Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

Факультет *«Фундаментальные науки»*

Кафедра *«Математическое моделирование»*

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №2

Нелинейные системы

по дисциплине

«Качественная теория ОДУ»

Вариант №4

Студент группы ФН12-71 ____________________ *Д.Д. Девяткин*
(подпись, дата)

Руководитель ____________________ *А.Н. Канатников*
(подпись, дата)

Москва — 2020

Содержание

Постановка задачи

Для заданной системы второго порядка выполнить следующий задания:
а) найти все положения равновесия;
б) исследовать на устойчивость, для гиперболических точек указать тип;
в) для седловых точек найти (численно) устойчивое и неустойчивое многообразия;
г) нарисовать фазовый портрет системы в окрестности положений равновесия.

1. Исходные данные

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 3y + xy + y^2; \\ \dot{y} = x + y^2. \end{cases} \tag{1}$$

2. Реализация

2.1. Положения равновесия системы

Для поиска точек покоя необходимо приравнять к 0 правые части каждого из дифференциальных уравнений системы (1) и произвести решение следующей системы

$$\begin{cases} 3x + 3y + xy + y^2 = 0; \\ x + y^2 = 0. \end{cases}$$

Используя функцию MATLAB *solve*, получаем следующее решение системы

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1; \\ y = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -9; \\ y = -3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Данная система имеет 3 точки покоя : $P_1(-9, -3)$, $P_2(-1, 1)$ и $P_3(0, 0)$.

2.2. Тип точки покоя и устойчивость

Для двумерных систем, в зависимости от их собственных значений, можно выделить несколько типов точек покоя:

- Два действительных собственных значения. **Узел**. [Случай совпадающих корней: жорданов узел (одна жорданова клетка) и дикритический узел (две жордановы клетки)].
- Два комплексных корня с ненулевой действительной частью. **Фокус**.
- Два действительных собственных значения разных знаков. **Седло**.

- Два комплексно-сопряженных чисто мнимых корня. **Центр**.
- Вырожденный случай: нулевое собственное значение.

Говорят, что положение равновесия **гиперболическое**, если в нем линейное приближение не имеет собственных значений на мнимой оси. Согласно ляпуновской теории устойчивости, гиперболическое положение равновесия асимитотически устойчиво тогда и только тогда, когда все собственные числа линейного приближения находятся в левой полуплоскости.

Для исследования типа точек покоя рассмотрим систему первого приближения, чтобы описть конфигурации вблизи положения равновесия (ПР). Для этого находим Якобиан системы и рассматриваем её в каждой точки покоя. Матрица Якоби имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} y+3 & x+2y+3 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$$

Получаем следующее:

- Точка P_1
  Собственные значения: $\lambda_1 = -3+\sqrt{3}i, \;\; \lambda_2 = -3-\sqrt{3}i$. ПР является устойчивым. Так же оно гиперболическое. Поскольку $Re\lambda_1 \neq 0, Re\lambda_2 \neq 0$, то точка является фокусом.

- Точка P_2
  Собственные значения: $\lambda_1 = 3+\sqrt{5}, \;\; \lambda_2 = 3-\sqrt{5}$. ПР неустойчиво, так как хотя бы одно собственное значение имеет положительный знак. Тип точки покоя узел. ПР гиперболическое.

- Точка P_3
  Собственные значения: $\lambda_1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{21}}{2}, \;\; \lambda_2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{21}}{2}$. ПР неустойчиво и тип точки покоя — седло. ПР гиперболическое.

2.3. Устойчивое и неустойчивое многообразия

Численно был произведен поиск устойчивого и неустойчивого многообразий для седловой точки P_3. Собственные значения, соответствующие этой точке — $\lambda_1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{21}}{2}, \;\; \lambda_2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{21}}{2}$. Значению λ_1 соответствует вектор $v_1 = (\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{21}}{2}, \; 1)^T$, значению λ_2 вектор $v_2 = (\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{21}}{2}, \; 1)^T$. Собственное значение λ_1 соответствует тому, что многообразие будет устойчиво, а λ_2, что неустойчиво. Поскольку система двумерна, то есть всего 2 собственных значения и 2 собственных вектора. Это значит, что многообразиями будут кривые. Для поиска многообразий была произведена нормировка собственного вектора и отступ на ε в оба направления вектора от точки P_3, путем умножения номированного вектора на, заранее заданные, ε и -ε. Так мы получаем начальную точку интегрирования. Аналогично для второго вектора. Дальше выбираем интервал интегрирования: для отрицательных собственных значений интегрируем в прямом направлении, а для положительных в обратном. Далее для каждого из 4-х случаев произведено численное решение нелинейной системы с помощью функции $ode45$. Это и есть вычисление многообразий. Параметр «время интегрирования» был подобран для каждого направления индивидуально. (чтобы траектория была отрисована на весь фазовый график)

2.4. Фазовый портрет в окрестности положения равновесия

Для каждого положения равновесия была найдена система первого приближения. В близи неё будет строиться фазовый портрет. Фазовый портрет был построен с помощью функции *streamslice*. Для этого была задана двумерная сетка так, чтобы положение равновесия было в центре. Далее были посчитаны значения двух массивов в точках сетки путем подставления значений сетки в правые части уравнения системы, т.е. значения векторного поля. Ниже представлены фазовые портреты трёх точек.

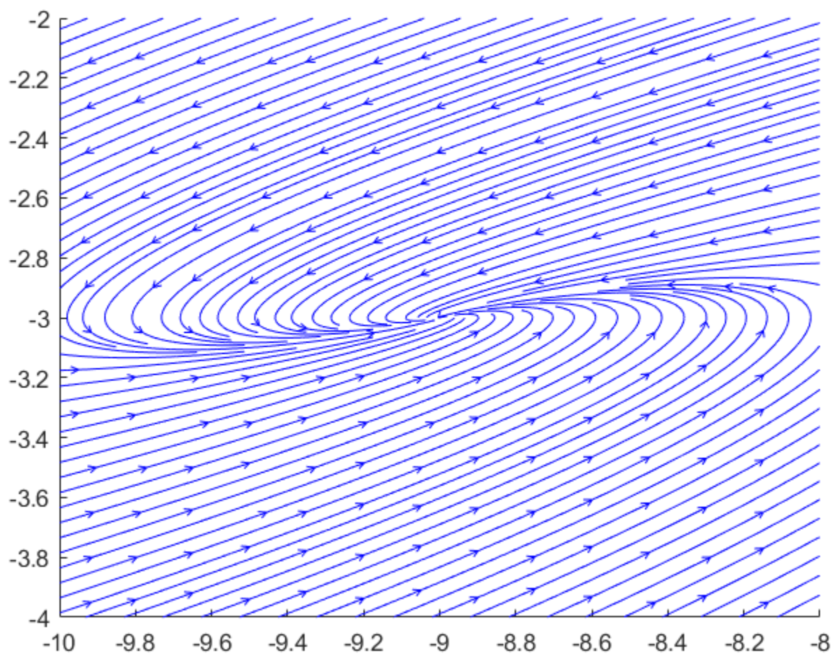

Рис. 1. Фазовый портрет точки P_1. Фокус.

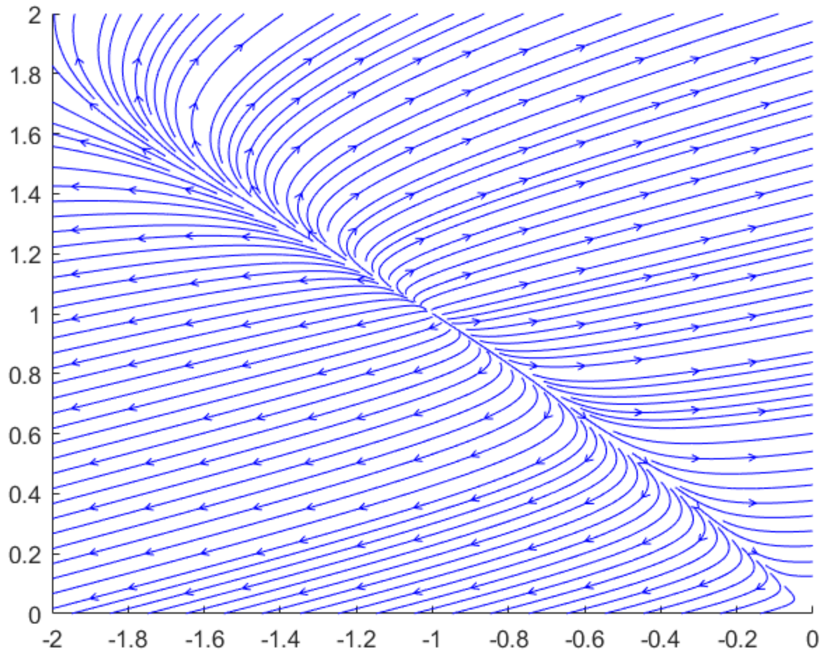

Рис. 2. Фазовый портрет точки P_2. Узел.

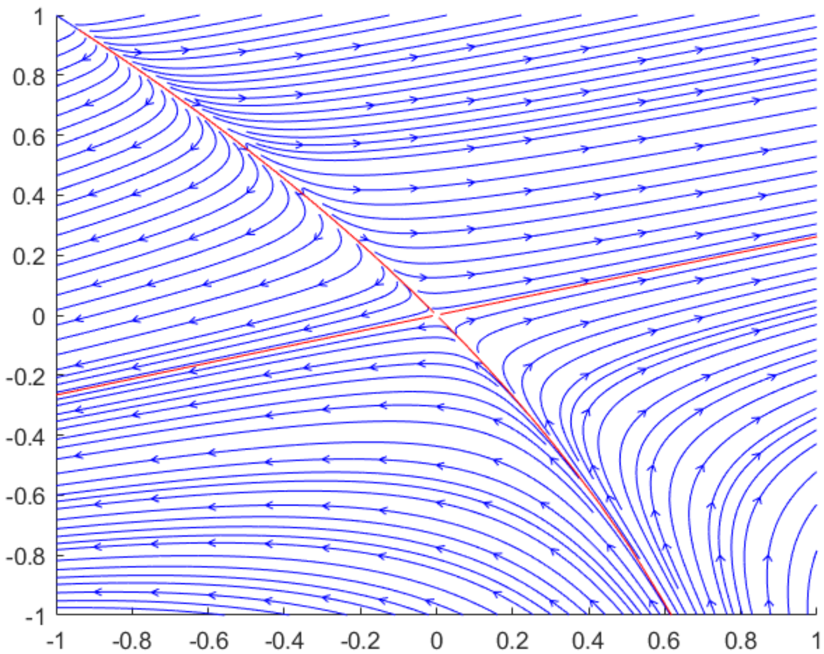

Рис. 3. Фазовый портрет точки P_3. Седло.