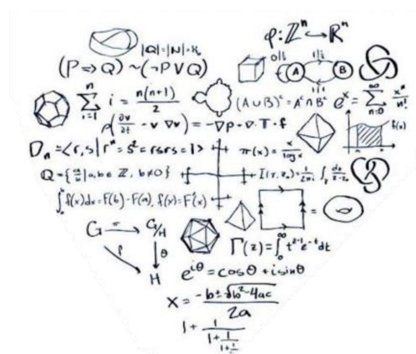
I maremoti e i modelli matematici



Prof.ssa Luisa D’Amore

Benfenati Domenico
000118174

Cos'è uno tsunami

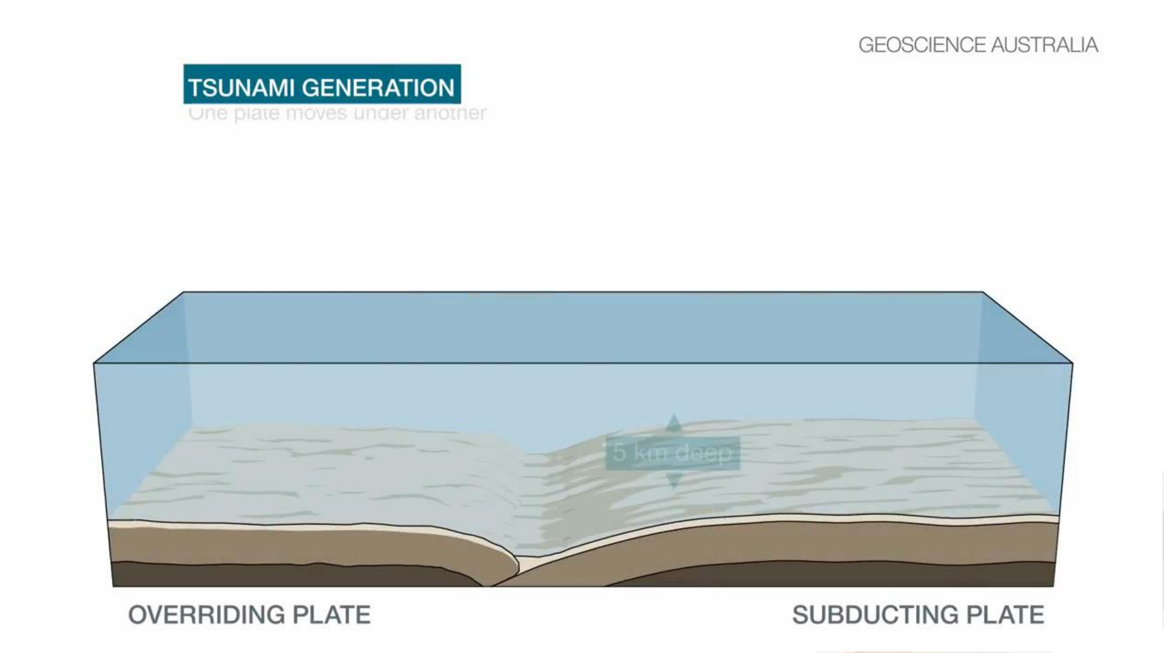
- Il termine **Tsunami** è stato ideato per descrivere un moto ondoso anomalo in un porto
- Infatti, il termine deriva dal giapponese e significa letteralmente «*onda del porto*»

健

Cause di origine uno tsunami

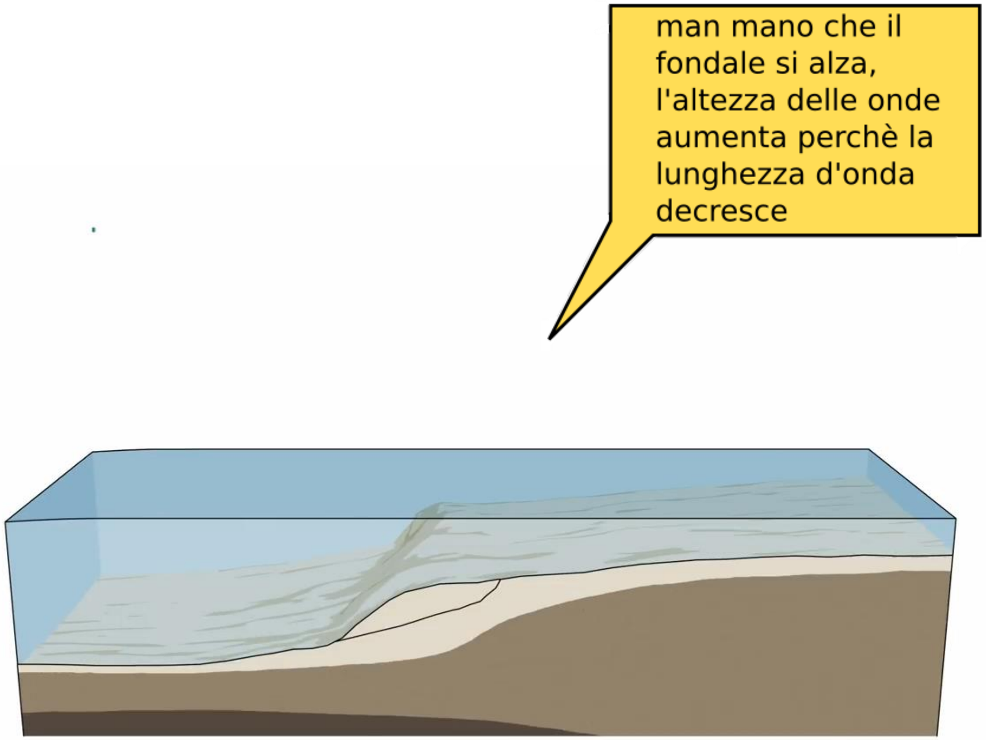
- Quando un maremoto si origina e si propaga nei pressi della linea costiera, lo si definisce **locale**.
- Altri maremoti riescono invece a propagarsi per migliaia di chilometri attraversando interi oceani
- In genere si parla di **origine tettonica**, poiché gli scivolamenti del terreno in acqua e le esplosioni vulcaniche causano di solito onde di minore lunghezza che si attenuano velocemente

Origine tettonica di uno tsunami



Origine vulcanica locale di uno tsunami

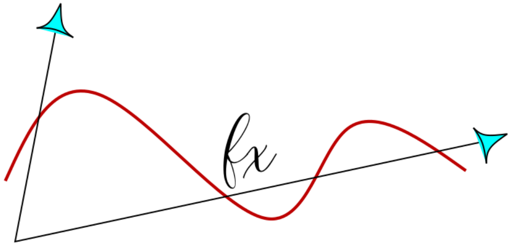
Propagazione di uno tsunami



Modellare uno tsunami

Equazione alle derivate parziali

- Per modellare l'andamento di un maremoto si utilizza un **equazione alle derivate parziali**
- Una PDE(*Partial Derivate Equation)* è un equazione che ha come incognita una funzione $u(x_1, x_2, ..., x_r)$ di *r* variabili indipendenti e stabilisce una legame tra le variabili indipendenti, la funzione *u* e le sue derivate parziali fino ad un certo ordine *n*, detto **ordine** dell'equazione



Equazioni alle derivate parziali

- Posso essere di 2 tipologie, del **primo ordine** e del **secondo ordine**, che nella forma generale sono del tipo

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

Equazioni alle derivate parziali

- Attraverso una equazione alle derivate parziali è possibile descrivere due tipi di problemi:
- **Problemi evolutivi**, detti anche «non stazionari» perché dipendenti dal tempo
- **Problemi di equilibrio**, detti anche «stazionari» perché indipendenti dal tempo
- La x indica la variabile dipendente, mentre la t indica una variabile temporale

Equazioni alle derivate parziali

	Problemi evolutivi	Problemi di equilibrio
Primo ordine	$u_t + au_x = 0$	$u_x + c\left(u_y\right)^2 = 0$
Secondo ordine	$u_t + c(u_{xx})^2 = 0$	$u_{xx} + au_{yy} = 0$

Equazioni alle derivate parziali

- Un equazione alle derivate parziali ha come soluzione un **integrale**, una funzione *u* che soddisfa l'equazione in un insieme Ω
- Nell'insieme Ω la funzione u è continua fino alle derivate n-esime: se ho delle condizioni al contorno, le condizioni di derivabilità devono valere su Ω U Γ, con Γ contorno del dominio
- La totalità delle soluzioni è detta **integrale generale**

Equazioni alle derivate parziali

- Per delle PDE, abbiamo alcune equazioni note
  - **Equazione del trasporto** $u_t + c\, u_x = 0$
  - **Equazione delle onde** $u_{tt} + c^2\, u_{xx} = 0$
  - **Equazione di Laplace** $u_{xx} + u_{yy} = 0$
  - **Equazione del calore** $u_t + c\, u_{xx} = 0$

Shallow water equations

- Il modello delle acque poco profonde *(SWEs)* è un sistema di equazioni alle differenze parziali che descrivono il flusso sottoposto alla pressione di un fluido.
- In una dimensione le equazioni sono assimilabili alle **equazioni di Saint-Venant**

Shallow water equations

Elevazione totale della colonna d'acqua

Velocità orizzontale del fluido

Velocità verticale del fluido

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \dfrac{\partial (\eta u)}{\partial x} + \dfrac{\partial (\eta v)}{\partial y} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial (\eta u)}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\eta u^2 + \dfrac{1}{2} g \eta^2\right) + \dfrac{\partial (\eta u v)}{\partial y} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial (\eta v)}{\partial t} + \dfrac{\partial (\eta u v)}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\eta v^2 + \dfrac{1}{2} g \eta^2\right) = 0
\end{cases}
$$

Variabile temporale

Variabili spaziali

h = Profondità del fondale

u = Velocità orizzontale

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} h\,dx + (hu)_{x_l}^{x_r} = 0 \\
\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} h\,dx + (\tfrac{1}{2}gh^2 + hu^2)_{x_l}^{x_r} = -\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} ghb_x\,dx
\end{cases}
$$

Shallow water equations in una dimensione

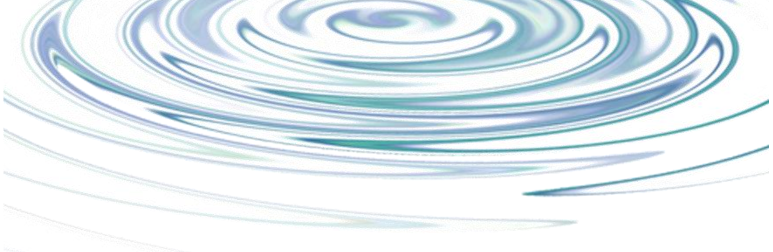
g = Gravità

b = Altezza del fondale

Shallow water equations in una dimensione

- Le due equazioni rappresentano rispettivamente la **legge di conservazione della massa** e la **legge di conservazione del momento**, entrambe applicate ai fluidi
- Le due leggi sono scritte in forma integrale

Shallow water equations in una dimensione



Riscrivendo le equazioni in forma matriciale otteniamo

$$\begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} hu \\ \frac{1}{2gh^2} + hu^2 \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x \end{bmatrix}$$

I pedici indicano una differenziazione della matrice

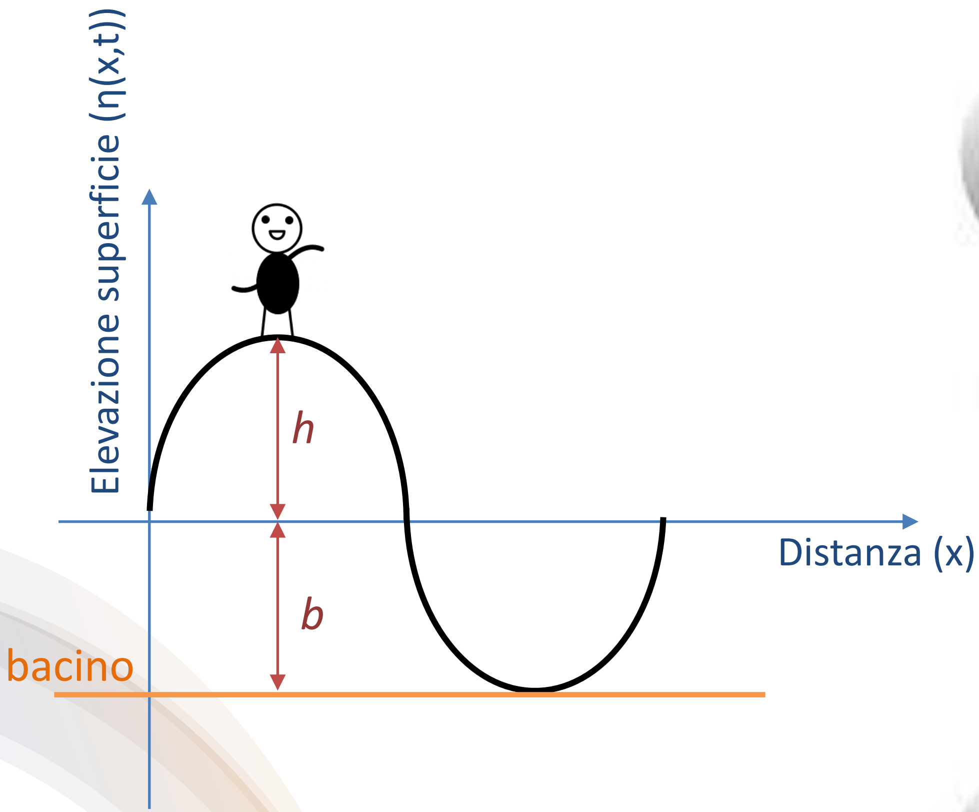
Shallow water equations in una dimensione

Manipolando le matrici otteniamo una forma più nota delle SWE, quella meno problematica da usare per un modello su larga scala

$$\begin{cases} \eta_t + u\,(\eta - b)_x = 0 \\ u_t + u(u)_x + g\eta_x = 0 \end{cases}$$

$$\eta = h + b$$

η = elevazione della superficie d'acqua


Elevazione superficie (η(x,t))
h
b
Distanza (x)
bacino


Shallow water equations in una dimensione

Risoluzione delle equazioni shallow water

Risoluzione delle SWE

- Il sistema delle SWE fa parte della classe di **leggi di conservazione** nella forma seguente

f(q) = flusso delle quantità q

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} q(x,t)dx + f\big(q(x_2,t)\big) - f\big(q(x_1,t)\big) = \int_{x_1}^{x_2} \psi(q,x)dx$$

q = vettore delle quantità che si conservano

ψ = sorgente

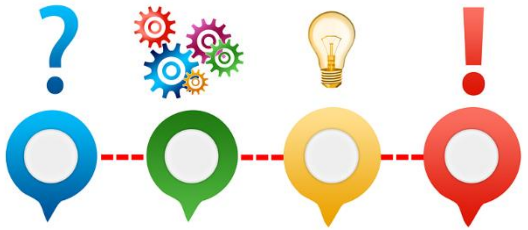
Risoluzione delle SWE

- Se la soluzione q è differenziabile allora la formula si può manipolare per diventare una PDE

$$q_t(x,t) + f(q(x,t))_t = \psi(q,t)$$

Se si considera la sorgente nulla, si ottiene un legge di conservazione **omogenea**

Risoluzione delle SWE



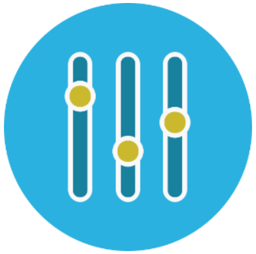
- Il sistema differenziale trovato è di tipo **iperbolico** se lo *Jacobiano* della funzione f, cioè f'(q) ha autovalori reali e completi
- Considerando la propagazione delle onde, la velocità dell'onda è modellabile attraverso lo Jacobiano
- Le SWE sono equazioni iperboliche con autovalori pari a $\sqrt{gh}$

$costante\ di\ velocità\ di\ trasmissione\ dell'onda$

Metodo delle differenze finite (FDM)

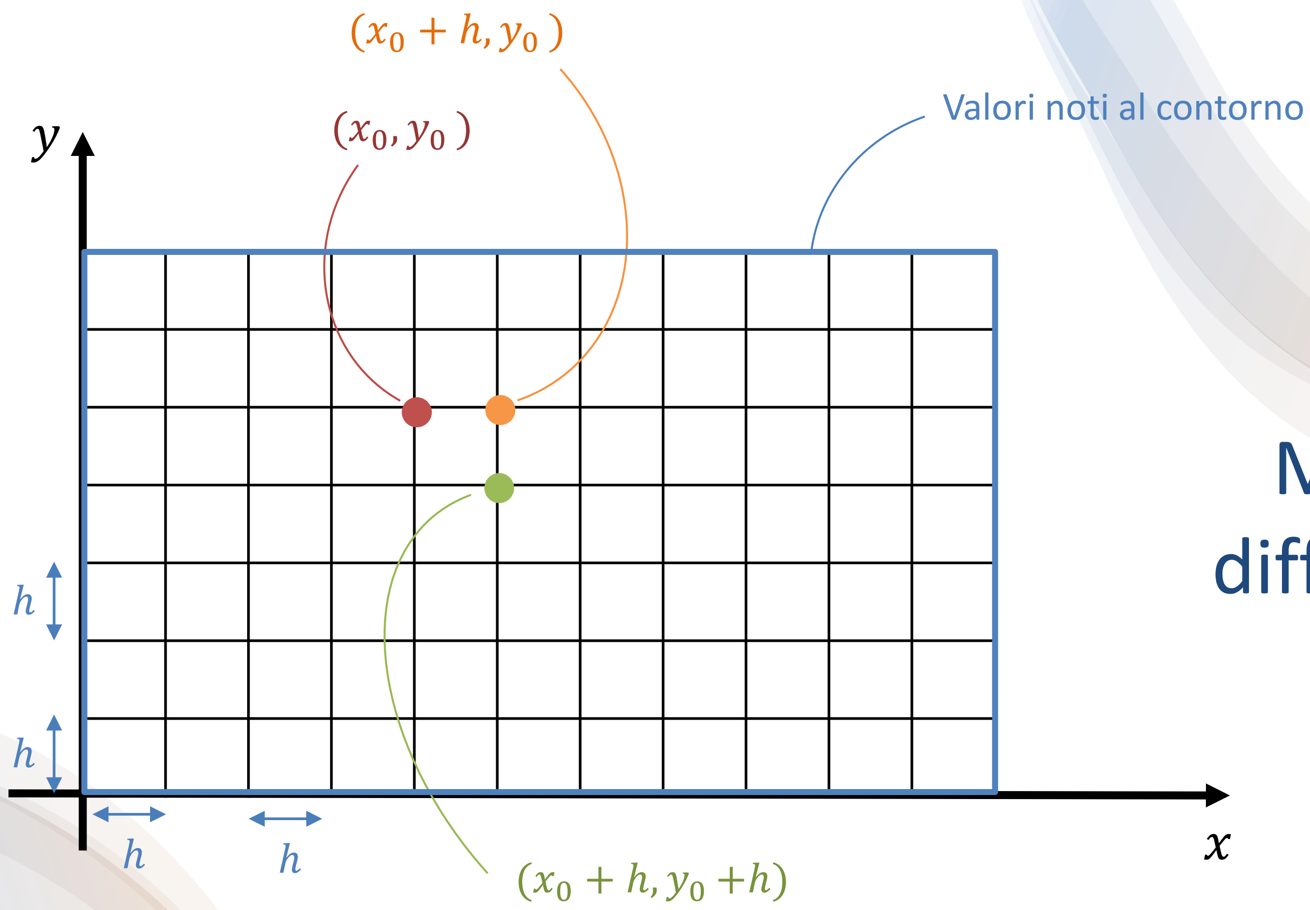
Metodo alle differenze finite

- Il metodo alle **differenze finte** è uno dei metodi utilizzati come schema di avanzamento nel tempo per un problema di PDE
- Il metodo da origine a funzioni in cui il valore delle stesse dipende dall’incremento della variabile **indipendente** e dalle costanti in gioco, dette **parametri del sistema**



Metodo alle differenze finite

- E’ anche una tecnica di discretizzazione, dove per **discretizzazione** si intende sostituire equazioni algebriche ad equazioni differenziali
- Il dominio viene «campionato» andando ad identificare una griglia con dei nodi a valore noto, cioè quelli al contorno
- I valori della variabile indipendente costruiscono un vettore di N elementi equidistanti



Metodo alle differenze finite

Approssimazione alle differenze finite

- Come prima cosa, sviluppiamo la funzione in serie di Taylor

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \mathcal{R}_n(x)$$

Differenza «in avanti»

Residuo della funzione

Approssimazione alle differenze finite

- Alternativamente lo sviluppo può essere fatto come segue

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}h^2 - \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \mathcal{R}_n(x)$$

Differenza «all'indietro»

Approssimazione alle differenze finite

- Andando a sommare le due equazioni ottengo l'espressione seguente

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + f^{(2)}(x_0)h^2 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{12}h^4 + \cdots$$

Approssimazione alle differenze finite

- Troncando al secondo ordine lo sviluppo ottengo

$$f^{(2)}(x_0) = \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$$

Se h è abbastanza piccolo ottengo il valore di $f^{(2)}$calcolato alle **derivate finite centrali**

$$errore\ commesso = \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x_0)$$

Approssimazione alle differenze finite

- Il discorso è analogo se ragiono sulla derivata prima

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{h}$$

Se h è piccolo ottengo il valore di f' calcolato alle **derivate finite centrali**

errore commesso proporzionale ad h^2

Approssimazione alle differenze finite

- In generale posso usare 4 differenti schemi per l'approssimazione alle differenze finite

$$Forward: \Delta u_i = u_{i+1} - u_i$$

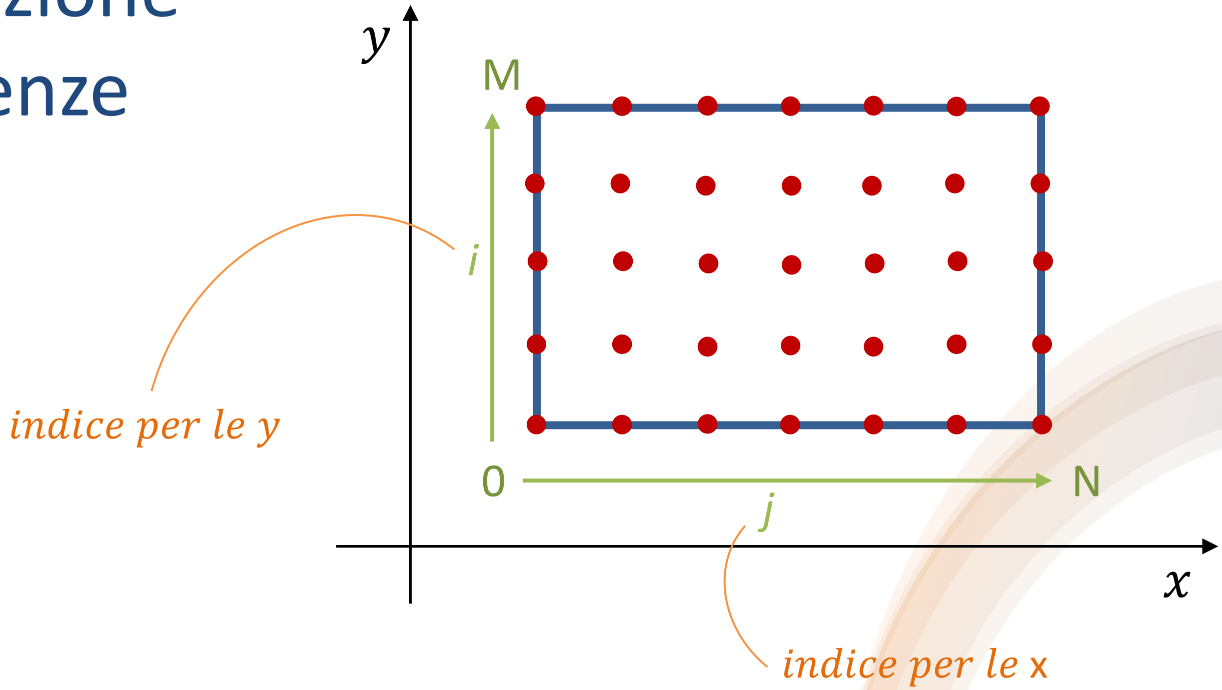
$$Backward: \Delta u_i = u_i - u_{i-1}$$

$$Long\ centered: \Delta u_i = u_{i+1} - u_{i-1}$$

$$Short\ centered: \delta u_i = u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}$$

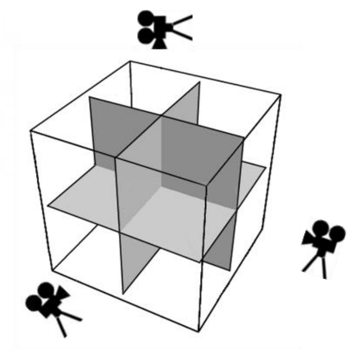
Approssimazione alle differenze finite

- Ampliamo il discorso ad un sistema in due dimensioni, con punti di coordinate (x, y)
- Come visto, si discretizza il dominio creando una **mesh** dove ho tutte le x e le y equidistanti tra loro



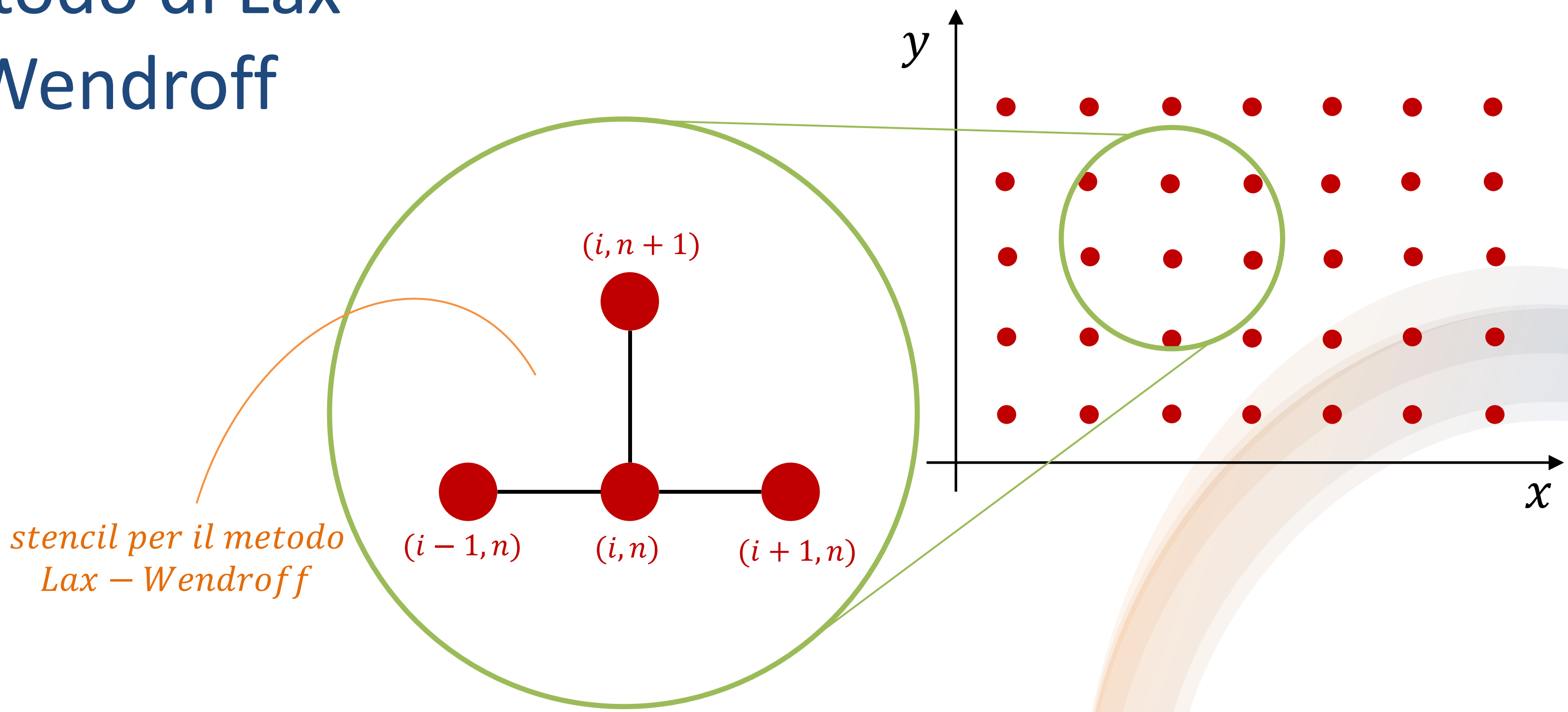
Metodo di Lax-Wendroff

- Quello che si può applicare nel caso di una PDE iperbolica come sono le SWE, è la tecnica di **Lax-Wendroff** per la risoluzione di problemi iperbolici
- Il metodo ha una precisione del secondo ordine sia nel tempo che nello spazio



Metodo di Lax-Wendroff

- Questo metodo sfrutta una approssimazione centrale lungo x, mentre in avanti verso y



Metodo di Lax-Wendroff

- Per provare il metodo sfruttiamo l’equazione seguente

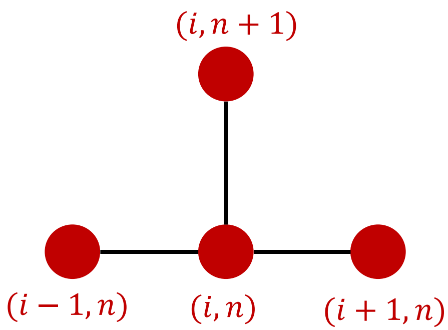
funzione incognita

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$$

velocità locale di propagazione nel mezzo

equazione di avvezione (trasporto di una quantità da parte di un fluido)

Metodo di Lax-Wendroff



- Facendo fede allo stencil del metodo, sviluppiamo in serie di Taylor la funzione nel punto $(i, n+1)$

$$u(x_i, t_{n+1}) =$$
$$u(x_i, t_n) + \Delta t \frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial t^2}$$

Metodo di Lax-Wendroff

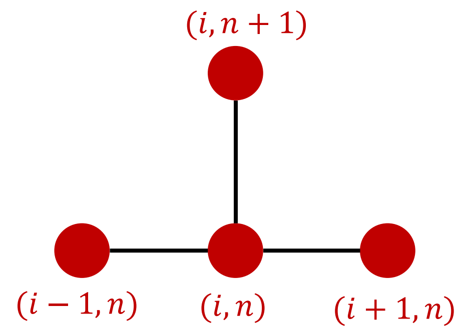
- Andiamo ora a sostituire le derivate temporali con le spaziali applicando la legge considerata

$$\boxed{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}$$

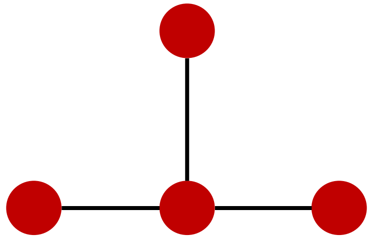
$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &u(x_i, t_{n+1}) = \\ &\quad u(x_i, t_n) - \Delta t \lambda \frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial x^2} + O(\Delta t^2) \end{aligned}}$$

qui sono state applicate le sostituzioni



Metodo di Lax-Wendroff



- Sostituiamo adesso le derivate spaziali con la loro approssimazione alle differenze centrali

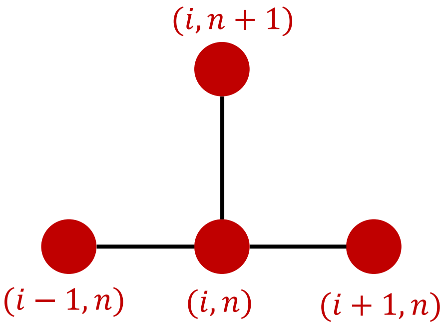
$$\boxed{\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1}^{n} - u_{i-1}^{n}}{2\Delta x}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^{n} - 2u_{i}^{n} + u_{i-1}^{n}}{\Delta x^2}}$$

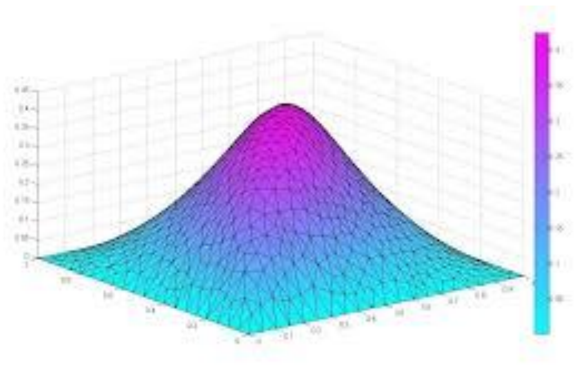
$$\boxed{u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t \lambda}{2\Delta x}\left(u_{i+1}^{n} - u_{i-1}^{n}\right) + \frac{1}{2}\frac{\Delta t^2 \lambda^2}{\Delta x^2}\left(u_{i+1}^{n} - 2u_{i}^{n} + u_{i-1}^{n}\right)}$$

Metodo di Lax-Wendroff

- Il risultato ottenuto ci dice che un valore della funzione nel punto $(i, n+1)$ dipende dalla soluzione approssimata nei punti $(i-1, n)$, (i, n) e $(i+1, n)$
- Per avere requisiti di stabilità del metodo dobbiamo ragionare sul **numero di Courant**



Condizione di Courant-Friedrichs-Lewy



- La **condizione di Courant-Friedrichs-Lewy,** abbreviata con **CFL**, è una condizione che deve verificarsi affinchè alcune PDE di tipo iperbolico siano convergenti
- Come conseguenza, il passo temporale deve minore di un intervallo, per non avere risultati scorretti

Condizione di Courant-Friedrichs-Lewy

- La condizione è spesso imposta ai termini delle PDE che rappresentano dei moti prevalentemente orizzontali **(convettivi)**
- Nel caso ad una dimensione la forma è la seguente

velocità di flusso

intervallo temporale

$$C = \frac{u * \Delta t}{\Delta x} < C_{max}$$

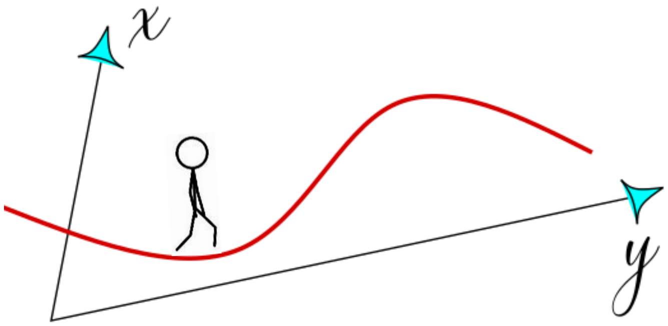
Numero di Courant

(è adimensionale)

intervallo spaziale

Il valore di C_{max} dipende dalla tipologia di equazione e dalla soluzione

Condizione di Courant-Friedrichs-Lewy



- Nel caso bidimensionale la forma della condizione cambia

derivata in x del flusso

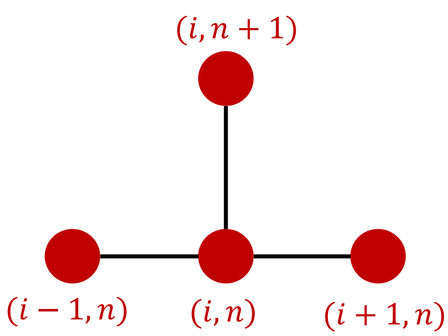
derivata in y del flusso

$$C = \frac{u_x * \Delta t}{\Delta x} + \frac{u_y * \Delta t}{\Delta y} < C_{max}$$

Condizione di Courant-Friedrichs-Lewy

- La condizione CFL spesso diventa un limite per l'intervallo temporale se l'ordine di derivazione della PDE risulta troppo elevato
- In questi casi si tende ad evitare dei metodi risolutivi di tipo implicito

Metodo di Lax-Wendroff

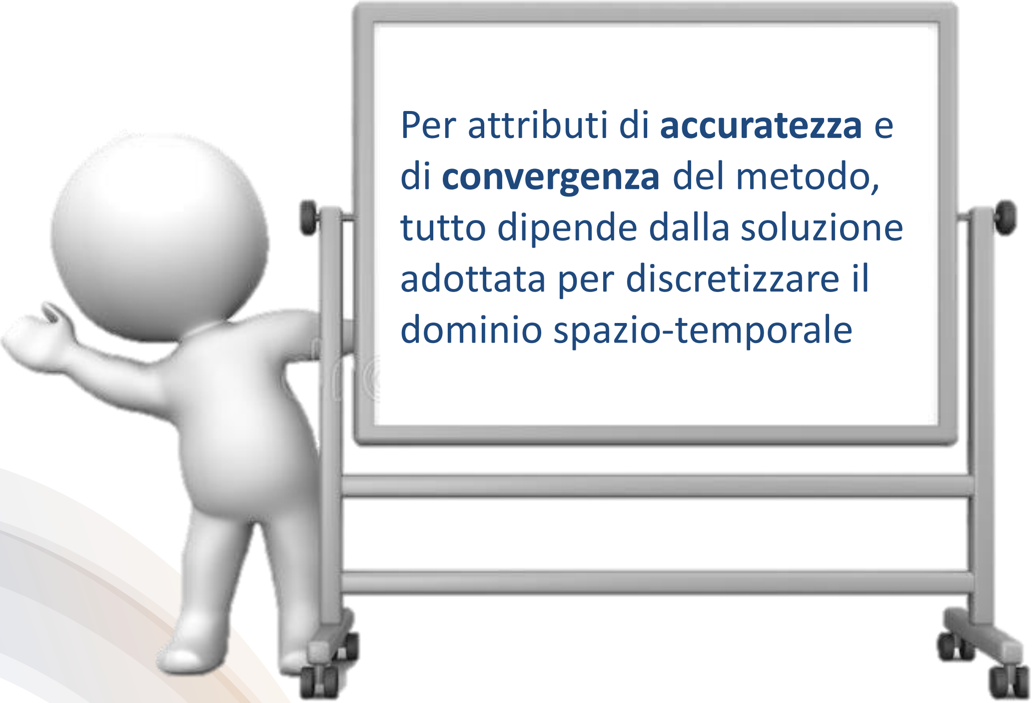


- Per garantire la stabilità dobbiamo avere un numero di Courant sempre minore di 1 in valore assoluto
- I risultati migliori spesso si ottengono quando il numero è proprio prossimo ad 1
- Definendo il numero di Courant pari a $\alpha = \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x}$ otteniamo

λ rappresenta la u della condizione di CFL

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2}\alpha(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{1}{2}\alpha^2 \left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

Metodo di Lax-Wendroff

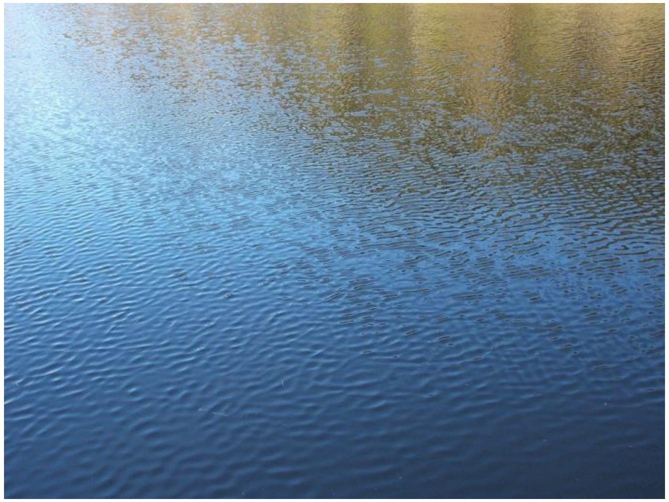


Per attributi di **accuratezza** e di **convergenza** del metodo, tutto dipende dalla soluzione adottata per discretizzare il dominio spazio-temporale

È possibile prevedere uno tsunami?

- Oleg A. Godin in un articolo per la *National Oceanic and Atmospheric Administration di Boulder*, in Colorado, spiega che uno tsunami si può prevedere
- Godin parla di un fenomeno detto **ombra dello tsunami**
- L’ombra è spesso stata osservata prima dell'arrivo di uno tsunami; si tratta di bande scure, larghe anche qualche chilometro sulla superficie degli oceani.

Ombra di uno tsunami



- Durante questo fenomeno, le onde possono viaggiare a velocità che raggiungono i 700 chilometri all'ora, dove l'oceano ha una profondità maggiore di 4 chilometri
- La turbolenza causata dall'onda ha effetto sui venti che colpiscono la superficie, i quali modificano a loro volta la forza con cui provocano l'increspatura dell'acqua
- Ciò fa aumentare del 10-15% queste increspature in uno specchio d'acqua prima calmo

Ombra di uno tsunami

- Gli scienziati del NOAAA hanno dimostrato che gli tsunami in mare aperto possono modificare la struttura della superficie del mare in un modo che può essere misurato dai radar satellitari.
- Secondo lo studio, i grandi tsunami che attraversano l'oceano aperto agitano e scuotono le acque di superficie lungo il bordo anteriore dell'onda. L'acqua più ruvida forma una lunga striscia d'ombra parallela all'onda e proporzionale alla forza dello tsunami

Ombra di uno tsunami

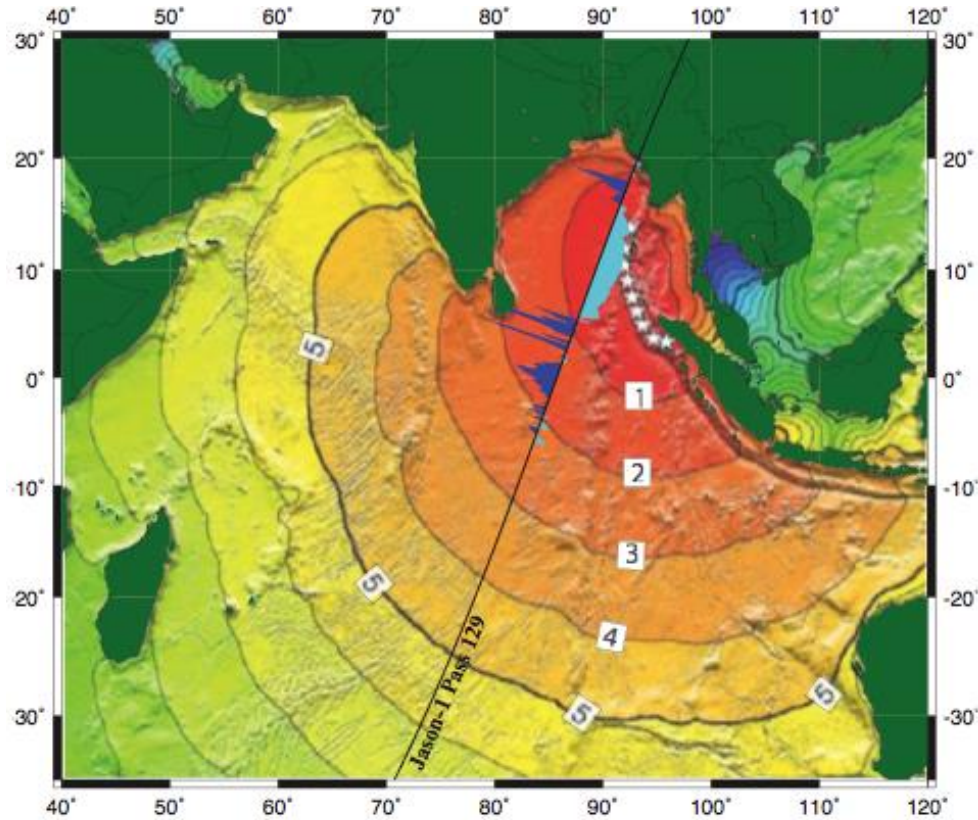
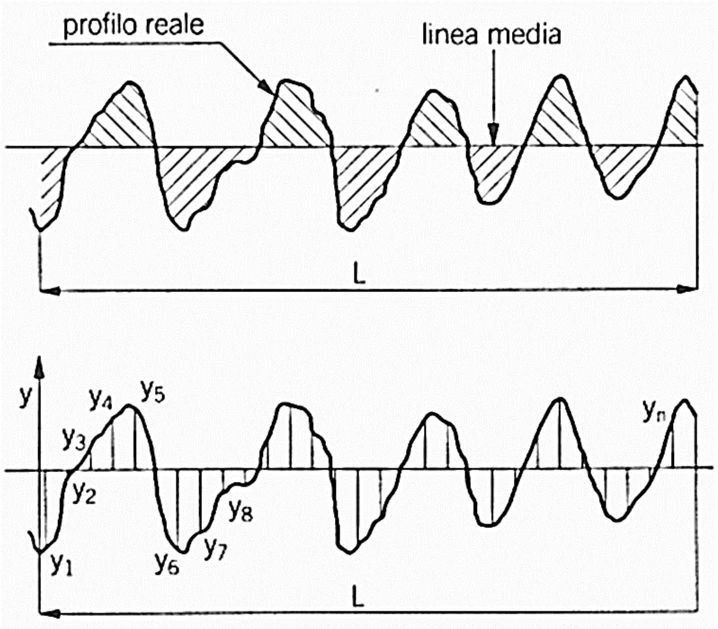


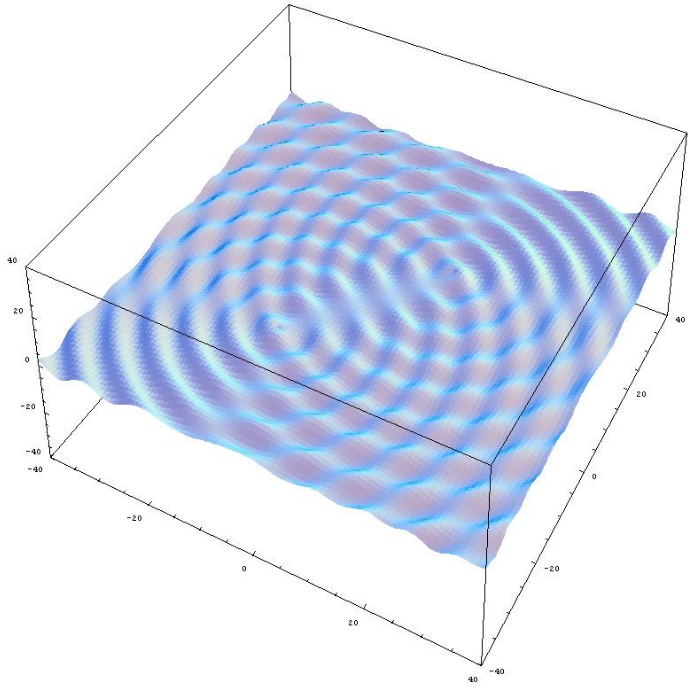
Immagine acquisita dal satellite della NASA Jason − 1

Ombra di uno tsunami

- I dati hanno rivelato una chiara evidenza di una maggiore rugosità della superficie lungo il bordo anteriore dello tsunami mentre attraversava l'Oceano Indiano tra i due e i sei gradi di latitudine sud.



Ombra di uno tsunami



- Poiché l'acqua ruvida è più scura dell'acqua liscia, si forma un contrasto tra l'acqua scura e ruvida dell'onda e l'acqua chiara e liscia su entrambi i lati. I comuni strumenti scientifici, come radar a microonde e radiometri, sono in grado di rilevare questo contrasto, noto come **ombra dello tsunami**