Aula 14

Solidificação de Magmas

Plano da Aula

Introdução:

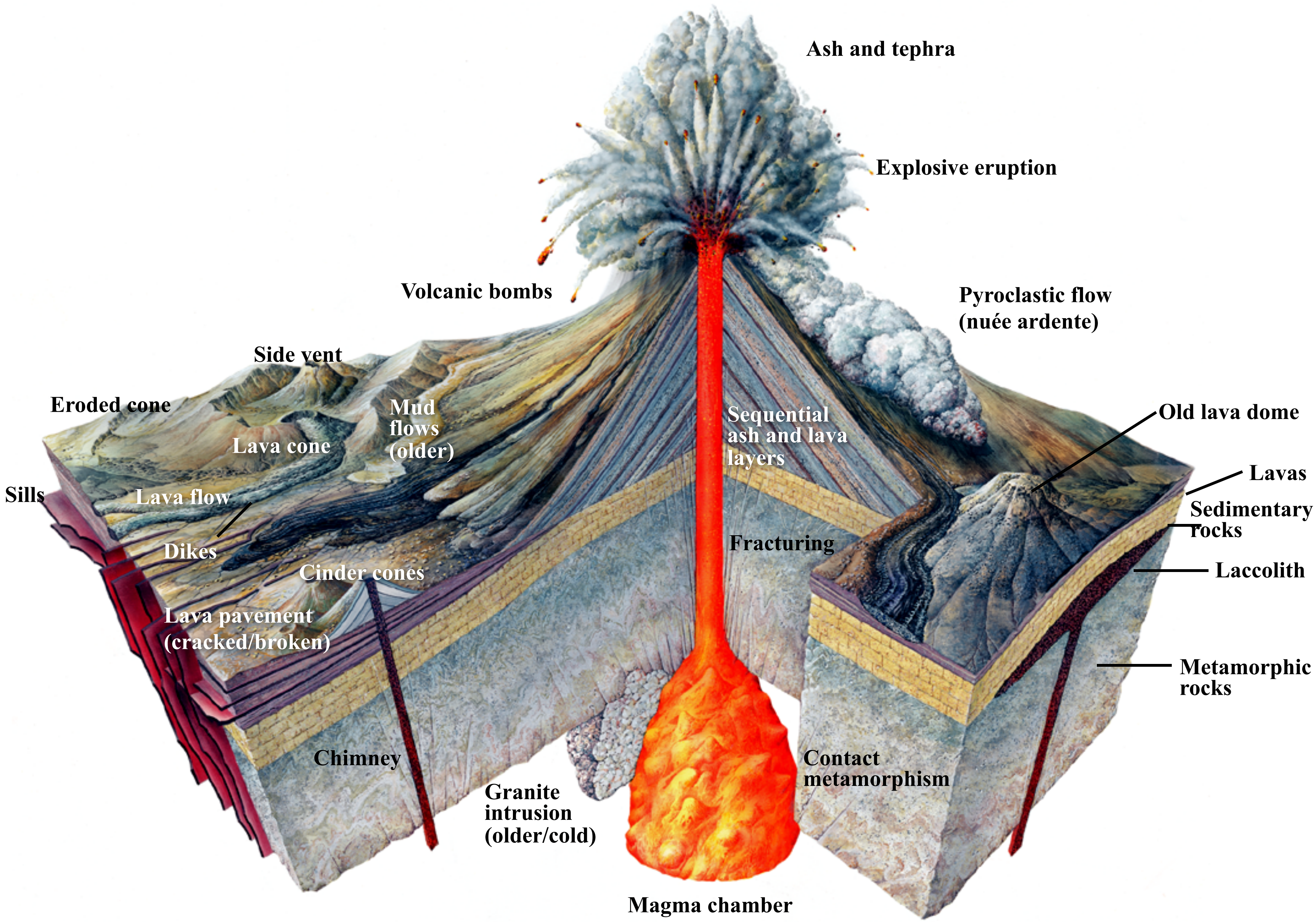
- Vulcões e formações vulcânicas

Solidificação na superfície

- Problema de Stefan, calor latente de solidificação, solução por semelhança

Solidificação no interior

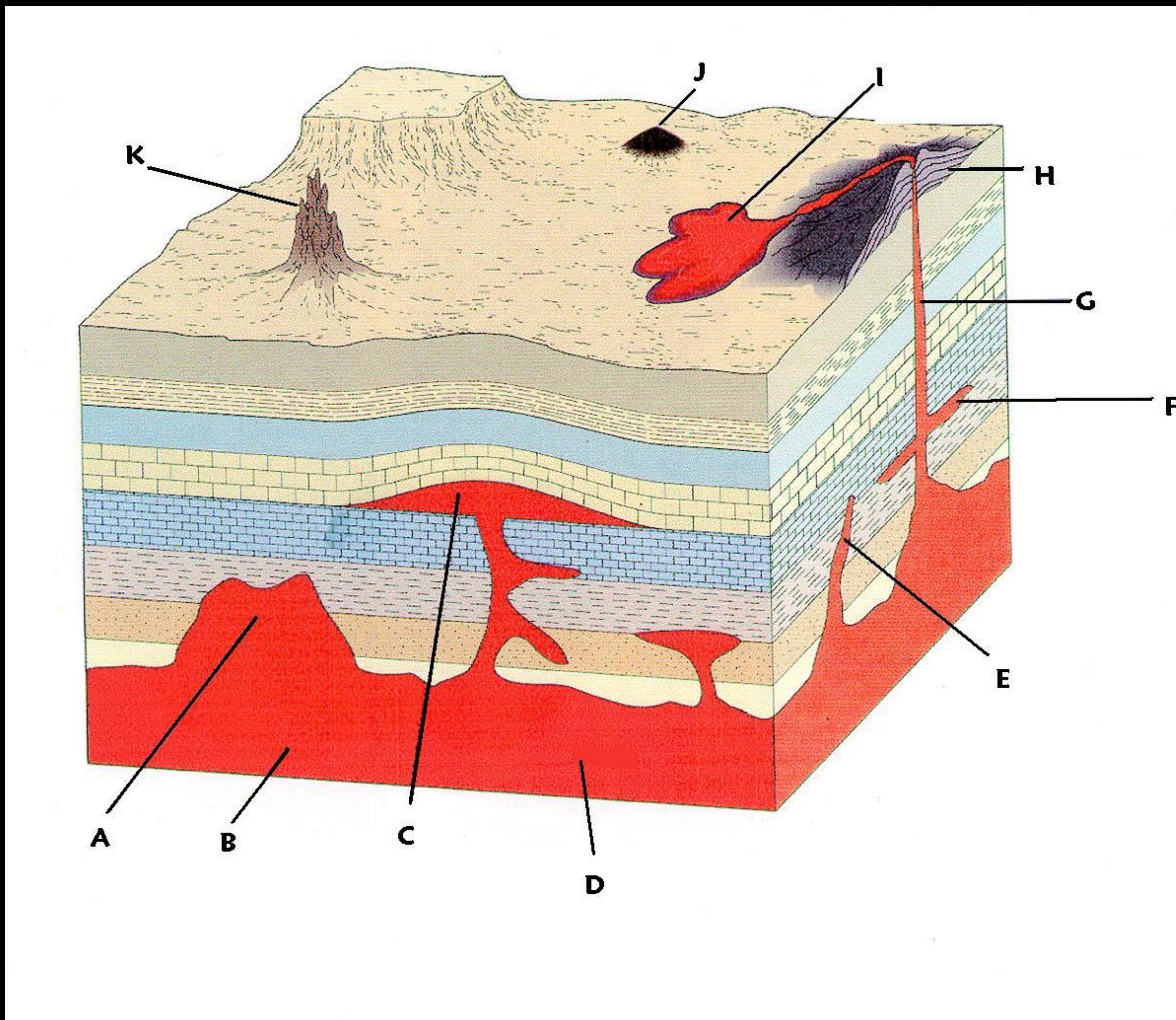
- Solidificação de diques, esfriamento da zona de contato, soluções por seme-lhança.


Ash and tephra
Explosive eruption
Volcanic bombs
Pyroclastic flow
(nuée ardente)
Side vent
Eroded cone
Mud
flows
(older)
Lava cone
Sequential
ash and lava
layers
Old lava dome
Lavas
Sills
Lava flow
Sedimentary
rocks
Dikes
Fracturing
Cinder cones
Laccolith
Lava pavement
(cracked/broken)
Metamorphic
rocks
Chimney
Contact
metamorphism
Granite
intrusion
(older/cold)
Magma chamber


Pahoehoe


Aa

Formações magmáticas



A Stock
B Batholith
C Laccolith
D Magma
E Dyke
F Sill
G Volcanic Pipe
H Composite Volcano
I Lava Flow
J Cinder Cone
K Volcanic Neck

Solidificação na Superfície

A solidificação de magmas envolve a mudança de fase: de líquido para só-lido.

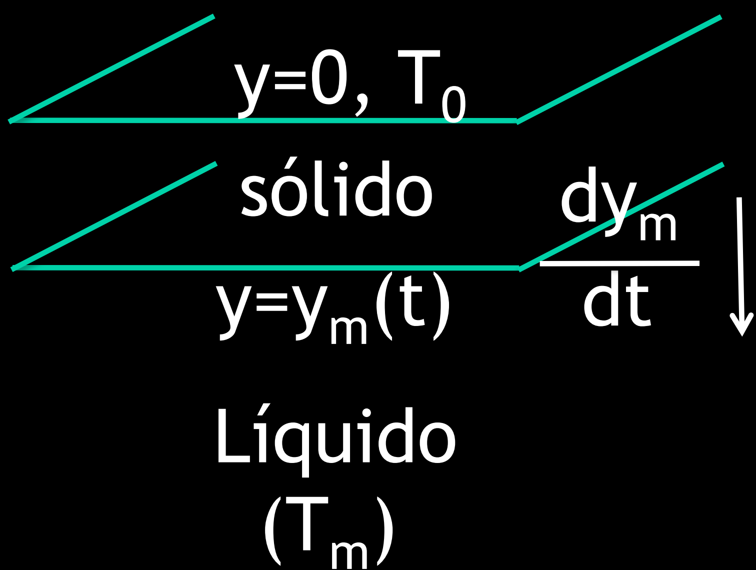
Associado à mudançã de fase está o calor latente de solidificação (L):

"Quantidade de calor liberado quando 1 kg de magma é solidificado"

Além disso, a superfície sólido-liquido muda com o tempo.

O Problema de Stefan

Consideramos uma camada horizontal de magma que solidifica na sua superfície superior, como resultado do esfriamento da superfície.



$$\partial T/\partial t = \kappa\, \partial^2 T/\partial y^2$$

para $0 \leq y \leq y_m(t)$

$T=T_0$ para $y=0$

$T=T_m$ para $y=y_m(t)$

$y_m=0$ para $t=0$

O Problema de Stefan

Mais uma vez, usamos a abordagem de semelhança e introduzimos a variável adimensional $\eta = y/2(\kappa t)^{1/2}$ e a temperatura adimensional $\theta = (T - T_0)/(T_m - T_0)$.

A equação que devemos resolver é, como no problema do aquecimento instantâneo

$$-\eta \, d\theta/d\eta = \tfrac{1}{2} \, d^2\theta/d\eta^2$$

que tem a solução $\theta = c_1 \, \mathrm{erf}(\eta) + c_2$

O Problema de Stefan

A superfície sólido-líquido é isoterma e assim, para $T=T_m$ há uma η_m= ct. Se a constante é chamada de λ_1,

$$\eta_m = y_m/2(\kappa t)^{1/2} = \lambda_1 \text{ -> } y_m = 2\lambda_1(\kappa t)^{1/2}$$

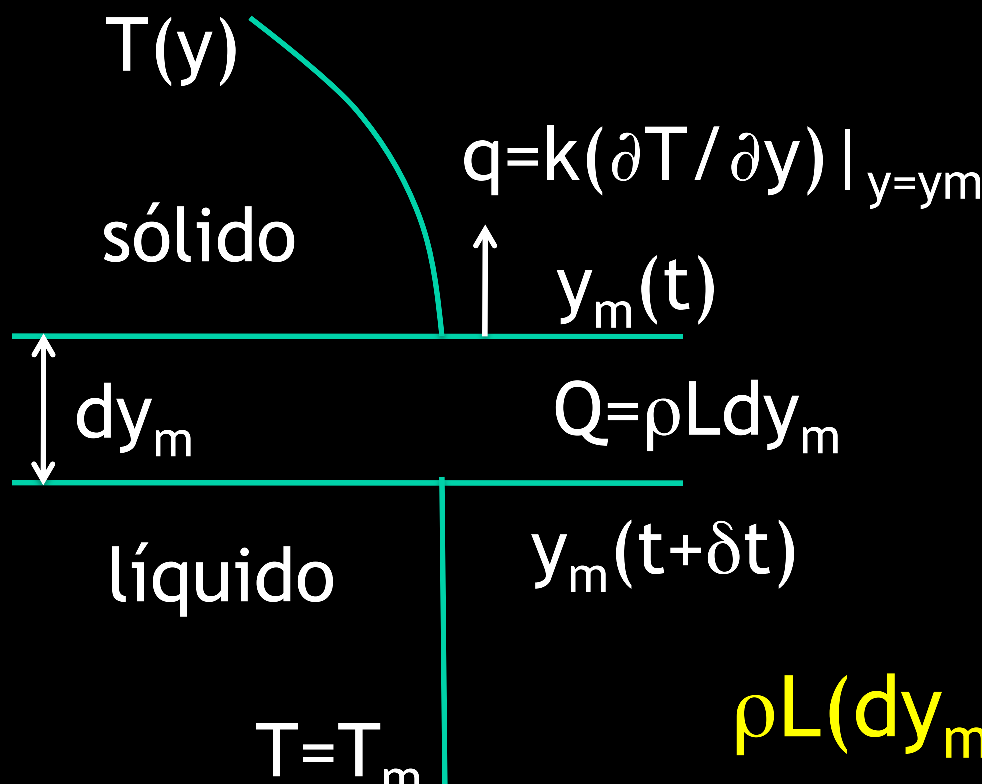
Usando $\theta(0)=0$ temos que $c_2=0$ e, usando a condição $\theta(\eta=\lambda_1)=1$

$$\theta = \mathrm{erf}(\eta)/\mathrm{erf}(\lambda_1)$$

para $0 \leq y \leq y_m$.

Determinação da constante λ_1

A constante λ_1 é determinada impondo que o calor latente liberado na borda seja conduzido verticalmente para cima



$$Q = q\,\delta t$$

$$\rho L(dy_m/dt)=k(\partial T/\partial y)|_{y=ym}$$

Determinação da constante λ_1

Sabemos que $y_m = 2\lambda_1(\kappa t)^{1/2}$, assim

$$dy_m/dt = \lambda_1\surd\kappa/\surd t$$

e, da solução, $\theta = \mathrm{erf}(\eta)/\mathrm{erf}(\lambda_1)$

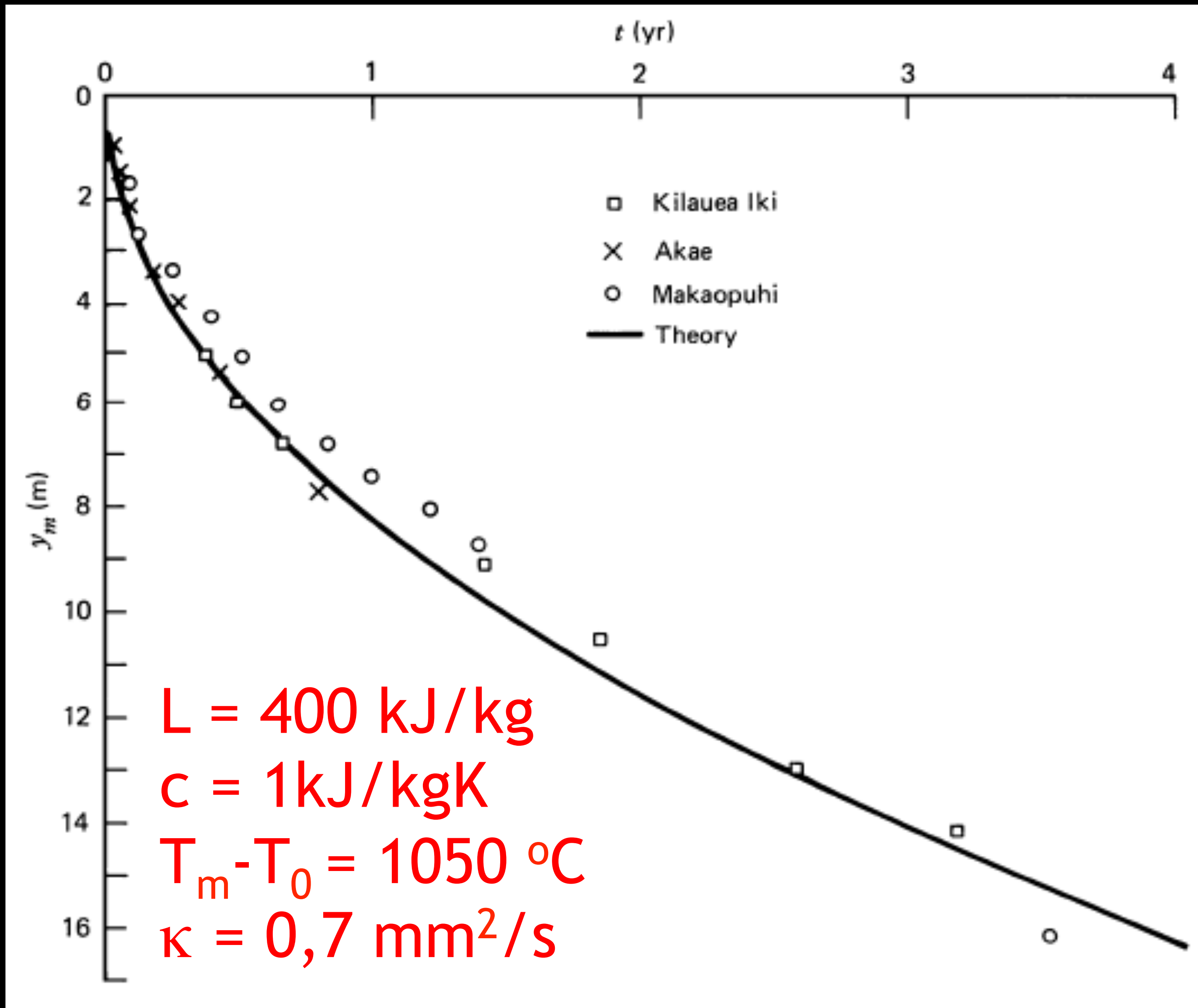
$$(\partial T/\partial y)|_{y=ym} = (d\theta/d\eta)_{\eta=\lambda 1}\,(\partial\eta/\partial y)(T_m - T_0)$$

$$= \frac{(T_m - T_0)}{(\kappa t)^{1/2}\,\surd\pi}\ \exp(-\lambda_1^2)\ \mathrm{erf}^{-1}(\lambda_1)$$

Substituindo

$$[L\surd\pi/c(T_m - T_0)] = \exp(-\lambda_1^2)/\lambda_1\mathrm{erf}(\lambda_1)$$

Verificação experimental no Hawaii



L = 400 kJ/kg

c = 1kJ/kgK

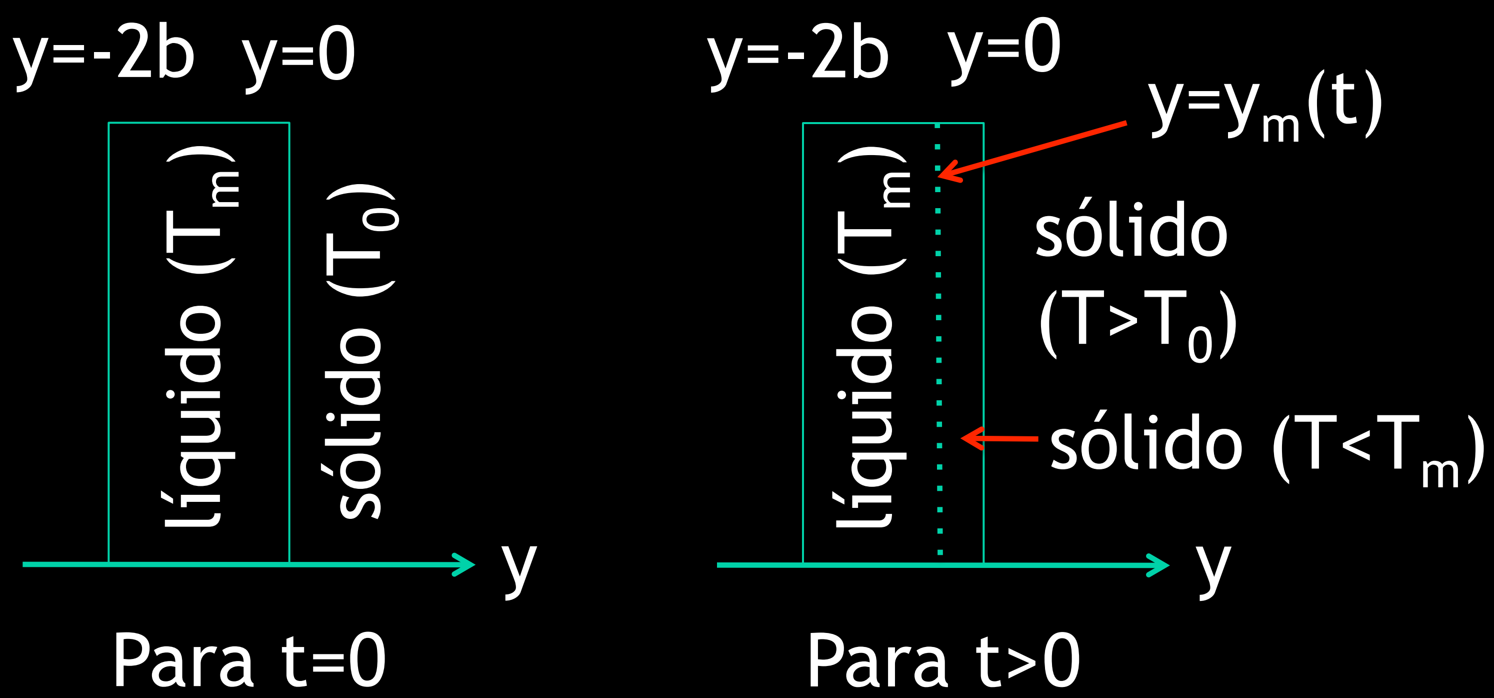
T_m-T_0 = 1050 °C

κ = 0,7 mm^2/s

Solidificação no Interior

Quando o magma é solidificado pelo contato com a rocha ao redor

$$\partial T/\partial t = \kappa\, \partial^2 T/\partial y^2 \quad \text{para} \quad y>y_m(t)$$



Solidificação de um dique

As condições de contorno são:

$T=T_m$ para $y=y_m(t)$

$T \to T_0$ para $y \to \infty$

As condições iniciais são:

$T(t=0)=T_0$ para $y>0$ e $y_m(t=0)=0$

E, mais uma vez, o balanço de energia é dado por

$$\rho L(dy_m/dt)=k(\partial T/\partial y)|_{y=ym}$$

Solução por semelhança

Como no problema de Stefan, definimos $\eta = y/2(\kappa t)^{1/2}$ e $\theta = (T-T_0)/(T_m-T_0)$. Assim,

$$-\eta \, d\theta/d\eta = \tfrac{1}{2} \, d^2\theta/d\eta^2$$

Neste caso a solidificação acontece para uma superfície em $y<0$. Assim,

$$\eta_m = y_m/2(\kappa t)^{1/2} = -\lambda_2$$

e as condições de contorno ficam como

$$\theta(\eta_m) = 1, \quad \theta(\infty) = 0$$

Solução por semelhança

Já vimos que a solução da equação adi-mensional é

$$\theta = c_1 \operatorname{erf}(\eta) + c_2$$

Como $\theta(\infty)=0$, temos que $c_1+c_2=0$. Assim,

$$\theta = c_2 [1-\operatorname{erf}(\eta)] = c_2 \operatorname{erfc}(\eta)$$

Usando a condição $\theta(-\lambda_2)=c_2 \operatorname{erfc}(-\lambda_2)=1$, obtemos finalmente que

$$\theta(\eta) = \operatorname{erfc}(\eta)/\operatorname{erfc}(-\lambda_2) = \operatorname{erfc}(\eta)/[1+\operatorname{erf}(\lambda_2)]$$

Determinação da constante λ_2

Para achar λ_2, usamos que $y_m=-2\lambda_2(\kappa t)^{1/2}$. Assim,

$$dy_m/dt = -\lambda_2\surd\kappa/\surd t$$

Como $\theta = \mathrm{erfc}(\eta)/[1+\mathrm{erf}(\lambda_2)]$

$$(\partial T/\partial y)|_{y=ym} = (d\theta/d\eta)_{\eta=-\lambda 2}\,(\partial\eta/\partial y)(T_m-T_0)$$

$$= \frac{-(T_m-T_0)}{(\kappa t)^{1/2}\,\surd\pi}\ \exp(-\lambda_2^{\,2})\ [1+\mathrm{erf}(\lambda_2)]^{-1}$$

Substituindo

$$L\surd\pi/c(T_m-T_0) = \exp(-\lambda_2^{\,2})/\lambda_2\ [1+\mathrm{erf}(\lambda_2)]^{-1}$$

Tempo de solidificação

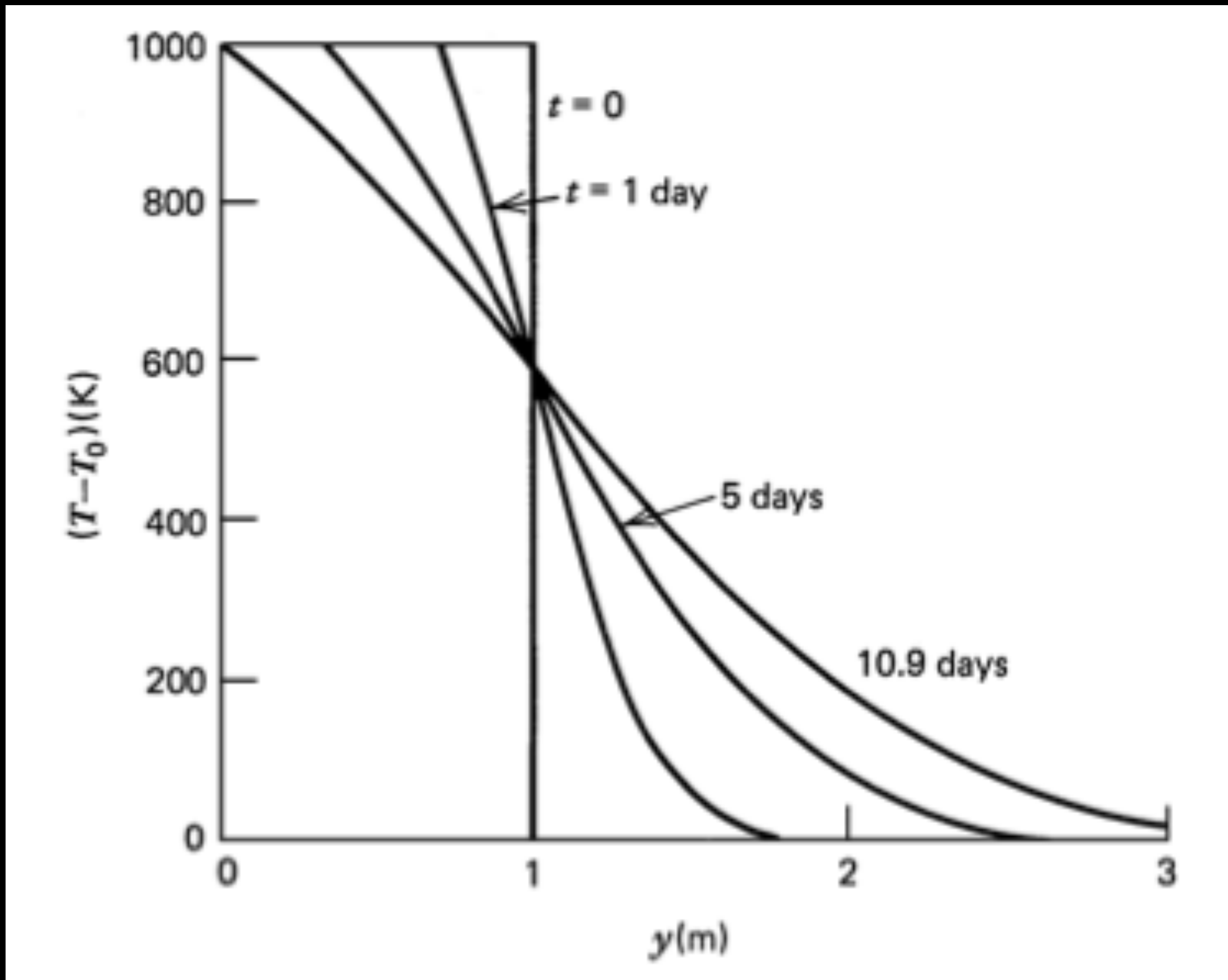
O tempo de solidificação de um dique de largura 2b pode ser achado como

$$y_m = -b \;\text{->}\; t_S = b^2/4\kappa\lambda_2^2$$

Considerando L=320 kJ/kg, T_m-T_0=1000 K e c=1,2 kJ/kgK obtemos λ_2=0,73.

Para b=1m e κ=0,5 mm^2/s obtemos que o tempo de solidificação é de 10,9 dias e a temperatura de contato entre o magma solidificado e a rocha é de T_0+590 K.

Solidificação de um dique



Esfriamento do dique

Vamos considerar o esfriamento do dique logo depois da solidificação.

O problema pode ser resolvido através da solução de Laplace:

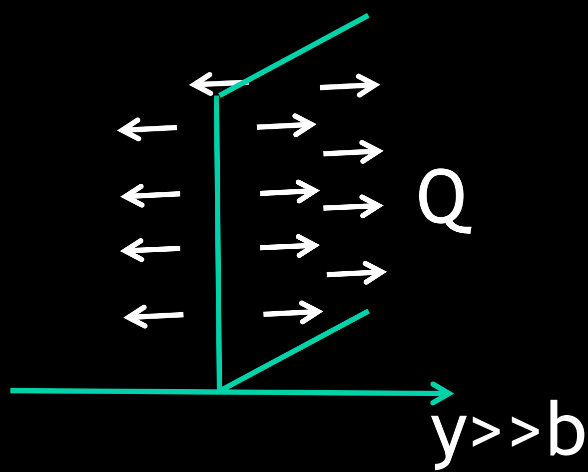
$$T = 1/2(\pi\kappa t)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{T}(y') \exp[-(y-y')^2/4\kappa t]\, dy'$$

onde $\overline{T}(y)$ é a temperatura logo depois da solidificação.

Esfriamento da rocha

Mas vamos considerar uma solução mais simples para |y|>>b, ou seja, afastados do dique.

Consideramos assim um dique planar em y=0 com conteúdo calorífico Q por unida-de de área,



$$\partial T/\partial t = \kappa\, \partial^2 T/\partial y^2$$

$T \to T_0$, para $|y| \to \infty$

Esfriamento da rocha

O conteúdo calorífico inicial por unidade de área do dique é dado por

$$Q = \rho\ [c(T_m - T_0) + L]\ 2b$$

Esse calor tem de se conservar durante o processo de esfriamento.

O conteúdo calorífico do dique + rocha para um tempo ‘t’ é dado por

$$Q = \rho c \int_{-\infty}^{\infty} (T - T_0)\ dy$$

Esfriamento da rocha

Definimos agora as variáveis

$$\eta = y/2\sqrt{\kappa t}\ , \quad \theta = (T - T_0)/(Q/2\rho c\sqrt{\kappa t})$$

pelo que, substituindo

$$Q = 2\rho c \int_0^\infty (Q/2\rho c(\kappa t)^{1/2}]\theta 2(\kappa t)^{1/2}\, d\eta$$

ou, simplificando,

$$\int_0^\infty \theta\, d\eta = 1/2$$

Esfriamento da rocha

A equação da condução do calor pode ser expressa como

$$-2\ d(\eta\theta)/d\eta = d^2\theta/d\eta^2$$

Integrando uma vez,

$$-2\eta\theta = d\theta/d\eta + c_1$$

Por simetria, $d\theta/d\eta|_{y=0}=0$ e $c_1=0$. Integrando de novo

$$\theta = c_2 \exp(-\eta^2)$$

Esfriamento da rocha

A constante c_2 pode ser achada através da integral

$$\int_0^\infty c_2 \exp(-\eta^2)\,d\eta = c_2 \sqrt{\pi}/2 = 1/2$$

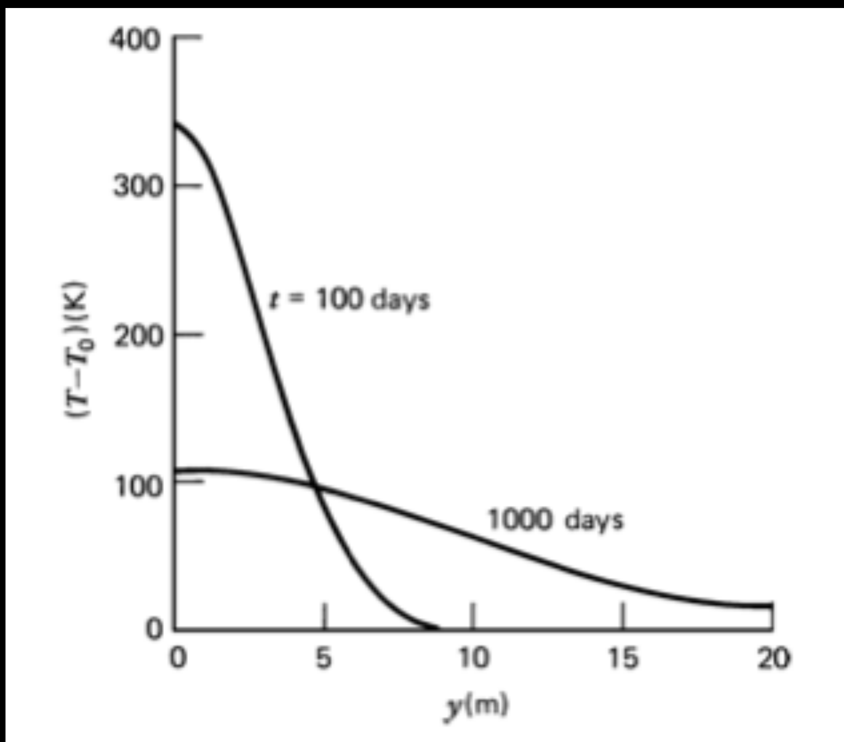
A solução final é

$$T - T_0 = \frac{Q}{2\rho c(\pi\kappa t)^{1/2}} \exp(-y^2/4\kappa t)$$

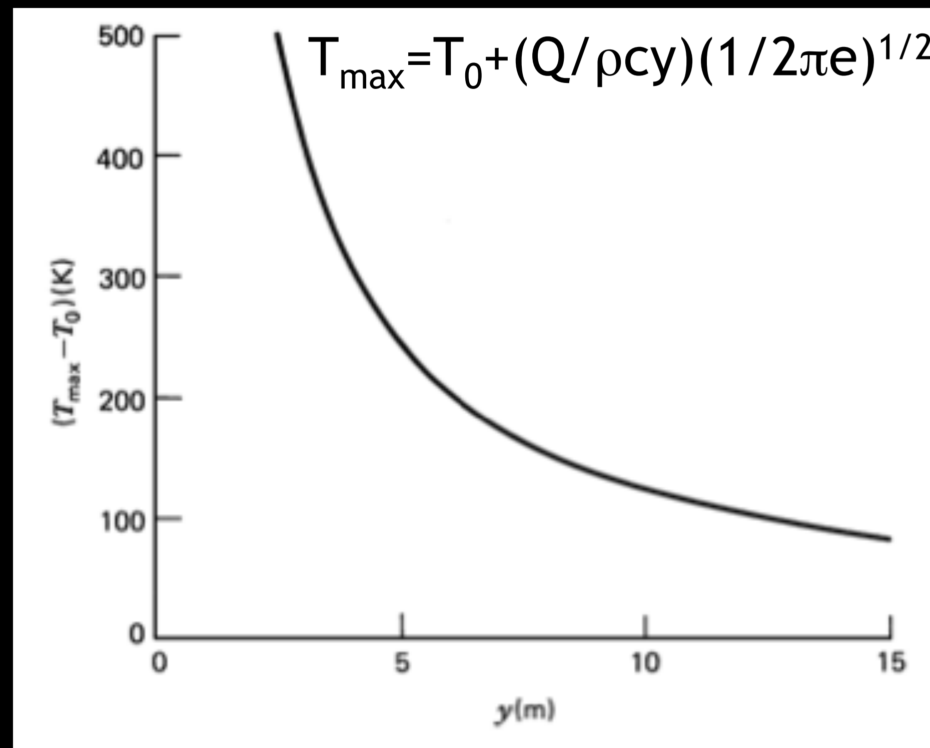
Para $|y| >> b$ a temperatura não depende da distribuição inicial $\overline{T}(y)$.

Esfriamento da rocha

A temperatura atinge um máximo para $t_{max}=y^2/2\kappa$ e depois esfria.



$T_{max}=T_0+(Q/\rho c y)(1/2\pi e)^{1/2}$



(Usando os valores do dique anterior e $\rho=2{,}9$ kg/m^3 obtemos $Q=8{,}8\ 10^9$ J/m^2)