

# Notas de Electromagnetismo

José Manuel Dávila Dávila

Susana Valdez Alvarado

Adrián Vallejo Martínez





## Índice general

<b>1</b>	<b>Campo electrostático</b>	<b>5</b>
1.1	Ley de Coulomb	5
1.2	Campo Eléctrico	9
1.3	Ley de Gauss	19
1.4	Potencial electrostático	24
1.4.1	Superficie equipotencial	33
1.5	Energía electrostática	37
1.5.1	Energía potencial eléctrica	38
1.5.2	Densidad de energía	40
1.6	Sistema de conductores	44
1.6.1	Energía	46
1.6.2	Condensadores	46
<b>2</b>	<b>Problemas electrostáticos</b>	<b>51</b>
2.1	Desarrollo multipolar eléctrico	51
2.2	Campo electrostático en dieléctricos	57
2.2.1	Polarización	57
2.2.2	Cargas de polarización	58
2.3	Ley de Gauss en dieléctricos	60
2.4	Campo de desplazamiento	61
2.5	Condiciones en la frontera	63
2.6	Energía en dieléctricos	74
2.7	Momento de rotación	82

<b>2.8</b>	<b>Ecuaciones de Poisson y de Laplace</b>	<b>85</b>
2.8.1	El teorema de unicidad . . . . .	86
<b>2.9</b>	<b>Solución de la ecuación de Laplace</b>	<b>88</b>
2.9.1	Coordenadas cartesianas . . . . .	88
2.9.2	Coordenadas cilíndricas . . . . .	97
2.9.3	Coordenadas esféricas . . . . .	106
<b>2.10</b>	<b>Método de imágenes</b>	<b>122</b>
<b>3</b>	<b>Campo magnetostático . . . . .</b>	<b>135</b>
3.1	Corriente eléctrica	135
3.2	Fuerza magnética. Campo magnético	139
3.3	Ecuación de Ohm	146
3.4	Ley de Biot y Savart	155
3.5	Ley de Ampère	169
3.6	Flujo magnético.	173
3.7	Potencial vectorial magnético	176
3.8	Ecuación de Poisson	178
3.9	Desarrollo multipolar magnético	179
<b>4</b>	<b>Campo magnético en materiales . . . . .</b>	<b>183</b>
4.1	Magnetización	183
4.2	Corrientes de magnetización	183
4.3	Potencial escalar magnético	187
4.4	Ley de Ampère en medios permeables	189
4.5	Intensidad del campo magnético	190
<b>Índice</b>	<b>.....</b>	<b>201</b>

Ley de Coulomb
Campo Eléctrico
Ley de Gauss
Potencial electrostático
Superficie equipotencial
Energía electrostática
Energía potencial eléctrica
Densidad de energía
Sistema de conductores
Energía
Condensadores



# 1 — Campo electrostático

En nuestro Universo existen cuatro fuerzas fundamentales:

1. **Fuerza de gravedad.** Es la fuerza de atracción entre masas.
2. **Fuerza electromagnética.** Es la fuerza entre partículas cargadas en movimiento.
3. **Fuerza fuerte.** Es la fuerza entre nucleones.
4. **Fuerza débil.** Es la fuerza presente en la desintegración del neutrón.

Una partícula *sabe* de la existencia de otra partícula cuando ambas intercambian una partícula, *partícula de interacción*. En el caso de la fuerza eléctrica, la partícula de interacción es el *fotón*, una partícula sin masa que se mueve a la velocidad de la luz.<sup>1</sup> En la teoría cuántica de campos, las partículas son el resultado de la cuantización de un *campo*, por ejemplo, el fotón resulta de la cuantización del campo electromagnético. Si se considera el campo gravitacional, debería existir una partícula de cuantización de dicho campo, esta partícula hipotética es llamada *gravitón* la cual no tiene masa y se mueve a la velocidad de la luz.

## 1.1 Ley de Coulomb

A finales del siglo XVIII se hicieron observaciones de las fuerzas entre cargas eléctricas. Los resultados de estas observaciones se resumen en tres principios:

1. Hay dos clases de carga eléctrica, conocidas como positiva y negativa.
2. Dos cargas puntuales ejercen fuerzas entre sí que actúan a lo largo de la línea que las une y son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que las separa.
3. Estas fuerzas son proporcionales al producto de las cargas, son repulsivas para cargas iguales y atractivas para cargas contrarias.

Los dos últimos principios se conocen como *la ley de Coulomb* para cargas puntuales, la cual puede escribirse concisamente como

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (1.2)$$

donde  $\mathbf{F}_{12}$  es la fuerza que ejerce la carga  $q_2$  sobre la carga  $q_1$ ,  $\mathbf{r}_{12}$  es el vector que va de  $q_2$  a  $q_1$ ,  $\hat{\mathbf{r}}_{12}$  es el vector unitario que está en dirección de  $\mathbf{r}_{12}$  y  $r_{12}$  es la magnitud de  $\mathbf{r}_{12}$  (ver la fig. 1.1).

---

<sup>1</sup>El valor experimental de la velocidad de la luz es  $2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$  pero con fines prácticos se usa el  $3 \times 10^8 \text{ m/s}$  y se denota por  $c$ .

Finalmente  $\epsilon_0$  es la permitividad del espacio libre y numéricamente es igual a  $8.854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$ . De esta forma se tiene

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9874 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \approx 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}. \quad (1.3)$$

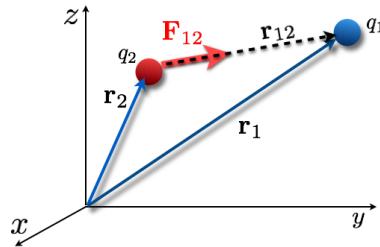


Figura 1.1: La fuerza  $\mathbf{F}_{12}$  está en la misma dirección que el vector  $\mathbf{r}_{12}$ .

Por la tercera ley de Newton, la carga  $q_1$  ejerce una fuerza sobre la carga  $q_2$ , ver la fig. 1.2, la fuerza es

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}. \quad (1.4)$$

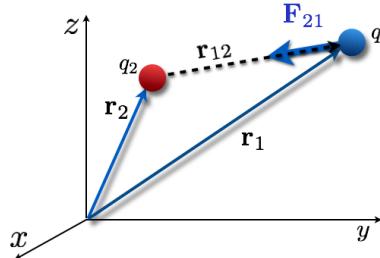


Figura 1.2: La fuerza  $\mathbf{F}_{21}$ .

Si se considera que las cargas  $q_1$  y  $q_2$  de la figura 1.1 son positivas, entonces existe una fuerza de repulsión entre las cargas que las obliga a alejarse una de la otra. Con fines prácticos se considera que las cargas mantienen su posición, por el momento no interesa la causa del arreglo. Si se introduce una tercera carga  $q_3$ , ésta perturba el sistema de las dos cargas en proporción a la carga de  $q_3$ , por la ley de Coulomb.

### Propiedades de la carga

1. La primera propiedad se menciona en uno de los principios de la sección anterior. Sólo hay dos tipos de carga: positiva y negativa.
2. La carga neta se conserva.
3. La carga eléctrica está cuantizada, es decir, solo aparece en múltiplos enteros de una carga fundamental que es la carga del electrón.<sup>2</sup>

En la actualidad sabemos de partículas que tiene una carga fraccionaria de  $e$ , los *cuarks*:

<sup>2</sup>Se denota la carga del electrón con  $e$  y su magnitud es de  $1.602 \times 10^{-19}$  Coulombs.

Nombre	Símbolo	Carga
<i>up</i> (arriba)	u	2/3
<i>down</i> (abajo)	d	-1/3
<i>strange</i> (extraño)	s	-1/3
<i>charm</i> (encanto)	c	2/3
<i>bottom</i> (fondo)	b	-1/3
<i>top</i> (cima)	t	2/3

### Aspectos del electromagnetismo

- *Electrostática*: La carga fuente está en reposo mientras que la carga de prueba puede estar en movimiento.
- *Magnetostática*: La carga fuente se encuentra en movimiento, a velocidad constante, mientras que la carga de prueba puede estar en reposo o movimiento.
- *Electrodinámica*: La carga fuente es acelerada mientras que la carga de prueba puede estar en movimiento o reposo.

### Principio de superposición

Si se tienen más de dos cargas puntuales, las fuerzas mutuas se determinan por la aplicación repetida de la ec. (1.1). Si se considera un sistema de  $N$  cargas, la fuerza sobre la  $i$ -ésima carga está dada por

$$\mathbf{F}_i = q_i \sum_{j \neq i}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij}, \text{ con } \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \quad (1.5)$$

la suma se extiende a todas las cargas excepto a la  $i$ -ésima. La ecuación (1.5) es el principio de superposición de fuerzas, que dice que la fuerza total que actúa sobre un cuerpo es la suma vectorial de las fuerzas individuales que actúan sobre él.

En una distribución macroscópica de carga, cualquier elemento pequeño de volumen contiene un gran número de electrones. Podemos describir entonces una distribución de carga en términos de una *función de densidad de carga*, definida como el límite de la carga por unidad de volumen a medida que el volumen se vuelve infinitesimal. Sin embargo, debe tenerse cuidado al aplicar esta clase de descripción a problemas atómicos, puesto que en estos casos interviene un pequeño número de electrones y el proceso de tomar el límite no tiene sentido. La *densidad lineal de carga* está definida por

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}, \quad (1.6)$$

la *densidad superficial de carga* está definida por

$$\sigma = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds}, \quad (1.7)$$

y la *densidad volumétrica de carga* está definida por

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dv}. \quad (1.8)$$

Imaginemos por un momento que se tiene una distribución volumétrica de carga, con densidad de carga  $\rho(\mathbf{r}')$ ,<sup>3</sup> y una carga puntual  $q$ . Calcular la fuerza que la distribución continua de carga genera sobre la carga  $q$  es una tarea interesante en este momento. Se toma un diferencial de carga de la distribución continua de carga,  $dq'$ , el cual genera un diferencial de fuerza sobre la carga puntual  $q$ , ver la figura 1.3.

<sup>3</sup>Se usa el vector  $\mathbf{r}'$  para localizar la distribución continua de carga

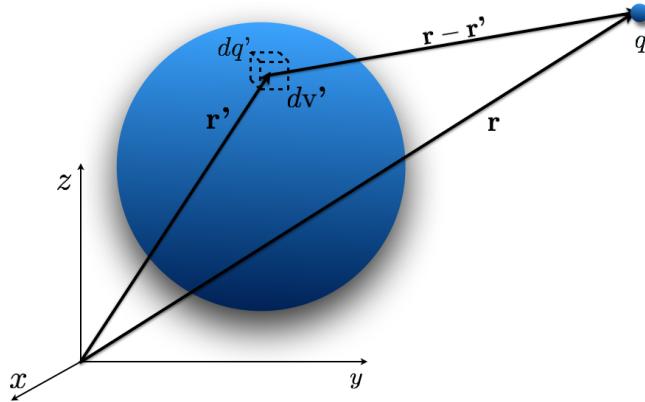


Figura 1.3: Fuerza entre una distribución volumétrica de carga y una carga puntual

Tal fuerza se calcula, como antes, por la ley de Coulomb:

$$d\mathbf{F} = \frac{q dq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (1.9)$$

De la definición de densidad volumétrica de carga, ec. (1.8), se tiene

$$d\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}'. \quad (1.10)$$

La fuerza total se obtiene de la suma vectorial de todos los diferenciales de fuerza, es decir

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}', \quad (1.11)$$

la integral se realiza sobre el volumen de la distribución continua de carga. De forma análoga para un distribución superficial de carga, con densidad superficial  $\sigma(\mathbf{r}')$ , y una distribución lineal de carga, con densidad lineal  $\lambda(\mathbf{r}')$ , la fuerza sobre una carga puntual  $q$  está dada por

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \sigma(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{s}', \quad (1.12)$$

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_L \lambda(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{l}'. \quad (1.13)$$

■ **Ejemplo 1.1** Calcular la fuerza que las partículas cargadas  $q_1$  y  $q_2$  ejercen sobre una carga de prueba  $Q$ , si están dispuestas como en la figura 1.4.

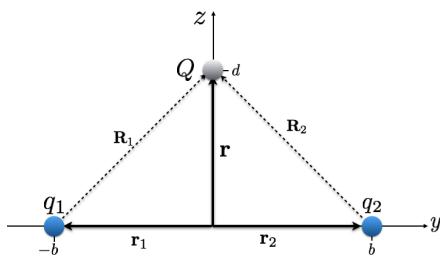


Figura 1.4:  $\mathbf{r}_1 = -b\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{r}_2 = b\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{r} = d\mathbf{k}$ .

*Solución:* De la ec.(1.5) tenemos

$$\mathbf{F}_Q = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 Q}{R_1^3} \mathbf{R}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 Q}{R_2^3} \mathbf{R}_2, \quad (1.14)$$

con

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = b\mathbf{j} + d\mathbf{k}, \quad (1.15)$$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_2 = -b\mathbf{j} + d\mathbf{k}. \quad (1.16)$$

Por lo tanto

$$\mathbf{F}_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(b^2 + d^2)^{3/2}} [b(q_1 - q_2)\mathbf{j} + d(q_1 + q_2)\mathbf{k}]. \quad (1.17)$$

**Observación 1.1** Si suponemos que  $q_1 = q_2 = q$ , la componente horizontal se cancela

$$\therefore \mathbf{F}_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Qqd}{(b^2 + d^2)^{3/2}} \mathbf{k}. \quad (1.18)$$

**Observación 1.2** Si suponemos que  $q_1 = -q_2$ , la componente vertical se cancela

$$\therefore \mathbf{F}_Q = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Qqb}{(b^2 + d^2)^{3/2}} \mathbf{j}. \quad (1.19)$$

## 1.2 Campo Eléctrico

Para introducir el concepto de *campo eléctrico* considérese dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$ , así como la fuerza que ejerce  $q_2$  sobre  $q_1$ ,  $\mathbf{F}_{12}$ , el sistema se muestra en la figura 1.1. La carga que genera la fuerza se llamará *carga fuente* y la carga sobre la que se calcula la fuerza se llamará *carga de prueba*. Se sabe que la carga de prueba también genera una fuerza sobre la carga fuente, en otras palabras, la carga de prueba perturba a la carga fuente.

Se define, *operacionalmente*, el campo eléctrico de la carga  $q_2$  en  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}_1)$ , como la fuerza neta sobre una carga de prueba por unidad de carga, esto es

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{F}_{12}}{q_1},$$

esta definición no es del todo satisfactoria ya que la carga de prueba perturba la carga fuente. Para evitar que la carga fuente genere una perturbación significativa a la fuente se toma el límite en que la carga de prueba tiende a cero, esto es

$$\mathbf{E}_2 = \lim_{q_1 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_{12}}{q_1}. \quad (1.20)$$

La unidad de medida del campo eléctrico es

$$[\mathbf{E}] = \frac{\text{Newtons}}{\text{Coulombs}}.$$

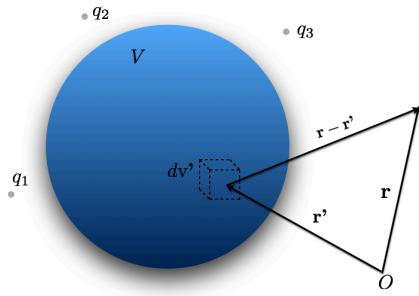


Figura 1.5: El vector  $\mathbf{r}$  es la posición de la carga de prueba y  $\mathbf{r}'$  se extiende sobre la distribución de carga total, incluyendo las cargas puntuales.

Las ecuaciones (1.1) y (1.5) proporcionan formas sencillas de obtener una expresión del campo eléctrico debido a una distribución de carga dada como en la figura 1.5. Sea una distribución de carga tal que consiste de  $N$  cargas puntuales, una distribución volumétrica de carga especificada por la densidad de carga  $\rho(\mathbf{r}')$  en el volumen  $V$  y una distribución superficial caracterizada por la densidad superficial de carga  $\sigma(\mathbf{r}')$ , sobre una superficie  $S$ . Si una carga de prueba puntual se encuentra en el punto  $\mathbf{r}$ , experimenta una fuerza dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} q_i + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') d\mathbf{a}'. \quad (1.21)$$

Así que el campo eléctrico en el punto  $\mathbf{r}$  está dado por la siguiente expresión

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} q_i + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') d\mathbf{a}'. \quad (1.22)$$

La dirección del campo eléctrico puede representarse gráficamente por *líneas de campo*, ver fig.1.6. Estas líneas ayudan a visualizar el efecto que una carga, o distribución de carga, tiene en el espacio a su alrededor. Algunas reglas que nos ayudarán a visualizar y describir los campos eléctricos producidos por cargas:

- Las líneas del campo eléctrico se originan en cargas positivas y terminan en cargas negativas.
- El campo eléctrico neto en algún punto es la suma vectorial de todos los campos eléctricos en el punto.
- Las líneas del campo eléctrico nunca se cruzan.
- Las líneas del campo eléctrico son siempre perpendiculares a la superficie de un conductor en equilibrio.

La densidad de líneas en una región dada es una medida de la intensidad del campo en dicha región. Por densidad de líneas entendemos como el número de líneas por unidad de superficie que atraviesan una pequeña área normal a la dirección de las líneas, en un punto dado.

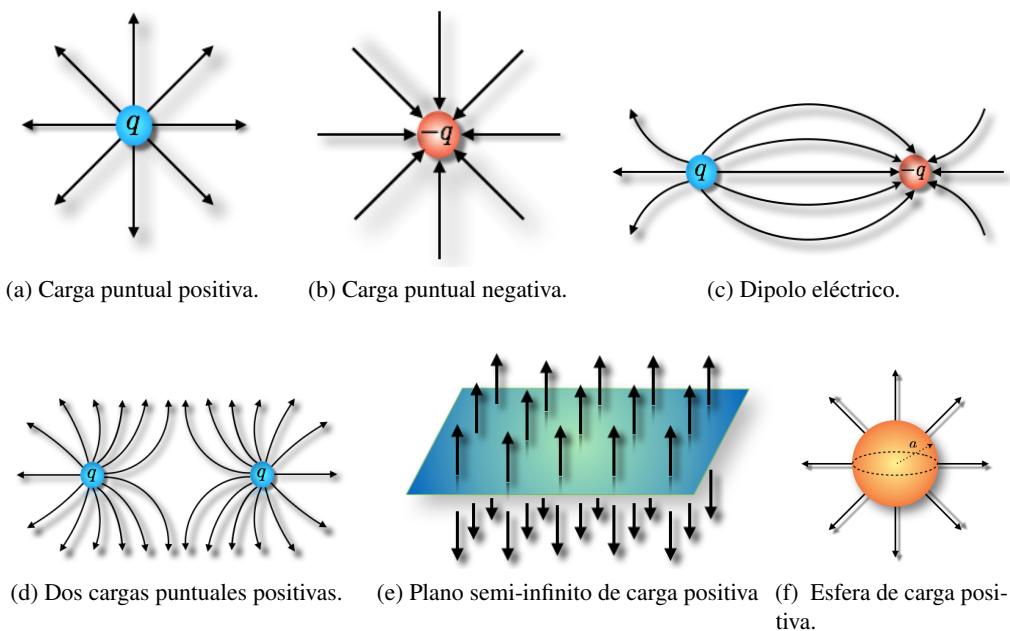
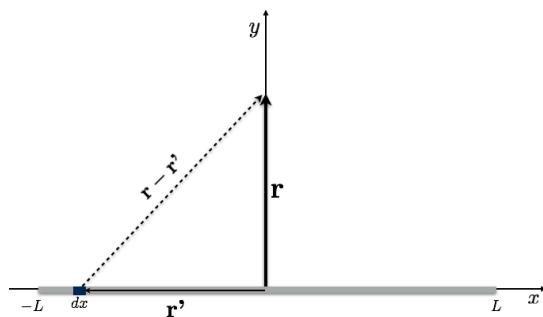


Figura 1.6: Líneas de campo eléctrico.

■ **Ejemplo 1.2** Un alambre de longitud  $2L$  está cargado con densidad de carga lineal uniforme  $\lambda$  como se muestra en la figura 1.7.

- Encontrar el campo eléctrico a una distancia cualquiera del centro del alambre.
- ¿Cuál es el campo eléctrico si el alambre es infinito?

Figura 1.7:  $\mathbf{r} = y\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{r}' = -x\mathbf{i}$ .

*Solución:*

- De la ec.(1.22) tenemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} q.$$

Tomando una diferencial de carga

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq. \quad (1.23)$$

Por otra parte, como se trata de una distribución lineal de carga se tiene que

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \Rightarrow dq = \lambda dl = \lambda dx. \quad (1.24)$$

Entonces

$$\begin{aligned} d\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} (x\mathbf{i}+y\mathbf{j}), \\ \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \int_{-L}^L \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} (x\mathbf{i}+y\mathbf{j}). \end{aligned} \quad (1.25)$$

El campo eléctrico se anula en la dirección  $\mathbf{i}$  debido a que se trata de una función antisimétrica con respecto a  $x$  en el intervalo  $[-L, L]$ , entonces

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda y \int_{-L}^L \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} \mathbf{j}. \quad (1.26)$$

Resolvemos esta integral por sustitución trigonométrica haciendo  $x = y \tan \theta$  entonces  $dx = y \sec^2 \theta d\theta$  por lo cual

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda y^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sec^2 \theta}{(y^2 \tan^2 \theta + y^2)^{3/2}} d\theta \mathbf{j}, \quad (1.27)$$

así

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta \mathbf{j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y} \left. \sin \theta \right|_{\theta_1}^{\theta_2} \mathbf{j}. \quad (1.28)$$

Regresando a la variable original se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y} \left. \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right|_{-L}^L \mathbf{j}, \\ \therefore \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{y\sqrt{L^2+y^2}} \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

b) Si el alambre es infinito, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{y\sqrt{L^2+y^2}} \mathbf{j}, \\ \therefore \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{y} \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

■

■ **Ejemplo 1.3** Una varilla en forma de semicírculo de radio  $a$  está cargada uniformemente con una carga total  $Q$ , ver figura 1.8. Calcular la intensidad del campo eléctrico en el centro de la curvatura.

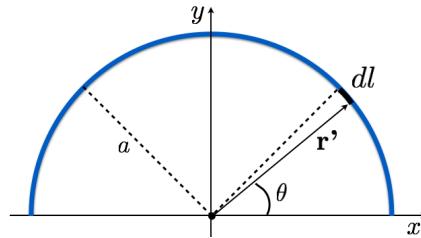


Figura 1.8: Varilla semicircular con densidad de carga  $\lambda$ .

*Solución:*

Sabemos que

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dQ. \quad (1.31)$$

Dada la simetría del problema es conveniente usar coordenadas polares, así

$$\mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (1.32)$$

$$\mathbf{r}' = a \cos \theta \mathbf{i} + a \sin \theta \mathbf{j}, \quad (1.33)$$

$$dQ = \lambda dl, \quad (1.34)$$

donde  $dl$  es el elemento de línea

$$\Rightarrow dQ = \lambda a d\theta. \quad (1.35)$$

Entonces

$$\begin{aligned} d\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda a \frac{-a \cos \theta \mathbf{i} - a \sin \theta \mathbf{j}}{(a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} d\theta, \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} \int_0^\pi (-\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j}) d\theta. \end{aligned} \quad (1.36)$$

La integral sobre la dirección  $\mathbf{i}$  se anula, por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} \cos \theta \Big|_0^\pi \mathbf{j}, \\ \therefore \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

■

■ **Ejemplo 1.4** Dado un disco de radio  $a$  con densidad superficial de carga uniforme  $\sigma$ , ver figura 1.10.

- Encontrar el campo eléctrico a una distancia  $z$  sobre el centro del disco.
- Determinar el campo eléctrico si el disco es infinito.

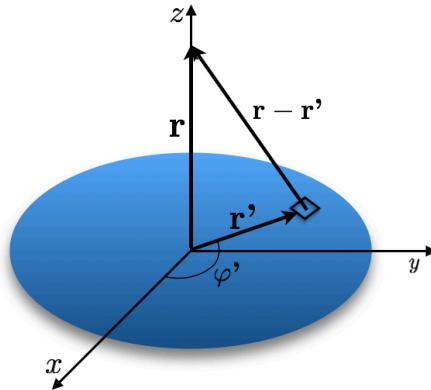


Figura 1.9: Disco cargado con densidad de carga  $\sigma$ .

*Solución:*

- Se tiene que

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dQ,$$

con

$$\mathbf{r} = z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}' = r' \hat{\mathbf{r}}',$$

$$dQ = \sigma da,$$

donde  $da$  es el elemento de área en coordenadas cilíndricas en el plano  $XY$

$$\Rightarrow dQ = \sigma r' dr' d\varphi,$$

así

$$\begin{aligned} d\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \frac{(z\mathbf{k} - r'\hat{\mathbf{r}}')}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} r' dr' d\varphi, \\ \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(z\mathbf{k} - r'\hat{\mathbf{r}}')}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} r' dr' d\varphi. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Si colocamos a  $\hat{\mathbf{r}}'$  en sus componentes rectangulares ( $\hat{\mathbf{r}}' = \cos \varphi' \mathbf{i} + \sin \varphi' \mathbf{j}$ ), al integrar respecto de  $\varphi'$  solo se tiene

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma z \int_0^a \frac{r'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} dr' \mathbf{k}. \quad (1.39)$$

Ahora hacemos el cambio de variable  $u = z^2 + r'^2$ , entonces  $du = 2r' dr'$ , por lo cual

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_{z^2}^{z^2+a^2} \frac{du}{u^{3/2}} \mathbf{k} = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \frac{1}{u^{1/2}} \Big|_{z^2}^{z^2+a^2} \mathbf{k}, \\ \therefore \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

b) Si el disco es infinito se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \lim_{a \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \mathbf{k}, \\ \therefore \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

■

■ **Ejemplo 1.5** Un cilindro circular recto de radio  $a$  y altura  $L$  se orienta a lo largo del eje  $z$ , tiene una densidad de carga volumétrica dada por  $\rho(z) = \rho_0 + \beta z$  con respecto a un origen en el centro del cilindro. Encuentre la fuerza sobre la carga puntual  $q$  colocada en el centro del cilindro.

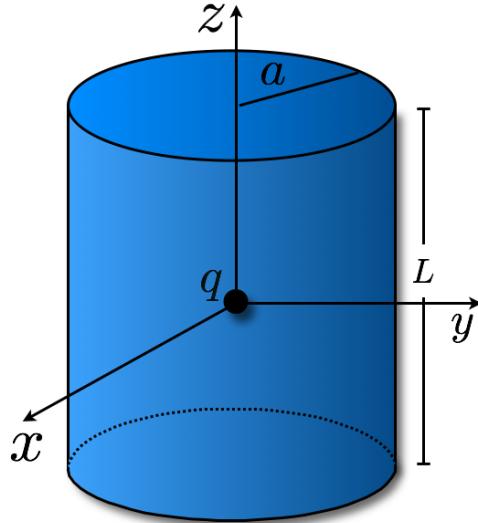


Figura 1.10: Cilindro circular recto con densidad de carga  $\rho(z)$ .

*Solución.*

Sabemos que

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}.$$

Tomando una diferencial de campo eléctrico producido por el cilindro

$$d\mathbf{F} = q d\mathbf{E}.$$

Podemos tomar la diferencial del campo como si fuera el campo producido por un disco, ec.(1.40) pero ahora tendremos una densidad volumétrica de carga, de esta forma

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= q \frac{\rho(z)}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) dz \mathbf{k}, \\ \Rightarrow \mathbf{F} &= \frac{q}{2\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (\rho_0 + \beta z) \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) dz \mathbf{k}, \\ &= \frac{q}{2\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left( \rho_0 - \frac{\rho_0 z}{\sqrt{z^2 + a^2}} + \beta z - \frac{\beta z^2}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) dz \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

La integral del segundo y tercer término se anula debido a que son funciones impares, mientras que el primer y cuarto término son funciones pares, así

$$\mathbf{F} = \frac{q}{\epsilon_0} \int_0^{\frac{L}{2}} \left( \rho_0 - \frac{\beta z^2}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) dz \mathbf{k}. \quad (1.43)$$

Para la segunda integral hacemos el cambio de variable

$$z = a \tan \theta \Rightarrow dz = a \sec^2 \theta d\theta, \quad (1.44)$$

de modo que

$$\mathbf{F} = \frac{q}{\epsilon_0} \left( \frac{L\rho_0}{2} - \beta a^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan^2 \theta \sec \theta d\theta \right) \mathbf{k}. \quad (1.45)$$

Resolvamos la integral

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan^2 \theta \sec \theta d\theta &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta d\theta, \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sec^2 \theta \sec \theta - \sec \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Para el primer término integramos por partes, tomando

$$\begin{aligned} u &= \sec \theta \Rightarrow du = \tan \theta \sec \theta d\theta, \\ dv &= \sec^2 \theta d\theta \Rightarrow v = \tan \theta. \end{aligned}$$

Para el segundo término se multiplica por  $\frac{\sec \theta + \tan \theta}{\sec \theta + \tan \theta}$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan^2 \theta \sec \theta d\theta &= \sec \theta \tan \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan^2 \theta \sec \theta d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sec \theta \left( \frac{\sec \theta + \tan \theta}{\sec \theta + \tan \theta} \right) d\theta, \\ \Rightarrow 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan^2 \theta \sec \theta d\theta &= \sec \theta \tan \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sec^2 \theta + \sec \theta \tan \theta}{\sec \theta + \tan \theta} d\theta. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Se hace otro cambio de variable en el segundo miembro de la igualdad

$$\omega = \sec \theta + \tan \theta \Rightarrow d\omega = (\tan \theta \sec \theta + \sec^2 \theta) d\theta \quad (1.48)$$

Con lo que

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan^2 \theta \sec \theta d\theta &= \frac{1}{2} \left( \sec \theta \tan \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} - \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{\omega} \right), \\ &= \frac{1}{2} \left( \sec \theta \tan \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} - \ln \omega \Big|_{\omega_1}^{\omega_2} \right). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Regresando a la variable  $\theta$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan^2 \theta \sec \theta d\theta = \frac{1}{2} \left[ \sec \theta \tan \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} - \ln(\tan \theta + \sec \theta) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \right]. \quad (1.50)$$

Para retornar a la variable  $z$  se observa que

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{z^2 + a^2}}{a} \text{ y } \tan \theta = \frac{z}{a}. \quad (1.51)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan^2 \theta \sec \theta d\theta &= \frac{1}{2} \left[ \frac{z\sqrt{z^2 + a^2}}{a^2} - \ln \left( \frac{z}{a} + \frac{\sqrt{z^2 + a^2}}{a} \right) \right] \Big|_0^{\frac{L}{2}}, \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{L}{2a^2} \sqrt{\frac{L^2}{4} + a^2} - \ln \left( \frac{L}{2a} + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{L^2}{4} + a^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Sustituyendo esta última expresión en (1.45)

$$\therefore \mathbf{F} = \frac{q}{2\epsilon_0} \left( L\rho_0 + \beta \left[ -\frac{L}{2} \sqrt{\frac{L^2}{4} + a^2} + a^2 \ln \left( \frac{L}{2a} + \sqrt{\frac{L^2}{4a^2} + 1} \right) \right] \right) \mathbf{k}. \quad (1.53)$$

■

■ **Ejemplo 1.6** Dada una esfera sólida de radio  $a$  cargada uniformemente con densidad volumétrica de carga  $\rho$ , ver figura 1.11a. Encontrar el campo eléctrico fuera de la esfera.

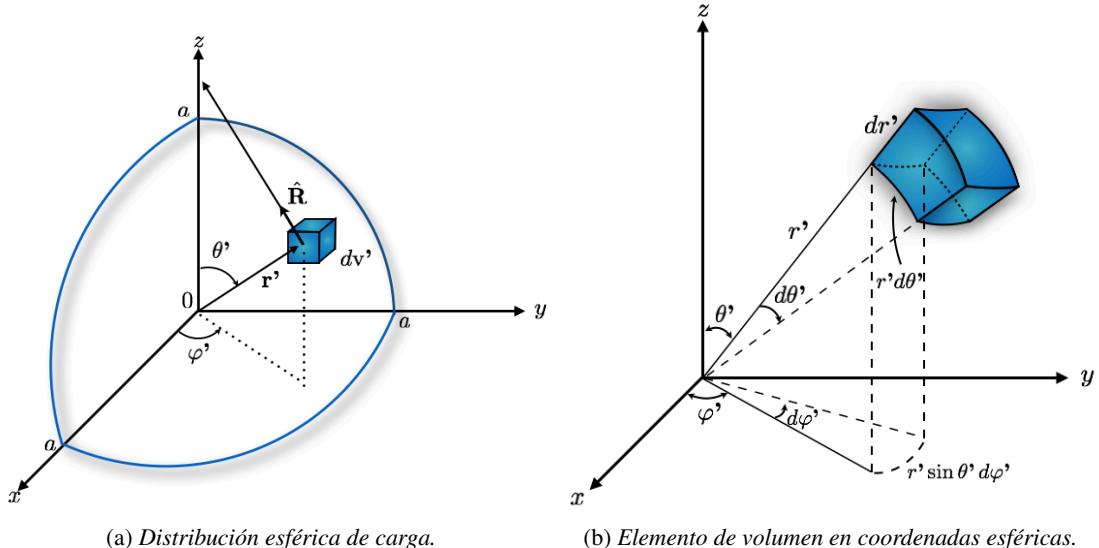


Figura 1.11: Sistema en coordenadas esféricas

*Solución:*

Partiendo de la ecuación

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq,$$

con

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= z\mathbf{k}, \text{ (la elección de este vector es debido a la simetría esférica del problema)} \\ \mathbf{r}' &= r'\hat{\mathbf{r}}', \\ dq &= \rho dv',\end{aligned}$$

donde  $dv'$  es el elemento de volumen, figura 1.11b,

$$\Rightarrow dq = \rho r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi',$$

así

$$\begin{aligned}d\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho \frac{z\mathbf{k} - r'\hat{\mathbf{r}}'}{(z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta')^{3/2}} r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi' , \\ \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{z\mathbf{k} - r'\hat{\mathbf{r}}'}{(z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta')^{3/2}} r'^2 \sin \theta' d\varphi' d\theta' dr'. \quad (1.54)\end{aligned}$$

Por otro lado, es conveniente colocar  $\hat{\mathbf{r}}'$  en función de sus componentes rectangulares

$$\hat{\mathbf{r}}' = \sin \theta' \cos \varphi' \mathbf{i} + \sin \theta' \sin \varphi' \mathbf{j} + \cos \theta' \mathbf{k},$$

así al integrar respecto de  $\varphi'$  solo queda la componente  $\mathbf{k}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho \int_0^a \int_0^\pi \frac{z - r' \cos \theta'}{(z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta')^{3/2}} r'^2 \sin \theta' d\theta' dr' \mathbf{k}. \quad (1.55)$$

Ahora realizamos la integral respecto de  $\theta'$  haciendo un cambio de variable

$$\begin{aligned}u &= z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta', \\ \Rightarrow \cos \theta' &= -\frac{u - z^2 - r'^2}{2zr'} \quad y \quad du = 2zr' \sin \theta' d\theta'. \quad (1.56)\end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{z - r' \cos \theta'}{(z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta')^{3/2}} \sin \theta' d\theta' &= \frac{1}{2zr'} \int_{(z-r)^2}^{(z+r)^2} \left( \frac{z}{u^{3/2}} + \frac{u - z^2 - r'^2}{2zu^{3/2}} \right) du \\ &= \frac{r'^2 + u - z^2}{2z^2 r' \sqrt{u}} \Big|_{(z-r)^2}^{(z+r)^2}, \\ &= \frac{1}{z^2} \left( \frac{z + r'}{z + r'} + \frac{z - r'}{z - r'} \right), \\ &= \frac{2}{z^2}. \quad (1.57)\end{aligned}$$

Entonces continuando con el cálculo del campo eléctrico se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\rho}{z^2 \epsilon_0} \int_0^a r'^2 dr' \mathbf{k}, \\ \therefore \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{a^3 \rho}{3z^2 \epsilon_0} \mathbf{k}. \quad (1.58)\end{aligned}$$

■

**Observación 1.3** Si el resultado anterior se escribe en función de la carga total de la esfera,  $q$ , entonces

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3}, \quad (1.59)$$

así

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \mathbf{k}, \quad (1.60)$$

es decir, el campo eléctrico que se observa fuera de la esfera es el mismo que se observaría para una carga puntual de carga  $q$  localizada en el origen del sistema de coordenadas.

■ **Ejemplo 1.7** Una línea de carga de longitud  $L$  y  $\lambda = \text{constante}$  está sobre el eje  $z$  positivo con sus extremos colocados en  $z = z_0$  y  $z = z_0 + L$  como se muestra en la figura 1.12. Encontrar la fuerza total ejercida sobre esta línea de carga por una distribución de carga, esférica y uniforme, con centro en el origen y radio  $a < z_0$ .

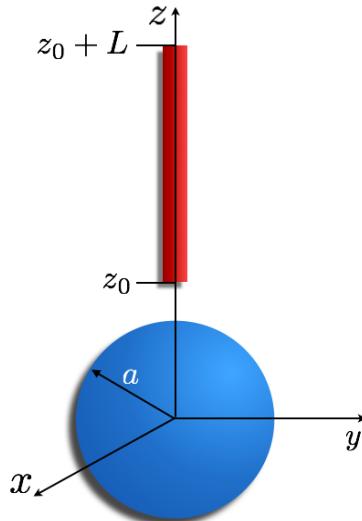


Figura 1.12: Fuerza por una distribución esférica de carga sobre una distribución lineal de carga constante  $\lambda$ .

*Solución:* Sabemos que

$$\mathbf{F} = q_l \mathbf{E},$$

donde  $q_l$  es la carga de la línea y  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico producido por la esfera, entonces tomando una diferencial de carga

$$d\mathbf{F} = dq_l \mathbf{E},$$

con  $dq_l = \lambda dz$ . Usamos el resultado del campo eléctrico producido por una esfera (1.58)

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{a^3 \rho \lambda}{3\epsilon_0} \int_{z_0}^{z_0+L} \frac{dz}{z^2} \mathbf{k}, \\ &= \frac{a^3 \rho \lambda}{3\epsilon_0 z} \Big|_{z_0+L}^{z_0} \mathbf{k}, \\ \therefore \mathbf{F} &= \frac{a^3 \rho \lambda L}{3\epsilon_0 z_0 (z_0 + L)} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

### 1.3 Ley de Gauss

Consideremos una carga puntual  $q$  localizada en el origen de nuestro sistema de referencia. El campo eléctrico en el punto  $\mathbf{r}$  está dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (1.62)$$

Al realizar la integral de superficie de la componente normal de  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  sobre una superficie cerrada que **contenga** a la carga  $q$  (ver fig. 1.13), se tiene

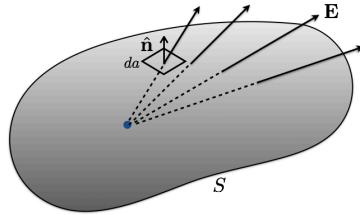


Figura 1.13: Superficie cerrada  $S$  que encierra una carga puntual  $q$  en el origen.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{r^2} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.63)$$

Donde  $d\Omega$  es el elemento de ángulo sólido subtendido en  $q$  por la superficie  $da$ . Si hay  $N$  cargas puntuales encerradas por la superficie  $S$ , entonces cada carga tiende un ángulo sólido completo, por lo cual

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i. \quad (1.64)$$

Sea  $Q_{enc} = \sum_{i=1}^N q_i$ , la carga encerrada por la superficie  $S$ , entonces

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}, \quad (1.65)$$

esta expresión se conoce como *ley de Gauss en su forma integral*. Este resultado se puede generalizar a otras distribuciones de carga. Si  $S$  es una superficie cerrada que limita el volumen  $V$ ,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv. \quad (1.66)$$

Por otra parte, si se usa el teorema de la divergencia<sup>4</sup> en (1.66):

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv. \quad (1.67)$$

Dado que este resultado se aplica para cualquier volumen  $V$ , se pueden igualar los integrandos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.68)$$

esta ecuación es conocida como *ley de Gauss en su forma diferencial* y es una de las ecuaciones de Maxwell.

Lo práctico de la ley de Gauss, es que proporciona una forma sencilla de calcular los campos eléctricos en situaciones simétricas en lugar de utilizar las integrales dadas anteriormente.

<sup>4</sup>  $\oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv$ .

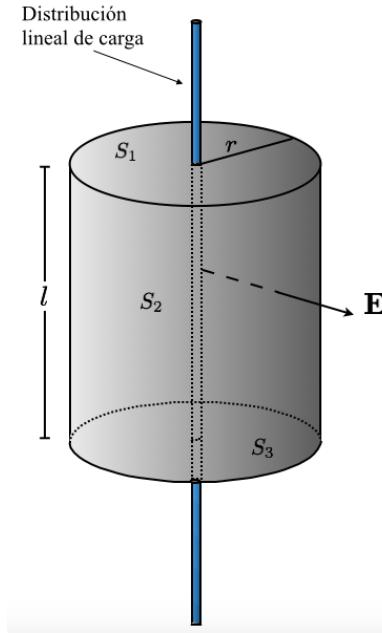


Figura 1.14: Superficie gaussiana con forma cilíndrica que encierra una línea de carga infinita.

■ **Ejemplo 1.8** Considere una carga lineal infinitamente larga con densidad de carga uniforme  $\lambda$  por unidad de longitud, figura 1.14. Por integración directa encuentre el campo eléctrico a una distancia  $r$  de la linea.

*Solución*

Sabemos que

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0},$$

con

$$Q_{enc} = \lambda l.$$

Debido a la simetría del problema podemos elegir una superficie gaussiana como se muestra en la fig. 1.14, así

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 da + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 da + \int_{S_3} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_3 da. \quad (1.69)$$

Las superficies  $S_1$  y  $S_3$  no contribuyen puesto que el campo eléctrico es perpendicular a los vectores normales  $\hat{\mathbf{n}}_1$  y  $\hat{\mathbf{n}}_3$ . La superficie  $S_2$  contribuye con

$$\int_{S_2} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 da = \int_{S_2} E da = EA, \quad (1.70)$$

donde  $A$  es el área de la superficie  $S_2$  entonces

$$\begin{aligned} E 2\pi r l &= \frac{\lambda l}{\epsilon_0}, \\ \therefore E &= \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}, \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (1.71)$$

■

■ **Ejemplo 1.9** Un objeto conductor tiene en su interior una cavidad hueca. Si se introduce en su interior una carga puntual  $q$  en la cavidad, demuestre que se induce una carga  $-q$  sobre la superficie de la cavidad. [Sugerencia: utilice la ley de Gauss].

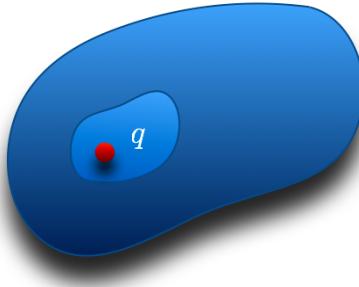


Figura 1.15: En el interior de la cavidad del conductor hay una carga  $q$  que no toca las pareces de ésta

*Solución.*

Se tiene de la ley de Gauss que

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}.$$

Consideremos una superficie gaussiana que rodee la cavidad cerca de la superficie pero dentro del conductor. Como  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  en todo el interior del conductor, no existe flujo en ella. Si se introduce una carga puntual  $q$  en el interior de la cavidad, la ley de Gauss requiere todavía que la carga neta encerrada por la superficie gaussiana sea cero, por lo que una carga  $-q$  se debe inducir sobre la superficie de la cavidad. ■

■ **Ejemplo 1.10** Dos placas infinitas, paralelas y conductoras, están separadas por una distancia  $d$ , ver figura 1.16. Las placas tienen densidades de carga uniformes  $\sigma$  y  $-\sigma$ , respectivamente, sobre sus superficies interiores.

- Obtenga una expresión para el campo eléctrico entre las placas.
- Demuestre que el capo eléctrico en las regiones exteriores a las placas es cero.

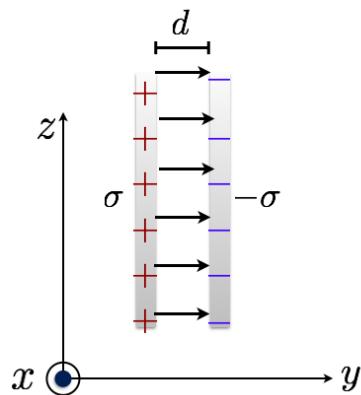


Figura 1.16: Placas conductoras infinitas y paralelas.

*Solución:*

- a) Para obtener el campo eléctrico entre las placas primero calculemos el campo eléctrico producido por una placa que coincide con el plano  $xz$ . Consideremos una superficie gaussiana de forma cilíndrica como se muestra en la figura 1.17. De ntonla ley de Gauss tenemos

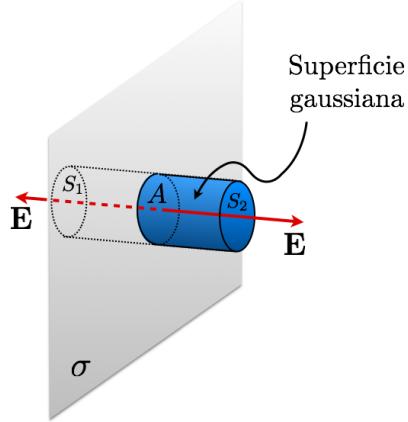


Figura 1.17: Placa infinita con densidad de carga  $\sigma$ , que coincide con el plano  $xz$ .

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da &= \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot (-\mathbf{j}) da + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{j}) da \\ &= \int_{S_1} E da + \int_{S_2} E da, \end{aligned} \quad (1.72)$$

entonces

$$2EA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}, \quad (1.73)$$

donde  $A$  es el área de la de la superficie  $S_1$  y  $S_2$ . Por otra parte sabemos que

$$dq = \sigma da,$$

$$Q = \sigma A,$$

entonces de la ec. (1.73)

$$E_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad (1.74)$$

así que entre las placas se tiene

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{j}. \quad (1.75)$$

De manera análoga, el campo producido por la placa con densidad  $-\sigma$  entre las placas es

$$\mathbf{E}_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{j}. \quad (1.76)$$

Entonces el campo eléctrico entre las placas se obtiene aplicando el principio de superposición

$$\therefore \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{j}. \quad (1.77)$$

- b) Para campo eléctrico exterior a las placas, suponemos una superficie gaussiana en forma de cilindro que encierra ambas placas, así de la ley de Gauss

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}. \quad (1.78)$$

Aquí la carga encerrada es la de ambas placas

$$Q_+ = \sigma A,$$

$$Q_- = -\sigma A,$$

entonces

$$Q_{enc} = Q_+ + Q_- = 0. \quad (1.79)$$

Como la carga encerrada es cero el flujo total que pasa por la superficie es cero

$$\therefore \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (1.80)$$

■

### Carácter conservativo del campo electrostático

Del calculo diferencial de varias variables se sabe que

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (1.81)$$

entonces el campo eléctrico de la ec. (1.62) se puede expresar de la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \nabla \left( \frac{1}{r} \right). \quad (1.82)$$

Al definir

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (1.83)$$

se tiene

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(r). \quad (1.84)$$

Del calculo diferencial de varias variables se cumple siempre que para una función escalar  $\phi(r)$

$$\nabla \times \nabla\phi(r) = \mathbf{0}, \quad (1.85)$$

por lo tanto

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (1.86)$$

Al usar el *teorema de Stokes*<sup>5</sup> y la ecuación (1.86), se obtiene

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (1.87)$$

donde  $C$  es una trayectoria cerrada arbitraria. Esto implica que el campo electrostático es un *campo conservativo*. Por otra parte, la relación (1.84) requiere que la función escalar  $\phi(r)$  sea *continua y suave*, de esta forma el campo  $\mathbf{E}$  está definido en todo punto del espacio.

**Observación 1.4** En caso de que la distribución de carga esté fuera del origen del sistema de coordenadas,  $\mathbf{r}'$ , entonces

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (1.88)$$

---

<sup>5</sup>  $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a}$ .

## 1.4 Potencial electrostático

La ec. (1.83) define el potencial electrostático

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

De la ec. (1.84) podemos escribir

$$\int_{r_{ref}}^r \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = - \int_{r_{ref}}^r \nabla\phi(r') \cdot d\mathbf{r}', \quad (1.89)$$

donde  $r_{ref}$  indica el punto en el que  $\phi$  es *cero*. Por otra parte, de la definición de gradiente se tiene

$$\nabla\phi(r') \cdot d\mathbf{r}' = d\phi(r'). \quad (1.90)$$

Sustituyendo (1.90) en (1.89)

$$\int_{r_{ref}}^r \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = - \int_{r_{ref}}^r d\phi(r'). \quad (1.91)$$

Por lo tanto

$$\phi(r) = - \int_{r_{ref}}^r \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}', \quad (1.92)$$

que simplemente es la inversa de (1.84). El campo escalar  $\phi$  también recibe el nombre de *potencial escalar eléctrico*, su unidad de medida es

$$[\phi] = Volt,$$

por lo cual el campo eléctrico también se puede medir en

$$[\mathbf{E}] = \frac{Volts}{metro},$$

es posible encontrar que

$$[Volts] = \left[ \frac{Joules}{Coulomb} \right].$$

**Observación 1.5** Si la carga es la de un electrón,  $e$ , y  $\Delta\phi = 1 Volt$ , entonces

$$1 eV = 1.602 \times 10^{-19} Joules. \quad (1.93)$$

Para el caso de  $N$  cargas puntuales el campo eléctrico es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \sum_i^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \frac{1}{R_i} \right) = - \nabla \sum_i^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i}, \quad (1.94)$$

donde  $R_i = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$ . Por lo cual

$$\phi(r) = \sum_i^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i}. \quad (1.95)$$

En caso de trabajar con una distribución continua de cargas, el potencial electrostático está dado por

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r')}{R} dV', \quad (1.96)$$

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(r')}{R} da', \quad (1.97)$$

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(r')}{R} dl'. \quad (1.98)$$

■ **Ejemplo 1.11** Una cáscara esférica delgada, conductora, de radio  $R$  se carga uniformemente con una carga total  $Q$ . Por integración directa, encuentre el potencial en un punto arbitrario,

- a) dentro de la cáscara,
- b) fuera de la cáscara.

*Solución.*

Sabemos de la ec. (1.97) que

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da',$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= R\hat{\mathbf{r}}', \\ \mathbf{r} &= r\hat{\mathbf{r}}, \\ da' &= R^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi'. \end{aligned}$$

Por otra parte recordamos que

$$\begin{aligned} dq &= \sigma da', \\ Q &= \sigma 4\pi R^2, \\ \Rightarrow \sigma &= \frac{Q}{4\pi R^2}, \end{aligned} \quad (1.99)$$

de esta forma la ec. (1.97)

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{Q}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta')^{1/2}} \sin\theta' d\theta' d\varphi' \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin\theta'}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta')^{1/2}} d\theta' \end{aligned} \quad (1.100)$$

hacemos el cambio de variable

$$u = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta', \quad du = 2rR\sin\theta' d\theta'$$

entonces

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \int_{(r-R)^2}^{(r+R)^2} \frac{du}{2rR\sqrt{u}}, \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{u}}{rR} \Big|_{(r-R)^2}^{(r+R)^2}, \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{rR} (r+R - |r-R|). \end{aligned} \quad (1.101)$$

a) Para el potencial interno se tiene que  $R > r$ , así de la ec. (1.101)

$$\begin{aligned}\phi_{int} &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{rR} (r+R-R+r), \\ \therefore \phi_{int} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.\end{aligned}\quad (1.102)$$

b) Para el potencial fuera de la cáscara se tiene que  $r > R$  entonces de la ec. (1.101)

$$\begin{aligned}\phi_{ext} &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{rR} (r+R-r+R), \\ \therefore \phi_{ext} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.12** Encontrar el potencial eléctrico dentro y fuera de un cascarón esférico de radio  $R$  con carga total  $Q$  (figura 1.18), el cero del potencial está en el infinito.

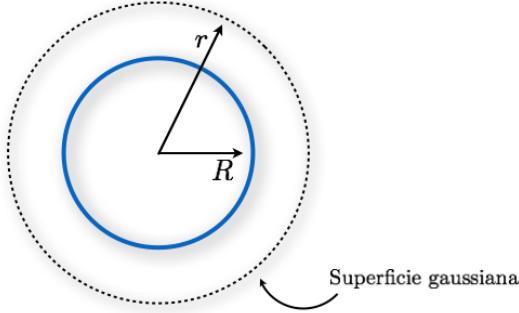


Figura 1.18: Cascarón con carga  $Q$  y radio  $R$  con una superficie gaussiana en forma de esfera de radio  $r$  concentrada a la distribución de carga

*Solución*

De la ec.(1.92) tenemos

$$\phi(r) = - \int_{r_{ref}}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}'.$$

Primero calculamos  $\mathbf{E}$  con

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}. \quad (1.103)$$

Consideremos una superficie gaussiana de forma esférica con radio  $r$  y área  $A$ . Para esta elección de superficie las líneas de campo eléctrico son perpendiculares al elemento de área de la superficie, entonces

$$\begin{aligned}\oint_S E da &= EA = E4\pi r^2, \\ \Rightarrow E &= \frac{Q_{enc}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \\ \therefore \mathbf{E} &= \frac{Q_{enc}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}.\end{aligned}\quad (1.104)$$

Para el potencial fuera del cascarón se tiene que  $r > R$  y la carga encerrada por la superficie

es  $Q$ , así de la ec. (1.92)

$$\begin{aligned}\phi_{ext} &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{r'^2} dr' \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'} \Big|_{\infty}^r, \\ \therefore \phi_{ext} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.\end{aligned}\quad (1.105)$$

Ahora, para el potencial dentro de la esfera se tiene que  $r < R$  y la carga encerrada es cero, entonces la ec. (1.92) la podemos separar como

$$-\int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\infty}^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_R^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.106)$$

La segunda integral del lado derecho de la igualdad no contribuye con el potencial ya que en esa región no hay carga y por lo tanto el campo eléctrico es cero, entonces

$$\begin{aligned}\phi_{int} &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{1}{r^2} dr, \\ \therefore \phi_{int} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.\end{aligned}\quad (1.107)$$

■

**Ejemplo 1.13** Un conductor esférico de radio  $R$  y carga  $Q$  está rodeado por una cáscara esférica concéntrica de radio  $2R$ . La cáscara está uniformemente cargada con un carga  $-2Q$  (figura 1.19).

- Utilice la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico en todos los puntos del espacio.
- Obtenga el potencial en todos los puntos.

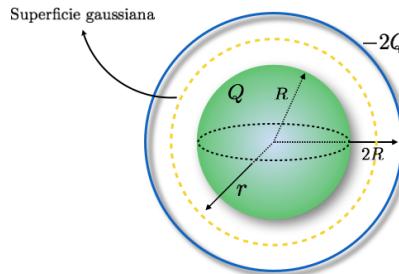


Figura 1.19: Conductor esférico rodeado por cáscara concéntrica.

*Solución.*

- Supongamos una superficie gaussiana con simetría esférica de radio  $r$ , entonces, de la ley de Gauss se tiene

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}, \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= \frac{Q_{enc}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}.\end{aligned}\quad (1.108)$$

- Cuando  $r > 2R$ . En esta región la carga encerrada es la carga del conductor más la carga de la cáscara, así

$$\Rightarrow \mathbf{E} = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.109)$$

II) Cuando  $R < r < 2R$ . Aquí la carga encerrada sólo es la del conductor,

$$\Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.110)$$

III) Cuando  $r < R$ . Recordamos que la carga de un conductor se encuentra en su superficie, entonces la carga encerrada por la superficie en esta región es cero

$$\Rightarrow E = 0. \quad (1.111)$$

b) Sabemos que

$$\phi = - \int_{r_{ref}}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}'.$$

i) Para  $r > 2R$ . Ocupando la ec.(1.109)

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{r'^2} dr' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r'} \Big|_{\infty}^r, \\ \Rightarrow \phi &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \end{aligned} \quad (1.112)$$

II) Para  $R < r < 2R$ . En esta región se tiene

$$-\int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' = -\int_{\infty}^{2R} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' - \int_{2R}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}'. \quad (1.113)$$

Ocupando la ec. (1.109) para la primera integral y la ec.(1.110) para la segunda

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{2R} \frac{1}{r'^2} dr' - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{2R}^r \frac{1}{r'^2} dr', \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r'} \Big|_{\infty}^{2R} + \frac{1}{r'} \Big|_{2R}^r \right), \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right). \end{aligned} \quad (1.114)$$

III) Para  $r < R$ .

$$-\int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' = -\int_{\infty}^{2R} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' - \int_{2R}^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' - \int_R^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}'. \quad (1.115)$$

En la tercera integral el campo eléctrico es cero, entonces solo tenemos

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{2R} \frac{1}{r'^2} dr' - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{2R}^R \frac{1}{r'^2} dr', \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r'} \Big|_{\infty}^{2R} + \frac{1}{r'} \Big|_{2R}^R \right), \\ \Rightarrow \phi &= 0. \end{aligned} \quad (1.116)$$

■

**Ejemplo 1.14** Una esfera de radio  $a$  posee una densidad de carga que varía con la distancia  $r$  al centro, de acuerdo con  $\rho = Ar^n$  donde  $A$  es una constante y  $n \geq 0$  (figura 1.20). Encontrar  $\phi$  para todos los puntos dentro y fuera de la esfera y expresar los resultados en función de la carga total  $Q$  de la esfera.

*Solución.*

De la ec. (1.96) tenemos

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r')}{R} dv'.$$

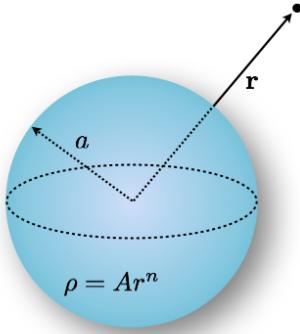


Figura 1.20: Esfera con densidad de carga variante.

Por otra parte  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , con

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}' = r'\hat{\mathbf{r}}',$$

así

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{A}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^\pi \frac{r'^n}{[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta']^{1/2}} r'^2 \sin\theta' d\theta' dr' d\phi', \\ &= \frac{A}{2\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \frac{r'^{n+2} \sin\theta'}{[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta']^{1/2}} d\theta' dr'.\end{aligned}\quad (1.117)$$

Para integrar respecto de  $\theta'$  hacemos el cambio de variable

$$u = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta' \Rightarrow du = 2rr' \sin\theta' d\theta',$$

por lo que

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{A}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{r'^{n+2}}{2rr'} \int_{(r-r')^2}^{(r+r')^2} \frac{1}{u^{1/2}} du dr', \\ &= \frac{A}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{r'^{n+1}}{r} u^{1/2} \Big|_{(r-r')^2}^{(r+r')^2} dr', \\ &= \frac{A}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{r'^{n+1}}{r} (r + r' - |r - r'|) dr'.\end{aligned}\quad (1.118)$$

Para el potencial fuera de la esfera se tiene que  $r > r'$ , entonces de la ec. (1.118)

$$\begin{aligned}\phi_{ext} &= \frac{A}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{r'^{n+1}}{r} (r + r' - r + r') dr' \\ &= \frac{A}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{2r'^{n+2}}{r} dr', \\ &= \frac{A}{\epsilon_0} \frac{r'^{n+3}}{(n+3)r} \Big|_0^a, \\ \therefore \phi_{ext} &= \frac{Aa^{n+3}}{(n+3)r\epsilon_0}.\end{aligned}\quad (1.119)$$

Para expresar el potencial en término de la carga total tenemos

$$dq = \rho(r') dv',$$

por lo cual

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a A r'^n r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi', \\ &= 4\pi A \int_0^a r'^{n+2} dr', \\ \Rightarrow Q &= 4\pi \frac{Aa^{n+3}}{n+3}. \end{aligned} \quad (1.120)$$

Por lo tanto de la ec. (1.119) se tiene

$$\therefore \phi_{ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.121)$$

Ahora, para el potencial dentro de la esfera separamos la integral de la ec. (1.118)

$$\begin{aligned} \phi(r)_{int} &= \frac{A}{2\epsilon_0} \left[ \int_0^r \frac{r'^{n+1}}{r} (r + r' - |r - r'|) dr' + \int_r^a \frac{r'^{n+1}}{r} (r + r' - |r - r'|) dr' \right], \\ &= \frac{A}{2\epsilon_0} \left[ \int_0^r \frac{r'^{n+1}}{r} (r + r' - r + r') dr' + \int_r^a \frac{r'^{n+1}}{r} (r + r' - r' + r) dr' \right], \\ &= \frac{A}{\epsilon_0} \left( \int_0^r \frac{r'^{n+2}}{r} dr' + \int_r^a r'^{n+1} dr' \right) = \frac{A}{\epsilon_0} \left[ \frac{r'^{n+3}}{r(n+3)} \Big|_0^r + \frac{r'^{n+2}}{n+2} \Big|_r^a \right] \\ &= \frac{A}{\epsilon_0} \left[ \frac{r^{n+2}}{n+3} + \frac{a^{n+2}}{n+2} - \frac{r^{n+2}}{n+2} \right] = \frac{A}{\epsilon_0} \left[ \frac{a^{n+2}}{(n+2)} - \frac{r^{n+2}}{(n+3)(n+2)} \right], \\ \therefore \phi_{int} &= \frac{Aa^{n+2}}{(n+3)(n+2)\epsilon_0} \left[ n+3 - \left( \frac{r}{a} \right)^{n+2} \right]. \end{aligned} \quad (1.122)$$

Para expresar el potencial en término de la carga total  $Q$  sustituimos (1.120) en esta última expresión

$$\therefore \phi_{int} = \frac{Q}{4\pi(n+2)\epsilon_0 a} \left[ n+3 - \left( \frac{r}{a} \right)^{n+2} \right]. \quad (1.123)$$

■

**Ejemplo 1.15** Una distribución de carga esférica de radio  $R$ , tiene una densidad de carga volumétrica que es función únicamente de  $r$ , la distancia al centro de la distribución. En otras palabras  $\rho = \rho(r)$ . Si  $\rho(r)$  tiene los valores dados a continuación, determine el campo eléctrico en función de  $r$ . Integre el resultado para obtener una expresión para el potencial electrostático  $\phi(r)$ , sujeto a la restricción de que  $\phi(\infty) = 0$ .

- a)  $\rho = A/r$ , siendo  $A$  constante para  $0 \leq r \leq R$ ;  $\rho = 0$  para  $r > R$ .
- b)  $\rho = \rho_0$  (es decir, constante) para  $0 \leq r \leq R$ ;  $\rho = 0$  para  $r > R$ .

*Solución.*

- a) Podemos calcular el campo eléctrico con la ley de gauss en su forma integral ec. (1.66)

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv'.$$

Usaremos una superficie gaussiana esférica de radio  $r$ .

- 1) Para  $r > R$  se tiene

$$\begin{aligned} \oint_S E da &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \frac{A}{r'} r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi', \\ E 4\pi r^2 &= \frac{4\pi}{\epsilon_0} A \int_0^R r' dr', \\ \therefore \mathbf{E} &= \frac{AR^2}{2\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (1.124)$$

Para obtener el potencial usamos la ec. (1.92)

$$\phi(r) = - \int_{ref}^r \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\phi(r) &= - \int_{\infty}^r \frac{AR^2}{2\epsilon_0 r'^2} dr', \\ \therefore \phi(r) &= \frac{AR^2}{2\epsilon_0 r}.\end{aligned}\tag{1.125}$$

II) Para  $r < R$  se tiene que el campo eléctrico es

$$\oint_S E da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \frac{A}{r'} r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi',$$

de lo cual se tiene

$$E 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{\epsilon_0} A \int_0^r r' dr',$$

es decir

$$Er^2 = \frac{A}{\epsilon_0} \frac{r^2}{2},$$

$$\therefore \mathbf{E} = \frac{A}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}}.\tag{1.126}$$

Para obtener el potencial eléctrico podemos separar la integral

$$\phi(r) = - \int_{\infty}^r \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = - \int_{\infty}^R \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' - \int_R^r \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}',\tag{1.127}$$

usando el campo eléctrico en las regiones correspondientes se tiene

$$\begin{aligned}\phi(r) &= - \int_{\infty}^R \frac{AR^2}{2\epsilon_0 r'^2} dr' - \int_R^r \frac{A}{2\epsilon_0} dr' = \frac{AR^2}{2\epsilon_0 r'} \Big|_{\infty}^R - \frac{A}{2\epsilon_0} r' \Big|_R^r, \\ &= \frac{AR}{2\epsilon_0} - \frac{A}{2\epsilon_0} (r - R) = \frac{AR}{\epsilon_0} - \frac{Ar}{2\epsilon_0}, \\ \therefore \phi(r) &= \frac{A}{\epsilon_0} \left( R - \frac{r}{2} \right).\end{aligned}\tag{1.128}$$

b) Para el caso con densidad constante  $\rho_0$

I) Para  $r > R$  el campo eléctrico es

$$\begin{aligned}\oint_S E da &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho_0 r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi', \\ E 4\pi r^2 &= \frac{4\pi \rho_0}{\epsilon_0} \int_0^R r'^2 dr', \\ \therefore \mathbf{E} &= \frac{R^3 \rho_0}{3\epsilon_0 r'^2} \hat{\mathbf{r}}.\end{aligned}\tag{1.129}$$

Con la ec. (1.92) tenemos que el potencial eléctrico es

$$\begin{aligned}\phi(r) &= - \int_{\infty}^r \frac{R^3 \rho_0}{3\epsilon_0 r'^2} dr', \\ \therefore \phi(r) &= \frac{R^3 \rho_0}{3\epsilon_0 r}.\end{aligned}\tag{1.130}$$

II) Para  $r < R$  el campo eléctrico es

$$\begin{aligned}\oint_S E da &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho_0 r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi', \\ E 4\pi r^2 &= \frac{4\pi \rho_o}{\epsilon_0} \int_0^r r'^2 dr', \\ \therefore \mathbf{E} &= \frac{r\rho_o}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}}.\end{aligned}\quad (1.131)$$

El potencial se obtendrá separando nuevamente la integral

$$\phi(r) = - \int_{\infty}^r \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = - \int_{\infty}^R \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' - \int_R^r \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}', \quad (1.132)$$

usando el campo eléctrico en las regiones correspondientes se tiene

$$\begin{aligned}\phi(r) &= - \int_{\infty}^R \frac{R^3 \rho_o}{3\epsilon_0 r'^2} dr' - \int_R^r \frac{r'^2 \rho_o}{3\epsilon_0} dr', \\ &= \frac{R^3 \rho_o}{3\epsilon_0 r'} \Big|_{\infty}^R - \frac{r'^2 \rho_o}{6\epsilon_0} \Big|_R^r, \\ &= \frac{R^2 \rho_o}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_o}{6\epsilon_0} (r^2 - R^2), \\ &= \frac{R^2 \rho_o}{2\epsilon_0} - \frac{\rho_o r^2}{6\epsilon_0}, \\ \therefore \phi(r) &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left( R^2 - \frac{r^2}{3} \right).\end{aligned}\quad (1.133)$$

■

### ■ Ejemplo 1.16 El potencial coulombiano de apantallamiento

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-r/\lambda}}{r}, \quad (1.134)$$

es adecuado para una carga  $q$  en un medio semiconductor. Calcule el campo eléctrico y la densidad de carga correspondiente.

*Solución.*

Sabemos que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(r),$$

así

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \frac{e^{-r/\lambda}}{r} \right), \\ \mathbf{E} &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\nabla e^{-r/\lambda}}{r} + e^{-r/\lambda} \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \right].\end{aligned}\quad (1.135)$$

Por otra parte el gradiente en coordenadas esféricas es

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (1.136)$$

Notemos que el potencial solo depende de  $r$ , entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{e^{-r/\lambda}}{\lambda r} + \frac{e^{-r/\lambda}}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}}, \\ \therefore \mathbf{E} &= \frac{qe^{-r/\lambda}}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{r} \right) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r}.\end{aligned}\quad (1.137)$$

Para obtener la densidad de carga podemos utilizar la ley de Gauss en su forma diferencial

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\Rightarrow \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}.$$

La divergencia en coordenadas esféricas es

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta E_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}. \quad (1.138)$$

El campo eléctrico solo depende de la componente  $r$ , por lo tanto sólo se tiene

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho &= \frac{q}{4\pi r^2} \frac{1}{\partial r} \left( \frac{r e^{-r/\lambda}}{\lambda} + e^{-\frac{r}{\lambda}} \right), \\ \therefore \rho &= -\frac{q e^{-r/\lambda}}{4\pi r \lambda^2}. \end{aligned} \quad (1.139)$$

■

### 1.4.1 Superficie equipotencial

Una superficie equipotencial es una superficie tridimensional sobre la que el potencial eléctrico  $\phi$  es el mismo en todos los puntos. Ningún punto puede estar en dos potenciales diferentes, por lo cual las superficies equipotenciales para distintos potenciales nunca pueden tocarse o intersectarse. Además la energía potencial no cambia a medida que una carga de prueba se traslada sobre una superficie equipotencial.

**Observación 1.6** El campo  $\mathbf{E}$  debe ser perpendicular en cada punto de la superficie equipotencial. Esta observación se deduce de la expresión

$$\phi(r_B) - \phi(r_A) = - \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}'$$

si los puntos  $r_A$  y  $r_B$  están sobre la misma superficie equipotencial, entonces  $\phi(r_B) - \phi(r_A) = 0$  es decir

$$\int_{r_A}^{r_B} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' = 0,$$

en consecuencia

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') \perp d\mathbf{l}'.$$

■ **Ejemplo 1.17** Dos cargas puntuales  $-q$  y  $q$  situadas en  $z = -a$  y  $z = a$  respectivamente, a este sistema se conoce como *dipolo eléctrico*. Calcular la superficie equipotencial  $\phi = 0$ . *Solución.*

Con ayuda de la figura 1.21 se encuentra que el potencial eléctrico en  $\mathbf{r}$ ,  $\phi(\mathbf{r})$  está dado por la expresión

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z+a)^2]^{1/2}} \right). \quad (1.140)$$

la superficie equipotencial  $\phi = 0$  se encuentra en  $z = 0$ , es decir, se trata del plano  $xy$ . Las superficies que se muestran en la figura 1.22 fueron realizadas en MATHEMATICA y representan algunas superficies equipotenciales del dipolo eléctrico.

■

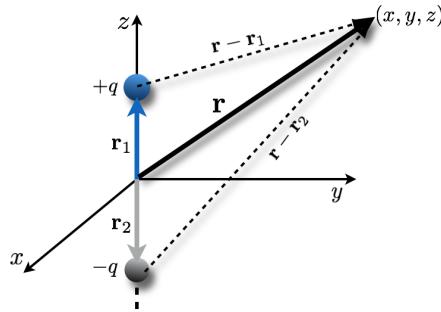


Figura 1.21: Dipolo eléctrico

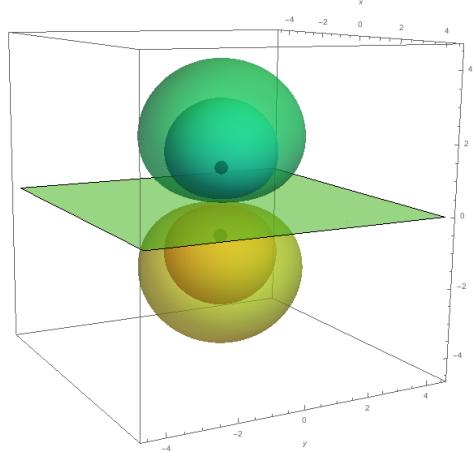


Figura 1.22: Algunas superficies equipotenciales del dipolo eléctrico

■ **Ejemplo 1.18** Dos cargas puntuales  $-q$  y  $q/3$  se sitúan en el origen y en el punto  $(a, 0, 0)$  respectivamente, ver figura 1.23.

- En qué punto del eje  $x$  se anula el campo eléctrico
- Demuestre que la superficie equipotencial  $\phi = 0$  tiene forma esférica y obtener las coordenadas del centro de esta esfera.

*Solución.*

- Sabemos que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} q_i.$$

En el punto  $x$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} q_1 + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} q_2 \right) = \mathbf{0}, \quad (1.141)$$

donde

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}, \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{r}_2 = a\mathbf{i}$$

y

$$q_1 = -q, q_2 = \frac{q}{3},$$

así

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ -q \frac{x}{x^3} + q \frac{x-a}{3(x-a)^3} \right] \mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad (1.142)$$

es decir

$$-\frac{q}{x^2} + \frac{q}{3(x-a)^2} = 0. \quad (1.143)$$

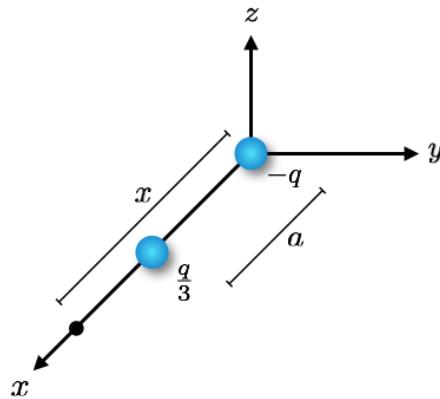


Figura 1.23: Campo eléctrico producido por dos cargas puntuales en un punto  $x$ .

Al resolver para  $x$  se obtiene

$$\therefore x = \frac{a}{2} (3 \pm \sqrt{3}). \quad (1.144)$$

b) De la ec. (1.95) tenemos

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

Para obtener la superficie equipotencial  $\phi = 0$  hacemos

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|} \right) = 0, \quad (1.145)$$

donde  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , así

$$-\frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{q}{3[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} = 0,$$

por lo cual

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9[(x-a)^2 + y^2 + z^2],$$

es decir

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{9}{4}ax + \frac{9}{8}a^2 = 0,$$

completando el cuadrado de  $x$

$$\therefore \left(x - \frac{9}{8}a\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{64}a^2, \quad (1.146)$$

esta ecuación corresponde a una esfera con centro en

$$\left(\frac{9}{8}a, 0, 0\right), \quad (1.147)$$

y radio

$$R = \frac{3}{8}a. \quad (1.148)$$

En la figura 1.24 se muestran algunas superficies equipotenciales. ■

■ **Ejemplo 1.19** Consideremos dos líneas de carga infinitamente largas y paralelas con cargas  $\lambda$  y  $-\lambda$  por unidad de longitud, respectivamente como se muestra en la figura (1.25). Determinar las superficies equipotenciales del sistema.

*Solución*

Del ejemplo (1.8) se tiene que el campo eléctrico producido por una línea de carga es

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}.$$

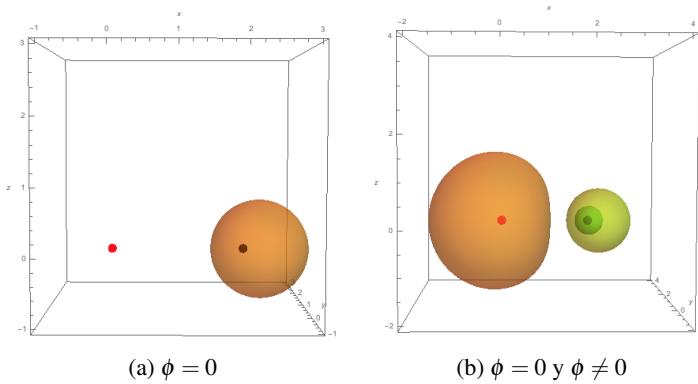


Figura 1.24: Superficies equipotenciales para el problema 1.18. Los puntos representan las cargas eléctricas.

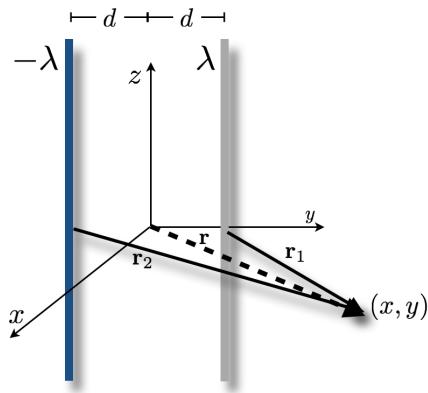


Figura 1.25: Líneas paralelas cargadas.

Por otro lado sabemos que

$$\phi = - \int_{ref}^r \mathbf{E}(r') \cdot d\mathbf{r}'.$$

De modo que el potencial eléctrico producido por las líneas de carga en un punto  $\mathbf{r}$  es

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_1 + \phi_2, \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2, \\ \therefore \phi &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{r_1}{r_2} \right).\end{aligned}\tag{1.149}$$

La superficie equipotencial se obtiene al igualar el potencial (1.149) a una constante C,

$$-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = C, \quad (1.150)$$

es decir

$$\frac{r_1}{r_2} = \mu, \text{ con } \mu = \exp \left[ -\frac{2\pi \varepsilon_0 C}{\lambda} \right]. \quad (1.151)$$

En términos de las coordenadas cartesianas se tiene

$$x^2 + (y-d)^2 = \mu^2 \left( x^2 + (y+d)^2 \right), \quad (1.152)$$

podemos observar que la superficie equipotencial  $C = 0$  implica  $\mu = 1$ , esto solo se logra con  $y = 0$  lo cual representa un plano paralelo al plano  $xz$  que pasa por el punto  $y = 0$ . Para simplificar el álgebra se usa  $v = -\frac{2\pi\epsilon_0 C}{\lambda}$ . Se desarrollan los términos al cuadrado en (1.152), se agrupan los términos semejantes y se factoriza  $e^v$  para obtener

$$x^2 - 2xd \coth v + y^2 + d^2 = 0, \quad (1.153)$$

al completar el binomio cuadrado perfecto para  $x$

$$(x - d \coth v)^2 + y^2 = \left( \frac{d}{\operatorname{senh} v} \right)^2, \quad (1.154)$$

esta expresión representa una circunferencia de radio

$$\frac{d}{\operatorname{senh} v}, \quad (1.155)$$

y con centro en

$$(d \coth v, 0). \quad (1.156)$$

Dada la simetría del sistema a lo largo del eje  $z$ , las superficies equipotenciales forman cilindros cuyo eje es paralelo al eje  $z$  (fig. 1.26). ■

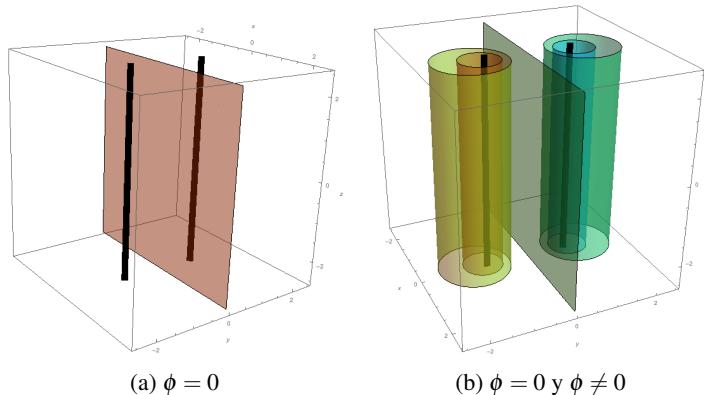


Figura 1.26: Algunas superficies equipotenciales para el problema 1.19. Las líneas representan las cargas eléctricas.

## 1.5 Energía electrostática

Resulta de gran utilidad estudiar el comportamiento mecánico de un sistema eléctrico usando métodos de energía, sin embargo, en condiciones estáticas la energía total de un sistema de cargas se presenta sólo como energía potencial. Esta energía surge de la interacción entre cargas y es llamada *energía electrostática*.

Considere una carga puntual  $q$ , en equilibrio bajo la acción de una fuerza electrostática  $\mathbf{F}_e$  y una fuerza mecánica  $\mathbf{F}$  de manera que la condición de equilibrio es

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_e + \mathbf{F} &= \mathbf{0}, \\ \Rightarrow \mathbf{F} &= -q\mathbf{E}. \end{aligned} \quad (1.157)$$

Supóngase ahora que una carga puntual se mueve de manera quasi-estática desde un punto  $\mathbf{r}_1$  hasta un punto  $\mathbf{r}_2$ , siguiendo una trayectoria dada. En estas circunstancias, la partícula no adquiere energía cinética. Si  $W$  es el trabajo realizado por el agente externo que ejerce la fuerza mecánica, se obtiene

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \\ &= q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = q [\phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1)], \\ &= q \Delta\phi \text{ con } \Delta\phi := \phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1) \end{aligned} \quad (1.158)$$

Consideraciones semejantes pueden aplicarse a sistemas de carga mas complejos. De hecho, la energía electrostática de una distribución arbitraria de carga se calcula como el trabajo necesario para reunir dicha distribución de carga en oposición de la interacción coulombiana de las cargas sin considerar otras formas de energía.

Se define la *energía potencial eléctrica* de una carga  $q$  en  $\mathbf{r}$  como

$$U(\mathbf{r}) = q\phi(\mathbf{r}). \quad (1.159)$$

Generalmente se usará la forma (1.159) debido a que posee la propiedad de que cuando  $\phi$  se anula en el infinito,  $U$  también lo hace.

■ **Ejemplo 1.20** Considere un sistema de dos cargas  $q_1$  y  $q_2$  separadas una distancia  $r$ . El potencial en la posición  $q_2$  está dada por

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.160)$$

Entonces, sustituyendo en (1.159) se obtiene que la energía potencial es

$$U(\mathbf{r}) = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.161)$$

■

### 1.5.1 Energía potencial eléctrica

Para obtener la energía potencial de un grupo de  $N$  cargas puntuales se calcula el trabajo para reunir las cargas trayendo una a la vez. La primera carga  $q_1$  puede ser colocada sin trabajo alguno,  $W_1 = 0$ . Para la segunda carga se requiere

$$W_2 = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{21}} ; \text{ con } R_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|. \quad (1.162)$$

Para colocar la tercera carga

$$W_3 = q_3 \left( \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{31}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{32}} \right). \quad (1.163)$$

Para colocar la cuarta carga

$$W_4 = q_4 \left( \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{41}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{42}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{43}} \right). \quad (1.164)$$

Para colocar la partícula  $i$ -ésima se tiene

$$W_i = q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}}. \quad (1.165)$$

El trabajo total para reunir las cuatro partículas cargadas es

$$W_T = W_1 + W_2 + W_3 + W_4. \quad (1.166)$$

La energía potencial electrostática total del sistema de  $N$  cargas será la suma de los trabajos, es decir,

$$U = \sum_{i=1}^N W_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 R_{ij}}. \quad (1.167)$$

Definimos

$$\omega_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 R_{ij}}, \quad (1.168)$$

Así

$$U = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \omega_{ij}, \quad (1.169)$$

**Observación 1.7** Para expresar el rango de la doble suma de (1.169) en función de las  $N$  cargas, se debe tener en cuenta que  $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ , lo cual indica que se está tomando dos veces cada pareja. Para corregir esto, se deberá dividir el resultado obtenido de la doble suma entre dos, de esta forma

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 R_{ij}}, \text{ con } i \neq j. \quad (1.170)$$

Reagrupando términos

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R_{ij}} q_j \right), \text{ con } i \neq j. \quad (1.171)$$

Al recordar la ec. (1.95), puede observarse que el término entre paréntesis es justamente el potencial escalar en la posición  $\mathbf{r}_i$ , es decir, es el potencial que experimenta la carga  $q_i$ , por lo tanto (1.171) se puede escribir como

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi_i(\mathbf{r}_i). \quad (1.172)$$

Si las cargas se encuentran distribuidas de forma continua, se puede cambiar la suma de (1.172) por una integral. De esta forma se obtienen las siguientes expresiones para las energías debidas a distribuciones lineales, superficiales o volumétricas de carga respectivamente

$$U = \frac{1}{2} \int_L \lambda(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dl, \quad (1.173)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_S \sigma(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) da, \quad (1.174)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dv. \quad (1.175)$$

Si la distribución de carga es tal que incluye una distribución lineal, superficial y volumétrica, la energía total de este sistema será la suma de las cantidades obtenidas (1.173), (1.174) y (1.175)

$$U = \frac{1}{2} \int_L \lambda(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dl + \frac{1}{2} \int_S \sigma(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) da + \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dv. \quad (1.176)$$

En presencia de conductores en el sistema, y aunque la ec. (1.176) cubre bien este caso, es conveniente separar explícitamente la contribución de los conductores. La integral de superficie, incluye la superficie de los conductores. Si es aplicada al conductor  $i$ -ésimo se encuentra que

$$U_i = \frac{1}{2} \phi(\mathbf{r}_i) \int_{S_i} \sigma(\mathbf{r}_i) da = \frac{1}{2} \phi(\mathbf{r}_i) Q_i, \quad (1.177)$$

donde  $Q_i$  es la carga total del conductor. Finalmente la *energía electrostática de una distribución de carga*, que incluye conductores, se convierte en

$$U = \frac{1}{2} \int_L \lambda(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dl + \frac{1}{2} \int_S \sigma(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) da + \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dv + \frac{1}{2} \sum_i \phi(\mathbf{r}_i) Q_i, \quad (1.178)$$

aquí la integral de superficie se restringe a superficies no conductoras y la última suma se efectúa sobre todos los conductores.

La región de integración puede extenderse del volumen que realmente ocupan las cargas a todo el espacio, dado que en las regiones donde no hay carga,  $\rho = 0$ , no contribuyen a  $U$ . Por lo tanto (1.175) puede escribirse como

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dv. \quad (1.179)$$

Las ecs. (1.173), (1.174) tendrán expresiones similares.

### 1.5.2 Densidad de energía

Si el interés principal se centra en la descripción de fenómenos en función de los campos, es necesario hacer lo mismo con la energía. De la ley de Gauss, ec. (1.68), se tiene que

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E},$$

al sustituir esta expresión de la densidad volumétrica en (1.179) se tiene

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \phi \nabla \cdot \mathbf{E} dv. \quad (1.180)$$

Usando la identidad

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \phi, \quad (1.181)$$

se encuentra que

$$\begin{aligned} \phi \nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \nabla \phi \\ &= \nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (1.182)$$

De esta forma se tiene que la energía potencial se escribe como

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) dv + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \mathbf{E}^2 dv, \quad (1.183)$$

al usar el teorema de la divergencia en la primera integral se obtiene

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \oint_S (\phi \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \mathbf{E}^2 dv. \quad (1.184)$$

Debemos tener en cuenta que la integral (1.179) se realiza sobre todo el espacio, por lo que debe considerarse a  $V$  en (1.184) lo suficientemente grande de modo que  $S$  sea su superficie

limitante, también extremadamente grande para que englobe todas las cargas. Entonces de la integral (1.184) se observa de acuerdo con las ecs. (1.62) y (1.83) que

$$\mathbf{E} \sim \frac{1}{r^2}, \quad \phi \sim \frac{1}{r}. \quad (1.185)$$

Por lo tanto, a medida que  $r \rightarrow \infty$

$$\oint_S (\phi \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} \sim \left( \frac{1}{r^3} \right) r^2 \sim \frac{1}{r} \rightarrow 0. \quad (1.186)$$

Para la integral de volumen se restinge el espacio a la distribución de carga, por lo cual la expresión de la energía está dada como

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \mathbf{E}^2 dv. \quad (1.187)$$

Se define la densidad de energía como

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2, \quad (1.188)$$

las unidades de  $u$  son *joule/metro*<sup>3</sup>. De manera que la energía total puede escribirse como

$$U = \int_V u dv. \quad (1.189)$$

■ **Ejemplo 1.21** Dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  están separadas por una distancia  $d$ . Si sus respectivos campos en un punto  $\mathbf{r}$  son  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$ .

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2.$$

- a) Muestre que las integrales de  $E_1$  y  $E_2$  sobre todo el espacio divergen. Esta es la energía propia infinita que debe restarse a la energía  $U$ .
- b) Efectúe la integral para la contribución  $2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$  para  $U$  y demuestre que ésta no diverge.

*Solución.*

- a) De la ec. (1.187) sabemos que

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \mathbf{E}^2 dv,$$

Si tomamos las posiciones de las cargas  $q_1$  y  $q_2$  respectivamente como  $\mathbf{r}_1 = 0$  y  $\mathbf{r}_2 = d\hat{\mathbf{k}}$ , el campo eléctrico producido por cada carga es

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.190)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{r - d \cos \theta}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{3/2}} \hat{\mathbf{r}} + \frac{d \sin \theta}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{3/2}} \hat{\theta} \right]. \quad (1.191)$$

Entonces la energía para la carga  $q_1$  es

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \mathbf{E}_1^2 dv, \\ &= \frac{q_1^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^r \frac{1}{r'^4} r'^2 \sin \theta dr' d\theta' d\varphi', \\ &= \frac{q_1^2}{8\pi \epsilon_0} \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^r \frac{1}{r'^2} dr', \\ &= \frac{q_1^2}{8\pi \epsilon_0} \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right), \\ &= \frac{q_1^2}{8\pi \epsilon_0} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a}, \\ \therefore U_1 &= \notin. \end{aligned} \quad (1.192)$$

De forma análoga se procede para la carga  $q_2$

b) Se desea encontrar

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V 2 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dv,$$

entonces

$$\begin{aligned} U &= \frac{q_1 q_2}{16\pi^2 \epsilon_0} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\pi \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{r' - d \cos \theta'}{(r'^2 + d^2 - 2r' d \cos \theta')^{3/2}} r'^2 \sin \theta' d\varphi' dr' d\theta', \\ &= \frac{q_1 q_2}{8\pi \epsilon_0} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\pi \int_0^r \frac{r' - d \cos \theta'}{(r'^2 + d^2 - 2r' d \cos \theta')^{3/2}} \sin \theta' dr' d\theta'. \end{aligned} \quad (1.193)$$

Ahora, realizamos la integral respecto de  $r'$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{r' - d \cos \theta'}{(r'^2 + d^2 - 2r' d \cos \theta')^{3/2}} dr' &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_r^0 \frac{d}{dr'} \left[ \frac{1}{(r'^2 + d^2 - 2r' d \cos \theta')^{1/2}} \right] dr', \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_r^0 d \left[ \frac{1}{(r'^2 + d^2 - 2r' d \cos \theta')^{1/2}} \right], \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{(r'^2 + d^2 - 2r' d \cos \theta')^{1/2}} \Big|_r^0, \\ &= \frac{1}{d}. \end{aligned} \quad (1.194)$$

Así que

$$\begin{aligned} U &= \frac{q_1 q_2}{8\pi \epsilon_0 d} \frac{1}{d} \int_0^\pi \sin \theta' d\theta', \\ \therefore U &= \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 d}. \end{aligned} \quad (1.195)$$

■

**Ejemplo 1.22** Una esfera de radio  $R$  tiene una carga  $Q$  distribuida uniformemente sobre su superficie. ¿Qué tan grande una esfera contendrá 90% de la energía almacenada en el campo electrostático de esta distribución de carga?.

*Solución.*

Sabemos de la ec. (1.187) que la energía puede ser calculada como

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \mathbf{E}^2 dv,$$

así

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \mathbf{E}_{int}^2 dv + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \mathbf{E}_{ext}^2 dv. \quad (1.196)$$

Como la carga eléctrica está distribuida en la superficie de la esfera, entonces el campo eléctrico dentro de la esfera es  $\mathbf{E}_{int} = 0$ . Por otro lado, recordamos que el campo eléctrico producido por una esfera en un punto  $\mathbf{r}$  fuera de la esfera es

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.197)$$

De esta forma

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{r'^4} r'^2 \sin \theta' d\varphi' d\theta' dr', \\ &= \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r'^2} dr', \\ \Rightarrow U &= \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R}. \end{aligned} \quad (1.198)$$

Entonces la energía que debe contener una esfera de radio  $r$  es  $U_0 = 0.9 U$

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \int_R^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{r'^4} r'^2 \sin\theta' d\varphi' d\theta' dr', \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^r \frac{1}{r'^2} dr', \\ \Rightarrow U_0 &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (1.199)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) &= 0.9 \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}, \\ \therefore r &= 10R. \end{aligned} \quad (1.200)$$

■

**Ejemplo 1.23** Se tienen dos esferas metálicas de radio  $R_1$  y  $R_2$ , suficientemente lejos una de la otra comparado con sus radios. Dada una cantidad de carga total  $Q$ . ¿Cómo se tiene que dividir  $Q$  entre las esferas, tal que la energía potencial de la distribución de carga resultante sea lo más pequeña posible.

*Solución.*

Asignemos  $Q_1$  a la esfera de radio  $R_1$  y  $Q_2 = Q - Q_1$  a la esfera de radio  $R_2$ . Como las esferas se encuentran muy separadas, se puede calcular la energía potencial de forma individual y después sumarlas, así

$$U_T = U_1 + U_2. \quad (1.201)$$

Recordamos también que la energía potencial producida por una esfera de radio  $R$  está dada por la ec. (1.198)

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} U_T &= \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{(Q-Q_1)^2}{8\pi\epsilon_0 R_2} \frac{1}{R_2}, \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{(Q-Q_1)^2}{R_2} \right]. \end{aligned} \quad (1.202)$$

Como se desea que la energía potencial sea mínima, entonces

$$\begin{aligned} \frac{dU_T}{dQ_1} &= 0, \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q_1}{R_1} - \frac{Q-Q_1}{R_2} \right]. \end{aligned} \quad (1.203)$$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{QR_1}{R_1+R_2}. \quad (1.204)$$

Para que  $Q_1$  sea mínimo, y de esta forma minimizar la energía potencial se debe cumplir

$$\frac{d^2U_T}{dQ_1^2} > 0 \quad (1.205)$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{d^2 U_T}{d Q_1^2} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \\ \Rightarrow \frac{d^2 U_T}{d Q_1^2} &> 0\end{aligned}\quad (1.206)$$

Por lo tanto  $Q_1$  es mínimo y está dada por

$$\therefore Q_1 = \frac{QR_1}{R_1 + R_2}, \quad (1.207)$$

así

$$\begin{aligned}Q_2 &= Q - Q_1 = Q - \frac{QR_1}{R_1 + R_2}, \\ \therefore Q_2 &= \frac{QR_2}{R_1 + R_2}.\end{aligned}\quad (1.208)$$

■

## 1.6 Sistema de conductores

Consideremos un sistema de  $1, 2, \dots, N$  conductores que están cargados con cargas totales  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  respectivamente. Debido a que estas cargas se encuentran en la superficie del conductor, pueden ser descritas por las densidades superficiales de carga  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ , es posible que estas densidades de carga no estén distribuidas de manera constante en el conductor. De cualquier modo el potencial en un punto  $P$  se puede encontrar a partir de la ec. (1.97)

$$\phi(r_p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(r')}{R} da'.$$

Como se tienen  $n$  conductores, entonces

$$\phi(r_p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \frac{\sigma(r_j)}{R_j} da_j. \quad (1.209)$$

Donde  $S_j$  es la superficie del conductor  $j$ -ésimo,  $da_j$  el elemento de área de esa superficie en la posición  $\mathbf{r}_j$  y  $R_j = |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_j|$  la distancia de  $da_j$  a  $\mathbf{r}_p$ , estas relaciones se observan en la figura 1.27. Esta última ecuación es general, en particular cuando se elige cualquier punto sobre la superficie equipotencial de cualquier conductor cuyo potencial es  $\phi_i$

$$\phi(r_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \frac{\sigma(r_j)}{R_{ij}} da_j, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.210)$$

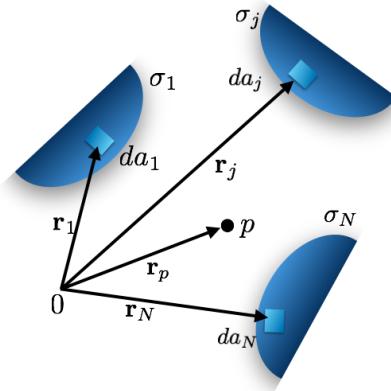
Nótese que la suma en (1.210) incluye el término cuando  $i = j$ , es decir, que incluye la integral sobre la superficie del conductor cuyo potencial total se está calculando.

Es conveniente escribir (1.210) en función de las cargas totales  $Q_j$ . La densidad superficial promedio de carga del conductor  $i$ -ésimo es justamente

$$\langle \sigma_j \rangle = \frac{Q_j}{S_j}. \quad (1.211)$$

La  $\sigma_j$  real en un punto dado no es igual al promedio, pero será proporcional a él

$$\begin{aligned}\sigma_j &\simeq \langle \sigma_j \rangle, \\ \Rightarrow \sigma_j &= \langle \sigma_j \rangle f_j = \frac{Q_j}{S_j} f_j,\end{aligned}\quad (1.212)$$

Figura 1.27: Sistema de  $N$  conductores.

donde  $f_j$  describe cómo difiere la densidad de carga real del promedio, por lo que resulta ser una función de la posición en la superficie del conductor. Si sustituimos la ec. (1.212) en (1.210)

$$\phi(r_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{Q_j}{S_j} \int_{S_j} \frac{f_j}{R_{ij}} da_j, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.213)$$

Tomando

$$p_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 S_j} \int_{S_j} \frac{f_j}{R_{ij}} da_j. \quad (1.214)$$

Entonces

$$\phi(r_i) = \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_j, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.215)$$

El conjunto de coeficientes  $p_{ij}$  reciben el nombre de *coeficientes de potencial*, y en general son un total de  $N^2$ . Nótese que en (1.214) no se contiene información de los potenciales o cargas, de manera que los  $p_{ij}$  solo representan relaciones geométricas.

En principio, estos coeficientes pueden ser obtenidos, puesto que de (1.215) se observa que

$$\left( \frac{\partial \phi_i}{\partial Q_j} \right)_{Q_1 \dots Q_{j-1}, Q_{j+1} \dots Q_N} = p_{ij}. \quad (1.216)$$

De manera que  $p_{ij}$  puede ser interpretado como la razón de cambio producido en el potencial del conductor  $i$  debido a la carga del conductor  $j$  cuando la carga de los otros conductores permanece constante.

Si igualamos las ecs. (1.210) y (1.215) se obtiene

$$p_{ij} Q_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_j} \frac{\sigma(r_j)}{R_{ij}} da_j. \quad (1.217)$$

Por otro lado también se tiene

$$Q_i = \int_{S_i} \sigma(r_i) da_i. \quad (1.218)$$

Ahora multiplicamos las ecs. (1.217) y (1.218)

$$p_{ij} Q_i Q_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\sigma(r_i) \sigma(r_j)}{R_{ij}} da_i da_j. \quad (1.219)$$

Si intercambiamos índices

$$p_{ji} Q_j Q_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_j} \int_{S_i} \frac{\sigma(r_j) \sigma(r_i)}{R_{ji}} da_j da_i. \quad (1.220)$$

Es evidente que  $R_{ij} = R_{ji}$ , por lo tanto se obtiene una propiedad de simetría muy útil con los coeficientes de potencial

$$p_{ij} = p_{ji}. \quad (1.221)$$

### 1.6.1 Energía

Anteriormente se vio que la energía de un conductor está dada por (1.177)

$$U_i = \frac{1}{2} \phi(\mathbf{r}_i) \int_{S_i} \sigma(\mathbf{r}_i) da = \frac{1}{2} \phi(\mathbf{r}_i) Q_i.$$

Entonces para un sistema de  $N$  conductores la energía total es

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i Q_i. \quad (1.222)$$

Al sustituir la ec. (1.215) en esta última expresión se obtiene

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_i Q_j. \quad (1.223)$$

Si resolvemos el sistema de ecuaciones (1.215) para las  $Q_i$  se encuentra que

$$Q_i = \sum_{j=1}^N c_{ij} \phi(r_j), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.224)$$

Donde  $c_{ii}$  se llama *coeficiente de capacidad*, y  $c_{ij}$  con  $i \neq j$ , es un *coeficiente de inducción*, además tienen la propiedad de simetría  $c_{ij} = c_{ji}$ . Podemos combinar las ecs. (1.222) y (1.224) para dar una expresión alternativa a la energía electrostática de un sistema de  $N$  conductores

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} \phi_i \phi_j. \quad (1.225)$$

### 1.6.2 Condensadores

Uno de los usos que se les da a los conductores es para almacenar energía electrostática. Es de gran interés encontrar la “capacidad” del conductor para almacenar la carga.

Dos conductores con cargas iguales y de signo opuesto  $Q$  y  $-Q$ , con una diferencia de potencial entre si que es independiente de los otros conductores del sistema, forman lo que se conoce como *condensador* o *capacitor* y la medida cuantitativa de su capacidad se llama *capacidad*. En general, si dos conductores forman un condensador, de la ec. (1.215) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \phi_1 &= p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2, \\ \phi_2 &= p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2. \end{aligned} \quad (1.226)$$

Si tomamos  $Q_1 = Q$  y  $Q_2 = -Q$ , y recordamos que  $p_{12} = p_{21}$ , entonces

$$\begin{aligned} \phi_1 &= (p_{11} - p_{12}) Q, \\ \phi_2 &= (p_{12} - p_{22}) Q. \end{aligned} \quad (1.227)$$

De manera que la diferencia de potencial es

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})Q. \quad (1.228)$$

Nótese que la diferencia de potencial entre los conductores de un condensador es proporcional a la carga almacenada  $Q$ . Se define la *capacidad* como

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi}. \quad (1.229)$$

Con unidades

$$[C] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}}, \quad (1.230)$$

esta combinación de unidades se conoce como *Faradios*. Entonces de la ec. (1.228) podemos observar que

$$C = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}}. \quad (1.231)$$

Utilizando el resultado obtenido de la energía en la ec. (1.222)

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i Q_i.$$

Para un condensador se tendría

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} (\phi_1 Q_1 + \phi_2 Q_2), \\ &= \frac{1}{2} (\phi_1 - \phi_2) Q, \\ &= \frac{1}{2} \Delta\phi Q. \end{aligned} \quad (1.232)$$

Usando la ecuación (1.229) encontramos que

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C\Delta\phi^2}{2}. \quad (1.233)$$

Dos o mas condensadores pueden unirse ya sea por conexión en serie (fig. 1.28a) o en paralelo (fig. 1.28b). En esta situación, es conveniente hablar de la capacidad de la combinación.

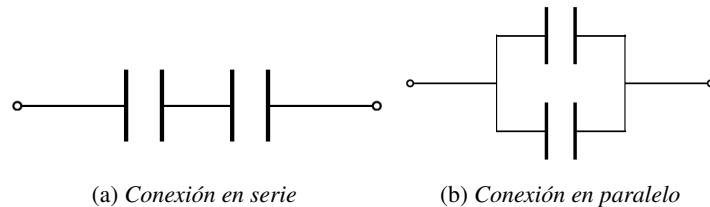


Figura 1.28: *Conexiones entre condensadores*.

En la conexión en paralelo, el mismo voltaje  $\Delta\phi$  aparece en cada condensador, es decir,

$$\Delta\phi_T = \Delta\phi_1 = \Delta\phi_2. \quad (1.234)$$

En consecuencia la capacidad equivalente es

$$C = \frac{Q_T}{\Delta\phi} = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta\phi} = C_1 + C_2. \quad (1.235)$$

Si dos condensadores se conectan en serie y posteriormente se cargan, la conservación de la carga requiere que cada uno adquiera la misma carga, es decir,

$$Q_T = Q_1 = Q_2. \quad (1.236)$$

De modo que la capacidad equivalente es

$$\frac{1}{C} = \frac{\Delta\phi_T}{Q} = \frac{\Delta\phi_1 + \Delta\phi_2}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (1.237)$$

**Ejemplo 1.24** Dos conductores esféricos están en el vacío. El conductor 1, de radio  $R$ , está puesto a tierra. El conductor 2 es tan pequeño que puede tratarse como una carga puntual. Tiene carga  $q$  y está a una distancia  $d$  de la esfera puesta a tierra (figura 1.29). ¿Cuál es la carga inducida en la esfera puesta a tierra?

*Solución.*

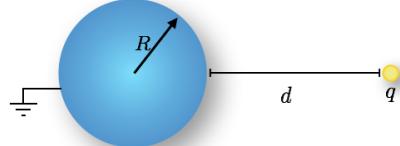


Figura 1.29: Sistema de dos conductores esféricos.

Como se trata de un sistema de conductores, de la ec. (1.215) tenemos

$$\phi_1 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2, \quad (1.238)$$

$$\phi_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2. \quad (1.239)$$

Sea  $Q_1 = Q$  la carga inducida en la esfera, y además se tiene que  $\phi_1 = 0$  y  $Q_2 = q$ , así de la ec. (1.238)

$$\begin{aligned} p_{11} Q &= -p_{12} q, \\ \Rightarrow Q &= -\frac{p_{12}}{p_{11}} q. \end{aligned} \quad (1.240)$$

Si el conductor pequeño está descargado, es decir,  $Q_2 = 0$  y la esfera tiene una carga  $Q_1 = Q$ , de la ec. (1.215)

$$\phi_1 = p_{11} Q, \quad (1.241)$$

$$\phi_2 = p_{21} Q. \quad (1.242)$$

Donde  $\phi_1$  es el potencial producido en la superficie de la esfera, y  $\phi_2$  es el potencial producido por la esfera a una distancia mayor a  $R$ , entonces

$$\phi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow p_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (1.243)$$

$$\phi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d} \Rightarrow p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d}. \quad (1.244)$$

Sustituyendo  $p_{11}$  y  $p_{12}$  en (1.240) recordando que  $p_{12} = p_{21}$ , obtenemos la carga inducida en la esfera puesta a tierra es

$$\therefore Q = -\frac{R}{d}q. \quad (1.245)$$

■

■ **Ejemplo 1.25** Un cilindro conductor largo de radio  $a$  es orientado paralelamente a un plano conductor infinito y a una distancia  $h$  de él (figura 1.30). Demuestre que la capacidad del sistema, por unidad de longitud del cilindro está dada por

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\cosh^{-1}(h/a)}.$$

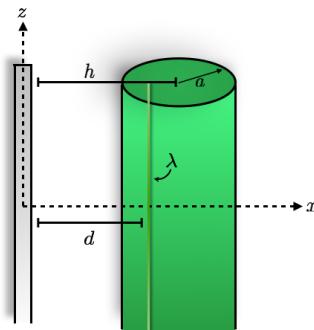


Figura 1.30: Cilindro conductor paralelamente a un plano conductor infinito.

*Solución.*

Sabemos de la ec . (1.229) que

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi}.$$

Podemos suponer que el plano y el cilindro conductor son superficies equipotenciales producidas por dos líneas de carga como en el ejemplo 1.19, de modo que la carga almacenada en el sistema, es la carga inducida sobre el plano conductor que en este caso es  $Q = -\lambda l$ , donde  $l$  es la longitud del cilindro, así la capacidad del sistema por unidad de longitud del cilindro es

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{-\lambda}{\Delta\phi}. \quad (1.246)$$

Usando la ec. (1.149)

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right), \\ \frac{r_1}{r_2} &= \exp\left(-\frac{2\pi\epsilon_0\Delta\phi}{\lambda}\right), \\ \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x+2d)^2+y^2}} &= M; \text{ con } M = \exp\left(-\frac{2\pi\epsilon_0\Delta\phi}{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (1.247)$$

Después de un poco de álgebra podemos expresar (1.247) como

$$\left(\frac{2Md}{1-M^2}\right)^2 = \left(x - \frac{2M^2d}{1-M^2}\right)^2 + y^2. \quad (1.248)$$

Podemos observar que ésta expresión es la ecuación de un círculo con radio

$$a = \frac{2Md}{1 - M^2}, \quad (1.249)$$

y centro en

$$x = \frac{2M^2d}{1 - M^2}, \quad y = 0. \quad (1.250)$$

Entonces

$$h = d + x = \frac{d + M^2d}{1 - M^2}. \quad (1.251)$$

Ahora realizamos la operación

$$\begin{aligned} \frac{h}{a} &= \frac{1 + M^2}{2M}, \\ M^2 - M \frac{2h}{a} + 1 &= 0, \\ \Rightarrow M &= \frac{h}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 - 1}. \end{aligned} \quad (1.252)$$

Al sustituir el valor de  $M$  obtenemos

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{2\pi\epsilon_0\Delta\phi}{\lambda}\right) &= \frac{h}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 - 1}, \\ \Rightarrow \Delta\phi &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{h}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 - 1} \right]. \end{aligned} \quad (1.253)$$

Usando la identidad

$$\cosh^{-1} z = \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1}). \quad (1.254)$$

Entonces de (1.253) se tiene

$$\Delta\phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cosh^{-1}(h/a). \quad (1.255)$$

Finalmente, sustituimos esta última expresión en (1.246)

$$\therefore C' = \frac{2\pi\epsilon_0}{\cosh^{-1}(h/a)}. \quad (1.256)$$

■

<b>Desarrollo multipolar eléctrico</b>
<b>Campo electrostático en dieléctricos</b>
Polarización
Cargas de polarización
<b>Ley de Gauss en dieléctricos</b>
<b>Campo de desplazamiento</b>
Condiciones en la frontera
Energía en dieléctricos
Momento de rotación
<b>Ecuaciones de Poisson y de Laplace</b>
El teorema de unicidad
<b>Solución de la ecuación de Laplace</b>
Coordinadas cartesianas
Coordinadas cilíndricas
Coordinadas esféricas
<b>Método de imágenes</b>



## 2 — Problemas electrostáticos

### 2.1 Desarrollo multipolar eléctrico

Esta técnica es útil para obtener un valor aproximado del potencial debido a una distribución de carga arbitraria. La aproximación es mejor cuanto más lejos nos encontremos de la distribución, fig. 2.1. Consideremos una distribución volumétrica de carga en la vecindad del origen de coordenadas, el potencial en  $\mathbf{r}$  está dado por (1.96):

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Al considerar que los puntos de observación están lejos del origen ( $r \gg r'$ ), la cantidad  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$

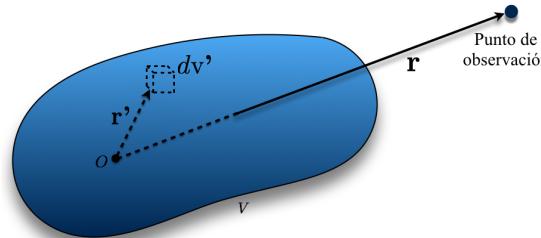


Figura 2.1: Carga localizada en un volumen  $V$  con una densidad de carga  $\rho(r')$ . El potencial eléctrico se calcula en el punto  $\mathbf{r}$ .

puede desarrollarse en series de potencias crecientes de  $r'/r$ :

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{(r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{1/2}} = \frac{1}{r \left[ 1 + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right]^{1/2}}. \quad (2.1)$$

Sea

$$x := \left( \frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}, \quad (2.2)$$

al considerar  $r \gg r'$  entonces  $1 \gg x$ , por lo cual

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} \frac{1}{(1+x)^{1/2}}, \\ &= \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots \right).\end{aligned}\quad (2.3)$$

Sustituyendo (2.2) en (2.3),

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \left( \frac{r'}{r} \right) \cos \theta \right] + \frac{3}{8} \left[ \left( \frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \left( \frac{r'}{r} \right) \cos \theta \right]^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{16} \left[ \left( \frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \left( \frac{r'}{r} \right) \cos \theta \right]^3 + \dots \right\},\end{aligned}\quad (2.4)$$

El siguiente paso es hacer el desarrollo de las potencias de  $x$ .

**Observación 2.1** Notemos que  $(r'/r)^2$  es despreciable comparado con  $2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r^2$ , sin embargo, no debe eliminarse del primer par de corchetes porque es del mismo orden que el término dominante del segundo par de corchetes.

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} \left[ 1 + \left( \frac{r'}{r} \right) \cos \theta + \frac{1}{2} \left( \frac{r'}{r} \right)^2 \left( 3 \cos^2 \theta - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{r'}{r} \right)^3 \left( 5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \right) + \dots \right],\end{aligned}\quad (2.5)$$

las funciones de los ángulos se conocen como *polinomios de Legendre*,  $P_l(\cos \theta)$  con  $l$  el grado del polinomio:

$$\begin{aligned}P_0(\cos \theta) &= 1, \\ P_1(\cos \theta) &= \cos \theta, \\ P_2(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1), \\ P_3(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta), \\ P_4(\cos \theta) &= \frac{1}{8}(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3).\end{aligned}\quad (2.6)$$

Entonces

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^l P_l(\cos \theta). \quad (2.7)$$

Por lo tanto sustituyendo (2.7) en (1.96)

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int_V r'^l P_l(\cos \theta) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}', \quad (2.8)$$

desarrollando los primeros 3 términos obtenemos

$$\begin{aligned}\phi(r) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_V r' \cos \theta \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int_V \frac{r'^2}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' \\ & + \dots\end{aligned}\tag{2.9}$$

Este resultado recibe el nombre de *desarrollo multipolar del potencial*. Los términos individuales de la suma se llaman respectivamente, potencial *monopolar*, potencial *dipolar* y potencial *cuadripolar*. Por conveniencia se escribe como

$$\phi(r) = \phi_M(r) + \phi_D(r) + \phi_Q(r) + \dots\tag{2.10}$$

1. *Potencial monopolar*: Es el término dominante del potencial, cuando el punto del campo se encuentra muy lejos de las cargas se observa que toda la distribución actúa como si fuera una sola carga puntual.

$$\phi_M(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.\tag{2.11}$$

2. *Potencial dipolar*: De la ec. (2.9) multiplicamos al potencial dipolar por  $r/r$

$$\begin{aligned}\phi_D(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int_V rr' \cos \theta \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int_V \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}', \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}'.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Se define el *momento dipolar* como

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}',\tag{2.13}$$

así, sustituyendo (2.13) en la ec. (2.12) se obtiene

$$\phi_D(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3}.\tag{2.14}$$

3. *Potencial cuadripolar*: De la ec. (2.9) multiplicamos al potencial cuadrupolar por  $r^2/r^2$

$$\begin{aligned}\phi_Q(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \int_V \frac{r^2 r'^2}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \int_V \frac{1}{2} [3(r r' \cos \theta)^2 - r^2 r'^2] \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}', \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \int_V \frac{1}{2} [3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) r'^2] \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}'.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Sean  $x_i$  las componentes cartesianas de  $\mathbf{r}$  y  $x'_i$  las componentes cartesianas de  $\mathbf{r}'$ , entonces

usando la convención de suma de Einstein<sup>1</sup> en la ec. (2.15) se tiene

$$\begin{aligned}\phi_Q(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \int_V \frac{1}{2} (3x_i x'_i x_j x'_j - x_i x_i r'^2) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}', \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \int_V \frac{1}{2} (3x_i x'_i x_j x'_j - x_i \delta_{ij} x_j r'^2) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}'.\end{aligned}\quad (2.16)$$

El símbolo  $\delta_{ij}$  es el símbolo *delta de kronecker*, que se define como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (2.17)$$

Entonces

$$\phi_Q(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^5} \int_V x_i x_j (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}'. \quad (2.18)$$

Se define las componentes del tensor de momento cuadripolar como

$$Q_{ij} = \int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}'. \quad (2.19)$$

Por lo tanto

$$\phi_Q(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij}. \quad (2.20)$$

■ **Ejemplo 2.1** Obtenga el campo eléctrico de un dipolo puntual calculando el gradiente de

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

*Solución.*

Podemos realizar el producto punto y obtener

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pr \cos \theta}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}. \quad (2.21)$$

Por otra parte sabemos que

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi.$$

Aplicaremos el gradiente en coordenadas esféricas

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \quad (2.22)$$

de esta forma obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left( -2 \frac{\cos\theta}{r^3} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \frac{\sin\theta}{r^2} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right), \\ \therefore \mathbf{E} &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( 2 \cos\theta \hat{\mathbf{r}} + \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right).\end{aligned}\quad (2.23)$$

■

■ **Ejemplo 2.2** a) Encuentre el potencial de un cuadripolo axial: cargas puntuales  $q, -2q, q$  colocadas en el eje  $z$  a distancias  $l, 0, -l$  del origen (figura 2.2).

b) Encuentre el potencial sólo a distancias  $r \gg l$ .

c) Demuestre que este potencial es proporcional a uno de los armónicos de zona.

*Solución.*

<sup>1</sup>Índices repetidos indican suma:  $\sum_{i=1}^3 x_i x_i \rightarrow x_i x_i$

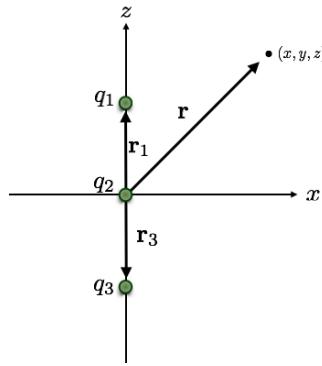


Figura 2.2: Cuadripolo axial.

a) Sabemos de la ec.(1.95) que

$$\begin{aligned}\phi(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}, \\ \Rightarrow \phi(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \frac{q_3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3|} \right),\end{aligned}\quad (2.24)$$

con

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}},$$

$$\mathbf{r}_1 = l \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{r}_3 = -l \mathbf{k},$$

así

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{(r^2 + l^2 - 2rl \cos \theta)^{1/2}} - \frac{2q}{r} + \frac{q}{[r^2 + l^2 - \cos(\pi - \theta)]^{1/2}} \right], \quad (2.25)$$

donde

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta.$$

Entonces

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(r^2 + l^2 - 2rl \cos \theta)^{1/2}} - \frac{2}{r} + \frac{1}{(r^2 + l^2 + 2rl \cos \theta)^{1/2}} \right]. \quad (2.26)$$

b) Para distancias  $r \gg l$  ocupamos el potencial cuadripolar de la ec. (2.9)

$$\begin{aligned}\phi_Q &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int_V \frac{r'^2}{2} (3\cos^2 \theta - 1) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}', \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3\cos^2 \theta - 1)}{2r^3} \int_V r'^2 \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{v}'.\end{aligned}\quad (2.27)$$

Podemos considerar las cargas puntuales como un caso especial de una función general de densidad de carga  $\rho(\mathbf{r})$ . La función *delta de Dirac*<sup>2</sup>,  $\delta(r)$ , es muy útil para este propósito,

<sup>2</sup>La función delta de Dirac está definida por:

$$\delta(\mathbf{r}) = 0, \text{ para } \mathbf{r} \neq \mathbf{0},$$

$$\int_V \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{v} = 1.$$

Con la propiedad de que para cualquier función  $F$  escalar o vectorial

$$\int_V F(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d\mathbf{v}' = F(\mathbf{r}).$$

de modo que para una densidad volumétrica de carga

$$\rho(\mathbf{r}') = q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i). \quad (2.28)$$

En nuestro caso se tiene

$$\rho(\mathbf{r}') = \sum_{i=1}^3 q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i). \quad (2.29)$$

Entonces, sustituyendo (2.29) en (2.27)

$$\begin{aligned} \phi_Q &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2r^3} \sum_{i=1}^3 q_i \int_V r'^2 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) dV', \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2r^3} \sum_{i=1}^3 q_i r_i^2, \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2r^3} (q_1 r_1^2 + q_2 r_2^2 + q_3 r_3^2), \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{r^3} ql^2. \end{aligned} \quad (2.30)$$

c) Por otra parte recordamos que el polinomio de Legendre de grado dos es

$$P_2(\cos\theta) = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2},$$

por lo tanto

$$\therefore \phi_Q(r) = \frac{ql^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{P_2(\cos\theta)}{r^3}. \quad (2.31)$$

■

**Ejemplo 2.3** Por medio de la función delta para una distribución de cargas puntuales, demuestre que el momento dipolar de un par de cargas puntuales  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$  se puede obtener a partir de la definición general

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV'.$$

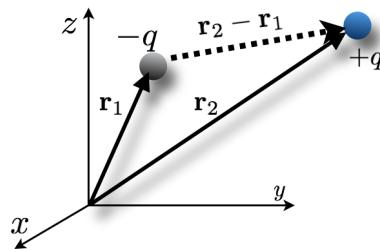


Figura 2.3: Localización de las cargas en un dipolo eléctrico.

*Solución.*

Recordamos que la densidad volumétrica de carga se puede expresar en término de la función delta de Dirac, entonces

$$\rho(\mathbf{r}') = \sum_{i=1}^2 q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i). \quad (2.32)$$

Sustituyendo en la definición de momento dipolar tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} &= \sum_{i=1}^2 q_i \int_V \mathbf{r}' \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) dV', \\
 &= \sum_{i=1}^2 q_i \mathbf{r}_i = q_1 \mathbf{r}_1 + q_2 \mathbf{r}_2, \text{ se usa } q_1 = -q, q_2 = q \\
 &= q(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \text{ sea } \mathbf{l} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \\
 &= q\mathbf{l}.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

**Observación 2.2** La dirección del vector  $\mathbf{p}$  va de la carga negativa a la carga positiva.

■

## 2.2 Campo electrostático en dieléctricos

En esta sección se tratará con materia no conductora, la cual se le denomina *dieléctrica*. Un material dieléctrico ideal es aquel que no tiene cargas libres. Sin embargo, sabemos que todos los medios materiales se compone de moléculas, éstas a su vez se componen de núcleos atómicos y electrones, las moléculas de los dieléctricos, son de echo, afectadas por la presencia de un campo eléctrico.

### 2.2.1 Polarización

Existen varias posibilidades cuando se trata de considerar el efecto de un campo eléctrico sobre un átomo o una molécula.

En ausencia de un campo eléctrico, la molécula puede tener su carga electrónica negativa simétricamente distribuida alrededor de sus núcleos positivos. En este caso la molécula tiene un momento dipolar igual a cero. Si existe un campo eléctrico presente, existirán fuerzas que actúen sobre las cargas. Las cargas positivas tenderán a moverse en dirección del campo y las negativas en dirección contraria (ver figura 2.4). En un momento dado, las fuerzas internas en la molécula producirán un nuevo estado de equilibrio, pero la distribución de carga molecular habrá sufrido una distorsión en su forma original. Así, las cargas positivas y negativas que antes coincidían habrán sufrido un desplazamiento en sus centros de gravedad, esto significa que la molécula tendrá ahora un momento dipolar no nulo. Se dice en este caso que la molécula tiene un *momento dipolar inducido* y que se ha *polarizado*.

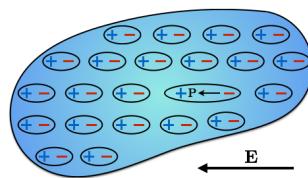


Figura 2.4: Porción de un material dieléctrico polarizado.

Una segunda posibilidad es que, debido a su estructura interna, algunas moléculas ya tengan sus distribuciones de carga positiva y negativa separada, de modo que ya existía un momento dipolar aún en ausencia del campo eléctrico. Tales moléculas reciben el nombre de moléculas polares y a su momento dipolar se le llama *momento dipolar permanente*.

Consideremos un elemento de volumen  $\Delta v$  de un medio dieléctrico eléctricamente neutro. Si el medio está polarizado entonces se ha producido una separación de cargas positivas y negativas y el elemento de volumen se caracteriza por un momento dipolar eléctrico ec. (2.13)

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv' = \int_V \mathbf{r}' dq, \\ \Rightarrow \Delta \mathbf{p} &= \int_{\Delta V} \mathbf{r}' dq.\end{aligned}\quad (2.34)$$

Como  $\Delta \mathbf{p}$  depende del tamaño del elemento de volumen, es conveniente trabajar con  $\mathbf{P}$  que es el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen o generalmente conocido como *polarización eléctrica*

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta v}. \quad (2.35)$$

Estrictamente  $\mathbf{P}$  debe definirse como

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta v} = \frac{d \mathbf{p}}{d v}, \quad (2.36)$$

con unidades de carga por unidad de área [ $C/m^2$ ]. El grado de polarización depende no sólo del campo eléctrico, sino también de las propiedades de la moléculas que forman un material dieléctrico. Desde el punto de vista macroscópico el comportamiento del material se determina de forma experimental y se encuentra que

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}). \quad (2.37)$$

Si  $\mathbf{E}$  varía de un punto a otro en el material, entonces  $\mathbf{P}$  variará igualmente. Para la mayoría de los materiales,  $\mathbf{P}$  se anula cuando  $\mathbf{E}$  se anula, en consecuencia se limita la explicación a materiales de este tipo. Además, si el material es *isótropo* la polarización deberá tener el mismo sentido que el campo eléctrico que la provoca ( $\mathbf{P} \parallel \mathbf{E}$ ). Estos resultados se resumen en la *ecuación constitutiva*

$$\mathbf{P} = \chi(E) \mathbf{E}, \quad (2.38)$$

donde la cantidad escalar  $\chi(E)$  se llama *susceptibilidad eléctrica* del material.

## 2.2.2 Cargas de polarización

El término *carga ligada* ó *carga de polarización*, en contraste con el de *carga libre* de un conductor, se usa a veces para poner énfasis en el hecho de que tales cargas moleculares no son libres para moverse muy lejos o ser extraídas del material dieléctrico.

Supongamos que se tiene un material dieléctrico polarizado, es decir, que está caracterizado en cada punto  $\mathbf{r}'$  por una polarización  $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$ . La polarización da origen a un campo eléctrico y se desea calcular este campo en un punto  $\mathbf{r}$  que está fuera de la masa del dieléctrico (véase la figura 2.5). Resulta más conveniente calcular el potencial  $\phi(r)$  y luego obtener el campo eléctrico como menos el gradiente de  $\phi$ .

Como la distancia entre  $\mathbf{r}$  y  $\Delta v'$  es grande comparada con las dimensiones de  $\Delta v'$  el potencial está dado por la ec. (2.14)

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

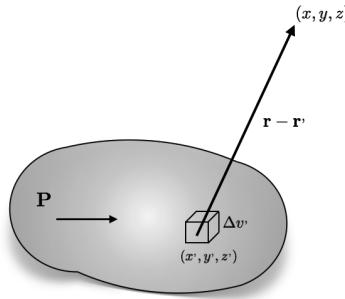


Figura 2.5: Para calcular el campo eléctrico en  $\mathbf{r}$  se suman la contribuciones de los elementos de volumen  $\Delta v'$ .

Cada elemento de volumen  $\Delta v'$  del medio dieléctrico se caracteriza por un momento dipolar  $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{P} \Delta v'$ , entonces su contribución al potencial es

$$\begin{aligned}\Delta\phi(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Delta\mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \\ \Rightarrow \Delta\phi(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \Delta v'.\end{aligned}\quad (2.39)$$

Si se suman todas las contribuciones del dieléctrico

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'. \quad (2.40)$$

El potencial  $\phi$  puede obtenerse directamente a partir de la ec. (2.40) si se conoce la forma de  $\mathbf{P}$ . Ahora, si usamos la identidad

$$\nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (2.41)$$

donde el operador  $\nabla'$  actúa sobre las coordenadas primadas. Entonces

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dv'. \quad (2.42)$$

Por otro lado, si usamos la identidad

$$\begin{aligned}\nabla' \cdot (f\mathbf{F}) &= f(\nabla' \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot (\nabla' f), \\ \Rightarrow \mathbf{F} \cdot (\nabla' f) &= \nabla' \cdot (f\mathbf{F}) - f(\nabla' \cdot \mathbf{F}),\end{aligned}\quad (2.43)$$

donde  $f$  es cualquier función escalar y  $\mathbf{F}$  una función vectorial, en este caso tomamos  $f = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  y  $\mathbf{F} = \mathbf{P}$ , así de la ec. (2.42) obtenemos

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dv' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (2.44)$$

Al aplicar el teorema de la divergencia a la primera integral se tiene

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (2.45)$$

Al comparar la ec. (2.45) con (1.96) y (1.97) vemos que es el potencial que producirían una densidad de carga volumétrica distribuida en todo el volumen y una densidad superficial de carga sobre la superficie, siendo

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (2.46)$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (2.47)$$

Llamaremos a  $\sigma_p$  *densidad superficial de carga de polarización*, y a  $\rho_p$  *densidad volumétrica de carga de polarización*. Nótese que en (2.47) se ha omitido la prima entendiéndose que se diferencia con respecto a las coordenadas del punto fuente.

Reescribiendo el potencial debido al dieléctrico en término de éstas definiciones obtenemos

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad (2.48)$$

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq_p'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.49)$$

se expresa de tal manera que es evidente que proviene de una distribución de carga. La carga de polarización total de un cuerpo dieléctrico,

$$Q_p = \oint_S \sigma_p da' + \int_V \rho_p dv' = \oint_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da' - \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dv', \quad (2.50)$$

debe ser igual a cero ya que hemos considerado un dieléctrico eléctricamente neutro, lo cual es evidente aplicando el teorema de la divergencia en (2.50)

$$\begin{aligned} Q_p &= \oint_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da' - \oint_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da', \\ \Rightarrow Q_p &= 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Finalmente el campo eléctrico fuera del dieléctrico se puede calcular como menos el gradiente de (2.48)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \sigma_p \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho_p \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'. \quad (2.52)$$

### 2.3 Ley de Gauss en dieléctricos

En el capítulo 1 se dedujo una relación entre el flujo eléctrico y la carga, es decir, la ley de Gauss. Al aplicar la ley de Gauss en una región que contiene cargas inmersas en un dieléctrico (figura 2.6), debemos tener cuidado en incluir todas las cargas en una superficie gaussiana tanto las cargas de polarización como las cargas libres, con sus respectivas densidades de carga  $\rho_p$  y  $\rho_l$ . Recordamos de la ley de Gauss que

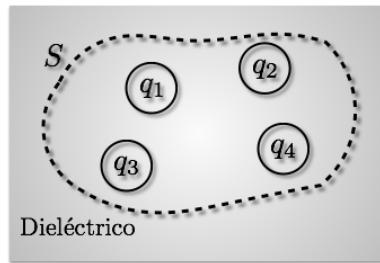


Figura 2.6: Superficie gaussiana en un medio dieléctrico .

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0},$$

donde

$$Q_{enc} = Q + Q_p,$$

con  $Q$  la carga libre y  $Q_p$  la carga de polarización

$$Q_p = \oint_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da - \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dv.$$

Aquí  $V$  es el volumen del dieléctrico encerrado por  $S$ . Como no hay frontera del material dieléctrico en  $S$ , la integral de superficie no tiene contribución, entonces de la ley de Gauss se tiene

$$\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = Q - \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dv. \quad (2.53)$$

Usando el teorema de la divergencia en el segundo miembro de la igualdad obtenemos

$$\begin{aligned} \oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da &= Q - \oint_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da, \\ \oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da + \oint_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da &= Q, \\ \Rightarrow \oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da &= Q. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Ahora para la ley de Gauss en su forma diferencial

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0},$$

en este caso

$$\begin{aligned} \rho_{tot} &= \rho_l + \rho_p, \\ &= \rho_l - \nabla \cdot \mathbf{P}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

por lo que de la ley de Gauss en su forma diferencial se tiene

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) &= \rho_l - \nabla \cdot \mathbf{P}, \\ \nabla \cdot \mathbf{P} + \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) &= \rho_l, \\ \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) &= \rho_l. \end{aligned} \quad (2.56)$$

## 2.4 Campo de desplazamiento

La forma de la ec. (2.54) establece que el vector de flujo  $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  que pasa por una superficie cerrada es igual a la carga libre encerrada por la superficie, y la ec. (2.56) en la que únicamente la densidad de carga libre  $\rho_l$  aparece en el miembro derecho de la igualdad, sugiere que podría ser de utilidad definir un campo vectorial  $\mathbf{D}$  como

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (2.57)$$

Al vector  $\mathbf{D}$  se le llama *desplazamiento eléctrico*, el cual tiene las mismas unidades de  $\mathbf{P}$ , carga por unidad de área.

En función de  $\mathbf{D}$  las ecuaciones (2.54) y (2.56) tienen la forma

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = Q, \quad (2.58)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_l. \quad (2.59)$$

Estos resultados se conocen generalmente como la *ley de Gauss* para el *desplazamiento eléctrico*. Recordando que la susceptibilidad eléctrica se define como la ec. (2.38)

$$\mathbf{P} = \chi(E) \mathbf{E}.$$

Al combinarla con (2.57) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi(E) \mathbf{E}, \\ \Rightarrow \mathbf{D} &= [\epsilon_0 + \chi(E)] \mathbf{E}.\end{aligned}\quad (2.60)$$

Se define la *permitividad eléctrica*  $\epsilon(E)$  como

$$\epsilon(E) = \epsilon_0 + \chi(E), \quad (2.61)$$

de tal forma que

$$\mathbf{D} = \epsilon(\mathbf{E}) \mathbf{E}. \quad (2.62)$$

A menudo las constantes  $\chi$  y  $\epsilon$  son características del material. Materiales de este tipo se llaman *dieléctricos lineales* y obedecen las relaciones

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}, \quad (2.63)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (2.64)$$

Es conveniente que el comportamiento eléctrico de un material quede especificado por una cantidad adimensional  $K$  definida como

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \quad (2.65)$$

$K$  es conocida como *constante dieléctrica*. Usando la ec. (2.61) se tiene que

$$K = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0}. \quad (2.66)$$

■ **Ejemplo 2.4** Sea una carga puntual  $q$  colocada en el origen en un fluido dieléctrico con constante dieléctrica  $K$  (figura 2.7). Encuentre el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y la polarización eléctrica  $\mathbf{P}$  en el fluido.

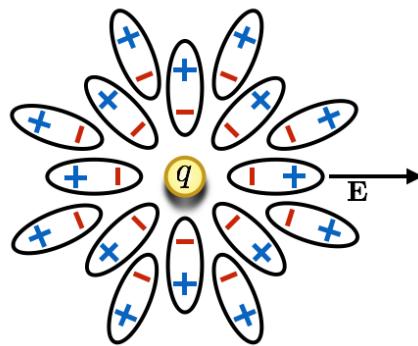


Figura 2.7: Moléculas en un medio dieléctrico que rodea una carga puntual.

*Solución.*

De ley de Gauss para el desplazamiento eléctrico se tiene

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = q. \quad (2.67)$$

Usando una superficie gaussiana en forma de esfera de radio  $r$  obtenemos

$$\begin{aligned} \int D da &= q, \\ D4\pi r^2 &= q, \\ \Rightarrow \mathbf{D} &= \frac{q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Recordando la relación entre el campo eléctrico y el desplazamiento eléctrico, ec. (2.64)

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}, \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{D}}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Sustituyendo el vector de desplazamiento en esta última expresión

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.70)$$

Por otro lado de la ec. (2.65) se tiene

$$\begin{aligned} K &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \\ \Rightarrow \epsilon &= K\epsilon_0. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Finalmente

$$\therefore \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{Kr^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.72)$$

Para obtener la polarización eléctrica usamos la relación (2.63)

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}, \quad (2.73)$$

donde  $\chi$  se obtiene de (2.66)

$$\begin{aligned} K &= 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0}, \\ \Rightarrow \chi &= (K - 1)\epsilon_0, \end{aligned} \quad (2.74)$$

así

$$\therefore \mathbf{P} = \frac{K-1}{4\pi} \frac{q}{Kr^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.75)$$

■

## 2.5 Condiciones en la frontera

Debemos conocer como varían los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  al pasar por una interfaz entre dos medios, los cuales pueden ser dos dieléctricos o un dieléctrico y un conductor. El vacío se considera como un dieléctrico de permitividad  $\epsilon_0$ .

Consideremos dos medios en contacto, 1 y 2, como se observa en la figura 2.8. Supongamos una densidad superficial de carga  $\sigma$  en la zona interfacial. Consideraremos ahora una superficie gaussiana en forma de cilindro de altura  $h$ , aplicando la ley de Gauss para el desplazamiento eléctrico se tiene

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = Q,$$

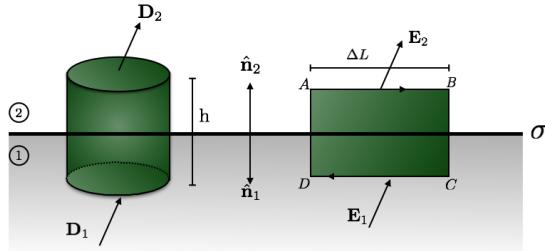


Figura 2.8: Condiciones de frontera para los vectores de campo en la zona interfacial entre dos medios.

donde la carga encerrada es

$$Q = \sigma \Delta S + \frac{1}{2} \rho_1 V + \frac{1}{2} \rho_2 V. \quad (2.76)$$

Si consideramos que  $h \ll 1$ , entonces  $V \rightarrow 0$ , así de la ley de Gauss

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \Delta S + \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \Delta S &= \sigma \Delta S, \\ (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 &= \sigma. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Entonces

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad (2.78)$$

La componente normal de  $\mathbf{D}$  será discontinua únicamente si existe alguna densidad superficial de carga en la zona interfacial. Además

$$\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \sigma, \quad (2.79)$$

esto proporciona una condición sobre el potencial eléctrico

$$\epsilon_2 (\nabla \phi_2) \cdot \mathbf{n}_2 - \epsilon_1 (\nabla \phi_1) \cdot \mathbf{n}_1 = -\sigma. \quad (2.80)$$

Por otro lado, la integral de línea alrededor de la trayectoria cerrada  $ABCD$  es

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (2.81)$$

Sobre esta trayectoria los segmentos  $AD$  y  $BC$  se consideran despreciablemente pequeños, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 \cdot \Delta \mathbf{l} + \mathbf{E}_1 \cdot (-\Delta \mathbf{l}) &= 0, \\ \Rightarrow E_{1t} &= E_{2t}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Por lo tanto, la componente tangencial del campo eléctrico es continua al atravesar una zona interfacial.

■ **Ejemplo 2.5** Dos medios dieléctricos con constantes dieléctricas  $k_1$  y  $k_2$  están separados por una zona interfacial plana. No hay cargas externas en la zona interfacial (figura 2.9). Encuentre una relación entre los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  siendo éstos los ángulos formados por una línea arbitraria de desplazamiento y la normal a la zona interfacial:  $\theta_1$  en el medio 1 y  $\theta_2$  en el medio 2.

*Solución.*

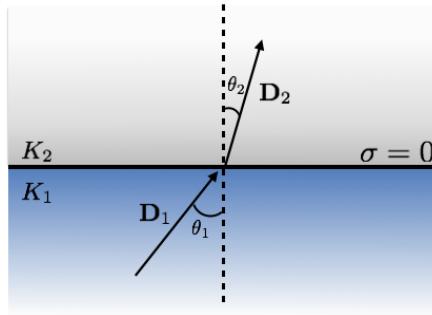


Figura 2.9: *Medios de constantes dieléctricas  $k_1$  y  $k_2$ , separados por zona interfacial.*

Recordamos que las condiciones de frontera normal y tangencial están dadas por las ecuaciones (2.70) y (2.82)

$$\begin{aligned} D_{2n} - D_{1n} &= \sigma, \\ E_{1t} &= E_{2t}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Como no hay cargas en la zona interfacial, sólo se tiene

$$D_{2n} - D_{1n} = 0. \quad (2.84)$$

Por otro lado, recordamos también que

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},$$

así de (2.84)

$$\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = 0. \quad (2.85)$$

Las componentes de los campos  $E_1$  y  $E_2$  son

$$E_{1t} = E_1 \sin \theta_1 ; \quad E_{1n} = E_1 \cos \theta_1, \quad (2.86)$$

$$E_{2t} = E_2 \sin \theta_2 ; \quad E_{2n} = E_2 \cos \theta_2. \quad (2.87)$$

Usando éstas ecuaciones en (2.83) y (2.85) obtenemos

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2. \quad (2.88)$$

$$\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2. \quad (2.89)$$

Realizando el cociente de (2.88) y (2.89)

$$\begin{aligned} \frac{\tan \theta_1}{\epsilon_1} &= \frac{\tan \theta_2}{\epsilon_2}, \\ \Rightarrow \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} &= \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Además, de la ec. (2.65) se tenía

$$K_i = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_0}.$$

Finalmente

$$\therefore \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{K_1}{K_2}. \quad (2.91)$$

■

■ **Ejemplo 2.6** Un cubo dieléctrico de lado  $L$  (figura 2.10) tiene una polarización radial dada por  $\mathbf{P} = A\mathbf{r}$ , siendo  $A$  una constante y  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ . El origen del sistema está en el centro del cubo.

- Encuentre todas las densidades de carga de polarización.
- Demuestre explícitamente que la carga total de polarización se anula en este caso.

*Solución.*

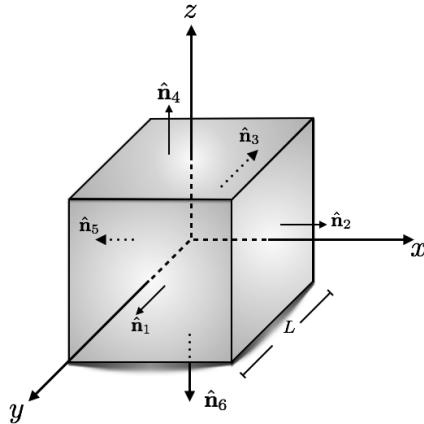


Figura 2.10: Cubo dieléctrico con polarización radial  $\mathbf{P}$ .

a) Sabemos que

$$\begin{aligned}\rho_p &= -\nabla \cdot \mathbf{P}, \\ \therefore \rho_p &= -\nabla \cdot (A\mathbf{r}) = -3A.\end{aligned}\quad (2.92)$$

Por otro lado

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

Entonces

$$\sigma_{p1} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = A \frac{L}{2}, \quad (2.93)$$

$$\sigma_{p2} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = A \frac{L}{2}, \quad (2.94)$$

$$\sigma_{p3} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}_3 = A \frac{L}{2}, \quad (2.95)$$

$$\sigma_{p4} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}_4 = A \frac{L}{2}, \quad (2.96)$$

$$\sigma_{p5} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}_5 = A \frac{L}{2}, \quad (2.97)$$

$$\sigma_{p6} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}_6 = A \frac{L}{2}. \quad (2.98)$$

b) La carga de polarización está dada por

$$Q_p = \oint_S \sigma_p da' + \int_V \rho_p dv',$$

así

$$Q_p = \oint_S \sigma_{pi} da_i + \int_V \rho_p dv', \text{ con } i = 1, \dots, 6. \quad (2.99)$$

Entonces

$$\begin{aligned} Q_p &= 6 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} A \frac{L}{2} dy' dz' - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} 3 A dx' dy' dz', \\ &= 6A \frac{L^3}{2} - 3AL^3, \\ \therefore Q_p &= 0. \end{aligned} \quad (2.100) \quad \blacksquare$$

■ **Ejemplo 2.7** Una varilla de dieléctrico cargada de sección  $A$ , se extiende sobre el eje  $x$  desde  $x = 0$  hasta  $x = L$  (figura 2.11), la polarización de la varilla es a lo largo de su longitud y está dada por  $P_x = ax^2 + b$ , con  $a, b > 0$ .

- Encuentre las densidades volumétrica de carga de polarización y la superficial de carga de polarización en cada extremo.
- Demuestre explícitamente que la carga total de polarización se anula en este caso.

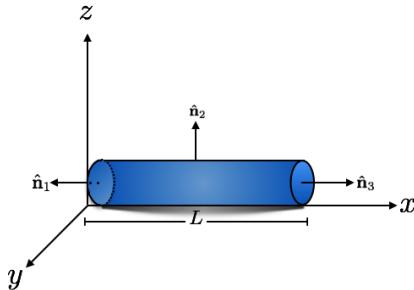


Figura 2.11: Varilla dieléctrica de sección A.

*Solución.*

- Recordamos que la densidad volumétrica de carga está dada por la ec. (2.47)

$$\begin{aligned} \rho_p &= -\nabla \cdot \mathbf{P}, \\ \therefore \rho_p &= -2ax. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Por otro lado, la densidad superficial de carga de polarización está dada por (2.46)

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

Entonces

$$\therefore \sigma_{p1} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = -b. \quad (2.102)$$

$$\therefore \sigma_{p2} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = 0. \quad (2.103)$$

$$\therefore \sigma_{p3} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}_3 = aL^2 + b. \quad (2.104)$$

- De la ec. (2.50) se tiene que la carga de polarización es

$$Q_p = \oint_S \sigma_p da' + \int_V \rho_p dv', \quad (2.105)$$

Entonces

$$\begin{aligned} Q_p &= \int_S \sigma_{p1} da' + \int_S \sigma_{p3} da' + \int_V \rho_p dv', \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^R b r' dr' d\theta' + \int_0^{2\pi} \int_0^R (aL^2 + b) r' dr' d\theta' - \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R 2ax' r' dr' d\theta' dx', \\ &= -b\pi R^2 + (aL^2 + b)\pi R^2 - aL^2 \pi R^2, \\ \therefore Q_p &= 0. \end{aligned} \quad (2.106) \quad \blacksquare$$

■ **Ejemplo 2.8** Una varilla de dieléctrico que tiene forma de cilindro circular recto de longitud  $L$  y radio  $R$  se polariza en dirección de su longitud (figura 2.12). Si la polarización es uniforme y de magnitud  $P$ , calcule el campo eléctrico resultante de esta polarización en un punto del eje de la varilla.

*Solución.*

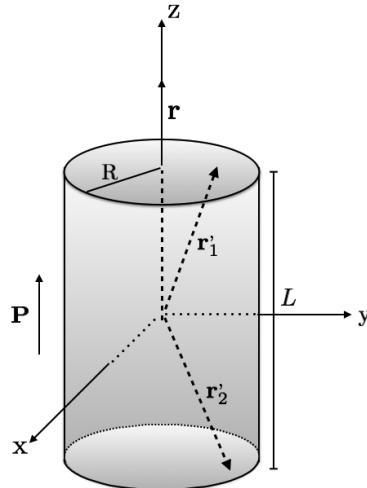


Figura 2.12: Varilla de dieléctrico con polarización  $\mathbf{P} = P\hat{\mathbf{k}}$ .

Sabemos que

$$\begin{aligned}\rho_p &= -\nabla \cdot \mathbf{P}, \\ \Rightarrow \rho_p &= 0.\end{aligned}\tag{2.107}$$

Por otro lado

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}},\tag{2.108}$$

$$\Rightarrow \sigma_{p1} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = P,\tag{2.109}$$

$$\Rightarrow \sigma_{p2} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = -P.$$

Calculamos el potencial eléctrico por integración directa con

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{a}'.$$

El potencial producido por la superficie superior e inferior es

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|} d\mathbf{a}' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|} d\mathbf{a}',\tag{2.110}$$

con

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= z\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}'_1 &= r'\hat{\rho} + \frac{L}{2}\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}'_2 &= r'\hat{\rho} - \frac{L}{2}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} P \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r'}{\left[r'^2 + (z - \frac{L}{2})^2\right]^{1/2}} dr' d\theta' - \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r'}{\left[r'^2 + (z + \frac{L}{2})^2\right]^{1/2}} dr' d\theta' \right\}, \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} P \left\{ \int_0^R \frac{r'}{\left[r'^2 + (z - \frac{L}{2})^2\right]^{1/2}} dr' - \int_0^R \frac{r'}{\left[r'^2 + (z + \frac{L}{2})^2\right]^{1/2}} dr' \right\}. \quad (2.111)\end{aligned}$$

Para resolver las integrales hacemos los cambios de variable respectivamente

$$\begin{aligned}u &= r'^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2, \\ v &= r'^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4\epsilon_0} P \left( \int_{(z - \frac{L}{2})^2}^{R^2 + (z - \frac{L}{2})^2} \frac{1}{u^{1/2}} du - \int_{(z + \frac{L}{2})^2}^{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2} \frac{1}{v^{1/2}} dv \right), \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} P \left( u^{1/2} \Big|_{(z - \frac{L}{2})^2}^{R^2 + (z - \frac{L}{2})^2} + v^{1/2} \Big|_{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2}^{(z + \frac{L}{2})^2} \right), \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} P \left\{ \left[ R^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2 \right]^{1/2} - \left(z - \frac{L}{2}\right) + \left(z + \frac{L}{2}\right) - \left[ R^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2 \right]^{1/2} \right\}, \\ \Rightarrow \phi &= \frac{1}{2\epsilon_0} P \left\{ \left[ R^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2 \right]^{1/2} - \left[ R^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2 \right]^{1/2} + L \right\}. \quad (2.112)\end{aligned}$$

Finalmente el campo eléctrico lo calculamos como  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$

$$\therefore E_z = -\frac{1}{2\epsilon_0} P \left[ \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{L}{2})^2}} - \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2}} \right]. \quad (2.113)$$

■

■ **Ejemplo 2.9** La figura 2.13 muestra la sección de un hilo conductor muy largo cargado con densidad lineal de carga  $-\lambda$ , que está rodeado de una zona de aire ( $\epsilon_0 = 1$ ) de radio  $R$ , alrededor de la cual están situadas dos capas cilíndricas concéntricas. La primera de ellas, de radio interior  $R$  y exterior  $2R$ , tiene constante dieléctrica  $k_1 = 2$ ; la segunda, de radio interior  $2R$  y exterior  $3R$ , tiene constante dieléctrica  $k_2 = 3$ . Determinar:

- a) El campo eléctrico en las distintas zonas del espacio.
- b) Las densidades de cargas de polarización en los dieléctricos.
- c) La diferencia de potencial entre un punto a distancia  $R$  del hilo y otro a distancia  $3R$ .

*Solución.*

- a) Para obtener el campo eléctrico se tiene

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}.$$

Podemos usar la ley de Gauss para el desplazamiento eléctrico

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = q,$$

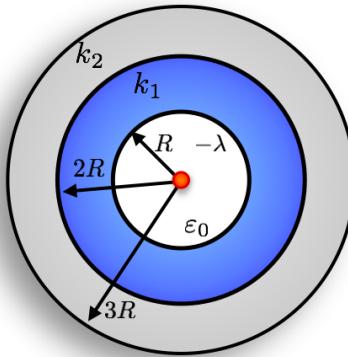


Figura 2.13: Hilo conductor entre capas cilíndricas coaxiales.

donde

$$q = -\lambda L.$$

Utilizamos una superficie gaussiana cilíndrica de altura  $L$  y radio  $r_1 < R$ , en esta región  $\epsilon = \epsilon_0$ , entonces

$$\begin{aligned} D_1 2\pi r_1 L &= -\lambda L. \\ \therefore \mathbf{E}_1 &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1} \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

De manera análoga, usamos una superficie de radio  $R < r_2 < 2R$

$$\Rightarrow \mathbf{D}_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon r_2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.115)$$

con

$$\epsilon = k_1 \epsilon_0 = 2\epsilon_0,$$

$$\therefore \mathbf{E}_2 = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.116)$$

Finalmente usamos una superficie de radio  $2R < r_3 < 3R$

$$\Rightarrow \mathbf{D}_3 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon r_3} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.117)$$

donde

$$\epsilon = k_2 \epsilon_0 = 3\epsilon_0.$$

$$\therefore \mathbf{E}_3 = -\frac{\lambda}{6\pi\epsilon_0 r_3} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.118)$$

b) Sabemos que

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} ; \rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P},$$

con

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} = (k-1)\epsilon_0 \mathbf{E}.$$

Para la región del vacío

$$\mathbf{P}_1 = 0. \quad (2.119)$$

Para el primer dieléctrico usamos  $\mathbf{E}_2$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2 &= -(k_1 - 1)\epsilon_0 \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_2} \hat{\mathbf{r}}, \\ \Rightarrow \mathbf{P}_2 &= -\frac{\lambda}{4\pi r_2} \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Por lo tanto, para la densidad superficial de carga de polarización

$$\sigma_{p1} = \mathbf{P}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1,$$

$$\therefore \sigma_{p1} = -\frac{\lambda}{4\pi r_2}. \quad (2.121)$$

Calculamos la densidad volumétrica de carga de polarización usando la divergencia en coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned}\rho_{p1} &= \frac{1}{r_2} \frac{\partial}{\partial r_2} \left[ r_2 \frac{\lambda}{4\pi r_2} \right], \\ \therefore \rho_{p1} &= 0.\end{aligned}\quad (2.122)$$

Ahora, en el segundo dieléctrico usamos  $\mathbf{E}_3$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_3 &= -(k_2 - 1)\epsilon_0 \frac{\lambda}{6\pi\epsilon_0 r_3} \hat{\mathbf{r}}, \\ \Rightarrow \mathbf{P}_3 &= -\frac{\lambda}{3\pi r_3} \hat{\mathbf{r}}.\end{aligned}\quad (2.123)$$

De esta forma la densidad superficial de carga de polarización es

$$\begin{aligned}\sigma_{p2} &= \mathbf{P}_3 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2, \\ \therefore \sigma_{p2} &= -\frac{\lambda}{3\pi r_3}.\end{aligned}\quad (2.124)$$

Para la densidad volumétrica de carga de polarización

$$\begin{aligned}\rho_{p2} &= \frac{1}{r_3} \frac{\partial}{\partial r_3} \left[ r_3 \frac{\lambda}{3\pi r_3} \right], \\ \therefore \rho_{p2} &= 0.\end{aligned}\quad (2.125)$$

c) Sabemos que

$$\phi = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}'.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\phi &= - \int_{3R}^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' = - \int_{3R}^{2R} \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{r}' - \int_{2R}^R \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r}', \\ &= \int_{3R}^{2R} \frac{\lambda}{6\pi\epsilon_0 r'_3} dr'_3 + \int_{2R}^R \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r'_2} dr'_2, \\ &= \frac{\lambda}{6\pi\epsilon_0} \ln r'_3 \Big|_{3R}^{2R} + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln r'_2 \Big|_{2R}^R, \\ \therefore \phi &= \frac{\lambda}{6\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{2}{3} \right) + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{1}{2} \right).\end{aligned}\quad (2.126)$$

■

■ **Ejemplo 2.10** Una carga puntual  $q$  está situada en el centro de una esfera dieléctrica de radio  $a$  y constante dieléctrica  $K$ . Encontrar  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{P}$  en todo punto. ¿Cuál es la carga ligada total sobre la superficie de la esfera?

*Solución.*

Fuera de la esfera se tiene

$$\oint \mathbf{D}_{ext} \cdot d\mathbf{a} = q.$$

Tomando una superficie gaussiana circular de radio  $r$

$$\begin{aligned}D_{ext} 4\pi r^2 &= q, \\ \therefore \mathbf{D}_{ext} &= \frac{q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}.\end{aligned}\quad (2.127)$$

Para obtener el campo eléctrico tenemos la relación

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}.$$

En la región fuera de la esfera se tiene  $\epsilon = \epsilon_0$

$$\therefore \mathbf{E}_{ext} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}.\quad (2.128)$$

Por otro lado recordamos que la polarización se puede obtener como

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}.$$

Pero  $\chi = 0$  en el vacío

$$\therefore \mathbf{P}_{ext} = \mathbf{0}. \quad (2.129)$$

Ahora, dentro de la esfera

$$\therefore \mathbf{D}_{int} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.130)$$

Para el campo eléctrico se tiene

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.131)$$

con

$$\begin{aligned} K &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \\ \therefore \mathbf{E}_{int} &= \frac{q}{4\pi K \epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Además de la ec.(2.66)

$$\begin{aligned} \chi &= (K-1)\epsilon_0, \\ \therefore \mathbf{P}_{int} &= \frac{q(K-1)}{4\pi K r^2} \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Recordamos que la carga ligada está dada por

$$Q_p = \oint_S \sigma_p da + \int_V \rho_p dv,$$

con

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} ; \quad \rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}.$$

Entonces

$$\sigma_p = \frac{q(K-1)}{4\pi K r^2}. \quad (2.134)$$

Usando la divergencia de la polarización en coordenadas esféricas

$$\rho_p = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{q(K-1)}{4\pi K r^2} \right] = 0, \quad (2.135)$$

así

$$\begin{aligned} Q_p &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{q(K-1)}{4\pi K r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \\ \therefore Q_p &= \frac{q(K-1)}{K}. \end{aligned} \quad (2.136)$$

■

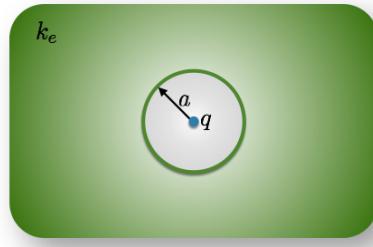


Figura 2.14: *Carga puntual dentro de dieléctrico infinito.*

■ **Ejemplo 2.11** Un dieléctrico infinito con constante dieléctrica \$K\_e\$ tiene una cavidad esférica de radio \$a\$ en su interior. Hay una carga puntual \$q\$ en el centro de la cavidad, figura 2.14. Encontrar \$\sigma\_p\$ y \$\rho\_p\$. Encontrar la carga ligada total sobre la superficie de la cavidad. ¿Cómo pueden reconciliarse estos resultados con \$Q\_p = 0\$?

*Solución.*

Sabemos que

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} ; \quad \rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}.$$

Donde la polarización se calcula con

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} ; \quad \text{con } \chi = (K_e - 1) \epsilon_0.$$

Por otro lado

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}.$$

De la ley de gauss para el desplazamiento eléctrico se tiene

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = q.$$

Tomando una superficie esférica de radio \$r\$ tenemos que

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.137)$$

así

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi K_e \epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \text{con } \epsilon = K_e \epsilon_0. \quad (2.138)$$

Entonces la polarización es

$$\mathbf{P} = \frac{q(K_e - 1)}{4\pi K_e r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.139)$$

Finalmente

$$\therefore \sigma_p = \frac{q(K_e - 1)}{4\pi K_e r^2}. \quad (2.140)$$

Para la densidad volumétrica de carga de polarización, usamos la divergencia en coordenadas esféricas

$$\therefore \rho_p = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{q(K_e - 1)}{4\pi K_e r^2} \right] = 0. \quad (2.141)$$

Para la carga ligada total sobre la superficie tenemos

$$\begin{aligned} Q_p &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{q(K_e - 1)}{4\pi K_e r^2} r^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi', \\ \therefore Q_p &= \frac{q(K_e - 1)}{K_e}. \end{aligned} \quad (2.142)$$

Para que esta carga pueda reconciliarse con  $Q_p = 0$ , se debe generar una carga dentro de la superficie de la cavidad y debe ser igual a

$$Q_p = -\frac{q(K_e - 1)}{K_e}. \quad (2.143)$$

■

## 2.6 Energía en dieléctricos

Recuérdese el resultado (1.179)

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{v}. \quad (2.144)$$

Cuando se consideran cargas en presencia de materia, las únicas cargas sobre las que se puede tener algún tipo de control son las cargas libres. Así, la energía que aquí interesa es la de la distribución de carga libre en presencia de materia. En otras palabras, se toma como expresión para la energía electrostática de un sistema

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} \rho_l \phi d\mathbf{v}. \quad (2.145)$$

Usando la ec. (2.59) en esta última expresión

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} \phi (\nabla \cdot \mathbf{D}) d\mathbf{v} \quad (2.146)$$

y la identidad

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{D}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \nabla \phi. \quad (2.147)$$

Entonces

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left[ \nabla \cdot (\phi \mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot \nabla \phi \right] d\mathbf{v}.$$

Al usar  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = -\epsilon \nabla \phi$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon \int_V \nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) d\mathbf{v} + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{v}. \quad (2.148)$$

Si aplicamos el teorema de la divergencia en la primera integral se obtiene

$$U = \frac{1}{2} \epsilon \oint_S (\phi \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{v}. \quad (2.149)$$

Debemos tener en cuenta que la integral (2.145) debe tomarse en todo el espacio, por lo que debe considerarse a  $V$  en (2.149) lo suficientemente grande de modo que  $S$  sea su superficie limitante, también extremadamente grande para que englobe todas las cargas. Entonces de la integral (2.149) se observa de acuerdo con las ecs. (1.62) y (1.83) que

$$\mathbf{E} \sim \frac{1}{r^2}, \quad \phi \sim \frac{1}{r}. \quad (2.150)$$

Por lo tanto a medida que  $r \rightarrow \infty$

$$\oint_S (\phi \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} \sim \frac{1}{r^3} \cdot r^2 \sim \frac{1}{r} \rightarrow 0. \quad (2.151)$$

Cuando  $V$  aumenta lo suficiente para incluir todo el espacio en (2.149), la integral de superficie se anula, y la expresión de la energía queda como

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv. \quad (2.152)$$

En esta integral en la que las regiones donde  $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$  contribuyen a la integral mientras que aquéllas para las que  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  no, nos conduce a una interpretación en la que la energía es distribuida en forma continua a través del espacio con una *densidad de energía* dada por

$$u_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.153)$$

De manera que la energía total puede escribirse como

$$U = \int_V u_e dv. \quad (2.154)$$

Las unidades de

$$[u_e] = \frac{\text{Jolue}}{\text{metro}^3}.$$

■ **Ejemplo 2.12** Una cáscara esférica cargada de radio  $R$  y densidad superficial de carga uniforme  $\sigma_0$ . Determine la energía propia de la distribución en dos formas:

a) Por integración directa de la ec. (1.178).

b) Por integración sobre el campo  $\frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv$ .

*Solución.*

a) Como se trata de una densidad superficial de carga, de la ec. (1.178) sólo se tiene

$$U = \frac{1}{2} \int_S \sigma_0 \phi da. \quad (2.155)$$

Por otro lado, el potencial interno de una cáscara esférica cargada de radio  $R$  se obtuvo en el ejemplo (1.11) y está dado por

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (2.156)$$

Con  $\sigma_0 = Q/A \Rightarrow Q = 4\pi R^2 \sigma_0$ , así

$$\phi = \frac{R\sigma_0}{\epsilon_0}. \quad (2.157)$$

Entonces

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \frac{R^3 \sigma_0^2}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\varphi, \\ \therefore U &= \frac{2\pi R^3 \sigma_0^2}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (2.158)$$

b) Se tiene que

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv, \\ &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_{int} dv + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_{ext} dv. \end{aligned} \quad (2.159)$$

Recordando que el campo eléctrico dentro de un conductor es cero, entonces sólo se tiene

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_{ext} dv. \quad (2.160)$$

donde  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ , con

$$\phi_{ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{R^2\sigma_0}{\epsilon_0 r}, \quad (2.161)$$

así

$$\mathbf{E}_{ext} = \frac{R^2\sigma_0}{\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.162)$$

Por otro lado, de la ec. (2.64) se tenía que  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ , por lo que

$$\mathbf{D} = \frac{R^2\sigma_0}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.163)$$

Ahora, sustituyendo las ecs. (2.162) y (2.163) en (2.160) obtenemos

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^r \frac{R^4\sigma_0^2}{\epsilon_0 r^4} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi, \\ &= \frac{2\pi R^4 \sigma_0^2}{\epsilon_0} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_R^r \frac{1}{r^2} dr, \\ &= \frac{2\pi R^4 \sigma_0^2}{\epsilon_0} \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right), \\ \therefore U &= \frac{2\pi R^3 \sigma_0^2}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (2.164)$$

■

■ **Ejemplo 2.13** Una distribución esférica de carga, de radio  $R$  y densidad uniforme de carga  $\rho_0$ . Determine la energía propia de la distribución en dos formas:

a) Por integración directa de la ec. (1.178).

b) Por integración sobre el campo  $\frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv$ .

*Solución.*

a) Como se trata de una densidad volumétrica de carga, de la ec. (1.178) sólo se tiene

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi dv. \quad (2.165)$$

Recordando del ejemplo (1.14), se tenía una esfera de radio  $a$  con una densidad de carga que variaba de la forma  $\rho = A r^n$ , y se encontró que el potencial interno, está dado como

$$\phi_{int} = \frac{Aa^{n+2}}{(n+3)(n+2)\epsilon_0} \left[ n+3 - \left( \frac{r}{a} \right)^{n+2} \right]. \quad (2.166)$$

Para este caso se debe tomar  $a = R$ ,  $A = \rho_0$  y  $n = 0$ , de modo que obtenemos

$$\phi_{int} = \frac{\rho_0 R^2}{6\epsilon_0} \left[ 3 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (2.167)$$

Entonces de (2.165) se tiene

$$\begin{aligned} U &= \frac{\rho_0^2 R^2}{12\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \left[ 3 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi, \\ &= \frac{\pi\rho_0^2 R^2}{3\epsilon_0} \int_0^R \left( 3r^2 - \frac{r^4}{R^2} \right) dr, \\ &= \frac{\pi\rho_0^2 R^2}{3\epsilon_0} \left( R^3 - \frac{R^5}{5} \right), \\ \therefore U &= \frac{4\pi\rho_0^2 R^5}{15\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (2.168)$$

b) Se tiene que

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv, \\ &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D}_{int} \cdot \mathbf{E}_{int} dv + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D}_{ext} \cdot \mathbf{E}_{ext} dv. \end{aligned} \quad (2.169)$$

donde  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ . Usando los resultados para el potencial interno y externo del ejemplo (1.14) se tiene

$$\phi_{int} = \frac{\rho_0 R^2}{6\epsilon_0} \left[ 3 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (2.170)$$

$$\phi_{ext} = \frac{A a^{n+3}}{(n+3)r\epsilon_0} = \frac{\rho_0 R^3}{3r\epsilon_0}, \quad (2.171)$$

así

$$\mathbf{E}_{int} = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.172)$$

$$\mathbf{E}_{ext} = \frac{\rho_0 R^3}{3r^2\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.173)$$

Por otro lado,  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ , entonces

$$\mathbf{D}_{int} = \frac{\rho_0 r}{3} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.174)$$

$$\mathbf{D}_{ext} = \frac{\rho_0 R^3}{3r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.175)$$

Sustituyendo las ecs. (2.172), (2.173), (2.174) y (2.175) en la ec. (2.169) obtenemos

$$\begin{aligned} U &= \frac{\rho_0^2}{18\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &\quad + \frac{\rho_0^2 R^6}{18\epsilon_0} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^r \frac{1}{r'^4} r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\varphi, \\ &= \frac{2\pi\rho_0^2}{9\epsilon_0} \int_0^R r^4 dr + \frac{2\pi\rho_0^2 R^6}{9\epsilon_0} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_R^r \frac{1}{r'^2} dr', \\ &= \frac{2\pi\rho_0^2}{9\epsilon_0} \left( \frac{R^5}{5} + R^5 \right), \end{aligned}$$

$$\therefore U = \frac{4\pi\rho_0^2 R^5}{15\epsilon_0}. \quad (2.176)$$

■

**Ejemplo 2.14** Supongamos que un electrón es una partícula esférica uniformemente cargada y de radio  $R$ . Supongamos además que su energía cuando está en reposo,  $mc^2$  (donde  $m$  es la masa del electrón y  $c$  es la velocidad de la luz), es de origen electrostático. Sustituyendo los valores numéricos adecuados para la carga y la masa del electrón, determine su radio clásico  $R$ .

*Solución.*

En el ejemplo (2.13) se encontró que la energía electrostática de una esfera es

$$U = \frac{4\pi\rho_0^2 R^5}{15\epsilon_0}.$$

Como la energía en reposo del electrón es de origen electrostático se tiene

$$mc^2 = \frac{4\pi\rho_0^2 R^5}{15\epsilon_0}. \quad (2.177)$$

Donde  $\rho_0 = \frac{Q_e}{4/3 \pi R^3}$ , así

$$\begin{aligned} mc^2 &= \frac{4\pi R^5}{15 \epsilon_0} \left( \frac{Q_e}{4/3 \pi R^3} \right)^2, \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{3Q_e^2}{5R}, \\ \Rightarrow R &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{3Q_e^2}{4mc^2}. \end{aligned} \quad (2.178)$$

Tomando  $Q_e = -1.602 \times 10^{-19} C$  y  $m = 9.11 \times 10^{-31} kg$ , entonces

$$\begin{aligned} R &= (8.9 \times 10^9 Nm^2/C^2) \frac{3(-1.602 \times 10^{-19} C)^2}{4(9.11 \times 10^{-31} kg)(3 \times 10^8 m/s)^2}, \\ \therefore R &\approx 2.08 \times 10^{-15} m. \end{aligned} \quad (2.179)$$

■

**Ejemplo 2.15** Un *condensador de placas paralelas* consiste en dos placas metálicas conductoras de cargas  $Q$  y  $-Q$ , dispuestas paralelamente y de área  $A$ , separadas entre si una distancia  $d$  por una lámina de material aislante de constante dieléctrica  $K$ , figura 2.15. Obtener la capacidad despreciando los efectos del borde.

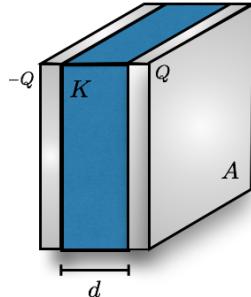


Figura 2.15: Condensador de placas paralelas.

*Solución.*

La capacidad se puede calcular como

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi}. \quad (2.180)$$

Por otro lado de la ecuación (1.92) recordamos que

$$\phi(r) = - \int_{ref}^r \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'. \quad (2.181)$$

De modo que para el condensador se tiene

$$\begin{aligned} \phi &= - \int_0^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \\ &= \int_0^d E dr, \\ \Rightarrow \Delta\phi &= E d. \end{aligned} \quad (2.182)$$

Ahora, recordamos también que el campo eléctrico entre dos conductores paralelos está dado por la ecuación (1.77)

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \text{ con } \sigma = \frac{Q}{A}, \\ &= \frac{Q}{A \epsilon_0}. \end{aligned} \quad (2.183)$$

Entonces del potencial eléctrico se tiene

$$\Delta\phi = \frac{Qd}{A \epsilon_0}. \quad (2.184)$$

Por lo que la capacidad sin dieléctrico entre los conductores es

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}. \quad (2.185)$$

Si se tiene la presencia de un dieléctrico, entonces  $\epsilon_0$  es reemplazado por  $\epsilon$ , así

$$C = \frac{\epsilon A}{d}. \quad (2.186)$$

Usando la ec. (2.65)

$$\begin{aligned} K &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \\ \Rightarrow \epsilon &= K \epsilon_0. \end{aligned} \quad (2.187)$$

Finalmente la capacidad para un condensador de placas paralelas con un dieléctrico entre ellas es

$$\therefore C = \frac{\epsilon_0 K A}{d}. \quad (2.188)$$

■

**Ejemplo 2.16** Se construye un condensador de placas paralelas con un dieléctrico compuesto. Una hoja de dieléctrico de permitividad  $\epsilon_1$  y espesor  $d_1$  se coloca sobre una segunda hoja de dieléctrico (permitividad  $\epsilon_2$ , espesor  $d_2$ ). La combinación se coloca entre placas conductoras paralelas que están separadas una distancia  $d_1 + d_2$  (figura 2.16). ¿Cuál es la capacidad del condensador por unidad de área de placa?.

*Solución.*

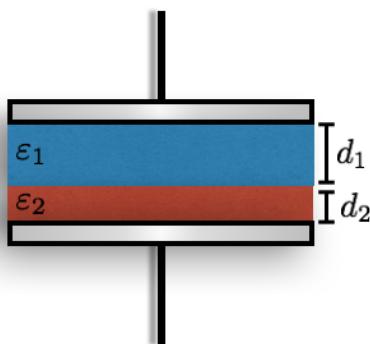


Figura 2.16: Condensador de placas paralelas con dieléctrico compuesto.

El condensador se pueden ver como un circuito de capacitores conectados en serie, así la capacidad equivalente es

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Con

$$C_1 = \frac{\epsilon_1 A}{d_1} \text{ y } C_2 = \frac{\epsilon_2 A}{d_2}, \quad (2.189)$$

así, la capacidad equivalente es

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &= \frac{d_1}{\epsilon_1 A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 A}, \\ &= \frac{d_1 \epsilon_2 + d_2 \epsilon_1}{\epsilon_1 \epsilon_2 A}, \\ \therefore \frac{C}{A} &= \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{d_1 \epsilon_2 + d_2 \epsilon_1}. \end{aligned} \quad (2.190)$$

■

**Ejemplo 2.17** Dos cáscaras conductoras esféricas concéntricas, de radios  $r_1$  y  $r_2$ , se mantienen a potenciales  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , respectivamente. La región entre las cáscaras se llena con un medio dieléctrico (figura 2.17). Demuestre por cálculo directo que la energía almacenada en el dieléctrico es igual a  $C(\phi_1 - \phi_2)^2/2$  y encuentre de este modo  $C$ , la capacidad del sistema.

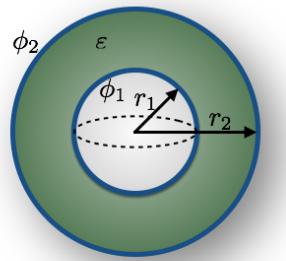


Figura 2.17: Cáscaras conductoras concéntricas con dieléctrico de permividad  $\epsilon$ .

*Solución.*

Sabemos que

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i Q_i.$$

Sea  $Q_1 = Q$  la carga de la esfera de radio  $r_1$  y  $Q_2 = -Q$  la caga de la esfera con radio  $r_2$ , así la energía para estos dos conductores es

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} (\phi_1 Q_1 + \phi_2 Q_2), \\ &= \frac{1}{2} (\phi_1 - \phi_2) Q. \end{aligned} \quad (2.191)$$

Por otro lado, también se tiene

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi}, \quad (2.192)$$

$$= \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2}, \quad (2.192)$$

$$\Rightarrow Q = C(\phi_1 - \phi_2). \quad (2.193)$$

Por lo tanto

$$\therefore U = \frac{1}{2}C(\phi_1 - \phi_2)^2. \quad (2.194)$$

Donde  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son los potenciales de cada esfera

$$\phi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_1} \text{ y } \phi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_2}. \quad (2.195)$$

Finalmente sustituyendo  $\phi_1$  y  $\phi_2$  en (2.192) se obtiene la capacidad del sistema

$$\therefore C = \frac{4\pi\epsilon}{1/r_1 - 1/r_2}. \quad (2.196)$$

■

**Ejemplo 2.18** Un sistema de dos objetos conductores en un medio dieléctrico lineal. El conductor 1 está descargado y el conductor 2 está puesto a tierra. Demuestre que el conductor 1 también está al potencial de tierra.

*Solución.*

Como se trata de dos conductores, de la ec. (1.215) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\phi_1 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2, \quad (2.197)$$

$$\phi_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2. \quad (2.198)$$

El conductor 1 está descargado, entonces  $Q_1 = 0$ , ademas  $\phi_2 = 0$  debido a que el conductor 2 está puesto a tierra, así

$$\phi_1 = p_{12} Q_2, \quad (2.199)$$

$$0 = p_{22} Q_2 \Rightarrow Q_2 = 0. \quad (2.200)$$

$$\therefore \phi_1 = 0. \quad (2.201)$$

■

**Ejemplo 2.19** Un sistema eléctrico está formado por dos placas metálicas paralelas y de área  $A$  muy grande, inmersas en un fluido con constante dieléctrica  $k$ . Estando las placas conectadas a una pila ideal de fuerza electromotriz  $\Delta\phi$  y separadas una distancia  $d$ , se aumenta su separación muy lentamente aplicando una fuerza exterior hasta que su distancia es  $d'$ , figura 2.18. Calcular

a) El aumento de energía del sistema.

b) El trabajo realizado por la fuerza exterior.

*Solución.*

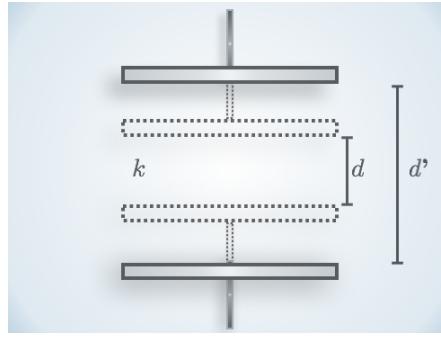


Figura 2.18: Placas metálicas paralelas de área A.

a) Sabemos de la ec. (1.233) que

$$U = \frac{C\Delta\phi^2}{2},$$

donde  $C$  es la capacidad de un condensador de placas paralelas, ec. (2.188)

$$C = \frac{\epsilon_0 K A}{d},$$

así

$$U_1 = \frac{\epsilon_0 K A \Delta\phi^2}{2d}. \quad (2.202)$$

Por otro lado, la capacidad del sistema cuando se han separado las placas una distancia  $d'$  es

$$U_2 = \frac{\epsilon_0 K A \Delta\phi^2}{2d'}. \quad (2.203)$$

Entonces la diferencia de energía es

$$\Delta U = U_2 - U_1,$$

$$\therefore \Delta U = \epsilon_0 K A \Delta\phi^2 \left( \frac{1}{2d'} - \frac{1}{2d} \right). \quad (2.204)$$

b) El trabajo realizado por la fuerza exterior para separar las placas se hace a costa de la energía electrostática, en otras palabras

$$W = -\Delta U,$$

$$\therefore W = \epsilon_0 K A \Delta\phi^2 \left( \frac{1}{2d} - \frac{1}{2d'} \right). \quad (2.205)$$

■

## 2.7 Momento de rotación

Supongamos tener un sistema formado por conductores, dieléctricos y cargas puntuales, además se permite que una de estas partes tenga un desplazamiento,  $d\mathbf{r}$  debido a la influencia de las fuerzas eléctricas que actúan sobre ella. El trabajo realizado por la fuerza eléctrica sobre el sistema es

$$\begin{aligned} dW &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \\ &= F_x dx + F_y dy + F_z dz. \end{aligned} \quad (2.206)$$

Debido a que el sistema se encuentra aislado, el trabajo se hace a costa de la energía electrostática, es decir,

$$dW = -dU. \quad (2.207)$$

De este modo

$$-dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (2.208)$$

así

$$F_x = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_Q, \quad (2.209)$$

$$F_y = -\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_Q, \quad (2.210)$$

$$F_z = -\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_Q. \quad (2.211)$$

El subíndice  $Q$  indica que el sistema está aislado, de tal forma que la carga total permanece constante.

Si el elemento considerado es restringido a que sólo gire sobre un eje, entonces

$$\begin{aligned} dW &= \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta}, \\ &= \tau_1 d\theta_1 + \tau_2 d\theta_2 + \tau_3 d\theta_3 \end{aligned} \quad (2.212)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}$  es el momento eléctrico y  $d\boldsymbol{\theta}$  es el desplazamiento angular. Sustituyendo (2.207)

$$-dU = \tau_1 d\theta_1 + \tau_2 d\theta_2 + \tau_3 d\theta_3, \quad (2.213)$$

así

$$\tau_1 = -\left(\frac{\partial U}{\partial \theta_1}\right)_Q, \quad (2.214)$$

$$\tau_2 = -\left(\frac{\partial U}{\partial \theta_2}\right)_Q, \quad (2.215)$$

$$\tau_3 = -\left(\frac{\partial U}{\partial \theta_3}\right)_Q. \quad (2.216)$$

Otro tipo de problemas es cuando toda la carga se encuentra en la superficie de los conductores, y éstas se mantienen a una diferencia de potencial constante por medio de fuentes externas de energía. De igual forma se permite que una de las partes del sistema se mueva bajo la influencia de fuerzas eléctricas que actúan sobre ella y el trabajo realizado en éste caso por el sistema y las fuentes externas de energía resulta ser

$$dW = dW_e - dU, \quad (2.217)$$

donde  $dW_e$  es el trabajo suministrado por las fuentes externas de energía.

Si parte del sistema es desplazado mientras el potencial de los conductores permanece fijo, la energía electrostática (ec. 1.222) estará dada como

$$dU = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i dQ_i. \quad (2.218)$$

Por otro lado, el trabajo proporcionado por las fuentes externas  $dW_e$ , es el trabajo necesario para mover cada uno de los incrementos de carga  $dQ$ , esto es

$$dW_e = \sum_{i=1}^N \phi_i dQ_i. \quad (2.219)$$

Por lo tanto

$$dW_e = 2dU \quad (2.220)$$

Sustituimos ahora (2.220) en (2.217) y obtenemos

$$dW = dU, \quad (2.221)$$

Entonces

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.222)$$

$$= F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (2.223)$$

así

$$F_x = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_\phi, \quad (2.224)$$

$$F_y = \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_\phi, \quad (2.225)$$

$$F_z = \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_\phi. \quad (2.226)$$

El subíndice  $\phi$  indica que el potencial se mantiene constante durante el desplazamiento  $d\mathbf{r}$ . De manera análoga obtenemos

$$\tau_1 = \left( \frac{\partial U}{\partial \theta_1} \right)_\phi, \quad (2.227)$$

$$\tau_2 = \left( \frac{\partial U}{\partial \theta_2} \right)_\phi, \quad (2.228)$$

$$\tau_3 = \left( \frac{\partial U}{\partial \theta_3} \right)_\phi. \quad (2.229)$$

**Ejemplo 2.20** Un condensador de placas paralelas tiene la región entre estas llena de una plancha dieléctrica de constante dieléctrica  $K$ . Las dimensiones de las placas son  $w$  de anchura y  $l$  de longitud, la separación entre ellas es  $d$ . El condensador se carga mientras está conectado a una diferencia de potencial  $\Delta\phi_0$ , después de lo cual se desconecta. La placa de dieléctrico se saca ahora parcialmente en la dirección  $l$  hasta que sólo queda la longitud  $x$  entre las placas (figura 2.19).

- a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas del condensador?
- b) ¿Cuál es la fuerza que tiende a hacer regresar la plancha de dieléctrico a su posición original?

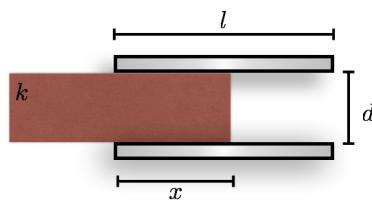


Figura 2.19: Condensador de placas paralelas con dimensiones  $w$  de ancho y  $l$  de largo con plancha dieléctrica sacada parcialmente de entre ellas.

*Solución.*

a) Inicialmente, se tiene que la capacidad es

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi_0} = \frac{\epsilon_0 K A}{d}, \quad (2.230)$$

donde  $A$  es el área de las placas. Al despejar la carga se obtiene

$$Q = \frac{\Delta\phi_0 \epsilon_0 K w l}{d}. \quad (2.231)$$

Después de sacar el dieléctrico, podemos ver al sistema como un circuito conectado en paralelo, así la capacidad equivalente de este sistema es

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2, \\ &= \frac{\epsilon_0 K w x}{d} + \frac{\epsilon_0 w (l-x)}{d}, \\ &= \frac{\epsilon_0 w [x(K-1) + l]}{d}. \end{aligned} \quad (2.232)$$

Entonces la diferencia de potencial entre las placas al sacar el dieléctrico es

$$\Delta\phi = \frac{Q}{C} = \frac{Qd}{\epsilon_0 w [x(K-1) + l]}. \quad (2.233)$$

Sustituyendo (2.231) en esta última expresión

$$\therefore \Delta\phi = \frac{\Delta\phi_0 K l}{x(K-1) + l}. \quad (2.234)$$

b) De la ec. (2.209) se tiene que

$$F_x = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_Q,$$

donde  $U$  la calculamos con la ec. (1.233)

$$U = \frac{Q^2}{2C},$$

así

$$U = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 w [x(K-1) + l]}. \quad (2.235)$$

Finalmente

$$\therefore F_x = \frac{Q^2 d (K-1)}{2\epsilon_0 w [x(K-1) + l]^2}. \quad (2.236)$$

■

## 2.8 Ecuaciones de Poisson y de Laplace

Tenemos la forma diferencial de la ley de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.237)$$

también se tiene que el campo eléctrico se puede expresar como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(r).$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$\nabla \cdot \nabla\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.238)$$

$$\Rightarrow \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.239)$$

El Laplaciano<sup>3</sup> es un operador diferencial escalar y la ec. (2.239) es una ecuación diferencial conocida como *ecuación de Poisson*. A continuación se presenta la forma del operador  $\nabla^2\phi$  en diferentes sistemas de coordenadas.

<sup>3</sup>Es conveniente considerar la divergencia de un gradiente como un solo operador diferencial  $\nabla \cdot \nabla$  ó  $\nabla^2$  llamado *Laplaciano*.

- En coordenadas rectangulares

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (2.240)$$

- En coordenadas esféricas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}. \quad (2.241)$$

- En coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (2.242)$$

Hay problemas electrostáticos en los cuales intervienen conductores, en ellos toda la carga se encuentra sobre la superficie o en forma de cargas puntuales fijas. En estos casos  $\rho$  es cero en la mayoría de los puntos del espacio.

Donde se anula la densidad de carga, la ecuación de Poisson se reduce a

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (2.243)$$

esta ecuación es conocida como la *ecuación de Laplace*.

### 2.8.1 El teorema de unicidad

Supongamos que se tiene un conjunto de  $N$  conductores que se mantienen a los potenciales  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ . Se puede hallar el potencial en los puntos exteriores a los conductores encontrando una solución a la ecuación de Laplace, la cual se reduce a  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$  sobre la superficie de los conductores apropiados.

**Teorema 2.8.1** Sean  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$  soluciones a la ecuación de Laplace, es decir,

$$\nabla^2 \phi_i = 0, \text{ con } i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.244)$$

Se define

$$\phi = \sum_{i=1}^N C_i \phi_i, \quad (2.245)$$

con  $C_i$  constantes arbitrarias. Se tiene que  $\phi$  también es solución de la ecuación de Laplace.

La demostración es inmediata partiendo de que

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \left( \sum_{i=1}^N C_i \phi_i \right), \quad (2.246)$$

como el operador es lineal

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \sum_{i=1}^N C_i \nabla^2 \phi_i, \\ \Rightarrow \nabla^2 \phi &= 0, \end{aligned} \quad (2.247)$$

es decir,  $\phi$  es solución de la ecuación de Laplace.

**Teorema 2.8.2 — Teorema de unicidad.** Si se encuentra una función que satisface la ecuación de Laplace y todas las condiciones de frontera, puede estar seguro de que esa es la única solución.

Para demostrar este teorema consideramos una región cerrada  $V$  con superficie  $S$  que contiene  $n$  número de conductores con superficies  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . La superficie  $S$  puede ser una superficie en el infinito (comúnmente se toma el potencial igual a cero en el infinito). Sean  $\phi_1, \phi_2$  dos soluciones de la ecuación de Laplace, es decir,

$$\nabla^2 \phi_1 = 0, \quad \nabla^2 \phi_2 = 0. \quad (2.248)$$

Que además satisfacen las mismas condiciones de frontera

$$\phi_1(S_i) = \phi_2(S_i) = \phi_i. \quad (2.249)$$

Queremos demostrar que  $\phi_1 = \phi_2$ , para ello se define

$$\phi = \phi_1 - \phi_2, \quad (2.250)$$

por el teorema 2.8.1 se sabe que  $\phi$  también es solución a la ecuación de Laplace, es decir

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (2.251)$$

Las condiciones que satisface  $\phi$  se determinan a partir de las condiciones para  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . En caso de cumplirse la condición (4.117), se tiene

$$\phi(S_i) = 0, \quad (2.252)$$

en la superficie de los conductores. Por otra parte, considerando la identidad

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) = \nabla \phi \cdot \mathbf{F} + \phi (\nabla \cdot \mathbf{F}), \quad (2.253)$$

para el vector  $\phi \nabla \phi$  se encuentra

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \phi) = \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \nabla \phi, \quad (2.254)$$

recordando que  $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$  y  $\nabla \phi \cdot \nabla \phi = (\nabla \phi)^2$ , la expresión anterior se escribe como

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \phi) = (\nabla \phi)^2 + \phi \nabla^2 \phi, \quad (2.255)$$

la cual se puede reducir aún más al considerar que  $\phi$  es solución de la ecuación de Laplace, ec. (2.251), entonces

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \phi) = (\nabla \phi)^2. \quad (2.256)$$

Integrando en todo el volumen

$$\int_V (\nabla \phi)^2 dV = \int_V \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) dV. \quad (2.257)$$

Ahora bien, usando el teorema de la divergencia<sup>4</sup> para la integral del lado derecho de la igualdad

$$\int_V (\nabla \phi)^2 dV = \oint_S \phi \nabla \phi \cdot d\mathbf{a}, \quad (2.258)$$

---

<sup>4</sup>  $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV$

de acuerdo con (2.252), el resultado de la segunda integral es igual a cero. La integral a la izquierda de (2.258) es cero únicamente si el integrando es cero, es decir

$$(\nabla\phi)^2 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 = 0, \quad (2.259)$$

la única forma de lograr ésto es que los términos individuales sean nulos

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0, \quad (2.260)$$

de manera que  $\phi = \text{constante}$ . Pero ya que  $\phi(S_i) = 0$  entonces  $\phi$  es cero en todas partes, por lo cual

$$\phi_1 = \phi_2, \quad (2.261)$$

que es lo que se quería demostrar.

## 2.9 Solución de la ecuación de Laplace

### 2.9.1 Coordenadas cartesianas

Para la solución a la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas partimos de la ec. (2.240)

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.262)$$

Usamos el método de separación de variables, se propone una solución de la forma

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z), \quad (2.263)$$

sustituyendo (2.263) en la ec. (2.262) y dividiendo entre  $X(x)Y(y)Z(z)$  se tiene

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = 0, \quad (2.264)$$

es decir

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = -\left(\frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2}\right), \quad (2.265)$$

dado que  $x, y, z$  son linealmente independientes, la única forma de lograr la igualdad anterior es considerar que los términos son iguales a la misma constante, es decir

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = \alpha^2, \quad (2.266)$$

$$-\left(\frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2}\right) = \alpha^2. \quad (2.267)$$

Sea  $\alpha^2 > 0$ , entonces la ec. (2.266) tiene soluciones de la forma

$$X(x) = A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x}, \text{ con } A_1 \text{ y } A_2 \text{ ctes.} \quad (2.268)$$

La ecuación (2.267) se puede escribir de la forma

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = -\left(\alpha^2 + \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2}\right), \quad (2.269)$$

nuevamente, esta igualdad solo se puede lograr al considerar que cada término es igual a la misma constante, ésto es

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = -\beta^2, \quad (2.270)$$

$$\alpha^2 + \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dx^2} = \beta^2, \quad (2.271)$$

al considerar  $\beta^2 > 0$ , la solución general de (2.270) es de la forma

$$Y(y) = B'_1 e^{i\beta y} + B'_2 e^{-i\beta y}, \text{ con } B'_1 \text{ y } B'_2 \text{ ctes.,} \quad (2.272)$$

es una solución *sinusoidal*, es decir

$$Y(y) = B_1 \cos(\beta y) + B_2 \sin(\beta y), \text{ con } B_1 \text{ y } B_2 \text{ ctes.} \quad (2.273)$$

La ecuación para la función  $Z$ , (2.271), se puede escribir como

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = -\gamma^2, \text{ con } \gamma^2 := \alpha^2 - \beta^2, \quad (2.274)$$

en el caso  $\gamma^2 > 0$ , las soluciones son nuevamente de la forma sinusoidal

$$Z(z) = C_1 \cos(\gamma z) + C_2 \sin(\gamma z), \text{ con } C_1 \text{ y } C_2 \text{ ctes.} \quad (2.275)$$

En otro caso,  $\gamma^2 < 0$ , las soluciones son de la forma exponencial

$$Z(z) = C'_1 e^{\gamma z} + C'_2 e^{-\gamma z}, \text{ con } C'_1 \text{ y } C'_2 \text{ ctes.} \quad (2.276)$$

Así que para el caso  $\alpha^2 > 0$ ,  $\beta^2 > 0$  y  $\gamma^2 > 0$  se tiene una solución de la forma

$$\phi(x, y, z) = (A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x}) [C \cos(\beta y) + D \sin(\beta y)] [E \cos(\gamma z) + F \sin(\gamma z)], \quad (2.277)$$

con  $A, B, C, D$  y  $F$  constantes. Para el caso  $\alpha^2 > 0$ ,  $\beta^2 > 0$  y  $\gamma^2 < 0$  se tiene una solución de la forma

$$\phi(x, y, z) = (A' e^{\alpha x} + B' e^{-\alpha x}) [C' \cos(\beta y) + D' \sin(\beta y)] [E' e^{\gamma z} + F' e^{-\gamma z}], \quad (2.278)$$

con  $A', B', C', D'$  y  $F'$  constantes.

■ **Ejemplo 2.21** Se tienen dos conductores semi-infinitos paralelos separados por una distancia  $a$  (figura 2.20). En  $x = 0$  hay otro conductor perpendicular a los dos anteriores y aislado de ellos, éste se mantiene a un potencial  $V_0$  con respecto a los conductores paralelos que están a tierra ( $\phi = 0$ ). Calcular el potencial eléctrico en cualquier punto entre los conductores.

*Solución.*

Las condiciones de frontera son:

- |                      |   |
|----------------------|---|
| 1. $\phi(x, 0) = 0,$ | 3. $\phi(x \rightarrow \infty, y) = 0,$ |
| 2. $\phi(x, a) = 0,$ | 4. $\phi(0, y) = V_0.$                  |

Notemos que se tiene simetría a lo largo del eje  $z$ , por lo cual se elimina esta variable de la ecuación diferencial (2.262). No se resolverá nuevamente la ecuación diferencial, se pueden hacer algunas observaciones sobre (2.277) y (2.278) para deducir la forma correcta de la solución para este problema. En principio, la solución no incluye la variable  $z$ , por lo cual  $\beta^2 = -\alpha^2$ .

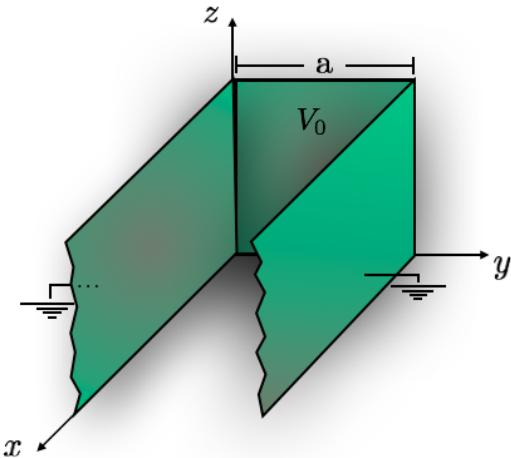


Figura 2.20: Conductores paralelos semi-infinitos separados por una distancia  $a$ .

Debido a las condiciones sobre la variable  $y$ , es necesario que la solución para dicha variable sea de la forma sinusoidal, es decir

$$\phi(x, y) = (Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x})[C\cos(\alpha y) + D\sin(\alpha y)]. \quad (2.279)$$

Aplicamos primero la condición 1:

$$\phi(x, 0) = (Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x})C = 0, \quad (2.280)$$

aquí  $(Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}) \neq 0$  pues en otro caso se encontraría la solución trivial  $\phi(x, y) = 0$ ,

$$\Rightarrow C = 0,$$

así, la solución toma la forma siguiente

$$\phi(x, y) = (Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x})D\sin(\alpha y). \quad (2.281)$$

Ahora aplicamos la condición 3

$$\phi(x \rightarrow \infty, y) = \lim_{x \rightarrow \infty} Ae^{\alpha x} D \sin(\alpha y) = 0, \quad (2.282)$$

para evitar la solución trivial se requiere  $D \neq 0$ ,

$$\Rightarrow A = 0.$$

La solución se reduce a

$$\phi(x, y) = Ee^{-\alpha x} \sin(\alpha y) , \text{ con } BD \rightarrow E. \quad (2.283)$$

Aplicando la condición 2 se tiene

$$\phi(x, a) = Ee^{-\alpha x} \sin(\alpha a) = 0, \quad (2.284)$$

lo cual se cumple cuando

$$\sin(\alpha a) = 0 \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{n\pi}{a}; \text{ con } n = 1, 2, \dots,$$

así que se encuentra un familia de soluciones,  $\phi_n$ . De acuerdo con el teorema 2.8.1 se puede construir una solución general a la ecuación de Laplace:

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \exp\left(-\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}y\right). \quad (2.285)$$

Lo único que falta es calcular los coeficientes  $D_n$ , para ello nos queda la condición 4:

$$\phi(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = V_0. \quad (2.286)$$

Para despejar  $E_n$  se hace uso de la ortogonalidad de las funciones seno, multiplicamos por  $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}y\right)$  a la ec. (2.286) e integrando en el intervalo  $[0, a]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}y\right) dy = V_0 \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}y\right) dy,$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n \frac{a}{2} \delta_{nm} = V_0 \frac{a}{m\pi} [1 - \cos(m\pi)],$$

es decir

$$E_m \frac{a}{2} = V_0 \frac{a}{m\pi} [1 - (-1)^m]. \quad (2.287)$$

Notemos que el lado derecho de la igualdad es cero si  $m$  es par, entonces  $m = 1, 3, \dots, 2n + 1$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$ , entonces

$$\begin{aligned} E_{2n+1} \frac{a}{2} &= V_0 \frac{2a}{(2n+1)\pi}, \\ \Rightarrow E_{2n+1} &= \frac{4V_0}{(2n+1)\pi}. \end{aligned} \quad (2.288)$$

Por lo tanto el valor para el potencial se obtiene sustituyendo los coeficientes  $E_n$  en (2.285)

$$\phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4V_0}{(2n+1)\pi} \exp\left[-\frac{(2n+1)\pi}{a}x\right] \operatorname{sen}\left[\frac{(2n+1)\pi}{a}y\right], \quad (2.289)$$

podemos observar el comportamiento de este potencial en la figura (2.21).

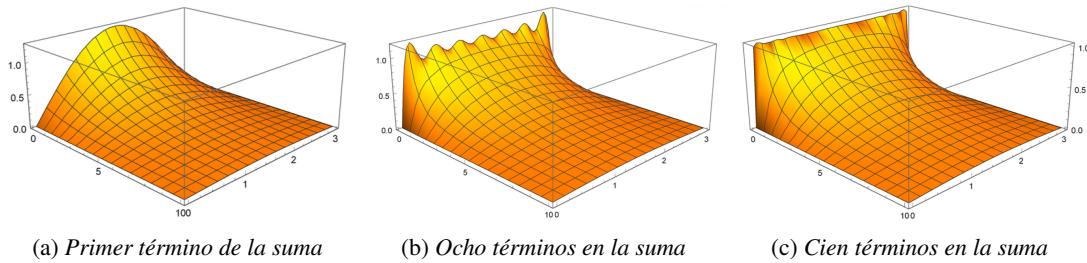


Figura 2.21: Comportamiento de  $\phi(x, y)$

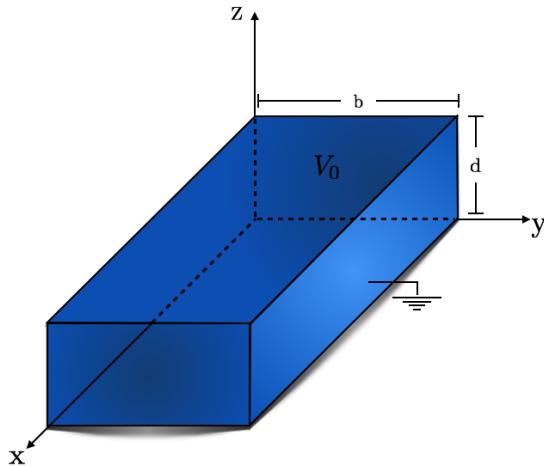


Figura 2.22: *Tubo rectangular que se mantiene a un potencial  $V_0$  en  $x = 0$ .*

■ **Ejemplo 2.22** Un tubo de sección rectangular de lados  $b$  y  $d$  está a potencial cero, a excepción del extremo en  $x = 0$  que se mantiene a un potencial  $V_0$  (figura 2.22). Encontrar el potencial en cualquier punto dentro del tubo.

Solución.

Las condiciones de frontera son:

- |                            |                               |
|----------------------------|-------------------------------|
| 1. $\phi(0, y, z) = V_0$ , | 4. $\phi(\infty, y, z) = 0$ , |
| 2. $\phi(x, 0, z) = 0$ ,   | 5. $\phi(x, b, z) = 0$ ,      |
| 3. $\phi(x, y, 0) = 0$ ,   | 6. $\phi(x, y, d) = 0$ .      |

La solución general corresponde a la ec. (2.277) debido a las condiciones sobre las variables  $y$  y  $z$

$$\phi(x, y, z) = (Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x})[C \cos(\beta y) + D \sin(\beta y)][E \cos(\gamma z) + F \sin(\gamma z)].$$

Al aplicar la condición 2 concluimos que  $C = 0$ , de igual forma  $E = 0$  cuando aplicamos la tercera condición, así también al aplicar la condición 4 vemos que  $A = 0$ . Entonces la solución hasta el momento tiene la forma

$$\phi(x, y, z) = Ge^{-\alpha x} \sin(\beta y) \sin(\gamma z), \quad (2.290)$$

donde  $G = BDF$ . Si aplicamos la condición 5

$$\phi(x, b, z) = Ge^{-\alpha x} \sin(\beta b) \sin(\gamma z) = 0, \quad (2.291)$$

$$\Rightarrow \sin(\beta b) = 0 \Leftrightarrow \beta_n = \frac{n\pi}{b}; \text{ con } n = 1, 2, \dots \quad (2.292)$$

De manera análoga concluimos que  $\gamma_m = \frac{m\pi}{d}$ , con  $m = 1, 2, \dots$ , ésto cuando aplicamos la sexta condición. Entonces se tiene la solución general

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} G_{mn} e^{-\alpha_n x} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{d} z\right). \quad (2.293)$$

Al considerar la relación entre las constantes de separación

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2,$$

se tiene

$$\alpha_{nm} = \pi \left[ \left( \frac{n}{b} \right)^2 + \left( \frac{m}{d} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (2.294)$$

así

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} G_{mn} \exp \left[ -\pi \left[ \left( \frac{n}{b} \right)^2 + \left( \frac{m}{d} \right)^2 \right]^{1/2} x \right] \sin \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \sin \left( \frac{m\pi}{d} z \right). \quad (2.295)$$

Para obtener los coeficientes  $G_{mn}$  nos queda la condición 1

$$\phi(0, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} G_{mn} \sin \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \sin \left( \frac{m\pi}{d} z \right) = V_0. \quad (2.296)$$

Multiplicamos por  $\sin \left( \frac{p\pi}{b} y \right) \sin \left( \frac{q\pi}{d} z \right)$  a la ec. (2.296) e integrando respecto de  $y$  en el intervalo  $[0, b]$  y respecto de  $z$  en el intervalo  $[0, d]$ . Para el lado izquierdo de (2.296) se tiene

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n=1}^{\infty} G_{mn} \int_0^b \sin \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \sin \left( \frac{p\pi}{b} y \right) dy \int_0^d \sin \left( \frac{m\pi}{d} z \right) \sin \left( \frac{q\pi}{d} z \right) dz, \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} G_{mn} \frac{b}{2} \delta_{np} \frac{d}{2} \delta_{mq}, \\ &= G_{pq} \frac{bd}{4}. \end{aligned} \quad (2.297)$$

Para el término a la derecha de la igualdad en la ec. (2.296) se tiene

$$V_0 \int_0^b \sin \left( \frac{p\pi}{b} y \right) dy \int_0^d \sin \left( \frac{q\pi}{d} z \right) dz = V_0 \frac{d}{q\pi} \frac{b}{p\pi} [1 - \cos(q\pi)] [1 - \cos(p\pi)]. \quad (2.298)$$

Con  $p, q$  pares el resultado de la integral se anula, por lo que  $p$  y  $q$  deben ser impares, es decir,

$$\begin{aligned} p &= 1, 3, \dots, 2n+1, \\ q &= 1, 3, \dots, 2m+1. \end{aligned}$$

Así que

$$V_0 \int_0^b \sin \left( \frac{p\pi}{b} y \right) dy \int_0^d \sin \left( \frac{q\pi}{d} z \right) dz = V_0 \frac{4bd}{(2n+1)(2m+1)\pi^2}. \quad (2.299)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} G_{2n+1,2m+1} \frac{bd}{4} &= V_0 \frac{4bd}{(2n+1)(2m+1)\pi^2}, \\ \Rightarrow G_{2n+1,2m+1} &= \frac{16V_0}{(2n+1)(2m+1)\pi^2}. \end{aligned} \quad (2.300)$$

Finalmente el potencial dentro del tubo se obtiene sustituyendo los coeficientes  $G_{mn}$  en la ec. (2.295)

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{16V_0}{(2n+1)(2m+1)\pi^2} \exp \left( -\pi \left[ \left( \frac{n}{b} \right)^2 + \left( \frac{m}{d} \right)^2 \right]^{1/2} x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \sin \left( \frac{m\pi}{d} z \right). \quad (2.301)$$

■

■ **Ejemplo 2.23** Considere un cuadro sobre el plano  $xy$  como se muestra en la figura 2.23. No existe carga ni materia dentro del cuadrado, los lados paralelos al eje  $x$  tienen un potencial igual a cero.

El lado en  $x = a$  tienen un potencial constante  $\phi_0$ , mientras que el lado en  $x = 0$  tiene un potencial constante  $-\phi_0$ . Encuentre  $\phi(x, y)$  para todos los puntos dentro del cuadrado.

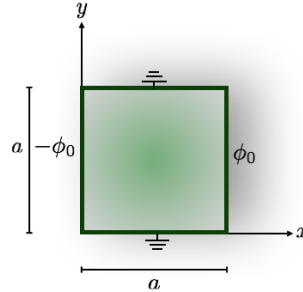


Figura 2.23: Arreglo para el ejemplo 2.23.

*Solución.*

Las condiciones de frontera son

1.  $\phi(x, 0) = 0$ ,
2.  $\phi(x, a) = 0$ ,
3.  $\phi(0, y) = -\phi_0$ ,
4.  $\phi(a, y) = \phi_0$ .

Dadas las condiciones de frontera para la variable  $y$ , se requiere una solución general de la forma

$$\phi(x, y) = (Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x})[C\cos(\alpha y) + D\sin(\alpha y)]. \quad (2.302)$$

Si aplicamos la condición 1 vemos que  $C$  tiene que ser igual a cero. Al aplicar la segunda condición concluimos que  $\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$  con  $n = 1, 2, \dots$ . Se ha encontrado una familia de soluciones a la ecuación de Laplace, así que la solución general es de la forma

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n e^{\frac{n\pi}{a}x} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a}x} \right) D_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right). \quad (2.303)$$

Ahora aplicamos la condiciones 3 y 4:

$$\phi(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) D_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = -\phi_0, \quad (2.304)$$

$$\phi(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi}) D_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = \phi_0. \quad (2.305)$$

De la suma de (2.304) y (2.305) se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} [A_n(1 + e^{n\pi}) + B_n(1 + e^{-n\pi})] D_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = 0, \quad (2.306)$$

como

$$1 + e^{-n\pi} = (1 + e^{n\pi}) e^{-n\pi}, \quad (2.307)$$

entonces (2.306) se escribe de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} [A_n + B_n e^{-n\pi}] (1 + e^{n\pi}) D_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = 0, \quad (2.308)$$

por la propiedad de ortogonalidad de las funciones  $\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$ , la única forma de lograr (2.308) es considerando

$$A_n + B_n e^{-n\pi} = 0, \quad (2.309)$$

es decir

$$B_n = -A_n e^{n\pi}. \quad (2.310)$$

Al sustituir este resultado en (2.304) se tiene

$$\phi(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (1 - e^{n\pi}) D_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = -\phi_0. \quad (2.311)$$

Como antes, se multiplica por  $\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)$  en ambos lados de la igualdad y se integra en el intervalo  $[0, a]$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n D_n (1 - e^{n\pi}) \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right) dy = -\phi_0 \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right) dy.$$

es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n D_n (1 - e^{n\pi}) \frac{a}{2} \delta_{mn} = \phi_0 \frac{a}{m\pi} [(-1)^m - 1],$$

con  $m$  par se tiene una solución trivial, por lo cual  $m$  es impar,

$$A_m D_m = \frac{4\phi_0}{m\pi} \frac{1}{e^{m\pi} - 1},$$

Finalmente se han determinado todas las constantes, por lo cual la solución se escribe a partir de (2.303):

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n e^{\frac{n\pi}{a}x} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a}x} \right) D_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right), \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n D_n \left( e^{\frac{n\pi}{a}x} - e^{n\pi} e^{-\frac{n\pi}{a}x} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right), \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n D_n e^{\frac{n\pi}{2}} \left( e^{-\frac{n\pi}{2}} e^{\frac{n\pi}{a}x} - e^{\frac{n\pi}{2}} e^{-\frac{n\pi}{a}x} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right), \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n D_n e^{\frac{n\pi}{2}} \left( e^{n\pi(\frac{x}{a} - \frac{1}{2})} - e^{-n\pi(\frac{x}{a} - \frac{1}{2})} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right), \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n D_n e^{\frac{n\pi}{2}} 2 \operatorname{senh} \left[ n\pi \left( \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right), \\ &= \sum_{m-\text{impar}}^{\infty} \frac{4\phi_0}{m\pi} \frac{1}{e^{m\pi} - 1} e^{\frac{m\pi}{2}} 2 \operatorname{senh} \left[ m\pi \left( \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) \right] \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right), \\ &= 4\phi_0 \sum_{m-\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{m\pi} \frac{1}{\operatorname{senh} \frac{m\pi}{2}} \operatorname{senh} \left[ m\pi \left( \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) \right] \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right). \end{aligned} \quad (2.312)$$

Podemos observar el comportamiento de este potencial en la figura (2.24). ■

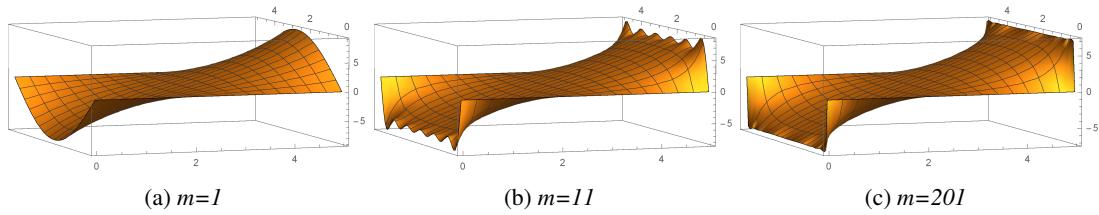


Figura 2.24: Comportamiento de  $\phi(x,y)$

■ **Ejemplo 2.24** Un paralelepípedo regular de lados  $\Delta x = a$ ,  $\Delta y = b$  y  $\Delta z = c$ . Se construye con material conductor como se muestra en la figura (2.25). Si todos los lados se mantienen aterrizados excepto la cara  $x = a$  que se mantiene a  $\phi_0$ , calcule el potencial para cualquier punto dentro del paralelepípedo.

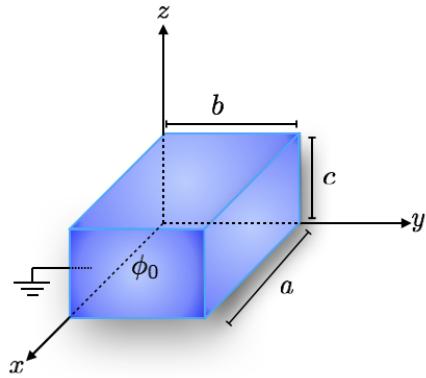


Figura 2.25: Paralelepípedo conductor.

### *Solución.*

Las condiciones de frontera son

1.  $\phi(0, y, z) = 0,$
  2.  $\phi(x, 0, z) = 0,$
  3.  $\phi(x, y, 0) = 0,$
  4.  $\phi(a, y, z) = \phi_0,$
  5.  $\phi(x, b, z) = 0,$
  6.  $\phi(x, y, c) = 0.$

La solución general se tiene de la ec. (2.277)

$$\phi(x,y,z) = (Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x})[C\cos(\beta y) + D\sin(\beta y)][E\cos(\gamma z) + F\sin(\gamma z)].$$

Al aplicar la condición 1 tenemos

$$\begin{aligned}\phi(0,y,z) &= (A+B)[C \cos(\beta y) + D \sin(\beta y)][E \cos(\gamma z) + F \sin(\gamma z)] = 0, \\ \Rightarrow B &= -A,\end{aligned}\tag{2.313}$$

así la solución tiene la forma

$$\phi(x,y,z) = A(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})[C \cos(\beta y) + D \sin(\beta y)][E \cos(\gamma z) + F \sin(\gamma z)]. \quad (2.314)$$

Aplicando la condición 2 vemos que  $C = 0$ , y al aplicar la condición 3 se tiene  $E = 0$ , la solución hasta el momento es

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= D(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}) \sin(\beta y) \sin(\gamma z), \text{ con } ADF \rightarrow D, \\ &= 2D \sinh(\alpha x) \sin(\beta y) \sin(\gamma z).\end{aligned}\quad (2.315)$$

Ahora aplicamos la condición 5 y obtenemos que  $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$  con  $n = 1, 2, \dots$ . Al aplicar la condición 6 tenemos  $\gamma_m = \frac{m\pi}{c}$  con  $m = 1, 2, \dots$ . Por lo tanto, la solución general es

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} D_{mn} \operatorname{senh}(\alpha_{nm}x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{c}z\right), \text{ con } D_{mn} \text{ cte.} \quad (2.316)$$

Para obtener  $\alpha_{nm}$  recordamos la relación entre las constantes

$$\alpha_{nm} = (\beta_n^2 + \gamma_m^2)^{1/2} = \left[ \left( \frac{n}{b} \right)^2 + \left( \frac{m}{c} \right)^2 \right]^{1/2} \pi. \quad (2.317)$$

Por lo cual

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} D_{mn} \operatorname{senh}\left(\left[\left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{m}{c}\right)^2\right]^{1/2} \pi x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{c}z\right). \quad (2.318)$$

Utilizamos la condición 4 para encontrar las constantes  $D_{mn}$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} D_{mn} \operatorname{senh}\left(\left[\left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{m}{c}\right)^2\right]^{1/2} \pi a\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{c}z\right) = \phi_0. \quad (2.319)$$

Se multiplica por  $\operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{b}y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi}{c}z\right)$  e integrando con respecto a  $y$  en  $[0, b]$  y respecto de  $z$  en  $[0, c]$ :

$$D_{pq} \operatorname{senh}\left(\left[\left(\frac{p}{b}\right)^2 + \left(\frac{q}{c}\right)^2\right]^{1/2} \pi a\right) \frac{b}{2} \frac{c}{2} = \phi_0 \frac{2b}{p\pi} \frac{2c}{q\pi}, \quad (2.320)$$

donde  $p$  y  $q$  son impares, es decir

$$D_{2n+1,2m+1} = \operatorname{senh}^{-1} \left\{ \left[ \left( \frac{2n+1}{b} \right)^2 + \left( \frac{2m+1}{c} \right)^2 \right]^{1/2} \pi a \right\} \frac{16\phi_0}{(2n+1)(2m+1)\pi^2}, \quad (2.321)$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots$ , y  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Finalmente se sustituyen las constantes (2.321) en (2.318)

■

## 2.9.2 Coordenadas cilíndricas

La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas está dada por la ec. (2.242)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.322)$$

Nos limitaremos a problemas en los cuales se tiene simetría axial, es decir,  $\phi$  es independiente de  $z$ , entonces sólo se tiene

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2.323)$$

Nuevamente se usa el método de separación de variables para la resolución de esta ecuación, proponiendo la solución

$$\phi(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \quad (2.324)$$

Sustituyendo la (2.324) en (2.323) y dividiendo entre  $R(r)\Phi(\varphi)$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} &= 0, \\ \frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) &= -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}. \end{aligned} \quad (2.325)$$

Igualando a una constante  $n^2$  se obtienen las ecuaciones

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) = n^2, \quad (2.326)$$

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = n^2. \quad (2.327)$$

Para resolver la ec. (2.326) se propone una solución de la forma

$$R(r) = \alpha_n r^l, \quad (2.328)$$

con  $\alpha_n$  y  $l$  constantes. Al sustituir (2.328) en (2.326) se tiene

$$l = \pm n. \quad (2.329)$$

Entonces la solución general de la ec. (2.326) es

$$R(r) = A_n r^n + \frac{B_n}{r^n}, \quad (2.330)$$

con  $A_n$  y  $B_n$  constantes, esto para el caso  $n \neq 0$ . Para  $n = 0$  la ec. (2.326) tiene la forma

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) = 0,$$

entonces la cantidad dentro del parentésis es una constante respecto a  $r$ :

$$r \frac{dR}{dr} = A_0, \text{ con } A_0 \text{ cte.},$$

por lo cual

$$R(r) = A_0 \ln(r) + \phi_0 ; \quad \phi_0 = \text{cte.} \quad (2.331)$$

Por otro lado, para la ecuación (2.327) se tiene una solución general de la forma

$$\Phi(\varphi) = C_n e^{in\varphi} + D_n e^{-in\varphi}, \quad (2.332)$$

con  $C_n$  y  $D_n$  constantes, sin embargo, estas funciones deben ser univaluadas, esto es

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi),$$

entonces

$$C_{\pm} e^{\pm in\varphi} = C_{\pm} e^{\pm in(\varphi+2\pi)},$$

por lo cual se requiere

$$e^{\pm in2\pi} = 1,$$

es decir

$$\cos(2\pi n) \pm i \sin(2\pi n) = 1,$$

ésto es posible cuando  $n = 1, 2, \dots$ . Para  $\Phi(\varphi)$  se usa la forma sinusoidal

$$\Phi(\varphi) = C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi). \quad (2.333)$$

Finalmente la solución general a la ec. de Laplace en coordenadas cilíndricas se obtiene sustituyendo (2.330), (2.331) y (2.333) en (2.324):

$$\phi(r, \varphi) = \phi_0 + A_0 \ln(r) + \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^n} \right) [C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi)], \quad (2.334)$$

con  $\phi_0$  una constante. Al usar el teorema 2.8.1 se puede escribir la solución general

$$\phi(r, \varphi) = \phi_0 + A_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^n} \right) [C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi)]. \quad (2.335)$$

**Ejemplo 2.25** Un cilindro muy largo de radio  $R$  tiene una densidad superficial de carga  $\sigma(\varphi) = \sigma_0 \sin(3\varphi)$ , fig. 2.26, donde  $\sigma_0$  es una constante con las unidades apropiadas.

- a) Encontrar el potencial dentro y fuera del cilindro.
- b) Calcular el campo eléctrico dentro y fuera del cilindro.

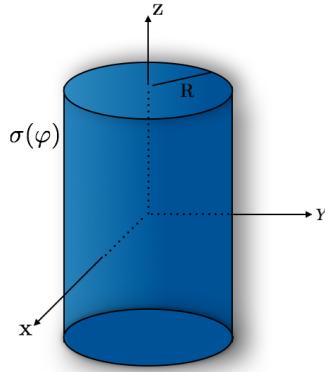


Figura 2.26: Cilindro largo con densidad de carga  $\sigma$ .

*Solución.*

- a) Las condiciones de frontera son

$$1. \quad \phi_{int}(R, \varphi) = \phi_{ext}(R, \varphi),$$

$$2. \quad \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial r} \Big|_{r=R} - \frac{\partial \phi_{int}}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

La solución general se obtiene de la ec. (2.335)

$$\phi(r, \varphi) = \phi_0 + A_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^n} \right) [C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi)].$$

Para el potencial dentro del cilindro se tiene que los términos  $A_0 \ln(r)$  y  $B_n/r^n$  no están definidos en  $r = 0$ , por lo que hacemos  $A_0 = 0$  y  $B_n = 0$ , entonces

$$\phi_{int}(r, \varphi) = \phi_{0,int} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n [C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi)], \quad (2.336)$$

para simplificar el cálculo se renombran las constantes  $A_n C_n \rightarrow A_n$  y  $A_n D_n \rightarrow B_n$

$$\phi_{int}(r, \varphi) = \phi_{0_{int}} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)]. \quad (2.337)$$

Al considerar un cilindro con densidad de carga se observa desde el exterior que el sistema se puede representar como un líneal de carga, cuyo potencial eléctrico tiene un comportamiento asintótico  $\ln r$ , así que el potencial externo es de la forma

$$\phi_{ext}(r, \varphi) = A_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{r^n} [G_n \cos(n\varphi) + H_n \sin(n\varphi)]. \quad (2.338)$$

Nuevamente se renombran los coeficientes  $E_n G_n \rightarrow C_n$  y  $E_n H_n \rightarrow D_n$

$$\phi_{ext}(r, \varphi) = A_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} [C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi)]. \quad (2.339)$$

Al usar la condición 2

$$\frac{A_0}{R} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{R^{n+1}} [C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi)] \quad (2.340)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} n R^{n-1} [A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)] = - \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \sin(3\varphi) \quad (2.341)$$

por comparación se tiene

$$A_0 = A_n = C_n = 0, \quad (2.342)$$

$$B_n = D_n = 0, \text{ para } n \neq 3 \quad (2.343)$$

$$\frac{3}{R^4} D_3 + 3R^2 B_3 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}. \quad (2.344)$$

Con estos resultados se tiene

$$\phi_{int}(r, \varphi) = \phi_{0_{int}} + r^3 B_3 \sin(3\varphi), \quad (2.345)$$

$$\phi_{ext}(r, \varphi) = \frac{1}{r^3} D_3 \sin(3\varphi). \quad (2.346)$$

Al usar la condición 1

$$\phi_{0_{int}} + R^3 B_3 \sin(3\varphi) = \frac{1}{R^3} D_3 \sin(3\varphi) \quad (2.347)$$

entonces

$$\phi_{0_{int}} = 0, \quad (2.348)$$

$$D_3 = R^6 B_3. \quad (2.349)$$

Sustituyendo (2.349) en (2.344) y resolviendo para  $B_3$

$$B_3 = \frac{\sigma_0}{6R^2 \epsilon_0}, \quad (2.350)$$

y en consecuencia

$$D_3 = \frac{R^4 \sigma_0}{6 \epsilon_0}. \quad (2.351)$$

Con esto se han encontrado todas las constantes para los potenciales

$$\therefore \phi_{int}(r, \varphi) = \frac{r^3}{R^2} \frac{\sigma_0}{6 \epsilon_0} \sin(3\varphi), \quad (2.352)$$

$$\therefore \phi_{ext}(r, \varphi) = \frac{R^4}{r^3} \frac{\sigma_0}{6 \epsilon_0} \sin(3\varphi). \quad (2.353)$$

b) Para calcular el campo eléctrico partimos de

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi,$$

donde el gradiente en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{\varphi}} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}, \quad (2.354)$$

así, para el campo eléctrico externo aplicamos el gradiente a la ec. (2.353)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ext}(r, \varphi) &= \frac{R^4\sigma_0}{2\epsilon_0 r^4} \sin(3\varphi) \hat{\mathbf{r}} - \frac{R^4\sigma_0}{2\epsilon_0 r^4} \cos(3\varphi) \hat{\mathbf{\varphi}}, \\ &= \frac{R^4\sigma_0}{2\epsilon_0 r^4} [\sin(3\varphi) \hat{\mathbf{r}} - \cos(3\varphi) \hat{\mathbf{\varphi}}]. \end{aligned} \quad (2.355)$$

Ahora, para el campo eléctrico interno aplicamos el gradiente a la ec. (2.352)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{int}(r, \varphi) &= -\frac{\sigma_0 r^2}{2R^2\epsilon_0} \sin(3\varphi) \hat{\mathbf{r}} - \frac{\sigma_0 r^2}{2R^2\epsilon_0} \cos(3\varphi) \hat{\mathbf{\varphi}}, \\ &= -\frac{\sigma_0 r^2}{2R^2\epsilon_0} [\sin(3\varphi) \hat{\mathbf{r}} + \cos(3\varphi) \hat{\mathbf{\varphi}}]. \end{aligned} \quad (2.356)$$

**Ejemplo 2.26** Dos cáscaras cilíndricas de radios  $r_a$  y  $r_b$  se disponen coaxialmente y se cargan a los potenciales  $\phi_a$  y  $\phi_b$  respectivamente, fig. 2.27. Encuentre el potencial en puntos entre las cáscaras cilíndricas.

*Solución.*

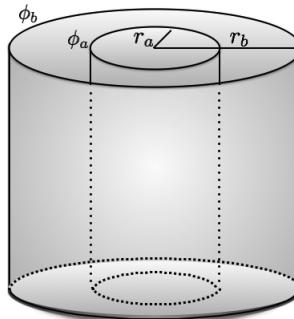


Figura 2.27: Cilindros coaxiales.

Notemos que el problema tiene simetría axial y azimutal es decir  $\phi$  solo depende de  $r$ , así las condiciones de frontera son

$$1.- \quad \phi(r_a) = \phi_a,$$

$$2.- \quad \phi(r_b) = \phi_b.$$

Para obtener una solución debemos resolver la ecuación de Laplace, entonces de la ec. (2.242) solo se tiene

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi}{dr}\right) = 0,$$

así que la cantidad dentro del paréntesis es una constante respecto a  $r$

$$r\frac{d\phi}{dr} = a, \text{ con } a = cte. \quad (2.357)$$

al resolver esta ecuación diferencial se tiene

$$\phi(r) = a \ln(r) + b, \quad (2.358)$$

con  $b$  constante. Ahora aplicamos la condición 1 y 2 a la solución (2.358)

$$\phi(r_a) = a \ln(r_a) + b = \phi_a, \quad (2.359)$$

$$\phi(r_b) = a \ln(r_b) + b = \phi_b. \quad (2.360)$$

De la ec. (2.359)

$$b = \phi_a - a \ln(r_a). \quad (2.361)$$

Sustituyendo  $b$  en (2.360) y al resolver para  $a$  se tiene

$$a = \frac{\Delta\phi}{\ln(r_b/r_a)}. \quad (2.362)$$

Ahora sustituimos  $a$  en (2.361)

$$b = \phi_a - \Delta\phi \frac{\ln(r_a)}{\ln(r_b/r_a)}. \quad (2.363)$$

Finalmente sustituimos  $a$  y  $b$  en la ec. (2.358)

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \Delta\phi \frac{\ln(r)}{\ln(r_b/r_a)} + \phi_a - \Delta\phi \frac{\ln(r_a)}{\ln(r_b/r_a)}, \\ \therefore \phi(r) &= \Delta\phi \frac{\ln(r/r_a)}{\ln(r_b/r_a)} + \phi_a. \end{aligned} \quad (2.364)$$

■ **Ejemplo 2.27** Obtenga  $\nabla^2\phi$  en coordenadas cilíndricas ec. (2.242), a partir de la forma rectangular ec. (2.240), mediante sustitución directa:  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z = z$ .

*Solución.*

Se tiene

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (2.365)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.366)$$

El Laplaciano en coordenadas rectangulares es

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.367)$$

Primero calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left( -\frac{y}{x^2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2.368)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \\
 &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \\
 &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} \\
 &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\
 &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.369)
 \end{aligned}$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\
 &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \left( \frac{1}{x} \right) \frac{\partial}{\partial \theta}, \\
 &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\
 &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (2.370)
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \\
 &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (2.371)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (2.369) y (2.371) en (2.367)

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.372)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (2.373)$$

■

**Ejemplo 2.28** Un cilindro dieléctrico largo de radio  $a$  y constante dieléctrica  $K$  se coloca en un campo eléctrico uniforme  $\mathbf{E}_0$ , figura 2.28. El eje del cilindro se orienta perpendicularmente a la dirección de  $\mathbf{E}_0$ . El cilindro no contiene cargas externas. Determine el potencial eléctrico en puntos interiores y exteriores del cilindro.

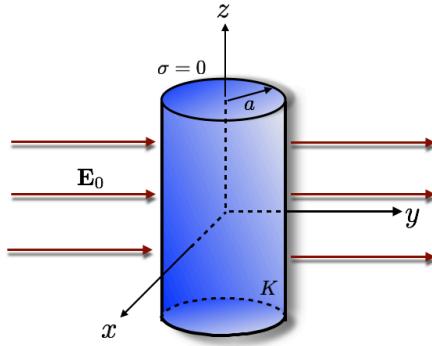


Figura 2.28: Cilindro dieléctrico en campo  $\mathbf{E}_0$ .

*Solución.*

Sabemos que

$$\phi = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Podemos obtener el potencial en un punto lejano del cilindro con

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{j} ; \quad \mathbf{r} = r \cos \varphi \mathbf{i} + r \sin \varphi \mathbf{j} + z \mathbf{k}. \quad (2.374)$$

$$\Rightarrow \phi = - \int E_0 dy = -E_0 r \sin \varphi. \quad (2.375)$$

Para encontrar el potencial dentro y fuera del cilindro usamos la solución a la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas ec. (2.335)

$$\phi(r, \varphi) = \phi_0 + A_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi) \right] \left( C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right).$$

Donde las condiciones de frontera son

$$1.- \quad \phi(r \rightarrow \infty, \varphi) = -E_0 r \sin \varphi.$$

$$2.- \quad \phi_{int}(r = a, \varphi) = \phi_{ext}(r = a, \varphi).$$

$$3.- \quad D_{2n} - D_{1n} = 0.$$

Para el potencial interno se tiene

$$\phi(r, \varphi)_{int} = \phi_{0int} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi) \right] \left( C_n r^n \right). \quad (2.376)$$

Para el potencial externo

$$\phi(r, \varphi)_{ext} = A_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A'_n \cos(n\varphi) + B'_n \sin(n\varphi) \right] \left( C'_n r^n + \frac{D'_n}{r^n} \right). \quad (2.377)$$

Aplicamos la primera condición al potencial externo

$$\begin{aligned}\phi(r \rightarrow \infty, \varphi)_{ext} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ A_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A'_n \cos(n\varphi) + B'_n \sin(n\varphi) \right] C'_n r^n \right\}, \\ &= -E_0 r \sin \varphi.\end{aligned}\quad (2.378)$$

Podemos observar que

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ A_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \cos(n\varphi) C'_n r^n \right] &= 0, \\ \Rightarrow A_0 = A'_n C'_n &= 0.\end{aligned}\quad (2.379)$$

Además

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \sin(n\varphi) C'_n r^n = -E_0 r \sin \varphi. \quad (2.380)$$

Notemos que todos los coeficientes son igual a cero a excepción de  $n = 1$ , el cual es

$$B'_1 C'_1 = -E_0. \quad (2.381)$$

Sustituyendo los coeficientes para el potencial externo ec. (2.377) se obtiene

$$\phi(r, \varphi)_{ext} = -E_0 r \sin \varphi + \frac{B'_1 D'_1}{r} \sin \varphi. \quad (2.382)$$

Ahora, aplicamos la segunda condición

$$\phi_{0int} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)] (C_n a^n) = \left( -E_0 a + \frac{B'_1 D'_1}{a} \right) \sin \varphi. \quad (2.383)$$

Observamos que

$$\begin{aligned}\phi_{0int} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\varphi) C_n a^n &= 0, \\ \Rightarrow \phi_{0int} = A_n C_n &= 0.\end{aligned}\quad (2.384)$$

De igual forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\varphi) C_n a^n = \left( -E_0 a + \frac{B'_1 D'_1}{a} \right) \sin \varphi.$$

Todos los coeficientes son igual a cero excepto para  $n = 1$

$$\Rightarrow B'_1 D'_1 = (E_0 + B_1 C_1) a^2. \quad (2.385)$$

Sustituyendo los coeficientes en el potencial interno ec. (2.376) y externo ec. (2.382) obtenemos

$$\phi(r, \varphi)_{int} = B_1 C_1 r \sin \varphi. \quad (2.386)$$

$$\phi(r, \varphi)_{ext} = \left[ -E_0 r + (E_0 + B_1 C_1) \frac{a^2}{r} \right] \sin \varphi. \quad (2.387)$$

Por otro lado recordamos que

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}, \\ \Rightarrow \mathbf{D} &= -\epsilon \nabla \phi.\end{aligned}\quad (2.388)$$

La componente normal de  $\mathbf{D}$  en la zona interfacial es

$$D_r = -\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad (2.389)$$

entonces de la condición 3 se tiene

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \epsilon \frac{\partial \phi_{int}}{\partial r} \Big|_{r=a}, \\ -\epsilon_0 \left( 2E_0 + B_1 C_1 \right) \sin \varphi &= \epsilon B_1 C_1 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.390)$$

Recordamos también de la ec. (2.65) que

$$\epsilon = K\epsilon_0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} -2E_0 - B_1 C_1 &= KB_1 C_1, \\ \Rightarrow B_1 C_1 &= -\frac{2E_0}{K+1}. \end{aligned} \quad (2.391)$$

Finalmente sustituimos esta última expresión en (2.386) y (2.387)

$$\therefore \phi(r, \varphi)_{int} = -\frac{2E_0}{K+1} r \sin \varphi. \quad (2.392)$$

$$\therefore \phi(r, \varphi)_{ext} = \left[ -r + \frac{K-1}{K+1} \left( \frac{a^2}{r} \right) \right] E_0 \sin \varphi. \quad (2.393)$$

■

### 2.9.3 Coordenadas esféricas

Utilizando (2.241) la ecuación de Laplace se puede expresar como

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2.394)$$

Restringimos el estudio a potenciales con simetría azimutal, es decir,  $\phi$  es independiente de  $\varphi$ , entonces sólo se tiene

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (2.395)$$

Aplicamos nuevamente separación de variables para resolver esta ecuación. Proponemos la solución

$$\phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta). \quad (2.396)$$

Sustituyendo (2.396) en la ec. (2.395) y dividiendo entre  $R(r)\Theta(\theta)$  se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) &= 0, \\ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) &= -\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right). \end{aligned} \quad (2.397)$$

Igualando a una constante de separación, se obtienen las ecuaciones

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = c, \quad (2.398)$$

$$-\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = c. \quad (2.399)$$

Primero trabajamos con la ec. (2.398). Proponemos una solución de la forma

$$R(r) = ar^{-(n+1)}, \quad (2.400)$$

con  $a$  y  $n$  constantes. Sustituyendo (2.400) en (2.398) encontramos que

$$c = n(n+1). \quad (2.401)$$

Entonces la ecuación diferencial (2.398) toma la forma

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_n}{dr} \right) - n(n+1)R_n = 0. \quad (2.402)$$

Donde se añade el subíndice  $n$  para indicar la relación entre la solución y la constante. Se intenta resolver esta ecuación por medio de la forma

$$R_n(r) = a_n r^l, \quad (2.403)$$

con  $a_n$  una constante y  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Al sustituirla en (2.402) encontramos que se debe satisfacer  $l(l+1) - n(n+1) = 0$ , lo cual tiene dos soluciones:  $l = n$  y  $l = -(n+1)$ , de modo que la solución general de (2.402) es

$$R_n(r) = A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}, \quad (2.404)$$

con  $A_n$  y  $B_n$  constantes.

Ahora se trabaja con la ec. (2.399). Sustituyendo  $c$  se tiene

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta_n}{d\theta} \right) + n(n+1)\Theta_n \sin \theta = 0. \quad (2.405)$$

Se hace el cambio de variable

$$x = \cos \theta \Rightarrow \sin \theta = (1-x^2)^{1/2}, \quad (2.406)$$

además

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin \theta \frac{d}{dx} = -(1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx}, \quad (2.407)$$

así de la ec. (2.405) se obtiene

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d\Theta_n}{dx} \right] + n(n+1)\Theta_n = 0, \quad (2.408)$$

esta ecuación es conocida como *ecuación de Legendre* cuyas soluciones son los polinomios de Legendre, ec. (2.6). Para nuestro caso

$$\Theta_n(\theta) = P_n(\cos \theta). \quad (2.409)$$

Finalmente la solución general a la ec. de Laplace en coordenadas esféricas se obtiene al sustituir (2.404) y (2.409) en (2.396)

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta), \quad (2.410)$$

estas soluciones son conocidas como *armónicos esféricos*.

■ **Ejemplo 2.29** Se coloca una esfera conductora de radio  $R$  conectada a tierra en un campo electrostático uniforme  $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{k}$ , figura 2.29.

- a) Calcule el potencial en cualquier punto.
- b) Determinar el campo eléctrico resultante.
- c) Hallar la densidad de carga inducida en la esfera.

*Solución.*

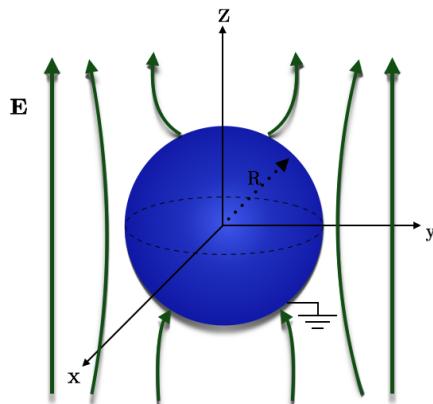


Figura 2.29: Esfera conductora conectada a tierra.

- a) Tomamos en cuenta que es un conductor por lo que no se tiene campo eléctrico dentro de la esfera,  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ,

$$\therefore \phi_{int} = cte. \quad (2.411)$$

También podemos obtener el potencial en una región lejos de la esfera si consideramos que se tiene un campo eléctrico dado por

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{k}, \quad (2.412)$$

y el radio-vector en coordenadas esféricas es

$$\mathbf{r} = r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + r \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + r \cos \theta \mathbf{k}, \quad (2.413)$$

así

$$\phi(r, \theta) = - \int E_0 dz = -E_0 r \cos \theta + c, \quad (2.414)$$

con  $c$  una constante.<sup>5</sup> El punto de referencia en el cual el potencial se anula es arbitrario, por lo cual se considera  $c = 0$ . Así, el potencial en una región alejada de la esfera es de la forma

$$\phi(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta. \quad (2.415)$$

Ahora se plantean las siguientes condiciones de frontera

$$1. \phi(R, \theta) = 0, \quad (2.416)$$

$$2. \phi(r \rightarrow \infty, \theta) = -E_0 r \cos \theta. \quad (2.417)$$

<sup>5</sup>Una forma más directa de obtener este resultado es considerando que  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$  y  $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{k}$ , con  $\nabla$  en coordenadas cartesianas. Entonces  $\phi = -E_0 z + c$ , pero  $z = r \cos \theta$ .

Se aplica la condición 1 a la solución general de la ec. de Laplace en coordenadas esféricas:

$$\phi_{ext}(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n R^n + \frac{B_n}{R^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) = 0, \quad (2.418)$$

los polinomios de Legendre son linealmente independientes, así que la igualdad anterior solo se logra cuando

$$A_n R^n + \frac{B_n}{R^{n+1}} = 0, \quad (2.419)$$

entonces

$$B_n = -A_n R^{2n+1}. \quad (2.420)$$

En este punto, el potencial es de la forma

$$\phi_{ext}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left( r^n - \frac{R^{2n+1}}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta). \quad (2.421)$$

Al aplicar la segunda condición

$$\phi_{ext}(r \rightarrow \infty, \theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta, \quad (2.422)$$

desarrollando la suma

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ A_0 P_0(\cos \theta) + A_1 r P_1(\cos \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) \right] = -E_0 r P_1(\cos \theta). \quad (2.423)$$

Igualando los coeficientes de los polinomios de Legendre obtenemos

$$A_0 = 0, \quad (2.424)$$

$$A_1 = -E_0, \quad (2.425)$$

y las constantes restantes

$$A_n = 0 \text{ con } n = 2, 3, \dots \quad (2.426)$$

Finalmente el potencial eléctrico fuera de la esfera se obtiene sustituyendo las constantes  $A_i$  en la ec. (2.421)

$$\therefore \phi_{ext}(r, \theta) = \left( -r + \frac{R^3}{r^2} \right) E_0 \cos \theta. \quad (2.427)$$

b) Para determinar el campo eléctrico se usa

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi.$$

Recordamos que el gradiente en coordenadas esféricas es

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}},$$

se obtiene

$$\therefore \mathbf{E}_{ext} = \left( 1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) E_0 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \left( -1 + \frac{R^3}{r^3} \right) E_0 \operatorname{sen} \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.428)$$

En la figura (2.30) se muestran algunas superficies equipotenciales producidas por el potencial externo y las líneas de campo eléctrico.

c) Para hallar la densidad de carga inducida en la esfera se usa

$$\frac{\partial \phi_{ext}}{\partial r} \Big|_{r=R} - \frac{\partial \phi_{int}}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (2.429)$$

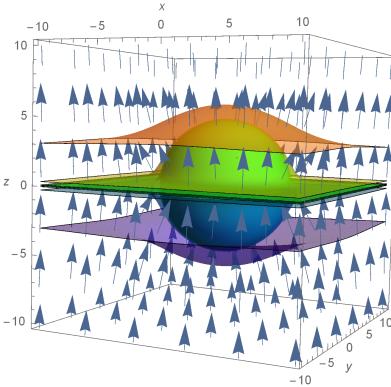


Figura 2.30: Superficies equipotenciales y líneas de campo eléctrico.

pero el potencial interno es constante,  $\frac{\partial \phi_{int}}{\partial r} = 0$ , por lo que se tiene

$$\begin{aligned}\sigma &= -\epsilon_0 \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial r} \Big|_{r=R}, \\ &= \epsilon_0 \left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3}\right) E_0 \cos \theta \Big|_{r=R}, \\ \therefore \sigma &= 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta.\end{aligned}\quad (2.430)$$

■

**Ejemplo 2.30** Una esfera conductora de radio  $a$  que tiene una carga total  $Q$  se coloca en un campo eléctrico inicialmente uniforme  $\mathbf{E}_0$ . Encuentre el potencial en todos los puntos exteriores a la esfera.

*Solución.*

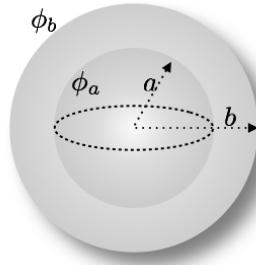


Figura 2.31: Cáscaras conductoras concéntricas.

Sabemos que

$$\phi(r) = - \int_{ref}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Podemos colocar el campo eléctrico en dirección de  $z$  como en la figura 2.29, de modo que

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{k},$$

así, el potencial en una región alejada de la esfera

$$\phi(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta. \quad (2.431)$$

Por otro lado, una esfera de radio  $a$  y con carga  $Q$  genera un potencial eléctrico que está dado por

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \text{ para } r \geq a. \quad (2.432)$$

De esta ecuación podemos encontrar el potencial eléctrico sobre la superficie de la esfera

$$\phi(r=a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (2.433)$$

Hemos encontrado las condiciones de frontera ec. (2.431) y (2.433)

1.  $\phi(r \rightarrow \infty, \theta) = -E_0 r \cos \theta,$
2.  $\phi(a, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}.$

Recordamos que la solución general a la ec. de Laplace en coordenadas esféricas es

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta).$$

Aplicamos la condición 1

$$\phi(r \rightarrow \infty, \theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta. \quad (2.434)$$

Si desarrollamos la suma

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ A_0 P_0(\cos \theta) + A_1 r P_1(\cos \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) \right] = -E_0 r P_1(\cos \theta). \quad (2.435)$$

Igualamos polinomio a polinomio para obtener las constantes  $A_i$

$$A_0 = 0; A_1 = -E_0; A_n = 0 \text{ para } n = 2, 3, \dots \quad (2.436)$$

de modo que la solución

$$\phi(r, \theta) = -E_0 r P_1(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta). \quad (2.437)$$

Al aplicar la condición 2

$$\phi(a, \theta) = -E_0 a P_1(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^{n+1}} P_n(\cos \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}, \quad (2.438)$$

desarrollando la suma

$$-E_0 a P_1(\cos \theta) + \frac{B_0}{a} P_0(\cos \theta) + \frac{B_1}{a^2} P_1(\cos \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{a^{n+1}} P_n(\cos \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} P_0(\cos \theta). \quad (2.439)$$

Igualando los coeficientes de los polinomios de Legendre se tiene:

Para el polinomio  $P_0(\cos \theta)$

$$\begin{aligned} \frac{B_0}{a} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}, \\ \Rightarrow B_0 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (2.440)$$

Para el polinomio  $P_1(\cos \theta)$

$$\begin{aligned} \frac{B_1}{a^2} &= E_0 a, \\ \Rightarrow B_1 &= E_0 a^3. \end{aligned} \quad (2.441)$$

Para las constantes restantes

$$B_n = 0 \text{ para } n = 2, 3, \dots \quad (2.442)$$

Sustituimos las constantes  $B_i$  en (2.437)

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) &= -E_0 r P_1(\cos \theta) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} P_0(\cos \theta) + \frac{E_0 a^3}{r^2} P_1(\cos \theta), \\ &= \left( \frac{a^3}{r^3} - 1 \right) E_0 r P_1(\cos \theta) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} P_0(\cos \theta), \\ \therefore \phi(r, \theta) &= \left( \frac{a^3}{r^3} - 1 \right) E_0 r \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \end{aligned} \quad (2.443)$$

■

■ **Ejemplo 2.31** Un cascarón esférico de radio  $a$  tiene densidad superficial de carga

$$\sigma = \sigma_0 (1 + \cos(4\theta)), \quad (2.444)$$

donde  $\sigma_0$  es una constante con las unidades apropiadas, ver fig. 2.32. Encontrar el potencial dentro y fuera del cascarón.

*Solución.*

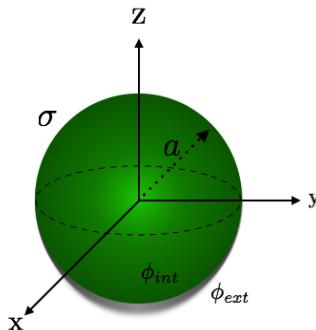


Figura 2.32: Esfera con densidad de carga  $\sigma$ .

Las condiciones de frontera son

1.  $\phi_{ext}(r \rightarrow \infty, \theta) = 0$ ,
2.  $\phi_{int}(a, \theta) = \phi_{ext}(a, \theta)$ ,
3.  $\left. \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial r} \right|_{r=a} - \left. \frac{\partial \phi_{int}}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

Para el potencial externo aplicamos la condición 1 a (2.410):

$$\phi_{ext}(r \rightarrow \infty, \theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) = 0, \quad (2.445)$$

$$\Rightarrow A_n = 0,$$

por lo cual

$$\phi_{ext}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta). \quad (2.446)$$

Al considerar (2.410) para el potencial interno se puede observar que no está definido cuando  $r = 0$ , entonces el potencial tiene la forma

$$\phi_{int}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta). \quad (2.447)$$

Aplicando la condición 2 se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^{n+1}} P_n(\cos \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos \theta), \\ \Rightarrow B_n &= A_n a^{2n+1}. \end{aligned} \quad (2.448)$$

Sustituyendo  $B_n$  en (2.446) se tiene que el potencial externo es

$$\phi_{ext}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta). \quad (2.449)$$

Para utilizar la condición 3 se calcula

$$\left. \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial r} \right|_{r=a} = - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_n \frac{a^{2n+1}}{r^{n+2}} P_n(\cos \theta) \Big|_{r=a} = - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_n a^{n-1} P_n(\cos \theta). \quad (2.450)$$

Por otra parte

$$\left. \frac{\partial \phi_{int}}{\partial r} \right|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} n A_n r^{n-1} P_n(\cos \theta) \Big|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} n A_n a^{n-1} P_n(\cos \theta), \quad (2.451)$$

entonces de la condición 3

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_n a^{n-1} P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} n A_n a^{n-1} P_n(\cos \theta) &= \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n a^{n-1} P_n(\cos \theta) &= \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (1 + \cos(4\theta)). \end{aligned} \quad (2.452)$$

Ahora debemos expresar  $\cos(4\theta)$  en términos de  $\cos \theta$ , para ello ocupamos la identidad

$$\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1, \quad (2.453)$$

así

$$\cos(4\theta) = 2 \cos^2(2\theta) - 1 = 2(2 \cos^2 \theta - 1)^2 - 1 = 1 - 8 \cos^2 \theta + 8 \cos^4 \theta. \quad (2.454)$$

De esta forma se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n a^{n-1} P_n(\cos \theta) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (2 - 8 \cos^2 \theta + 8 \cos^4 \theta). \quad (2.455)$$

Lo siguiente es expresar el lado derecho de la igualdad en función de los polinomios de Legendre. Del polinomio de grado 2 se tiene

$$\cos^2 \theta = \frac{2}{3} P_2(\cos \theta) + \frac{1}{3} P_0(\cos \theta). \quad (2.456)$$

Del polinomio de grado 4

$$\begin{aligned}
 \cos^4 \theta &= \frac{8}{35} P_4(\cos \theta) + \frac{30}{35} \cos^2 \theta - \frac{3}{35}, \\
 &= \frac{8}{35} P_4(\cos \theta) + \frac{6}{7} \left[ \frac{2}{3} P_2(\cos \theta) + \frac{1}{3} P_0(\cos \theta) \right] - \frac{3}{35} P_0(\cos \theta), \\
 &= \frac{8}{35} P_4(\cos \theta) + \frac{4}{7} P_2(\cos \theta) + \frac{2}{7} P_0(\cos \theta) - \frac{3}{35} P_0(\cos \theta), \\
 &= \frac{8}{35} P_4(\cos \theta) + \frac{4}{7} P_2(\cos \theta) + \frac{1}{5} P_0(\cos \theta).
 \end{aligned} \tag{2.457}$$

Si sustituimos (2.456), (2.457) en (2.455) se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n a^{n-1} P_n = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \left[ 2P_0 - 8 \left( \frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{3} P_0 \right) + 8 \left( \frac{8}{35} P_4 + \frac{4}{7} P_2 + \frac{1}{5} P_0 \right) \right], \tag{2.458}$$

es decir

$$A_0 a^{-1} P_0 + 3A_1 P_1 + 5A_2 a P_2 + 7A_3 a^2 P_3 + 9A_4 a^3 P_4 + \sum_{n=5}^{\infty} (2n+1) A_n a^{n-1} P_n = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \left( \frac{14}{15} P_0 - \frac{16}{21} P_2 + \frac{64}{35} P_4 \right). \tag{2.459}$$

Por comparación de los coeficientes de cada polinomio

$$A_0 = \frac{14 a \sigma_0}{15 \epsilon_0}, \tag{2.460}$$

$$A_1 = 0, \tag{2.461}$$

$$A_2 = -\frac{16}{105} \frac{\sigma_0}{a \epsilon_0}, \tag{2.462}$$

$$A_3 = 0, \tag{2.463}$$

$$A_4 = \frac{64}{315} \frac{\sigma_0}{a^3 \epsilon_0}. \tag{2.464}$$

Para los coeficientes restantes

$$A_n = 0 \text{ con } n = 5, 6, \dots \tag{2.465}$$

Estos coeficientes determinan el potencial interno y externo

$$\therefore \phi_{int}(r, \theta) = \frac{14}{15} \frac{a \sigma_0}{\epsilon_0} P_0(\cos \theta) - \frac{16}{105} \frac{\sigma_0}{a \epsilon_0} r^2 P_2(\cos \theta) + \frac{64}{315} \frac{\sigma_0}{a^3 \epsilon_0} r^4 P_4(\cos \theta), \tag{2.466}$$

$$\therefore \phi_{ext}(r, \theta) = \frac{14}{15} \frac{a^2 \sigma_0}{r \epsilon_0} P_0(\cos \theta) - \frac{16}{105} \frac{a^4 \sigma_0}{r^3 \epsilon_0} P_2(\cos \theta) + \frac{64}{315} \frac{a^6 \sigma_0}{r^5 \epsilon_0} P_4(\cos \theta). \tag{2.467}$$

■ **Ejemplo 2.32** Suponga que un dipolo puntual se sitúa en el centro de una cáscara esférica conductora de radio "a" puesta a tierra como la que se muestra en la figura 2.33. Encuentre el potencial en el interior de la cáscara. [Sugerencia: Utilice los armónicos esféricos que son regulares en el origen para satisfacer las condiciones sobre la cáscara.]

*Solución.*

Como la cáscara está puesta a tierra el potencial sobre ella es cero, por otro lado el potencial producido por un dipolo ec. (2.14) es

$$\phi_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2},$$

Entonces las condiciones de frontera son

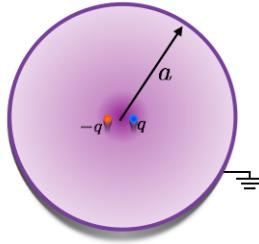


Figura 2.33: Cáscara conductora con un dipolo en el centro.

- 1.
2.  $\phi(a, \theta) = 0$ ,
3.  $\phi(r \rightarrow 0, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$ .

Sabemos que

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta).$$

Aplicamos entonces la condición 1

$$\phi(a, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n a^n + \frac{B_n}{a^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) = 0,$$

lo cual requiere

$$\begin{aligned} \frac{B_n}{a^{n+1}} &= -A_n a^n, \\ \Rightarrow B_n &= -A_n a^{2n+1}, \end{aligned} \tag{2.468}$$

por lo cual, la solución toma la forma

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left( r^n - \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta). \tag{2.469}$$

Aplicando la condición 2

$$\phi(r \rightarrow 0, \theta) = -\lim_{r \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}, \tag{2.470}$$

Igualando los coeficientes correspondientes a cada polinomio se tiene

$$A_0 = 0, \tag{2.471}$$

$$A_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{a^3}, \tag{2.472}$$

$$A_n = 0 \text{ con } n = 2, 3, \dots \tag{2.473}$$

Por último sustituimos las constantes  $A_i$  en la solución (2.469)

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{a^3} \left( r - \frac{a^3}{r^2} \right) P_1(\cos \theta), \\ \therefore \phi(r, \theta) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \left( 1 - \frac{r^3}{a^3} \right). \end{aligned} \tag{2.474}$$

■

■ **Ejemplo 2.33** Una esfera conductora de radio  $a$  se rodea de un cascarón concéntrico de radio  $b$ , el sistema se mantiene a una diferencia de potencial constante  $\Delta\phi = \phi_0$ . Con la ecuación de Laplace

- Encontrar el potencial en todo punto.
- Calcule el campo eléctrico en todo punto.
- Determine la densidad de carga así como la carga total en la esfera y el conductor.

*Solución.*

- Dentro del conductor el campo eléctrico se anula,  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ , por lo que

$$\phi(r) = cte. \quad (2.475)$$

Las condiciones de frontera para el potencial entre el conductor y el cascarón son:

$$1. \phi(a) = \phi_a,$$

$$2. \phi(b) = \phi_b.$$

El potencial se encuentra a partir de la solución de la ecuación de Laplace. Como se tiene simetría polar y azimutal, de la ec. (2.241) solo se tiene

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 0, \\ \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) &= 0, \\ r^2 \frac{d\phi}{dr} &= c, \end{aligned} \quad (2.476)$$

con  $c$  una constante, entonces

$$d\phi = c \frac{dr}{r^2},$$

$$\Rightarrow \phi(r) = -\frac{c}{r} + d, \quad (2.477)$$

con  $d$  constante. Ahora aplicamos las condiciones de frontera

$$\phi(a) = -\frac{c}{a} + d = \phi_a, \quad (2.478)$$

$$\phi(b) = -\frac{c}{b} + d = \phi_b. \quad (2.479)$$

Restando la ec. (2.479) y (2.478)

$$\begin{aligned} \phi_b - \phi_a &= \frac{c}{a} - \frac{c}{b}, \\ \Rightarrow c &= \Delta\phi \frac{ab}{b-a}. \end{aligned} \quad (2.480)$$

Sustituimos ahora  $c$  en (2.478) recordando que  $\Delta\phi = \phi_0$

$$d = \phi_a + \phi_0 \frac{b}{b-a}. \quad (2.481)$$

Finalmente el potencial entre las cáscaras se obtiene al sustituir  $c$  y  $d$  en (2.477)

$$\begin{aligned} \phi(r) &= -\frac{\phi_0 ab}{r(b-a)} + \phi_a + \frac{\phi_0 b}{b-a}, \\ &= \frac{\phi_0 b}{b-a} \left( 1 - \frac{a}{r} \right) + \phi_a. \end{aligned} \quad (2.482)$$

Las condiciones de frontera para obtener el potencial fuera del cascarón son

$$1. \phi(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (2.483)$$

$$2. \phi(b) = \phi_b. \quad (2.484)$$

Aplicando la condición 1 a (2.477)

$$\phi(\infty) = d = 0, \quad (2.485)$$

de esta forma

$$\phi(r) = -\frac{c}{r}. \quad (2.486)$$

Si aplicamos la segunda condición

$$\begin{aligned} \phi(b) &= -\frac{c}{b} = \phi_b, \\ \Rightarrow c &= -\phi_b b. \end{aligned} \quad (2.487)$$

Finalmente el potencial cuando  $r > b$  se obtiene sustituyendo  $c$  en (2.486)

$$\therefore \phi(r) = \frac{\phi_b b}{r}. \quad (2.488)$$

b) Para hallar el campo eléctrico entre el conductor y el cascarón podemos usar

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi,$$

recordando que

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\mathbf{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{\varphi}},$$

entonces usando la solución (2.482)

$$\therefore \mathbf{E} = -\frac{\phi_0 ab}{r^2(b-a)}\hat{\mathbf{r}}. \quad (2.489)$$

El campo eléctrico cuando  $r > b$  se obtiene aplicando  $-\nabla\phi$  a la solución (2.488)

$$\therefore \mathbf{E} = \frac{\phi_b b}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \quad (2.490)$$

c) La densidad de carga se encuentra usando

$$\left. \frac{\partial\phi_{ext}}{\partial r} \right|_{r=a} - \left. \frac{\partial\phi_{int}}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.491)$$

Para la esfera conductora se tiene que  $\phi_{int} = cte$ , por lo que solo se tiene

$$\left. \frac{\partial\phi_{ext}}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (2.492)$$

donde  $\phi_{ext}$  es el potencial entre el conductor y el cascarón ec. (2.482), así

$$\begin{aligned} \left. \frac{\phi_0 ab}{r^2(b-a)} \right|_{r=a} &= \frac{\phi_0 b}{a(b-a)} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}, \\ \therefore \sigma &= -\frac{\phi_0 \epsilon_0 b}{a(b-a)}. \end{aligned} \quad (2.493)$$

Por otra parte para obtener la carga total de la esfera se tiene que

$$\sigma = \frac{dq}{da},$$

es decir

$$dq = \sigma da, \quad (2.494)$$

con  $da = a^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ , entonces la carga total de la esfera conductora es

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{\phi_0 \epsilon_0 b}{a(b-a)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin\theta d\theta d\varphi, \\ \therefore Q &= -4\pi \frac{\phi_0 \epsilon_0 a b}{b-a}. \end{aligned} \quad (2.495)$$

Ahora, para la densidad de carga del cascarón se tiene que  $\phi_{int}$  es el potencial entre el conductor y el cascarón ec. (2.482), y  $\phi_{ext}$  es la ec. (2.488), así de la ec. (2.491)

$$\left. -\frac{\phi_b b}{r^2} \right|_{r=b} - \left. \frac{\phi_0 ab}{r^2(b-a)} \right|_{r=b} = -\frac{\phi_b(b-a) + \phi_0 a}{b(b-a)}, \quad (2.496)$$

recordando que  $\phi_0 = \phi_b - \phi_a$ , entonces

$$\frac{\phi_b b - \phi_a a}{b(b-a)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

$$\therefore \sigma = \epsilon_0 \frac{\phi_b b - \phi_a a}{b(b-a)}. \quad (2.497)$$

La carga total del cascarón se obtiene de la ec. (2.494)

$$Q = \epsilon_0 \frac{\phi_b b - \phi_a a}{b(b-a)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi b^2 \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$\therefore Q = 4\pi \epsilon_0 b \frac{\phi_b b - \phi_a a}{b-a}. \quad (2.498)$$

■

**Ejemplo 2.34** Consideremos una esfera de radio  $a$  con polarización homogénea  $\mathbf{P}$  y permitividad eléctrica  $\epsilon$  (figura 2.34a). Calcular el potencial y el campo eléctrico dentro y fuera de la esfera.

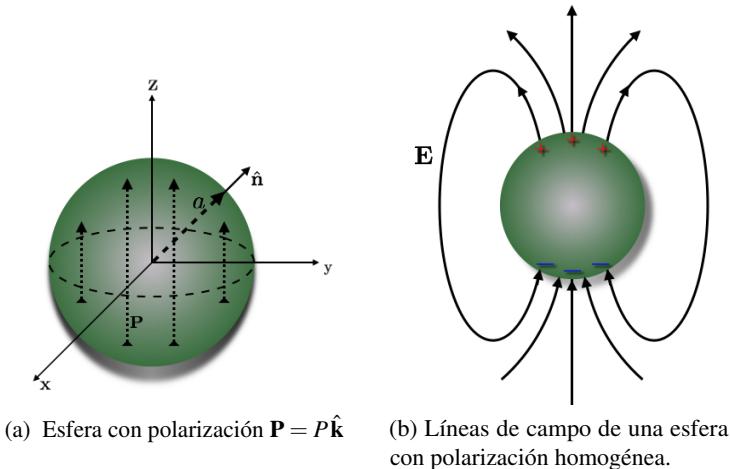


Figura 2.34

*Solución.*

Tomaremos  $\mathbf{P} = P \hat{\mathbf{z}}$ . Dado que  $\mathbf{P}$  es constante, de las ecuaciones (2.46) y (2.47) se tiene que

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0. \quad (2.499)$$

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = P \cos \theta. \quad (2.500)$$

Recordamos que la solución a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas está dada por la ec. (2.410)

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta).$$

Para el potencial interno se tiene

$$\phi_{int}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta). \quad (2.501)$$

Por otro lado, para el potencial externo

$$\phi_{ext}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta). \quad (2.502)$$

Las condiciones de frontera son

1.  $\phi_{int}(a, \theta) = \phi_{ext}(a, \theta),$
2.  $\epsilon_0 \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial r} \Big|_{r=a} - \epsilon \frac{\partial \phi_{int}}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\sigma_p.$

Al aplicar la primera condición se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^{n+1}} P_n(\cos \theta), \\ \Rightarrow B_n &= A_n a^{2n+1}. \end{aligned} \quad (2.503)$$

Sustituyendo  $B_n$  en el potencial externo

$$\phi_{ext}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n a^{2n+1}}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta). \quad (2.504)$$

Ahora, para la condición 2 derivamos los potenciales externo e interno respecto de  $r$

$$\frac{\partial \phi_{ext}}{\partial r} \Big|_{r=a} = - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_n a^{n-1} P_n(\cos \theta), \quad (2.505)$$

$$\frac{\partial \phi_{int}}{\partial r} \Big|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} n A_n a^{n-1} P_n(\cos \theta). \quad (2.506)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_n a^{n-1} P_n(\cos \theta) + \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} n A_n a^{n-1} P_n(\cos \theta) &= \sigma_p, \\ \sum_{n=0}^{\infty} [\epsilon_0(n+1) + \epsilon n] A_n a^{n-1} P_n(\cos \theta) &= P \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.507)$$

Notemos que todas las constantes  $A_n$  son cero a excepción de  $A_1$  que es igual a

$$A_1 = \frac{P}{2\epsilon_0 + \epsilon}. \quad (2.508)$$

Sustituyendo  $A_1$  en (2.501) encontramos el potencial interno de la esfera

$$\therefore \phi_{int}(r, \theta) = \frac{P}{2\epsilon_0 + \epsilon} r \cos \theta. \quad (2.509)$$

En coordenadas cartesianas

$$\therefore \phi_{int}(z) = \frac{P}{2\epsilon_0 + \epsilon} z. \quad (2.510)$$

Para obtener el campo eléctrico recordamos que  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ , entonces

$$\therefore \mathbf{E}_{int} = -\frac{P}{2\epsilon_0 + \epsilon} \mathbf{k}. \quad (2.511)$$

Por otro lado, para obtener el potencial externo sustituimos  $A_1$  en la ec. (2.504)

$$\phi_{ext}(r, \theta) = \frac{Pa^3}{2\epsilon_0 + \epsilon} \frac{\cos \theta}{r^2}. \quad (2.512)$$

Recordando que el volumen de una esfera es

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Entonces el potencial en término del volumen es

$$\begin{aligned} \phi_{ext}(r, \theta) &= \frac{3V}{4\pi(2\epsilon_0 + \epsilon)} \frac{P \cos \theta}{r^2}, \\ \phi_{ext}(r, \theta) &= \frac{3V}{4\pi(2\epsilon_0 + \epsilon)} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \end{aligned} \quad (2.513)$$

De la ecuación (2.35) recordamos también

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{V}, \quad (2.514)$$

así el potencial externo es

$$\therefore \phi_{ext}(r, \theta) = \frac{3}{4\pi(2\epsilon_0 + \epsilon)} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.515)$$

Podemos observar que este potencial se comporta como si fuera el potencial producido por un dipolo. Ahora, calculemos el campo eléctrico fuera de la esfera en un punto del eje  $z$ , en este caso  $\theta = 0$  y  $r = z$  entonces

$$\phi_{ext}(z) = \frac{3}{4\pi(2\epsilon_0 + \epsilon)} \frac{p}{z^2}.$$

Finalmente

$$\therefore \mathbf{E}_{ext} = \frac{3}{4\pi(2\epsilon_0 + \epsilon)} \frac{2p}{z^3} \hat{\mathbf{k}}. \quad (2.516)$$

**Ejemplo 2.35** Se tiene una esfera dieléctrica de radio  $a$ . Se coloca en una región del espacio que contiene un campo eléctrico  $\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{k}}$ . Además la esfera no tiene carga ( $\sigma = 0$ ) y se caracteriza por una constante dieléctica  $K$  (figura 2.35). Calcular el potencial y campo eléctrico dentro y fuera de la esfera.

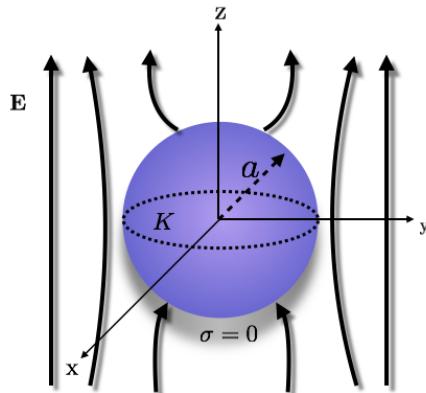


Figura 2.35: Esfera con constante dieléctrica  $K$ .

*Solución,*

El potencial en una región lejos de la esfera es

$$\phi(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta. \quad (2.517)$$

Con las condiciones de frontera

1.  $\phi(r \rightarrow \infty, \theta) = -E_0 r \cos \theta.$
2.  $\phi_{int}(r = a, \theta) = \phi_{ext}(r = a, \theta).$
3.  $\mathbf{D}_{2n} - \mathbf{D}_{1n} = 0.$

De la solución a la ec. de Laplace en coordenadas esféricas tenemos

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta).$$

Para el potencial interno

$$\phi_{int}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta). \quad (2.518)$$

Por otro lado, para el potencial externo

$$\phi_{ext}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A'_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta). \quad (2.519)$$

Al aplicar la primera condición al potencial externo obtenemos.

$$\phi_{ext}(r \rightarrow \infty, \theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} A'_n r^n P_n(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta.$$

Donde todas las constantes  $A'_n$  son cero excepto  $A'_1$

$$A'_1 = -E_0. \quad (2.520)$$

Entonces

$$\phi_{ext}(r, \theta) = -E_0 r P_1(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta). \quad (2.521)$$

Ahora, aplicamos la segunda condición de frontera

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) = -E_0 a P_1(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (2.522)$$

Igualando los coeficientes correspondientes a cada polinomio se tiene que

$$A_0 = \frac{B_0}{a}, \quad (2.523)$$

$$A_1 = -E_0 + \frac{B_1}{a^3}, \quad (2.524)$$

$$A_n = \frac{B_n}{a^{2n+1}} \text{ con } n = 2, 3, \dots \quad (2.525)$$

Sustituyendo las constantes  $A_i$  en el potencial interno se obtiene

$$\phi(r, \theta)_{int} = \frac{B_0}{a} + \left( \frac{B_1}{a^3} - E_0 \right) r P_1(\cos \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{a^{2n+1}} r^n P_n(\cos \theta). \quad (2.526)$$

Por otro lado, recordamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}, \\ \Rightarrow \mathbf{D} &= -\epsilon \nabla \phi. \end{aligned} \quad (2.527)$$

Puesto que la componente normal de  $\mathbf{D}$  en la zona interfacial es

$$D_r = -\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad (2.528)$$

entonces de la condición 3 se tiene

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \epsilon \frac{\partial \phi_{int}}{\partial r} \Big|_{r=a}, \\ -\epsilon_0 \left( E_0 P_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)B_n}{a^{n+2}} P_n \right) &= \epsilon \left[ \left( \frac{B_1}{a^3} - E_0 \right) P_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nB_n}{a^{n+2}} P_n \right]. \end{aligned} \quad (2.529)$$

Igualamos nuevamente respecto a los polinomios y teniendo en cuenta que  $\epsilon = K\epsilon_0$ , obtenemos

$$B_0 = 0, \quad (2.530)$$

$$-E_0 - \frac{2B_1}{a^3} = K \left( \frac{B_1}{a^3} - E_0 \right) \Rightarrow B_1 = E_0 a^3 \frac{K-1}{K+2}, \quad (2.531)$$

$$\frac{(n+1)B_n}{a^{n+2}} = K \frac{nB_n}{a^{n+2}} \Rightarrow B_n = 0 \text{ con } n = 2, 3, \dots \quad (2.532)$$

Finalmente, sustituimos las constantes  $B_i$  en la ec. (2.526) y obtenemos el potencial interno

$$\therefore \phi_{int}(r, \theta) = -\frac{3E_0 r}{K+2} \cos \theta. \quad (2.533)$$

Para obtener el campo eléctrico se tiene  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$

$$\therefore \mathbf{E}_{int} = \frac{3E_0}{K+2} \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \frac{3E_0}{K+2} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.534)$$

Ahora, sustituimos  $B_i$  en (2.521) y obtenemos el potencial externo

$$\therefore \phi_{ext}(r, \theta) = \left( -r + \frac{a^3}{r^2} \frac{K-1}{K+2} \right) E_0 \cos \theta, \quad (2.535)$$

así el campo externo es

$$\therefore \mathbf{E}_{ext} = \left( 1 + \frac{2a^3}{r^3} \frac{K-1}{K+2} \right) E_0 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \frac{K-1}{K+2} \right) E_0 \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.536)$$

■

## 2.10 Método de imágenes

El objetivo de este método es colocar un conjunto de *cargas ficticias* (cargas imagen), tales que la configuración en conjunto con cualesquiera cargas reales, harán posible satisfacer las condiciones de frontera y así obtener la solución única (Teorema 2.8.2) del problema. Es decir, se intenta escribir el potencial como

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \phi_1 + \phi_2, \\ \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{real} \frac{q_{real}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{real}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{imagen} \frac{q_{imagen}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{imagen}|}. \end{aligned} \quad (2.537)$$

Las cargas imagen se situarán fuera de la región para la que se está calculando el potencial. Como ejemplo consideremos una carga  $q$  colocada a una distancia  $d$  de un plano conductor infinito conectado a tierra y orientado en el plano  $yz$  (fig. 2.36). Las condiciones de frontera son

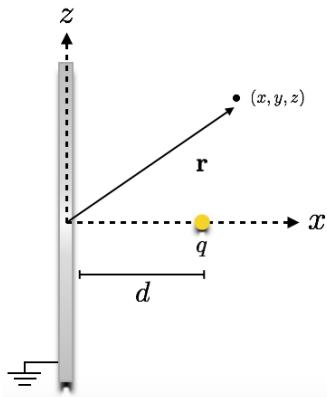


Figura 2.36: Carga puntual y plano conductor infinito.

$$\phi(x=0) = 0, \quad (2.538)$$

$$\phi(r \rightarrow \infty) = 0. \quad (2.539)$$

Consideremos ahora un dipolo eléctrico, donde la separación entre las cargas  $q$  y  $-q$  es  $2d$  como en la figura (2.37). Una superficie equipotencial, es el plano que bisecta perpendicularmente al segmento que une las dos cargas. Las condiciones de frontera para este problema son

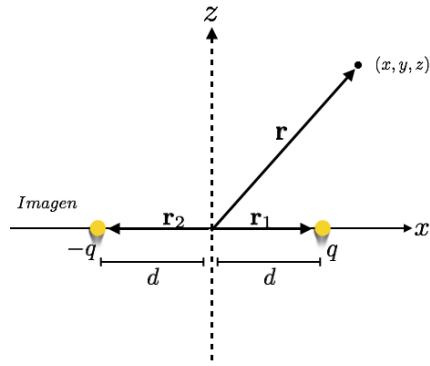


Figura 2.37: Posición de la carga imagen

$$\Phi(x=0) = 0, \quad (2.540)$$

$$\Phi(r \rightarrow \infty) = 0. \quad (2.541)$$

Dado que  $\phi(\mathbf{r})$  y  $\Phi(\mathbf{r})$  satisfacen las mismas condiciones de frontera para la región  $x \geq 0$ , por el teorema de unicidad se tiene que

$$\phi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}). \quad (2.542)$$

Así, para calcular el potencial  $\phi$  resulta ser equivalente a trabajar con el problema del dipolo. El potencial de estas dos cargas en un punto  $\mathbf{r}$  es

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}. \quad (2.543)$$

Entonces

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right). \quad (2.544)$$

La carga  $-q$  que da origen al potencial

$$\phi_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}, \quad (2.545)$$

se llama *imagen* de la carga puntual  $q$ . Se puede ahora calcular las componentes del campo eléctrico, recordando que  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ , así

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{x-d}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{x+d}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right), \quad (2.546)$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{y}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{y}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right), \quad (2.547)$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{z}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{z}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right). \quad (2.548)$$

Es fácil observar que cuando  $x = 0$

$$E_x = -\frac{qd}{2\pi\epsilon_0(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (2.549)$$

$$E_y = E_z = 0. \quad (2.550)$$

Dado que el campo eléctrico normal al la superficie conductora ( $E_x$ ) no es cero, implica la existencia de una densidad superficial de carga.

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \\ \Rightarrow \sigma &= \epsilon_0 E_x \Big|_{x=0}, \\ &= -\frac{qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (2.551)$$

Esta densidad superficial de carga es inducida por la carga puntual  $q$ . Se puede también encontrar la carga total inducida sobre el plano conductor con

$$\begin{aligned} dq_{ind} &= \sigma da, \\ \Rightarrow q_{ind} &= -\frac{qd}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dy dz. \end{aligned} \quad (2.552)$$

Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{d^2 + z^2} \tan \theta, \\ dy &= \sqrt{d^2 + z^2} \sec^2 \theta d\theta, \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} q_{ind} &= -\frac{qd}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sqrt{d^2 + z^2} \sec^2 \theta}{[(d^2 + z^2)(1 + \tan^2 \theta)]^{3/2}} d\theta dz, \\ &= -\frac{qd}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{d^2 + z^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta dz, \\ &= -\frac{qd}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{d^2 + z^2} dz. \end{aligned} \quad (2.553)$$

Ahora hacemos el cambio

$$\begin{aligned} z &= d \tan \varphi, \\ dz &= d \sec^2 \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} q_{ind} &= -\frac{q d}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d \sec^2 \varphi}{d^2(1 + \tan^2 \varphi)} d\varphi, \\ &= -q. \end{aligned} \quad (2.554)$$

La carga total inducida resulta ser igual y opuesta a la carga inductora y por lo tanto igual a la carga imagen. Es evidente que la carga puntual  $q$  ejerce una fuerza atractiva sobre el plano conductor debido a que la carga superficial inducida es de signo contrario. Esta fuerza es

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}.$$

Si se sustituyen las coordenadas de  $q$ ,  $(d, 0, 0)$  en las ecs. (2.546), (2.547) y (2.548) se tiene que

$$E_x = -\frac{q}{16\pi d^2}, \quad E_y = E_z = 0. \quad (2.555)$$

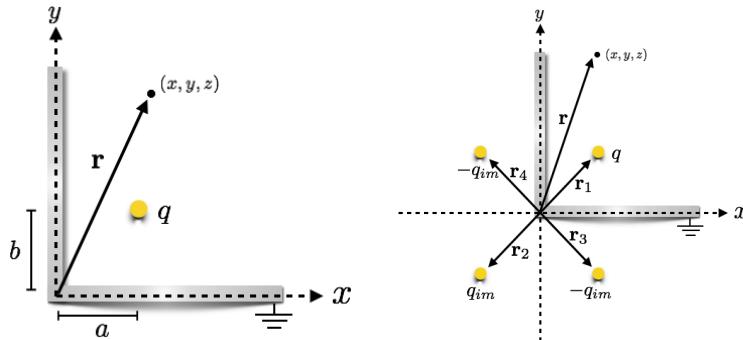
Por lo tanto

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{16\pi d^2} \mathbf{i}. \quad (2.556)$$

La dificultad principal al resolver un problema por la técnica de imágenes es la de hallar un grupo de cargas imagen, que junto con las cargas originales determinadas, produzcan superficies equipotenciales en los conductores. El problema es evidente sólo para casos en que la geometría es sencilla.

**Ejemplo 2.36** Una carga puntual  $q$ , se encuentra situada sobre el plano  $xy$  cerca de dos planos conductores conectados a tierra que se intersectan a ángulos rectos como se muestra en la figura (2.38a). El eje  $z$  está alineado con la recta de intersección de los planos. Encontrar las posiciones de las cargas imagen. Encontrar el potencial en la región  $x \geq 0, y \geq 0, -\infty \leq z \leq \infty$ . Encontrar el campo eléctrico.

*Solución.*



(a) Carga puntual en una vecindad de la intersección de dos planos conductores.  
(b) Disposición de las cargas imagen.

Figura 2.38: Problema de carga puntual y planos conductores intersectados a ángulos rectos

Podemos notar que se necesitan tres cargas imagen, dos de éstas para poder representar la superficie equipotencial del arreglo original y la otra para compensar el efecto de las cargas imagen (ver figura 2.38b).

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1real} &= (a, b, 0), \\ \mathbf{r}_2 &= (-a, -b, 0), \\ \mathbf{r}_3 &= (a, -b, 0), \\ \mathbf{r}_4 &= (-a, b, 0). \end{aligned}$$

Entonces

$$\phi(x, y, z) = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4, \quad (2.557)$$

$$\begin{aligned} \therefore \phi(x, y, z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2]^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{[(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2]^{1/2}} \right). \end{aligned} \quad (2.558)$$

Por otro lado, el campo eléctrico se obtiene como menos el gradiente del potencial, así

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{x-a}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{x+a}{[(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2]^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x-a}{[(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{x+a}{[(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2]^{3/2}} \right), \end{aligned} \quad (2.559)$$

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{y-b}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{y+b}{[(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2]^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{y+b}{[(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{y-b}{[(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2]^{3/2}} \right), \end{aligned} \quad (2.560)$$

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{qz}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{1}{[(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2]^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{[(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2]^{3/2}} \right). \end{aligned} \quad (2.561)$$

■

**Ejemplo 2.37** Dos planos conductores puestos a tierra se intersectan a  $60^\circ$  y una carga puntal  $q$  está ubicada entre ellos. Determine las posiciones de las cargas imagen que dan el potencial eléctrico entre los planos.

*Solución.*

Si la carga real se encuentra sobre la bisectriz a una distancia  $R$  de la intersección de los planos (fig. 2.39), entonces las posiciones y signos de las cargas imagen son

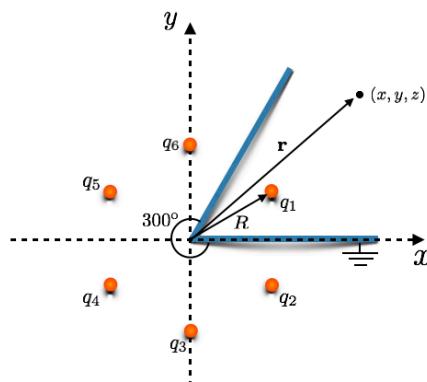


Figura 2.39: Posiciones de las cargas imagen.

$$q_{1\ real} = q \quad ; \quad \mathbf{r}_1 = (R \cos 30^\circ, R \sin 30^\circ, 0) = \left( \frac{R\sqrt{3}}{2}, \frac{R}{2}, 0 \right), \quad (2.562)$$

$$q_2 = -q \quad ; \quad \mathbf{r}_2 = (R \cos 30^\circ, -R \sin 30^\circ, 0) = \left( \frac{R\sqrt{3}}{2}, -\frac{R}{2}, 0 \right), \quad (2.563)$$

$$q_3 = q \quad ; \quad \mathbf{r}_3 = (R \cos 90^\circ, -R \sin 90^\circ, 0) = (0, -R, 0), \quad (2.564)$$

$$q_4 = -q \quad ; \quad \mathbf{r}_4 = (-R \cos 30^\circ, -R \sin 30^\circ, 0) = \left( -\frac{R\sqrt{3}}{2}, -\frac{R}{2}, 0 \right), \quad (2.565)$$

$$q_5 = q \quad ; \quad \mathbf{r}_5 = (-R \cos 30^\circ, R \sin 30^\circ, 0) = \left( -\frac{R\sqrt{3}}{2}, \frac{R}{2}, 0 \right), \quad (2.566)$$

$$q_6 = -q \quad ; \quad \mathbf{r}_6 = (R \cos 90^\circ, R \sin 90^\circ, 0) = (0, R, 0). \quad (2.567)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6, \\ \therefore \phi(x, y, z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\left[ \left( x - \frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left( y - \frac{R}{2} \right)^2 + z^2 \right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[ \left( x - \frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left( y + \frac{R}{2} \right)^2 + z^2 \right]^{1/2}} \right. \\ &\quad + \frac{1}{[x^2 + (y+R)^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{1}{\left[ \left( x + \frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left( y + \frac{R}{2} \right)^2 + z^2 \right]^{1/2}} \\ &\quad \left. + \frac{1}{\left[ \left( x + \frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left( y - \frac{R}{2} \right)^2 + z^2 \right]^{1/2}} - \frac{1}{[x^2 + (y-R)^2 + z^2]^{1/2}} \right). \end{aligned} \quad (2.568)$$

■

**Ejemplo 2.38** Una carga puntual  $q$  se encuentra entre dos planos paralelos, puestos a tierra y separados entre sí una distancia  $d$ . Encuentre las posiciones del número infinito de cargas imagen (figura 2.40). Exprese la fuerza sobre la carga  $q$  por una serie infinita.

*Solución.*

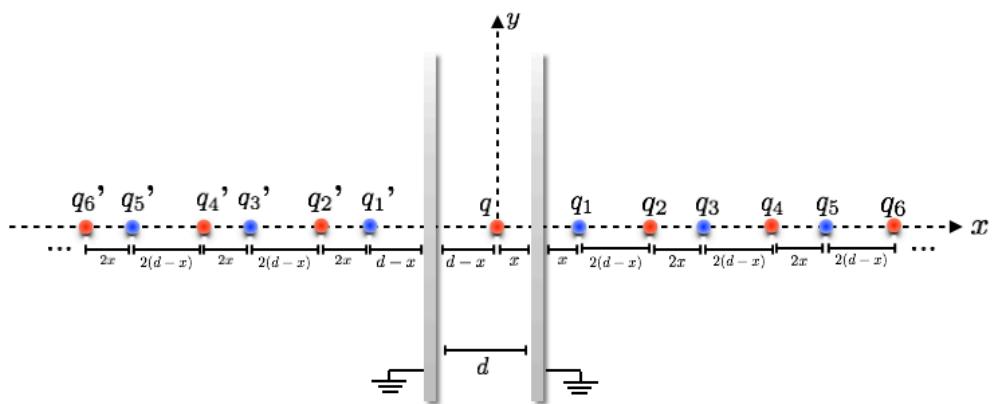


Figura 2.40: Posiciones del número infinito de cargas imagen.

Las posiciones de las cargas imagen de la derecha son

$$\begin{aligned} q_1 &= -q & ; & \mathbf{r}_1 = 2x\mathbf{i}, \\ q_2 &= q & ; & \mathbf{r}_2 = 2x\mathbf{i} + 2(d-x)\mathbf{i} = 2d\mathbf{i}, \\ q_3 &= -q & ; & \mathbf{r}_3 = 4x\mathbf{i} + 2(d-x)\mathbf{i} = 2(d+x)\mathbf{i}, \\ q_4 &= q & ; & \mathbf{r}_4 = 4x\mathbf{i} + 4(d-x)\mathbf{i} = 4d\mathbf{i}, \\ q_5 &= -q & ; & \mathbf{r}_5 = 6x\mathbf{i} + 4(d-x)\mathbf{i} = 2(2d+x)\mathbf{i}, \\ q_6 &= q & ; & \mathbf{r}_6 = 6x\mathbf{i} + 6(d-x)\mathbf{i} = 6d\mathbf{i}, \\ q_7 &= -q & ; & \mathbf{r}_7 = 8x\mathbf{i} + 6(d-x)\mathbf{i} = 2(3d+x)\mathbf{i}, \end{aligned}$$

Podemos observar que

$$\Rightarrow q_{2i-1} = -q \quad ; \quad \mathbf{r}_{2i-1} = 2[(i-1)d+x]\mathbf{i}, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots \quad (2.569)$$

$$\Rightarrow q_{2i} = q \quad ; \quad \mathbf{r}_{2i} = 2id\mathbf{i}, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots \quad (2.570)$$

Ahora, las posiciones de las cargas imagen de la izquierda son

$$\begin{aligned} q'_1 &= -q & ; & \mathbf{r}'_1 = -2(d-x)\mathbf{i}, \\ q'_2 &= q & ; & \mathbf{r}'_2 = -2(d-x)\mathbf{i} - 2x\mathbf{i} = -2d\mathbf{i}, \\ q'_3 &= -q & ; & \mathbf{r}'_3 = -4(d-x)\mathbf{i} - 2x\mathbf{i} = -2(2d-x)\mathbf{i}, \\ q'_4 &= q & ; & \mathbf{r}'_4 = -4(d-x)\mathbf{i} - 4x\mathbf{i} = -4d\mathbf{i}, \\ q'_5 &= -q & ; & \mathbf{r}'_5 = -6(d-x)\mathbf{i} - 4x\mathbf{i} = -2(3d-x)\mathbf{i}, \\ q'_6 &= q & ; & \mathbf{r}'_6 = -6(d-x)\mathbf{i} - 6x\mathbf{i} = -6d\mathbf{i}, \\ q'_7 &= -q & ; & \mathbf{r}'_7 = -8(d-x)\mathbf{i} - 6x\mathbf{i} = -2(4d-x)\mathbf{i}, \end{aligned}$$

Notemos que

$$\Rightarrow q'_{2i-1} = -q \quad ; \quad \mathbf{r}'_{2i-1} = -2(id-x)\mathbf{i}, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots \quad (2.571)$$

$$\Rightarrow q'_{2i} = q \quad ; \quad \mathbf{r}'_{2i} = -2id\mathbf{i}, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots \quad (2.572)$$

Entonces la fuerza total sobre  $q$  es

$$\begin{aligned} F &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \left( -\frac{q}{r_{2i-1}^2} + \frac{q}{r_{2i}^2} - \frac{q}{r'^{2}_{2i-1}} + \frac{q}{r'^{2}_{2i}} \right), \\ &= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{4[(i-1)d+x]^2} - \frac{1}{(2id)^2} + \frac{1}{[-2(id-x)]^2} - \frac{1}{(-2id)^2} \right\}, \\ &= -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(i-1+u)^2} + \frac{1}{(i-u)^2} - \frac{2}{i^2} \right], \quad \text{con } u = \frac{x}{d} \\ \therefore F &= -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \left\{ \frac{1}{u^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(i+u)^2} + \frac{1}{(i-u)^2} - \frac{2}{i^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.573)$$

■

■ **Ejemplo 2.39** Una carga puntual  $q$  se coloca dentro y a una distancia  $d$  del centro de una cáscara conductora esférica. El radio interior de la cáscara es  $a$ . Demuestre que este problema puede resolverse con el método de imágenes y encuentre la densidad de carga  $\sigma$  inducida sobre la superficie interior de la cáscara. (El potencial de la cáscara esférica no puede especificarse completamente en función de  $q$  y su imagen, porque las cargas exteriores fijas pueden también

contribuir. Sin embargo, estas cargas exteriores sólo añadirán un término constante al potencial). Halle la carga total inducida sobre la superficie interior de la cáscara, por integración de  $\sigma$  sobre la superficie.

*Solución.*

Como la esfera es conductora, entonces el potencial dentro de ella es

$$\phi(r, \theta) = \phi_0. \quad (2.574)$$

Cuando se coloca la carga  $q$  entonces el potencial dentro es,

$$\phi(r, \theta) = \phi_0 + \Phi(r, \theta), \quad (2.575)$$

donde  $\Phi(r, \theta)$  es el potencial producido por la carga puntual y su imagen. Si la posición de la carga imagen  $q'$  es  $\mathbf{r}_2 = d' \hat{\mathbf{r}}$ ,  $d' > a$  (figura 2.41), entonces

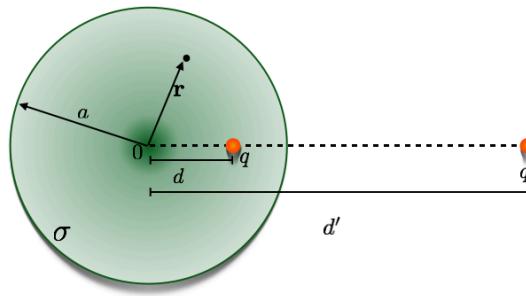


Figura 2.41: Carga puntual  $q$  dentro de una esfera conductora y su carga imagen  $q'$ .

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}, \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{(r^2 + d'^2 - 2rd' \cos \theta)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (2.576)$$

Para determinar  $q'$  y  $d'$  se tiene la condición de frontera siguiente

$$\begin{aligned} \Phi(a, \theta) &= 0, \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{1/2}} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{(a^2 + d'^2 - 2ad' \cos \theta)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (2.577)$$

Entonces

$$\frac{q^2}{a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta} = \frac{q'^2}{a^2 + d'^2 - 2ad' \cos \theta}. \quad (2.578)$$

Dado que (2.578) es verdadera para cualquier  $\theta$  se pueden tomar los valores de 0 y  $\pi$ , resultando en las ecuaciones respectivas

$$\frac{q}{|a-d|} = -\frac{q'}{|a-d'|}, \quad (2.579)$$

$$\frac{q}{a+d} = -\frac{q'}{a+d'}. \quad (2.580)$$

Dividiendo (2.579) entre (2.580)

$$\begin{aligned}\frac{a+d}{a-d} &= \frac{a+d'}{d'-a}, \\ \Rightarrow d' &= \frac{a^2}{d}.\end{aligned}\quad (2.581)$$

Sustituyendo  $d'$  en (2.580)

$$\begin{aligned}\frac{q}{a+d} &= -\frac{q'}{a+\frac{a^2}{d}}, \\ \Rightarrow q' &= -q\frac{a}{d}.\end{aligned}\quad (2.582)$$

De modo que el potencial total es

$$\begin{aligned}\phi(r, \theta) &= \phi_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta)^{1/2}} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa}{d[r^2 + (\frac{a^2}{d})^2 - 2(\frac{ra^2}{d})\cos\theta]^{1/2}},\end{aligned}\quad (2.583)$$

así el campo eléctrico es  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{r - d\cos\theta}{(r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta)^{3/2}} - \frac{a[r - (\frac{a^2}{d})\cos\theta]}{d[r^2 + (\frac{a^2}{d})^2 - 2(\frac{ra^2}{d})\cos\theta]^{3/2}} \right], \quad (2.584)$$

$$E_\theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{d\sin\theta}{(r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta)^{3/2}} - \frac{a(\frac{a^2}{d})\sin\theta}{d[r^2 + (\frac{a^2}{d})^2 - 2(\frac{ra^2}{d})\cos\theta]^{3/2}} \right]. \quad (2.585)$$

Notemos que en la superficie de la esfera, es decir, en  $r = a$

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{a^2 - d^2}{(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta)^{3/2}}. \quad (2.586)$$

$$E_\theta = 0. \quad (2.587)$$

Como la componente normal a la superficie no se anula, debe existir una densidad superficial de carga dada por

$$\begin{aligned}E_r(a, \theta) &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma = \epsilon_0 E_r(a, \theta). \\ \therefore \sigma &= \frac{q}{4\pi a} \frac{a^2 - d^2}{(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta)^{3/2}}.\end{aligned}\quad (2.588)$$

Para obtener la carga inducida se tiene que

$$\begin{aligned}dq_{ind} &= \sigma da, \\ \Rightarrow q_{ind} &= \frac{q(a^2 - d^2)}{4\pi a} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \sin\theta}{(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta)^{3/2}} d\phi d\theta, \\ &= \frac{q(a^2 - d^2)}{2} \int_0^\pi \frac{a \sin\theta}{(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta)^{3/2}} d\theta.\end{aligned}\quad (2.589)$$

Haciendo el cambio de variable

$$u = a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta \Rightarrow du = 2ad\sin\theta d\theta. \quad (2.590)$$

Entonces

$$\begin{aligned} q_{ind} &= \frac{q(a^2 - d^2)}{4d} \int_{(a-d)^2}^{(a+d)^2} \frac{1}{u^{3/2}} du, \\ &= \frac{q(a^2 - d^2)}{2d} \left( \frac{1}{|a-d|} - \frac{1}{a+d} \right), \\ \therefore q_{ind} &= q. \end{aligned} \quad (2.591)$$

■

**Ejemplo 2.40** Un dipolo  $\mathbf{p}$  se hubica a una distancia  $d$  de un plano conductor infinito, en dirección opuesta a la normal. El plano está puesto a tierra. Calcúlese la fuerza ejercida sobre el plano por el dipolo.

*Solución.*

Supongamos que el plano conductor coincide con el plano  $xy$ , de modo que las posiciones de las cargas reales son

$$q : \mathbf{r}_1 = d\mathbf{k}, \quad (2.592)$$

$$-q : \mathbf{r}_2 = (d+l)\mathbf{k}, \quad (2.593)$$

así, las posiciones de las cargas imagen (fig. 2.42) serán

$$-q : \mathbf{r}_3 = -d\mathbf{k}, \quad (2.594)$$

$$q : \mathbf{r}_4 = -(d+l)\mathbf{k}. \quad (2.595)$$

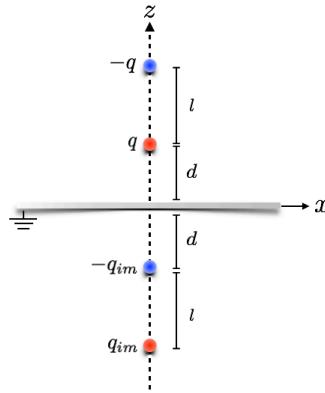


Figura 2.42: Dipolo normal a plano conductor infinito.

La fuerza que ejerce el dipolo sobre el plano conductor es la misma que la fuerza ejercida sobre las cargas imagen, así que el problema se reduce a determinar la suma vectorial de fuerza neta que generan las cargas  $q$  y  $-q$  sobre las cargas  $-q_{im}$  y  $q_{im}$ .

- La fuerza ejercida sobre la carga  $-q_{im}$ .

$$\mathbf{F}_{-q_{im}} = \frac{-q_{im}}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{(2d)^2} + \frac{-q}{(2d+l)^2} \right] \mathbf{k}. \quad (2.596)$$

- La fuerza ejercida sobre la carga  $q_{im}$ .

$$\mathbf{F}_{q_{im}} = \frac{q_{im}}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{(2d+l)^2} + \frac{-q}{(2d+2l)^2} \right] \mathbf{k}. \quad (2.597)$$

Así que la fuerza total es

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{4d^2} + \frac{2}{(2d+l)^2} - \frac{1}{4(d+l)^2} \right] \mathbf{k}, \\ &= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \left[ -1 + \frac{2}{\left(1 + \frac{l}{2d}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{d}\right)^2} \right] \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.598)$$

Haciendo un desarrollo de la forma

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \dots$$

Tomando los primeros tres términos del desarrollo obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \left\{ -1 + 2 \left[ 1 - 2 \left( \frac{l}{2d} \right) + 3 \left( \frac{l}{2d} \right)^2 \right] - \left[ 1 - 2 \left( \frac{l}{d} \right) + 3 \left( \frac{l}{d} \right)^2 \right] \right\} \mathbf{k}, \\ &= -\frac{3q^2 l^2}{32\pi\epsilon_0 d^4} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.599)$$

Por otro lado, usando la ec. (2.13) finalmente obtenemos

$$\therefore \mathbf{F} = -\frac{3p^2}{32\pi\epsilon_0 d^4} \mathbf{k}. \quad (2.600)$$

■

**Ejemplo 2.41** Consideremos una línea de carga infinitamente larga, con densidad lineal de carga  $\lambda$  que se encuentra orientada a una distancia  $d$  paralela a un plano conductor infinito conectado a tierra. Determine el potencial eléctrico en la región de vacío.

*Solución.*

Tomemos el plano conductor que coincide con el plano  $yz$  y la línea de carga paralela al eje  $z$ . La carga imagen apropiada a este caso será otra línea de carga infinita con densidad lineal de carga  $-\lambda$ , situada a una distancia  $-d$  del plano conductor (figura 2.43).

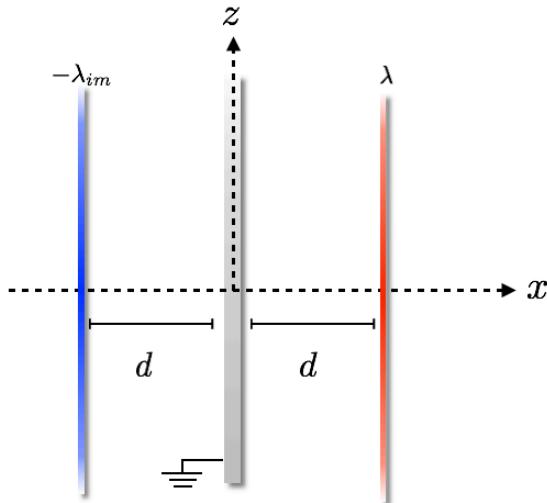


Figura 2.43: Línea imagen de carga infinita con densidad  $-\lambda$ .

Del ejemplo (1.8) se tiene que el campo eléctrico producido por una línea de carga es

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}.$$

Por otro lado sabemos que

$$\phi = - \int_{ref}^r \mathbf{E}(r') \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.601)$$

De modo que el potencial eléctrico producido por las líneas de carga en un punto  $\mathbf{r}$  es

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_1 + \phi_2, \\ &= \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2, \\ \therefore \phi &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{r_1}{r_2} \right). \end{aligned} \quad (2.602)$$

Si se desea encontrar una superficie equipotencial se tiene que la ec. (2.602) debe ser igual a una constante

$$\begin{aligned} \phi &= c, \\ \Rightarrow -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{r_1}{r_2} \right) &= c. \end{aligned} \quad (2.603)$$

Entonces

$$\frac{r_1}{r_2} = M \text{ con } M = \exp \left[ -\frac{2c\pi\epsilon_0}{\lambda} \right]. \quad (2.604)$$

La forma general de la superficie puede hallarse expresando  $r_1$  y  $r_2$  en coordenadas rectangulares. Si tomamos el origen del sistema en la linea de carga positiva, entonces

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (2.605)$$

$$r_2 = \sqrt{(x+2d)^2 + y^2}, \quad (2.606)$$

así de la ec. (2.604)

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x+2d)^2 + y^2}} = M, \quad (2.607)$$

Después de un poco de desarrollo algebraico obtenemos

$$\left( \frac{2Md}{1-M^2} \right)^2 = \left( x - \frac{2M^2d}{1-M^2} \right)^2 + y^2. \quad (2.608)$$

Podemos observar que esta expresión es la ecuación de un círculo (figura 2.44) con radio

$$a = \frac{2Md}{1-M^2}, \quad (2.609)$$

y centro en

$$x = \frac{2M^2d}{1-M^2}, \quad y = 0. \quad (2.610)$$

■

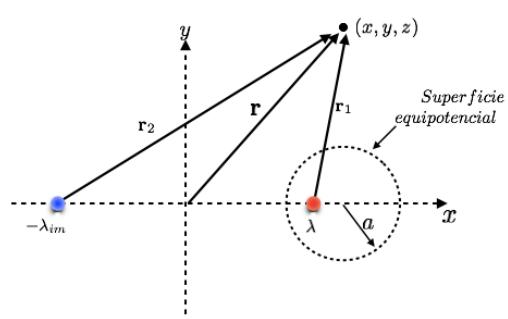


Figura 2.44: Una superficie equipotencial en forma de círculo generada por la línea infinita de carga.

Corriente eléctrica
Fuerza magnética. Campo magnético
Ecuación de Ohm
Ley de Biot y Savart
Ley de Ampère
Flujo magnético.
Potencial vectorial magnético
Ecuación de Poisson
Desarrollo multipolar magnético



## 3 — Campo magnetostático

### 3.1 Corriente eléctrica

Recordamos que un conductor es un material en el que los portadores de carga son libres de moverse bajo campos estacionarios. La carga en movimiento constituye una *corriente* y el proceso por el cual la carga se transporta se llama *conducción*. Se define la corriente,  $I$ , como la velocidad a la cual se transporta la carga a través de una superficie en un sistema de conductor. Si el flujo no es uniforme en el tiempo es posible definir una *corriente eléctrica instantánea* como

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (3.1)$$

La unidad de corriente en el sistema *mks* es el *ampere* (A)

$$[I] = \frac{\text{coulomb}}{\text{segundo}} = \text{ampere}. \quad (3.2)$$

La corriente eléctrica es una cantidad escalar pero resulta conveniente indicar la dirección en la que se mueven las cargas eléctricas, entonces se habla del *sentido de la corriente* como la dirección del flujo de cargas positivas (o equivalentemente, el sentido opuesto al que se mueven los portadores negativos). En general, una corriente eléctrica se origina como respuesta de las cargas eléctricas por la presencia de campo eléctrico.

Si se piensa que la corriente viaja a lo largo de una curva geométrica, como se ilustra en la figura 3.1, la flecha indica la dirección en la que se mueven los portadores de carga, esta situación podría representar el flujo de carga a través de un alambre delgado. Durante el tiempo  $dt$ , cada portador de carga recorre una distancia  $dl$  y recordando que la densidad lineal de carga se define como

$$\lambda = \frac{dq}{dl},$$

entonces la corriente en una línea de carga es

$$I = \lambda \frac{dl}{dt}.$$

Al considerar que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{l}}{dt},$$

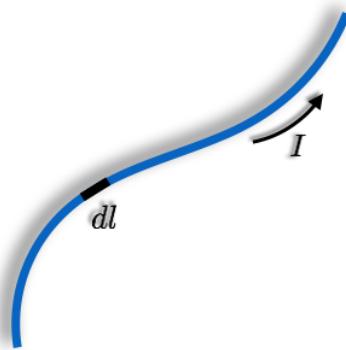


Figura 3.1: Corriente filamental.

es la velocidad de las cargas, entonces

$$I = \lambda |\mathbf{v}|. \quad (3.3)$$

Si el movimiento de las cargas está limitado a una superficie, la densidad superficial de carga está dada por

$$\sigma = \frac{dq}{da}, \quad (3.4)$$

entonces, en un diferencial de área se tiene un diferencial de corriente determinado por la expresión

$$dI = \sigma \frac{da}{dt}. \quad (3.5)$$

En el caso especial en el cual el diferencial de área es  $dxdy$  y las cargas se mueve en dirección de  $dx\mathbf{i}$ , se tiene

$$dI = \sigma \frac{dxdy}{dt} = \sigma v_x dy, \text{ con } v_x = \frac{dx}{dt},$$

o bien, en el caso en el cual las cargas se mueven en la dirección  $dy\mathbf{j}$ , se tiene

$$dI = \sigma \frac{dxdy}{dt} = \sigma v_y dx, \text{ con } v_y = \frac{dy}{dt}.$$

**Observación 3.1** De estas expresiones se observa que la velocidad de las cargas es perpendicular al diferencial de línea.

En general, sea  $\mathbf{v}$  la velocidad de las partículas cargadas y  $\hat{\mathbf{n}}$  el vector unitario perpendicular al elemento de línea, entonces

$$I = \int \sigma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \text{ con } d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{n}} dl. \quad (3.6)$$

Se define la *densidad superficial de corriente*,  $\mathbf{K}$ , como

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}, \quad (3.7)$$

su dirección es la misma que la del flujo de carga y su magnitud se define como la corriente que pasa por unidad de longitud a través de una línea colocada perpendicularmente al flujo. En la figura 3.2 se puede ver esquemáticamente esta definición. Así se tiene

$$\therefore I = \int \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.8)$$

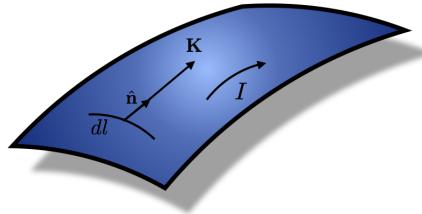
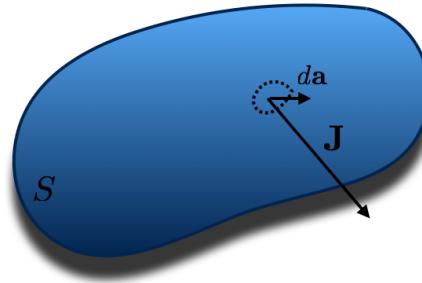


Figura 3.2: Densidad superficial de corriente.

Si ahora se desea estudiar el caso de una corriente de carga en un volumen, es necesario colocar una superficie perpendicular al flujo, como se ilustra en la figura 3.3, además es necesario considerar la densidad volumétrica de carga,  $\rho = dq/dV$ . Así que en un diferencial de volumen se tiene un diferencial de corriente eléctrica

$$dI = \rho \frac{dV}{dt}.$$

Figura 3.3: Flujo a través de una superficie  $S$ .

En el caso especial donde el diferencial de volumen se forma mediante un diferencial de área,  $da$ , transversal al desplazamiento de las cargas  $dl$

$$dI = \rho \frac{dl da}{dt} = \rho v da.$$

En general

$$I = \int \rho v \cdot da. \quad (3.9)$$

Se define la *densidad volumétrica de corriente eléctrica*

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}, \quad (3.10)$$

la unidad de medida en el sistema *mks* es

$$[\mathbf{J}] = \frac{C}{m^3} \frac{m}{s} = \frac{A}{m^2}, \quad (3.11)$$

su dirección es la misma que la del flujo de carga y su magnitud está dada por la corriente por unidad de área a través de una superficie. Por lo tanto

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot da. \quad (3.12)$$

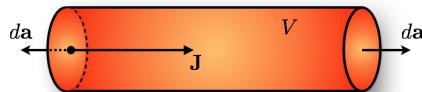


Figura 3.4: Corriente eléctrica entrando en una superficie cerrada.

Supongamos una superficie \$S\$ cerrada que limita un volumen \$V\$ (figura 3.4). La corriente eléctrica que abandona el volumen \$V\$ está dada por

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da, \quad (3.13)$$

o bien, usando el teorema de Gauss

$$I = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV. \quad (3.14)$$

Por otra parte, la carga que abandona el volumen \$V\$ está determinada por la expresión

$$\begin{aligned} I &= -\frac{dQ}{dt}, \\ &= -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV, \\ &= -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ahora se igualan las ecuaciones (3.14) y (3.15)

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV = \int_V \left( -\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV, \quad (3.16)$$

al considerar que se trata de un volumen arbitrario se concluye

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (3.17)$$

a este resultado se le conoce como *ecuación de continuidad*.

■ **Ejemplo 3.1** En un momento dado, cierto sistema tiene una densidad de corriente dada por

$$\mathbf{J} = C(x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}), \quad (3.18)$$

siendo \$C\$ una constante positiva.

- a) ¿Cuáles son las unidades de \$C\$?
- b) ¿Cuál es la razón de cambio de la densidad de carga en el punto \$(2, -1, 4)\$?
- c) Considere la carga total \$Q\$ contenida en una esfera de radio \$a\$ con centro en el origen. ¿Con qué rapidez cambia \$Q\$ en ese instante? ¿Aumenta o disminuye \$Q\$?

*Solución:*

- a) La densidad de corriente tiene unidades de \$A/m^2\$, y tanto \$x, y\$ y \$z\$ tienen unidades de longitud, \$m\$, entonces, de (3.18) se deduce que las unidades de \$C\$ son \$A/m^5\$.
- b) De la ec. de continuidad (3.17) que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0, \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \cdot \mathbf{J}, \\ &= -3A(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Entonces la razón de cambio de la densidad de carga en el punto  $(2, -1, 4)$  es

$$\therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} = -63C. \quad (3.20)$$

c) La carga total de una esfera se puede obtener como

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (3.21)$$

Entonces, la rapidez con que cambia  $Q$  es

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r})}{\partial t} dV. \quad (3.22)$$

Sustituyendo la forma de (3.19)

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} &= -3C \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dV, \\ &= -3C \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr, \\ &= -12C\pi \int_0^a r^4 dr, \\ \therefore \frac{\partial Q}{\partial t} &= -\frac{12C\pi a^5}{5}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

es decreciente en el caso en que  $C$  es positivo. ■

### 3.2 Fuerza magnética. Campo magnético

Recordamos que el problema básico de la electrostática consiste en calcular la fuerza eléctrica que ejerce una carga eléctrica  $q_2$  sobre una carga de prueba  $q_1$ , separadas por una distancia  $r_{12}$  y que además están en reposo. Esta fuerza está dada por la ley de Coulomb, ec. (1.1),

$$\mathbf{F}_{e_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}.$$

Si ahora consideramos que las cargas  $q_1$  y  $q_2$  se mueven con velocidades constantes  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  respectivamente, se producirá una *fuerza magnética* ejercida sobre  $q_1$  por  $q_2$  dada por la expresión

$$\mathbf{F}_{m_{12}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_{12}), \quad (3.24)$$

donde  $\mu_0$  es la *permittividad del vacío* cuya magnitud es de

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{N s^2}{C^2}. \quad (3.25)$$

Como ocurre con la ley de Coulomb, la expresión (3.24), es un resultado experimental.

Recordemos que en el caso de la fuerza eléctrica se tomó una carga de prueba para obtener el campo eléctrico. Para este caso, no solamente es conveniente valernos de una carga de prueba, sino que además se debe tomar en cuenta su velocidad  $\mathbf{v}$ .

Se define el *campo magnético* generado por la carga  $q_2$  en punto  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1)$ , como

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_2}{r_{12}^2} (\mathbf{v}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_{12}). \quad (3.26)$$

las unidades del campo magnético son

$$[\mathbf{B}] = \frac{Ns}{Cm}, \quad (3.27)$$

las cuales son conocidas como *teslas*<sup>1</sup> y se denotan mediante  $T$ . La ec. (3.24) se puede escribir en términos de función del campo magnético  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{F}_{m_{12}} = q_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1). \quad (3.28)$$

En caso de existir varias cargas en movimiento, se cumple el principio de superposición así que las fuerzas y campos magnéticos deben sumarse vectorialmente.

**Observación 3.2** A diferencia de la fuerza eléctrica, la fuerza magnética no actúa en la dirección que une a las partículas, notemos además de la ec. (3.28) que la fuerza magnética es siempre perpendicular a  $\mathbf{v}$ . Veamos el trabajo,  $W$ , que realiza la fuerza magnética en la dirección del movimiento de una carga:

$$dW_m = \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{r} = q \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (3.29)$$

esto quiere decir, que una fuerza magnética no realiza trabajo sobre una partícula cargada.

En una región donde hay un campo eléctrico y un campo magnético, la fuerza total sobre una carga en movimiento será

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.30)$$

la cual es conocida como *fuerza de Lorentz*. Se pueden hacer algunas observaciones al comparar las fuerzas eléctrica y magnética.

**Observación 3.3** Si multiplicamos el numerador y denominador de la ec. (3.24) por  $\epsilon_0$

$$\mathbf{F}_{m_{12}} = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{v}_1 \times \left( \mathbf{v}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_{12} \right).$$

Se observa que las unidades de  $\mu_0 \epsilon_0$  son

$$[\mu_0 \epsilon_0] = \frac{Ns^2}{C^2} \frac{C^2}{Nm^2} = \frac{s^2}{m^2} = \frac{1}{[v^2]}.$$

Usando los valores de  $\mu_0$  y de  $\epsilon_0$  se encuentra la relación muy interesante con la velocidad de la luz,  $c$ ,

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (3.31)$$

---

<sup>1</sup>En honor a Nikola Tesla

**Observación 3.4** Si usamos  $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ , de (3.24) se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{m_{12}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \left( \frac{\mathbf{v}_2}{c} \times \hat{\mathbf{r}}_{12} \right), \\ &= |\mathbf{F}_{e_{12}}| \frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \left( \frac{\mathbf{v}_2}{c} \times \hat{\mathbf{r}}_{12} \right).\end{aligned}\quad (3.32)$$

Al considerar el caso  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ll c$ , entonces  $|\mathbf{F}_{m_{12}}| \ll |\mathbf{F}_{e_{12}}|$ .

**Observación 3.5** Al multiplicar el numerador y denominador de la ec. (3.26) por  $\epsilon_0$ , se obtiene una relación entre los campos producidos por el movimiento uniforme de la carga  $q_2$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^2} \left( \mathbf{v}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_{12} \right), \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{q_2}{r_{12}^2} \left( \mathbf{v}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_{12} \right), \\ &= \frac{1}{c^2} \left( \mathbf{v}_2 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \right), \\ \Rightarrow \mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1) &= \frac{\mathbf{v}_2}{c} \times \frac{\mathbf{E}_2(\mathbf{r}_1)}{c}.\end{aligned}\quad (3.33)$$

Si  $\mathbf{v}_2 \ll c$ , entonces  $|\mathbf{B}_m| \ll |\mathbf{E}_e|$ .

Hasta el momento se ha considerado la fuerza magnética entre cargas puntuales pero se puede extender a distribuciones continuas de carga. Considerese un elemento de un conductor portador de corriente,  $d\mathbf{l}$ . Considerando la fuerza magnética

$$d\mathbf{F} = dq \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.34)$$

Usando que la carga en un elemento de línea es determinada por la densidad lineal de carga

$$\lambda = \frac{dq}{dl},$$

entonces

$$d\mathbf{F} = \lambda dl \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.35)$$

Como  $d\mathbf{l}$  es paralelo a la velocidad de los portadores,  $\mathbf{v}$ , una forma alternativa de expresar (3.35) es

$$d\mathbf{F} = \lambda |\mathbf{v}| dl \times \mathbf{B}. \quad (3.36)$$

Por otro lado de la ec. (3.3)

$$I = \lambda |\mathbf{v}|,$$

así que

$$d\mathbf{F} = Idl \times \mathbf{B}, \quad (3.37)$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = \int_C Idl \times \mathbf{B}, \quad (3.38)$$

donde  $C$  es el circuito que contiene la corriente  $I$ .

Si se desea determinar la fuerza magnética sobre una distribución superficial de corriente, se debe considerar la densidad superficial de carga

$$dq = \sigma da,$$

entonces el diferencial de fuerza será

$$d\mathbf{F} = \sigma da \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.39)$$

Recordando que la densidad superficial de corriente está dada como

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v},$$

entonces

$$d\mathbf{F} = \mathbf{K} \times \mathbf{B} da, \quad (3.40)$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = \int_S \mathbf{K} \times \mathbf{B} da. \quad (3.41)$$

De manera análoga, para el movimiento de las cargas en una región de volumen,  $V$ , con una densidad volumétrica de carga,  $\rho$ , se encuentra

$$d\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV, \quad (3.42)$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV. \quad (3.43)$$

**Ejemplo 3.2** Una partícula cargada de masa  $m$  y carga  $q$  se mueve en un campo magnético uniforme  $B_0 \mathbf{k}$ . Demuestre que para una carga puntual con velocidad inicial  $\mathbf{v}_0$ , el movimiento se describe como una hélice, figura 3.5, cuya sección transversal es una circunferencia de radio  $R = m v_\perp / q B_0$ . Aquí  $v_\perp$  es la magnitud de la velocidad de la partícula que es perpendicular a  $B_0 \mathbf{k}$ .

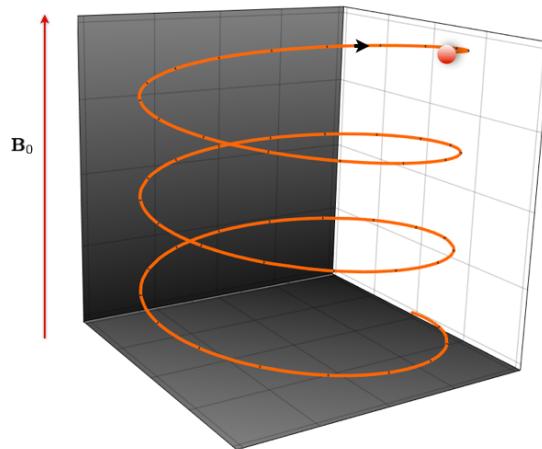


Figura 3.5: Movimiento de una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  en presencia de un campo  $B_0 \mathbf{k}$ .

*Solución.*

Debido al movimiento de la partícula cargada, ésta detecta una fuerza magnética (3.28)

$$\mathbf{F}_m = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Si suponemos que el campo de inducción magnética está orientado en dirección del eje  $z$ , entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_m &= q(\mathbf{v}_x\mathbf{i} + \mathbf{v}_y\mathbf{j} + \mathbf{v}_z\mathbf{k}) \times \mathbf{B}_0\mathbf{k}, \\ m\mathbf{a} &= q(-\mathbf{v}_x\mathbf{B}_0\mathbf{j} + \mathbf{v}_y\mathbf{B}_0\mathbf{i}).\end{aligned}\quad (3.44)$$

Separando las componentes se obtienen las ecuaciones

$$m \frac{dv_x}{dt} = q v_y B_0, \quad (3.45)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -q v_x B_0, \quad (3.46)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (3.47)$$

De la ec. (3.45) despejamos  $v_y$

$$v_y = \left( \frac{m}{qB_0} \right) \frac{dv_x}{dt}, \quad (3.48)$$

sustituyendo en (3.46)

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -v_x \left( \frac{qB_0}{m} \right)^2. \quad (3.49)$$

Para simplificar, se define

$$b = \frac{qB_0}{m}. \quad (3.50)$$

Así

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -v_x b^2, \quad (3.51)$$

$$\Rightarrow v_x(t) = \frac{dx}{dt} = A \cos(bt) + B \sin(bt), \text{ con } A \text{ y } B \text{ constantes,}$$

$$\therefore x(t) = \frac{A}{b} \sin(bt) - \frac{B}{b} \cos(bt) + C, \text{ con } C \text{ constante.} \quad (3.52)$$

Ahora sustituimos (3.51) en (3.48), de lo cual se obtiene

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = -A \sin(bt) + B \cos(bt), \quad (3.53)$$

$$\therefore y(t) = \frac{B}{b} \sin(bt) + \frac{A}{b} \cos(bt) + D, \text{ con } D \text{ constante.} \quad (3.54)$$

Para la ec. (3.47) la solución es de la forma

$$z(t) = Et + F, \text{ con } E \text{ y } F \text{ constantes.} \quad (3.55)$$

Para las ecuaciones (3.52), (3.54) y (3.55) se considera el caso especial  $C = D = F = 0$ , con lo cual se describe una trayectoria helicoidal. Podemos observar que la magnitud de  $\mathbf{v}_\perp$  es

$$v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{A^2 + B^2}. \quad (3.56)$$

Para encontrar la trayectoria transversal de la hélice se calcula

$$x^2 + y^2 = \left( \frac{A}{b} \right)^2 + \left( \frac{B}{b} \right)^2 = \frac{A^2 + B^2}{b^2}. \quad (3.57)$$

Al sustituir las ecs. (3.50) y (3.56) en (3.57) se obtiene

$$x^2 + y^2 = \left( \frac{mv_{\perp}}{qB_0} \right)^2, \quad (3.58)$$

esta expresión representa una circunferencia en el plano  $XY$  con centro en el origen del sistema de coordenadas y radio

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB_0}. \quad (3.59)$$

■

**Ejemplo 3.3** Consideremos un campo eléctrico uniforme en la dirección del eje  $z$ ,  $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{k}$ , un campo magnético uniforme en dirección del eje  $x$ ,  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{i}$ . En el origen del sistema coordenado se coloca una partícula con masa  $m$ , carga  $q > 0$  y en reposo. Dado que la partícula no tiene velocidad inicial no siente los efectos del campo  $\mathbf{B}$  pero si el efecto del campo  $\mathbf{E}$  por lo cual la partícula experimenta una fuerza eléctrica,  $\mathbf{F}_e$ , en dirección  $\mathbf{k}$ . Justo en el momento en que la partícula inicia el movimiento debido a  $\mathbf{F}_e$ , adquiere una velocidad,  $\mathbf{v} = v \mathbf{k}$ , por lo cual la partícula experimenta un fuerza magnética,  $\mathbf{F}_m$ . Determinar la trayectoria de la partícula.

*Solución.*

Una vez que la partícula inicia el movimiento, ésta experimenta una fuerza de Lorentz y al aplicar la segunda ley de Newton se tiene

$$m\mathbf{a} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.60)$$

con

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{y}} \mathbf{j} + \dot{\mathbf{z}} \mathbf{k}, \quad (3.61)$$

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{y}} \mathbf{j} + \ddot{\mathbf{z}} \mathbf{k}, \quad (3.62)$$

el punto sobre cada variable indica el orden de la derivada temporal. Entonces

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (\dot{\mathbf{y}} \mathbf{j} + \dot{\mathbf{z}} \mathbf{k}) \times (B_0 \mathbf{i}), \quad (3.63)$$

$$= \dot{\mathbf{y}} B_0 (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + \dot{\mathbf{z}} B_0 (\mathbf{k} \times \mathbf{i}), \quad (3.64)$$

$$= -\dot{\mathbf{y}} B_0 \mathbf{k} + \dot{\mathbf{z}} B_0 \mathbf{j}. \quad (3.65)$$

Así que la ec. (3.60) se escribe de la forma

$$\ddot{\mathbf{y}} \mathbf{j} + \ddot{\mathbf{z}} \mathbf{k} = \frac{q}{m} \left( E_0 \mathbf{k} + \dot{\mathbf{z}} B_0 \mathbf{j} - \dot{\mathbf{y}} B_0 \mathbf{k} \right), \quad (3.66)$$

por lo cual se tienen dos ecuaciones diferenciales, una por cada componente:

$$\ddot{\mathbf{y}} = \frac{qB_0}{m} \dot{\mathbf{z}}, \quad (3.67)$$

$$\ddot{\mathbf{z}} = \frac{qE_0}{m} - \frac{qB_0}{m} \dot{\mathbf{y}}, \quad (3.68)$$

para simplificar se define

$$b = \frac{qB_0}{m}; \quad a = \frac{qE_0}{m} \quad (3.69)$$

en consecuencia se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas

$$\ddot{\mathbf{y}} = b \dot{\mathbf{z}}, \quad (3.70)$$

$$\ddot{\mathbf{z}} = a - b \dot{\mathbf{y}}. \quad (3.71)$$

Para resolver este sistema se calcula la derivada de la ec (3.71), de lo cual se obtiene

$$\ddot{z} = -b\ddot{y}. \quad (3.72)$$

Ahora se sustituye (3.70) en (3.72):

$$\ddot{z} = -b^2\dot{z}, \quad (3.73)$$

es decir

$$\ddot{z} + b^2\dot{z} = 0, \quad (3.74)$$

que tiene polinomio característico

$$r^3 + b^2r = 0, \quad (3.75)$$

cuyas raíces son

$$r = 0, \quad (3.76)$$

$$r_{\pm} = \pm bi. \quad (3.77)$$

Así que la solución real general de (3.74) es de la forma

$$z(t) = c_1 + c_2 \cos(bt) + c_3 \sin(bt), \quad (3.78)$$

con  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$  constantes que se determinan de las condiciones iniciales. De esta expresión se obtiene

$$\dot{z}(t) = -c_2b \sin(bt) + c_3b \cos(bt). \quad (3.79)$$

Ahora se trabaja para determinar  $y(t)$ . Al integrar la ec. (3.70) se tiene

$$\dot{y} = bz + c_4, \text{ con } c_4 \text{ constante,} \quad (3.80)$$

$$= c_1b + c_2b \cos(bt) + c_3b \sin(bt) + c_4, \quad (3.81)$$

de lo cual se obtiene

$$y(t) = c_1bt + c_2 \sin(bt) - c_3 \cos(bt) + c_4t + c_5, \text{ con } c_5 \text{ constante.} \quad (3.82)$$

Solo resta determinar las constantes, para lo cual se usan las siguientes condiciones iniciales:

$$y(0) = 0, \quad (3.83)$$

$$z(0) = 0, \quad (3.84)$$

$$\dot{y}(0) = 0, \quad (3.85)$$

$$\dot{z}(0) = 0. \quad (3.86)$$

Al aplicar estas condiciones se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas

$$c_5 - c_3 = 0, \quad (3.87)$$

$$c_1 + c_2 = 0, \quad (3.88)$$

$$bc_1 + bc_2 + c_4 = 0. \quad (3.89)$$

$$c_3 = 0, \quad (3.90)$$

De (3.87) y (3.90) se tiene que

$$c_5 = 0. \quad (3.91)$$

Además de (3.88) se encuentra

$$c_2 = -c_1, \quad (3.92)$$

así de (3.89) se tiene que

$$c_4 = 0. \quad (3.93)$$

Estos resultados se sustituyen en (3.78) y (3.82):

$$z(t) = c_1 [1 - \cos(bt)], \quad (3.94)$$

$$y(t) = c_1 [bt - \sin(bt)]. \quad (3.95)$$

Aun falta determinar  $c_1$ , para ello se usa la ec. (3.71):

$$\begin{aligned} c_1 b^2 \cos(at) &= a - c_1 b^2 [1 - \cos(bt)], \\ &= a - c_1 b^2 + c_1 b^2 \cos(bt), \end{aligned} \quad (3.96)$$

de esta relación se tiene que

$$c_1 = \frac{a}{b^2}, \quad (3.97)$$

con esto quedan determinadas todas las constantes. Finalmente se tiene

$$z(t) = \frac{a}{b^2} [1 - \cos(bt)], \quad (3.98)$$

$$y(t) = \frac{a}{b^2} [bt - \sin(bt)]. \quad (3.99)$$

En la figura (3.6) podemos observar la trayectoria que sigue la partícula.

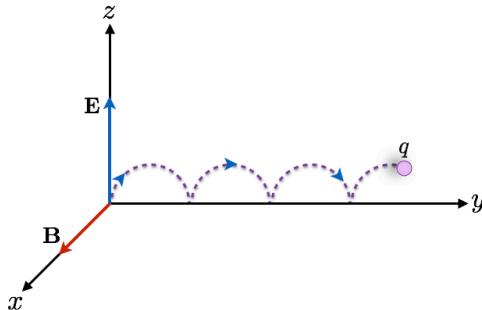


Figura 3.6: Trayectoria que sigue una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  en presencia de un campo  $E$  y  $B$ .

### 3.3 Ecuación de Ohm

La relación entre  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{E}$  depende del material que se trate, sin embargo para un conductor isotrópico lineal, la densidad  $\mathbf{J}$  es linealmente proporcional al campo eléctrico

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E}, \quad (3.100)$$

donde la constante de proporcionalidad  $g$  se denomina *conductividad*, con unidades de

$$[g] = \frac{[J]}{[E]} = \frac{A/m^2}{V/m} = \frac{A}{Vm}. \quad (3.101)$$

A la ec. (3.100) se le conoce como *ecuación de Ohm*. El recíproco de la conductividad es la *resistividad*,  $\eta$ ,

$$\eta = \frac{1}{g}. \quad (3.102)$$

Las unidades de  $\eta$  en el sistema mks son *ohm · metro* donde el ohm ( $\Omega$ ) se define como

$$\Omega = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampere}}. \quad (3.103)$$

Consideremos un medio conductor homogéneo en estado estacionario, de modo que la densidad de carga  $\rho(t, x, y, z)$  está en equilibrio, es decir,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.104)$$

Así de la ecuación de continuidad (3.17)

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (3.105)$$

Usando la ecuación de Ohm se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (3.106)$$

Por otro lado se sabe que

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (3.107)$$

Entonces

$$\nabla^2\phi = 0, \quad (3.108)$$

esta es la ecuación de Laplace, por lo tanto podemos observar que un problema de conducción en estado estacionario se puede resolver de la misma forma que los problemas electrostáticos. Bajo condiciones estacionarias, se tiene una situación similar a la que se encontró para los dieléctricos en la figura (2.8), de modo que la componente normal de  $\mathbf{J}$  debe ser continua al atravesar la zona interfacial.

$$J_{1n} = J_{2n} \quad (3.109)$$

Para una trayectoria cerrada que liga ambos medios

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

así

$$E_{1t} = E_{2t}. \quad (3.110)$$

Ahora consideremos una muestra conductora en forma de alambre recto y sección uniforme, cuyos extremos se mantienen a una diferencia de potencial constante  $\Delta\phi$ . El alambre es homogéneo y está caracterizado por la conductividad  $g$ . Sabemos que  $\Delta\phi$  está relacionado con el campo eléctrico con

$$\Delta\phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.111)$$

Debido a la forma geométrica del alambre, el campo eléctrico es el mismo en todos los puntos, entonces

$$\Delta\phi = El, \quad (3.112)$$

donde  $l$  es la longitud del alambre. Por otro lado, la corriente que pasa por una sección del alambre es

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = JA = gEA, \quad (3.113)$$

donde  $A$  es el área de la sección transversal del alambre. En esta última expresión se usó la ecuación de Ohm, ahora, sustituyendo la ec. (3.112) en (3.113)

$$I = \frac{gA}{l} \Delta\phi. \quad (3.114)$$

Se define la *resistencia eléctrica* del alambre como

$$R = \frac{l}{gA}; \quad [R] = \frac{m}{\Omega^{-1} m^{-1} m^2} = \Omega. \quad (3.115)$$

Expresando la ec. (3.114) en términos de  $R$  se tiene

$$\Rightarrow \Delta\phi = IR, \quad (3.116)$$

esta es la forma familiar de la ecuación de Ohm.

Sabemos que el trabajo efectuado para mover una carga eléctrica está dado por la ec. (1.158)

$$dW = dQ\Delta\phi. \quad (3.117)$$

Entonces la potencia correspondiente es

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{dQ}{dt} \Delta\phi. \\ \Rightarrow P &= I\Delta\phi. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Usando la ecuación de Ohm

$$P = I^2 R = \frac{\Delta\phi^2}{R}, \quad (3.119)$$

esta potencia se disipa como *calentamiento de Joule* del material.

Como ejemplo de la semejanza que hay entre conducción y electrostática supóngase dos conductores metálicos en un medio óhmico homogéneo de conductividad  $g$ . La corriente entre ellos está dado por

$$I = \frac{\Delta\phi}{R}.$$

Por otro lado sabemos que

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}.$$

Además

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E}.$$

Combinando las últimas tres expresiones

$$\frac{\Delta\phi}{R} = g \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}. \quad (3.120)$$

De la ley de Gauss se tiene

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{\epsilon}.$$

Entonces de (3.120)

$$\frac{\Delta\phi}{R} = g \frac{Q}{\epsilon} \quad (3.121)$$

Dado que la capacidad puede calcularse como en la ec. (1.229)

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi}.$$

Entonces se obtiene una relación entre la resistencia del medio y la capacidad

$$RC = \frac{\epsilon}{g}. \quad (3.122)$$

En un conductor, el exceso de carga permanece sobre la superficie del mismo, esta es la situación de equilibrio.

Consideremos un medio isotrópico homogéneo, caracterizado por una conductividad  $g$ , permitividad  $\epsilon$ , y una densidad de carga volumétrica  $\rho$ . Si este sistema se aísla repentinamente de los campos eléctricos aplicados tenderá hacia la situación de equilibrio en la que no hay exceso de carga en el interior del sistema.

De la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

Usando la ley de Ohm

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + g \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (3.123)$$

Por otro lado, de la ley de Gauss en su forma diferencial se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}.$$

Entonces

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{g}{\epsilon}\rho = 0. \quad (3.124)$$

Para resolver esta ecuación proponemos la solución

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(x, y, z)T(t), \quad (3.125)$$

la cual se sustituye en la ec. (3.124) y al dividir por  $\rho(x, y, z, t)$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} + \frac{g}{\epsilon} &= 0, \\ \ln T &= -\frac{g}{\epsilon}t, \\ \Rightarrow T(t) &= \exp\left(-\frac{g}{\epsilon}t\right). \end{aligned} \quad (3.126)$$

Entonces la solución es de la forma

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(x, y, z) \exp\left(-\frac{g}{\epsilon}t\right). \quad (3.127)$$

Se define la *constante de tiempo* o *tiempo de relajación* del medio como

$$t_c = \frac{\epsilon}{g} = \eta \epsilon. \quad (3.128)$$

La constante de tiempo mide la velocidad a la cual el medio se aproxima al equilibrio electrostático.

■ **Ejemplo 3.4** Una esfera de radio  $a$  y centro en el origen está hecha de un material conductor isotrópico homogéneo. El potencial en su superficie se mantiene a los valores dados por  $\phi_0 \cos \theta$  siendo  $\phi_0$  constante, en coordenadas esféricas (figura 3.7). Encontrar la densidad de corriente libre  $\mathbf{J}$  en todos los puntos de su interior.

*Solución.*

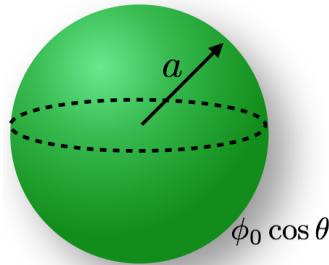


Figura 3.7: Esfera conductora con potencial  $\phi_0 \cos \theta$  en su superficie.

Sabemos de la ecuación (3.100) que

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= g\mathbf{E}, \\ &= -g\nabla\phi. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Recordamos que un problema de conducción se puede resolver como un problema de electrostática debido a que se satisface la ec. de Laplace. Entonces para encontrar  $\phi$  se utiliza la ec. (2.410)

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta).$$

Con las condiciones de frontera

1.  $-\phi(r \rightarrow \infty, \theta) = 0$ .
2.  $\phi(a, \theta) = \phi_0 \cos \theta$ .

Como el potencial interno debe estar definido, entonces  $B_n = 0$ , de modo que

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta). \quad (3.130)$$

Aplicando la segunda condición

$$\phi(a, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos \theta) = \phi_0 \cos \theta. \quad (3.131)$$

Notemos que todas las constantes  $A_n$  son igual a cero a excepción de  $A_1$  que es igual a

$$A_1 = \frac{\phi_0}{a}. \quad (3.132)$$

Por lo tanto el potencial interno es

$$\begin{aligned} \phi &= A_1 r \cos \theta, \\ &= \frac{\phi_0}{a} r \cos \theta, \\ &= \frac{\phi_0}{a} z \end{aligned} \quad (3.133)$$

Así que

$$\nabla \phi = \frac{\phi_0}{a} \mathbf{k}. \quad (3.134)$$

Sustituyendo esta última expresión en (3.129) se obtiene

$$\therefore \mathbf{J} = -\frac{g \phi_0}{a} \mathbf{k}. \quad (3.135)$$

■

■ **Ejemplo 3.5** Dos grandes placas planas paralelas conductoras se encuentran separadas por una distancia  $d$ . La región entre ellas está llena con dos materiales isotrópicos, cuya superficie de separación es un plano paralelo a las placas. El primer material (con propiedades  $g_1$  y  $\epsilon_1$ ) tiene un grosor  $x$ , mientras que el segundo tiene propiedades  $g_2$ ,  $\epsilon_2$  y cuenta con un grosor de  $d - x$ . Existe una corriente estacionaria entre las placas que se mantienen a potenciales constantes  $\phi_1$  y  $\phi_2$  (figura 3.8a). Encontrar el potencial en la superficie de separación de los dos medios y la densidad superficial de carga libre allí.

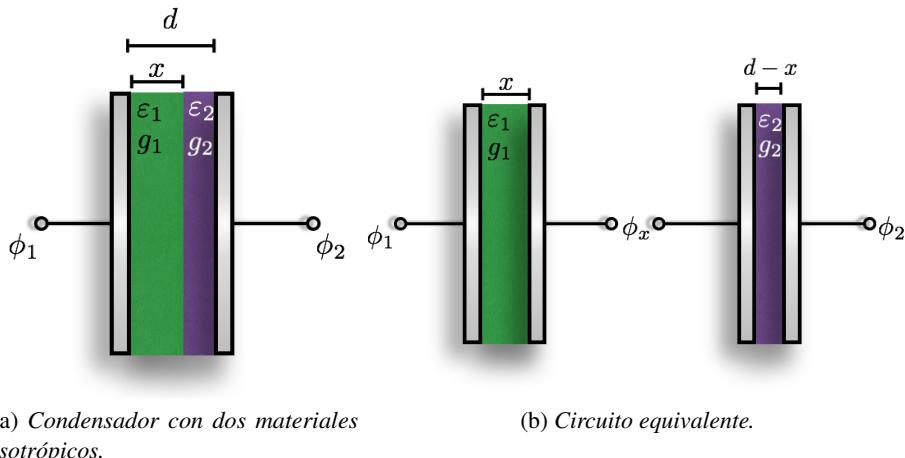


Figura 3.8: *Condensadores con dieléctricos*

*Solución.*

De la ecuación de Ohm (3.116) se tiene que

$$\Rightarrow \Delta\phi = IR \quad \text{con} \quad R = \frac{l}{gA}. \quad (3.136)$$

Podemos calcular la corriente para el primer medio,

$$\begin{aligned} \phi_1 - \phi_x &= I \frac{x}{g_1 A}, \\ \Rightarrow I &= (\phi_1 - \phi_x) \frac{g_1 A}{x} \end{aligned} \quad (3.137)$$

Para el segundo medio se tiene

$$\begin{aligned} \phi_x - \phi_2 &= I \frac{d - x}{g_2 A}, \\ \Rightarrow I &= (\phi_x - \phi_2) \frac{g_2 A}{d - x}. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Como la corriente es la misma para los dos medios podemos igualar (3.137) y (3.138)

$$\begin{aligned} (\phi_1 - \phi_x) \frac{g_1 A}{x} &= (\phi_x - \phi_2) \frac{g_2 A}{d - x}, \\ \frac{\phi_1 g_1}{x} + \frac{\phi_2 g_2}{d - x} &= \left( \frac{g_1}{x} + \frac{g_2}{d - x} \right) \phi_x, \\ \therefore \phi_x &= \frac{\phi_1 g_1 (d - x) + \phi_2 g_2 x}{g_1 (d - x) + g_2 x}. \end{aligned} \quad (3.139)$$

Por otro lado, podemos separar el sistema en un circuito equivalente como se muestra en la figura (3.8b), así de la ec. (1.229) se tiene que

$$Q = C\Delta\phi. \quad (3.140)$$

Para cada sistema

$$Q_1 = C_1(\phi_1 - \phi_x). \quad (3.141)$$

$$Q_2 = C_2(\phi_x - \phi_2). \quad (3.142)$$

De modo que la carga de la superficie de separación de los dos medios es

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 - Q_2, \\ &= C_1(\phi_1 - \phi_x) - C_2(\phi_x - \phi_2), \\ &= C_1\phi_1 + C_2\phi_2 - \phi_x(C_1 + C_2). \end{aligned} \quad (3.143)$$

Por otro lado, al calcular la densidad superficial de carga

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{A} [C_1\phi_1 + C_2\phi_2 - \phi_x(C_1 + C_2)], \\ &= \frac{1}{A} \left[ C_1\phi_1 + C_2\phi_2 - \frac{\phi_1 g_1(d-x) + \phi_2 g_2 x}{g_1(d-x) + g_2 x} (C_1 + C_2) \right], \\ &= \frac{1}{A} \left[ \frac{(\phi_2 - \phi_1)[g_1 C_2(d-x) - g_2 C_1 x]}{g_1(d-x) + g_2 x} \right]. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Al usar que la capacidad en condensadores de placas paralelas

$$C = \frac{\epsilon A}{d}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{A} \left[ \frac{(\phi_2 - \phi_1)(g_1 \epsilon_2 A - g_2 \epsilon_1 A)}{g_1(d-x) + g_2 x} \right], \\ \therefore \sigma &= \frac{(\phi_2 - \phi_1)(g_1 \epsilon_2 - g_2 \epsilon_1)}{g_1(d-x) + g_2 x}. \end{aligned} \quad (3.145)$$

■

**Ejemplo 3.6** Dos cáscaras cilíndricas largas de metal (radios  $r_1$  y  $r_2$ , con  $r_1 < r_2$ ) se colocan coaxialmente, las placas se mantienen a la diferencia de potencial  $\Delta\phi$ .

a) La región entre las cáscaras se llena con un medio de conductividad  $g$ , figura 3.9. Utilice la ecuación de Ohm,  $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$ , para calcular la corriente eléctrica por unidad de longitud de las cáscaras.

b) Si la región entre las cáscaras se llena de un medio no conductor de permitividad  $\epsilon$ , la capacitancia de este sistema puede calcularse de la definición  $C = Q/\Delta\phi$ . Demuestre explicitamente que para esta disposición geométrica, el producto de la resistencia por unidad de longitud y la capacidad por unidad de longitud es igual a  $\epsilon/g$ .

*Solución.*

a) Sabemos de la ec. (3.12)

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}. \quad (3.146)$$

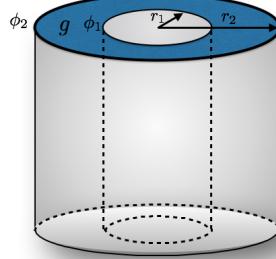


Figura 3.9: Medio de conductividad  $g$  dentro de cilindros conductores dispuestos coaxialmente.

Usando la ecuación de Ohm

$$I = g \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}. \quad (3.147)$$

Recordando que  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  donde  $\phi$  se calculó en el ejemplo (2.26) y está dado como

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \Delta\phi \frac{\ln(r/r_a)}{\ln(r_b/r_a)} + \phi_a, \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= -\frac{\Delta\phi}{r \ln(r_b/r_a)} \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (3.148)$$

De esta forma

$$\begin{aligned} I &= \frac{g \Delta\phi}{r \ln(r_b/r_a)} \int_0^L \int_0^{2\pi} r d\varphi dz, \\ \therefore I' &= \frac{I}{L} = \frac{2\pi g \Delta\phi}{\ln(r_b/r_a)}. \end{aligned} \quad (3.149)$$

b) De la definición de capacidad de un condensador

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi}.$$

Además, de la ecuación de Ohm

$$R = \frac{\Delta\phi}{I}, \quad (3.150)$$

donde

$$I = g \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = g \frac{Q}{\epsilon}. \quad (3.151)$$

Por lo cual

$$R = \frac{\epsilon \Delta\phi}{g Q}. \quad (3.152)$$

Entonces

$$\begin{aligned} RC &= \left( \frac{\epsilon \Delta\phi}{g Q} \right) \left( \frac{Q}{\Delta\phi} \right), \\ \therefore RC &= \frac{\epsilon}{g}. \end{aligned} \quad (3.153)$$

■

### 3.4 Ley de Biot y Savart

Consideremos dos circuitos cerrados  $C'$  y  $C$  que conducen corrientes constantes filamentales  $I'$  e  $I$ , respectivamente, figura 3.10. Se desea obtener la fuerza que  $C'$  ejerce sobre  $C$  denotada por  $\mathbf{F}_{C' \rightarrow C}$ .

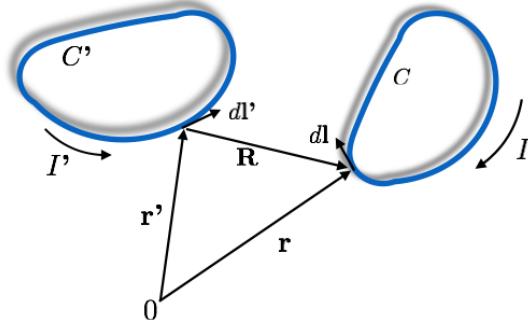


Figura 3.10: Interacción entre dos circuitos de corriente.

La ley experimental que da la fuerza total sobre  $C$  puede escribirse como

$$\mathbf{F}_{C' \rightarrow C} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \frac{I' d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} \right), \text{ con } \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad (3.154)$$

De la ecuación (3.38) es evidente que la ec. (3.154) implica

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I' d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3}. \quad (3.155)$$

Esta ecuación es conocida por lo general como la *ley de Biot y Savart*. Si se usa el mismo procedimiento empleado para las ecs. (3.41) y (3.43) entonces para una distribución superficial y volumétrica de carga se tiene

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} da', \quad (3.156)$$

y

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV'. \quad (3.157)$$

■ **Ejemplo 3.7** Considere una corriente constante  $I$  que conduce un alambre conductor infinito, figura 3.11. Encuentre el campo  $\mathbf{B}$  producido por el alambre en un punto  $\mathbf{r}$ .

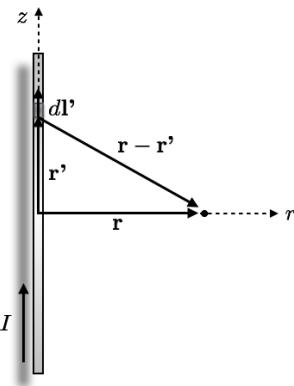


Figura 3.11: Alambre infinito con corriente  $I$ .

*Solución.*

Supongamos que el alambre está sobre el eje  $x$  desde menos infinito a mas infinito. De la ec. (3.155) se sabe que

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I' d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

con

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}, \quad (3.158)$$

$$\mathbf{r}' = z'\hat{\mathbf{k}}, \quad (3.159)$$

$$d\mathbf{l}' = dz'\hat{\mathbf{k}}. \quad (3.160)$$

Entonces

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz' \hat{\mathbf{k}} \times (r\hat{\mathbf{r}} - z'\hat{\mathbf{k}})}{|r\hat{\mathbf{r}} - z'\hat{\mathbf{k}}|^3}, \quad (3.161)$$

donde

$$dz' \hat{\mathbf{k}} \times (r\hat{\mathbf{r}} - z'\hat{\mathbf{k}}) = r dz' (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}) - z' dz' (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}) = r dz' \hat{\phi}. \quad (3.162)$$

De modo que

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} dz' \hat{\phi}. \quad (3.163)$$

Hacemos el cambio de variable

$$z' = r \tan \theta \implies dz' = r \sec^2 \theta d\theta,$$

así

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2 \sec^2 \theta}{[r^2(1 + \tan^2 \theta)]^{3/2}} d\theta \hat{\phi}, \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} I \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \hat{\phi}, \\ \therefore \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (3.164)$$

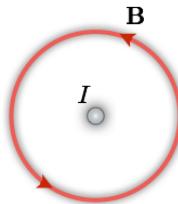


Figura 3.12: Líneas de  $\mathbf{B}$  debido a una corriente recta infinita que sale de la página.

Por lo tanto, concluimos que las líneas de  $\mathbf{B}$  son circunferencias en todo punto con el conductor como centro, esto se ilustra en la figura 3.12.

■

**Ejemplo 3.8** Consideremos una corriente  $I$  que conduce una espira circular de radio  $a$  como se muestra en la figura 3.13. Suponga que la espira descansa en el plano  $xy$  con su centro en el origen. Calcule el campo  $\mathbf{B}$  en un punto  $\mathbf{r} = z\mathbf{k}$ .

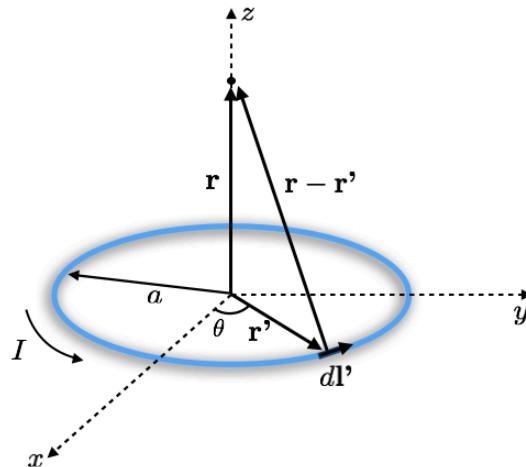


Figura 3.13: Espira circular con corriente  $I$ .

*Solución.*

Sabemos de la ley de Biot y Savart que

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I' d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

con

$$\mathbf{r} = z\mathbf{k}, \quad (3.165)$$

$$\mathbf{r}' = a \cos \theta' \mathbf{i} + a \sin \theta' \mathbf{j}, \quad (3.166)$$

$$d\mathbf{l}' = ad\theta' \hat{\theta} = ad\theta' (-\sin \theta' \mathbf{i} + \cos \theta' \mathbf{j}). \quad (3.167)$$

Al realizar la operación

$$\begin{aligned} d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= ad\theta' (-\sin \theta' \mathbf{i} + \cos \theta' \mathbf{j}) \times (-a \cos \theta' \mathbf{i} - a \sin \theta' \mathbf{j} + z\mathbf{k}), \\ &= ad\theta' (z \cos \theta' \mathbf{i} + z \sin \theta' \mathbf{j} + a\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (3.168)$$

De modo que

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(z \cos \theta' \mathbf{i} + z \sin \theta' \mathbf{j} + a\mathbf{k})}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\theta'. \quad (3.169)$$

Al realizar la integración, las componentes en las direcciones **i** y **j** se anulan, quedando solo la componente **k**, así

$$\therefore \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}. \quad (3.170)$$

■

■ **Ejemplo 3.9** Considere la *bobina de Helmholtz* que consiste en dos bobinas circulares del mismo radio, con un eje en común. La configuración se ilustra en la figura 3.14. Encuentre la inducción magnética en el punto medio.

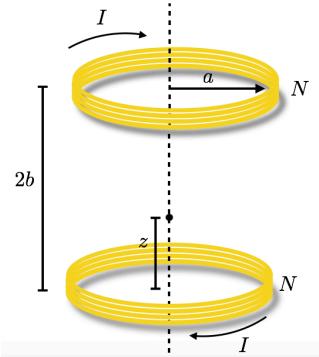


Figura 3.14: Bobina de Helmholtz.

*Solución.*

La inducción magnética en el punto *P* producido por la bobina inferior se obtiene de la ec. (3.170), cuando se aplica a las *N* vueltas de la bobina, es decir

$$\mathbf{B}_1 = \frac{N \mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}. \quad (3.171)$$

De igual forma, la inducción magnética producida por la bobina superior en el punto *P* es

$$\mathbf{B}_2 = \frac{N \mu_0 I}{2} \frac{a^2}{[a^2 + (2b - z)^2]^{3/2}} \mathbf{k}. \quad (3.172)$$

Por lo tanto, la inducción total en el punto *P* es

$$\mathbf{B}(z) = \frac{N \mu_0 I a^2}{2} \left[ \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{[a^2 + (2b - z)^2]^{3/2}} \right] \mathbf{k}, \quad (3.173)$$

entonces

$$\mathbf{B}(b) = \frac{N \mu_0 I a^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \mathbf{k}, \quad (3.174)$$

Con un poco de cálculo se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{B}}{dz} &= \frac{N \mu_0 I a^2}{2} \left[ -\frac{3z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{3(2b - z)}{[a^2 + (2b - z)^2]^{5/2}} \right] \mathbf{k}, \\ \frac{d^2\mathbf{B}}{dz^2} &= \frac{3N \mu_0 I a^2}{2} \left[ -\frac{1}{(a^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{5z^2}{(a^2 + z^2)^{7/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{[a^2 + (2b - z)^2]^{5/2}} + \frac{5(2b - z)^2}{[a^2 + (2b - z)^2]^{7/2}} \right] \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.175)$$

**Observación 3.6** La primera derivada de  $\mathbf{B}$  se anula en  $z = b$ .

Al sustituir el punto crítico  $z = b$  en la segunda derivada de  $\mathbf{B}$  se tiene

$$\frac{d^2\mathbf{B}}{dz^2}\Big|_{z=b} = \frac{3N\mu_0 I a^2}{2} \left[ \frac{10b^2}{(a^2+b^2)^{7/2}} - \frac{2}{(a^2+b^2)^{5/2}} \right] \mathbf{k}. \quad (3.176)$$

Así que el campo magnético tiene un máximo para cuando se considera la desigualdad

$$\frac{d^2\mathbf{B}}{dz^2}\Big|_{z=b} < 0, \quad (3.177)$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{2}{(a^2+b^2)^{5/2}} &> \frac{10b^2}{(a^2+b^2)^{7/2}}, \\ a^2+b^2 &> 5b^2, \\ \Rightarrow 2b &> a. \end{aligned} \quad (3.178)$$

**Observación 3.7** El valor del punto crítico es un medio de la distancia entre las bobinas y se logra un máximo cuando la separación entre las bobinas es mayor al radio de éstas. Además se logra un mínimo cuando la separación entre las bobinas es menor al radio de éstas.

La figura 3.15 muestra el comportamiento del campo magnético  $B(z)$ , (3.173), con  $b = a/2$ .

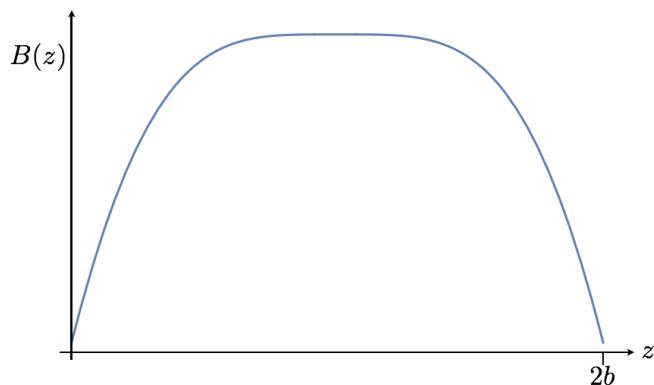


Figura 3.15: Comportamiento del campo magnético en el interior de la bobina de Helmholtz.

En el punto medio,  $z = b$ , se obtiene

$$\mathbf{B} = \frac{N\mu_0 I a^2}{2} \frac{2}{\left[a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \mathbf{k} = \frac{N\mu_0 I}{a} \frac{8}{5^{3/2}} \mathbf{k}. \quad (3.179)$$

■ **Ejemplo 3.10** Supóngase que se tiene un cilindro de longitud  $L$  y sección circular de radio  $a$ . Si se enrolla uniformemente a su alrededor un alambre para un total de  $N$  vueltas, el dispositivo resultante recibe el nombre de *solenoide* y se encuentra ilustrado en la figura 3.16. Obtenga la inducción magnética en un punto  $P$  sobre el eje del solenoide.

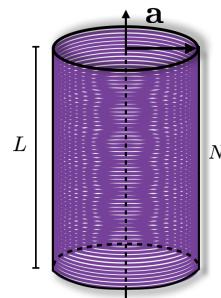


Figura 3.16: Solenoide de longitud  $L$  con  $N$  vueltas de radio  $a$ .

*Solución.*

Podemos obtener  $\mathbf{B}$  como la suma de las contribuciones de cada espira circular, ecuación (3.170):

$$\mathbf{B}_{\text{espira}} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}.$$

Consideremos una pequeña porción de solenoide de longitud  $dz$  situada a una distancia  $z$  de uno de los extremos, figura 3.17.

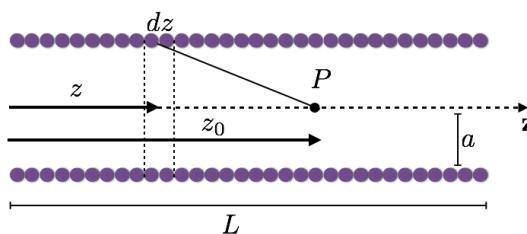


Figura 3.17: Sección de solenoide con su eje sobre el eje  $z$ .

Entonces el campo  $\mathbf{B}$  producido sobre un punto  $P$  por las  $n$  espiras contenidas en  $dz$  es

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I n}{2} \frac{a^2}{[(z_0 - z)^2 + a^2]^{3/2}} \mathbf{k}, \quad (3.180)$$

donde

$$n = \frac{N}{L} dz, \quad (3.181)$$

así

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I N}{2L} \int_0^L \frac{a^2}{[(z_0 - z)^2 + a^2]^{3/2}} dz \mathbf{k}. \quad (3.182)$$

Para resolver la integral se realiza un cambio de variable

$$z_0 - z = a \tan \theta \Rightarrow dz = -a \sec^2 \theta d\theta. \quad (3.183)$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= -\frac{\mu_0 I N a^3}{2L} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sec^2 \theta}{[a^2(\tan^2 \theta + 1)]^{3/2}} d\theta \mathbf{k}, \\ &= -\frac{\mu_0 I N}{2L} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta \mathbf{k}, \\ &= -\frac{\mu_0 I N}{2L} \left. \sin \theta \right|_{\theta_1}^{\theta_2} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.184)$$

Regresando a la variable original

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I N}{2L} \left. \frac{z_0 - z}{\sqrt{(z_0 - z)^2 + a^2}} \right|_0^L \mathbf{k}. \quad (3.185)$$

Por lo tanto la inducción magnética sobre el eje del solenoide es

$$\therefore \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I N}{2L} \left[ \frac{L - z_0}{\sqrt{(z_0 - L)^2 + a^2}} + \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + a^2}} \right] \mathbf{k}. \quad (3.186)$$

■

**Ejemplo 3.11** Un circuito de corriente tiene forma de hexágono regular de lado  $a$ . Si el circuito conduce una corriente de intensidad  $I$ , halle la inducción magnética en el centro del hexágono.

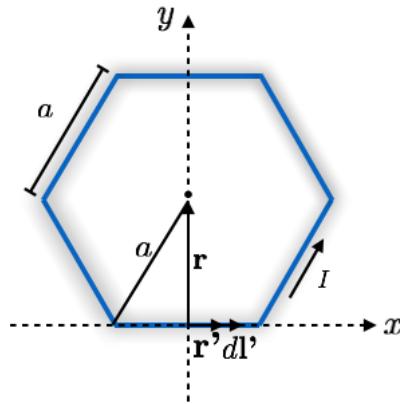


Figura 3.18: Circuito hexagonal de lado  $a$ .

*Solución.*

Consideremos un lado del hexágono que esté sobre el eje  $x$  como se muestra en la figura 3.18. De la ec. (3.155) se sabe que

$$\mathbf{B}_L(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I' d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

con

$$\mathbf{r} = a \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{j}, \quad (3.187)$$

$$\mathbf{r}' = x' \mathbf{i}, \quad (3.188)$$

$$d\mathbf{l}' = dx' \mathbf{i}. \quad (3.189)$$

Entonces

$$\mathbf{B}_L = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dx' \mathbf{i} \times \left( a \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{j} - x' \mathbf{i} \right)}{\left| a \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{j} - x' \mathbf{i} \right|^3}, \quad (3.190)$$

donde

$$\begin{aligned} dx' \mathbf{i} \times \left( a \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{j} - x' \mathbf{i} \right) &= a \frac{\sqrt{3}}{2} dx' (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) - x' dx' (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \\ &= a \frac{\sqrt{3}}{2} dx' \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.191)$$

De modo que

$$\mathbf{B}_L = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{a \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left[ \left( a \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + x'^2 \right]^{3/2}} dx' \mathbf{k}. \quad (3.192)$$

Hacemos el cambio de variable

$$x' = a \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta \implies dx' = a \frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2 \theta d\theta,$$

así

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_L &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\left( a \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \sec^2 \theta}{\left[ \left( a \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 (1 + \tan^2 \theta) \right]^{3/2}} d\theta \mathbf{k}, \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{3}\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta \mathbf{k}, \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{3}\pi a} \left. \sin \theta \right|_{\theta_1}^{\theta_2} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.193)$$

Regresando a la variable original

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_L &= \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{3}\pi a} \frac{x'}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2 + x'^2}} \Big|_{-a/2}^{a/2} \mathbf{k}, \\ \Rightarrow \mathbf{B}_L &= \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{3}\pi a} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.194)$$

Así, la inducción magnética total se obtiene sumando la contribución de los seis lados del hexágono

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= 6 \left( \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{3}\pi a} \right) \mathbf{k}, \\ \therefore \mathbf{B} &= \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{\pi a} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.195)$$

■

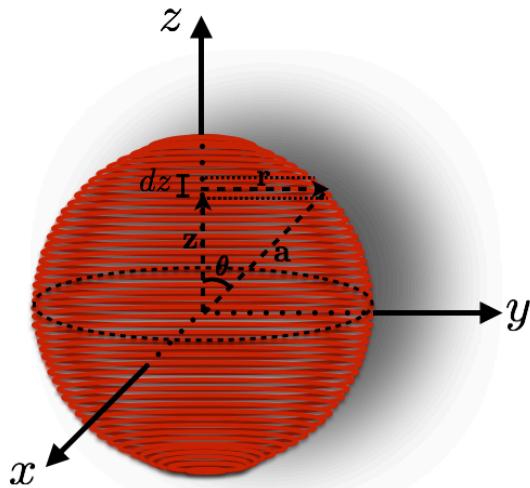


Figura 3.19: Alambre conductor enrollado con  $N$  sobre esfera de radio  $a$ .

**Ejemplo 3.12** Un gran número de  $N$  vueltas muy próximas unas con otras, de un alambre fino, se enrollan en una sola capa sobre la superficie de una esfera de madera de radio  $a$ , con los planos de las vueltas perpendiculares al eje de la esfera y cubriendo completamente su superficie, figura 3.19. Si la corriente que pasa por el alambre es  $I$ , determine el campo magnético en el centro de la esfera.

*Solución.*

Como los planos de las vueltas son perpendiculares al eje de la esfera, podemos tomar la contribución de cada vuelta como el de una espira. De la ec. (3.170) se tiene que la inducción magnética producida por una espira de radio  $r$  es

$$\mathbf{B}_e = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}.$$

Tomando un diferencial de campo de inducción magnética

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I n}{2} \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}, \quad (3.196)$$

donde

$$n = \frac{N}{2a} dz, \quad (3.197)$$

es decir

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I N}{4a} \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz \mathbf{k}. \quad (3.198)$$

De la figura (3.19) podemos ver que

$$z = a \cos \theta, \quad (3.199)$$

$$dz = -a \sin \theta d\theta, \quad (3.200)$$

$$r = a \sin \theta. \quad (3.201)$$

Así

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0 I N}{4a} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \mathbf{k}, \\
 &= -\frac{\mu_0 I N}{4a} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \mathbf{k}, \\
 \therefore \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I N}{3a} \mathbf{k}.
 \end{aligned} \tag{3.202}$$

■

■ **Ejemplo 3.13** Un solenoide con sección transversal en forma de cuadro está constituido de  $N$  vueltas por unidad de longitud y conduce una corriente eléctrica  $I$ . La longitud de la sección transversal es  $a$ , figura 3.20a. Si el solenoide es muy largo, hallar el campo magnético axial en el centro del solenoide.

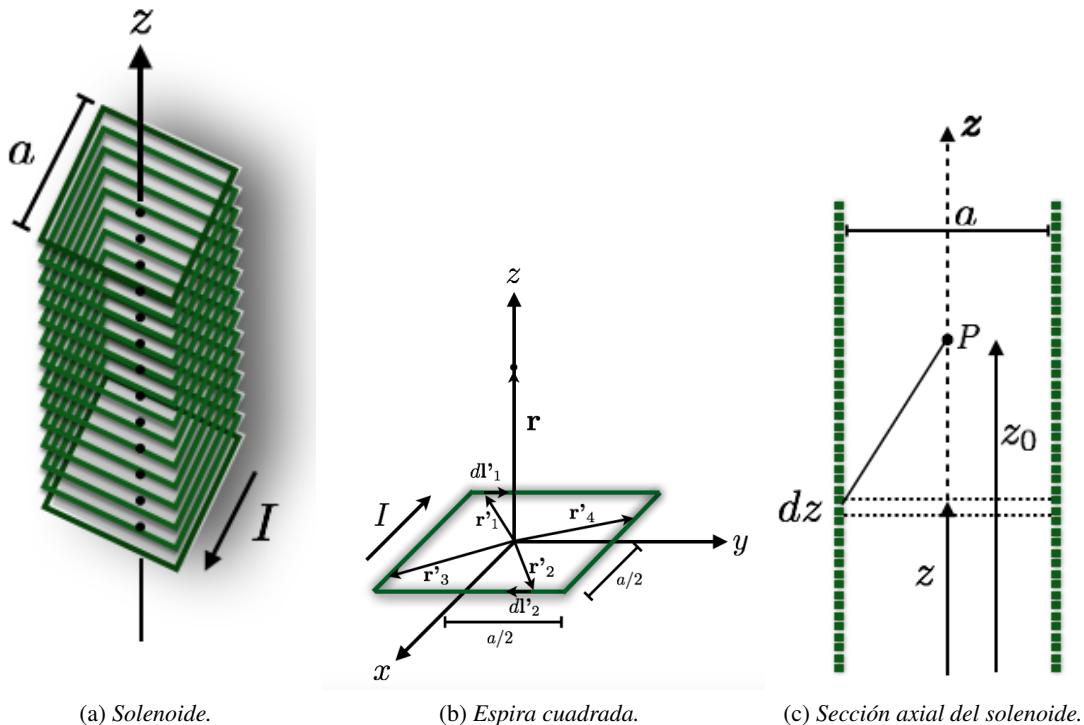


Figura 3.20: Solenoide de sección transversal cuadrada.

*Solución.*

Consideremos primero la el campo generado por una espira, de esta forma

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I' d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

De la figura 3.20b se puede observar que el campo magnético total de la espira es la contribución de cada lado, por lo cual

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \left[ \frac{d\mathbf{l}'_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|^3} + \frac{d\mathbf{l}'_2 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|^3} + \frac{d\mathbf{l}'_3 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_3)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_3|^3} + \frac{d\mathbf{l}'_4 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_4)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_4|^3} \right]. \tag{3.203}$$

Para el tercer término se tiene

$$\mathbf{r} = z\mathbf{k}, \quad (3.204)$$

$$\mathbf{r}'_3 = -x'\mathbf{i} - \frac{a}{2}\mathbf{j}, \quad (3.205)$$

$$d\mathbf{l}'_3 = -dx'\mathbf{i}. \quad (3.206)$$

Realizando el producto cruz

$$\begin{aligned} d\mathbf{l}'_3 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_3) &= -dx'\mathbf{i} \times \left( x'\hat{\mathbf{i}} + \frac{a}{2}\mathbf{j} + z\mathbf{k} \right), \\ &= -\frac{a}{2}dx'\mathbf{k} + zdx'\mathbf{j}. \end{aligned} \quad (3.207)$$

Así

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{-\frac{a}{2}\mathbf{k} + z\mathbf{j}}{\left(x'^2 + \frac{a^2}{4} + z^2\right)^{3/2}} dx'. \quad (3.208)$$

Para el cuarto término de (3.203) se tiene

$$\mathbf{r} = z\mathbf{k}, \quad (3.209)$$

$$\mathbf{r}'_4 = x'\mathbf{i} + \frac{a}{2}\mathbf{j}, \quad (3.210)$$

$$d\mathbf{l}'_4 = dx'(-\mathbf{i}). \quad (3.211)$$

Realizando el producto cruz

$$\begin{aligned} d\mathbf{l}'_4 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_4) &= -dx'\hat{\mathbf{i}} \times \left( -x'\hat{\mathbf{i}} - \frac{a}{2}\mathbf{j} + z\mathbf{k} \right), \\ &= \frac{a}{2}dx'\mathbf{k} + zdx'\mathbf{j}. \end{aligned} \quad (3.212)$$

Así

$$\mathbf{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{a/2}^{-a/2} \frac{\frac{a}{2}\mathbf{k} + z\mathbf{j}}{\left(x'^2 + \frac{a^2}{4} + z^2\right)^{3/2}} dx', \quad (3.213)$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\frac{a}{2}\mathbf{k} + z\mathbf{j}}{\left(x'^2 + \frac{a^2}{4} + z^2\right)^{3/2}} dx'. \quad (3.214)$$

Sumando (3.208) y (3.214)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{3+4} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \left[ \frac{-\frac{a}{2}\mathbf{k} + z\mathbf{j}}{\left(x'^2 + \frac{a^2}{4} + z^2\right)^{3/2}} - \frac{\frac{a}{2}\mathbf{k} + z\mathbf{j}}{\left(x'^2 + \frac{a^2}{4} + z^2\right)^{3/2}} \right] dx', \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{a}{\left(x'^2 + \frac{a^2}{4} + z^2\right)^{3/2}} dx'\mathbf{k}, \\ &= -\frac{\mu_0 I a}{4\pi \left(\frac{a^2}{4} + z^2\right)} \frac{x'}{\left(x'^2 + \frac{a^2}{4} + z^2\right)^{1/2}} \Big|_{-a/2}^{a/2} \mathbf{k}, \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2}{\left(\frac{a^2}{4} + z^2\right) \sqrt{\frac{a^2}{2} + z^2}} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.215)$$

Por lo tanto, la contribución de todos los lados será

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= (-2) \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2}{\left(\frac{a^2}{4} + z^2\right) \sqrt{\frac{a^2}{2} + z^2}} \mathbf{k}, \\ \Rightarrow \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a^2}{\left(\frac{a^2}{4} + z^2\right) \sqrt{\frac{a^2}{2} + z^2}} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.216)$$

Consideremos una pequeña porción de solenoide de longitud  $dz$  situada a una distancia  $z$  de uno de los extremos, figura 3.20c. Entonces el campo  $\mathbf{B}$  producido sobre un punto  $P$  por las  $n$  espiras contenidas en  $dz$  es

$$d\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I n}{2\pi} \frac{a^2}{\left[\frac{a^2}{4} + (z_0 - z)^2\right] \sqrt{\frac{a^2}{2} + (z_0 - z)^2}} \mathbf{k}, \quad (3.217)$$

donde

$$n = \frac{N}{L} dz, \quad (3.218)$$

así

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I N}{2\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{\left[\frac{a^2}{4} + (z_0 - z)^2\right] \sqrt{\frac{a^2}{2} + (z_0 - z)^2}} dz \mathbf{k}. \quad (3.219)$$

Haciendo el cambio de variable

$$z_0 - z = \frac{a}{\sqrt{2}} \tan \theta \Rightarrow dz = -\frac{a}{\sqrt{2}} \sec^2 \theta d\theta. \quad (3.220)$$

De esta forma

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I N}{\pi L} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{\sec \theta}{\tan^2 \theta + \frac{1}{2}} d\theta \mathbf{k}, \\ &= \frac{\mu_0 I N}{\pi L} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \theta} d\theta \mathbf{k}, \\ &= \frac{\mu_0 I N}{\pi L} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta + 1} d\theta \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.221)$$

Para resolver esta integral, se realiza otro cambio de variable

$$\sin \theta = \tan \varphi \Rightarrow \cos \theta d\theta = \sec^2 \varphi d\varphi, \quad (3.222)$$

por lo cual

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I N}{\pi L} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} 2 d\varphi \mathbf{k}, \\ &= \frac{\mu_0 I N}{\pi L} 2\varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.223)$$

Regresando a la variable  $\theta$  obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I N}{\pi L} 2 \arctan[\sin \theta] \Big|_{\pi/2}^{-\pi/2} \mathbf{k}, \\ \therefore \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0 I N}{L} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.224)$$

■

■ **Ejemplo 3.14** Considere un plano infinito con densidad superficial de corriente  $\mathbf{K}$ . Encontrar el valor de  $\mathbf{B}$  en un punto arbitrario. Suponga que el plano coincide con el plano  $xy$  y que la dirección de  $\mathbf{K}$  es la misma de  $\mathbf{j}$ , figura 3.21.

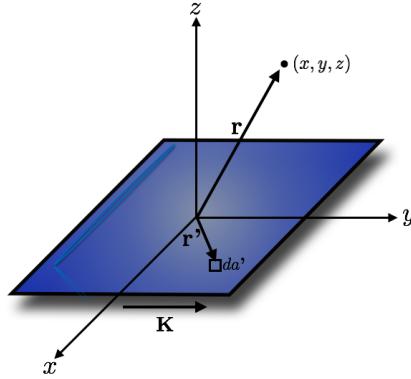


Figura 3.21: Plano infinito con densidad de corriente  $K\mathbf{j}$ .

*Solución.*

Como se trata de una densidad de corriente superficial, para obtener la inducción magnética ocupamos la ec. (3.156)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{a}'.$$

De la figura 3.21 podemos ver que

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (3.225)$$

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}, \quad (3.226)$$

$$d\mathbf{a}' = dx' dy'. \quad (3.227)$$

Con lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K\mathbf{j} \times [(x-x')\mathbf{i} + (y-y')\mathbf{j} + z\mathbf{k}]}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{3/2}} dy' dx', \\ &= \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(x-x')\mathbf{k} + z\mathbf{i}}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{3/2}} dy' dx'. \end{aligned} \quad (3.228)$$

Al hacer el cambio de variable

$$y - y' = \sqrt{(x-x')^2 + z^2} \tan \theta, \quad (3.229)$$

$$\Rightarrow dy' = -\sqrt{(x-x')^2 + z^2} \sec^2 \theta d\theta. \quad (3.230)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{[z\mathbf{i} - (x-x')\mathbf{k}] \sqrt{(x-x')^2 + z^2} \sec^2 \theta}{\{[(x-x')^2 + z^2](1 + \tan^2 \theta)\}^{3/2}} d\theta dx', \\ &= -\frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{[z\mathbf{i} - (x-x')\mathbf{k}] \cos \theta}{(x-x')^2 + z^2} d\theta dx', \\ &= \frac{\mu_0 K}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\mathbf{i} - (x-x')\mathbf{k}}{(x-x')^2 + z^2} dx'. \end{aligned} \quad (3.231)$$

La componente en la dirección  $\mathbf{k}$  se anula ya que el integrando es una función impar de  $x'$ . Así

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 K}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{(x-x')^2 + z^2} dx' \mathbf{i}. \quad (3.232)$$

Ahora realizamos el cambio

$$x - x' = z \tan \theta \Rightarrow dx' = -z \sec^2 \theta d\theta. \quad (3.233)$$

De modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0 K}{2\pi} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} d\theta \mathbf{i}, \\ \therefore \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 K}{2} \mathbf{i}. \end{aligned} \quad (3.234)$$

■

**Ejemplo 3.15** Considere una franja delgada de metal de anchura  $w$  y muy larga. La corriente de la franja es a lo largo de su longitud, la corriente total es  $I$ . Halle la inducción magnética en el plano de la franja a una distancia  $b$  del borde más próximo.

*Solución.*

Como se trata de una densidad de corriente superficial, para obtener la inducción magnética ocupamos la ec. (3.156)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da'.$$

Supongamos que el plano de la franja coincide con el plano  $xy$ . De la figura 3.22 podemos ver que

$$\mathbf{r} = (w+b)\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad (3.235)$$

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}, \quad (3.236)$$

$$da' = dx' dy'. \quad (3.237)$$

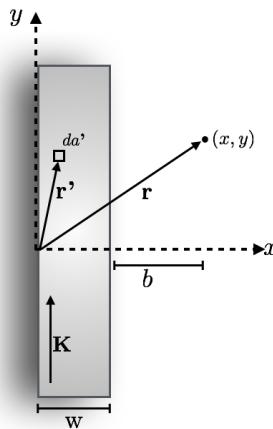


Figura 3.22: Franja conductora con densidad de corriente  $K\mathbf{j}$ .

De modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^W \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K\mathbf{j} \times [(w+b-x')\mathbf{i} + (y-y')\mathbf{j}]}{[(w+b-x')^2 + (y-y')^2]^{3/2}} dy' dx', \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^W \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(w+b-x')}{[(w+b-x')^2 + (y-y')^2]^{3/2}} dy' dx' \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.238)$$

Realizamos el cambio de variable

$$y - y' = (w + b - x') \tan \theta \Rightarrow dy' = -(w + b - x') \sec^2 \theta d\theta. \quad (3.239)$$

Así

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_0^W \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{(w + b - x')^2 \sec^2 \theta}{[(w + b - x')^2(1 + \tan^2 \theta)]^{3/2}} d\theta dx' \mathbf{k}, \\ &= -\frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_0^W \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{\cos \theta}{w + b - x'} d\theta dx' \mathbf{k}, \\ &= \frac{\mu_0 K}{2\pi} \int_0^W \frac{1}{w + b - x'} dx' \mathbf{k}, \\ &= -\frac{\mu_0 K}{2\pi} \ln[w + b - x'] \Big|_0^W \mathbf{k}, \\ \therefore \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 K}{2\pi} \ln \left[ 1 + \frac{w}{b} \right] \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.240)$$

■

### 3.5 Ley de Ampère

Supóngase que un campo  $\mathbf{B}$  es producido por un circuito filamental  $C'$  como puede ser un alambre conductor, que conduce una corriente  $I$ , de manera que  $\mathbf{B}$  está dado por la ec. (3.164)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{\phi}.$$

Consideremos un punto  $P$  sobre una trayectoria  $C$ , como se ilustra en la figura 3.23.

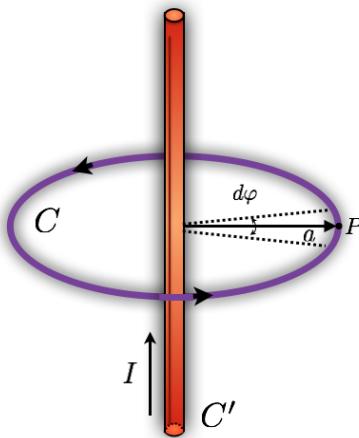


Figura 3.23: Ley de circuitos de Ampère para la configuración geométrica de un alambre largo y recto.

Al efectuar la integración de  $\mathbf{B}$  alrededor de un círculo de radio  $a$  con centro en el alambre obtenemos

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \oint \hat{\phi} \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.241)$$

donde

$$d\mathbf{l} = ad\theta \hat{\phi}. \quad (3.242)$$

De esta forma

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \int_0^{2\pi} ad\theta = \mu_0 I. \quad (3.243)$$

En general, se obtiene el mismo resultado para cualquier trayectoria cerrada que encierre el alambre. Si existe mas de una corriente fuente, cada una de las corrientes  $I_i$  contribuirá dependiendo de si  $I_i$  pasa o no a través de  $C$  y de la dirección en que lo haga, de esta forma

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i \mu_0 I_i, \quad (3.244)$$

*encerrada*

Por lo tanto

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc}, \quad (3.245)$$

donde  $I_{enc}$  es la corriente neta encerrada por la trayectoria de integración. De esta manera se ha obtenido la *forma integral de la ley de Ampere*. [Nótese la similitud de este resultado con la ley de Gauss (1.65)].

La ec. (3.245) se puede expresar de otra manera muy útil si se escribe  $I_{enc}$  en función de la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  por medio de (3.12).

$$I_{enc} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}. \quad (3.246)$$

Además, si usamos el teorema de Stokes en el lado izquierdo de (3.245), obtenemos

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}. \quad (3.247)$$

Donde  $S$  es la superficie abierta limitada por  $C$ . Igualando los integrandos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (3.248)$$

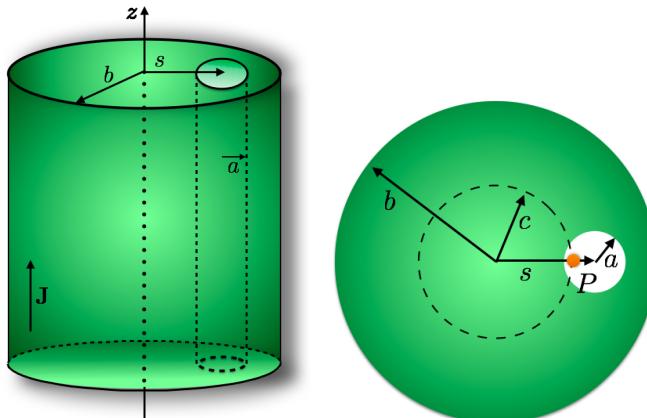
este resultado es conocido como *forma diferencial de la ley de Ampere*.

■ **Ejemplo 3.16** Un conductor cilíndrico de radio  $b$  contiene un hueco cilíndrico de radio  $a$ , el eje del hueco es paralelo al conductor y está a una distancia  $s$  de éste,  $a < s < b - a$ , figura 3.24a. El conductor lleva una densidad de corriente uniforme  $\mathbf{J}$ . Encuentre el campo  $\mathbf{B}$  en el hueco sobre el diámetro que coincide con el diámetro del conductor. (*Sugerencia: Considere una distribución de corriente equivalente de densidad  $\mathbf{J}$  por todo el hueco y el conductor, más  $-\mathbf{J}$  en el hueco*). *Solución.*

La sugerencia se explica de la siguiente forma: Al considerar el cilínodo de radio  $b$  completo (sin hueco) y con una corriente uniforme en dirección de  $\mathbf{k}$ . Después se superpone un cilínodo de radio  $a$  con densidad de corrienste  $-\mathbf{J}$  y cuyo centro se encuentra a una distancia  $s$  del centro de ciínodo de radio  $b$ . La suma vectorial de las densidades corriente generan una corriente resultante igual a cero, esto es equivalente al sistema del cilindro con el hueco como se plantea en el problema. Así que para calcular el campo magnético en punto  $P$  se debe realizar de la suma vectorial del campo magnético que genera  $\mathbf{J}$  con el campo magnético que genera  $-\mathbf{J}$ .

Se considera un lazo amperiano de radio  $c$  en el el cilínodo con densidad de corriente  $\mathbf{J}$  como se observa en la figura 3.25a. De la ley de Ampere, ec. (3.248), se tiene

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc}.$$



(a) Vista de la sección lateral. (b) Vista de la sección transversal.

Figura 3.24: Conductor cilíndrico con un hueco en su interior.

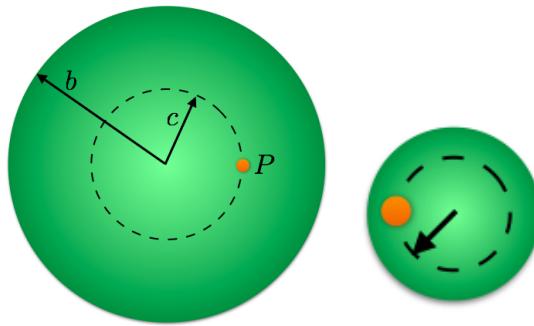
(a) Lazo amperiano de radio  $c$  para el cilindro con densidad de corriente  $J$   
(b) Lazo amperiano de radio  $c$  para el cilindro con densidad de corriente  $-J$ 

Figura 3.25: Lazos amperianos.

Para el término del lado izquierdo se tiene

$$\oint_C \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (B_1 \hat{\phi}) \cdot (cd\varphi \hat{\phi}) = \int_0^{2\pi} B_1 c d\varphi = B_1 c 2\pi. \quad (3.249)$$

Para el lado derecho, la corriente encerrada,  $I_{enc}$ , está dada por

$$I_{enc} = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_0^c \int_0^{2\pi} J r d\varphi dr = J\pi c^2. \quad (3.250)$$

Igualando los resultados, se tiene para  $B$ :

$$B_1 = \frac{\mu_0 J s}{2}. \quad (3.251)$$

es decir

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 J s}{2} \hat{\phi}. \quad (3.252)$$

Ahora se considera un lazo amperiano de radio  $s - c$  en el cilindro con densidad de corriente  $-J$  como se observa en la figura 3.25b. Como en el cilindro anterior, se calcula cada uno de los

elementos de la ley de Ampère:

$$\oint_C \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (-B_2 \hat{\phi}) \cdot \left( -(s-c) d\varphi \hat{\phi} \right) = \int_0^{2\pi} B_2 (s-c) d\varphi = B_2 (s-c) 2\pi,$$

$$I_{enc} = \oint_S (-\mathbf{J}) \cdot (-d\mathbf{a}) = \int_0^{s-c} \int_0^{2\pi} J r d\varphi dr = J\pi (s-c)^2.$$

Por lo tanto

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 J (s-c)}{2} \hat{\phi}. \quad (3.253)$$

Finalmente, el campo magnético total

■

**Ejemplo 3.17** Un toroide se enrolla uniformemente como en la figura 3.26. Tiene  $N$  vueltas de alambre por las que pasa una corriente de intensidad  $I$ . El radio interior del toroide es  $a$ , y el exterior  $b$ .

- a) Halle la inducción magnética en varios puntos al devanado toroidal.
- b) Halle la relación  $b/a$  que permita que  $\mathbf{B}$  en el anillo no varíe en más del 25 %

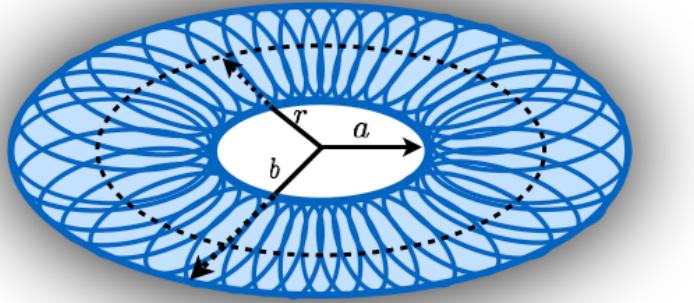


Figura 3.26: *Toroide*.

*Solución.*

a) De la ley de Ampere sabemos que

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc}.$$

Supongamos una curva de radio  $a < r < b$ , de esta forma se tiene una corriente  $NI$ , así

$$\int_0^{2\pi} Br d\varphi = \mu_0 NI,$$

$$\therefore B(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}. \quad (3.254)$$

b) De (3.254) se puede obtener

$$B(a) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi a} \quad (3.255)$$

$$B(b) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi b}. \quad (3.256)$$

Para que  $\mathbf{B}$  no varíe en mas del 25 % se tiene que

$$\begin{aligned} B(a) - B(b) &= \frac{1}{4}B(a), \\ B(b) &= \frac{3}{4}B(a), \\ \Rightarrow \frac{B(a)}{B(b)} &= \frac{4}{3}. \end{aligned} \quad (3.257)$$

Sustituyendo (3.256) y (3.257)

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{4}{3}. \quad (3.258)$$

■

### 3.6 Flujo magnético.

Recordamos de la ecuación (3.157) que

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV'.$$

Calculando la divergencia de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{r}$  obtenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \cdot \left[ \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} \right] dV'. \quad (3.259)$$

Usando la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}), \quad (3.260)$$

se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left( [\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')] \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} - \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \left( \nabla \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) \right) dV'. \quad (3.261)$$

Dado que  $\nabla$  solo actúa sobre las componentes de  $\mathbf{r}$ , entonces para el primer término se tiene que  $\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') = \mathbf{0}$ . Por otro lado se tiene la identidad

$$-\nabla \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (3.262)$$

Por lo que (3.261) queda como

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \left[ \nabla \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right] dV', \quad (3.263)$$

donde

$$\nabla \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) = \mathbf{0}. \quad (3.264)$$

Finalmente

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.265)$$

este importante resultado es una de las ecuaciones de Maxwell. Si comparamos esta expresión con la ecuación análoga para el caso del campo eléctrico, es decir,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ , donde  $\rho$  aparece porque la carga eléctrica existe en unidades individuales, de esta forma es posible tener  $\rho \neq 0$ .

Pero la ec. (3.265) implica que no pueden existir unidades individuales de carga magnética análogas a las eléctricas. A dichas cargas magnéticas se les denomina *monopolos magnéticos*

Ahora, se puede usar (3.265) para obtener una relación del flujo de  $\mathbf{B}$  a través de una superficie cerrada. Combinando con el teorema de la divergencia se obtiene

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) dV = \oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (3.266)$$

Por lo tanto

$$\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a} = 0. \quad (3.267)$$

Lo que significa que el flujo de  $\mathbf{B}$  a través de cualquier superficie cerrada es siempre cero (figura 3.27). Sin embargo, es de gran utilidad considerar la integral de superficie de  $\mathbf{B}$  con respecto a una superficie que no es cerrada. Definimos el *flujo magnético* que atraviesa una superficie  $S$  como

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (3.268)$$

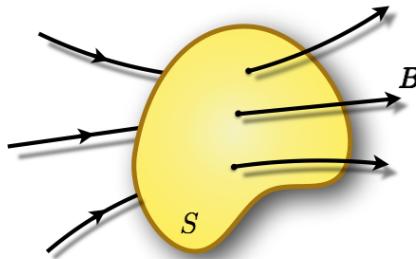


Figura 3.27: El flujo neto de  $\mathbf{B}$  a través de una superficie cerrada  $S$  es cero.

De la ec. (3.267) se puede obtener la condición de frontera de las componentes normales de  $\mathbf{B}$  que debe satisfacer en una superficie de discontinuidad. Consideremos un cilindro recto de altura  $h$  y sección  $\Delta S$ , construido en la capa de transición como se muestra en la figura 3.28. Entonces

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S - \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S + \kappa, \quad (3.269)$$

donde  $\kappa$  es la contribución de las paredes. Si consideramos que  $h \rightarrow 0$ , entonces  $\kappa \rightarrow 0$ , así

$$\mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S - \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S = 0 \quad (3.270)$$

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0. \quad (3.271)$$

Por lo tanto

$$B_{2n} - B_{1n} = 0, \quad (3.272)$$

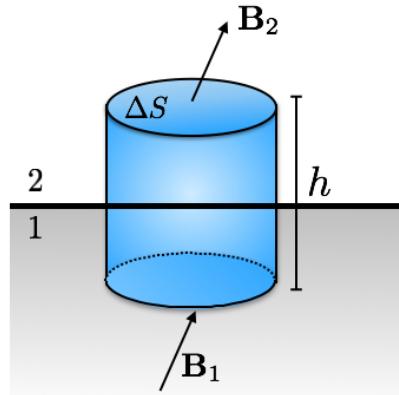


Figura 3.28: Cilindro en la capa de transición de dos medios.

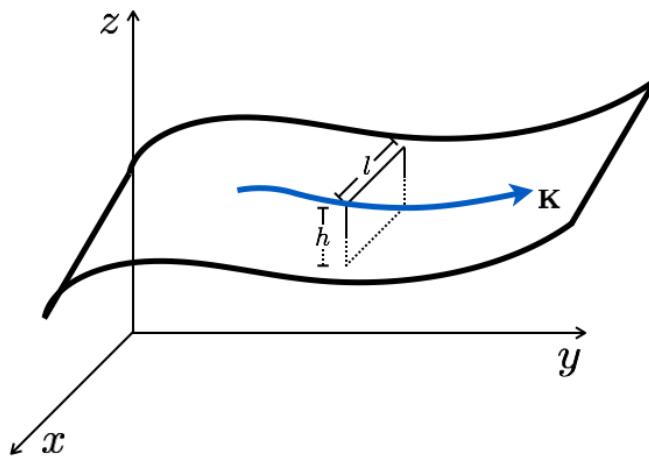
de modo que las componentes normales de  $\mathbf{B}$  son siempre continuas. Para las componentes tangenciales se usa la Ley de Ampère en su forma integral. Primero se va a considerar un lazo Amperiano que es perpendicular a la dirección de la corriente, fig. 3.29, entonces

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = (B_{2t} - B_{1t})l = \mu_0 K l,$$

es decir

$$B_{2t} - B_{1t} = \mu_0 K. \quad (3.273)$$

Si ahora se considera un lazo Amperiano que es paralelo a la dirección de la corriente, fig. 3.30.

Figura 3.29: Condiciones de frontera para el campo  $\mathbf{B}$ 

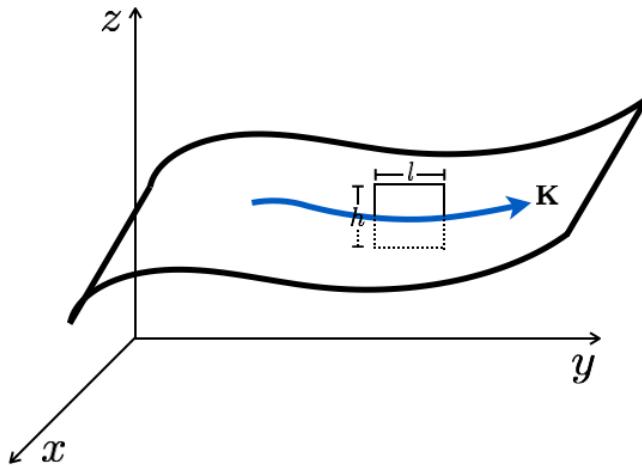
Bajo esta consideración se tiene

$$B_{2t} - B_{1t} = 0. \quad (3.274)$$

Las ecuaciones (3.272), (3.273) y (3.274) se pueden resumir en

$$\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}, \quad (3.275)$$

con  $\hat{\mathbf{n}}$  el vector normal unitario a la superficie donde se encuentra  $\mathbf{B}_2$ .

Figura 3.30: Condiciones de frontera para el campo  $\mathbf{B}$ 

### 3.7 Potencial vectorial magnético

Recordamos de electrostática que la introducción del potencial eléctrico, simplificó mucho los cálculos para obtener el campo eléctrico, ésto debido a que el rotacional del campo eléctrico se anula. Para la inducción magnética, es evidente de la ec. (3.248) que el rotacional de  $\mathbf{B}$  no se anula, sin embargo, su divergencia si. Ya que la divergencia de un rotacional siempre es cero, es decir,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (3.276)$$

Comparando con (3.265), es posible escribir

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (3.277)$$

Al campo vectorial  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  que se introduce se le da el nombre de *potencial vectorial magnético*, cuya unidad es *weber/metro* = *volt · segundo/metro*. Al igual que el potencial escalar eléctrico, en electrostática, el potencial vectorial magnético es continuo en una interfase

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1. \quad (3.278)$$

Es posible encontrar una manera explícita para calcular  $\mathbf{A}$  en función de una determinada distribución de corriente, de la ec. (3.155) recordamos que

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{\mathbf{I}' d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3}.$$

Recordamos también que

$$\nabla \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3},$$

de modo que

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \mathbf{I}' d\mathbf{l}' \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right). \quad (3.279)$$

Usando la identidad

$$\begin{aligned} \nabla \times (\varphi \mathbf{F}) &= (\nabla \varphi) \times \mathbf{F} + \varphi (\nabla \times \mathbf{F}), \\ \Rightarrow -\mathbf{F} \times (\nabla \varphi) &= \nabla \times (\varphi \mathbf{F}) - \varphi (\nabla \times \mathbf{F}). \end{aligned} \quad (3.280)$$

Entonces

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C I' \left[ \nabla \times \left( \frac{d\mathbf{l}'}{R} \right) - \frac{\nabla \times d\mathbf{l}'}{R} \right], \quad (3.281)$$

donde  $\nabla \times d\mathbf{l}' = \mathbf{0}$ , ya que  $\nabla$  solo opera sobre las cantidades no primadas, de esta forma

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C I' \nabla \times \left( \frac{d\mathbf{l}'}{R} \right), \\ &= \nabla \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I' d\mathbf{l}'}{R} \right). \end{aligned} \quad (3.282)$$

Si comparamos con la ec. (3.277) podemos concluir que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I' d\mathbf{l}'}{R}. \quad (3.283)$$

Si en lugar de corrientes filamentales se tuvieran inducciones magnéticas superficiales (3.156) y volumétricas (3.157), de manera análoga se encuentra que sus respectivos potenciales vectoriales magnéticos son

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') da'}{R}, \quad (3.284)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') dv'}{R}. \quad (3.285)$$

El flujo magnético, puede expresarse también en función del potencial vectorial sustituyendo (3.277) en (3.268)

$$\Phi = \int_S [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{a}. \quad (3.286)$$

Usando el teorema de Stokes

$$\Phi = \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.287)$$

Es de gran interés calcular la divergencia de  $\mathbf{A}$ . Usando la ec. (3.283) se tiene

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \nabla \cdot \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I' d\mathbf{l}'}{R} \right) . \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C I' \nabla \cdot \left( \frac{d\mathbf{l}'}{R} \right) . \end{aligned} \quad (3.288)$$

Usando la identidad

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot (\nabla \varphi) + \varphi (\nabla \cdot \mathbf{F}). \quad (3.289)$$

Entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C I' \left[ d\mathbf{l}' \cdot \nabla \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} (\nabla \cdot d\mathbf{l}') \right], \quad (3.290)$$

donde  $\nabla \cdot d\mathbf{l}' = 0$  y

$$\nabla \left( \frac{1}{R} \right) = -\nabla' \left( \frac{1}{R} \right), \quad (3.291)$$

así

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C I' \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{l}'. \quad (3.292)$$

Usando ahora el teorema de la Stokes se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_S I' \left[ \nabla' \times \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) \right] \cdot d\mathbf{a}' . \quad (3.293)$$

Dado que el rotacional de un gradiente siempre es cero, entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.294)$$

Supóngase que  $\mathbf{A}$  es un potencial vectorial que da el valor correcto de  $\mathbf{B}$  cuando se le usa en  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Supóngase ahora que  $\mathbf{A}^\dagger$  es otra función dada por

$$\mathbf{A}^\dagger(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \chi(\mathbf{r}). \quad (3.295)$$

A esta expresión donde  $\nabla \chi(\mathbf{r})$  es un campo escalar, se le conoce como *transformación de norma*. La inducción  $\mathbf{B}^\dagger$  correspondiente a  $\mathbf{A}^\dagger$  se obtiene de (3.277)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^\dagger(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}^\dagger(\mathbf{r}), \\ &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \chi(\mathbf{r}), \\ &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.296)$$

De manera que ambas inducciones son idénticas, sin embargo de (3.283) se llegó de manera directa a que  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , en consecuencia resulta razonable que cualquier potencial vectorial que se desee utilizar deberá satisfacer esta misma condición, de modo que

$$\nabla \cdot \mathbf{A}^\dagger(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.297)$$

Esta condición implica ciertas restricciones en  $\chi$ . Si calculamos la divergencia de (3.295)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}^\dagger(\mathbf{r}) &= \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \cdot \nabla \chi(\mathbf{r}), \\ \Rightarrow \nabla^2 \chi(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.298)$$

En otras palabras, se requiere que  $\chi$  sea una solución a la ecuación de Laplace. Los requisitos (3.297) y (3.298), conducen a la llamada *norma de Coulomb*.

### 3.8 Ecuación de Poisson

Nos resultara de gran utilidad conocer la ecuación diferencial que  $\mathbf{A}$  debe satisfacer. Al obtener el rotacional de (3.277) en ambos miembros de la igualdad se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (3.299)$$

Si usamos la identidad

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (3.300)$$

y usando que  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , entonces

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (3.301)$$

comparando con (3.248) vemos que

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad (3.302)$$

lo que en coordenadas rectangulares

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x ; \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y ; \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z. \quad (3.303)$$

Si ahora comparamos con (2.239), observamos que cada componente de  $\mathbf{A}$  satisface la *ecuación de Poisson*, cuya solución está dada por las ecs. (3.283), (3.284) y (3.285).

### 3.9 Desarrollo multipolar magnético

Recordamos que el potencial vectorial magnético de una distribución filamental de corriente constante está dada por la ec. (3.283):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

**Observación 3.8** Al considerar la figura 3.31 se puede observar que  $d\mathbf{l}' = d\mathbf{r}'$

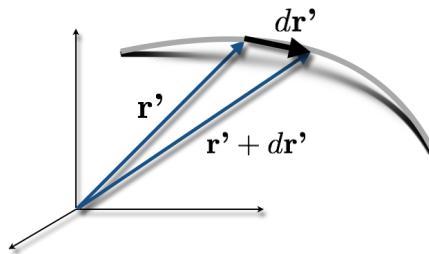


Figura 3.31: Relación entre los vectores  $d\mathbf{l}'$  y  $d\mathbf{r}'$

Si queremos calcular el potencial a una distancia  $r \gg r'$  como se muestra en la figura 3.32, podemos hacer una expansión en series de potencias de  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$  como lo hicimos en electrostática, el cálculo de esta expansión se realizó en la sección 2.1 y está dada por la ec. (2.7):

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \theta').$$

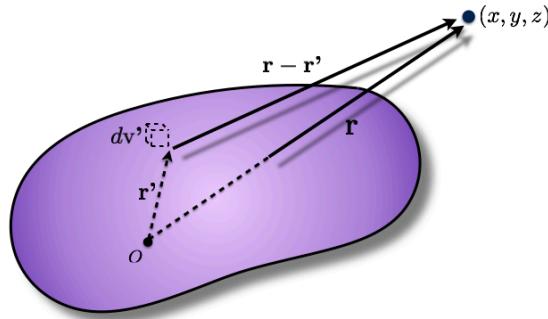


Figura 3.32: Potencial magnético en un punto  $r \gg r'$ .

De esta forma el potencial magnético puede ser escrito como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint_{C'} r'^n P_n(\cos \theta') d\mathbf{r}'. \quad (3.304)$$

Desarrollando la suma obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \mathbf{A}_M(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_D(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_Q(\mathbf{r}) + \dots \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \oint_{C'} d\mathbf{r}' + \frac{1}{r^2} \oint_{C'} r' \cos \theta' d\mathbf{r}' \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^3} \oint_{C'} r'^2 \left( \frac{3}{2} \cos \theta' - \frac{1}{2} \right) d\mathbf{r}' + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.305)$$

donde los primeros términos de la suma son respectivamente, el término *monopolar magnético*, *dipolar magnético* y *cuadripolar magnético*.

Para el término monopolar se observar que la integral es sólo alrededor de una trayectoria cerrada por lo que es igual a cero

$$\mathbf{A}_M(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r} \oint_C d\mathbf{r}' = \mathbf{0}. \quad (3.306)$$

Esto refleja el hecho de que en el caso magnético no existen cargas magnéticas. Para la contribución del término dipolar se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_D(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} \oint_C r' \cos \theta' d\mathbf{r}', \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} \oint_C d\mathbf{r}' (\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}). \end{aligned} \quad (3.307)$$

**Observación 3.9** La cantidad dentro de la integral se puede escribir de la forma

$$d\mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} d[\mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}})]. \quad (3.308)$$

Para mostrar esto se usa la siguiente identidad al integrando

$$\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} + \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}),$$

esto es

$$d\mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) = (\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{r}'(d\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}). \quad (3.309)$$

Por otra parte de la derivada  $d[\mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}})]$  se obtiene

$$d\mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) = d[\mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}})] - \mathbf{r}'(d\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}). \quad (3.310)$$

Al sumar (3.309) y (3.310) y dividiendo entre dos se obtiene el resultado deseado.

Así de el dipolo magnético, ec. (3.307), se puede escribir de la forma

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} \oint_C \left( \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} d[\mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}})] \right). \quad (3.311)$$

Como el último término es un diferencial exacto, no contribuye a la integral, de esta forma

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} \oint_C \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.312)$$

Se define el *momento dipolar magnético* como

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_C (\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'), \quad (3.313)$$

esta definición, permite expresar el término dipolar magnético como

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (3.314)$$

**Observación 3.10** En el caso de que se trabaje con un lazo plano, la cantidad

$$\frac{1}{2} \oint_C (\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'), \quad (3.315)$$

es un vector normal al plano del lazo y su magnitud es igual al área que encierra el lazo.

■ **Ejemplo 3.18** Considerese un lazo rígido rectangular de lados  $a$  y  $b$  por el que circula una corriente constante  $I$ . El lazo tiene la libertad de girar en torno al eje  $x$ . La presencia de un campo magnético homogéneo en dirección del eje  $z$  genera un cambio de la dirección del momento dipolar magnético.

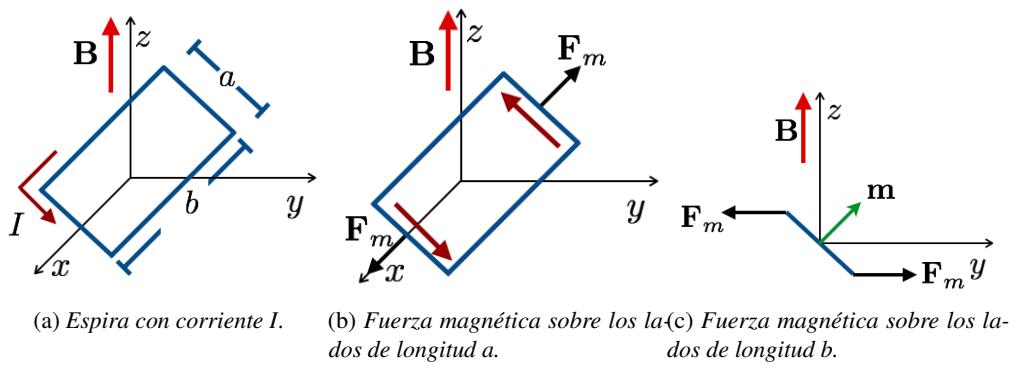


Figura 3.33: Espira rectangular en un campo magnético

Sobre cada uno de los lados de longitud  $a$ , perpendiculares al eje  $x$ , hay una fuerza magnética  $\mathbf{f}_{m_1}$  y  $\mathbf{f}_{m_2}$  cuya magnitud es igual pero tienen direcciones opuestas, como se muestra en la fig. 3.33b, por lo cual la fuerza neta en el eje  $x$  es nula. Para los lados de longitud  $b$ , paralelos al eje  $x$ , hay dos fuerzas magnéticas  $\mathbf{F}_m$ , como se muestran en la fig. 3.33c. Estas fuerzas generan una rotación en el lazo rectangular, lo cual implica un cambio en la dirección del vector  $\mathbf{m}$  hasta que sea paralelo con el campo magnético  $\mathbf{B}$ .





## 4 — Campo magnético en materiales

Si se examina una pieza de material a nivel atómico, se encontrarán corrientes pequeñas debido a que los electrones se encuentran orbitando alrededor del núcleo, *corrientes átomicas*, en consecuencia podemos calcular un momento dipolar magnético **m** para cada átomo. Debido a la orientación arbitraria de los átomos existe una cancelación de todos los vectores **m**, pero cuando un campo magnético es aplicado, ocurre un alineamiento de éstos y el medio tiene una polarización magnética o se dice que se ha *magnetizado*. Aun en ausencia de un campo magnético, algunos materiales tienen sus dipolos permanentes que se encuentran parcialmente alineados, por lo que se dice que el material está *permanentemente magnetizados* o que es un *imán permanente*.

### 4.1 Magnetización

Definiremos una cantidad vectorial macroscópica, la *magnetización* **M**, por el mismo método usado para definir la polarización en el capítulo 3, de esta forma la magnetización es el momento dipolar magnético por unidad de volumen

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dv}, \text{ con } [\mathbf{M}] = \frac{\text{Ampere}}{\text{metro}}. \quad (4.1)$$

Así, el momento dipolar total de un volumen *V* de material resulta ser

$$\mathbf{m} = \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}) dv. \quad (4.2)$$

Desde el punto de vista macroscópico, todos los efectos magnéticos debidos a la materia pueden describirse en función de **M**.

A diferencia de la polarización eléctrica, que es en la misma dirección del campo eléctrico **E**, algunos materiales adquieren una magnetización paralela al campo magnético, **B**, denominados *paramagnetos*, y algunos tienen una magnetización opuesta a **B** denominados *diamagnetos*. Otros pocos materiales son capaces de continuar magnetizados incluso después de haber retirado el campo externo, a este tipo de materiales se les conoce como *ferromagnetos*.

### 4.2 Corrientes de magnetización

Supongamos tener un objeto magnetizado y se desea obtener el potencial magnético producido en un punto **r** como se ilustra en la figura 4.1.

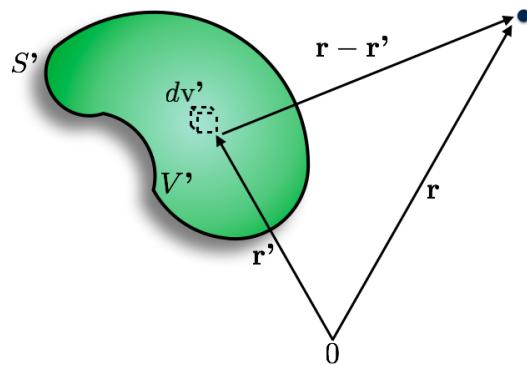


Figura 4.1: Potencial vectorial magnético en un punto  $\mathbf{r}$ .

De la ec. (3.314) sabemos que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

La contribución al potencial de un momento dipolar  $d\mathbf{m}'$  es

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{m}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (4.3)$$

Usando la ec. (4.1)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}'. \quad (4.4)$$

Ahora usamos la identidad

$$\nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

con lo cual

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{v}'. \quad (4.5)$$

Además

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \nabla' \times \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right). \quad (4.6)$$

Así de (4.5)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{v}' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \times \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{v}'. \quad (4.7)$$

Para continuar se realiza la siguiente observación sobre la última integral de volumen

**Observación 4.1** Sea  $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ ,  $\mathbf{c}$  un vector constante y  $\hat{\mathbf{n}}$  el vector unitario normal a la

superficie que encierra un volumen  $V'$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c} \cdot \int_{V'} \nabla' \times \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{v}' &= \int_{V'} \mathbf{c} \cdot \nabla' \times \mathbf{F} d\mathbf{v}' \\
 &= \int_{V'} \nabla' \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{c}) d\mathbf{v}' \\
 &= \oint_S (\mathbf{F} \times \mathbf{c}) \cdot d\mathbf{a}' \\
 &= -\mathbf{c} \cdot \oint_S \mathbf{F} \times \hat{\mathbf{n}} da'.
 \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{V'} \nabla' \times \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{v}' = -\oint_S \mathbf{F} \times \hat{\mathbf{n}} da'. \quad (4.8)$$

Sustituyendo esta última expresión en (4.7)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{v}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da'. \quad (4.9)$$

Por comparación con las ecuaciones (3.284) y (3.285), las cuales se escriben nuevamente para comodidad del lector:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da', \\
 \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{v}'.
 \end{aligned}$$

se define la *densidad volumétrica de corriente magnética*,  $\mathbf{J}_m$ , y una *densidad superficial de corriente magnética*,  $\mathbf{K}_m$  como

$$\mathbf{J}_m(\mathbf{r}') = \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}'), \quad (4.10)$$

$$\mathbf{K}_m(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}. \quad (4.11)$$

Así se tendría

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{v}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{K}_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da', \quad (4.12)$$

es común omitir las primas en (4.10) y (4.11) y simplemente escribir

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}. \quad (4.14)$$

Hemos encontrado una densidad de corriente  $\mathbf{J}_m$  asociada con la presencia de la materia y, tal como en el caso de las cargas libres y de polarización en el capítulo 3, es conveniente dividir las corrientes que resultan de las cargas en movimiento en dos clases, *corrientes libres* y *corrientes de magnetización* descritas respectivamente por  $\mathbf{J}_l$  y  $\mathbf{J}_m$ . Por lo tanto, se puede expresar la densidad total de corriente como

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_l + \mathbf{J}_m. \quad (4.15)$$

**Ejemplo 4.1** Un imán permanente tiene la forma de un cilindro circular recto de longitud  $L$ . Si la magnetización  $\mathbf{M}$  es uniforme y tiene la dirección del eje del cilindro (figura 4.2), encuentre las densidades de corriente de magnetización  $\mathbf{J}_m$  y  $\mathbf{K}_m$ .

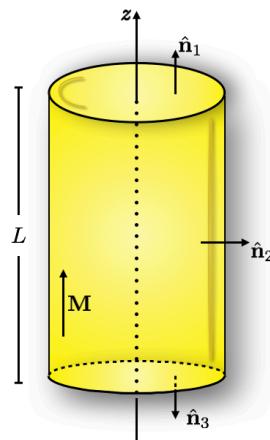


Figura 4.2: Imán cilíndrico

*Solución.*

Supongamos que el eje del cilindro se orienta paralelo al eje  $z$ , de esta forma la magnetización es  $\mathbf{M} = M \mathbf{k}$ . De la ec. (4.13) sabemos que

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M},$$

y dado que  $\mathbf{M}$  es uniforme, entonces se tiene

$$\mathbf{J}_m = \mathbf{0}. \quad (4.16)$$

Por otro lado, de la ec. (4.14) recordamos que

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}.$$

De esta forma se tiene que

$$\mathbf{K}_{m_1} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{0}, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{K}_{m_2} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}_2 = M \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{r}} = M \hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{K}_{m_3} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}_3 = \mathbf{0}. \quad (4.19)$$

Podemos observar que la corriente superficial circula alrededor del cilindro en la dirección  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ , y resulta que una corriente de este tipo es el equivalente de un solenoide ideal. ■

■ **Ejemplo 4.2** Halle las densidades de carga de magnetización correspondiente a una esfera de radio  $a$  uniformemente magnetizada con magnetización  $\mathbf{M}$ .

*Solución.*

Tomemos la magnetización paralela al eje  $z$  de modo que  $\mathbf{M} = M \mathbf{k}$  (figura 4.3), así, dado que  $\mathbf{M}$  es constante

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_m &= \nabla \times \mathbf{M}, \\ \therefore \mathbf{J}_m &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ahora, para la densidad superficial de corriente se encuentra que

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_m &= \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}, \\ &= M \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{r}}, \\ &= M \mathbf{k} \times (\sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}), \\ &= M \sin \theta (\cos \varphi \mathbf{j} - \sin \varphi \mathbf{i}), \\ \therefore \mathbf{K}_m &= M \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

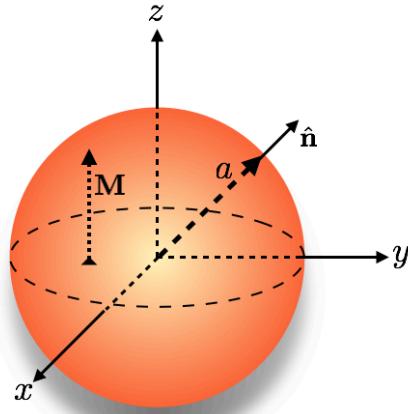


Figura 4.3: Esfera uniformemente magnetizada.

Por lo tanto, las corrientes superficiales se encuentran a lo largo de los paralelos de la esfera, con una magnitud máxima en el ecuador y cero en los polos. ■

### 4.3 Potencial escalar magnético

Al usar la ec. (4.4) en  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  se obtiene el campo magnético en función de la magnetización

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \times \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dV'. \quad (4.22)$$

De la identidad vectorial

$$\nabla \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\nabla \cdot \mathbf{D})\mathbf{C} - (\nabla \cdot \mathbf{C})\mathbf{D} + (\mathbf{D} \cdot \nabla)\mathbf{C} - (\mathbf{C} \cdot \nabla)\mathbf{D}, \quad (4.23)$$

con

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{D} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (4.24)$$

se obtiene<sup>1</sup>

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \mathbf{M}(\mathbf{r}') - \left( \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \right) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (4.25)$$

Resulta conveniente analizar cada uno de los términos. Para el primer término

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (4.26)$$

Para el segundo término se considera

$$\nabla(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = (\mathbf{C} \cdot \nabla)\mathbf{D} + (\mathbf{D} \cdot \nabla)\mathbf{C} + \mathbf{C} \times (\nabla \times \mathbf{D}) + \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{C}), \quad (4.27)$$

por lo cual

$$\nabla \left( \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = \left( \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \right) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \left( \nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right), \quad (4.28)$$

<sup>1</sup>con  $\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') = 0$

es decir

$$(\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla \left( \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right). \quad (4.29)$$

Finalmente se tiene que

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{M}(\mathbf{r}') - \nabla \left( \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right), \quad (4.30)$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{M}(\mathbf{r}') - \nabla \left( \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \right] d\mathbf{v}', \\ &= \mu_0\mathbf{M}(\mathbf{r}) - \mu_0\nabla \left( \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}' \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Se define el *potencial escalar magnético*,  $\phi_m(\mathbf{r})$

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}', \quad (4.32)$$

por lo cual, el campo magnético se puede expresar de la forma

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0\mathbf{M}(\mathbf{r}) - \mu_0\nabla\phi_m(\mathbf{r}). \quad (4.33)$$

Se puede trabajar un poco más con el potencial escalar magnético al considerar la siguiente observación

**Observación 4.2** Sea  $f(\mathbf{r})$  y  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  funciones escalares y vectoriales respectivamente, del cálculo diferencial de varias variables se tiene

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f. \quad (4.34)$$

Sea  $f(\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  y  $\mathbf{F}(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}')$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} &= \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Con este resultado se tiene para el potencial escalar magnético

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[ \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{v}', \quad (4.36)$$

para el primer término dentro de la integral se aplica el teorema de Gauss, de tal forma que se obtiene

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{a}' + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{v}', \quad (4.37)$$

En analogía al caso potencial escalar electrostático se define la *densidad superficial de intensidad de polos magnéticos*

$$\sigma_m(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (4.38)$$

y también se define la *densidad volumétrica de polos magnéticos* como

$$\rho_m(\mathbf{r}') = -\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}'). \quad (4.39)$$

Por lo tanto

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \sigma_m(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{a}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \rho_m(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}', \quad (4.40)$$

este campo magnético es generado de la magnetización del medio. La expresión general del campo magnético está dada por

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}_l(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}' + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) - \mu_0 \nabla \phi_m(\mathbf{r}). \quad (4.41)$$

#### 4.4 Ley de Ampère en medios permeables

Recordamos que la ley de Ampère en su forma diferencial, está dada por la ecuación (3.248)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Si sustituimos (4.15) se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{J}_l + \mathbf{J}_m), \\ &= \mu_0 (\mathbf{J}_l + \nabla \times \mathbf{M}), \\ \Rightarrow \nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) &= \mathbf{J}_l. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Sea

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad (4.43)$$

entonces

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_l. \quad (4.44)$$

Por otro lado, recordamos la forma integral de la ley de Ampère, ec. (3.245)

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 I_{enc}, \\ &= \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}, \\ &= \mu_0 \int (\mathbf{J}_l + \mathbf{J}_m) \cdot d\mathbf{a}, \\ &= \mu_0 \int (\mathbf{J}_l + \nabla \times \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{a}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Al usar el teorema de Stokes en la última integral

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 \left( \int \mathbf{J}_l \cdot d\mathbf{a} + \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \right), \\ \Rightarrow \oint_C \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} &= \int \mathbf{J}_l \cdot d\mathbf{a} = I_{enc}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde  $I_{enc}$  es la corriente libre que pasa a través de la superficie  $S$  encerrada por la trayectoria  $C$ . Por lo tanto

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{enc}. \quad (4.47)$$

## 4.5 Intensidad del campo magnético

El campo vectorial  $\mathbf{H}$  definido en la ec. (4.43) recibe el nombre de *intensidad del campo magnético*, a veces *campo  $\mathbf{H}$* , y tiene las mismas dimensiones de  $\mathbf{M}$ .

**Observación 4.3** Comparando las ecs. (4.43) y (4.41) se deduce la forma de determinar el vector  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}_l(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}' - \mu_0 \nabla \phi_m(\mathbf{r}). \quad (4.48)$$

Las condiciones de frontera que satisface el campo  $\mathbf{H}$  se obtienen de la siguiente forma

- Al considerar la integral de superficie cerrada, como en la figura 3.27,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0. \quad (4.49)$$

y usando la ec. (4.43) se obtiene la relación

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} = - \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{a}. \quad (4.50)$$

Al seguir el proceso para obtener la ec. (3.272) se tiene

$$H_{2n} - H_{1n} = -(M_{2n} - M_{1n}). \quad (4.51)$$

- Ahora podemos obtener el comportamiento de las componentes tangenciales de  $\mathbf{H}$  en una interfase. Este procedimiento es análogo al realizado para obtener la ec. (3.275), de esta forma se deduce

$$\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{K}_l \times \hat{\mathbf{n}}, \quad (4.52)$$

donde  $\mathbf{K}_l$  es la densidad de corriente superficial libre.

Para resolver problemas de teoría magnética, es esencial tener una relación entre  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{H}$ , ésta depende del material magnético y se obtiene experimentalmente. Consideremos un material magnético isotrópico, homogéneo y lineal para el que la magnetización resulta ser proporcional al campo magnético, de modo que se puede escribir

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (4.53)$$

donde  $\chi_m$  recibe el nombre de *susceptibilidad magnética* y es característica de cada material. Para materiales con  $|\chi_m| \ll 1$  y si  $\chi_m > 0$  se trata de materiales *paramagnéticos* mientras que para el caso  $\chi_m < 0$  se trata de materiales *diamagnéticos*.

Si sustituimos la ec. (4.53) en (4.43)

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \chi_m \mathbf{H}, \\ \Rightarrow \mathbf{B} &= \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Definimos la *permeabilidad magnética*,  $\mu$ , como

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m), \quad (4.55)$$

por lo cual

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (4.56)$$

esta relación es una ecuación constitutiva entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ . La cantidad adimensional

$$K_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m, \quad (4.57)$$

se llama *permeabilidad relativa*. En ausencia de corriente libre, la ec. (4.42) se reduce a

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad (4.58)$$

lo cual implica que  $\mathbf{H}$  se genera a partir del gradiente de una función escalar, de la ec. (4.48) se deduce

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi_m. \quad (4.59)$$

**Observación 4.4** Al considerar las ecs. (4.56) y (4.59) se deduce

$$\mathbf{B} = -\mu \nabla \phi_m. \quad (4.60)$$

Además

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla^2 \phi_m, \quad (4.61)$$

por otra parte, al usar (4.43) también es posible obtener

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (4.62)$$

Al igualar estos resultados se tiene

$$\nabla^2 \phi_m = \nabla \cdot \mathbf{M}, \quad (4.63)$$

es decir,  $\phi_m$  satisface la ecuación de Poisson. Al considerar la ec. (4.39) se tiene

$$\nabla^2 \phi_m = -\rho_m. \quad (4.64)$$

Este potencial escalar también permite determinar  $\mathbf{B}$  a partir de la ecuación constitutiva (4.56). Para el caso de una magnetización uniforme,  $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ , se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (4.65)$$

por lo cual

$$\nabla^2 \phi_m = 0, \quad (4.66)$$

es decir  $\phi_m$  satisface la ecuación de Laplace.

**Observación 4.5**

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \rho_m, \quad (4.67)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = -\sigma_m. \quad (4.68)$$

Muchos problemas de magnetostática pueden resolverse como se hizo con los problemas electrostáticos, y pueden ser aplicados varios métodos que se desarrollaron en el capítulo 2 si se hacen los cambios  $\epsilon_0 \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$ ,  $\epsilon_0 \phi \rightarrow \phi_m$  y  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{M}$ .

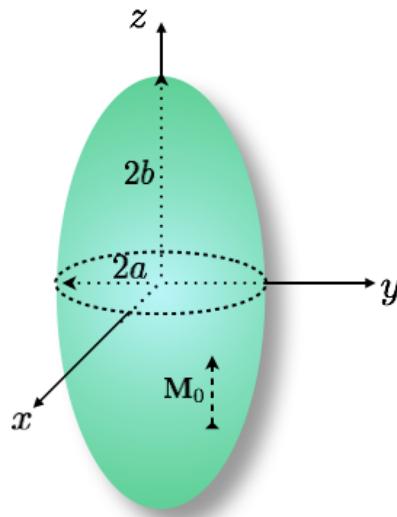


Figura 4.4: Elipsoide de revolución con ejes principales de longitudes  $2a$ ,  $2a$  y  $2b$ .

■ **Ejemplo 4.3** Un elipsoide con sus ejes principales de longitudes  $2a$ ,  $2a$  y  $2b$  se magnetiza uniformemente en una dirección paralela al eje  $2b$ . La magnetización del elipsoide es  $\mathbf{M}_0$  (figura 4.4). Encuentre las densidades magnéticas polares para esta geometría.

*Solución.*

La ecuación de un elipsoide con centro en el origen de coordenadas y ejes coincidentes con los cartesianos, es

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1, \quad (4.69)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son las longitudes de los semiejes del elipsoide respecto de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Para este caso la ecuación del elipsoide será

$$\left(\frac{x}{2a}\right)^2 + \left(\frac{y}{2a}\right)^2 + \left(\frac{z}{2b}\right)^2 = 1. \quad (4.70)$$

Para obtener la densidad volumétrica de carga magnética se usa la ec. (4.39):

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M}.$$

Como la magnetización es uniforme, entonces

$$\therefore \rho_m = 0. \quad (4.71)$$

Por otro lado, de la ec. (4.38) se puede calcular la densidad superficial de carga magnética:

$$\sigma_m = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{M}.$$

Para determinar el vector normal unitario a la superficie,  $\hat{\mathbf{n}}$ , necesario calcular el gradiente de esta superficie. De la ec. (4.70) se tiene que

$$b^2x^2 + b^2y^2 + a^2z^2 = f(x, y, z). \quad (4.72)$$

Así que

$$\begin{aligned} \nabla f &= 2(b^2x\mathbf{i} + b^2y\mathbf{j} + a^2z\mathbf{k}), \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{n}} &= \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{b^2x\mathbf{i} + b^2y\mathbf{j} + a^2z\mathbf{k}}{\sqrt{b^4x^2 + b^4y^2 + a^4z^2}}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

De esta forma

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \left[ \frac{b^2x\mathbf{i} + b^2y\mathbf{j} + a^2z\mathbf{k}}{\sqrt{b^4(x^2+y^2)+a^4z^2}} \right] \cdot M_0\mathbf{k}, \\ \therefore \sigma_m &= \frac{M_0z}{\sqrt{\frac{b^4}{a^4}(x^2+y^2)+z^2}}.\end{aligned}\quad (4.74)$$

■

**Ejemplo 4.4** Una esfera de material magnético de radio  $R$  se coloca en el origen de coordenadas. La magnetización está dada por  $\mathbf{M} = (ax^2 + b)\mathbf{i}$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes (figura 4.5). Determine todas las densidades polares y las corrientes de magnetización.

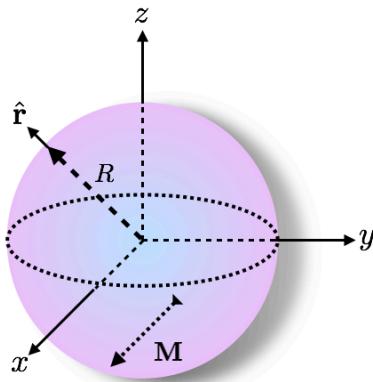


Figura 4.5: Esfera magnetizada.

*Solución.*

Para la densidad volumétrica de carga magnética se tiene

$$\begin{aligned}\rho_m &= -\nabla \cdot \mathbf{M}, \\ \therefore \rho_m &= -2ax.\end{aligned}\quad (4.75)$$

Ahora, para la densidad superficial de carga magnética

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{M}, \\ &= \hat{\mathbf{r}} \cdot (ax^2 + b)\mathbf{i}, \\ &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \cdot (ax^2 + b, 0, 0), \\ \therefore \sigma_m &= (ax^2 + b) \sin \theta \cos \phi.\end{aligned}\quad (4.76)$$

Esta es la forma general de densidad superficial, el siguiente paso es ubicar la densidad sobre la superficie de la esfera, esto se logra al hacer el cambio

$$x = R \cos \phi \sin \theta.$$

Por otro lado, se tiene que las densidades de corriente de magnetización

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_m &= \nabla \times \mathbf{M}, \\ \therefore \mathbf{J}_m &= \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (4.77)$$

Finalmente, para la densidad superficial de corriente se encuentra que

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_m &= \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}, \\ &= (ax^2 + b)\mathbf{i} \times \hat{\mathbf{r}}, \\ &= (ax^2 + b)\mathbf{i} \times (\sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}), \\ \therefore \mathbf{K}_m &= (ax^2 + b)(\sin \theta \sin \varphi \mathbf{k} - \cos \theta \mathbf{j}),\end{aligned}\quad (4.78)$$

Como en el caso de  $\sigma_m$  se hace el cambio  $x = R \cos \phi \sin \theta$  para ubicar  $K_m$  sobre la superficie de la esfera. ■

■ **Ejemplo 4.5** Dos medios magnéticos están separados por un plano interfacial (figura 4.6). Demuestre que los ángulos formados por la normal a la frontera y los campos  $\mathbf{B}$  en ambos lados satisfacen la relación

$$\mu_2 \tan \theta_1 = \mu_1 \tan \theta_2.$$

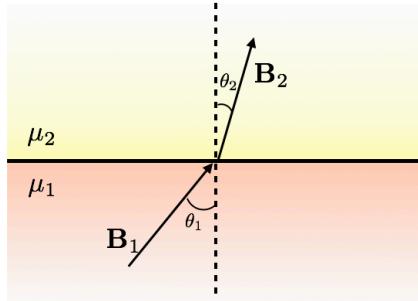


Figura 4.6: Medios magnéticos separados por plano interfacial.

*Solución.*

Recordamos las condiciones de frontera (3.272) y (4.52)

$$\begin{aligned}B_{2n} - B_{1n} &= 0, \\ \mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} &= \mathbf{K}_l \times \hat{\mathbf{n}}.\end{aligned}\quad (4.79)$$

Como no hay densidad superficial de corriente en la zona interfacial, entonces

$$H_{2t} - H_{1t} = 0. \quad (4.80)$$

Por otro lado, recordamos también que

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

así de (4.80)

$$\frac{B_{2t}}{\mu_2} - \frac{B_{1t}}{\mu_1} = 0. \quad (4.81)$$

Las componentes de los campos  $B_1$  y  $B_2$  son

$$B_{1t} = B_1 \sin \theta_1 ; \quad B_{1n} = B_1 \cos \theta_1, \quad (4.82)$$

$$B_{2t} = B_2 \sin \theta_2 ; \quad B_{2n} = B_2 \cos \theta_2. \quad (4.83)$$

Usando éstas ecuaciones en (4.79) y (4.81) obtenemos

$$B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2. \quad (4.84)$$

$$\mu_2 B_1 \sin \theta_1 = \mu_1 B_2 \sin \theta_2. \quad (4.85)$$

Finalmente realizando el cociente de (4.84) y (4.85)

$$\therefore \mu_2 \tan \theta_1 = \mu_1 \tan \theta_2. \quad (4.86)$$

■

**Ejemplo 4.6** Un cilindro largo de radio  $a$  y permeabilidad magnética  $\mu$  se coloca en un campo magnético uniforme  $\mathbf{B}_0$ , de tal modo que el eje del cilindro es perpendicular a  $\mathbf{B}_0$ . Calcule el campo magnético dentro del cilindro.

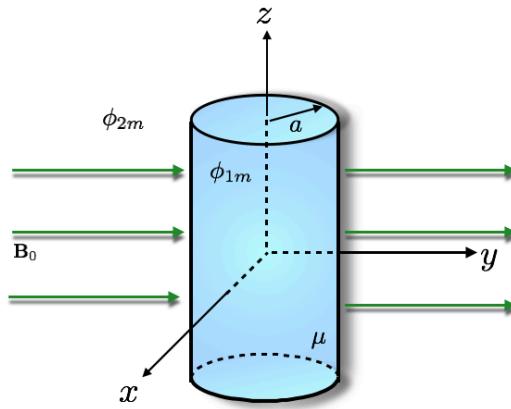


Figura 4.7: Cilindro magnético de radio  $a$  inmerso en un campo  $\mathbf{B}_0$

*Solución.*

Para determinar el campo magnético se considera que el eje del cilindro coincide con el eje  $z$  y la dirección del campo magnético es paralela al eje  $y$ , fig. 4.7. Para una región muy alejada del cilindro se tiene

$$\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{j}. \quad (4.87)$$

Por otra parte, al considerar la ec. (4.60) para esta región se deduce

$$\phi_m = -\frac{B_0}{\mu_0} y, \quad (4.88)$$

o bien, en coordenadas cilíndricas

$$\phi_m = -\frac{B_0}{\mu_0} r \sin \theta. \quad (4.89)$$

Para encontrar el potencial dentro y fuera del cilindro usamos la solución a la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas, ec. (2.335)

$$\phi(r, \varphi) = A_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi) \right] \left( C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right),$$

la cual debe satisfacer las siguientes condiciones de frontera:

1.  $\phi_{m_2}(r \rightarrow \infty, \varphi) = -\frac{B_0}{\mu_0} r \sin \varphi.$
2.  $\phi_{m_1}(a, \varphi) = \phi_{m_2}(a, \varphi).$
3.  $B_{2n} \Big|_{r=a} - B_{1n} \Big|_{r=a} = 0.$

Así que el potencial interno tiene el comportamiento

$$\phi_{m_1}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi) \right] \left( C_n r^n \right). \quad (4.90)$$

El potencial externo tiene el comportamiento

$$\phi_{m_2}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ D_n \cos(n\varphi) + E_n \sin(n\varphi) \right] \left( F_n r^n + \frac{G_n}{r^n} \right). \quad (4.91)$$

Al aplicar la primera condición al potencial externo

$$\begin{aligned} \phi_{m_2}(r \rightarrow \infty, \varphi) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ D_n \cos(n\varphi) + E_n \sin(n\varphi) \right] F_n r^n, \\ &= -\frac{B_0}{\mu_0} r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Podemos observar que debe cumplirse

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\varphi) F_n r^n &= 0, \\ \Rightarrow D_n F_n &= 0. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Además

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin(n\varphi) F_n r^n = -\frac{B_0}{\mu_0} r \sin \varphi. \quad (4.94)$$

Notemos que todos los coeficientes son igual a cero a excepción de  $n = 1$ , es decir

$$E_1 F_1 = -\frac{B_0}{\mu_0}. \quad (4.95)$$

Sustituyendo los coeficientes para el potencial externo, ec. (4.91), se obtiene

$$\phi_{m_2}(r, \varphi) = -\frac{B_0}{\mu_0} r \sin \varphi + \frac{E_1 G_1}{r} \sin \varphi. \quad (4.96)$$

Ahora aplicamos la segunda condición

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi) \right] \left( C_n a^n \right) = \left( -\frac{B_0}{\mu_0} a + \frac{E_1 G_1}{a} \right) \sin \varphi. \quad (4.97)$$

Se observa que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\varphi) C_n a^n &= 0, \\ \Rightarrow A_n C_n &= 0. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Además

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\varphi) C_n a^n = \left( -\frac{B_0}{\mu_0} a + \frac{E_1 G_1}{a} \right) \sin \varphi,$$

por lo cual, los coeficientes son igual a cero excepto para  $n = 1$

$$\Rightarrow E_1 G_1 = \left( \frac{B_0}{\mu_0} + B_1 C_1 \right) a^2. \quad (4.99)$$

Sustituyendo los coeficientes en el potencial interno, ec. (4.90), y externo, ec. (4.96), obtenemos

$$\phi_{m_1}(r, \varphi) = B_1 C_1 r \sin \varphi, \quad (4.100)$$

$$\phi_{m_2}(r, \varphi) = \left[ -\frac{B_0}{\mu_0} r + \left( \frac{B_0}{\mu_0} + B_1 C_1 \right) \frac{a^2}{r} \right] \sin \varphi. \quad (4.101)$$

Considerando nuevamente la relación entre  $\mathbf{B}$  y  $\phi_m$ , ec. (??),

$$\mathbf{B} = -\mu \nabla \phi_m,$$

la componente normal de  $\mathbf{B}$  en la zona interfacial es

$$B_n = -\mu \frac{\partial \phi_m}{\partial r}, \quad (4.102)$$

entonces la condición 3 se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial \phi_{m_2}}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \mu \frac{\partial \phi_{m_1}}{\partial r} \Big|_{r=a}, \\ -\mu_0 \left( 2 \frac{B_0}{\mu_0} + B_1 C_1 \right) \sin \varphi &= \mu B_1 C_1 \sin \varphi, \\ \Rightarrow B_1 C_1 &= \frac{-2B_0}{\mu_0 + \mu} \end{aligned} \quad (4.103)$$

Sustituyendo esta última expresión en (4.100) y (4.101) obtenemos

$$\phi_{m_1}(r, \varphi) = \frac{-2B_0}{\mu_0 + \mu} r \sin \varphi = -\frac{2B_0}{\mu_0 + \mu} y, \quad (4.104)$$

$$\phi_{m_2}(r, \varphi) = \left[ -\frac{B_0}{\mu_0} r + \left( \frac{B_0}{\mu_0} - \frac{2B_0}{\mu_0 + \mu} \right) \frac{a^2}{r} \right] \sin \varphi. \quad (4.105)$$

Para obtener el campo magnético dentro del cilindro, se calcula el gradiente negativo de (4.104)

$$\mathbf{B}_{int} = 2 \frac{\mu/\mu_0}{1 + \mu/\mu_0} \mathbf{B}_0. \quad (4.106)$$

■

**Ejemplo 4.7** Se tiene una cáscara esférica, de radio interno  $R_1$  y radio externo  $R_2$ , con magnetización uniforme  $M_0 \mathbf{k}$ , figura 4.8. Encuentre el potencial escalar magnético  $\phi_m$  para puntos del eje  $z$ , tanto dentro como fuera de la cáscara.

*Solución.*

Como  $\rho_m = 0$ , entonces  $\phi_m$  satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi_m = 0.$$

En el capítulo 2 se obtuvo que la solución a la ec. de Laplace en coordenadas esféricas está dada por la ec. (2.410)

$$\phi_m(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta).$$

La cual debe satisfacer las siguientes condiciones de frontera

1.  $\phi_{m_0}(R_1, \theta) = \phi_{m_1}(R_1, \theta),$
2.  $\phi_{m_1}(R_2, \theta) = \phi_{m_2}(R_2, \theta),$
3.  $B_{0_n}|_{R_1} = B_{1_n}|_{R_1},$
4.  $B_{1_n}|_{R_2} = B_{2_n}|_{R_2}.$

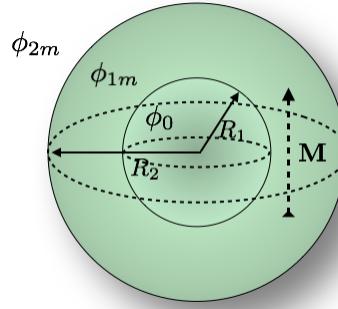


Figura 4.8: Cáscara magnetizada de radio interno  $R_1$  y radio externo  $R_2$ .

Para la región  $r < R_1$  el potencial escalar magnético es

$$\phi_{m_0}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta). \quad (4.107)$$

Para la región  $R_1 < r < R_2$ , hay una magnetización dada por

$$\mathbf{M} = M_0 \mathbf{k}. \quad (4.108)$$

Por otra parte, de (4.53) y (4.60) se tiene

$$\mathbf{M} = -\chi_m \nabla \phi_{m_1}, \text{ con } \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0} - 1, \quad (4.109)$$

entonces

$$\nabla \phi_{m_1} = -\frac{M_0}{\chi_m} \mathbf{k}, \quad (4.110)$$

por lo cual se deduce

$$\phi_{m_1} = -\frac{M_0}{\chi_m} z = -\frac{M_0}{\chi_m} r \cos \theta. \quad (4.111)$$

El potencial escalar magnético para la región  $R_2 < r$  es

$$\phi_{m_2}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta). \quad (4.112)$$

Al aplicar la condición uno se tiene la igualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n R_1^n + \frac{B_n}{R_1^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) = -\frac{M_0}{\chi_m} R_1 \cos \theta \quad (4.113)$$

entonces

$$A_1 R_1^3 = -B_1 - \frac{M_0}{\chi_m} R_1^3, \quad (4.114)$$

$$A_n = \frac{B_n}{R_1^{2n+1}}, \text{ para } n \neq 1. \quad (4.115)$$

Al aplicar la segunda condición si tiene la igualdad

$$-\frac{M_0}{\chi_m} R_2 \cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \left( C_n R_2^n + \frac{D_n}{R_2^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) \quad (4.116)$$

por lo cual se deduce

$$C_1 R_2^3 + D_1 = -\frac{M_0}{\chi_m} R_2^3, \quad (4.117)$$

$$C_n = \frac{D_n}{R_1^{2n+1}}, \text{ para } n \neq 1. \quad (4.118)$$

Para aplicar la condición tres se usa (4.107) en (4.60)

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( nA_n r^{n-1} - (n+1) \frac{B_n}{r^{n+2}} \right) P_n(\cos \theta) \hat{\mathbf{r}} + \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right], \\ \Rightarrow \frac{B_{0n}}{\mu_0} &= \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} \cdot \hat{\mathbf{r}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left( nA_n r^{n-1} - (n+1) \frac{B_n}{r^{n+2}} \right) P_n(\cos \theta), \end{aligned} \quad (4.119)$$

Ahora se usa (4.111) nuevamente en (4.60)

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{B}_1}{\mu} &= \frac{M_0}{\chi_m} \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \frac{M_0}{\chi_m} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}, \\ \Rightarrow \frac{B_{1n}}{\mu} &= \frac{\mathbf{B}_1}{\mu} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{M_0}{\chi_m} \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.120)$$

Así que

$$-\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left( nA_n R_1^{n-1} - (n+1) \frac{B_n}{R_1^{n+2}} \right) P_n(\cos \theta) = \mu \frac{M_0}{\chi_m} \cos \theta, \quad (4.121)$$

por lo cual

$$A_1 R^3 = 2B_1 - \frac{M_0}{\chi_m} \frac{\mu}{\mu_0} R_1^3, \quad (4.122)$$

$$B_n = \frac{n}{n+1} R^{2n+1} A_n, \text{ para } n \neq 1. \quad (4.123)$$

De (4.114) y (4.122) se resuelve para  $B_1$  y  $A_1$ :

$$B_1 = \frac{M_0}{3} R_1^3, \quad (4.124)$$

$$A_1 = -\frac{M_0}{3} \left( \frac{3}{\chi_m} + 1 \right), \quad (4.125)$$

$$A_n = B_n = 0, \text{ para } n \neq 1. \quad (4.126)$$

Análogamente, para aplicar la condición cuatro se usa (4.112) en (4.60)

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_0} &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( nC_n r^{n-1} - (n+1) \frac{D_n}{r^{n+2}} \right) P_n(\cos \theta) \hat{\mathbf{r}} + \left( C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}} \right) \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right], \\ \Rightarrow \frac{B_{2n}}{\mu_0} &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left( nC_n r^{n-1} - (n+1) \frac{D_n}{r^{n+2}} \right) P_n(\cos \theta). \end{aligned} \quad (4.127)$$

Por la simetría que existe entre las soluciones, se deduce

$$D_1 = \frac{M_0}{3} R_2^3, \quad (4.128)$$

$$C_1 = -\frac{M_0}{3} \left( \frac{3}{\chi_m} + 1 \right), \quad (4.129)$$

$$C_n = D_n = 0, \text{ para } n \neq 1. \quad (4.130)$$

Finalmente se puede escribir el potencial escalar magnético en la diferentes regiones

$$\phi_{m_0} = \left[ -\frac{M_0}{3} \left( \frac{3}{\chi_m} + 1 \right) r + \frac{M_0 R_1^3}{3 r^2} \right] \cos \theta, \quad (4.131)$$

$$\phi_{m_1} = -\frac{M_0}{\chi_m} r \cos \theta, \quad (4.132)$$

$$\phi_{m_2} = \left[ -\frac{M_0}{3} \left( \frac{3}{\chi_m} + 1 \right) r + \frac{M_0 R_2^3}{3 r^2} \right] \cos \theta. \quad (4.133)$$

■



## Índice alfabético

### A

Ampère	
Ley .....	170
Armónicos esféricos .....	108

### B

Biot-Savart	
Ley .....	155

### C

Campo	
Eléctrico .....	9
Magnético .....	139
Campo eléctrico .....	9
Carga	
de polarización .....	58
libre .....	58
ligada .....	58
conducción .....	135
conductividad .....	146
Constante dieléctrica .....	62
Corriente eléctrica	
densidad superficial .....	136
Corriente eléctrica .....	135
densidad volumétrica de .....	137
instantánea .....	135

### Coulomb

Ley de .....	5
--------------	---

### D

#### Densidad

superficial de carga de polarización ..	60
volumétrica de carga de polarización ..	60

#### Densidad de carga

lineal .....	7
superficial .....	7
volumétrica .....	7

Desplazamiento eléctrico .....	61
Dieléctrico lineal .....	62

### E

#### Ecuación

de Laplace .....	86
de Poisson .....	85

Ecuación de continuidad .....	138
-------------------------------	-----

### F

#### Fuerza

de Lorentz .....	140
magnética .....	139

**G**

- Gauss  
 Ley de Gauss en su forma diferencial 19  
 Ley de Gauss en su forma integral ... 19

**P**

- permitividad del vacío ..... 139  
 Permitividad eléctrica ..... 62  
 Polarización eléctrica ..... 58

**H**

- Helmholtz  
 bobina de ..... 158

**J**

- Joule  
 Calentamiento de ..... 148

**L**

- Líneas de campo eléctrico ..... 10  
 Laplace, ecuación ..... 147  
 Ley  
   Ampère ..... 170  
   Biot-Savart ..... 155  
   Gauss ..... 85  
 Lorentz  
   fuerza de ..... 140

**R**

- Resistencia eléctrica ..... 148  
 resistividad ..... 147

**S**

- Susceptibilidad eléctrica ..... 58

**T**

- Tiempo de relajación ..... 150

**M**

- momento  
 dipolar ..... 53  
 Momento dipolar  
   inducido ..... 57  
   permanente ..... 57  
 Monopolio magnético ..... 174

**O**

- Ohm  
 Ecuación de ..... 146  
 ecuación de ..... 148  
 unidad ..... 147