Обратные задачи. Тема 1. Вопросы 4–6

Василевский А.В.

Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского

2019

Вопрос 4. Экстремальные задачи для выпуклого функционала

Выпуклая функция

Выпуклой называется функция (функционал) $f(x)$, удовлетворяющая неравенству (Йенсена):

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y), \qquad \alpha + \beta = 1, \quad \alpha, \beta \geq 0$$

Это определение эквивалентно следующему: «Любая подозрительная на экстремум (минимум) точка является точкой глобального экстремума (минимума)». Это легко показать:

$$\alpha = 1 - \beta, \quad f'(x) = 0, \quad \beta \to 0;$$

$$\frac{f(x + \beta(x - y)) - f(x)}{\beta} \leq f(y) - f(x);$$

$$(x - y) f'(x) \leq f(y) - f(x); \quad \Longrightarrow \quad \forall y : f(x) \leq f(y) \quad \blacksquare$$

Строго выпуклая функция

Если исходное неравенство при $x \neq y$ строгое, функция называется строго выпуклой.
Для такой функции верно

$$f'(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad \forall y : f(x) < f(y)$$

Наличие единственного глобального = локального минимума существенно упрощает численную минимизацию функции, поскольку алгоритм гарантированно сойдется к нужной точке.

Условная оптимизация

Для произвольной функции задача условной оптимизации функции $f(x_i)$ при наличии ограничений $\phi_j(x_i) = 0$ может быть сформулирована как задача оптимизации функции Лагранжа по переменным $x_i \cup \lambda_j$:

$$\mathcal{L}[f;\phi_j](x_i, \lambda_j) = f(x_i) + \sum_j \lambda_j \phi_j(x_i) \to \mathrm{opt}_{x_i, \lambda_j}$$

Если f — выпуклая функция, то $\mathcal{L}$ выпукла, если все ϕ_j также являются выпуклыми функциями. Причем $\mathcal{L}$ строго выпукла, если все f и ϕ также строго выпуклы.

Выпуклые множества

Множество C называется выпуклым, если

$$\forall x, y \in C : \alpha x + \beta y \in C$$

Свойства элементов множества C те же, что и у выпуклых функций — существует единственный элемент x_0, являющийся «локальным минимумом» множества:

$$\exists! x_0 \in C : \forall x \in C : \inf_{z \in C} \|x - z\| = \|x - x_0\|$$

Пересечение выпуклых множеств — также выпуклое множество.

Операторы проекции

Введем оператор проекции на выпуклое множество $C \subseteq F$, $\mathcal{P}_C : F \to C$. Определенный таким образом оператор всегда является нерасширяющим. Для строго сужающего оператора тождество

$$x_0 = \mathcal{P}x_0,$$

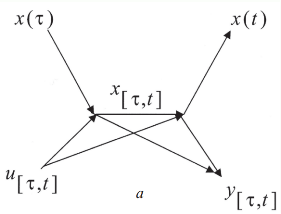
где x_0 — фиксированная точка отображения $\mathcal{P}$, определяет итерационную схему решения задачи с ограничениями:

$$x^{(k+1)} = \mathcal{P}x^{(k)} = \mathcal{P}_n \cdots \mathcal{P}_1 \mathcal{F} x^{(k)}.$$

Здесь $\mathcal{F}$ — некоторый произвольный оператор (функция), а $\mathcal{P}_i$ — операторы ограничения, хотя бы один из которых строго сужающий.

Вопрос 5. Обратные задачи математической физики, задачи гомографии, обратные задачи для дифференциальных уравнений

Обратные задачи в теории систем



В.Т. Борухов и др. [2] дают классификацию обратных задач, возникающих в теории систем. Задачи формулируются путем обращения естественных причинно-следственных связей в динамической системе.

Здесь $x(t)$ — внутреннее состояние системы, $y(t)$ — ее наблюдаемое состояние (выходы), $u(t)$ — внешние воздействия (входы). Индексы $[\tau, t]$ означают действие в пределах указанного отрезка времени.

Обратные задачи в теории систем

Например, автономная линейная система с сосредоточенными параметрами задается в виде:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Обратные задачи: определение коэффициентов A, B, C, D, прошлого по будущему.

Обратные задачи в теории систем

Каждая обратная задача может быть сформулирована либо как задача наблюдения (задача восстановления причин по наблюдаемым следствиям), либо как задача управления (синтез причин, обусловливающих требуемые следствия):

- $x(t) \to x(\tau)$: восстановление / синтез начального состояния по известному конечному;
- $y_{[\tau,t]} \to x(\tau)$ — восстановления / синтез начального состояния по выходам;
- $y_{[\tau,t]} \to u_{[\tau,t]}$ — восстановление / синтез входов по известным выходам;
- Реализация динамической системы — синтез переходных характеристик, обеспечивающих желаемые / наблюдаемые выходы / состояния.

ОЗ для дифференциальных уравнений

Рассмотрим простейшее уравнение теплопроводности:

$$\dot{T}(t,x) = qT''(t,x) + f(t,x).$$

Прямой задачей является отыскание распределения температуры $T(t,x)$ для всех $t>0$ при заданных начальных условиях $T(0,x) = v(x)$ и функции $f(t,x)$. Если в эксперименте измеряется $T(t,x_0)$, в некоторой точке x_0 стержня и возмущающая функция $f(t,x)$ — неизвестна, можно поставить задачу отыскания $f(t,x)$ (восстановление входов по выходам). При известной $f(t,x)$ может быть поставлена задача восстановления $T(0,x) = v(x)$ по, например, $T(t,x_0)$ (восстановление начального состояния по выходам).

Задача гомографии

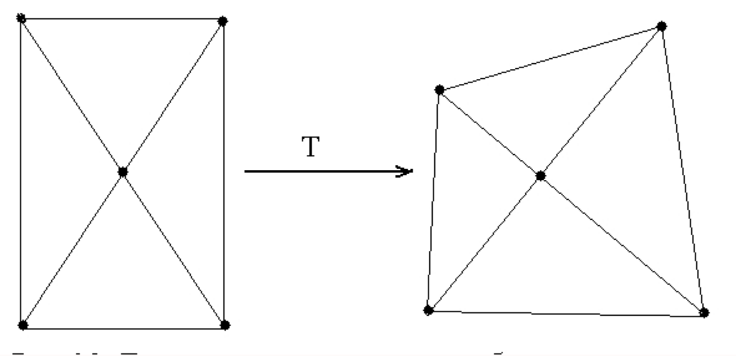
Гомография (проективное преобразование) — преобразование, переводящее прямые в прямые. В 3D задается матрицей $H_{4\times 4}$ в однородных координатах $(x, y, z, w) = w(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, 1)$. Позволяет описывать перспективные искажения объекта, наряду с обычным поворотом, смещением и т.д.:

$$\mathbf{r}' = H\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r} = \{x, y, z, w\}.$$

Задача гомографии — поиск матрицы H по набору пар точек (p, q) «исходная–искаженная»:

$$\mathbf{r}_i' = H\mathbf{r}_i, \quad \text{или}, \quad R'_{4\times n} = H_{4\times 4}R_{4\times n}, \quad R = \{\mathbf{r}_0, \ldots, \mathbf{r}_n\}.$$

Задача гомографии



Задача гомографии

Обращая выражение, записанное в матричном виде, получаем:

$$R' = HR \quad \Longrightarrow \quad R'R^T = H\left(RR^T\right) \quad \Longrightarrow \quad H = R'R^T\left(RR^T\right)^{-1}.$$

Задача некорректно поставлена: не устойчива к шумам и выбросам в данных.
Другие методы решения:

- Метод максимального правдоподобия (при нормальном распределении шума переходит в МНК).
- RANSAC (Random Sample Consensus) — стохастический метод (устойчивость к выбросам).

Задача гомографии

Связанные задачи:

- Определение положения калиброванной камеры по проекциям точек;
- Определение положения точки по ее проекциям на камеры;
- Калибровка камеры по проекциям точек и т.д.

Вопрос 6. Условия корректности обратных задач

Корректность обратных задач

Задача называется корректной по Адамару, если ее решение:

- существует;
- единственно;
- устойчиво (к шумам в входных данных).

Первое условие обычно предполагается. Отсутствие решения у ОЗ сопряжено, скорее, с неадекватностью выбранной математической модели.

Единственность решения

Условие единственности тесно связано с устойчивостью. Рассмотрим обращение уравнения типа свертки в спектральной области:

$$y = f \circledast x \quad \Longrightarrow \quad Y(\omega) = F(\omega)X(\omega) \quad \Longrightarrow \quad X(\omega) = \frac{Y(\omega)}{F(\omega)}.$$

Из второго уравнения легко видеть, что в области, в которой $F(\omega) = 0$, решение $X(\omega)$ не единственно: $X(\omega)$ может быть выбрана произвольно.

Устойчивость решения

В то же время, если $Y(\omega)$ известно лишь с точностью до шумовой компоненты, в областях, где $F(\omega) \to 0$, шумовые компоненты в решении может бесконечно усиливаться:

$$X(\omega) = \frac{Y(\omega)}{F(\omega)} = \frac{Y^*(\omega)}{F(\omega)} + \frac{N(\omega)}{F(\omega)} = X^*(\omega) + \frac{N(\omega)}{F(\omega)}$$

Рассмотрим СЛАУ вида

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{x}^* + A^{-1}\mathbf{v}.$$

При $\det A = 0$ решение системы не единственно. В то же время, если матрица A получается из эксперимента, легко получить $\det A \approx 0$. Тогда небольшой шум в $\mathbf{y}$ будет сильно влиять на качество решения.

Литература

[1] Белов Ю.Я., Любанова А.Ш., Полынцева С.В., Сорокин Р.В., and Фроленков И.В. *Обратные задачи математической физики. Учебное пособие*. СФУ, Красноярск, 2008.

[2] Борухов В.Т., Гайшун И.В., and Тимошпольский И.В. *Структурные свойства динамических систем и обратные задачи математической физики*. Белорусская навука, Минск, 2009.

[3] Василенко Г.И. and Тараторин А.М. *Восстановление изображений*. Радио и связь, М., 1986.

[4] Пшеничный Б.Н. *Выпуклый анализ и экстремальные задачи*. Наука. Главная редакция физико-математической литературы, М., 1980.

[5] Вахитов А. Компьютерное зрение. Лекция. Apr 2014.