

Лабораторная работа 1

Для заданной системы $\dot{x} = Ax$ третьего порядка выполнить следующие задания:

- найти общее решение системы;
- определить тип точки покоя и исследовать ее на устойчивость;
- найти устойчивое, неустойчивое и центральное (если есть) подпространства;
- нарисовать фазовый портрет динамической системы, изобразив ход типичных фазовых траекторий, точку покоя, устойчивое, неустойчивое и центральное подпространства.

$$\begin{array}{llll}
 1. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. & 2. \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}. & 3. \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}. & 4. \begin{pmatrix} -7 & 9 & -4 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}. \\
 5. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}. & 6. \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -4 & -4 & 6 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}. & 7. \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}. & 8. \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \\
 9. \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}. & 10. \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -5 & -7 & 8 \\ -4 & -3 & 4 \end{pmatrix}. & 11. \begin{pmatrix} 4 & 12 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. & 12. \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & -8 & 10 \\ 1 & -7 & 9 \end{pmatrix}. \\
 13. \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 8 & -8 & -7 \\ -6 & 6 & 5 \end{pmatrix}. & 14. \begin{pmatrix} 7 & -4 & 8 \\ 20 & -13 & 28 \\ 6 & -4 & 9 \end{pmatrix}. & 15. \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 1 & 7 & 2 \\ -3 & -14 & -3 \end{pmatrix}. & 16. \begin{pmatrix} -5 & -17 & -6 \\ 2 & 5 & 2 \\ -4 & -8 & -3 \end{pmatrix}. \\
 17. \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. & 18. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}. & 19. \begin{pmatrix} -7 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}. & 20. \begin{pmatrix} 9 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

Лабораторная работа 2

Для заданной системы 2-го порядка выполнить следующие задания:

- найти все положения равновесия;
- исследовать на устойчивость, для гиперболических точек указать тип;
- для седловых точек найти (численно) устойчивое и неустойчивое многообразия;
- нарисовать фазовый портрет системы в окрестности положений равновесия.

$$\begin{array}{lll}
 1. \begin{cases} \dot{x} = x(1-x) - 2xy; \\ \dot{y} = 3y(1-y) - xy. \end{cases} & 2. \begin{cases} \dot{x} = xy; \\ \dot{y} = 3 - x - 4y + y^2. \end{cases} & 3. \begin{cases} \dot{x} = 2 + x + 4y + 2xy; \\ \dot{y} = 1 + xy. \end{cases} \\
 4. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 3y + xy + y^2; \\ \dot{y} = x + y^2. \end{cases} & 5. \begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2; \\ \dot{y} = 3 - 5x + 3y + 2x^2 - 2xy. \end{cases} & 6. \begin{cases} \dot{x} = -3 - x + 6y + 2xy; \\ \dot{y} = -x + xy + y. \end{cases} \\
 7. \begin{cases} \dot{x} = 2x^2 - 2y^2 + 5x - 7y - 3; \\ \dot{y} = x^2 - y^2 - 2y. \end{cases} & 8. \begin{cases} \dot{x} = x + x^2 - y^2; \\ \dot{y} = x + y + (x - y)^2. \end{cases} & 9. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y - y^2; \\ \dot{y} = 3x + 4y + xy. \end{cases} \\
 10. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y - y^2; \\ \dot{y} = x - 4y + xy. \end{cases} & 11. \begin{cases} \dot{x} = x + 5y - y^2; \\ \dot{y} = x + 8y + xy. \end{cases} & 12. \begin{cases} \dot{x} = x + 3y + y^2; \\ \dot{y} = -x + 5y + xy. \end{cases} \\
 13. \begin{cases} \dot{x} = 8y + xy + y^2; \\ \dot{y} = -x + 13y + 2xy + y^2. \end{cases} & 14. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y + xy - y^2; \\ \dot{y} = 5x + 8y + 2xy - y^2. \end{cases} & 15. \begin{cases} \dot{x} = 8x + y + xy; \\ \dot{y} = 5x + y - x^2. \end{cases} \\
 16. \begin{cases} \dot{x} = 3 - 4x - y + x^2; \\ \dot{y} = xy. \end{cases} & 17. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + xy; \\ \dot{y} = x + y^2. \end{cases} & 18. \begin{cases} \dot{x} = x - y - xy; \\ \dot{y} = 2x + 3y - xy - 3. \end{cases} \\
 19. \begin{cases} \dot{x} = y - xy - 2y^2; \\ \dot{y} = x + 2y - y^2. \end{cases} & 20. \begin{cases} \dot{x} = 6xy - 2x - 6y + 2; \\ \dot{y} = xy - y^2. \end{cases} &
 \end{array}$$

Лабораторная работа 3

Для заданной системы 2-го порядка, имеющей нулевое положение равновесия:

- а) найти линейное приближение в нуле и записать характеристические числа;
- б) построить нормальную форму 2-го порядка;
- в) построить фазовый портрет системы в окрестности нулевого положения равновесия

1. $\begin{cases} \dot{x} = \cos(x+y) + \sin x + \sin y - 1; \\ \dot{y} = x - \cos x + e^y. \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dot{x} = \cos(x-y) + \sin x + \sin y - 1; \\ \dot{y} = \cos 2x - x - e^y. \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)(1-y) - \cos(x-y); \\ \dot{y} = e^{x-y} + \sin x - \sin y - \cos(x+y). \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)(1-y) - \cos(x-y); \\ \dot{y} = e^{x-y} - \cos(x+y). \end{cases}$
5. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)(2+y) - 2\cos(x-y); \\ \dot{y} = e^{x+y} - (1-x/2)^2. \end{cases}$
6. $\begin{cases} \dot{x} = (1+2x)e^y - \cos y; \\ \dot{y} = (1+y)e^{2x} - \cos x. \end{cases}$
7. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)e^{-y} - \cos y; \\ \dot{y} = (1-y)e^x - \cos(x+y). \end{cases}$
8. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)(1+y) - \cos(x-y); \\ \dot{y} = e^{-x-y} - 1. \end{cases}$
9. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)e^y - \cos(2x+y); \\ \dot{y} = (1+y)e^x - \cos(x-y). \end{cases}$
10. $\begin{cases} \dot{x} = \cos(x-y) + \sin 2x + \sin y - 1; \\ \dot{y} = 2x - \cos(x+y) + e^y. \end{cases}$
11. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)(1+y) - \cos(x+2y); \\ \dot{y} = e^{x+y} - \cos(x-y). \end{cases}$
12. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x-x^2)e^y - \cos y; \\ \dot{y} = (1-y)e^{-x} - \cos(x-y). \end{cases}$
13. $\begin{cases} \dot{x} = \sin(x-y) + \ln(1+x^2+y^2); \\ \dot{y} = x + e^x + e^{-2y} - 2\cos(x+y). \end{cases}$
14. $\begin{cases} \dot{x} = \sin x - \sin y + \ln(1+x^2+y^2); \\ \dot{y} = x - e^y + \cos x. \end{cases}$
15. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)e^{-y} - \cos y; \\ \dot{y} = (1-2y)e^x + \sin x - \cos x. \end{cases}$
16. $\begin{cases} \dot{x} = \cos(x+y) + \sin x - \sin y - 1; \\ \dot{y} = x + \cos x - e^y. \end{cases}$
17. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)e^{-y} - \cos(x+y); \\ \dot{y} = (1-y)e^x - \cos(x-y). \end{cases}$
18. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)^2e^{-y} - \cos y; \\ \dot{y} = (1-y)e^x + \sin x - \cos(x-y). \end{cases}$
19. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)^2 - e^{-y}; \\ \dot{y} = (1+y+y^2)e^{2x} - \cos x. \end{cases}$
20. $\begin{cases} \dot{x} = e^{x-y} - \cos(x+y); \\ \dot{y} = (1+x)(1+y) - \sin(2x-x^2) - \cos(x-y). \end{cases}$

Лабораторная работа 4

Для заданной системы 2-го порядка:

- а) проанализировать фазовый портрет и выделить область существования цикла;
- б) задав трансверсальную кривую, найти точку на цикле и построить цикл численно;
- в) определить период для цикла;
- г) вычислить мультипликаторы цикла.

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 2x^2 - 11xy - 16x + 13y^2 + 26y - 2; \\ \dot{y} = 5y^2 - 3xy - 10x + 16y - 1. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = -26x^2 - \frac{262}{5}xy - \frac{127}{5}y^2 + 44x + \frac{207}{5}y - 7; \\ \dot{y} = \frac{255}{10}x^2 + \frac{254}{5}xy + \frac{247}{10}y^2 - 46x - 44y + 8. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = -6x^2 + 10xy + 39y - 24x - 2; \\ \dot{y} = -5x^2 + 10xy - 3y^2 - 15x + 24y - 1. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = 22x^2 + 30xy + 10y^2 + 34x + 20y + 1; \\ \dot{y} = -29x^2 - 41xy - 14y^2 - 58x - 34y - 2. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \dot{x} = \frac{17}{5}x^2 + \frac{17}{5}xy + y^2 + \frac{13}{11}x + \frac{14}{11}y - 9; \\ \dot{y} = -8x^2 - 8xy - \frac{5}{4}y^2 - 10x - \frac{41}{7}y + 5. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = 73x^2 + 94xy + 51x + 30y^2 + 30y + 1; \\ \dot{y} = -116x^2 - 150xy - 87x - 48y^2 - 51y - 2. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \dot{x} = \frac{89}{9}x^2 - \frac{19}{9}xy + 12x - \frac{7}{9}y^2 - 5y; \\ \dot{y} = -\frac{142}{9}x^2 + \frac{245}{9}xy - \frac{76}{9}y^2 + 29x - 12y. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \dot{x} = -\frac{5}{27}x^2 + \frac{4}{15}xy - \frac{72}{9}y^2 - \frac{3}{4}x - \frac{138}{5}y - 16; \\ \dot{y} = -\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{15} + \frac{x}{2} + y + \frac{6}{5}. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \dot{x} = \frac{x^2}{2} + 4xy + \frac{28}{5}y^2 + \frac{15}{4}x + \frac{18}{5}y - 8; \\ \dot{y} = -\frac{x^2}{12} - \frac{8}{5}xy - \frac{25}{12}y^2 - \frac{23}{7}x - \frac{13}{4}y + 4. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \dot{x} = \frac{47}{4}x^2 + \frac{47}{2}xy + 11y^2 - 24x - 24y + 5; \\ \dot{y} = -\frac{51}{4}x^2 - \frac{51}{2}xy - 11y^2 + 22x + 24y - 4. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = -\frac{216}{11}x^2 + \frac{785}{23}xy - \frac{72}{17}y^2 - \frac{250}{83}x + \frac{199}{50}y; \\ \dot{y} = -\frac{255}{28}x^2 + \frac{17}{11}xy + \frac{837}{46}y^2 - \frac{227}{90}x + \frac{250}{83}y. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = -x^2 + \frac{17}{9}xy - \frac{9}{10}y^2 + \frac{40}{9}x - \frac{19}{3}y + \frac{8}{15}; \\ \dot{y} = -x^2 + \frac{7}{4}xy - y^2 + 4x - \frac{9}{2}y + \frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} = -18x^2 + 50xy - 34y^2 + 42x - 68y + 3; \\ \dot{y} = -13x^2 + 37xy - 26y^2 + 26x - 42y + 2. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = -\frac{16}{3}x^2 + 7xy + 2y^2 + 8x - 13y; \\ \dot{y} = \frac{7}{9}x^2 - \frac{25}{3}xy + 5x + 11y^2 - 8y. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \dot{x} = -\frac{12}{25}x^2 + \frac{12}{25}xy - \frac{6}{25}y^2 - 3x + \frac{3}{5}y - \frac{1}{2}; \\ \dot{y} = 21x^2 + 3xy - \frac{4}{5}y^2 + 3y - 3. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = -88x^2 + 230xy - 150y^2 + 54x - 75y + 4; \\ \dot{y} = -65x^2 + 170xy - 111y^2 + 39x - 54y + 3. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \dot{x} = 3x^2 - 26xy + 34y^2 + 63x - 102y + 3; \\ \dot{y} = 16y^2 - 10xy + 39x - 63y + 2. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \dot{x} = -\frac{55}{9}x^2 + \frac{28}{9}xy + \frac{2}{9}y^2 + 3x - 2y; \\ \dot{y} = \frac{7}{9}x^2 - \frac{61}{9}xy + \frac{31}{9}y^2 + 5x - 3y. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \dot{x} = -\frac{3}{5}x^2 + 25y^2 + \frac{9}{5}x - 46y + 8; \\ \dot{y} = \frac{x^2}{5} - y^2 - x - \frac{3}{2}y + 1. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \dot{x} = \frac{47}{2}x^2 + \frac{47}{2}xy + \frac{11}{2}y^2 - 24x - 12y + \frac{5}{2}; \\ \dot{y} = -51x^2 - 51xy - 11y^2 + 46x + 25y - 4. \end{cases}$$

Лабораторная работа 5

Для заданной системы 3-го порядка вычислить показатели Ляпунова, сделать рисунок.

- | | | | |
|--|--|--|---|
| 1. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 4y; \\ \dot{y} = x + z^2; \\ \dot{z} = 1 + x. \end{cases}$ | 2. $\begin{cases} \dot{x} = 0.9 - y; \\ \dot{y} = 0.4 + z; \\ \dot{z} = xy - z. \end{cases}$ | 3. $\begin{cases} \dot{x} = -z; \\ \dot{y} = x - y; \\ \dot{z} = 3.1x + y^2 + 0.5z. \end{cases}$ | 4. $\begin{cases} \dot{x} = 2.7y + z; \\ \dot{y} = -x + y^2; \\ \dot{z} = x + y. \end{cases}$ |
| 5. $\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = x - z; \\ \dot{z} = x + xz + 2.7y. \end{cases}$ | 6. $\begin{cases} \dot{x} = -2y; \\ \dot{y} = x + z^2; \\ \dot{z} = 1 + y - 2z. \end{cases}$ | 7. $\begin{cases} \dot{x} = -z; \\ \dot{y} = -x^2 - y; \\ \dot{z} = 1.7(1 + x) + y. \end{cases}$ | 8. $\begin{cases} \dot{x} = y + 3.9z; \\ \dot{y} = 0.9x^2 - y; \\ \dot{z} = 1 - x. \end{cases}$ |
| 9. $\begin{cases} \dot{x} = xy - z; \\ \dot{y} = x - y; \\ \dot{z} = x + 0.3z. \end{cases}$ | 10. $\begin{cases} \dot{x} = 2z; \\ \dot{y} = -2y + z; \\ \dot{z} = -x + y + y^2. \end{cases}$ | 11. $\begin{cases} \dot{x} = -0.2y; \\ \dot{y} = x + z; \\ \dot{z} = x + y^2 - z. \end{cases}$ | 12. $\begin{cases} \dot{x} = -y + z^2; \\ \dot{y} = x + 0.5y; \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$ |
| 13. $\begin{cases} \dot{x} = 0.4x + z; \\ \dot{y} = xz - y; \\ \dot{z} = -x + y. \end{cases}$ | 14. $\begin{cases} \dot{x} = y + z; \\ \dot{y} = -x + 0.5y; \\ \dot{z} = x^2 - z. \end{cases}$ | 15. $\begin{cases} \dot{x} = yz; \\ \dot{y} = x^2 - y; \\ \dot{z} = 1 - 4x. \end{cases}$ | 16. $\begin{cases} \dot{x} = -y; \\ \dot{y} = x + z; \\ \dot{z} = xz + 3y^2. \end{cases}$ |
| 17. $\begin{cases} \dot{x} = yz; \\ \dot{y} = x - y + 0.1z; \\ \dot{z} = 1 - x^2. \end{cases}$ | 18. $\begin{cases} \dot{x} = yz; \\ \dot{y} = x - y; \\ \dot{z} = 1 - xy. \end{cases}$ | 19. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2; \\ \dot{y} = -y - 9z; \\ \dot{z} = y/2 + x^2/4. \end{cases}$ | 20. $\begin{cases} \dot{x} = x/2 - y; \\ \dot{y} = x - z^2; \\ \dot{z} = 2y - z. \end{cases}$ |

Лабораторная работа 6

Для заданной системы 3-го порядка (см. задачу 6) и заданной локализирующей функции решить задачу локализации

- | | |
|---|---|
| 1. $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$ | 2. $\varphi(x, y, z) = x^2 + 2Kx + 2Ly + 2Mz.$ |
| 3. $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$ | 4. $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$ |
| 5. $\varphi(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2Cy + 2Dz.$ | 6. $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$ |
| 7. $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$ | 8. $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$ |
| 9. $\varphi(x, y, z) = By^2 + Cz^2 - 2Cyz - 2(B - C)x + 2Ly.$ | 10. $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$ |
| 11. $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$ | 12. $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$ |
| 13. $\varphi(x, y, z) = x^2 + 2Ax + 2By.$ | 14. $\varphi(x, y, z) = y^2 + 2Ay + 2Bz.$ |
| 15. $\varphi(x, y, z) = z^2 + 2Ay + 2Bz.$ | 16. $\varphi(x, y, z) = 3x^2 + Bxy + 2Kx - 2y - z.$ |
| 17. $\varphi(x, y, z) = y^2 + 2Kx + 2Ly + 2Mz.$ | 18. $\varphi(x, y, z) = x^2 + By^2 + z^2 + 2Ly.$ |
| 19. $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$ | 20. $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$ |