Василевский А. В.

ИТ

Исследование смещения оценки частоты методом Кейпона от длины АКП

[28112016] # 1

28/11/2016

§ 1.1 О задаче

Условие задачи выглядит следующим образом:

Задача 1.1. Сигнал представляет из себя одну действительную синусоиду частоты $\omega_0 = 2\pi f_0$ в аддитивном белом Гауссовом шуме с дисперсией ρ_0. Применить метод Кейпона для оценки частоты этой синусоиды. Исследовать смещение оценки частоты в зависимости от длины АКП.

Цель данной статьи — формализовать задачу и разбить ее на подзадачи.

Для этого необходимо ввести математические понятия и описать некоторые специальные алгоритмы.

§ 1.2 Математическая модель

1.2.1 Метод Кейпона

Метод Кейпона, он же метод минимума дисперсии, — один из возможных методов спектрального оценивания. Он не дает истинной СПМ сигнала в том смысле, что обратное Фурье-преобразование от получаемой оценки не равно АКП. Разрешение метода лежит между АР и классическими методами спектрального оценивания, несмотря на то, что сам Кейпон назвал метод «сверхразрешающим».

Выражение для СПМ по методу Кейпона дается выражением

$$P_{\text{МД}}\left(f\right) = \frac{T}{e^H\left(f\right) R_p^{-1} e\left(f\right)}, \tag{1.1}$$

где T — период дискретизации, R_p^{-1} — матрица размером $(p+1)\times(p+1)$, обратная автокорреляционной, а i-я компонента вектора $e\left(f\right)$ дается выражением: $e_i\left(f\right) = \exp\left(j2\pi fTi\right)$.

СПМ определена для частот $\|f\| \le \frac{1}{2T}$.

Доказывается, что $P_{\text{МД}}$ может быть выражена через АР-коэффициенты $a_p\left[i\right]$:

$$P_{\text{МД}}\left(f\right) = \frac{T}{\sum\limits_{k=-p}^{p} \psi\left[k\right] \exp\left(-j2\pi fTk\right)} \tag{1.2}$$

$$\psi\left[k\right] = \begin{cases} \frac{1}{\rho_p} \sum\limits_{i=0}^{p-k} \left(p+1-k-2i\right) a_p\left[k+i\right] a_p^*\left[i\right] & 0 \le k \le p \\ \psi^*\left[-k\right] & -1 \ge k \ge p \end{cases} \tag{1.3}$$

Сами $a_p\left[i\right]$ получаются из решения системы уравнений Юла-Уокера.

1.2.2 Оценка частоты по СПМ

СПМ по методу МД, как и любая другая спектральная оценка, имеет максимум примерно на той частоте, энергия которой преобладает в спектре сигнала. Если входной сигнал — синусоида частоты f_0 (с шумом), то СПМ на интервале $-\frac{1}{2T} \le f \le \frac{1}{2T}$ будет представлять собой два горба на частотах $\pm f_0$.

Следовательно, по положению пиков горбов СПМ можно судить о частоте синусоиды, для которой эта СПМ была получена:

$$\hat{f}_0 = \underset{0 \le f \le 1/2T}{\operatorname{argmax}} P_{\text{МД}}\left(f\right). \tag{1.4}$$

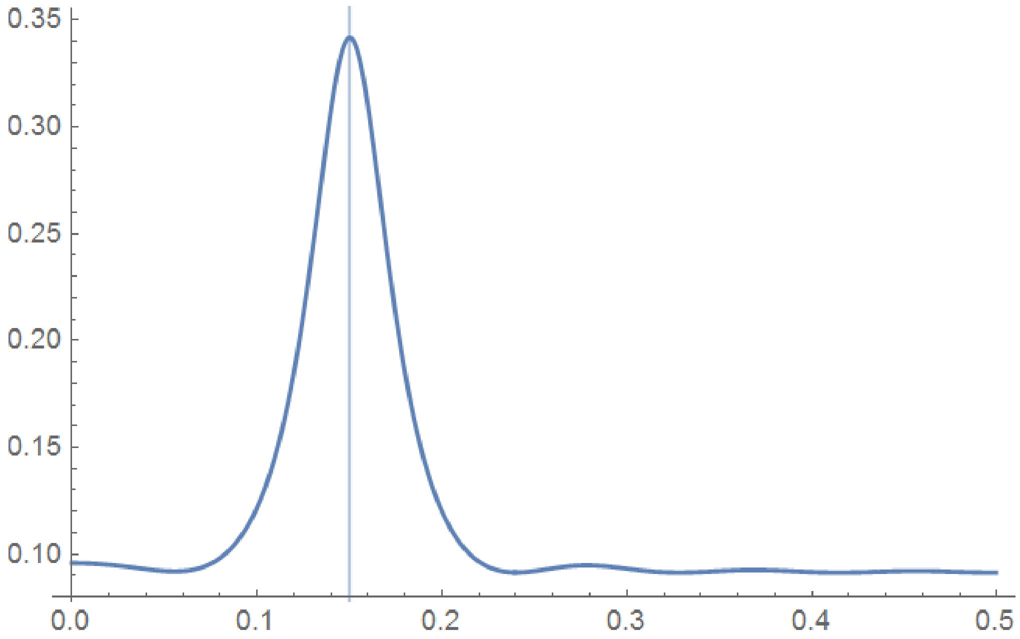


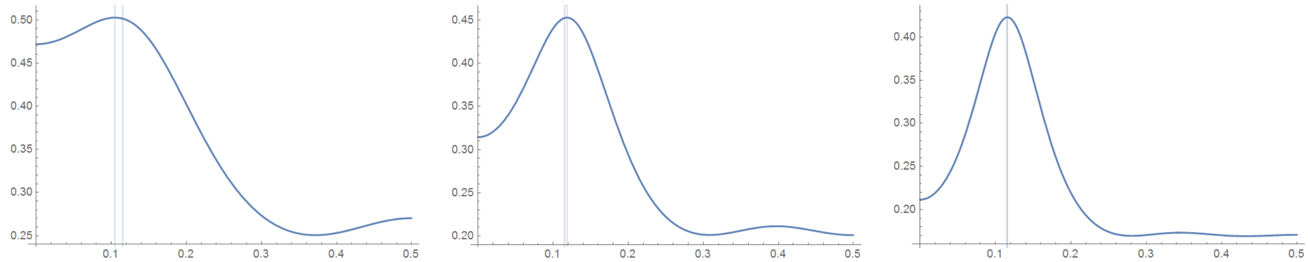
Рис. 1.1: $P_{\text{МД}}\,(f \geq 0)$ синусоиды с шумом. Частота синусоиды $f_0 = 0.15$. Дисперсия шума $\rho = 1$. Длина АКП $p = 10$.

$\hat{f}_0$ называется оценкой частоты.

Можно показать, что оценка СПМ, а значит и частоты, по методу МД — смещенная, причем смещение зависит от частоты f_0 синусоиды, длины p АКП и дисперсии шума ρ: $\hat{f}_0 = \hat{f}_0\,(f_0, p, \rho)$

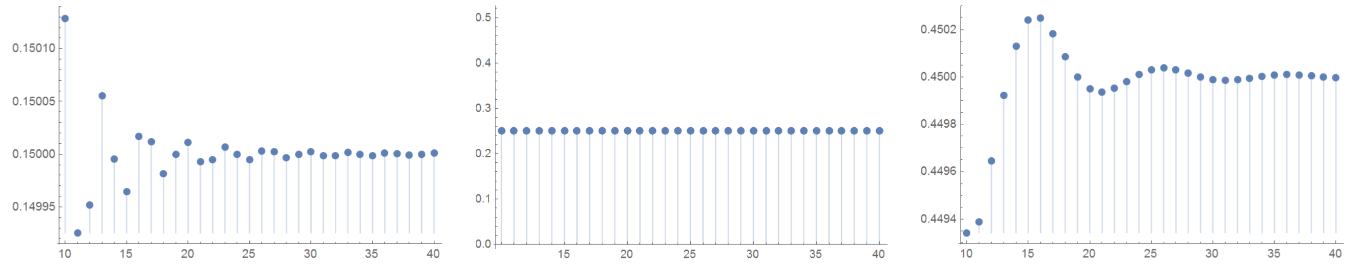
Смещение оценки, по определению, $\mathrm{B}\left(\hat{f}_0\right) = f_0 - \hat{f}_0$. В задаче предлагается исследовать смещение как функцию только длины p АКП при фиксированных f_0 и ρ.

На рис. 1.3 показана зависимость смещения оценки $\mathrm{B}\left(\hat{f}_0\right) = \mathrm{B}\,[p]\left(\hat{f}_0\right)$ от p для трех различных f_0. Можно заметить, что при фиксированной f_0 предел $\lim\limits_{p\to\infty} \mathrm{B}\,[p] = \mathrm{B}\,[\infty] \neq 0$, что говорит о том, что оценка $\hat{f}_0$ — смещенная.



$p = 3$ $\quad$ $p = 4$ $\quad$ $p = 5$

Рис. 1.2: $P_{\text{МД}}\,(f \geq 0)$ синусоиды с шумом. Частота синусоиды $f_0 = 0.115$. Дисперсия шума $\rho = 1$. Длина АКП — p. Вертикальными линиями показаны f_0 и $\hat{f}_0$. Смещение оценки для $p = 3, 4$ видно невооруженным глазом. Видно также, что с ростом p смещение уменьшается.



$f_0 = 0.15$ $f_0 = 0.25$ $f_0 = 0.45$

Рис. 1.3: В $[p]$ синусоиды с шумом. Частота синусоиды — f_0. Дисперсия шума $\rho = 1$. Длина АКП $p = 10 \div 40$. Видно, что с ростом p смещение уменьшается. Видно также, что для разных частот f_0 смещения по-разному зависят от p, но все равно стремятся к некоторому (своему для каждой f_0) пределу В $[\infty]$.

§ 1.3 Реализация

1.3.1 Общий алгоритм реализации

вход: $f_0,\ \rho,\ p_{min},\ p_{max}$
выход: В $[p]$
сформировать АКП $r\,[p]$, $p = p_{min} \div p_{max}$;
от $p = p_{min}$ **до** p_{max} **выполнять**
    получить $P_{\text{МД}}\,[p]$;
    определить оценку $\hat{f}_0\,[p]$;
    найти смещение оценки В $[p]$;
конец

Алгоритм 1: Получение смещения оценки от длины АКП

1.3.2 Предлагаемая программная реализация

Предлагается следующая программная реализация задачи.

Приведенный код при должной его реализации решает поставленную задачу. Он составлен в полном соответствии с алгоритм 1. Предлагается реализовать каждую функцию данного кода — сначала в виде консольного приложения, а затем уже в виде графического приложения Windows. Также настоятельно рекомендуется реализовывать функции поэтапно — сверху вниз — с последующим тестированием. Следует обязательно сверить полученные результаты с рассчитанными, например, в Wolfram Mathematica. Особенно это касается решения СЛУ, поскольку алгоритм Левинсона, пожалуй, — наиболее объемная часть программы.

Функция `bias` может быть реализована следующим образом:

В ней производится последовательное вычисление СПМ для различных p, поиск положения пика СПМ — оценки $\hat{f}_0 \equiv f_e stimated$, вычисление смещения В $[p]$.

Стоит отметить, что функция `find_max_sdp` должна искать глобальный максимум. Так, если частота синусоиды достаточно близка к нулю, либо к $\pm 1/2T$, при малых p метод минимума дисперсии может вовсе не разрешить частоту сигнала (рис. 1.4), а значит максимум СПМ будет находиться на границе области определения СПМ, соответственно, либо в $f = 0$, либо в $f = \pm 1/2T$. При реализации следует проверять на наличие максимума также и эти точки.

Листинг 1.1: Максимально сжатый программный интерфейс задачи

```
// глобальный максимум p, больше которого брать нельзя
const int MAX_P_PLUS_ONE = 1000;

// входные параметры
double T, ro, f0;
int    p_min, p_max /* < MAX_P_PLUS_ONE */;

// выходные параметры
double B[MAX_P_PLUS_ONE];

// временные параметры
double r[MAX_P_PLUS_ONE];   // АКП -> вычисление a[i]
double a[MAX_P_PLUS_ONE];   // АР-параметры -> вычисление psi[i]
double psi[MAX_P_PLUS_ONE]; // пси-параметры -> вычисление one_to_sdp(f)

// функции

// m-й отсчет АКП
double r_sin_with_noise(int m); // -> cos (2pi f0 T m) + ro delta (m)

// решение системы ур-й Юла-Уокера порядка (p+1)
void levinson_solve(int p); // -> заполняет a[i], i = 0..p

// вычисление коэффициенты psi по (уже вычисленным) a[i], i = 0..p
void compute_psi(int p); // -> заполняет psi[i], i = 0..p

// вычисление знаменателя СПМ (т.е. 1 / СПМ) при частоте f
// использует psi[i], i = 0..p
double one_to_sdp(int p, double f);

// ищет максимум СПМ (минимум 1 / СПМ)
// возвращает координату пика СПМ
// использует one_to_sdp как анализируемую функцию
double find_max_sdp(int p);

// считает смещение оценки для всех p = p_min..p_max
// записывает данные в B[i], i=p_min..p_max.
void bias();

// главная функция

// 1. ввод входных параметров
// 2. вычисление r[i], i = 0..(MAX_P_PLUS_ONE-1)
// 3. вызов bias
// 4. вывод B[i], i = p_min..p_max
void main();
```

Листинг 1.2: Псевдореализация функции `bias`

```
void bias()
{
    for (int p = p_min; p <= p_max)
    {
        levinson_solve(p); // -> a[i],   i = 0..p
        compute_psi(p);    // -> psi[i], i = 0..p
        B[p] = f0 - find_max_sdp(p);
    }
}
```

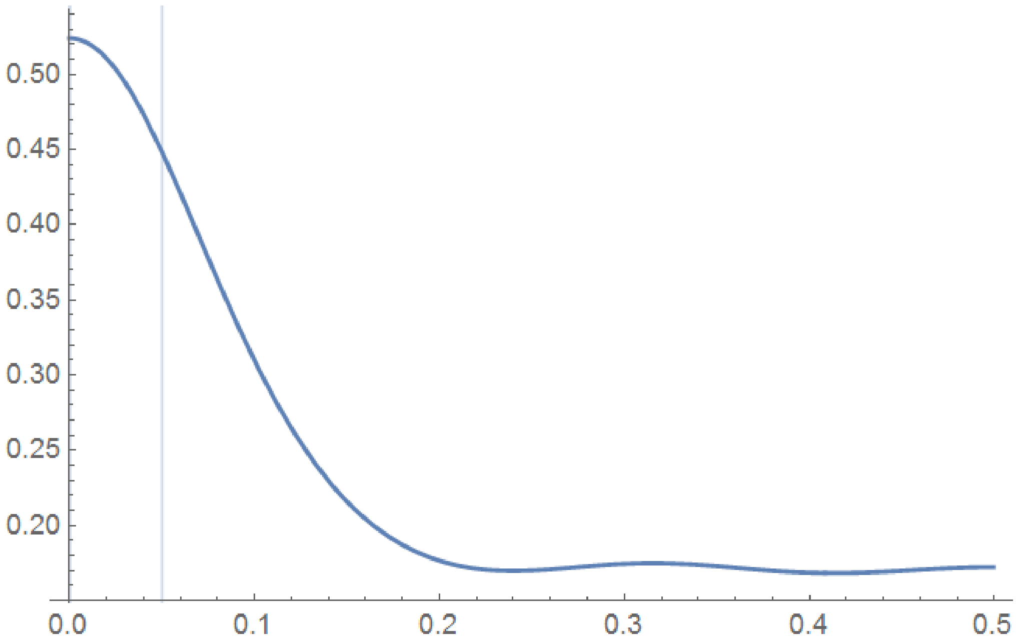


Рис. 1.4: Пример неудовлетворительного разрешения метода МД. При частоте $f_0 = 0.05$ максимум СПМ достигается при $f = 0$.