Circuitos Electrónicos y Señales: Práctica 3

Máximo García Aroca

1 Resolución analítica de una función de transferencia de un sistema (Filtro FIR)

Dada la siguiente función de transferencia de un sistema: $H(z) = (1 - 0.5z^(- 1))(1 + 0.5z^(- 1))$

1.1 Pregunta 1.1

Calcula la ecuación de recurrencia asociada a la misma.

$$H(z) = (1 - 0{,}5z^{-1}) \cdot (1 + 0{,}5z^{-1})$$

Como $H(z)$ tiene la forma $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = (1 - 0{,}5z^{-1})(1 + 0{,}5z^{-1})$$

despejo $Y(z)$ para luego aplicar la transformada inversa y obtener $y[n]$

$$Y(z) = X(z)\left(1 - 0{,}5z^{-1}\right)\left(1 + 0{,}5z^{-1}\right)$$

$$Y(z) = X(z)\left(1 + 0{,}5z^{-1} - 0{,}5z^{-1} - 0{,}25z^{-2}\right)$$

$$Y(z) = X(z) - 0{,}25z^{-2}X(z)$$

Transformada Z inversa

$$\boxed{y[n] = x[n] - 0{,}25\,x[n-2]}$$

1.2 Pregunta 1.2

Dibuja el diagrama de ceros y polos de la función H(z).

Diagrama de polos y ceros

$$H(z) = (1 - 0{,}5z^{-1})(1 + 0{,}5z^{-1})$$

$$H(z) = (1 - 0{,}25z^{-2})$$

$$\times \frac{z^2}{z^2}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 - 0{,}25}{z^2}$$

Polos

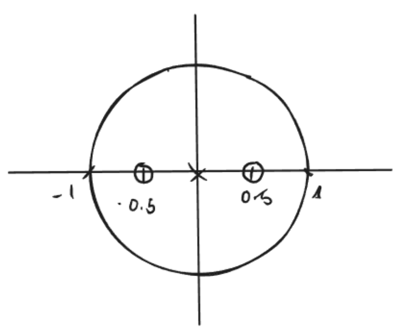
$z^2 = 0$

Dos raíces $z = 0$

Ceros

$z^2 - 0{,}25 = 0$

$z = \pm 0{,}5$



1.3 Pregunta 1.3

Gráfica aproximada de la magnitud del filtro.

$$\boxed{H(z) = \frac{z^2 - 0{,}25}{z^2}} \qquad \text{como} \quad z = e^{j\omega}$$

Si $\omega = 0 \rightarrow z = e^0 = 1 \rightarrow H(1) = \frac{1 - 0{,}25}{1} = 0{,}75$

Si $\omega = \frac{\pi}{4} \rightarrow z = e^{j\frac{\pi}{4}} \rightarrow H(z) = \frac{j - 0{,}25}{j} = \frac{j}{j} - \frac{0{,}25}{j} = j - 0{,}25 = j^2 - 0{,}25j = -1 - 0{,}25j$

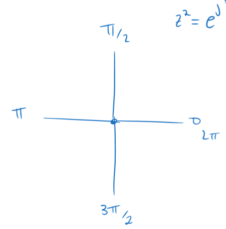
$z^2 = e^{j\pi/2} = \cos(\pi/2) + j\,\mathrm{sen}(\pi/2) = j$

Si $\omega = \frac{\pi}{2} \rightarrow z = e^{j\pi/2} \longrightarrow H(z) = \frac{-1 - 0{,}25}{-1} = 1{,}25$

$z^2 = e^{j\pi} \Rightarrow \cos(\pi) + j\,\mathrm{sen}(\pi) = -1$

Si $\omega = 3\pi/4 \rightarrow z = e^{j3\pi/4} \Longrightarrow H(z) = \frac{-j - 0{,}25}{-j} = 1 + \frac{0{,}25}{j} = j + 0{,}25 = \underline{\underline{-1 + 0{,}25j}}$

$z^2 = e^{j3\pi/2} = \cos(\overset{0}{\cancel{3\pi/2}}) + j\,\mathrm{sen}(\overset{-1}{\cancel{3\pi/2}}) = -j$



Si $\omega = \pi \rightarrow z = e^{j\pi} \Longrightarrow H(z) = \frac{1 - 0{,}25}{1} = 0{,}75$

$z^2 = e^{j2\pi} = \cos(2\pi) + j\,\mathrm{sen}(2\pi) = 1$

Como nos piden que sea una gráfica con la magnitud del filtro basado en los módulos pues calculo los módulos

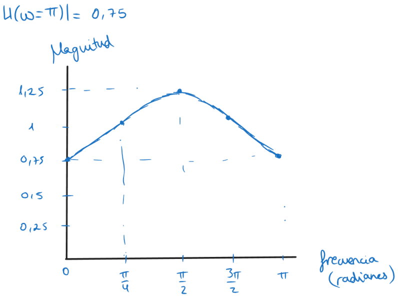
$|H(\omega = 0)| = 0{,}75$

$|H(\omega = \frac{\pi}{4})| = \sqrt{(-1)^2 + 0{,}25^2} = 1{,}0308$

$|H(\omega = \pi/2)| = 1{,}25$

$|H(\omega = \frac{3\pi}{4})| = \sqrt{(-1)^2 + 0{,}25^2} = 1{,}0308$

$|H(\omega = \pi)| = 0{,}75$



1.4 Pregunta 1.4

Señal senoidal pasada por el filtro.

Tenemos una señal senoidal con frecuencia de 100Hz, muestreada a 800Hz y con una amplitud máxima de 4.

Primero obtendré en qué se encuentra la señal de 100Hz para poder hallar la amplitud máxima de la salida al pasarla por el filtro.

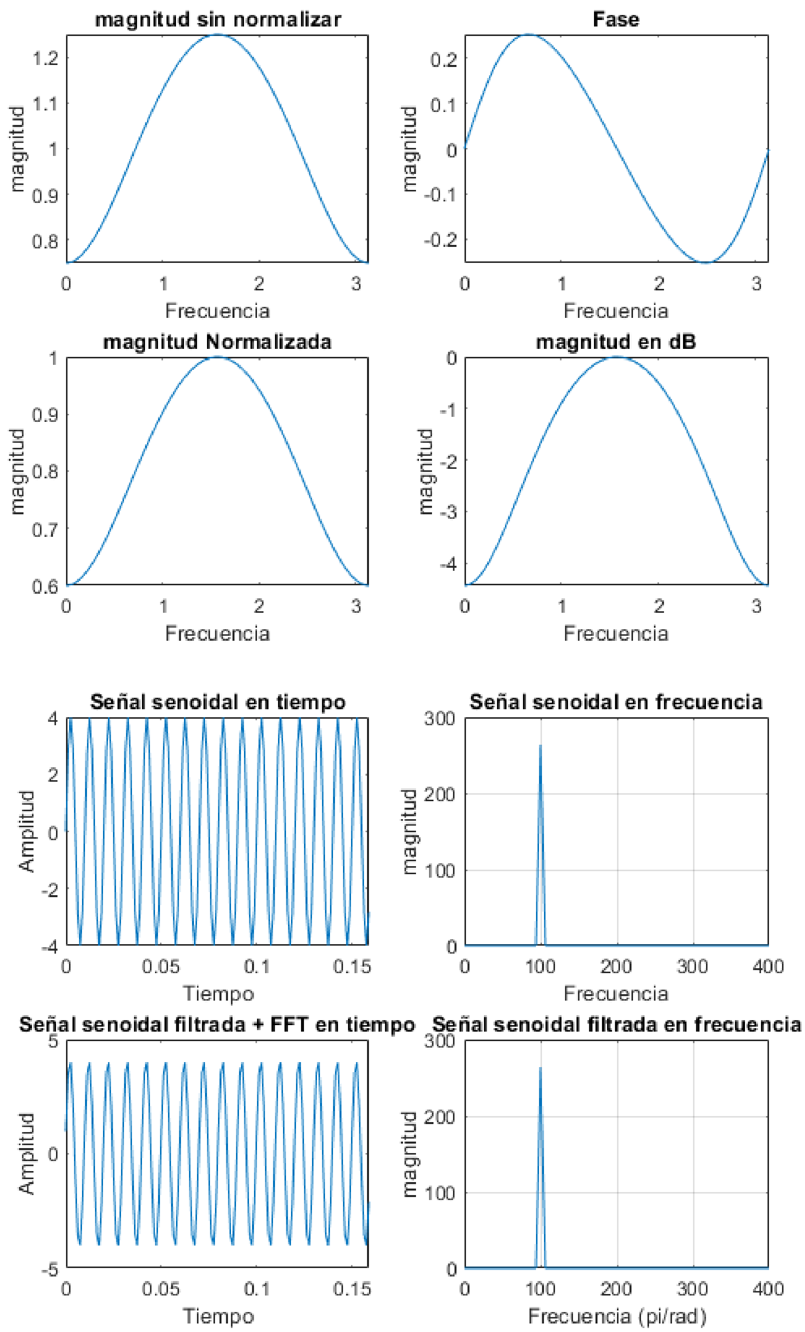
$$2\pi \cdot \frac{100Hz}{800Hz} = \frac{\pi}{4} \longrightarrow$$ Con este valor podemos obtener la magnitud correspondiente a esta frecuencia en el filtro

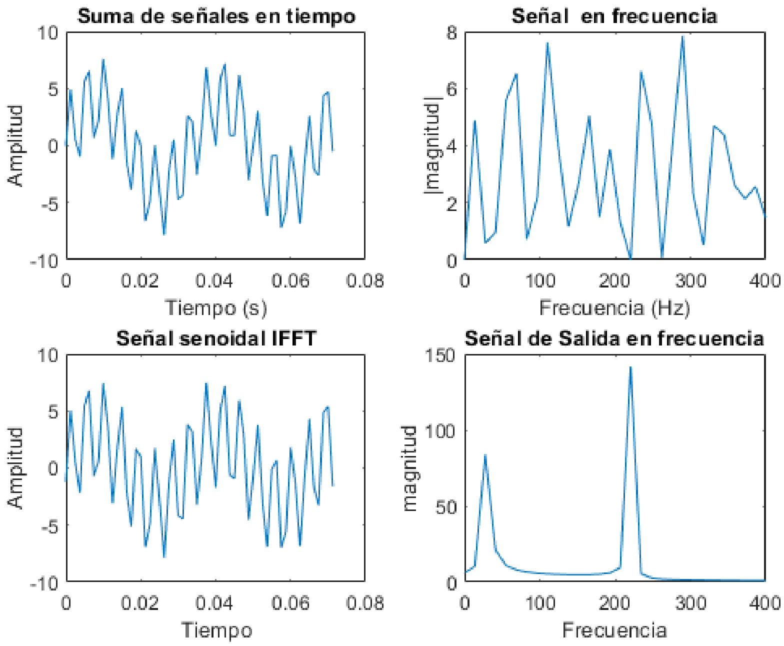
En la gráfica obtenida en el apartado 1.3 se obtiene 1,0308 de magnitud.

$$\underbrace{1{,}0308 \cdot 4 = 4{,}232}_{\text{Amplitud máxima}}$$

2 Script de MATLAB para calcular y aplicar el filtro H(z) anterior

Realizar un script en MATLAB que efectúe la representación en frecuencia del filtro H(z) del apartado 1, así como su aplicación sin normalizar sobre una señal senoidal definida, creando las siguientes gráficas:





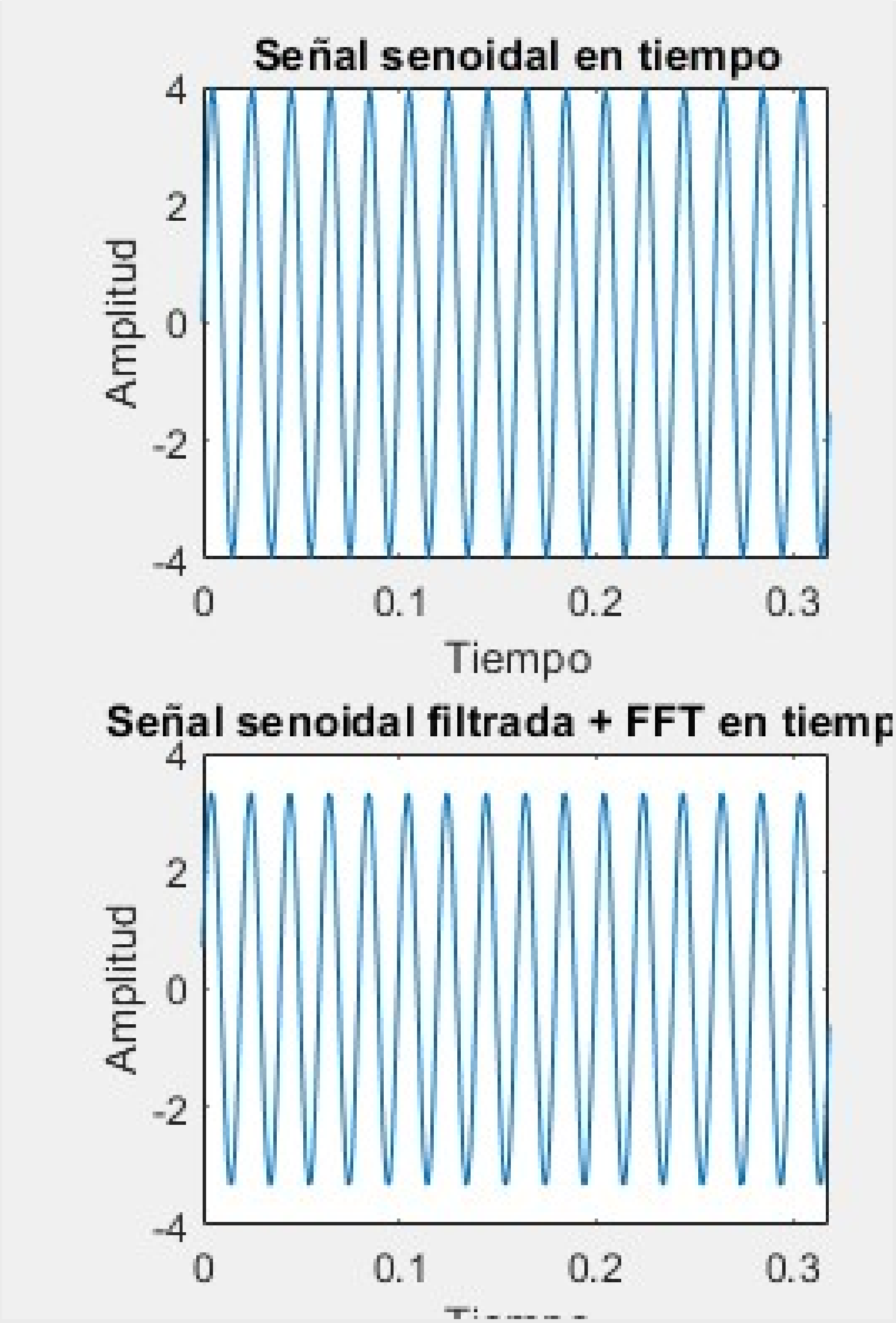
2.1 Pregunta 2.1

¿Qué cambios aprecias en la señal senoidal de 100 Hz filtrada, representada tanto en el tiempo como en la frecuencia? Modifica la frecuencia del seno de entrada y ponla a 50 Hz en vez de 100 Hz, y aplica el filtro nuevamente. ¿Qué cambios aprecias ahora? ¿Qué está haciendo el filtro sobre las señales de 100 Hz y de 50 Hz a la vista de estos resultados?

Repuesta:

Con respecto al tiempo la señal se modifica un poco pero la amplitud sigue siendo 4. En frecuencia cuando se le aplica el filtro la frecuencia se amplifica a 263.

Si reduzco la frecuencia a 50Hz se puede detectar una reducción de la amplitud y se obtiene tiene un pico en la frecuencia 50Hz.



A la de 100Hz el filtro la atenúa y a la de 50Hz la amplifica.

2.2 Pregunta 2.2

¿Qué cambios aprecias en la señal senoidal compuesta de dos senos sumados? Explica con tus palabras el efecto del filtro sobre ella, tanto en el tiempo como en la frecuencia.

Respuesta: En el tiempo se aprecia una pequeña amplificación en algunos valores. En frecuencia puede observar las dos frecuencias que la componen y como se atenúa la primera de 30Hz mientras que la segunda de 220Hz se amplifica.

3 Resolución analítica de una función de transferencia de un sistema (Filtro IIR)

Dada la siguiente función de transferencia de un sistema: $H(z) = (1 - 0.5z^{-1})/(1 + 0.5z^{-1})$

3.1 Pregunta 3.1

Calcula la ecuación de recurrencia asociada a la misma.

$$H(z) = \frac{(1 - 0,5z^{-1})}{(1 + 0,5z^{-1})}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(1 - 0,5z^{-1})}{(1 + 0,5z^{-1})}$$

$$Y(z)(1 + 0,5z^{-1}) = X(z)(1 - 0,5z^{-1})$$

$$Y(z) + 0,5z^{-1}Y(z) = X(z) - 0,5z^{-1}X(z)$$

Transformada Z inversa

$$\boxed{y[n] + 0,5\,y[n-1] = x[n] - 0,5\,x[n-1]}$$

3.2 Pregunta 3.2

Dibuja el diagrama de ceros y polos de la función H(z).

Polos y ceros de

$$H(z) = \left(\frac{1 - 0,5z^{-1}}{1 + 0,5z^{-1}} \right)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 0,5z^{-1}}{1 + 0,5z^{-1}} \cdot \frac{z}{z} = \frac{z - 0,5}{z + 0,5}$$

Ceros

$$Y(z) = z - 0,5 = 0$$

$$\downarrow$$

$$z = 0,5$$

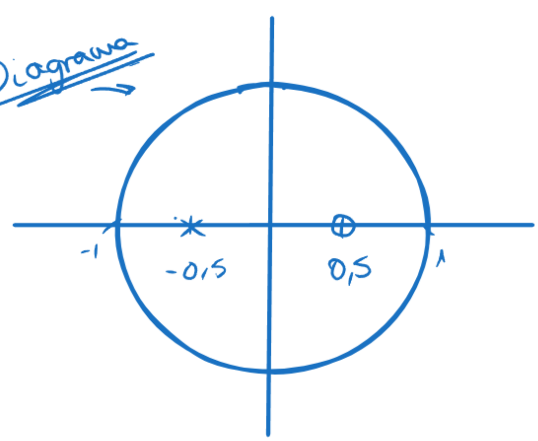
Polos

$$X(z) = z + 0,5 = 0$$

$$\downarrow$$

$$z = -0,5$$

Diagrama →



3.3 Pregunta 3.3

Gráfica aproximada de la magnitud del filtro.

$$H(z) = \frac{1-0{,}5z^{-1}}{1+0{,}5z^{-1}} = \frac{z-0{,}5}{z+0{,}5}$$

Como $z = e^{j\omega}$

Si $\omega = 0$ $\qquad z = e^{j\omega} = e^{j0} = 1$

$$H(z) = \frac{1-0{,}5}{1+0{,}5} = \frac{0{,}5}{1{,}5} = \frac{1}{3} \quad ; \quad |H(\omega=0)| = 1/3$$

Si $\omega = \frac{\pi}{4}$ $\qquad z = e^{j\omega} = e^{j\pi/4} = \cos(\pi/4) + j\operatorname{sen}(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$H(z) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}5}{\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}5} = \frac{\frac{-1+\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1+\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{2}+2}{4} - j\frac{-\sqrt{2}+2}{4}}{\frac{1+2+2\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{3}{4} + j\left(\frac{\sqrt{2}+2}{4} + \frac{\sqrt{2}-2}{4}\right)}{\frac{3+2\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4} + j\frac{2\sqrt{2}}{4}}{\frac{5+2\sqrt{2}}{4}} = \frac{\frac{3}{4} + j\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{5+2\sqrt{2}}{4}} = \frac{3}{5+2\sqrt{2}} + j\frac{\sqrt{2}\,4}{2(5+2\sqrt{2})} = 0{,}3832 + j\,0{,}3613$$

$$\left|H\left(\omega=\tfrac{\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{(0{,}3832)^2 + (0{,}3613)^2} = \underline{0{,}5267}$$

Si $\omega = \pi/2$ $\longrightarrow z = e^{j\omega} = e^{j\pi/2} = \cos(\pi/2) + j\operatorname{sen}(\pi/2) = j$

$$H(z) = \frac{j-0{,}5}{j+0{,}5} = \frac{(j-0{,}5)^2}{j^2-(0{,}5)^2} = \frac{j^2+0{,}5^2-2\cdot 0{,}5j}{-1-\frac{1}{4}} = \frac{-1+\frac{1}{4}-j}{-5/4} =$$

$$= \frac{-3/4 - j}{-5/4} = \frac{3}{5} + \frac{4j}{5} \longrightarrow \left|H\left(\omega=\tfrac{\pi}{2}\right)\right| = \sqrt{\left(\tfrac{3}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{4}{5}\right)^2} = \underline{1}$$

Si $\omega = \frac{3\pi}{4}$ $\qquad z = e^{j\omega} = e^{j\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + j\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$H(z) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}5}{-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}5} = \frac{\frac{-1-\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1-\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\left(\frac{-1-\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{3-2\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4} + j\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{5-2\sqrt{2}}{4}} =$$

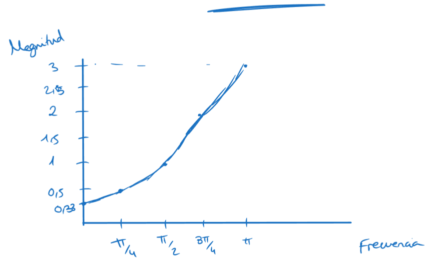
$$= \frac{3}{5-2\sqrt{2}} + j\frac{2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}} = 1{,}3815 + j\,1{,}3025$$

$$\left|H\left(\omega=\tfrac{3\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{1{,}3815^2 + 1{,}3025^2} = \underline{1{,}8987}$$

Si $\omega = \pi$ $\qquad z = e^{j\omega} = e^{j\pi} = \overset{-1}{\cos(\pi)} + j\,\overset{0}{\operatorname{sen}(\pi)}$

$$H(z) = \frac{-1-0{,}5}{-1+0{,}5} = \frac{-1{,}5}{-0{,}5} = 3$$

$$\underline{|H(\omega=\pi)| = 3}$$



3.4 Pregunta 3.4

Señal senoidal pasada por el filtro.

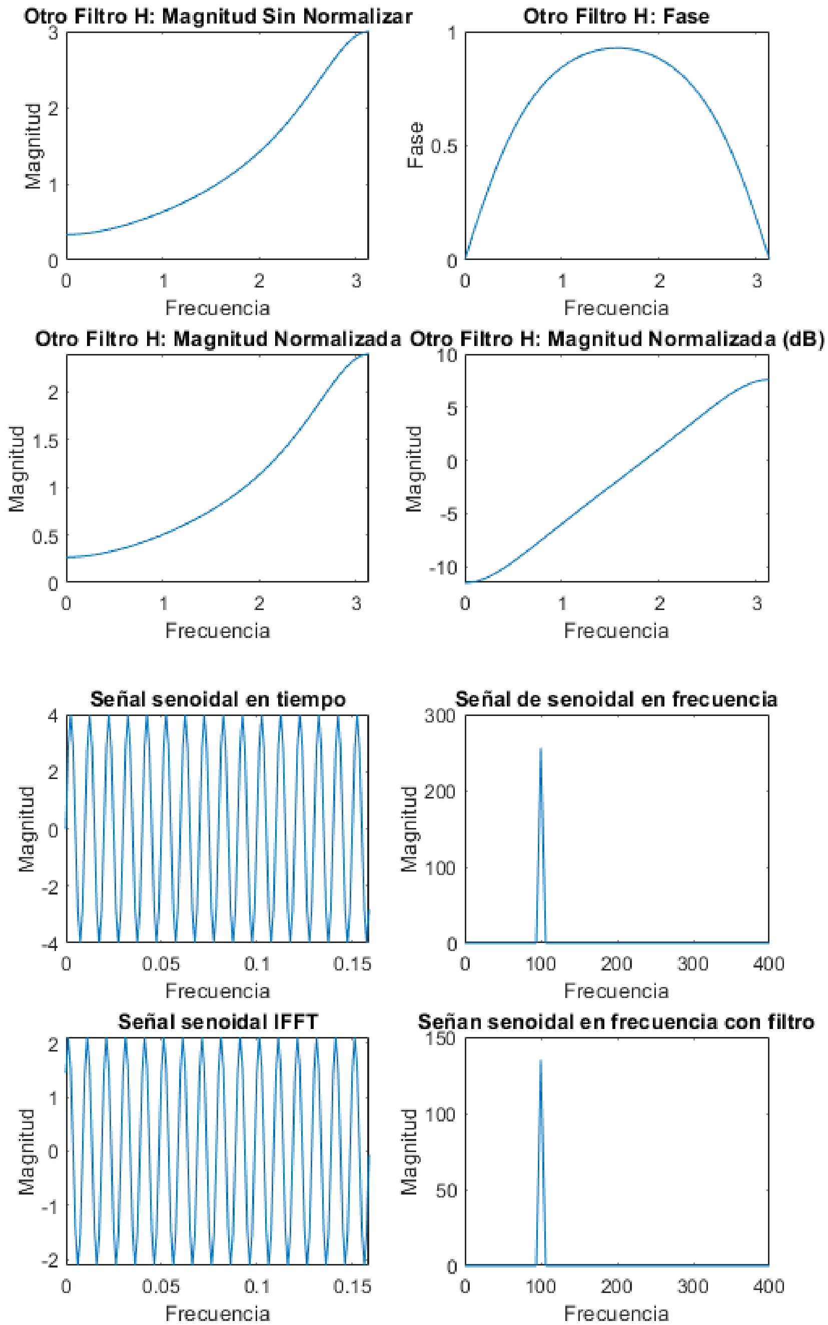
Volvemos a aplicar el filtro a una señal senoidal de frecuencia 100Hz muestreada a 800Hz y con una amplitud máxima de 4.

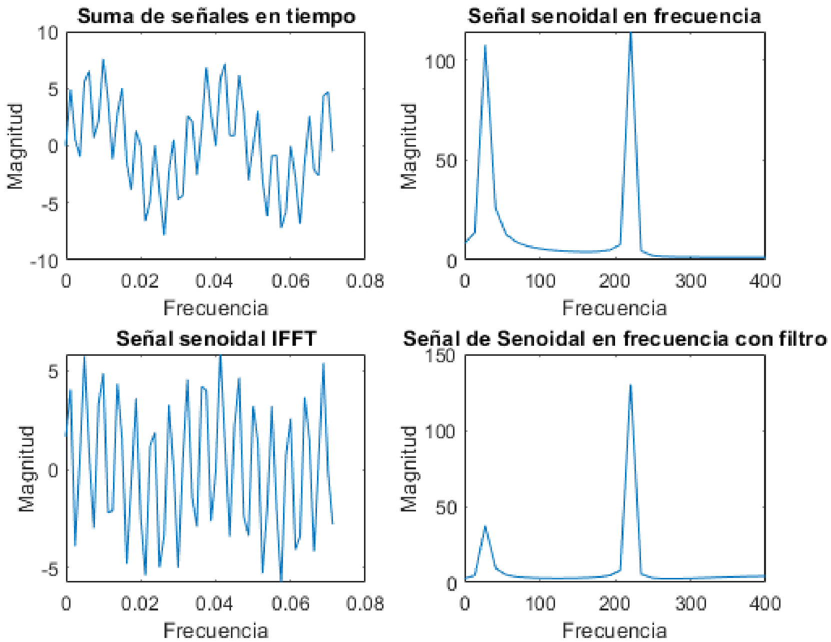
$2\pi \cdot \frac{100}{800} = \frac{\pi}{4} \longrightarrow$ corresponde con una magnitud de 0,5267

$0{,}5267 \cdot 4 = \underline{2{,}1068}$ Amplitud máxima con el filtro aplicado

4 Script de MATLAB para calcular y aplicar el filtro H(z) anterior

Realizar un script en MATLAB que efectúe la representación en frecuencia del filtro H(z) del apartado 3, así como su aplicación sin normalizar sobre una señal senoidal definida, creando las siguientes gráficas:





4.1 Pregunta 4.1

¿Qué cambios aprecias en la señal senoidal de 100 Hz filtrada, representada tanto en el tiempo como en la frecuencia? Modifica la frecuencia del seno de entrada y ponla a 50 Hz en vez de 100 Hz, y aplica el filtro nuevamente. ¿Qué cambios aprecias ahora? ¿Qué está haciendo el filtro sobre las señales de 100 Hz y de 50 Hz a la vista de estos resultados?

Repuesta:

Con el filtro IIR cambia la amplitud de 4 a 2 Como se puede comprobar en las figuras 5a y 5c. La señal que tiene frecuencia 100 se atenúa en magnitud como muestran la figuras 5b y 5d.

Al cambiar la frecuencia de 100Hz a 50Hz se reduce la amplitud a 1.5. A su vez, la señal que ahora tiene frecuencia de 50Hz también se ve reducida en magnitud, por lo cual la señal se atenúa.

El filtro atenúa tanto a las señales de 100Hz como las de 50Hz a diferencia con el filtro anterior que solo atenuaba la de 50Hz y la de 100Hz la magnificaba.

4.2 Pregunta 4.2

¿Qué cambios aprecias en la señal senoidal compuesta de dos senos sumados? Explica con tus palabras el efecto del filtro sobre ella, tanto en el tiempo como en la frecuencia.

Respuesta: En el tiempo se aprecia una pequeña amplificación en algunos valores. En frecuencia se puede observar las dos frecuencias que la componen y como se atenúa la primera de 30Hz mientras que la segunda de 220Hz se amplifica. Estos valores se pueden ver en la figura 6 donde en la figura 6a y 6c se muestra la amplificación de la señal y en las 6b y 6d se ve como se atenúa la señal de 30Hz y se magnifica un poco más la de 220Hz.