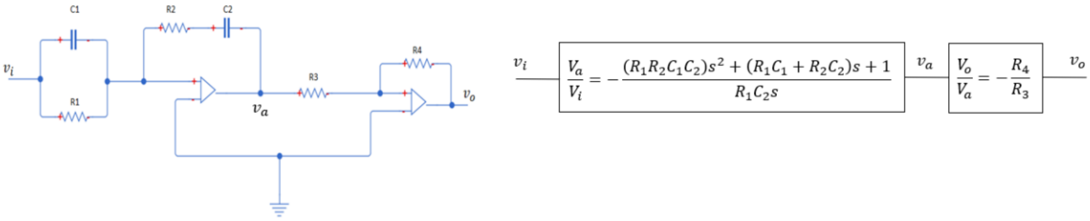
Modelado y Simulación de Sistemas

Práctica 2

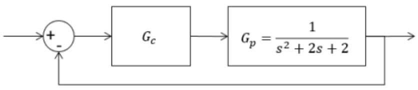
Índice

P1. El circuito eléctrico de la figura está compuesto por dos etapas de amplificadores operacionales. Su función de transferencia global $G_c(s) = v_o(s)/v_i(s)$ se calcula como la concatenación serie de las funciones de transferencia de ambas etapas.



a) Para valores R_i=50 Ω y C_i=0.01F representa en Matlab la función de transferencia $G_c(s) = v_o(s)/v_i(s)$ en formato `zpk`.

b) Considera ahora que dicho circuito eléctrico se emplea como parte de otro sistema más complejo, dado por el diagrama de bloques adjunto. Obtén, con la ayuda de Matlab, la función de transferencia resultante $G_t(s)$ en formato tf, y la respuesta temporal del sistema completo ante entrada escalón unitario durante 10 segundos.



Nota: Obtén siempre la forma más simplificada posible de las funciones de transferencia (comando minreal).

a)

a)

R = 50 Ω

Ci = 0,01 F

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{0{,}25s^2 + s + 1}{0{,}5s} \cdot (-1);$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{0{,}25s^2 + s + 1}{0{,}5s};$$

```
%Ejercicio 1

num = [0.25 1 1];
den = [0.5 0];
H = tf (num, den);
H = zpk(H)
```

```
H =

  0.5 (s+2)^2
  -----------
       s

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

b)

```
num = [1]
```

```
num = 1
```

```
den = [1 2 2]
```

```
den = 1x3
     1     2     2
```

```
C = tf (num, den)
```

```
C =

        1
  -------------
  s^2 + 2 s + 2

Continuous-time transfer function.
```

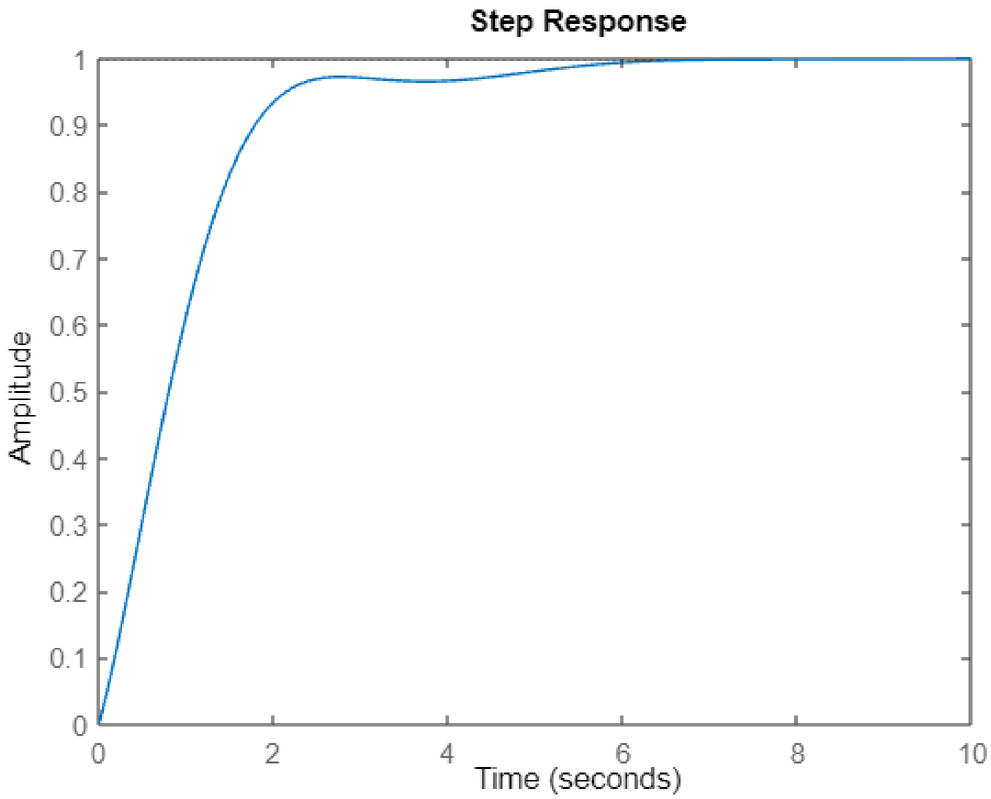
```
G = feedback ((H*C),1)
```

```
G =

        0.25 s^2 + s + 1
  ----------------------------
  0.5 s^3 + 1.25 s^2 + 2 s + 1

Continuous-time transfer function.
```

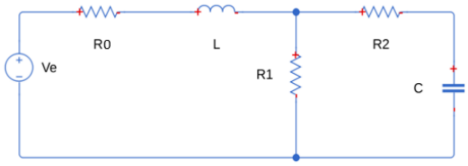
```
L = minreal(tf(G))
```

```
L =

     0.5 s^2 + 2 s + 2
  -----------------------
  s^3 + 2.5 s^2 + 4 s + 2

Continuous-time transfer function.
```

```
figure()
step(L, 10)
```



P2. Para el circuito eléctrico de la figura:



a) Obtén su función de transferencia $G(s) = v_c(s)/v_e(s)$ de forma simbólica. Para ello obtén las ecuaciones diferenciales mediante Kirchhoff, aplica Laplace, y emplea variables simbólicas de Matlab y resolución de sistemas de ecuaciones para su resolución. (recuerda usar el comando simplify).

Nota: Recuerda que no podemos mezclar variables simbólicas y funciones de transferencia de Matlab, por eso este apartado es únicamente simbólico.

b) Genera ahora el diagrama de bloques de dicho circuito y redúcelo con Matlab, comprobando que obtienes la misma función de transferencia que en el apartado anterior. Para ello, partiendo de la transformada de Laplace de las ecuaciones de Kirchhoff, genera su diagrama de bloques dibujando cada ecuación en forma de bloques y haciendo las conexiones pertinentes. Para reducir dicho diagrama de bloques, emplea el comando "connect" de Matlab.

Nota: Para poder resolverlo con Matlab, es necesario tener valores numéricos (no simbólicos), de forma que podamos definir funciones de transferencia de Matlab (tf o zpk). Considera para ello que todas las resistencias tienen un valor de 1000Ω, L=1H, C=0.001F.

a)

* Suponemos que todas las R tienen el mismo valor.

Ejercicio 2:

Malla 1:

$V_e = V_r + V_L + V_{r_1}$

$V_e = i_1 \cdot R + L \cdot \dot{i}_1 + R_1(i_1 - i_2)$; $\rightarrow V_e = 2 \cdot R \cdot C \cdot \dot{V}_c + \frac{V_c}{\cancel{R_1}} \cdot \cancel{R} + 2LC\ddot{V}_c + \frac{L \cdot \dot{V}_c}{R_1} + R_1 \dot{V}_c C - R_1 \dot{V}_c \cdot C + 2RC\dot{V}_c + V_c$;

$V_e = \ddot{V}_c(2LC) + \dot{V}_c\left(\frac{L}{R} + 3RC\right) + V_c(2)$;

$\boxed{\ddot{V}_c = \frac{1}{2LC} \cdot \left(V_e - V_c(2) - \dot{V}_c\left(\frac{L}{R} + 3RC\right)\right)}$

Malla 2:

$V_c = V_{r_2} + V_{r_1}$

$V_c = i_2 R_2 + R_1(i_2 - i_1)$; $\rightarrow i_1 = \frac{2\cancel{R_2}C\dot{V}_c}{\cancel{R_1}} + \frac{V_c}{R_1} = \boxed{2C\dot{V}_c + \frac{V_c}{R_1}}$

$i_2 = \dot{V}_c \cdot C$

$$\left.\begin{array}{l} V_e = \ddot{V}_c(2LC) + \dot{V}_c\left(\frac{L}{R} + 3RC\right) + V_c(2); \\ i_1 = \frac{2C\dot{V}_c R + V_c}{R} \\ i_2 = \dot{V}_c \cdot C \end{array}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{array}{l} V_e = s^2 V_c(2LC) + sV_c\left(\frac{L}{R} + 3RC\right) + V_c(2) \\ I_1 = \frac{2RCsV_c + V_c}{R} \\ I_2 = V_c s C \end{array}$$

$\rightarrow I_1 R - 2RCsV_c + V_c$

$\rightarrow I_2 - V_c s C$

$$\begin{array}{ccc} I_1 & I_2 & V_e \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} R & 0 & -2RCs + 1 \\ & 1 & -Cs \\ 0 & 0 & s^2(2LC) + s\left(\frac{L}{R} + 3RC\right) + 2 \end{pmatrix}$$

```
%Ejercicio 2

syms I1 I2 R C L Ve Vc(s) s;
I1 = (2*R*I2+Vc) / R
```

I1(s) =

$$\frac{\mathrm{Vc}(s) + 2\, I_2\, R}{R}$$

```
I2 = Vc*s*C
```

I2(s) = $C\, s\, \mathrm{Vc}(s)$

```
Ve = I1*(2*R+L*s) - (R*C*s*Vc)
```

Ve(s) =

$$\frac{(\mathrm{Vc}(s) + 2\, I_2\, R)\, (2\, R + L\, s)}{R} - C\, R\, s\, \mathrm{Vc}(s)$$

```
%Matriz A
A = [R -2*R (-1); 0 1 (-C*s); (2*R+L*s) 0 (-R*C*s)]
```

A =

$$\begin{pmatrix} R & -2\, R & -1 \\ 0 & 1 & -C\, s \\ 2\, R + L\, s & 0 & -C\, R\, s \end{pmatrix}$$

```
%Matriz B
B = [0;0;Ve]
```

```
B(s) =
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(\mathrm{Vc}(s)+2\,I_2\,R)\,(2\,R+L\,s)}{R} - C\,R\,s\,\mathrm{Vc}(s) \end{pmatrix}$$

```
X = simplify(A\B)
```

```
X(s) =
```

$$\begin{pmatrix} \frac{(2\,C\,R\,s+1)\,\sigma_1}{R\,\sigma_2} \\ \frac{C\,s\,\sigma_1}{\sigma_2} \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = 4\,I_2\,R^2 + 2\,R\,\mathrm{Vc}(s) + L\,s\,\mathrm{Vc}(s) - C\,R^2\,s\,\mathrm{Vc}(s) + 2\,I_2\,L\,R\,s$$

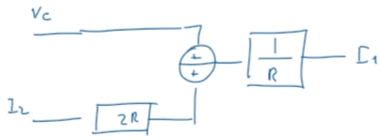
$$\sigma_2 = 3\,C\,R^2\,s + 2\,C\,L\,R\,s^2 + 2\,R + L\,s$$

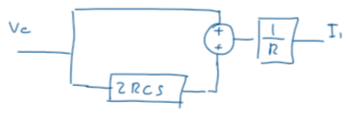
b)

$$V_c = I_1 (2R + Ls) - RCsV_c$$
$$i_1 = \frac{2 I_2 R + V_c}{R}$$
$$i_2 = C \cdot s \cdot V_c$$

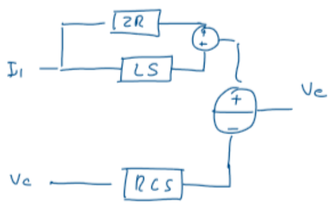
$$i_2 = C \cdot s \cdot V_c$$

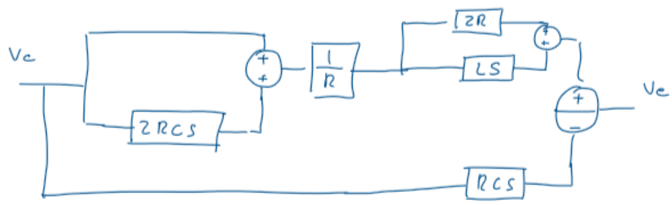
$$i_1 = \frac{2 I_2 R + V_c}{R}$$



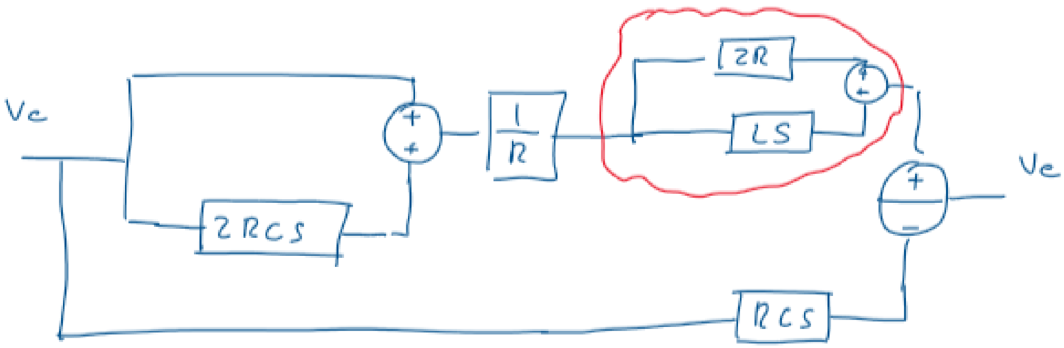


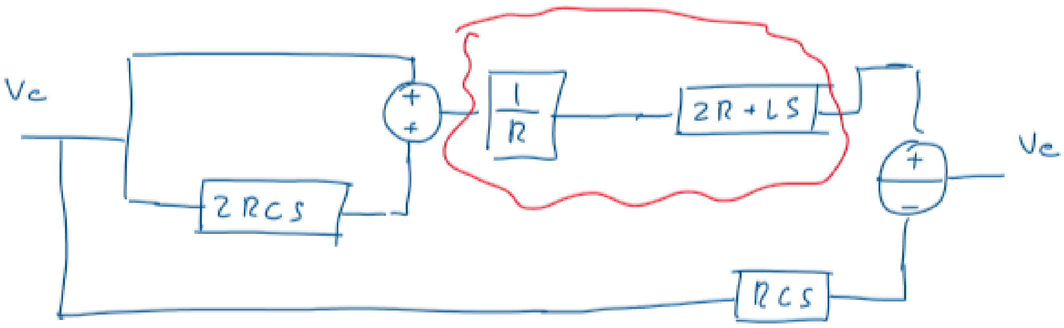
$$V_c = I_1 (2R + Ls) - RCsV_c$$

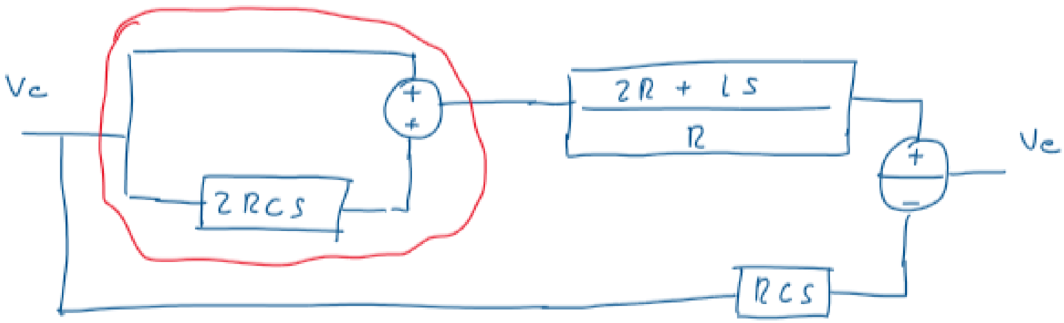


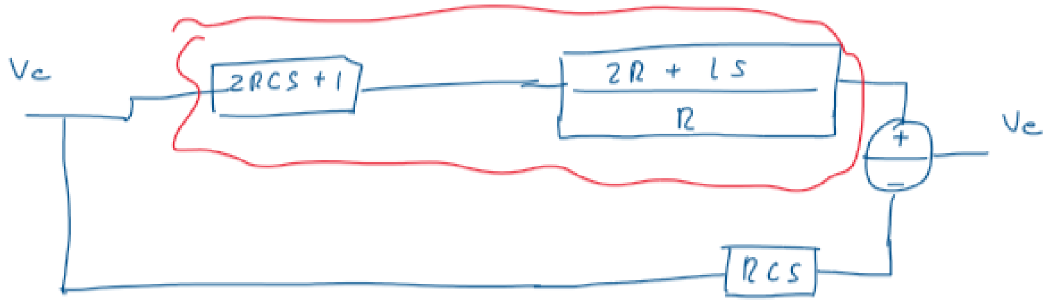


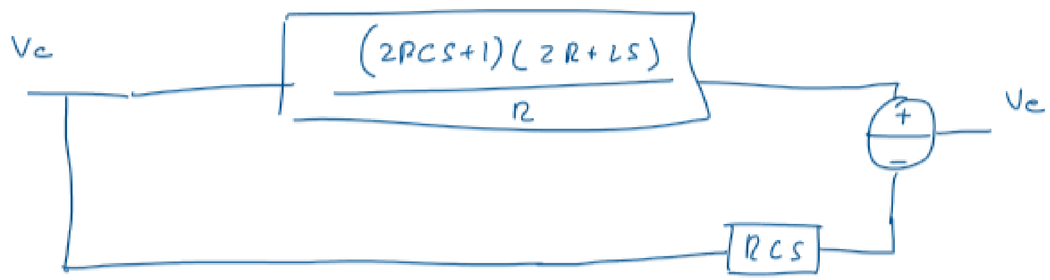
Simplificamos.

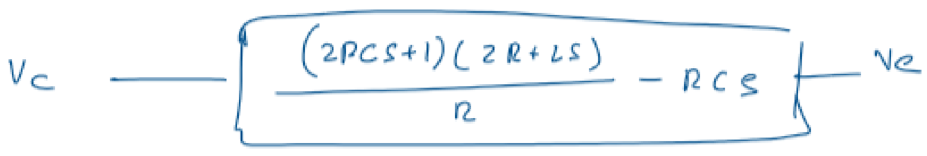







Vc
2RCS + 1
2R + LS
R
+
−
Ve
RCS


Vc
(2RCS+1)(2R+LS)
R
+
−
Ve
RCS


Vc
(2RCS+1)(2R+LS)
R
− RCS
Ve

$$V_c \cdot \left(\frac{(2RCs+1)(2R+Ls)}{R} - RCs \right) = V_e;$$

$$\frac{V_c}{V_e} = \frac{1}{\frac{(2RCs+1)(2R+Ls)}{R} - RCs};$$

$$G(s) = \frac{V_c}{V_e} = \frac{1}{\frac{(2RCs+1)(2R+Ls)}{R} - RCs};$$

$$G(s) = \frac{V_c}{V_e} = \frac{1}{\frac{(2s+1)\ (2000+s)}{1000} - s};$$

$$G(s) = \frac{500}{s^2 + 1500s + 1000}$$

```
%B

G1 = tf([2 0], 1)
```

```
G1 =

  2 s

Continuous-time transfer function.
```

```
G2 = tf(1, 1)
```

```
G2 =

  1

Static gain.
```

```
G3 = tf(1, 1000)
```

```
G3 =

  0.001

Static gain.
```

```
G4 = tf(2000, 1)
```

```
G4 =

  2000

Static gain.
```

```
G4 = tf(2000, 1)
```

```
G4 =

  2000

Static gain.
```

```
G5 = tf([1 0], 1)
```

```
G5 =

  s

Continuous-time transfer function.
```

```
G6 = tf([1 0], 1)
```

```
G6 =

  s

Continuous-time transfer function.
```

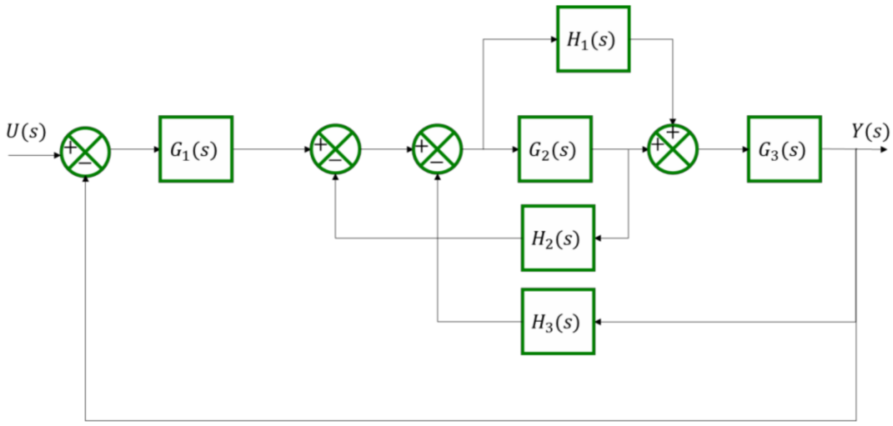
```
ini = tf(1);
fin = tf(1);

sysBA = append(ini,G2, G1,G3,G4,G5,G6,fin);
input = 1;
output = 8;
q = [2 1 0 0; 3 1 0 0; 4 2 3 0; 5 4 0 0; 6 4 0 0; 7 1 0 0; 8 5 6 -7];
sysBC = connect (sysBA, q, input, output);
sysBC = (tf(sysBC))
```

```
sysBC =

  0.002 s^2 + 3.001 s + 2

Continuous-time transfer function.
```

```
sol = minreal (1/sysBC)
```

```
sol =

          500
  -------------------
  s^2 + 1500 s + 1000

Continuous-time transfer function.
```

P3.- Dado el diagrama de la figura:



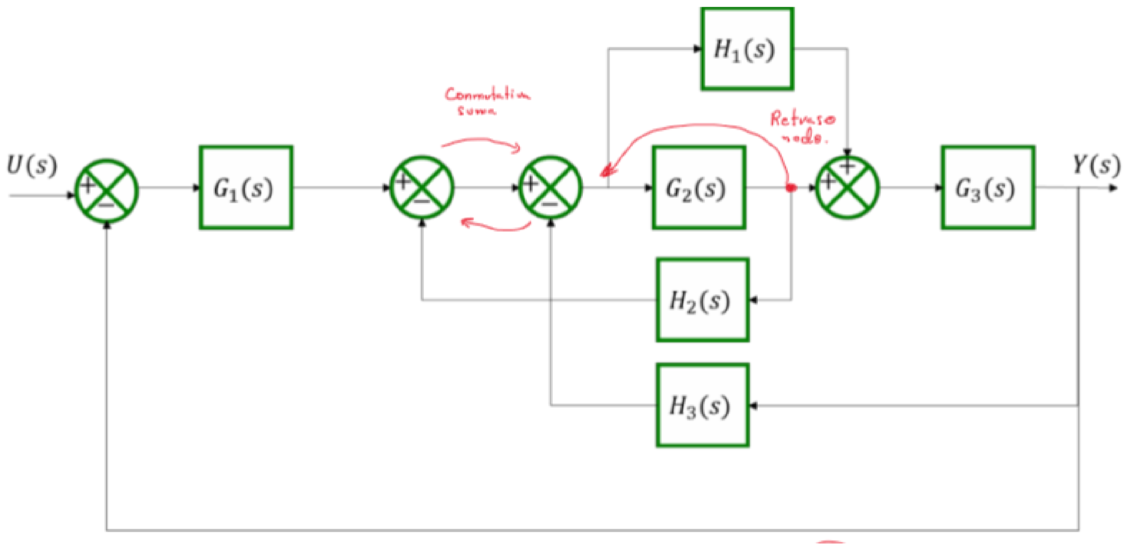
a) Obtén la función de transferencia $G(s) = Y(s)/U(s)$ mediante técnicas de manipulación de bloques, es decir, realizando el desarrollo a mano siempre en función de Gi y Hi. Indica en cada paso aplicado, que regla empleas, y adjunta en la memoria todos los pasos.

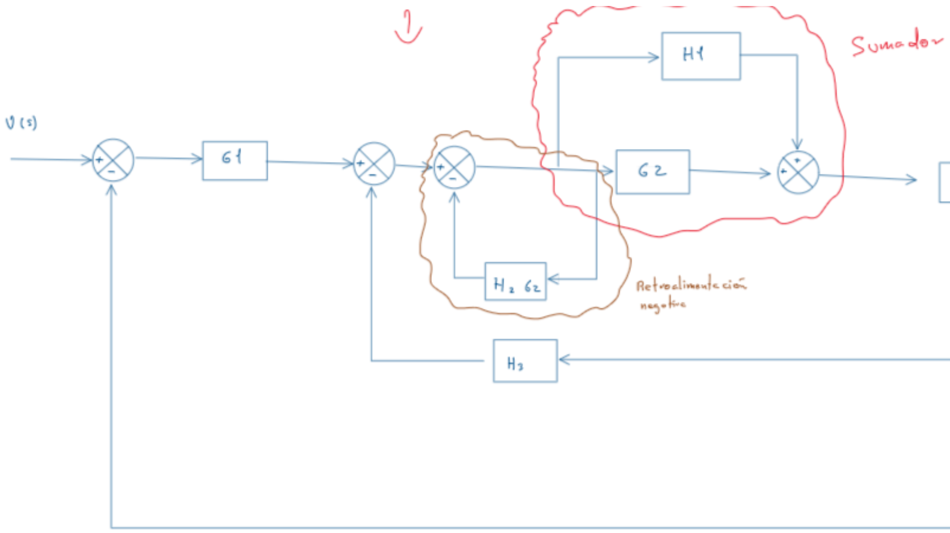
b) Pasa la función de transferencia del apartado anterior al formato "tf" de Matlab, considerando que $G_i(s) = \frac{1}{s+i}$, $H_i(s) = \frac{1}{(s+i)^2}$

c) Obtén nuevamente la función de transferencia en formato tf, empleando en este caso el comando `connect`. Para ello, considera que $G_i(s) = \frac{1}{s+i}$, $H_i(s) = \frac{1}{(s+i)^2}$

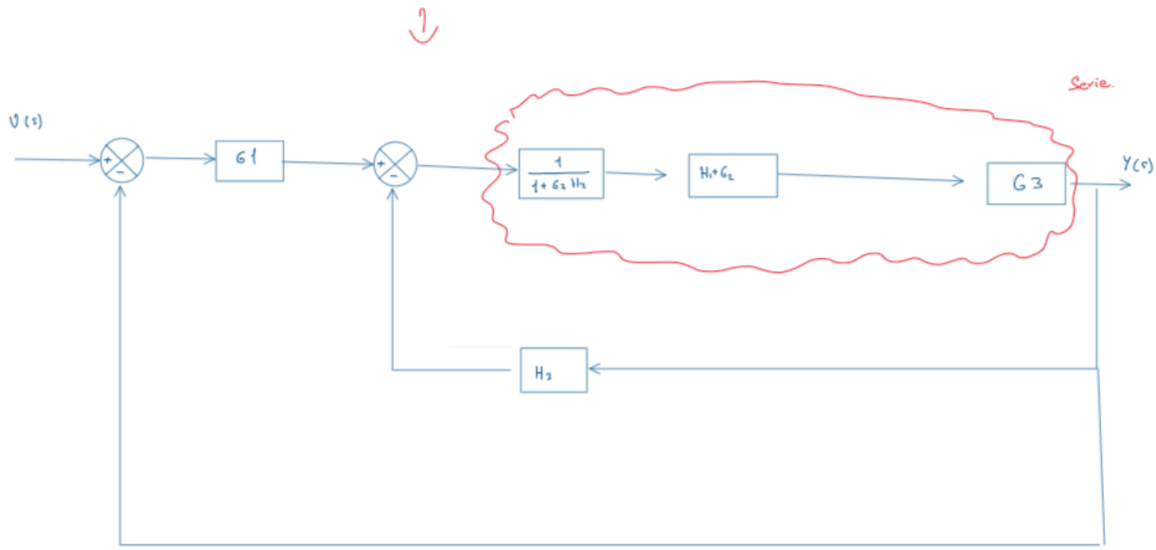
Nota: Obtén siempre la forma más simplificada posible de las funciones de transferencia (comando minreal).

a)

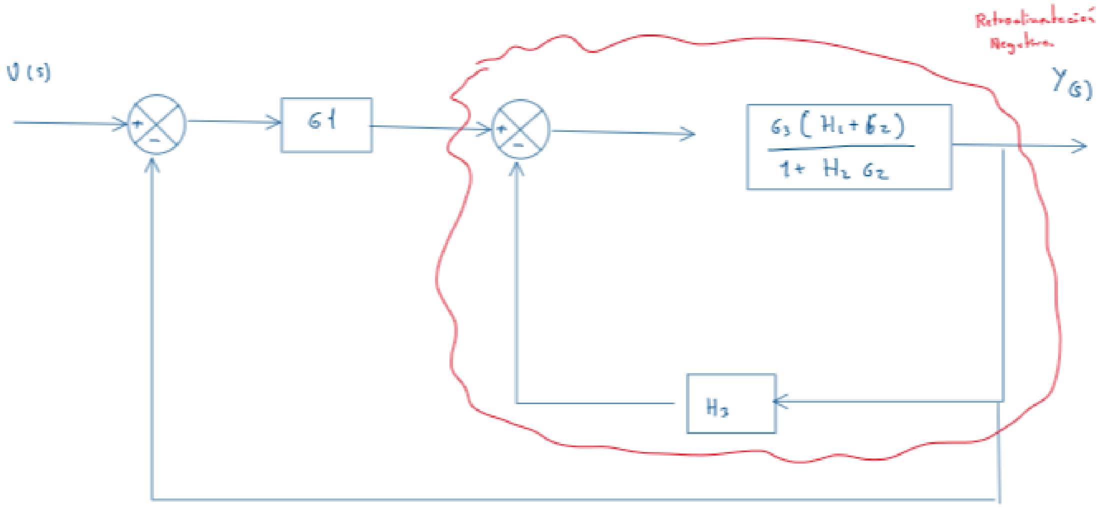




U(s)
G1
H1
G2
G3
Y(s)
H2 G2
H3
Sumador
Retroalimentación negativa



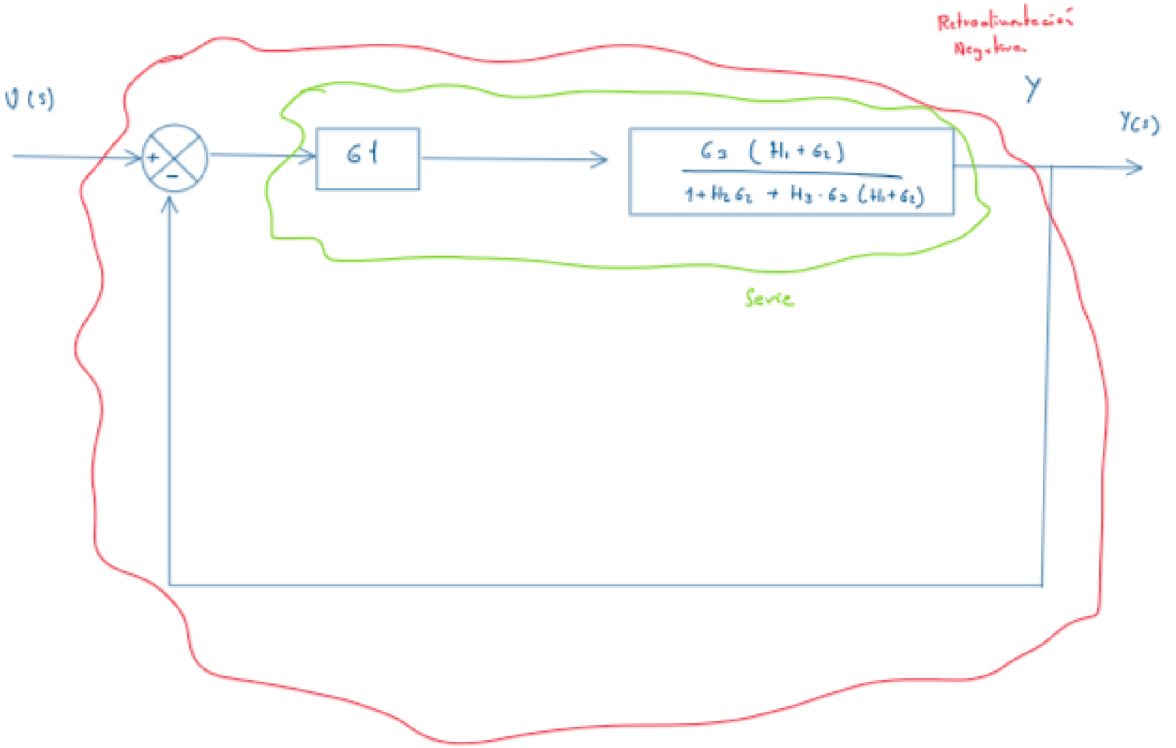
U(s)
G1
1 / (1+G2 H2)
H1+G2
G3
Y(s)
H3
Serie.



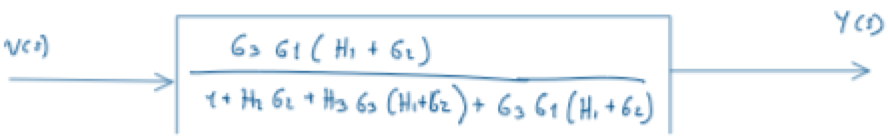
U(s)
G1
G3 (H1 + G2) / (1+ H2 G2)
Y(s)
H3
Retroalimentación Negativa

$$\frac{\dfrac{G_3(H_1+G_2)}{1+H_2G_2}}{1+H_3\cdot\dfrac{G_3(H_1+G_2)}{1+H_2G_2}} = \frac{G_3(H_1+G_2)}{1+\cancel{H_2}G_2} \div \left(\frac{1+H_2\cdot G_2 + H_3\cdot G_3(H_1+G_2)}{\cancel{1+H_2G_2}}\right) = \frac{G_3(H_1+G_2)}{1+H_2G_2+H_3\cdot G_3(H_1+G_2)}$$

$$\downarrow$$



$$\frac{\dfrac{G_3(H_1+G_2)\cdot G_1}{1+H_2G_2+H_3\cdot G_3(H_1+G_2)}}{1+\dfrac{G_3(H_1+G_2)\cdot G_1}{1+H_2G_2+H_3\cdot G_3(H_1+G_2)}} = \frac{G_3(H_1+G_2)\cdot G_1}{1+\cancel{H_2G_2+H_3}\cdot G_3(H_1+G_2)} \div \frac{1+H_2G_2+H_3G_3(H_1+G_2)+G_3(H_1+G_2)\cdot G_1}{1+H_2G_2+\cancel{H_3G_3}(H_1+G_2)} = \frac{G_3G_1(H_1+G_2)}{1+H_2G_2+H_3G_3(H_1+G_2)+G_3G_1(H_1+G_2)}$$



b)

```
%Ejercicio 3

num = [1]
```

```
num = 1
```

```
den = [1 1]
```

```
den = 1×2
       1     1
```

```
G1 = tf (num, den)
```

```
G1 =

    1
  -----
  s + 1

Continuous-time transfer function.
```

```
num = [1]
```

```
num = 1
```

```
den = [1 2]
```

```
den = 1×2
       1     2
```

```
G2 = tf (num, den)
```

```
G2 =

    1
  -----
  s + 2

Continuous-time transfer function.
```

```
num = [1]
```

```
num = 1
```

```
den = [1 3]
```

```
den = 1×2
     1     3
```

```
G3 = tf (num, den)
```

```
G3 =

    1
  -----
  s + 3

Continuous-time transfer function.
```

```
H1 = zpk([],[-1 -1],1)
```

```
H1 =

     1
  -------
  (s+1)^2

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
H2 = zpk([],[-2 -2],1)
```

```
H2 =

     1
  -------
  (s+2)^2

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
H3 = zpk([],[-3 -3],1)
```

```
H3 =

     1
  -------
  (s+3)^2

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
H1G2par = parallel(H1,G2)
```

```
H1G2par =

  (s^2 + 3s + 3)
  --------------
  (s+1)^2 (s+2)

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
H2G2ser = series(H2,G2)
```

```
H2G2ser =

     1
  -------
  (s+2)^3

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
retorh2 = minreal(feedback(1, H2G2ser))
```

```
retorh2 =

        (s+2)^3
  --------------------
  (s+3) (s^2 + 3s + 3)

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
A = minreal( series(series(H1G2par,retorh2),G3))
```

```
A =

      (s+2)^2
  ---------------
  (s+3)^2 (s+1)^2

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
B = minreal(feedback(A, H3))
```

```
B =

                              (s+3)^2 (s+2)^2
  --------------------------------------------------------------------
  (s^2 + 1.998s + 1.062) (s^2 + 4.961s + 6.274) (s^2 + 7.041s + 12.75)

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
C = series (G1, B)
```

```
C =

                              (s+3)^2 (s+2)^2
  --------------------------------------------------------------------------
  (s+1) (s^2 + 1.998s + 1.062) (s^2 + 4.961s + 6.274) (s^2 + 7.041s + 12.75)

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
D = minreal(feedback (C,1))
```

```
D =

                              (s+2)^2 (s+3)^2
  -----------------------------------------------------------------------------
  (s+1.462) (s^2 + 4.955s + 6.236) (s^2 + 7.113s + 12.97) (s^2 + 1.47s + 1.024)

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

C)

```
ini = tf(1);

sysBA = append(ini,G1,H1, G2, H2,H3,G3);
input = 1;
output = 7;
q = [2 1 -7 0; 3 2 -5 -6; 4 2 -5 -6; 5 4 0 0; 6 7 0 0; 7 4 3 0];
sysBC = connect (sysBA, q, input, output);
sysBC = minreal (zpk(sysBC))
```

```
sysBC =

                              (s+2)^2 (s+3)^2
  -----------------------------------------------------------------------------
  (s+1.462) (s^2 + 4.955s + 6.236) (s^2 + 7.113s + 12.97) (s^2 + 1.47s + 1.024)

Continuous-time zero/pole/gain model.
```