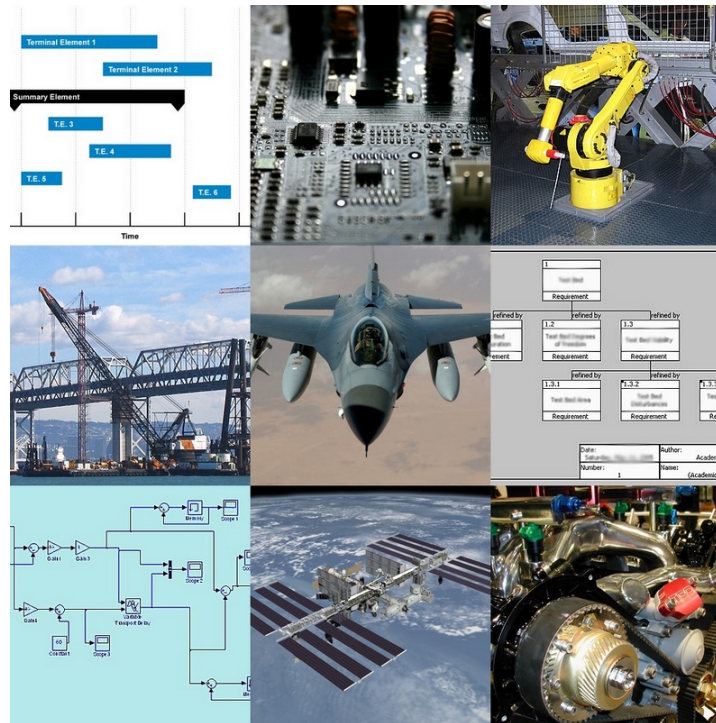


MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de **Sistemas Físicos**

1.1 Introducción

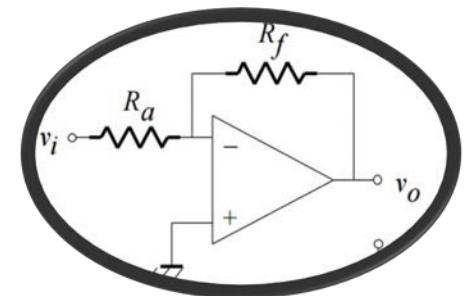
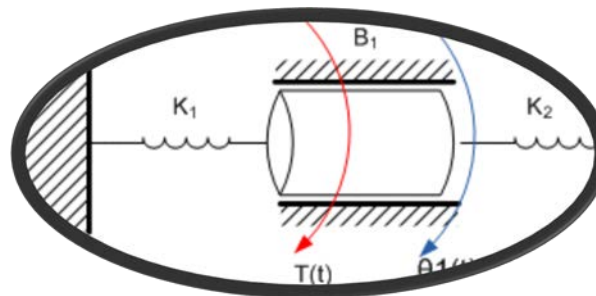
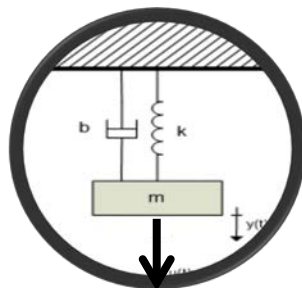
1.2 Modelado de Sistemas Mecánicos

1.2.1 Traslacionales

1.2.2 Rotacionales

1.3 Modelado de Sistemas Eléctricos

1.4 Modelado de Sistemas de Nivel de Líquidos



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Intro

Concepto de Modelo

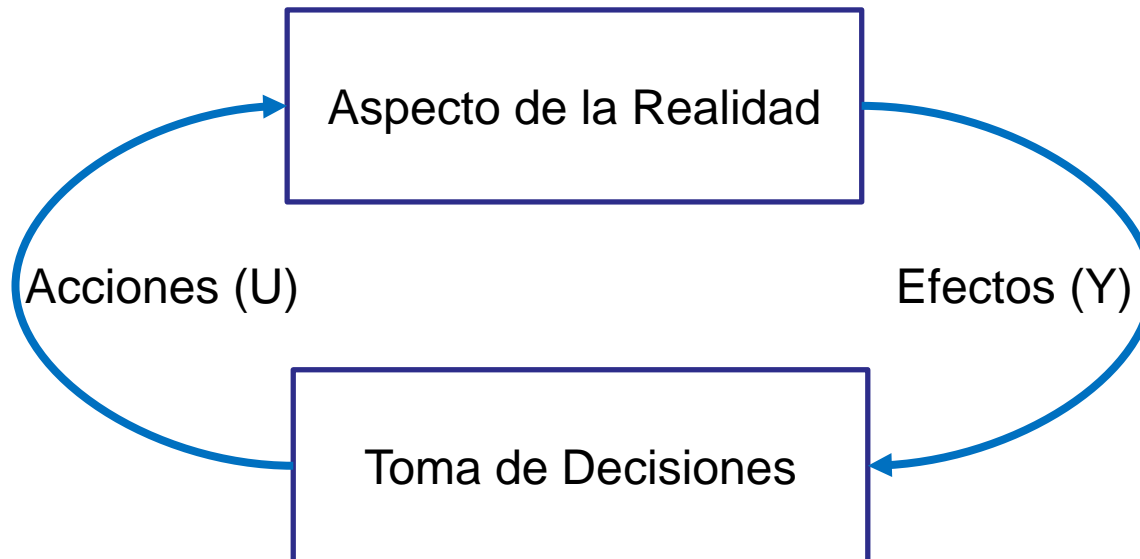
- Todos empleamos instintivamente **modelos** para la toma de decisiones sobre determinados aspectos de la realidad.
- En el proceso de toma de decisión se elige una entre varias acciones posibles, teniendo en cuenta el efecto que cada acción vaya a producir (ej: estudiar MySS).
- La relación que liga las posibles acciones con sus efectos es el **modelo** del sistema. Por lo tanto, en el proceso de toma de decisiones se está empleando un modelo del sistema.



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Intro

Concepto de Modelo



La relación que liga las acciones U_i (entradas) con los efectos Y_j (salidas), según $Y = f(U)$, constituye la representación formal de un modelo.

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

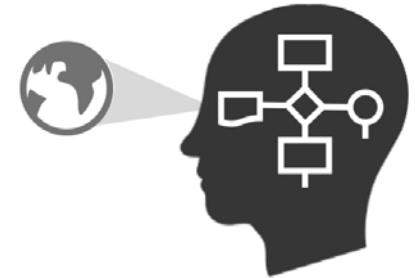
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Intro

Tipos de Modelos

- **Modelos Mentales:** Son los propios de los humanos. Son imprecisos, difíciles de comunicar y borrosos.

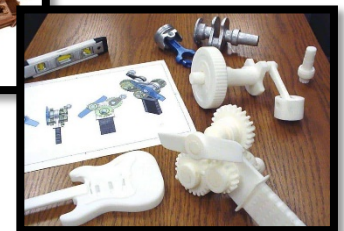
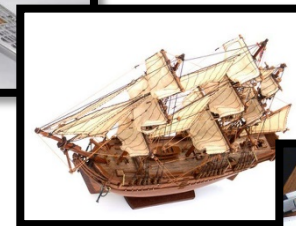
A **mental model** is:
'an explanation of
someone's thought
process about how
something works in
the real world'.

Wikipedia



- **Modelos Físicos:** Son costosos de generar en tiempo y en dinero.

- Modelos estáticos:
 - Modelos a escala.
 - Modelos de imitación.
- Modelos dinámicos:
 - Analogías o modelos análogos.
 - Prototipos.



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Intro

Tipos de Modelos

- Modelos Simbólicos:

- No matemáticos
 - Lingüísticos, ya sean verbales o escritos.
 - Gráficos o esquemáticos: mapas diagramas de flujos, etc.

– **Matemáticos/Computerizados:** Relaciones entre las distintas variables/magnitudes del sistema a modelar se corresponden con una estructura matemática (ecuaciones).

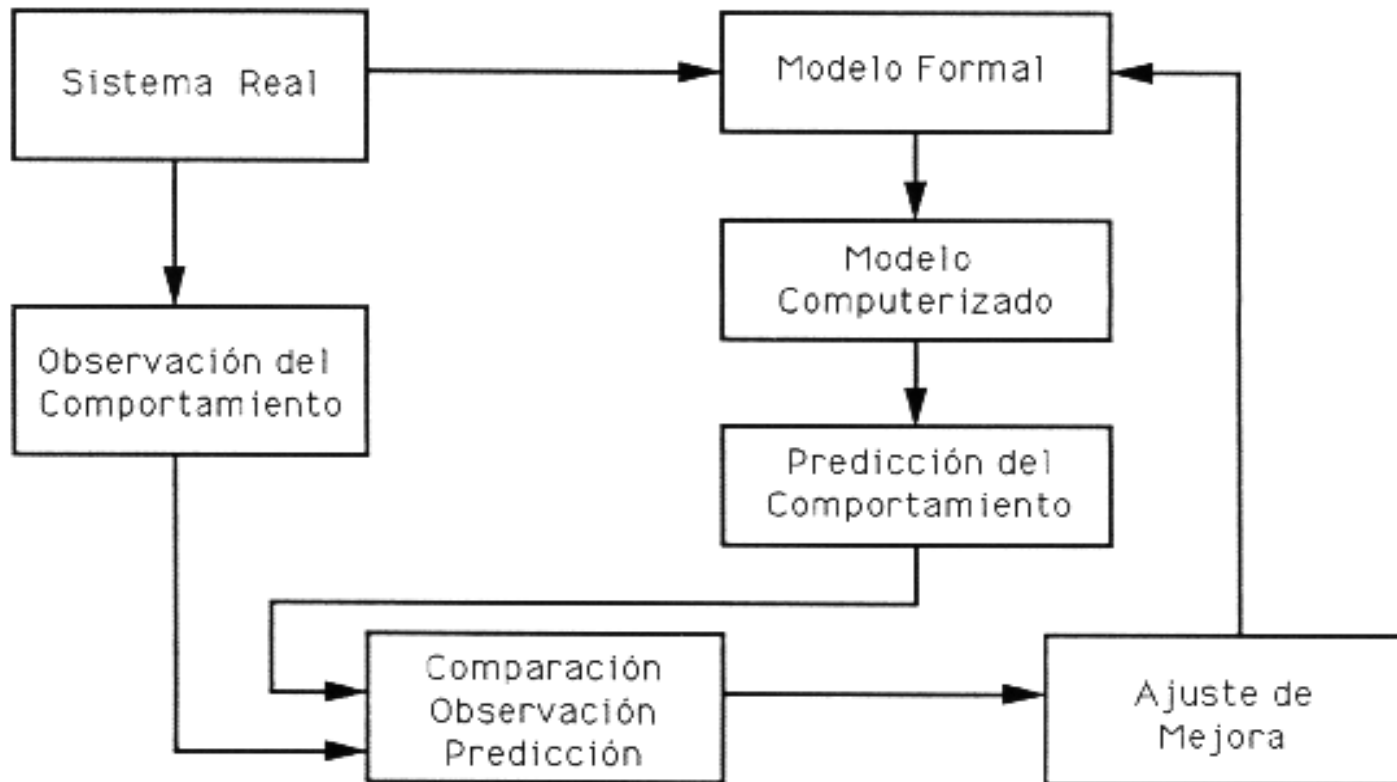
$$\int \frac{3v^2}{1 + 4 \cdot v^3} \cdot dv + \int \frac{1}{X} \cdot dX = K ;$$
$$\ln x + \frac{1}{4} \cdot \ln(1 + 4 \cdot v^3) = \ln C$$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Intro

Modelos Matemáticos

Etapas en la Construcción de un Modelo Matemático



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Intro

Modelos Matemáticos

Etapas a seguir en la elaboración del modelo computerizado:

1. **Descomposición** de sistemas en subsistemas (divide y vencerás).
2. Aplicación de **leyes de conservación** (masa, momento, energía,...) en cada subsistema y obtención de las ecuaciones constitutivas de cada elemento.
3. Obtención de las **ecuaciones diferenciales** que modelan el sistema.
4. **Programación** de ecuaciones a través de software apropiado (Matlab, SIMULINK,...)

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de **Sistemas Físicos**

1.1 Introducción

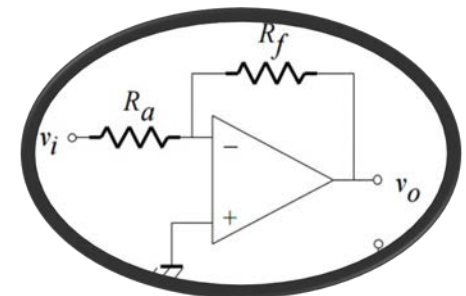
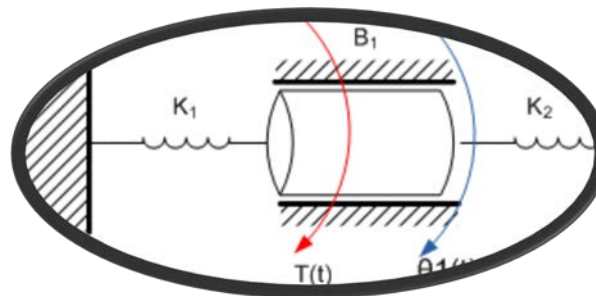
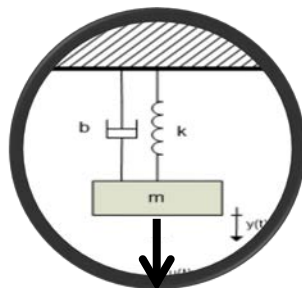
1.2 Modelado de Sistemas Mecánicos

1.2.1 Traslacionales

1.2.2 Rotacionales

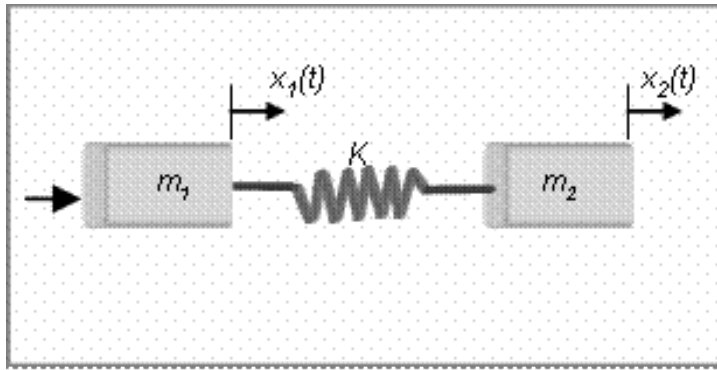
1.3 Modelado de Sistemas Eléctricos

1.4 Modelado de Sistemas de Nivel de Líquidos



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Traslación**



Ecuaciones de Conservación:
Leyes de Mecánica de Newton

PROCEDIMIENTO: Obtención de ecuaciones dinámicas:

1. Definir los sentidos de desplazamiento en cada masa.
2. Cálculo del diagrama de cuerpo libre para cada masa.
3. Aplicación de Ley de Newton en cada masa.

$$\sum_i (f_{ext})_i - M \frac{dv}{dt} = 0$$

La variación instantánea
del **momento lineal** es
igual a la **fuerza** que actúa
sobre el cuerpo

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Traslación**

El modelo del sistema completo surge de la aplicación de las leyes de Newton. **La segunda ley de Newton** indica que la suma de las fuerzas aplicadas a un cuerpo (incluyendo las fuerzas de inercia) es nula:

$$\sum_i (f_{ext})_i - M \frac{dv}{dt} = 0$$

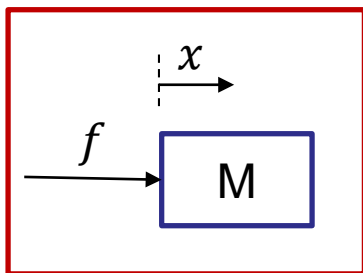
Se debe tener en cuenta que tanto las fuerzas como los desplazamientos son **magnitudes vectoriales**. Esto quiere decir que no sólo influye el valor que toma la magnitud, si no su dirección y sentido.

D'Alembert's Law

$$\sum_i f_i = 0$$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Traslación**



La **inercia** es la resistencia que presenta todo objeto físico a un cambio en su velocidad.

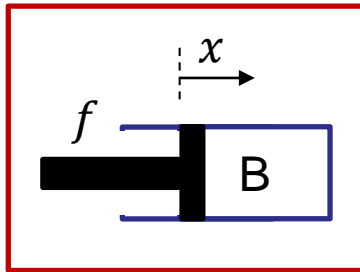
Una masa sometida a una fuerza experimenta una aceleración como consecuencia de ésta. **Aparece entonces una fuerza** de **reacción** a la aceleración experimentada por el cuerpo denominada **fuerza de inercia** y cuya magnitud es directamente proporcional a la aceleración del cuerpo y su **sentido el contrario** al de movimiento del cuerpo.

$$f = M \frac{d^2x}{dt^2}$$

On the surface of the Earth, inertia is often masked by [gravity](#) and the effects of [friction](#) and [air resistance](#), both of which tend to decrease the speed of moving objects (commonly to the point of rest). This misled the philosopher [Aristotle](#) to believe that objects would move only as long as force was applied to them. [\[2\]\[3\]](#)

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Traslación**



Un **amortiguador** es un elemento que se deforma bajo la acción de una fuerza **ejerciendo una fuerza de reacción** que es función de la velocidad con la que el elemento se deforma.

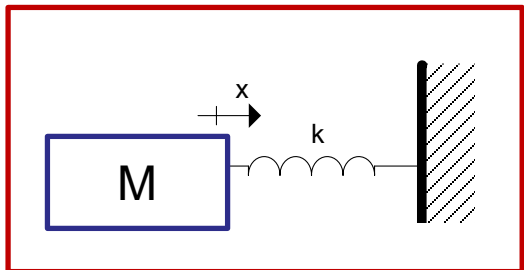
Los elementos con **rozamiento viscoso** tienen este tipo de comportamiento.

$$f = B \frac{dx}{dt}$$

Siendo B la constante de rozamiento viscoso.

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Traslación**



Un **resorte/muelle** es un **elemento elástico** que ante la acción de una fuerza se deforma variando su longitud. **El resorte ejerce una fuerza que se opone a la fuerza impulsora** que es función de la deformación experimentada. Una vez que la acción de la fuerza cesa, el resorte es capaz de recuperar su posición original, gracias a su característica elástica.

$$f = K \cdot x$$

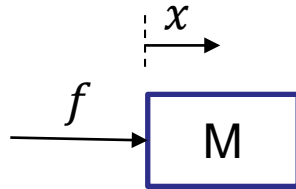
$$f = K \cdot (x - x_{natural})$$

K se conoce como Constante del Muelle

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

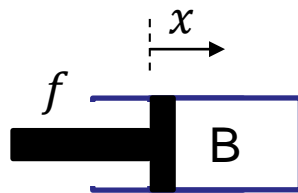
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Traslación**

ELEMENTOS TRASLACIONALES



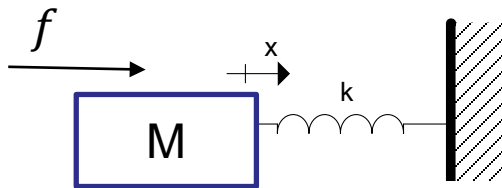
Masa

$$f = M \frac{d^2 x}{dt^2}$$



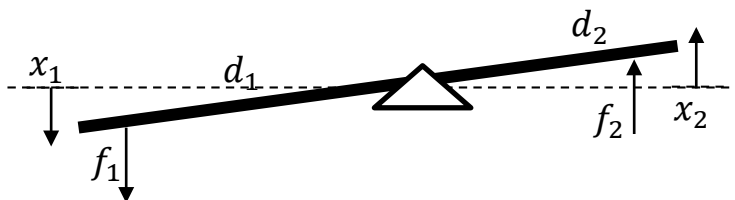
Amortiguador

$$f = B \frac{dx}{dt}$$



Muelle

$$f = K \cdot x$$



Palanca

$$f_2 = \frac{d_1}{d_2} f_1 \quad x_2 = \frac{d_2}{d_1} x_1$$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Traslación**

Unidades:

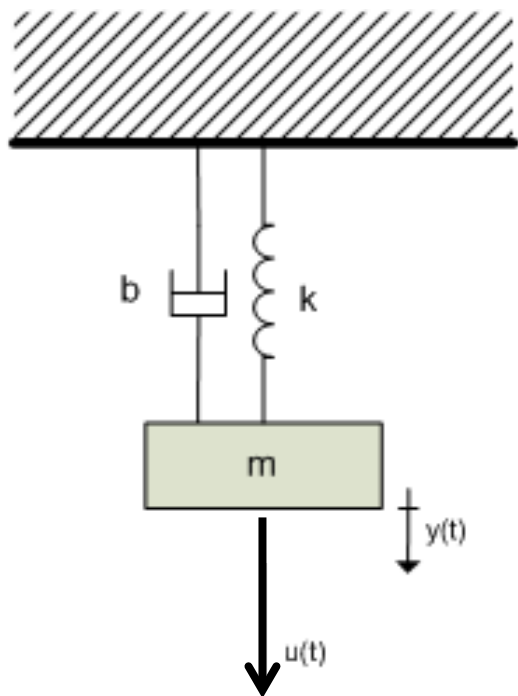
| | | | |
|------------------|---------------|--------------------------------------|--|
| Spring: | $F=k \cdot x$ | k =spring constant (N/m) | x =displacement (m) |
| Friction: | $F=b \cdot v$ | b =friction coefficient (N-s/m) | v =velocity=derivative of displacement (m/s) |
| Mass: | $F=m \cdot a$ | m =mass(kg) | a =acceleration=second derivative of displacement (m/s ²) |

$$\sum_i (f_{ext})_i - M \frac{dv}{dt} = 0$$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Traslación**

Ejemplo: En el Sistema mostrado, la fuerza externa $u(t)$ debe vencer la inercia de la masa y las oposiciones del amortiguador y del muelle:



$$f_1 = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$f_2 = b \cdot \frac{dy}{dt}$$

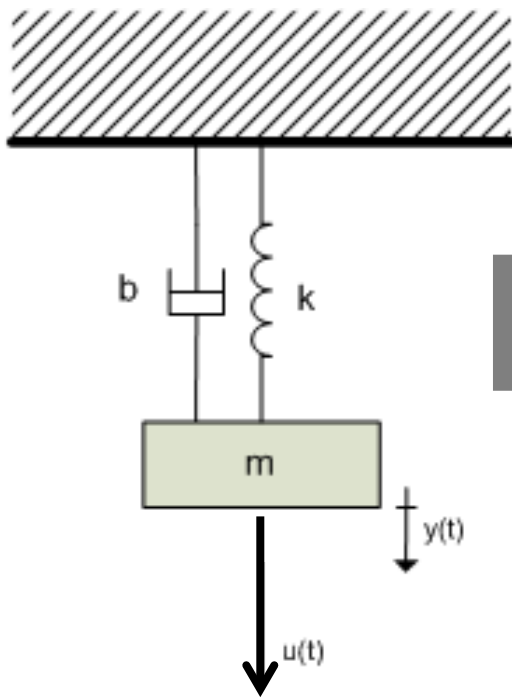
$$f_3 = k \cdot y(t)$$

$$f_{input} = u(t)$$

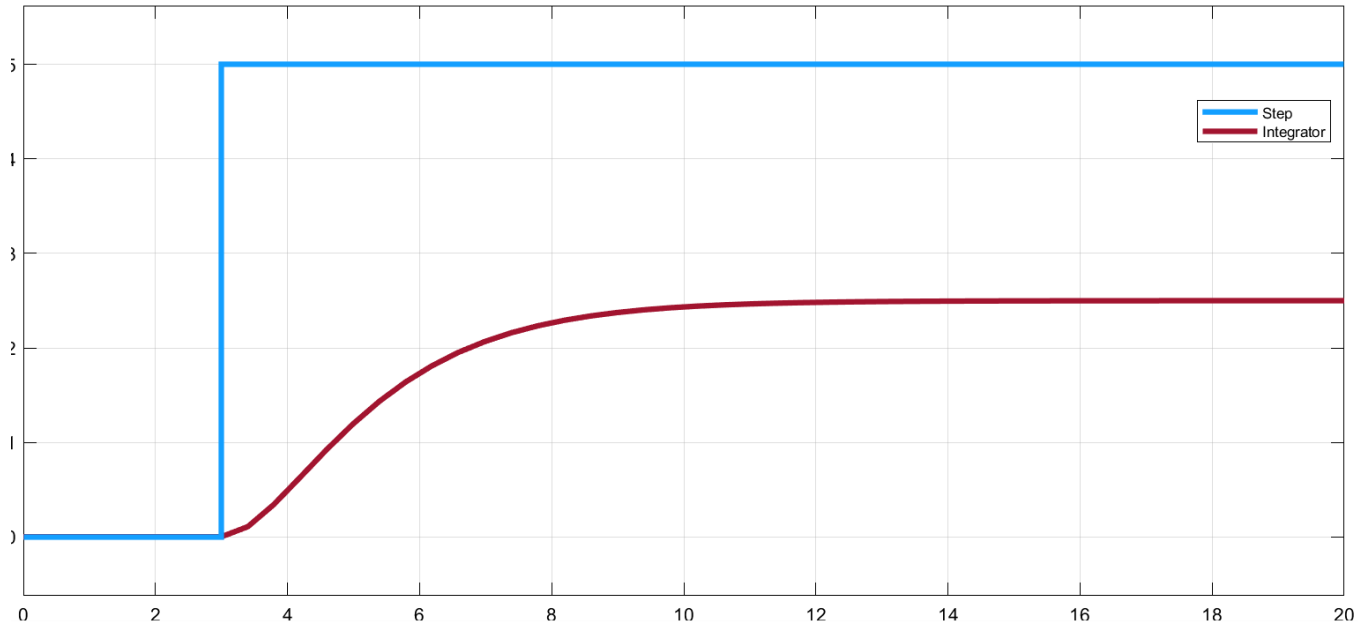
por tanto:

$$\sum_{\forall i} f_i = 0 \Rightarrow -f_1 - f_2 - f_3 + f_{input} = 0$$

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + b \cdot \frac{dy}{dt} + k \cdot y(t) = u(t)$$



$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + b \cdot \frac{dy}{dt} + k \cdot y(t) = u(t)$$



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Traslación**

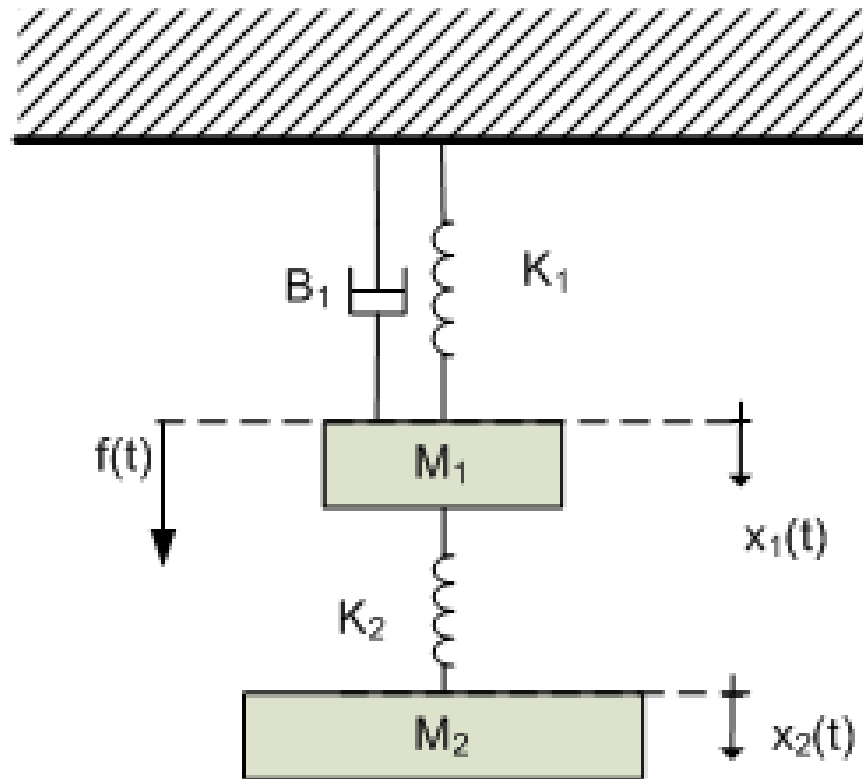
ALGORITMO

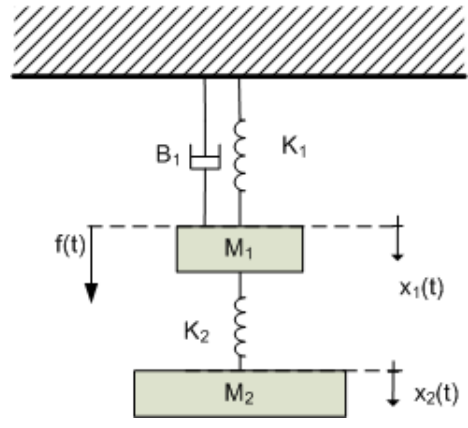
- 1.- Definir la línea del movimiento (sentido positivo).
- 2.- Definir cuál es la entrada y cuál la salida del Sistema.
- 3.- Definir los sentidos positivos de todas las señales.
- 4.- Para cada masa M_i obtener el **diagrama de cuerpo libre**:
 - 4.1 Obtención de una ecuación diferencial atendiendo solo a las fuerzas que actúan en M_i debido a M_i y su movimiento.
 - 4.2 Para cada masa M_j (incluyendo M_i) se añaden al diagrama de M_i las fuerzas que aparecen sobre M_i si M_j se mueve y el resto no.
 - 4.3 Aplicar la ley de Conservación:
$$\sum_i f_i = 0$$
- 5.- Obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales. Reducir a una única ecuación que sólo involucre la entrada y la salida.

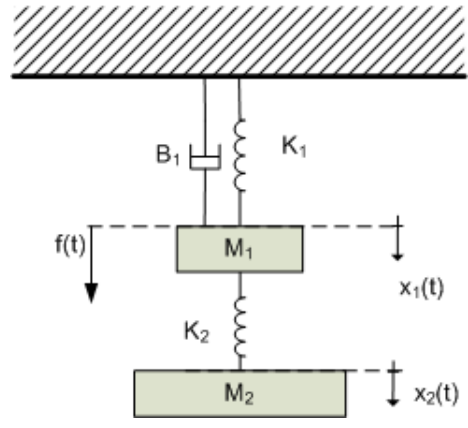
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Traslación**

Ejemplo 1:



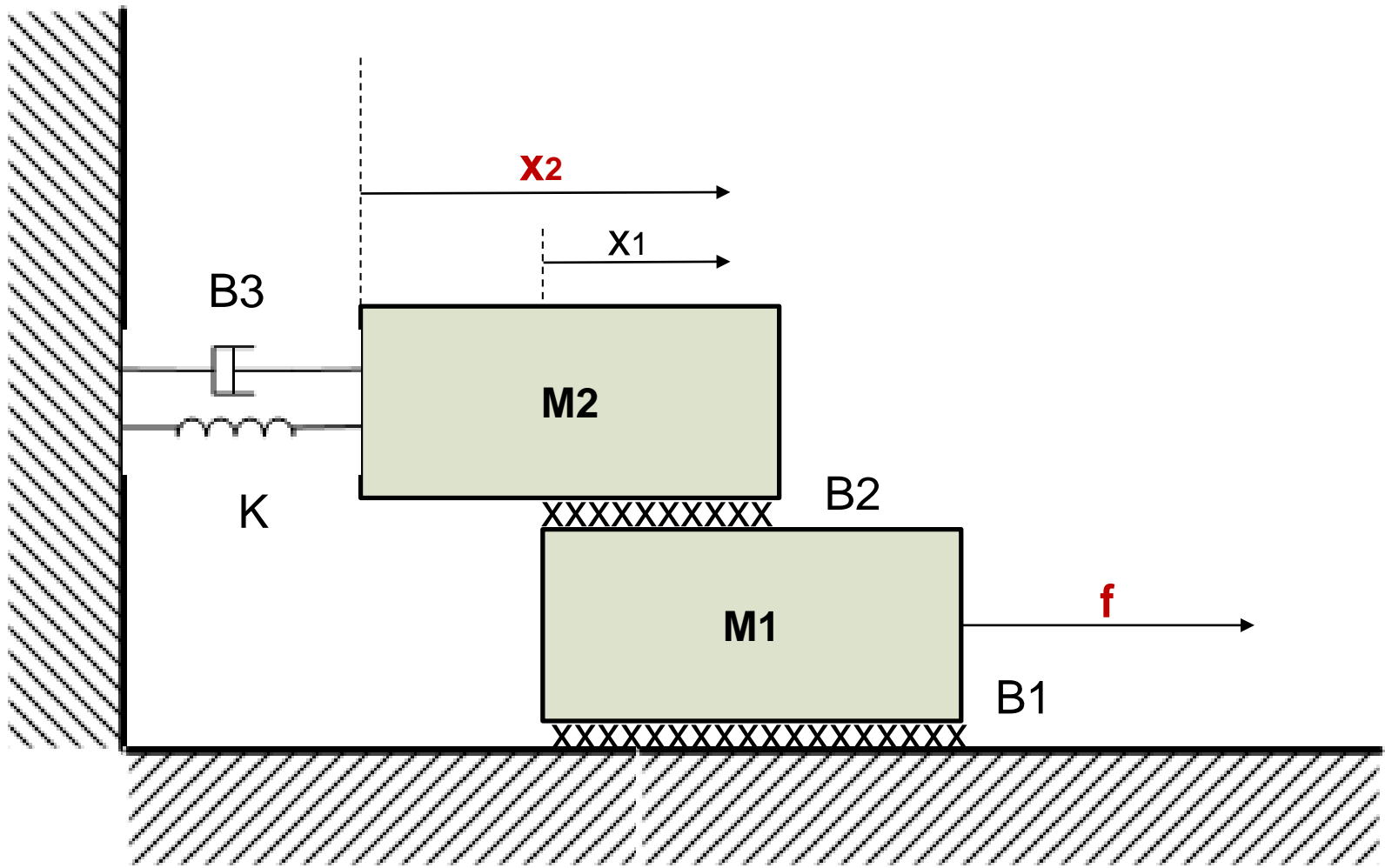


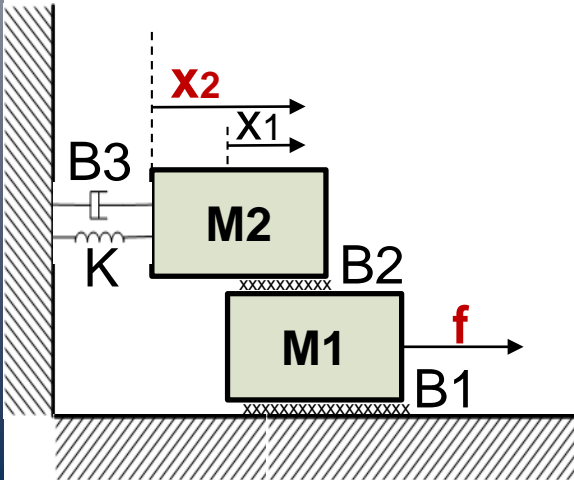


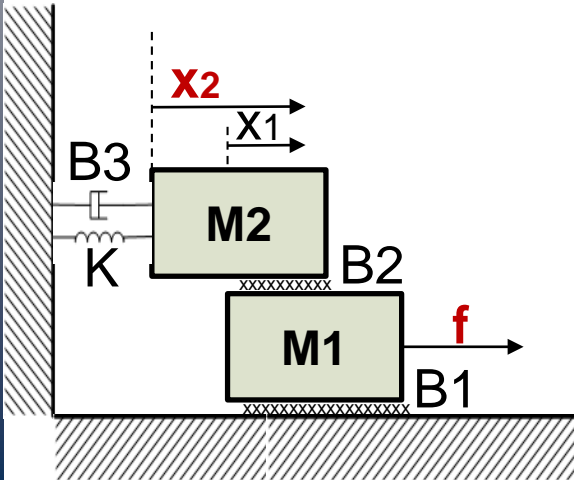
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Traslación**

Ejemplo 2:



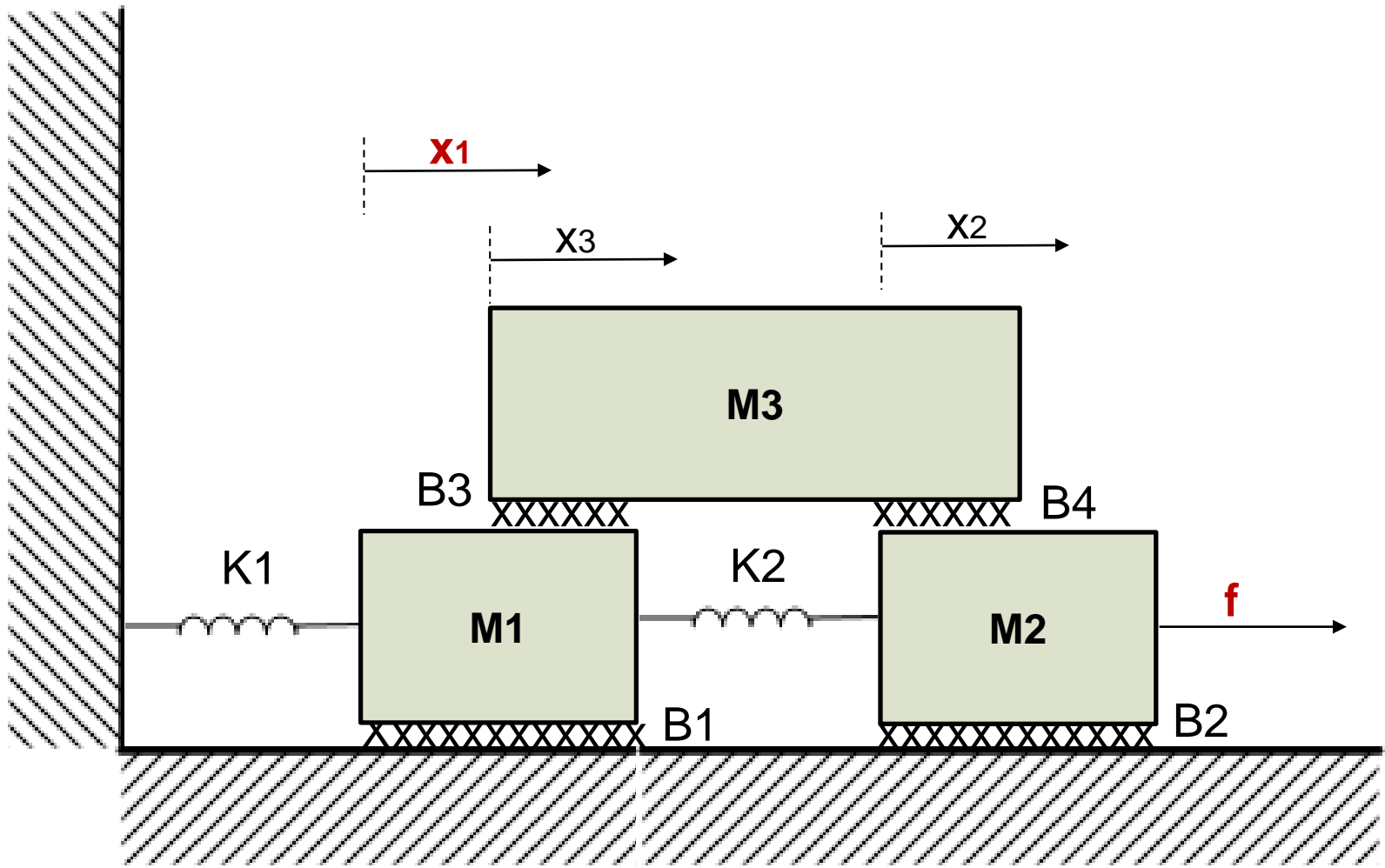


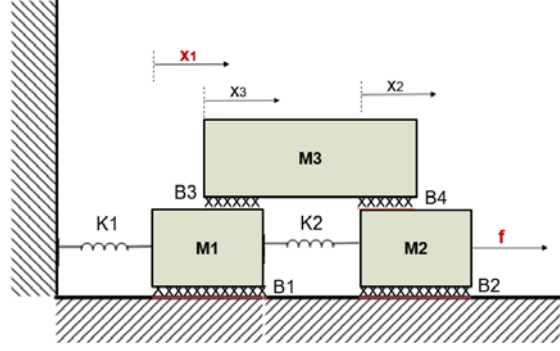


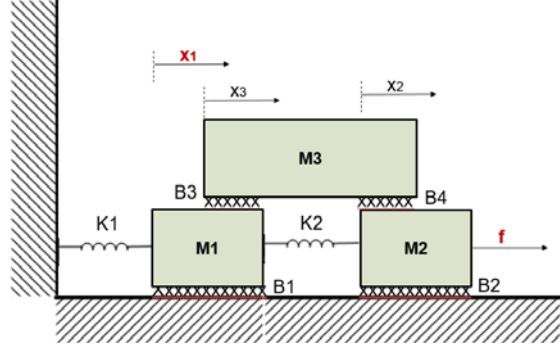
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Traslación**

Ejemplo 3:





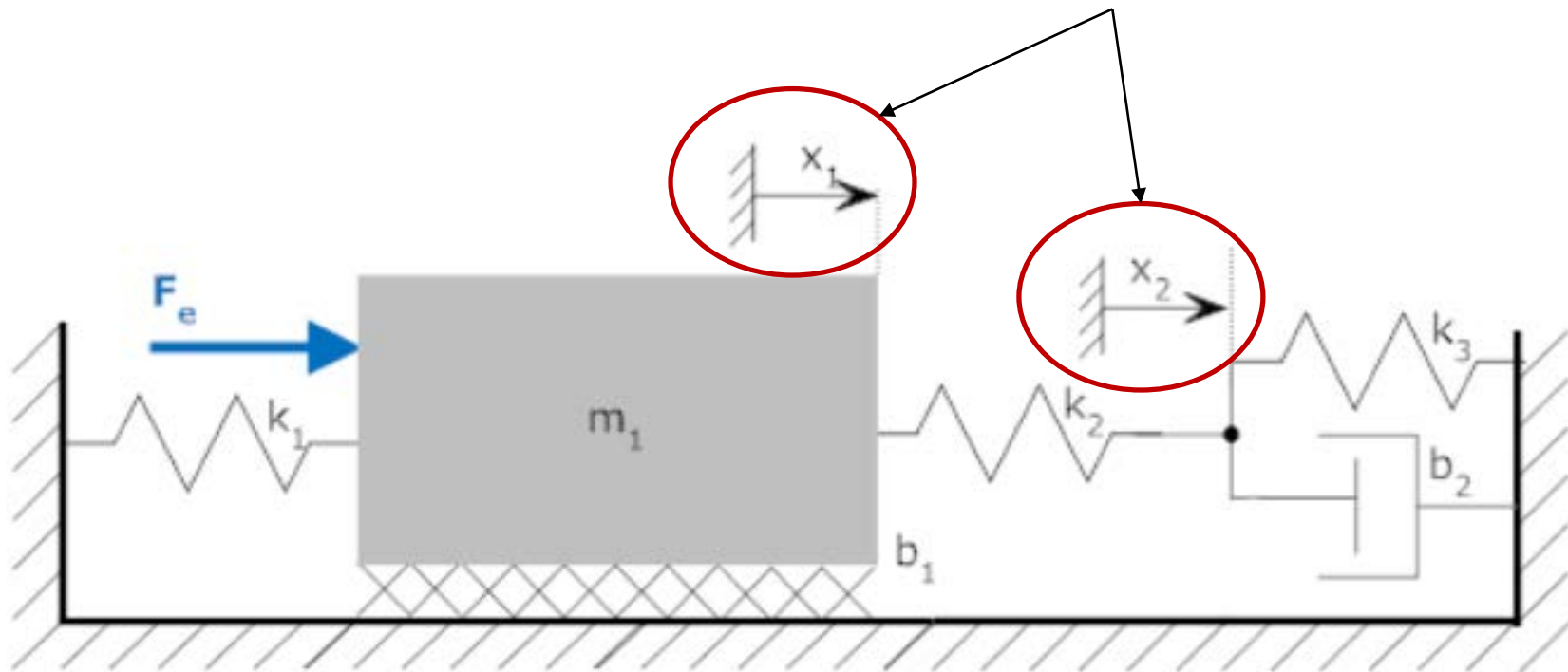


MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Traslación**

CASO ESPECIAL 1: Más de una posición desconocida.

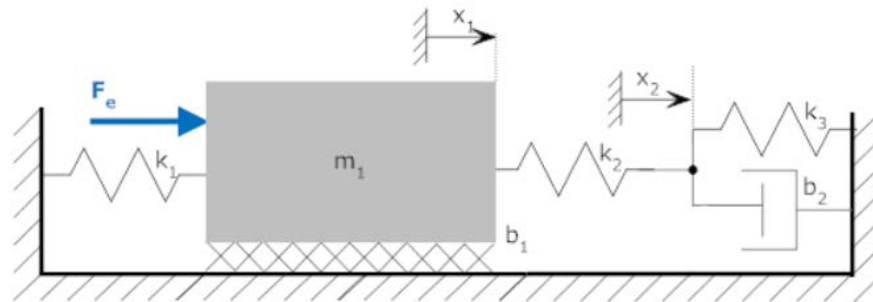
Aplicar Diagrama-Cuerpo-Libre a cada posición desconocida del sistema a modelar.



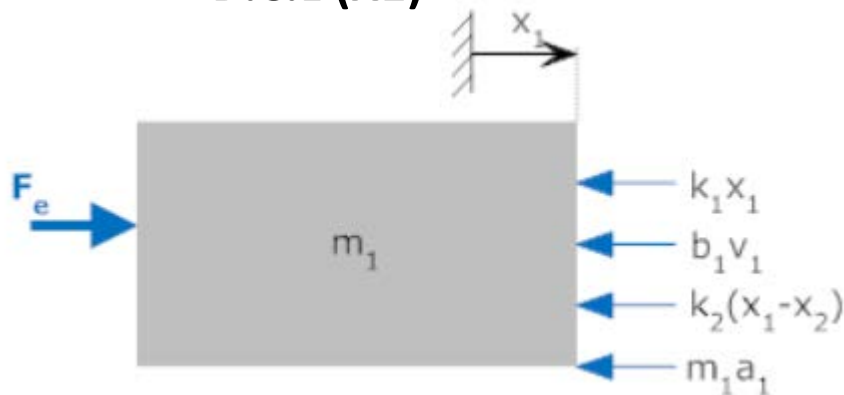
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Traslación**

CASO ESPECIAL 1: Más de una posición desconocida.

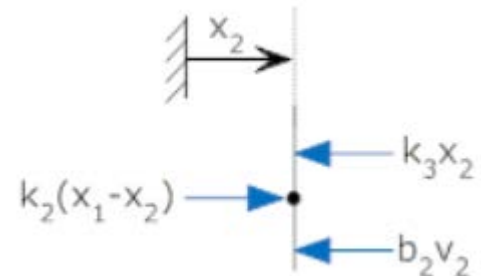


D.C.L (X1)



$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + (k_2 + k_1)x_1 - k_2 x_2 = F_e$$

D.C.L (X2)



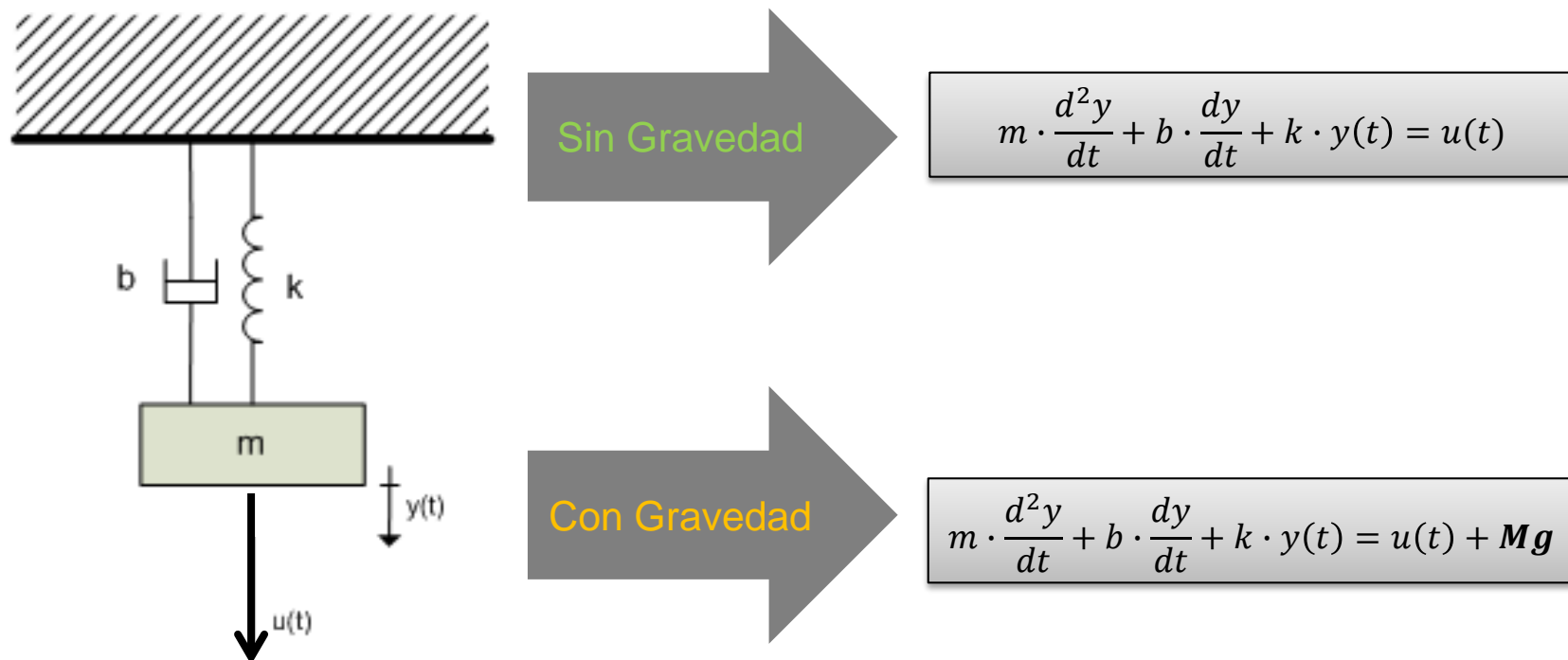
$$b_2 \dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2 x_1 = 0$$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Traslación**

CASO ESPECIAL 2: Efecto de la gravedad

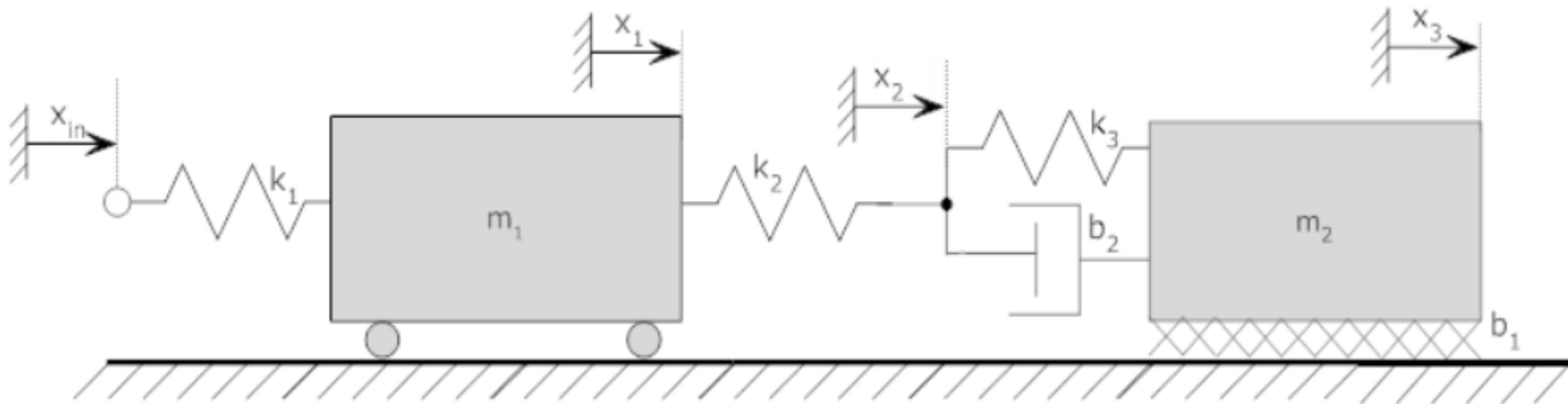
El efecto de la **gravedad** puede tenerse en cuenta en el modelado, derivando esta en una **fuerza constante** $f = Mg$, la cual puede ser considerada como otra **fuerza externa**.



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Traslación**

Ejercicio Propuesto 1: Obtén los diagramas de cuerpo libre de cada elemento del sistema y sus correspondientes Ec. Diff.



Solution:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = k_1 x_{in}$$

$$b_2 \dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2 x_1 - b_2 \dot{x}_3 - k_3 x_3 = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_3 + (b_1 + b_2)\dot{x}_3 + k_3 x_3 - b_2 \dot{x}_2 - k_3 x_2 = 0$$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de **Sistemas Físicos**

1.1 Introducción

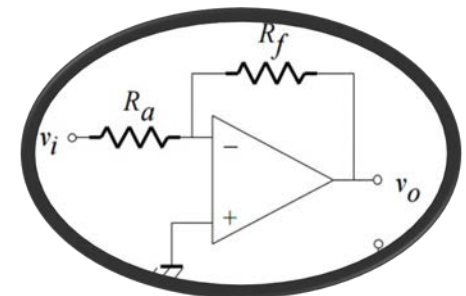
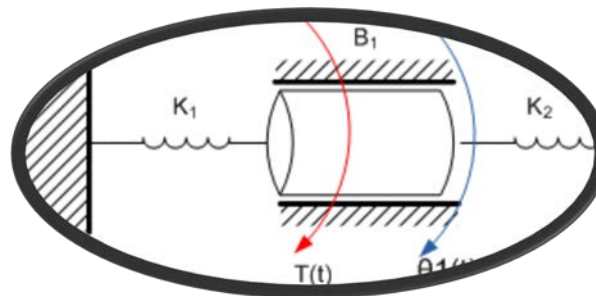
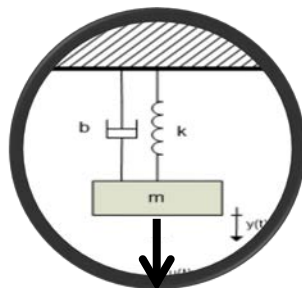
1.2 Modelado de Sistemas Mecánicos

1.2.1 Traslacionales

1.2.2 Rotacionales

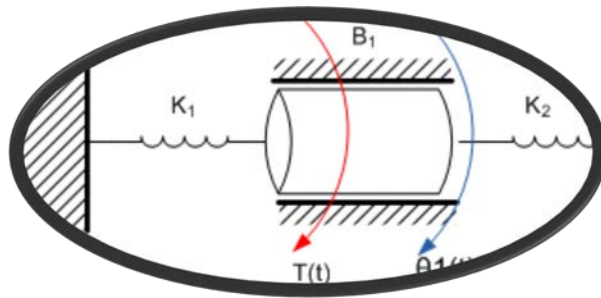
1.3 Modelado de Sistemas Eléctricos

1.4 Modelado de Sistemas de Nivel de Líquidos



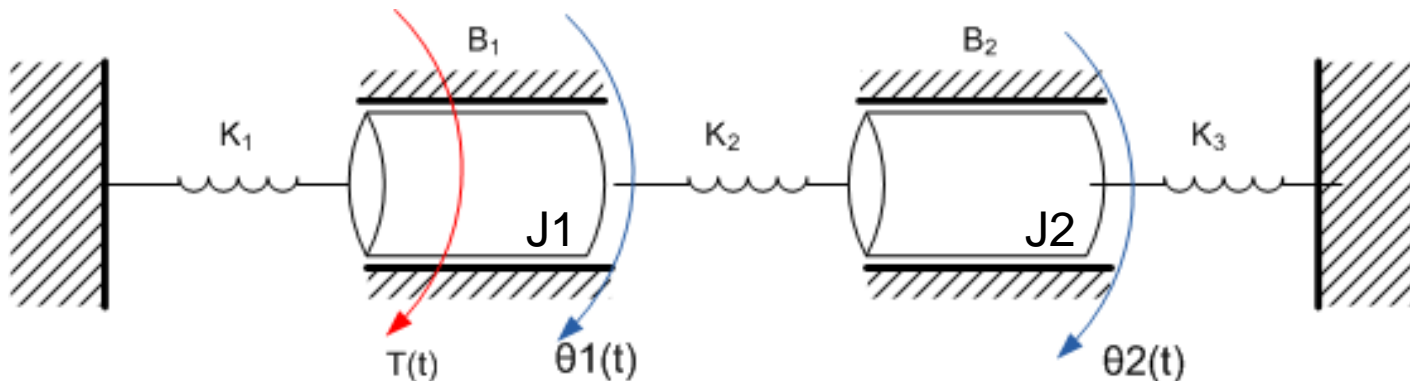
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Rotación**



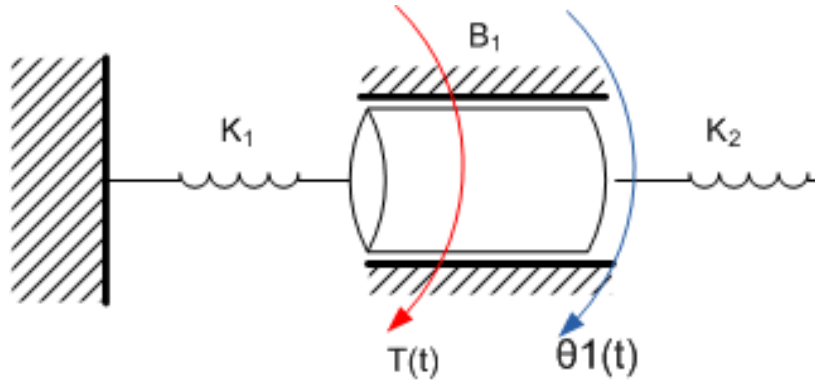
Se denominan **sistemas mecánicos rotacionales** a aquéllos en los que los cuerpos que forman el sistema realizan rotaciones en el mismo plano, es decir, que **los ejes de rotación de todos los cuerpos son paralelos**.

Por tanto es el **ángulo girado** por el cuerpo el único grado de libertad que éste posee.



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Rotación**



Ecuaciones de Conservación ->
Leyes de Mecánica de Newton

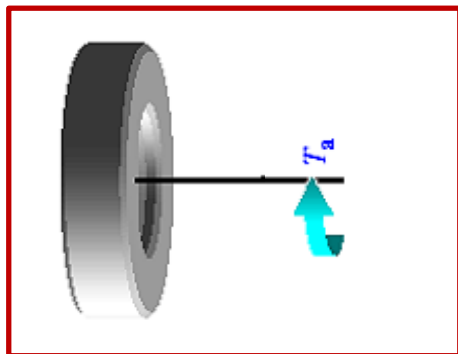
PROCEDIMIENTO: Obtención de ecuaciones dinámicas:

1. Definir los sentidos de giro de cada inercia (posición interés).
2. Cálculo del diagrama de cuerpo libre para cada elemento.
3. Aplicación de Ley de Newton en cada inercia.

$$\sum_i (\tau_{ext})_i - J \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Rotación**



$$\tau = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

τ (N*m) = Momento de fuerza (par)

J (Kg*m²) = Momento de Inercia.






Momento de Inercia

La **ecuación fundamental de la dinámica de rotación** establece que la aceleración angular $d^2\theta/dt^2$ que aparece en un sólido rígido es proporcional al momento de fuerza (τ) que actúa sobre él.

J Representa un factor de **oposición a los cambios** en el estado de rotación del cuerpo de forma similar a como la masa se opone a los cambios de aceleración en el estado de traslación. **Depende de la masa del sólido y de la distribución de dicha masa con respecto al eje de rotación elegido.**

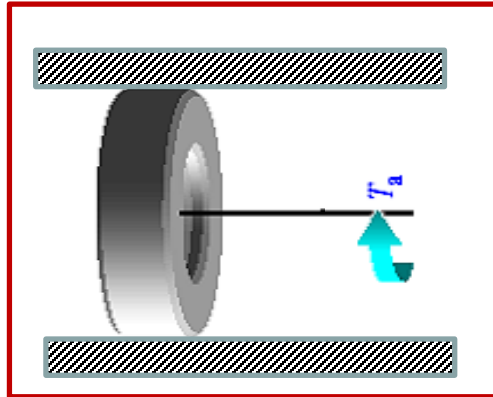
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicas Rotación**

| Shape | Image | Moment of Inertia, J |
|--|--|-----------------------|
| Cylinder, radius= r , mass= m Rotating about center axis |  | $\frac{1}{2}mr^2$ |
| Solid Sphere, radius= r , mass= m Rotating about center |  | $\frac{2}{5}mr^2$ |
| Uniform Rod, length= ℓ , mass= m Rotating about end |  | $\frac{1}{3}m\ell^2$ |
| Uniform Rod, length= ℓ , mass= m Rotating about center |  | $\frac{1}{12}m\ell^2$ |
| Mass at end of massless rod, length= ℓ , mass= m Rotating about end |  | $m\ell^2$ |

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Rotación**



Amortiguador / Fricción

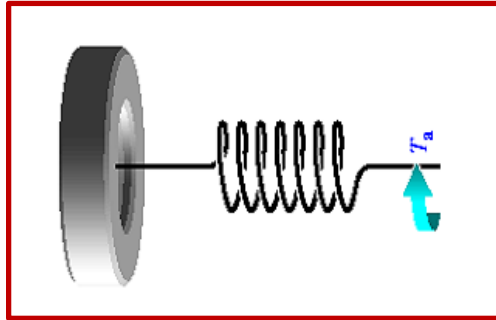
$$\tau = B \frac{d\theta}{dt}$$

Un amortiguador es un elemento que se deforma bajo la acción de un par creando un **par de reacción que es función de la velocidad angular** con la que el elemento se deforma.

Elementos con **rozamiento viscoso** tienen este tipo de comportamiento

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Rotación**



Muelle de Torsión

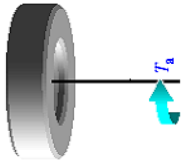
$$\tau = K \cdot \theta$$

Es un elemento elástico que se deforma ante la acción de un par. El elemento **se opone a ser girado** desarrollando un par de reacción proporcional al ángulo girado por éste al deformarse.

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

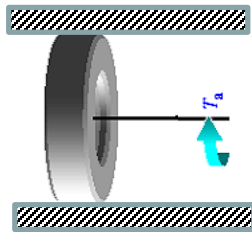
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicas Rotación**

ELEMENTOS ROTACIONALES



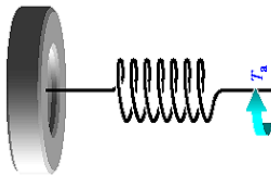
Inercia

$$\tau = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$



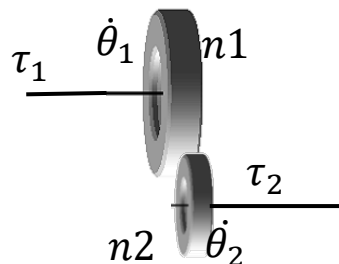
Amortiguador

$$\tau = B \frac{d\theta}{dt}$$



Muelle

$$\tau = K \cdot \theta$$



Engranaje

$$\tau_2 = \frac{n_2}{n_1} \tau_1$$

$$\theta_2 = \frac{-n_1}{n_2} \theta_1$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{-n_1}{n_2} \dot{\theta}_1$$

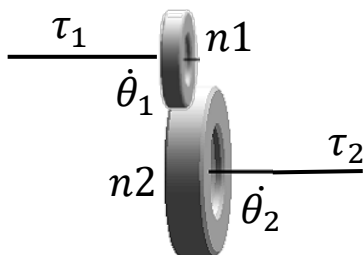
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Rotación**

Engranajes

$$n = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad \begin{array}{l} \text{Gear Ratio o} \\ \text{Relación de Transmisión} \end{array}$$

Reductora

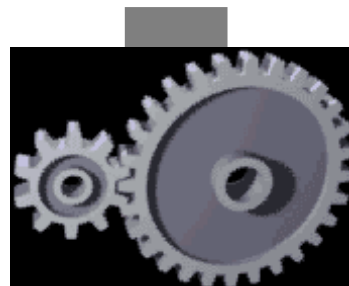


$$n = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_1}{n_2} < 1$$

$$\theta_2 = n \cdot \theta_1 < \theta_1$$

$$\dot{\theta}_2 = n \cdot \dot{\theta}_1 < \dot{\theta}_1$$

$$\tau_2 = \frac{\tau_1}{n} > \tau_1$$

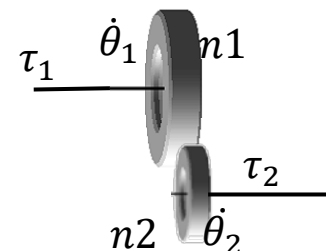


$$\theta_2 = n \cdot \theta_1 = \frac{-n_1}{n_2} \theta_1$$

$$\dot{\theta}_2 = n \cdot \dot{\theta}_1 = \frac{-n_1}{n_2} \dot{\theta}_1$$

$$\tau_2 = \frac{\tau_1}{n} = \frac{n_2}{n_1} \tau_1$$

Multiplicadora



$$n = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_1}{n_2} > 1$$

$$\theta_2 = n \cdot \theta_1 > \theta_1$$

$$\dot{\theta}_2 = n \cdot \dot{\theta}_1 > \dot{\theta}_1$$

$$\tau_2 = \frac{\tau_1}{n} < \tau_1$$

Suponiendo una transmisión en la que la potencia de entrada ($P_1 = \tau_1 \cdot \omega_1$) y la de salida ($P_2 = \tau_2 \cdot \omega_2$) sean iguales al considerarse nulas las pérdidas que se puedan producir en la transmisión ($\text{rendimiento} = 1$)

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Traslación**

Unidades:

| Rotating Systems | | Translating Systems | |
|---|----------------------|-------------------------------|------------------|
| Quantity | Unit | Quantity | Unit |
| Moment of Inertia - J | kg-m ² | Mass - m | kg |
| Torque - τ | N-m | Force - f | N |
| Angle - θ | rad | Length - l | m |
| Angular velocity - $\dot{\theta} = \omega$ | rad/sec | Velocity - $\dot{x} = v$ | m/s |
| Angular acceleration - $\ddot{\theta} = \alpha$ | rad/sec ² | Acceleration - $\ddot{x} = a$ | m/s ² |
| Spring Constant - K_r | N-m/rad | Spring Constant - k | N/m |
| Friction Coefficient - B_r | N-m-s/rad | Friction Coefficient - g | N-s/m |

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Rotación**

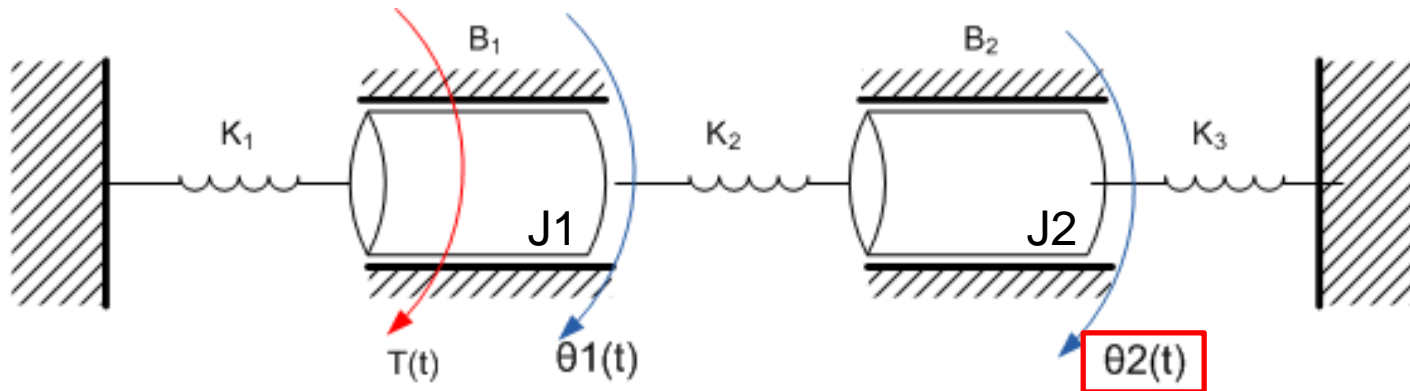
ALGORITMO

- 1.- Definir los sentidos de giro.
- 2.- Definir cuál es la entrada y cuál la salida del Sistema.
- 3.- Definir los sentidos positivos de todas las señales.
- 4.- Para cada sólido rígido con momento de inercia J_i obtener el **diagrama de cuerpo libre**:
 - 4.1 Obtención de una ecuación diferencial atendiendo solo a las fuerzas que actúan en J_i debido a J_i y su movimiento angular.
 - 4.2 Para cada sólido rígido con momento de inercia J_j se añaden al diagrama de J_i las fuerzas que aparecen sobre J_i si J_j se mueve y el resto no.
 - 4.3 Aplicar la ley de Conservación:
$$\sum_i f_i = 0$$
- 5.- Obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales. Reducir a una única ecuación que sólo involucre la entrada y la salida.

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Rotación**

Ejemplo 1:

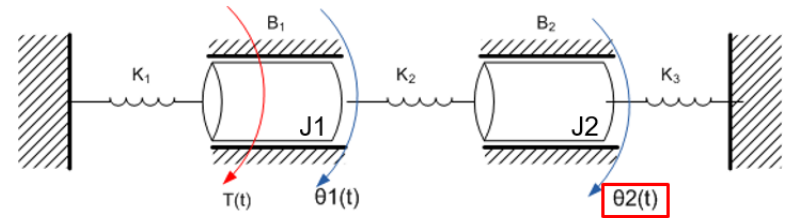


¿Cuáles son las ecuaciones diferenciales que modelan este sistema?

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicas Rotación**

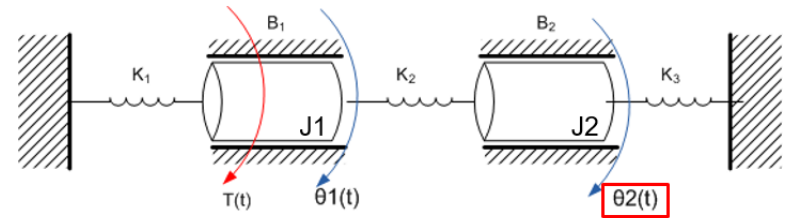
Ejemplo 1:



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicas Rotación**

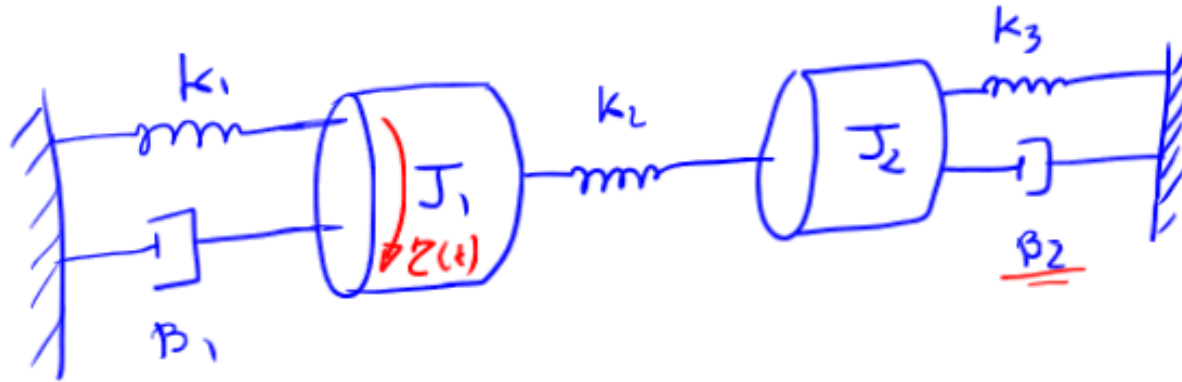
Ejemplo 1:



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicos Rotación**

Ejemplo 2:



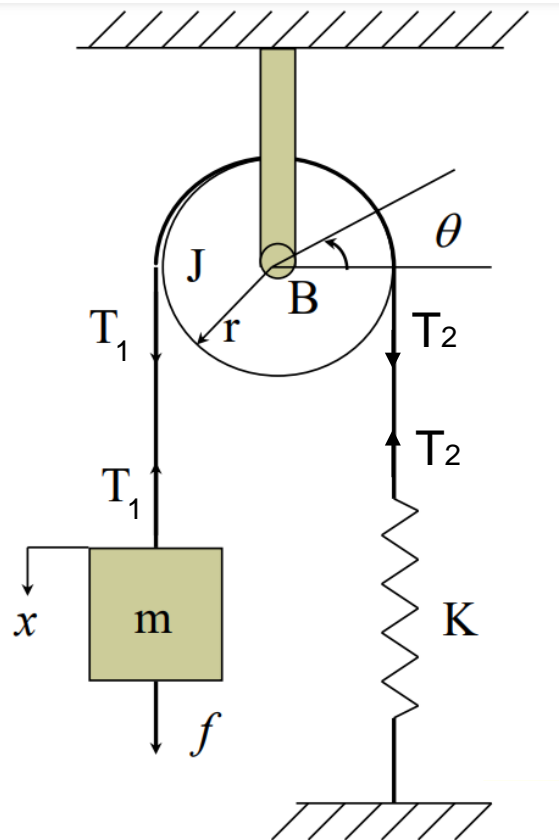
¿Cuáles son las ecuaciones diferenciales que modelan este sistema?

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos:

Mecánicas Traslación - Rotación

Ejemplo 3:



¿Cuál es la ecuación diferencial que modela este sistema?

Nota: considerar el sistema rotacional independiente de los lineales a través de las fuerzas T_1 y T_2 (tensiones en la cuerda).

Nota: relaciones rotacionales-traslacionales

$$x = r * \theta$$

$$\dot{x} = r * \dot{\theta}$$

$$\ddot{x} = r * \ddot{\theta} \rightarrow \text{aceleración tangencial}$$

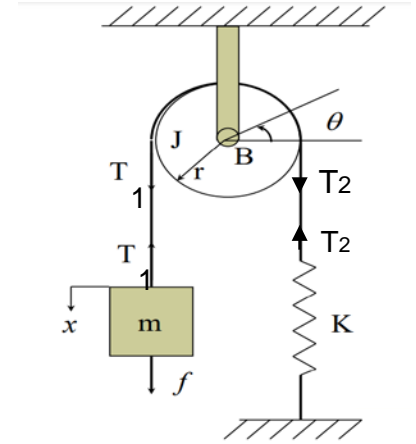
$$\tau = r * f$$

Suponiendo que la potencia angular ($P_{ang} = \tau \cdot \omega$) es igual a la lineal ($P_{lin} = f \cdot v$)

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Mecánicas Rotación**

Ejemplo 3:

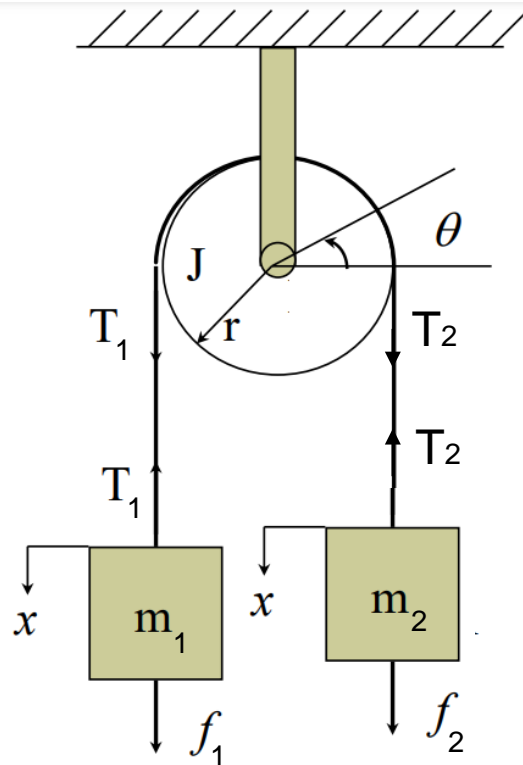


MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos:

Mecánicas Traslación - Rotación

Ejemplo 4 (propuesto):



¿Cuál es la ecuación diferencial que modela este sistema?

Emplear que:

$$J = \frac{1}{2} \cdot M r^2 \rightarrow \text{con } M \text{ la masa de la polea.}$$

$$f_1 = M_1 \cdot g$$

$$f_2 = M_2 \cdot g$$

$$\text{Sol: } (M_1 - M_2)g = (M_1 + M_2 + \frac{1}{2}M)\ddot{x}$$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de **Sistemas Físicos**

1.1 Introducción

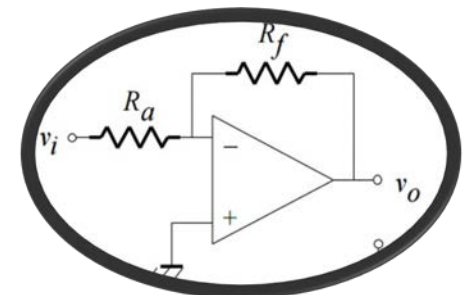
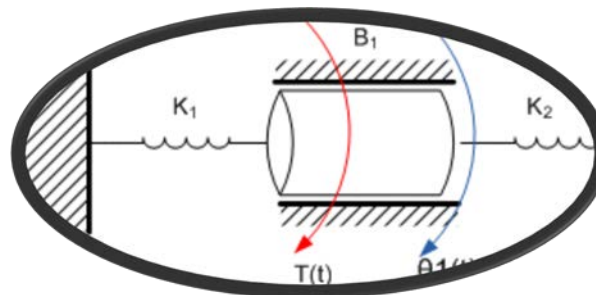
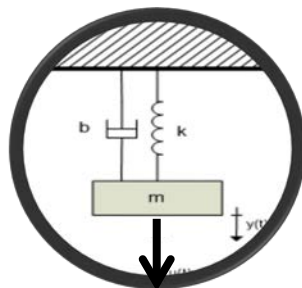
1.2 Modelado de Sistemas Mecánicos

1.2.1 Traslacionales

1.2.2 Rotacionales

1.3 Modelado de Sistemas Eléctricos

1.4 Modelado de Sistemas de Nivel de Líquidos

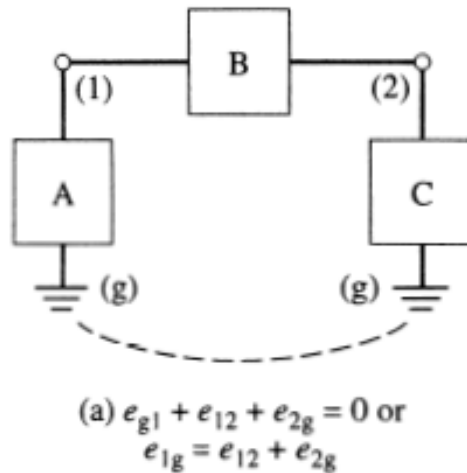


MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**

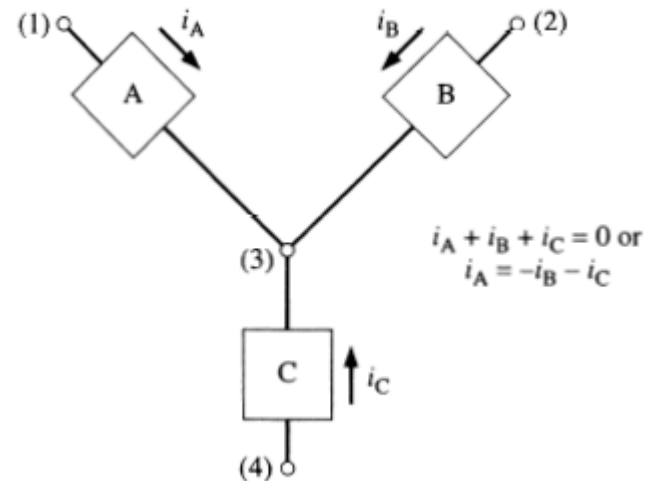
Ecuaciones de Conservación:
Leyes de Kirchhoff

$$\sum V_i = 0$$



Análisis de Mallas

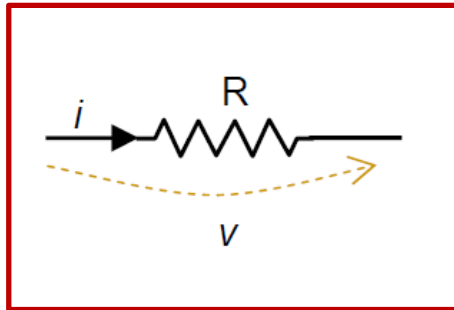
$$\sum I_i = 0$$



Análisis de Nudos

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

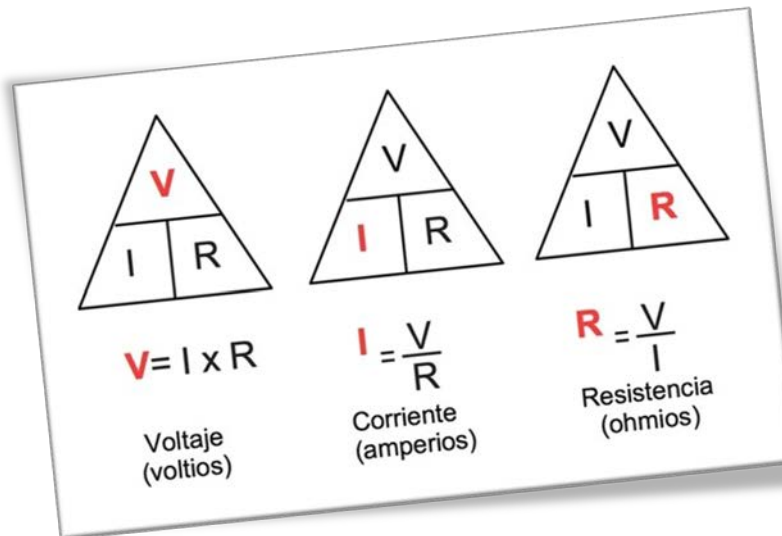
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**



Resistencia (Ohmio)

Es un elemento tal que al circular una intensidad por él, ésta disipa energía calorífica (**efecto Joule**) produciendo una caída de potencial. La ecuación del modelo de la resistencia viene dado por la **ley de Ohm**:

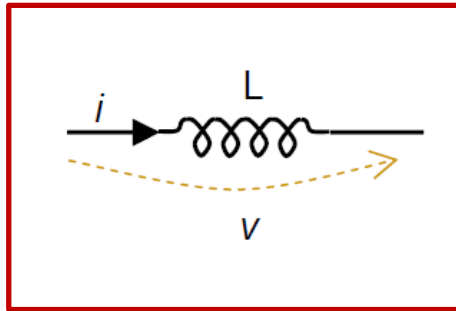
$$v(t) = R \cdot i(t)$$



Este elemento es análogo a una tubería en un sistema hidráulico (como veremos posteriormente).

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**



Bobina (Henrio)

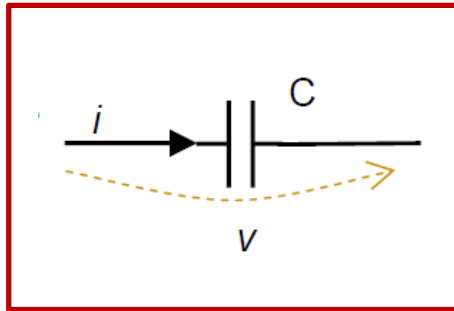
Es un elemento que al someterse a una diferencia de potencial **genera** una variación en la intensidad que circula por él proporcional a la diferencia de potencial.

Las bobinas almacenan energía eléctrica en forma de energía magnética. La ecuación del modelo es la siguiente:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**



Condensador (Faradio)

Es un elemento que **genera** una intensidad de corriente proporcional a la variación de la diferencia de potencial.

La ecuación del modelo de este elemento es:

$$C \frac{dv(t)}{dt} = i(t)$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} i(\tau) d\tau$$

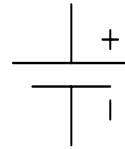
El condensador es análogo a un depósito en un sistema hidráulico

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**

Elementos Activos:

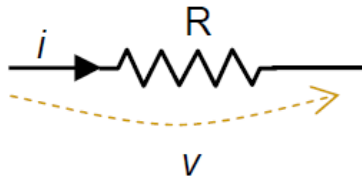
Fuente de tensión (pila)



Fuente de corriente

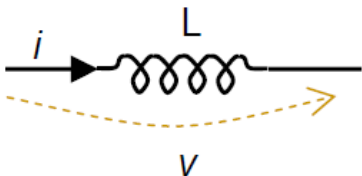


Elementos Pasivos:



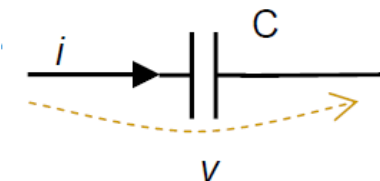
Resistencia
(Ohmios)

$$v(t) = R \cdot i(t)$$



Bobina
(Henrios)

$$v(t) = L \frac{di}{dt}$$



Condensador
(Faradios)

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} i(\tau) d\tau$$

$$C \frac{dv}{dt} = i(t)$$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**

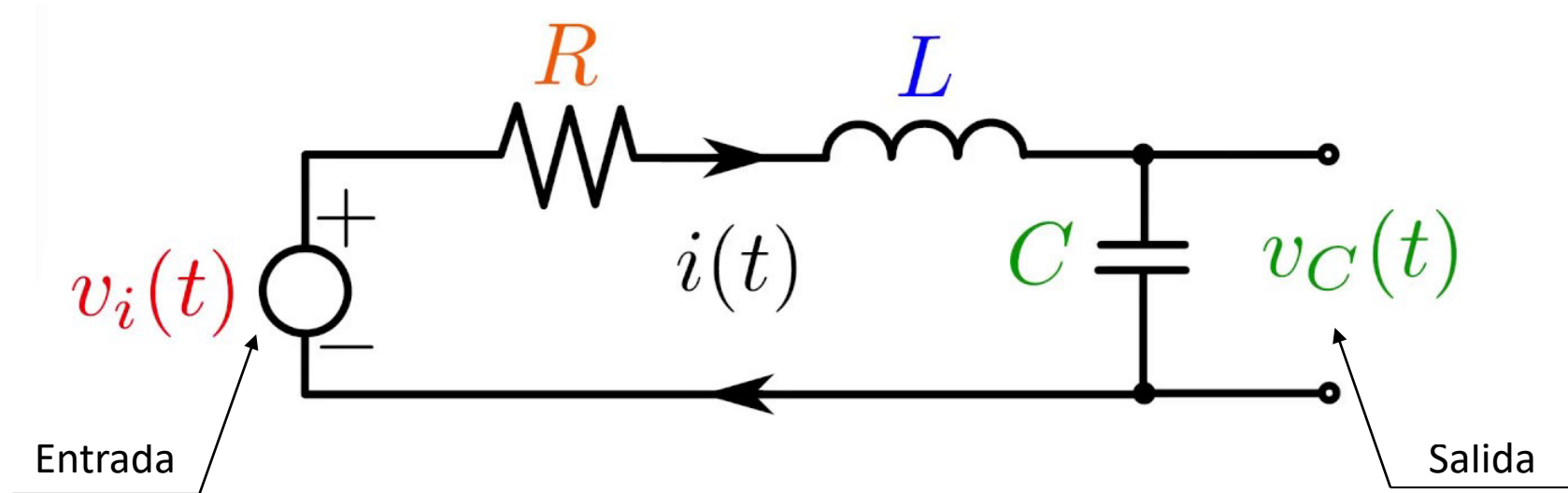
ALGORITMO

- 1.- Definir la entrada y la salida del sistema.
- 2.- Definir las mallas del circuito. Malla: recorrido cerrado del circuito que contiene al menos un elemento que no contenga otra malla.
- 3.- Definir el sentido positivo de la intensidad de cada malla.
- 4.- Escribir la ec. De Kirchhoff de cada malla: $\sum_{malla} \Delta v = 0$
- 5.- Resumir el sistema en una sola ecuación.

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**

Ejemplo: Circuito RLC

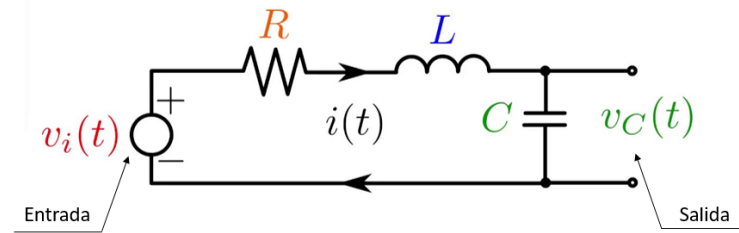


$$v_i = v_r + v_l + v_c$$

$$v_i(t) = Ri(t) + \frac{Ldi(t)}{dt} + v_c$$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

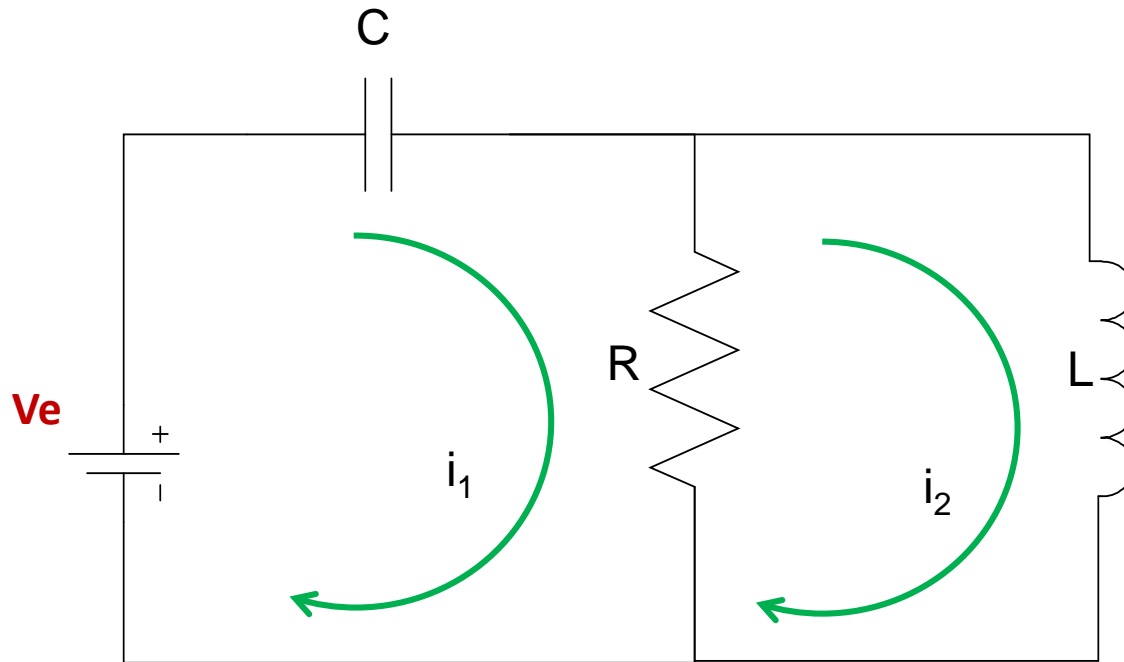
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**

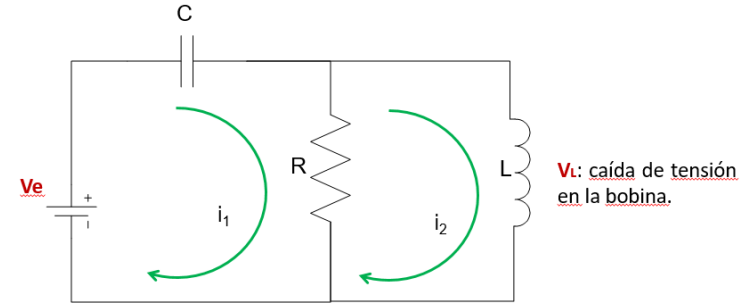
Ejemplo:



V_L : caída de tensión
en la bobina.

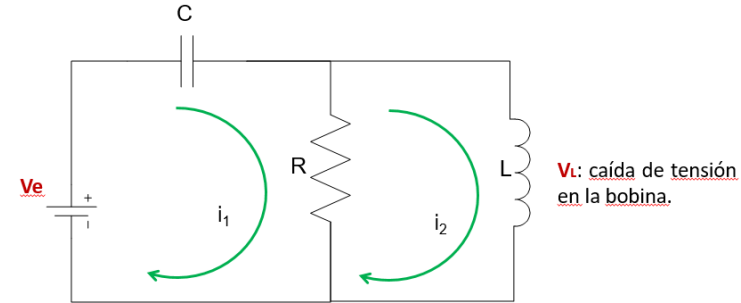
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

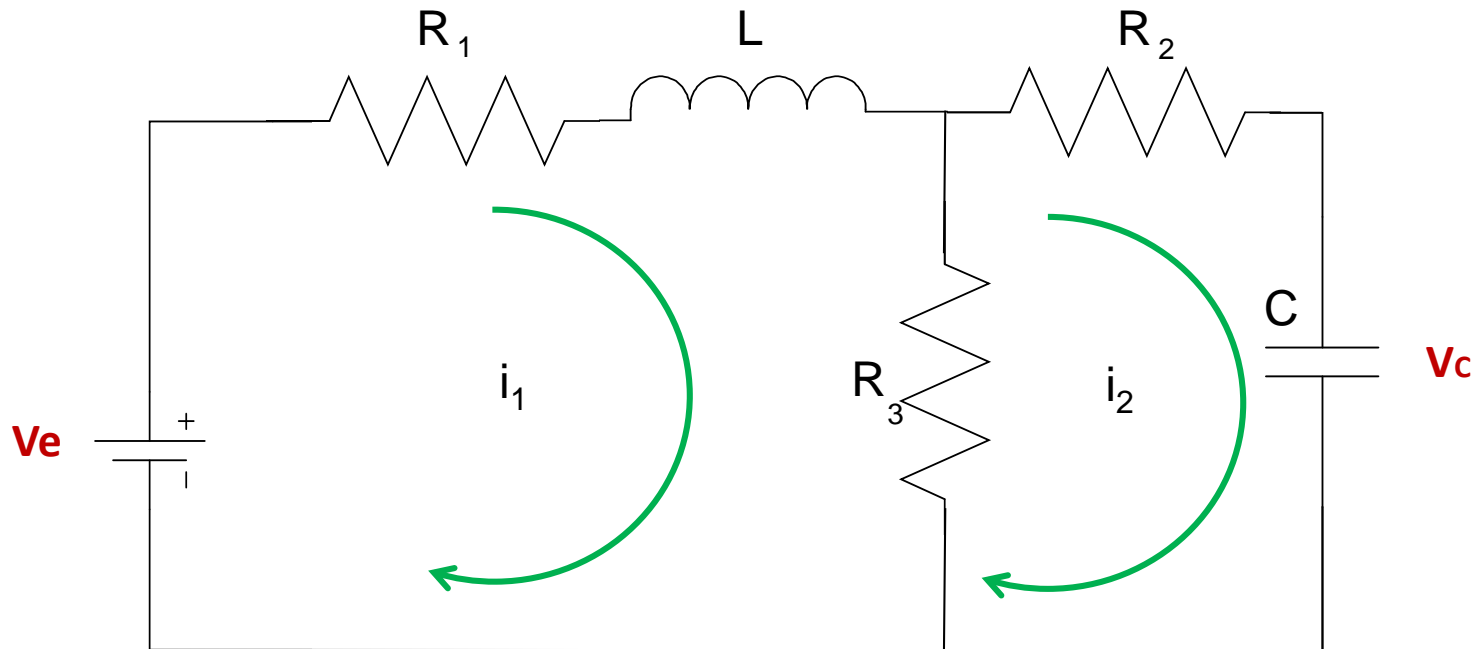
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

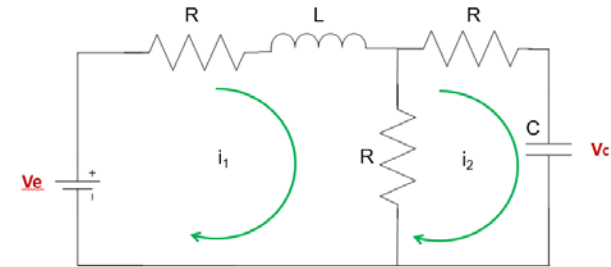
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**

Ejercicio Propuesto:



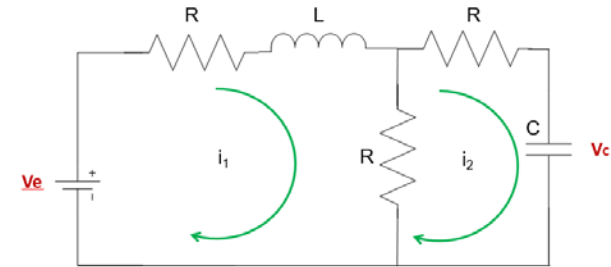
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**

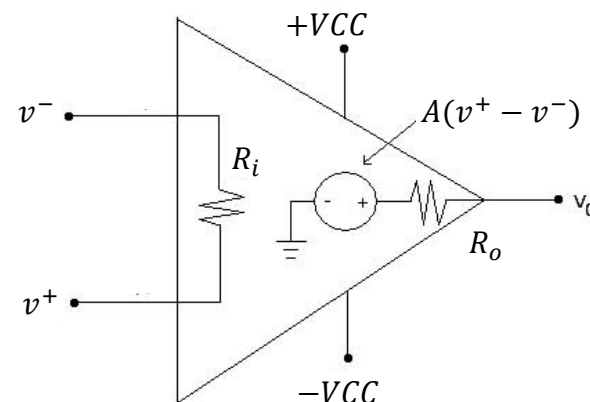


MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**

Amplificadores Operacionales (AO)

Son dispositivos electrónicos base de la electrónica analógica. Se estudiará el comportamiento del AO ideal.



Propiedades del amplificador operacional ideal:

1. La tensión entre los terminales de entrada v^+ y v^- es nula, esto es, $v^+ = v^-$. (Propiedad de tierra virtual o cortocircuito virtual).
2. La resistencia de entrada **R_i es infinita** (Corriente nula entre los terminales + y -).
3. La resistencia de salida **R_o es cero** (Salida como fuente de tensión ideal).
4. La ganancia **A es infinito**.



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

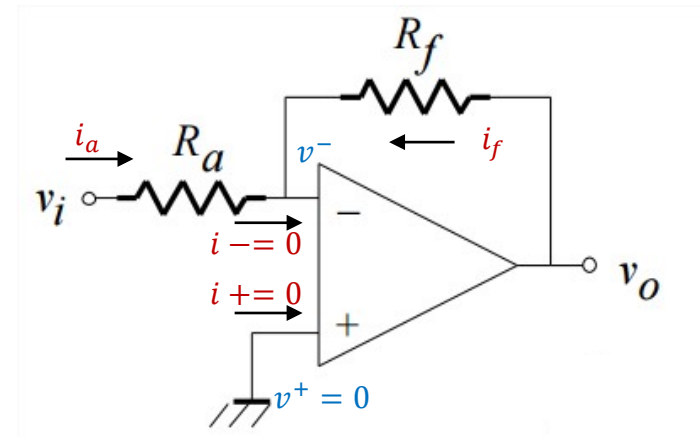
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**

Amplificador Operacional (AO): **Configuración Amplificador Inversor**

Aplicando Kirchoff para los nudos v^+ y v^- tenemos que $v^+ = 0$ y para v^- tenemos:

$$i_a + i_f = 0$$

$$\frac{v_i - v^-}{R_a} + \frac{v_0 - v^-}{R_f} = 0$$



Dado que $v^+ = v^-$ y que $v^+ = 0$, tenemos:

$$\frac{v_i}{R_a} + \frac{v_0}{R_f} = 0 \Rightarrow v_0 = -\frac{R_f}{R_a} v_i$$

Obtenemos a la salida la tensión de entrada, invertida y escalada por $\frac{R_f}{R_a}$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

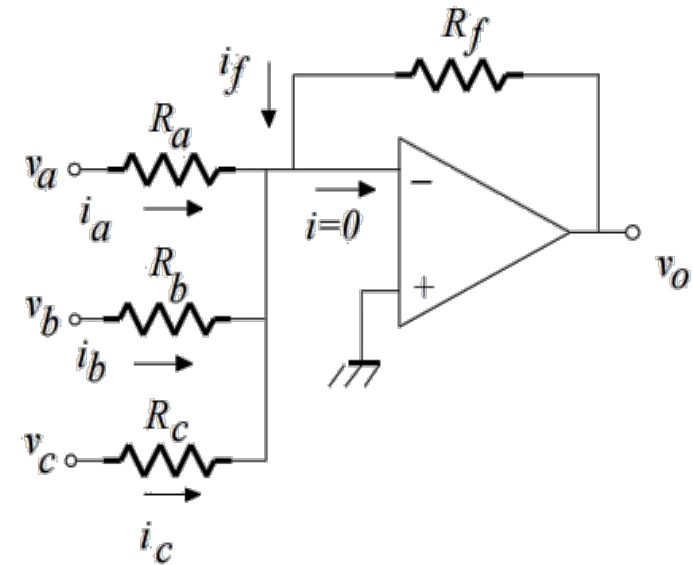
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**

Amplificador Operacional (AO): **Configuración Amplificador-Sumador Inversor**

Aplicando Kirchoff y realizando un razonamiento similar al anterior:

$$\frac{v_a - v^-}{R_a} + \frac{v_b - v^-}{R_b} + \frac{v_c - v^-}{R_c} + \frac{v_0 - v^-}{R_f} = 0$$

$$v_0 = -R_f \left(\frac{v_a}{R_a} + \frac{v_b}{R_b} + \frac{v_c}{R_c} \right) = -R_f \sum_{i=1}^{i=n} \frac{v_i}{R_i}$$



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**

Amplificador Operacional (AO): **Configuración Amplificador NO Inversor**

Dado que $v^+ = v^-$ y que $v^+ = v_i$, y que

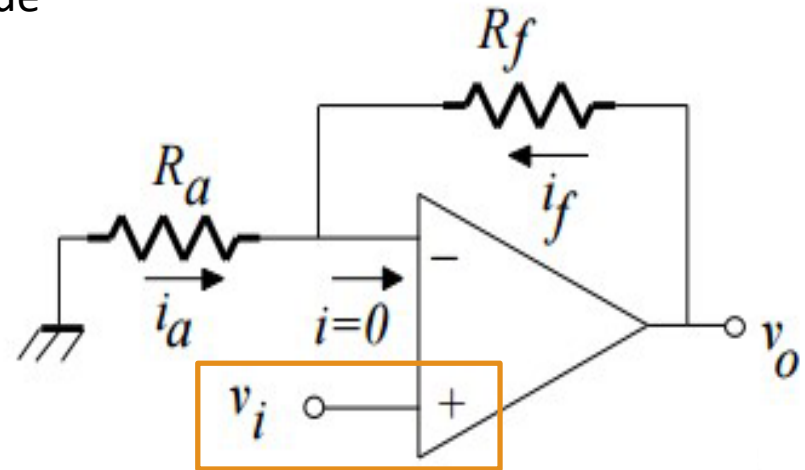
$$i_a + i_f = 0$$

Entonces:

$$\frac{0 - v^-}{R_a} + \frac{v_0 - v^-}{R_f} = 0$$

$$\frac{-v_i}{R_a} + \frac{v_0 - v_i}{R_f} = 0$$

Despejando: $v_0 = v_i \left(1 + \frac{R_f}{R_a} \right)$



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**

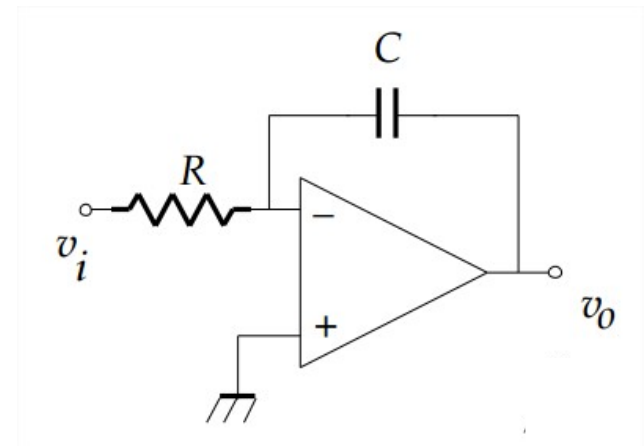
Amplificador Operacional (AO): **Configuración Integrador / Derivador**

Circuito integrador

$$\frac{v_i}{R} + C \frac{dv_0}{dt} = 0$$

Integrando y despejando v_0 :

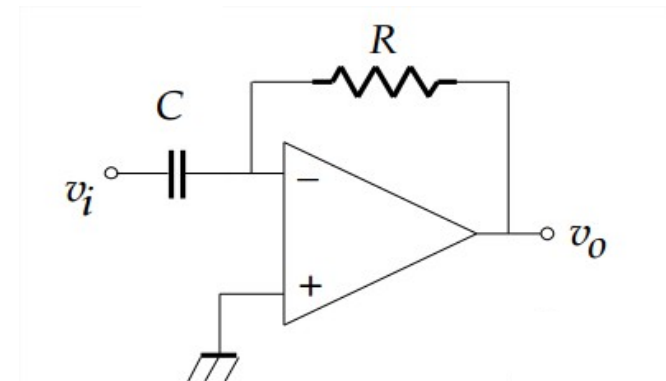
$$v_0 = \left(-\frac{1}{RC} \right) \int_0^t v_i(\tau) d\tau$$



Circuito derivador

$$C \frac{dv_i}{dt} + \frac{v_0}{R} = 0$$

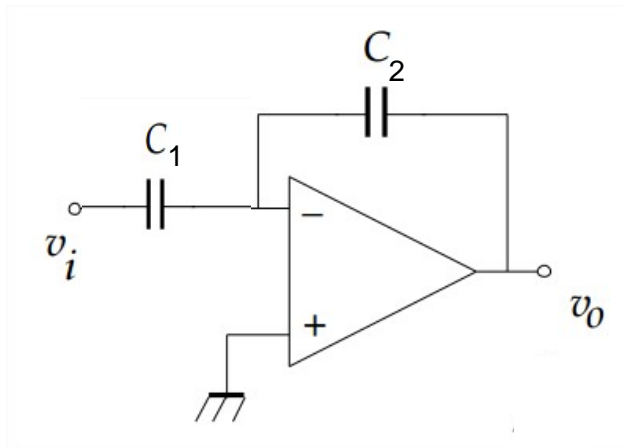
$$v_0 = -RC \frac{dv_i}{dt}$$



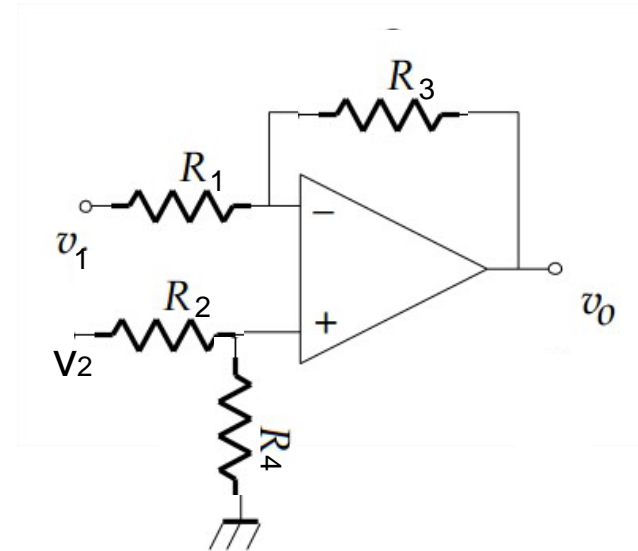
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**

Ejemplos: Obtener la ecuación diferencial que liga la entrada v_i y la salida v_o



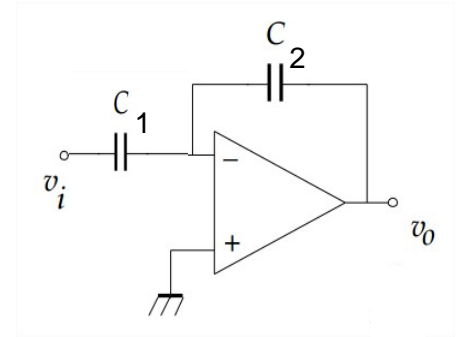
Ejemplo 1



Ejemplo 2

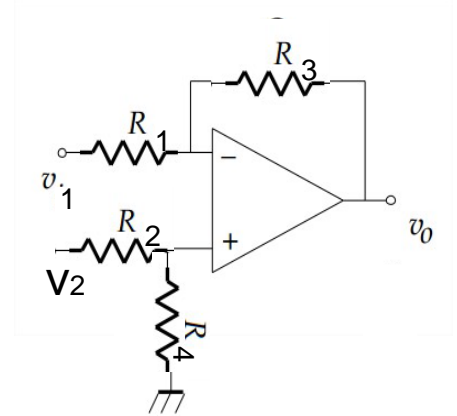
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**

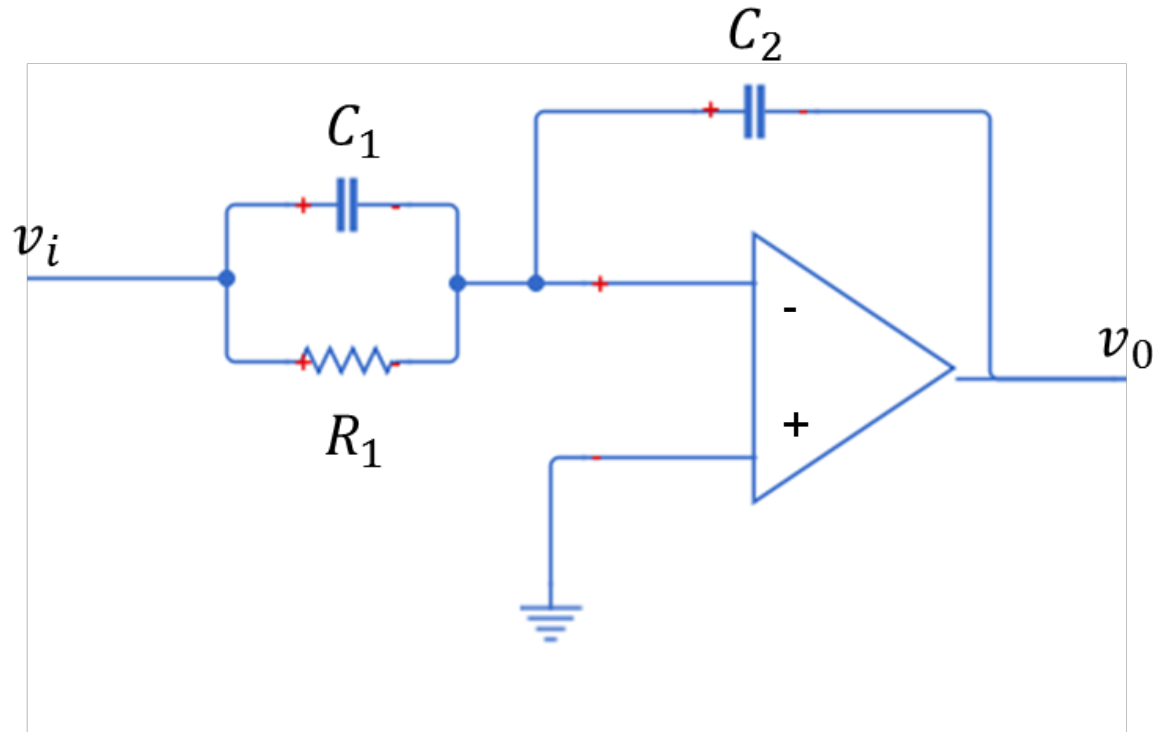


MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**

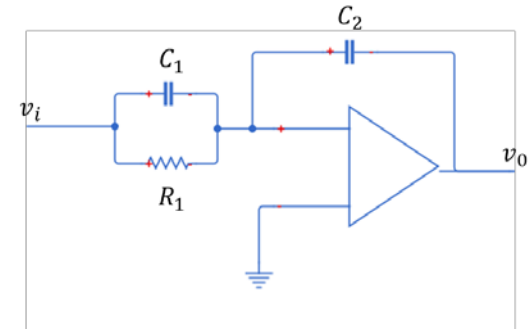
Ejercicio Propuesto 1:

Obtener la ecuación diferencial que liga la entrada v_i y la salida v_o



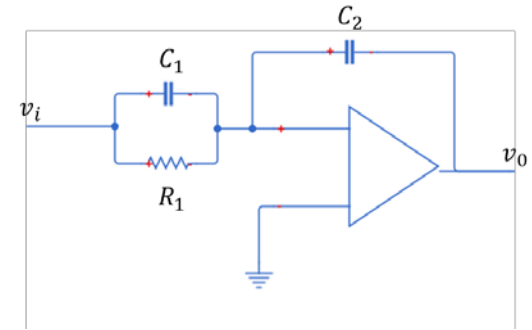
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**

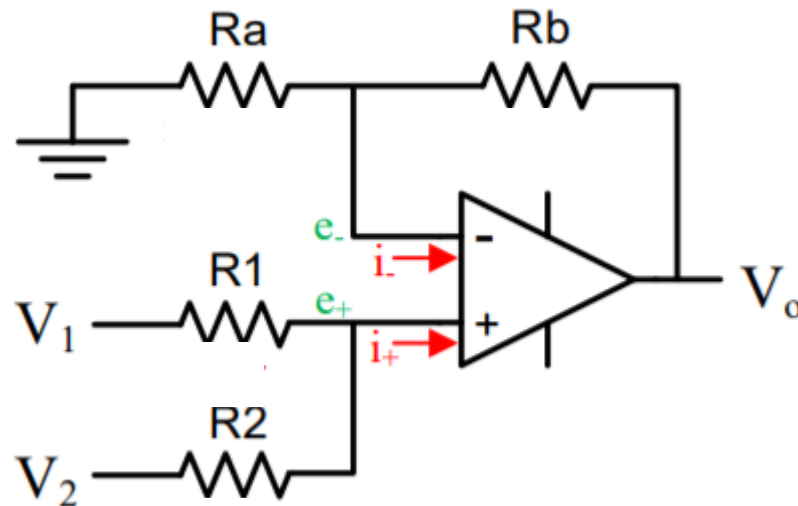


MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**

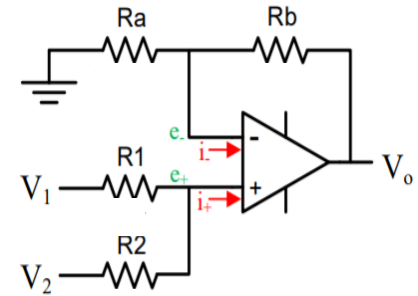
Ejercicio Propuesto 2:

Obtener la ecuación diferencial que liga las entradas v_i y la salida v_o



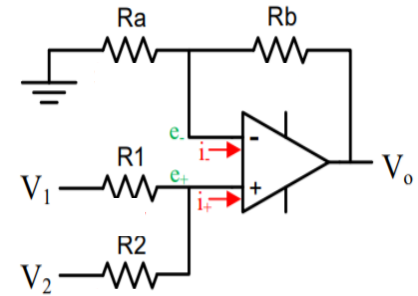
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**

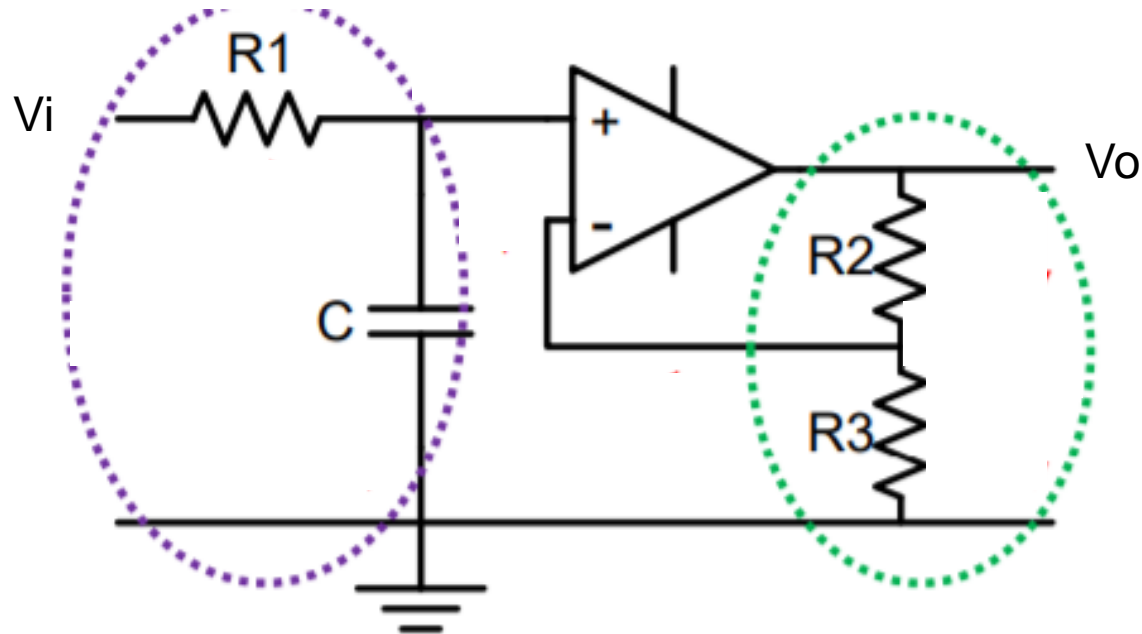


MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**

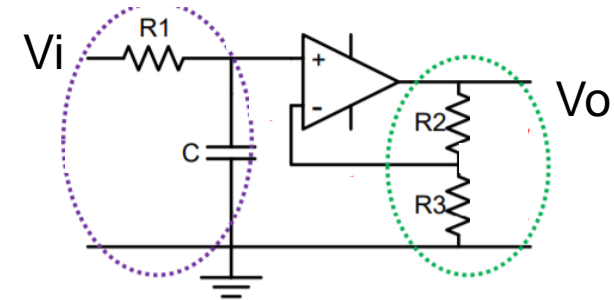
Ejercicio Propuesto 3:

Obtener la ecuación diferencial que liga las entradas v_i y la salida v_o



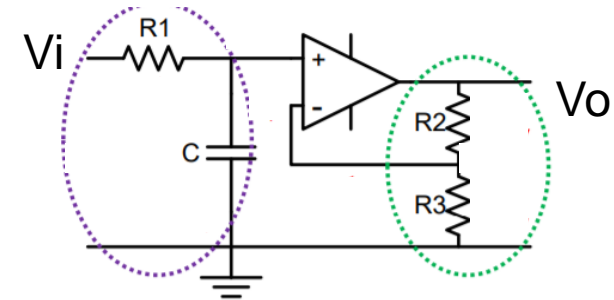
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Sistemas Eléctricos**



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de **Sistemas Físicos**

1.1 Introducción

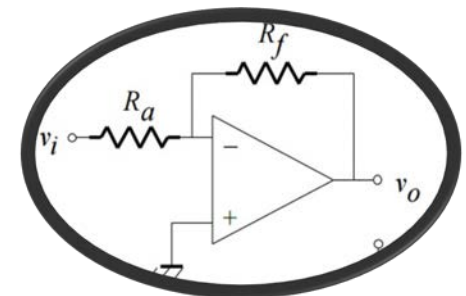
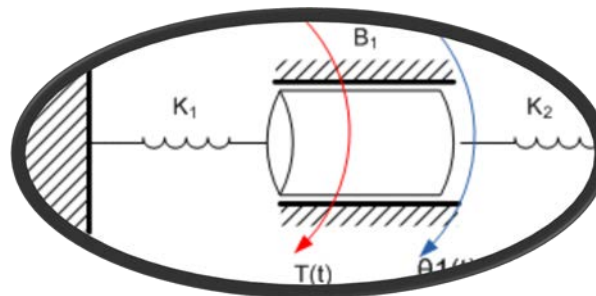
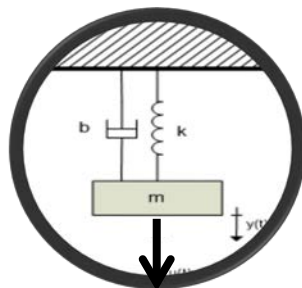
1.2 Modelado de Sistemas Mecánicos

1.2.1 Traslacionales

1.2.2 Rotacionales

1.3 Modelado de Sistemas Eléctricos

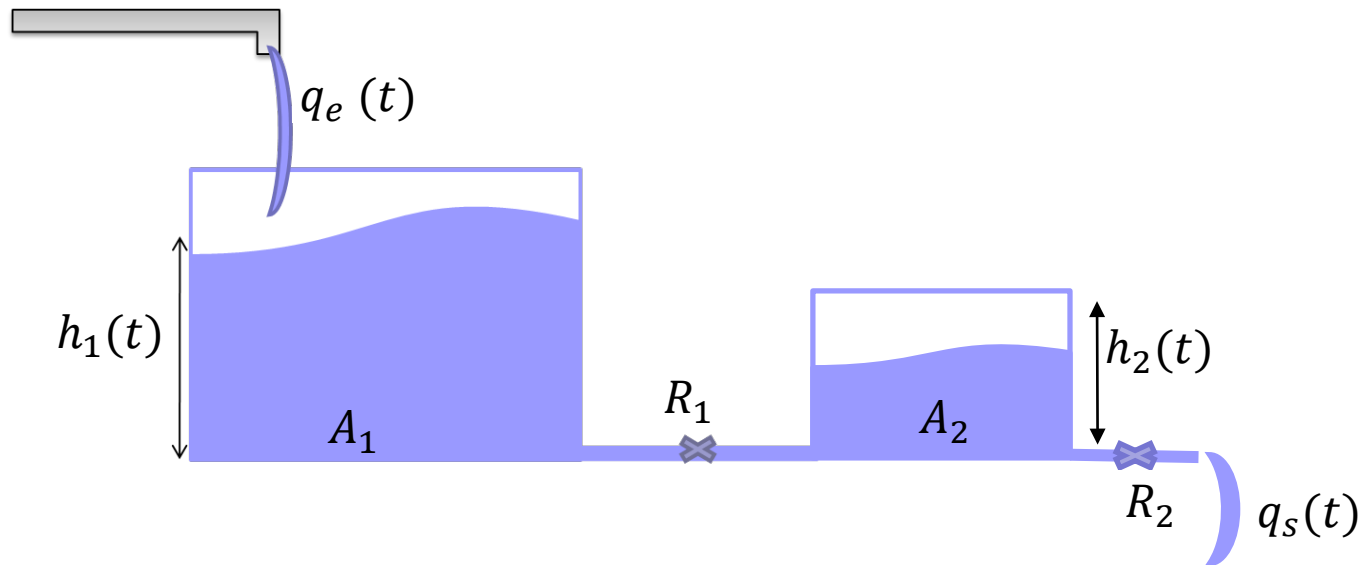
1.4 Modelado de Sistemas de Nivel de Líquidos



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

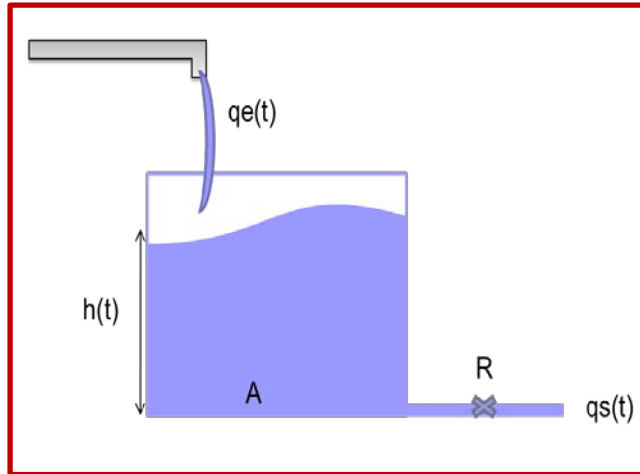
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Nivel de Líquidos**

Son aquellos sistemas en los que se produce una circulación de líquido a lo largo de los elementos que forman el sistema bajo la acción de diferencias de presión. **Los caudales de líquido y la diferencia de presiones son las magnitudes que se pretenden modelar.** Las ecuaciones de balance surgen de la ley de conservación de masa.



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Nivel de Líquidos**



Depósito

Un depósito es un elemento que, alimentado por un **caudal de entrada**, es capaz de acumular líquido, suministrándolo en un **caudal de salida**.

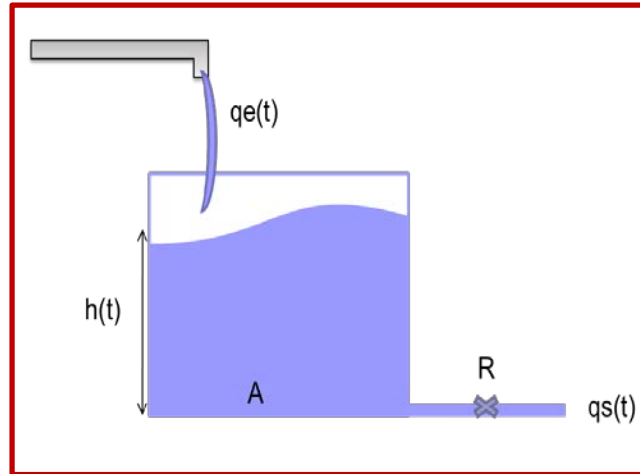
Como efecto de la acumulación de líquido, éste se encuentra sometido a una **presión hidrostática** que en el fondo del depósito es proporcional a la altura del líquido.

Para el caso de un **depósito prismático** de sección A (sección constante) las ecuaciones que lo modelan son:

$$\frac{dV(t)}{dt} = q_e - q_s \quad \longrightarrow \quad A \frac{dh}{dt} = q_e - q_s$$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Nivel de Líquidos**



Depósito

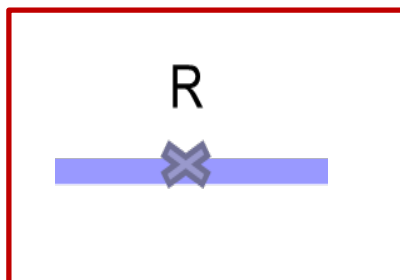
Para el caso de un **depósito prismático** de sección A (sección constante) las ecuaciones que lo modelan son:

$$A \frac{dh}{dt} = q_e - q_s$$

Capacitancia Hidráulica: Relación entre la variación del líquido almacenado y la variación del nivel (su nombre se debe a la similitud con la carga de un circuito RC).

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Nivel de Líquidos**



Tubería / Válvula

Por una tubería (o por una válvula) circula un **caudal de líquido** tal que la caída de presión a lo largo del elemento es proporcional al cuadrado del caudal circulante. Esta caída de presión se debe a la **fricción** del líquido con las paredes del elemento.

$$q(t) = K_p \cdot \sqrt{p_1(t) - p_2(t)}$$

Simplificación: Teniendo en cuenta que la presión en el fondo del tanque es proporcional a la altura del líquido, usaremos el concepto de “resistencia hidráulica”.

Resistencia hidráulica (R):

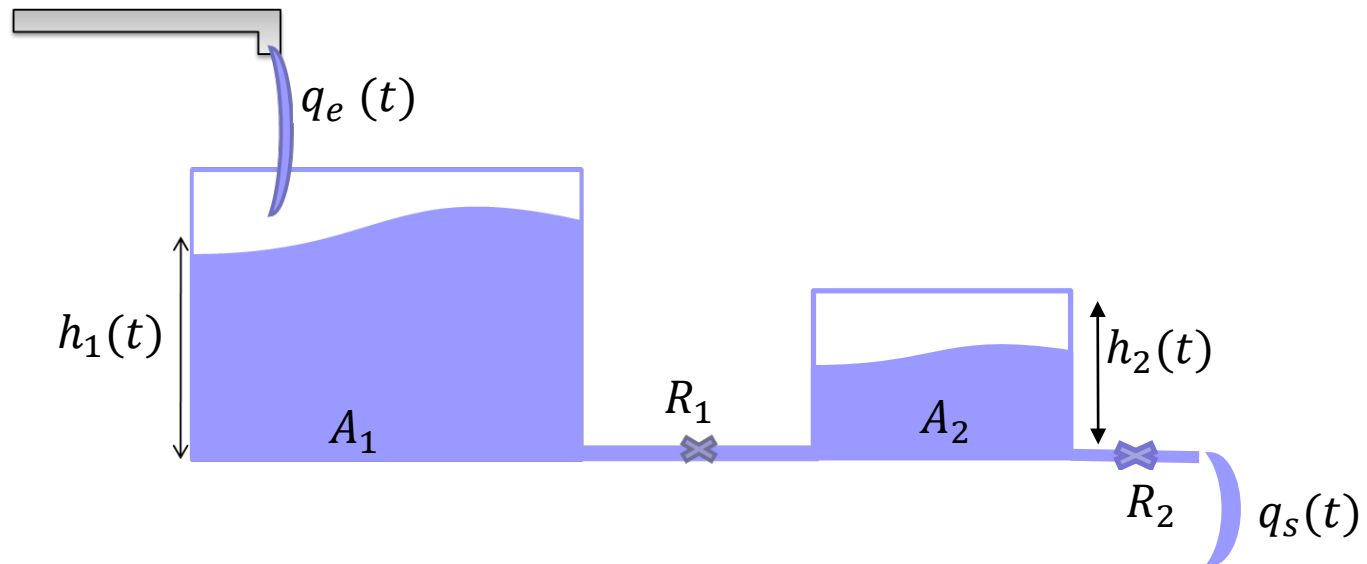
Relación entre la variación de la diferencia de nivel y la de caudal de salida.

$$q_s = \frac{h}{R}$$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

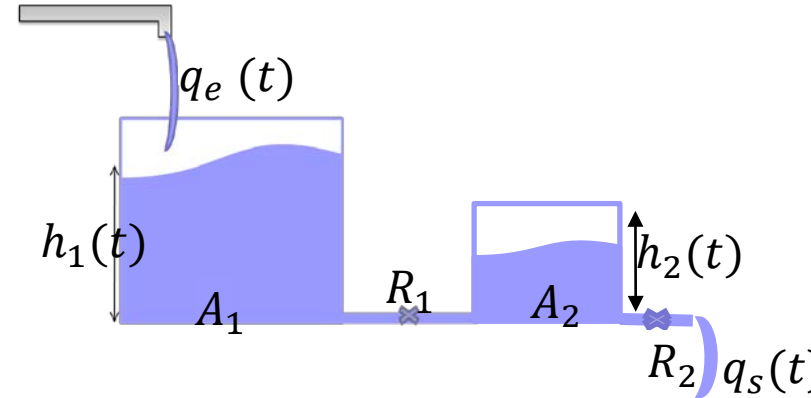
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Nivel de Líquidos**

Ejemplo: Obtener la ecuación diferencial que liga la entrada $q_e(t)$ y las salidas $h_2(t)$ $q_s(t)$



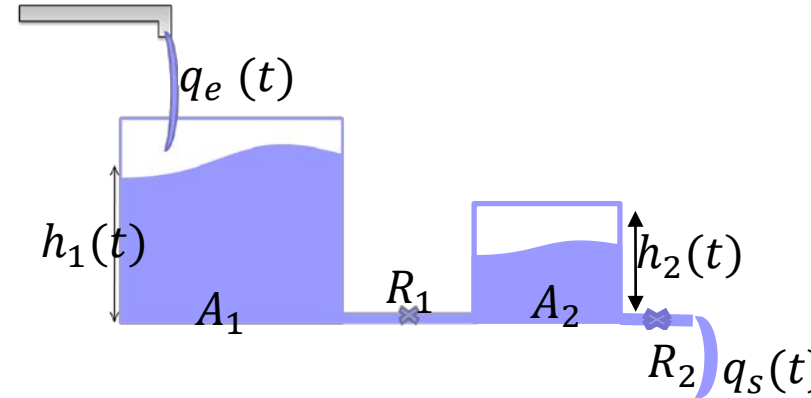
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Nivel de Líquidos**



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

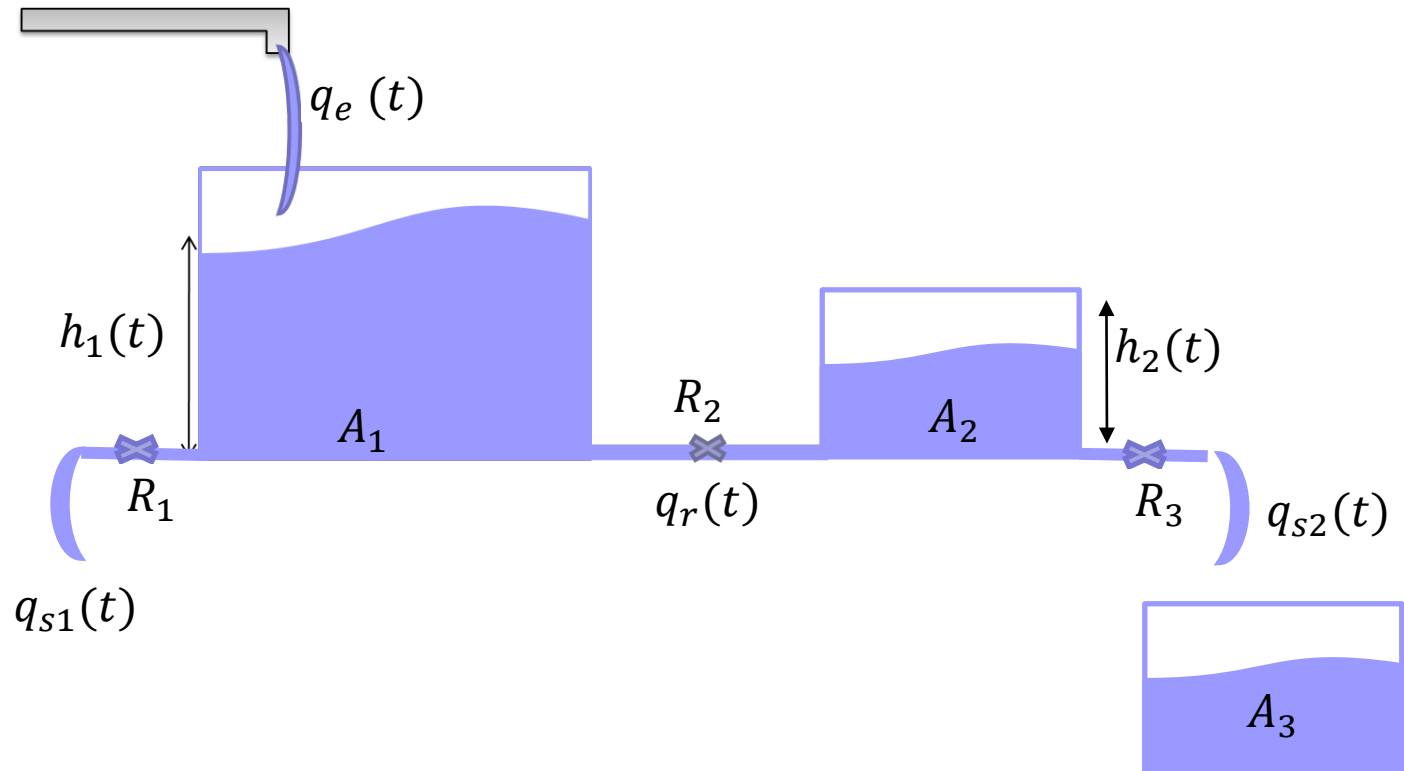
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Nivel de Líquidos**



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Nivel de Líquidos**

Ejemplo: Obtener la ecuación diferencial de cada tanque.



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: **Nivel de Líquidos**

