

Отчет о выполнении лабораторной работы 2.1.4 Определение теплоемкости твердых тел

Выполнил: Дедков Денис, группа Б01-109

06.02.2022

Цель работы: измерение количества подведенного тепла и вызванного им нагрева твердого тела; определение теплоемкости по экстраполяции отношения $\Delta Q/\Delta T$ к нулевым потерям тепла.

В работе используются: калориметр с нагревателем и термометром сопротивления; амперметр; вольтметр; мост постоянного тока; источник питания 36 В.

Теоретическое введение

В данной работе теплоемкость определяется по формуле

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}, \quad (1)$$

где ΔQ – количество тепла, подведенного к телу, и ΔT – изменение температуры тела, произошедшее в результате подвода тепла.

Температура исследуемого тела надежно измеряется термометром сопротивления, а определение количества тепла, поглощенного телом, обычно вызывает затруднение. В реальных условиях не вся энергия $P\Delta t$, выделенная нагревателем, идет на нагревание исследуемого тела и калориметра, часть ее уходит из калориметра благодаря теплопроводности его стенок. Оставшееся в калориметре количество тепла ΔQ равно

$$\Delta Q = P\Delta t - \lambda(T - T_{\text{к}})\Delta t, \quad (2)$$

где P – мощность нагревателя, λ – коэффициент теплоотдачи стенок, T – температура тела, $T_{\text{к}}$ – комнатная температура, Δt – время, в течение которого идет нагревание.

Из уравнений (1) и (2) получаем

$$C = \frac{P - \lambda(T - T_{\text{к}})}{\Delta T/\Delta t} \quad (3)$$

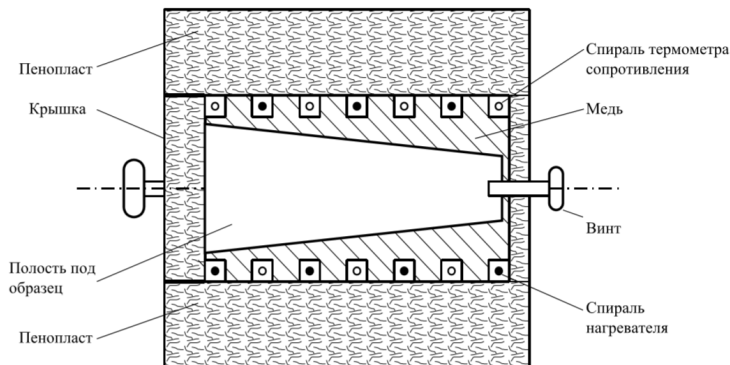


Рис. 1: Схема устройства калориметра

Формула (3) является основной расчетной формулой. Она определяет теплоемкость тела вместе с калориметром. Теплоемкость калориметра измеряется отдельно и вычитается из результата.

С увеличением температуры исследуемого тела растет утечка энергии, связанная с теплопроводностью стенок калориметра. Из формулы (2) видно, что при постоянной мощности нагревателя по мере роста температуры количество тепла, передаваемое телу, уменьшается, и, следовательно, понижается скорость изменения его температуры.

Погрешности, связанные с утечкой тепла, оказываются небольшими, если не давать телу заметных перегревов и проводить все измерения при температурах, мало отличающихся от комнатной. Однако при небольших перегревах возникает большая ошибка при измерении $\Delta T = T - T_k$, и точность определения теплоемкости не возрастает. Чтобы избежать этой трудности, в работе используется следующая методика измерений. Зависимость скорости нагревания тела $\Delta T/\Delta t$ от температуры измеряется в широком интервале изменения температур. По полученным данным строится график

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = f(T).$$

Этот график экстраполируется к температуре $T = T_k$, и таким образом определяется скорость нагревания при комнатной температуре $(\Delta T/\Delta t)_{T_k}$. Подставляя полученное выражение в формулу (3) и замечая, что при $T = T_k$ член $\lambda(T - T_k)$ обращается в ноль, получаем

$$C = \frac{P}{(\Delta T/\Delta t)_{T_k}} \quad (4)$$

Температура измеряется термометром сопротивления, который представляет собой медную проволоку, намотанную на теплопроводящий кар-

кас внутренней стенки калориметра (рис. 1). Сопротивление проводника изменяется с температурой по закону

$$R_T = R_0(1 + \alpha\Delta T), \quad (5)$$

где R_T – сопротивление термометра при $T^\circ\text{C}$, R_0 – его сопротивление при 0°C , α – температурный коэффициент сопротивления.

Дифференцируя (5) по времени, найдем

$$\frac{dR}{dt} = R_0\alpha \frac{dT}{dt}, \quad (6)$$

Выразим сопротивление R_0 через измеренное значение $R_{\text{к}}$ – сопротивление термометра при комнатной температуре. Согласно (5), имеем

$$R_0 = \frac{R_{\text{к}}}{1 + \alpha\Delta T_{\text{к}}}, \quad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (4), найдем

$$C = \frac{PR_{\text{к}}\alpha}{\left(\frac{dR}{dt}\right)_{T_{\text{к}}}(1 + \alpha\Delta T_{\text{к}})}, \quad (8)$$

Входящий в формулу температурный коэффициент сопротивления меди равен $\alpha = 4,28 \cdot 10^{-3} \text{ град}^{-1}$, все остальные величины определяются экспериментально.

Экспериментальная установка

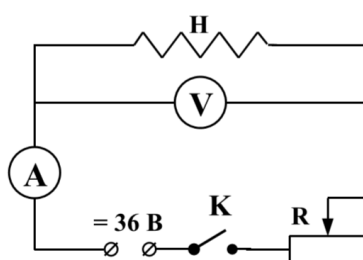


Рис. 2: Схема включения нагревателя

Установка состоит из калориметра с пенопластовой изоляцией, помещенного в ящик из многослойной клееной фанеры. Внутренние стенки калориметра выполнены из материала с высокой теплопроводностью.

Надежность теплового контакта между телом и стенками обеспечивается их формой: они имеют вид усеченных конусов и плотно прилегают друг к другу. В стенку калориметра вмонтированы электронагреватель и термометр сопротивления. Схема включения нагревателя изображена ниже (См. рис. 2).

Система реостатов позволяет установить нужную силу тока в цепи нагревателя. По амперметру и вольтметру определяется мощность, выделяемая в нагревателе. Величина сопротивления термометра измеряется мостом постоянного тока.

Определим параметры установки:

$$R_k = 18.18 \pm 0.1 \text{ Ом},$$

$$P = 10.8 \text{ Вт},$$

$$\alpha = 4.28 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-3}.$$

Массы образцов запишем в таблицу :

Материал образца:	Железо	Латунь
Масса образца, г	$815,1 \pm 0,1$	$875,5 \pm 0,1$

Таблица 1: Параметры исследуемых образцов

Ход работы

Снимем зависимость $R(t)$ для калориметра, а также для 2 исследуемых образцов. Данные занесем в таблицу .

Построим графики измеренных зависимостей $R_T = R(t)$:

Основной метод данной работы - численный расчет производных. Рассчитаем производную по разности соседних измерений (таблицы 6, 7, 8):

$$\frac{dR}{dt} \approx \frac{R(t_2) - R(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Исходно измеренные зависимости $R(t)$ напоминают полином небольшой степени. Следовательно можно попробовать экстраполировать производные квадратичной зависимостью. В самом деле, глядя на графики $\frac{dR}{dt}(R)$, данная модель неплохо описывает зависимости. Также для обоснования линейной модели можно заметить,

Для обработки будет использована разновидность метода χ^2 - метод наименьших квадратов.

Калориметр		Латунь		Железо	
t, с	R, кОм	t, с	R, кОм	t, с	R, кОм
0.00	18.177	0.00	18.325	0.00	18.425
30.86	18.225	43.42	18.375	62.22	18.475
73.96	18.275	92.94	18.425	121.00	18.525
118.58	18.325	145.26	18.475	185.01	18.575
166.39	18.375	202.18	18.525	253.12	18.625
214.05	18.425	262.96	18.575	324.68	18.675
263.97	18.475	320.04	18.625	401.12	18.725
314.49	18.525	387.82	18.675	482.57	18.775
367.38	18.575	455.25	18.725	564.47	18.825
422.03	18.625	531.25	18.775	655.75	18.875
478.91	18.675	606.94	18.825	746.58	18.925
536.51	18.725	690.19	18.875	859.31	18.975
596.39	18.775	749.88	18.925	943.78	19.025
658.04	18.825	840.60	18.975	1044.53	19.075
720.93	18.875			1149.25	19.125
785.14	18.925			1210.19	19.175
851.05	18.975				

Таблица 2: Таблица $R(t)$

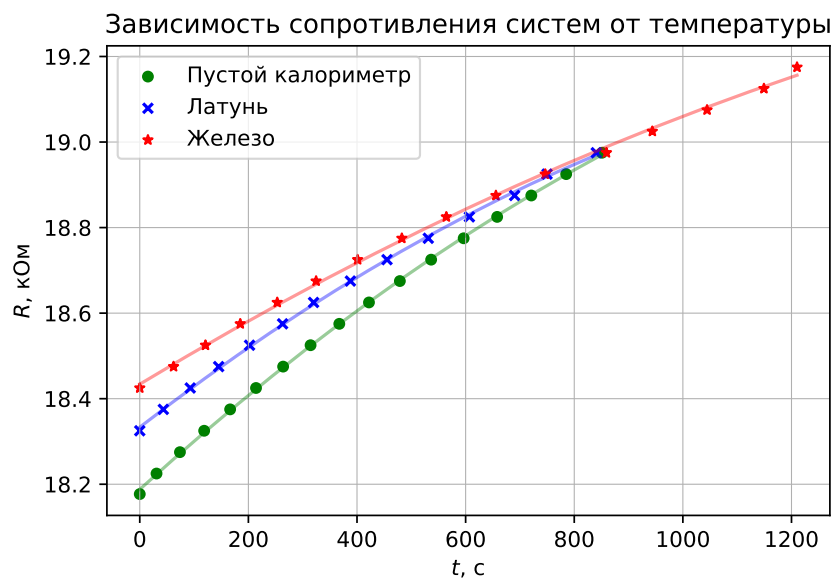


Рис. 3: Сопротивление от температуры

Система:	χ^2	Критерий χ^2
Калориметр	2.2	0.2
Железо	0.7	0.05
Латунь	1.5	0.3

Таблица 3: Статистическая обработка

Система:	λ_0	σ_{λ_0}	λ_1	σ_{λ_1}	λ_2	σ_{λ_2}
Калориметр	0.00031244	4.1e-08	-0.01218001	7.6e-07	0.1193555	1.4e-05
Железо	0.00055448	4.4e-08	-0.02136197	8.2e-07	0.2062121	1.5e-05
Латунь	0.00105938	4.6e-08	-0.04031611	8.5e-07	0.38413587	1.6e-05

Таблица 4: Коэффициенты

Перейдем к расчету зависимостей. Сделаем это отдельно для каждого образца. Для квадратичной зависимости используем следующее выражение:

$$f(x) = \lambda_0 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2,$$

Обозначим вектор параметров за $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$. Для определения коэффициентов минимизируем квадрат отклонения, а именно следующую функцию:

$$\chi^2(\lambda) \rightarrow \min.$$

$$\chi^2(\lambda) = \sum_k \left(\frac{y_k - f(x_k|\lambda)}{\sigma_y} \right)^2 \approx \frac{1}{\sigma^2} \sum_k (y_k - f(x_k|\lambda))^2.$$

Погрешность отдельного расчета производной примем $\sigma \approx 5 \cdot 10^{-5}$. Для качественного критерия применимости модели будем использовать следующую величину:

$$\Theta = \frac{\chi^2}{n - p},$$

где n - кол-во измерений, p - число степеней свободы.

При хорошем соответствии эксперимента и теории $\Theta \sim 1$.

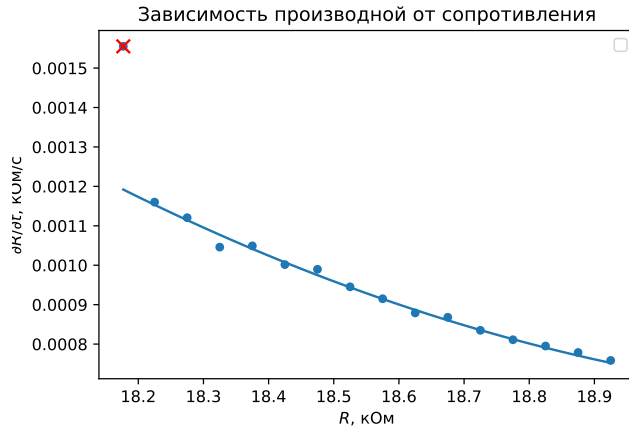
Из теории методов обработки следует, что для оценки погрешности параметров, нужно решить уравнение

$$\chi^2(\lambda + \sigma_\lambda) - \chi^2(\lambda) = 1$$

Система:	Зависимость
Калориметр	$y = 0.00031x^2 - 0.012x + 0.12$
Железо	$y = 0.00055x^2 - 0.021x + 0.21$
Латунь	$y = 0.0011x^2 - 0.040x + 0.38$

Таблица 5: Зависимости

Таблица 6: Производные для
пустого калориметра



$\frac{\partial R}{\partial t}, \frac{\text{ОМ}}{\text{с}}$	$R \text{ Ом}$
0.001555	18.177
0.001160	18.225
0.001121	18.275
0.001046	18.325
0.001049	18.375
0.001002	18.425
0.000990	18.475
0.000945	18.525
0.000915	18.575
0.000879	18.625
0.000868	18.675
0.000835	18.725
0.000811	18.775
0.000795	18.825
0.000779	18.875
0.000759	18.925

Рис. 4: Производные для пустого калори-
метра

. Откуда получается выражение для ошибки определения параметра.

Для оценки точности аппроксимации проведем в соответствии с пра-
вилами для погрешности косвенных измерений возьмем:

$$\Delta y \approx \sqrt{(x_0^2 \Delta \lambda_0)^2 + (x_0 \Delta \lambda_1)^2 + (\Delta \lambda_2)^2}$$

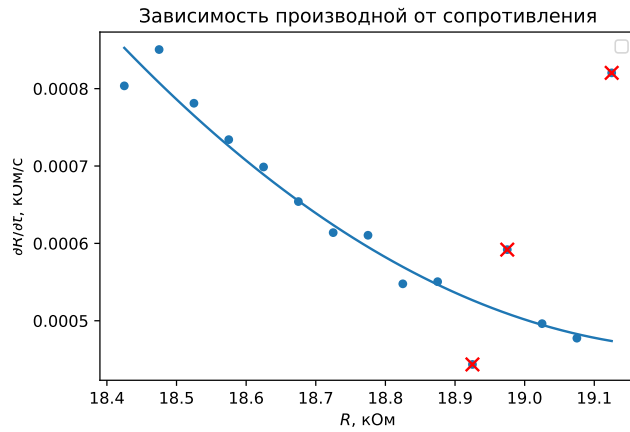
Теперь находим $\left(\frac{dR}{dt}\right)_{T_k}$ относительно x для каждого образца. Откуда
получаем оценки значений для $\left(\frac{dR}{dt}\right)_{T_k}$. Занесем результаты в таблицу 9.

Понятно, что ключевую роль в погрешности определения теплоемко-
сти будет иметь именно экстраполяция данных. Так как результат пред-
ставляет собой произведение независимых величин, погрешность тепло-
емкости можно оценить как сумму квадратов относительных погрешно-
стей. Учитывая то, что погрешность экстраполяции намного превосходит
погрешности остальных величин, можно записать:

$$\varepsilon_C \approx \varepsilon\left(\frac{dR}{dt}\right)_{T_k}.$$

Затем используем формулу 8.

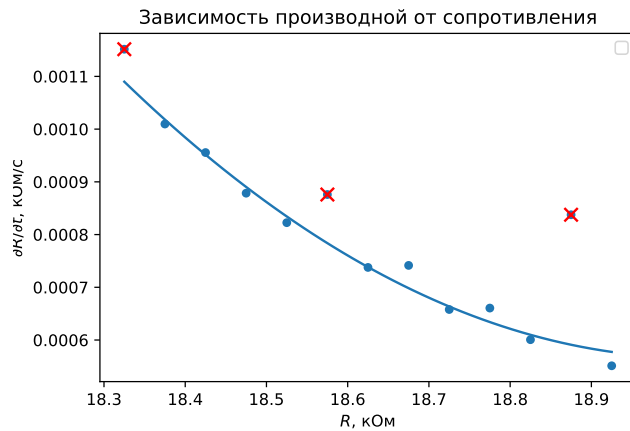
Таблица 7: Производные для
железного образца



$\frac{\partial R}{\partial t}, \frac{\text{ОМ}}{\text{с}}$	$R \text{ ОМ}$
0.000804	18.425
0.000851	18.475
0.000781	18.525
0.000734	18.575
0.000699	18.625
0.000654	18.675
0.000614	18.725
0.000611	18.775
0.000548	18.825
0.000551	18.875
0.000444	18.925
0.000592	18.975
0.000496	19.025
0.000477	19.075
0.000820	19.125

Рис. 5: Производные для железного образца

Таблица 8: Производные для
латунного образца



$\frac{\partial R}{\partial t}, \frac{\text{ОМ}}{\text{с}}$	$R \text{ ОМ}$
0.001152	18.325
0.001010	18.375
0.000956	18.425
0.000879	18.475
0.000823	18.525
0.000876	18.575
0.000738	18.625
0.000742	18.675
0.000658	18.725
0.000661	18.775
0.000601	18.825
0.000838	18.875
0.000551	18.925

Рис. 6: Производные для латунного образца

Система:	$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{T_k}, \frac{\text{кОМ}}{\text{с}}$	$\Delta \left(\frac{dR}{dt}\right)_{T_k}, \frac{\text{кОМ}}{\text{с}}$	$C_1, \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$	$C_1 - C_0, \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$	$c, \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{кг}}$	ε_c
Калориметр	0.00119	$2 \cdot 10^{-5}$	649	-	-	0.04
Железо	0.000807	$3 \cdot 10^{-5}$	983	333	408	0.05
Латунь	0.000890	$3.5 \cdot 10^{-3}$	883	235	270	0.05

Таблица 9: Результаты расчета теплоемкостей

Вывод

Получены довольно интересные результаты.

Основная ошибка в определении теплоемкостей твердых тел связана с разбросом точек и численного расчета производных, и как следствие ошибки экстраполяции данных.

$$c_{\text{железо}} \approx (4.1 \pm 0.2) \cdot 10^2 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{кг}}$$

$$c_{\text{латунь}} \approx (2.70 \pm 0.15) \cdot 10^2 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{кг}}$$

Основная причина полученных результатов - недостаток эксперимента. Легко обнаружить, что именно первый проведенный эксперимент привел к наиболее точным результатам. А значит в последующих экспериментах тело просто не успевало остыть, а система установить равновесие.

Однако метод определения теплоемкостей можно считать достаточно точным. О чем свидетельствуют адекватные значения критерия χ^2 (см. таблицу 3)