Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

Факультет *«Фундаментальные науки»*

Кафедра *«Математическое моделирование»*

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №3

Вырожденные системы

по дисциплине
«Качественная теория ОДУ»

Вариант №4

Студент группы ФН12-71 ______________ *Д.Д. Девяткин*
(подпись, дата)

Руководитель ______________ *А.Н. Канатников*
(подпись, дата)

Москва — 2020

Содержание

Постановка задачи

Для заданной системы 2-го порядка, имеющей нулевое положение равновесия:
а) найти линейное приближение в нуле и записать характеристические числа;
б) построить нормальную форму 2-го порядка;
в) построить фазовый портрет системы в окрестности нулевого положения равновесия.

1. Исходные данные

$$\begin{cases} \dot{x} = (1+x)(1-y) - cos(x-y); \\ \dot{y} = e^{x-y} - cos(x+y). \end{cases} \tag{1}$$

2. Реализация

2.1. Линейное приближение

Поскольку по условию дано положение равновесия — (0, 0), то подробно описывать их поиск не будем. Скажем лишь то, что для их поиска надо приравнять правые части системы (1) к нулю и найти её решения. По итогу имеем 1 точку покоя: $P_1(0,\,0)$.

Для записи линейного приближения в нуле находим матрицу Якоби системы и рассматриваем её в точке P_1. Якобиан находим с помощью MATLAB-функции *jacobian*. Матрица Якоби имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} sin(x-y) - y + 1 & -x - sin(x-y) - 1 \\ e^{(x-y)} + sin(x+y) & sin(x+y) - e^{(x-y)} \end{pmatrix}$$

Первое приближение в нуле имеет следующий вид

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y; \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

С помощью функции *eig* находим собственные числа. Получаются следующие собственные значения: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Поскольку имеем хотя бы одно нулевое собсвенное значени, то точка не является гиперболической и по линейному приближению нельзя сделать никаких оценок о поведении системы вблизи положения равновесия.

2.2. Нормальная форма 2-го порядка

Сначала выпишем линейное пространство векторных полей H^2 у которых каждая координата это однородный многочлен степени 2. Базис будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

Есть линейный оператор L_A, который порождается линейным векторным полем A, который имеет вид $L_A(X) : H^2 \longmapsto H^2$ и переводит векторное поле X в векторное поле $[A,\, X]$ и является линейным приближением исходной системы. Иными словами $L_A(X) = ad_A(X) = [A,\, X]$. В силу того, что векторное поле A линейное, для любого полиномиального векторного поля X, то векторное поле ad_A полиномиальное. Базис состоит из 6 векторов. Это значит, что любой элемент пространства можно описать вектором коэффициентов перед базисными векторами. Теперь подействуем оператором L_A на базисные вектора пространсва H^2 и запишем этот результат в матрицу. Эта матрица называется матрицей линейного оператора ad_A. В каждом столбце находятся коэффициенты базисных векторов.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Дальше будем искать образ линейного оператора. Образ $L_A : F^2 = Im(L_a) \subset H^2$. Для этого с помощью MATLAB функции $rref$ приведем к ступенчатому виду матрицу $(L_A \mid E_6)$, где E_6 — единичная матрица размера 6. Получаем следующее:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & | & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -4 & | & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 2 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

По этой матрице видно, что ЛНЗ являются только первые 4 столбца, это значит, что образ линейного оператора $L_A : F^2 = Span\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$, где l_i это i-ый столбец матрицы L_A.

Всё пространство H^2 есть прямая сумма F^2 и его прямого дополнения G^2, т.е. $H^2 = F^2 \oplus G^2$. Мы должны найти такие вектора, которые будут линейно независимы с векторами в F^2. По присоединенной матрице видно, что такими векторами могут быть 7-ой и 8-ой столбец или 1-ый и 2-ой столбец матрицы E_6. Получается, что $G_2 = Span\{e_1, e_2\}$, где e_i это i-ый столбец матрицы E_6. В итоге получаем матрицу перехода:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дальше разложим исходную систему в ряд Тейлора до 3го порядка малости $y = A + f_2$, где A — линейная часть разложения. Найдем f_2. Выпишем коэффициенты вектора f_2 в старом базисе, домножим его на обратную матрицу перехода, то есть переведем его в новый базис, тем самым получаем вектор g_2. Слагаемые из F^2 не влияют на локальное поведение системы, их не учитываем. Зануляем первые 4 координаты, отвечающие F^2 и переводим вектор g_2 в старый базис.
Получаем следующую нормальную форму 2-го порядка.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 4x^2 - 7xy; \\ \dot{y} = x - y. \end{cases} \tag{1}$$

2.3. Фазовый портрет в окрестности положения равновесия

Вблизи точки покоя будет строиться фазовый портрет. Фазовый портрет был построен с помощью функции *streamslice*. Для этого была задана двумерная сетка так, чтобы положение равновесия было в центре. Сетка задана с шагом 0.01 в каждом направлении. Далее были посчитаны значения двух массивов в точках сетки путем подставления значений сетки в правые части уравнения системы, т.е. значения векторного поля. Ниже представлены фазовые портрет системы вблизи точки покоя и фазовый портрет нормальной формы 2-го порядка.

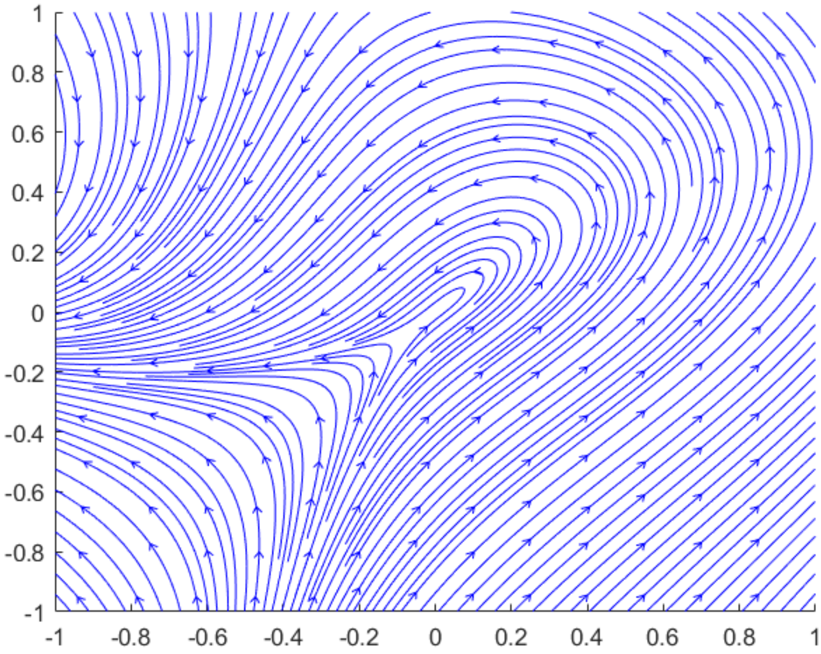

Рис. 1. Фазовый портрет точки в близи ПР.

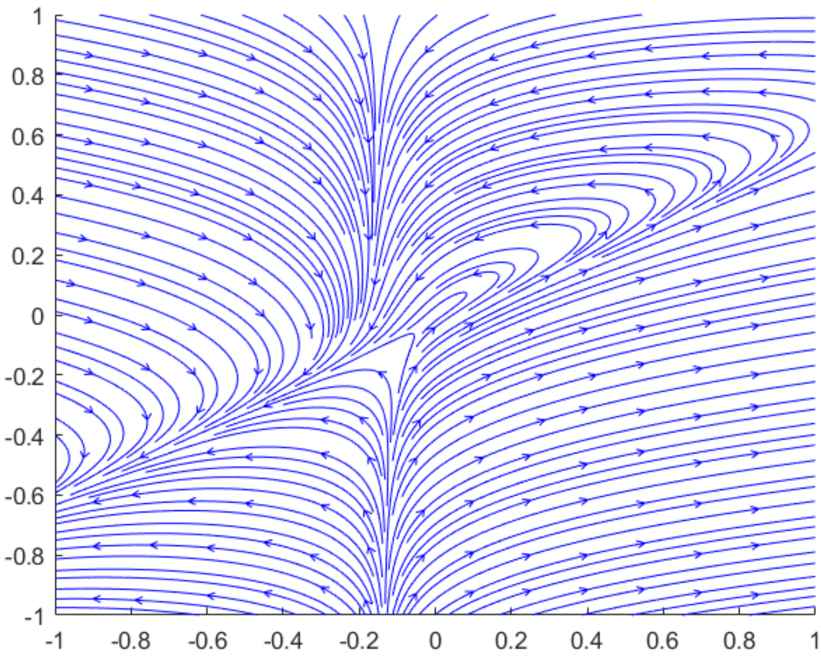

Рис. 2. Фазовый портрет нормальной формы 2-го порядка в близи ПР.