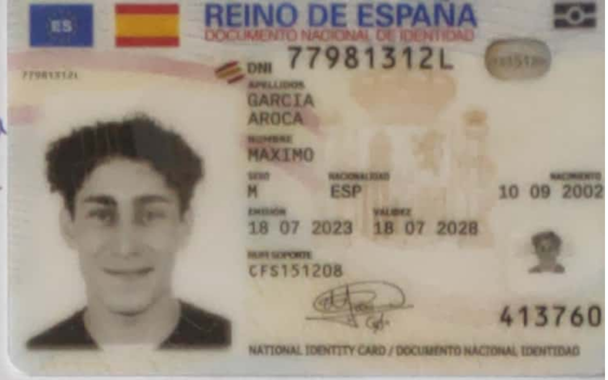
Tema 3: Tarea



Máximo García Aroca

Dada la ecuación diferencial $\boxed{(x+2)y' + y = e^x - 1}$

(1) Las EDO de variables separables tienen la forma:

" $F(x) + G(y)y' = 0$ "

Intento reorganizar la ecuación $\boxed{(x+2)y' + y = e^x - 1}$

$$y' = \frac{e^x - 1 - y}{x+2}$$

No hay forma de conseguir la forma de una EDO de variables separables.

(2) Las EDO lineales tienen la forma:

" $y' + P(x)y + q(x) = 0$ "

y las exactas → " $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ "

Organizando la ecuación:

$$(x+2)y' + y = e^x - 1$$

$$y' + \frac{1}{x+2}y = \frac{e^x - 1}{x+2}$$

$$y' + \frac{1}{x+2}y - \frac{e^x - 1}{x+2} = 0 \equiv y' + p(x)y + q(x) = 0$$

Como bajo esta demostración afirmo que es una ecuación diferencial lineal puedo afirmar a su vez que no es exacta puesto que no puedo reorganizar la ecuación para que tenga la forma $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$

Así que ya determinado el apartado (3), la ecuación es lineal, no exacta, y se halla la solución general:

1. Resuelvo la ecuación homogénea asociada

$$y' + \frac{1}{x+2} y = 0$$

$$y' = -\frac{1}{x+2} y$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x+2}$$

$$\frac{1}{y} dy = -\frac{1}{x+2} dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{1}{x+2} dx$$

$$\ln|y| + C_1 = -\ln|x+2| + C_2 \quad \longrightarrow \quad C_2 - C_1 = C$$

$$y_h(x) = e^{-\ln|x+2|}$$

quito la constante C porque me vale con una única solución

$$\boxed{y_h(x) = \frac{1}{x+2}}$$

2. Solución particular con Conjetura de Lagrange

$$y_p(x) = C(x) \cdot y_h(x)$$

$$y_p(x) = C(x) \cdot \frac{1}{x+2}$$

$$y_p'(x) = C'(x)\frac{1}{x+2} + C(x) \cdot \frac{-1}{(x+2)^2}$$

3. Sustituir en ecuación $y_p(x)$ e $y_p'(x)$

$$y' + \frac{1}{x+2}y + \frac{1-e^x}{x+2} = 0$$

$$C'(x)\frac{1}{x+2} + \cancel{C(x)\frac{-1}{(x+2)^2}} + \cancel{\frac{1}{x+2} \cdot C(x)} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{1-e^x}{x+2} = 0$$

$$C'(x)\frac{1}{x+2} + \frac{1-e^x}{x+2} = 0$$

$$C'(x) = e^x - 1$$

$$C(x) = \int e^x - 1\,dx$$

$$C(x) = e^x - x$$

4. Principio de Superposición

$$y = y_p(x) + C\,y_h(x)$$

$$y = e^x - x \cdot \frac{1}{x+2} + C\frac{1}{x+2}$$

$$y = \frac{e^x - x + C}{x+2}$$

(4) Solución particular que pasa por $(0,1)$ y $(-2,0)$

$$1 = \frac{e^0 - 0 + C}{0+2} = \frac{1+C}{2}$$

$$2 = 1 + C$$

$$\boxed{C = 1} \longrightarrow \boxed{y = \frac{e^x - x + 1}{x+2}}$$

$$0 = \frac{e^{-2} + 2 + C}{-2+2} = \frac{2+C}{e^2 \cdot 0} = \frac{2+C}{\emptyset} \notin \mathbb{R}$$

No es posible determinar la solución en este segundo caso de la constante C usando $(-2,0)$ ya que este punto no se ajusta a la solución general calculada. Dividir por cero en este contexto matemático no tiene sentido. Esto indica que o bien el punto no pertenece a la curva solución o que la solución particular encontrada no es válida.

WolframAlpha inteligencia computacional.

(x+2)y'+y=e^x-1

LENGUAJE NATURAL ENTRADA MATEMÁTICA TECLADO EXTENDIDO EJEMPLOS CARGAR ALEATORIO

Entrada

$$(x+2)\,y'(x)+y(x)=e^x-1$$

Ecuación exacta

$$\left(1-e^x+y(x)\right)dx+(2+x)\,dy=0$$

Ecuación exacta »

Clasificación de ecuaciones diferenciales ordinarias

ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden

Formas alternativas

$$e^x=(x+2)\,y'(x)+y(x)+1$$

$$y(x)=(-x-2)\,y'(x)+e^x-1$$

Forma expandida Solución paso a paso

$$x\,y'(x)+2\,y'(x)+y(x)=e^x-1$$

Solución de ecuación diferencial Solución paso a paso

$$y(x)=\frac{c_1}{x+2}-\frac{x}{x+2}+\frac{e^x}{x+2}$$

WolframAlpha inteligencia computacional.

1 = c_1/(0 + 2) - 0/(0 + 2) + e^0/(0 + 2)

LENGUAJE NATURAL ENTRADA MATEMÁTICA TECLADO EXTENDIDO EJEMPLOS CARGAR ALEATORIO

Se asume que "c_1" es una variable | Alternativa: una unidad

Entrada

$$1 = \frac{c_1}{0+2} - \frac{0}{0+2} + \frac{e^0}{0+2}$$

Resultado exacto

$$1 = \frac{c_1}{2} + \frac{1}{2}$$

Formas alternativas

$$c_1 = 1$$

$$1 = \frac{1}{2}(c_1 + 1)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{c_1}{2} = 0$$

Recta numérica

Solución

Solución paso a paso

$$c_1 = 1$$

WolframAlpha inteligencia computacional.

0 = (e^(-2)+2+c_1)/(-2+2)

LENGUAJE NATURAL | ENTRADA MATEMÁTICA | TECLADO EXTENDIDO | EJEMPLOS | CARGAR | ALEATORIO

Entrada

$$0 = \frac{\frac{1}{e^2} + 2 + c_1}{-2 + 2}$$

Resultado

Falso

Descargar página