Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

Факультет *«Фундаментальные науки»*

Кафедра *«Математическое моделирование»*

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №4

Циклы

по дисциплине
«Качественная теория ОДУ»

Вариант №4

Студент группы ФН12-71 ____________________ *Д.Д. Девяткин*
(подпись, дата)

Руководитель ____________________ *А.Н. Канатников*
(подпись, дата)

Москва — 2020

Содержание

Постановка задачи

Для заданной системы 2-го порядка:
а) проанализировать фазовый портрет и выделить область существования цикла;
б) задав трансверсальную кривую, найти точку на цикле и построить цикл численно;
в) определить период у цикла;
г) вычислить мультипликаторы цикла.

1. Исходные данные

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 + \dfrac{17}{9}xy - \dfrac{9}{10}y^2 + \dfrac{40}{9}x - \dfrac{19}{3}y + \dfrac{8}{15}; \\ \dot{y} = -x^2 + \dfrac{7}{4}xy - y^2 + 4x - \dfrac{9}{2}y + \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

2. Реализация

2.1. Область цикла

Найдем положения равновесия (ПР) системы. Сделаем это с помощью функции *solve*. Получаем 2 ПР:

$$P_1(-1.0844, -0.7051), \qquad P_2(5.0869, 1.2981).$$

Построим фазовый портрет системы вблизи ПР P_1 и P_2.

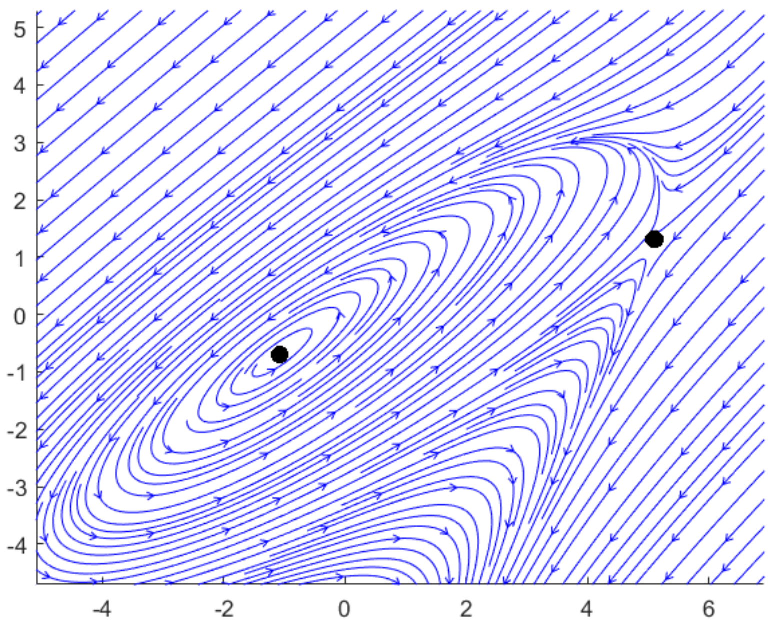

Рис. 1. Фазовый портрет системы вблизи ПР.

Получаем, что цикл сущесвует/проходит вокруг положения равновесия P_1, это видно по фазовому портрету на рис. 1.

Чтобы показать, что цикл существует построим **отображение Пуанкаре** . В качестве трансверсальной кривой будем брать прямую, параллельную оси Ox, которая проходит через координату y ПР P_1. Начнем поиск с точки $P_1 + \varepsilon$. Далее будем прибавлять шаг $h = 0.01$, двигаясь по оси Ox. Начинаем интегрировать по времени с начальными условиями $X_0 = P_1 + \varepsilon$. Продолжать интегрирование будем до тех пор, пока кривая не совершит полный оборот, то есть пока не пройдет полную спираль и не перессечет ось Ox снизу вверх. При этом конечная точка $f(X)$ будет смещена относительно начальной точки X на $f(X) - X$. Следующая итерация интегрирования начинается с точки $X_1 = X_0 + h$. Интегрирование происходит также до одного оборота (одной спирали), в результате повторяем данную операцию до тех пор, пока не определим прошла ли начальная точка область, в которой может быть цикл. Интегрирование осуществляется с помошью функции $ode45$. В результате имеем, что график зависимости $(f(X) - X)(X)$ — это график отображения Пуанкаре. На рис. 2 представлено отображение Пуанкаре. Видно, что этот график пересекает ось Ox, то есть имеет ноль, значит вблизи этой точки есть цикл. Эта точка имеет координаты (1.28, 0).

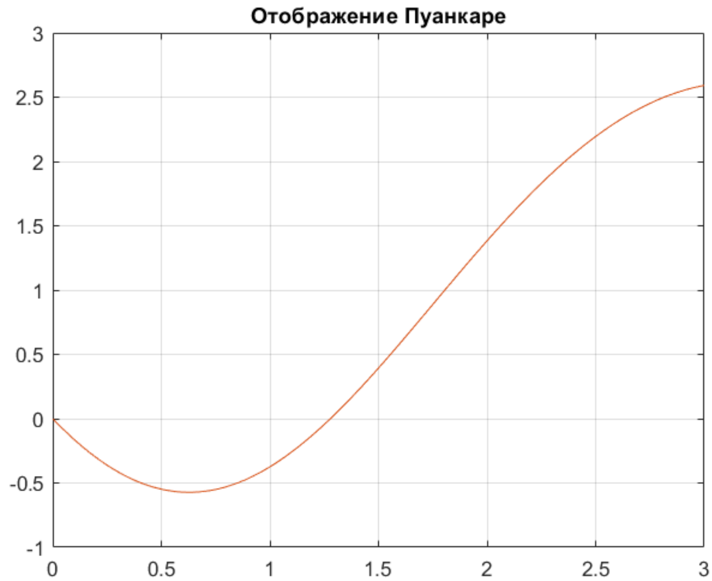

Рис. 2. Отображение Пуанкаре.

2.2. Численное построение цикла

Для численного построения цикла используем похожий подход. Интегрируем аналогично пострению отображения Пуанкаре. Начинаем с точки $X_0 = P_1 + h$. На следующей итерации в качестве начальной точки имеем $X_1 = X_0 + dX_1$, где dX_1 по координате y равна 0. Дальше в качестве начальной точки берем X_1 и получаем $X_2 = X_1 + dX_2$, где вторая координата у dX_2 также равна 0. Интегрирование заканчиваем тогда, когда $X_k - X_{k-1} < \varepsilon$, где ε задано заранее. Эта разность будет по оси Ox, так как вторая координата равна 0. В итоге получаем примерно замкнутую кривую. Это можно увидеть на рис. 3.

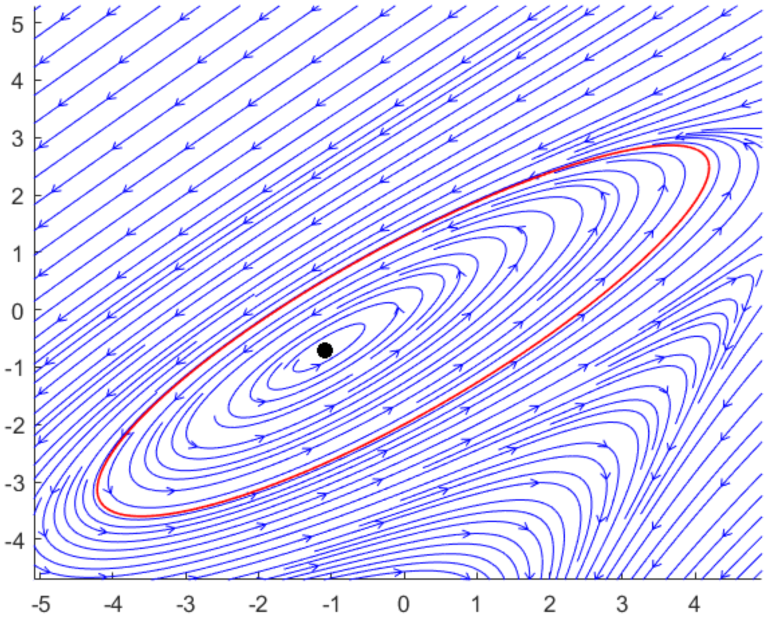

Рис. 3. Цикл и фазовый портрет вблизи P_1.

2.3. Период

Период $T = 3.3383$. **Период** это время совершения одного оборота, время одной спирали.

2.4. Мультипликаторы цикла

В задаче присутствует цикл γ, в каждой его точке можно составить линеаризованную систему $\dot{\xi} = A(t)\xi$, где $f'(\gamma(t)) = A(t)$ — матрица Якоби в точке $\gamma(t)$, так цикл изместен только на дискретном времени t_i. Матрица $A(t)$ является периодической и такая, что $A(t) = A(t+T)$, где T — период цикла. Точки кривой $\gamma(t)$ будем брать с малым шагом, чтобы матрица $A(t)$ была почти постоянной на отрезке $[t_i,\ t_{i+1}]$, то есть $\dot{\xi} = A_i\xi$, где $A_i = \dfrac{A(x_i, y_i) + A(x_{i+1}, y_{i+1})}{2}$. Решение системы на интервале $(t_i,\ t_{i+1})$ будет иметь следующий вид

$$\xi(t) = \exp\{A_i(t - t_i)\}\xi(t_i)$$

Подставляя все промежутки времени и используя реккурентность, получим следующее решение

$$\xi(t) = \exp\{A_{n-1}(t_n - t_{n-1})\}\cdot \exp\{A_{n-2}(t_{n-1} - t_{n-2})\} \cdot \ldots \cdot \exp\{A_1(t_2 - t_2)\}\xi(0).$$

Матрица монодромии e^{RT} — это нормированная фундаментальная матрица. В данном случае

$$e^{RT} = \exp\{A_{n-1}(t_n - t_{n-1})\}\cdot \exp\{A_{n-2}(t_{n-1} - t_{n-2})\} \cdot \ldots \cdot \exp\{A_1(t_2 - t_2)\}.$$

Мультипликаторами цикла называют собственные значения матрицы монодромии. В данном случае мультипликаторы имеют вид

$$\rho_1 = 0.2528, \quad \rho_1 \approx 1.$$

Проанализируем мультипликаторы. Имеем, что $|\rho_1| < 1$ и $\rho_1 \approx 1$. Это значит, что система и цикл устойчивы.