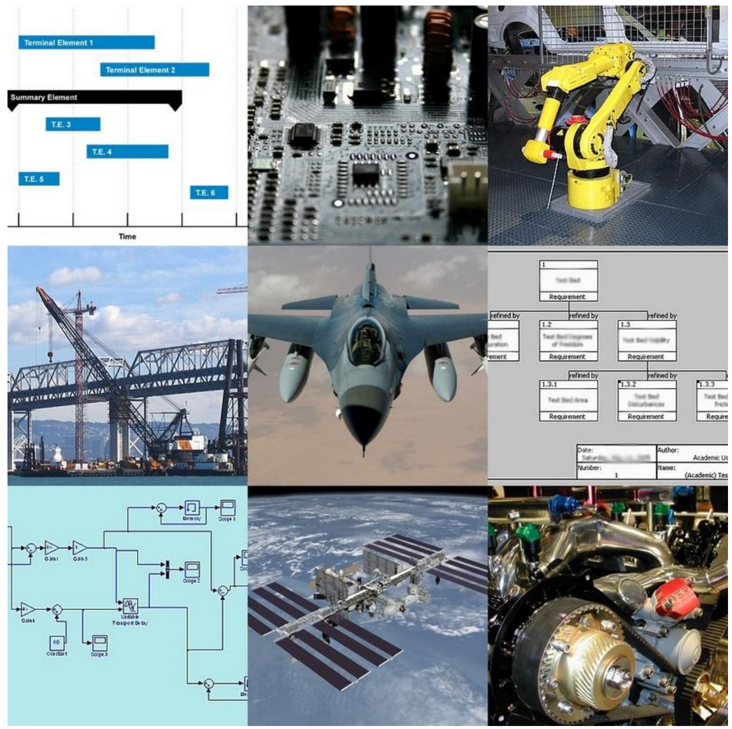
Modelado y Simulación de Sistemas



Dr. D. Javier González Monroy
Dpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática

Departamento de Ingeniería
de Sistemas y Automática

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos

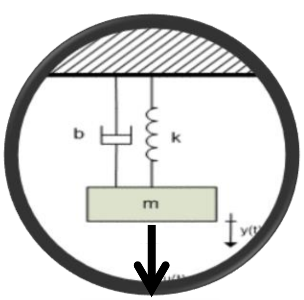
1.1 **Introducción**

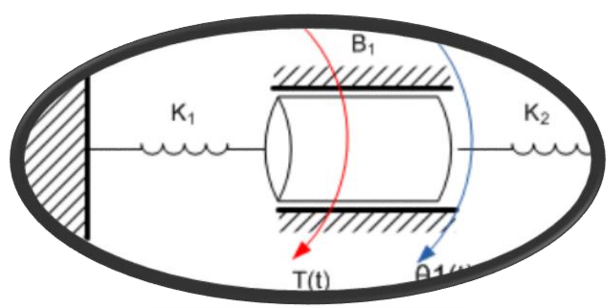
1.2 **Modelado de Sistemas Mecánicos**

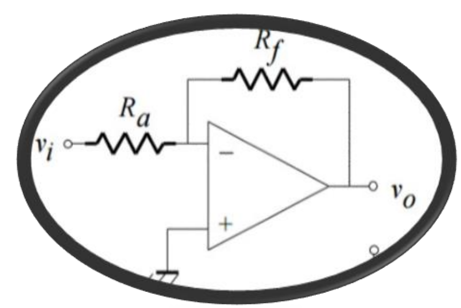
- 1.2.1 Traslacionales
- 1.2.2 Rotacionales

1.3 **Modelado de Sistemas Eléctricos**

1.4 **Modelado de Sistemas de Nivel de Líquidos**







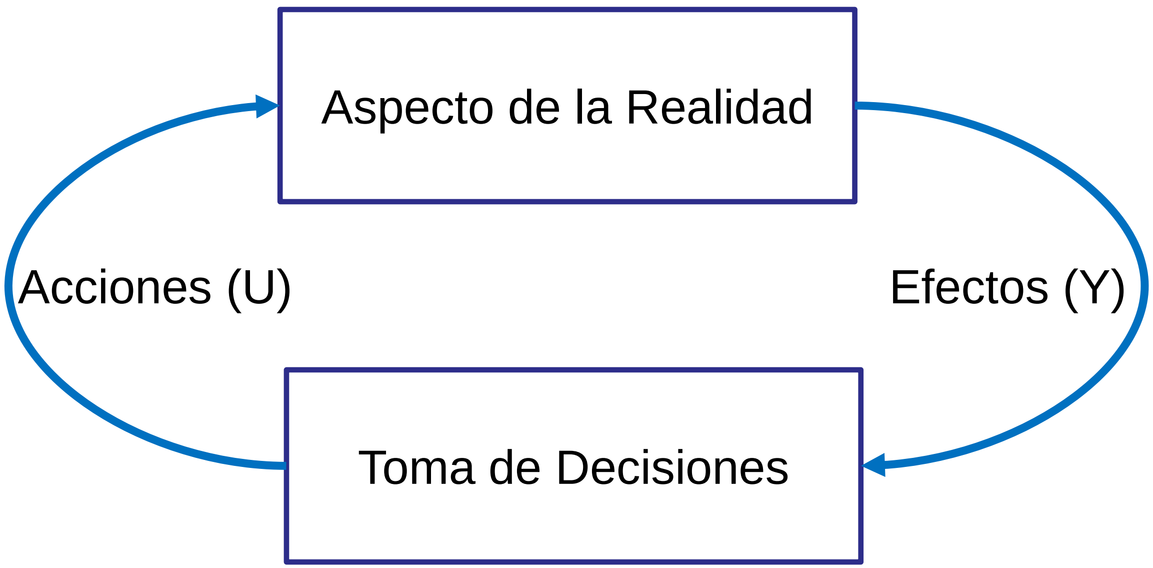
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Concepto de Modelo

- Todos empleamos instintivamente modelos para la toma de decisiones sobre determinados aspectos de la realidad.
- En el proceso de toma de decisión se elige una entre varias acciones posibles, teniendo en cuenta el efecto que cada acción vaya a producir (ej: estudiar MySS).
- La relación que liga las posibles acciones con sus efectos es el **modelo** del sistema. Por lo tanto, en el proceso de toma de decisiones se está empleando un modelo del sistema.

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Intro

Concepto de Modelo



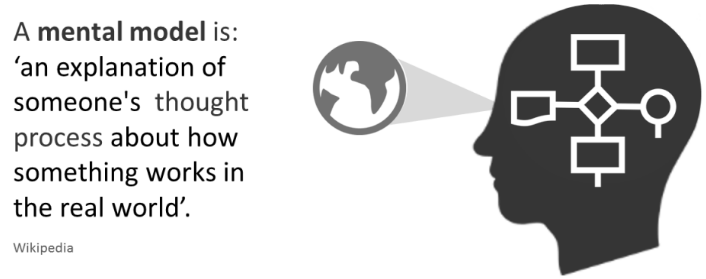
La relación que liga las acciones $\boldsymbol{U_i}$ (entradas) con los efectos $\boldsymbol{Y_j}$ (salidas), según $\boldsymbol{Y = f(U)}$, constituye la representación formal de un modelo.

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Intro

Tipos de Modelos

- **Modelos Mentales:** Son los propios de los humanos. Son imprecisos, difíciles de comunicar y borrosos.



- **Modelos Físicos**: Son costosos de generar en tiempo y en dinero.
  - Modelos estáticos:
    - Modelos a escala.
    - Modelos de imitación.
  - Modelos dinámicos:
    - Analogías o modelos análogos.
    - Prototipos.

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Intro

Tipos de Modelos

- **Modelos Simbólicos:**
  - No matemáticos
    - Lingüísticos, ya sean verbales o escritos.
    - Gráficos o esquemáticos: mapas diagramas de flujos, etc.
  - **Matemáticos/Computerizados:** Relaciones entre las distintas variables/magnitudes del sistema a modelar se corresponden con una estructura matemática (ecuaciones).

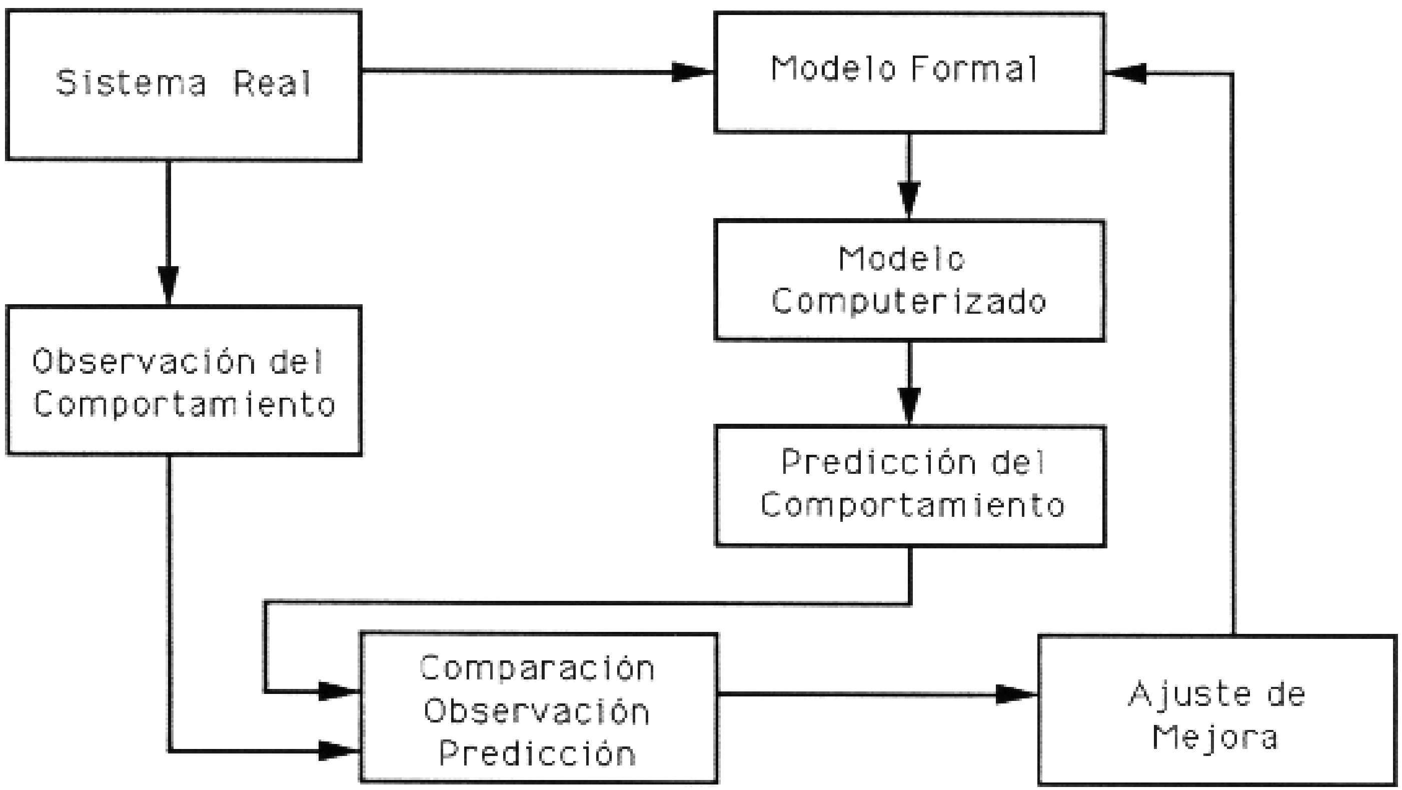
$$\int \frac{3v^2}{1+4\cdot v^3}.dv + \int \frac{1}{X}\cdot dX = K \; ;$$

$$\ln x + \frac{1}{4}\cdot \ln(1+4\cdot v^3) = \ln C$$

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Intro

Modelos Matemáticos

Etapas en la Construcción de un Modelo Matemático



Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Modelos Matemáticos

Etapas a seguir en la elaboración del modelo computerizado:

1. Descomposición de sistemas en subsistemas (divide y vencerás).

2. Aplicación de leyes de conservación (masa, momento, energía,…) en cada subsistema y obtención de las ecuaciones constitutivas de cada elemento.

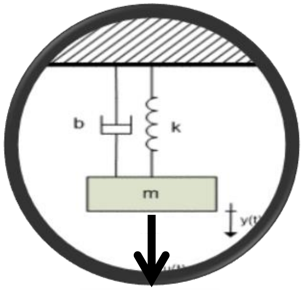
3. Obtención de las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema.

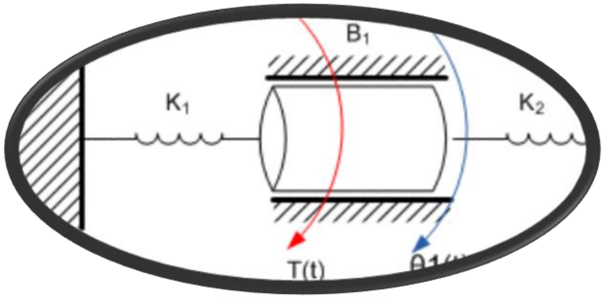
4. Programación de ecuaciones a través de software apropiado (Matlab, SIMULINK,…)

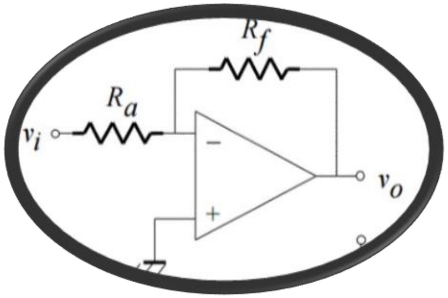
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

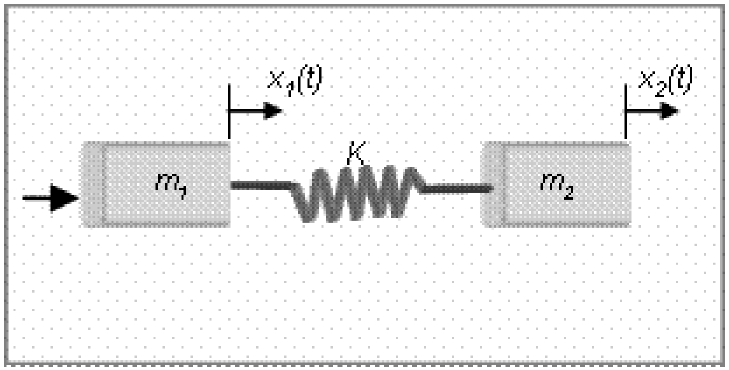
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos







Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación



Ecuaciones de Conservación:
Leyes de Mecánica de Newton

PROCEDIMIENTO: Obtención de ecuaciones dinámicas:

1. Definir los sentidos de desplazamiento en cada masa.
2. Cálculo del diagrama de cuerpo libre para cada masa.
3. Aplicación de Ley de Newton en cada masa.

$$\sum_i (f_{ext})_i - M\frac{dv}{dt} = 0$$

La variación instantánea del **momento lineal** es igual a la **fuerza** que actúa sobre el cuerpo

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

El modelo del sistema completo surge de la aplicación de las leyes de Newton. La segunda ley de Newton indica que la suma de las fuerzas aplicadas a un cuerpo (incluyendo las fuerzas de inercia) es nula:

$$\sum_i (f_{ext})_i - M\frac{dv}{dt} = 0$$

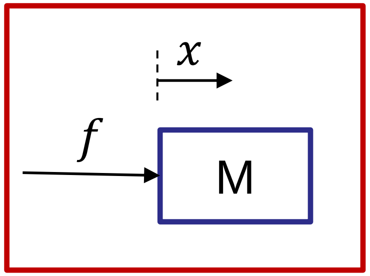
Se debe tener en cuenta que tanto las fuerzas como los desplazamientos son **magnitudes vectoriales**. Esto quiere decir que no sólo influye el valor que toma la magnitud, si no su dirección y sentido.

D'Alembert's Law

$$\sum_i f_i = 0$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación



La **inercia** es la resistencia que presenta todo objeto físico a un cambio en su velocidad.

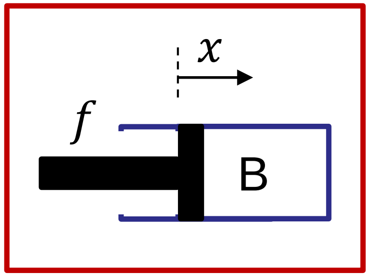
Una masa sometida a una fuerza experimenta una aceleración como consecuencia de ésta. Aparece entonces una **reacción** a la aceleración experimentada por el cuerpo denominada coloquialmente "fuerza de inercia" y cuya magnitud es directamente proporcional a la aceleración del cuerpo y su **sentido el contrario** al de movimiento del cuerpo.

$$f = M\frac{d^2x}{dt^2}$$

On the surface of the Earth, inertia is often masked by gravity and the effects of friction and air resistance, both of which tend to decrease the speed of moving objects (commonly to the point of rest). This misled the philosopher Aristotle to believe that objects would move only as long as force was applied to them.[2][3]

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación



Un **amortiguador** es un elemento que se deforma bajo la acción de una fuerza ejerciendo una fuerza de reacción que es función de la velocidad con la que el elemento se deforma.

Los elementos con **rozamiento viscoso** tienen este tipo de comportamiento.

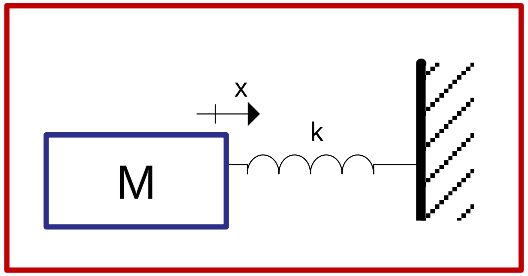
$$f = B\frac{dx}{dt}$$

Siendo B la constante de rozamiento viscoso.

Teoría de Sistemas . Carlos Bordóns Alba, Manuel R. Arahal, Daniel Limón Marruedo. Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática. Universidad de Sevilla. 2001 ISBN:84-88783-51-5

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación



Un **resorte/muelle** es un **elemento elástico** que ante la acción de una fuerza se deforma variando su longitud. El resorte ejerce una fuerza que se opone a la fuerza impulsora que es función de la deformación experimentada. Una vez que la acción de la fuerza cesa, el resorte es capaz de recuperar su posición original, gracias a su característica elástica.

$$f = K \cdot x$$

$$f = K \cdot (x - x_{natural})$$

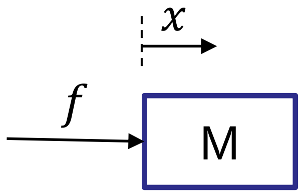
K se conoce como Constante del Muelle

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

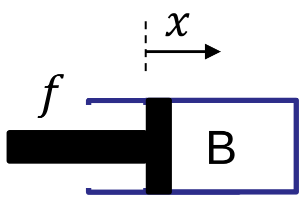
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

ELEMENTOS TRASLACIONALES



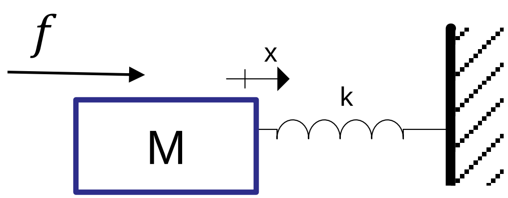
Masa

$$f = M\frac{d^2x}{dt^2}$$



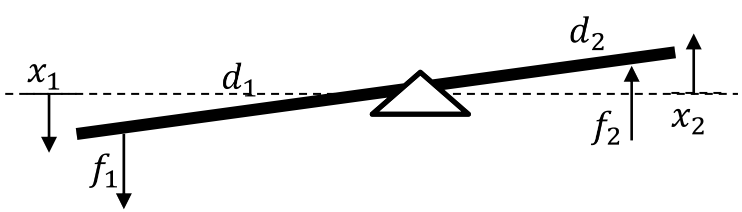
Amortiguador

$$f = B\frac{dx}{dt}$$



Muelle

$$f = K \cdot x$$



Palanca

$$f_2 = \frac{d_1}{d_2}f_1 \qquad x_2 = \frac{d_2}{d_1}x_1$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

Unidades (Sistema Internacional):

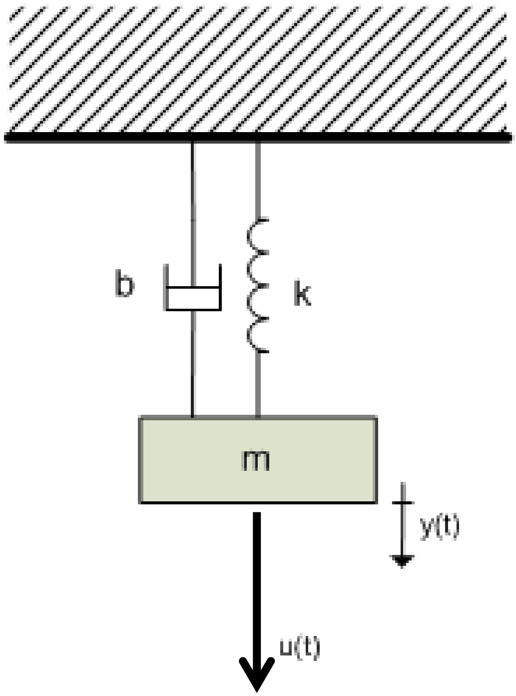
Spring:	F=k·x	k=spring constant (N/m)	x=displacement (m)
Friction:	F=b·v	b=friction coefficient (N-s/m)	v=velocity=derivative of displacement (m/s)
Mass:	F=m·a	m=mass(kg)	a=acceleration=second derivative of displacement (m/s²)

$$\sum_i (f_{ext})_i - M\frac{dv}{dt} = 0$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

Ejemplo: En el Sistema mostrado, la fuerza externa **u(t)** debe vencer la inercia de la masa y las oposiciones del amortiguador y del muelle:



$$f_1 = m \cdot \frac{d^2y}{dt}$$

$$f_2 = b \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$f_3 = k \cdot y(\mathrm{t})$$

$$f_{input} = u(t)$$

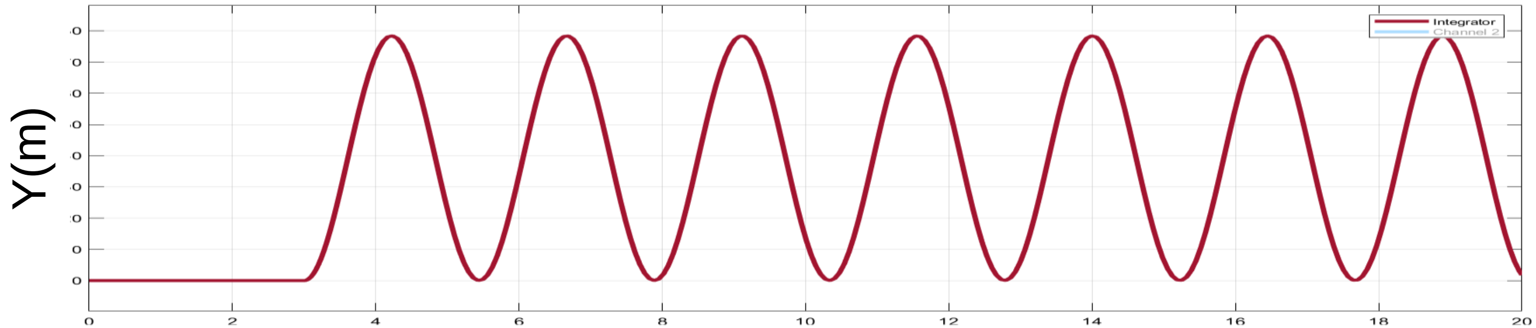
por tanto:

$$\sum_{\forall i} f_i = 0 \Rightarrow -f_1 - f_2 - f_3 + f_{input} = 0$$

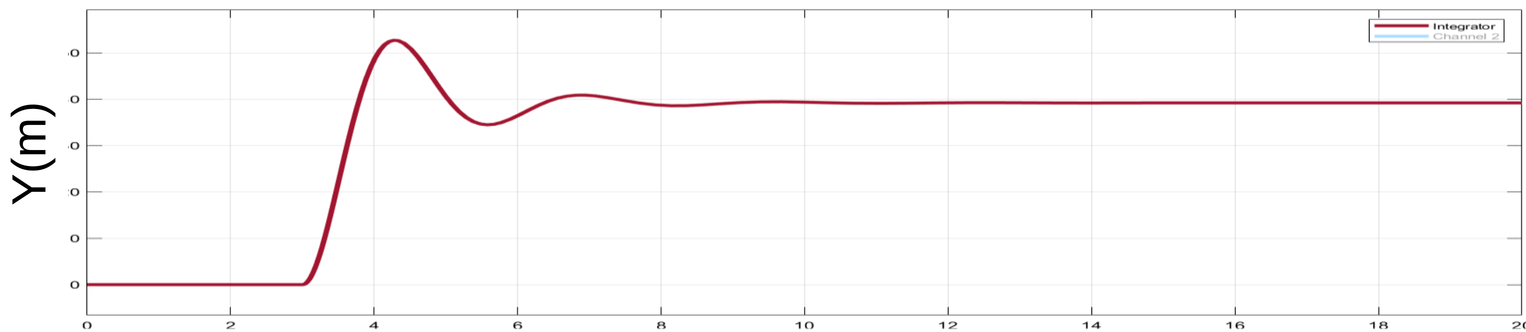
$$\boxed{m \cdot \frac{d^2y}{dt} + b \cdot \frac{dy}{dt} + k \cdot y(t) = u(t)}$$

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt} + b \cdot \frac{dy}{dt} + k \cdot y(t) = u(t)$$

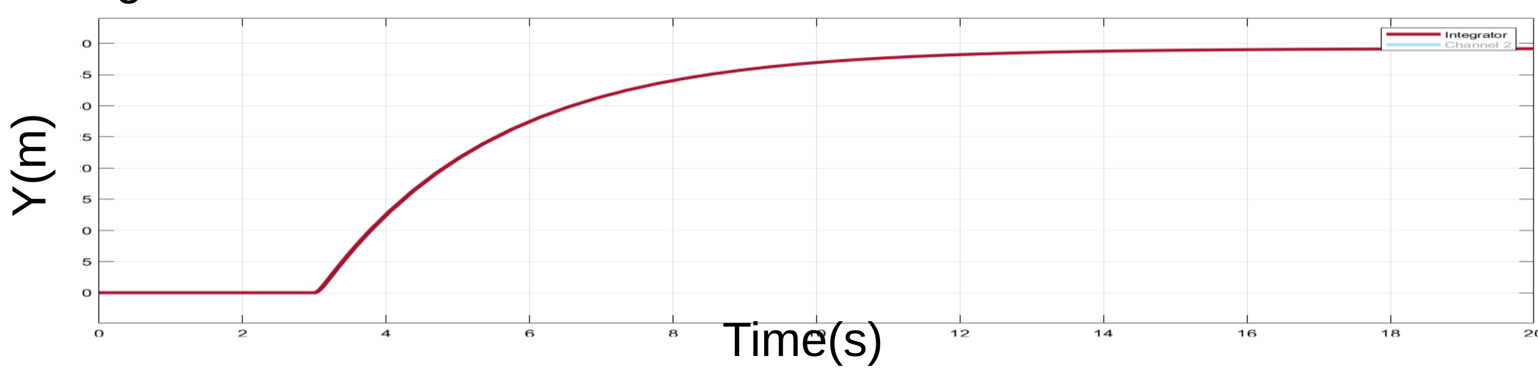
Solo componente elástica:



Un poco de amortiguación:



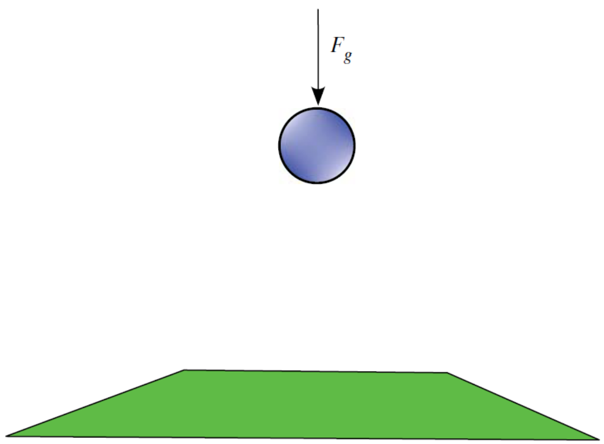
Muy amortiguado:



Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

Ejemplo2: Cuerpo en Caída Libre (sin rozamiento y masa cte).



$$m \cdot \frac{d^2y}{dt} = F_g(t)$$

En ausencia de rozamiento, la aceleración del objeto se mantiene constante en el tiempo:

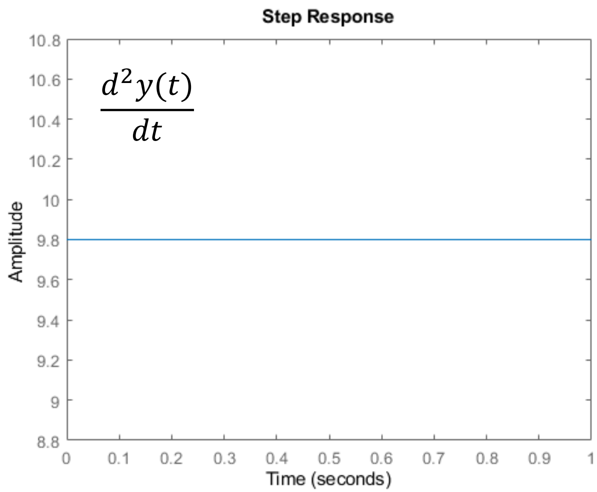
$$\frac{d^2y}{dt} = F_g(t)/m$$

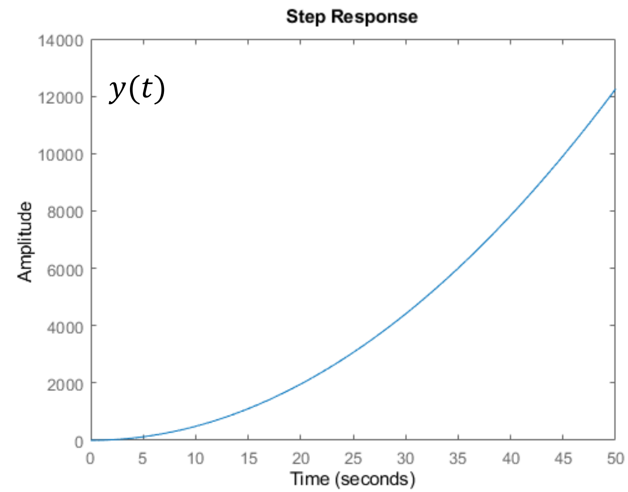
Por tanto, la velocidad de caída aumentará de forma lineal y la posición (respecto a la altura inicial) aumentará parabólicamente.

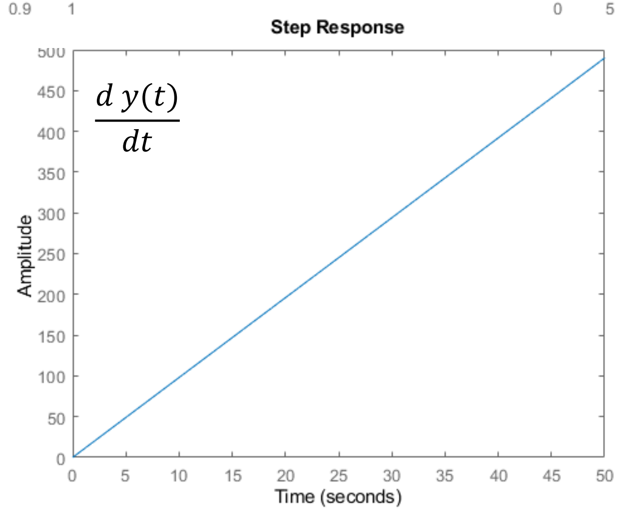
Nota: Si añadimos cambio de masa (por ejemplo un cohete entrando en la atmósfera), tenemos que tener en cuenta que la Fg ya no es constante.

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

Ejemplo2: Cuerpo en Caída Libre (sin rozamiento y masa cte).







Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

ALGORITMO

1.- Definir la línea del movimiento (sentido positivo).

2.- Definir cuál es la entrada y cuál la salida del Sistema.

3.- Definir los sentidos positivos de todas las señales.

4.- Para cada masa M_i obtener el **diagrama de cuerpo libre**:

4.1 Obtención de una ecuación diferencial atendiendo solo a las fuerzas que actuan en M_i debido a M_i y su movimiento.

4.2 Para cada masa M_j (incluyendo M_i) se añaden al diagrama de M_i las fuerzas que aparecen sobre M_i si M_j se mueve y el resto no.

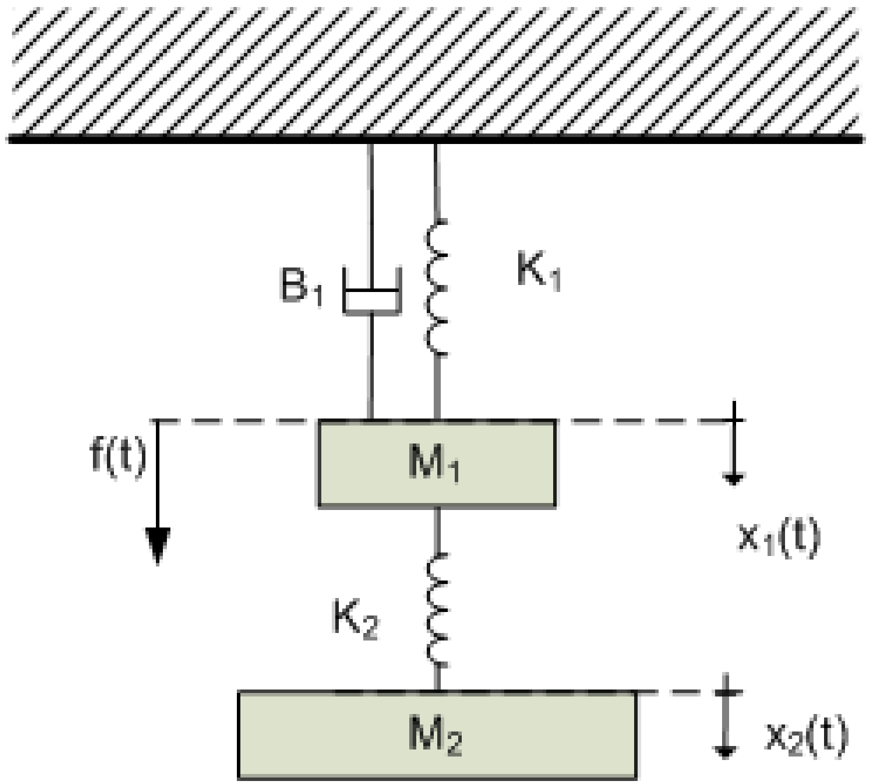
4.3 Aplicar la ley de Conservación: $$\sum_i f_i = 0$$

5.- Obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales. Reducir a una única ecuación que sólo involucre la entrada y la salida.

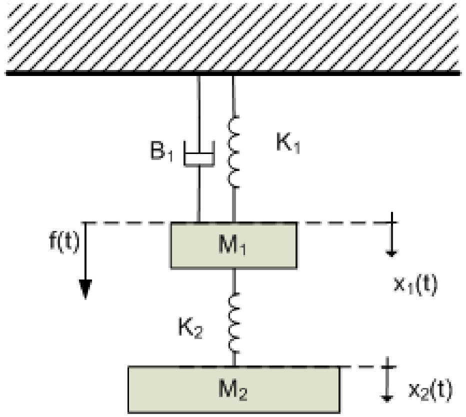
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

Ejemplo 1:



UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

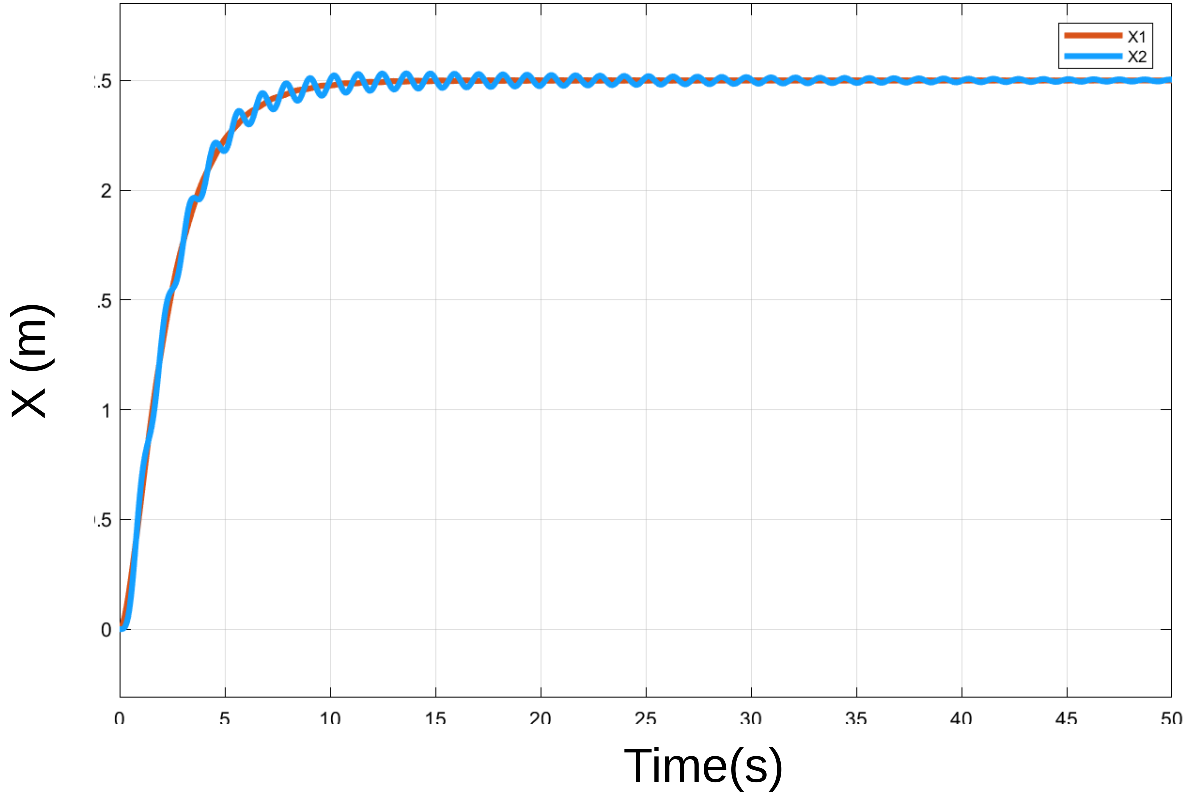


Ecuaciones Diferenciales:

$$M_1 \cdot \frac{d^2x_1}{dt^2} = f(t) + K_2 \cdot X_2 - B \cdot \frac{dX_1}{dt} - (K_1 + K_2) \cdot X_1$$

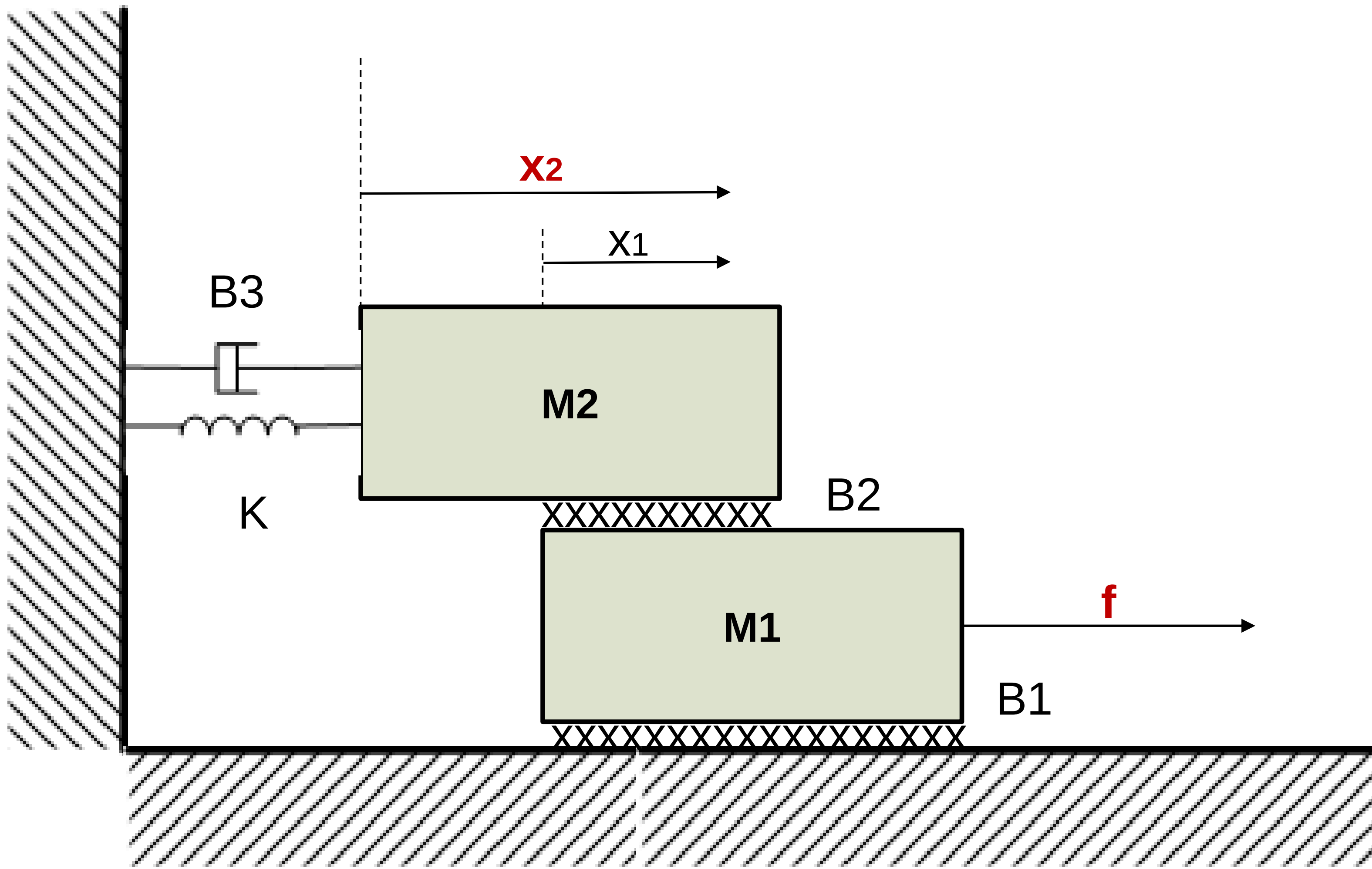
$$M_2 \cdot \frac{d^2x_2}{dt^2} = K_2 \cdot (X_1 - X_2)$$

Simulación en Matlab



Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

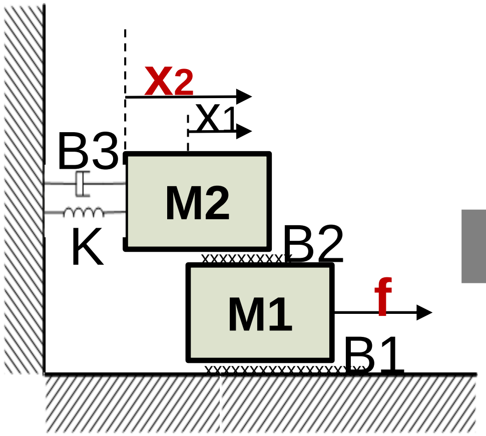
Ejemplo 2:



Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

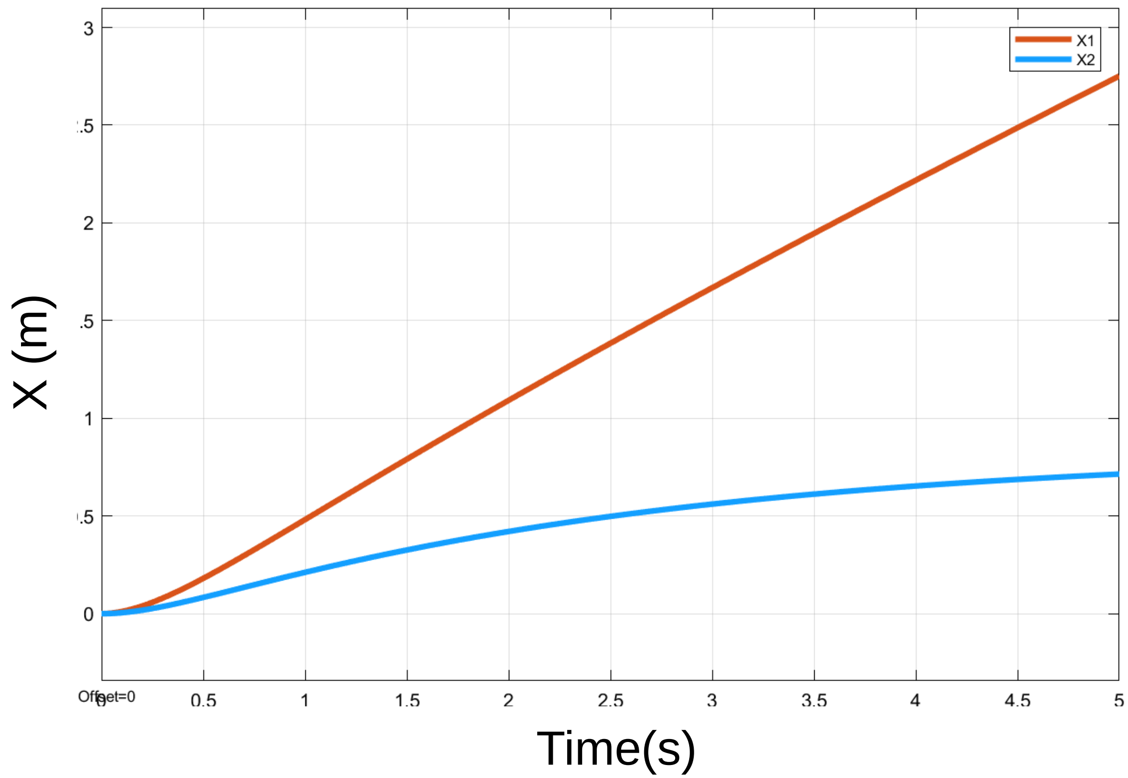


Ecuaciones Diferenciales:

$$M_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} = f(t) + B_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} - (B_1 + B_2) \cdot \frac{dx_1}{dt}$$

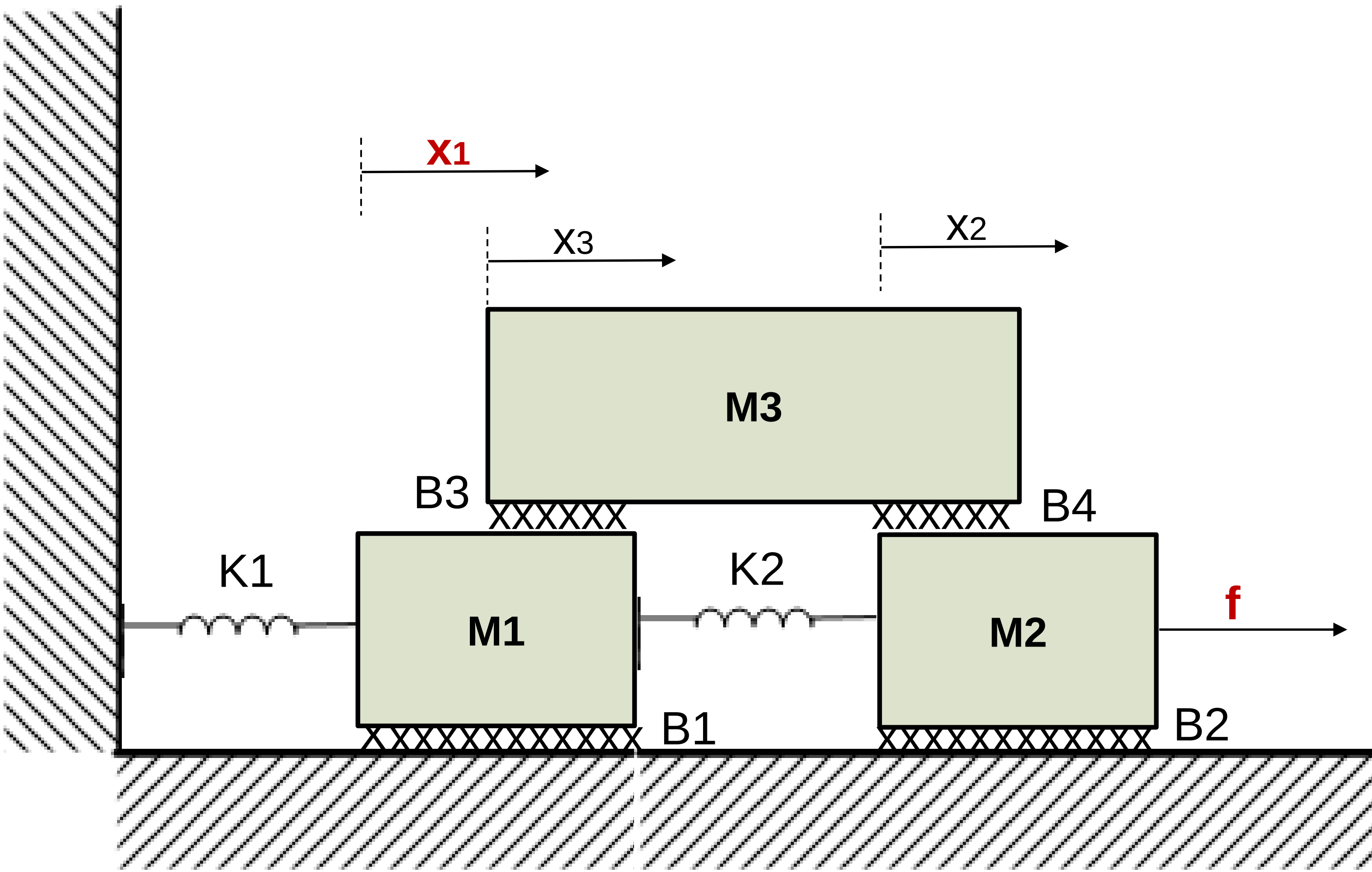
$$M_2 \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} = B_2 \cdot \frac{dx_1}{dt} - (B_2 + B_3) \cdot \frac{dx_2}{dt} - KX_2$$

Simulación en Matlab



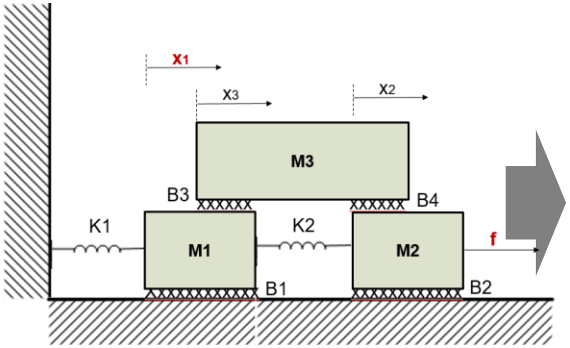
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

Ejemplo 3:



UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática



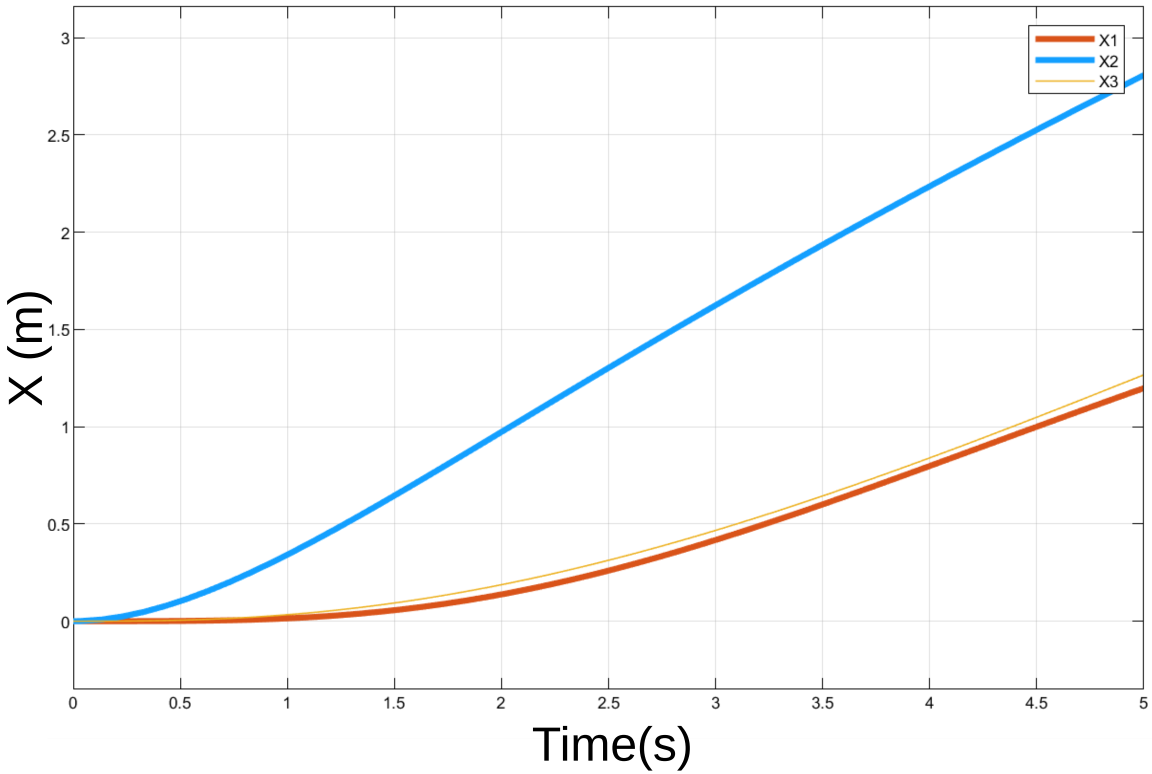
Ecuaciones Diferenciales:

$$M_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=K_2x_2+B_3\frac{dx_3}{dt}-(B_1+B_3)\frac{dx_1}{dt}-(K_1+K_2)x_1$$

$$M_2\frac{d^2x_2}{dt^2}=f(t)+K_2x_1+B_4\frac{dx_3}{dt}-(B_2+B_4)\frac{dx_2}{dt}-K_2x_2$$

$$M_3\frac{d^2x_3}{dt^2}=B_3\frac{dx_1}{dt}+B_4\frac{dx_2}{dt}-(B_3+B_4)\cdot\frac{dx_3}{dt}$$

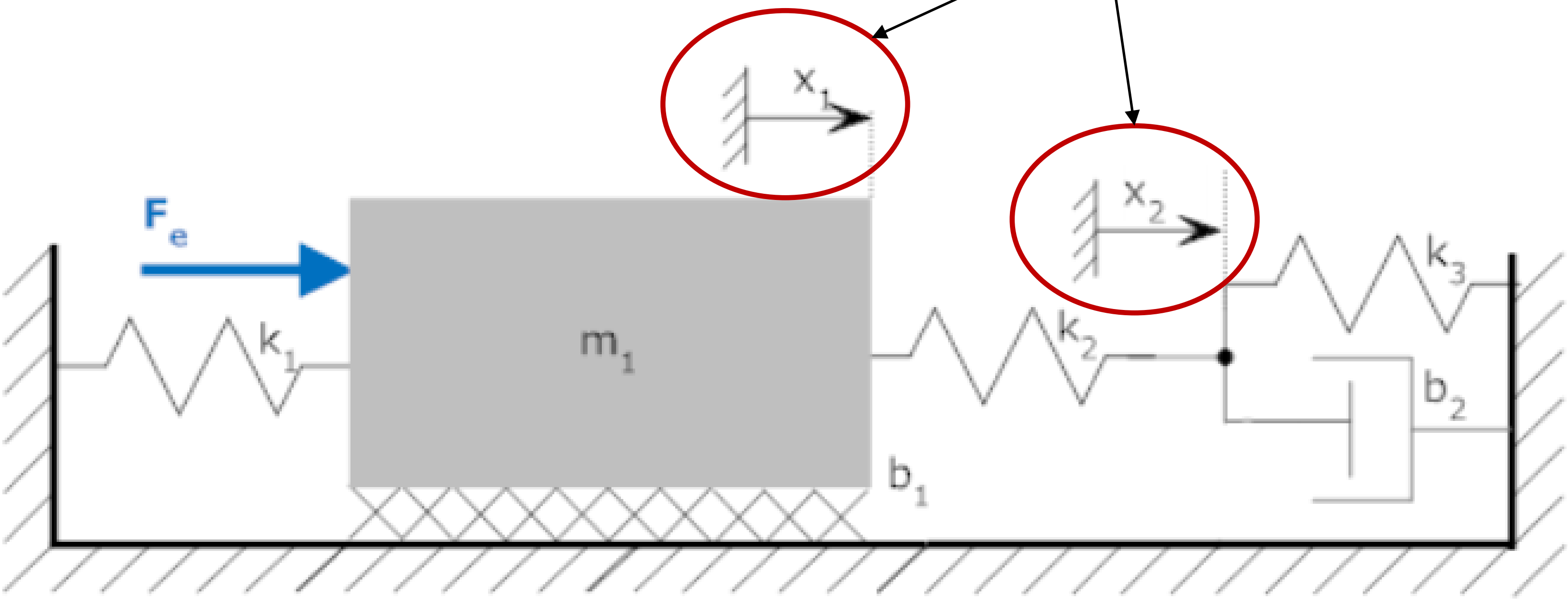
Simulación en Matlab



Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

CASO ESPECIAL 1: Más de una posición desconocida.

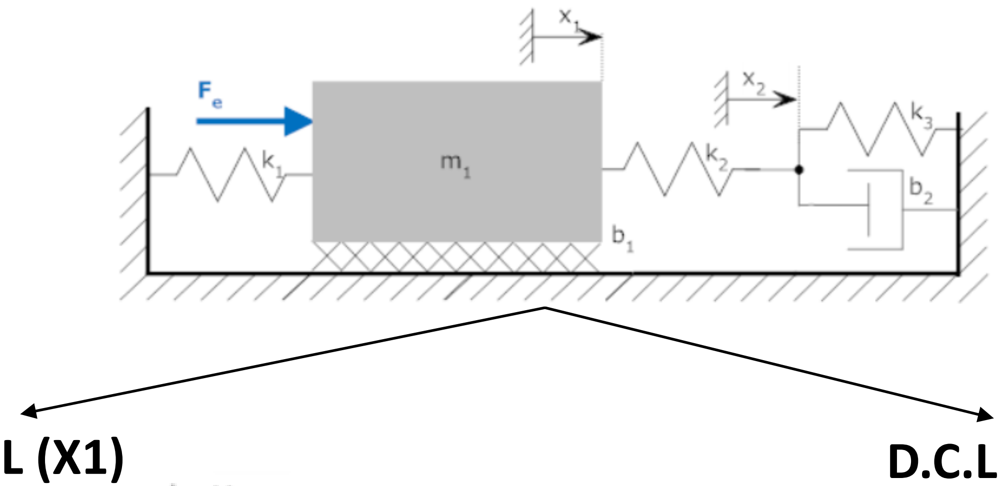
Aplicar Diagrama-Cuerpo-Libre a cada posición desconocida del sistema a modelar.

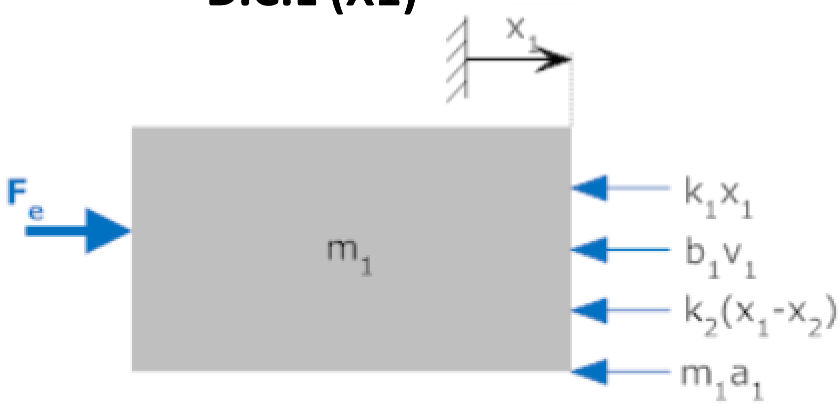


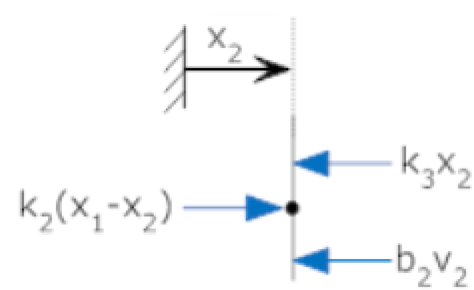
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

CASO ESPECIAL 1: Más de una posición desconocida.







$$m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + (k_2 + k_1)x_1 - k_2x_2 = F_e$$

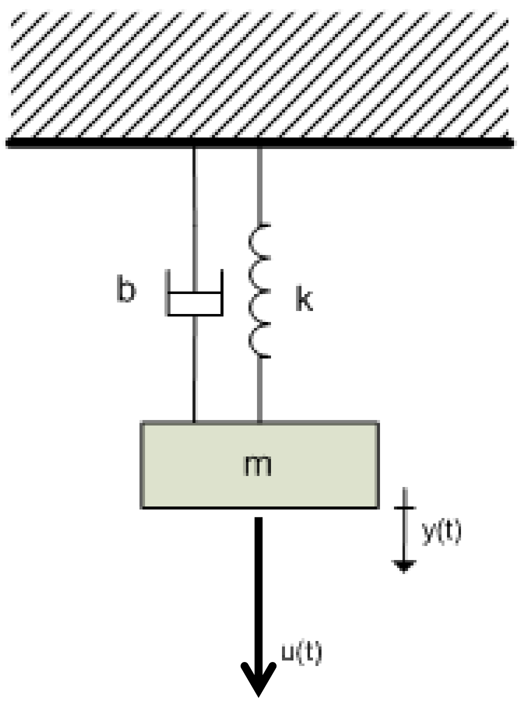
$$b_2\dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2x_1 = 0$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

CASO ESPECIAL 2: Efecto de la gravedad

El efecto de la **gravedad** puede tenerse en cuenta en el modelado, derivando esta en una **fuerza constante f = Mg**, la cual puede ser considerada como otra **fuerza externa**.



Sin Gravedad

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt} + b \cdot \frac{dy}{dt} + k \cdot y(t) = u(t)$$

Con Gravedad

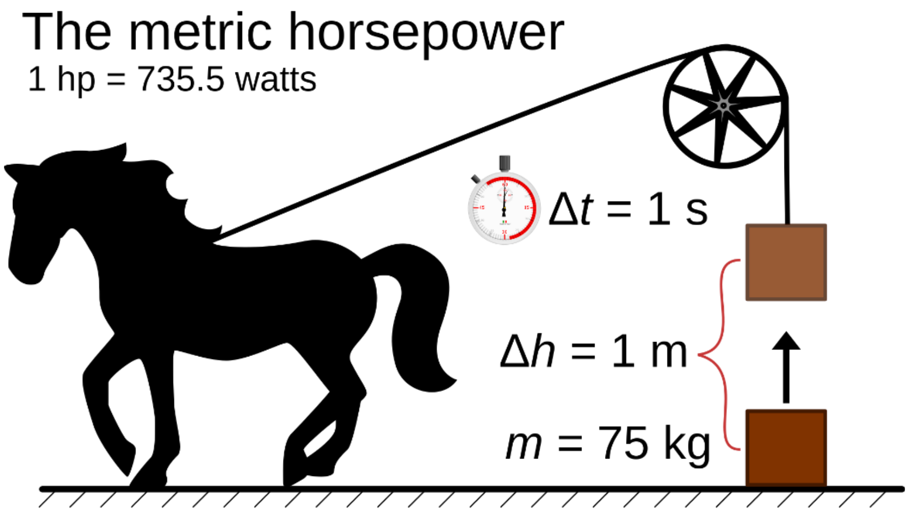
$$m \cdot \frac{d^2y}{dt} + b \cdot \frac{dy}{dt} + k \cdot y(t) = u(t) + \boldsymbol{Mg}$$

Modelado y Simulación de Sistemas

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

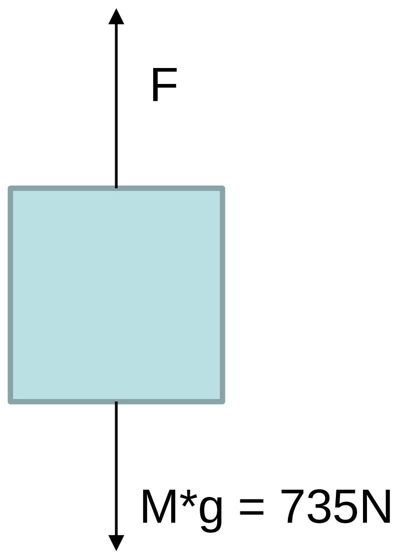
Curiosidad: Comúnmente, los motores se definen por su "caballaje". No obstante, esta no es una medida de fuerza, sino de potencia. El caballo de vapor (CV) se define como la potencia necesaria para levantar una masa de 75 kg a 1 m de altura en 1 segundo.

$$\text{Potencia} = \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}} = \frac{\text{fuerza} \times \text{distancia}}{\text{tiempo}}$$



Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

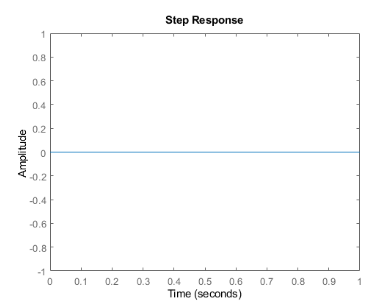
No podemos comparar fuerzas y potencias, pero si podemos intentar calcular que fuerza haría falta ejercer para levantar una M=75Kg una altura de 1m en un tiempo de 1s.



$$F(t) = M \cdot \frac{d^2 y}{dt} + M \cdot g$$

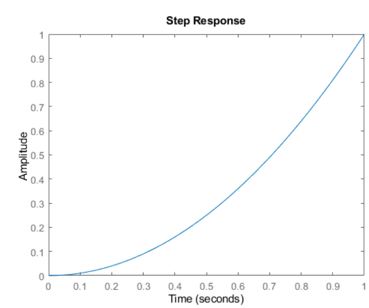
Empleando Matlab (próximamente)

a) Si empleamos F = 735N



Solo compensamos la gravedad → no hay desplazamiento

b) Si empleamos F = 885N



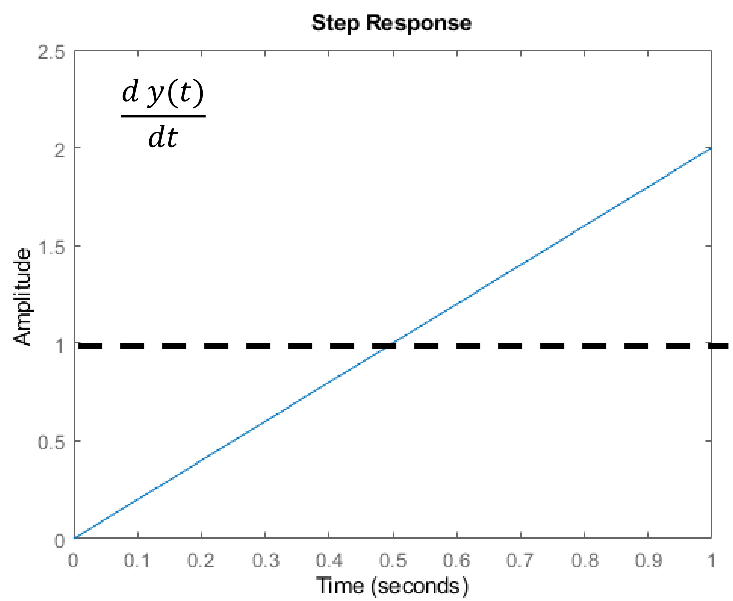
Fuerza "neta" (F-M*g) = 150N ¿Por qué?

Modelado y Simulación de Sistemas

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

Estamos en un caso similar al "cuerpo en caída libre", donde únicamente tenemos una masa y una fuerza aplicada. Si recordamos, la aceleración es constante, la velocidad es lineal y la posición es parabólica.

Como la velocidad NO es constante, no vale con buscar la fuerza que nos consigue 1m/s pasados 1s, sino que la velocidad media durante el primer segundo, sea de 1m/s.



Vel es lineal con el tiempo. Buscamos 1m/s de media!!

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

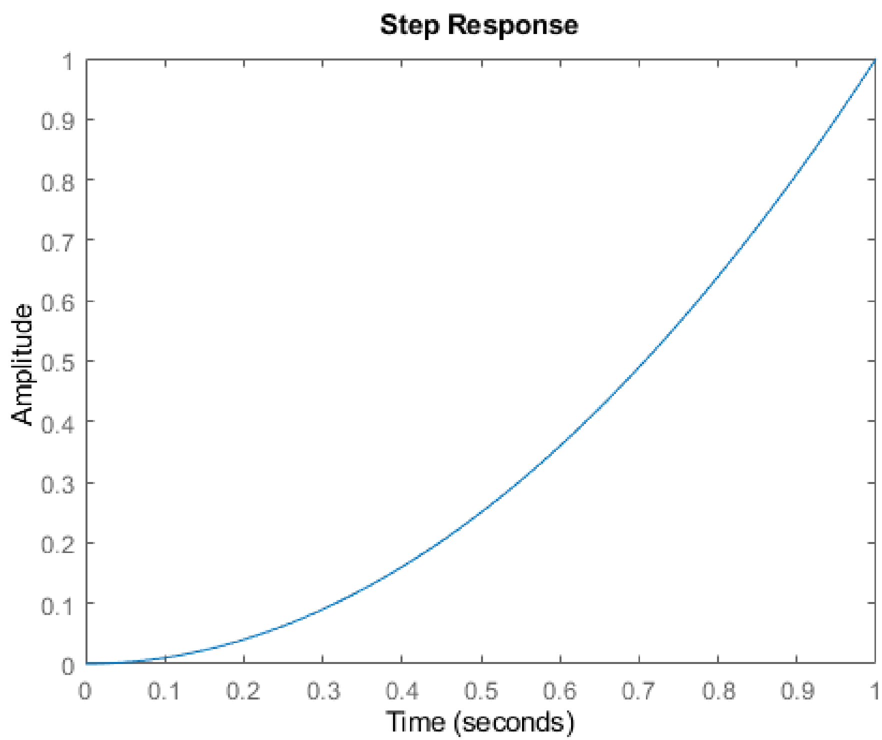
Para conseguir esa velocidad media de 1m/s necesitamos una aceleración de 2 m/s^2

Conocida la aceleración deseada (que si es cte. a lo largo del tiempo), y sustituyendo en nuestra ecuación diferencial, obtenemos que:

$$F(t) = M \cdot \frac{d^2y}{dt} + M \cdot g$$

$$F(t) = 75 * 2 + 735$$

$$\mathrm{F}(t) = 150 + 735$$



Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

Caso Práctico: Estudio de viabilidad del diseño de un robot móvil (caso simplificado).

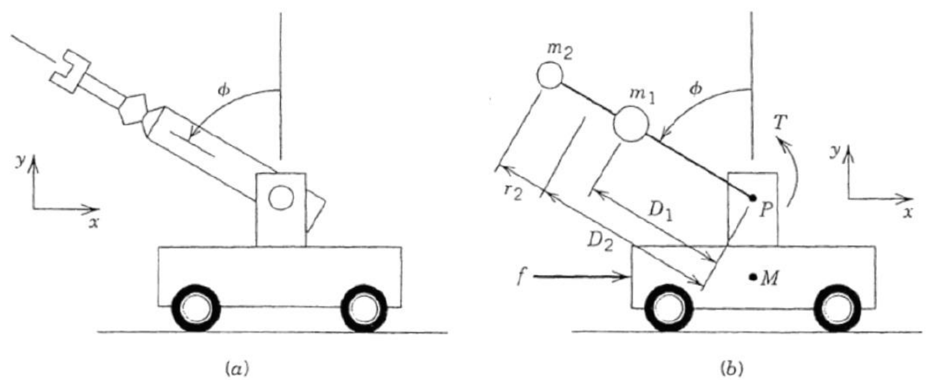


Figure 2.6-1 (*a*) A mobile robot with a translating base and a rotating arm. (*b*) Representation of the robot as a lumped mass system.

Datos:
- M = 100 kg
- m1 = 30 kg
- m2 = 10 kg
- f_{max} = 300 N

Especificaciones:
- Recorrer 5m en 4s
- Comenzar y terminar en reposo (vel = 0 m/s)

Pregunta:
¿Se puede conseguir con el motor previsto en el diseño?

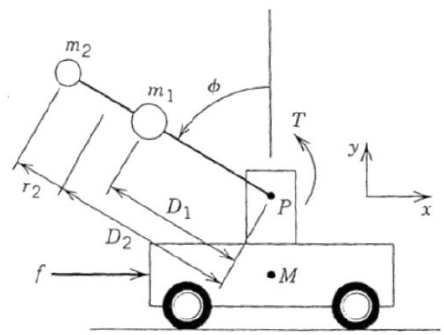
Case study from Palm Palm, W. J., **Modeling, Analysis, and Control of Dynamic Systems**

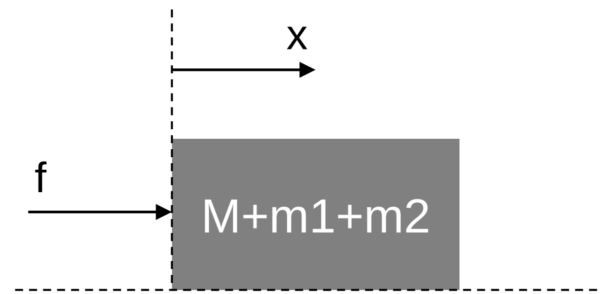
MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

Caso Práctico: Estudio de viabilidad del diseño de un robot móvil (caso simplificado).

1. Comenzamos asumiendo un “modelo” simplificado de la parte móvil traslacional (no tenemos en cuenta el brazo ni su movimiento), y obtenemos su diagrama de cuerpo libre, así como su ecuación diferencial asociada:





$$f(t) = (M + m_1 + m_2) \cdot \frac{d^2x}{dt}$$

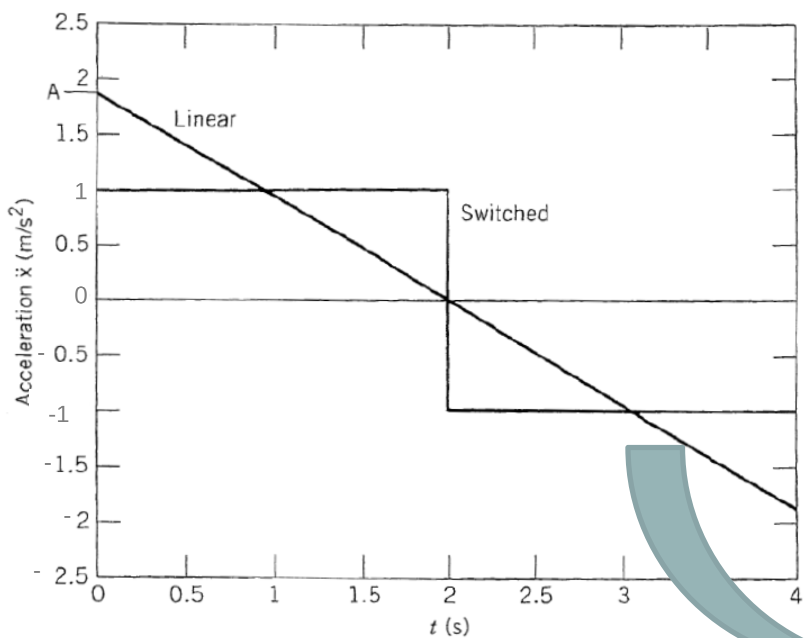
$$f(t) = 140\frac{d^2x}{dt}$$

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

Caso Práctico: Estudio de viabilidad del diseño de un robot móvil (caso simplificado).

2. Para comenzar y terminar en reposo, necesitamos acelerar y luego frenar. Con lo que necesitaremos aceleraciones positivas y negativas. Un posibilidad es la mostrada en la siguiente figura (perfil de aceleración):



Perfil aceleración lineal (ecuación de una recta):

$$\frac{d^2x}{dt} = A(1 - \frac{1}{2}t)$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

Caso Práctico: Estudio de viabilidad del diseño de un robot móvil (caso simplificado).

3. Sobre el perfil de aceleración, podemos integrar para obtener velocidades y posición. Buscamos Recorrer 5m en 4s, comenzando y terminando "parados".

$$\frac{d^2x}{dt} = A(1 - \frac{1}{2}t)$$

$$\frac{d\,x}{dt} = A\left(1 - \frac{1}{4}t\right)t$$

$$x = \frac{1}{2}A\left(1 - \frac{1}{6}t\right)t^2$$

$\int$

$$x(0) = 0\,m$$

$$x(4) = 5\,m$$

$$\frac{d\,x}{dt}(0) = 0\,m/s$$

$$\frac{d\,x}{dt}(4) = 0\,m/s$$

Donde A es la aceleración máxima que necesitamos.

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

Caso Práctico: Estudio de viabilidad del diseño de un robot móvil (caso simplificado).

3. Sobre el perfil de aceleración, podemos integrar para obtener velocidades y posición. Buscamos Recorrer 5m en 4s, comenzando y terminando “parados”.

$$\frac{d^2x}{dt} = A(1 - \frac{1}{2}t)$$

$$\frac{d\,x}{dt} = A\left(1 - \frac{1}{4}t\right)t$$

$$x = \frac{1}{2}A\left(1 - \frac{1}{6}t\right)t^2$$

$$\int$$

$$x(0) = 0\ m$$

$$x(4) = 5\ m$$

$$\frac{d\,x}{dt}(0) = 0\ m/s$$

$$\frac{d\,x}{dt}(4) = 0\ m/s$$

Donde A es la aceleración máxima que necesitamos.

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

Caso Práctico: Estudio de viabilidad del diseño de un robot móvil (caso simplificado).

4. Del cálculo de x(t) y de las condiciones iniciales y finales, obtenemos el valor de A

$$x(t) = \frac{1}{2}A\left(1 - \frac{1}{6}t\right)t^2 \quad + \quad x(4) = 5\ m$$

$$\Downarrow$$

$$5 = \frac{1}{2}A\left(1 - \frac{1}{6}4\right)4^2$$

$$5 = \frac{1}{2}A(0.33)16$$

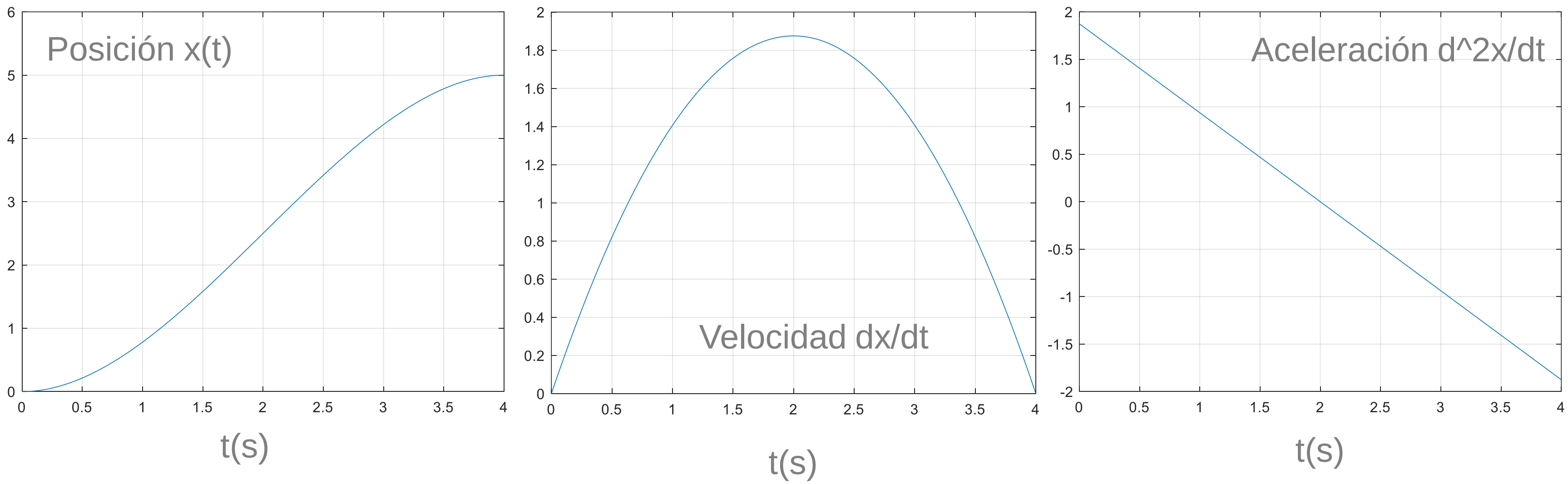
$$A = 1.875\ m/s^2$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

Caso Práctico: Estudio de viabilidad del diseño de un robot móvil (caso simplificado).

5. Comprobamos que nuestros cálculos son correctos. Ploteamos con Matlab los perfiles de aceleración, velocidad y posición.



Especificaciones:

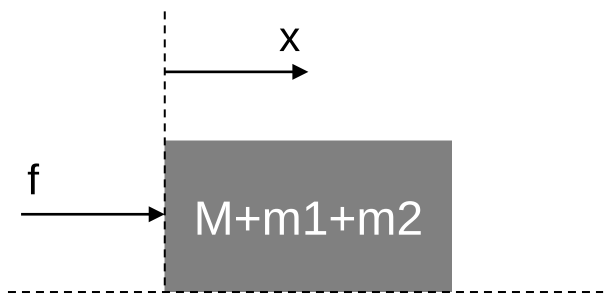
- Recorrer 5m en 4s
- Comenzar y terminar en reposo (vel = 0 m/s)

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

Caso Práctico: Estudio de viabilidad del diseño de un robot móvil (caso simplificado).

6. Comprobamos si el motor que se ha considerado (300N máx.) en el diseño es suficiente para conseguir la aceleración máxima que necesitamos desarrollar (A).



$$f(t) = (M + m_1 + m_2) \cdot \frac{d^2x}{dt}$$

$$f(t) = 140\frac{d^2x}{dt}$$

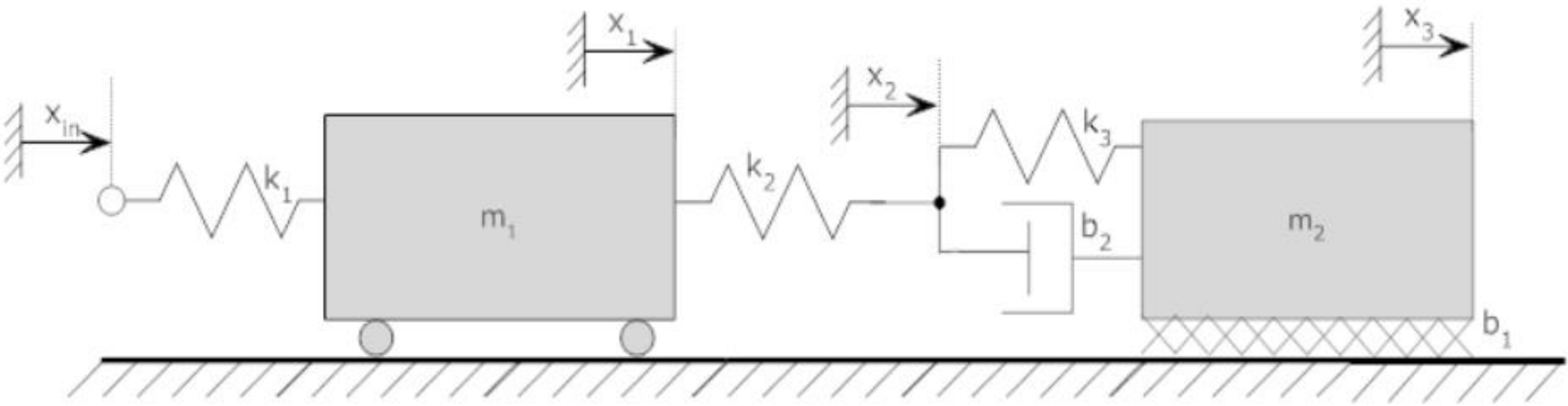
$$A = 1.875\ m/s^2$$

$$f_{max}(t) = 140A = 262.5\ N$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

Ejercicio Propuesto 1: Obtén los diagramas de cuerpo libre de cada elemento del sistema y sus correspondientes Ec. Diff.



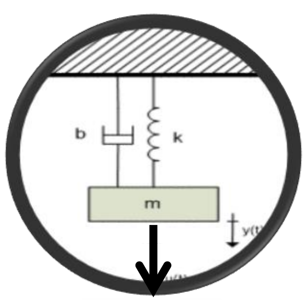
Solution:

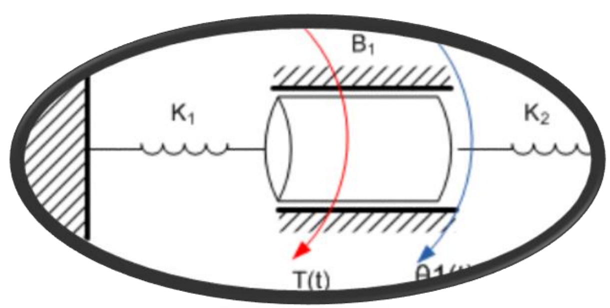
$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = k_1x_{in}$$

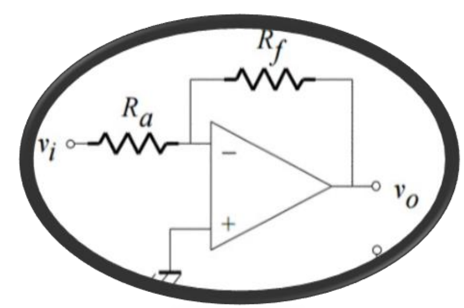
$$b_2\dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2x_1 - b_2\dot{x}_3 - k_3x_3 = 0$$

$$m_2\ddot{x}_3 + (b_1 + b_2)\dot{x}_3 + k_3x_3 - b_2v_2 - k_3x_2 = 0$$

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos

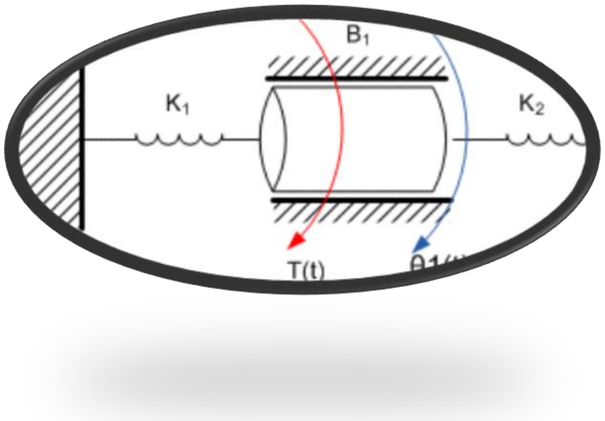






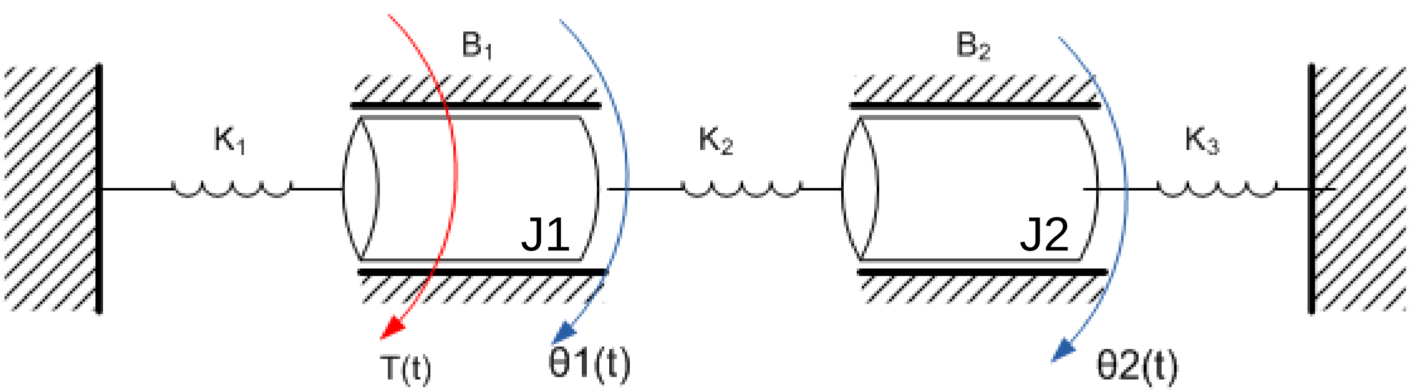
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Rotación



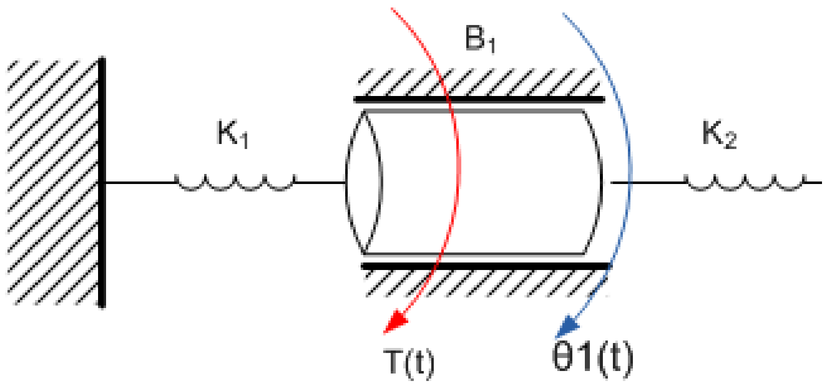
Se denominan sistemas mecánicos rotacionales a aquéllos en los que los cuerpos que forman el sistema realizan rotaciones en el mismo plano, es decir, que **los ejes de rotación de todos los cuerpos son paralelos**.

Por tanto es el **ángulo girado** por el cuerpo el único grado de libertad que éste posee.



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Rotación



Ecuaciones de Conservación ->
Leyes de Mecánica de Newton

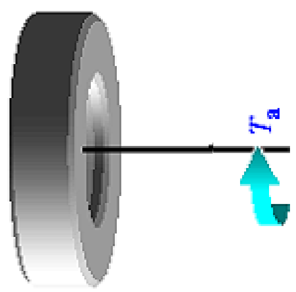
PROCEDIMIENTO: Obtención de ecuaciones dinámicas:

1. Definir los sentidos de giro de cada inercia (posición interés).
2. Cálculo del diagrama de cuerpo libre para cada elemento.
3. Aplicación de Ley de Newton en cada inercia.

$$\sum_i (\tau_{ext})_i - J\frac{d^2\theta}{dt} = 0$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Rotación



Momento de Inercia

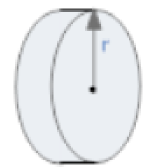
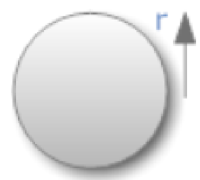
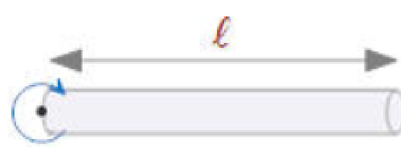
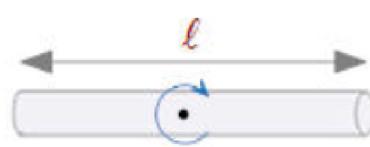
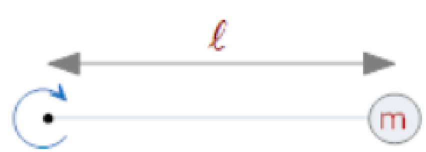
$$\tau = J\frac{d\theta^2}{dt^2}$$

$\boldsymbol{\tau}$ (N*m) = Momento de fuerza (par)
J (Kg*m^2) = Momento de Inercia.

La **ecuación fundamental de la dinámica de rotación** establece que la aceleración angular $d^2\theta/dt$ que aparece en un sólido rígido es proporcional al momento de fuerza ($\boldsymbol{\tau}$) que actúa sobre él.

J Representa un factor de **oposición a los cambios** en el estado de rotación del cuerpo de forma similar a como la masa se opone a los cambios de aceleración en el estado de traslación. **Depende de la masa del sólido y de la distribución de dicha masa con respecto al eje de rotación elegido**.

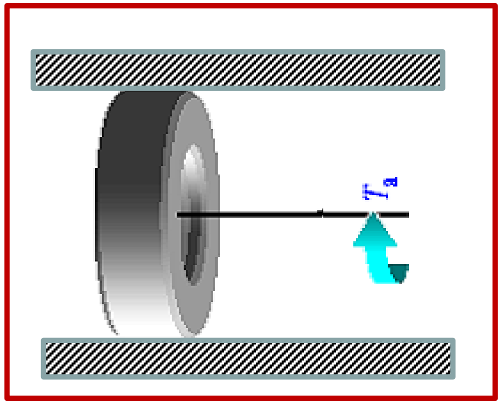
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Rotación

Shape	Image	Moment of Inertia, J
Cylinder, radius=r, mass=m Rotating about center axis		$\frac{1}{2}mr^2$
Solid Sphere, radius=r, mass=m Rotating about center		$\frac{2}{5}mr^2$
Uniform Rod, length=ℓ, mass=m Rotating about end		$\frac{1}{3}m\ell^2$
Uniform Rod, length=ℓ, mass=m Rotating about center		$\frac{1}{12}m\ell^2$
Mass at end of massless rod, length=ℓ, mass=m Rotating about end		$m\ell^2$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Rotación



Amortiguador / Fricción

$$\tau = B\frac{d\theta}{dt}$$

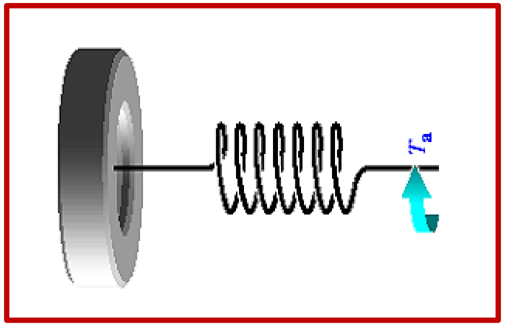
Un amortiguador es un elemento que se deforma bajo la acción de un par creando un **par de reacción que es función de la velocidad angular** con la que el elemento se deforma.

Elementos con rozamiento viscoso tienen este tipo de comportamiento

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Rotación



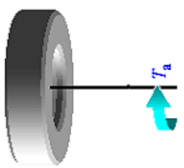
Muelle de Torsión

$$\tau = K \cdot \theta$$

Es un elemento elástico que se deforma ante la acción de un par. El elemento **se opone a ser girado** desarrollando un par de reacción proporcional al ángulo girado por éste al deformarse.

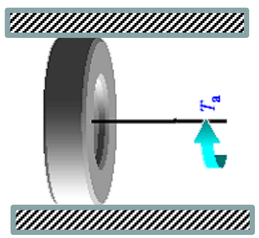
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Rotación

ELEMENTOS ROTACIONALES



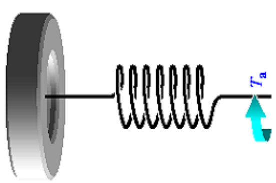
Inercia

$$\tau = J\frac{d\theta^2}{dt^2}$$



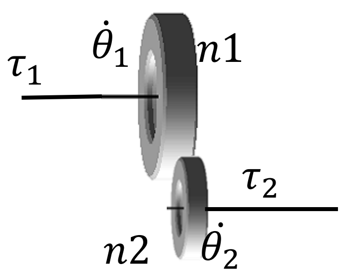
Amortiguador

$$\tau = B\frac{d\theta}{dt}$$



Muelle

$$\tau = K \cdot \theta$$



Engranaje

$$\tau_2 = \frac{n_2}{n_1}\tau_1$$

$$\theta_2 = \frac{-n_1}{n_2}\theta_1$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{-n_1}{n_2}\dot{\theta}_1$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

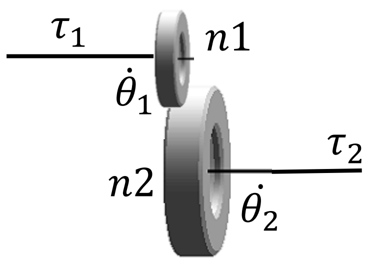
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Engranajes

$$n = \frac{\omega 2}{\omega 1} = \frac{n1}{n2}$$

Gear Ratio o Relación de Transmisión

Reductora

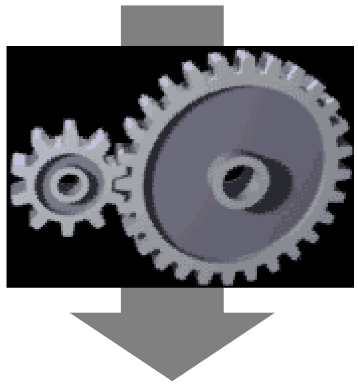


$$n = \frac{\omega 2}{\omega 1} = \frac{n1}{n2} < 1$$

$$\theta_2 = n \cdot \theta_1 < \theta_1$$

$$\dot{\theta}_2 = n \cdot \dot{\theta}_1 < \dot{\theta}_1$$

$$\tau_2 = \frac{\tau_1}{n} > \tau_1$$

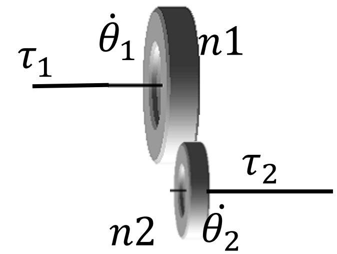


$$\theta_2 = n \cdot \theta_1 = \frac{-n_1}{n_2}\theta_1$$

$$\dot{\theta}_2 = n \cdot \dot{\theta}_1 = \frac{-n_1}{n_2}\dot{\theta}_1$$

$$\tau_2 = \frac{\tau_1}{n} = \frac{n_2}{n_1}\tau_1$$

Multiplicadora



$$n = \frac{\omega 2}{\omega 1} = \frac{n1}{n2} > 1$$

$$\theta_2 = n \cdot \theta_1 > \theta_1$$

$$\dot{\theta}_2 = n \cdot \dot{\theta}_1 > \dot{\theta}_1$$

$$\tau_2 = \frac{\tau_1}{n} < \tau_1$$

Suponiendo una transmisión en la que la potencia de entrada ($P_1 = \tau_1 \cdot \omega_1$) y la de salida ($P_2 = \tau_2 \cdot \omega_2$) sean iguales al considerarse nulas las pérdidas que se puedan producir en la transmisión (*rendimiento = 1*)

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Traslación

Unidades:

Rotating Systems			Translating Systems	
Quantity	**Unit**		**Quantity**	**Unit**
Moment of Inertia - J	kg-m²		Mass - m	kg
Torque - τ	N-m		Force - f	N
Angle - θ	rad		Length - l	m
Angular velocity - $\dot{\theta} = \omega$	rad/sec		Velocity - $\dot{x} = v$	m/s
Angular acceleration - $\ddot{\theta} = \alpha$	rad/sec²		Acceleration - $\ddot{x} = a$	m/s²
Spring Constant - K_r	N-m/rad		Spring Constant - k	N/m
Friction Coefficient - B_r	N-m-s/rad		Friction Coefficient - g	N-s/m

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Rotación

ALGORITMO

1.- Definir los sentidos de giro.

2.- Definir cuál es la entrada y cuál la salida del Sistema.

3.- Definir los sentidos positivos de todas las señales.

4.- Para cada sólido rígido con momento de inercia J_i obtener el **diagrama de cuerpo libre**:

4.1 Obtención de una ecuación diferencial atendiendo solo a las fuerzas que actuan en J_i debido a J_i y su movimiento angular.

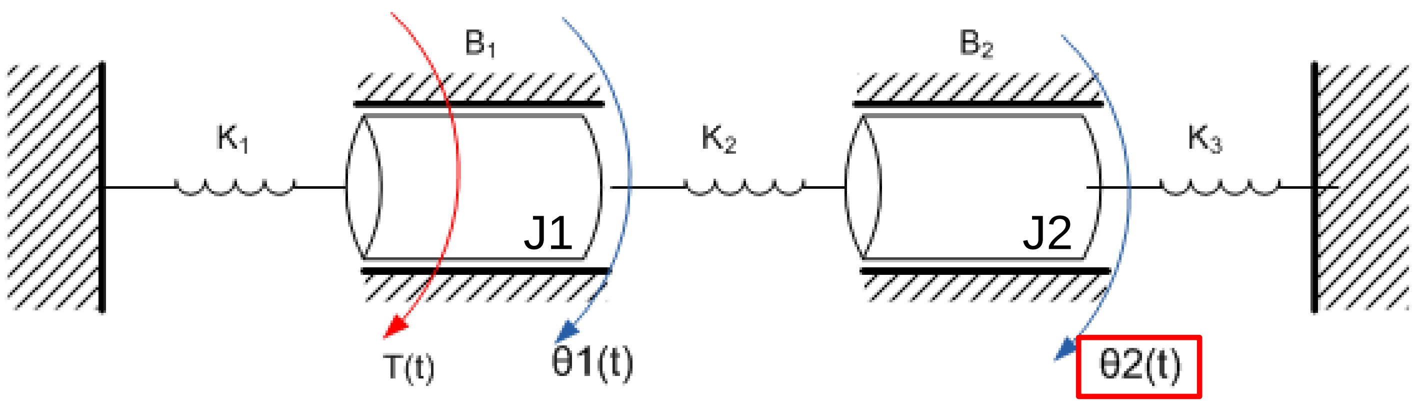
4.2 Para cada sólido rígido con momento de inercia J_j se añaden al diagrama de J_i las fuerzas que aparecen sobre J_i si J_j se mueve y el resto no.

4.3 Aplicar la ley de Conservación: $$\sum_i f_i = 0$$

5.- Obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales. Reducir a una única ecuación que sólo involucre la entrada y la salida.

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Rotación

Ejemplo 1:



¿Cuáles son las ecuaciones diferenciales que modelan este sistema?

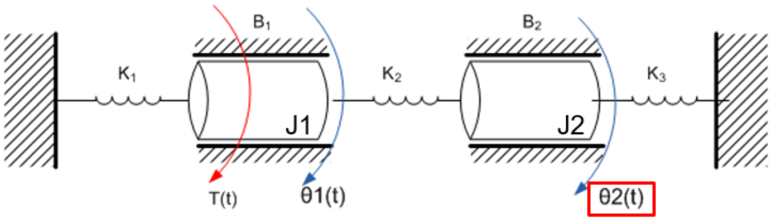
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Rotación

Ejemplo 1:

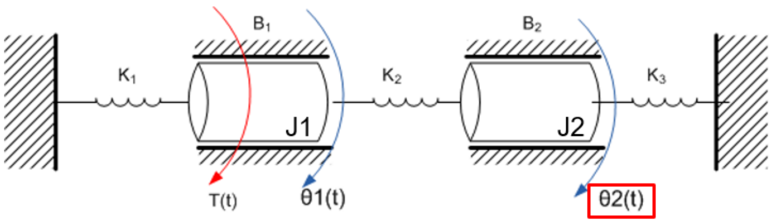


Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

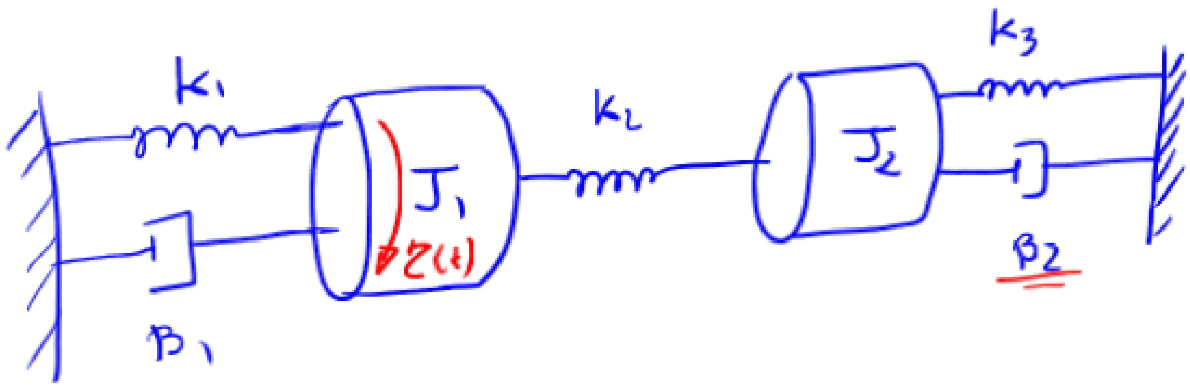
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Rotación

Ejemplo 1:



Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Mecánicos Rotación

Ejemplo 2:



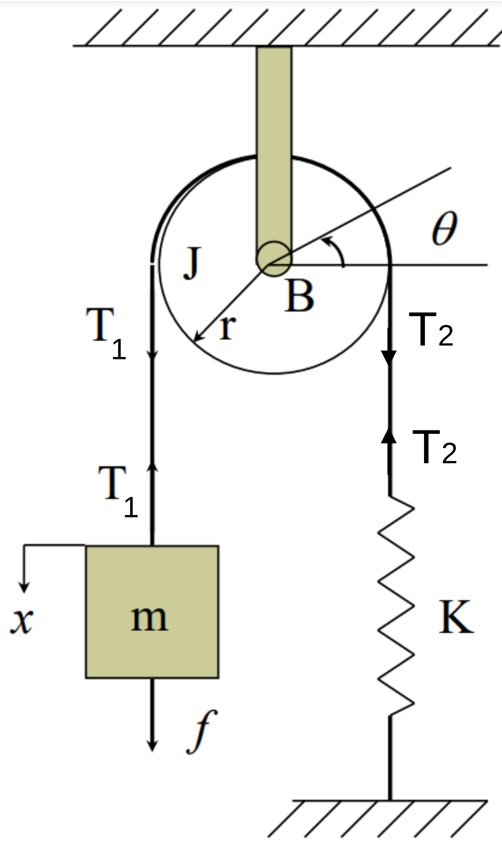
¿Cuáles son las ecuaciones diferenciales que modelan este sistema?

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos:

Mecánicos Traslación - Rotación

Ejemplo 3:



¿Cuál es la ecuación diferencial que modela este sistema?

Nota: considerar el sistema rotacional independiente de los lineales a través de las fuerzas T1 y T2 (tensiones en la cuerda).

Nota: relaciones rotacionales-traslacionales

$$x = r * \theta$$
$$\dot{x} = r * \dot{\theta}$$
$$\ddot{x} = r * \ddot{\theta} \rightarrow$$ aceleración tangencial

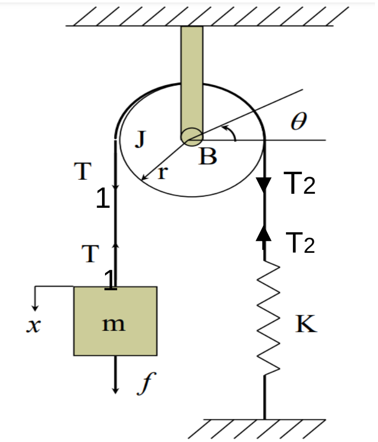
$$\tau = r * f$$

Suponiendo que la potencia angular ($P_{ang} = \tau \cdot \omega$) es igual a la lineal ($P_{lin} = f \cdot v$)

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

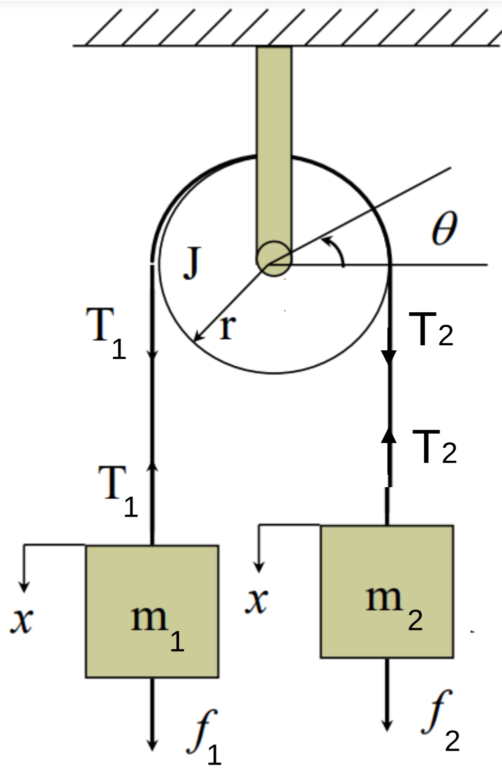
Ejemplo 3:



Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos:

Mecánicos Traslación - Rotación

Ejemplo 4 (propuesto):



¿Cuál es la ecuación diferencial que modela este sistema?

Emplear que:

$J = \frac{1}{2} \cdot Mr^2 \rightarrow$ con M la masa de la polea.

$f_1 = M_1 \cdot g$

$f_2 = M_2 \cdot g$

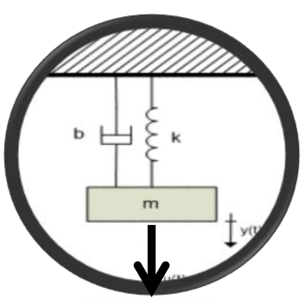
Sol: $(M_1 - M_2)g = (M_1 + M_2 + \frac{1}{2}M)\ddot{x}$

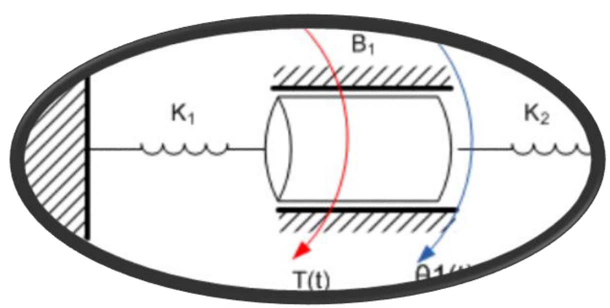
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

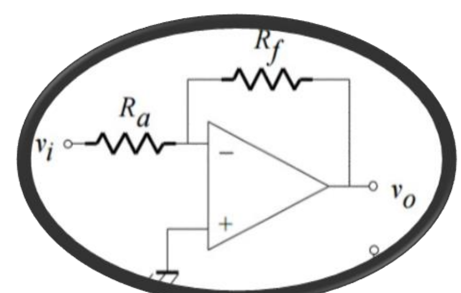
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos





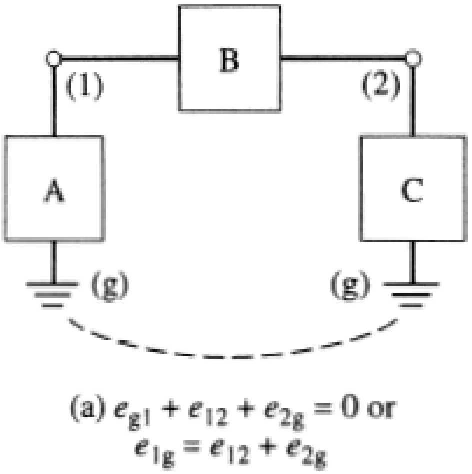


Modelado y Simulación de Sistemas

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos

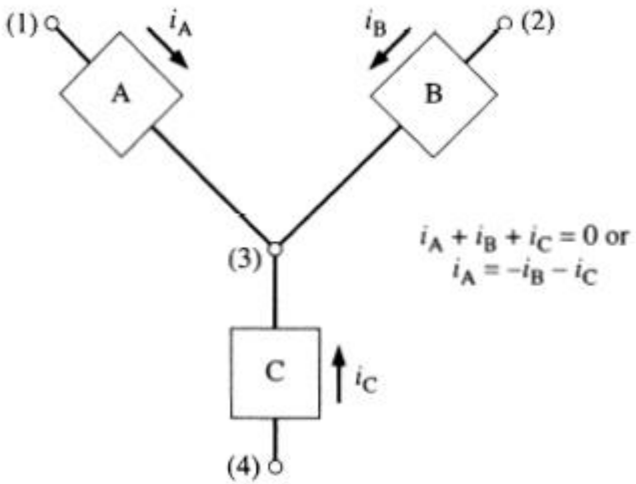
Ecuaciones de Conservación:
Leyes de Kirchoff

$$\sum V_i = 0$$



Análisis de Mallas

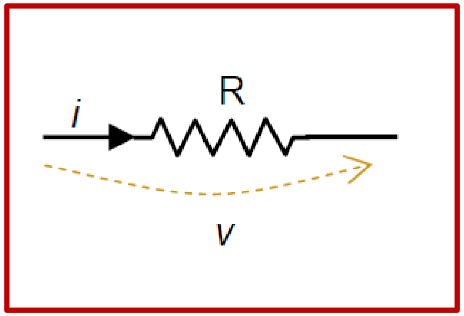
$$\sum I_i = 0$$



Análisis de Nudos

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

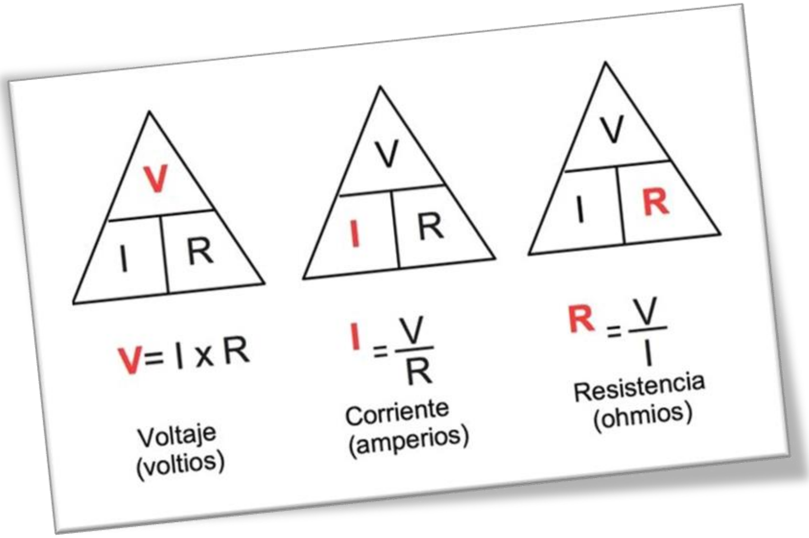
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos



Resistencia (Ohmio)

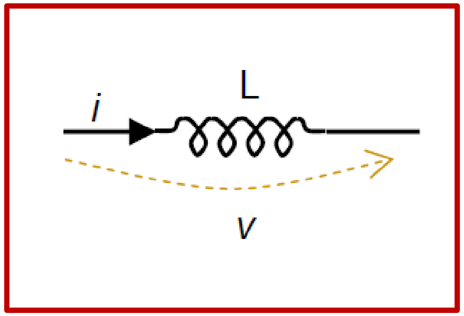
Es un elemento tal que al circular una intensidad por él, ésta disipa energía calorífica (efecto Joule) produciendo una caída de potencial. La ecuación del modelo de la resistencia viene dado por la **ley de Ohm**:

$$v(t) = R \cdot i(t)$$



Este elemento es análogo a una tubería en un sistema hidráulico (como veremos posteriormente).

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos



Bobina (Henrio)

Es un elemento que al someterse a una diferencia de potencial **genera** una variación en la intensidad que circula por él proporcional a la diferencia de potencial.

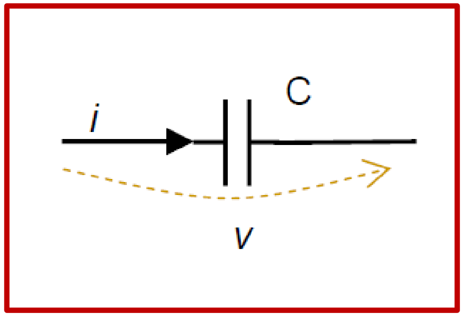
Las bobinas almacenan energía eléctrica en forma de energía magnética. La ecuación del modelo es la siguiente:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos



Condensador (Faradio)

Es un elemento que **genera** una intensidad de corriente proporcional a la variación de la diferencia de potencial.

La ecuación del modelo de este elemento es:

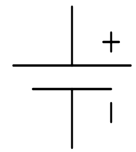
$$C\frac{dv(t)}{dt} = i(t)$$

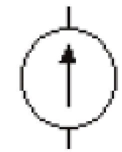
$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} i(\tau)d\tau$$

El condensador es análogo a un depósito en un sistema hidráulico

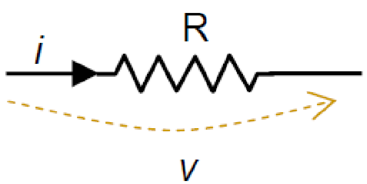
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos

Elementos Activos:

Fuente de tensión (pila) 

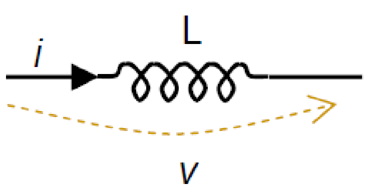
Fuente de corriente 

Elementos Pasivos:



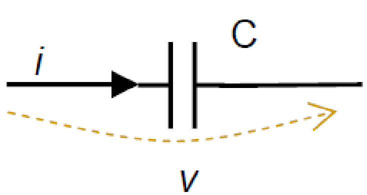
Resistencia (Ohmios)

$$v(t) = R \cdot i(t)$$



Bobina (Henrios)

$$v(t) = L\frac{di}{dt}$$



Condensador (Faradios)

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} i(\tau)d\tau$$

$$C\frac{dv}{dt} = i(t)$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

ALGORITMO

1.-Definir la entrada y la salida del sistema.

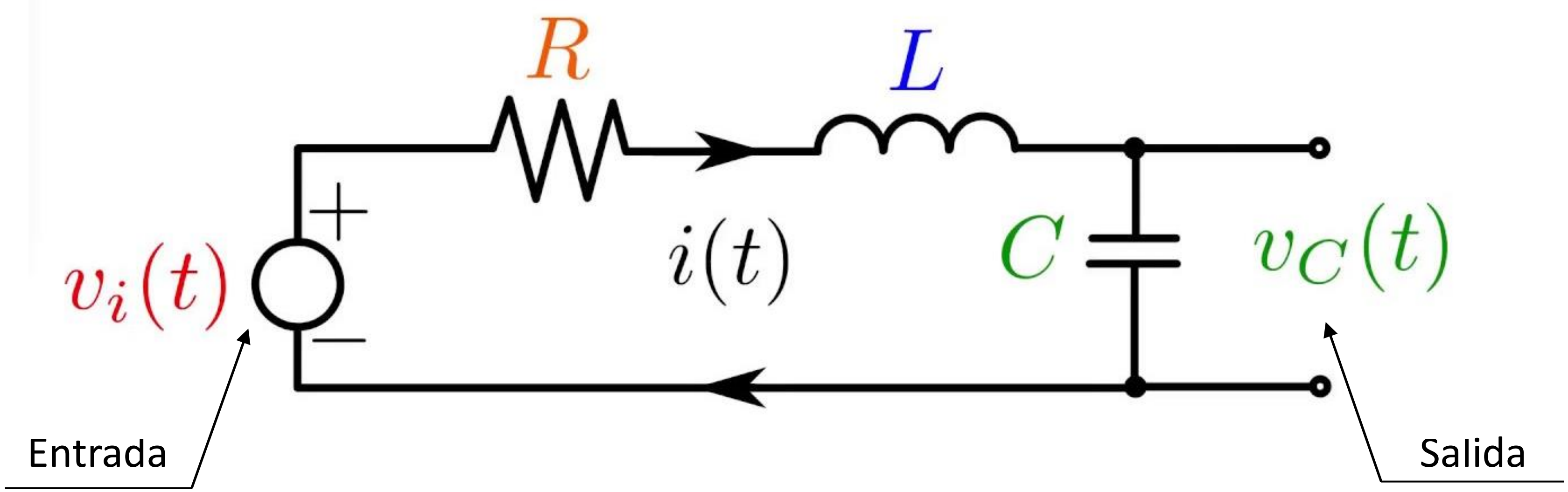
2.- Definir las mallas del circuito. Malla: recorrido cerrado del circuito que contiene al menos un elemento que no contenga otra malla.

3.- Definir el sentido positivo de la intensidad de cada malla.

4.- Escribir la ec. De Kirchoff de cada malla: $\sum_{malla} \Delta v = 0$

5.- Resumir el sistema en una sóla ecuación.

Ejemplo: Circuito RLC



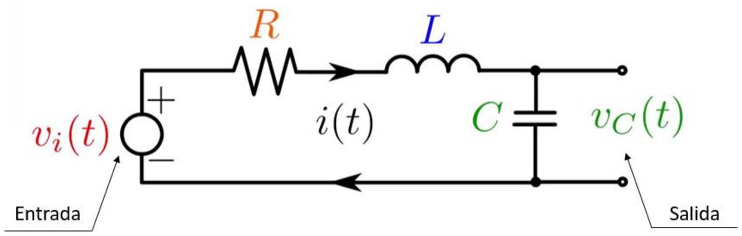
$$v_i = v_r + v_l + v_c$$

$$v_i(t) = Ri(t) + \frac{Ldi(t)}{dt} + v_c$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

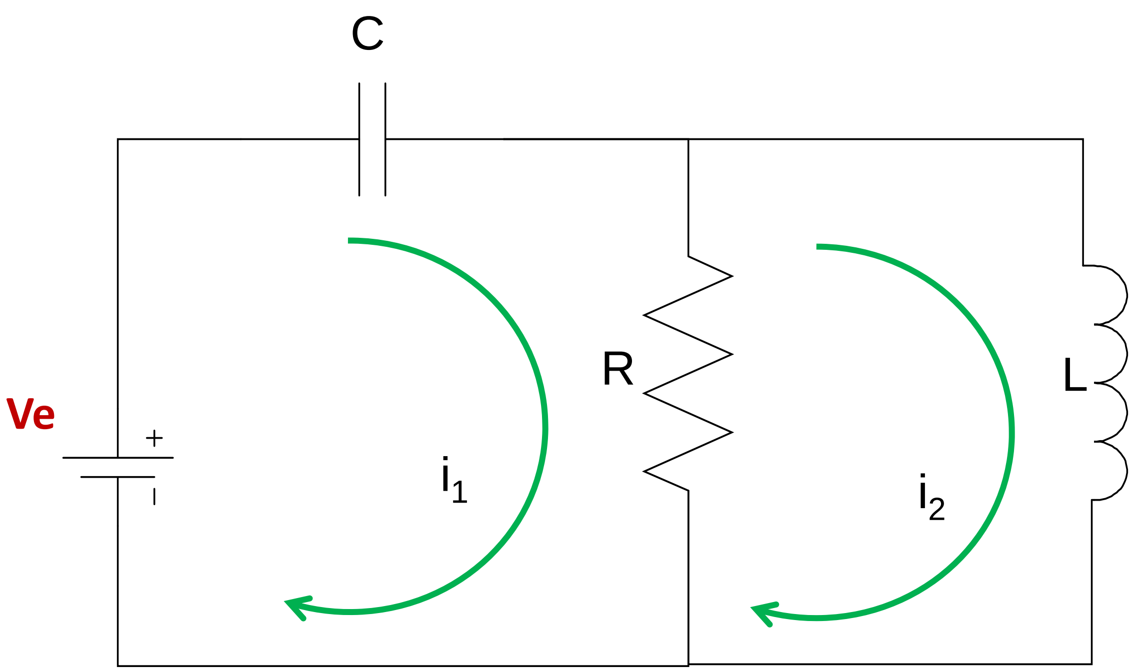
Modelado y Simulación de Sistemas

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos



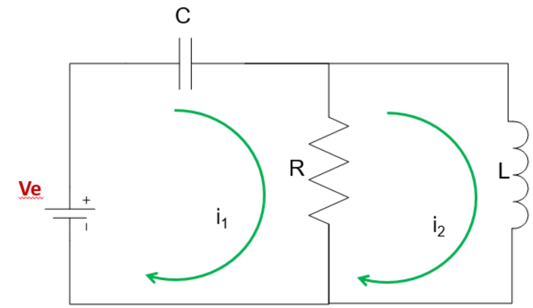
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Ejemplo:



V_L: caída de tensión en la bobina.

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos

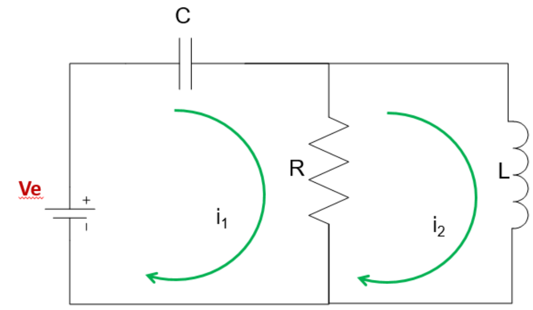


V_L: caída de tensión en la bobina.

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

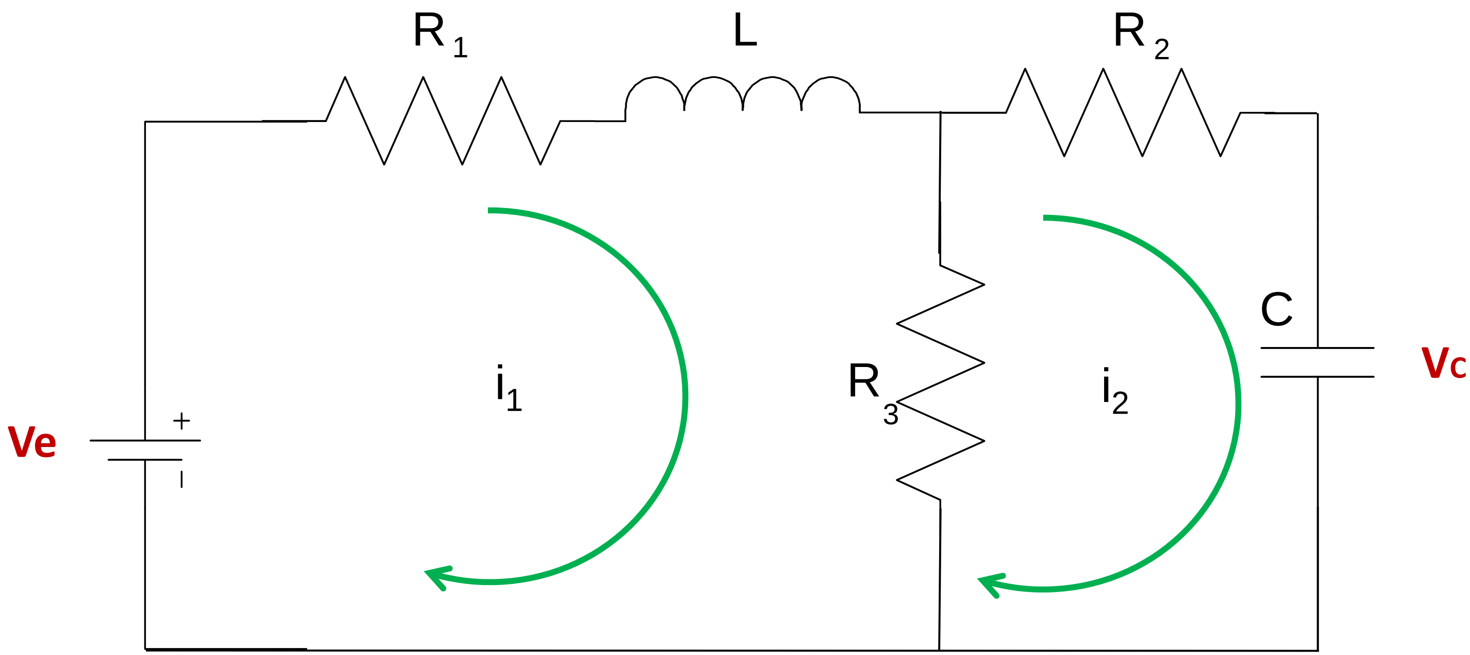
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos



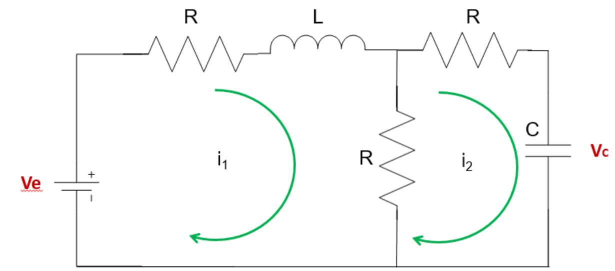
V_L: caída de tensión en la bobina.

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Ejercicio Propuesto:

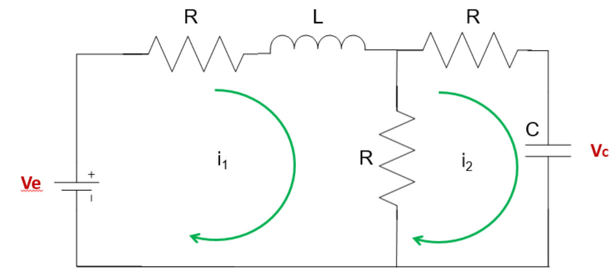


Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos

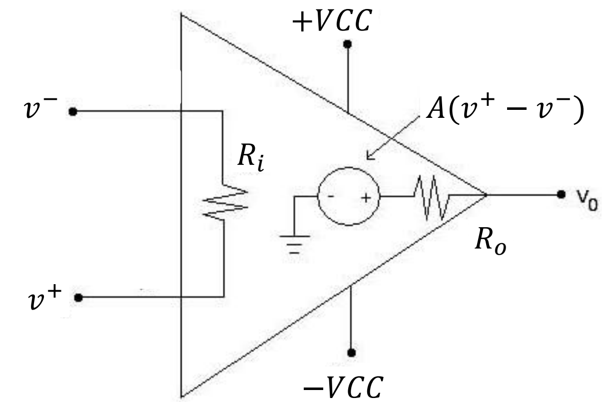


Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Amplificadores Operacionales (AO)

Son dispositivos electrónicos base de la electrónica analógica. Se estudiará el comportamiento del AO ideal.



Propiedades del amplificador operacional ideal:

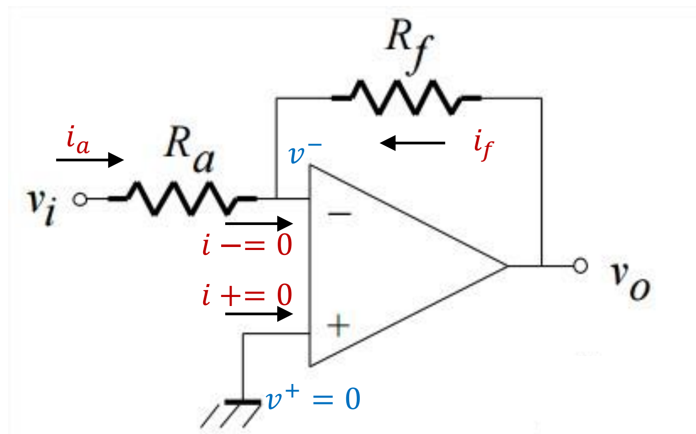
1. La tensión entre los terminales de entrada v^+ y v^- es nula, esto es, $\boldsymbol{v^+ = v^-}$. (Propiedad de tierra virtual o cortocircuito virtual).
2. La resistencia de entrada $\boldsymbol{R_i}$ **es infinita** (Corriente nula entre los terminales + y -).
3. La resistencia de salida $\boldsymbol{R_0}$ **es cero** (Salida como fuente de tensión ideal).
4. La ganancia $\boldsymbol{A}$ **es infinito**.

Amplificador Operacional (AO): Configuración Amplificador Inversor

Aplicando Kirchoff para los nudos v^+ y v^- tenemos que $v^+ = 0$ y para v^- tenemos:

$$i_a + i_f = 0$$

$$\frac{v_i - v^-}{R_a} + \frac{v_0 - v^-}{R_f} = 0$$



Dado que $v^+ = v^-$ y que $v^+ = 0$, tenemos:

$$\frac{v_i}{R_a} + \frac{v_0}{R_f} = 0 \Rightarrow \boxed{v_0 = -\frac{R_f}{R_a} v_i}$$

Obtenemos a la salida la tensión de entrada, invertida y escalada por $\frac{R_f}{R_a}$

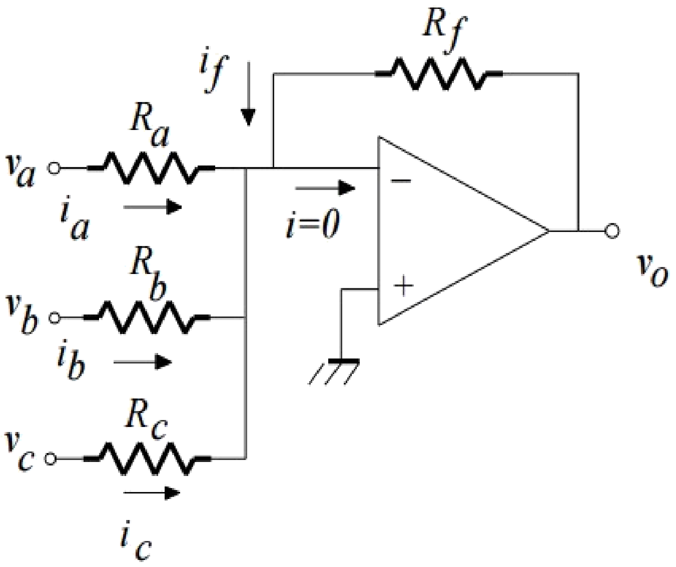
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Amplificador Operacional (AO): Configuración Amplificador-Sumador Inversor

Aplicando Kirchoff y realizando un razonamiento similar al anterior:

$$\frac{v_a - v^-}{R_a} + \frac{v_b - v^-}{R_b} + \frac{v_c - v^-}{R_c} + \frac{v_0 - v^-}{R_f} = 0$$

$$v_0 = -R_f\left(\frac{v_a}{R_a} + \frac{v_b}{R_b} + \frac{v_c}{R_c}\right) \boxed{= -R_f \sum_{i=1}^{i=n} \frac{v_i}{R_i}}$$



Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Amplificador Operacional (AO): Configuración Amplificador NO Inversor

Dado que $v^+ = v^-$ y que $v^+ = v_i$, y que

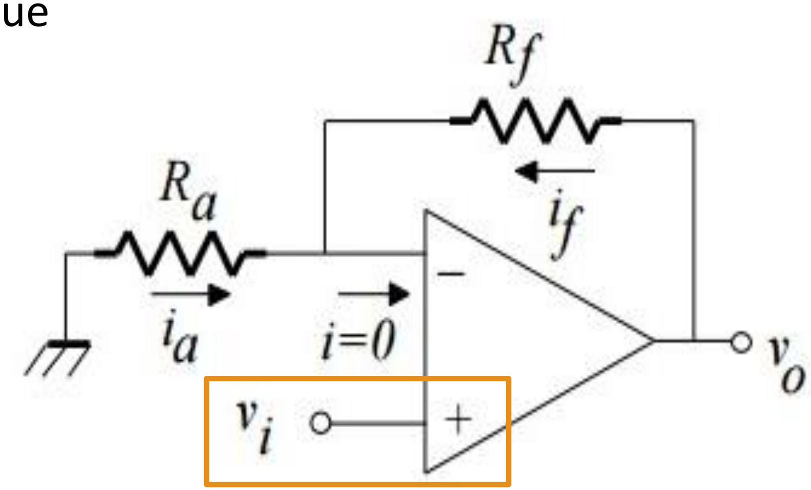
$$i_a + i_f = 0$$

Entonces:

$$\frac{0 - v^-}{R_a} + \frac{v_0 - v^-}{R_f} = 0$$

$$\frac{-v_i}{R_a} + \frac{v_0 - v_i}{R_f} = 0$$

Despejando: $\boxed{v_0 = v_i\left(1 + \frac{R_f}{R_a}\right)}$



Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos

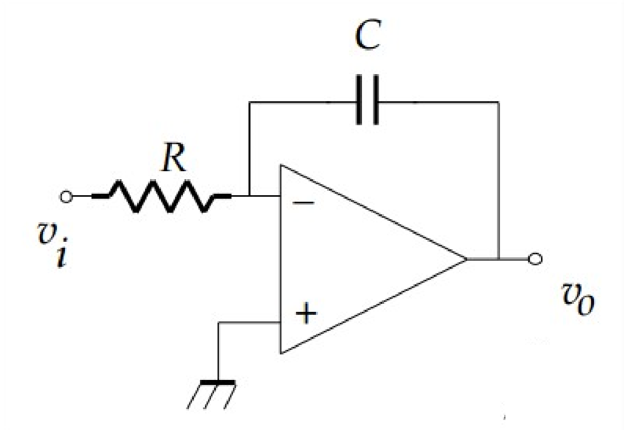
Amplificador Operacional (AO): Configuración Integrador / Derivador

Circuito integrador

$$\frac{v_i}{R} + C\frac{dv_0}{dt} = 0$$

Integrando y despejando v_0:

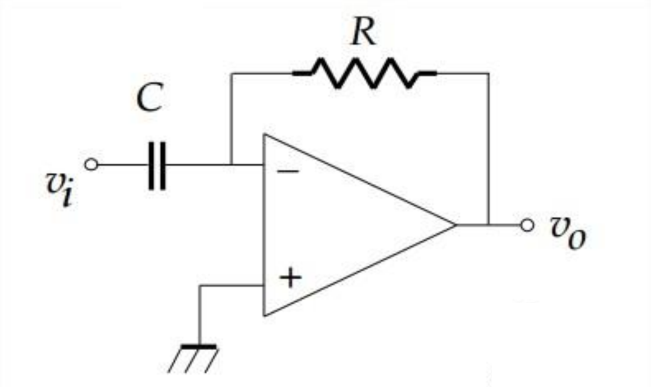
$$\boxed{v_0 = \left(-\frac{1}{RC}\right)\int_0^t v_i(\tau)d\tau}$$



Circuito derivador

$$C\frac{dv_i}{dt} + \frac{v_0}{R} = 0$$

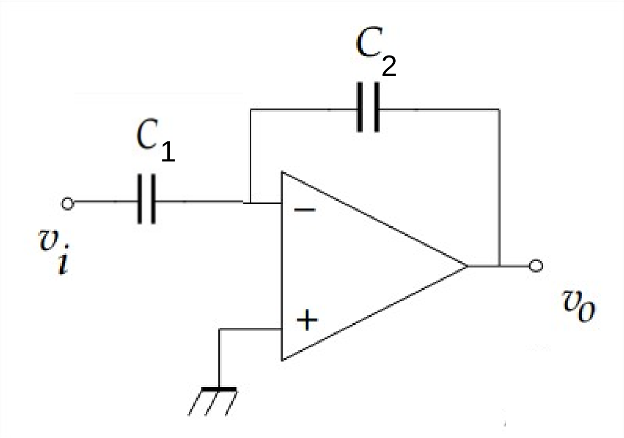
$$\boxed{v_0 = -RC\frac{dv_i}{dt}}$$



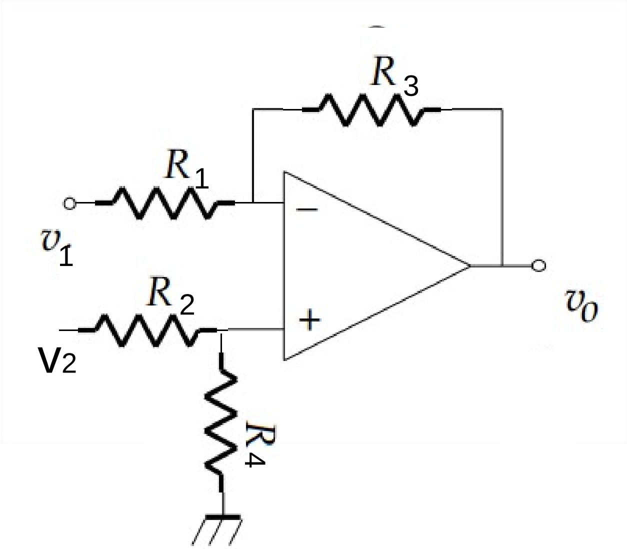
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos

Ejemplos: Obtener la ecuación diferencial que liga la entrada v_i y la salida v_o



Ejemplo 1



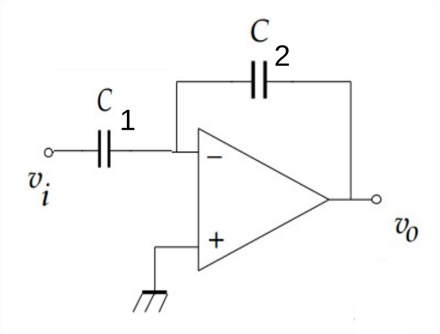
Ejemplo 2

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

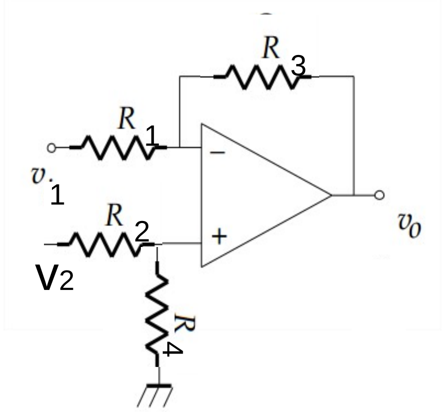
Modelado y Simulación de Sistemas

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos



Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

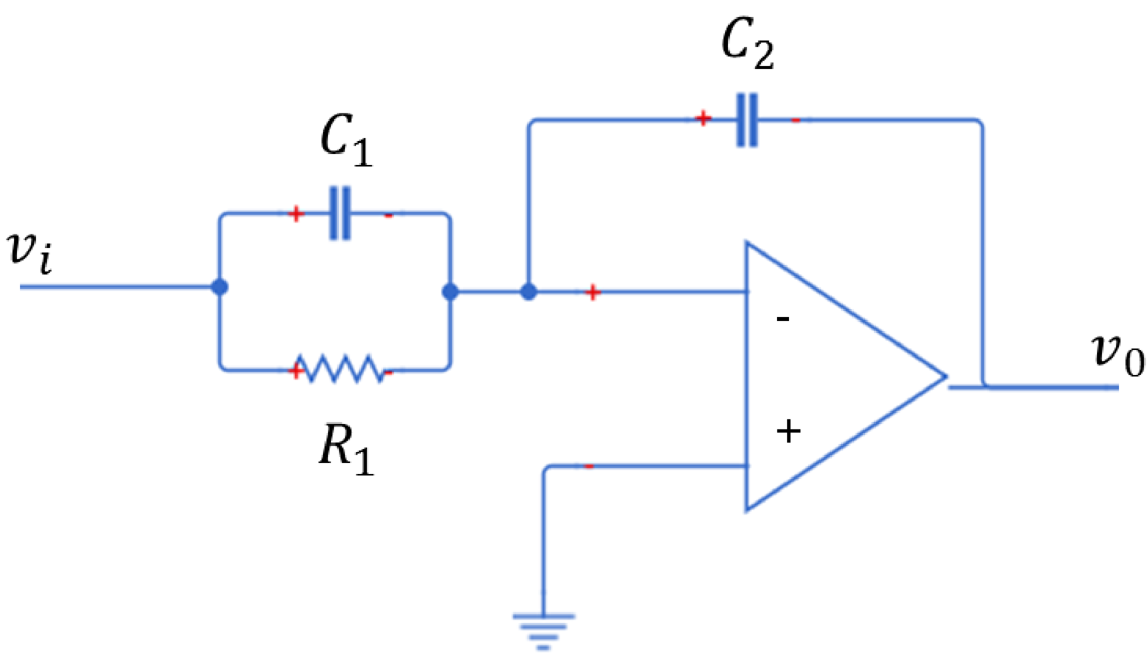
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos



Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

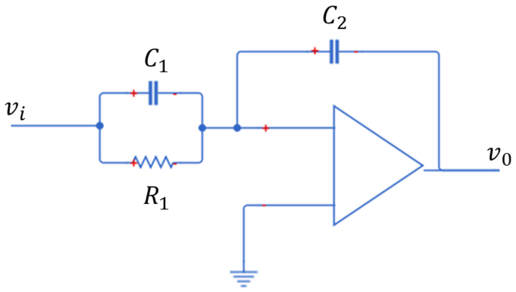
Ejercicio Propuesto 1:

Obtener la ecuación diferencial que liga la entrada v_i y la salida v_o



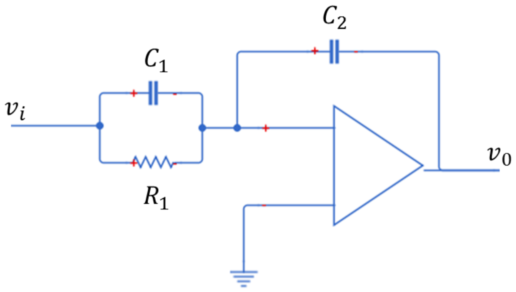
Modelado y Simulación de Sistemas

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos



Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos

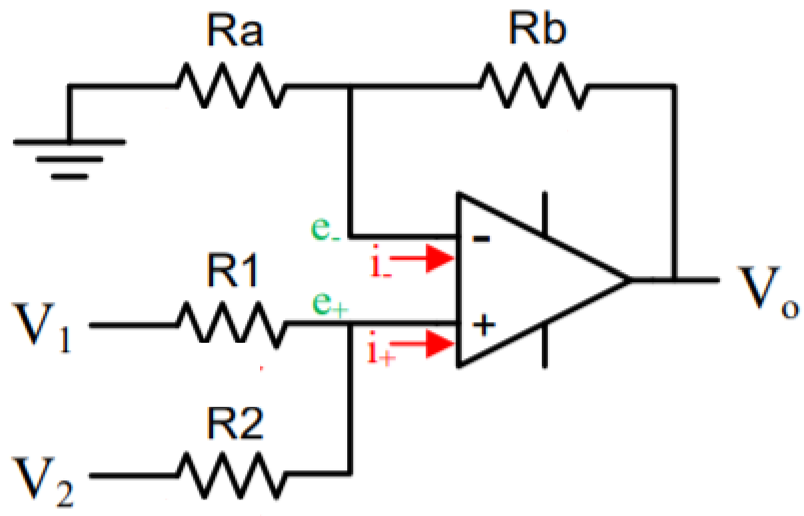


Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

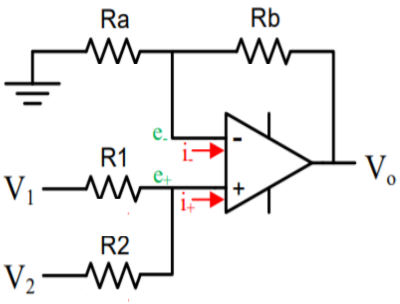
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Ejercicio Propuesto 2:

Obtener la ecuación diferencial que liga las entradas v_i y la salida v_o

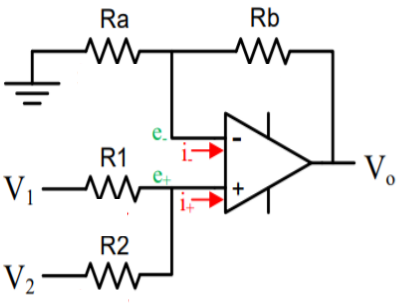


Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos



Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos

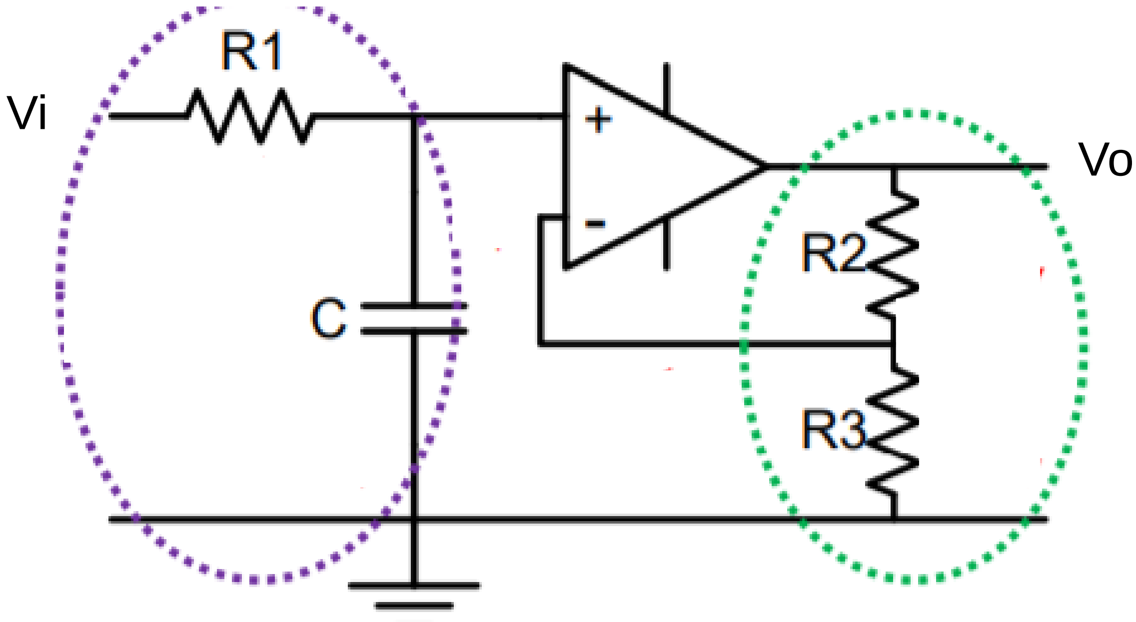


Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos

Ejercicio Propuesto 3:

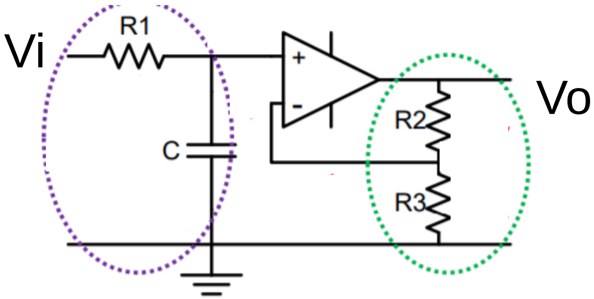
Obtener la ecuación diferencial que liga las entradas v_i y la salida v_o



UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

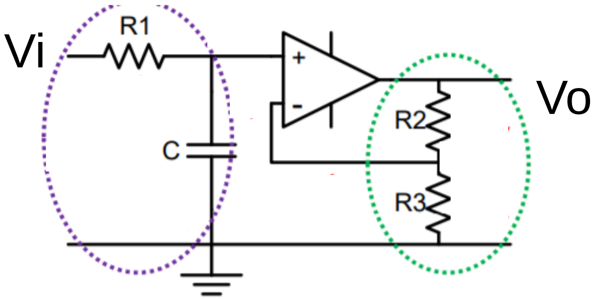
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos



Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Sistemas Eléctricos



Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos

1.1 Introducción

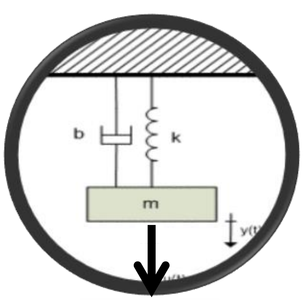
1.2 Modelado de Sistemas Mecánicos

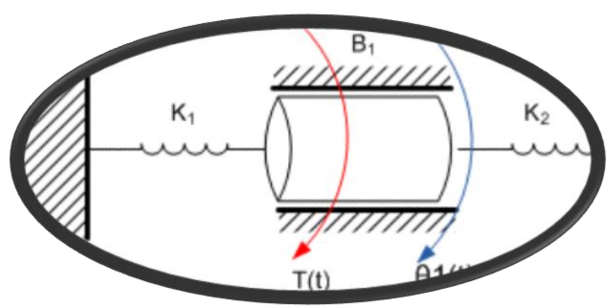
 1.2.1 Traslacionales

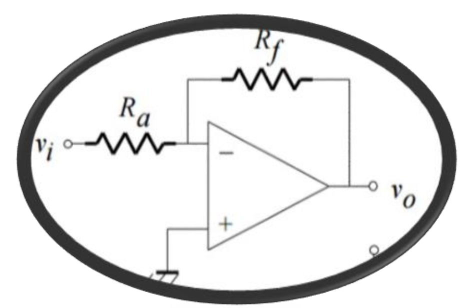
 1.2.2 Rotacionales

1.3 Modelado de Sistemas Eléctricos

1.4 Modelado de Sistemas de Nivel de Líquidos





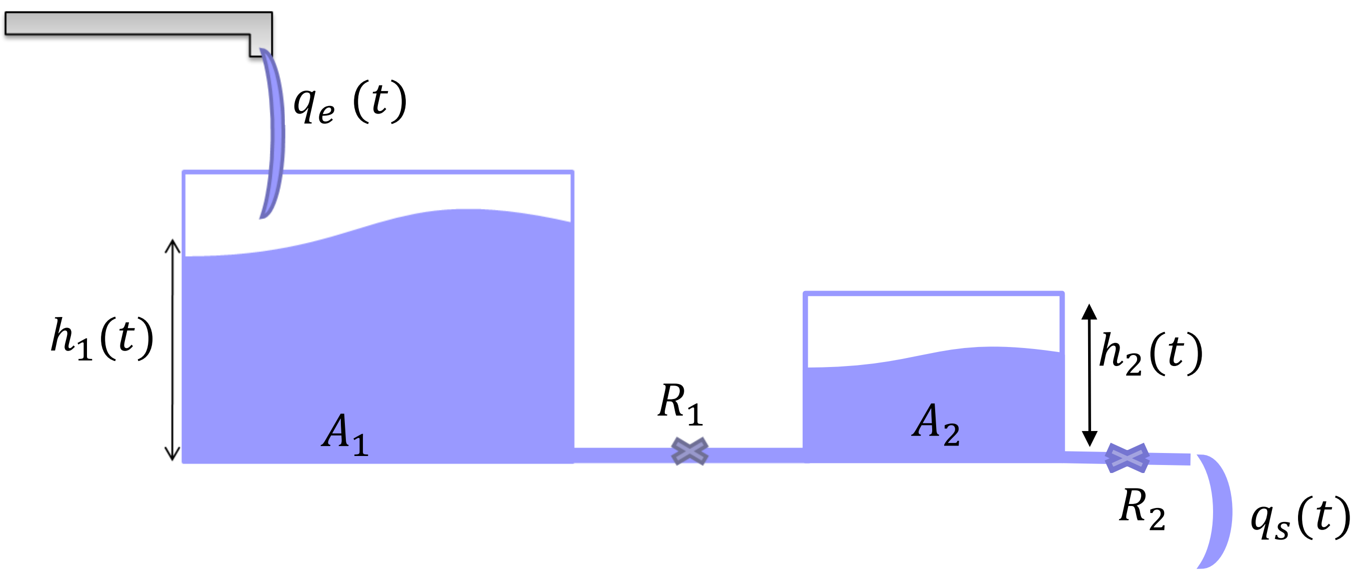


Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

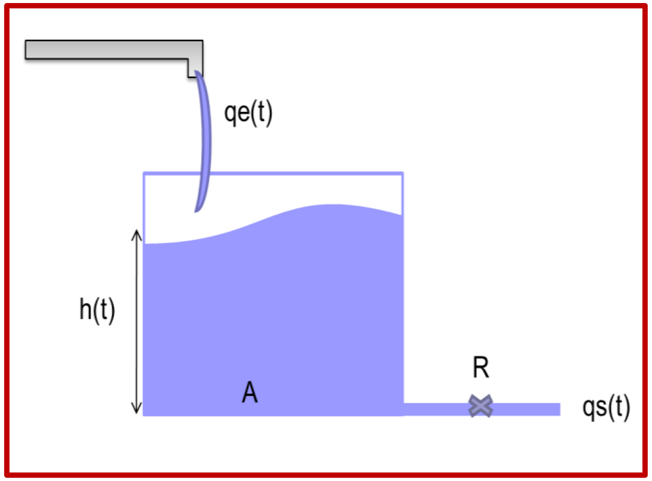
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Nivel de Líquidos

Son aquellos sistemas en los que se produce una circulación de líquido a lo largo de los elementos que forman el sistema bajo la acción de diferencias de presión. **Los caudales de líquido y la diferencia de presiones son las magnitudes que se pretenden modelar**. Las ecuaciones de balance surgen de la ley de conservación de masa.



Modelado y Simulación de Sistemas

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Nivel de Líquidos



Depósito

Un depósito es un elemento que, alimentado por un caudal de entrada, es capaz de acumular líquido, suministrándolo en un caudal de salida.

Como efecto de la acumulación de líquido, éste se encuentra sometido a una **presión hidrostática** que en el fondo del depósito es proporcional a la altura del líquido.

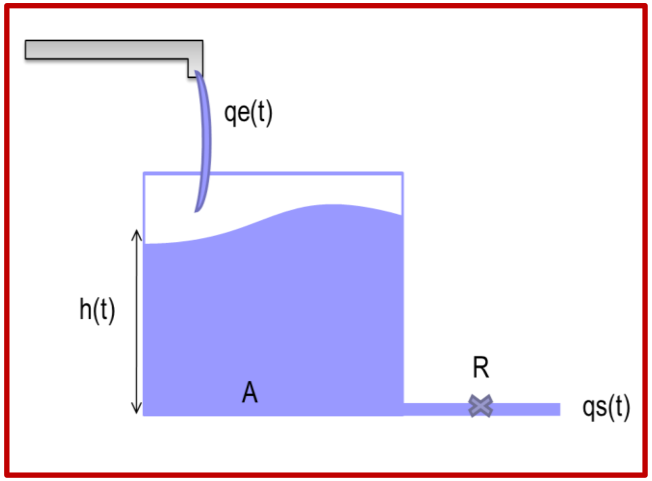
Para el caso de un depósito prismático de sección A (sección constante) las ecuaciones que lo modelan son:

$$\frac{dV(t)}{dt} = q_e - q_s \quad \Rightarrow \quad A\frac{dh}{dt} = q_e - q_s$$

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Nivel de Líquidos



Depósito

Para el caso de un depósito prismático de sección A (sección constante) las ecuaciones que lo modelan son:

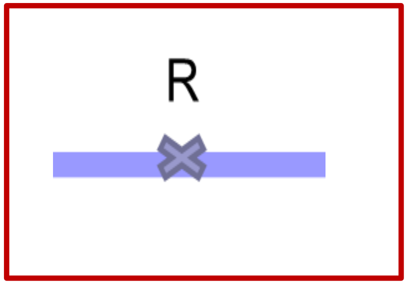
$$A\frac{dh}{dt} = q_e - q_s$$

Capacitancia Hidráulica: Relación entre la variación del líquido almacenado y la variación del nivel (su nombre se debe a la similitud con la carga de un circuito RC).

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Nivel de Líquidos



Tubería / Válvula

Por una tubería (o por una válvula) circula un **caudal de líquido** tal que la caída de presión a lo largo del elemento es proporcional al cuadrado del caudal circulante. Esta caída de presión se debe a la fricción del líquido con las paredes del elemento.

$$q(t) = K_p \cdot \sqrt{p_1(t) - p_2(t)}$$

Simplificación: Teniendo en cuenta que la presión en el fondo del tanque es proporcional a la altura del líquido, usaremos el concepto de "resistencia hidráulica".

Resistencia hidráulica (R):

El caudal de líquido circulante a través de una válvula, con resistencia hidráulica R, viene determinado por la diferencia de niveles en sus extremos.

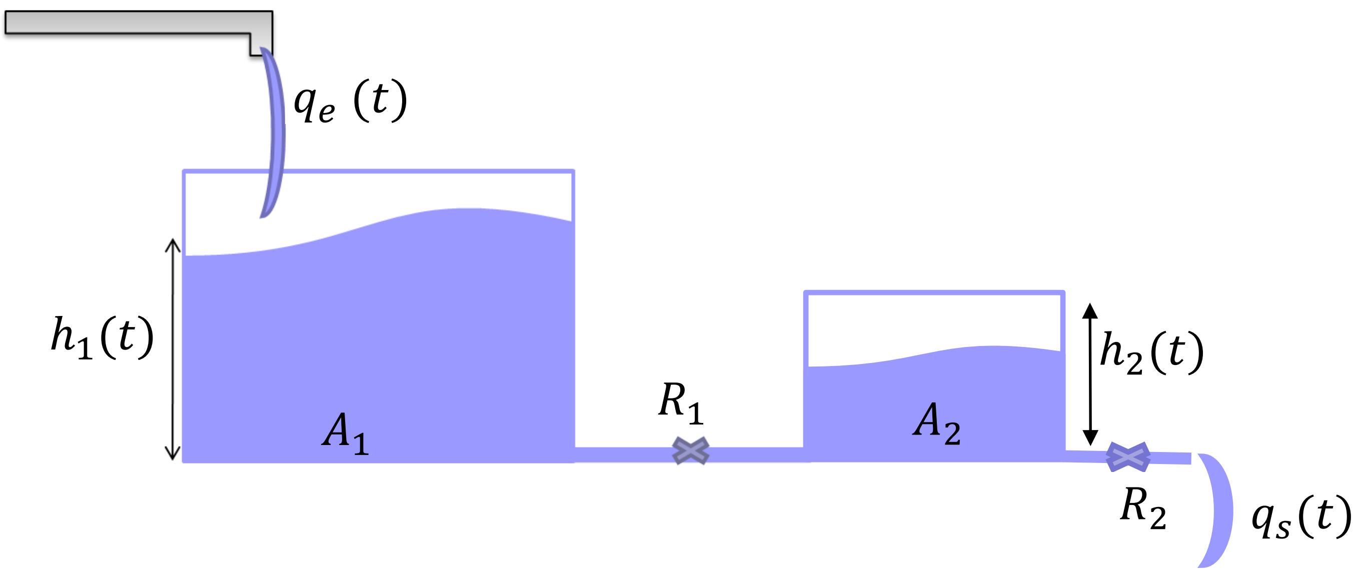
$$q(t) = \frac{h_1 - h_2}{R}$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

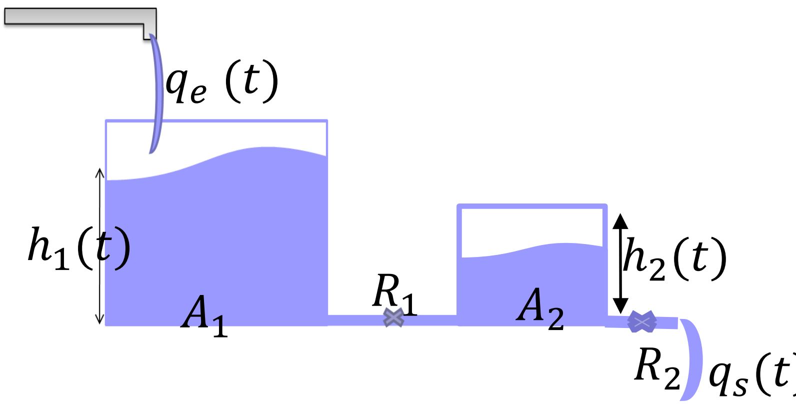
Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Nivel de Líquidos

Ejemplo: Obtener la ecuación diferencial que liga la entrada $q_e\ (t)$ y las salidas $h_2(t)$ $q_s(t)$



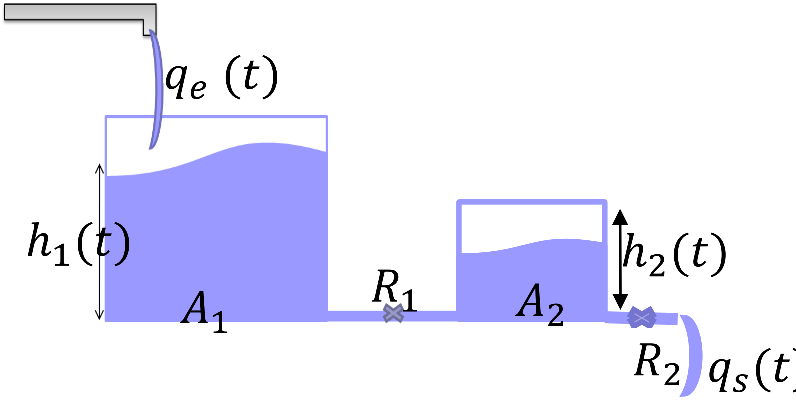
Modelado y Simulación de Sistemas

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Nivel de Líquidos



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Nivel de Líquidos

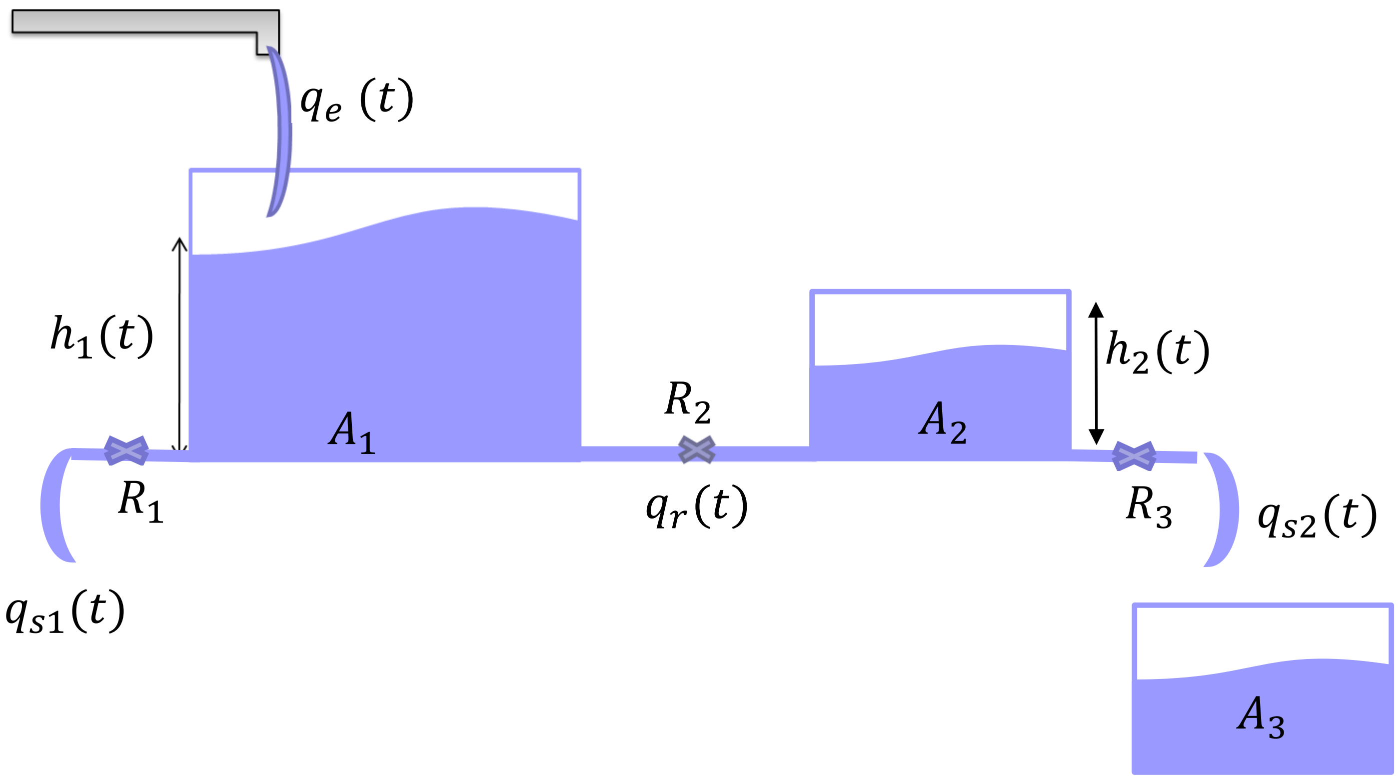


Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Nivel de Líquidos

Ejemplo: Obtener la ecuación diferencial de cada tanque.



MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Tema 1: Modelado de Sistemas Físicos: Nivel de Líquidos