

Отчет о выполнении лабораторной работы 2.2.1

Исследование взаимной диффузии газов

Выполнил: Дедков Денис, группа Б01-109

21.03.2022

Цель работы

1) регистрация зависимости концентрации гелия в воздухе от времени с помощью датчиков теплопроводности при разных начальных давлениях смеси газов; 2) определение коэффициента диффузии по результатам измерений.

В работе используются

Измерительная установка; форвакуумный насос; баллон с газом (гелий); манометр; источник питания; магазин сопротивлений; гальванометр; секундомер.

Теоретическое введение

Диффузией называют самопроизвольное взаимное проникновение веществ друг в друга, происходящее вследствие хаотичного теплового движения молекул. При перемешивании молекул разного сорта говорят о взаимной (или концентрационной) диффузии. Диффузия в системе, состоящей из двух компонентов a и b (бинарная смесь), подчиняется закону Фика: плотности потока компонентов $j_{a,b}$ (количество частиц, пересекающих единичную площадку в единицу времени) пропорциональны градиентам их концентраций $\nabla n_{a,b}$, что в одномерном случае можно записать как

$$j_a = -D \frac{\partial n_a}{\partial x}, \quad j_b = -D \frac{\partial n_b}{\partial x}, \quad (1)$$

где D – коэффициент взаимной диффузии компонентов. Знак «минус» отражает тот факт, что диффузия идёт в направлении выравнивания концентраций. Равновесие достигается при равномерном распределении вещества по объёму сосуда ($\frac{\partial n}{\partial x} = 0$).

В данной работе исследуется взаимная диффузия гелия и воздуха. Давление P и температура T в условиях опыта предполагаются неизменными.

Приведём теоретическую оценку для коэффициента диффузии. В работе концентрация гелия, как правило, мала ($n_{He} \ll n_v$). Кроме того, атомы гелия существенно легче молекул, составляющих воздух ($\mu_{He} \ll \mu_{N_2}, \mu_{O_2}$), значит и их средняя тепловая скорость велика по сравнению с остальными частицами. Поэтому перемешивание газов в работе можно приближенно описывать как диффузию примеси лёгких частиц He на практически стационарном фоне воздуха. Коэффициент диффузии в таком приближении равен

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{v}, \quad (2)$$

где $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ – средняя тепловая скорость частиц примеси, $\lambda = \frac{1}{n_0\sigma}$ – их длина свободного пробега, n_0 – концентрация рассеивающих центров (фона), σ – сечение столкновения частиц примеси с частицами фона.

Таким образом, теория предсказывает, что коэффициент диффузии бинарной смеси обратно пропорционален давлению в системе $D \propto \frac{1}{P}$, и не зависит от пропорций компонентов.

Экспериментальная установка

Для исследования взаимной диффузии газов и измерения коэффициента взаимной диффузии D используется два сосуда объёмами V_1 и V_2 ($V_1 \approx V_2 \equiv V$), соединённые трубкой длины L и сечения S (рис. 1). (Параметры установки внесены в таблицу 1) Предполагается, что сосуды заполнены смесью двух газов при одинаковом давлении, но с различной концентрацией компонентов. Вследствие взаимной диффузии, проходящей в соединительной трубке, концентрации компонентов в сосудах с течением времени выравниваются.

$$\frac{d(\Delta n)}{dt} = -\frac{\Delta n}{\tau}, \quad (3)$$

где введено обозначение

$$\tau = \frac{1}{D} \frac{VL}{2S}. \quad (4)$$

Интегрируя (6), получаем, что разность концентраций будет убывать по экспоненциальному закону

$$\Delta n = \Delta n_0 e^{-t/\tau}, \quad (5)$$

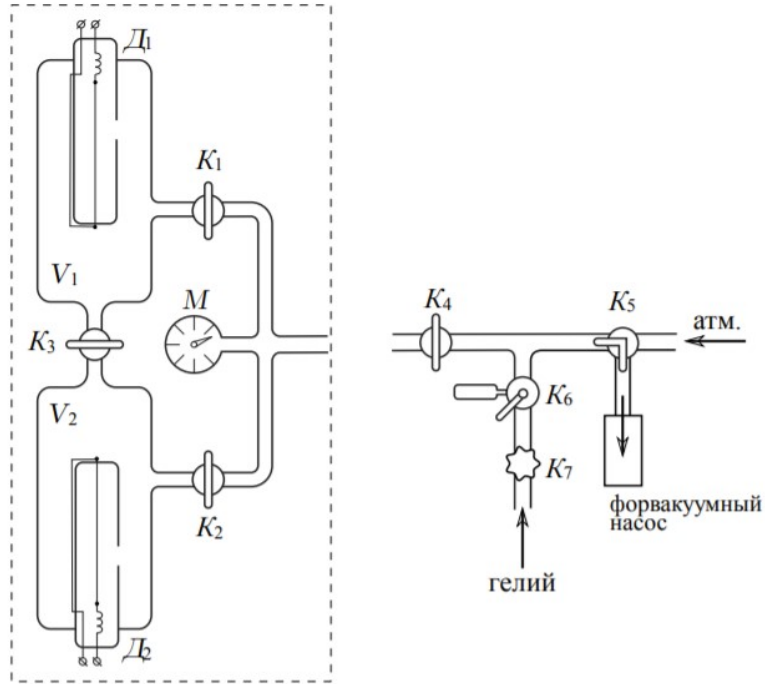


Рис. 1: Схема установки

где Δn_0 — разность концентраций примеси в сосудах в начальный момент времени. Видно, что величина τ есть характерное время выравнивания концентраций между сосудами. Оно определяется геометрическими размерами установки и коэффициентом диффузии.

Для измерения сопротивлений используется мостовая схема, позволяющая определять разность показаний датчиков с высокой точностью. Мост балансируется при заполнении сосудов (и датчиков) одной и той же смесью. При заполнении сосудов смесями различного состава возникает «разбаланс» моста. При незначительном различии в составах смесей показания вольтметра, подсоединённого к диагонали моста, будут пропорциональны разности концентраций примеси: $U \propto \Delta \kappa \propto \Delta n$. В процессе диффузии разность концентраций убывает по закону (8), и значит по тому же закону изменяется напряжение:

$$U = U_0 e^{-t/\tau}, \quad (6)$$

где U_0 — показание гальванометра в начальный момент времени. Изменяя экспериментально зависимость $U(t)$, можно получить характерное время процесса τ , откуда по формуле (8) определить коэффициент диффузии D .

Параметр установки	Значение
V	$(420 \pm 10) \text{ см}^3$
L/S	$(9.0 \pm 1.0) \text{ см}^{-1}$
$P_{\text{гел.}}$	$0.2P_{\text{раб}}$
$P_{\text{возд.}}$	$1.7P_{\text{раб}}$

Таблица 1: Параметры установки

Ход работы

Для смеси гелий-воздух исследуем зависимость коэффициента взаимной диффузии от начального давления в системе. Для этого будем фиксировать с помощью компьютера в лаборатории зависимость показаний вольтметра от времени, прошедшего с начала эксперимента. Полученные результаты наглядно представлены в виде графиков зависимости $U(t)$ на рисунке 2.

Для нахождения коэффициентов взаимной диффузии линеаризируем зависимость $U(t)$. Для наглядной оценки качества линеаризации приведены графики зависимостей $\ln U(t)$ на рисунке 3. Статистическая обработка была проведена **методом наименьших квадратов**. Обосновать выбор метода это можно тем, что погрешность отдельного измерения относительно мала, а количество точек, снятых с помощью компьютера велико (≈ 400 точек на серию). Вся статистическая обработка занесена в таблицу 2.

Расчет коэффициентов взаимной диффузии проведем с помощью следующих формул:

$$D = a \frac{VL}{2S},$$

$$\sigma_D = D \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_V^2 + \varepsilon_{L/S}^2},$$

где $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{x}$ - соответствующие относительные погрешности случайных величин, a - коэффициент наклона линейной зависимости.

$P_{\text{раб}}, \text{ торр}$	a	σ_a	b	σ_b	$D \pm \sigma_D, \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$
44.5	-0.003855	$5 \cdot 10^{-6}$	3.15	0.05	7.29 ± 0.19
81.7	-0.002427	$1.0 \cdot 10^{-6}$	3.03	0.03	4.59 ± 0.12
133.7	-0.0015507	$8 \cdot 10^{-7}$	3.03	0.07	2.93 ± 0.08
170.9	-0.001244	$1.3 \cdot 10^{-6}$	3.00	0.14	2.35 ± 0.06
208.2	-0.001017	$5 \cdot 10^{-6}$	2.95	0.10	1.92 ± 0.05

Таблица 2: Статистическая обработка зависимости $\ln U(t)$

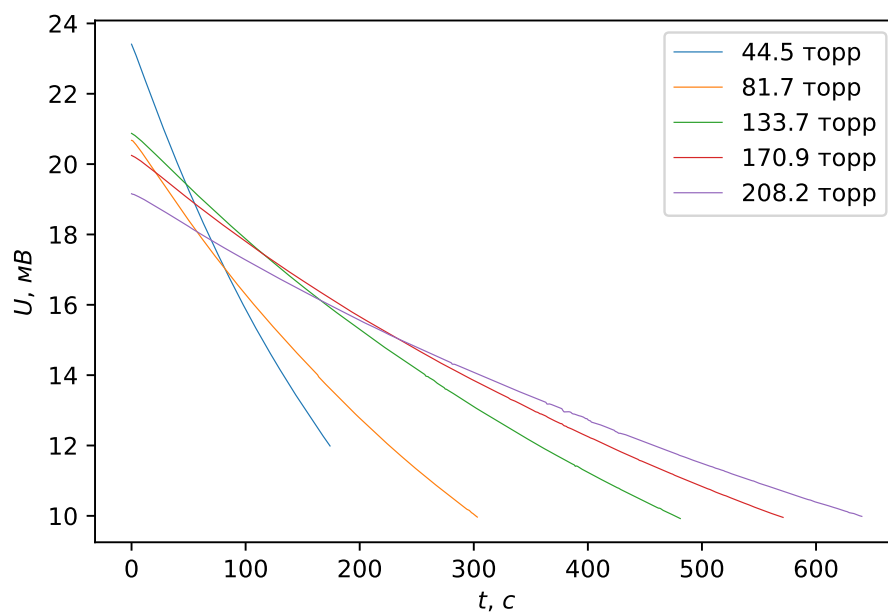


Рис. 2: Зависимость $U(t)$

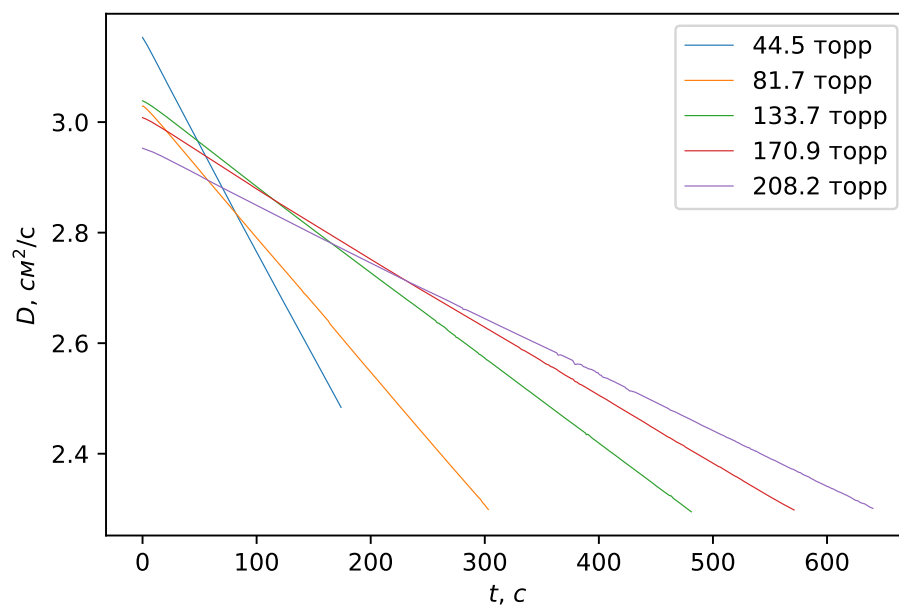


Рис. 3: График зависимости $\ln U(t)$

Для нахождения $D_{\text{атм}}$, следует экстраполировать зависимость $D(\frac{1}{P})$ к точке $\frac{1}{P_{\text{атм}}}$. Для этого построим график $D(\frac{1}{P})$ (см. рис. 4), чтобы убедиться в целесообразности экстраполяции. Затем с помощью метода наименьших квадратов проведем расчет коэффициентов линейной зависимости. Статистическую обработку занесем в таблицу 3.

Погрешность $D_{\text{атм}}$ оценим с помощью закона накопления ошибок:

$$\sigma_{D_{\text{атм}}} = \sqrt{\sigma_b^2 + \left(\frac{1}{P_{\text{атм}}} \sigma_a\right)^2}$$

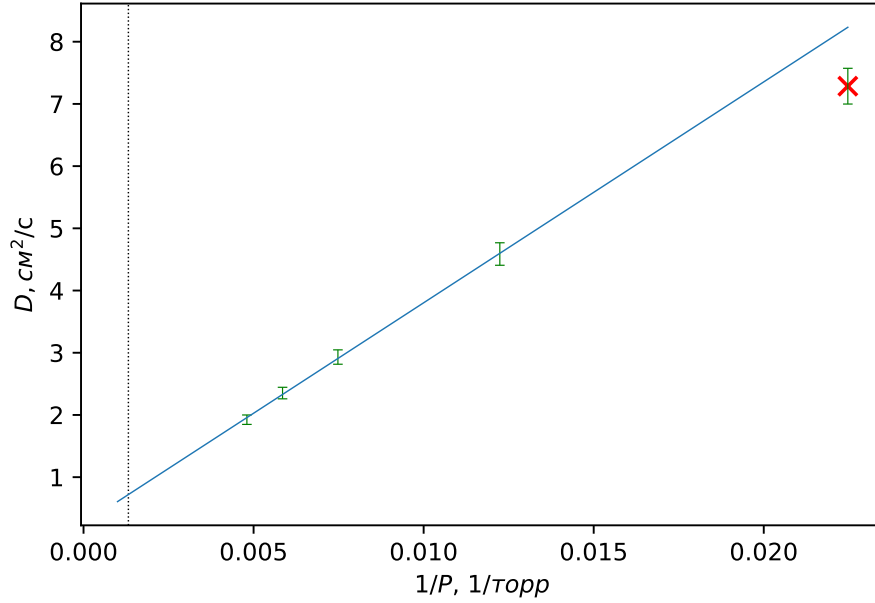


Рис. 4: График зависимости $D(\frac{1}{P})$

Зависимость	a	σ_a	b	σ_b	$\frac{1}{P_{\text{атм}}}, \text{торр}^{-1}$	$D_{\text{атм}} \pm \sigma_D, \frac{\text{cm}^2}{\text{с}}$
$D = a\frac{1}{P} + b$	355	12	0.2519	0.0007	0.001318	0.72 ± 0.02

Таблица 3: Статистическая обработка зависимости $D(\frac{1}{P})$

Найдем длину свободного пробега с помощью формулы 2:

$$\lambda_{\text{атм}} = 3D_{\text{атм}} \sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}} = (172 \pm 4) \text{ нм}$$

$$\sigma_{\lambda_{\text{атм}}} = \lambda_{\text{атм}} \varepsilon_{D_{\text{атм}}}$$

Аналогично для $\sigma_{\text{He-возд.}}$ получаем:

$$\sigma_{\text{He-возд.}} = \frac{1}{n_0\lambda} = \frac{kT}{P_{\text{атм}}\lambda_{\text{атм}}} \approx (3.15 \pm 0.07) \cdot 10^{-19} \text{ м}^2$$

$$\sigma_{\sigma_{\text{He-возд.}}} = \sigma_{\sigma_{\text{He-возд.}}} \varepsilon_{\lambda_{\text{атм}}}$$

Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов в случае обработки линейной зависимости имеет следующий вид:

$$y = ax + b,$$

где

$$a = \frac{r_{xy}}{\sigma_x^2},$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

Для оценки погрешностей (стандартного отклонения) используем следующие формулы:

$$\sigma_a = t_{n-1,p} \sqrt{\frac{1}{n-2} \left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} - A^2 \right)},$$

$$\sigma_b = \sigma_a \sqrt{\sigma_x^2 + \bar{x}^2},$$

где n - количество измерений, $t_{n-1,p}$ - коэффициент Стьюдента

Вывод

При обработке эксперимента получены вполне достоверные результаты. Стоит отметить, что основную погрешность в определении величин внесла систематическая ошибка параметров установки, а также систематическая погрешность, которая тяжело поддается какой-либо оценке. Это следует из того, что относительные погрешности коэффициентов взаимной диффузии D практически не зависят от случайной ошибки определения параметров линейной зависимости $\ln U(t)$, в чем можно убедиться, глядя на таблицу 2. Получено значение коэффициента взаимной диффузии при атмосферном давлении:

$$D_{\text{атм}} = (0.72 \pm 0.02) \frac{\text{см}^2}{\text{с}}, \left(D_{\text{таб.}} = 0.62 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}, \text{ при } t = 0^\circ\text{C} \right).$$

Также определена длина свободного пробега атомов He и эффективная площадь сечения:

$$\lambda_{\text{атм}} = (172 \pm 4) \text{ нм}$$

$$\sigma_{\text{He-возд.}} = (3.15 \pm 0.07) \cdot 10^{-19} \text{ м}^2$$