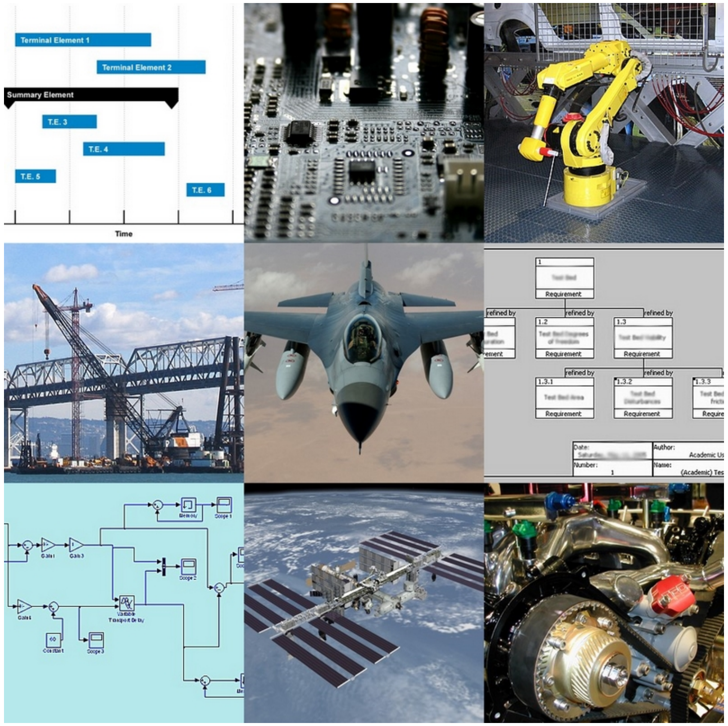
UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS



Dr. D. Javier González Monroy
Dpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática

Departamento de Ingeniería
de Sistemas y Automática

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Tema 2: Modelado y Simulación de Sistemas LTI

1. Introducción a la Simulación de Sistemas
2. Transformada de Laplace
3. Función de Transferencia
4. Diagrama de Bloques

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Simulación de Sistemas

La simulación de un sistema utiliza su modelo para obtener la respuesta del mismo ante una cierta entrada.

Diferentes tipos de modelos requieren diferentes técnicas de simulación.

Modelos **matemáticos** basados en **ecuaciones diferenciales** requieren la resolución de las mismas.

Es decir si un modelo viene representado por una ecuación diferencial:

$$a_n y^{n)} + a_{n-1} y^{n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{m)} + b_{m-1} u^{m-1)} + \ldots + b_1 u' + b_0 u$$

Donde $\boldsymbol{y}$ es la salida y $\boldsymbol{u}$ es la entrada, **la simulación requerirá despejar $\boldsymbol{y}$ en función de $\boldsymbol{u}$, es decir $\boldsymbol{y = f(u)}$**

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Transformada de Laplace

La técnica de la **Transformada de Laplace** se usa para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes (lineales e invariantes en el tiempo (LTI)).

Transforma ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas.

$$f(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} F(s)$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \qquad \qquad \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(s) \doteq \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Transformada de Laplace

La definición de la Transformada de Laplace hace necesario que la integral converja, por tanto.

$$\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} \to 0$$

$$f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

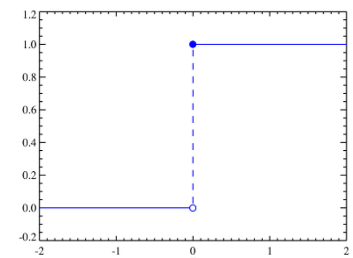
$$F(s) \doteq \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Ejemplos:

Escalón Unitario

$$x(t) = u(t)$$

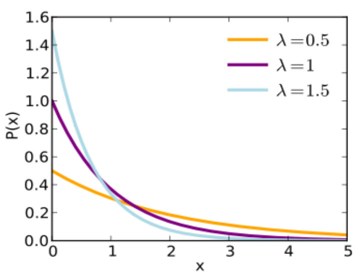
$$X(s) = \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$



Exponencial Negativa

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt = \frac{1}{s+a}, \quad s > -a$$



Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Linealidad

$$L\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

Amortiguación

$$L\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a)$$

$$L\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$L\{e^{-at} u(t)\} = \frac{1}{s+a}$$

Desplazamiento

$$L\{f(t-T)u(t-T)\} = e^{-sT} F(s)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Derivación

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Que se generaliza para el caso de derivación de orden n:

$$\boxed{L\{f^{n)}(t)\} = s^n F(s)} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{n-1)}(0)$$

Ejemplo: $\ddot{y} + 9\dot{y} + 2y = 3u \qquad y(0) = 2, \dot{y}(0) = -4$

$$\boxed{s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)} + \boxed{9(sY(s) - y(0))} + \boxed{2Y(s)} = 3U(s)$$

$$Y(s)(s^2 + 9s + 2) = 3U(s) + (9 + s)y(0) + \dot{y}(0)$$

$$Y(s) = \frac{3}{s^2 + 9s + 2}U(s) + \frac{2s + 14}{s^2 + 9s + 2}$$

Respuesta forzada

Respuesta natural

Tema 2: Transformada de Laplace

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Integración

$$L\left\{\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$$

Multiplicación por potencias de t

$$L\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds}$$

Teorema del valor final

$$\boxed{f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)}$$

Importante!

Teorema del valor inicial

$$\boxed{f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)}$$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

PARES DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

	$f(t)$	$F(s)$
1	Impulso unitario $\delta(t)$	1
2	Escalón unitario $\phi(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	$sen\ \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7	$cos\ \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
8	$t^n \quad (n = 1,2,3, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1,2,3, \ldots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$

11	$\frac{1}{b-a}\left(be^{-bt}-ae^{-at}\right)$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
12	$\frac{1}{ab}\left[1+\frac{1}{a-b}\left(be^{-at}-ae^{-bt}\right)\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
13	$e^{-at}\,sen\ \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
14	$e^{-at}\cos\ \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
15	$\frac{1}{a^2}\left(at-1+e^{-at}\right)$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
16	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{\zeta\omega_n t}\,sen\ \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
17	$\frac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\,sen\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t-\phi\right)$ $\phi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
18	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\,sen\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi\right)$ $\phi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Transformada Inversa de Laplace

Usando la transformada de Laplace podemos resolver el Sistema de ecuaciones diferenciales en el dominio complejo. Así, la salida del sistema $Y(s)$ en el dominio complejo de Laplace sería:

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} F(s)$$

Sin embargo, el resultado que **nos interesa es $\boldsymbol{y(t)}$,** es decir, la respuesta del sistema en el dominio temporal. Por tanto, hay que recurrir al cálculo de la inversa de Laplace.

$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)} * F(s)\right\}}$$

Para ello se recurre a la descomposición en fracciones simples y al uso de la propiedad de linealidad.

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Transformada Inversa de Laplace

La transformada inversa de Laplace ($\mathcal{L}^{-1}$) recupera la señal y(t) a partir de Y(s).

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(s)e^{st}ds$$

No se suele calcular haciendo uso de esta definición, sino aprovechando las propiedades $\mathcal{L}$ y la transformada de funciones simples. Dado que normalmente $Y(s)$ se puede expresar como un cociente, con grado(numerador) menor que grado(denominador):

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)} * F(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A_1}{(s+p_1)^r} + \frac{A_2}{(s+p_2)^k} + \cdots\right)$$

Para el cálculo de L^{-1}, se procede descomponiendo $Y(s)$ en suma de fracciones simples que aparezcan en la tabla de transformadas.

Tema 2: Transformada Inversa de Laplace

La **descomposición en fracciones simples** se realiza calculando las raíces del denominador: $D(s) = 0$. Esta ecuación se llama **ecuación característica** y da como resultado un conjunto de raíces (**polos**) $-p_1, -p_2, \ldots - p_n$ con grado de multiplicidad $r_1, r_2, \ldots r_n$ y en algunos casos complejos.

Así, de forma general:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_{11}}{s + p_1} + \frac{K_{12}}{(s + p_1)^2} + \cdots + \frac{K_{1r_1}}{(s + p_1)^{r_1}} + \cdots +$$

$$+ \frac{K_{n1}}{s + p_n} + \frac{K_{n2}}{(s + p_n)^2} + \cdots + \frac{K_{nr_n}}{(s + p_n)^{r_n}}$$

Donde cada K_{ij} se calcula por el método de los residuos o por igualación.

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Transformada Inversa de Laplace

(1) Raices con grado de multiplicidad 1 (simples).

$$\boxed{K_j = Y(s)(s+p_j)\Big|_{s=-p_j}, j = 1, \dots n}$$

Ejemplo:

$$Y(s) = \frac{-s+1}{(s+2)(s+4)} = \frac{K_1}{(s+2)} + \frac{K_2}{(s+4)}$$

$$\boxed{\frac{1}{s+p} \quad \rightarrow \quad e^{-pt}u(t)}$$

$$K_1 = \frac{-s+1}{(s+2)(s+4)}(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{3}{2}$$

$$K_2 = \frac{-s+1}{(s+2)(s+4)}(s+4)\Big|_{s=-4} = -\frac{5}{2}$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

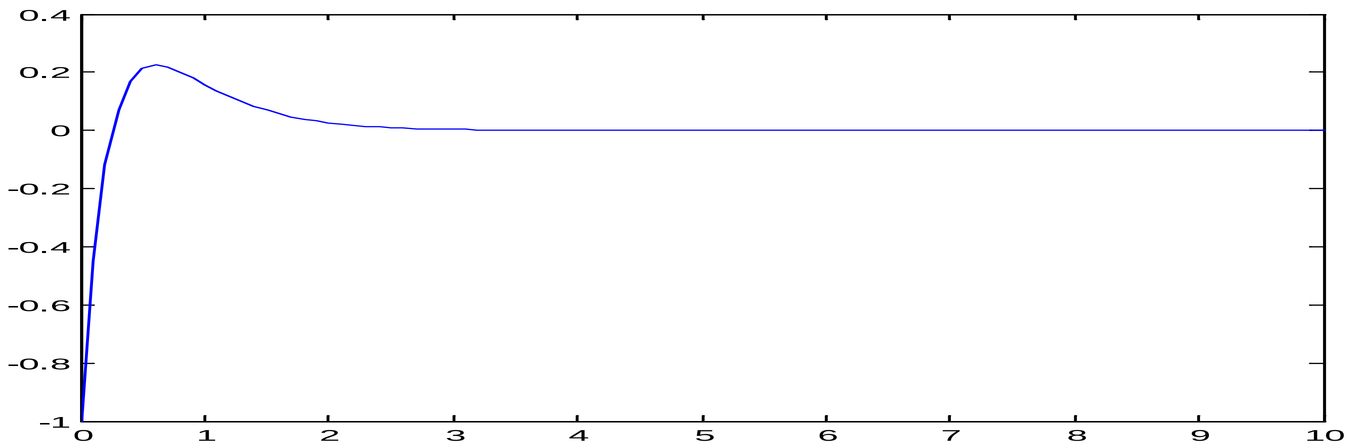
Tema 2: Transformada Inversa de Laplace

Ejemplo:

$$Y(s)=\frac{-s+1}{(s+2)(s+4)}=\frac{3/2}{(s+2)}+\frac{-5/2}{(s+4)}$$

$$\boxed{\frac{1}{s+p} \rightarrow e^{-pt}u_e(t)}$$

$$y(t)=\left(\frac{3}{2}e^{-2t}-\frac{5}{2}e^{-4t}\right)u_e(t)$$



Tema 2: Transformada Inversa de Laplace

DESCOMPOSICIÓN FRACCIONES SIMPLES CON MATLAB:

Comando : `[r,p,k]=residue(num,den)`

Help: Partial fraction expansion (partial fraction decomposition)

Determina los **residuos (r)**, **polos (p)** y término directo (k) de la expansión en fracciones de un polinomio de la forma num(s)/den(s)

Ejemplo:

$$Y(s) = \frac{-s+1}{(s+2)(s+4)} \Rightarrow Y(s) = \frac{-s+1}{(s+2)(s+4)} = \frac{1.5}{(s+2)} + \frac{-2.5}{(s+4)}$$

```
>>[r,p,k]=residue([-1 1],[1 6 8])
     r =
         -2.5000
         1.5000
      p =
          -4
          -2
      k =
          []
```

Una vez realizada la descomposición en fracciones simples, podemos recuperar la señal en el dominio temporal y(t) a través de las relaciones Y(s)←→y(t)

Nota → Ver comandos MATLAB "laplace" e "ilaplace"

Tema 2: Transformada Inversa de Laplace

(2) Raices con grado de multiplicidad r_j (repetidas).

$$K_{j(r_j-i+1)} = \frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{ds}\left(\left(s+p_j\right)^{r_j} Y(s)\right)\Bigg|_{s=-p_j} ,j=1,..,n, \qquad i=r_j,....1$$

Num raices

Multiplicidad de cada raiz

Ejemplo:

$$Y(s)=\frac{5(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)}=\frac{K_{11}}{s}+\frac{K_{12}}{s^2}+\frac{K_2}{s+1}+\frac{K_3}{s+3}$$

Para la raiz j=1, r_j=2

$$\boxed{K_2}=\frac{5(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)}(s+1)\Bigg|_{s=-1}=\frac{5}{2}, \quad \boxed{K_3}=\frac{5(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)}(s+3)\Bigg|_{s=-3}=\frac{5}{18}$$

Tema 2: Transformada Inversa de Laplace

(2) Raices con grado de multiplicidad r_j (repetidas).

$$\boxed{K_{j(r_j-i+1)} = \frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{ds}\left(\left(s+p_j\right)^{r_j} Y(s)\right)\Bigg|_{s=-p_j} \quad ,j=1,\ldots,n, \qquad i=r_j,\ldots.1}$$

Ejemplo:

Para la raiz j=1, r_j=2

$$Y(s) = \frac{5(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)} = \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_{12}}{s^2} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+3}$$

i=2 ⇨ $$\boxed{K_{11}} = K_{1(2-\underbrace{\underbrace{2}_{i}+1)}_{1}} = \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left(s^2\frac{5(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)}\right)\Bigg|_{s=0} = \frac{-25}{9}$$

i=1 ⇨ $$\boxed{K_{12}} = K_{1(2-\underbrace{\underbrace{1}_{i}+1)}_{2}} = \frac{1}{0!}\left(s^2\frac{5(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)}\right)\Bigg|_{s=0} = \frac{10}{3}$$

Tema 2: Transformada Inversa de Laplace

$$Y(s)=\frac{5(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)}=\frac{K_{11}}{s}+\frac{K_{12}}{s^2}+\frac{K_2}{(s+1)}+\frac{K_3}{(s+3)}$$

```
>>[r,p,k]=residue([5 10],[1 4 3 0 0])
r =
    0.2778    K3
    2.5000    K2
   -2.7778    K11
    3.3333    K12
p =
    -3
    -1
     0
     0
k =
     []
```

Raices reales múltiples

$$\frac{n!}{(s+p)^{n+1}} \rightarrow t^n e^{-pt} u_e(t)$$

```
>> pretty( ilaplace( 5*(s+2)/s^2/(s+1)/(s+3) ))

10 t    5 exp(-t)    exp(-3 t) 5    25
---- + --------- + ----------- - --
  3        2              18         9
```

Tema 2: Transformada Inversa de Laplace

(3) Raices complejas conjugadas.

$$Y(s) = \frac{K_1}{s + a - j\omega} + \frac{K_2}{s + a + j\omega}$$

En el fondo, seguimos teniendo dos raices simples (pero complejas). $\boldsymbol{K_1}$ **y** $\boldsymbol{K_2}$ **son conjugados complejos** que se obtienen mediante técnicas de residuos o igualación.

$$\boxed{K_j = Y(s)(s + p_j)\Big|_{s=-p_j}, j = 1, \dots n}$$

$f(t)$	$F(s)$
$e^{-at}\,\mathrm{sen}\,\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Ojo: No hay expresiones en la tabla de transformadas de Laplace para números complejos.

Tema 2: Transformada Inversa de Laplace

(3) Raices complejas conjugadas.

$$Y(s) = \frac{K_1}{s + a - j\omega} + \frac{K_2}{s + a + j\omega}$$

Una vez calculadas K1 y K2, buscamos reorganizar terminos para asimilarlos a:

$$Y(s) = \frac{K_1'(s + a)}{(s + a)^2 + \omega^2} + \frac{K_2'\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

$f(t)$	$F(s)$
$e^{-at} sen\, \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

Tema 2: Transformada Inversa de Laplace

Raices complejas conjugadas.

```
[r,p,k]=residue([3],[1 2 5 0])

r =
  -0.3000 + 0.1500i  K3
  -0.3000 - 0.1500i  K2
   0.6000            K1

p =
  -1.0000 + 2.0000i
  -1.0000 - 2.0000i
        0
k =[]
```

$$Y(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1+2j} + \frac{K_3}{s+1-2j}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{\boldsymbol{K_2'}(s+1)}{(s+1)^2+2^2} + \frac{\boldsymbol{K_3'}\cdot 2}{(s+1)^2+2^2}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1+2j} + \frac{K_3}{s+1-2j} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2(s+1-2j)+K_3(s+1+2j)}{(s+1+2j)(s+1-2j)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2(s+1-2j)+K_3(s+1+2j)}{(s+1)^2+2^2}$$

$$= \frac{0.6}{s} + \frac{(-0.3-0.15j)\,(s+1-2j)+(-0.3+0.15j)\,(s+1+2j)}{(s+1)^2+2^2} \quad \ldots$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{0.6}{s} - \frac{\mathbf{0.6}(s+1)}{(s+1)^2+2^2} - \frac{\mathbf{0.3}\cdot 2}{(s+1)^2+2^2}}$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Transformada Inversa de Laplace

(3) Raices complejas conjugadas (igualación).

Aunque es possible su resolución trabajando con números complejos, es más sencillo no tener que trabajar con números complejos. Por ello se suele considerar la fracción parcial:

$$Y(s) = \frac{K_1 s + K_2}{as^2 + bs + c}$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)}}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2 + 2s + 5}$$

```
p =
  -1.0000 + 2.0000i
  -1.0000 - 2.0000i
        0
```

$$= \frac{K_1(s^2+2s+5)+s(K_2 s+K_3)}{s(s^2+2s+5)}$$

$$3 = K_1(s^2 + 2s + 5) + s(K_2 s + K_3) = s^2(K_1 + K_2) + s(2K_1 + K_3) + 5K_1$$

Tema 2: Transformada Inversa de Laplace

$$\boxed{3} = s^2\boxed{(K_1 + K_2)} + s\boxed{(2K_1 + K_3)} + \boxed{5K_1}$$

$$\left\{\begin{bmatrix} 5K_1 & & = 3 \\ K_1 + K_2 & & = 0 \\ 2K_1 & + K_3 & = 0 \end{bmatrix}\right. \begin{matrix} \rightarrow K_1 = \frac{3}{5} = 0.6 \\ \rightarrow K_2 = -K_1 = -0.6 \\ \rightarrow K_3 = -2K_1 = -1.2 \end{matrix}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2 + 2s + 5} = \frac{0.6}{s} + \frac{-0.6s - 1.2}{(s+1)^2 + 2^2} = \frac{0.6}{s} + \frac{-0.6(s+1+1)}{(s+1)^2 + 2^2} =$$

$$= \frac{0.6}{s} + \frac{-0.6(s+1)}{(s+1)^2+2^2} + \frac{-0.6(1)}{(s+1)^2+2^2} = \boxed{\frac{0.6}{s} + \frac{-\mathbf{0.6}(s+1)}{(s+1)^2+2^2} + \frac{-\mathbf{0.3}(2)}{(s+1)^2+2^2}}$$

$$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2} \rightarrow e^{-\alpha t} sen(\omega t) u_e(t)$$

$$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2} \rightarrow e^{-\alpha t} \cos(\omega t) u_e(t)$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

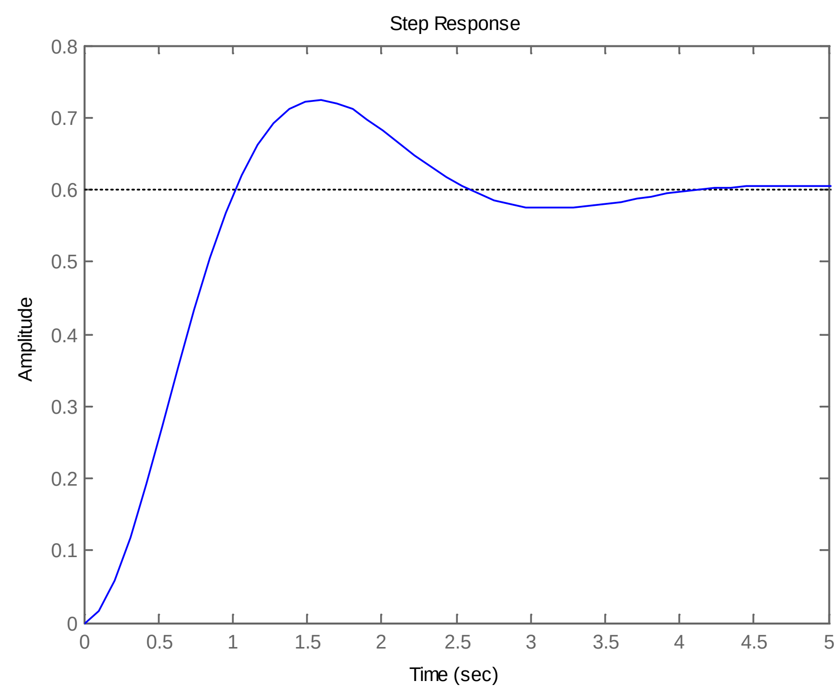
Tema 2: Transformada Inversa de Laplace

$$Y(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} \Rightarrow Y(s) = \frac{0.6}{s} - \frac{0.6(s+1)}{(s+1)^2+2^2} - 0.3\frac{2}{(s+1)^2+2^2} \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{3}{5}u(t) - \frac{3}{5}e^{-t}\cos(2\,t) - \frac{3}{10}e^{-t}sen(2t)$$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \dfrac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2} & \rightarrow & e^{-\alpha t}sen(\omega t)u_e(t) \\ \dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2} & \rightarrow & e^{-\alpha t}\cos(\omega t)u_e(t) \end{array}}$$

```
>> pretty( ilaplace(3/s/(s^2+2*s+5)) )

                 /              sin(2 t) \
     3*exp(-t) | cos(2 t) + --------- |
3                \                    2    /
-  -  ---------------------------------
5                    5
```



Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Transformada Inversa de Laplace

Ejer1. Calcular la L^{-1} de: $H(s) = \dfrac{5s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Transformada Inversa de Laplace

Ejer2. Calcular la L^{-1} de: $H(s) = \dfrac{4s^2 - 1}{(s+2)^3}$

$$K_{j(r_j-i+1)} = \frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{ds}\left(\left(\mathrm{s}+\mathrm{p_j}\right)^{r_j}Y(s)\right)\Bigg|_{s=-p_j}, j = 1,\ldots,n, \qquad i = r_j,\ldots.1$$

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Tema 2: Transformada Inversa de Laplace

Ejer2. Calcular la L^{-1} de: $H(s) = \dfrac{5s+13}{s^3+4s^2+13s}$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Función de Transferencia

La **Función de Transferencia** de un sistema LTI está definida por la relación entre la transformada de Laplace de la salida (**Y(s)**) y la de la entrada (**U(s)**), bajo condiciones iniciales nulas.

$$\boxed{G(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{CI=0}}$$

En general:

$$a_n y^{n)} + a_{n-1} y^{n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{m)} + b_{m-1} u^{m-1)} + \ldots + b_1 u' + b_0 u$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}}$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Función de Transferencia

La Función de Transferencia de un sistema es una propiedad del sistema en sí, ya que no depende de la entrada al mismo y es una forma de descripción externa en el plano s (**Sistemas diferentes pueden tener la misma G(s)**)

A la potencia más alta del denominador de G(s) se le llama **orden** del sistema. A las raices de la ecuación característica se le llaman **polos** y a las raices del numerador, **ceros.**

Ejemplo:

$$7\frac{d^3y}{dt}+2\frac{dy}{dt}+10y=3\frac{du}{dt}+u \xrightarrow{\ell} (7s^3+2s+10)Y(s)=(3s+1)U(s)$$

$$\boxed{G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{3s+1}{7s^3+2s+10}}$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Función de Transferencia: Matlab

1. Generar un objeto "función de transferencia":

```
H = tf(numerator,denominator)→ Builds a transfer function model (Object)

>> H = tf(1, [1 2 1])

Ver los datos de una función:
>> [num,den] = tfdata(sys)
```

2. Modelo o formato de la función de Transferencia

- **Modelo Función de transferencia (ft)**
- **Modelo Ceros, Polos y Ganancia (zpk)** → útil para ver polos y ceros (estabilidad)
- **Modelos de Espacio de Estados (ss)** → Formato matricial
- **Modelo Datos de Respuesta en Frecuencia (frd)**

Más detalles en el Seminario Herramienta Control Toolbox

Tema 2: Función de Transferencia

Ejemplo:

$$\boxed{G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{3s+1}{7s^3+2s+10}}$$

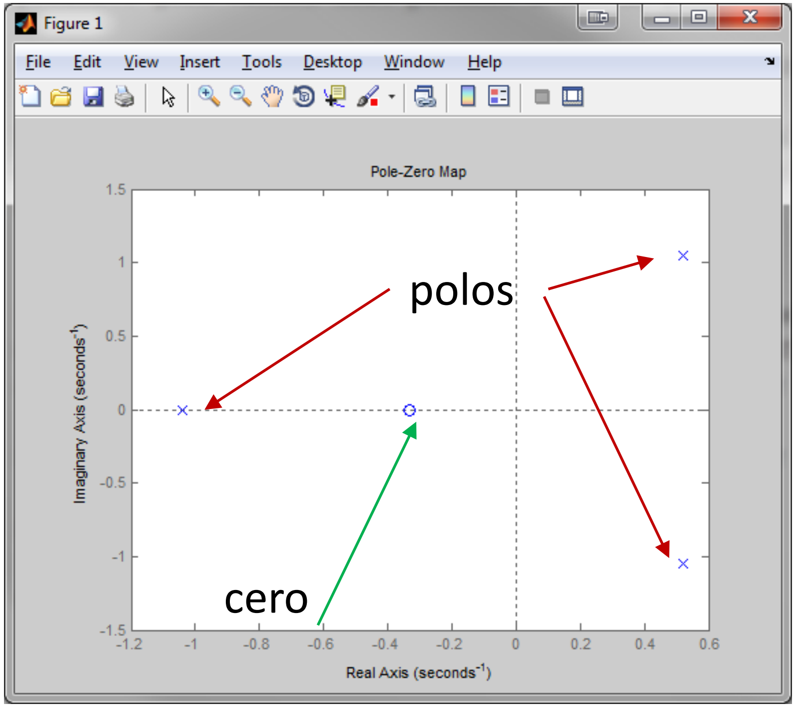
Normalizando:

$$G(s)=\frac{3(s+\frac{1}{3})}{7(s^3+\frac{2}{7}s+\frac{10}{7})}$$

Formato polos-ceros-ganancia

$$G(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

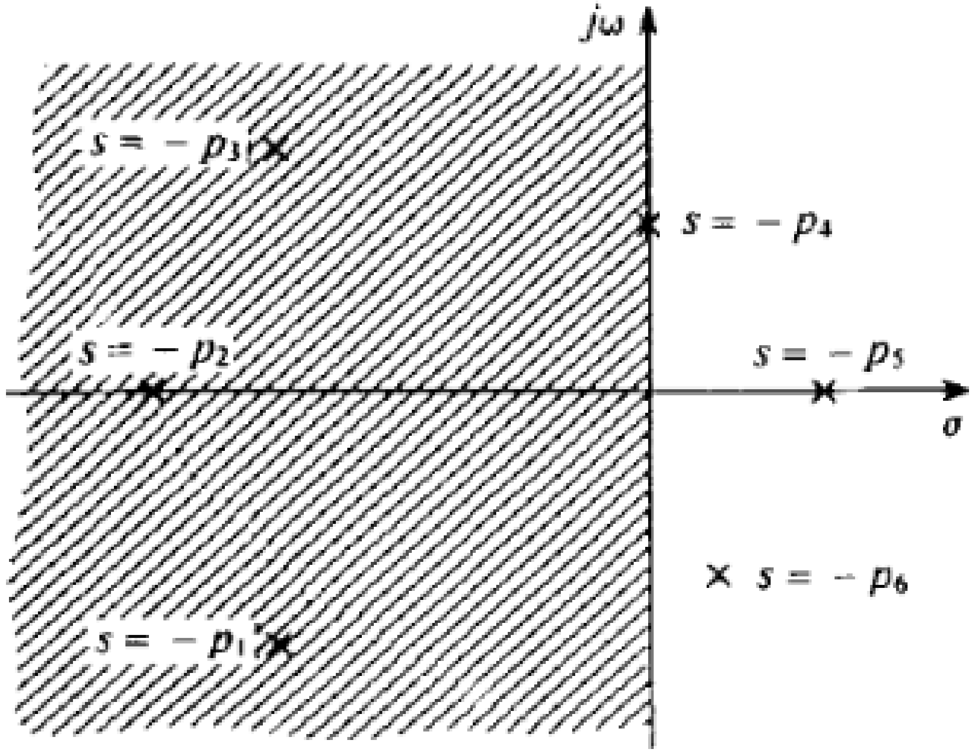
```
>> [z, p, k]=zpkdata(G)

z =
    [-0.3333]
p =
    [3x1 double]
k =
    0.4286
>> p{1}

ans =

   0.5209 + 1.0487i
   0.5209 - 1.0487i
  -1.0419
```



Tema 2: Función de Transferencia: Control

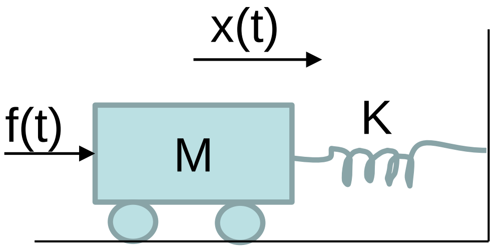
La **estabilidad** es una característica del sistema que asegura que ante cualquier entrada acotada el sistema responde con unas salida acotada.

La **estabilidad** de un sistema **lineal e invariante** queda asegurada **si todas las raíces del polinomio característico del sistema se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo s.**



Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Función de Transferencia



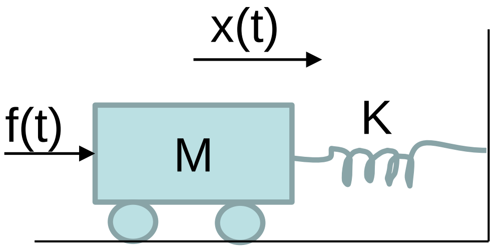
Calcular la función de transferencia del Sistema y

a) Respuesta al impulso
b) Respuesta al escalón unitario

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Función de Transferencia



Calcular la función de transferencia del Sistema y

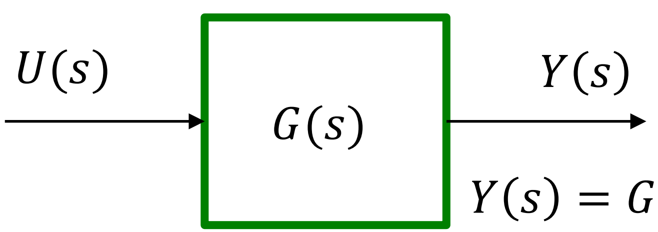
a) Respuesta al impulso
b) Respuesta al escalón unitario

Tema 2: Función de Transferencia

Para obtener la función de transferencia de un sistema, se requiere despejar una única ecuación diferencial que relacione la entrada y la salida. Como sabemos, en sistemas “complejos” esto puede ser tedioso (sistema de ecuaciones diferenciales). Vamos a ver dos métodos para poder obtener la FT de estos sistemas:

a) **Diagramas de bloques.**

b) **Resolución del sistema de ecuaciones con MATLAB con variables simbólicas**.



$$Y(s) = G(s)U(s)$$

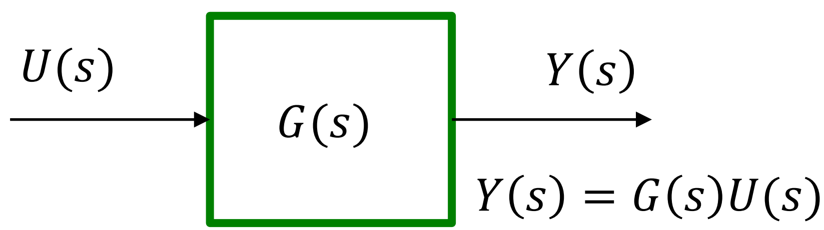
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

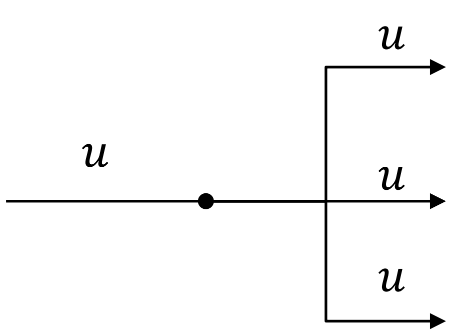
Tema 2: Diagrama de Bloques

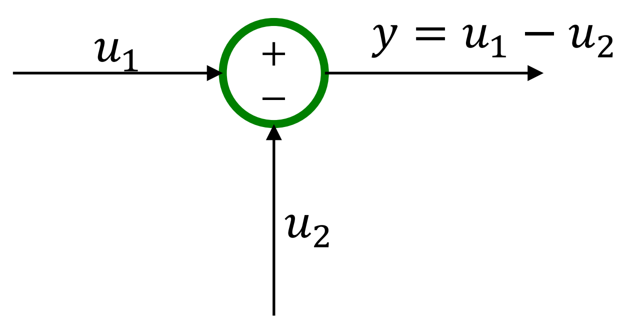
El diagrama de bloques de un sistema es una **representación gráfica** de las funciones realizadas por cada uno de sus componentes y sus inter-relaciones.

Los elementos básicos son los **bloques funcionales** que simbolizan la operación matemática que produce la salida en función de la entrada, **expresada en forma de función de transferencia**.

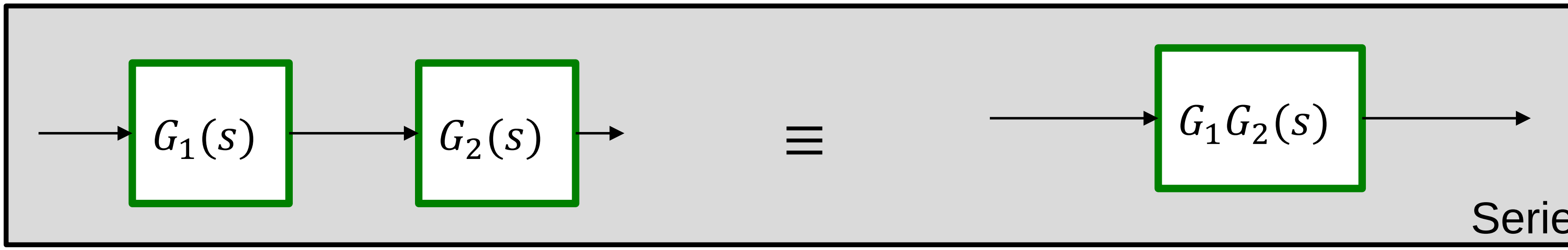


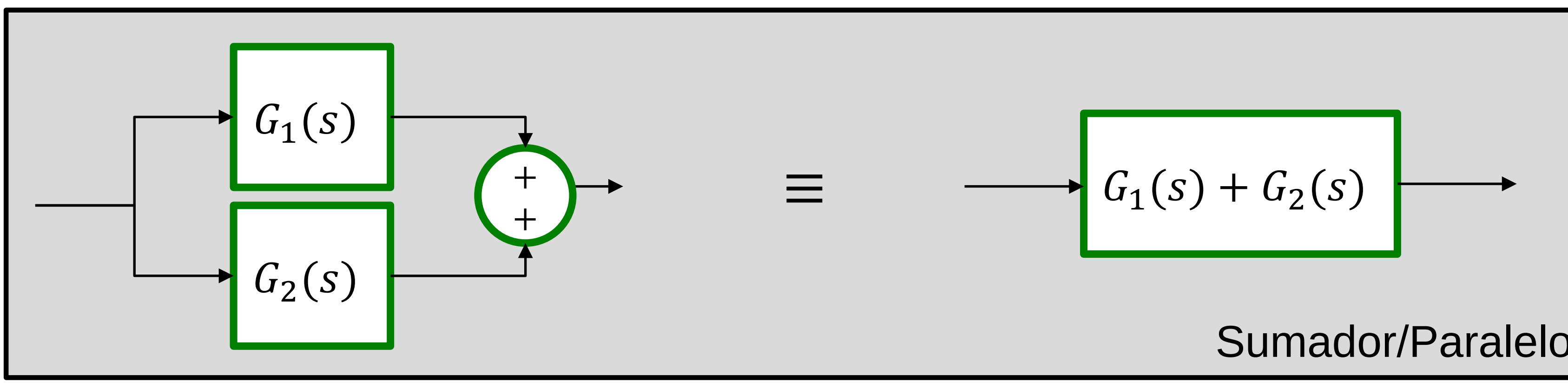
Otros elementos básicos:





Tema 2: Diagrama de Bloques: Simplificación de Bloques

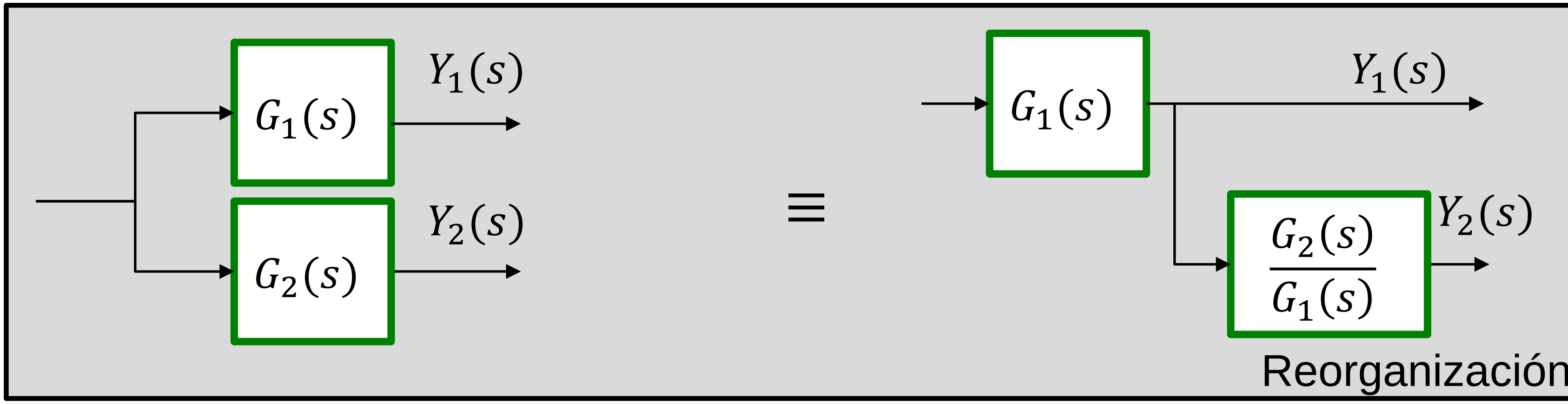


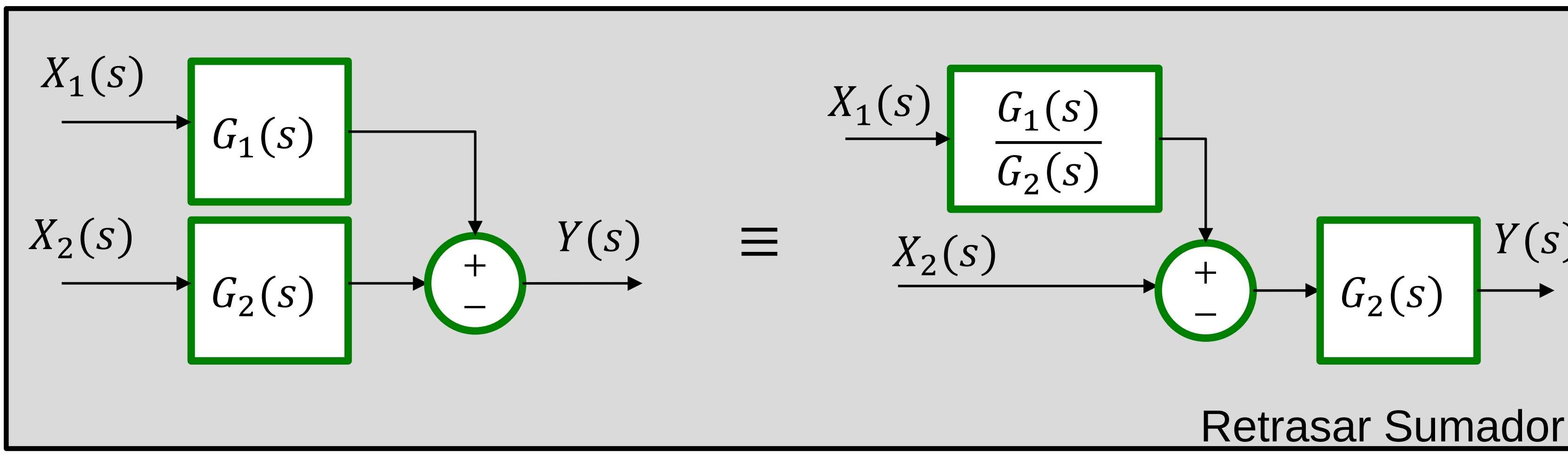


Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Diagrama de Bloques: Simplificación de Bloques

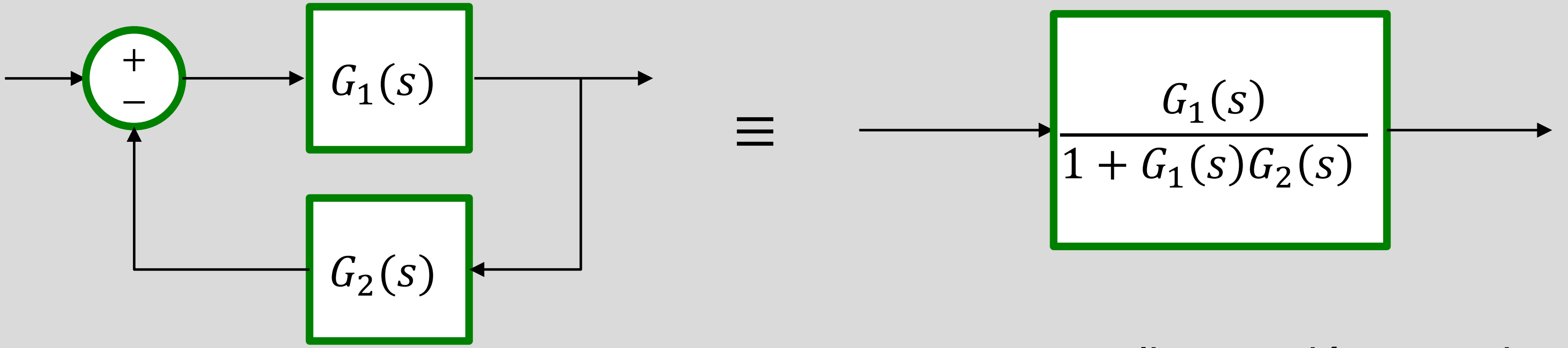




UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Modelado y Simulación de Sistemas

Tema 2: Diagrama de Bloques: Simplificación de Bloques

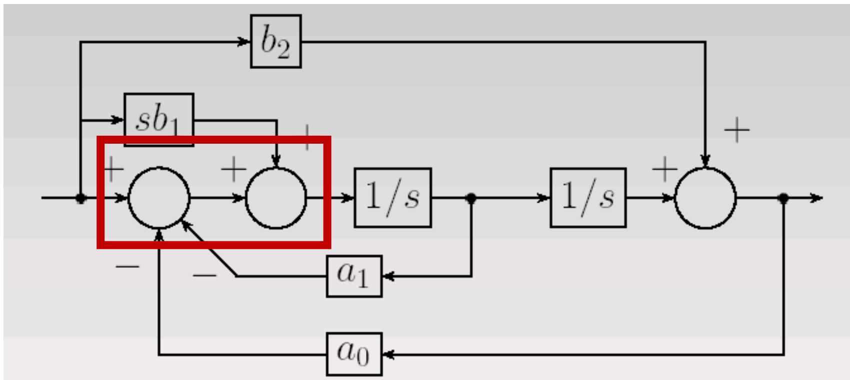


Realimentación Negativa.

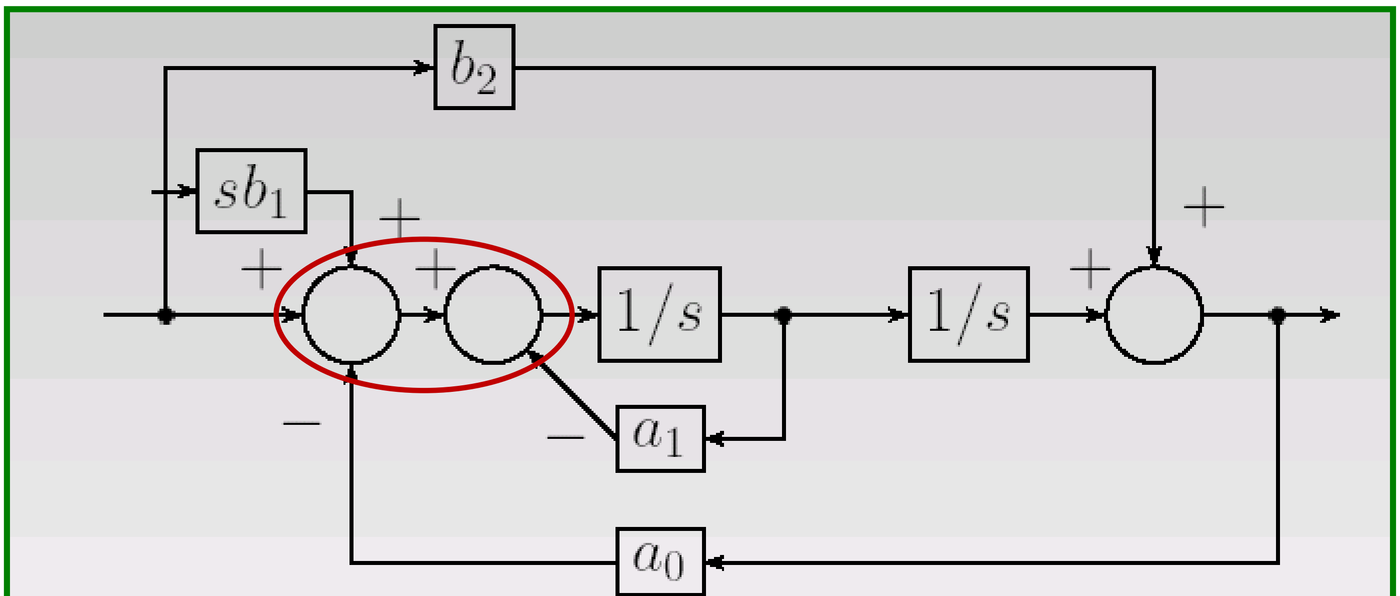
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Diagrama de Bloques: Simplificación de Bloques

Ejemplo: Simplifica el siguiente Diagrama de Bloques

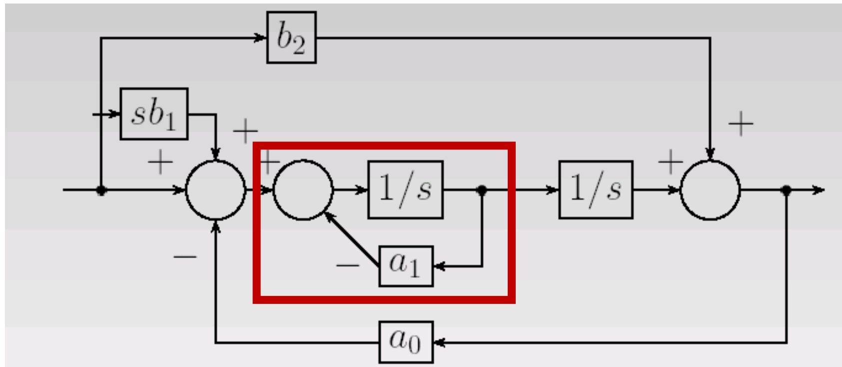


Conmutatividad de La suma

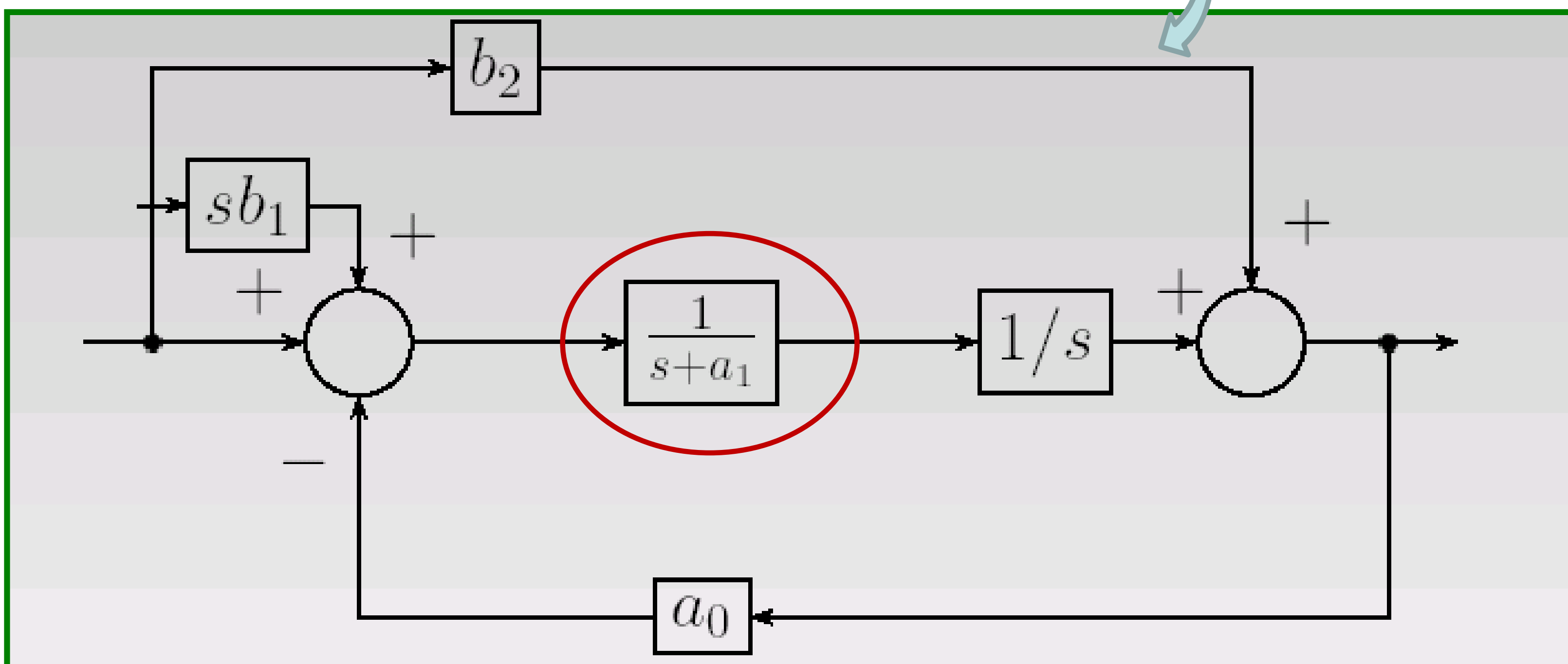


MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Diagrama de Bloques: Simplificación de Bloques

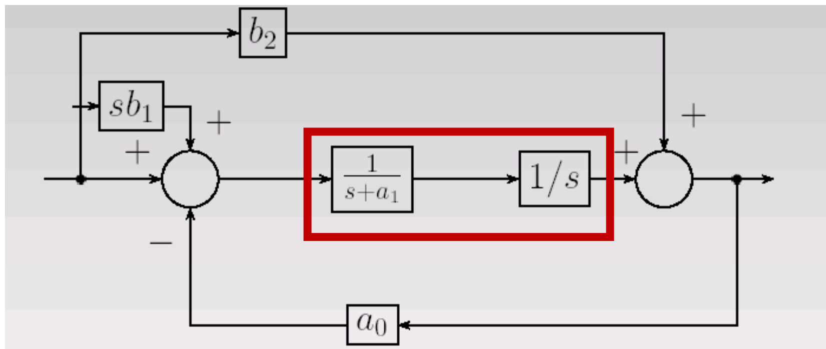


Realimentación Negativa

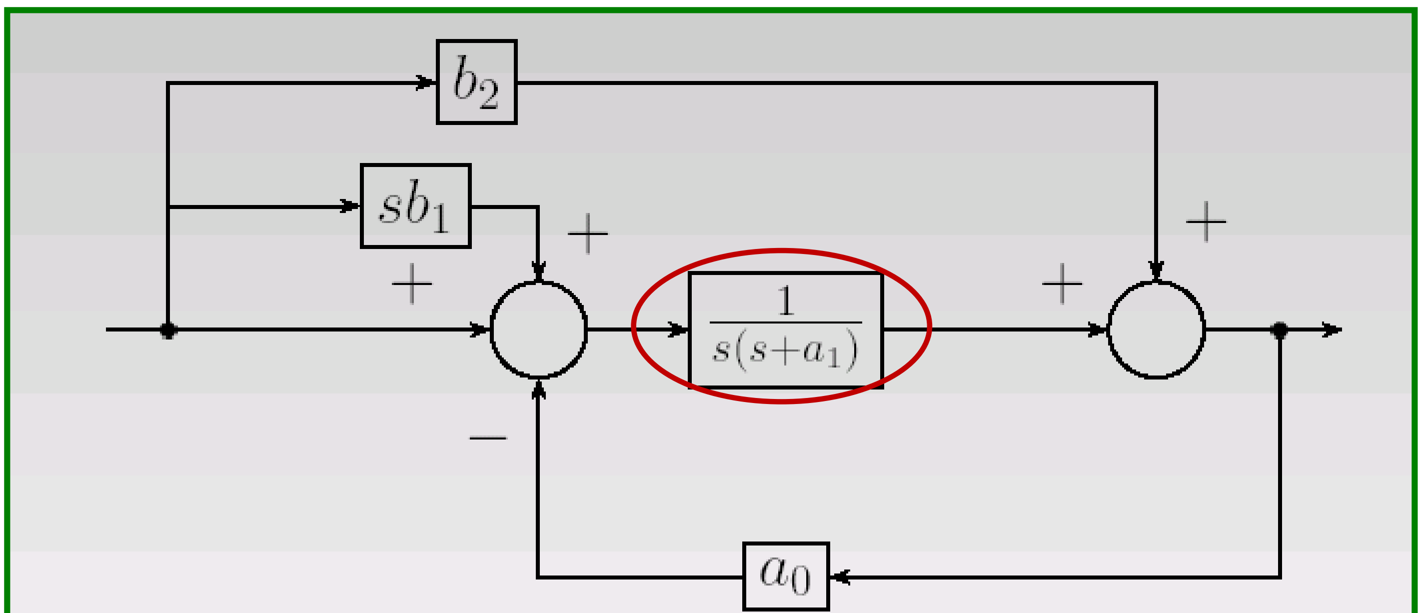


Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Diagrama de Bloques: Simplificación de Bloques



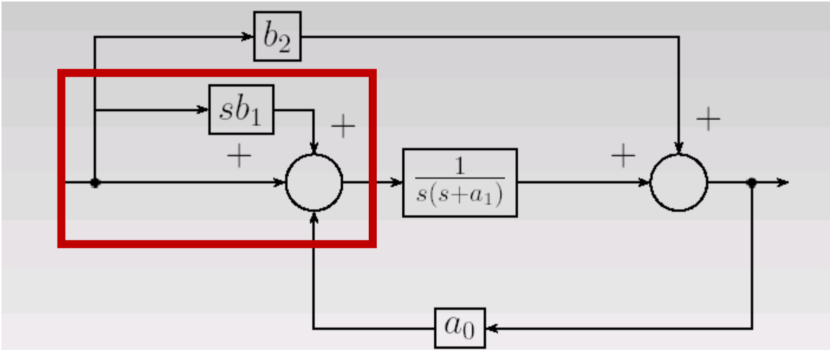
Serie



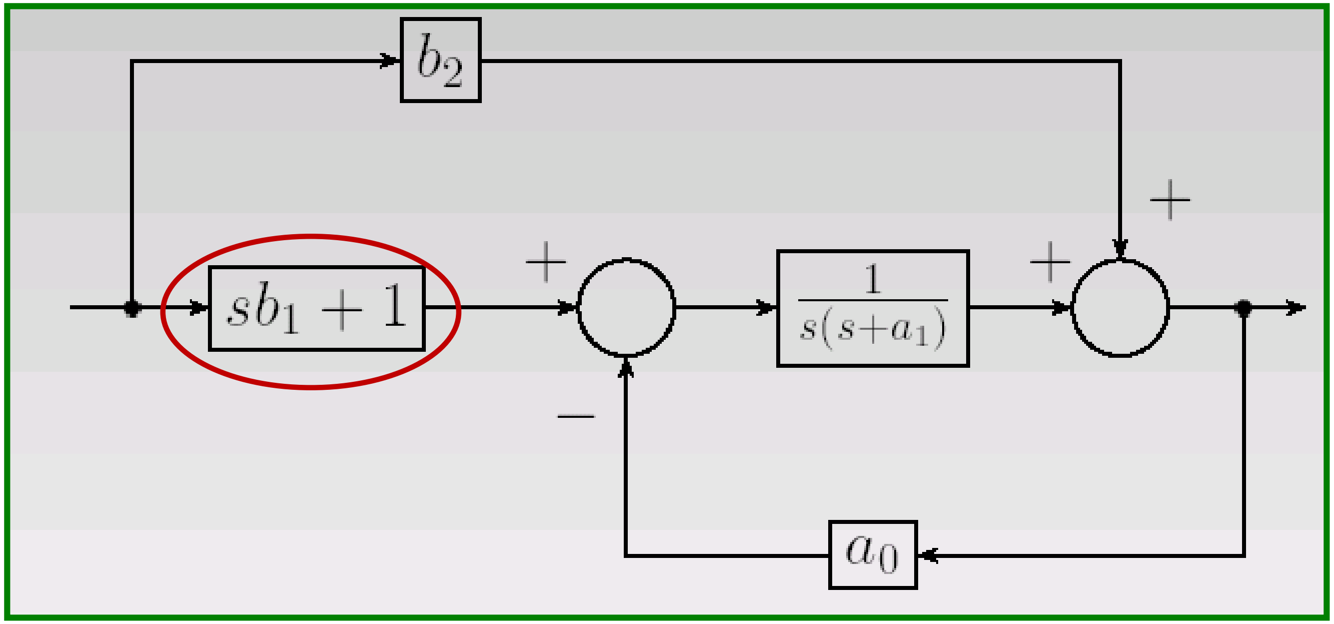
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Diagrama de Bloques: Simplificación de Bloques



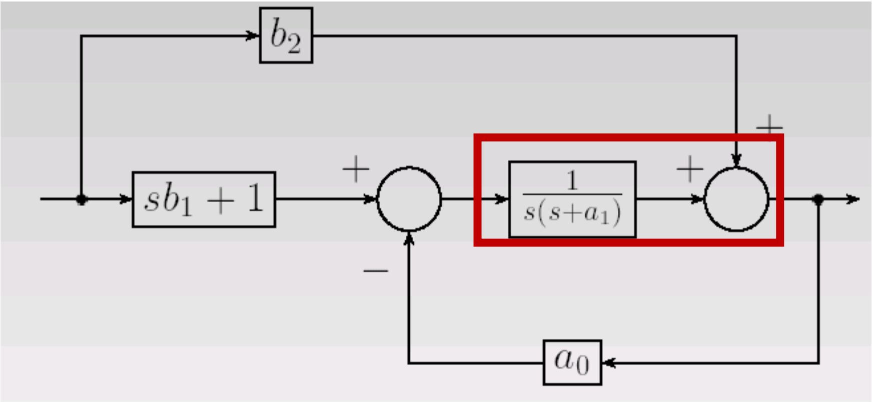
Suma



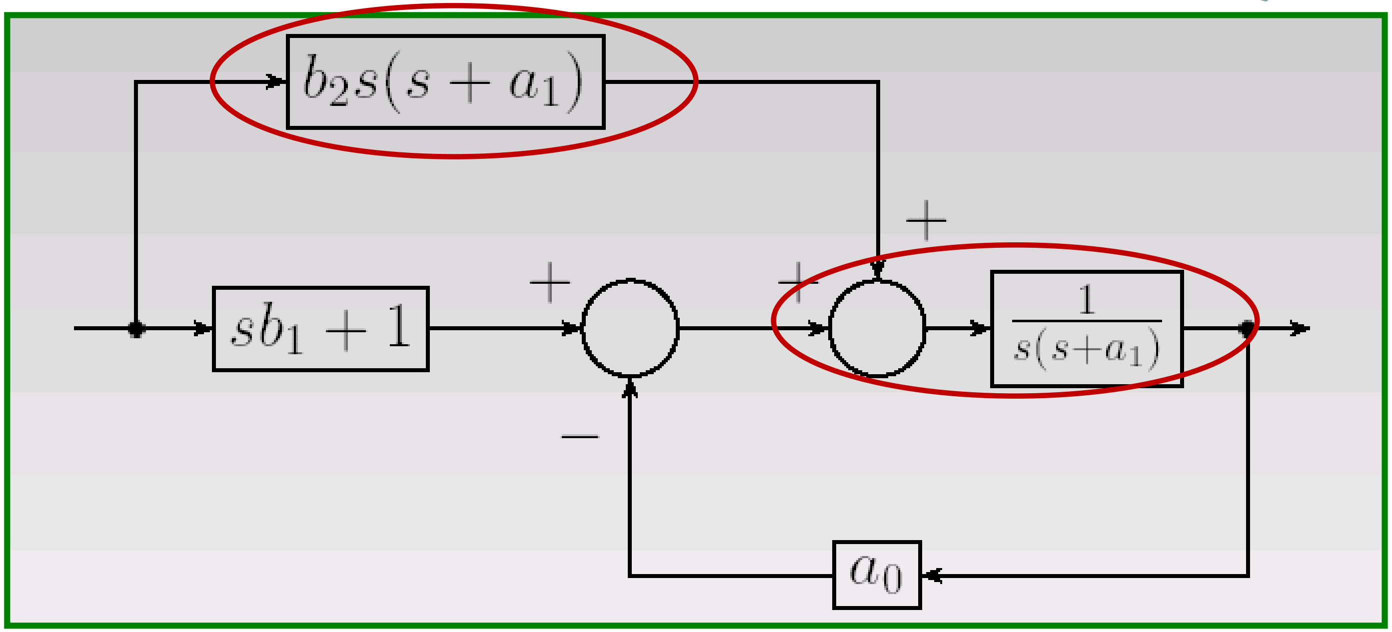
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Diagrama de Bloques: Simplificación de Bloques



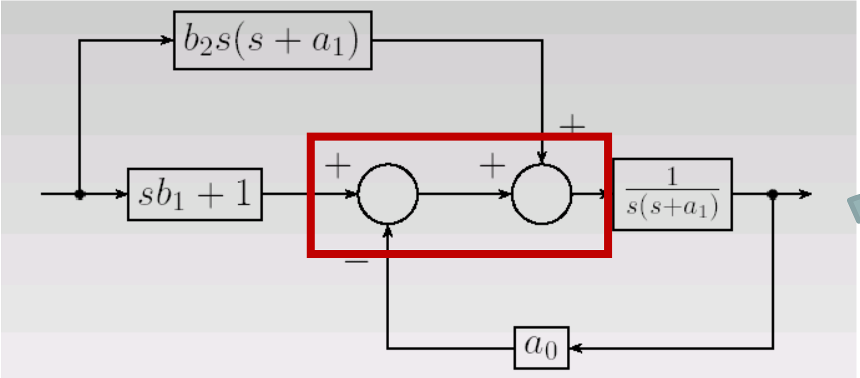
Retraso de Sumador



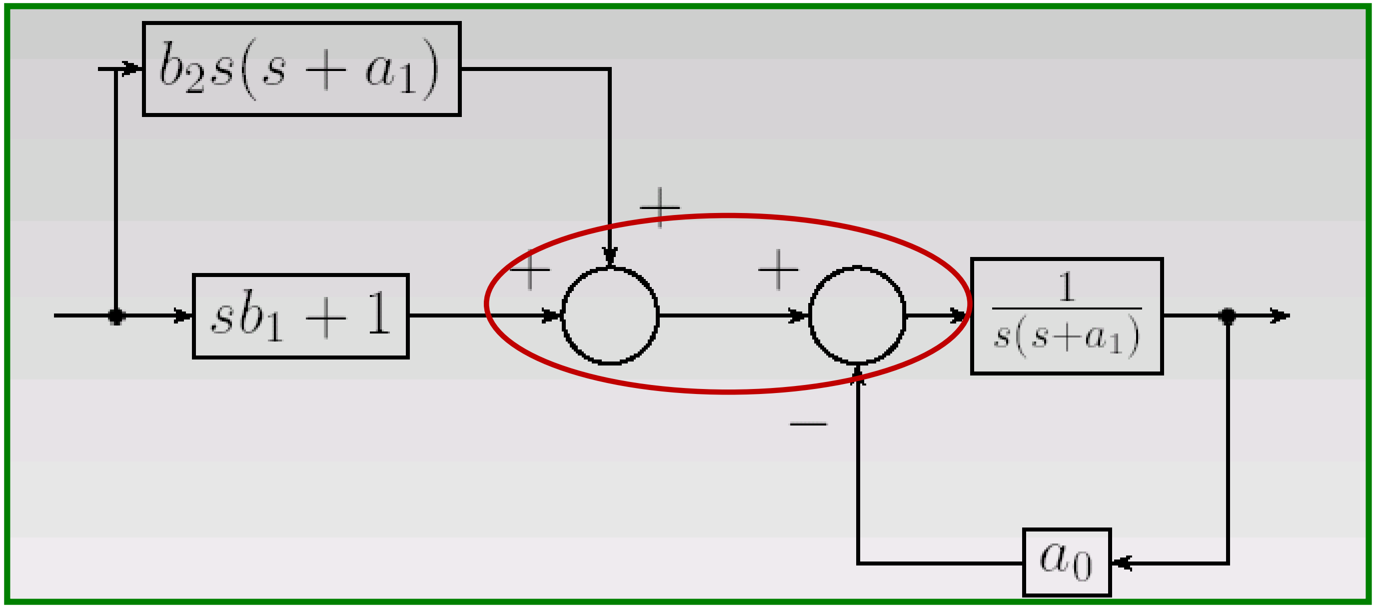
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Diagrama de Bloques: Simplificación de Bloques

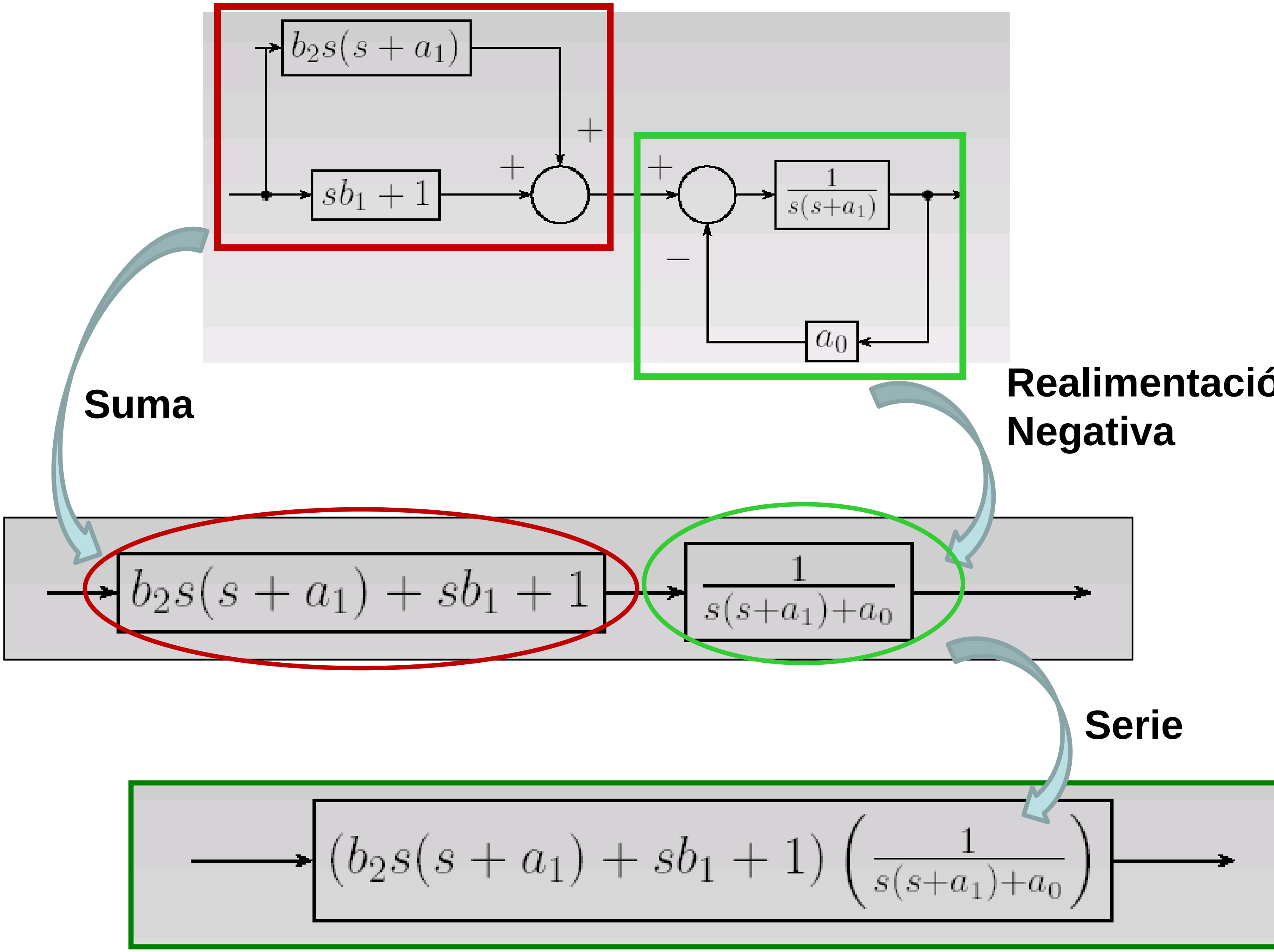


Conmutatividad de la suma

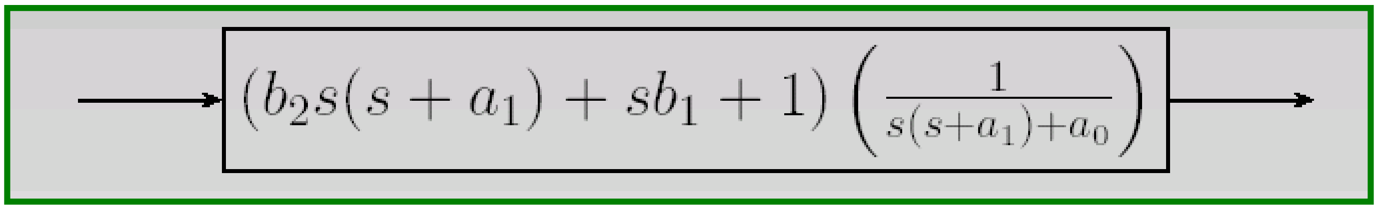


Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Diagrama de Bloques: Simplificación de Bloques



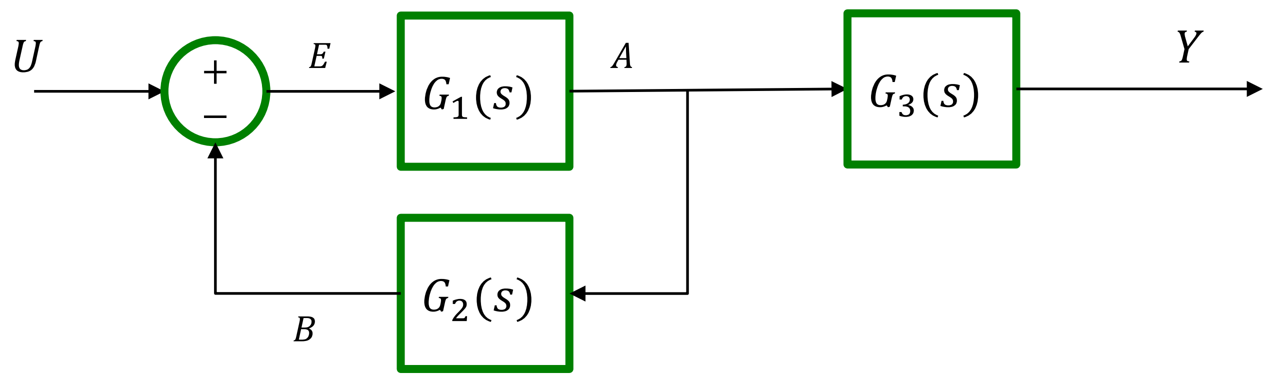
Tema 2: Diagrama de Bloques: Simplificación de Bloques



Con esto obtenemos la función de transferencia del sistema:

$$H(s) = \frac{b_2 s(s+a_1)+s b_1+1}{s(s+a_1)+a_0} = \frac{b_2 s^2+(b_2 a_1+b_1)s+1}{s^2+a_1 s+a_0}$$

Reducción de diagramas con Matlab (comandos **connect** y **sumblk**)




```
Sum1 = sumblk('E = U - B');

G1.u = 'E';   G1.y = 'A';
G2.u = 'A';   G2.y = 'B';
G3.u = 'A';   G3.y = 'Y';


T = connect(G1,G2,G3,Sum1,'U','Y’);
H = tf(T);
```

Definición de sumadores

Definición de entradas y salidas de cada bloque

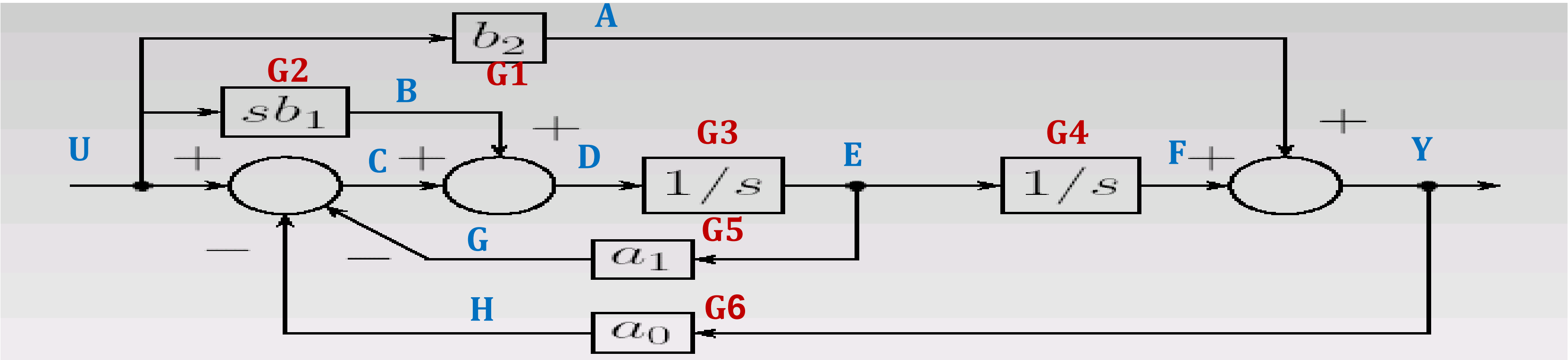
Conexión

Función Transferencia

Nota1: La variable T contiene un objeto LTI que representa al sistema completo (formato espacio de estados (ss)). Se puede transformar a tf, zpk, etc.

Nota2: Las funciones de transferencia tienen que estar definidas (no variables simbólicas)

Tema 2: Diagrama de Bloques: Simplificación de Bloques

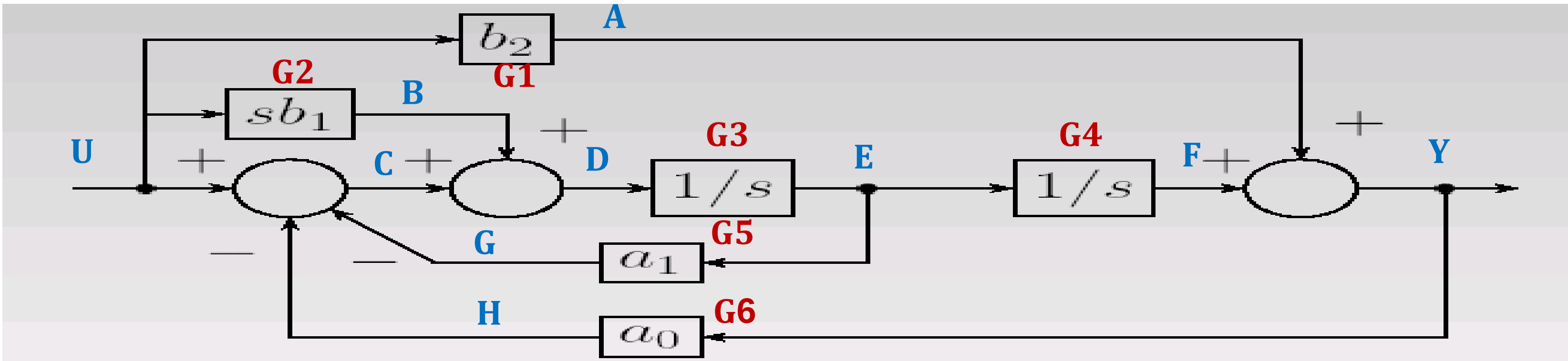


Reducción de diagramas con Matlab (comandos **connect** y **sumblk**)

```
a0=0; a1=1; b1=1; b2=2;

% Sumadores
sum1 = sumblk('C = U - G - H');
sum2 = sumblk('D = B + C');
sum3 = sumblk('Y = A + F');

% Bloques (FT)
G1 = tf(b2,1);            G1.u ='U';       G1.y='A';
G2 = tf([b1 0],[1]);      G2.u ='U';       G2.y='B';
G3 = tf([1],[1 0]);       G3.u='D';        G3.y='E';
G4 = G3;                  G4.u='E';        G4.y='F';
G5 = tf(a1,1);            G5.u='E';        G5.y='G';
G6 = tf(a0,1);            G6.u='Y';        G6.y='H';

% CONNECT
T = connect(G1,G2,G3,G4,G5,G6,sum1,sum2,sum3,'U','Y');
H = tf(T)
```

```
H =

  From input "U" to output "Y":
  2 s^2 + 3 s + 1
  ---------------
      s^2 + s

Continuous-time transfer function.
```

Tema 2: Diagrama de Bloques: Simplificación de Bloques



Reducción de diagramas con Matlab (comandos **connect** y **sumblk**)

```
H =

  From input "U" to output "Y":
  2 s^2 + 3 s + 1
  ---------------
      s^2 + s

Continuous-time transfer function.
```

```
a0=0; a1=1; b1=1; b2=2;
```

$$H(s) = \frac{b_2 s^2 + (b_2 a_1 + b_1)s + 1}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

Tema 2: Diagrama de Bloques: Simplificación de Bloques

Cálculo de Función de Transferencia con Matlab (operaciones matriciales)

Antes de construir el diagrama de bloques, podemos:

1. Obtener el sistema de ecuaciones diferenciales que modela cada componente del sistema.
2. Aplicar Laplace, obteniendo un sistema de ecuaciones algebraicas.
3. Resolver el sistema con Matlab (x = A\b).

$$
\begin{aligned}
E &= U - B \\
A &= E * G_1(s) \\
B &= A * G_2(s) \\
Y &= A * G_3(s)
\end{aligned}
$$

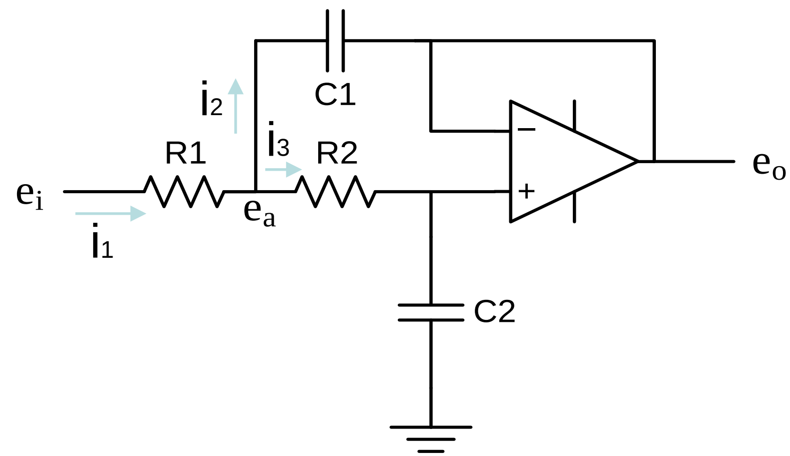
$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -G1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -G2 & 1 & 0 \\ 0 & -G3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{A}}
\underbrace{\begin{bmatrix} E \\ A \\ B \\ Y \end{bmatrix}}_{x}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} U \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{b}}
$$

$$
\boxed{\begin{gathered} \boldsymbol{x = A \backslash b} \\ x(i) = Y(s)/U(s) \end{gathered}}
$$

Nota: Aquí SI podemos usar variables simbólicas.

Tema 2: Diagrama de Bloques: Simplificación de Bloques

Ejercicio: Calcular la función de transferencia del sistema mostrado:



$$i_1(t) = \frac{e_i(t) - e_a(t)}{R1}$$

$$i_2(t) = C_1 \frac{d(e_a(t) - e_0(t))}{dt}$$

$$i_3(t) = \frac{e_a(t) - e_0(t)}{R2} = C_2 \frac{d(e_0(t))}{dt}$$

$$\boxed{i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)}$$

Laplace

$$I_1(s) = \frac{E_i(s) - E_a(s)}{R_1} \quad (1)$$

$$I_2(s) = C_1 s(E_a(s) - E_0(s)) \quad (2)$$

$$I_3(s) = \frac{E_a(s) - E_0(s)}{R_2} = C_2 s E_0(s) \quad (3)$$

$$I_1(s) = I_2(s) + I_3(s) \quad (4)$$

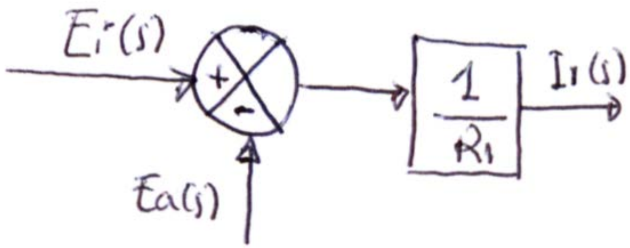
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Laplace y Diagrama de Bloques:

1) Reducción Diagramas de Bloques.

Dibujamos los bloques correspondientes a las cuatro ecuaciones obtenidas comenzando por aquella en la que aparezca la señal de entrada $E_i(s)$ que es la Ecuación 1.

$$I_1(s) = \frac{E_i(s) - E_a(s)}{R_1}$$



$$\left\{ \begin{array}{ll} I_1(s) = \dfrac{E_i(s) - E_a(s)}{R_1} & (1) \\ I_2(s) = C_1 s(E_a(s) - E_0(s)) & (2) \\ I_3(s) = \frac{E_a(s) - E_0(s)}{R_2} = C_2 s E_0(s) & (3) \\ I_1(s) = I_2(s) + I_3(s) & (4) \end{array} \right.$$

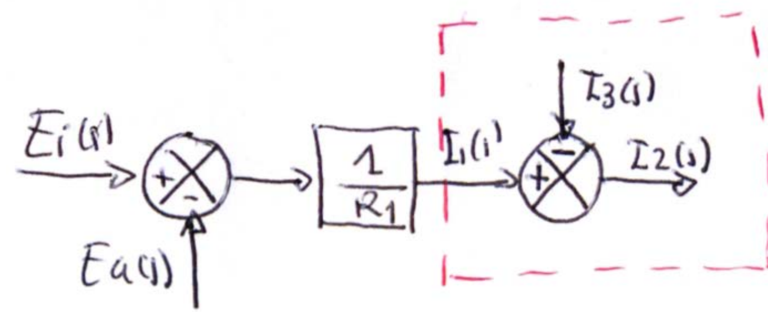
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Laplace y Diagrama de Bloques:

Ahora buscamos en qué ecuación aparece $I_1(s)$ que es la señal de salida de la primera ecuación dibujada y la encontramos en la Ecuación 4.

Tenemos dos opciones despejar $I_2(s)$ o $I_3(s)$. Los diagramas de bloques que se obtienen serán diferentes pero al simplificarlos el resultado es el mismo. En este caso voy a dibujar $I_2(s) = I_1(s) - I_3(s)$

$$
\begin{cases}
\boxed{I_1(s) = \dfrac{E_i(s) - E_a(s)}{R_1}} & (1) \\
I_2(s) = C_1 s(E_a(s) - E_0(s)) & (2) \\
I_3(s) = \frac{E_a(s) - E_o(s)}{R_2} = C_2 s E_0(s) & (3) \\
\boxed{I_1(s) = I_2(s) + I_3(s)} & (4)
\end{cases}
$$



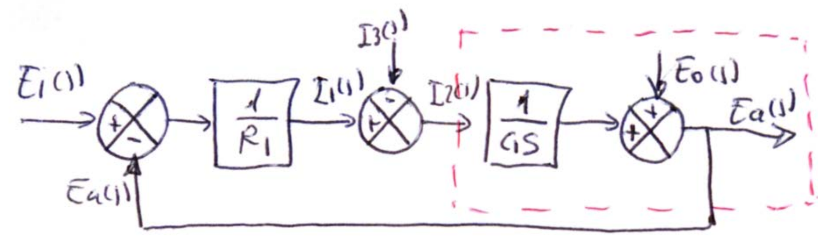
Tema 2: Laplace y Diagrama de Bloques:

A continuación dibujamos la ecuación en la que aparece $I_2(s)$ que es la (2). De esta ecuación vamos a despejar Ea (para cerrar la realimentación).

$$I_2(s) = C_1 S (E_a(s) - E_o(s))$$

$$\frac{I_2(s)}{C_1 S} = E_a(s) - E_o(s)$$

$$\frac{I_2(s)}{C_1 S} + E_o(s) = E_a(s)$$



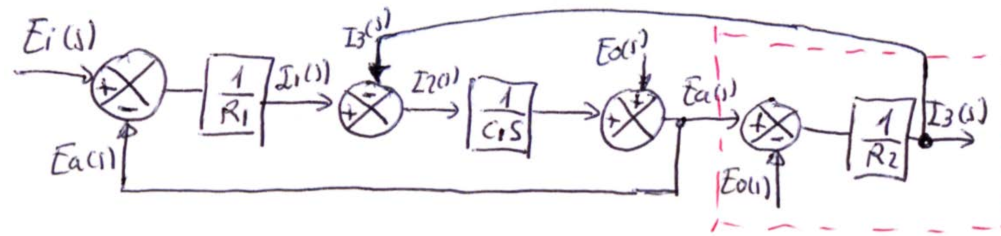
$$\left\{\begin{array}{ll} I_1(s) = \dfrac{E_i(s) - E_a(s)}{R_1} & (1) \\ I_2(s) = C_1 s(E_a(s) - E_0(s)) & (2) \\ I_3(s) = \dfrac{E_a(s) - E_o(s)}{R_2} = C_2 s E_0(s) & (3) \\ I_1(s) = I_2(s) + I_3(s) & (4) \end{array}\right.$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Laplace y Diagrama de Bloques:

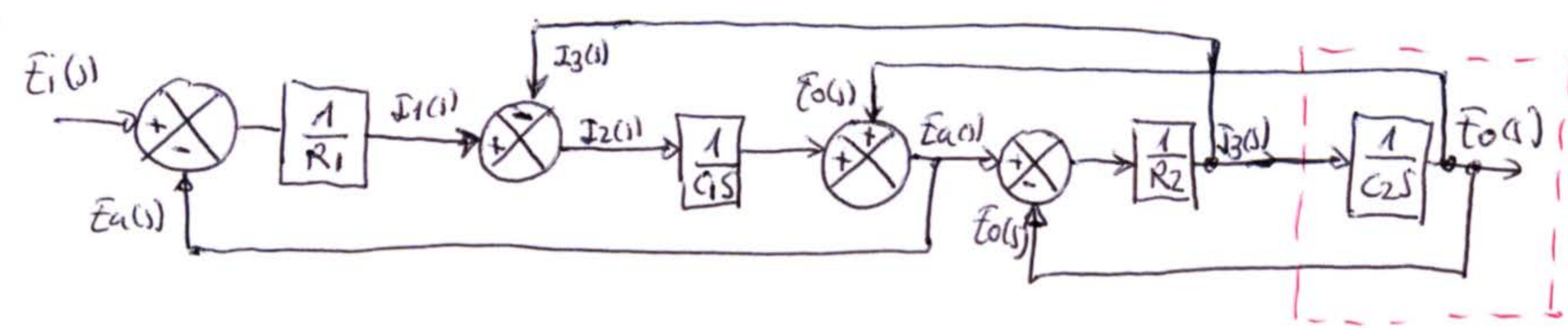
Por último dibujamos las dos expresiones incluidas en la Ecuación 3. De la primera podemos despejar I3 (y cerrar realimentación).

$$I_3(s) = \frac{E_a(s) - E_o(s)}{R_2}$$



De la segunda despejamos Eo (salida deseada)

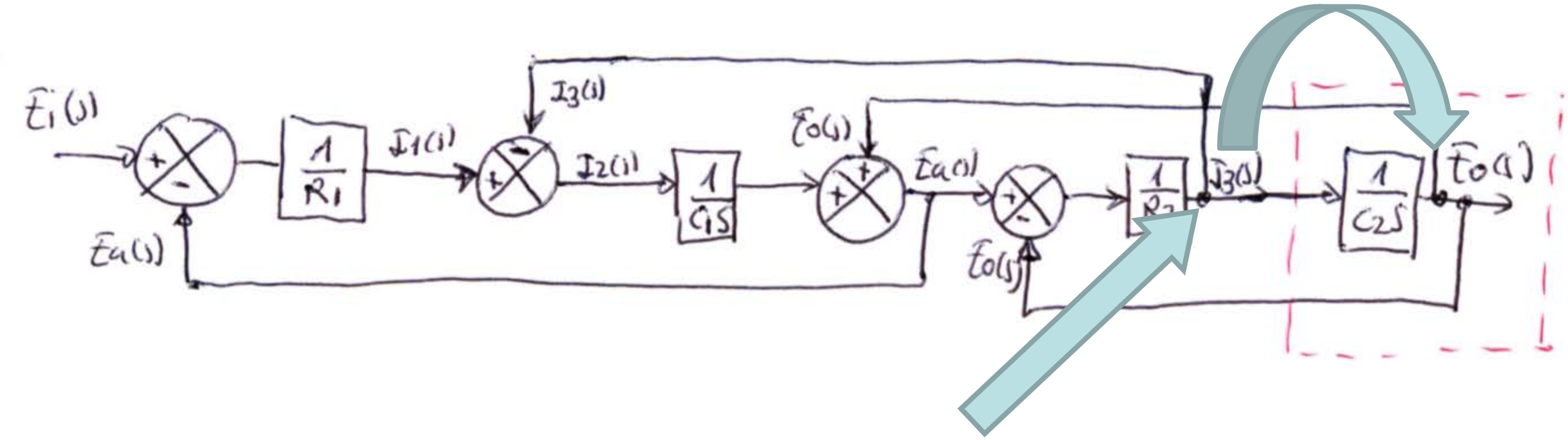
$$I_3(s) = C_2 s E_o(s) \Rightarrow E_o(s) = \frac{1}{C_2 S} I_3(s)$$



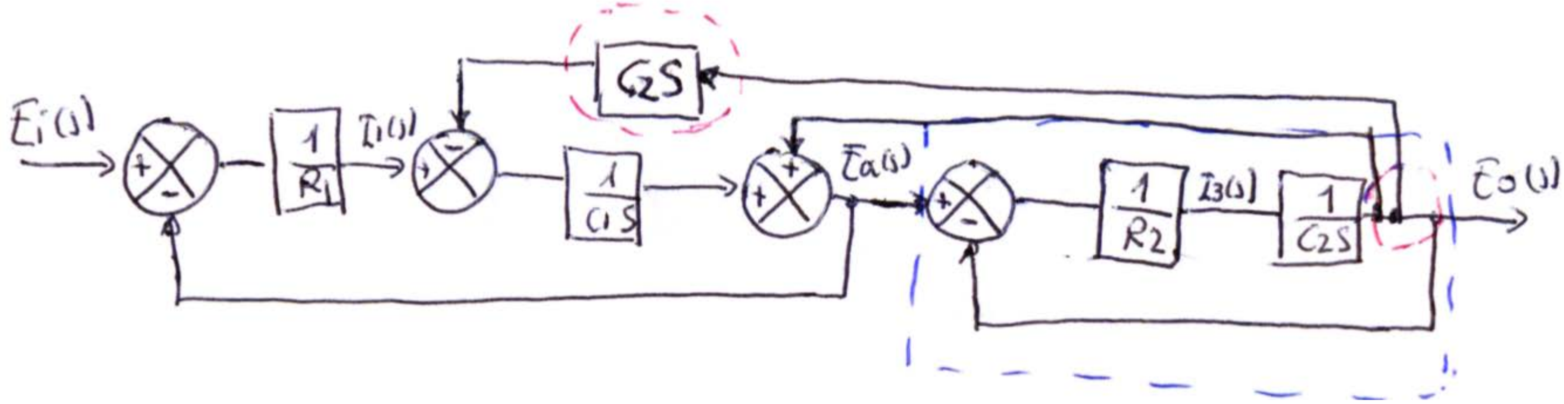
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Laplace y Diagrama de Bloques:

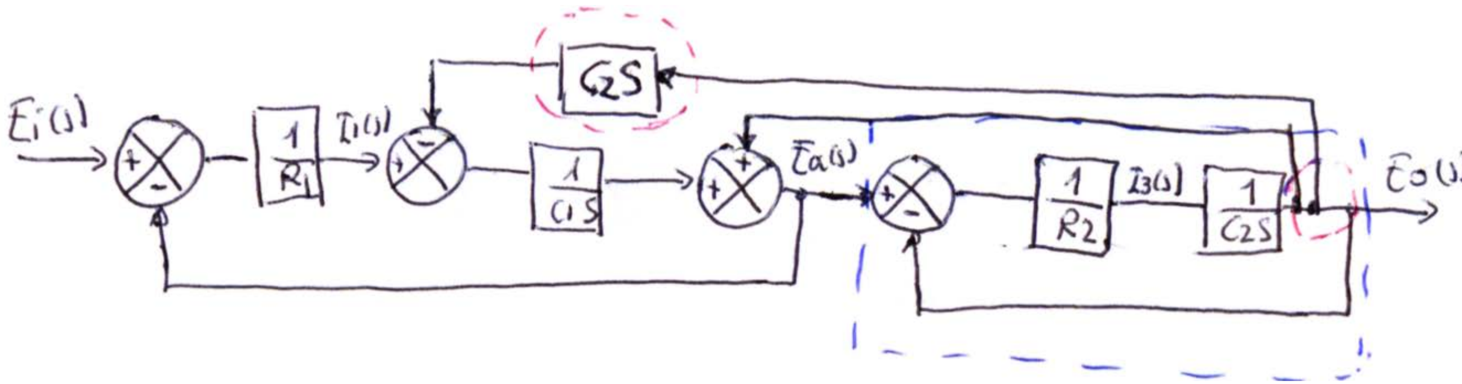
Simplificamos el diagrama de bloques para obtener la FT.



1. Movemos el punto de bifurcación de $I_3(s)$ al final, teniendo cuidado de no alterar las ganancias, como indica la Figura.

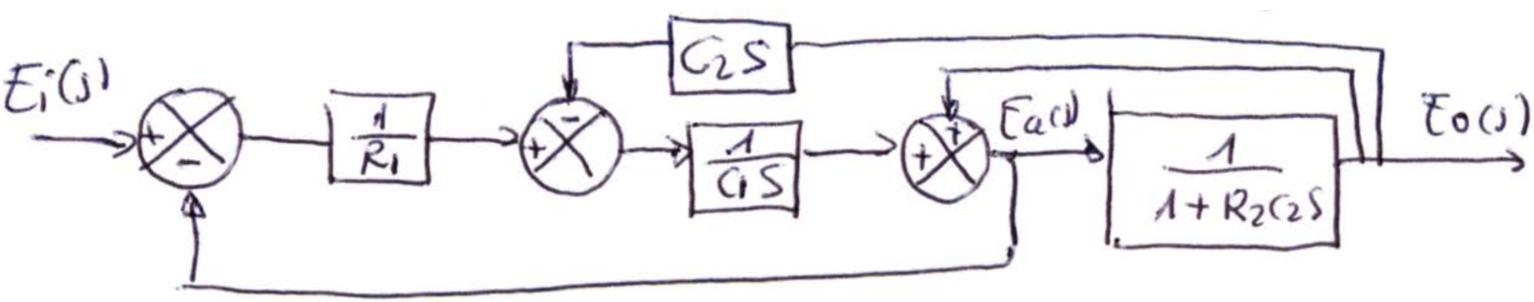


Tema 2: Laplace y Diagrama de Bloques:

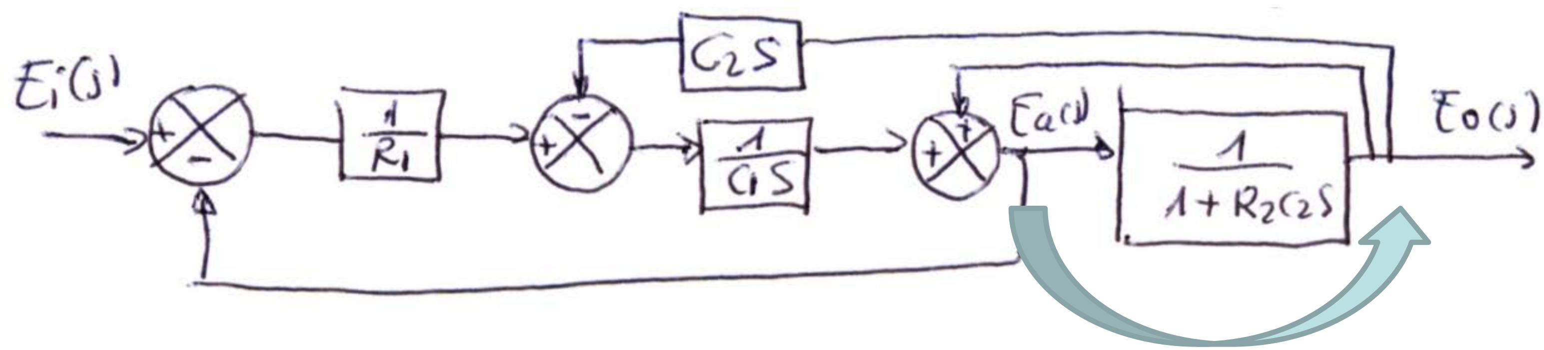


2. Aplicamos regla "Serie" $\left(\frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{C_2 s}\right) = \frac{1}{R_2 C_2 s}$

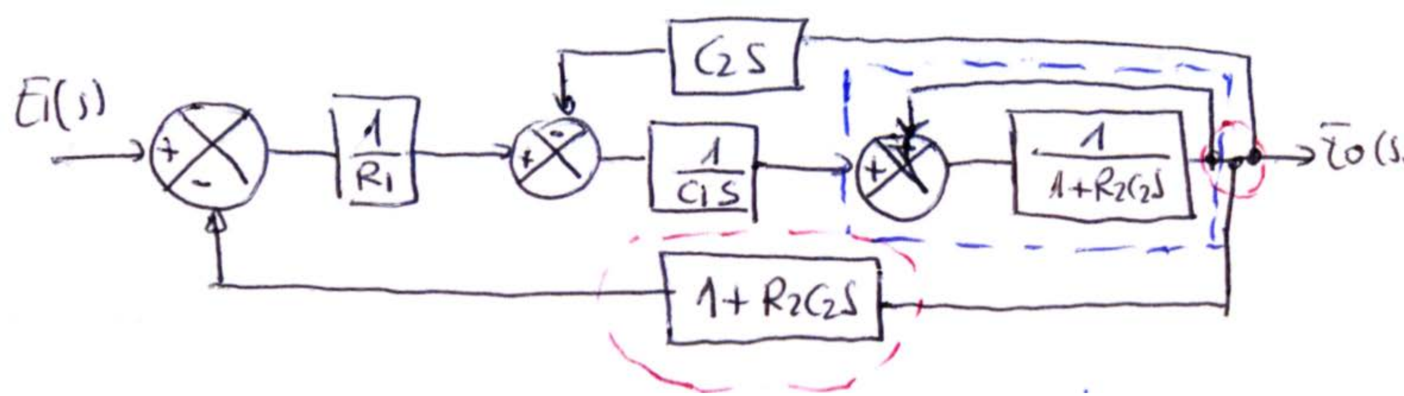
3. Aplicamos Realimentación Negativa → $\frac{1}{R_2 C_2 s}$:(1+ $\frac{1}{R_2 C_2 s}$) $= \frac{1}{1+R_2 C_2 s}$



Tema 2: Laplace y Diagrama de Bloques:



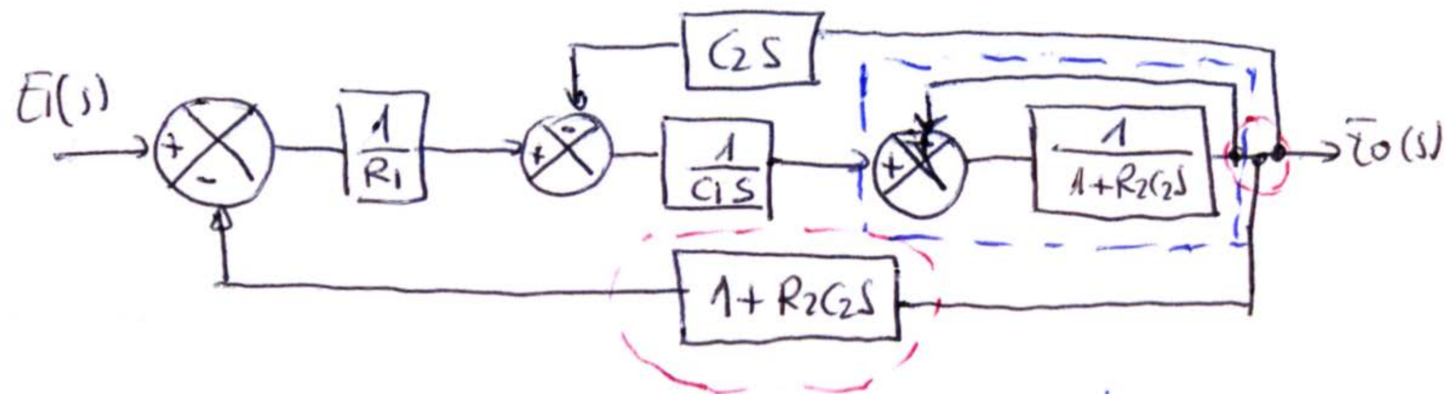
4. Ahora movemos también el punto de bifurcación de $E_a(s)$ al final:



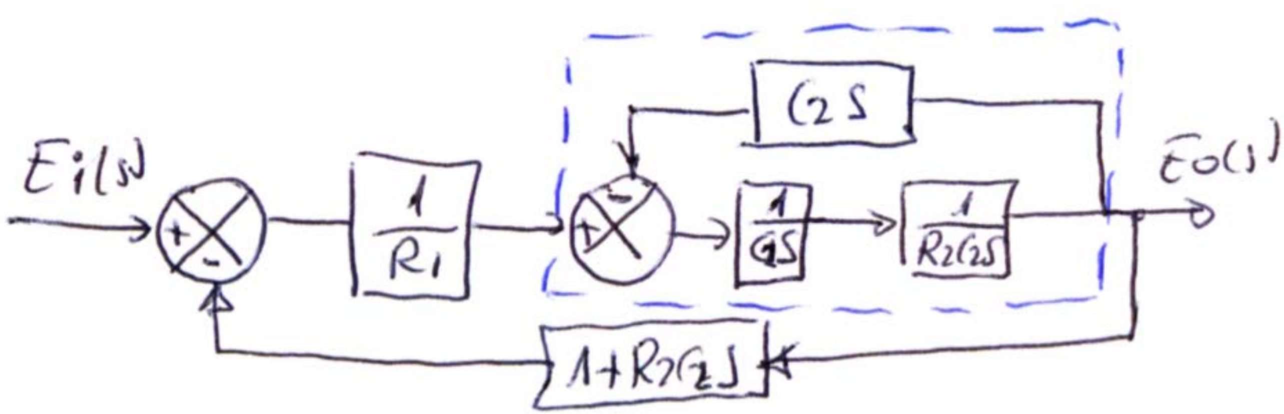
Departamento de Ingeniería
de Sistemas y Automática

Modelado y Simulación de Sistemas

Tema 2: Laplace y Diagrama de Bloques:

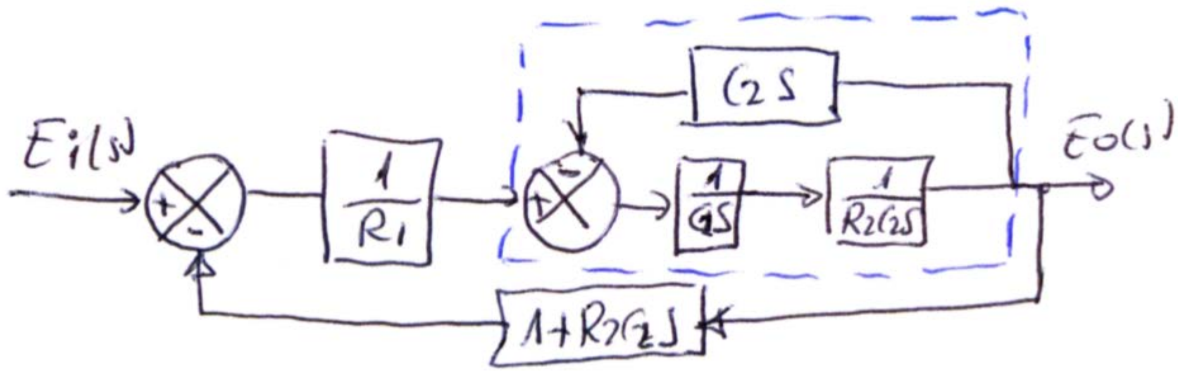


5. Aplicamos Realimentación Positiva $\frac{1}{1+R_2C_2s}$:(1- $\frac{1}{1+R_2C_2s}$) $= \frac{1}{R_2C_2s}$



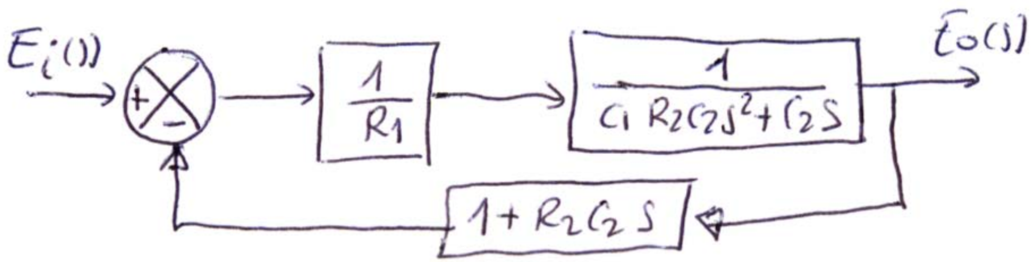
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Laplace y Diagrama de Bloques:



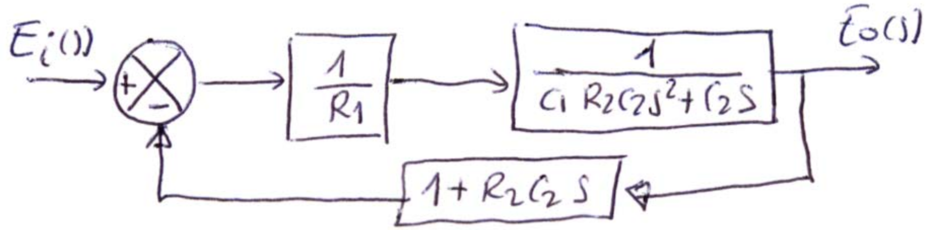
6. Aplicamos "Serie" $\left(\frac{1}{C_1 s}\right)\left(\frac{1}{R_2 C_2 s}\right) = \frac{1}{C_1 R_2 C_2 s^2}$

7. Realimentación Negativa $\frac{1}{C_1 R_2 C_2 s^2}$:(1+ $\frac{C_2 s}{C_1 R_2 C_2 s^2}$) $= \frac{1}{C_1 R_2 C_2 s^2 + C_2 s}$



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Laplace y Diagrama de Bloques:



8. Aplicamos "Serie" $\left(\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{C_1R_2C_2s^2+C_2s}\right) = \frac{1}{C_1C_2R_1R_2s^2+R_1C_2s}$

9. Realimentación Negativa :

$$\frac{1}{C_1C_2R_1R_2s^2+R_1C_2s}:(1+\frac{1+R_2C_2s}{C_1C_2R_1R_2s^2+R_1C_2s}) = \frac{1}{C_1C_2R_1R_2s^2+(R_1C_2+R_2C_2)s+1}$$

La función de transferencia resultante es:

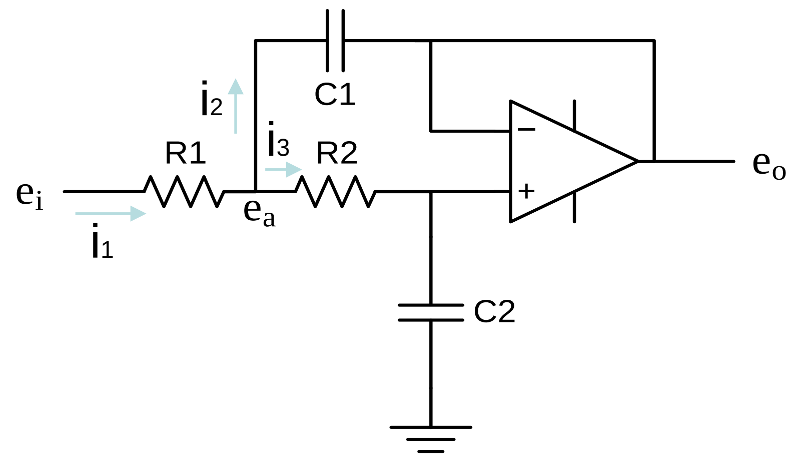
$$\boxed{H(s) = \frac{1}{C_1C_2R_1R_2s^2+(R_1C_2+R_2C_2)s+1}}$$

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Diagrama de Bloques: Simplificación de Bloques

b) Resolvemos ahora con MATLAB



$$i_1(t) = \frac{e_i(t) - e_a(t)}{R1}$$

$$i_2(t) = C_1 \frac{d(e_a(t) - e_0(t))}{dt}$$

$$i_3(t) = \frac{e_a(t) - e_0(t)}{R2} = C_2 \frac{d(e_0(t))}{dt}$$

$$\boxed{i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)}$$

Laplace

$$I_1(s) = \frac{E_i(s) - E_a(s)}{R_1} \quad (1)$$

$$I_2(s) = C_1 \mathrm{s}(E_a(s) - E_0(s)) \quad (2)$$

$$I_3(s) = \frac{E_a(s) - E_0(s)}{R_2} = C_2 \mathrm{s} E_0(s) \quad (3)$$

$$I_1(s) = I_2(s) + I_3(s) \quad (4)$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Diagrama de Bloques: Simplificación de Bloques

$$I_1(s) = \frac{E_i(s) - E_a(s)}{R_1} \qquad (1)$$

$$I_2(s) = C_1 s(E_a(s) - E_0(s)) \qquad (2)$$

$$I_3(s) = \frac{E_a(s) - E_o(s)}{R_2} = C_2 s E_0(s) \qquad (3)$$

$$I_1(s) = I_2(s) + I_3(s) \qquad (4)$$

Incógnitas: I1 I2 I3 Ea Eo

Datos: Ei, R1 R2 C1 C2

Ax=b → x = A\b

*x =b

$$\begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccccc} I1 & I2 & I3 & Ea & Eo \end{array}}^{A} \\ \begin{bmatrix} R1, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & -C1*s, & C1*s \\ 0, & 0, & R2, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & -C2*s \\ 1, & -1, & -1, & 0, & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \\ Ea \\ Eo \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ei \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Diagrama de Bloques: Simplificación de Bloques

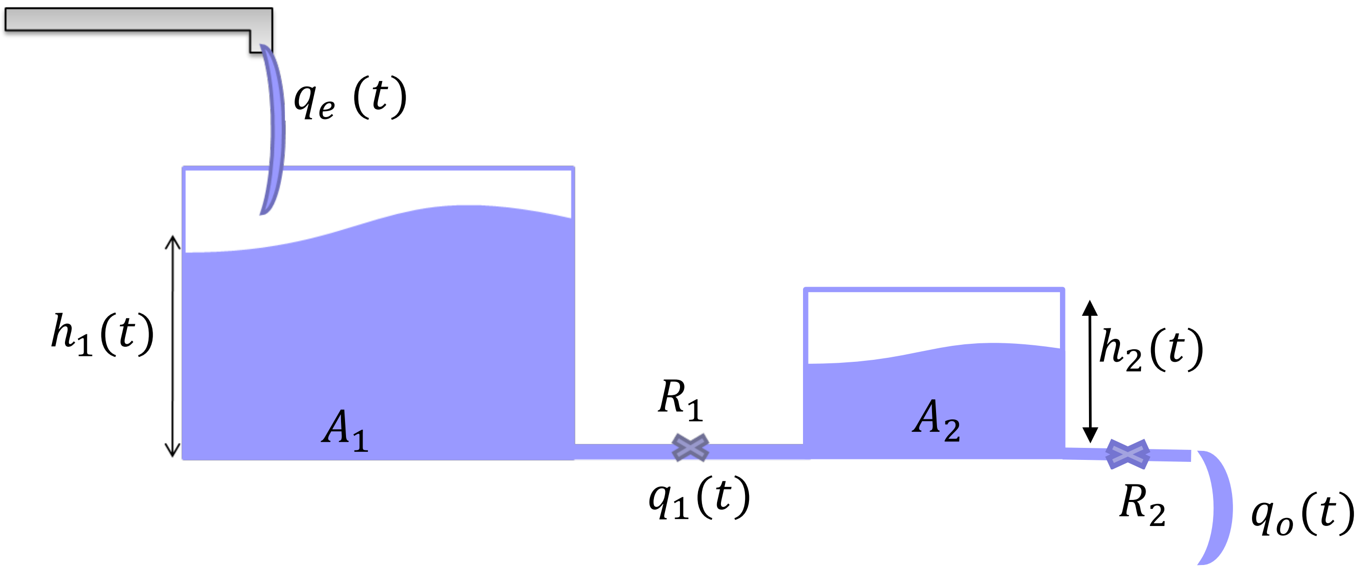
```
syms s;
syms Ei R1 R2 C1 C2;
A = [R1 0 0 1 0; 0 1 0 -C1*s C1*s;0 0 R2 -1 1; 0 0 1 0 -C2*s; 1 -1 -1 0 0]
b = [Ei; 0; 0; 0; 0]
x = A\b;
pretty(x(5))

                  Ei
--------------------------------------
                                  2
C2 R1 s + C2 R2 s + C1 C2 R1 R2 s  + 1
```

X = I1, I2, I3, Ea, Eo

$$H(s) = \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2 s^2 + (R_1 C_2 + R_2 C_2) s + 1}$$

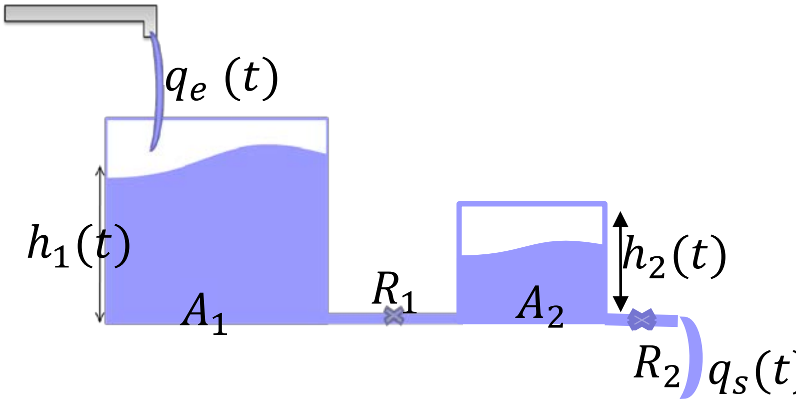
Tema 2: Diagrama de Bloques

Ejercicio: Obtener la función de transferencia del sistema.

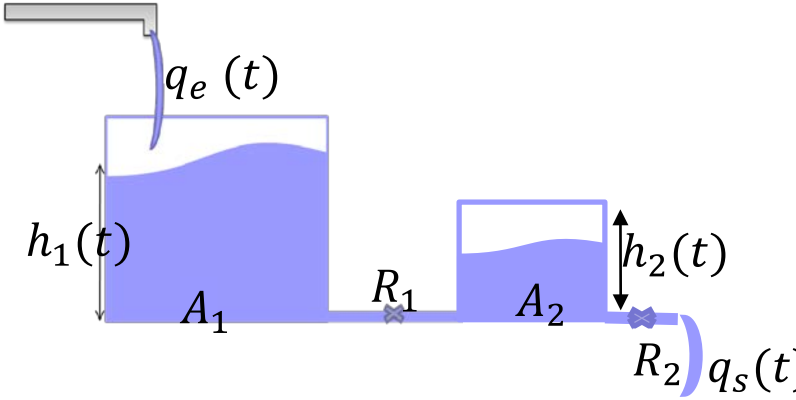


Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Diagrama de Bloques



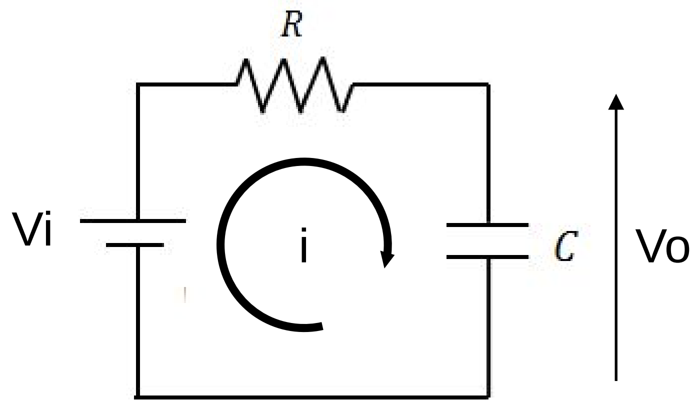
Tema 2: Diagrama de Bloques



Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Diagrama de Bloques

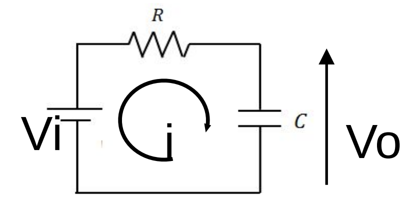
Ejercicio: Obtener la función de transferencia del sistema usando diagrama de bloques.



Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

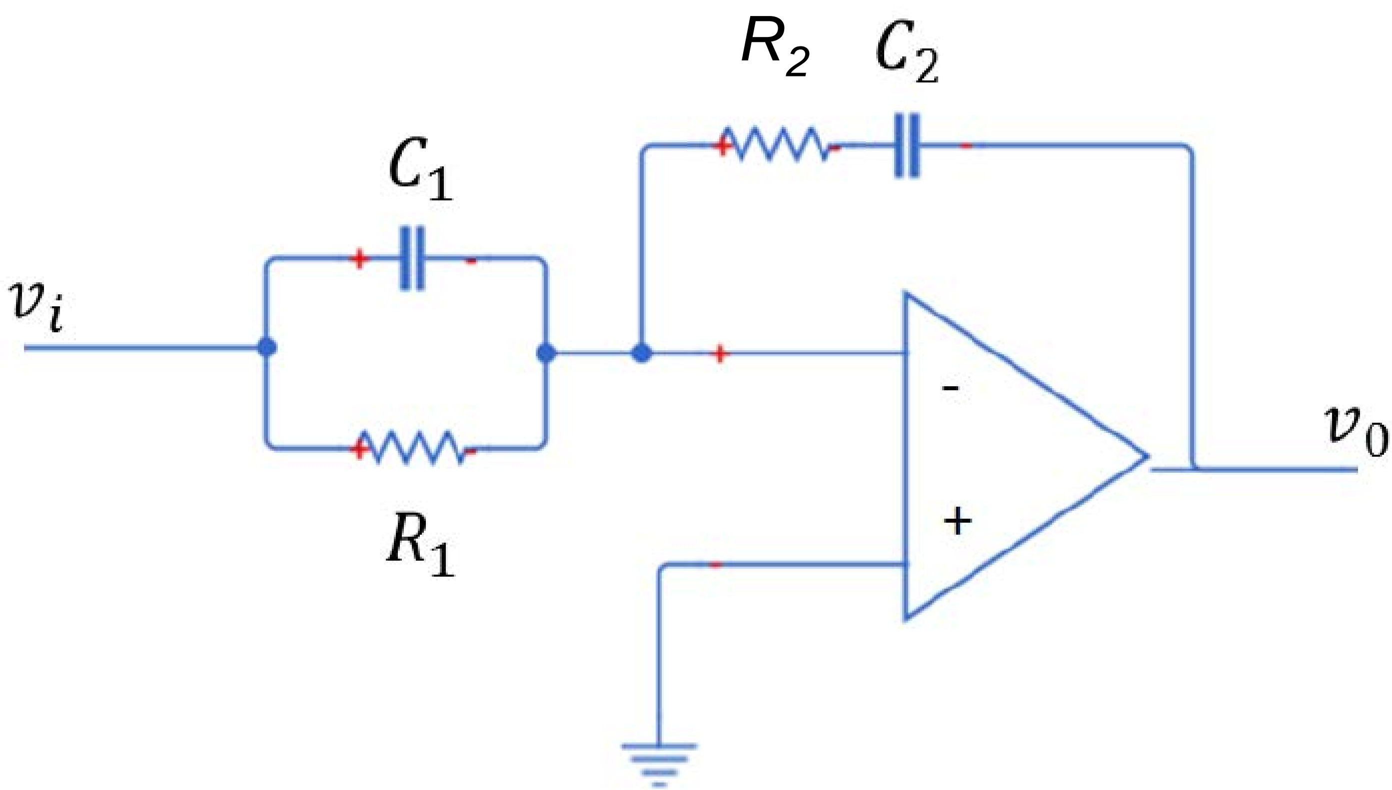
Tema 2: Diagrama de Bloques



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

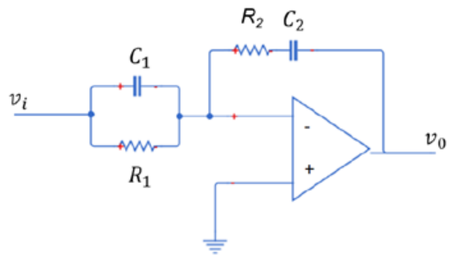
Tema 2: Diagrama de Bloques

Ejercicio: Obtener la función de transferencia del sistema: (a) despejando matemáticamente el sistema de ecuaciones, y (b) usando técnicas de reducción del diagrama de bloques.



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

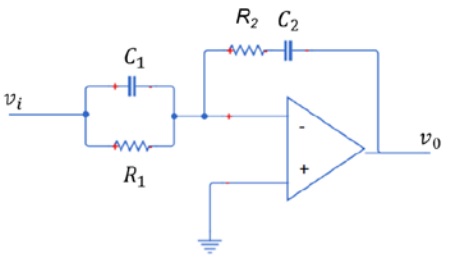
Tema 2: Diagrama de Bloques



Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Diagrama de Bloques

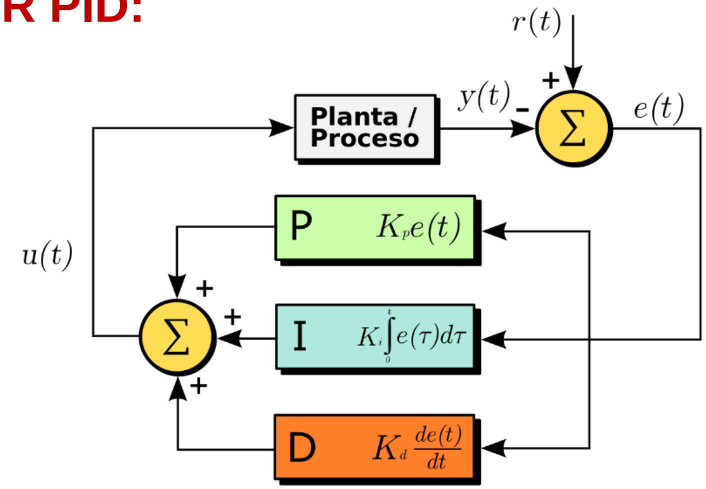


Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Diagrama de Bloques

CONTROLADOR PID:

Un **controlador PID** (**controlador proporcional, integral y derivativo**) es un mecanismo de control simultáneo por realimentación ampliamente usado en sistemas de control industrial. Este calcula la desviación o **error** entre un valor medido **y(t)** y un valor deseado **r(t)**.



P La parte proporcional consiste en el producto entre la señal de error y la constante proporcional Kp para lograr que el error se aproxime a cero, pero en la mayoría de los casos no se consigue.

I El modo de control Integral tiene como propósito disminuir y eliminar el error en estado estacionario.

D La acción derivativa se manifiesta cuando hay un cambio en el valor absoluto del error; (si el error es constante, solamente actúan los modos proporcional e integral).

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Tema 2: Diagrama de Bloques

CONTROLADOR PID:

Definiendo y(t) como la salida del controlador, y siendo e(t) la señal de entrada al mismo, la forma final del algoritmo del PID es:

$$\mathrm{y}(\mathrm{t}) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau)\, d\tau + K_d \frac{de}{dt}$$

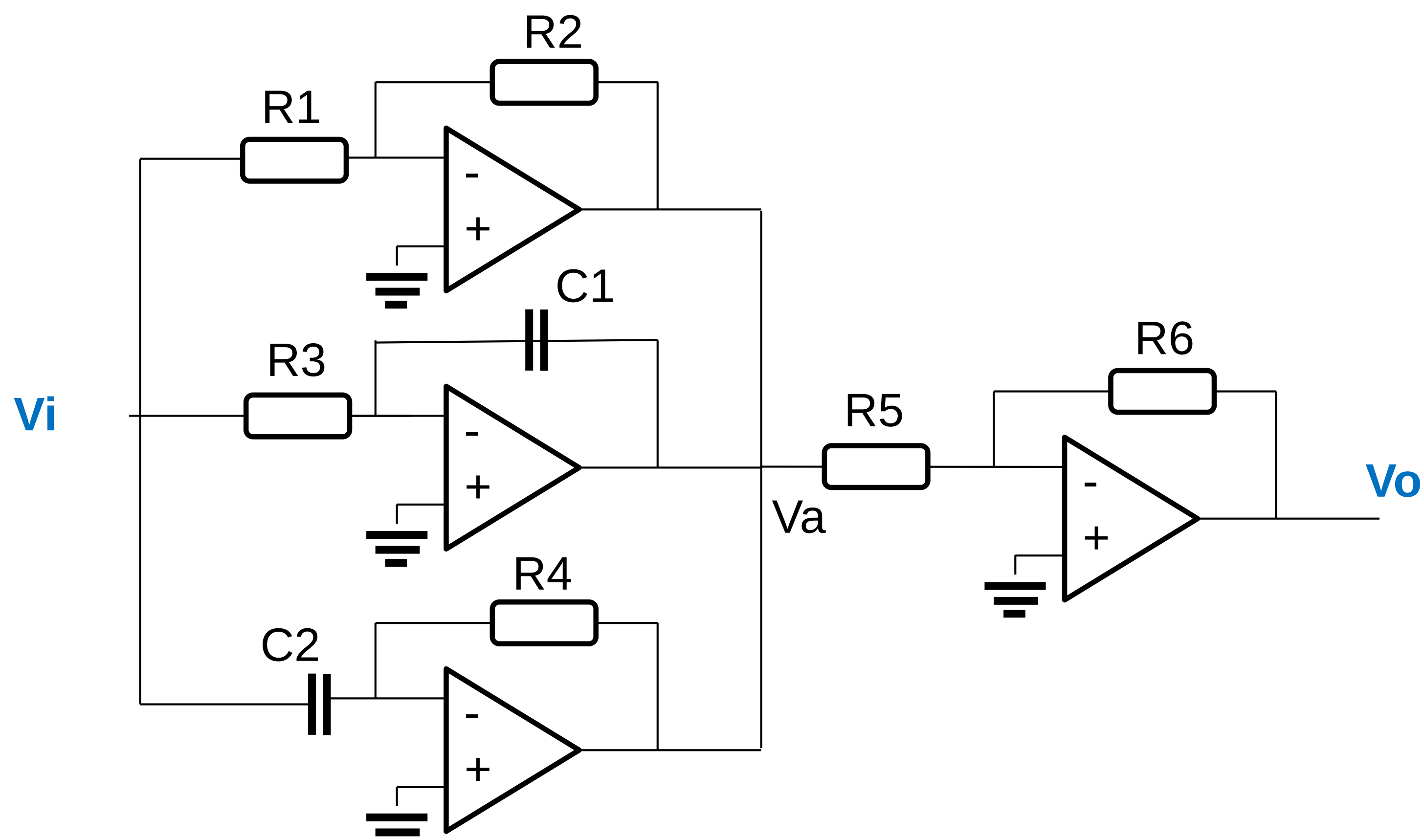
Y su función de transferencia (ideal):

$$H_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Diagrama de Bloques

Ejercicio PID: Dada una posible implementación de un controlador PID (usando en este caso AO), calcular la función de transferencia del sistema y determinar el valor de las constantes Kp, Ki y Kd.



Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 2: Diagrama de Bloques

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 2: Diagrama de Bloques

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática