Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет *«Фундаментальные науки»*

Кафедра *«Математическое моделирование»*

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №4

Циклы

по дисциплине

«Качественная теория ОДУ»

Вариант №4

Студент группы ФН12-71 ____________________ *Д.Д. Девяткин*

(подпись, дата)

Руководитель ____________________ *А.Н. Канатников*

(подпись, дата)

Москва — 2020

Содержание

Постановка задачи

Для заданной системы 2-го порядка:
а) проанализировать фазовый портрет и выделить область существования цикла;
б) задав трансверсальную кривую, найти точку на цикле и построить цикл численно;
в) определить период у цикла;
г) вычислить мультипликаторы цикла.

1. Исходные данные

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 + \dfrac{17}{9}xy - \dfrac{9}{10}y^2 + \dfrac{40}{9}x - \dfrac{19}{3}y + \dfrac{8}{15}; \\ \dot{y} = -x^2 + \dfrac{7}{4}xy - y^2 + 4x - \dfrac{9}{2}y + \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

2. Реализация

2.1. Область цикла

Для понимания существует ли вообще цикл в системе, необходимо построить отображение Пуанкаре. Эта кривая должна пересекать ось x. Для его построение производится интегрирование системы в точке, до того момента, пока разность после интегрирования между начальной точкой кривой и конечной не будет меньше некоторого ε. Идем по лучу, который направлен в $+\infty$, идём с шагом h — это координата x в начальных условиях интегрирования. В качестве начальных условий коордиты y берем координату y положения равновесия. Координаты отображения Пуанкаре — это 2 массива: X, Y. Массив X представляет собой точки на луче, массив Y — это разность последней и первой координаты кривой после i-го интегрирования. На рис. 1 представлен фазовый портрет системы. По этому портрету видно, что цикл находится в области $[-5,\ 5][4\ 3]$.

2.2. Численное построение цикла

Для численного постреня цикла используем похожий подход. Начинаем идти по лучу оси x с шагом h и брать эту точку в качестве начальной координаты x, начальная координата y — координата y положение равновесия. Продолжаем интегрирование до тех пор пока разность между начальной и конечной точкой кривой не будет меньше ε. Интегрирование производит по следющей схеме: интугрирование идет до тех пор, пока не будет пройдено 2π, то есть пока не будет перехода из 4 четверти в 1-ую. Для этого задаем настройки интегрирования с помощью *opts* и функции *stopInt*, где указываем параметр **isterminal** равной 1. Это значит, что будем станавливать расчёт при условии, если пересекаем ось x снизу вверх. Также вводим парметр δ для того чтобы не было остановки интегрирования на 1-2 шаге, в случае близости к положению равновесия.

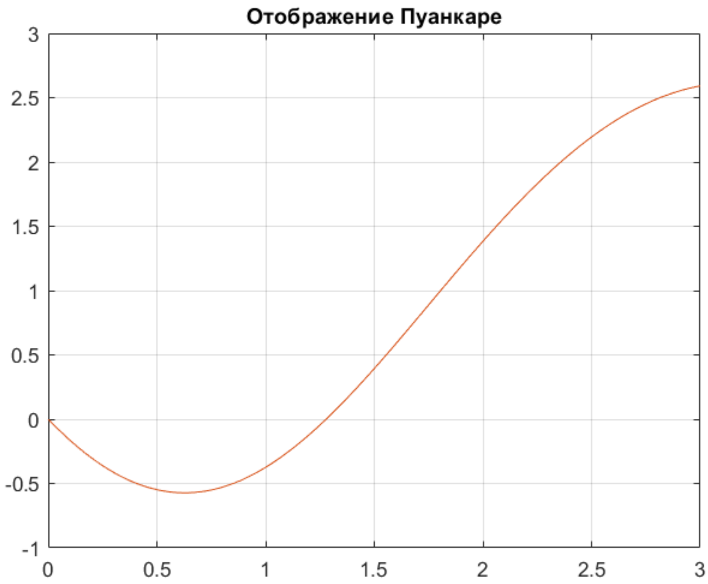

Рис. 1. Отображение Пуанкаре.

2.3. Период

При интегрировании с помощью функции $ode45$ получаем массив координат и массив t точек времени за один оборот. Для получения периода из последнего значения массива t вычитаем первое. Период равен 3.3383.

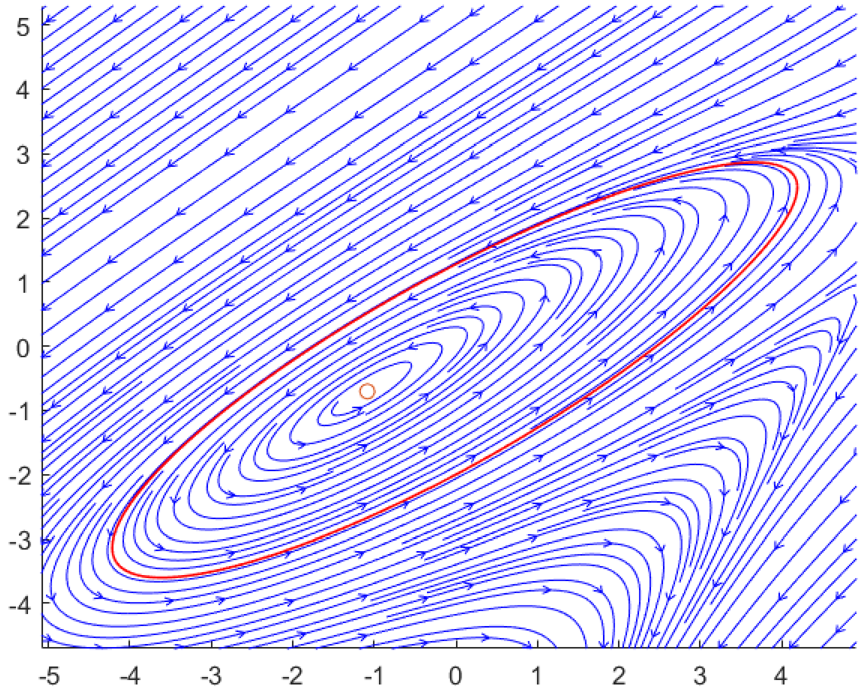

Рис. 2. Фазовый портрет системы и цикл.

2.4. Мультипликаторы цикла

Матрицу $C = e^{RT}$ для нормаированной матрицы $\Phi_0(t)$ называют **матрице монодромии**, где $\Phi_0(t)$ фундаментальная матрица : $\Phi_0(0) = 0$. $\Phi_0(T) = Z_0(T)e^{RT} = e^{RT}$, где $Z(t)$ — Т-периодическая невырожденная матрица, R — постоянная матрица. Матрица монодромии представляем собой нормаированную матрицу, вычисленную через период: $C = \Phi_0(T)$. Собственные числа матрицы R называются **характеристическими показателями** а собственные числа матрицы монодромии **характеристическими множителями** или **мультипликаторами**. При поиске мультипликаторов в качестве начальной матрицы берем единичную. Считаем полусумму матриц линейного приближения в моменты времени t_{i+1} и t_i, обозначим эту матрицу A, дальше вовзодим матричную экспоненту в степень $A(t_{i+1} - t_i)$. Проходим по всему массиву времени, который был найден при интегрировании. В итоге получаем матрицу, находим её собственные числа — это и есть мальтипликаторы. В нашем случае это 0.2528 и 0.9999.