Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

Факультет *«Фундаментальные науки»*

Кафедра *«Математическое моделирование»*

# ОТЧЕТ
## *по лабораторной работе №4*

## Циклы

по дисциплине

«Качественная теория ОДУ»

## Вариант №4

Студент группы ФН12-71 ____________________ *Д.Д. Девяткин*
(подпись, дата)

Руководитель ____________________ *А.Н. Канатников*
(подпись, дата)

Москва — 2020

# Содержание

Постановка задачи . . . . . 3

1. Исходные данные . . . . . 3

2. Реализация . . . . . 3
   2.1. Область цикла . . . . . 3
   2.2. Численное построение цикла . . . . . 4
   2.3. Период . . . . . 5
   2.4. Мультипликаторы цикла . . . . . 6

# Постановка задачи

Для заданной системы 2-го порядка:
а) проанализировать фазовый портрет и выделить область существования цикла;
б) задав трансверсальную кривую, найти точку на цикле и построить цикл численно;
в) определить период у цикла;
г) вычислить мультипликаторы цикла.

# 1. Исходные данные

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 + \dfrac{17}{9}xy - \dfrac{9}{10}y^2 + \dfrac{40}{9}x - \dfrac{19}{3}y + \dfrac{8}{15}; \\ \dot{y} = -x^2 + \dfrac{7}{4}xy - y^2 + 4x - \dfrac{9}{2}y + \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

# 2. Реализация

## 2.1. Область цикла

Найдем положения равновесия (ПР) системы. Сделаем это с помощью функции *solve*. Получаем 2 ПР:

$$P_1(-1.0844, -0.7051), \qquad P_2(5.0869, 1.2981).$$

Построим фазовый портрет системы вблизи ПР $P_1$ и $P_2$.

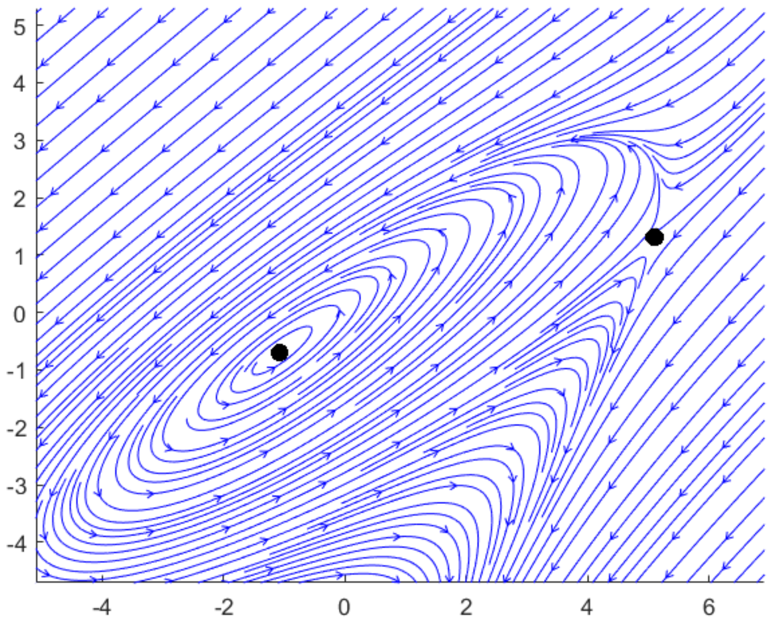


**Рис. 1.** Фазовый портрет системы вблизи ПР.

Найдем собственные значения каждого ПР: $\lambda_{1,1} = 0.1470 - 2.9558i$, $\lambda_{1,2} = 0.1470 + 2.9558i$, $\lambda_{2,1} = -2.4082, \lambda_{1,2} = 0.9367$. Получаем, что $P_1$ — неустойчивый фокус, $P_2$ — седло. Получаем, что цикл сущесвует/проходит вокруг положения равновесия $P_1$, это видно по фазовому портрету на рис. 1.

Чтобы показать, что цикл существует построим **отображение Пуанкаре**. Зададим трансверсальную кривую. В качестве кривой будем брать прямую, параллельную оси $Ox$, которая начинается в положении равновесия $P_1$. В качестве начального положения возьмем точку, лежащую на заданном луче, которая расположена на малом расстоянии от положения равновесия, то есть точку $P_1 + \varepsilon$. Точка с координатой $X$ через оборот переходит в точку с координатой $y$. Функция $y(X)$ — отображение Пуанкаре, записанное в координатах. Построим функцию $y(X)$ - $X$ для каждой начальной точки на луче, ее нули будут соответствовать циклам. Реализация следующая: будем двигаться по оси $Ox$ с шагом $h = 0.01$. Начинаем интегрировать по времени с начальными условиями $X_0 = P_1 + \varepsilon$. Интегрирование осуществляется с помощью функции $ode45$. Продолжать интегрирование будем до тех пор, пока кривая не совершит полный оборот, то есть пока не пройдет полную спираль и не пересеcечет ось $Ox$ снизу вверх. Поскольку $Re\lambda_{1,1} > 0$, $Re\lambda_{1,2} > 0$, ПР будет неустойчивым. Поэтому нтегрирование будем производить на отрезке $[0, t]$. Останавливать интегрирование будем в тот момент, когда полученная траектория $\gamma(t)$ совершит полный оборот, с помощью «Events». При этом конечная точка $y(X)$ будет смещена относительно начальной точки $X$ на $y(X) - X$. Если полученное значение $\gamma(t)$ будет равно начальному положению с определенной точностью $\varepsilon$, то отнимем от исходного начального положения шаг, с которым мы двигаемся по лучу, при построении цикла будем интегрировать именно из этой точки, обозначим его $cond$, так как оно понадобится для описания численного построения цикла. После чего, берем точку на луче, находящуюся на расстоянии $h$ от предыдущего начального положения, то есть $X_1 = X_0 + h$. И проделываем то же самое. В результате имеем, что график зависимости $(y(X) - X)(X)$ — это график отображения Пуанкаре. На рис. 2 представлено отображение Пуанкаре. Видно, что этот график пересекает ось $Ox$, то есть имеет ноль, значит вблизи этой точки есть цикл. Эта точка имеет координаты (2.6, 0).

### 2.2. Численное построение цикла

Поскольку цикл является **устойчивым**, то можно поступить следующим образом :для численного постpения будем использовать подход, схожий с построением отображения Пуанкаре. Возьмем точку правее положения равновесия $P_1$ на 0.1 по оси $Ox$, по $Oy$ значение оставим то же, обозначим эту точку $X_0$. Этого условия достаточно для построения цикла. После того, как взяли точку, будем искать цикл, путем интегрирования исходной системы. Останавливать интегрирование будем, когда траектория пересечет ось $Ox$ снизу вверх, то есть пройдет одну полную спираль. В итоге получим некоторую точку $X_1$, которая лежит правее $X_0$, т.е. $X_1 = X_0 + dX_1$, где $dX_1 = (dx_1, 0)$. Если значение $dx_1 < \varepsilon$ ($\varepsilon$ задано заранее), то интегрирование можно прекращать, в противном же случае начинаем интегрировать с точки $X_1$. В результате интегрирования получим $X_2 : X_2 = X_1 + dX_2$, где $dX_2 = (dx_2, 0)$. Опять сравниваем с $\varepsilon$ и повторяем процедуру, если необходимо. В итоге на шаге $n$ получим, что $dx_n < \varepsilon$, это будет означать, что $X_{n-1} \approx X_n$ и можно останавливать итерационный процесс. Получаем приближенно замкнутую кривую, это есть цикл (см. рис. 3).

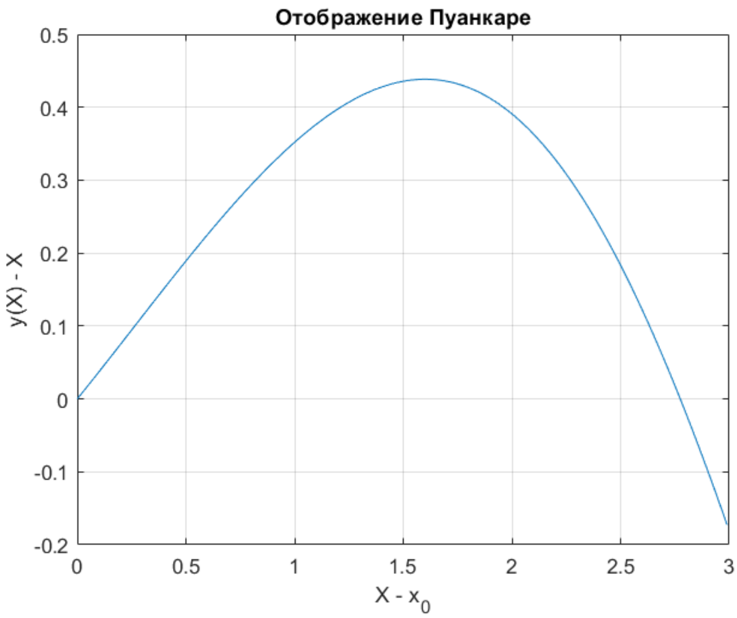


**Рис. 2.** Отображение Пуанкаре.

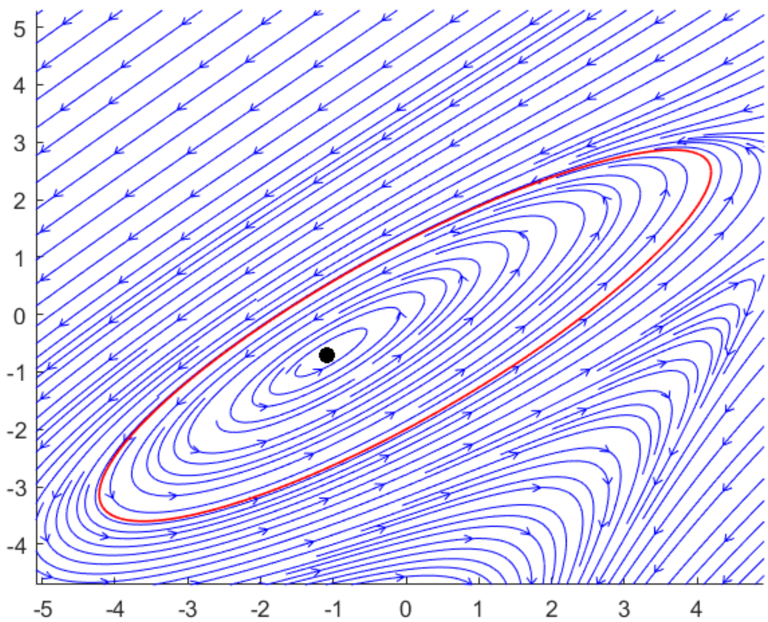


**Рис. 3.** Цикл и фазовый портрет вблизи $P_1$.

## 2.3. Период

**Период** это время совершения одного оборота, время одной спирали. Период $T = 3.3383$.

### 2.4. Мультипликаторы цикла

Пусть есть линейная система $\dot{x} = A(t)x$ с $T$-периодической матрицей $A(t)$, тогда по теореме **Флоке** любая фундаментальная матрица для линейной истемы системы может быть представлена в виде

$$\Phi(t) = Z(t)e^{Rt} \ ,$$

где $Z(t)$ — $T$-периодическая невырожденная матрица, а $R$ — постоянная матрица. Матрицу $C = e^{Rt}$ для нормированной матрицы $\Phi_0(t)$ называют **матрицей монодромии**. Здесь $\Phi_0(t) : \Phi_0(0) = E$. **Мультипликаторами цикла** называют собственные значения матрицы монодромии.

В задаче присутствует цикл $\gamma$, в каждой его точке можно составить линеаризованную систему $\dot{\xi} = A(t)\xi$, где $f'(\gamma(t)) = A(t)$ — матрица Якоби в точке $\gamma(t)$, так цикл изместен только на дискретном времени $t_i$. Матрица $A(t)$ является периодической и такая, что $A(t) = A(t + T)$, где $T$ — период цикла. Точки кривой $\gamma(t)$ будем брать с малым шагом, чтобы матрица $A(t)$ была почти постоянной на отрезке $[t_i,\ t_{i+1}]$. Решение системы на интервале $(t_i,\ t_{i+1})$ будет выглядеть следюущим образом

$$\xi(t) = \exp\{A_i(t - t_i)\}\xi(t_i)$$

Подставляя $t = t_{i+1}$

$$\xi(t) = \exp\{A_i(t_{i+1} - t_i)\}\xi(t_i)$$

Можно увидеть рекурентность и рекурентность и выразить все через формулу

$$\xi(t) = \exp\{A_{n-1}(t_n - t_{n-1})\}\cdot \exp\{A_{n-2}(t_{n-1} - t_{n-2})\} \cdot \ldots \cdot \exp\{A_1(t_2 - t_2)\}\xi(0).$$

Матрицу монодромии можно вычислить следующим образом

$$e^{RT} = \exp\{A_{n-1}(t_n - t_{n-1})\}\cdot \exp\{A_{n-2}(t_{n-1} - t_{n-2})\} \cdot \ldots \cdot \exp\{A_1(t_2 - t_2)\},$$

где $A_i$ – матрица якоби исходной системы в точке $\gamma(t)$,$t \in [t_i, t_{i+1}]$ Получем следующие мультипликаторы

$$\rho_1 = 0.2528, \quad \rho_1 \approx 1.$$

Проанализируем мультипликаторы. Имеем, что $|\rho_1| < 1$ и $\rho_1 \approx 1$. Это значит, что система и цикл устойчивы.