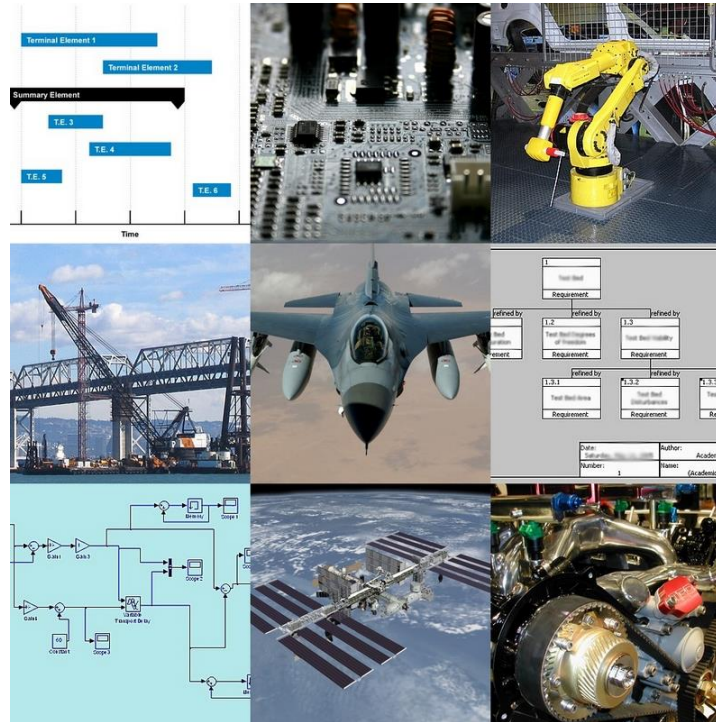
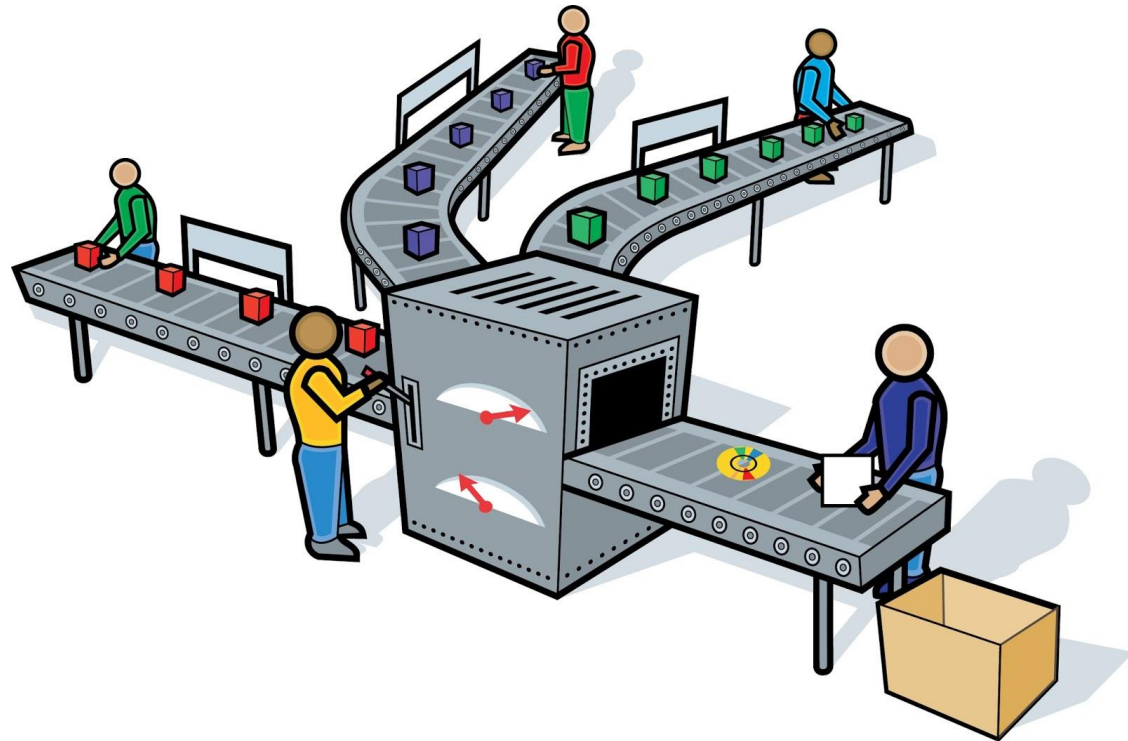


MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS DE EVENTOS DISCRETOS



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Introducción a Simulación Sist. de Eventos Discretos

Sistema de Eventos Discretos. Si los valores de las variables toman valores de un conjunto finito de valores (x_1, x_2, \dots, x_n) en el tiempo (ej. longitud de una cola $x \in \mathbb{N}$)



Ejemplos de Sistemas de Eventos Discretos



Cola en un supermercado



Sistema de logística



Call Center

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Introducción a Simulación Sist. de Eventos Discretos



El **modelo** de un **sistema** se utiliza para comprender y prever el comportamiento del sistema real.

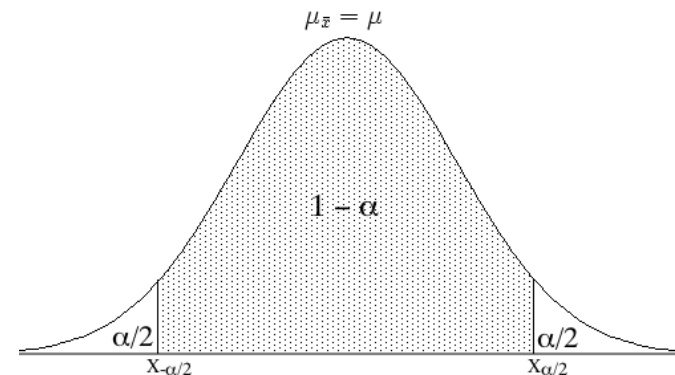
- ❑ Si las relaciones matemáticas o lógicas que comprende el **modelo** son **sencillas**, entonces será posible utilizar un procedimiento **analítico** para obtener una **solución o respuesta exacta** sobre las características de interés del sistema analizado.
- ❑ No obstante, si las relaciones son **complejas**, puede ocurrir que no se pueda evaluar analíticamente el problema. En este caso, será necesario acudir a la simulación del sistema, **evaluando numéricamente** el modelo y analizando los datos obtenidos para **estimar** las características de dicho sistema.

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Introducción a Simulación Sist. de Eventos Discretos

Estimación/Simulación Numérica

- **No comparable a la solución analítica**
 - No se obtiene resultados exactos (**desventaja**)
 - Da margen para a modelos complejos, realistas (**ventaja**)
- Respuesta aproximada a problema concreto es mejor que respuesta exacta a problema aproximado/simplificado.
- Consecuentemente considerado como la más útil y potente aproximación a modelos matemáticos.



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Introducción a Simulación Sist. de Eventos Discretos

¿Qué hacer con un Modelo Lógico/Matemático?

- Si el modelo es bastante simple, usar matemática tradicional (*teoría de colas, ecuaciones diferenciales, programación lineal*) para obtener "respuestas"
 - **Ventaja:** obtiene respuestas "exactas" al modelo del sistema
 - **Inconveniente:** puede involucrar demasiadas simplificaciones para hacer al modelo analíticamente tratable: hace peligrar la validez.
- En muchos sistemas reales la complejidad inherente hace que se requieran **modelos complejos** → se recurre a la **simulación numérica**.
- **Simulación por Ordenador:** Es el proceso de diseño y creación de modelos computerizados del sistema y realización de experimentos numéricos basados en ordenador.

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Introducción a Simulación Sist. de Eventos Discretos

Ventajas de la Simulación Numérica

- **Flexibilidad** para modelar las cosas como son (aun cuando sean complejas)
 - Posibilidad de simplificaciones, pero corremos el riesgo de dar respuestas exactas a problemas equivocados.
 - Mejor control sobre las condiciones del experimento que si se realizase sobre el propio sistema.
 - Permite estudiar un sistema cuya evolución es muy dilatada en el tiempo (aceleración temporal).
- Permite **incertidumbre** en modelado
 - La única cosa que es seguro: nada está por seguro
 - Peligro de ignorar variabilidad del sistema
 - Validez del modelo

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Introducción a Simulación Sist. de Eventos Discretos

Inconvenientes de la Simulación Numérica

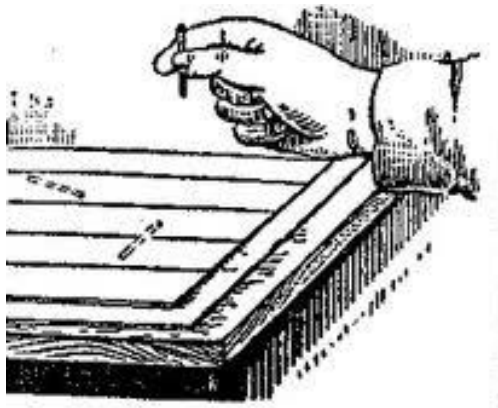
- **No obtiene respuestas exactas!**, sólo aproximaciones, estimaciones.
 - Al igual que ocurre con la mayoría de métodos modernos y a diferencia de modelos matemáticos.
- Obtiene **salidas aleatorias** (RIRO) de simulaciones estocásticas
 - Diseño estadístico, análisis de experimentos de simulación
 - Diseño de experimentos que permitan reducir la varianza de los resultados

Cada ejecución de un modelo estocástico de simulación da como resultado únicamente una estimación de las características o comportamiento del modelo para un conjunto particular de parámetros de entrada. Por lo tanto, no bastará con la ejecución del modelo una sola vez, sino que habrá que realizar una serie de repeticiones para obtener una muestra representativa del funcionamiento del sistema.

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

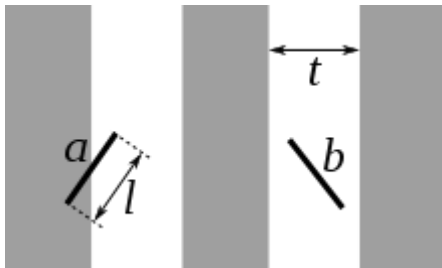
Tema 1: Introducción a Simulación Sist. de Eventos Discretos

Simulación a Mano: El Problema de la Aguja de Buffon



Problema clásico de probabilidad geométrica. Estima el valor de π (George Louis Leclerc “conde de Buffon”, 1733)

- Planteamiento:** Lanza la aguja de longitud l sobre un plano (mesa) con líneas paralelas equiespaciadas una distancia $t \geq l$. ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja caiga sobre alguna línea?

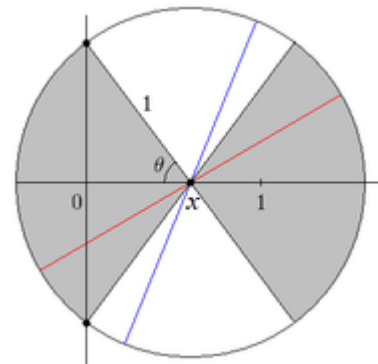


$x \rightarrow$ distancia entre el centro e la aguja y la línea más cercana

$$x \in [0, t/2]$$

$\theta \rightarrow$ ángulo entre la aguja y las líneas

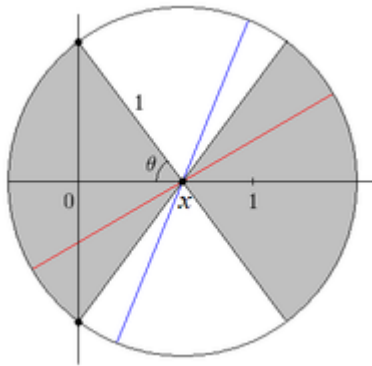
$$\theta \in [0, \pi/2]$$



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

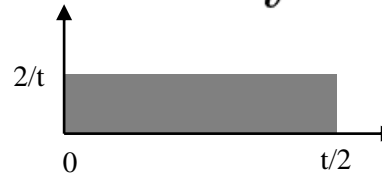
Tema 1: Introducción a Simulación Sist. de Eventos Discretos

Simulación a Mano: El Problema de la Aguja de Bufón

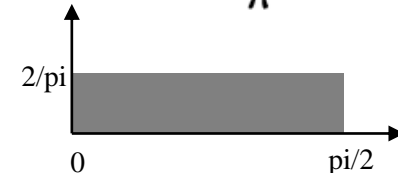


x y θ se distribuyen uniformemente en los intervalos $[0, t/2]$, y $[0, \pi/2]$, respectivamente. Sus funciones densidad de probabilidad son por tanto:

$$f_X(x) = \frac{2}{t} dx$$



$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{2}{\pi} d\theta$$



Y la función densidad conjunta es: $f_{X,\Theta}(x, \theta) = \frac{4}{t\pi} dx d\theta$

La condición para que la aguja cruce alguna línea viene dada por:

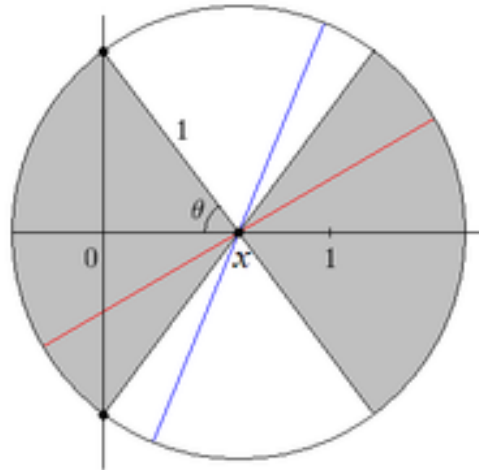
$$x \leq \frac{\ell}{2} \sin \theta$$

- $\theta = 0$ (aguja alineada con las líneas de la mesa) $\rightarrow x = 0$
- $\theta = \pi$ (aguja perpendicular a las líneas de la mesa) $\rightarrow x \leq l/2$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Introducción a Simulación Sist. de Eventos Discretos

Simulación a Mano: El Problema de la Aguja de Bufón



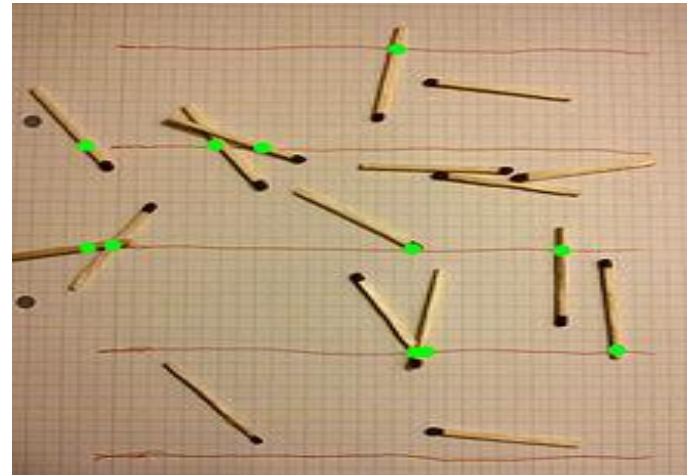
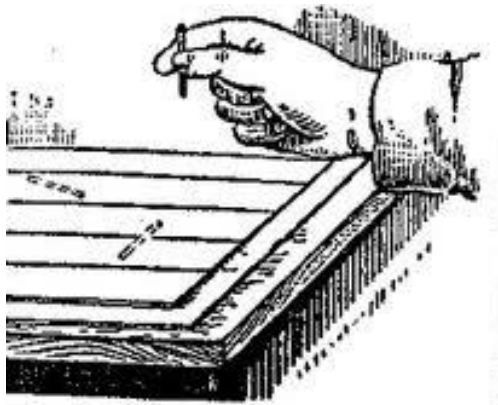
La **función de probabilidad** resulta de la integral de la función densidad:

$$P \text{ (la aguja cruce una línea)} = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{x=0}^{(\ell/2) \sin \theta} \frac{4}{t\pi} dx d\theta = \frac{2\ell}{t\pi}$$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Introducción a Simulación Sist. de Eventos Discretos

Simulación a Mano: El Problema de la Aguja de Bufón



Si se lanzan n agujas y h cruzan alguna línea, se obtiene:

$$\frac{h}{n} \approx \frac{2\ell}{t\pi}$$



$$\pi \approx \frac{2n\ell}{ht}$$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Introducción a Simulación Sist. de Eventos Discretos

¿Por qué lanzar agujas?

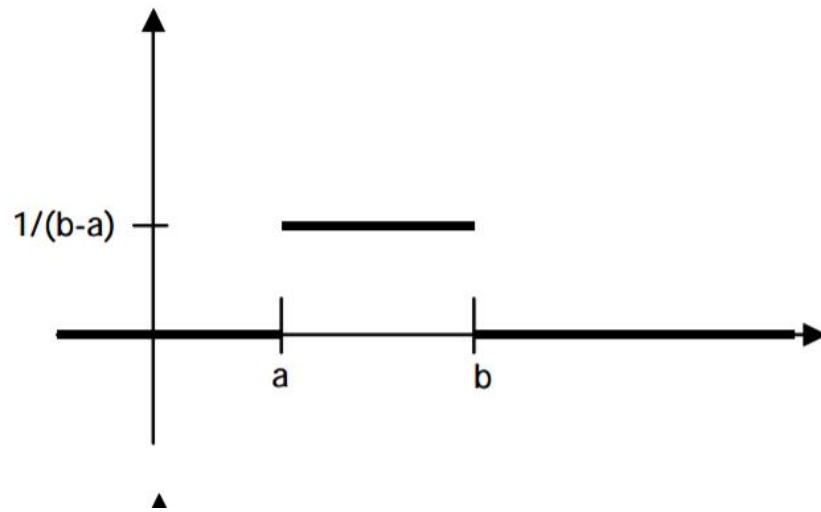
- El problema del Bufón de la aguja parece *naïve* ahora, pero tiene rasgos de la simulación importantes:
 - Experimento para estimar algo difícil de computar exactamente (en 1733)
 - Aleatoriedad, la estimación no será exacta
 - Repetición para reducir el error (cuanto más mejor)
 - Muestreo secuencial para controlar el error. Sigue lanzando hasta que la probabilidad de error en la estimación es “bastante pequeña”

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Introducción a Simulación Sist. de Eventos Discretos

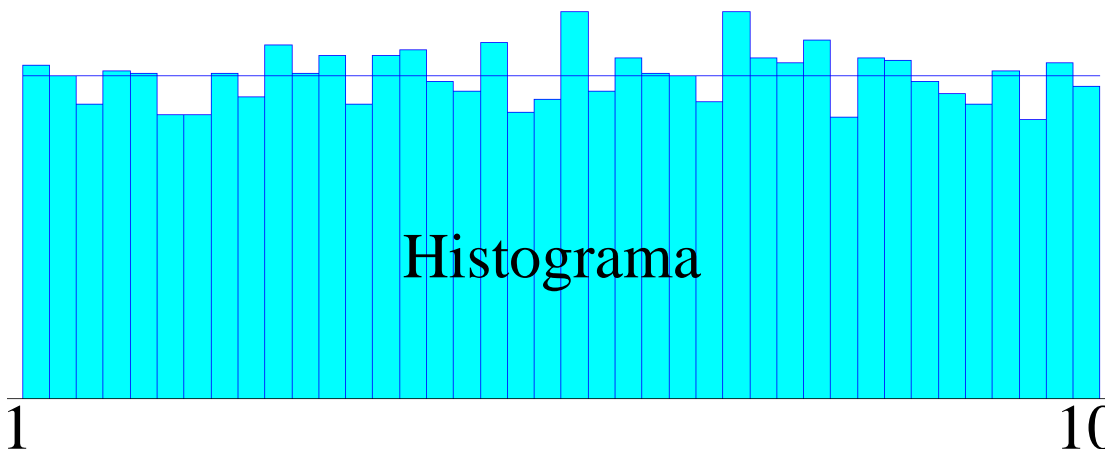
Modelado de Datos: Distribuciones de Probabilidad

Uniforme, UNIF(a,b)



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Rango: $[a, b]$
- Media: $(a+b)/2$
- Varianza: $(b-a)^2/12$



Histograma

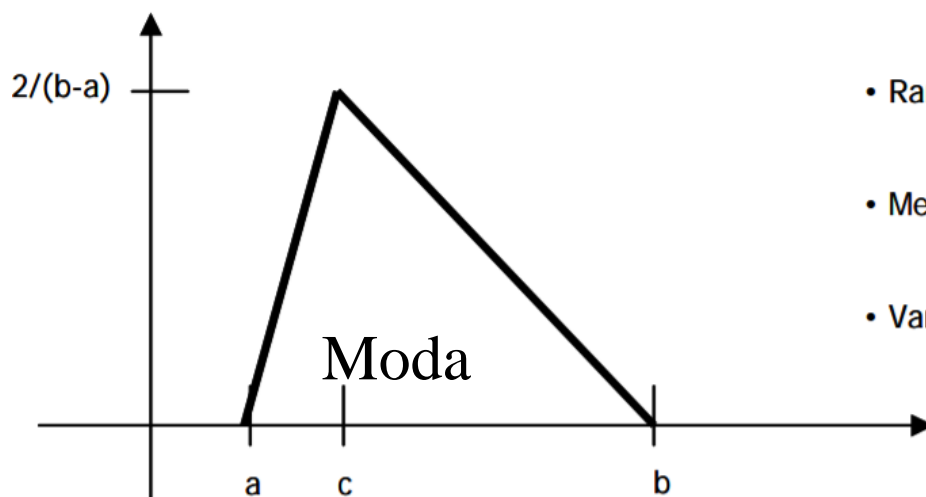
$UNIF(1,10)$
5000 muestras

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

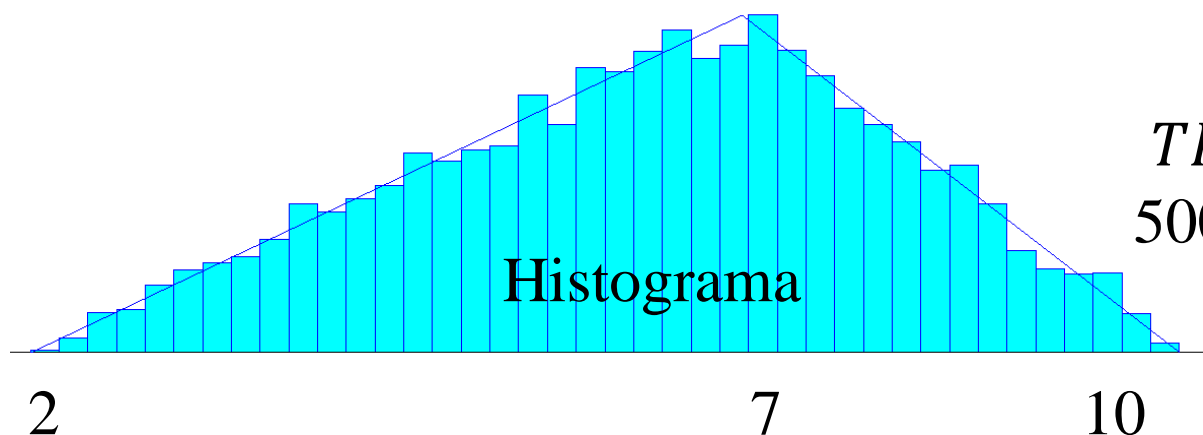
Tema 1: Introducción a Simulación Sist. de Eventos Discretos

Modelado de Datos: Distribuciones de Probabilidad

Triangular, $TRIA(a, c, b)$



- Rango: $[a, b]$
- Media: $(a+b+c)/3$
- Varianza: $(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)/18$



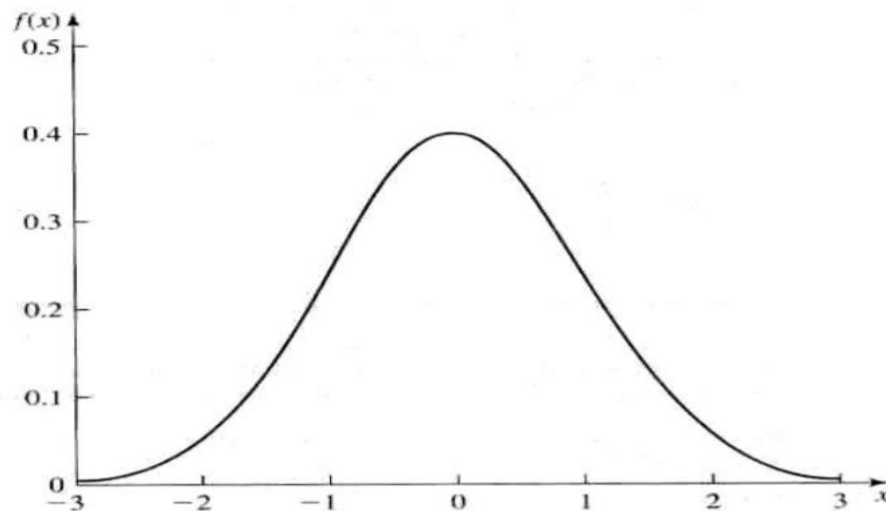
$TRIA(2, 7, 10)$
5000 muestras

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Introducción a Simulación Sist. de Eventos Discretos

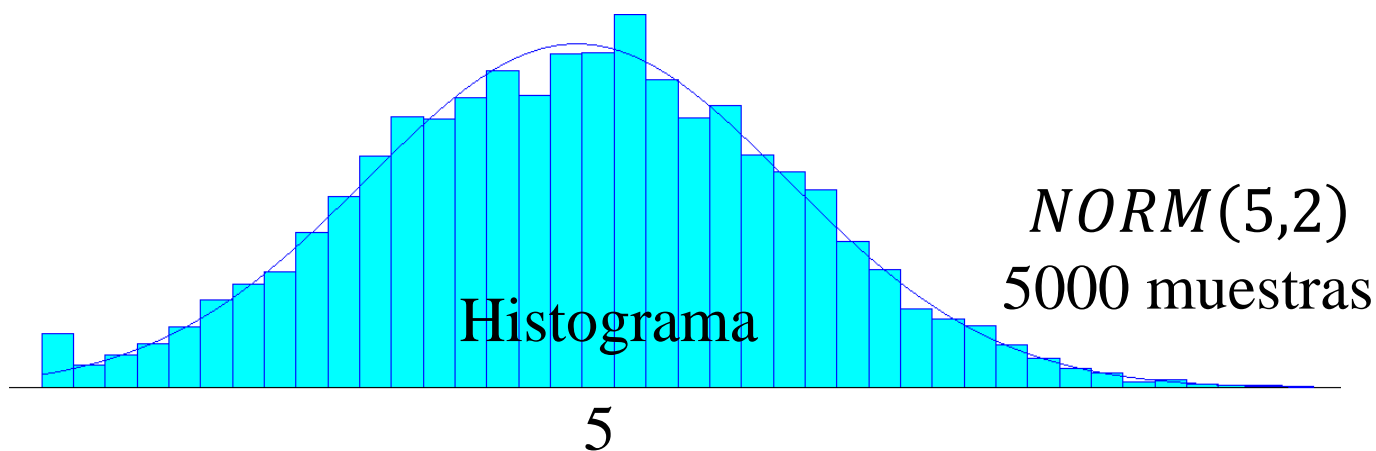
Modelado de Datos: Distribuciones de Probabilidad

Normal, $NORM(\mu, \sigma)$



- Rango: $(-\infty, \infty)$
- μ no acotada y σ positiva
- Media: μ
- Varianza: σ^2

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

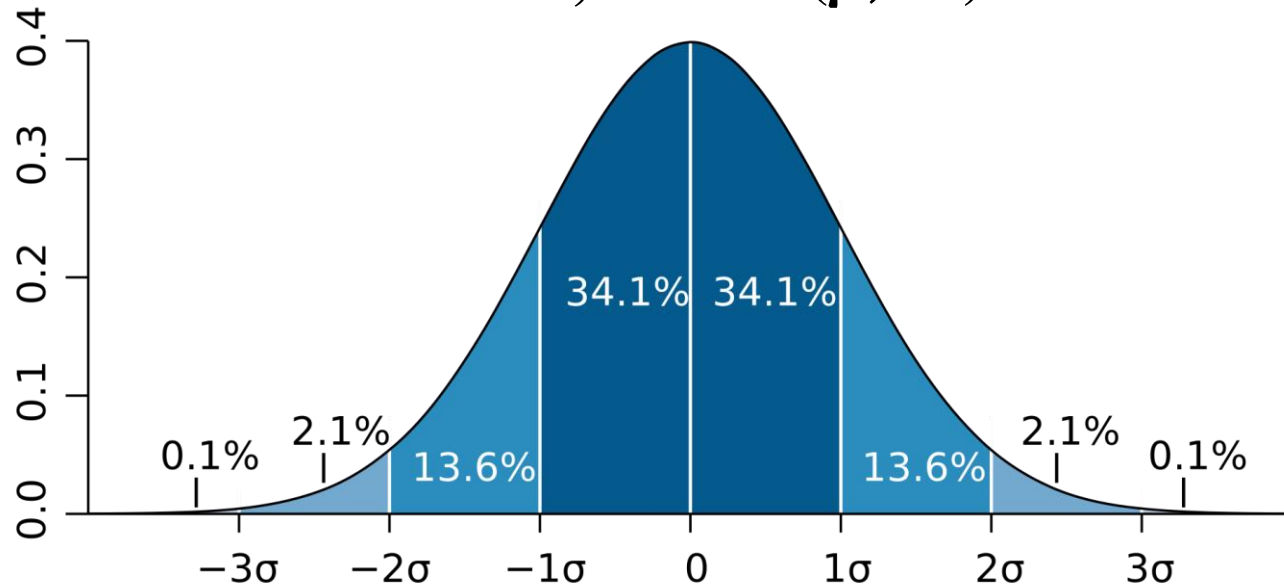


MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Introducción a Simulación Sist. de Eventos Discretos

Modelado de Datos: Distribuciones de Probabilidad

Normal, $\text{NORM}(\mu, \sigma^2)$



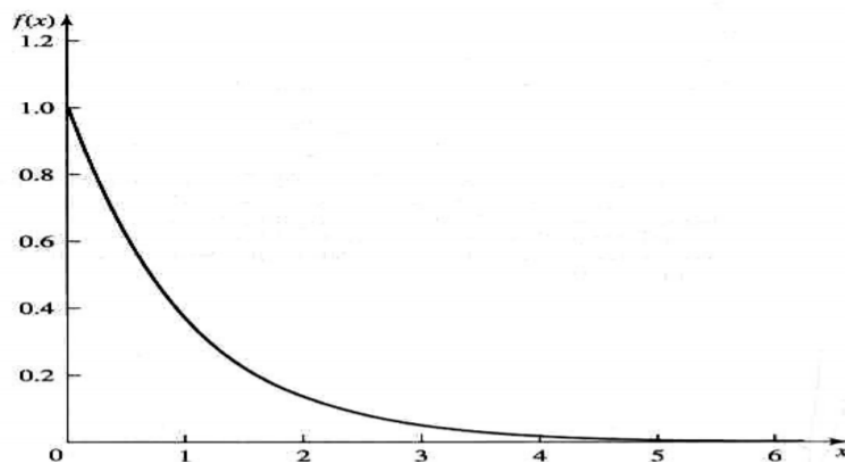
For the normal distribution, the values less than one standard deviation away from the mean account for 68.27% of the set; while two standard deviations from the mean account for 95.45%; and three standard deviations account for 99.73%.

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

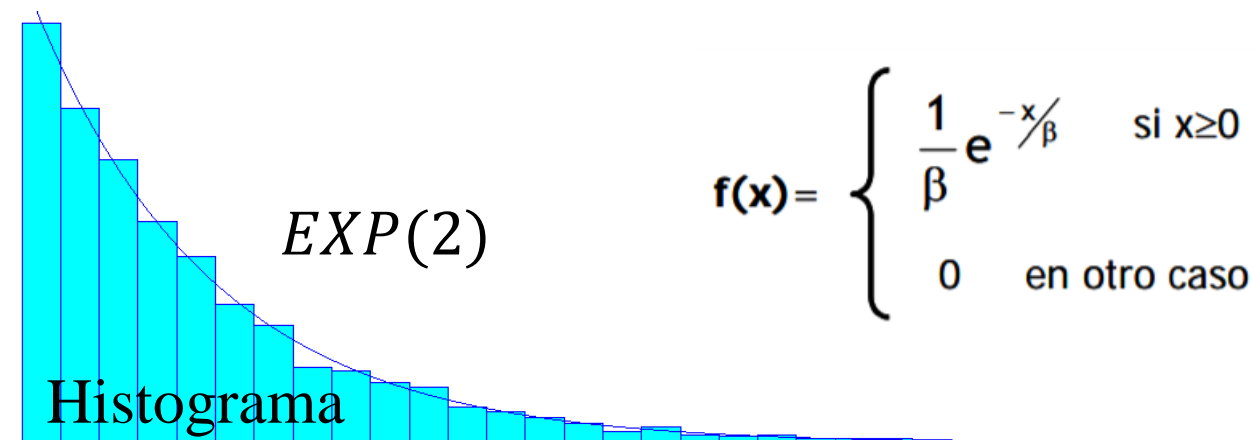
Tema 1: Introducción a Simulación Sist. de Eventos Discretos

Modelado de Datos: Distribuciones de Probabilidad

Exponencial, EXP(β)



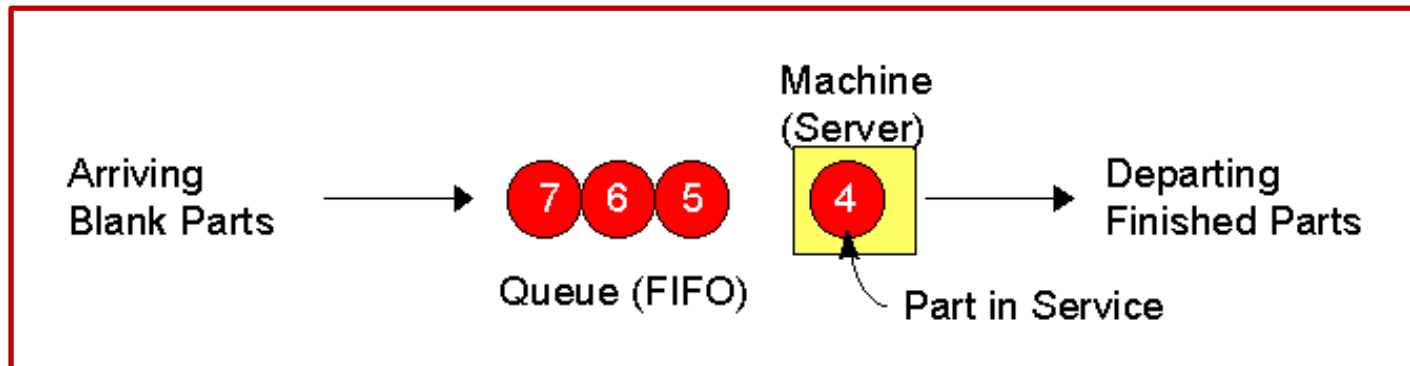
- Rango: $[0, \infty)$
- Media: β
- Varianza: β^2



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Un Sistema Simple de Procesado

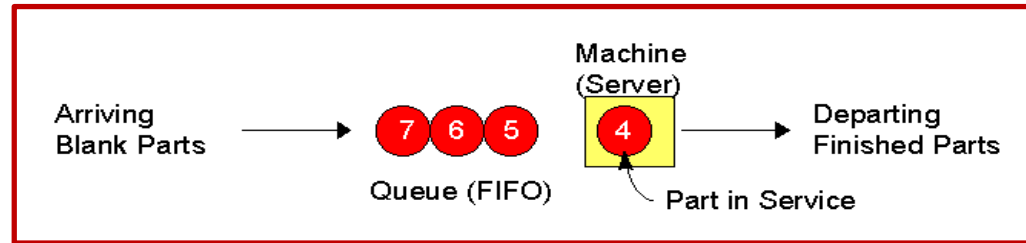


- **Objetivos:**
 - Estimar la producción esperada
 - Tiempo en la cola, longitud de la cola, ocupación de la máquina

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Un Sistema Simple de Procesado: Especificaciones



- **Condición inicial** (tiempo 0) vacío y ocioso
- **Unidades temporales:** minutos
- **Tiempos de llegada:** 0.00, 1.73, 3.08, 3.79, 4.41....,
 - Tiempos entre llegadas: 1.73, 1.35, 0.71, 0.62, 14.28, 0.70, 15.52, 3.15, 1.76, 1.00....,
- **Tiempos de servicio:** 2.90, 1.76, 3.39, 4.52, 4.46, 4.36, 2.07, 3.36, 2.37, 5.38, ...
- **Tiempo de Simulación** 20 minutos

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Objetivos del Estudio: Medidas del Rendimiento

❑ *Total de piezas producidas*

❑ *Tiempo medio de espera de piezas en cola:*

$$\frac{\sum_{i=1}^N D_i}{N}$$

N = no. piezas completadas que esperaron en cola

D_i = tiempo de espera en cola de la i -ésima pieza

Datos: $D_1 = 0$

$N \geq 1$

D_i : Estadístico discreto en el tiempo

❑ *Tiempo máximo de espera de piezas en cola :*

$$\max_{i=1,\dots,N} D_i$$

❑ *Media de piezas en cola:*

$$\frac{\int_0^{20} Q(t)dt}{20}$$

$Q(t)$ = número de piezas en cola en el instante t

Estadístico permanente en el tiempo

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Objetivos del Estudio: Medidas del Rendimiento

- ❑ **Número máximo de piezas en cola:**

$$\max_{0 \leq t \leq 20} Q(t)$$

- ❑ **Media y máximo del tiempo de flujo** de piezas (tiempo en el sistema, tiempo de ciclo)

$$\sum_{i=1}^P F_i / P, \quad \max_{i=1, \dots, P} F_i \quad \begin{array}{l} F_i = \text{t. de flujo de la } i\text{--ésima pieza} \\ P = \text{Nº de piezas completadas} \end{array}$$

- ❑ **Utilización de la máquina** (proporción de tiempo ocupada)

$$\frac{\int_0^{20} B(t) dt}{20} \quad B(t) = \begin{cases} 1 & \text{si la máquina está ocupada en tiempo } t \\ 0 & \text{si la máquina está ociosa en tiempo } t \end{cases}$$

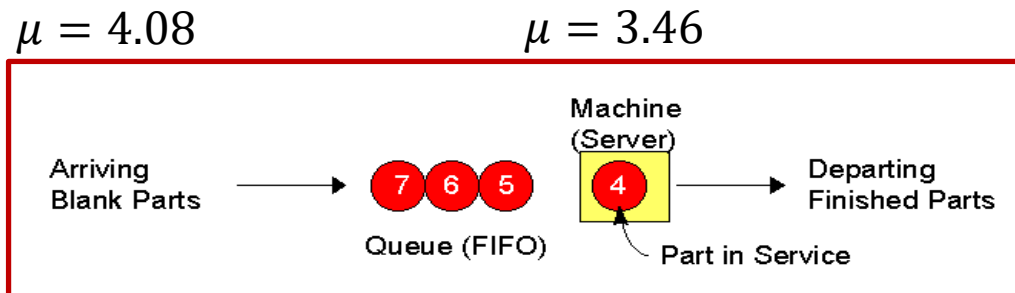
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Un Sistema Simple de Procesado: Opciones del Análisis

Opción Simplificada: Considerar Suposiciones

1. Tiempo medio entre llegadas = **4.08 minutos**
2. Tiempo medio de servicio = **3.46 minutos**
3. ¡Si los promedios estimados fueran estables en el tiempo, asumiendo que todos los tiempos entre llegadas son mayores que los de servicio (ninguna variabilidad) → **nunca habría cola!**



Las suposiciones tienen sus límites.

Simplificar mucho el problema hace que el modelo no sea realista.

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Mecanismo de la Simulación

- **Operaciones individuales** (llegadas, tiempos de servicio) ocurrirán exactamente como en la realidad.
- Movimientos, los cambios ocurren conforme al “**tiempo**”, en el orden correcto.
- **Los elementos interactúan entre sí.**
- Se usan “**observadores**” para obtener medidas del rendimiento.
- Muchos detalles, libros de registro.
- Seguimiento automático del **modelo** por el software.



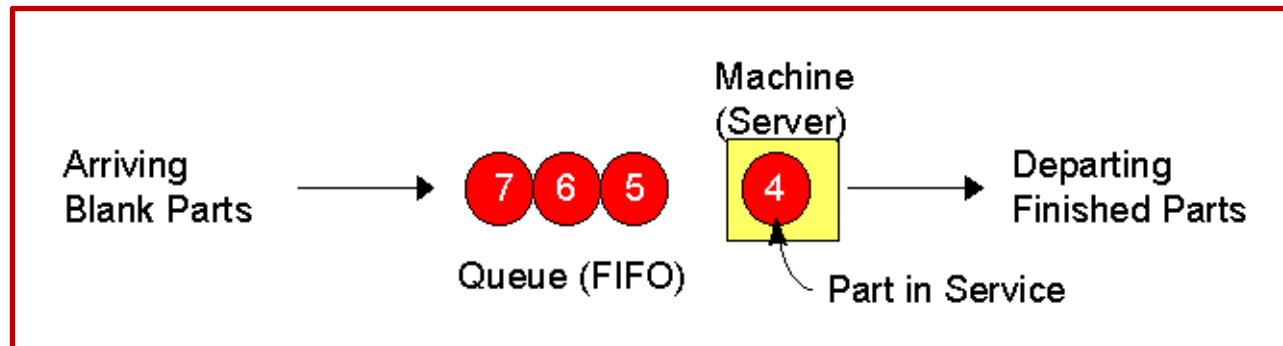
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Elementos de la Simulación

ENTIDADES: término utilizado para representar personas, objetos, o cualquier otro elemento que se mueva a través del modelo, pudiendo causar cambios en el estado del sistema y/o afectar a otras entidades.

- Son los **Objetos Dinámicos** en la simulación—son creados, cambian, y desaparecen (en algunos casos)
- Normalmente representan cosas “reales”
 - Nuestro modelo: entidades son las maletas



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Elementos de la Simulación

ATRIBUTOS: Un atributo es una característica común de todas las entidades (de un tipo concreto), pero con un valor específico que permite diferenciar una de otra.

- Todas entidades poseen un mismo atributo, pero con valores diferentes para entidades diferentes, por ejemplo:
 - Tiempo de llegada
 - Fecha de pedido
 - Prioridad
 - Color
- Valor del atributo liga a una entidad determinada.
- Como **“variables locales”** (a las entidades)
- Algunos se crean y mantienen de forma automática en Arena, y otros pueden ser definidos por el usuario.

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Elementos de la Simulación

VARIABLES (Globales): Una variable es un componente de información que refleja alguna característica del sistema, sin importar cuántas o qué tipos de entidades pueda haber.

- Reflejan características del sistema, indiferente de entidades
- Son únicas (una única copia) en el modelo
- No están ligadas a las entidades
- Entidades pueden acceder, modificar variables. Ejemplos de variables:
 - Tiempo de viaje entre estaciones
 - Número de piezas en sistema
 - Reloj de la simulación
- Algunas variables son creadas y gestionadas automáticamente por Arena, y otras pueden ser definidas por usuario.

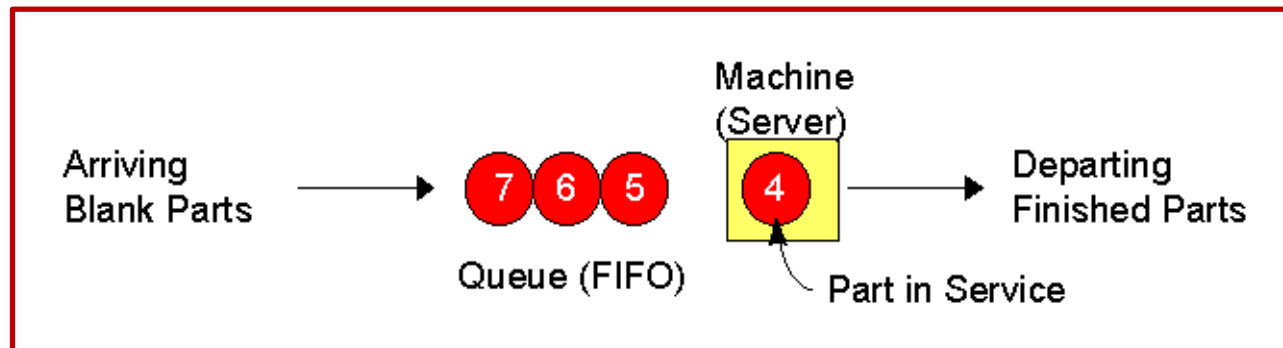
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Elementos de la Simulación

RECURSOS: Los recursos representan todo aquello necesario para realizar un proceso: personas, máquinas, herramientas, etc. Son elementos estáticos del modelo y en ellos son alojadas las entidades para ser procesadas.

- Aquello por lo que entidades compiten: Personas, Equipos, Espacio,...
- Entidad **toma** un recurso, lo **usa**, y lo **libera**
- "Un" recurso puede tener varias **unidades de capacidad**
 - Asientos a una mesa en un restaurante
 - Agentes de facturación en el mostrador de una aerolínea
- Se puede cambiar número de unidades del recurso durante la simulación



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Elementos de la Simulación

COLAS: Son espacios de espera para las entidades en su movimiento por el sistema.

- Puede tener **capacidad finita** para modelar limites de espacio (habría que modelar lo que ocurre con la cola llena)
- Típicamente nos interesa conocer la **longitud de la cola** y el **tiempo de espera** en ella.
- Son elementos pasivos del modelo, no se pueden crear durante la ejecución del programa.



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

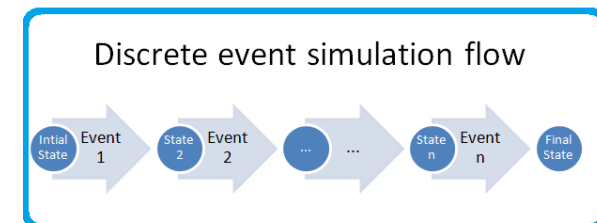
Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Elementos de la Simulación

EVENTOS: Un evento es algo que ocurre en un instante de tiempo (simulado) que puede hacer cambiar, atributos, variables o acumuladores estadísticos. A la hora de ejecutar el modelo, básicamente todo se centra en los eventos.

Planificación Dinámica La planificación de eventos

- Identificar eventos característicos, i.e., que producen cambios de estado.
- Decidir sobre la lógica (efecto) de los cambios para cada tipo de evento.
- Mantener el **reloj** de la simulación, **calendario de eventos** futuros.
- *Salto* de un evento al próximo: actualización de los estadísticos y el calendario de eventos.
- Después de cada evento, el evento del principio del calendario se borra para ver en qué instante de tiempo se está, y lo que hay que hacer a continuación.
- Reglas de parada.



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Un Sistema Simple de Procesado: Eventos

- **Llegada de nuevas piezas al sistema**
 - Actualizar los estadísticos dependientes del tiempo (de último evento hasta ahora)
 - Area bajo $Q(t)$ “número de piezas en cola”
 - Max de $Q(t)$
 - Area bajo $B(t)$ “ocupación del scanner 0/1 “
 - "Marcar" (atributo $t_{llegada}$) la llegada de la maleta con la hora.
 - Planificar la llegada de la siguiente pieza
 - Si máquina/recurso está ociosa:
 - Comienzo del proceso (planificar la salida), hacer máquina ocupada, Computar tiempo en cola (que será 0).
 - Si no (máquina/recurso ocupada):
 - Poner pieza al final de la cola, incrementar la variable longitud-cola

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

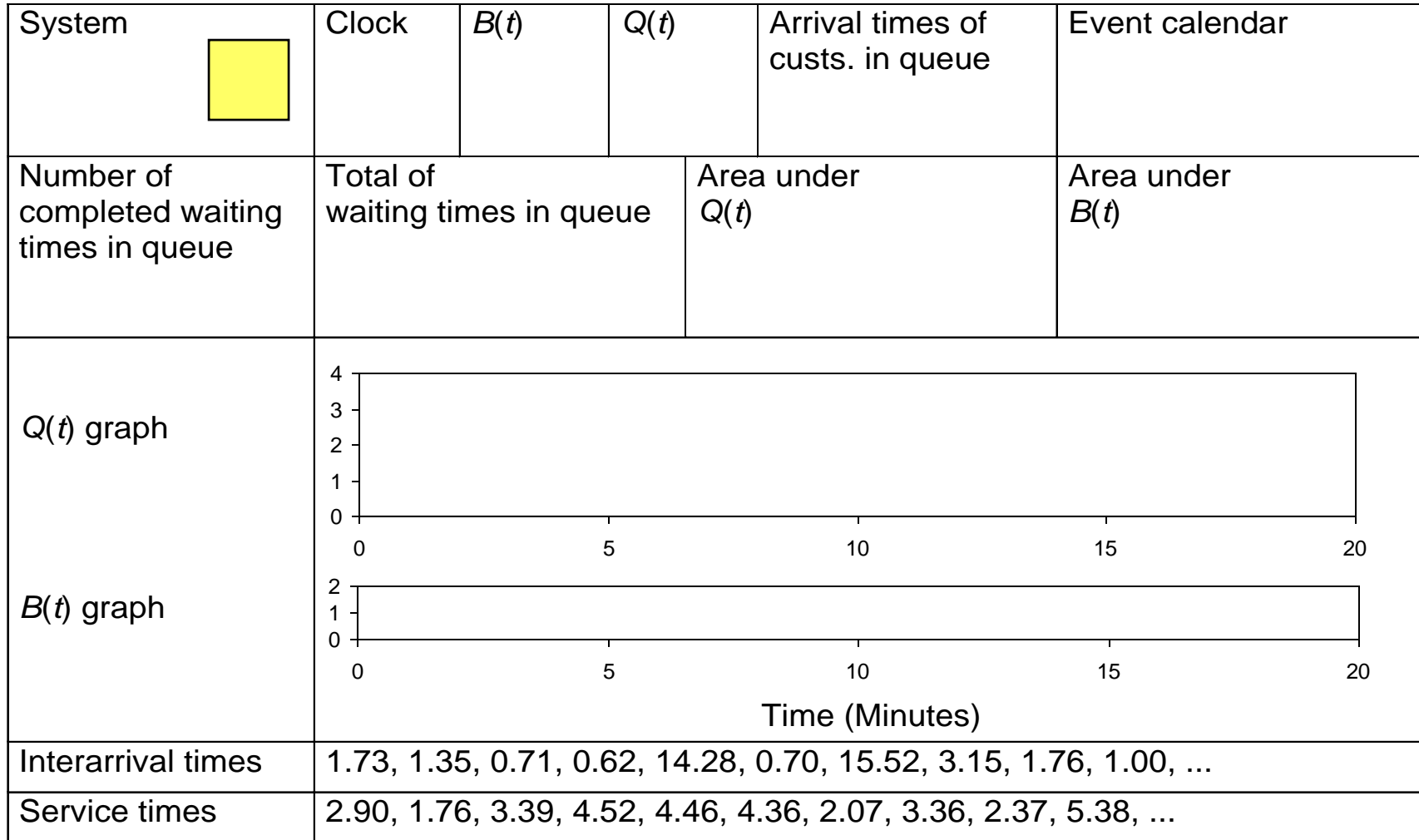
Un Sistema Simple de Procesado: Eventos

- **Salida** (cuando un servicio se completa)
 - Incrementar el estadístico correspondiente (número de piezas producidas)
 - Calcular el tiempo de fabricación (*Tiempo actual* – *Tiempo Llegada*)
 - Actualizar los estadísticos dependientes del tiempo.
 - **Si la cola NO está vacía:**
 - Coger la primera pieza de la cola, computar su tiempo de espera, comenzar el servicio (planificar el evento de salida) y reducir longitud de la cola.
 - **Si está vacía:**
 - Poner a la máquina/recurso ociosa. No habrá que planificar eventos de salida en el calendario de eventos futuros)
- **Fin o Parada**
 - Actualizar los estadísticos de tiempo (final de la simulación)
 - Calcular las medidas de rendimiento usando los valores de los estadísticos


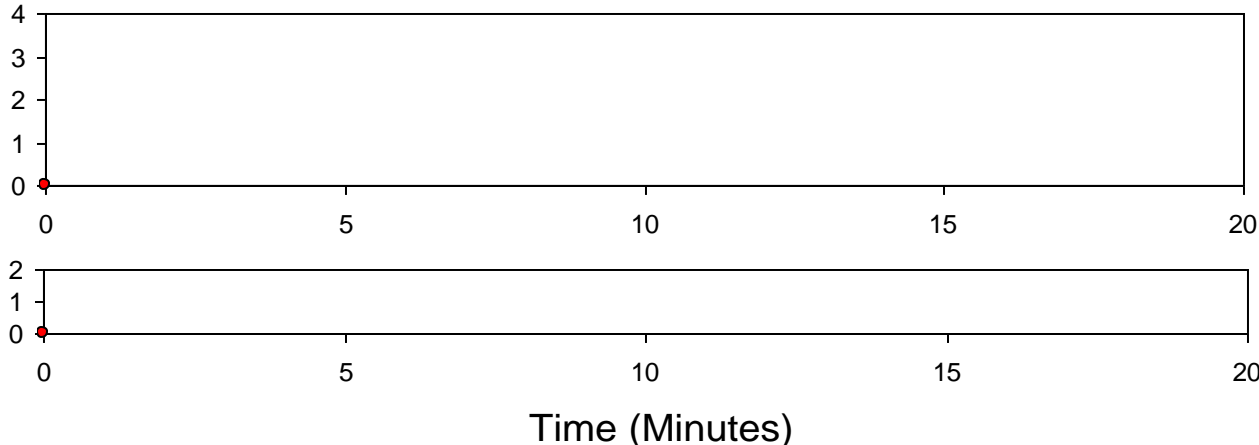
SIMULACIÓN MANUAL

Especificaciones para el Sistema Simple de Procesado

- **Reloj de simulación** (interno en Arena)
- **Calendario de Eventos:** Registro de lista de eventos
 - [No. Entidad, Hora del Evento, Tipo del Evento]
 - Mantener ordenado por orden de Hora del Evento: siguiente evento siempre al principio del registro.
 - Inicialmente, planificar la primera Llegada y el evento Fin
- **Variables de estado:** describen el estado actual
 - Estado del scanner $B(t) = 1$ ocupado, 0 ocioso.
 - Número de entidades en la cola $Q(t)$
 - Hora de llegada de cada entidad a la cola



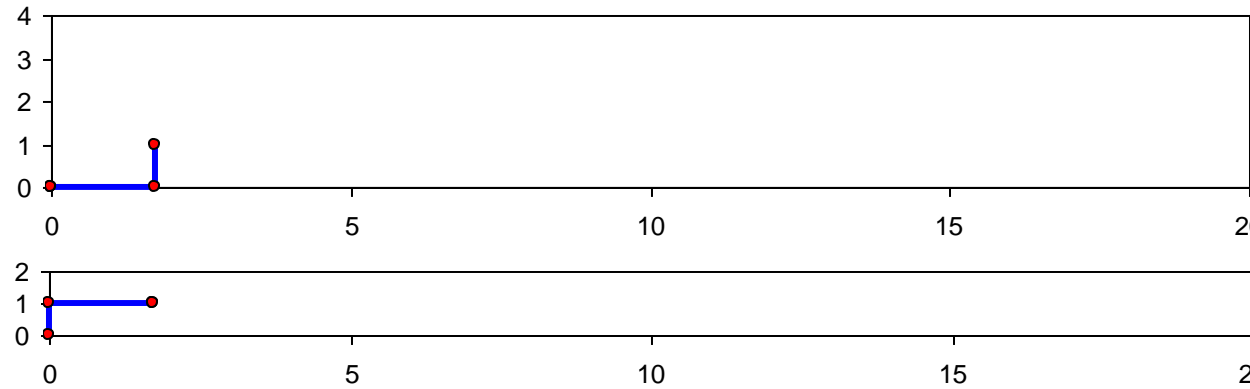
$t = 0.00$, Initialize

System <div></div>	Clock 0.00	$B(t)$ 0	$Q(t)$ 0	Arrival times of custs. in queue <empty>	Event calendar [1, 0.00,Arr] [-, 20.00, End]
Number of completed waiting times in queue 0	Total of waiting times in queue 0.00			Area under $Q(t)$ 0.00	Area under $B(t)$ 0.00
<div>$Q(t)$ graph</div> <div>$B(t)$ graph</div>	<div></div>				
Interarrival times	1.73, 1.35, 0.71, 0.62, 14.28, 0.70, 15.52, 3.15, 1.76, 1.00, ...				
Service times	2.90, 1.76, 3.39, 4.52, 4.46, 4.36, 2.07, 3.36, 2.37, 5.38, ...				

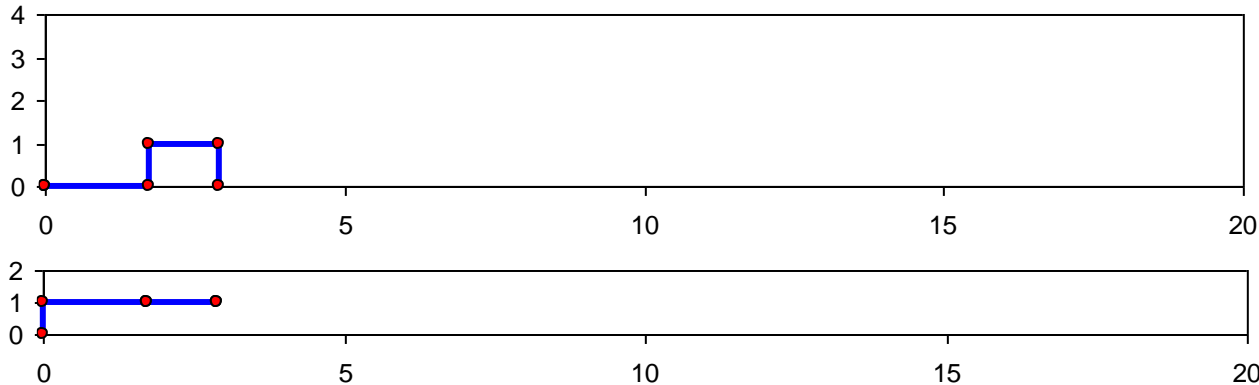
$t = 0.00$, Arrival of Part 1

System <div><div></div><div>1</div></div>	Clock 0.00	$B(t)$ 1	$Q(t)$ 0	Arrival times of custs. in queue <empty>	Event calendar [2, 1.73, Arr] [1, 2.90, Dep] [-, 20.00, End]
Number of completed waiting times in queue 1	Total of waiting times in queue 0.00			Area under $Q(t)$ 0.00	Area under $B(t)$ 0.00
$Q(t)$ graph $B(t)$ graph					
Interarrival times	1.73 , 1.35, 0.71, 0.62, 14.28, 0.70, 15.52, 3.15, 1.76, 1.00, ...				
Service times	2.90 , 1.76, 3.39, 4.52, 4.46, 4.36, 2.07, 3.36, 2.37, 5.38, ...				

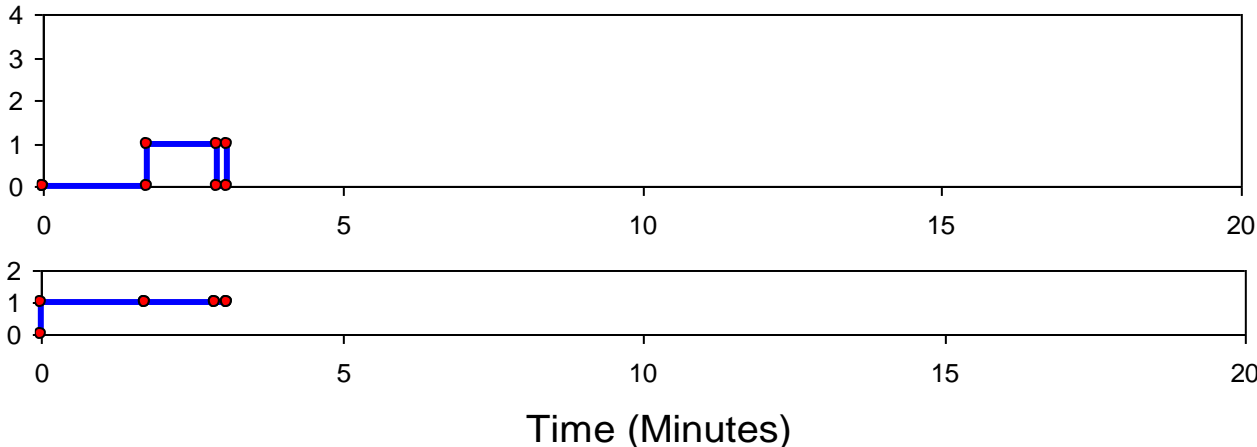
$t = 1.73$, Arrival of Part 2

System <div><div>2</div><div>1</div></div>	Clock 1.73	$B(t)$ 1	$Q(t)$ 1	Arrival times of custs. in queue (1.73)	Event calendar [1, 2.90, Dep] [3, 3.08, Arr] [–, 20.00, End]
Number of completed waiting times in queue 1	Total of waiting times in queue 0.00		Area under $Q(t)$ 0.00		Area under $B(t)$ 1.73
$Q(t)$ graph $B(t)$ graph	 <p>Time (Minutes)</p>				
Interarrival times	1.73, 1.35 , 0.71, 0.62, 14.28, 0.70, 15.52, 3.15, 1.76, 1.00, ...				
Service times	2.90 , 1.76, 3.39, 4.52, 4.46, 4.36, 2.07, 3.36, 2.37, 5.38, ...				

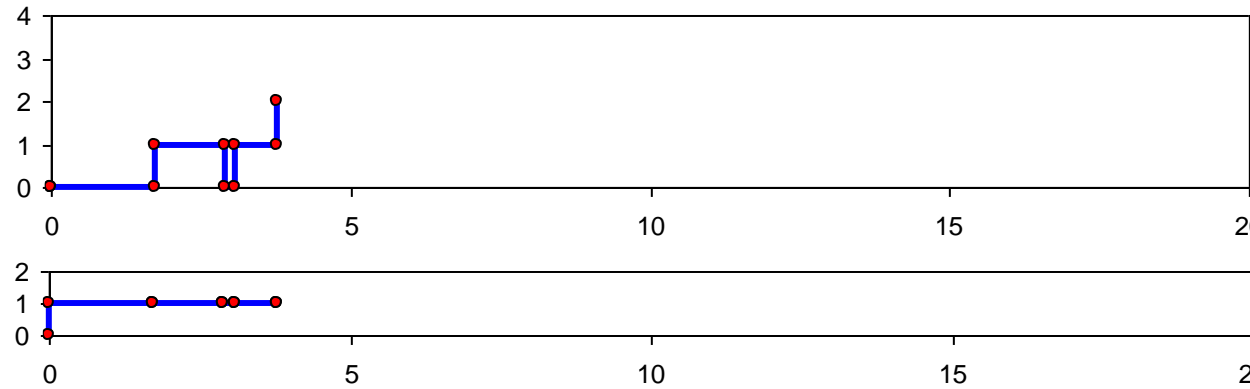
$t = 2.90$, Departure of Part 1

System <div><div></div><div>2</div></div>	Clock 2.90	$B(t)$ 1	$Q(t)$ 0	Arrival times of custs. in queue <empty>	Event calendar [3, 3.08, Arr] [2, 4.66, Dep] [-, 20.00, End]
Number of completed waiting times in queue 2	Total of waiting times in queue 1.17		Area under $Q(t)$ 1.17		Area under $B(t)$ 2.90
$Q(t)$ graph $B(t)$ graph					
Interarrival times	1.73, 1.35 , 0.71, 0.62, 14.28, 0.70, 15.52, 3.15, 1.76, 1.00, ...				
Service times	2.90, 1.76 , 3.39, 4.52, 4.46, 4.36, 2.07, 3.36, 2.37, 5.38, ...				

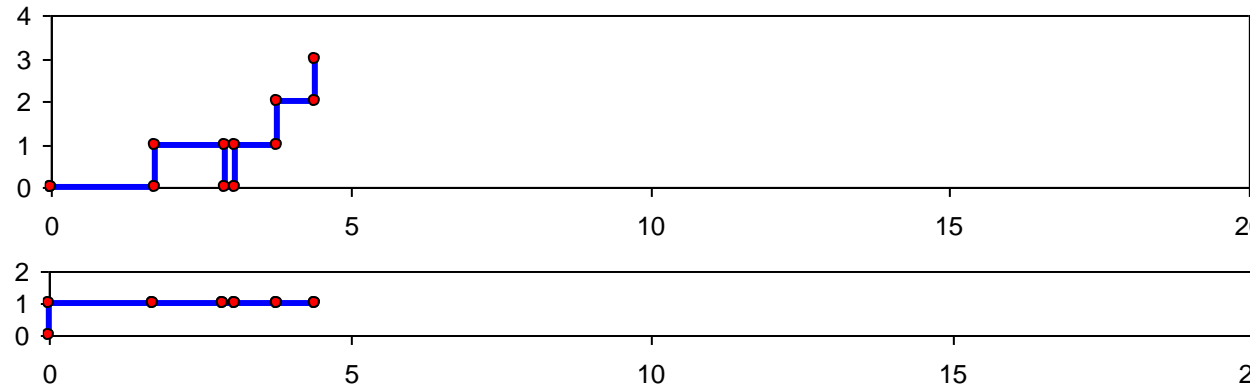
$t = 3.08$, Arrival of Part 3

System <div><div>3</div><div>2</div></div>	Clock 3.08	$B(t)$ 1	$Q(t)$ 1	Arrival times of custs. in queue (3.08)	Event calendar [4, 3.79, Arr] [2, 4.66, Dep] [–, 20.00, End]
Number of completed waiting times in queue 2	Total of waiting times in queue 1.17		Area under $Q(t)$ 1.17		Area under $B(t)$ 3.08
<div><div>$Q(t)$ graph</div><div>$B(t)$ graph</div></div>	<div></div> <div>Time (Minutes)</div>				
Interarrival times	1.73, 1.35, 0.71 , 0.62, 14.28, 0.70, 15.52, 3.15, 1.76, 1.00, ...				
Service times	2.90, 1.76 , 3.39, 4.52, 4.46, 4.36, 2.07, 3.36, 2.37, 5.38, ...				

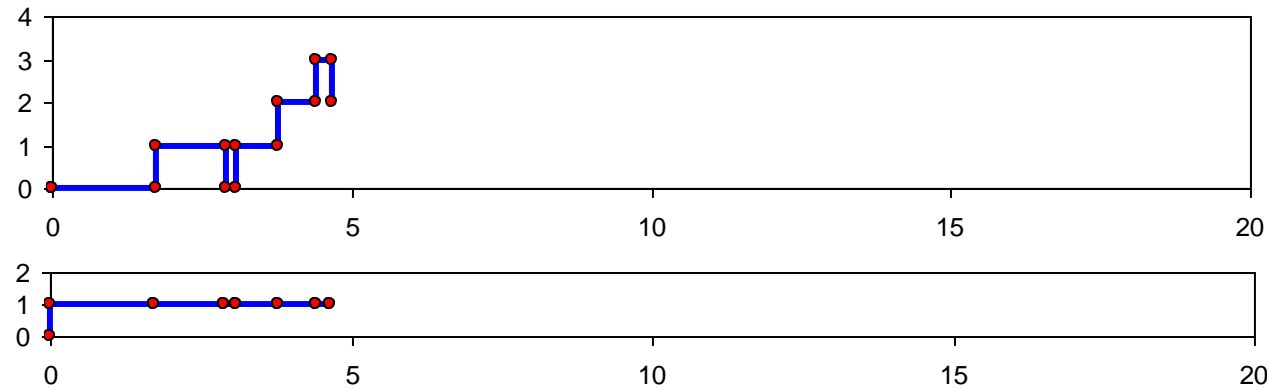
$t = 3.79$, Arrival of Part 4

System <div><div>4</div><div>3</div><div>2</div></div>	Clock 3.79	$B(t)$ 1	$Q(t)$ 2	Arrival times of custs. in queue (3.79, 3.08)	Event calendar [5, 4.41, Arr] [2, 4.66, Dep] [-, 20.00, End]
Number of completed waiting times in queue 2	Total of waiting times in queue 1.17		Area under $Q(t)$ 1.88		Area under $B(t)$ 3.79
<div><div>$Q(t)$ graph</div><div>$B(t)$ graph</div></div>	<div></div> <div>Time (Minutes)</div>				
Interarrival times	1.73, 1.35, 0.71, 0.62 , 14.28, 0.70, 15.52, 3.15, 1.76, 1.00, ...				
Service times	2.90, 1.76 , 3.39, 4.52, 4.46, 4.36, 2.07, 3.36, 2.37, 5.38, ...				

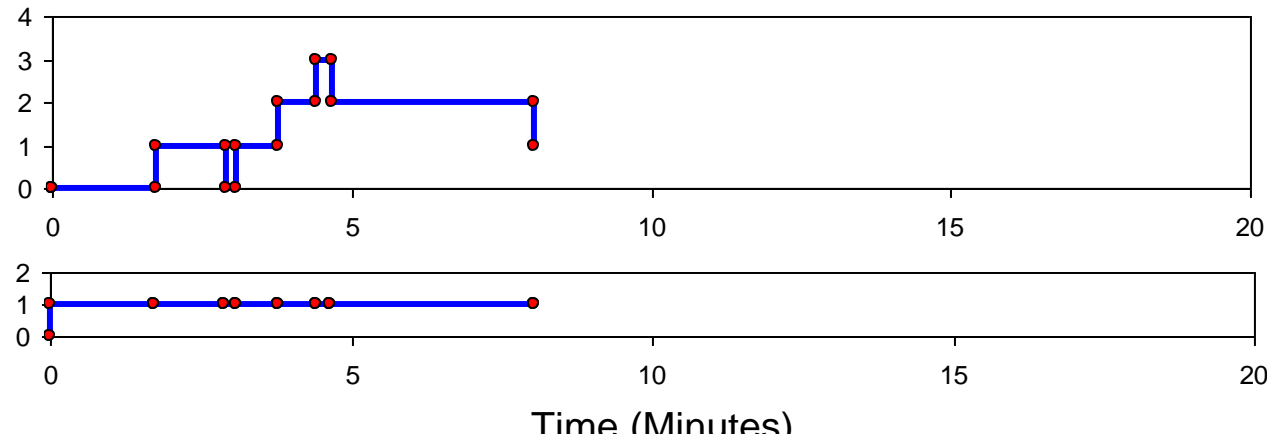
$t = 4.41$, Arrival of Part 5

System <div><div>5</div><div>4</div><div>3</div><div>2</div></div>	Clock 4.41	B(t) 1	Q(t) 3	Arrival times of custs. in queue (4.41, 3.79, 3.08)	Event calendar [2, 4.66, Dep] [6, 18.69, Arr] [−, 20.00, End]
Number of completed waiting times in queue 2	Total of waiting times in queue 1.17		Area under Q(t) 3.12		Area under B(t) 4.41
Q(t) graph B(t) graph	 <p style="text-align: center;">Time (Minutes)</p>				
Interarrival times	1.73, 1.35, 0.71, 0.62, 14.28 , 0.70, 15.52, 3.15, 1.76, 1.00, ...				
Service times	2.90, 1.76 , 3.39, 4.52, 4.46, 4.36, 2.07, 3.36, 2.37, 5.38, ...				

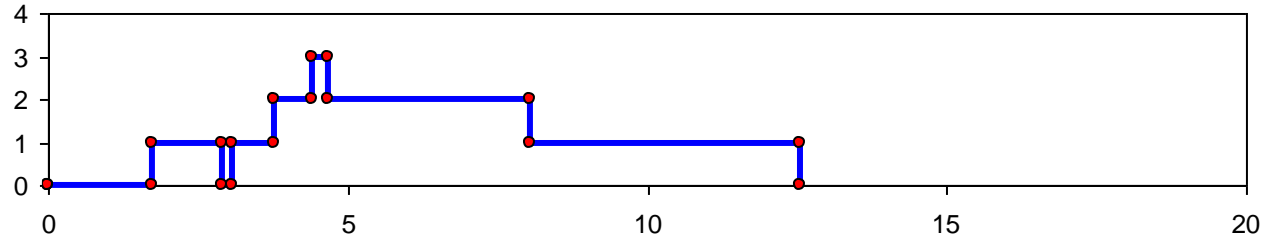
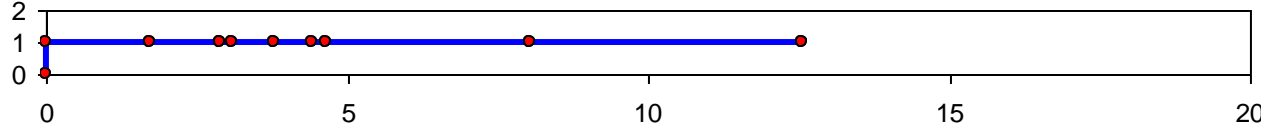
$t = 4.66$, Departure of Part 2

System <div><div>5</div><div>4</div><div>3</div></div>	Clock 4.66	$B(t)$ 1	$Q(t)$ 2	Arrival times of custs. in queue (4.41, 3.79)	Event calendar [3, 8.05, Dep] [6, 18.69, Arr] [-, 20.00, End]
Number of completed waiting times in queue 3	Total of waiting times in queue 2.75			Area under $Q(t)$ 3.87	Area under $B(t)$ 4.66
<div><div>$Q(t)$ graph</div><div>$B(t)$ graph</div></div>	<div></div> <div>Time (Minutes)</div>				
Interarrival times	1.73, 1.35, 0.71, 0.62, 14.28 , 0.70, 15.52, 3.15, 1.76, 1.00, ...				
Service times	2.90, 1.76, 3.39 , 4.52, 4.46, 4.36, 2.07, 3.36, 2.37, 5.38, ...				

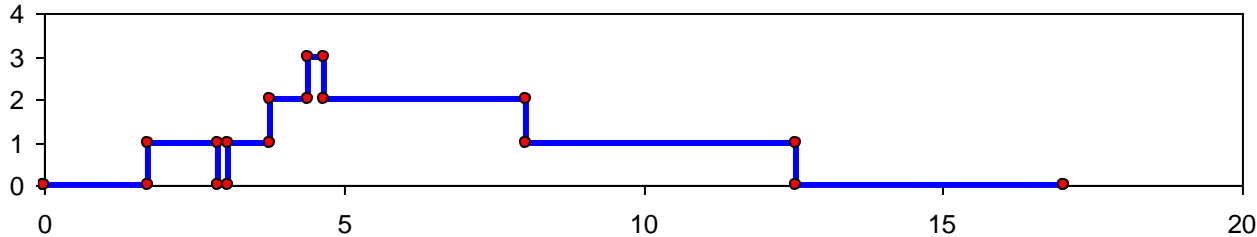
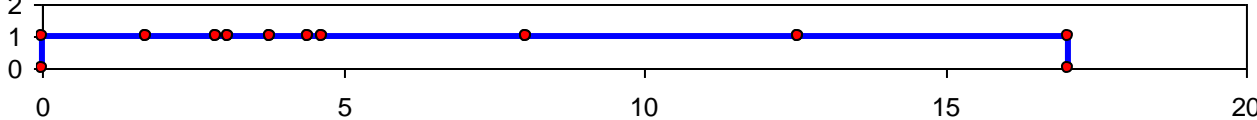
$t = 8.05$, Departure of Part 3

System <div><div>5</div><div>4</div></div>	Clock 8.05	$B(t)$ 1	$Q(t)$ 1	Arrival times of custs. in queue (4.41)	Event calendar [4, 12.57, Dep] [6, 18.69, Arr] [-, 20.00, End]
Number of completed waiting times in queue 4	Total of waiting times in queue 7.01			Area under $Q(t)$ 10.65	Area under $B(t)$ 8.05
<div><div>$Q(t)$ graph</div><div>$B(t)$ graph</div></div>	 <p>Time (Minutes)</p>				
Interarrival times	1.73, 1.35, 0.71, 0.62, 14.28 , 0.70, 15.52, 3.15, 1.76, 1.00, ...				
Service times	2.90, 1.76, 3.39, 4.52 , 4.46, 4.36, 2.07, 3.36, 2.37, 5.38, ...				

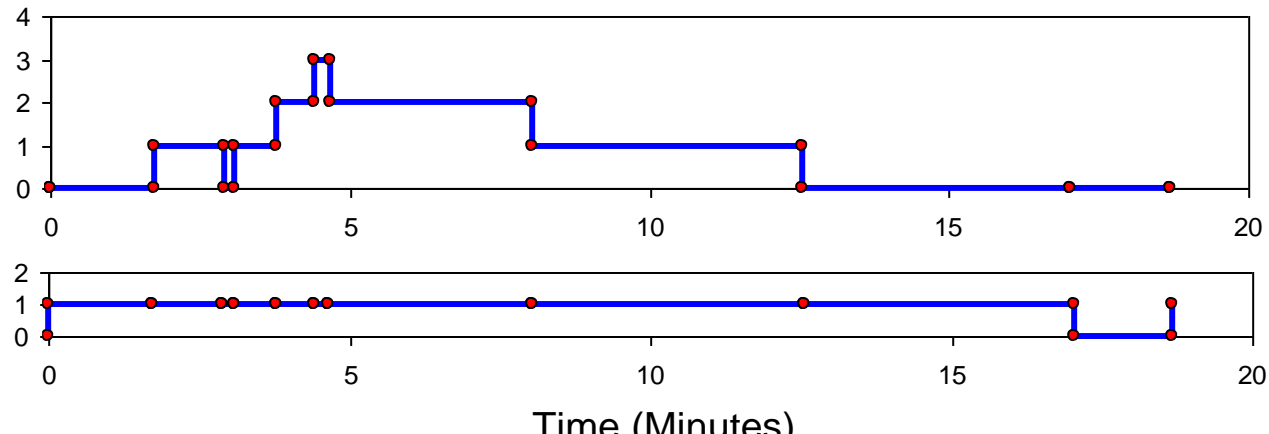
$t = 12.57$, Departure of Part 4

System <div><div></div><div>5</div></div>	Clock 12.57	$B(t)$ 1	$Q(t)$ 0	Arrival times of custs. in queue ()	Event calendar [5, 17.03, Dep] [6, 18.69, Arr] [-, 20.00, End]
Number of completed waiting times in queue 5	Total of waiting times in queue 15.17		Area under $Q(t)$ 15.17		Area under $B(t)$ 12.57
$Q(t)$ graph					
$B(t)$ graph	 <p style="text-align: center;">Time (Minutes)</p>				
Interarrival times	1.73, 1.35, 0.71, 0.62, 14.28 , 0.70, 15.52, 3.15, 1.76, 1.00, ...				
Service times	2.90, 1.76, 3.39, 4.52, 4.46 , 4.36, 2.07, 3.36, 2.37, 5.38, ...				

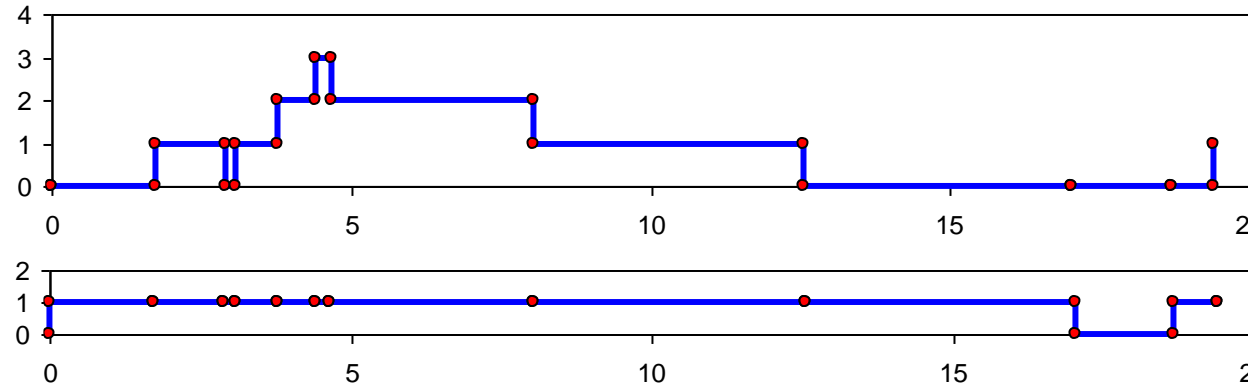
$t = 17.03$, Departure of Part 5

System <div><div></div></div>	Clock 17.03	$B(t)$ 0	$Q(t)$ 0	Arrival times of custs. in queue ()	Event calendar [6, 18.69, Arr] [−, 20.00, End]
Number of completed waiting times in queue 5	Total of waiting times in queue 15.17		Area under $Q(t)$ 15.17		Area under $B(t)$ 17.03
$Q(t)$ graph					
$B(t)$ graph	 <p style="text-align: center;">Time (Minutes)</p>				
Interarrival times	1.73, 1.35, 0.71, 0.62, 14.28 , 0.70, 15.52, 3.15, 1.76, 1.00, ...				
Service times	2.90, 1.76, 3.39, 4.52, 4.46 , 4.36, 2.07, 3.36, 2.37, 5.38, ...				

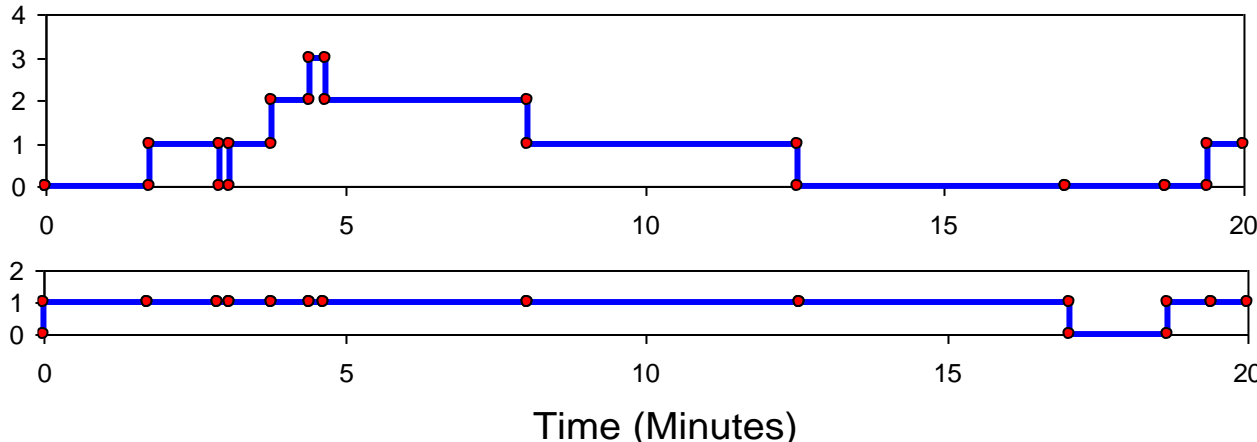
$t = 18.69$, Arrival of Part 6

System <div><div>6</div></div>	Clock 18.69	$B(t)$ 1	$Q(t)$ 0	Arrival times of custs. in queue ()	Event calendar [7, 19.39, Arr] [−, 20.00, End] [6, 23.05, Dep]
Number of completed waiting times in queue 6	Total of waiting times in queue 15.17		Area under $Q(t)$ 15.17		Area under $B(t)$ 17.03
<div><div>$Q(t)$ graph</div><div>$B(t)$ graph</div></div>	<div></div>				
Interarrival times	1.73, 1.35, 0.71, 0.62, 14.28, 0.70, 15.52, 3.15, 1.76, 1.00, ...				
Service times	2.90, 1.76, 3.39, 4.52, 4.46, 4.36, 2.07, 3.36, 2.37, 5.38, ...				

$t = 19.39$, Arrival of Part 7

System <div><div>7</div><div>6</div></div>	Clock 19.39	$B(t)$ 1	$Q(t)$ 1	Arrival times of custs. in queue (19.39)	Event calendar [-, 20.00, End] [6, 23.05, Dep] [8, 34.91, Arr]
Number of completed waiting times in queue 6	Total of waiting times in queue 15.17		Area under $Q(t)$ 15.17		Area under $B(t)$ 17.73
<div><div>$Q(t)$ graph</div><div>$B(t)$ graph</div></div>	 <p>Time (Minutes)</p>				
Interarrival times	1.73, 1.35, 0.71, 0.62, 14.28, 0.70, 15.52, 3.15, 1.76, 1.00, ...				
Service times	2.90, 1.76, 3.39, 4.52, 4.46, 4.36, 2.07, 3.36, 2.37, 5.38, ...				

$t = 20.00$, The End

System <div><div>7</div><div>6</div></div>	Clock 20.00	$B(t)$ 1	$Q(t)$ 1	Arrival times of custs. in queue (19.39)	Event calendar [6, 23.05, Dep] [8, 34.91, Arr]
Number of completed waiting times in queue 6	Total of waiting times in queue 15.17			Area under $Q(t)$ 15.78	Area under $B(t)$ 18.34
<div><div>$Q(t)$ graph</div><div>$B(t)$ graph</div></div>	 <p>Time (Minutes)</p>				
Interarrival times	1.73 , 1.35 , 0.71 , 0.62 , 14.28 , 0.70 , 15.52 , 3.15, 1.76, 1.00, ...				
Service times	2.90 , 1.76 , 3.39 , 4.52 , 4.46 , 4.36 , 2.07, 3.36, 2.37, 5.38, ...				

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Simulación Manual: Resultados

- Tiempo medio en cola:

$$\frac{\text{Total tiempo en cola}}{\text{No. piezas en cola}} = \frac{15.17}{6} = 2.53 \text{ minutos}$$

- Número medio en cola:

$$\frac{\text{Integral de } Q(t)}{\text{Tiempo final}} = \frac{15.78}{20} = 0.79 \text{ piezas}$$

- Utilización del servidor:

$$\frac{\text{Integral de } B(t)}{\text{Tiempo final}} = \frac{18.34}{20} = 0.92$$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Simulación Manual: Registro Completo

Just-Finished Event			Variables		Attributes		Statistical Accumulators										Event Calendar		
Entity No.	Time t	Event Type	$Q(t)$	$B(t)$	Arrival Times: (In Queue) In Service		P	N	ΣD	D^*	ΣF	F^*	$\int Q$	Q^*	$\int B$	[Entity No., Time, Type]			
–	0.00	Init	0	0	()	—	0	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0	0.00	[1, 0.00, Arr] [–, 15.00, End]			
1	0.00	Arr	0	1	()	<u>0.00</u>	0	1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0	0.00	[1, 4.58, Dep] [2, 6.84, Arr] [–, 15.00, End]			
1	4.58	Dep	0	0	()	—	1	1	0.00	0.00	4.58	4.58	0.00	0	4.58	[2, 6.84, Arr] [–, 15.00, End]			
2	6.84	Arr	0	1	()	<u>6.84</u>	1	2	0.00	0.00	4.58	4.58	0.00	0	4.58	[3, 9.24, Arr] [2, 9.80, Dep] [–, 15.00, End]			
3	9.24	Arr	1	1	(9.24)	<u>6.84</u>	1	2	0.00	0.00	4.58	4.58	0.00	1	6.98	[2, 9.80, Dep] [4, 11.94, Arr] [–, 15.00, End]			
2	9.80	Dep	0	1	()	<u>9.24</u>	2	3	0.56	0.56	7.54	4.58	0.56	1	7.54	[4, 11.94, Arr] [–, 15.00, End] [3, 15.66, Dep]			
4	11.94	Arr	1	1	(11.94)	<u>9.24</u>	2	3	0.56	0.56	7.54	4.58	0.56	1	9.68	[5, 14.53, Arr] [–, 15.00, End] [3, 15.66, Dep]			
5	14.53	Arr	2	1	(14.53, 11.94)	<u>9.24</u>	2	3	0.56	0.56	7.54	4.58	3.15	2	12.27	[–, 15.00, End] [6, 15.26, Arr] [3, 15.66, Dep]			
–	15.00	End	2	1	(14.53, 11.94)	<u>9.24</u>	2	3	0.56	0.56	7.54	4.58	4.09	2	12.74	[6, 15.26, Arr] [3, 15.66, Dep]			

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Simulación Automática: Lógica de Planificación de Eventos

- Se ajusta claramente a la programación estándar
- Uso frecuente de librerías para:
 - procesado de listas
 - Generación de números aleatorios
 - Generación de variaciones aleatorias
 - Cálculo de estadísticos
 - Gestión de la lista de eventos y del reloj
 - Resumen y presentaciones
- **Programa principal como coordinador** y para la ejecución ordenada de eventos

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Simulación Automática: Aleatoriedad en la Simulación

- El ejemplo “manual” es una “**replica**” de la simulación -- un ejemplo de tamaño uno.
- Modelamos:
 - Tiempo entre llegadas $\sim \text{EXP}(5)$
 - Tiempo de servicio $\sim \text{TRIA}(1,3,6)$.
- Para un total de cinco replicas:

Performance Measure	Replication					Sample		95%
	1	2	3	4	5	Avg.	Std. Dev.	Half Width
Total production	5	3	6	2	3	3.80	1.64	2.04
Average waiting time in queue	2.53	1.19	1.03	1.62	0.00	1.27	0.92	1.14
Maximum waiting time in queue	8.16	3.56	2.97	3.24	0.00	3.59*	2.93*	3.63*
Average total time in system	6.44	5.10	4.16	6.71	4.26	5.33	1.19	1.48
Maximum total time in system	12.62	6.63	6.27	7.71	4.96	7.64*	2.95*	3.67*
Time-average number of parts in queue	0.79	0.18	0.36	0.16	0.05	0.31	0.29	0.36
Maximum number of parts in queue	3	1	2	1	1	1.60*	0.89*	1.11*
Drill-press utilization	0.92	0.59	0.90	0.51	0.70	0.72	0.18	0.23

¿?

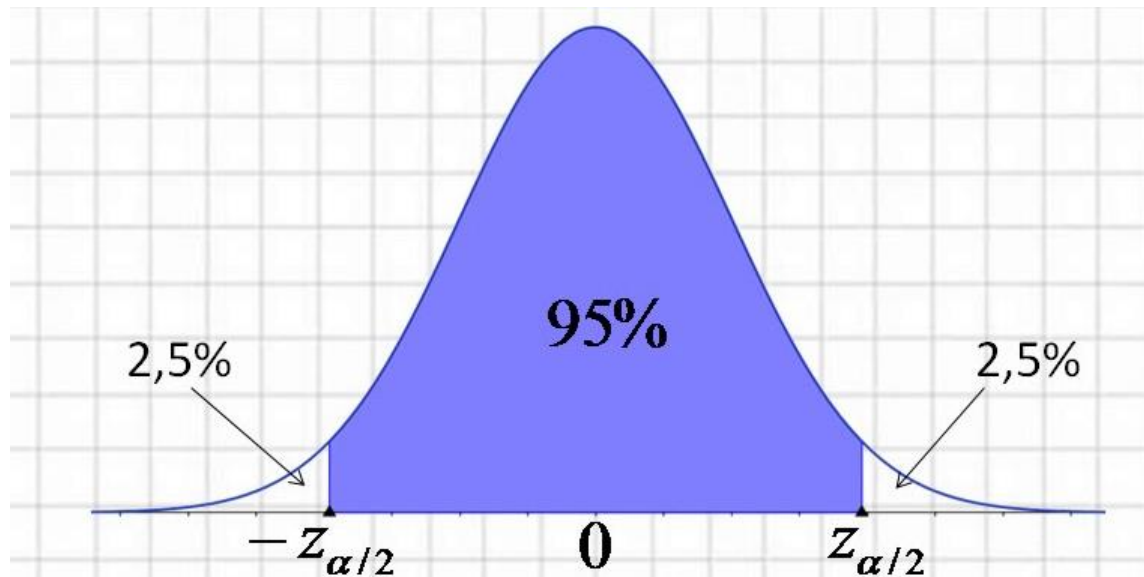
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Simulación Automática: Aleatoriedad en la Simulación

Intervalo de Confianza (Confidence Interval)

La media de un conjunto de muestras nos proporciona una estimación puntual (solo un número) de dicho valor. No obstante, **sabemos que esa estimación NO es exacta** (necesitaríamos infinitas muestras) con lo que además de la media buscamos acotar un rango de valores en torno a la misma en la que podamos asegurar (con cierta certeza estadística) que si está el verdadero valor de la media, esto es el intervalo de confianza.



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

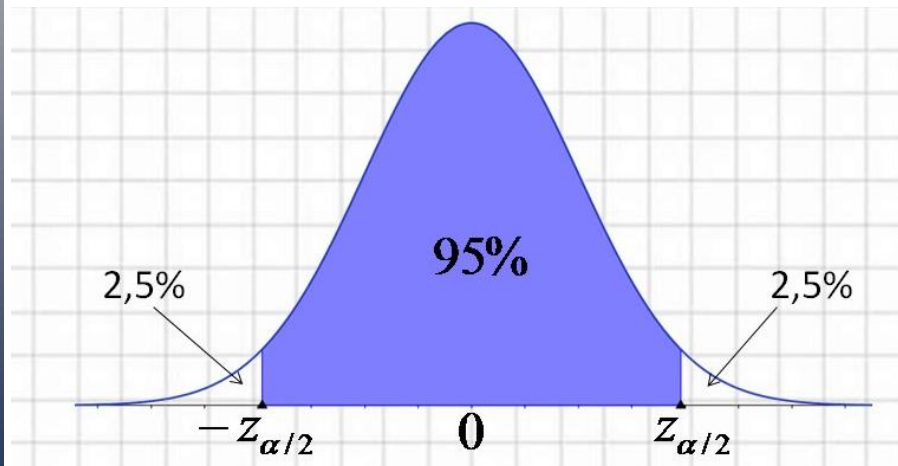
Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Simulación Automática: Aleatoriedad en la Simulación

Intervalo de Confianza (Confidence Interval - CI)

La certeza estadística que deseamos obtener para nuestro intervalo la expresamos a través del **nivel de confianza** (confidence level). Esta magnitud indica el % de veces que si repitiéramos la estimación, nuestro CI contendría el parámetro estimado.

Nota-> Cuanto mayor sea el nivel de confianza, más amplio será nuestro CI. Valores típicos son 90%, 95%, 98%, 99%.



α se conoce como “significance level”

$$\text{Confidence level} = (1 - \alpha) * 100$$

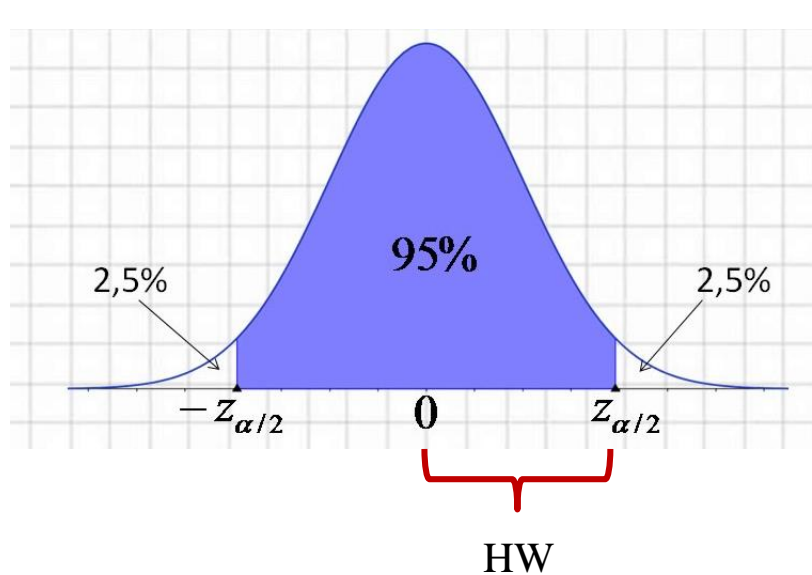
$$95\% \rightarrow \alpha = 0.05$$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

Simulación Automática: Aleatoriedad en la Simulación

Intervalo de Confianza (Confidence Interval - CI)



$$\mu \in [\bar{X} \pm vc * s]$$

Media de la distribución
 Valores estimados empleando el conjunto de muestras:
 \bar{X} (sample mean)
 s (sample standar deviation)

HW

The quantity after the \pm sign is called the **half-width** (HW) because it is exactly one **half** of the **confidence interval**. When the half-width is added to and subtracted from the sample mean, we get the upper and lower limit of the **confidence interval**.

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Conceptos Fundamentales de Simulación

RESUMEN

En este tema:

- Hemos introducido los **conceptos y elementos básicos** necesarios para realizar una simulación de sistemas de eventos discretos.
- Se han introducido los **estadísticos** más comunes que se utilizan.
- Se ha ilustrado un **ejemplo de simulación** de un sistema simple de forma manual.
- Se ha puesto de manifiesto la necesidad de **información estadística de las entradas y estudio de las salidas (intervalos de confianza)**.