



Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана (национальный
исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Математическое моделирование»

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №2

Нелинейные системы

по дисциплине
«Качественная теория ОДУ»

Вариант №4

Студент группы ФН12-71

_____ *Д.Д. Девяткин*
(подпись, дата)

Руководитель

_____ *А.Н. Канатников*
(подпись, дата)

Содержание

Постановка задачи	3
1. Исходные данные	3
2. Реализация	3
2.1. Положения равновесия системы	3
2.2. Тип точки покоя и устойчивость	3
2.3. Устойчивое и неустойчивое многообразие	4
2.4. Фазовый портрет в окрестности положения равновесия	4

Постановка задачи

Для заданной системы второго порядка выполнить следующий задания:

- а) найти все положения равновесия;
- б) исследовать на устойчивость, для гиперболических точек указать тип;
- в) для седловых точек найти (численно) устойчивое и неустойчивое многообразия;
- г) нарисовать фазовый портрет системы в окрестности положений равновесия.

1. Исходные данные

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 3y + xy + y^2; \\ \dot{y} = x + y^2. \end{cases} \quad (1)$$

2. Реализация

2.1. Положения равновесия системы

Для поиска точек покоя необходимо приравнять к 0 правые части каждого из дифференциальных уравнений системы (1) и произвести решение следующей системы

$$\begin{cases} 3x + 3y + xy + y^2 = 0; \\ x + y^2 = 0. \end{cases}$$

Используя функцию MATLAB *solve* получаем следующее решение системы

$$\begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \\ x = -1; \\ y = 1; \\ x = -9; \\ y = -3. \end{cases}$$

Данная система имеет 3 точки покоя : $P_1(-9, -3)$, $P_2(-1, 1)$ и $P_3(0, 0)$.

2.2. Тип точки покоя и устойчивость

Для двумерных систем, в зависимости от их собственных значений, можно выделить несколько типов точек покоя:

- Два действительных собственных значения. **Узел**. [Случай совпадающих корней: жорданов узел (одна жорданова клетка) и дикритический узел (две жордановы клетки)].
- Два комплексных корня с ненулевой действительной частью. **Фокус**.
- Два действительных собственных значения разных знаков. **Седло**.

- Два комплексно-сопряженных чисто мнимых корня. **Центр**.
- Вырожденный случай: нулевое собственное значение.

Говорят, что положение равновесия **гиперболическое**, если в нем линейное приближение не имеет собственных значений на мнимой оси. Согласно ляпуновской теории устойчивости, гиперболическое положение равновесия асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все собственные числа линейного приближения находятся в левой полуплоскости.

Для исследования типа точек покоя рассмотрим систему первого приближения, чтобы описать конфигурации вблизи положения равновесия (ПР). Для этого находим Якобиан системы и рассматриваем её в каждой точке покоя. Матрица Якоби имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} y + 3 & x + 2y + 3 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$$

Получаем следующее:

- Точка P_1
Собственные значения: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -3$. ПР является гиперболическим. Поскольку $Re\lambda_1, Re\lambda_2 \in \mathbb{R}^-$, то точка обладает свойством асимптотической устойчивости и является жордановым узлом.
- Точка P_2
Собственные значения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. ПР неустойчиво, так как хотя бы одно собственное значение имеет положительный знак. Тип точки покоя — узел.
- Точка P_3
Собственные значения: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$. ПР неустойчиво и тип точки покоя — седло.

2.3. Устойчивое и неустойчивое многообразие

2.4. Фазовый портрет в окрестности положения равновесия

На рис. 1 и рис. 2 представлен фазовый портрет системы, точка покоя с координатами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и плоскость с прямой, которые обозначают устойчивое и неустойчивое подпространства соответственно. Плоскость была построена по двум собственным векторам, которые соответствуют отрицательным собственным значениям. Прямая построена по собственному вектору, который соответствует положительному собственному значению.