

姓名	学号	班级	选题	论述	结论	总分

水星进动的模拟

刘昊天 2013301020064 2013 级天春班

1. 摘要

这次试验模拟了太阳系中行星对水星运动的影响和广义相对论引起的效应。主要是对水星进动的一个定性的模拟，以及对两者对进动影响的量级的一种定性的比较。本实验作为计算物理课程的结课论文，它的代码已经上传到了 [github](#) 上。

2. 正文

2.1 背景介绍

对水星近日点进动的计算实际上主要是根据牛顿定律进行，结果是每世纪=5557.62 角秒的进动，其中的 90%是由坐标系的岁差引起，其余的部分是由其他行星，特别是金星、地球和木星的摄动引起的；而实际观测值为=5600.73 角秒，二者相减得每世纪 43.11 角秒。

根据牛顿万有引力定律计算的水星近日点进动值与观测值的分歧。1859 年，法国天文学家勒威耶发现水星近日点进动的观测值，比牛顿定律算得的理论值每世纪快 38 角秒，并猜测这可能是一个比水星更靠近太阳的水内行星吸引所致。可是经过多年的辛勤搜索，这颗猜测中的行星始终毫无踪影。纽康测定这个值为每世纪 43 角秒。他提出，这可能是那些发出黄道光的弥漫物质的阻尼所造成的。但是，这种假设又不能解释其他几颗行星的运动。于是纽康就怀疑万有引力定律中的平方反比规律有问题。为了能同时解释几颗内行星的实际运动，纽康求出了引力应与距离的 $2+1.574 \times 10^{-5}$ 次方成反比。十九世纪末，电磁理论发展的早期，韦伯、黎曼等人也都曾试图用电磁理论来解释水星近日点的进动问题，但均未能得出满意的结果。

1916 年，爱因斯坦发表了著名的广义相对论，成功地解释了这个问题。根据广义相对论，行星公转一圈后近日点进动为：

$$\Delta\omega = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1-e)^2}$$

式中 c 为光速， T 、 a 、 e 分别为轨道周期、半长径和偏心率。对于水星，此值与牛顿万有引力定律所得的差值为每世纪 43.03 秒。这与观测值十分接近，成为天文学对广义相对论的最有力的验证之一。

2.2 行星导致的进动

2.2.1 初始条件

在水星的进动研究中，我们首先考虑行星对水星运动的影响，各行星的参数如下：

行星	质量（kg）	轨道半径（AU）	离心率
水星	2.4×10^{23}	0.39	0.206
金星	24.9×10^{24}	0.72	0.007
地球	6.0×10^{24}	1.00	0.017
火星	6.6×10^{23}	1.52	0.093
木星	1.9×10^{27}	5.20	0.048
土星	5.7×10^{26}	9.54	0.056
天王星	8.8×10^{25}	19.19	0.046
海王星	1.03×10^{26}	30.06	0.010

为了简化计算，我们要做一些近似。首先，我们根据万有引力定律来估算各个行星对水星作用力的大小，即计算各个行星的质量与该行星到水星距离的大小的平方之比。简单的估算后发现，金星、地球、木星对水星的作用力占各行星对水星作用力总和的很大一部分。为了使结果更精确，我们再把土星对水星的作用力包含进去。也就是说，我们只考虑金星、地球、木星和土星对水星的作用力。再看这五个行星的离心率，我们可以发现，水星的离心率明显其他的行星要大。而且，我们只是研究水星进动，所以其他行星的轨道按圆形来算。

不失一般性，我们将初始时刻设置为五个行星在一条直线上。查阅资料可得，这五个行星的公转周期分别为：88 天，225 天，1 年，11.8 年，29.5 年。这样由上面表格中轨道半径的大小，可以计算出各个行星的运行速度。由于水星的运动是椭圆运动，我们将初始时刻水星的位置设置为水星的近日点，这样的话，水星的速度要乘上一个修正的式子，

即：

$$v_{\max} = \sqrt{GM_s} \sqrt{\frac{1+e}{a(1-e)}} \left(1 + \frac{M_m}{M_s} \right)$$

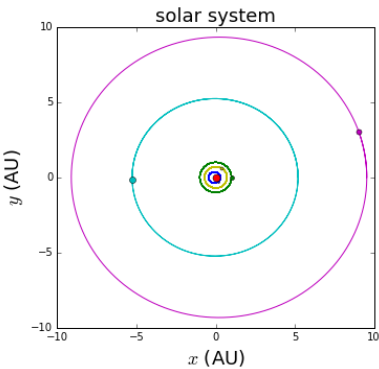
式中：水星质量远小于太阳质量，所以后面一项即为 1， $a(1-e)$ 为近日点到太阳的距离

在分析受力的时候，我们考虑水星受到的来自太阳和其余四个行星的力，因为我们不研究其余四个行星，所以我们仅考虑其余四个行星所受太阳的力，忽略行星间的力。

这样，我们就设置好了初始值。

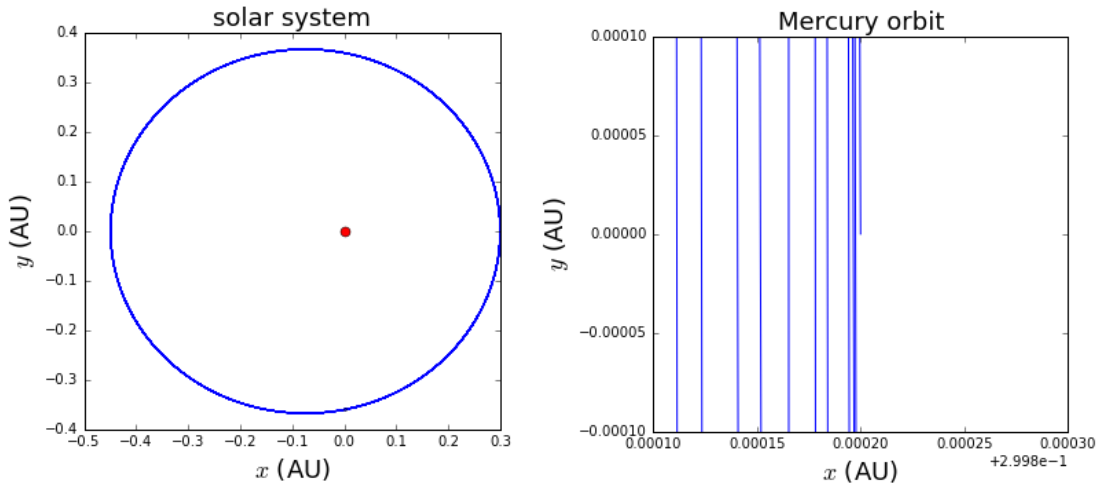
2.2.2 运行结果

运行程序我们可以得到这个只有五个行星的太阳系模拟图。如右图所示。



由于木星和土星的轨道半径比较大，看不清内部三个行星的运动状态，所以我们改变一些代码，将水星的轨道放大，如下方第一个图所示。

观察水星的轨道图，我们发现水星轨道的线条比较粗，但是我们仍然不能看出轨道是否有进动，所以我们将轨道放大。放大后，我们清楚的看到，每一圈的轨道并不重合。观察那些轨道，刚开始的时候轨道间距不是很大，后来轨道间距变大，变得可以分辨。这是因为这是在近日点附近，近日点移动的时候，轨道在近日点附近的变化比较微小，而在稍远离近日点的地方效应比较明显，所以会出现这种现象。



2.3 相对论引起的进动

2.3.1 相对论的修正

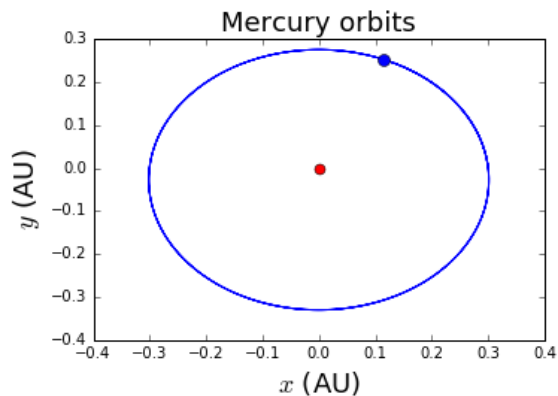
在没有相对论修正的情况下，我们用一个方程来表示轨道方程：

$$\frac{d^2\mu}{d\phi^2} + \mu = \frac{M}{L^2}$$

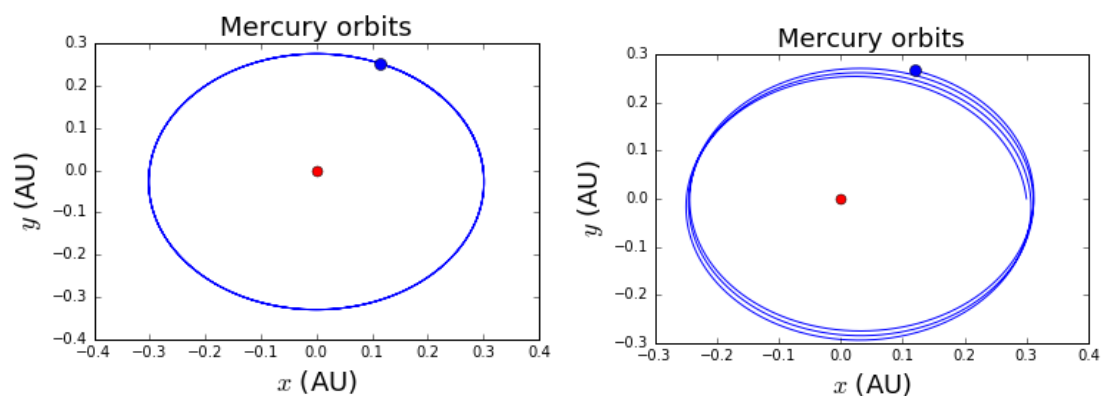
式中： $\mu=1/r$ ， L 为角动量。我们引入相对论修正，我们会得到：

$$\frac{d^2\mu}{d\phi^2} + \mu = \frac{M}{L^2} + 3M\mu^2$$

把上式写成计算步骤的形式，然后进行运算。我们先画出椭圆轨道的图（见右图）。然后再计算步骤中加入相对论的修正项。再次运算程序，可以得到相对论修正下的轨道图（见下页）。将轨道图进行局部放大，发现即使放大到一个很高的精度，也没有观察到进动的现象。



为了检验是否是理论有错误，我们将相对论的修正项扩大，而太阳的质量不变。如右下图所示，当相对论的修正项变大 100000 倍后，出现了明显的进动现象。所以，理论没有错，只是相对论对轨道进动的影响太小了。



3.总结

这次试验很好的模拟了水星的进动。定性的分析太阳系的其他行星和广义相对论对行星进动的影响，而且分析可以看出：行星的影响远大于广义相对论的影响。而且这与实际情况一致。

参考文献

- 【1】 计算物理，清华大学出版社
- 【2】 微分几何与广义相对论，北京师范大学出版社