a = 1, b = 2$, ta được $P(x) = 2x$.

- Nếu $b=3, a=5$ và $a=3, b=5$, ta được $P(x)=x$.

Vậy các cặp (a,b) thỏa mãn là $(2,1),(1,2),(5,3),(3,5)$.

Lời bàn: *Chỉ sư dụng tính chất chia hết của hiệu $P(a)-P(b)$, và ước số phải bé hơn số đó ta đã thu hẹp phạm vi của các biến a;b. Lời giải khá tự nhiên và đẹp!*

II.5.3. Xây dựng đa thức hệ số nguyên để chứng minh chia hết

Bài toán 1. *(IMO Shortlist 2005)* Cho a,b,c,d,e,f là các số nguyên dương . Giả sử rằng $S=a+b+c+d+e+f$ là ước của các số $abc+def$ và $ab+bc+ca-de-ef-fd$. Chứng minh rằng S là hợp số .

Tiếp cận bài toán: Từ giả thiết thấy có tín hiệu của định lý Viet, chú ý tổng $abc+def$ và $ab+bc+ca-de-ef-fd$ xây dựng hiệu hai đa thức bậc ba có chứa các hệ số là các số đã cho.

Bài giải:

Xét đa thức $P(x)=(x+a)(x+b)(x+c)-(x-d)(x-e)(x-f)=Sx^2+Qx+R$.

Trong đó $S=a+b+c+d+e+f; Q=ab+bc+ca-de-ef-fd; R=abc+def$

Vì theo giả thiết $S|Q; S|R$ nên $S|P(x), \forall x\in\mathbb{Z}$.

Nói riêng $S|P(d)=(d+a)(d+b)(d+c)$.

Nếu S là số nguyên tố thì S là ước của một trong 3 số $d+a, d+b, d+c$, nhưng điều đó là vô lý, vì $S>max\{d+a, d+b, d+c\}$. Do đó S là hợp số (đpcm)

Lời bàn: *Việc xây dựng được đa thức P(x) là linh hồn của lời giải!*

Bài toán 2. *(THTT 2000)* Cho số tự nhiên lẻ p và các số nguyên a,b,c,d,e thỏa mãn các điều kiện $a+b+c+d+e$ và tổng $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ đều chia hết cho p. Chứng minh rằng $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$ cũng chia hết cho p.

Tiếp cận bài toán: Như bài trên, tín hiệu của định lý Viet và định lý Bezout khá rõ, ta cần xây dựng đa thức bậc 5 có hệ số thỏa các số đã cho, việc còn lại là của "số học"!

Bài giải:

Xét đa thức $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)$.

Ta đặt $f(x)=x^5-Ax^4+Bx^3-Cx^2+Dx-abcde, (1)$. Với $A=a+b+c+d+e, B=ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de, C\in\mathbb{Z}, D\in\mathbb{Z}$

Ta có p là ước của $2B=(a+b+c+d+e)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)$, mà p lẻ nên $p|B$

Trong (1), lần lượt thay x bởi a,b,c,d,e rồi cộng các kết quả với nhau, để ý rằng

$f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=f(e)=0$, ta được :

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde=A\left(a^4+b^4+c^4+d^4+e^4\right)-B\left(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3\right)+$$

$$C\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\right)-D\left(a+b+c+d+e\right) \text{ chia hết cho } p.$$

(do p đều là ước của $A, B, a+b+c+d+e, a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$).

Suy ra vế trái cũng chia hết cho p (đpcm)

Lời bàn: *Kết hợp giữa đại số và số học khá nhẹ nhàng, cho lời giải đẹp*!

Bài toán 3. Cho số nguyên dương $m>2$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\geq 3$ thì số $\frac{m^{2^n-1}-1}{m-1}-m^n$, luôn có một ước số có dạng m^a+1 với $a\in\mathbb{N}$.

Tiếp cận bài toán: Ta thấy số $m-1$ là ước của $m^{2^n-1}-1$nên $\frac{m^{2^n-1}-1}{m-1}-m^n$ luôn là số nguyên, mà có ước dạng m^a+1 với a là số tự nhiên hoặc là biểu thức chứa số tự nhiên.Như vậy ta phải xây dựng (thêm, bớt) để xuất hiện các bội của số dạng m^a+1 .

Bài giải:

Ta luôn có $\frac{m^{2^n-1}-1}{m-1}$ là số nguyên nên $\frac{m^{2^n-1}-1}{m-1}-m^n$ là số nguyên.

Ta có $\frac{m^{2^n-1}-1}{m-1}-m^n=\frac{m^{2^n-1}-m^{n+1}+m^n-1}{m-1}$

Đặt $n+1=2^r s$ ($r,s\in\mathbb{N}, s$ lẻ và $r<n$)

Xét đa thức: $P(m)=m^{2^n-1}-m^{n+1}+m^n-1=m^n\left(m^{2^r\left(2^{n-r}-s\right)}+1\right)-\left(m^{2^r s}+1\right)$.

Do s lẻ nên $2^{n-r}-s$ lẻ , ta suy ra : $(m^{2^r}+1)\,|\,P(m)$.

Khi đó $P(m)=\left(m^{2^r}+1\right)Q(m),\left(Q(m)\in\mathbb{Z}[x]\right)$ (1)

Vì $P(1)=0\Rightarrow Q(1)=0$ nên $Q(m)=(m-1)H(m)$ với $H(m)\in\mathbb{Z}[x]$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\frac{m^{2^n-1}-1}{m-1}-m^n=\left(m^{2^r}+1\right)H(m)$.

Hay số $\frac{m^{2^n-1}-1}{m-1}-m^n$ luôn có một ước số có dạng m^a+1 với $a\in\mathbb{N}$. (đpcm)

Lời bàn: *Xây dựng được đa thức $P(m)$ là giải quyết được nửa bài toán rồi! Còn lại phải xuất hiện số mũ lẻ là việc biểu diễn ước lẻ lớn nhất của số học, khá nhẹ nhàng.*

**** Các bài toán đã nêu trên đã dùng ý tưởng đa thức để giải, còn sau đây là các bài toán yêu cầu xây dựng hoặc tìm đa thức thỏa điều kiện cho trước.***

Bài toán 4. ***(Thailand MO 2014)*** Tìm tất cả các đa thức *P* với hệ số nguyên thỏa mãn $P(n)\left|2557^n+213.2014,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\right.$.

Tiếp cận bài toán: Ta luôn có 1 là ước của mọi số nguyên nên dễ có nghiệm trong trường hợp này.

Ta nên chọn số nguyên tố *p* là ước của $P(n)$ khi đó *p* cũng là ước của vế phải. Ta dùng tính chất $(a-b)\mid P(a)-P(b)$ để thu gọn biểu thức có ước là *p*. Khi đó sẽ có hướng giải tiếp!

Bài giải:

Dễ thấy $P(n)=1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ và $P(n)=-1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ là những đa thức thỏa mãn điều kiện bài toán.

Xét trường hợp $P(n)\neq\pm1$.

Giả sử *P* là đa thức thỏa mãn bài toán và $\exists n_0\in\mathbb{N}^*:\left|P(n_0)\right|\geq 2$.

Gọi *p* là ước nguyên tố của $P(n_0)$.

Ta có: $P(n_0)\left|2557^{n_0}+213.2014\right.$ và $P(n_0+p)\left|2557^{n_0+p}+213.2014\right.$.

Do đó, $p\left|P(n_0+p)-P(n_0)\right|2557^{n_0}(2557^p-1)$.

Mặt khác, vì $p\left|P(n_0)\right|2557^{n_0}+213.2014$ nên $p\notin\{2,3,19,53,71,2557\}$.

Do đó, $p\left|(2557^p-1)\right.$. Hơn nữa, theo định lý Fermat nhỏ, $p\left|(2557^p-2557)\right.$, nên $p\left|2556\right.$. Suy ra $p\in\{2,3,71\}$ (vô lý).

Vậy chỉ có hai đa thức $P(n)=1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ và $P(n)=-1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn bài toán.

Lời bàn: *Từ* $p\mid P(n_0+p)-P(n_0)$ *và với* $p\mid P(n_0)$ *ta so sánh ước để có lời giải . Bài toán sau cũng có hướng giải quyết tương tự.*

Bài toán 5. ***(Chọn ĐTQG- Phú Thọ- 2017)*** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên khác đa thức không sao cho $10^n-3n-2016$ chia hết cho $P(n)$ với mọi số nguyên dương *n*.

Bài giải:

Trước hết ta chứng minh $P(x)$ đa thức hằng. Thật vậy giả sử $P(x)$ đa thức khác hằng . Suy ra tồn tại số tự nhiên N đủ lớn sao cho với mọi $n\geq N$, ta có $\left|P(n)\right|>1$

Gọi p là ước nguyên tố bất kỳ của $P(n)$.

Ta có $P(n+p)-P(n)\vdots p$. Suy ra

$$P(n+p)-P(n)=(10^{n+p}-3(n+p)-2016)-(10^n-3n-2016)=10^n(10^p-1)-3p\vdots p$$

Suy ra $10^n(10^p-1)\vdots p$

Nếu $p\neq 2;5$ thì ta có $(10^p-1)\vdots p$, mà theo định lý Fermat's ta có $10^p\equiv 10(\bmod p)$

$10^p-1\equiv 9(\bmod p)$

Từ đó suy ra $p=3$

Do đó $p=2;3$ hoặc 5.

Ta thấy rằng $(10^n-3n-3016,3)=1\Rightarrow p=2$ hoặc 5.

Nếu $p=2$ thì ta có $2|10^n-3n-2016$ suy ra n chẵn .

Nếu $p=5$ thì ta có $5|10^n-3n-2016$ suy ra $n\equiv 3(\bmod 5)$

Chọn được n.không thỏa mãn cả hai điều kiện trên $(n\equiv 1(\bmod 10))$và $n\geq N$, khi đó ta có điều vô lý.Vậy $P(x)$ đa thức hằng.

Đặt $|P(n)|=a,a=const$. Ta có $(10^n-3n-2016)\vdots a,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Với $n=1$, suy ra a lẻ.

Với $n=5$, suy ra $(a,5)=1$

Nếu $a>1$ thì gọi q là một ước nguyên tố bất kỳ của a. Ta có $(10,q)=1$.

Chọn $n=q$ ta có $(10^q-3q-2016)\vdots q$, mà $10^q\equiv 10(\bmod q)\Rightarrow q|2006$

Chọn $n=q-1$ ta có $(10^{q-1}-3(q-1)-2016)\vdots q$, mà $10^{q-1}\equiv 1(\bmod q)\Rightarrow q|2012$

Từ hai điều trên suy ra $q|(2006,2012)=2$ vô lý do a lẻ.

Vậy $a=1$. Suy ra $P(x)\equiv 1,P(x)\equiv -1$, là hai đa thức cần tìm.

Bài toán 6. Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$ thỏa mãn $P(p)\,|\,2^p-p$, với mọi số nguyên tố p.

Tiếp cận bài toán: Từ đề bài đã có bóng dáng của định lý Schur, nên ứng dụng tính chia hết của đa thức và định lý Schur ta sẽ có hướng đi.

Bài giải:

Dễ thấy nếu $P(x)$ là đa thức hằng thì $P=\pm 1$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Xét $P(x)$ không phải là đa thức hằng.

Theo định lí Schur, tồn tại vô hạn số nguyên tố p thỏa mãn: ứng với mỗi p tồn tại số nguyên n sao cho $p \mid P(n)$.

Nếu $p \mid n$ thì $p \mid P(n) - P(p)$ nên $p \mid P(p) \mid 2^p - p$, vô lí nên $(p, n) = 1$.

Theo định lí Dirichlet về số nguyên tố, ta có thể chọn số nguyên k sao cho $q = n + kp$ là số nguyên tố. Khi đó, $p \mid P(q) - P(n)$ nên

$$p \mid P(q) \mid 2^q - q = 2^{n+kp} - (n + kp).$$

Kết hợp định lí Fermat nhỏ suy ra, $p \mid 2^{n+k} - n.$ Đặt $h = ord_p(2).$ Nếu có các số nguyên k_1, k_2 thỏa mãn $p \mid 2^{n+k_1} - n$ và $p \mid 2^{n+k_2} - n$ thì $k_1 \equiv k_2 (\operatorname{mod} h).$ Do đó, ta chỉ có thể chọn k theo một lớp thặng dư nào đó đối với modulo $h.$ Nhưng, theo định lí Dirichlet, ta có thể chọn k sao cho số nguyên tố $q = n + kp$ nguyên tố cùng nhau với $h.$ Khi đó, vì $h \mid p - 1$ nên $(n + k, h) = 1$, nghĩa là ta có $\phi(h)$ cách chọn lớp thặng dư đối với modulo h cho $k.$ Vô lí.

Vậy chỉ có $P = \pm 1$ là những đa thức thỏa mãn bài toán

Lời bàn: *Với đa thức khác hằng, đã kết hợp tính chia hết và định lý Schur loại trường hợp* $p \mid n$, *còn trường hợp* $(p;n) = 1$ *phải dùng đến những công cụ nặng như cấp và các định lý Euler; Fermat để giải quyết.*

II.5.4. Bài tập rèn luyện

Bài 1.(*BMO- 2016*) Tìm tất cả các đa thức hệ số nguyên thỏa mãn điều kiện: tồn tại số nguyên dương *N* sao cho *p* là ước của $2(f(p)!)+1$ với mỗi số nguyên tố $p > N$ mà $f(p)$ là số nguyên dương.

Bài 2: (***Balkan MO – 2016***) Tìm tất cả các đa thức monic *f* (hệ số cao nhất bằng 1) thỏa mãn các điều kiện sau: tồn tại số nguyên dương *N* sao cho *p* là ước số của 2(*f(p)!)* + 1 với mỗi số nguyên tố *p* > *N* mà *f(p)* là số nguyên dương.

Bài 3: Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Chứng minh rằng không tồn tại ba số *a, b, c* phân biệt sao cho $P(a) = b,\ P(b) = c,\ P(c) = a$.

Bài 4: P(x) là đa thức với hệ số nguyên và P(0), P(1) là các số lẻ. Chứng minh rằng P(x) không có nghiệm nguyên.

Bài 5: Cho P(x) là đa thức với hệ số nguyên sao cho $|P(a)| = |P(b)| = |P(c)| = 1$ với a, b, c là ba số nguyên phân biệt. Chứng minh rằng P(x) không có nghiệm nguyên.

Bài 6: (***HSGQG 2014***). Cho đa thức $P(x)=\left(x^2-7x+6\right)^{2n}+13$ với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng P(x) không thể biểu diễn được dưới dạng tích của n + 1 đa thức khác hằng số với hệ số nguyên.

Bài 7: (*IMO Shortlist 2005*)

Biết rằng các số nguyên dương $a \ge b \ge c$ và d thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

i. $abc = d^3$

ii. Số $a+b+c-d$ là một ước nguyên tố của số $ab+bc+ca-d^2$

Chứng minh rằng $b = d$

Bài 8. (*Mathemattica Excalibur 5- 1996*)

Tìm tất cả các số nguyên a sao cho x^2-x+a là ước của $x^{13}+x+90$.

Bài 9.(*Mathematical Reflections 2017*)

Cho đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên và có nghiệm nguyên. Chứng minh rằng nếu p, q là hai số nguyên tố lẻ phân biệt thỏa mãn $P(p)=p<2q-1$ và $P(q)=q<2p-1$, thì p và q là hai số nguyên tố sinh đôi.

Bài 10. (*Thailand MO 2014*)

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số là các số nguyên thỏa mãn:

$P(n) \mid 2557^n + 213.2014, \forall n \in \mathbb{N}^*$

III. HƯỚNG PHÁT TRIỂN ĐỀ TÀI:

Đề tài này còn hai hướng phát triển sau:

1/ Phương trình hàm trên tập $\mathbb{Z}$, qua cách nhìn về ước số, bội số.

2/ Dùng ước số, bội số trong các bài toán tổ hợp rời rạc.

Đó là hai vấn đề tôi (hoặc các bạn) sẽ tiếp tục trong bài viết sau.

Thí dụ bài toán sau về Rời rạc trong thời gian gần đây, các bạn tham khảo:

Đề **(BMO TST - March camp-2021)**

Có $n \geq 2$ số nguyên dương được viết trên bảng trắng. Một nước đi gồm ba bước: tính bội số chung nhỏ nhất N của tất cả các số, sau đó chọn một số *a* và thay *a* bởi số $\frac{N}{a}$. Chứng minh rằng sử dụng một số lần hữu hạn ta luôn có thể thực hiện được tất cả các số trên bảng đều bằng 1.

Bài giải. Gọi *P* là tập hợp tất cả các ước nguyên tố của các số trên bảng. Rõ ràng ta không thể thêm bất kỳ số nguyên tố mới nào vào tập *P*. Ta chọn số nguyên tố bất kỳ $p \in P$ và sắp xếp tất cả các số theo lũy thừa giảm dần của cố mũ của *p*.

Theo bổ đề LTE ta có $v_p(a_1) \geq v_p(a_2) \geq \ldots \geq v_p(a_n)$

Chú ý rằng $v_p(a_1) = v_p(lcm(a_1;a_2;\ldots;a_n))$ ở đây $v_p\left(\frac{N}{a_1}\right) = 1$

Do đó sau khi ta chọn liên tiếp các số $a_1;a_2;\ldots;a_n$ cuối cùng không còn số nào trên bảng là bội của *p*. Nên ta luôn có thể giảm $|P|$ xuống ít nhất, sau một số lần thực hiện như vậy đến lúc $|P| = 0$ nghĩa là tất cả các số trên bảng đều bằng 1.

Khá hấp dẫn phải không các bạn.!

IV. KẾT LUẬN

Bài viết này tôi hướng đến các em học sinh tự học, sau đó làm tài liệu tham khảo cho các bạn đồng nghiệp mới bước vào phân môn Số học. Với mục đích giúp các em có hướng tìm tòi giải quyết bài toán một cách tự nhiên nên mỗi bài tôi đều có gợi ý hướng tiếp cận bài toán. Dĩ nhiên đó không phải là hướng duy nhất mà còn có nhiều cách tiếp cận hay hơn của các bạn. Cũng có những bài toán thuộc dạng khó, ta không thể "*thấy*" liền mối liên hệ giữa giả thiết và kết luận mà nó "*ẩn*" quá sâu. Những bài đó đòi hỏi ta phải tập trung cao độ tư duy "*quán tưởng*" về nó, dĩ nhiên "*ánh sáng*" cũng sẽ xuất hiện! Khi đó ta có những cảm giác thú vị! Cũng là lúc ta thấy được "*vẻ đẹp của số học*". Chính vẻ đẹp "*nội tâm*" đó mà Số học bước lên ngôi "*nữ hoàng*" của toán học!

Tôi cũng học cách viết của người xưa là sau mỗi vấn đề, mỗi bài toán đều có vài lời bàn, đó cũng là cách nhận định *chủ quan* của người viết, bạn có thể không đồng tình thì bỏ qua, chỉ đọc phần nội dung bài giải.

Bài viết là chỉ khai thác cách nhìn từ "*bên trong*" của bài toán thông qua sử dụng ước số. Mục đích làm cho người học cảm nhận được vẻ đẹp của Số học từ lối tiếp cận đến tư duy giải toán khá độc đáo và thú vị. Bài viết không giải quyết hết các vấn đề của môn Số học mà chỉ dừng lại ở một số bài toán phù hợp với nội dung của chủ đề.

Nhân đây tôi cũng xin cảm ơn quý bạn đồng nghiệp trong tổ đã cung cấp tài liệu, chỉnh sửa và đóng góp nhiều ý kiến hay cho tôi hoàn thành bài viết này. Chắc chắn rằng còn nhiều sai sót không tránh khỏi trong lúc viết, rất mong nhận được sự góp ý chân tình của các bạn.

Xin gởi nơi đây tấm lòng tri ân!

Trường THPT Chuyên Lê Thánh Tông- Quảng Nam.

Tháng 8 năm 2021.

"*Năm Covid thứ hai*"

Giáo viên: Nguyễn Văn Thời.

V. TÀI LIỆU THAM KHẢO.

[1]. Định hướng bồi dưỡng học sinh năng khiếu Toán Số học. (Lê Anh Vinh chủ biên)

[2]. Tuyển tập các đề thi Olympic Toán vòng quanh thế giới (Lê Phúc Lữ chủ biên)

[3]. Các phương pháp giải Toán qua các kỳ thi Olympic. (Trần Nam Dũng chủ biên)

[4]. Các chuyên đề Số học bồi dưỡng học sinh giỏi toán trung học -5 tập (của Phan Huy Khải)

[5]. Tạp chi Pi.

[6]. Tạp chí Toán học và tuổi trẻ.

[7]. Các chuyên đề hội thảo của Duyên hải và đồng bằng Bắc bộ và các chuyên đề của các trường Hè, trường Đông của viên Toán tổ chức.

[8]. Số học. (của Hà Huy Khoái)

[9] Chuyên đề Số học. (Diễn đàn Mathscope)

[10]. Problems on number theory. (của Titu Andreescu)

[11]. Olympiad problems number theory.

(của Doãn Quang Tiến-Nguyễn Minh Tuấn- Nguyễn Nhất Huy-Huỳnh Kim Linh)

[12]. Selected Problems and Theorems in Elementary Mathematics *Arithmetic and Algebra*.

(D.O. Shklyarsky –N.Nchenstov – I.M Yalom)