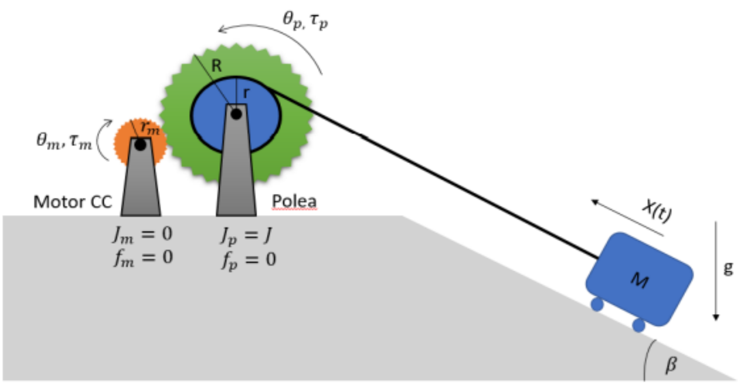
Modelado y Simulación de Sistemas
Práctica 3

Índice

La figura muestra un mecanismo para arrastrar una masa ***M*** sobre un plano con un ángulo de inclinación $\boldsymbol{\beta}$ con respecto de la horizontal. El sistema de remolcado está formado por un motor de corriente continua, acoplado a una polea reductora y montado en una base rígida fijada al terreno. La variable de salida que estamos interesados en calcular es ***X,*** la posición de la masa ***M*** en el plano inclinado de la figura.

Datos:

- El cable de arrastre se asume está tenso todo el tiempo, posee una masa despreciable y no patina sobre la polea a la que está enganchado.
- El carrito tiene una masa M y su rozamiento con el suelo es despreciable.
- La polea tiene un radio ***R*** *en su acople con el motor, y un radio* ***r*** *en su acople al cable de arrastre (donde este se enrolla)*. Su momento de inercia (conjunto de la polea) es ***J,*** *y se desprecia su rozamiento*.
- El motor de corriente continua mueve un piñón de radio $\boldsymbol{r_m}$ con un par de entrada $\boldsymbol{\tau_m}$. Para simplificar el modelo se desprecian: fricciones, e inercias del motor y del piñón.
- La ratio de transmisión de la reductora es $\boldsymbol{n = n1/n2 = r_m/R}$.
- La gravedad actúa en el sistema en dirección vertical.



a) **[modelo simple (sin fuerzas)]** Si el piñón del motor se mueve un ángulo θ_m en sentido horario (tal y como se muestra en la figura), demuestra razonadamente que la masa **M** se mueve una distancia **X** en el plano inclinado tal que:

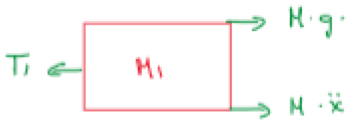
$$X(t) = r\frac{r_m}{R}\,\theta_m(t)\ [\mathrm{m}]$$

$X = r \cdot \theta_p$; $\theta_p = n \cdot \theta_m$;

$X = r \cdot n \cdot \theta_m$;

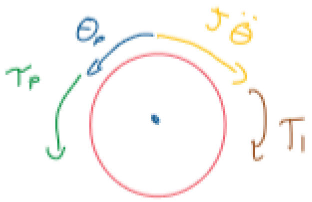
$\boxed{X = r \cdot \frac{r_m}{R} \cdot \theta_m ;}$

b) **[modelo completo]** Obtener una única ecuación diferencial del sistema que represente la relación del par de entrada τ_m con respecto al desplazamiento X de la masa (nota: no hace falta modelar el motor, asumimos que τ_m es la variable de entrada al sistema). Para ello indica claramente el/los diagrama/s de cuerpo libre en el que se aprecien todas las fuerzas y pares que aplican. Recuerda que, al mezclar sistemas rotacionales y traslacionales, cada parte se resuelve por separado (generando una Ec. Diff por cada parte).



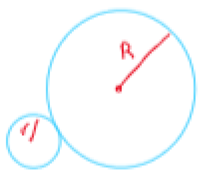
$$\boxed{T_1 = M\cdot\ddot{x} + M\cdot g\cdot \text{sen}\,\beta;}$$

Polea :



$$\boxed{\begin{array}{l} \tau_p = J\cdot\ddot{\theta} + T_1 R \\ \ddot{x} = r\cdot\ddot{\theta}_p \rightarrow \ddot{\theta}_p = \dfrac{\ddot{x}}{r}; \end{array}}$$

Engranajes:



$$\boxed{\tau = \frac{\tau_m}{n} = \frac{\tau_m R}{r_m}}$$

Juntamos las ecuaciones

$$\frac{\tau_m\cdot R}{r_m} = \tau;\quad \frac{\tau_m\cdot R}{r_m} = J\cdot\ddot{\theta} - \theta_p + T_1 R;\quad \frac{\tau_m\cdot R}{r_m} = J\cdot\ddot{\theta} + T_1 R;$$

$$\frac{\tau_m\cdot R}{r_m} = J\cdot\frac{\ddot{x}}{r} + M\cdot(\ddot{x} + g\cdot \text{sen}\,\beta)\,R$$

$$\tau_m = \frac{\ddot{x}\,J\,r_m}{R\cdot r} + \frac{(M\ddot{x} + Mg\,\text{sen}\beta)\,r\cdot r_m}{R};$$

$$\boxed{\tau_m = \frac{\ddot{x}}{R}\left(\frac{J\cdot r_m}{r} + M\,r\cdot r_m\right) + \left(\frac{Mg\cdot \text{sen}\,\beta\cdot r\cdot r_m}{R}\right)}$$

c) Para valores R=500 mm, r=250 mm, r_{m}=400 mm, M=50 kg, g=9,8 m/s^2, β=30°, J=5 kgm^2, implementa la ecuación diferencial obtenida en el apartado anterior en Simulink, y luego emplea Simscape para modelarlo y comprobar tus soluciones. Considera $\boldsymbol{\tau_m}$ la entrada del sistema y $\boldsymbol{X}$ la salida del mismo (ver notas al final).

$$\tau_m = \frac{\ddot{X}}{R}\left(\frac{J\cdot r_m}{r} + M r \cdot r_m\right) + \left(\frac{Mg\cdot \operatorname{sen}\beta\cdot r\cdot r_m}{R}\right); \qquad \boxed{\tau_m = 26\,\ddot{X} + 49}$$

$R = 500\ mm = 0{,}5\ m$

$r = 250\ mm = 0{,}25\ m$

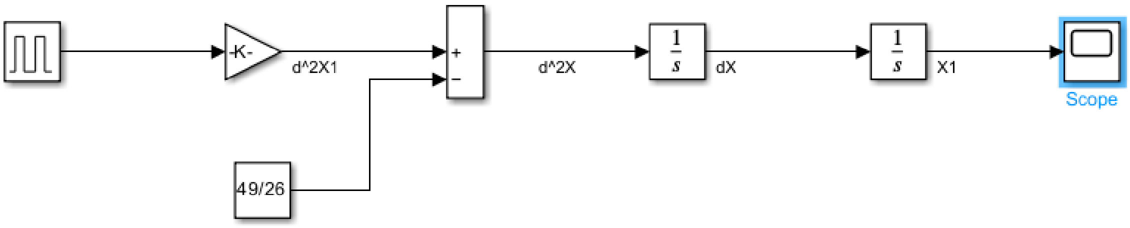
$r_m = 400\ mm = 0{,}4\ m$

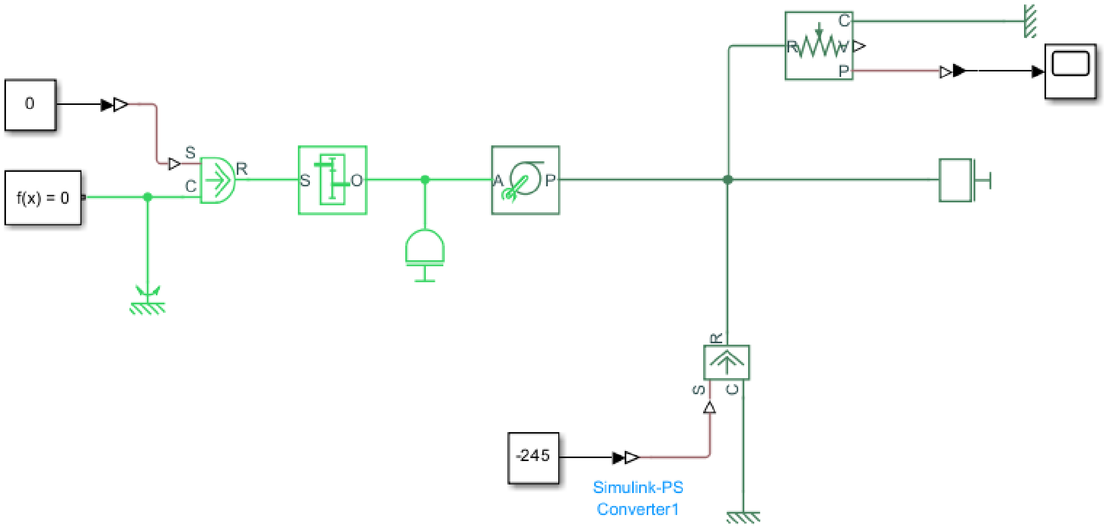
$M = 50\ kg$

$g = 9{,}8\ m/s^2$

$\beta = 30°$

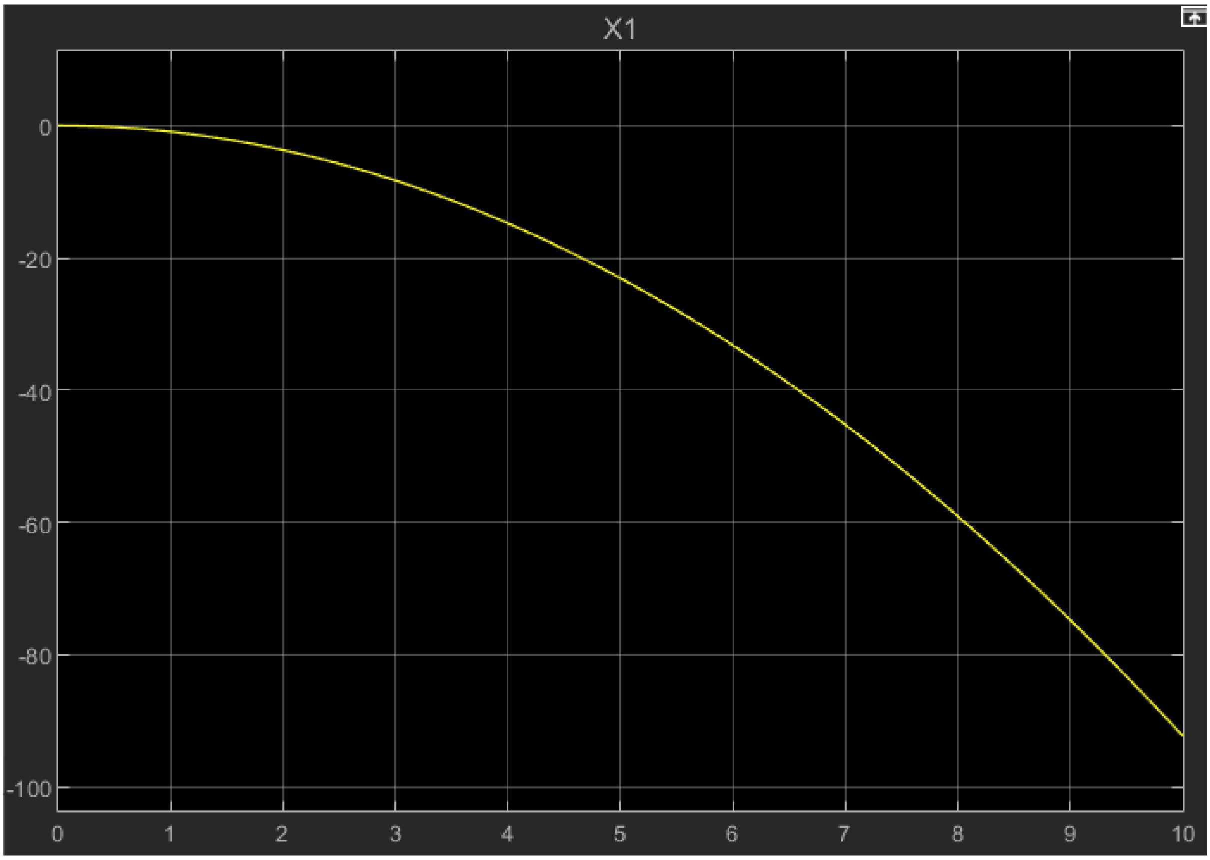
$J = 5\ kgm^2$



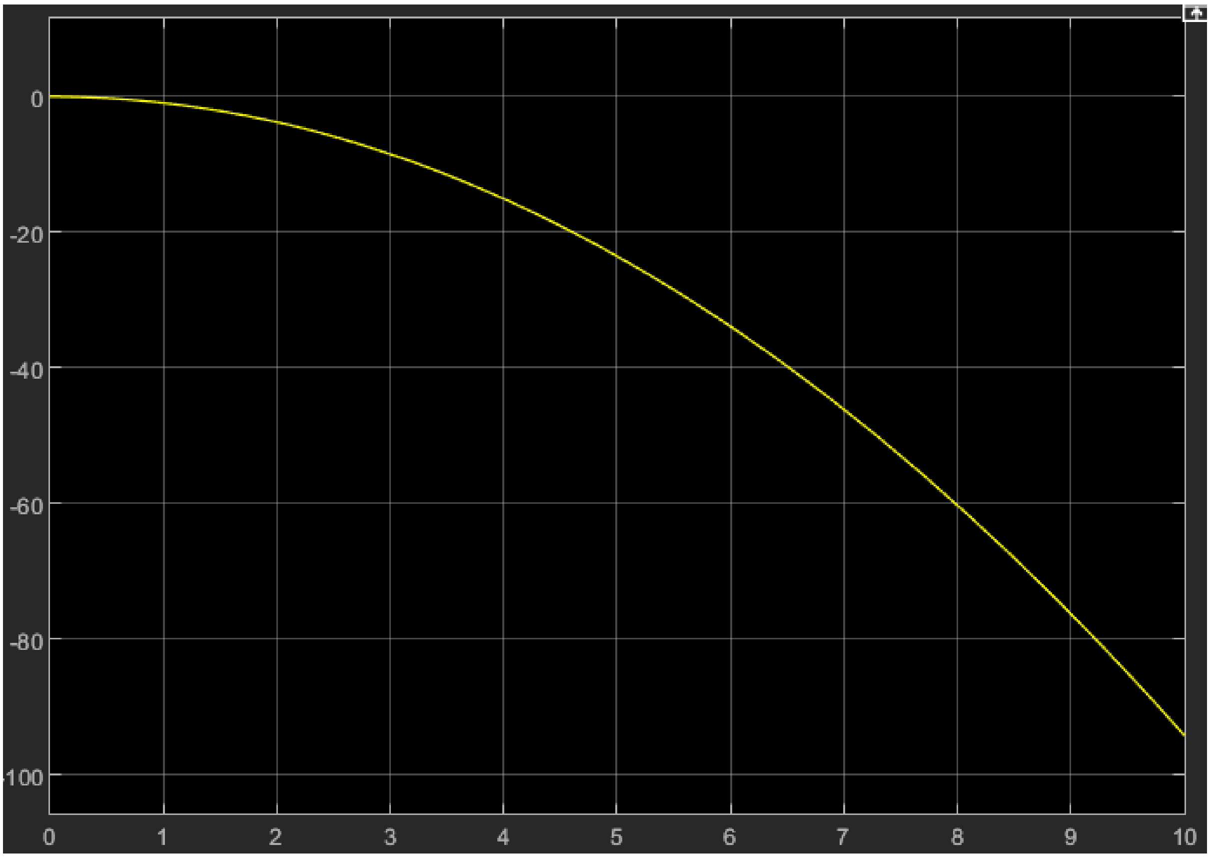


d) Simula el sistema para entrada τ_m =0 (motor apagado) durante 10s. Representar gráficamente la posición de X empleando tanto Simulink como Simscape, comprobando que ambas soluciones coinciden. ¿Qué ocurre? Interpreta los resultados y descríbelo con tus palabras.

Simulink:



Simscape:

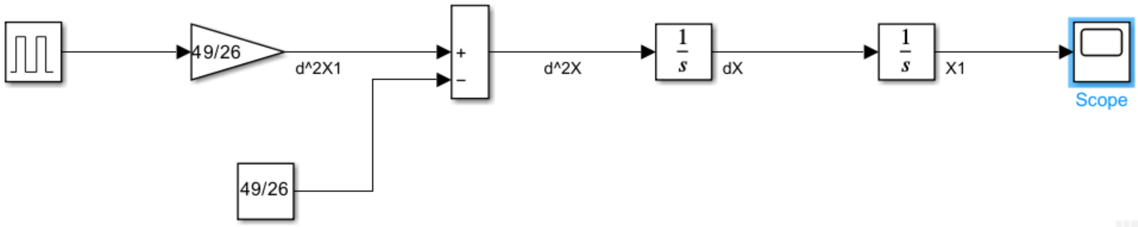


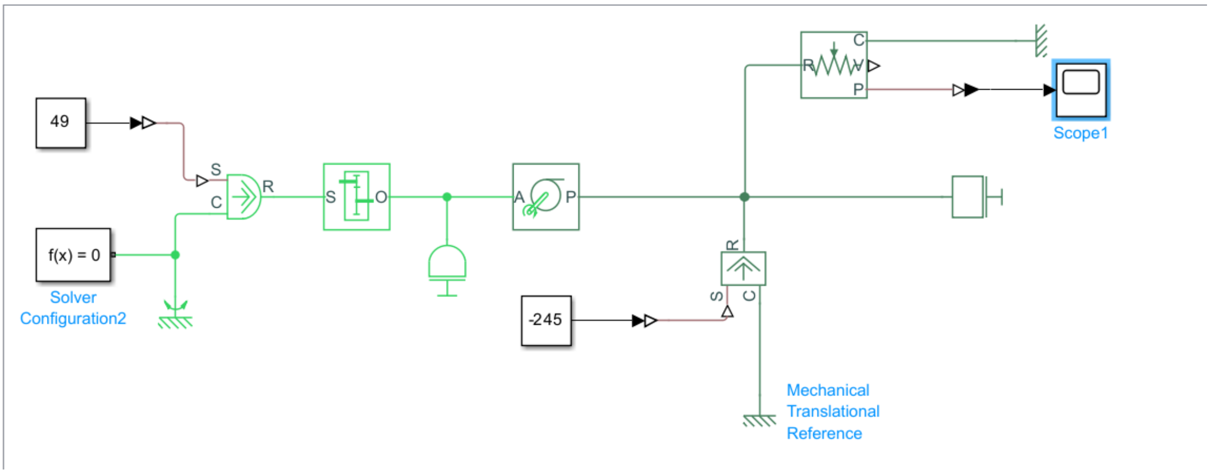
e) Calcular, en base a lo anterior, el par necesario que debería realizar el motor para mantener la masa quieta (equilibrio). Prueba ese valor en tus soluciones de Simulink y Simscape y comprueba que efectivamente la variable X se mantiene a cero durante los 10s de la simulación.

Como queremos que no se desplace $X = cte$ por tanto $\dot{X} = \ddot{X} = 0$;

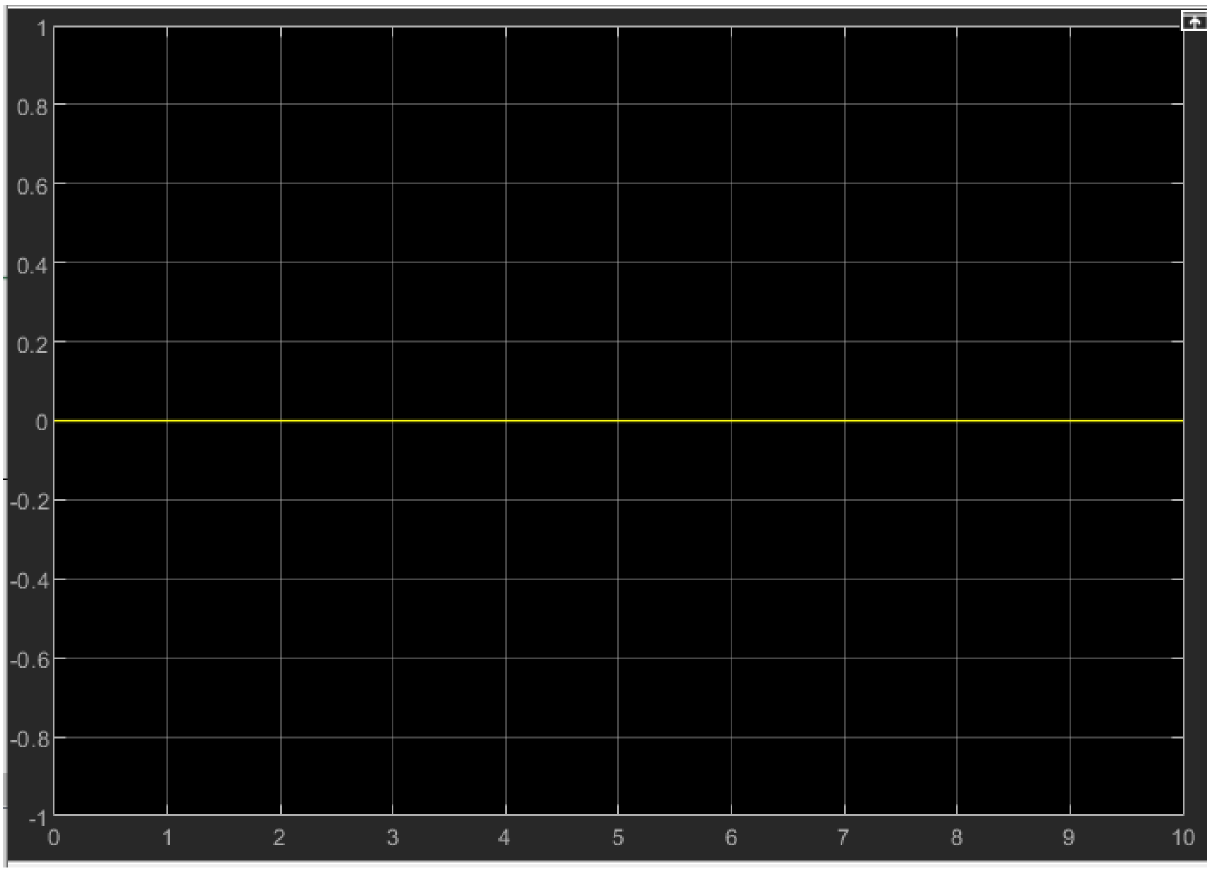
$T_m = 26\dot{x} + 49$;

$T_m = 49$;

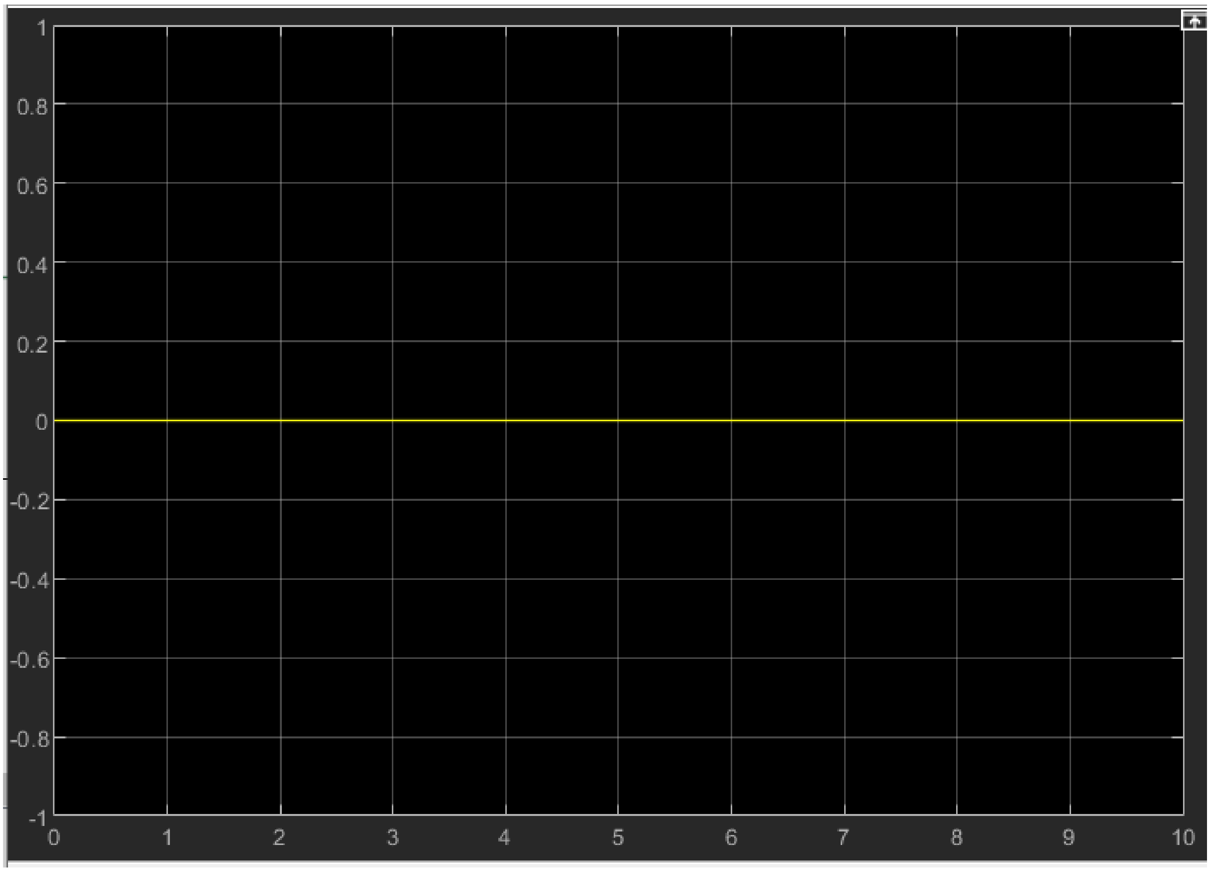

49/26
d^2X1
+
−
d^2X
1
s
dX
1
s
X1
Scope
49/26


49
S
R
C
f(x) = 0
Solver
Configuration2
S
O
A
P
R
C
P
Scope1
R
S
C
-245
Mechanical
Translational
Reference

Simulink:


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Simscape:



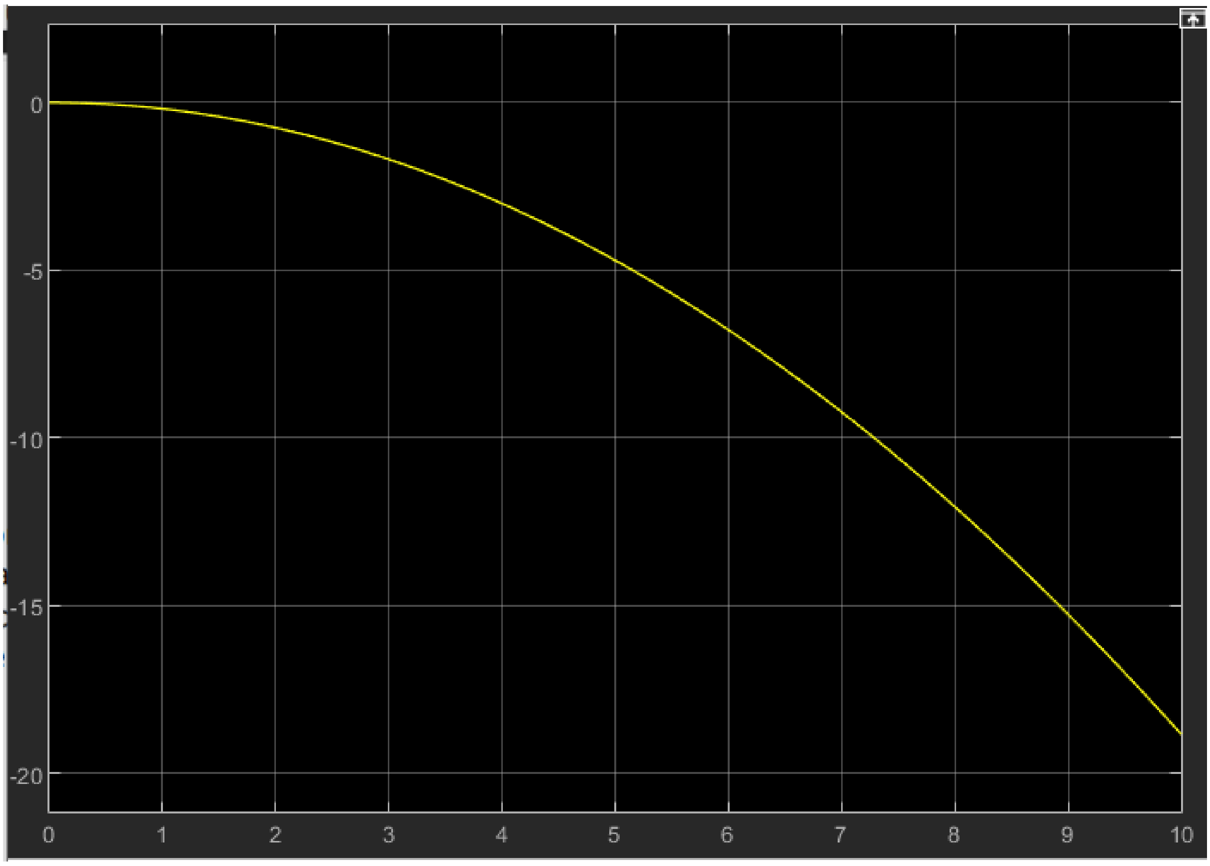
f) Finalmente, considera que se desea prescindir de la reductora. Para ello asume que r_m=R. Calcular nuevamente el par motor que mantiene en equilibrio a la masa. Teniendo en cuenta que normalmente, el coste y consumo de un motor es proporcional al par máximo que es capaz de proporcionar, ¿ves conveniente el uso de reductoras en este ejemplo?, justifica tu respuesta.

$r_m = R$; $\qquad \tau_m = \frac{\ddot{x}}{R}\left(\frac{J\cdot r_m}{r} + M r\cdot r_m\right) + \left(\frac{Mg\cdot \text{sen}\,\beta\cdot r\cdot r_m}{R}\right)$

$\ddot{X} = 0$;

$r_m = R$;

$$\boxed{\tau_m = M\cdot g\cdot \text{sen}\,\beta\cdot r = (50\cdot 9{,}8\cdot \text{sen}\,30\cdot 0{,}25) = 61{,}250}$$



Se necesita usar la reductora para reducir la velocidad de rotación, a su vez es necesario aumentar el par motor.