Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет *«Фундаментальные науки»*

Кафедра *«Математическое моделирование»*

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №1

Положения равновесия линейных систем

по дисциплине

«Качественная теория ОДУ»

Вариант №4

Студент группы ФН12-71 ____________________ *Д.Д. Девяткин*
(подпись, дата)

Руководитель ____________________ *А.Н. Канатников*
(подпись, дата)

Москва — 2020

Содержание

Постановка задачи

Для заданной системы $\dot{x} = Ax$ третьего порядка выполнить следующие задания:
а) найти общее решение системы;
б) определить тип точки покоя и исследовать её на устойчивость;
в) найти устойчивое, неусточивое и центральное (если есть) подпространства;
г) нарисовать фазовый портрет динамической системы, изобразив ход типичных фазовых траекторий, точку покоя, устойчивое, неусточивое и центральное подпространства.

1. Исходные данные

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 9 & -4 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Реализация

2.1. Общее решение

Общее решение линейной однородной ($b = 0$) системы $\dot{x} = Ax$ можно найти с помощью составления характеристического уравнение и поиска собсвенных значений и собственных векторов. Совокупности корней характеристического решения сопуствует ЛНЗ решения системы ОДУ. Также решение можно найти через матричную экспоненту. Структура общего решения системы: $x(t) = R(t)x_0$, где $R(t) = e^{At}$ — резольвентная матрица. В лабраторной работе общее решение было найдено с помощью функции *dsolve* в программе MATLAB. Общее решение системы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \cdot e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Тип точки покоя и устойчивость

Для трехмерный систем в зависимости от их собственных значений можно выделить следующие типы точек покоя:
1) Устойчивый (неустойчивый) узел. 3 действительных корня одного знака или 1 действительный и 2 комплексно-сопряженных корня с тем же знаком действительной части и с ведущим подпространством, соответствующим действительному корню
2) Устойчивый (неустойчивый) фокус. один действительный корень и два комплексно-сопряженных корня с действительной частью того же знака и ведущим подпространством, соответствующим паре комплексно-сопряженных корней.
3)Седло-фокус. Один действительны корень, являющийся отрицательныйтельным (положительным и два комплексных корня с положительной (отрицательной) действительной частью). Устойчивое (неустойчивое) подпространство одномерно и соответствует действительному корню, неустойчивое (устойчивое) подпространство двумерно и соответствует паре комплексных корней.

4) Седло. Три действительных характеристических корня. Размерность устойчивого подпространства соответствует количеству отрицательных корней.

В нашем случае три собственныз значения: $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2$, которые соответствуют типу седло.Оно является неустойчивым.

2.3. Подпространства

Имеется однородная трехмерная система $\dot{x} = Ax$. Матрицу можно интерпретировать как матрицу линейного оператора. Для любого линейного оператора, действующего в конечномерном линейном пространстве, всё линейное пространство разделяется в прямую сумму корневых подпространств. Каждое корневое подпространство соответствует собственному значению оператора A и имеет размерность, равную алгебраической кратности этого собственного значения. Для комплексных корней подпространство будет иметь размерность равную суммарной кратности соответствующей пары комплексно-сопряженных характеристических корней. Характеристические корни можно разделить на 3 группы: первая объединяет корни в левой полуплоскости, вторая — корни на мнимой оси, третья в правой полуплоскости. Прямая сумма корневых подпространств, соответствующих характеристическим корням первой группы называется устойчивым подпространством, третьей группы неустойчивым пространством.

В нашем случает имеется два отрицательных собственных значения и одно положительное, которые соответствую следдующим собственных векторам (векторы расположены в том же порядке, что и собственные значения в предыдущем пункте):

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

По скольку $\lambda_1,\ \lambda_2 < 0$, а они соответствуют v_1, v_2 соответсвенно, то устойчивое пространство будет является линейной оболочкой векторов v_1, v_2, т.е. $S = Span\{v_1, v_2\}$. Неустойчивое подпространство будет одномерным $S_n = Span\{v_3\}$.

2.4. Фазовый портрет

На рис. 1 и рис. 2 представлен фазовый портрет системы, точка покоя с координатами $x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0$ и плоскоть с прямой, которые обозначают устойчивое и неустойчивое подпространства соответственно. Интегрирование производилось с помощью функции $ode45$ в обратном направлении в интервале времени от 0 до 0.7. Спартовые точки были расположены на окружности радиуса 10 на высоте 100. По окружности проходили с шагом $phi = 1/2\pi N$. Плоскость была построена по двум собственным векторам, которые соответствуют отрицательным собсвенным значениям с помощью функции $surf$. Прямая построена по собственному вектору, который соответсвует положительному собственному значению.

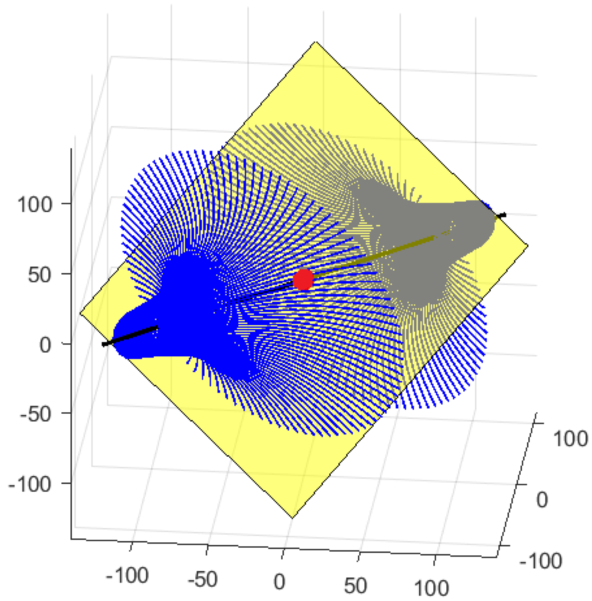

Рис. 1. Фазовый портрет, точка покоя и подпространства

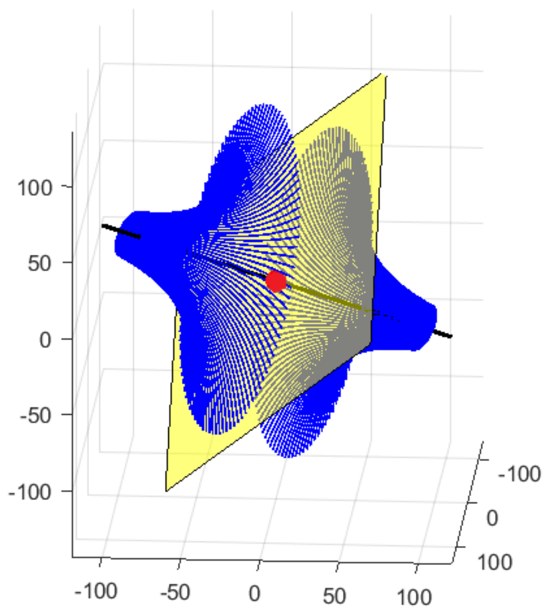

Рис. 2. Фазовый портрет, точка покоя и подпространства