Василевский А.В.

Методологические аспекты двух подходов к формулированию фундаментальных законов механики: ньютоновский и минимум действия

1. Ньютоновская механика. Эра строгого классического подхода к формулированию механики начинается с фундаментальной работы Ньютона «Математические основы натуральной философии» от 1687 г. Ньютоновский подход базируется на аксиоматическом введении трех законов (законов Ньютона), описывающих динамику тел (в современном понимании более точно – динамику материальных точек) в евклидовом пространстве и абсолютном (глобальном) времени. Эти три закона сам Ньютон формулировал следующим образом:

I. «Всякое тело продолжает удерживаться в своём состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.»
II. «Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.»
III. «Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.»

Их современная формулировка:

I. «Существуют такие системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых материальные точки, когда на них не действуют никакие силы (или действуют силы взаимно уравновешенные), находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.»
II. «В инерциальной системе отсчёта ускорение, которое получает материальная точка с постоянной массой, прямо пропорционально равнодействующей всех приложенных к ней сил и обратно пропорционально её массе.»
III. «Материальные точки взаимодействуют друг с другом силами, имеющими одинаковую природу, направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, равными по модулю и противоположными по направлению.»

Четвертый закон Ньютона о глобальном тяготении выходит за рамки нашего рассмотрения.

Первые два закона фактически являются обобщенными и усиленными законами Галилея.

Математически второй закон Ньютона выражается как

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} \tag{1}$$

или в более общем виде

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \tag{2}$$

В сущности это дифференциальные уравнения второго порядка относительно радиус-вектора $\mathbf{x}$ тела (материальной точки). Они связывают изменение импульса тела с равнодействующей всех сил, к нему приложенных. Дифференциальный характер уравнения и механики в целом весьма удобен в практических приложениях, поскольку оперирует простыми понятиями векторов силы, импульса, скорости и т. д. Для описания движения тела или системы тел достаточно выявить все действующие в системе силы (в т.ч. диссипативные) и все наличествующие связи (голономность не требуется), затем составить уравнение (систему уравнений) Ньютона. Решение этого уравнения (системы уравнений) полностью определит движение тела (системы тел).

2. Принцип наименьшего действия (ПНД). Еще древние философы в свое время установили, что природа ничего не делает напрасно и во всех своих проявлениях выбирает кратчайший или легчайший путь. В научной истории же формально ПНД был сформулирован гораздо позже.

Так, в 1662 г. Пьер Ферма впервые сформулировал принцип кратчайшего времени для распространения света. Он был уверен, что ПНД есть фундаментальный принцип физики.

Готфрид Лейбниц полагал, что ПНД прямо следует из совершенства Бога. Он ввел величину mvs, произведение массы, скорости и длины пути, или, что то же самое, mv^2t, произведение «живой силы» (кинетической энергии) на время, которую назвал «действием».

В 1744 г. Пьер Мопертюи использовал понятие действия, предложенное Лейбницем, и сформулировал ПНД в форме $mvs \to \min$ на на действительной траектории движения тела. Так появился первый фундаментальный экстремальный принцип современной физики.

Леонард Эйлер в том же 1744 г. первым записал этот принцип в строгой математической форме. Он заметил, что из всех возможных траекторий тела из точки А в точку В только истинная траектория доставляет экстремум некоторому функционалу (действия). На языке вариационного исчисления:

$$S = \int\limits_A^B mv\,\mathrm{d}s \to \min \quad \Longleftrightarrow \quad \delta S = 0 \tag{3}$$

Жозеф Лагранж расширил принцип, сформулированный Эйлером, на произвольную консервативную систему материальных точек с действующими в ней голономными связями. Кроме того, Лагранж формулирует принцип виртуальных скоростей, согласно которому сумма элементарных работ всех активных сил F, действующих на систему, в т.ч. реакций связей, при любом возможном перемещении системы δs равна нулю:

$$\sum F_i\,\delta s_i = 0 \tag{4}$$

Дальнейшим развитием этого принципа стало введение сил инерции:

$$\sum (F_i + J_i)\,\delta s_i = 0, \quad J_i = -m_i a_i \tag{5}$$

Исходя из этого принципа Лагранж получил все теоремы динамики и принцип наименьшего действия.

Лагранж отказался от теологического толкования ПНД, рассматривая его лишь как простой и общий вывод из законов механики.

Уильям Гамильтон придавал ключевую роль в познании принципам аналогии, гармонии, простоты. В 1827 г., опираясь на принцип Ферма и формулы Эйлера и Лагранжа, Гамильтон сводит задачу поиска траектории луча в геометрической оптике к задаче вариации функционала. В 1834 г. он приводит вариационный ПНД к виду с явно выделенным лагранжианом. Вместо интеграла по пути от количества движения записывается интеграл от некоторой функции Лагранжа, вариация которого давала бы реальное движение системы:

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t \to \min \quad \Longleftrightarrow \quad \delta S = 0 \tag{6}$$

Для консервативных систем $L = T - U$, где Т – кинетическая, а U – потенциальная энергия. Отсутствие пространственных координат в формулировке ПНД позволяет применять его не только к механическим системам.

Позже были сформулированы и другие вариационные принципы, как то принцип наименьшей кривизны Герца или принцип наименьшего принуждения Гаусса. Мы, однако, прервем наш исторический очерк для изложения более близких к тематике работы суждений.

***

Главным достоинством вариационных принципов (не только лишь в механике) является их общность и простота в использовании. Они носят интегральный характер – действительные траектории движения тела доставляют минимум действию, определенному как интеграл от некоторой функции Лагранжа, имеющей размерность энергии, по рассматриваемому участку траектории (по рассматриваемому промежутку времени). ПНД легко обобщается на случай системы частиц, твердых тел. Переход к обобщенным координатам, импульсам, силам совершается проще, чем аналогичный переход непосредственно в уравнениях движения. Проще же производится линеаризация уравнений динамики – она заменяется отысканием квадратичного лагранжиана.

Еще одним преимуществом ПНД над ньютоновским формализмом является рассуждение в терминах преобразования энергий. Движение системы рассматривается как определяемое не силами, а работами этих сил на траектории движения. Это позволяет отвлечься от непосредственно векторов сил, импульсов, скоростей и свободно рассуждать в терминах обобщенных координат и импульсов. Дальнейшее развитие этой идеи приводит к гамильтонову формализму, где в качестве независимых переменных выбираются координаты и импульсы: становится возможен анализ динамики безмассовых частиц (фотонов).

Однако формулирование ПНД в теориях, основанных на динамических уравнениях, требует отыскания такого лагранжиана, вариация которого бы позволяла в точности восстановить известные динамические уравнения. Поиск такого лагранжиана может оказаться весьма нетривиальной задачей. Постановка теории на вариационный фундамент вне всяких сомнений очень важная и не менее сложная задача. Так, например, действие, вариацией которого получаются все 10 фундаментальных уравнений Эйнштейна общей теории относительности, было получено Давидом Гильбертом в ноябре 1915 г. В то же время им было получено несколько фундаментальных теорем, в частности выражение тензора энергии-импульса произвольного поля через вариацию действия этого поля по метрическому тензору пространства-времени. Толчком к созданию вариационного аппарата общей теории относительности послужила показанная им же несовместность системы уравнений Эйнштейна от 1913 г. в общем случае. К концу 1915 г. совместная система уравнений была выдвинута самим Эйнштейном в т.ч. на основании работы Гильберта.

Автор считает, что ПНД и прочие вариационные принципы не носят теологического характера, а служат лишь удобным математическим аппаратом описания динамики в интегральной форме. Аппарат вариационного исчисления является красивым, хорошо проработанным математическим аппаратом, в котором имеется не мало замечательных теорем.

Литература

1. Терехович В.Э. Философско-методологические проблемы принципа наименьшего действия. СП-б – 2013 г.

2. Концепции современного естествознания. Лекция 4. Механика и методология Ньютона. Уфа – 2009 г. URL: http://refleader.ru/yfsjgebewrna.html