

Решение уравнения Стокса в области со сложной геометрией границ



Цифровые двойники
и научный инжиниринг



РОСАТОМ

Проницаемость горных пород

Абсолютная проницаемость – проницаемость породы при однофазном течении, т.е. когда через поровое пространство течет только одна жидкость

Абсолютная проницаемость вычисляется с помощью закона Дарси

$$q = \frac{kA}{\mu L} dP$$

q - поток жидкости

k – проницаемость

A – площадь поперечного сечения

dP – перепад давления

μ - вязкость жидкости

L – длина образца.

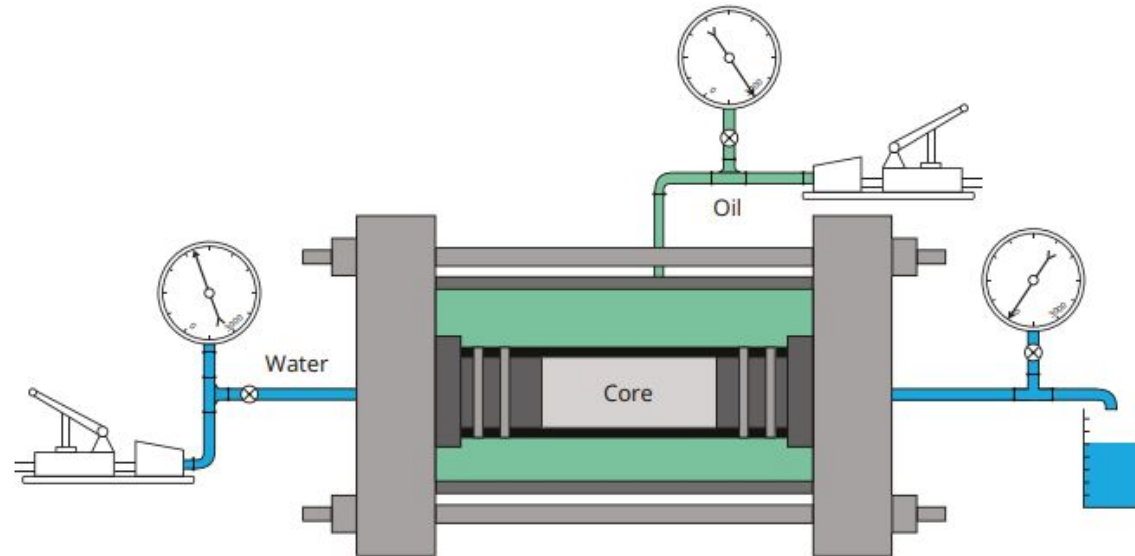


Figure 4.5: Schematic showing the experimental set-up to measure the liquid permeability of a core sample. In this system, we inject water through the core sample and use oil to apply a confining pressure, which should be higher than the water injection pressure.

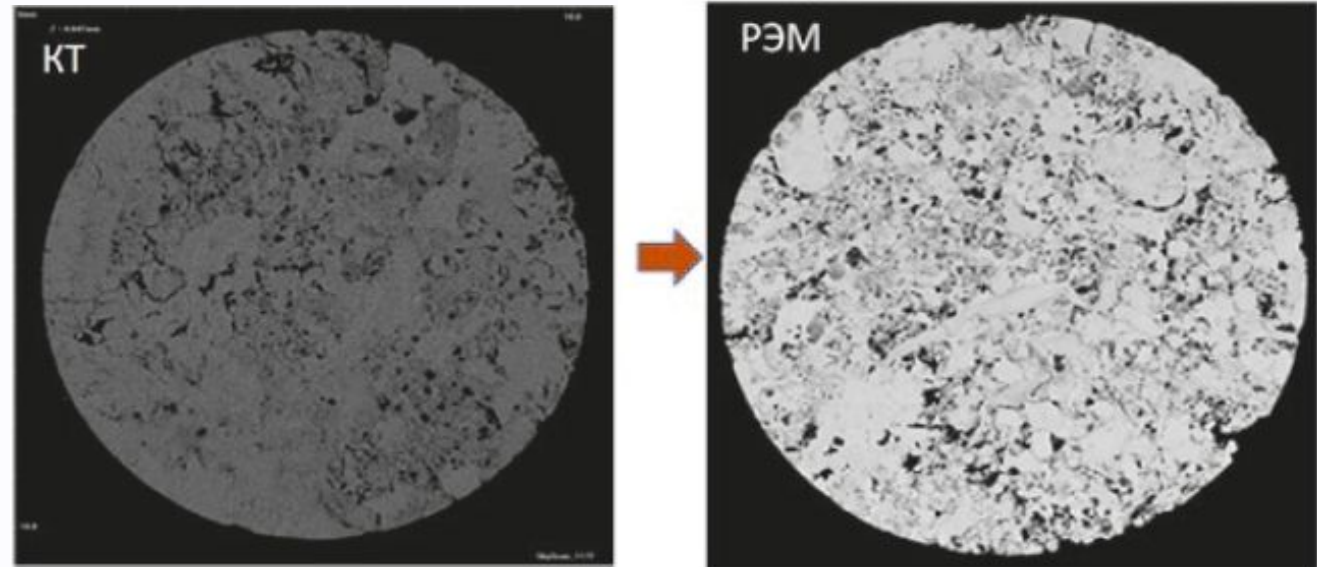
Модуль: цифровые изображения горных пород

Сегментированное цифровое изображение горной породы

Результаты микротомографического исследования образца горной породы – набор изображений в градациях серого представляющий собой картину поглощения рентгеновского излучения внутри

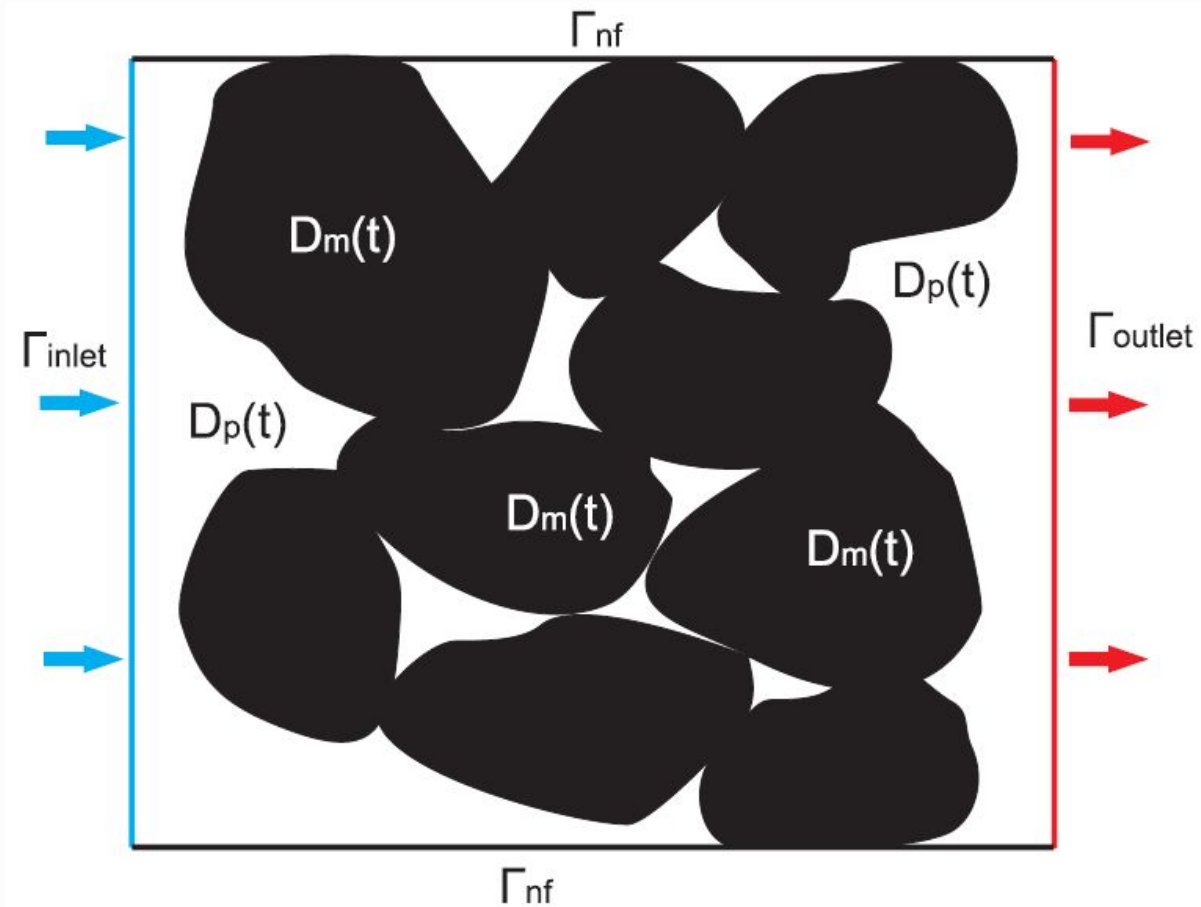
Сегментация процедура перехода в пространстве образца от поглощения рентгеновского излучения к пространственному распределению компонентов, входящих в состав образца

Бинарная сегментация – разделение пикселей/вокселей на две фазы, принадлежащие порам и твердому веществу



Двумерный случай

Для двумерного цифрового изображения с двух сторон необходимо добавить слой вокселей породы соответствующих стенкам лабораторной камеры



Формат файла изображения

Изображение хранится в бинарном файле.

Первые 8 байт представляют собой беззнаковый целый тип – размер изображения N1 по первому измерению

Вторые 8 байт - размер изображения N2 по второму направлению

Третьи 8 байт – вещественное число – разрешение изображения

Далее следует $N1 \times N2$ пикселей изображения. Один пиксель занимает 1 байт. Пиксель со значением 0 соответствует pore, 255 – породе.

Для трехмерного случая – аналогично (добавляется еще 8 байт для размера третьего измерения)

Функциональность

1. Считать 2D изображение из файла
2. Записать 2D изображение в файл
3. Добавить стенки изображению
4. Вырезать из 2D изображения квадратную подобласть
5. Вырезать слайс из 3D изображения
6. Поворот изображения 2D
7. Библиотека стандартных изображений:
 1. Обтекание цилиндра
 2. Извилистый канал
8. Удаление замкнутых пор из изображения

Оценивание

- Максимальная оценка за модуль 10 баллов
 - 4 балла. Отчет о проделанной работе
 - 3 балла. Структура модуля
 - 1 балл. Тестирование
 - 3 балла. Демонстрация работы на занятии
 - 3 балла. Корректное удаление замкнутых пор

Модуль: решение ленточной СЛАУ

Симметричная положительно определенная матрица

- $A^T = A$
- $z^* A z > 0 \ \forall z$
- Самый простой способ получить такую матрицу для тестов: взять невырожденную матрицу A и на ее основе сконструировать матрицу $A^T A$

Методы решения СЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей

Прямые методы:

- Разложение Холецкого $A = CC^T$. Решение исходной системы сводится к решению двух систем с треугольной матрицей. С.П. Шарый, Курс ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ, страница 440.

Итерационные методы:

- Метод сопряженных градиентов. С.П. Шарый, Курс ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ, страница 539.

Функциональность

- Считывание плотной матрицы
- Считывание пятидиагональной матрицы или CSR матрицы
- Считывание правой части
- Вывод вектора-решения
- Адекватная обработка ситуации, когда итерационный метод не сходится или в прямом методе не удалось факторизовать матрицу

Оценивание

- Максимальная оценка за модуль 10 баллов
 - 3 балла. Плотные матрицы
 - 2 балла. Отчет
 - 1 балл. Структура модуля
 - 1 балл. Тестирование
 - 1 балл. Демонстрация работы. Относительная точность решения $1e-8$
 - 6 баллов. CSR или ленточные матрицы
 - 4 балла. Отчет
 - 2 балла. Структура модуля
 - 2 балла. Тестирование
 - 2 балла. Демонстрация работы. Относительная точность решения $1e-8$
 - 1 балл. Метод сопряженных градиентов реализован только один раз, то есть один и тот же код работает как с плотными матрицами, так и разреженными. Для прямого метода 1 балл начисляется за реализацию для ленточных/разреженных матрицах

Модуль: решение уравнения Стокса

Уравнение Стокса

$$\mu \nabla^2 \vec{u} - \nabla p = 0,$$

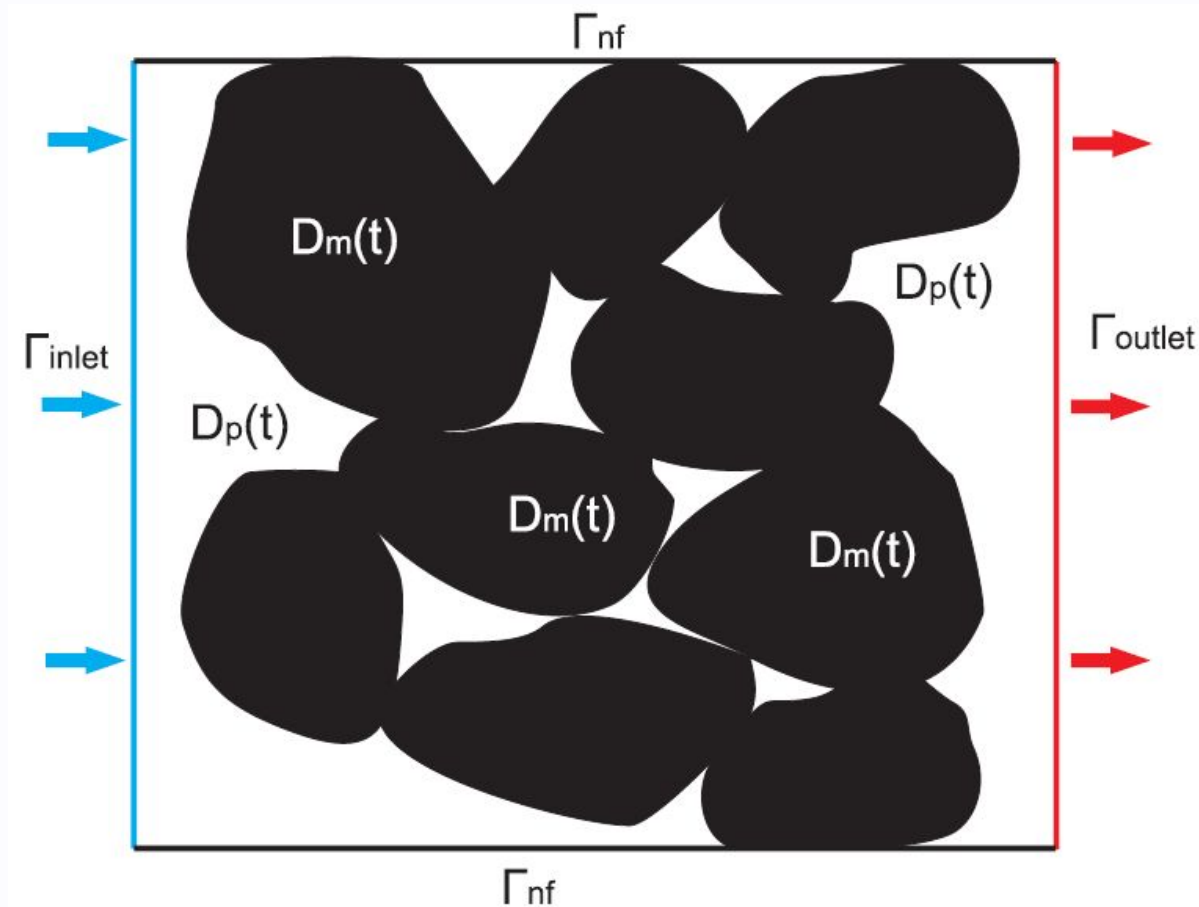
$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}) &= 0, & \vec{x} &\in \Gamma(t) \cup \Gamma_{nf}, \\ p(\vec{x}) &= p_{bc}(\vec{x}), & \vec{x} &\in \Gamma_{inlet}^p \cup \Gamma_{outlet}, \end{aligned}$$

u - вектор скорости

p - давление

μ - динамическая вязкость жидкости



Метод Узавы

Обозначим индексами d дискретные аналоги операторов Лапласа, дивергенции и градиента (Δ_d, ∇_d).

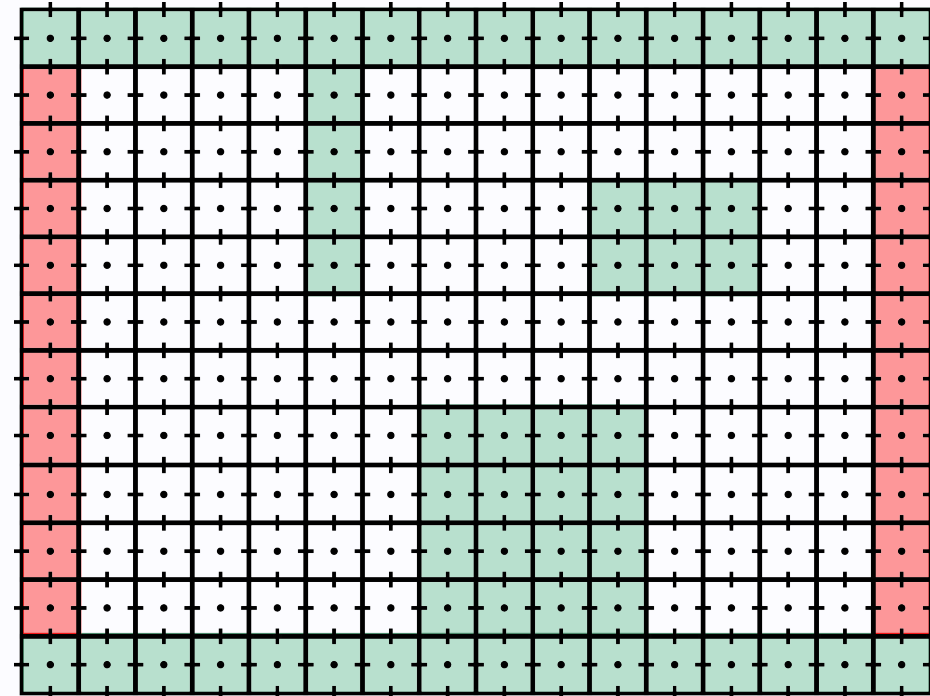
Метод Узавы заключается в поочередном обновлении компонент вектора скорости и значений давления:

$$\begin{aligned}\Delta_d u^{k+1} &= \nabla_d p^k \\ p^{k+1} &= p^k - \nabla_d \cdot u^{k+1}\end{aligned}$$

На каждом шаге необходимо решать конечно-разностный аналог уравнения Пуассона. При этом матрица не меняется, меняется только правая часть.

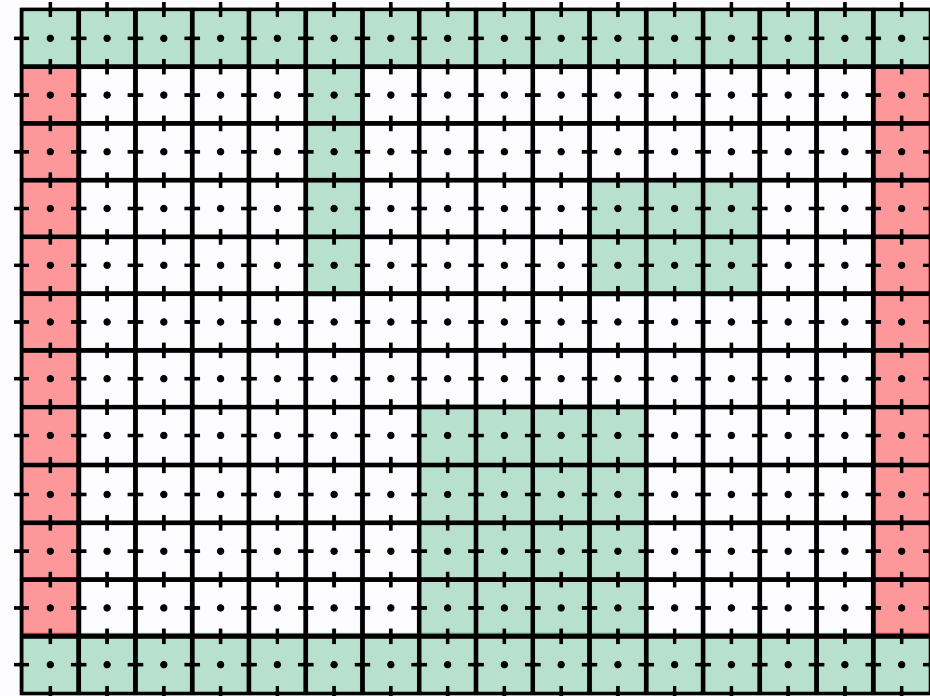
Конечно-разностная схема на сдвинутых сетках Marker and cell

- Зеленым обозначены стенки
- Красным – место задания граничных условий
- Давление “живет” в центрах ячеек (точка)
- Горизонтальная компонента вектора скорости – на вертикальных гранях (горизонтальные черточки)
- Вертикальная компонента вектора скорости – на горизонтальных гранях (вертикальные черточки)



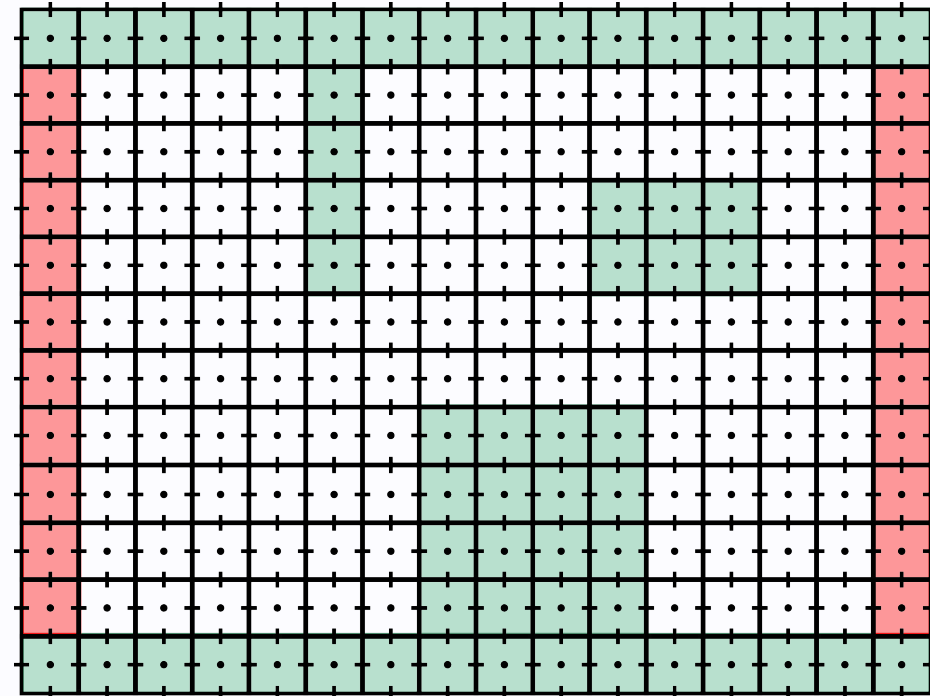
Конечно-разностная схема на сдвинутых сетках Marker and cell

- Компоненты градиента давления и лапласиан компонент вектора скорости “живут” там же где и компоненты вектора скорости
- Дивергенция скорости “живет” в центрах ячеек.
- В центре красных ячеек давление известно (условие Дирихле).
- В центре красных ячеек ставится условие Неймана на горизонтальную компоненту вектора скорости
- Вертикальная компонента вектора скорости на гранях красных ячеек считается равной нулю



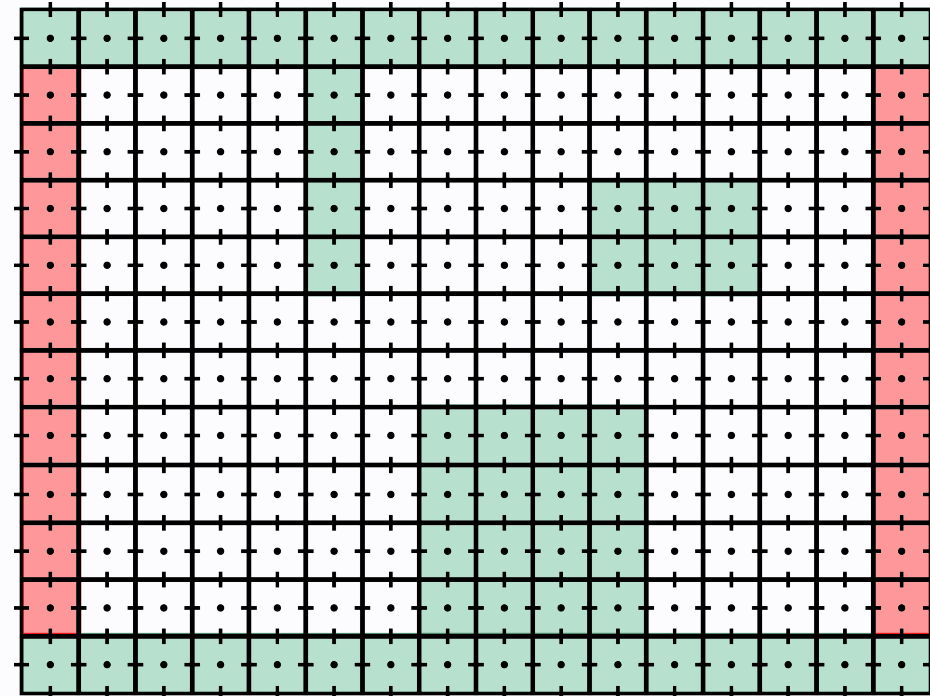
Конечно-разностная схема на сдвинутых сетках Marker and cell

- На границе раздела пор и породы на компоненты вектора скорости ставятся условия непротекания и прилипания:
 - Нормальная компонента вектора скорости равная нулю
 - Касательная компонента вектора скорости равна нулю
- На границе раздела пор и породы на давление ставится условие Неймана
- Внутри породы давление и скорости считаются неопределенными



Конечно-разностная схема на сдвинутых сетках Marker and cell

- На границе раздела пор и породы на компоненты вектора скорости ставятся условия непротекания и прилипания:
 - Нормальная компонента вектора скорости равная нулю
 - Касательная компонента вектора скорости равна нулю
- На границе раздела пор и породы на давление ставится условие Неймана
- Внутри породы давление и скорости считаются неопределенными



Аппроксимация градиента давления

- $$\nabla_d p_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{h_x} \\ \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{h_y} \end{pmatrix}$$

Если одно из необходимых значений давления попадает внутрь стенки, то это означает, что мы считаем градиент на границе, где задано условие Неймана $\frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{h_x} = 0$, то есть компонента градиента равна нулю.

Аппроксимация дивергенции вектора скорости

- $$\nabla_d \cdot u_{i,j} = \frac{u_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} - u_{x_{i,j-\frac{1}{2}}}}{h_x} + \frac{u_{x_{i+1/2,j}} - u_{x_{i-1/2,j}}}{h_y}$$

Дивергенция скорости рассчитывается в центре ячеек, поэтому все необходимые значения компонент вектора скорости всегда определены

Аппроксимация лапласиана вектора скорости

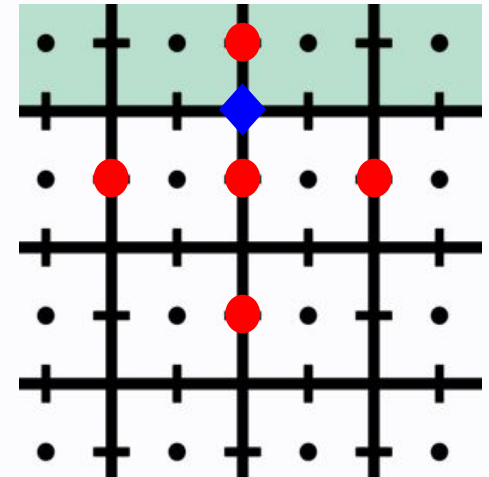
- $$\Delta_d u_{x_{i,j+1/2}} = \frac{\frac{u_x_{i,j+\frac{3}{2}} - u_x_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_x} - \frac{u_x_{i,j+\frac{1}{2}} - u_x_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_x}}{h_x} + \frac{\frac{u_x_{i+1,j+\frac{1}{2}} - u_x_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y} - \frac{u_x_{i,j+\frac{1}{2}} - u_x_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{h_y}}{h_y}$$

$$\Delta_d u_{y_{i+1/2,j}} = \frac{\frac{u_y_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_y_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x} - \frac{u_y_{i+\frac{1}{2},j} - u_y_{i+\frac{1}{2},j-1}}{h_x}}{h_x} + \frac{\frac{u_y_{i+\frac{3}{2},j} - u_y_{i+\frac{1}{2},j}}{h_y} - \frac{u_y_{i+\frac{1}{2},j} - u_y_{i-\frac{1}{2},j}}{h_y}}{h_y}$$

Аппроксимация лапласиана вектора скорости

- Если одна из компонент вектора скорости попадает на границу раздела пор и породы?
 - Срабатывает условие прилипания или непротекания – подставляем вместо нее ноль.
- Если одна из компонент вектора скорости попадает внутрь породы?
 - Тогда пользуемся условием прилипания в точке, отмеченной синим ромбом. Усредненная скорость в данной точке должна быть равная нулю

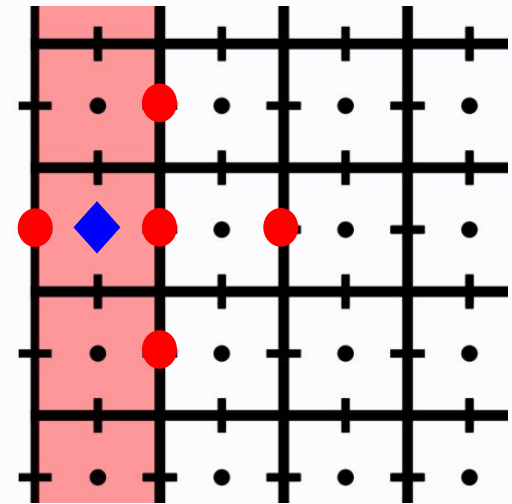
$$\frac{u_{y_{i+\frac{3}{2},j}} + u_{y_{i+\frac{1}{2},j}}}{2} = 0 \quad \longrightarrow \quad u_{y_{i+\frac{3}{2},j}} = -u_{y_{i+\frac{1}{2},j}}$$



Аппроксимация лапласиана вектора скорости

- Если компоненты вектора скорости находятся на границе, где задано давление?
 - Тогда пользуемся условием Неймана в точке, отмеченной синим ромбом

$$\frac{u_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} - u_{x_{i,j-\frac{1}{2}}}}{h_x} = 0 \quad \longrightarrow \quad u_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} = u_{x_{i,j-\frac{1}{2}}}$$



Сборка матрицы для определения скоростей

- С использованием конечно-разностной аппроксимации оператора Лапласа и градиента нужно собрать матрицу и правую часть для определения скоростей.
- Данная матрица должна быть симметричной и положительно определенной.
- Для этого необходимо:
 - Домножить матрицу и правую часть на -1.
 - Либо исключить из системы, те компоненты вектора скорости, значения которых неопределены или известны.
 - Либо добавить для них в матрицу фиктивные блоки размера 1x1 вида:

$$u_i = 0$$

Функциональность

1. Считать 2D изображение из файла
2. Считать значение вязкости и перепада давления
3. Вывести в файл распределение давления и скоростей потока
4. Вывести в файл рассчитанное значение абсолютной проницаемости

Оценивание

- Максимальная оценка за модуль 20 баллов
 - 15 баллов. Отчет
 - 3 балла. Структура кода
 - 7 баллов. Показать “адекватное” распределение скоростей и давления
 - 5 баллов. Течение Пуазейля
 - 1 балл. Проведение сравнения
 - По одному баллу за каждый 0 после запятой в относительной погрешности решения (12 норма)
 - 5 баллов. Демонстрация работы