



Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана (национальный  
исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

---

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Математическое моделирование»

**ОТЧЕТ**  
*по лабораторной работе №1*

**Положения равновесия линейных систем**

по дисциплине

«Качественная теория ОДУ»

**Вариант №4**

Студент группы ФН12-71

\_\_\_\_\_ *Д.Д. Дквяткин*  
(подпись, дата)

Руководитель

\_\_\_\_\_ *А.Н. Канатников*  
(подпись, дата)

## Содержание

Постановка задачи . . . . .	3
1. Исходные данные . . . . .	3
2. Реализация . . . . .	3
2.1. Общее решение . . . . .	3
2.2. Тип точки покоя и устойчивость . . . . .	3
2.3. Подпространства . . . . .	4
2.4. Фазовый портрет . . . . .	4

## Постановка задачи

Для заданной системы  $\dot{x} = Ax$  третьего порядка выполнить следующие задания:

- найти общее решение системы;
- определить тип точки покоя и исследовать её на устойчивость;
- найти устойчивое, неустойчивое и центральное (если есть) подпространства;
- нарисовать фазовый портрет динамической системы, изобразив ход типичных фазовых траекторий, точку покоя, устойчивое, неустойчивое и центральное подпространства.

### 1. Исходные данные

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 9 & -4 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

## 2. Реализация

### 2.1. Общее решение

Общее решение линейной однородной ( $b = 0$ ) системы  $\dot{x} = Ax$  можно найти с помощью составления характеристического уравнения и поиска собственных значений и собственных векторов. Совокупности корней характеристического уравнения соответствуют ЛНЗ решения системы ОДУ. Также решение можно найти через матричную экспоненту. Структура общего решения системы:  $x(t) = R(t)x_0$ , где  $R(t) = e^{At}$  — резольвентная матрица. В лабораторной работе общее решение было найдено с помощью функции *dsolve* в программе MATLAB. Общее решение системы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 0 \\ e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

### 2.2. Тип точки покоя и устойчивость

Для трехмерной системы в зависимости от их собственных значений можно выделить следующие типы точек покоя:

- 1) Устойчивый (неустойчивый) узел. 3 действительных корня одного знака или 1 действительный и 2 комплексно-сопряженных корня с тем же знаком действительной части и с ведущим подпространством, соответствующим действительному корню
- 2) Устойчивый (неустойчивый) фокус. один действительный корень и два комплексно-сопряженных корня с действительной частью того же знака и ведущим подпространством, соответствующим паре комплексно-сопряженных корней.
- 3) Седло-фокус. Один действительный корень, являющийся отрицательным (положительным) и два комплексных корня с положительной (отрицательной) действительной частью). Устойчивое (неустойчивое) подпространство одномерно и соответствует действительному корню, неустойчивое (устойчивое) подпространство двумерно и соответствует паре комплексных корней.

4) Седло. Три действительных характеристических корня. Размерность устойчивого подпространства соответствует количеству отрицательных корней.

В нашем случае три собственных значения:  $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2$ , которые соответствуют типу седло. Оно является неустойчивым.

### 2.3. Подпространства

Имеется однородная трехмерная система  $\dot{x} = Ax$ . Матрицу можно интерпретировать как матрицу линейного оператора. Для любого линейного оператора, действующего в конечномерном линейном пространстве, всё линейное пространство разлагается в прямую сумму корневых подпространств. Каждое корневое подпространство соответствует собственному значению оператора  $A$  и имеет размерность, равную алгебраической кратности этого собственного значения. Для комплексных корней подпространство будет иметь размерность равную суммарной кратности соответствующей пары комплексно-сопряженных характеристических корней. Характеристические корни можно разделить на 3 группы: первая объединяет корни в левой полуплоскости, вторая — корни на мнимой оси, третья в правой полуплоскости. Прямая сумма корневых подпространств, соответствующих характеристическим корням первой группы называется устойчивым подпространством, третьей группы неустойчивым пространством.

В нашем случае имеется два отрицательных собственных значения, которые соответствуют следующим собственным векторам:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, устойчивое пространство будет является линейной оболочкой векторов  $v_1, v_2$ , т.е.  $S = \text{Span}\{v_1, v_2\}$ . Неустойчивое подпространство будет одномерным  $S_n = \text{Span}\{v_3\}$ .

### 2.4. Фазовый портрет