

Finite Element Method

Final Project

機械系 陳建鳴 E14026046

一、 公式整理

1. Bar Problem

Shape Function (4 node rect element)

$$N_1^e(x) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2^e(x) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3^e(x) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_4^e(x) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

$$\mathbf{B}^e(\xi, \eta) = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{N}^e(\xi, \eta) \quad (1)$$

Stiffness Matrix

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^e d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^e |J| d\xi d\eta \quad (2)$$

Force Vector

$$\mathbf{f}^e = \oint_{\Gamma_t} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{b} d\Omega \quad (3)$$

二、 程式說明

1. Programming Language – Matlab

MATLAB 是一種用於演算法開發、資料視覺化、資料分析以及數值計算的高階技術計算語言和互動式環境。除了矩陣運算、繪製函式/資料圖像等常用功能外，MATLAB 還可以用來建立使用者介面及與呼叫其它語言（包括 C, C++, Java, Python 和 FORTRAN）編寫的程式。—維基百科

A. Functions

```
% Return meshed points
% X, Y: Boundary points
% rN, cN: Number of row and column
[x y] = MESH(X, Y, rN, cN)

% Return global K matrix with rN*cN mesh
k = Kg(rN, cN)

% Return local K matrix of (r, c) element
k = Ke(r, c)

% Return B matrix at (xi, eta) of (r, c) element
b = Be(xi, eta, r, c)

% Return dN/dx at (xi, eta) of (r, c) element
r = DNDX(xi, eta, r, c)

% Return Jacobian at (xi, eta) of (r, c) element
j = JAt(xi, eta, r, c)

% Return dN/dxi at (xi, eta)
b = dNAt(xi, eta)

% Return global force vector of the distributed load
f = Fg()

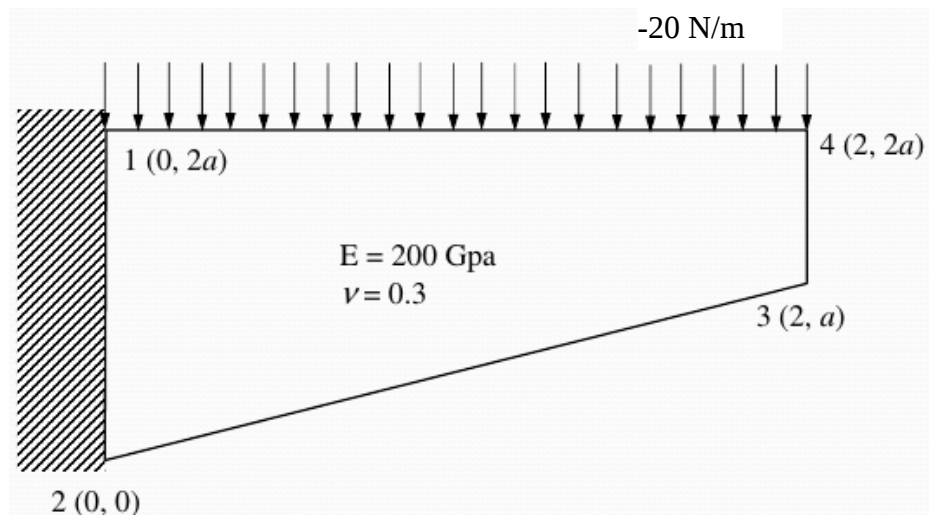
% Solve the equation  $K*d=F$ , return d vector as result
d = SOLVE(K, F, d)

% Calc Gaussian elimination of extend matrix A
x = gaussElim(A)

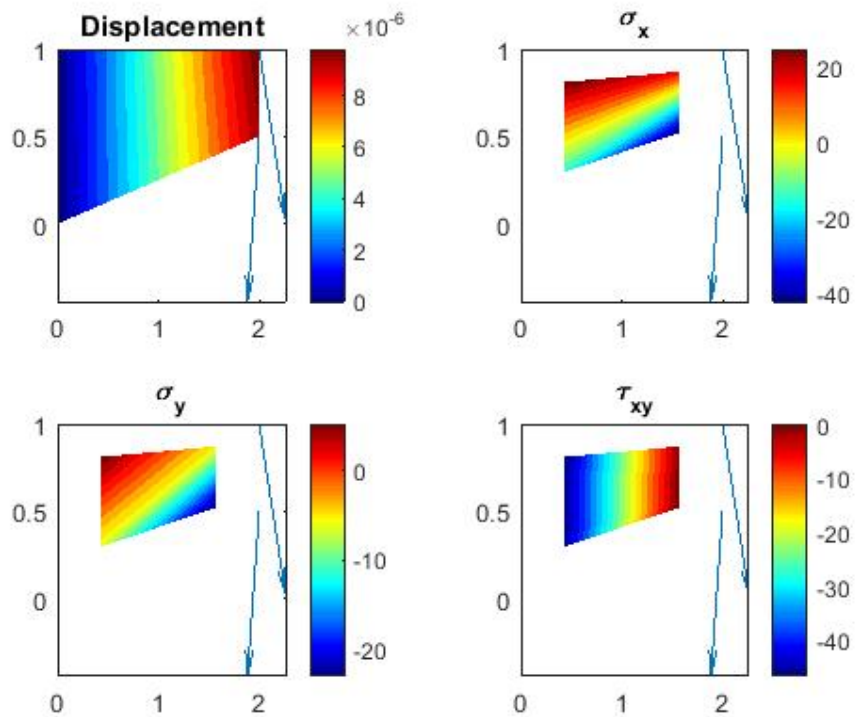
% Return stresses on the Gaussian points by res(result)
% Return: s(stresses), gp(coordinate of gaussian point)
[s gp] = STRESS_GP(res)

% Return stresses on the boundary by res(result)
% Return: s(stresses), bp(coordinate of boundary)
[s bp] = STRESS_BOUNDARY(res)
```

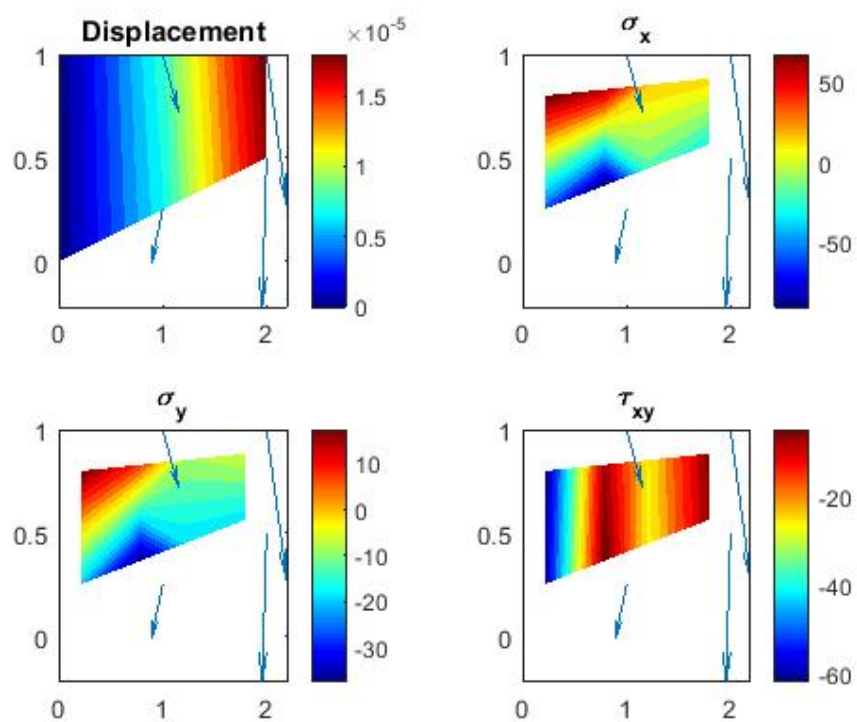
三、 討論



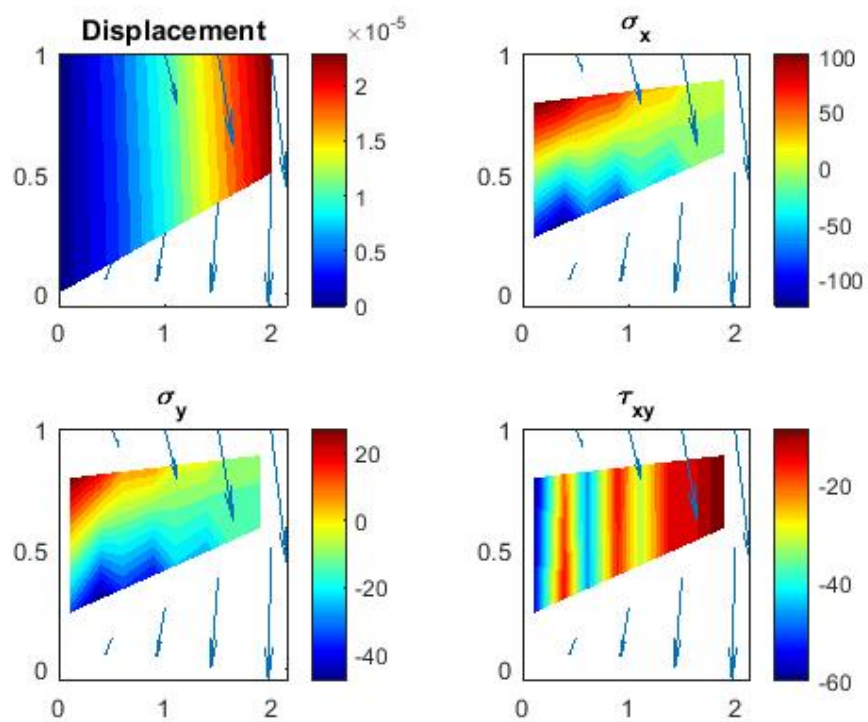
A. Result



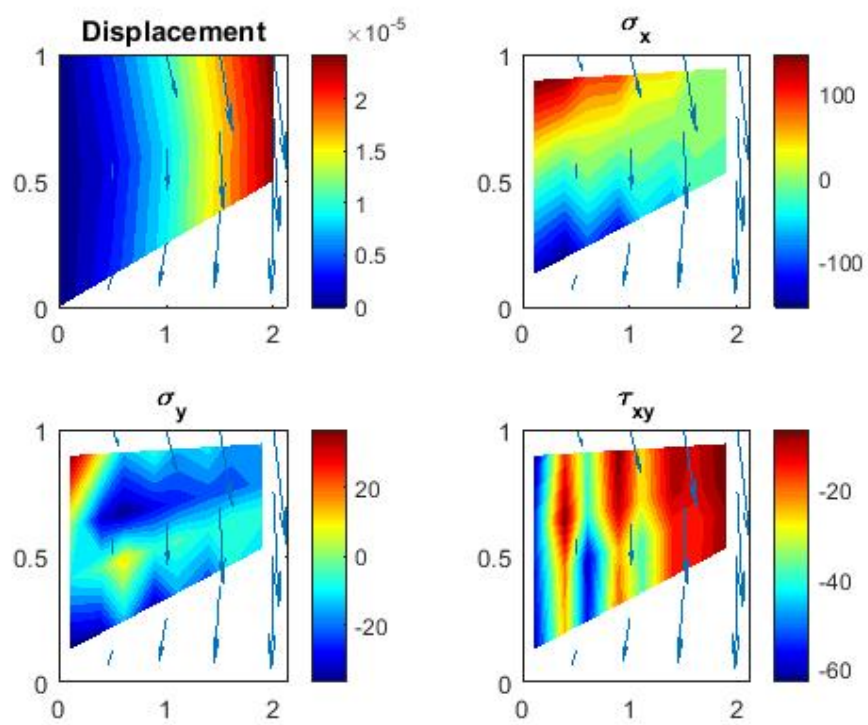
圖— 1x1 Mesh



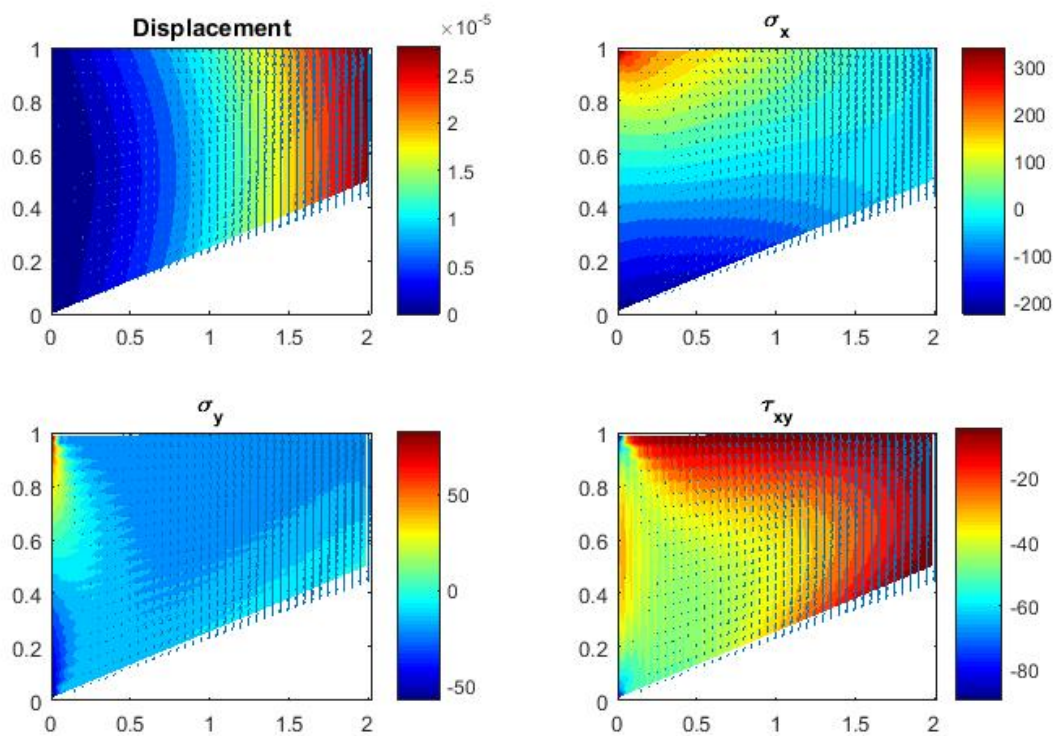
圖二 1x2 Mesh



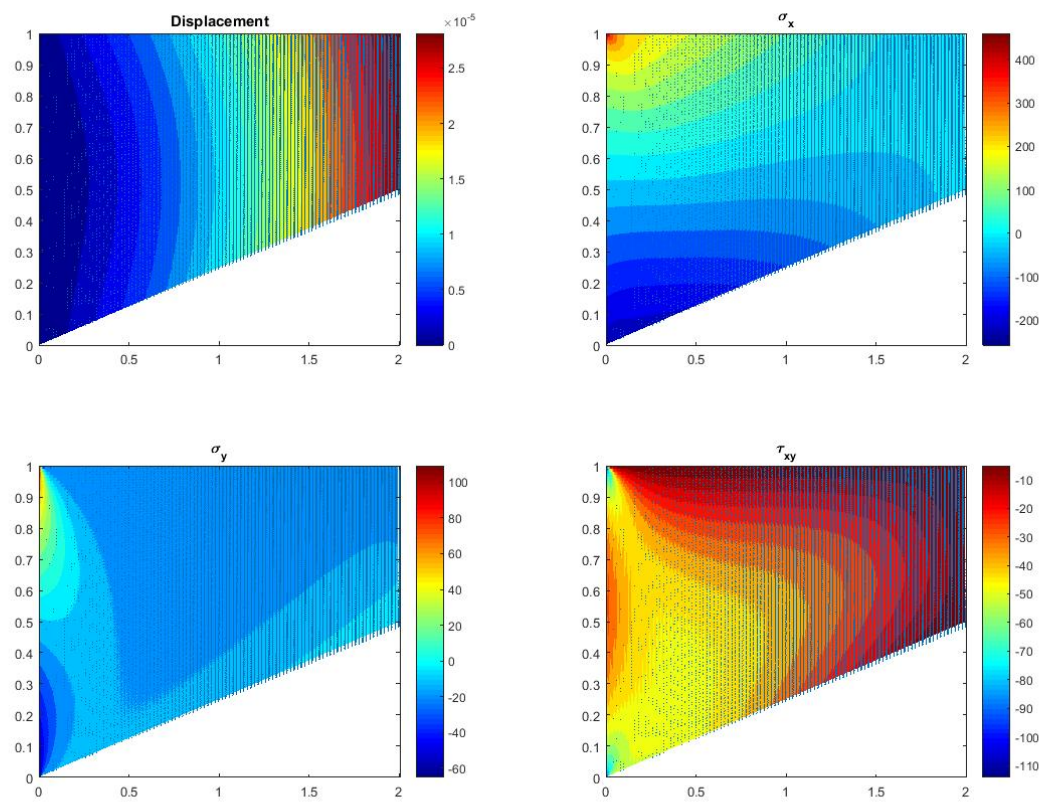
圖三 1x4 Mesh



圖四 2x4 Mesh



圖五 20x40 Mesh



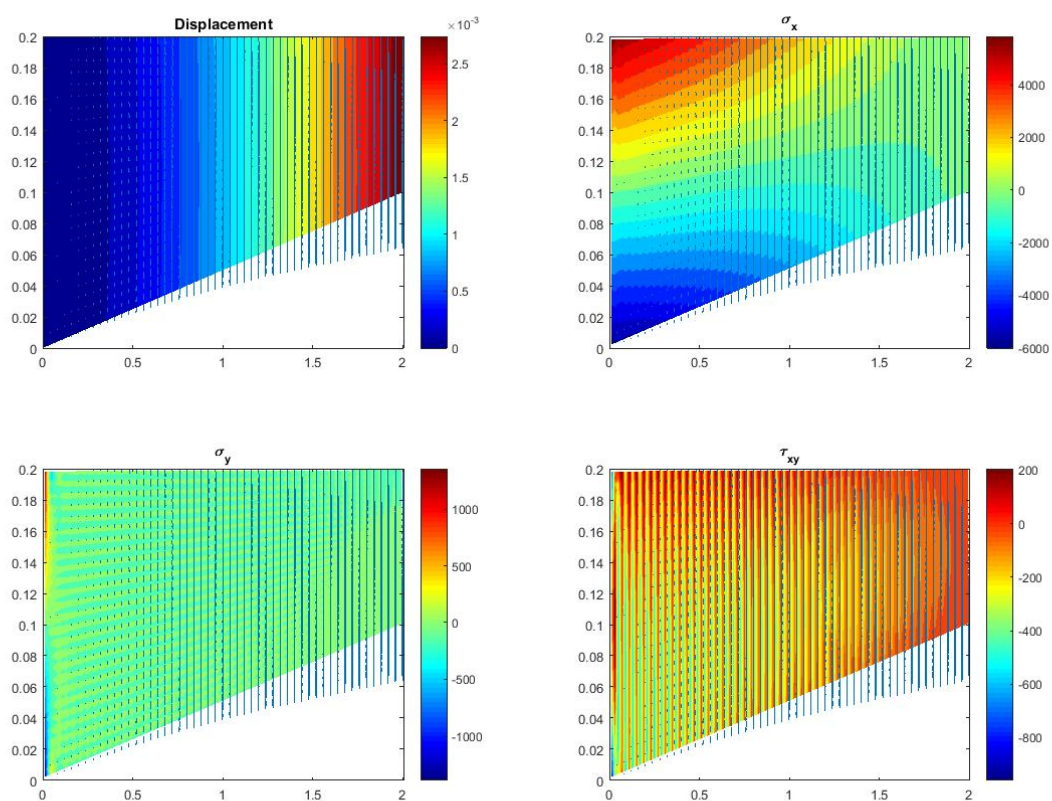
圖六 100x100 Mesh

B. Effect of mesh density

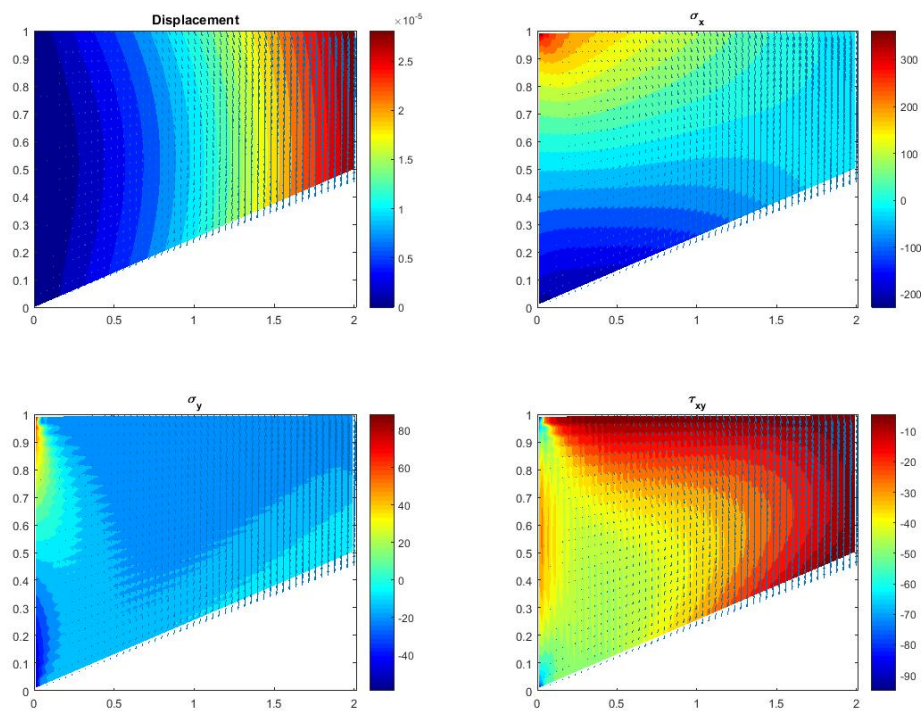
從圖一～圖六可發現（箭頭為位移的方向及大小，四張圖皆同），Mesh row 的數量會影響 x 方向位移的準確度，而 column 的數量會影響 y 方向位移的準確度，在應力方面 Mesh 的密度越高分佈越平滑。

C. Effect of parameter a

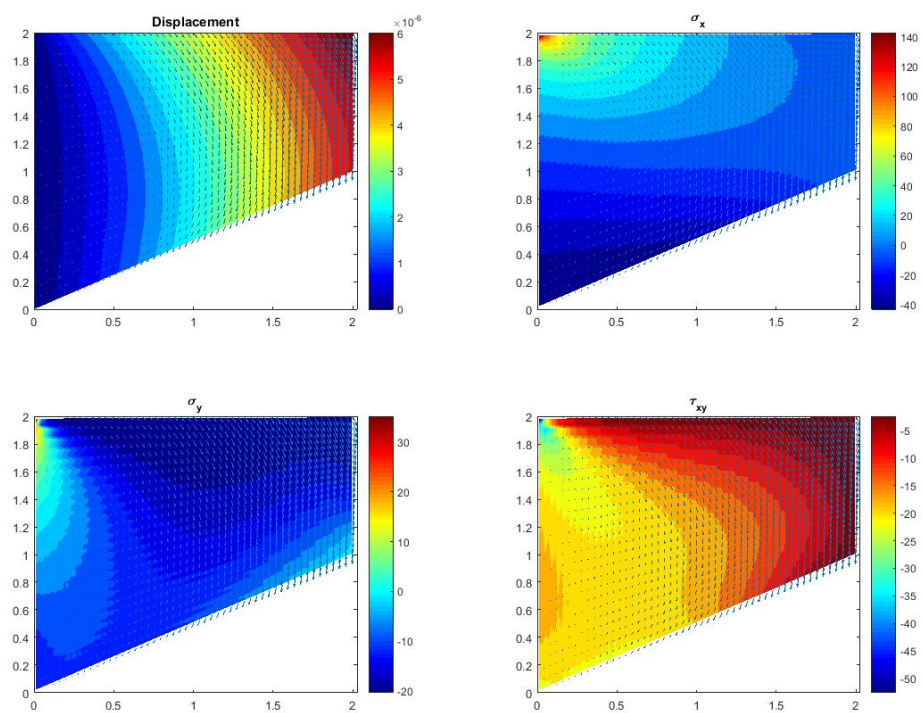
以下為不同的 a 所計算出的結果（皆為 25x50 mesh）



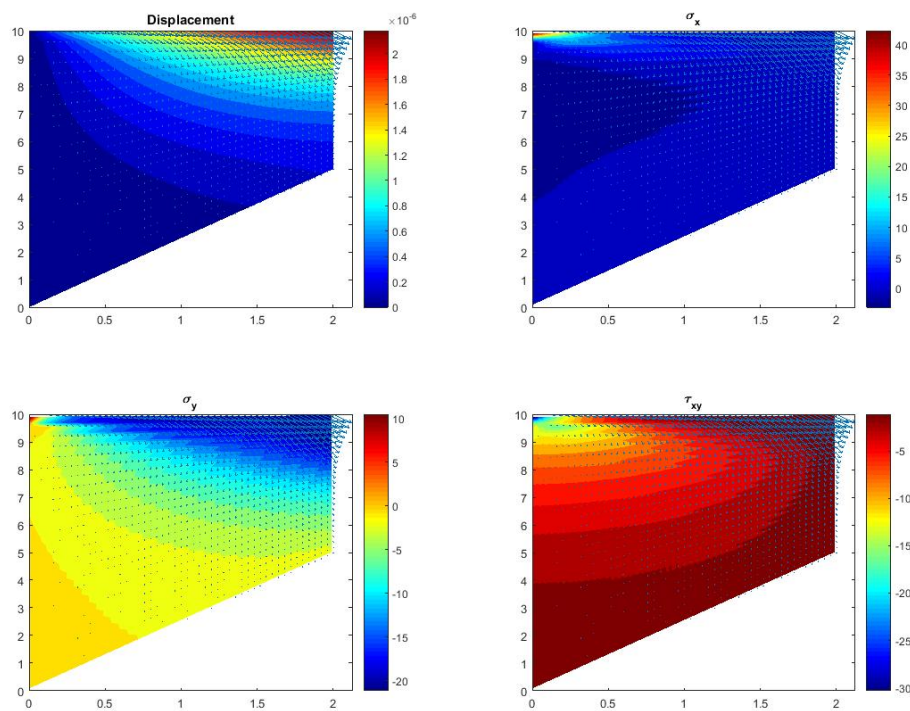
圖七 a=0.1



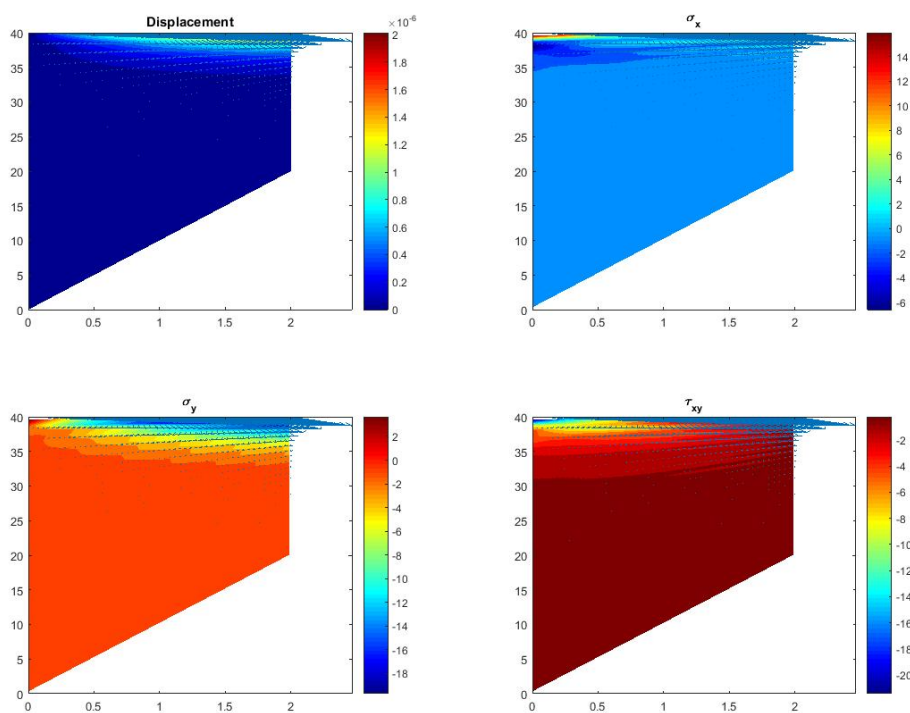
圖八 $a=0.5$



圖九 $a=1$



圖十 $a=5$

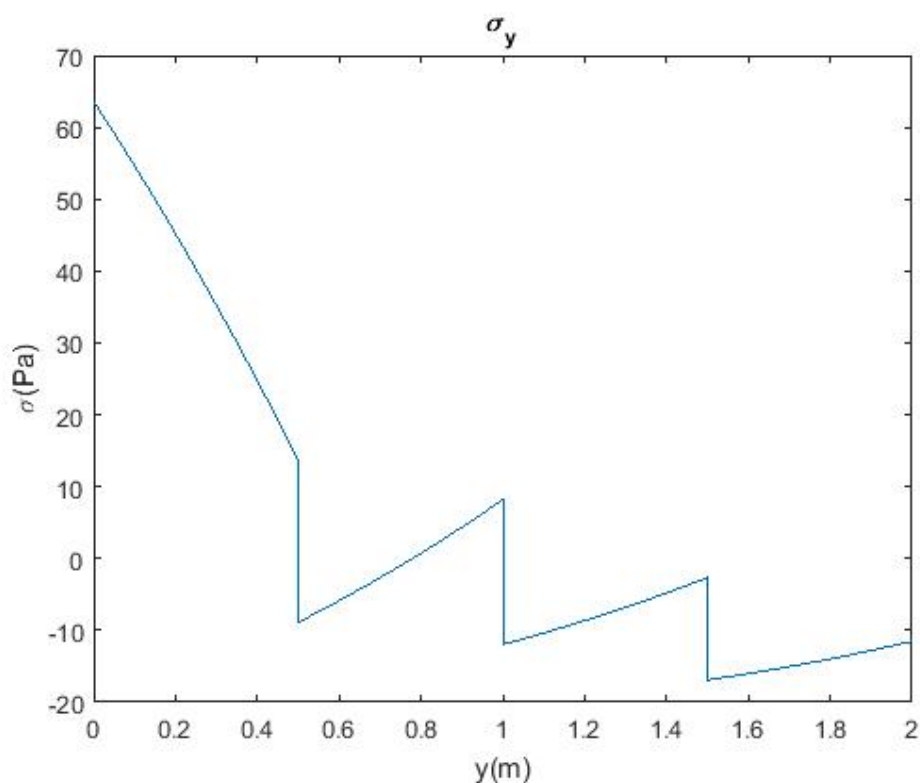


圖十一 $a=20$

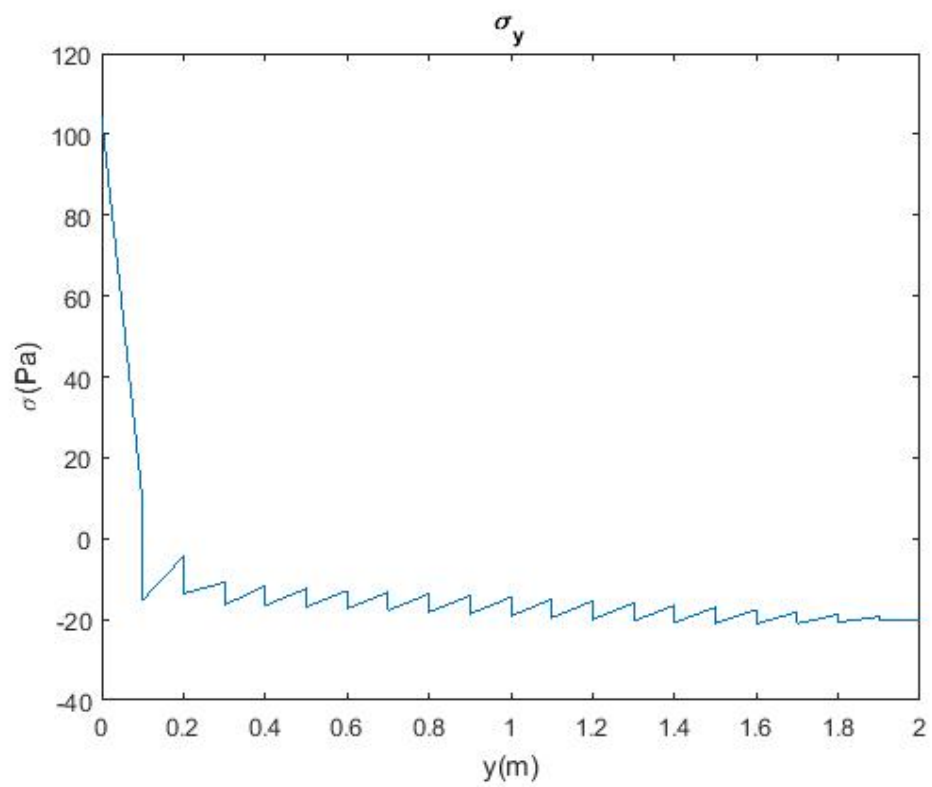
從圖七～圖十一可觀查到，位移部份隨著 a 的增加，越集中在上半部，且數值越來越低，這是由於隨著 a 的增加會降低梁的細長比，增加其剛性，同樣的現象也可在應力中觀察到。

D. Stress on boundary

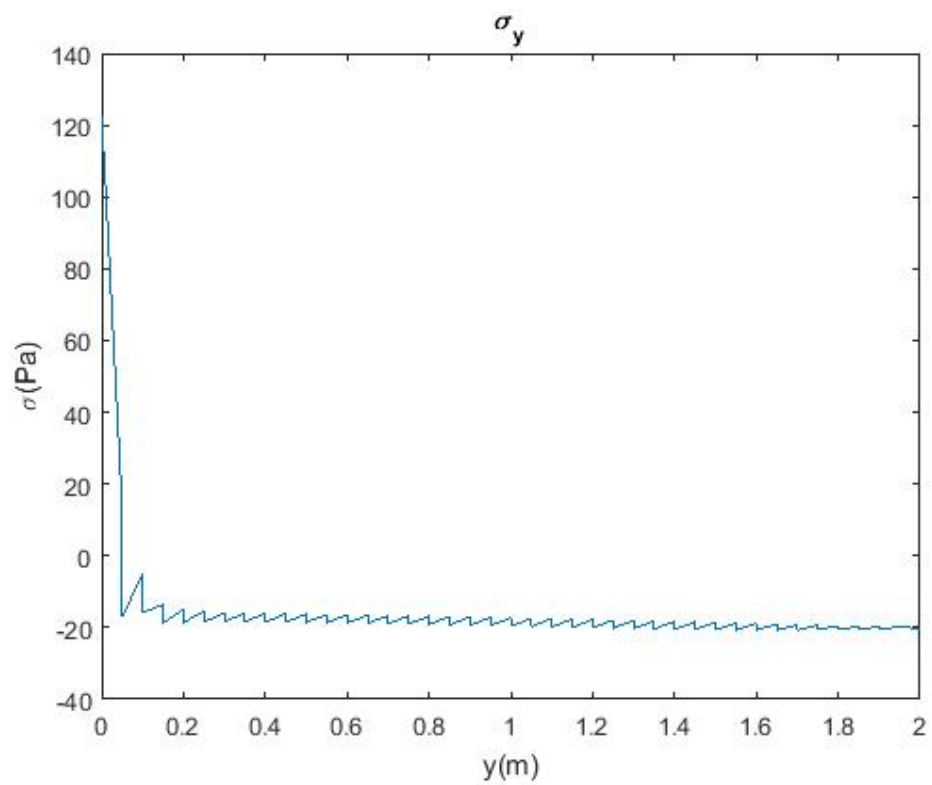
在邊界上的 σ_y 應該與作用在邊界上的分佈力一致，因此我們可以 σ_y 畫出來以觀察 fem 的結果在邊界上的行為。



圖十二 2x4 Mesh 的 σ_y



圖十三 10x20 Mesh 的 σ_y



圖十四 20x40 Mesh 的 σ_y

邊界上的分佈力為-20N/m，因此 σ_y 的值應為-20Pa，由圖十二~十四可觀查到值大致上相當接近-20Pa，隨著 mesh 的數量越多越準確，但可以觀察到就算是 column mesh 到了 40，在接近 $y=0$ 附近仍有一距離-20 較遠的值，因為在該點附近有位移=0 這個邊界條件，在這附近的 stress 並不會與分佈力相等。