Part.02

회귀분석

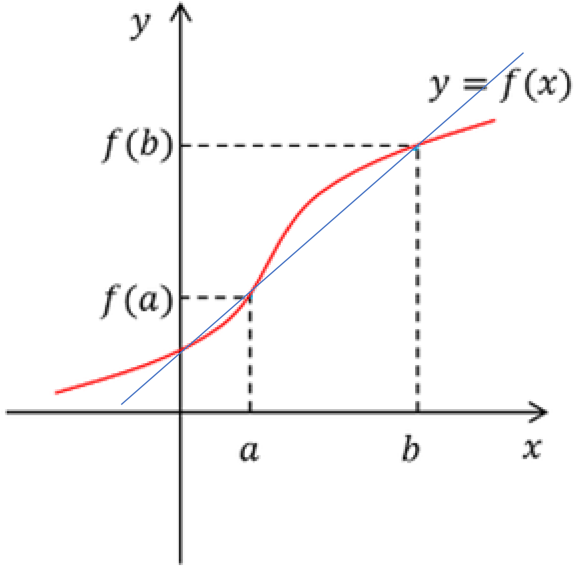
회귀분석을 위한 통계 수학적 개념이해 – 미분 기초

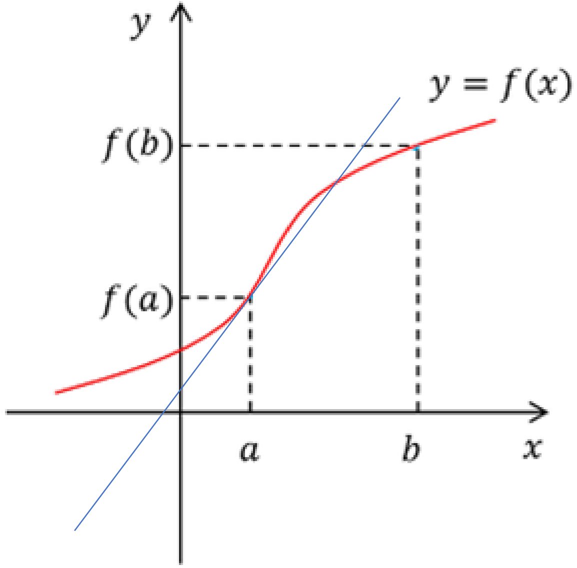
FASTCAMPUS ONLINE

머신러닝과 데이터분석 A-Z

강사. 김강진

l 미분의 개념





- 평균 변화율
  - $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- 순간변화율 $f'(a)$
  - 평균 변화율의 극한 값
  - b점이 a점으로 한없이 가까워질 때, a점에서의 순간변화율
  - a점에서의 접선의 기울기

Copyright FASTCAMPUS Corp. All Rights Reserved

| 미분의 개념

- 다항함수 미분 및 미분 기본 공식
  - $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$, c는 상수
  - $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$, n은 자연수
  - (참고) $f(x) = x^k \Rightarrow f'(x) = kx^{\mathrm{k}-1}$, k는 유리수
  - $\{cf(x)\}' = cf'(x)$
  - $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$
- 곱의 미분
  - $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g(x)'$
- 합성함수 미분
  - $f\left(g(x)\right)' = f'\left(g(x)\right)g'(x)$

Copyright FASTCAMPUS Corp. All Rights Reserved

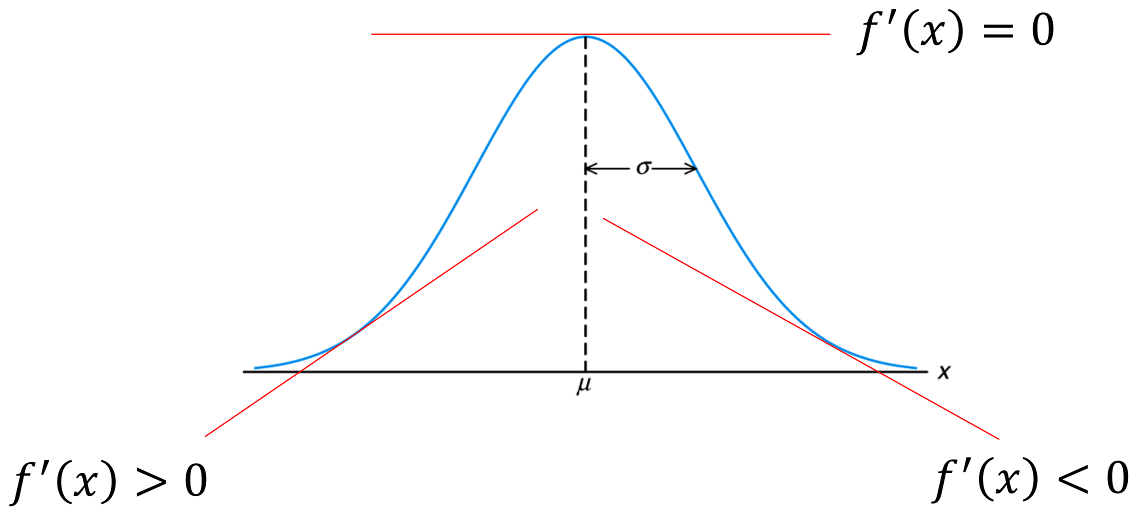
| 미분의 개념

- 지수함수 미분
  - $\{e^x\}' = e^x$
  - $\{a^x\}' = a^x \ln a$
- 로그함수 미분
  - $\{\ln x\}' = \frac{1}{x}$
  - $\{\log_a x\}' = \frac{1}{x\ln a}$

Copyright FASTCAMPUS Corp. All Rights Reserved

| 미분의 활용

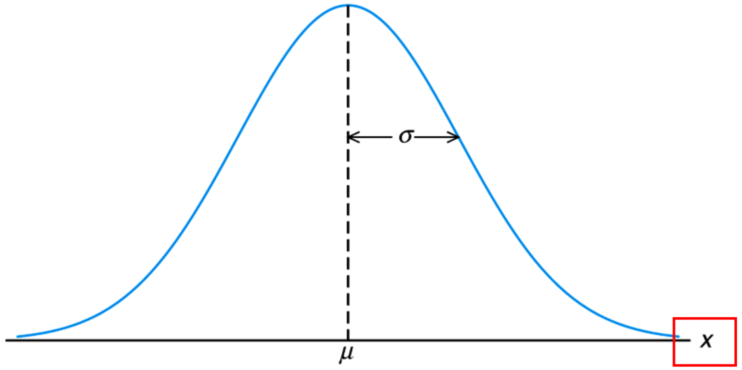
- 극대값, 극소값
  - 미분값은 접선의 기울도함수를 통하여 미분가능한 함수의 극대값, 극소값을 구할 수 있음.



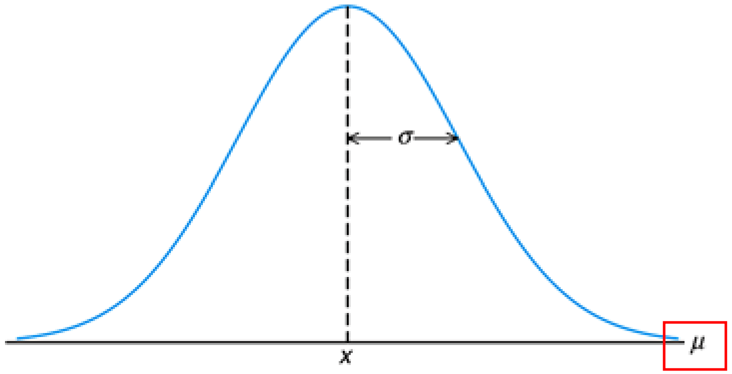
Life Changing Education
Copyright FASTCAMPUS Corp. All Rights Reserved

I Likelihood

- Likelihood function (가능도함수/우도함수)



확률분포함수



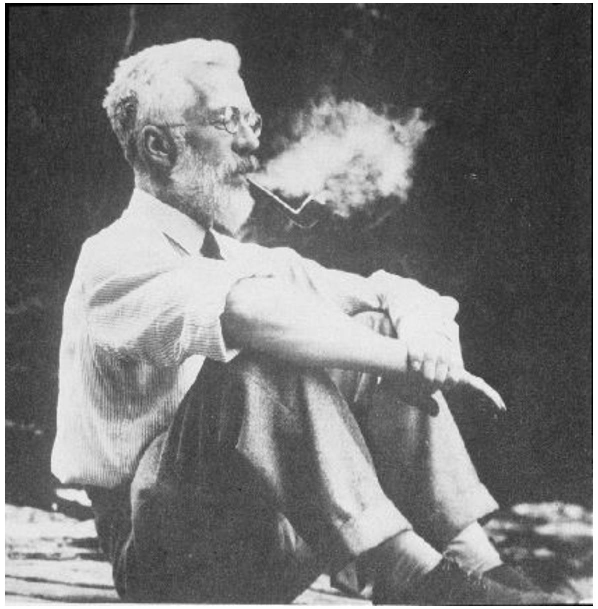
가능도함수

- $X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3$개의 자료가 있다고 하면, 평균 μ_0는 어떤 값일 가능성이 가장 높을까?

Copyright FASTCAMPUS Corp. All Rights Reserved

I Likelihood

- μ_0를 추정하는 방법?



- R.A. Fisher
  - The desired probability distribution is the one that makes the observed data “most likely”.
  - $f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 1}}\right)^3 \exp\left(-\frac{(x_1-\mu_0)^2+(x_2-\mu_0)^2+(x_3-\mu_0)^2}{2\cdot 1}\right)$

Life Changing Education

Fast campus

Copyright FASTCAMPUS Corp. All Rights Reserved

I Likelihood

- 확률분포함수 (Probability distribution function)
  - 모수를 알 때, 확률변수의 실현값을 예측하고자 함.
- 가능도함수 (Likelihood function)
  - 확률변수의 실현값을 알 때 (데이터가 있을 때), 모수를 추정하고자 함.

Copyright FASTCAMPUS Corp. All Rights Reserved

I Likelihood

- 확률분포함수 (Probability distribution function)
  - 종류
    - 확률밀도함수 (Probability density function) – 연속형 확률변수의 확률 분포함수.
    - 확률질량함수 (Probability mass function) – 이산형 확률변수의 확률 분포함수.
      - $f(x) = P(X = x)$
    - 누적분포함수 (Cumulative distribution function) – 누적 확률 분포함수.
      - $F(x) = P(X \leq x)$

Copyright FASTCAMPUS Corp. All Rights Reserved

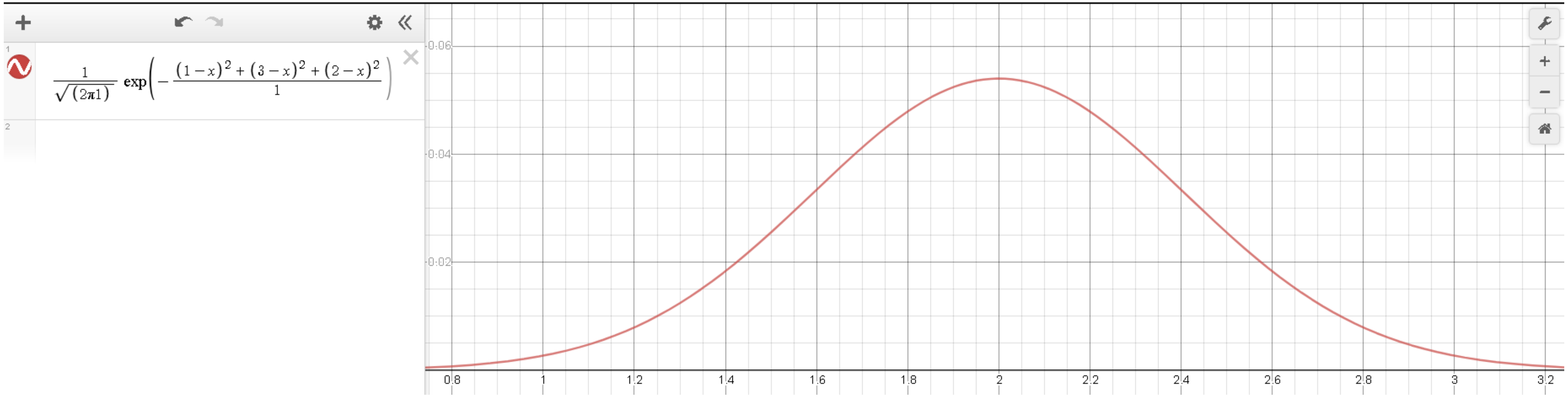
Likelihood

- Probability density function
  - 평균 μ_0, 분산1을 독립 정규분포를 따르는 확률변수 X_i의 확률분포함수 (확률밀도함수)
    - $f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 1}} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\cdot 1}\right)$
  - $X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3$, 3개의 자료가 있을 때, 확률분포함수
    - $f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 1}}\right)^3 \exp\left(-\frac{(x_1-\mu_0)^2+(x_2-\mu_0)^2+(x_3-\mu_0)^2}{2\cdot 1}\right)$
- Likelihood function
  - 동일한 함수이나,μ_0를 변수로 인식.
    - $L(\mu_0; x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 1}}\right)^3 \exp\left(-\frac{(\mu_0-x_1)^2+(\mu_0-x_2)^2+(\mu_0-x_3)^2}{2\cdot 1}\right)$
  - $X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3$ 일 때,
    - $L(\mu_0; 1,2,3\ ) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 1}}\right)^3 \exp\left(-\frac{(\mu_0-1)^2+(\mu_0-2)^2+(\mu_0-3)^2}{2\cdot 1}\right)$

Copyright FASTCAMPUS Corp. All Rights Reserved

Likelihood

- Likelihood function
  - $L(\mu_0; 1,2,3\ ) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 1}}\right)^3 \exp\left(-\frac{(\mu_0-1)^2+(\mu_0-2)^2+(\mu_0-3)^2}{2\cdot 1}\right)$
  - Graph by https://www.desmos.com/calculator

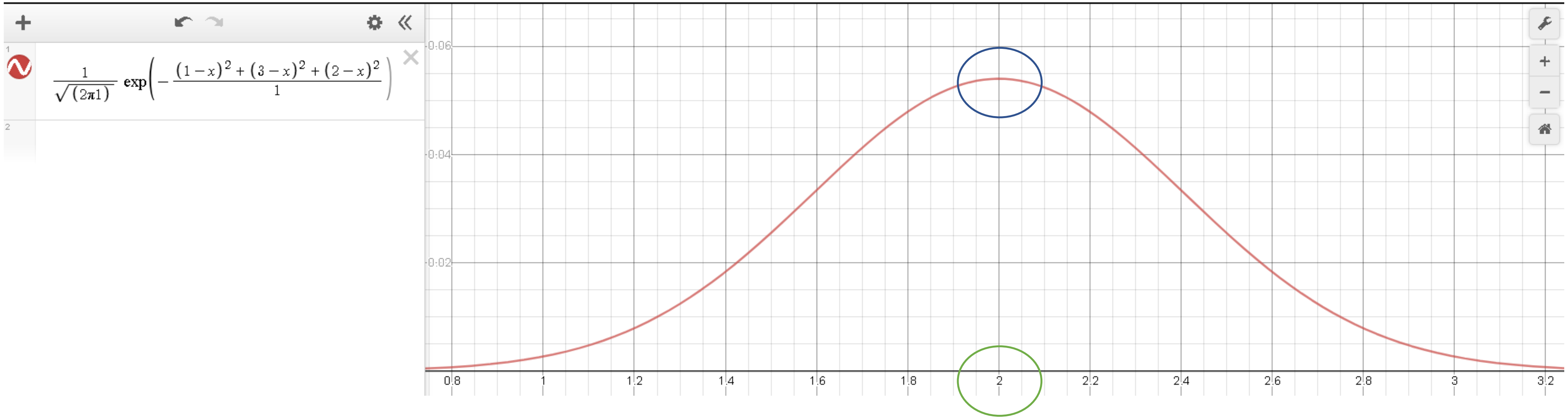


Life Changing Education

Copyright FASTCAMPUS Corp. All Rights Reserved

I Likelihood

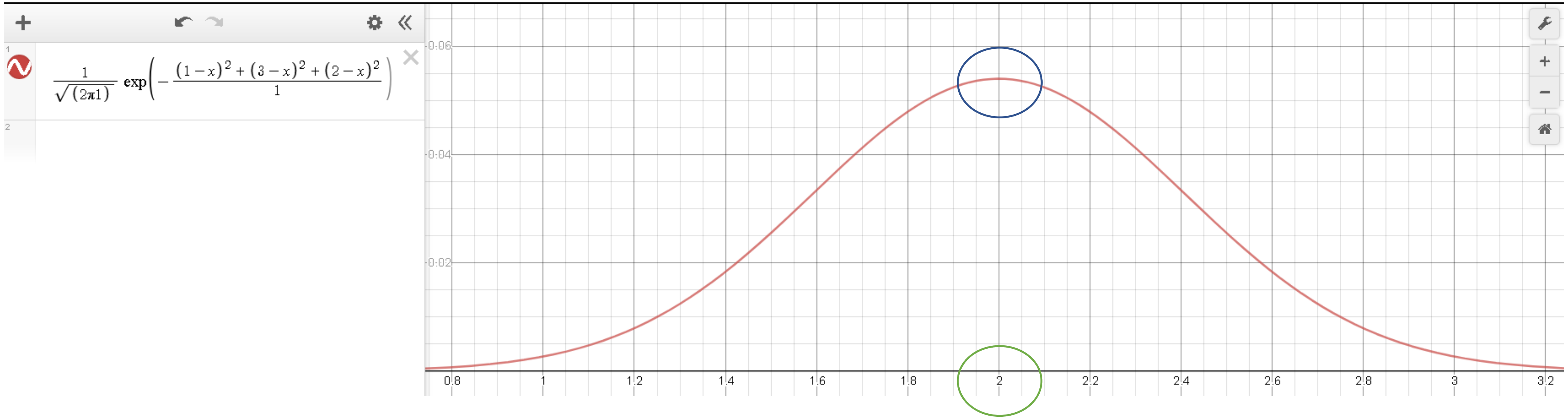
- Maximum Likelihood Estimator (MLE)
  - 정의: Likelihood를 최대로 만드는 모수의 값.
    - $L(\mu_0; 1,2,3\ ) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 1}}\right)^3 \exp\left(-\frac{(\mu_0-1)^2+(\mu_0-2)^2+(\mu_0-3)^2}{2\cdot 1}\right)$
    - 주로 모수에 hat을 붙여 ($\widehat{\mu_0}$) 표현.



Copyright FASTCAMPUS Corp. All Rights Reserved

I Likelihood

- Maximum Likelihood Estimator (MLE)
  - Likelihood는μ_0에 대한 함수
    - $\widehat{\mu_0}$ = 최대값을 가지는 μ_0-> 극대값을 가지는 μ_0-> Likelihood를 μ_0로 미분해서 0을 만드는 값.



Life Changing Education

Copyright FASTCAMPUS Corp. All Rights Reserved

I 미분의 활용 - MLE

- μ_0 MLE 구하기
  - Likelihood 구성
    - $L(\mu_0; 1,2,3\ ) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 1}}\right)^3 \exp\left(-\frac{(\mu_0-1)^2+(\mu_0-2)^2+(\mu_0-3)^2}{2\cdot 1}\right)$
  - 미분하기 용이하도록 log Likelihood 구성
    - $\log L(\mu_0; 1,2,3\ ) = -\frac{3}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\left((\mu_0-1)^2+(\mu_0-2)^2+(\mu_0-3)^2\right)$
  - 미분 실행
    - $\frac{\delta \log L(\mu_0;1,2,3)}{\delta \mu_0} = -\frac{1}{2}\left(2(\mu_0-1)+2(\mu_0-2)+2(\mu_0-3)\right)$
  - 미분한 함수가 0이 되게 하는 $\widehat{\mu_0}$를 구해냄.
    - $-\frac{1}{2}\left(2(\widehat{\mu_0}-1)+2(\widehat{\mu_0}-2)+2(\widehat{\mu_0}-3)\right) = 0$
    - $3\widehat{\mu_0} = 1+2+3$
    - $\widehat{\mu_0} = 2$

Copyright FASTCAMPUS Corp. All Rights Reserved

I 미분의 활용 - MLE

- σ^2 MLE 구하기
  - Likelihood 구성, $\lambda = \sigma^2$
    - $L(\mu_0; 1,2,3\ ) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\lambda}}\right)^3 \exp\left(-\frac{(\mu_0-1)^2+(\mu_0-2)^2+(\mu_0-3)^2}{2\cdot\lambda}\right)$
  - 미분하기 용이하도록 log Likelihood 구성
    - $\log L(\lambda; 1,2,3, \mu_0) = -\frac{3}{2}\log(2\pi\lambda) - \frac{1}{2\lambda}\left((\mu_0 - 1)^2 + (\mu_0 - 2)^2 + (\mu_0 - 3)^2\right)$
  - 미분 실행
    - $\frac{\delta \log L(\lambda;1,2,3,\mu_0)}{\delta\lambda} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}(\lambda)^{-2}\left((\mu_0 - 1)^2 + (\mu_0 - 2)^2 + (\mu_0 - 3)^2\right)$
  - 미분한 함수가 0이 되게 하는 $\hat{\lambda}$를 구해냄.
    - $-\frac{3}{2}\cdot\hat{\lambda} + \frac{1}{2}\left((\mu_0 - 1)^2 + (\mu_0 - 2)^2 + (\mu_0 - 3)^2\right) = 0$
    - $\hat{\lambda} = \frac{1}{3}\left((\mu_0 - 1)^2 + (\mu_0 - 2)^2 + (\mu_0 - 3)^2\right)$

Life Changing Education

Fast campus

Copyright FASTCAMPUS Corp. All Rights Reserved