# EJERCICIOS DE GEODINÁMICA – TURCOTTE:

## Capítulos 1 y 2

Presentado por:

Blanca Hurtado Lopera

Jeison Ocampo Ángel

Carlos Fernando Lozano Lozano

Alexander Sánchez Duque

MAESTRÍA EN GEOFÍSICA - DEPARTAMENTO DE GEOCIENCIAS

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ**

Abril 21 de 2009

**PROBLEMA 1-1** Si el área de la corteza oceánica es 3.2 x $10^8$ $km^2$ y un nuevo piso oceánico está siendo creado a una tasa de 2.8 $km^2$/año, ¿cuál es la edad media de la corteza oceánica? Asuma que la tasa de creación del piso oceánico ha sido constante en el pasado.

*Fórmula para el cálculo:* $\frac{t}{2} = \frac{s}{2V}$ (1)

Donde:

$\frac{t}{2} = edad\ media\ de\ la\ corteza$

$s = 3.2\ x\ 10^8\ km^2\ (Superficie\ corteza\ oceánica)$

$V = 2.8\ x\ 10^8\ {km^2}/{_{año}}\ \ (Tasa\ de\ creación)$

*Desarrollo matemático:* reemplazando valores en (1)

▪

$$\frac{t}{2} = \frac{3.2\ x\ 10^8\ km^2}{2 \times \left(2.8\,\frac{km^2}{año}\right)} = 57.1\ \times\ 10^6\ años$$

$$\boldsymbol{Edad\ media =\ {}^{t}/_{2} = 57.1\ Ma}$$

**PROBLEMA 1-2** A que profundidad ascenderá la roca del manto con una temperatura de fusión de 1800 K si la ecuación de la temperatura solida T es:

$$T(K) = 1700 + 0.12p\ (Mpa) \tag{1}$$

Asumir: $\rho = 3300\ {}^{kg}/_{m^3},\ \ g = 10\ {}^{m}/_{seg^2}$

*Desarrollo matemático:*

La temperatura del manto en fusión es 1800 K, entonces en (1): $1800 = 1700 + 0.12p$

Se encuentra la presión "p" de la ecuación anterior, entonces: $p = 833.33\ MPa$

Finalmente la profundidad "y" se despeja de la siguiente ecuación: $p = \rho g y$

$$y = \frac{p}{\rho g} = \frac{833.33\ x\ 10^{6} Pa}{\left(3300\ \frac{kg}{m^{3}}\right)\left(10\frac{m}{s^{2}}\right)} = \mathbf{25252.42\ m = 25.3\ km}$$

**PROBLEMA 1-3** Si asumimos que la actual tasa de subducción, 0.09 $m^2/s$, ha sido aplicable en el pasado, qué espesor de sedimentos podrían haber sido subducidos en los pasados 3 Ga si la masa de los sedimentos subducidos es igual a la mitad de la masa actual de los continentes. Asuma la densidad de los continentes $\rho_c = 2700\ kg/m^3$, la densidad de los sedimentos $\rho_s = 2400\ kg/m^3$, el área continental $A_c = 1.9 \times 10^8\ km^2$, y la corteza continental media 35 km.

*Datos para resolver el ejercicio:*

$v = 0.09\ {}^{m^2}/_{año}$ $(Tasa\ de\ subducción)$
$t = 3\ \times\ 10^9\ años = 9.46\ \times 10^{16} s\ (Tiempo\ en\ que\ se\ calcula\ la\ subducción\,)$
$\rho_c = 2700\ {}^{kg}/_{m^3},\quad \rho_s = 2400\ {}^{kg}/_{m^3}$

$A_c = 1.9\ x\ 10^8 km^2$

$h_c = 35\ km\ \times\ 2 = 70\ km$ (Altura de la corteza continental)

*Desarrollo matemático:*

Primero hallamos el volumen continental actual ($V_c$): $V_c = A_c \times h_c = 1.9 \times 10^8 km^2 \times\ 70\ km$

$V_c = 1.33\ x\ 10^{19} m^3$

Con el volumen y la densidad hallamos la masa continental actual ($M_c$):

$$M_c = \rho_c \times V_c = 2700\ \frac{kg}{m^3} \times\ 1.33\ \times\ 10^{19} m^3 = 3.59\ x\ 10^{22}\ kg$$

Calculamos la masa de sedimentos subducida ($M_s$): $M_s = \frac{M_c}{2} = \frac{3.59\ x\ 10^{22}\ kg}{2} = 1.80 \times 10^{22} kg$

Ahora, el volumen de sedimentos subducidos ($V_s$): $V_s = \frac{M_s}{\rho_s} = \frac{1.80\ x\ 10^{22} kg}{2400\ {}^{kg}/_{m^3}} = 7.48 \times 10^{18} m^3$

Con la velocidad de subducción y el tiempo calculamos el área de sedimentos subducida ($A_s$):

$$A_s = V \times t = 0.09 \frac{m^2}{s} \times 9.46 \times 10^{16} s = 8.52 \times 10^{15}\ m^2$$

Finalmente, encontramos la altura o espesor de sedimentos subducidos ($h_s$) relacionando volumen subducido con área subducida:

$$h_s = \frac{V_s}{A_s} = \frac{7.48 \times 10^{18}\, m^3}{8.52 \times 10^{15}\, m^2} = \mathbf{878.08\, m}$$

**PROBLEMA 1-4** La edad de los meteoritos puede ser determinada por la construcción de una isócrona plomo-plomo a partir de un plomo isotópico sobre un número de muestras de meteoritos. La isócrona es la mejor relación lineal entre los datos de un diagrama $N(^{207}Pb)/N(^{204}Pb) - N(^{206}Pb)/N(^{204}Pb)$. El $^{204}Pb$ no es radiogénico. Muestre que la ecuación teórica de tal isócrona es:

$$\frac{N(^{207}Pb)}{N(^{204}Pb)} = \frac{N(^{235}U)}{N(^{238}U)} \times \frac{(e^{\lambda(^{235}U)t} - 1)}{(e^{\lambda(^{238}U)t} - 1)} \times \frac{N(^{206}Pb)}{N(^{204}Pb)} + \left\{ \begin{array}{c} \frac{N(^{207}Pb)}{N(^{204}Pb)}(t=0) - \frac{N(^{235}U)}{N(^{238}U)} \\ \times \frac{(e^{\lambda(^{235}U)t} - 1)}{(e^{\lambda(^{238}U)t} - 1)} \times \frac{N(^{206}Pb)}{N(^{204}Pb)}(t=0) \end{array} \right\}$$

Si la pendiente de la isócrona es 0.6128 +/- 0.014, determine la edad de los meteoritos y la incertidumbre de la edad. Asuma $N(^{235}U)/N(^{238}U) = 1/137.88$.

*Desarrollo matemático:*

Consideración inicial (número de átomos en el tiempo de $^{207}Pb$ normalizado por el número de átomos presentes del átomo no radiogénico $^{204}Pb$):

$$\frac{N(^{207}Pb)}{N(^{204}Pb)} = \frac{N(^{207}Pb)}{N(^{204}Pb)}\,(t=0) - \frac{N(^{206}Pb)}{N(^{204}Pb)}\left(e^{\lambda t}-1\right) \tag{1}$$

Ecuación 1-18 del Turcotte donde para el cual el Plomo se origina a partir del decaimiento de Uranio:

$$\frac{\dfrac{N(^{206}Pb)}{N(^{238}U)}}{\dfrac{N(^{207}Pb)}{N(^{235}U)}} = \frac{(e^{\lambda(^{238}U)t}-1)}{(e^{\lambda(^{235}U)t}-1)}$$

De la ecuación anterior obtenemos: $\frac{N(^{206}Pb)N(^{235}U)}{N(^{238}U)N(^{207}Pb)} = \frac{(e^{\lambda(^{238}U)t}-1)}{(e^{\lambda(^{235}U)t}-1)}$

Despejando Uranio en la izquierda de la ecuación obtenemos las dos relaciones siguientes:

$$\frac{N(^{235}U)}{N(^{238}U)} = \frac{(e^{\lambda(^{238}U)t}-1)}{(e^{\lambda(^{235}U)t}-1)} \times \frac{N(^{207}Pb)}{N(^{206}Pb)}$$ y, $$\frac{N(^{238}U)}{N(^{235}U)} = \frac{(e^{\lambda(^{235}U)t}-1)}{(e^{\lambda(^{238}U)t}-1)} \times \frac{N(^{206}Pb)}{N(^{207}Pb)}$$

$$\frac{N(^{206}Pb)}{N(^{204}Pb)} = \frac{N(^{238}U)}{N(^{204}Pb)}\left(e^{\lambda(^{238}U)t} - 1\right) + \frac{N(^{206}Pb)}{N(^{204}Pb)}(t=0) \qquad (1)$$

$$\frac{N(^{207}Pb)}{N(^{204}Pb)} = \frac{N(^{235}U)}{N(^{204}Pb)}\left(e^{\lambda(^{235}U)t} - 1\right) + \frac{N(^{207}Pb)}{N(^{204}Pb)}(t=0) \qquad (2)$$

$$\frac{N(^{206}Pb)}{N(^{204}Pb)}(t=0) = \frac{N(^{206}Pb)}{N(^{204}Pb)} - \frac{N(^{238}U)}{N(^{204}Pb)}\left(e^{\lambda(^{238}U)t} - 1\right)$$

$$\frac{N(^{207}Pb)}{N(^{204}Pb)}(t=0) = \frac{N(^{207}Pb)}{N(^{204}Pb)} - \frac{N(^{235}U)}{N(^{204}Pb)}\left(e^{\lambda(^{235}U)t} - 1\right)$$

$$\frac{N(^{206}Pb)}{N(^{204}Pb)} = \frac{N(^{206}Pb)}{N(^{204}Pb)}(\mathrm{t}=0) + \frac{N(^{238}U)}{N(^{204}Pb)}\left(e^{\lambda(^{238}U)t} - 1\right)$$

$$\frac{N(^{207}Pb)}{N(^{204}Pb)} = \frac{N(^{207}Pb)}{N(^{204}Pb)}(\mathrm{t}=0) + \frac{N(^{235}U)}{N(^{204}Pb)}\left(e^{\lambda(^{235}U)t} - 1\right)$$

Si tenemos una fórmula análoga a la ecuación 1-9 para el caso del Plomo donde tendríamos que

$N(^{207}Pb) = N(^{207}Pb)(t=0) + N(^{206}Pb)(e^{\lambda t} - 1)$, y apoyándonos en la siguiente expresión

$N(^{207}Pb)(t=0) = \frac{N(^{235}U)}{N(^{238}U)} \frac{(e^{\lambda(^{235}U)t} - 1)}{(e^{\lambda(^{238}U)t} - 1)} N(^{206}Pb)$, llegamos a obtener lo siguiente:

$$N\left(^{207}Pb\right) = \frac{N\left(^{235}U\right)}{N(^{238}U)} \frac{(e^{\lambda\left(^{235}U\right)t} - 1)}{(e^{\lambda\left(^{238}U\right)t} - 1)} N\left(^{206}Pb\right) + N(^{206}Pb)(e^{\lambda t} - 1)$$

Como la ecuación 1-7 afirma que: $N(D) = N(P)(t = 0) - N(p)$

Además: $N(D) = N\left(^{206}Pb\right)\left(e^{\lambda t} - 1\right)$

$$N(P)(t = 0) = N\left(^{207}Pb\right)(t = 0)$$

$$N(P) = N\left(^{207}Pb\right) = N(P)(t = 0) - N(p)$$

Entonces tenemos que: $N\left(^{207}Pb\right) = N(P)(t = 0) - N(p) + \{N(P)(t = 0) - N(p)\}$

Normalizando la ecuación anterior con respecto del átomo no radiogénico $^{204}Pb$ obtenemos:

$$\frac{N\left(^{207}Pb\right)}{N\left(^{204}Pb\right)} = \frac{N(P) - N(P)}{N\left(^{204}Pb\right)} + \left\{\frac{N\left(^{207}Pb\right)}{N\left(^{204}Pb\right)}(t=0) - \frac{N(P)(t=0) - N(P)}{N\left(^{204}Pb\right)}\right\}$$

Finalmente obtenemos la ecuación teórica de la isócrona:

$$\frac{N\left(^{207}Pb\right)}{N\left(^{204}Pb\right)} = \frac{N\left(^{235}U\right)}{N\left(^{238}U\right)} \times \frac{\left(e^{\lambda\left(^{235}U\right)t} - 1\right)}{\left(e^{\lambda\left(^{238}U\right)t} - 1\right)} \times \frac{N\left(^{206}Pb\right)}{N\left(^{204}Pb\right)} + \left\{\begin{array}{c} \frac{N\left(^{207}Pb\right)}{N\left(^{204}Pb\right)}(t=0) - \frac{N\left(^{235}U\right)}{N\left(^{238}U\right)} \\ \times \frac{\left(e^{\lambda\left(^{235}U\right)t} - 1\right)}{\left(e^{\lambda\left(^{238}U\right)t} - 1\right)} \times \frac{N\left(^{206}Pb\right)}{N\left(^{204}Pb\right)}(t=0) \end{array}\right\}$$

Asumiendo que $N(^{235}U)/N(^{238}U) = 1/137.88$, y que la pendiente de la isócrona es 0.6128

obtenemos la ecuación con la que podemos determinar la edad del meteorito:

$$\frac{N(^{207}Pb)}{N(^{204}Pb)} = \frac{1}{137.88} \times 0.6128 + \left\{\frac{N(^{207}Pb)}{N(^{204}Pb)}(t=0) - \frac{1}{137.88} \times 0.6128\,(t=0)\right\}$$

**PROBLEMA 1-5** Muestre que la vida media de los átomos de un isotopo radiactivo con decaimiento constante λ es $\lambda^{-1}$.

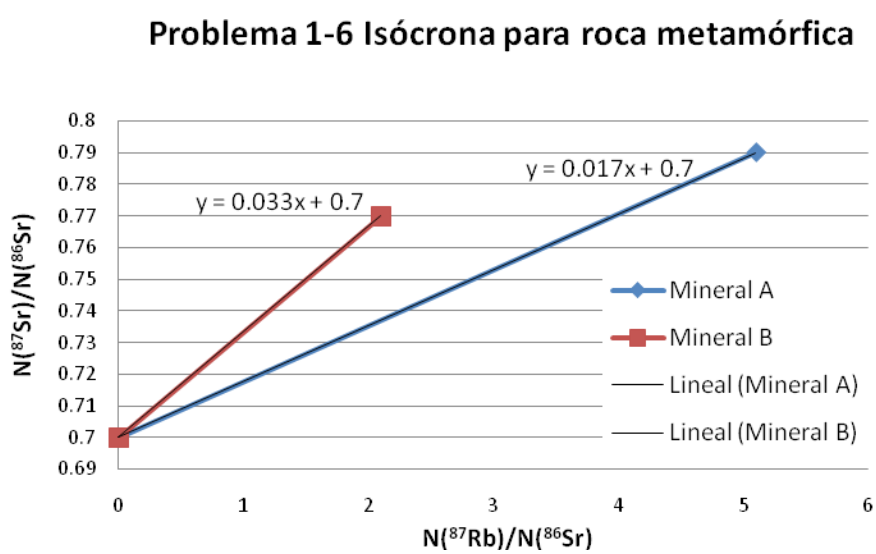
**PROBLEMA 1-6** Dos minerales A y B de una roca tienen relaciones $N(^{87}Sr)/N(^{86}Sr)$ de 0.79 y 0.77 y $N(^{87}Rb)/N(^{86}Sr)$ de 5.1 y 2.1 respectivamente. Para entender estas relaciones asuma que la roca sufrió una alteración metamórfica en alguna etapa de su vida después de su formación. Asuma que durante el metamorfismo el $^{87}Sr$ fue completamente mezclado pero no perdido.

Deduzca la edad original de la roca y del evento metamórfico. Asuma que el mineral A es el 8% de la roca y que el mineral B es el 18%. Tome como relación de número común de átomos $^{87}Sr$ a $^{86}Sr$ 0.7.

Del enunciado podemos construir la siguiente tabla de datos:

| | **Mineral A** | **Mineral B** |
|---|---|---|
| $N(^{87}Sr)/N(^{86}Sr)$ | 0.79 | 0.77 |
| $N(^{87}Rb)/N(^{86}Sr)$ | 5.1 | 2.1 |

Con la anterior tabla de datos se grafica en Excel obteniendo y sabiendo que la relación $^{87}Sr/^{86}Sr=0.7$ definiría el intercepto sobre el eje de las ordenadas, obtenemos la siguiente figura:




*Desarrollo matemático:*

A partir de la figura anterior y empleando las ecuaciones de la línea recta obtenidas, podemos calcular la edad de la roca y del metamorfismo:

Mineral A: $e^{-\lambda t} - 1 = 0.0176$

$\ln e^{-\lambda t} = \ln 1.0176$

$\lambda t = 0.0174$

t = 0.0174 / 1.42 x $10^{-11}$ año$^{-1}$ (λ asumido a partir de la tabla 1-2)

**t = 1.228 x $10^{9}$ años = 1228 Ma (EDAD DEL METAMORFISMO)**

Mineral B: $e^{-\lambda t} - 1 = 0.0333$

$\ln e^{-\lambda t} = \ln 1.0333$

$\lambda t = 0.03275$

t = 0.03275 / 1.42 x $10^{-11}$ año$^{-1}$ (λ asumido a partir de la tabla 1-2)

**$t = 2.30 \times 10^{9}$ años = 2306 Ma (EDAD DE LA ROCA)**

**PROBLEMA 1-7** Asuma que el campo magnético de la Tierra es un dipolo. ¿Cuál es la intensidad máxima del campo en la frontera núcleo-manto?

*Fórmula para el cálculo:*

$$B = \frac{\mu_0 m}{4\pi a^3}\left(1 + 3sen^2\phi_m\right)^{1/2} \qquad (1)$$

Donde:

B = intensidad del campo magnético

$m =$ $7.94 * 10^{22}\ Am^2$ (momento dipolar magnético de la Tierra)

$\mu_0 =$ $4\pi * 10^{-7}\ {}^{Tm}/_{A}$ (permeabilidad del espacio libre)

$a =$ $3.486 * 10^6$ m (radio núcleo terrestre, demarca la frontera núcleo- manto)

$\phi_m =$ latitud magnética

*Observaciones:*

Para encontrar la máxima intensidad del campo magnético el sen $\phi_m^2$ presente en la fórmula (1) debe corresponder a su valor máximo, se logra asignando un ángulo $\phi_m = \pm 90°$ (polos magnéticos).

*Desarrollo matemático:*

$$B = \frac{\left(4\pi * 10^{-7}\frac{Tm}{A}\right)(7.94 * 10^{22}\ Am^2)}{4\pi(3.486 * 10^6\ m)^3}\left(1 + 3sen^2(90°)\right)^{1/2}$$

$$\boldsymbol{B = 3.75 * 10^{-4}\ T}$$

El valor hallado corresponde a la máxima intensidad del campo magnético terrestre en la frontera núcleo-manto.

**PROBLEMA 1-8** Asuma que el campo magnético de la Tierra es un dipolo. ¿A qué distancia encima de la superficie terrestre el valor de la magnitud es la mitad de su valor en superficie?

*Fórmula clave para solucionar el PROBLEMA:* $$B_h = \frac{B_e}{2} \qquad (1)$$

Donde:

$B_h$ = magnitud del campo magnético en la altura desconocida "*h*"

$B_e$ = magnitud del campo magnético en la superficie terrestre en el ecuador

*Observaciones:*

Se realizará el cálculo para el ecuador donde el valor de intensidad es conocido ($B_e = 3.07*10^{-5}$ T). Además, la fórmula para encontrar la magnitud en el ecuador ($\phi_m = 0°$) a una altura desconocida "*h*" sobre la superficie es:

$$B_h = \frac{\mu_0 m}{4\pi a_h^3} \qquad (2)$$

Donde:

$m =$ $7.94*10^{22}$ $Am^2$ (momento dipolar magnético de la Tierra)

$\mu_0 =$ $4\pi*10^{-7}$ $Tm/A$ (permeabilidad del espacio libre)

$a_h =$ radio desde el centro de la Tierra hasta una altura desconocida "*h*" sobre el ecuador que satisface la ecuación (1)

*Desarrollo matemático:*

Se igualan las ecuaciones (1) y (2): $\frac{B_e}{2} = \frac{\mu_0 m}{4\pi a_h{}^3}$

Se despeja $a_h{}^3$: $$a_h{}^3 = \frac{\mu_0 m}{2\pi B_e} \qquad (3)$$

Reemplazando valores: $$a_h = \sqrt[3]{\frac{\left(4\pi * 10^{-7}\frac{Tm}{A}\right)(7.94 * 10^{22}\ Am^2)}{2\pi\,(3.07 * 10^{-5}\ T)}}$$

$$a_h = 8.027 * 10^6 m$$

Finalmente el PROBLEMA se soluciona encontrando la altura desconocida "*h*" a partir de la siguiente ecuación:

$$h = a_h - a_e \tag{4}$$

Donde:

h = altura sobre la superficie terrestre que satisface la ecuación (1)

$a_h$ = $8.027*10^6$ m (radio desde el centro terrestre que satisface la ecuación (1))

$a_e$ = $6.378139*10^6$ m (radio desde el centro terrestre hasta el ecuador)

Reemplazando en (4) los valores anteriores encontramos que la altura "*h*" donde el valor de la magnitud del campo magnético es la mitad de su valor en superficie (para el caso específico del Ecuador):

$$\boldsymbol{h = 1649186.43\ m \approx 1650\ km}$$

**PROBLEMA 1-9** La declinación e inclinación del campo paleomagnético medidas en rocas del Triásico Superior a 41.5°N y 72.7°W son D = 18° e I = 12°. Determine la posición de polo paleomagnético.

*Fórmula para iniciar el cálculo:* $sen\phi_p = sen\phi * cos\theta_m + cos\phi * sen\theta_m * cosD$ (1)

Donde:

$\phi_p$ = latitud del polo paleomagnético

$\phi$ = 41.5°N (latitud del sitio donde se muestrea la roca)

$\theta_m$ = colatitud o distancia angular entre el polo paleomagnético y el sitio de muestreo de la roca

D = 18° (declinación magnética observada en la roca muestreada)

*Desarrollo matemático:*

Como no conocemos el ángulo $\theta_m$, empleamos la siguiente ecuación para encontrarlo:

$$\tan I = 2\cot\theta_m$$

Despejando $\theta_m$ tenemos que: $\theta_m = \cot^{-1}\left(\frac{\tan I}{2}\right)$ (2)

Donde:

I = 12° (inclinación magnética observada en la roca muestreada)

Reemplazando en (2): $\theta_m = \cot^{-1}\left(\frac{\tan(12°)}{2}\right) = 83.9°$

Reemplazando $\theta_m$ en (1):

$$sen\phi_p = sen(41.5°) * cos(83.9°) + cos(41.5°) * sen(83.9°) * \cos(18°) = 0.778$$

Finalmente: $\boldsymbol{\phi_p} = \text{sen}^{-1}(0.778) = \mathbf{51.1°}\boldsymbol{N}$

El anterior valor corresponde a la latitud del polo paleomagnético ($\phi_p$) y tiene dirección Norte debido a que es un ángulo positivo.

Para hallar la dirección de la longitud del polo paleomagnético ($\varphi_p$) se tienen en cuenta las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen}(\varphi_p - \varphi) = \frac{\operatorname{sen}\theta_m * \operatorname{sen} D}{\cos\phi_p} \qquad si \qquad \cos\theta_m > \operatorname{sen}\phi * \operatorname{sen}\phi_p \tag{3}$$

$$\operatorname{sen}(\pi + \varphi - \varphi_p) = \frac{\operatorname{sen}\theta_m * \operatorname{sen} D}{\cos\phi_p} \qquad si \qquad \cos\theta_m < \operatorname{sen}\phi * \operatorname{sen}\phi_p \tag{4}$$

Donde:

$\varphi_p$ = longitud del polo paleomagnético

$\varphi$ = 72.7°W = -72.7°E (longitud del sitio donde se muestrea la roca)

$\pi$ = 180°

En este caso se selecciona la ecuación (4) ya que:

$cos\,\theta_m = 0.106 < sen\,\phi * sen\,\phi_p = 0.516$

Entonces: $\operatorname{sen}(180° - 72.7° - \varphi_p) = \frac{\operatorname{sen}(83.9°)*\operatorname{sen}(18°)}{\cos(83.9°)} = 0.489$

Despejando $\varphi_p$ : $107.3° - \varphi_p = \operatorname{sen}^{-1}(0.489)$

$\boldsymbol{\varphi_p} = 107.3° - 29.3° = \mathbf{78°}\boldsymbol{E}$

El anterior valor corresponde a la longitud del polo paleomagnético ($\varphi_p$) y tiene dirección Este debido a que es un ángulo positivo.

Posición del polo paleomagnético: $\boldsymbol{\phi_p = 51.1°N \ / \ \varphi_p = 78°E}$

**PROBLEMA 1-10** La declinación e inclinación del campo paleomagnético medidas en rocas del Oligoceno a 51°N y 14.7°E son D = 200° e I = -63°. Determine la posición de polo paleomagnético.

*Fórmula para iniciar el cálculo:* $sen\phi_p = sen\phi * cos\theta_m + cos\phi * sen\theta_m * cosD$ (1)

Donde:

$\phi_p =$ latitud del polo paleomagnético

$\phi =$ 51°N (latitud del sitio donde se muestrea la roca)

$\theta_m =$ colatitud o distancia angular entre el polo paleomagnético y el sitio de muestreo de la roca

D = 200° (declinación magnética observada en la roca muestreada)

*Desarrollo matemático:*

Como no conocemos el ángulo $\theta_m$, empleamos la siguiente ecuación para encontrarlo:

$$\tan I = 2 \cot \theta_m$$

Despejando $\theta_m$ tenemos que: $$\theta_m = \cot^{-1}\left(\frac{\tan I}{2}\right) \quad (2)$$

Donde:

I = -63° (inclinación magnética observada en la roca muestreada)

Reemplazando en (2): $$\theta_m = \cot^{-1}\left(\frac{\tan(-63°)}{2}\right) = -45.5°$$

Reemplazando $\theta_m$ en (1):

$$sen\phi_p = sen(51°) * cos(-45.5°) + cos(51°) * sen(-45.5°) * cos(200°) = 0.967$$

Finalmente: $$\boldsymbol{\phi_p} = \text{sen}^{-1}(0.967) = \mathbf{75.1°}\boldsymbol{N}$$

El anterior valor corresponde a la latitud del polo paleomagnético ($\phi_p$) y tiene dirección Norte debido a que es un ángulo positivo.

Para hallar la dirección de la longitud del polo paleomagnético ($\varphi_p$) se tienen en cuenta las siguientes relaciones:

$$\text{sen}(\varphi_p - \varphi) = \frac{\text{sen}\,\theta_m * \text{sen}\,D}{\cos\phi_p} \qquad si \qquad cos\,\theta_m > sen\,\phi * sen\,\phi_p \tag{3}$$

$$\text{sen}(\pi + \varphi - \varphi_p) = \frac{\text{sen}\,\theta_m * \text{sen}\,D}{\cos\phi_p} \qquad si \qquad cos\,\theta_m < sen\,\phi * sen\,\phi_p \tag{4}$$

Donde:

$\varphi_p =$ longitud del polo paleomagnético

$\varphi =$ 14.7°E (longitud del sitio donde se muestrea la roca)

$\pi =$ 180°

En este caso se selecciona la ecuación (4) ya que:

$$cos\,\theta_m = 0.7 < sen\,\phi * sen\,\phi_p = 0.751$$

Entonces: $$\text{sen}\left(180° + 14.7° - \varphi_p\right) = \frac{\text{sen}(-45.5°) * \text{sen}(200°)}{\cos(75.1°)} = 0.949$$

Despejando $\varphi_p$ : $$194.7° - \varphi_p = \text{sen}^{-1}(0.949)$$

$$\boldsymbol{\varphi_p} = 194.7° - 71.6° = \mathbf{123.1°}\boldsymbol{E}$$

El anterior valor corresponde a la longitud del polo paleomagnético ($\varphi_p$) y tiene dirección Este debido a que es un ángulo positivo.

Posición del polo paleomagnético: $\boldsymbol{\phi_p = 75.1°N \ / \ \varphi_p = 123.1°E}$

**PROBLEMA 1-11** La declinación e inclinación del campo paleomagnético medidas en rocas del Cretáceo Inferior a 45.5°N y 73°W son D = 154° e I = -58°. Determine la posición de polo paleomagnético.

*Fórmula para iniciar el cálculo:* $$sen\phi_p = sen\phi * cos\theta_m + cos\phi * sen\theta_m * cosD \qquad (1)$$

Donde:

$\phi_p$ = latitud del polo paleomagnético

$\phi$ = 45.5°N (latitud del sitio donde se muestrea la roca)

$\theta_m$ = colatitud o distancia angular entre el polo paleomagnético y el sitio de muestreo de la roca

D = 154° (declinación magnética observada en la roca muestreada)

*Desarrollo matemático:*

Como no conocemos el ángulo $\theta_m$, empleamos la siguiente ecuación para encontrarlo:

$$\tan I = 2\cot\theta_m$$

Despejando $\theta_m$ tenemos que: $$\theta_m = \cot^{-1}\left(\frac{\tan I}{2}\right) \qquad (2)$$

Donde:

I = -58° (inclinación magnética observada en la roca muestreada)

Reemplazando en (2): $\theta_m = \cot^{-1}\left(\frac{\tan(-58°)}{2}\right) = -51.3°$

Reemplazando $\theta_m$ en (1):

$$sen\phi_p = sen(45.5°) * cos(-51.3°) + cos(45.5°) * sen(-51.3°) * \cos(154°) = 0.938$$

Finalmente: $\phi_p = \text{sen}^{-1}(0.938) = \mathbf{69.7°N}$

El anterior valor corresponde a la latitud del polo paleomagnético ($\phi_p$) y tiene dirección Norte debido a que es un ángulo positivo.

Para hallar la dirección de la longitud del polo paleomagnético ($\varphi_p$) se tienen en cuenta las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen}(\varphi_p - \varphi) = \frac{\operatorname{sen}\theta_m * \operatorname{sen} D}{\cos\phi_p} \qquad si \qquad cos\,\theta_m > sen\,\phi * sen\,\phi_p \tag{3}$$

$$\operatorname{sen}(\pi + \varphi - \varphi_p) = \frac{\operatorname{sen}\theta_m * \operatorname{sen} D}{\cos\phi_p} \qquad si \qquad cos\,\theta_m < sen\,\phi * sen\,\phi_p \tag{4}$$

Donde:

$\varphi_p$ = longitud del polo paleomagnético

$\varphi$ = 73°W = -73°E (longitud del sitio donde se muestrea la roca)

$\pi$ = 180°

En este caso se selecciona la ecuación (4) ya que:

$$cos\,\theta_m = 0.625 < sen\,\phi * sen\,\phi_p = 0.670$$

Entonces: $$\text{sen}(180° - 73° - \varphi_p) = \frac{\text{sen}(-51.3°)*\text{sen}(154°)}{\cos(69.7°)} = -0.986$$

Despejando $\varphi_p$: $$107° - \varphi_p = \text{sen}^{-1}(-0.986)$$

$\boldsymbol{\varphi_p} = 107.3° + 80.4° = \mathbf{187.7°}\boldsymbol{E}$

El anterior valor corresponde a la longitud del polo paleomagnético ($\varphi_p$) y tiene dirección Este debido a que es un ángulo positivo.

Posición del polo paleomagnético: $\boldsymbol{\phi_p = 69.7°N}$ / $\boldsymbol{\varphi_p = 187.7°E}$

**PROBLEMA 1-12** Determine la velocidad de expansión del piso oceánico sobre el Rise Oriental del Pacífico a partir del perfil de anomalías magnéticas dado en la Figura 1.24a.

A partir de la figura 1.24a y empleando una regla se midieron las distancias a partir del eje del Rise para cada pico que marca el cambio en la pendiente de la anomalía magnética registrada.

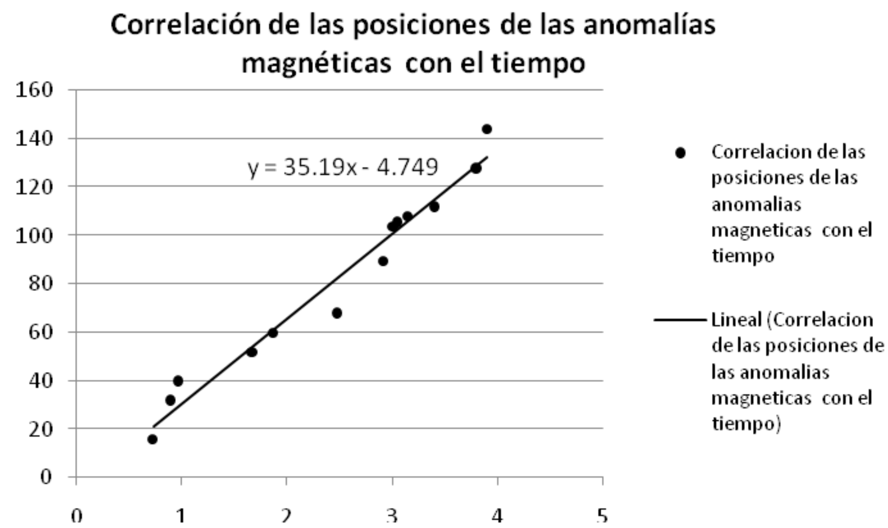
Con el apoyo de la figura 1-20 se obtuvo la siguiente tabla de datos:

| De la figura 1.24a | |
|---|---|
| Distancia (km) | Tiempo (Ma) |

| | |
|---|---|
| 16 | 0,73 |
| 32 | 0,9 |
| 40 | 0,97 |
| 52 | 1,67 |
| 60 | 1,87 |
| 68 | 2,48 |
| 89,6 | 2,92 |
| 104 | 3,01 |
| 105,6 | 3,05 |
| 108 | 3,15 |

| | |
|---|---|
| 112 | 3,4 |
| 128 | 3,8 |
| 144 | 3,9 |

Con la tabla anterior se puede construir una gráfica en Excel donde la distancia en km corresponde al eje de las ordenadas y el tiempo en Ma corresponde al eje de las abscisas. Luego de graficar los puntos se pueden ajustar linealmente para obtener una ecuación donde la pendiente nos dará la información sobre la velocidad de expansión del piso oceánico en el Rise Oriental del Pacífico en dimensión de [km/Ma].




Velocidad de expansión: $35.19\,\frac{km}{Ma} \times \frac{1\,Ma}{10^6 años} \times \frac{1000\,m}{1\,km} \times \frac{1000\,mm}{1\,m} = \mathbf{35.19\,\frac{mm}{año}}$

**PROBLEMA 1-13** Determine la velocidad de expansión del piso oceánico sobre el Rise Sur-Oriental Índico a partir del perfil de anomalías magnéticas dado en la Figura 1.24b.

A partir de la figura 1.24b y empleando una regla se midieron las distancias a partir del eje del Rise para cada pico que marca el cambio en la pendiente de la anomalía magnética registrada.

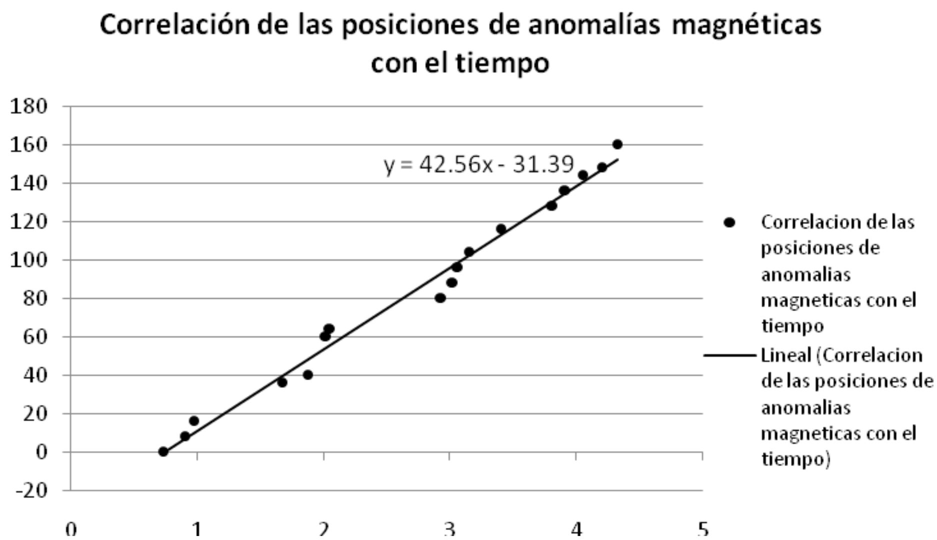
Con el apoyo de la figura 1-20 se obtuvo la siguiente tabla de datos:

| De la figura 1.24b | |
|---|---|
| Distancia (km) | Tiempo (Ma) |
| 0 | 0,73 |
| 8 | 0,9 |
| 16 | 0,97 |

| | |
|---|---|
| 36 | 1,67 |
| 40 | 1,87 |
| 60 | 2,01 |
| 64 | 2,04 |
| 80 | 2,92 |
| 88 | 3,01 |
| 96 | 3,05 |
| 104 | 3,15 |
| 116 | 3,4 |
| 128 | 3,8 |

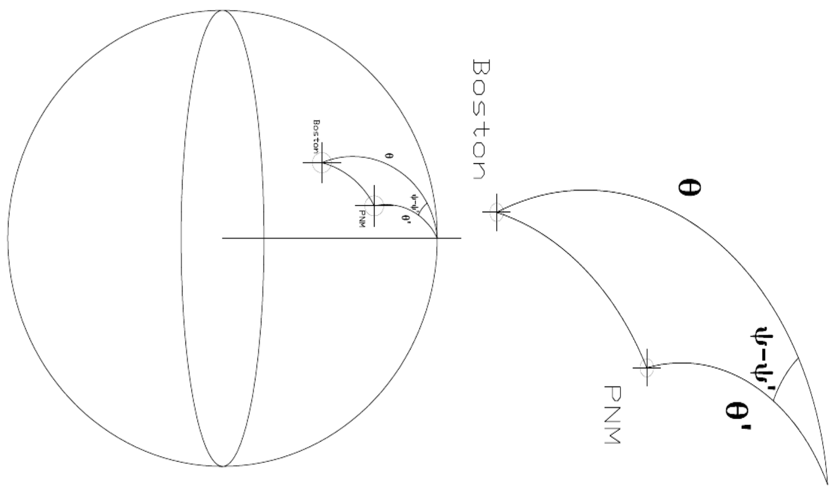
| | |
|---|---|
| 136 | 3,9 |
| 144 | 4,05 |
| 148 | 4,2 |
| 160 | 4,32 |

Con la tabla anterior se puede construir una gráfica en Excel donde la distancia en km corresponde al eje de las ordenadas y el tiempo en Ma corresponde al eje de las abscisas. Luego de graficar los puntos se pueden ajustar linealmente para obtener una ecuación donde la pendiente nos dará la información sobre la velocidad de expansión del piso oceánico en el Rise Oriental del Pacífico en dimensión de [km/Ma].




Velocidad de expansión: $42.57\,\frac{km}{Ma}\times\frac{1\,Ma}{10^6 años}\times\frac{1000\,m}{1\,km}\times\frac{1000\,mm}{1\,m}=\mathbf{42.57}\,\frac{\mathbf{mm}}{\mathbf{año}}$

**PROBLEMA 1-14** Determine la declinación y la inclinación del campo magnético terrestre en Boston ($\phi$= 42.5°, $\psi$=-71°). Utilice la aproximación de dipolo del campo, pero no asuma que los polos magnéticos y geográficos coinciden.




Boston: $\phi = 42.5° \; N, \quad \psi = 71° \; W$

Polo magnético: $\phi = 79° \; N, \quad \psi = 70° \; W$

Ahora calculamos las colatitudes (θ): $Polo\ Magnetico = \theta' = 90° - 79° = 11°$

$Boston = \theta = 90° - 42.5° = 47.5°$

Por tanto: $\theta_m = arcos(cos\theta cos\theta' + sen\theta sen\theta' \cos(\psi - \psi'))$

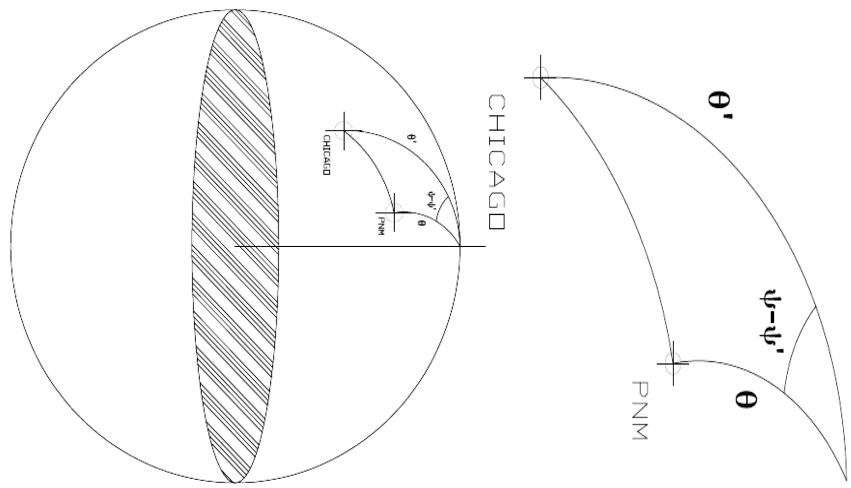
$= arcos(\cos(47.5)\cos(11) + sen(47.5) sen(11)\cos(71-70))$

$= 36.5°$

Inclinación: $\boldsymbol{I} = \arctan\,(2\,cot\theta_m) = arctan\,(2\,cot\,(36.5)) = \mathbf{69,69°}$

Declinación: $\boldsymbol{D} = \sin^{-1}\left(\frac{sen(\psi - \psi')cos\phi}{sen\theta_m}\right) = sin^{-1}\left(\frac{sen(71-70)\cos(79)}{sen(36.5)}\right) = \mathbf{0.32°}$

**PROBLEMA 1-15** Determine la declinación y la inclinación del campo magnético terrestre en Chicago (ϕ= 41.8°, ψ=-87.5°). Utilice la aproximación de dipolo del campo, pero no asuma que los polos magnéticos y geográficos coinciden.



Chicago: $\phi = 41.8° \, N, \quad \psi = 87.5° \, W$

Polo magnético: $\phi = 79° \, N, \quad \psi = 70° \, W$

Ahora calculamos las colatitudes (θ): $Polo\ Magnetico = \theta' = 90° - 79° = 11°$

$Chicago = \theta = 90° - 41.8° = 48.2°$

Por tanto: $\theta_m = arcos(cos\theta cos\theta' + sen\theta sen\theta' \cos(\psi - \psi'))$

$$\theta_m = arcos(\cos(48.2)\cos(11) + sen(48.2)sen(11)\cos(87.5 - 70))$$
$$\theta_m = 37.8°$$

Inclinación: $\boldsymbol{I} = \arctan(2\ cot\theta_m) = arctan(2cot(37.8)) = \mathbf{68.8°}$

Declinación: $\boldsymbol{D} = \sin^{-1}\left(\frac{sen(\psi - \psi')cos\phi}{sen\theta_m}\right) = sin^{-1}\left(\frac{sen(87.5-70)\cos(79)}{sen(37.8)}\right) = \mathbf{5.37°}$

**PROBLEMA 1-16** ¿Cuál es la distancia superficial entre los polos magnéticos terrestres y geográficos?

Coordenadas Polo Magnético terrestre: $\phi = 73°N\ y\ 68°S$ $\psi = 100°\ W\ y\ 143°E$

Desarrollo matemático: $S_1 = a \times \Delta$

$$cos\Delta = cos\theta cos\theta' + sen\theta sen\theta' \cos(\psi - \psi')$$

Donde:

$\theta = 90 - 73 = 17$
$\theta' = 0$
$\Delta = arcos(\cos(17)\cos(0) + sen(17)sen(0)\cos(100 - 0) = 17°$

Entonces: $\boldsymbol{S_1} = a \times \Delta = 6380 \times 17\ (rad) = \mathbf{1892.98}\ \boldsymbol{m}$

Además: $S_2 = a \times \Delta$

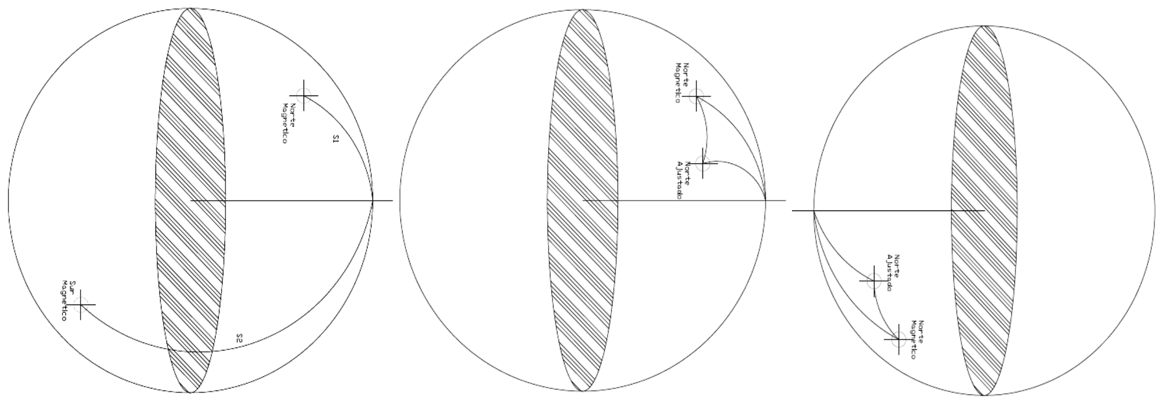
$$cos\Delta = cos\theta cos\theta' + sen\theta sen\theta' \cos(\psi - \psi')$$

Donde:

$\theta = 90 - 68 = 22$
$\theta' = 0$
$\Delta = arcos(\cos(22)\cos(0) + sen(22) sen(0) \cos(143 - 0) = 22°$

Entonces: $\boldsymbol{S_2} = a \times \Delta = 6380 \times 22\ (rad) = \mathbf{2449.75}\ \boldsymbol{m}$

**PROBLEMA 1-17** ¿Cuál es la distancia superficial entre los polos magnéticos terrestres y los polos ajustados al dipolo terrestre?




Coordenadas Polo Magnético terrestre: $\phi = 73°N \; y \; 68°S$ $\quad \psi = 100° \; W \; y \; 143°E$

Coordenadas Polo Magnético Ajustado: $\phi = 79°N \; y \; 79°S$ $\quad \psi = 70° \; W \; y \; 110°E$

*Desarrollo matemático:*

*Parte 1.* Distancia superficial Hemisferio norte:

Por tanto: $S_1 = a \times \Delta$

$$cos\Delta = cos\theta cos\theta' + sen\theta sen\theta' \cos(\psi - \psi')$$

Donde:

$\theta = 90 - 79 = 11$
$\theta' = 90 - 73 = 17$
$\psi - \psi' = 100 - 70 = 30$
$\Delta = arcos(\cos(17)\cos(11) + sen(17) sen(11) \cos(30) = 9.23°$

Entonces: $\boldsymbol{S_1} = a \times \Delta = 6380 \times 9.23\ (rad) = \mathbf{1027.78}\ \boldsymbol{m}$

*Parte 2.* Distancia superficial Hemisferio Sur:

Por tanto: $S_2 = a \times \Delta$

$$\cos\Delta = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\psi - \psi')$$

Donde:

$\theta = 90 - 79 = 11$
$\theta' = 90 - 68 = 22$
$\psi - \psi' = 143 - 110 = 33$
$\Delta = \arccos(\cos(22)\cos(11) + \operatorname{sen}(22)\operatorname{sen}(11)\cos(33) = 14.05°$

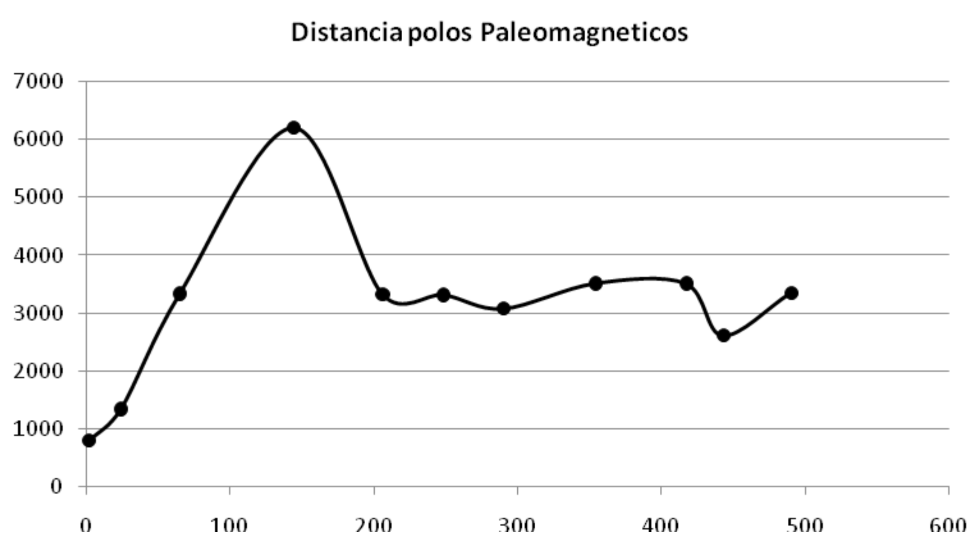
Entonces: $\boldsymbol{S_2} = a \times \Delta = 6380 \times 14.05\ (rad) = \mathbf{1564.20}\ \boldsymbol{m}$

**PROBLEMA 1-18** Dibuje la distancia entre los polos paleomagnéticos obtenidos de las rocas

Norte América y Europa como una función del tiempo. Analice los resultados.

| | POLO MAGNÉTICO | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PERIODO | LAT. USA | LONG. USA | LAT. EUR | LONG. EUR | COLATITUD USA | COLATITUD EUR | DIF. LONG | DISTANCIA |
| terciario U | 87 | 140 | 80 | 157 | 3 | 10 | 17 | 799.98 |
| terciario L | 85 | 197 | 75 | 151 | 5 | 15 | 46 | 1343.19 |
| cretácico | 64 | 187 | 86 | 0 | 26 | 4 | 187 | 3337.65 |
| jurasico | 76 | 142 | 36 | 50 | 14 | 54 | 92 | 6202.55 |
| triásico | 62 | 100 | 45 | 143 | 28 | 45 | 43 | 3326.53 |
| pérmico | 46 | 117 | 45 | 160 | 44 | 45 | 43 | 3316.70 |
| carbonífer | 37 | 126 | 38 | 161 | 53 | 52 | 35 | 3075.65 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| o | | | | | | | | |
| devoniano | 29 | 123 | 0 | 136 | 61 | 90 | 13 | 3512.92 |
| silúrico | 29 | 123 | 0 | 136 | 61 | 90 | 13 | 3512.92 |
| ordovícico | 28 | 192 | 10 | 176 | 62 | 80 | 16 | 2611.77 |
| cámbrico | 7 | 140 | 22 | 167 | 83 | 68 | 27 | 3345.70 |



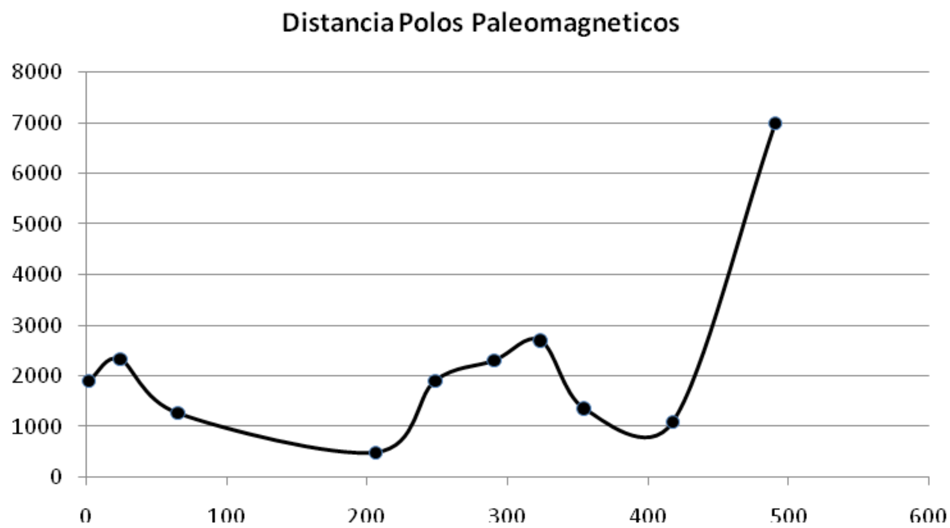
La distancia entre los polos paleomagnéticos a lo largo del tiempo entre las rocas Norte América y Europa ha presentado un comportamiento secular. La diferencia de distancias entre las rocas en los periodos comprendidos entre el cámbrico y el pérmico ha sido relativamente constante; durante el período triásico al jurasico se presento un distanciamiento muy marcado y a partir de este último periodo se muestra un rápido acercamiento.

Lo anterior puede indicar que entre el cámbrico y el pérmico ambos continentes pudieron estar unidos. Para el triásico y jurásico podemos afirmar que puede ser la evidencia de una separación constante de ambos continentes.

PROBLEMA 1.19. Dibuje la distancia entre los polos paleomagnéticos obtenidos de las plataformas Rusa y Siberia como una función del tiempo. Analice los resultados.

| | POLO MAGNÉTICO | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PERIODO | LAT. RUSSIAN | LONG. RUSSIAN | LAT. SIBERIAN | LONG. SIBERIAN | COLATITUD RUSSIAN | COLATITUD SIBERIAN | DIF. LONG | DISTANCIA |
| terciario U | 78 | 191 | 66 | 234 | 12 | 24 | 43 | 1911.99 |
| terciario L | 68 | 192 | 57 | 152 | 22 | 33 | 40 | 2332.80 |
| cretácico | 66 | 166 | 77 | 176 | 24 | 13 | 10 | 1270.51 |
| triásico | 51 | 154 | 47 | 151 | 39 | 43 | 3 | 496.30 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| pérmico | 44 | 162 | 34 | 144 | 46 | 56 | 18 | 1907.87 |
| carbonífero<br><br>U | 43 | 168 | 34 | 144 | 47 | 56 | 24 | 2308.14 |
| carbonífero<br><br>L | 22 | 168 | 34 | 144 | 68 | 56 | 24 | 2701.37 |
| Devónico | 36 | 162 | 28 | 151 | 54 | 62 | 11 | 1366.68 |
| Silúrico | 28 | 149 | 24 | 139 | 62 | 66 | 10 | 1094.92 |
| Cámbrico | 8 | 189 | 36 | 127 | 82 | 54 | 62 | 6987.02 |




La distancia entre los polos paleomagneticos a lo largo del tiempo entre las rocas Russian y Siberia ha presentado un comportamiento secular. En el periodo cámbrico las variaciones fueron altas, desde el periodo silúrico hasta el periodo actual se ha presentando un acercamiento de los polos.

Puede interpretarse como a través del tiempo estas dos masas continentales se fueron acercando hasta conformar un solo continente.

**PROBLEMA 1-20** ¿Cuál es la tasa de propagación entre las placas Norte América y Euroasiática en Islandia (65°N, 20°W)?

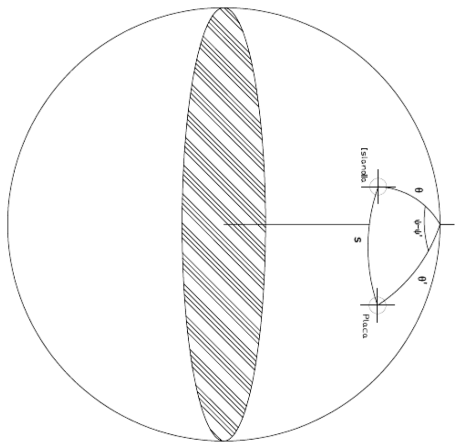
Coordenadas Placa Norte América – Euroasiática: $\phi = 65.8°N$

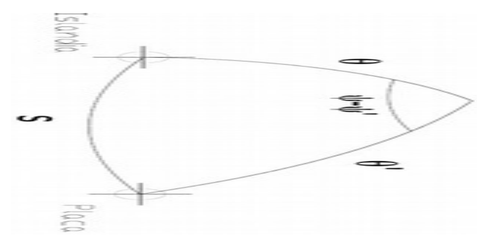
$\psi = 132.4°\ E$

$\omega = 0.23\ {}^{deg}/_{Ma}$

Coordenadas Islandia: $\phi = 65°N$

$\psi = 20°\ W$






Donde:

$\theta = 90 - 65.8 = 24.2$
$\theta' = 90 - 65 = 25$
$\psi - \psi' = 132.4 - (360 - 20) = -207.6$
$\Delta = arcos(\cos(24.2)\cos(25) + sen(24.2)sen(25)\cos(-207.6) = 47.69°$

$\boldsymbol{u} = \omega.a.sen\Delta = (0.23)rad.\,6380\,km.\,sen(47.69) = \mathbf{18.93}\ {}^{\boldsymbol{km}}/_{\boldsymbol{Ma}}$

Esta velocidad obtenida corresponde a la velocidad de propagación respecto a las placas, es decir en el océano. La velocidad de propagación es Islandia corresponde a:

$$\boldsymbol{Spreading = {}^{u}/_{2} = 9.47\ {}^{km}/_{Ma}}$$

**PROBLEMA 1-21** ¿Cuál es la velocidad relativa entre las placas Nazca y Suramérica en Lima (12°S, 77°W)?

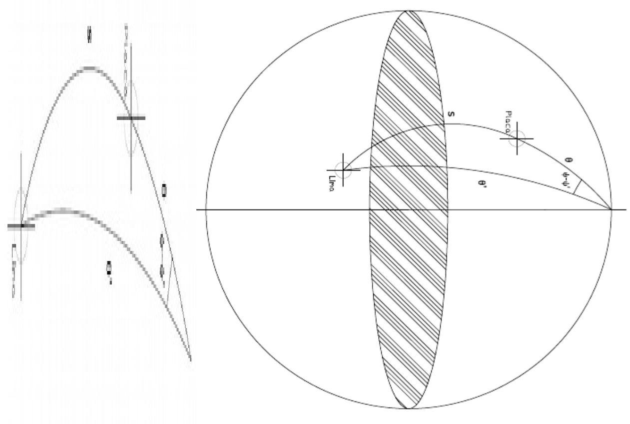
Coordenadas Placa Nazca - Suramérica: $\phi = 59.1°N$

$\psi = 94.8°\ W$

$\omega = 0.84\ {}^{deg}/_{Myr}$

Coordenadas Lima: $\phi = 12°S$

$\psi = 77°\,W$



Donde:

$\theta = 90 - 59.1 = 30.9$
$\theta' = 90 + 12 = 102$
$\psi - \psi' = 94.8 - 77 = 17.8$
$\Delta = arcos(\cos(30.9)\cos(102) + sen(30.9)sen(102)\cos(17.8) = 72.55°$

$\boldsymbol{u} = \omega.a.sen\Delta = (0.84)rad.\,6380\,km.sen(72.55) = \mathbf{89.23}\ {}^{\boldsymbol{km}}/_{\boldsymbol{Ma}}$

**PROBLEMA 1-22** ¿Cuál es la velocidad relativa entre las placas India y Euroasiática en los Himalayas (30°N,81°E)?

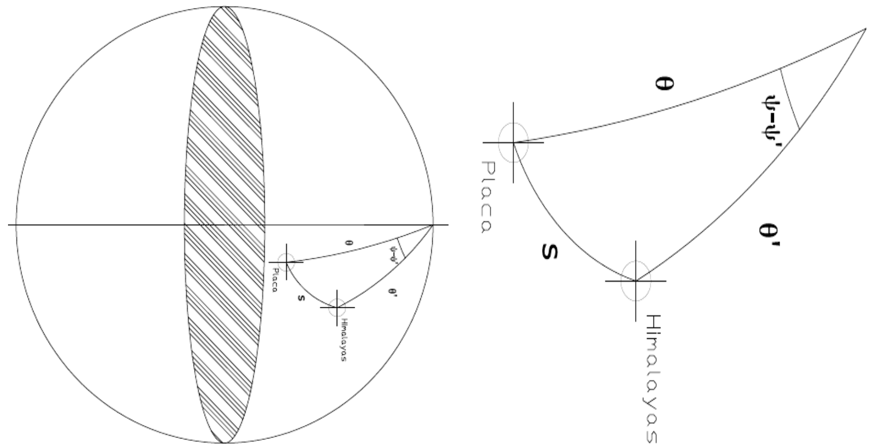
Coordenadas Placa India - Euroasiática: $\phi = 19.7°N$

$\psi = 38.5°\ E$

$\omega = 0.70\ {}^{deg}/_{Ma}$

Coordenadas Himalayas: $\phi = 30°N$

$\psi = 81°E$

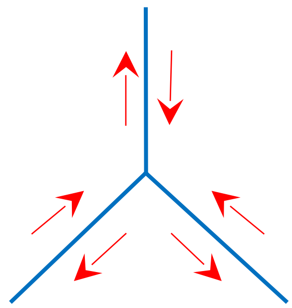



Donde:

$\theta = 90 - 19.7 = 70.3$
$\theta' = 90 - 30 = 60$
$\psi - \psi' = 38.5 - 81 = -42.5$
$\Delta = arcos(\cos(70.3)\cos(60) + sen(70.3)sen(60)\cos(-42.5) = 39.67°$

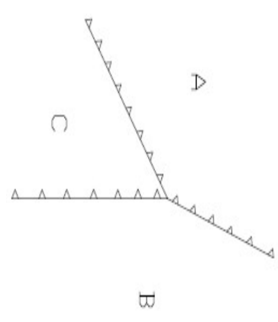
$$\boldsymbol{u} = \omega.a.sen\Delta = (0.70)rad.\,6380\,km.sen(39.67) = \mathbf{49.76}\ {}^{\boldsymbol{km}}/_{\boldsymbol{Ma}}$$

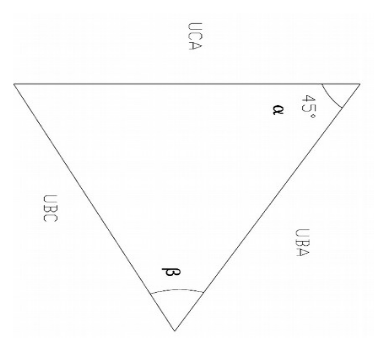
**PROBLEMA 1-24** Demuestre que una unión triple de tres fallas transformantes no puede existir.



El movimiento de las fallas transformantes exige que la placa se mueva paralela de acuerdo al rumbo de la falla por lo tanto nunca podrá existir

**PROBLEMA 1-25** Considere la triple unión TTT mostrada en la figura. Esta unión triple es aceptable debido a que la velocidad relativa entre las placas C y A, $\boldsymbol{U}_{CA}$, es paralela a la trinchera en la cual la placa B está siendo subducida debajo de la placa C. la trinchera entre las placas C y B tiene un azimut de 180° por lo cual $\boldsymbol{U}_{CA}$ tiene un azimut de 0°; asuma que $\boldsymbol{U}_{CA} = 50\ {}^{mm}/_{yr}$. También asuma que el azimut y la magnitud de $\boldsymbol{U}_{BA}$ son 315° y $60\ {}^{mm}/_{yr}$. Determine el azimut y magnitud de $\boldsymbol{U}_{BC}$



$Az_{CA} - Az_{BA} = \alpha$
$360 - 315 = 45$

La Magnitud es: $\boldsymbol{U}_{BC} = (\boldsymbol{U}_{BA}^2 + \boldsymbol{U}_{CA}^2 - 2\boldsymbol{U}_{BA}\boldsymbol{U}_{CA} cos\alpha)^{1/2}$

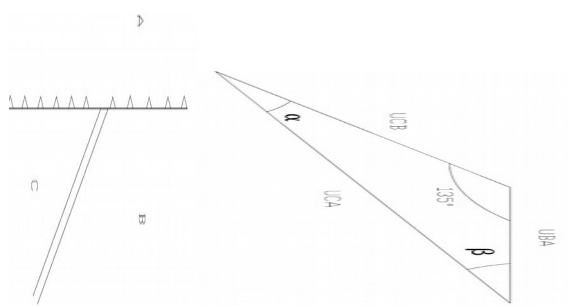
$$= \left((60^2) + (50^2) - 2(60)(50)\cos(45)\right)^{1/2}$$
$$= 43 \, {}^{mm}/_{yr}$$

El azimut es: $\frac{U_{BC}}{sen\,45} = \frac{U_{CA}}{sen\beta}$

$$\beta = arcsen(\frac{U_{CA} sen 45}{U_{BC}}) = 55°$$

$$\boldsymbol{U}_{BC} = Az_{BA} - \beta = 315 - 55 = \mathbf{260°}$$

**PROBLEMA 1-26** Considere la triple unión TTR ilustrada en la figura. Una dorsal con un azimut de 135° relativa a la unión triple esta migrando a través de una trinchera Norte-Sur. Si el azimut y magnitud de $\boldsymbol{U_{BA}}$es 270° y $50\ {}^{mm}/_{yr}$y $\boldsymbol{U_{CB}} = 40\ {}^{mm}/_{yr}$, determine el azimut y magnitud de $\boldsymbol{U_{CA}}$. También determine la dirección y tasa de migración de la dorsal respecto a la placa A.




La Magnitud es: $\boldsymbol{U_{CA}} = (\boldsymbol{U_{BA}^2} + \boldsymbol{U_{CB}^2} - 2\boldsymbol{U_{BA}}\boldsymbol{U_{CB}}cos135)^{1/2}$

$$= \left((50^2) + (40^2) - 2(50)(40)\cos(135)\right)^{1/2}$$
$$= 83.23\ {}^{mm}/_{yr}$$

El azimut es: $\frac{U_{BC}}{sen\beta} = \frac{U_{CA}}{sen135}$

$$\beta = arcsen(\frac{U_{CB}sen135}{U_{CA}}) = 19.86°$$

$$\boldsymbol{U_{CA}} = Az_{CA} - \beta = 270 - 19.86 = \mathbf{250.13°}$$

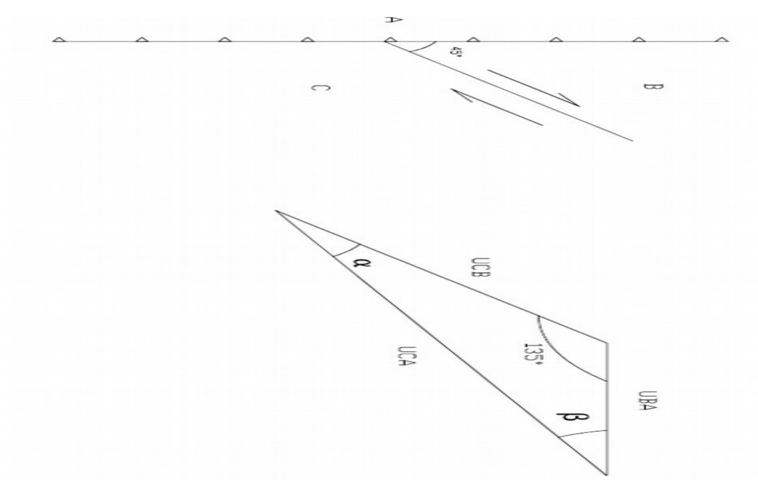
Ahora: $\alpha + 135 + \beta = 180$

de donde: $\alpha = 25$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Tasa\,Migracion\,Ridge} &= \boldsymbol{U_{BA}}cos\beta + \boldsymbol{U_{CB}}cos\alpha \\ &= (50)\cos(19.86) + (40)\cos(25) \\ &= \mathbf{83.23}\ \boldsymbol{{}^{mm}/_{yr}}\end{aligned}$$

**En dirección $U_{CA} = \mathbf{250°}$ (Dirección de migración del ridge con respecto a A)**

**PROBLEMA 1-27** Considere la triple unión TTF ilustrada en la figura. Una falla de transformación lateral-derecha tiene un azimut de 45° con respecto a la triple unión que esta migrando a través de una trinchera norte-sur. Si el azimut y la magnitud de $\boldsymbol{U}_{BA}$ es 270° y $50\ {}^{mm}/_{yr}$ y $\boldsymbol{U}_{CB} = 50\ {}^{mm}/_{yr}$, determine el azimut y magnitud de $\boldsymbol{U}_{CA}$. También determine la dirección y tasa de migración de la falla a traves de la trinchera.



La Magnitud es: $$\boldsymbol{U}_{CA} = (\boldsymbol{U}_{BA}^2 + \boldsymbol{U}_{CB}^2 - 2\boldsymbol{U}_{BA}\boldsymbol{U}_{CB}cos135)^{1/2}$$

$$= \left((50^2) + (50^2) - 2(50)(40)\cos(135)\right)^{1/2}$$
$$= 92.38\ {}^{mm}/_{yr}$$

El azimut es: $$\frac{U_{BC}}{sen\beta} = \frac{U_{CA}}{sen135}$$

$$\beta = arcsen\left(\frac{U_{CB}sen135}{U_{CA}}\right) = 22.5°$$

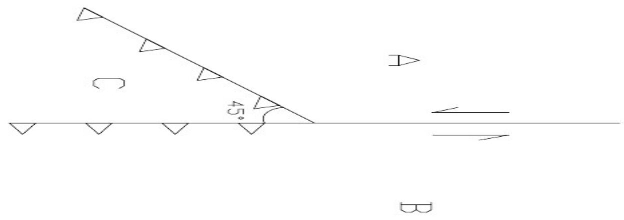
$$Az_{CA} = 180 - \beta\ = 157.5°$$

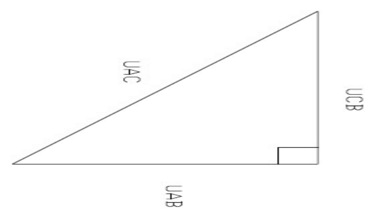
Ahora:

$$\boldsymbol{Tasa\ Migracion\ Ridge} = \boldsymbol{U}_{CB}cos135 + \boldsymbol{U}_{CA}cos22.5$$
$$= (50)\cos(135) + (92.38)\cos(22.5)$$
$$= \mathbf{50}\ {}^{\boldsymbol{mm}}/_{\boldsymbol{yr}}$$

**En dirección $U_{BA} = 270°$ (Dirección de la falla a través de la Trinchera)**

**PROBLEMA 1-28** Considere la unión triple TTF mostrada en la figura. Una falla transformante lateral – izquierda tiene un azimut de 0°, y dos trincheras tiene azimutes de 180° y 225°. Si el azimut y magnitud de $\boldsymbol{U_{CB}}$ es 90° y $10\,{mm}/{yr}$ y $\boldsymbol{U_{AB}} = 50\,{mm}/{yr}$, determine el azimut y magnitud de $\boldsymbol{U_{AC}}$.




La magnitud es: $$U_{CA} = (U_{CB}^2 + U_{AB}^2)^{1/2}$$

$$= (10^2 + 50^2)^{1/2}$$
$$= \mathbf{51\ {mm}/{yr}}$$

El Azimut es: $$Az_{CA} = 225 - 90 = \mathbf{135}$$

**PROBLEMA 2-1** Un promedio de espesor de la corteza oceánica es 6 km. Su densidad es 2900 kg/m$^3$. Esta cubierta por 5 km de agua ($\rho_a$ = 1000kg/m$^3$) en una típica cuenca oceánica.

Determine la fuerza normal por unidad de área sobre un plano horizontal en la base de la corteza oceánica debida al peso de la corteza y el agua que la suprayace.

*Fórmula para el cálculo:*

$$\sigma_{yy} = \rho_a g y_a + \rho_{co} g y_{co} \tag{1}$$

Donde:

$\sigma_{yy}$ = esfuerzo o fuerza por unidad de área

$\rho_a$ = 1000 $kg/m^3$ (densidad del agua)

$\rho_{co}$ = 2900 $kg/m^3$ (densidad de la corteza oceánica)

$y_a$ = 5000 m (altura de la columna de agua)

$y_{co}$ = 6000 m (altura de la corteza oceánica)

g = 9.8 m/$s^2$ (gravedad)

Reemplazando en (1): $$\sigma_{yy} = \left(1000\,\frac{kg}{m^3}\right)\left(9.8\,\frac{m}{s^2}\right)(5000\ m) + \left(2900\,\frac{kg}{m^3}\right)\left(9.8\,\frac{m}{s^2}\right)(6000\ m)$$

$$\boldsymbol{\sigma_{yy} = 2.2 \times 10^{8}\ Pa = 220\ MPa}$$

**PROBLEMA 2-2** Considere las estructuras oceánica y continental en la figura 2-3. La corteza continental tiene un espesor $h_{cc}$ y una densidad $\rho_{cc}$; su superficie superior está al nivel del mar. La corteza oceánica está cubierta con agua de profundidad $h_a$ y densidad $\rho_a$. La corteza oceánica tiene un espesor $h_{co}$ y densidad $\rho_{co}$. La densidad del manto es $\rho_m$. Aplique el principio de isostasia o equilibrio hidrostático para demostrar que la profundidad de la cuenca oceánica relativa al continente está dada por:

$$h_a = \frac{(\rho_m - \rho_{cc})}{(\rho_m - \rho_a)} h_{cc} - \frac{(\rho_m - \rho_{co})}{(\rho_m - \rho_a)} h_{co} \qquad (2\text{-}4)$$

Calcular ha para $h_{cc}$ = 35 km, $h_{co}$ = 6 km, $\rho_m$ = 3300 kg/m$^3$, $\rho_a$ = 1000 kg/m$^3$, $\rho_{cc}$ = 2800 kg/m$^3$, $\rho_{co}$ = 2900 kg/m$^3$,

*Desarrollo matemático:*

Reemplazando en (2-4):

$$h_a = \frac{\left(3300\,\frac{kg}{m^3} - 2800\,\frac{kg}{m^3}\right)}{\left(3300\,\frac{kg}{m^3} - 1000\,\frac{kg}{m^3}\right)}(35000\ m) - \frac{\left(3300\,\frac{kg}{m^3} - 2900\,\frac{kg}{m^3}\right)}{\left(3300\,\frac{kg}{m^3} - 1000\,\frac{kg}{m^3}\right)}(6000\ m)$$

$$\boldsymbol{h_a = 6565\ m = 6.6\ km}$$

**PROBLEMA 2-3** Una cadena montañosa tiene una elevación de 5 km. Asuma que $\rho_m$ = 3300 kg/m$^3$, $\rho_c$ = 2800 kg/m$^3$, y que la referencia de corteza normal continental tiene un espesor de 35 km, determine el espesor de la corteza continental debajo de la cadena montañosa. Asuma que el equilibrio hidrostático es aplicable.

*Fórmula a emplear:*

$$h - b = h\left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_m}\right) \qquad (1)$$

Donde:

$h_c =$ 35 km (espesor de la corteza continental)

$b =$ profundidad del manto en la que el continente se hunde

$\rho_m =$ 3300 $kg/m^3$ (densidad del agua)

$\rho_c =$ 2800 $kg/m^3$ (densidad de la corteza oceánica)

Según la figura 2-2 del libro y con la información del enunciado podemos deducir que:

$$h - b = 5\ km = 5000\ m \qquad (2)$$

Despejando h de la ecuación (1):

$$h = \frac{h-b}{\left(1-\frac{\rho_c}{\rho_m}\right)} = \frac{5000\ m}{\left(1-\frac{2800\frac{kg}{m^3}}{3300\frac{kg}{m^3}}\right)} = 33000\ m = 33\ km$$

Finalmente el espesor total ($h_t$) del la corteza bajo la cadena montañosa estará dado por la suma del espesor normal de la corteza más el valor encontrado de h:

$$\boldsymbol{h_t} = h_c + h = 35\ km + 33\ km = \boldsymbol{68\ km}$$

**PROBLEMA 2-4** Hay evidencia observacional a partir de los continentes que el nivel del mar en el Cretáceo fue 200 m más alto que la actualidad. Después de unos pocos miles de años, no obstante, el nivel del mar está en equilibrio isostático con las cuencas oceánicas. ¿Cuál es el correspondiente incremento en la profundidad de las cuencas oceánicas? Tome $\rho_w = 1000\ kg/m^3$ y la densidad del manto desplazado como $\rho_m = 3300\ kg/m^3$.

*Fórmula a emplear:* $$h - b = h\left(1 - \frac{\rho_w}{\rho_m}\right) \quad (1)$$

Donde:

h-b = 200 m (corteza elevada en la actualidad por encima del nivel del mar comparada con el Cretáceo)

Despejando h en (1) y reemplazando valores: $$h = \frac{h-b}{\left(1-\frac{\rho_w}{\rho_m}\right)} = \frac{200\ m}{\left(1-\frac{1000}{3300}\right)}$$

$$\boldsymbol{h = 287\ m}$$

**PROBLEMA 2-5** Considere un bloque continental con un espesor de 70 km correspondiente a gran cadena montañosa. Si el continente tiene una densidad de 2800 kg/m$^3$ y el manto una densidad de 3300 kg/m$^3$, determine el esfuerzo tensional en el bloque continental.

*Fórmula a emplear:*

$$\Delta\sigma_{xx} = \frac{1}{2}\frac{\rho_m g b^2}{h} - \frac{1}{2}\rho_c g h = \frac{1}{2}\rho_c g h \qquad (1)$$

Donde:

$h = 70\ Km$

$\rho_c = 2800\ Kg/m^3$

$\rho_m = 3300\ \frac{Kg}{m^3}$

Reemplazando en (1): $$\Delta\sigma_{xx} = \frac{1}{2}(2800\,Kg/m^3)(10\,m/s^2)(7x10^4\,m)\left(1 - \frac{2800\,Kg/m^3}{3300\,Kg/m^3}\right)$$

$$\boldsymbol{\Delta\sigma_{xx} = -1.48x10^8\,Pa = -148\,MPa}$$

**PROBLEMA 2-7** Asuma que la ley de la fricción dada en la ecuación 2-15 es aplicable a la falla transformante ilustrada en la figura 2-7 con $f = 0.3$. Asuma también que el esfuerzo normal $\sigma_{xx}$ es litostático con $\rho_c = 2750$ kg/m$^3$. Si la falla tiene 10 km de profundidad, ¿cuál es la fuerza (por unidad de longitud de falla) de resistencia al movimiento sobre la falla? ¿Cuál es el esfuerzo tectónico medio de cizalla sobre esta profundidad $\sigma_{zx}$ requerido para sobreponer esta resistencia friccional?

*Fórmula a emplear:*

$$\Delta F = A\sigma_{xz} = L_z\delta_y\sigma_{xz} \quad (1)$$

Donde:

$\Delta F =$ fuerza de resistencia al movimiento

$A =$ área del plano de falla

$L_z =$ longitud de la falla

$\delta y =$ altura del plano de falla

$\sigma_{xz}$ = esfuerzo de cizalla sobre el plano de falla

Expresando (1) por unidad de longitud obtenemos la fórmula que nos da la fuerza de resistencia

al movimiento sobre la falla por unidad de longitud:

$$\frac{\Delta F}{L_z} = \delta y \sigma_{xz} \qquad (2)$$

Además sabemos que el esfuerzo normal es litostático: $\sigma_{xz} = f\sigma_{xx} = f\rho_c g y$ (3)

Donde:

$f =$ 0.3 (coeficiente de fricción)

$\sigma_{xx} =$ esfuerzo normal sobre el plano de falla

y = 10 km (profundidad de la falla)

g = 9.8 $m/s^2$ (gravedad)

Reemplazando (3) en (2): $$\frac{\Delta F}{L_z} = \delta y f \rho_c g y \qquad (4)$$

Si hacemos infinitesimal la profundidad sobre el plano de falla: $$\frac{dF}{L_z} = f \rho_c g y dy \qquad (5)$$

Integrando (5) y considerando la profundidad del plano de falla de 10000 m, tenemos que:

$$\frac{F}{L_z} = \int_0^{10000} f \rho_c g y dy = \frac{1}{2} f \rho_c g y^2 \Big]_0^{10000}$$

$$\boldsymbol{\frac{F}{L_z}} = \frac{1}{2} \times 0.3 \times 2750\ \frac{kg}{m^3} \times 9.8 \frac{m}{s^2} \times (10000\ m)^2 = \mathbf{4.04 \times 10^{11}}\ \boldsymbol{\frac{N}{m}}$$

Para finalizar, el esfuerzo tectónico medio de cizalla sobre la profundidad de la falla, requiere sobrepasar el valor anterior de resistencia friccional, necesitando ser al menos la misma magnitud de fuerza dividida por la profundidad de la falla. Entonces:

$$\boldsymbol{\bar{\sigma}_{zx}} = \frac{\frac{F}{L_z}}{y} = \frac{4.04 \times 10^{11}\ \frac{N}{m}}{10000\ m} = \mathbf{4.04 \times 10^{7}}\ \boldsymbol{Pa}$$

**PROBLEMA 2-8** Considere un bloque de roca con una altura de 1 m y dimensiones horizontales de 2 m. La densidad de la roca es 2750 $kg/m^3$. Si el coeficiente de fricción es 0.8, ¿qué fuerza se requiere para empujar la roca sobre una superficie horizontal?

Basados en el diagrama de cuerpo libre de la situación planteada, afirmamos que:

$$Sumatoria\ de\ fuerzas\ en\ x = 0, \quad entonces: \quad -F_f + F = 0 \tag{1}$$

$$Sumatoria\ de\ fuerzas\ en\ y = 0, \quad entonces: \quad N - mg = 0 \tag{2}$$

Además: $$F_f = fN \quad (3)$$

Donde:

$F_f$ = fuerza de fricción

F = fuerza necesaria para empujar la roca sobre una superficie horizontal

N = fuerza normal a la superficie de contacto entre roca y plano horizontal

m = masa de la roca

g = 9.8 $m/s^2$

$f$ = 0.8 (coeficiente de fricción)

ρ = 2750 $kg/m^3$ (densidad de la roca)

$V = \quad 4 \ m^3$ (volumen de la roca)

De (2) tenemos que: $N = mg = \rho V g = 2750 \frac{kg}{m^3} \times 4m^3 \times 9.8 \frac{m}{s^2} = 107800 \ Newtons$

Reemplazando el anterior resultado en (3): $F_f = 0.8 \times 107800 \ N = 8.6 \times 10^4 N$

Finalmente según la ecuación (1): $\boldsymbol{F = F_f = 8.6 \times 10^4 N}$

El anterior resultado constituye la fuerza mínima necesaria para igualar la fuerza de fricción.

Fuerzas superiores a este valor alcanzan a empujar la roca sobre la superficie horizontal.

**PROBLEMA 2-9** Considere una masa de roca reposando sobre un plano inclinado como se muestra en la figura 2-9. Por balanceo de fuerzas actuando sobre el bloque paralelas al plano inclinado, demostrar que la fuerza tangencial por unidad de área $\sigma_{x'y'}$ sobre el plano que soporta el bloque es $\rho g h sen\theta$ ($\rho$ es la densidad y $h$ es el espesor del bloque). Demostrar que la condición de deslizamiento es:

$$\theta = \tan^{-1} f \tag{2-18}$$

Basados en el diagrama de cuerpo libre obtenido a partir de la figura 2-9, afirmamos que si el bloque se encuentra en equilibrio de fuerzas:

$$Sumatoria\ de\ fuerzas\ en\ x = 0, \quad entonces: \quad -F_f + \sigma_{x'y'} = 0 \tag{1}$$

$$Sumatoria\ de\ fuerzas\ en\ y = 0, \quad entonces: \quad N - \sigma_{y'y'} \cos\theta = 0 \tag{2}$$

Además:

$$F_f = fN \tag{3}$$

Donde en la ecuación (1) tenemos que la fuerza tangencial por unidad de área $\sigma_{x'y'}$ debida a la acción de la fuerza de la gravedad sobre el bloque ubicado sobre el plano inclinado en un ángulo $\theta$ a la que se opone la fuerza de fricción es:

$$\boldsymbol{\sigma_{x'y'} = \sigma_{y'y'}\,\mathrm{sen}\,\theta = \rho g h\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Para encontrar la ecuación 2-18 primero reacomodamos la ecuación (1) reemplazando con la expresión de la mitad de la ecuación anterior:

$$-F_f + \sigma_{y'y'}\,sen\,\theta = 0 \qquad (4)$$

Pero según (2): $N = \sigma_{y'y'} \cos\theta$

Reemplazando el resultado anterior en (3): $F_f = f\sigma_{y'y'} \cos\theta$

Finalmente reemplazando en (4): $-f\sigma_{y'y'} \cos\theta + \sigma_{y'y'} sen\,\theta = 0$

Buscamos despejar θ: $\sigma_{y'y'} sen\,\theta = f\sigma_{y'y'} \cos\theta$

$$\frac{sen\,\theta}{\cos\theta} = f, \qquad \tan\theta = f$$

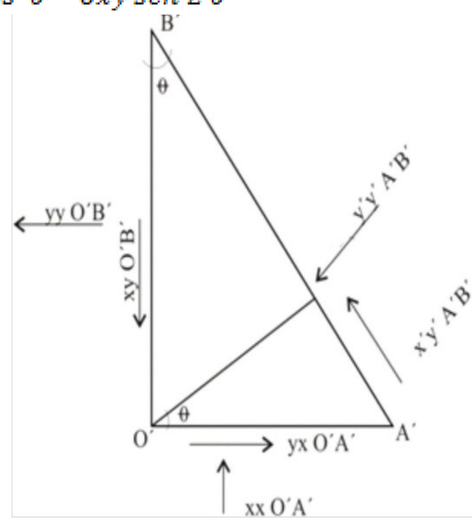
Finalmente: $$\boldsymbol{\theta = \tan^{-1} f}$$

El anterior resultado significa que hemos encontrado el ángulo de inclinación a partir del cual se supera la situación de equilibrio e iniciaría el deslizamiento del bloque sobre la superficie inclinada.

**PROBLEMA 2-10** La presión $\rho_h$ de fluidos (agua) en los poros de las rocas reduce el efecto del esfuerzo normal efectivo que presiona las superficies a lo largo de una falla. Modifique la ecuación 2-17 para incorporar este efecto.

**PROBLEMA 2-11** Demostrar que:

$$\delta\, y'y' = \delta xx\ \text{sen}^2\,\theta + \delta yy\ \cos^2\theta - \delta xy\ sen\ 2\ \theta$$




Fuerza en la cara O´ A´: $\delta$ yy O´ A´

Fuerza en la cara O´ B´: $-\delta$ xy O´ B´

Fuerza en la cara A´ B´: $-\delta$ y´y´ A´ B´ sen $\theta$ − $\delta$ x´y´A´B´ cos $\theta$

Igualando la fuerza cero nos queda:

$$(\delta y'y' \operatorname{sen}\theta + \delta x'y' \cos\theta)\, A'B' = \delta\, yy\, O'A' - \delta\, xy\, O'B'$$

Como: $\frac{O'A'}{A'B'} = \operatorname{sen}\theta$ y $\frac{O'B'}{A'B'} = \cos\theta$

Nos queda: $\delta\, y'y'\, sen\,\theta + \delta\, x'y' \cos\theta = \delta xx\ \operatorname{sen}\theta + \delta xy \cos\theta$ (1)

Como ya sabemos: $\delta\, y'y' \cos\theta - \delta\, x'y'\, Sen\,\theta = \delta xy\ \operatorname{sen}\theta - \delta yy \cos\theta$ (2)

Multiplicamos la ecuación (1) por $\operatorname{sen}\theta$, y la ecuación (2) por $\cos\theta$. Sumamos los resultados y usamos las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$
$$\delta\, xy = \delta\, yy$$
$$2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{sen} 2\,\theta$$

$$\delta\, y'y'\ \operatorname{sen}^2\theta + \delta\, x'y' \cos\theta\, sen\,\theta = \delta\, xx \operatorname{sen}^2\theta - \delta\, xy\ \cos\theta\, sen\,\theta$$

$$\delta\, y'y'\ \cos^2\theta - \delta\, x'y' \operatorname{sen}\theta\, cos\,\theta = \delta\, yy\, cos^2\theta - \delta\, xy\ \cos\theta\, sen\,\theta$$

Nos queda: $$\delta\, y'y'\ (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = \delta xx \operatorname{sen}^2\theta + \delta yy \cos^2\theta - \delta xy\, sen\, 2\,\theta$$

$$\boldsymbol{\delta\, y'y' = \delta xx\, \mathrm{sen}^2\theta + \delta yy\, \mathrm{cos}^2\theta - \delta xy\, sen\, 2\,\theta}$$

**PROBLEMA 2-12** El estado de esfuerzo en un punto sobre un plano de falla es syy=150 MPa, sxx=200 MPa, y sxy=0 ($y$ es la profundidad y el eje $x$ apunta hacia el occidente). ¿Cuáles son los esfuerzos normal y tangencial sobre el plano de falla si la falla tiene dirección N-S y buzamiento 35° al occidente?

***Solución:*** $\sigma_{xx} = 200\ Mpa$ $\theta = 35°$ $\sigma_{yy} = 150\ Mpa$

$$\sigma_{y'y'} = \sigma_{xx} sen^2\theta + \sigma_{yy}\cos^2\theta - \sigma_{xy} sen2\theta$$

Con: $\sigma_{xy} = 0$

Tenemos: $\sigma_{y'y'} = 200sen^2(35°) + 150\cos^2(35°)$

$$\sigma_{y'y'} = 166.5\ Mpa$$

$$\sigma_{x'y'} = \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})sen2\theta + \sigma_{xy}\cos 2\theta$$

$$\sigma_{x'y'} = \frac{1}{2}(150 - 200)sen(70°)$$

$$\sigma_{x'y'} = -23.5\ Mpa$$

**PROBLEMA 2-13** Demostrar que la suma de los esfuerzos normales sobre dos planos ortogonales cualquiera es constante. Evaluar la constante.

*Solución*

Ecuaciones para esfuerzo normal independiente de la orientación:

Ecuación 2.45: $$\sigma_{x'x'} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\theta$$

Ecuación 2.47: $$\sigma_{y'y'} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\theta$$

Entonces: $$\sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} = \sigma_1 + \sigma_2$$

El cual es un valor constante ya que solo depende del valor de los esfuerzos principales.

**PROBLEMA 2-14.** Demostrar que los esfuerzos normales máximo y mínimo actúan sobre planos que son ángulos rectos a cada uno.

*Solución*

Para determinar los esfuerzos normales máximo y mínimo derivamos la ecuación 2-38

$$\sigma_{x'x'} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\cos 2\theta + \sigma_{xy} sen 2\theta \qquad (2\text{-}38)$$

$$\frac{d\sigma_{x'x'}}{d\theta} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} 2 sen 2\theta + 2\sigma_{xy}\cos 2\theta = 0$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos la orientación de los planos de esfuerzos normales máximo y mínimo.

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

La solución tiene dos raíces $\theta_1$ y $\theta_2$. Específicamente los valores $2\theta_1$ y $2\theta_2$ están separados 180°, entonces $\theta_1$ y $\theta_2$ estarán 90° aparte.

Los valores de $\theta_1$ y $\theta_2$ se sustituyen en la ecuación 2-38 y así se obtienen los esfuerzos normales.

Realizando las relaciones trigonométricas, sustituyendo en la ecuación 2-38 y simplificando tenemos

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2}$$

Dependiendo del signo escogido, este resultado da el máximo o mínimo en el plano de esfuerzos normales actuando en un punto, donde $\sigma_1 \geq \sigma_2$.

**PROBLEMA 2-15** Determine la presión en el centro de la luna asuma que la densidad de la luna 3300 $Kg/m^3$ y a=1738 Km. ¿Cuál es la variación de g con el radio en la Luna?.

La presión en el interior de un planeta se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$p = \frac{2}{3}\rho^2 G(a^2 - r^2)$$

Como se desea determinar la presión de en el centro de la luna entonces r = 0, luego:

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{2}{3}\rho^2 G(a^2) \\
&= \frac{2}{3}\pi(3300)(6{,}67\times10^{-11})(1738\times10^3)^2 \\
&= 4{,}6\times10^9\,Pa = 4{,}6GPa
\end{aligned}
$$

La variación de la gravedad con el radio de la luna es:

$$
\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{4}{3}\pi\rho G = \frac{4}{3}\pi(3300)(6{,}67\times10^{-11}) = 9{,}21\times10^{-7}
$$

**PROBLEMA 2-16** Considere un modelo de dos capas de un planeta que consiste de un núcleo de densidad $\rho_c$ y radio b con un manto de densidad $\rho_m$ y espesor a-b. Muestre que la aceleración gravitacional es una función del radio.

La aceleración gravitacional está dada por:

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}$$

Donde:

$$M(r) = \int_0^r 4\pi x^2 \rho dx$$

Para $0 \le r \le b$ la única contribución a la aceleración es la del núcleo

$$M(r) = \int_0^r 4\pi x^2 \rho dx = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_c$$

Ahora para $b < r \le a$ se tiene la contribución del núcleo mas la parte del manto que esta debajo

del punto r, esto es:

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho_c b^3 + 4\pi\int_b^r x^2 \rho_m dx = \frac{4}{3}\pi\rho_c b^3 + \frac{4}{3}\pi\rho_m (r^3 - b^3)$$

Cambiando el valor de M(r) en la ecuación de la aceleración de la gravedad.

$$g(r) = \frac{4}{3}\pi\rho_c G r \qquad \text{para } 0 \le r \le b$$

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{4}{3}\pi b^3 \frac{(\rho_c - \rho_m)}{r^2} G + \frac{4}{3}\pi r \rho_m G \\ &= \frac{4}{3}\pi G\left[ r\rho_m + \frac{b^3}{r^2}(\rho_c - \rho_m)\right] \end{aligned} \qquad \text{, para } b < r \le a$$

La variación de la presión con la profundidad en coordenadas esféricas, tomando solo la variación radial, esta descrita por:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g$$

Para $b < r \leq a$

$$p = -\int_a^r \rho_m \frac{4}{3}\pi G\left[ r\rho_m + \frac{b^3}{r^2}(\rho_C - \rho_m) \right] dr = \frac{2}{3}\pi\rho_m G\left(a^2 - r^2\right) + \frac{4}{3}\pi\rho_m G b^3 \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right] (\rho_c - \rho_m)$$

Para $0 \leq r \leq b$

$$\begin{aligned} p &= -\int_a^b \rho_m \frac{4}{3}\pi G\left[ r\rho_m + \frac{b^3}{r^2}(\rho_C - \rho_m) \right] dr - \int_b^r \rho_c \frac{4}{3}\pi\rho_c G dr \\ &= \frac{2}{3}\pi G\rho_m^2 (a^2 - b^2) + \frac{2}{3}\pi G\rho_c^2 (b^2 - r^2) + \frac{4}{3}\pi\rho_m G b^3 (\rho_c - \rho_m)\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right] \end{aligned}$$

Aplique el modelo a la Tierra, asuma $\rho_m = 4000 kg/m^3$, b=3486 Km., a = 6371 Km..

Calcule $\rho_c$ dando que la masa total de la tierra $5{,}97\times10^{24}$ kg Cual es la presión en el centro de

la tierra y en la frontera núcleo manto? Cual es la aceleración de la gravedad en r=b?

Sabemos que

$$M = V_m \rho_m + V_c \rho_c$$

$$\rho_c = \frac{M - V_m \rho_m}{V_c}$$

Entonces

$$\rho_c = \frac{M - \frac{4}{3}\pi\left(a^3 - b^3\right)\rho^3}{\frac{4}{3}\pi b^3} = 13226 kg / m^3$$

Presión en el centro de la tierra

$$p = \frac{2}{3}\pi G\rho_m^2 (a^2 - b^2) + \frac{2}{3}\pi G\rho_c^2 (b^2 - r^2) + \frac{4}{3}\pi\rho_m G b^3 (\rho_c - \rho_m)\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]$$

Como es en el centro r=0 entonces nos queda que

$$P(r = 0) = 4{,}17 \times 10^{11} Pa$$

Presión en la interfase núcleo manto

$$P(r = b) = 1,21 \times 10^{11}\, Pa$$

**PROBLEMA 2-17** Las mediciones de esfuerzo de un corazón en una mina a una profundidad de 1.5 Km. dedos por un esfuerzo normal de 62 MPa en dirección N-S, 48 MPa en la dirección E-W y de 51 MPa en dirección NE-SW. Determine las magnitudes y las direcciones de los principales esfuerzos.

El valor de los esfuerzos principales se calcula de la siguiente manera:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \left[ \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2}{4} + \sigma_{xy}^2 \right]^{1/2}$$

$$\sigma_{yy} = 48MPa, \sigma_{xx} = 62MPa, \sigma_{xy} = 51MPa$$

$$\sigma_1 = 106MPa$$
$$\sigma_2 = 4MPa$$

La dirección se calcula mediante:

$$tg(2\theta) = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$ , entonces $\theta = 82^{\circ}\,\mathrm{NE}$

**PROBLEMA 2-18** Las medidas de los esfuerzos principales horizontales a una profundidad de 200m son dados como función de la distancia a la falla de San Andrés, cuales son los valores de los máximos esfuerzos de corte para cada distancia.

El máximo esfuerzo de corte esta dado por:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

| Distancia de la Falla Km | Máximo esfuerzo principal | Mínimo esfuerzo principal | Máximo esfuerzo de corte |
|---|---|---|---|
| 2 | 9 | 8 | 0,5 |
| 4 | 14 | 8 | 3 |
| 22 | 18 | 8 | 5 |
| 34 | 22 | 11 | 5,5 |

**PROBLEMA 2-19** El levantamiento de grandes áreas de subsidencia son acompañados por horizontales o laterales deformaciones causadas por la curvatura de la superficie de la tierra.

Muestre que la deformación lateral acompañada por un levantamiento $\Delta y$ viene dada por $\xi = \frac{\Delta y}{R}$, donde R es el radio de la Tierra.

Cuando la placa no ha sufrido ningún levantamiento la longitud de una pequeña rebanada, bajo aproximación de ángulos pequeños se tiene que $l = 2\pi R$, ahora si la placa sufre un levantamiento, la nueva longitud de la rebanada sera $l + \Delta l = 2\pi(R + \Delta y)$ entonces $\Delta l = 2\pi \Delta y$ lo que muestra que sufrir un levantamiento en la placa que subduce se presenta un cambio lateral de longitud lo que nos da una deformación lateral dada por:

$$\xi = \frac{\Delta l}{l} = \frac{2\pi \Delta y}{2\pi R} = \frac{\Delta y}{R}$$

**PROBLEMA 2-20** La porosidad de las rocas esta defina como el volumen vacio por unidad total de volumen. Si todos los espacios de los poros pueden ser llenados, por ejemplo, sometiendo la roca a grandes presiones cual puede ser la dilatación?

| Roca | Porosidad % | Deformación |
|---|---|---|
| Hasmadk Dolomite | 3.5 | 0,035 |
| Marianna Limestone | 13 | 0,13 |
| Berea Sandstone | 18,2 | 0,18 |

| | | |
|---|---|---|
| Muddy Shale | 4,7 | 0,047 |
| Repetto Slistone | 5,6 | 0,056 |

**PROBLEMA 2-21** Derivar la ecuación 2-106 a partir de la ecuación 2-102 usando la sustitución $\theta^{'} = \theta + \pi/2$ . Porque puede hacerse esto?

*Solución*

La ecuación 2-102

$$\varepsilon_{x'x'} = \varepsilon_{xx}\cos^2\theta + \varepsilon_{yy} sen^2\theta + \varepsilon_{xy} sen2\theta$$

Reemplazando $\theta^{'} = \theta + \pi/2$ en la ecuación 2-102 para determinar $\varepsilon_{y'y'}$, tenemos

$$\varepsilon_{y'y'} = \varepsilon_{xx}\cos^2\theta' + \varepsilon_{yy} sen^2\theta' + 2\varepsilon_{xy} sen\theta'\cos\theta'$$

$$\varepsilon_{y'y'} = \varepsilon_{xx} sen^2\theta + \varepsilon_{yy}\cos^2\theta - 2\varepsilon_{xy} sen\theta\cos\theta$$

$$\varepsilon_{y'y'} = \varepsilon_{xx} sen^2\theta + \varepsilon_{yy} \cos^2\theta - \varepsilon_{xy} sen 2\theta$$

El cálculo de esta forma se puede realizar ya que se está haciendo una rotación de ejes de 90°, determinando las deformaciones en la dirección y'y'.

**PROBLEMA 2-22** Demostrar que las deformaciones principales son las fracciones de cambio en la longitud.

*Solución*

De la ecuación 2-121

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}{}^2}$$

Las fracciones de cambio en la longitud a lo largo de las direcciones de los ejes de deformación principal son las deformaciones principales.

Cuando el estado de deformación es representado por las deformaciones principales, la deformación de cizalla no actúa en el elemento.

Entonces la ecuación 2-121 resulta en

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2}$$

Ecuación que involucra las componentes de deformación principal, las cuales representan deformación longitudinal a lo largo de los ejes principales de deformación, produciendo cambios de volumen en el elemento.

**PROBLEMA 2-23** Demostrar que la máxima deformación de cizalla es dada por $\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2}$.

Cuál es la dirección en la que la deformación de cizalla es máxima?

*Solución*

Derivando la ecuación 2-123

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) sen 2\theta$$

$$\frac{d\varepsilon_{xy}}{d\theta} = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos 2\theta = 0$$

$2\theta = 90°$, entonces $\theta = 45°$ es el ángulo en el que se presentan las deformaciones normales máximas.

Reemplazando $\theta$ en la ecuación 2-123

$$\varepsilon_{xy} = \pm\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

**PROBLEMA 2-24** Las coordenadas $x_A, z_A$ y $x_B, x_B$ de los monumentos A y B q se muestran en la figura 2-26 se asumen conocidos. Determinar las coordenadas $x_C, z_C$ del monumento C en términos de las coordenadas de los monumentos A y B y los ángulos $\theta_1$ y $\theta_2$.

$P_A = (x_A, Z_A)$, datos conocidos

$P_B = (x_B, Z_B)$, datos conocidos

$P_C = (x_C, Z_C)$, datos Desconocidos

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$\frac{|AB|}{sen(\pi-\theta_1-\theta_2)}=\frac{|AC|}{sen(\theta_2)}$$

Entonces: $$|AC|=\frac{sen(\theta_2)|AB|}{sen(\pi-\theta_1-\theta_2)}$$

$$x_c = ACsen\theta_2 \qquad\qquad z_c = AC\cos\theta_2$$

Reemplazando obtenemos: $$x_c=\frac{sen(\theta_2)|AB|}{sen(\pi-\theta_1-\theta_2)}sen\theta_1$$

$$z_c=\frac{sen(\theta_2)|AB|}{sen(\pi-\theta_1-\theta_2)}\cos\theta_1$$

**PROBLEMA 2-25** La figura 2-28 muestra tres monumentos en el Monte Diablo, la Montaña Sonoma, el faro de Farallón y el cambio en el ángulo $\theta$ relacionado a las medidas desde 1855. Asumiendo que estos tres monumentos yacen fuera de la zona de acumulación de deformación y liberación en la Falla de San Andrés, determinar la velocidad relativa a través de la falla.

*Solución*

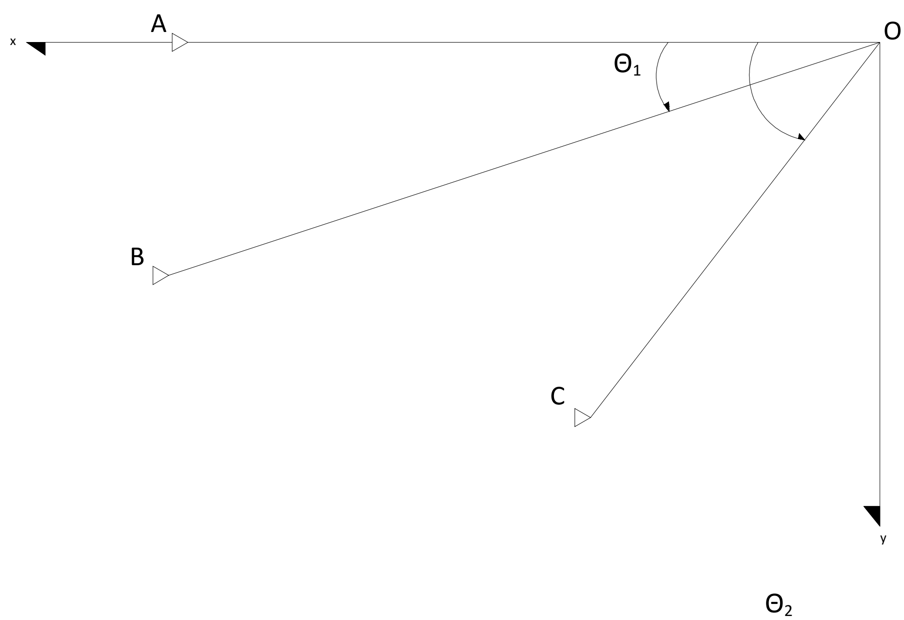
Trazando una línea de tendencia en la figura 2-28b, se obtiene

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.102 \text{ sec de arco/año}$$

La longitud de la línea entre Farallón y Sodoma es 70 Km y cruza la falla de San Andres en un ángulo aproximado de 45°.

$$u = \frac{70x10^6 * sen45° * 0.102}{3600 * 57.3} = 24.48 \text{ mm/año}$$

**PROBLEMA 2-26** Las medidas de triangulación a monumento 0 dan la tasa de tiempo del cambio de $\theta_1$, $\theta`_1$ y la tasa de cambio en el tiempo de $\theta_2$, $\theta`_2$ (figura).




Muestre que

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}\frac{\dot{\theta}_1 csc^2\theta_1 - \dot{\theta}_2 csc^2\dot{\theta}_2}{ctg\theta_1 - ctg\theta_2}$$

y

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\dot{\theta}_2 sec\theta_2 csc\theta_2 - \dot{\theta}_1 csc\theta_1 sec\theta_1}{tg\theta_2 - tg\theta_1}$$

Donde $\acute{\varepsilon}_{xx} = d\varepsilon_{xx}/dt$ y así sucesivamente.

Tomando las ecuaciones

$$\acute{\varepsilon}_{x'x'} = \acute{\varepsilon}_{xx}\cos^2\theta_1 + \acute{\varepsilon}_{yy}\,\text{sen}^2\theta_1 + 2\acute{\varepsilon}_{xy}\,\text{sen}\theta_1\cos\theta_1$$

$$\dot{\varepsilon}_{x''x''} = \dot{\varepsilon}_{xx} \cos^2 \theta_2 + \dot{\varepsilon}_{yy} \operatorname{sen}^2 \theta_2 + 2\dot{\varepsilon}_{xy} \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2$$

De la segunda ecuación se despeja $\dot{\varepsilon}_{yy}$ y se reemplaza en la primera, de donde se obtiene:

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}\frac{\dot{\varepsilon}_{x'x'} csc^2\theta_1 - \dot{\varepsilon}_{xx}(ctg\theta_1 + ctg\theta_2) - \dot{\varepsilon}_{x''x''} csc^2\theta_2}{ctg\theta_1 - ctg\theta_2}$$

Tomando $\dot{\varepsilon}_{x''x''} = \dot{\theta}_2$, $\dot{\varepsilon}_{x'x'} = \dot{\theta}_1$, $\dot{\varepsilon}_{xx} = 0$

Entonces se obtiene la solución al problema:

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}\frac{\dot{\theta}_1 csc^2\theta_1 - \dot{\theta}_2 csc^2\theta_2}{ctg\theta_1 - ctg\theta_2}$$

Ahora, de la misma manera que para la ecuación anterior, se despeja $2\dot{\varepsilon}_{xy}$ de la segunda ecuación

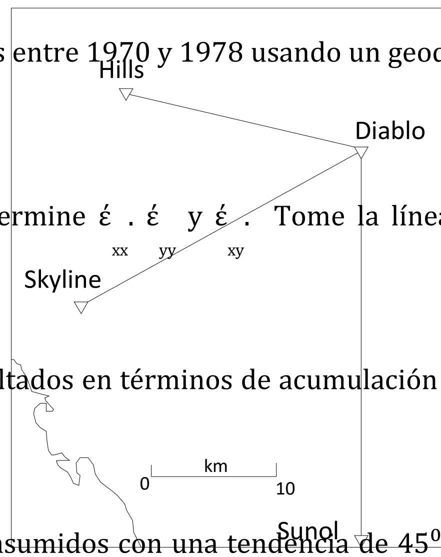
y se reemplaza en la primera de donde se obtiene:

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\dot{\varepsilon}_{x''x''} sec\theta_2 csc\theta_2 + \dot{\varepsilon}_{xx}(-ctg\theta_2 + ctg\theta_1) - \dot{\varepsilon}_{x'x'} csc\theta_1 sec\theta_1}{tg\theta_2 - tg\theta_1}$$

Se toman las mismas igualdades que en el caso anterior y se obtiene:

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\dot{\theta}_2 sec\theta_2 csc\theta_2 - \dot{\theta}_1 csc\theta_1 sec\theta_1}{tg\theta_2 - tg\theta_1}$$

**PROBLEMA 2-27** En la figura están las longitudes de las líneas a Diablo y a los monumentos Hills, Skyline, y Sunol obtenidas entre 1970 y 1978 usando un geodimetro. Asumiendo un campo de deformación uniforme, determine $\acute{\varepsilon}_{xx}$ . $\acute{\varepsilon}_{yy}$ y $\acute{\varepsilon}_{xy}$ . Tome la línea Sunol-Diablo para definir la coordenada *y*. discuta los resultados en términos de acumulación de esfuerzos en la falla de San Andrés los cuales pueden ser asumidos con una tendencia de $45^0$ con respecto a la línea Sunol-Diablo.




$\varepsilon_{y''y''}$

$\varepsilon_{y'y'}$

$\varepsilon_{yy}$

$$\dot{\varepsilon}_{y'y'} = \dot{\varepsilon}_{xx} sen^2\theta_1 + \dot{\varepsilon}_{yy} cos^2\theta_1 - 2\dot{\varepsilon}_{xy} sen\theta_1 cos\theta_1 \qquad [1]$$

$$\dot{\varepsilon}_{y''y''} = \dot{\varepsilon}_{xx} sen^2\theta_2 + \dot{\varepsilon}_{yy} cos^2\theta_2 - 2\dot{\varepsilon}_{xy} sen\theta_2 cos\theta_2 \qquad [2]$$

De [2] se despeja $2\dot{\varepsilon}_{xy}$ y reemplazando en [1], se obtiene:

$$\dot{\varepsilon}_{y'y'} = \dot{\varepsilon}_{xx} sen^2\theta_1 + \dot{\varepsilon}_{yy} cos^2\theta_1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{y''y''} - \dot{\varepsilon}_{xx} sen^2\theta_2 - \dot{\varepsilon}_{yy} cos^2\theta_2}{sen\theta_2 cos\theta_2}\right)(sen\theta_1 cos\theta_1)$$

Despejando $\dot{\varepsilon}_{yy}$:

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\dot{\varepsilon}_{y'y'}\csc\theta_1 sec\theta_1 + \dot{\varepsilon}_{xx}(-tg\theta_1 + tg\theta_2) + \dot{\varepsilon}_{y''y''}csc\theta_2 sec\theta_2}{ctg\theta_1 - ctg\theta_2}$$

De la misma manera se despeja $\dot{\varepsilon}_{xx}$:

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\dot{\varepsilon}_{y'y'}csc\theta_1 sec\theta_1 - \dot{\varepsilon}_{yy}(ctg\theta_1 - ctg\theta_2) - \dot{\varepsilon}_{y''y''}csc\theta_2 sec\theta_2}{tg\theta_1 - tg\theta_2}$$

Ahora de [2], se despeja $\dot{\varepsilon}_{yy}$, y se reemplaza en [1], obteniendo:

$$\dot{\varepsilon}_{y'y'} = \dot{\varepsilon}_{xx}sen^2\theta_1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{y''y''} - \dot{\varepsilon}_{xx}sen^2\theta_2 + 2\dot{\varepsilon}_{xy}sen\theta_2 cos\theta_2}{cos^2\theta_2}\right)(cos^2\theta_1) - 2\dot{\varepsilon}_{xy}sen\theta_1 cos\theta_1$$

Despejando $\dot{\varepsilon}_{xy}$:

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}\frac{\dot{\varepsilon}_{y'y'}sec^2\theta_1 - \dot{\varepsilon}_{xx}(tg\theta_1 - tg\theta_2) - \dot{\varepsilon}_{y''y''}sec^2\theta_2}{tg\theta_2 - tg\theta_1}$$