Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет *«Фундаментальные науки»*

Кафедра *«Математическое моделирование»*

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №6

Задача локализации

по дисциплине

«Качественная теория ОДУ»

Вариант №4

Студент группы ФН12-71 ____________________ *Д.Д. Девяткин*
(подпись, дата)

Руководитель ____________________ *А.Н. Канатников*
(подпись, дата)

Москва — 2020

Постановка задачи

Для заданной системы 3-го порядка и заданной локализирующей функции $\phi(x, y, z)$ решить задачу локализации.

1. Исходные данные

$$\begin{cases} \dot{x} = 2.7y + z, \\ \dot{y} = -x + y^2, \\ \dot{z} = x + y, \end{cases}$$

$$\phi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$$

2. Реализация

Локализирюущим множеством называют такое множество, которое содержит все инвариантные компакты рассматриваемой системы. По **теореме 6.2** знаем, что все инвариантные компакты рассматриваемой системы содержатся в множестве

$$\Omega_\phi = \{(x, y, z) : \phi_{inf} \le \phi(x, y, z) \le \phi_{sup}\},$$

$$\phi_{inf} = \inf_{x \in S_\phi} \phi, \quad \phi_{sup} = \sup_{x \in S_\phi} \phi.$$

Множество

$$S_\phi = \{x \in X \subset \mathbb{R} : \dot{\phi} = 0\}$$

рассматриваемой системы называют **универсальным сечением** системы. В итоге образуется задача поиска точной нижней ϕ_{inf} и точной верхней ϕ_{sup} граней функции $\phi(x, y, z)$ при условии $\dot{\phi} = 0$ (уравнение связи).
Универсальным сечением в фазовом пространстве является:

$$A(2.7y + z) + B(-x + y^2) + C(x + y) = 0. \tag{2.1}$$

Запишем это в систему и получим задачу:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz \to extr, \\ A(2.7y + z) + B(-x + y^2) + C(x + y) = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Если $A = 0$, то получаем следующее:

$$\begin{cases} By + Cz \to extr, \\ B(-x + y^2) + C(x + y) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Видно, что z не входит в ограничение, положим $x = 0, y = 0$, чтобы обеспечить выполнение ограничения, меняя z, получим, что $\phi_{inf} = -\infty$ и $\phi_{sup} = +\infty$.

Теперь рассмотрим случай $A \neq 0$. Выразим из (2.1) переменную z:

$$z = \frac{x(B-C) - y(2.7A + By + C)}{A}$$

Дальше подставим z в первое уравнение системы (2.2)

$$(A + \frac{BC}{A} - \frac{C^2}{A})x - (2.7C - B + \frac{C^2}{A})y - \frac{BC}{A}y^2 \to extr \tag{2.4}$$

Исходную задачу можно упросить умножив локализирующую функцию на некую константу, по скольку данная операция не изменит локализирующее множество. Поэтому умножим локализирующую функцию на $\frac{1}{A}$.

$$(1 + \frac{BC}{A^2} - \frac{C^2}{A^2})x - (2.7\frac{C}{A} - \frac{B}{A} + \frac{C^2}{A^2})y - \frac{BC}{A^2}y^2 \to extr$$

Введем замену $\tilde{B} = \frac{B}{A}, \tilde{C} = \frac{C}{A}$. Тогда получим следующее:

$$(1 + \tilde{B}\tilde{C} - \tilde{C}^2)x - (2.7\tilde{C} - \tilde{B} + \tilde{C}^2)y - \tilde{B}\tilde{C}y^2 \to extr \tag{2.5}$$

Это эквивалетно тому, что мы положим $A = 1$. Далее обратно переобозначим переменные $B := \tilde{B}$ и $C := \tilde{C}$ для простоты выкладок.

Дальше найдем экстремумы функции (2.5). Если коэффициент при x не нулевой, то зафиксировав y и меняя только x, получим что $\phi_{inf} = -\infty$ и $\phi_{sup} = +\infty$, значит этот коэффициент равен нулю. Если положить, что $B = 0$ или $C = 0$, то получим аналогично $\phi_{inf} = -\infty$ и $\phi_{sup} = +\infty$. Этот случай не будем рассматривать. В итоге имеем следующее

$$\phi = -(2.7C - B + C^2)y - BCy^2. \tag{2.6}$$

Это уравнение описывает параболу.

$$\begin{cases} 1 + BC - C^2 = 0, \\ B - 2.7C - C^2 - 2BCy = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \dfrac{C^2 - 1}{C}, \\ \\ y = \dfrac{-C^3 - 1.7C^2 - 1}{2C(C^2 - 1)}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Это уравнение описывает параболу. Дальше в (2.6) подставим параметр B, выраженный через C. Теперь это уравнение имеет вид:

$$\phi = -(2.7C - \frac{C^2 - 1}{C} + C^2)y - (C^2 - 1)y^2 \to extr \tag{2.8}$$

Дальше положим, что коэффициент при y^2 равен p, а коэффициент при y равен q, тогда получим

$$\phi = py^2 + qy \tag{2.9}$$

Если выделить квадрат в (2.9), то получим, что

$$\phi_{extr} = -\frac{q^2}{4p} \tag{2.10}$$

Тогда обозначим

$$\beta(C) = -\frac{q(C)^2}{4p(C)}. \tag{2.11}$$

Вернемся к уравнению (2.8). Если $C^2 - 1 = 0$, то получим $\phi_{inf} = -\infty$ и $\phi_{sup} = +\infty$. Данный случай нас не интересует, поэтому получаем 2 исхода: $C^2 - 1 > 0$ или $C^2 - 1 < 0$.

- $C^2 - 1 < 0 \Rightarrow$ у функции есть только минимум и $\phi(x, y, z) \geq \phi_{inf}$.

  $$\phi(x, y, z) \geq \phi_{inf} \Rightarrow x + \frac{C^2 - 1}{C} y + Cz \geq \beta(C) \Rightarrow x \geq \beta(C) - \frac{C^2 - 1}{C} y - Cz.$$

- $C^2 - 1 > 0 \Rightarrow$ у функции есть только максимум и $\phi(x, y, z) \leq \phi_{sup}$.

  $$\phi(x, y, z) \leq \phi_{sup} \Rightarrow x + \frac{C^2 - 1}{C} y + Cz \leq \beta(C) \Rightarrow x \leq \beta(C) - \frac{C^2 - 1}{C} y - Cz.$$

3. Построение

Строим сетку по оси y и z с одинаковым шагом $h = 0.1$. Аналогично для параметра C, но в силу условий рассматриваем 2 ситуации: $C \in (-1, 1)$ и $C \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Для первого условия в каждой точке находим максимум по сетке на интервале (-1, 1), для второго находим максимум на $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Во втором случае используем разрывную сетку.

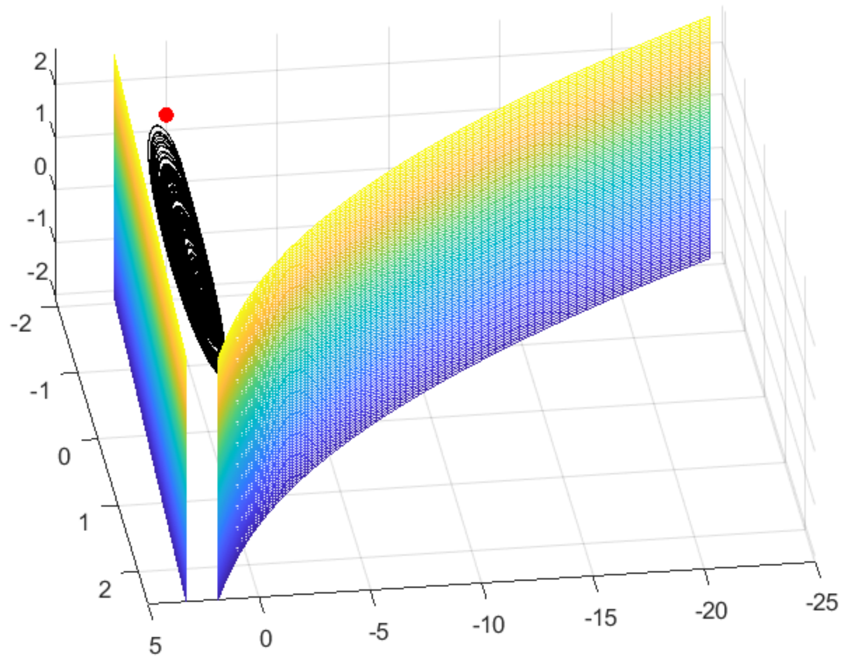

Рис. 1. Пересечение семейства локализирующих множеств и аттрактор.

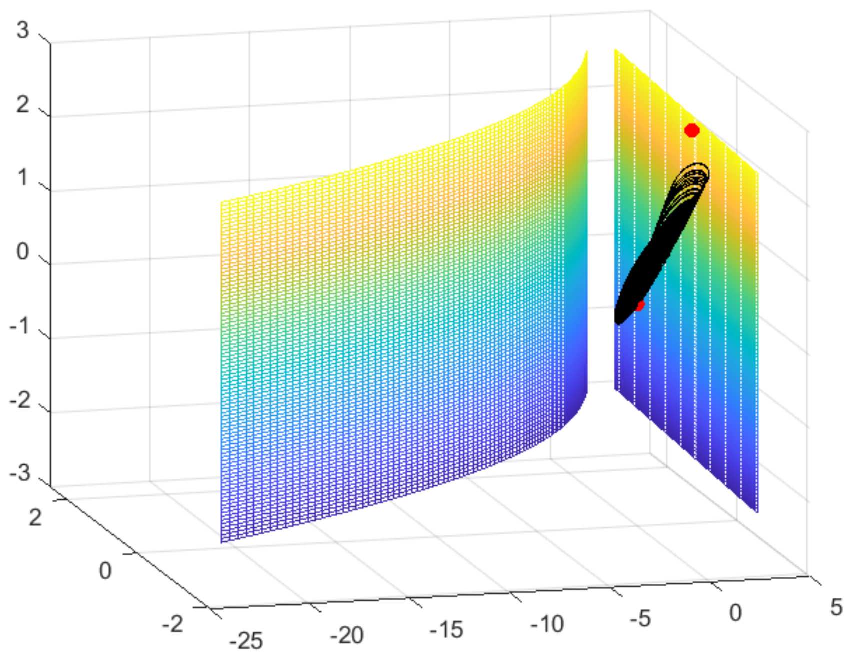

Рис. 2. Пересечение семейства локализирующих множеств и аттрактор.