1.3. Demostrar que la solución general de la ecuación homogénea siguiente es la suma: $\beta_0 + \beta_1 n + \beta_2 n^2$. Suponer que hay condiciones iniciales: y_{-1}, y_{-2}, y_{-3}.

$$y[n] - 3y[n-1] + 3y[n-2] - y[n-3] = 0$$

(P3)

Máximo García Aroca

$$y[n] - 3y[n-1] + 3y[n-2] - y[n-3] = 0$$

Transformada Z

Para conseguir la solución general que nos piden usamos la transformada Z para eliminar la recurrencia

$$Y(z) - 3\left(Y(z)\cdot z^{-1} + y[-1]\right) + 3\left(Y(z)\,z^{-2} + z^{-1}\cdot y[-1] + y[-2]\right) - \left(Y(z)\,z^{-3} + y[-1]z^{-2} + y[-2]z^{-1} + y[-3]\right) = \emptyset$$

"Voy a dejar $Y(z)$ solo"

$$Y(z) - 3Y(z)z^{-1} - 3y[-1] + 3Y(z)z^{-2} + 3z^{-1}y[-1] + 3y[-2] - Y(z)z^{-3} - y[-1]z^{-2} - y[-2]z^{-1} - y[-3] = 0$$

$$Y(z)\left(1 - 3z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3}\right) = 3y[-1] - 3z^{-1}y[-1] - 3y[-2] + y[-1]z^{-2} + y[-2]z^{-1} + y[-3]$$

$$Y(z) = \frac{3y[-1] - 3y[-1]z^{-1} - 3y[-2] + y[-1]z^{-2} + y[-2]z^{-1} + y[-3]}{1 - 3z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3}}$$

$$Y(z) = \frac{3y[-1] - 3y[-1]z^{-1} - 3y[-2] + y[-1]z^{-2} + y[-2]z^{-1} + y[-3]}{1 - 3z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3}} \cdot \frac{z^3}{z^3}$$

$$= \frac{3y[-1]z^3 - 3y[-1]z^2 - 3y[-2]z^3 + y[-1]z + y[-2]z^2 + y[-3]z^3}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$z^2 - 2z + 1 \to 0 = (z-1)^2$$

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1}}{2} = 1 \to \text{dos raíces}$$

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = (z-1)^3$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{3y[-1]z^2 - 3y[-1]z - 3y[-2]z^2 + y[-1] + y[-2]z + y[-3]z^2}{(z-1)^3} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{(z-1)^3} = \frac{A\overbrace{(z-1)^2}^{z^2+1-2z} + B(z-1) + C}{(z-1)^3} = \frac{Az^2 - 2Az + A + Bz - B + C}{(z-1)^3}$$

$$Az^2 + (-2A+B)z + (A - B + C) = 3y[-1]z^2 - 3y[-1]z - 3y[-2]z^2 + y[-1] + y[-2]z + y[-3]z^2$$

$$Az^2 + (-2A+B)z + (A - B + C) = \left(3y[-1] - 3y[-2] + y[-3]\right)z^2 + \left(-3y[-1] + y[-2]\right)z + \left(y[-1]\right)$$

Tenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A = 3y[-1] - 3y[-2] + y[-3] \quad \checkmark \\ -2A + B = -3y[-1] + y[-2] \to B = -3y[-1] + y[-2] + 2\cdot\left(3y[-1] - 3y[-2] + y[-3]\right) = 3y[-1] - 5y[-2] + 2y[-3] \\ A - B + C = y[-1] \to C = y[-1] - 3y[-1] + 3y[-2] - y[-3] + 3y[-1] - 5y[-2] + 2y[-3] \end{cases}$$

$$C = y[-1] - 2y[-2] + y[-3]$$

$$Y(z) = \left(3y[-1] - 3y[-2] + y[-3]\right)\cdot\frac{z}{(z-1)} + \left(3y[-1] - 5y[-2] + 2y[-3]\right)\frac{z}{(z-1)^2} + \left(y[-1] - 2y[-2] + y[-3]\right)\cdot\frac{z}{(z-1)^3}$$

Ahora con la transformada Z inversa obtenemos a través de $Y(z)$ una $y[n]$ con una ecuación no recurrente que resultará ser la proposición inicial que nos pedían demostrar como solución general a la ecuación homogénea planteada

Tendremos en cuenta que los términos independientes calculados son aquellos que nos dictan β_0 , β_1 , β_2 .

$$Y(z) = \beta_0 \frac{z}{z-1} + \beta_1 \frac{z}{(z-1)^2} + \beta_2 \frac{z}{(z-1)^3}$$

Inversión transformada Z

$$y[n] = \beta_0 + \beta_1 n + \beta_2 \frac{n(n-1)}{2} = \beta_0 + \beta_1 n + \frac{\beta_2}{2} \cdot n^2 - \frac{\beta_2}{2} n =$$

$$y[n] = \beta_0 + \underbrace{\left(\beta_1 - \frac{\beta_2}{2}\right)}_{\beta_1'} n + \underbrace{\frac{\beta_2}{2}}_{\beta_2'} n^2 = \underline{\underline{\beta_0 + \beta_1' n + \beta_2' n^2}}$$

se demuestra que es cierto

Hallar la transformada z inversa de:

$$\frac{1}{z^2-5z+6}$$

(PE4)

Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$(z-2)(z-3) = z^2-5z+6$

$$F(z) = \frac{1}{z^2-5z+6}$$

$$F(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z(z-2)(z-3)} \longrightarrow \frac{1}{z(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3}$$

$$1 = A(z-2)(z-3) + B(z-3)z + Cz(z-2)$$

$\underline{z=0}$

$1 = 6A \rightarrow A = 1/6$

$\underline{z=2}$

$1 = B(2-3)\cdot 2 = -2B$

$B = -1/2$

$\underline{z=3}$

$1 = C\cdot 3(3-2)$

$C = 1/3$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{6z} - \frac{1}{2(z-2)} + \frac{1}{3(z-3)} = \frac{1}{6}\cdot z^{-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})} + \frac{1}{3}\cdot\frac{z^{-1}}{(1-3z^{-1})}$$

Como: $a^n \Longleftrightarrow \frac{z}{z-a}$ y $\delta[n-k] \Longleftrightarrow z^{-k}$

$$f[n] = \frac{1}{6}\,\delta[n-1] - \frac{1}{2}\,2^n\cdot u[n] + \frac{1}{3}\cdot 3^n u[n]$$