



Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана (национальный
исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Математическое моделирование»

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №2

Нелинейные системы

по дисциплине
«Качественная теория ОДУ»

Вариант №4

Студент группы ФН12-71

_____ Д.Д. Девяткин
(подпись, дата)

Руководитель

_____ А.Н. Канатников
(подпись, дата)

Содержание

Постановка задачи	3
1. Исходные данные	3
2. Реализация	3
2.1. Положения равновесия системы	3
2.2. Тип точки покоя и устойчивость	3
2.3. Устойчивое и неустойчивое многообразие	4
2.4. Фазовый портрет в окрестности положения равновесия	4

Постановка задачи

Для заданной системы второго порядка выполнить следующий задания:

- а) найти все положения равновесия;
- б) исследовать на устойчивость, для гиперболических точек указать тип;
- в) для седловых точек найти (численно) устойчивое и неустойчивое многообразия;
- г) нарисовать фазовый портрет системы в окрестности положений равновесия.

1. Исходные данные

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 3y + xy + y^2; \\ \dot{y} = x + y^2. \end{cases} \quad (1)$$

2. Реализация

2.1. Положения равновесия системы

Для поиска точек покоя необходимо приравнять к 0 правые части каждого из дифференциальных уравнений системы (1) и произвести решение следующей системы

$$\begin{cases} 3x + 3y + xy + y^2 = 0; \\ x + y^2 = 0. \end{cases}$$

Используя функцию MATLAB *solve*, получаем следующее решение системы

$$\begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \\ x = -1; \\ y = 1; \\ x = -9; \\ y = -3. \end{cases}$$

Данная система имеет 3 точки покоя : $P_1(-9, -3)$, $P_2(-1, 1)$ и $P_3(0, 0)$.

2.2. Тип точки покоя и устойчивость

Для двумерных систем, в зависимости от их собственных значений, можно выделить несколько типов точек покоя:

- Два действительных собственных значения. **Узел**. [Случай совпадающих корней: жорданов узел (одна жорданова клетка) и дикритический узел (две жордановы клетки)].
- Два комплексных корня с ненулевой действительной частью. **Фокус**.
- Два действительных собственных значения разных знаков. **Седло**.

- Два комплексно-сопряженных чисто мнимых корня. **Центр**.
- Вырожденный случай: нулевое собственное значение.

Говорят, что положение равновесия **гиперболическое**, если в нем линейное приближение не имеет собственных значений на мнимой оси. Согласно ляпуновской теории устойчивости, гиперболическое положение равновесия асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все собственные числа линейного приближения находятся в левой полуплоскости.

Для исследования типа точек покоя рассмотрим систему первого приближения, чтобы описать конфигурации вблизи положения равновесия (ПР). Для этого находим Якобиан системы и рассматриваем её в каждой точке покоя. Матрица Якоби имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} y + 3 & x + 2y + 3 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$$

Получаем следующее:

- Точка P_1
Собственные значения: $\lambda_1 = -3 + 1.7321i$, $\lambda_2 = -3 - 1.7321i$. ПР является гиперболическим. Поскольку $Re\lambda_1 \neq 0$, $Re\lambda_2 \neq 0$, то точка является фокусом.
- Точка P_2
Собственные значения: $\lambda_1 = 5.2361$, $\lambda_2 = 0.7639$. ПР неустойчиво, так как хотя бы одно собственное значение имеет положительный знак. Тип точки покоя узел. ПР гиперболическое.
- Точка P_3
Собственные значения: $\lambda_1 = -0.7913$, $\lambda_2 = 3.7913$. ПР неустойчиво и тип точки покоя — седло. ПР гиперболическое.

2.3. Устойчивое и неустойчивое многообразия

Численно был произведен поиск устойчивого и неустойчивого многообразий для седловой точки P_3 . Собственные значения, соответствующие этой точке — $\lambda_1 = -0.7913$, $\lambda_2 = 3.7913$. Значению λ_1 соответствует вектор $v_1 = (0.9669, 0.2550)^T$, значению λ_2 вектор $v_2 = (-0.6205, 0.7842)^T$. Собственное значение λ_1 соответствует тому, что многообразие будет устойчиво, а λ_2 , что неустойчиво. Поскольку система двумерна, то есть всего 2 собственных значения и 2 собственных вектора. Это значит, что многообразиями будут кривые. Для поиска многообразий была произведена нормировка собственного вектора и отступ на ε в оба направления вектора от точки P_3 , путем умножения нормированного вектора на, заранее заданные, ε и $-\varepsilon$. Аналогично для второго вектора. Далее для каждого из 4-х случаев произведено численное решение нелинейной системы с помощью функции `ode45`. Параметр "время интегрирования" был подобран для каждого направления индивидуально.

2.4. Фазовый портрет в окрестности положения равновесия

Для каждого положения равновесия была найдена система первого приближения. Вблизи неё будет строиться фазовый портрет. Фазовый портрет был построен

с помощью функции *streamslice*. Для этого была задана двумерная сетка так, чтобы положение равновесия было в центре. Далее были посчитаны значения двух массивов в точках сетки путем подставления значений сетки в правые части уравнения системы, т.е. значения векторного поля. Ниже представлены фазовые портреты трёх точек.

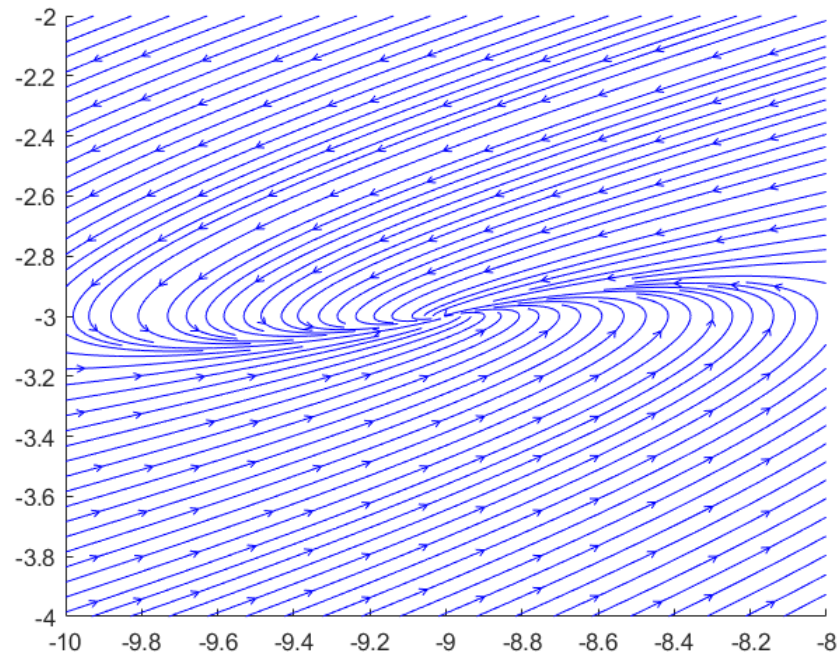


Рис. 1. Фазовый портрет точки P_1 . Фокус.

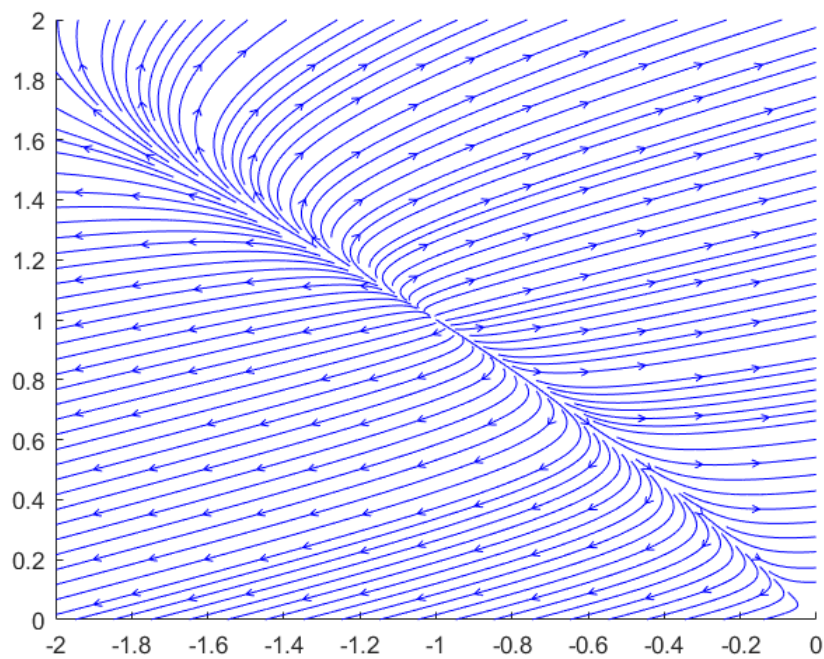


Рис. 2. Фазовый портрет точки P_2 . Узел.

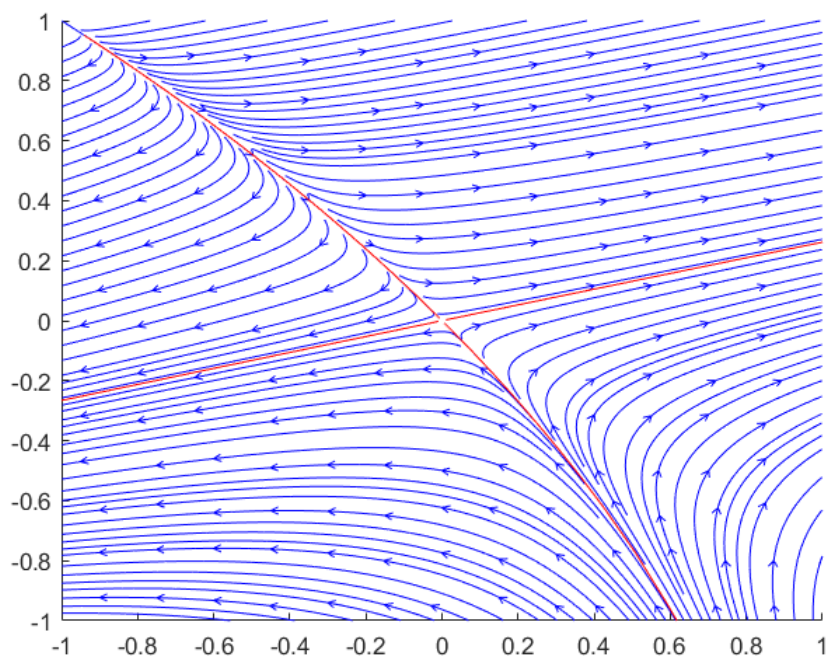


Рис. 3. Фазовый портрет точки P_3 . Седло.