

# Решение уравнения Стокса в области со сложной геометрией границ



Цифровые двойники  
и научный инжиниринг



РОСАТОМ

# Проницаемость горных пород

Абсолютная проницаемость – проницаемость породы при однофазном течении, т.е. когда через поровое пространство течет только одна жидкость

Абсолютная проницаемость вычисляется с помощью закона Дарси

$$q = \frac{kA}{\mu L} dP$$

q - поток жидкости

k - проницаемость

A - площадь поперечного сечения

dP - перепад давления

$\mu$  - вязкость жидкости

L - длина образца.

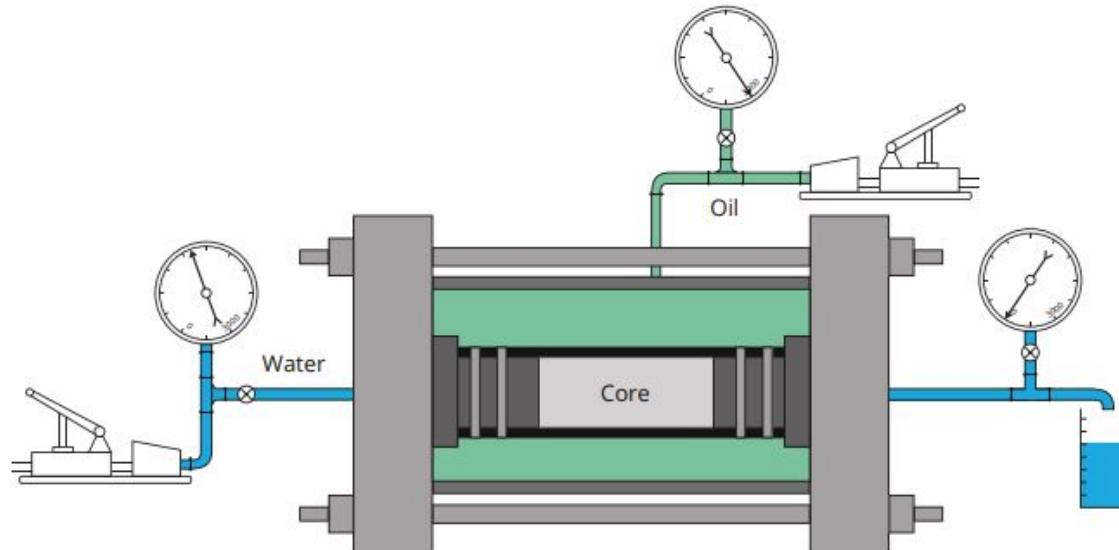


Figure 4.5: Schematic showing the experimental set-up to measure the liquid permeability of a core sample. In this system, we inject water through the core sample and use oil to apply a confining pressure, which should be higher than the water injection pressure.

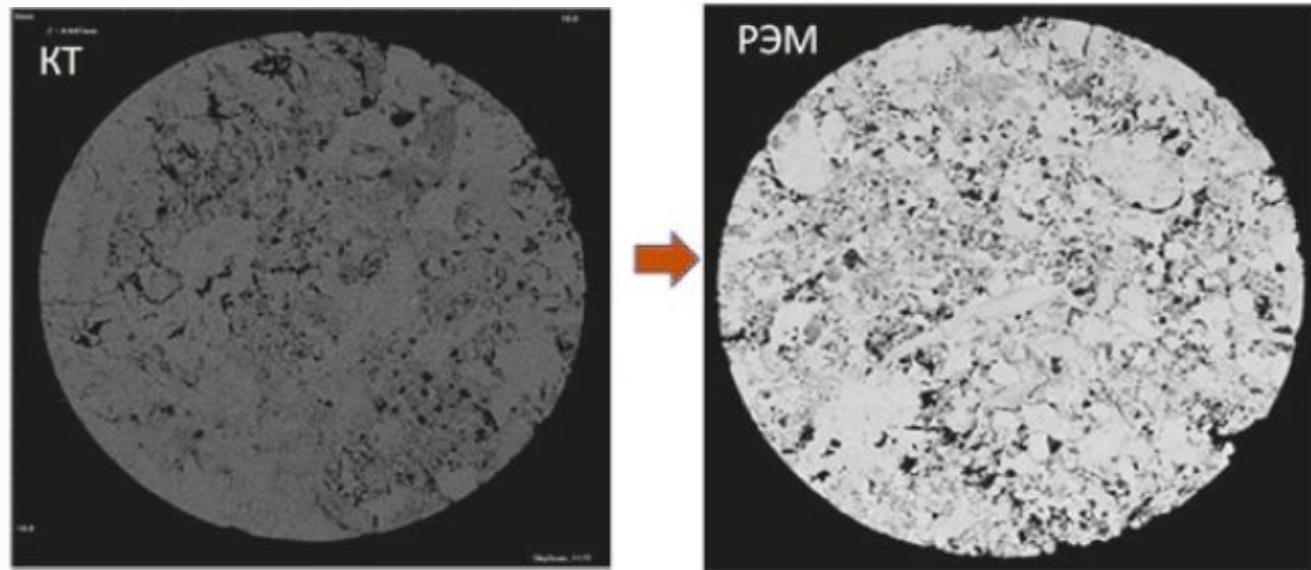
# **Модуль: цифровые изображения горных пород**

# Сегментированное цифровые изображение горной породы

Результаты микротомографического исследования образца горной породы – набор изображений в градациях серого представляющий собой картину поглощения рентгеновского излучения внутри

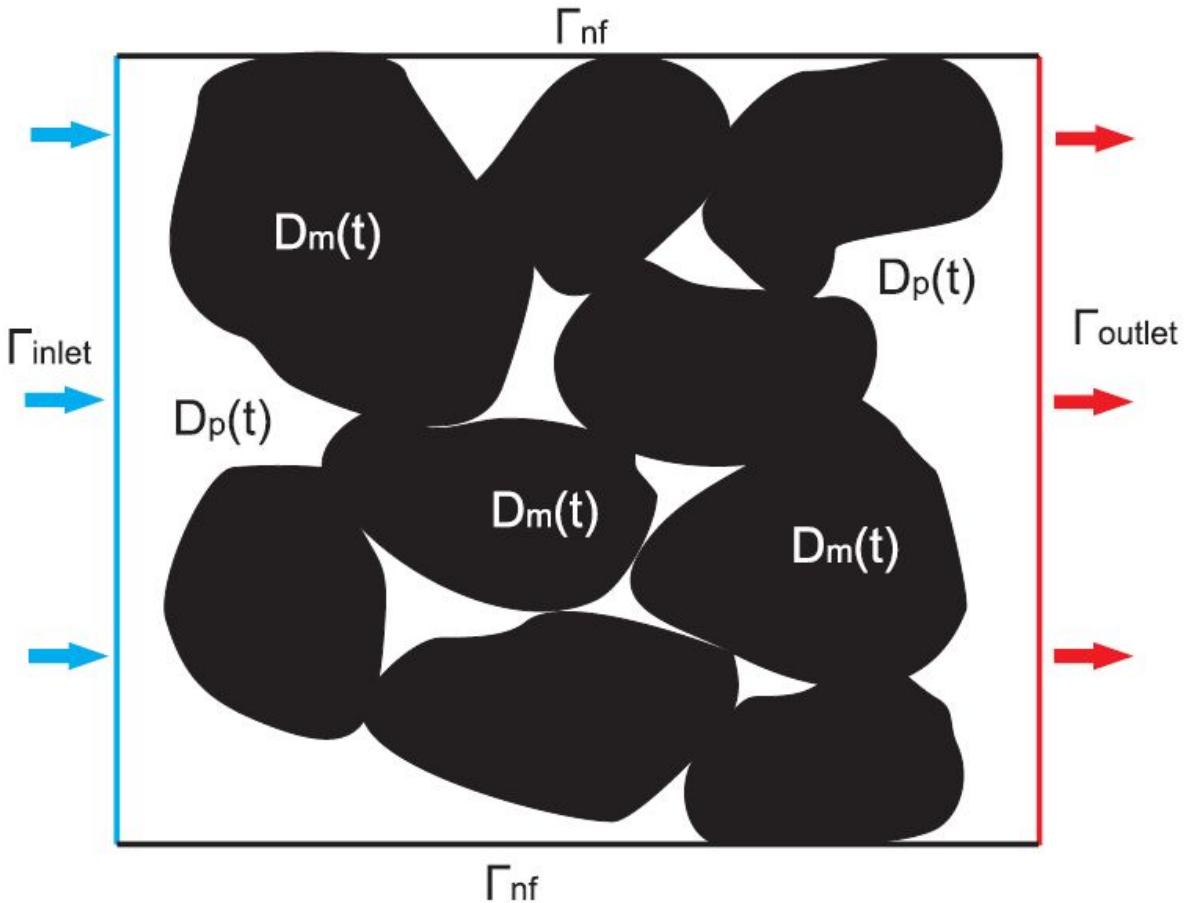
Сегментация процедура перехода в пространстве образца от поглощения рентгеновского излучения к пространственному распределению компонентов, входящих в состав образца

Бинарная сегментация – разделение пикселей/вокселей на две фазы, принадлежащие порам и твердому веществу



## Двумерный случай

Для двумерного цифрового изображения с двух сторон необходимо добавить слой вокселей породы соответствующих стенкам лабораторной камеры



# Формат файла изображения

Изображение хранится в бинарном файле.

Первые 8 байт представляют собой беззнаковый целый тип – размер изображения N1 по первому измерению

Вторые 8 байт - размер изображения N2 по второму направлению

Трети 8 байт – вещественное число – разрешение изображения

Далее следует  $N1 \times N2$  пикселей изображения. Один пиксель занимает 1 байт. Пиксель со значением 0 соответствует поре, 255 – породе.

Для трехмерного случая – аналогично (добавляется еще 8 байт для размера третьего измерения)

# Функциональность

1. Считать 2D изображение из файла
2. Записать 2D изображение в файл
3. Добавить стенки изображению
4. Вырезать из 2D изображения квадратную подобласть
5. Вырезать слайс из 3D изображения
6. Поворот изображения 2D
7. Библиотека стандартных изображений:
  1. Обтекание цилиндра
  2. Извилистый канал
8. Удаление замкнутых пор из изображения

# **Модуль: решение ленточной СЛАУ**

# Симметричная положительно определенная матрица

- $A^T = A$
- $z^*Az > 0 \forall z$
- Самый простой способ получить такую матрицу для тестов:  
взять невырожденную матрицу  $A$  и на ее основе  
сконструировать матрицу  $A^TA$

# Методы решения СЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей

## Прямые методы:

- Разложение Холесского  $A = CC^T$ . Решение исходной системы сводится к решению двух систем с треугольной матрицей. С.П. Шарый, Курс ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ, страница 440.

## Итерационные методы:

- Метод сопряженных градиентов. С.П. Шарый, Курс ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ, страница 539.

# Функциональность

- Считывание плотной матрицы
- Считывание пятидиагональной матрицы или CSR матрицы
- Считывание правой части
- Вывод вектора-решения
- Адекватная обработка ситуации, когда итерационный метод не сходится или в прямом методе не удалось факторизовать матрицу

# **Модуль: решение уравнения Стокса**

## Уравнение Стокса

$$\mu \nabla^2 \vec{u} - \nabla p = 0,$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

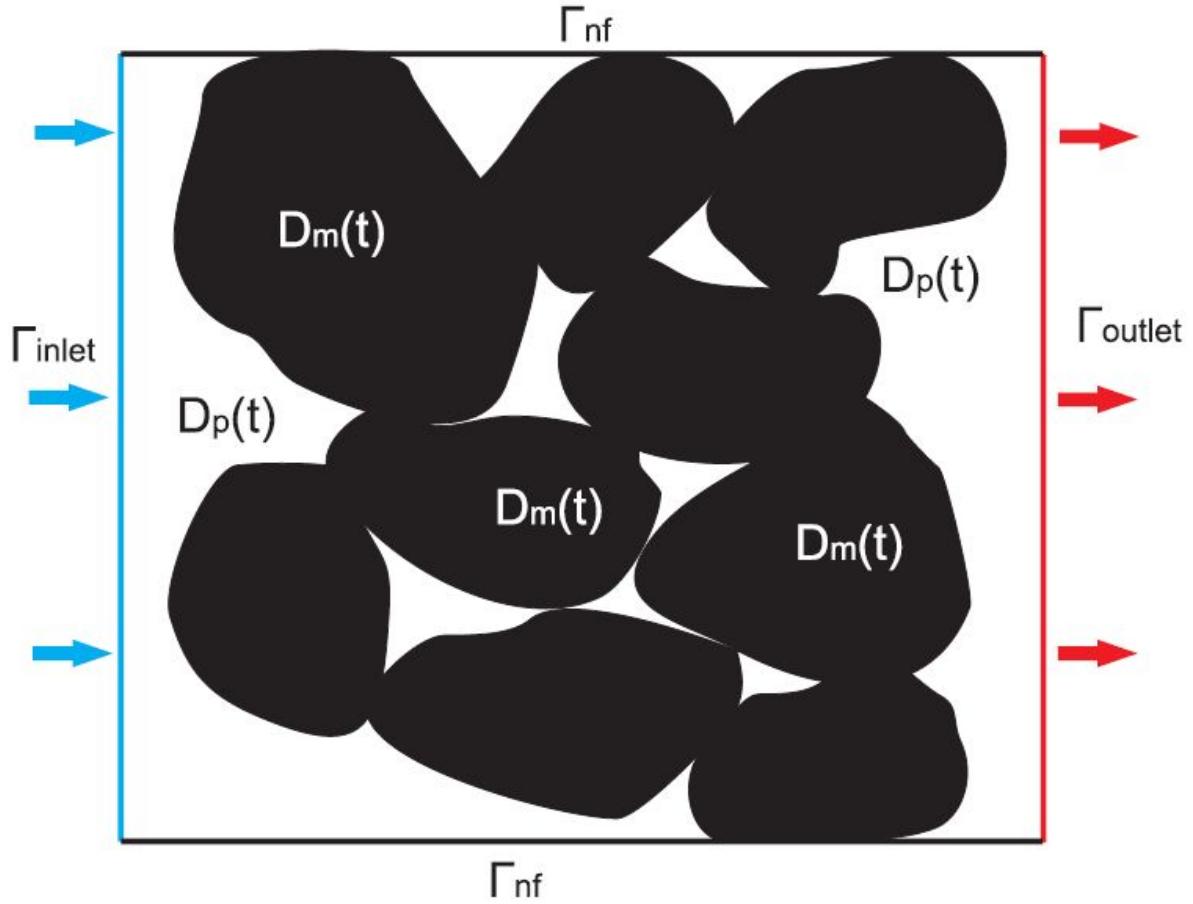
$$\vec{u}(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma(t) \cup \Gamma_{nf},$$

$$p(\vec{x}) = p_{bc}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Gamma_{inlet}^p \cup \Gamma_{outlet},$$

$\vec{u}$  - вектор скорости

$p$  - давление

$\mu$  - динамическая вязкость жидкости



# Метод Узавы

Обозначим индексами  $d$  дискретные аналоги операторов Лапласа, дивергенции и градиента ( $\Delta_d, \nabla_d$ ).

Метод Узавы заключается в поочередном обновлении компонент вектора скорости и значений давления:

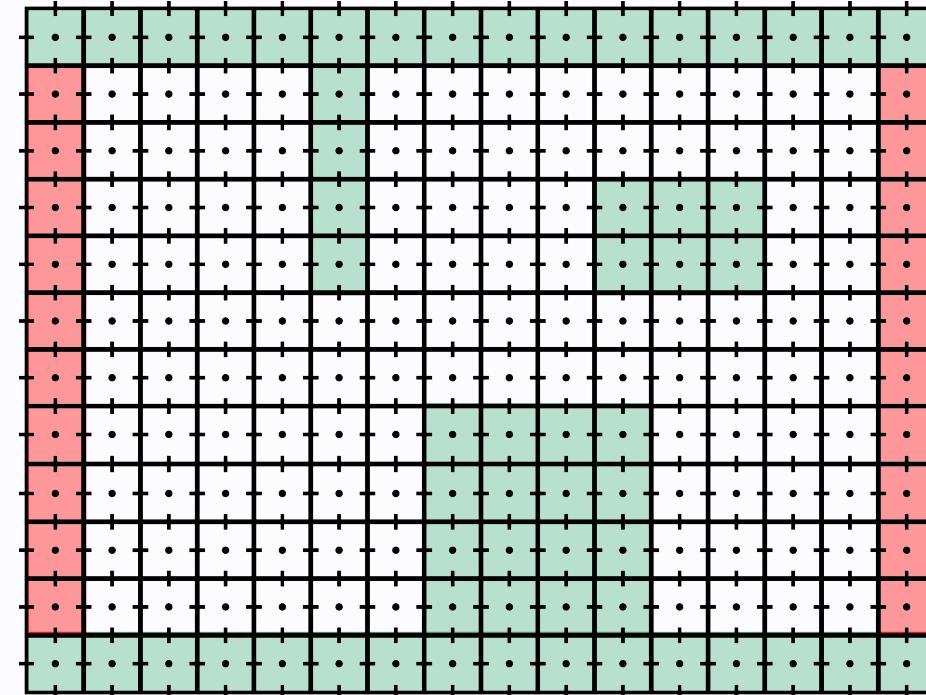
$$\begin{aligned}\Delta_d u^{k+1} &= \nabla_d p^k \\ p^{k+1} &= p^k - \nabla_d \cdot u^{k+1}\end{aligned}$$

На каждом шаге необходимо решать конечно-разностный аналог уравнения Пуассона. При этом матрица не меняется, меняется только правая часть.

# Конечно-разностная схема на сдвинутых сетках

## Marker and cell

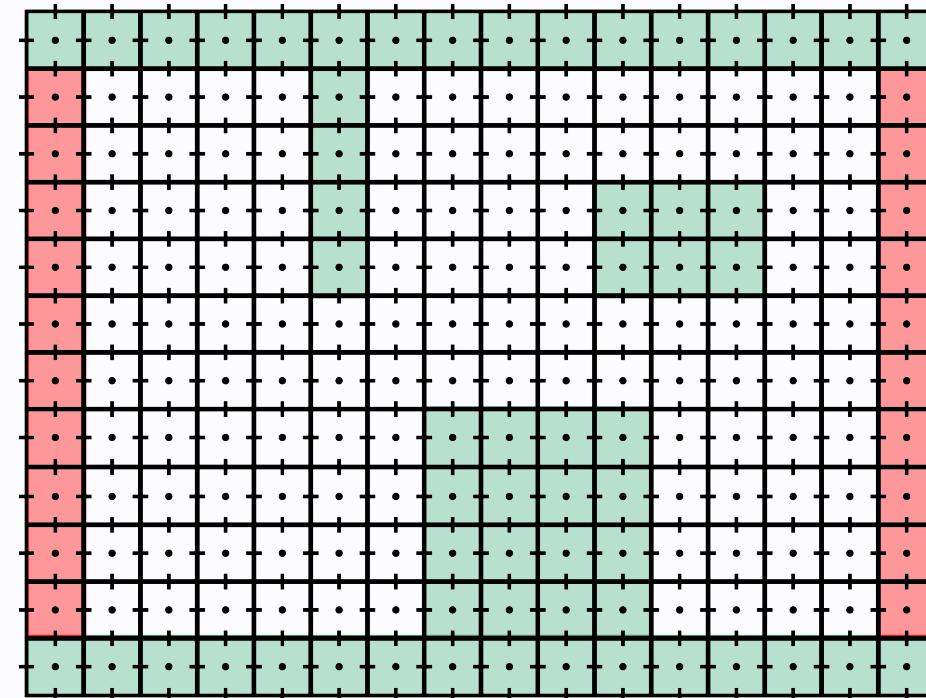
- Зеленым обозначены стенки
- Красным – место задания  
границых условий
- Давление “живет” в центрах ячеек  
(точка)
- Горизонтальная компонента  
вектора скорости – на  
вертикальных гранях  
(горизонтальные черточки)
- Вертикальная компонента вектора  
скорости – на горизонтальных  
гранях (вертикальные черточки)



# Конечно-разностная схема на сдвинутых сетках

## Marker and cell

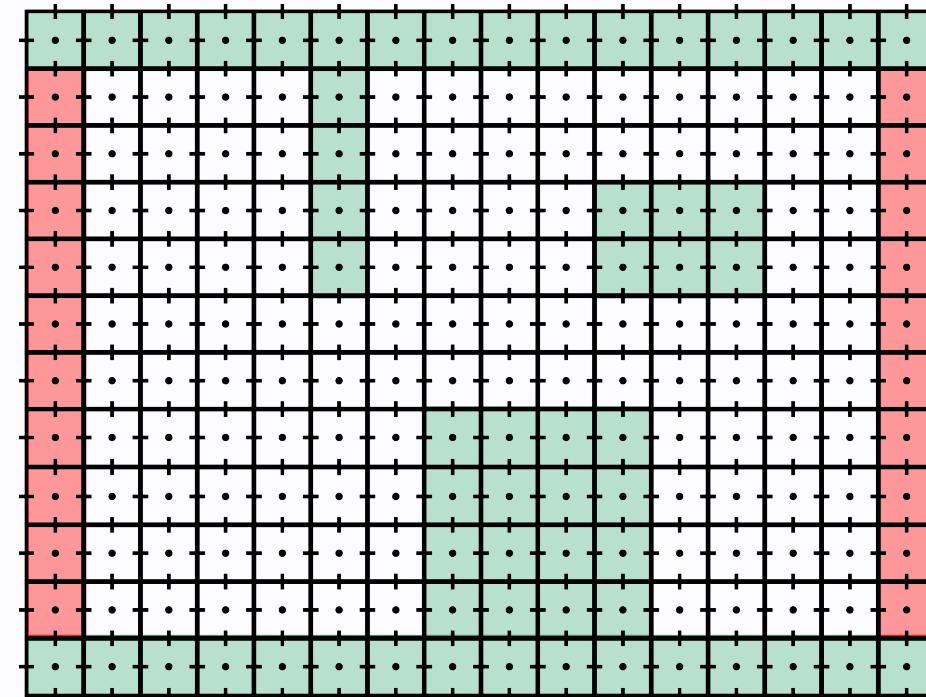
- Компоненты градиента давления и лапласиан компонент вектора скорости “живут” там же где и компоненты вектора скорости
- Дивергенция скорости “живет” в центрах ячеек.
- В центре красных ячеек давление известно (условие Дирихле).
- В центре красных ячеек ставится условие Неймана на горизонтальную компоненту вектора скорости
- Вертикальная компонента вектора скорости на гранях красных ячеек считается равной нулю



# Конечно-разностная схема на сдвинутых сетках

## Marker and cell

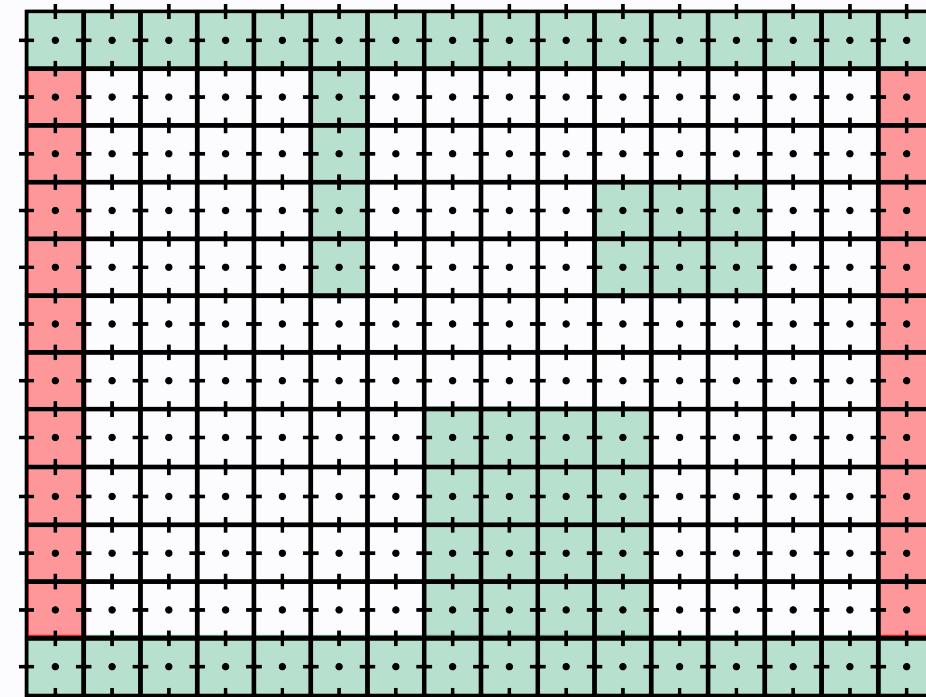
- На границе раздела пор и породы на компоненты вектора скорости ставятся условия непротекания и прилипания:
  - Нормальная компонента вектора скорости равна нулю
  - Касательная компонента вектора скорости равна нулю
- На границе раздела пор и породы на давление ставится условие Неймана
- Внутри породы давление и скорости считаются неопределенными



# Конечно-разностная схема на сдвинутых сетках

## Marker and cell

- На границе раздела пор и породы на компоненты вектора скорости ставятся условия непротекания и прилипания:
  - Нормальная компонента вектора скорости равна нулю
  - Касательная компонента вектора скорости равна нулю
- На границе раздела пор и породы на давление ставится условие Неймана
- Внутри породы давление и скорости считаются неопределенными



# Аппроксимация градиента давления

- 

$$\nabla_d p_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{h_x} \\ \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{h_y} \end{pmatrix}$$

Если одно из необходимых значений давления попадает внутрь стенки, то это означает, что мы считаем градиент на границе, где задано условие Неймана  $\frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{h_x} = 0$ , то есть компонента градиента равна нулю.

# Аппроксимация дивергенции вектора скорости

- 

$$\nabla_d \cdot u_{i,j} = \frac{u_{x,i,j+\frac{1}{2}} - u_{x,i,j-\frac{1}{2}}}{h_x} + \frac{u_{x,i+1/2,j} - u_{x,i-1/2,j}}{h_y}$$

Дивергенция скорости рассчитывается в центре ячеек, поэтому все необходимые значения компонент вектора скорости всегда определены

# Аппроксимация лапласиана вектора скорости

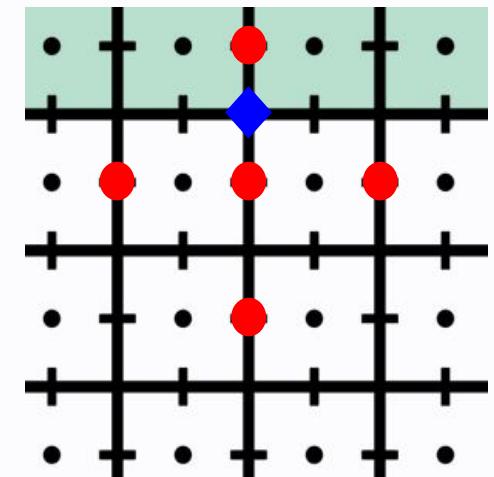
- $$\Delta_d u_{x,i,j+1/2} = \frac{\frac{u_x_{i,j+\frac{3}{2}} - u_x_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_x} - \frac{u_x_{i,j+\frac{1}{2}} - u_x_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_x}}{h_x} + \frac{\frac{u_x_{i+1,j+\frac{1}{2}} - u_x_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y} - \frac{u_x_{i,j+\frac{1}{2}} - u_x_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{h_y}}{h_y}$$

$$\Delta_d u_{y,i+1/2,j} = \frac{\frac{u_y_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_y_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x} - \frac{u_y_{i+\frac{1}{2},j} - u_y_{i+\frac{1}{2},j-1}}{h_x}}{h_x} + \frac{\frac{u_y_{i+\frac{3}{2},j} - u_y_{i+\frac{1}{2},j}}{h_y} - \frac{u_y_{i+\frac{1}{2},j} - u_y_{i-\frac{1}{2},j}}{h_y}}{h_y}$$

# Аппроксимация лапласиана вектора скорости

- Если одна из компонент вектора скорости попадает на границу раздела пор и породы?
  - Срабатывает условие прилипания или непротекания – подставляем вместо нее ноль.
- Если одна из компонент вектора скорости попадает внутрь породы?
  - Тогда пользуемся условием прилипания в точке, отмеченной синим ромбом. Усредненная скорость в данной точке должна быть равна нулю

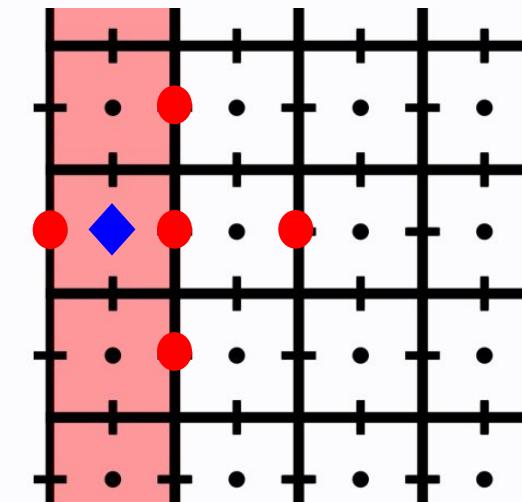
$$\frac{u_{y_{i+\frac{3}{2},j}} + u_{y_{i+\frac{1}{2},j}}}{2} = 0 \quad \longrightarrow \quad u_{y_{i+\frac{3}{2},j}} = -u_{y_{i+\frac{1}{2},j}}$$



# Аппроксимация лапласиана вектора скорости

- Если компоненты вектора скорости находятся на границе, где задано давление?
  - Тогда пользуемся условием Неймана в точке, отмеченной синим ромбом

$$\frac{u_{x,i,j+\frac{1}{2}} - u_{x,i,j-\frac{1}{2}}}{h_x} = 0 \rightarrow u_{x,i,j+\frac{1}{2}} = u_{x,i,j-\frac{1}{2}}$$



# Сборка матрицы для определения скоростей

- С использованием конечно-разностной аппроксимации оператора Лапласа и градиента нужно собрать матрицу и правую часть для определения скоростей.
- Данная матрица должна быть симметричной и положительно определенной.
- Для этого необходимо:
  - Домножить матрицу и правую часть на -1.
  - Либо исключить из системы, те компоненты вектора скорости, значения которых неопределены или известны.
  - Либо добавить для них в матрицу фиктивные блоки размера  $1 \times 1$  вида:  
$$u_{\cdot \cdot} = 0$$

# Функциональность

1. Считать 2D изображение из файла
2. Считать значение вязкости и перепада давления
3. Вывести в файл распределение давления и скоростей потока
4. Вывести в файл рассчитанное значение абсолютной проницаемости