Aula 13
Aquecimento e Esfriamento da Litosfera

Plano da Aula

Introdução

- Condução 1D dependente do tempo.

Aquecimento e esfriamento:

- Aquecimento periódico, aquecimento instantâneo.

Modelos de litosfera:

- Modelo de semi-espaço, modelo de placa.

Introdução

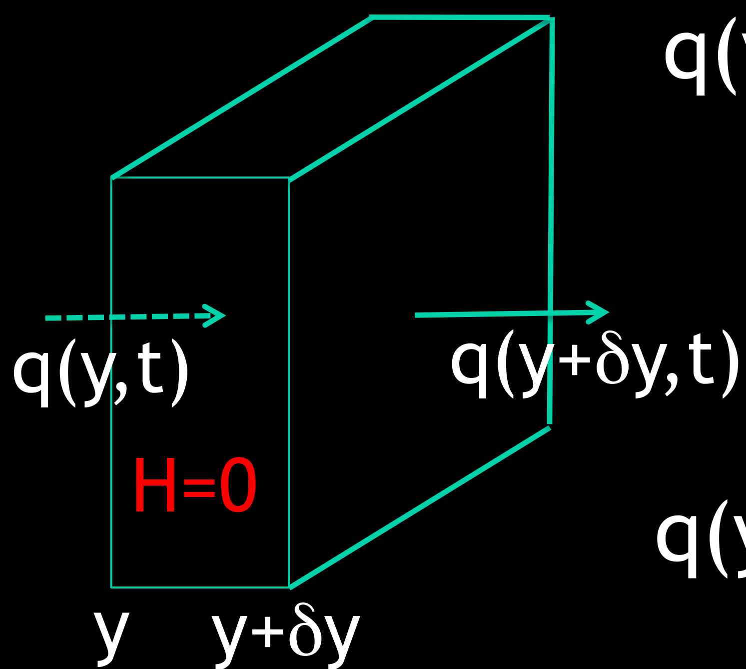
Vamos considerar problemas geológicos em que a condução do calor é dependente do tempo.

Nesses problemas vamos fazer duas hipóteses:

- Os efeitos do calor radiogênico são desprezíveis (H=0).
- A propagação do calor acontece em uma direção (1D).

Condução 1D não-estacionária

Como no caso estacionário consideramos a lei de Fourier e a conservação da energia através de um corpo:



$$q(y+\delta y,t) = q(y,t) + \delta y\ (\partial q/\partial y)$$

$$q(y,t) = -k\ \partial T/\partial y$$

$$q(y+\delta y,t) - q(y,t) = \delta y\ (\partial q/\partial y)$$

$$= \delta y\ [-k\ (\partial^2 T/\partial y^2)]$$

Condução 1D não-estacionária

Como H=0, um fluxo total de energia tem que esquentar ou esfriar o corpo.

Definimos o calor específico "c" como a energia necessária para esquentar 1 kg de massa 1 ºC.

$$\Delta q \, A \, \delta t = -c \, \delta T \, \rho \, \delta V = -c \, \delta T \, \rho \, A \, \delta y$$

$$\Delta q = -\delta y \, \rho \, c \, (\partial T/\partial t)$$

Igualando

difusividade térmica

$$\partial T/\partial t = (k/\rho c) \, \partial^2 T/\partial y^2 = \kappa \, \partial^2 T/\partial y^2$$

Aquecimento periódico

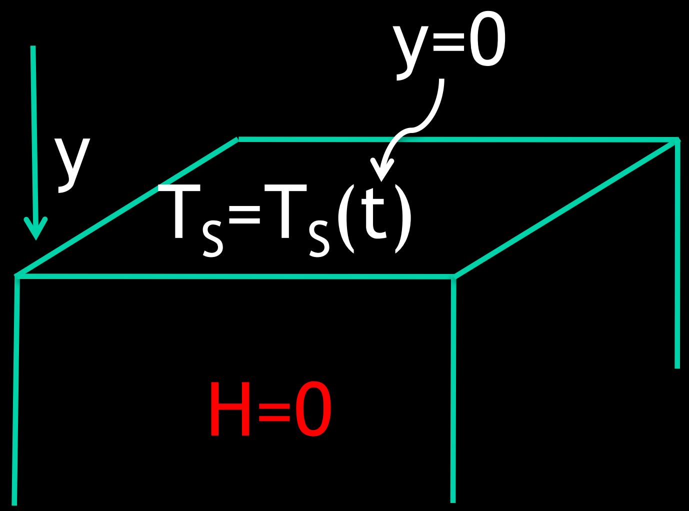
A temperatura da superfície da Terra muda regularmente com o tempo em várias escalas:

- Variações entre dia e noite
- Variações estacionais
- Variações das glaciações

Vamos usar a equação 1D dependente do tempo para determinar o efeito dessas mudanças com a profundidade.

Aquecimento periódico

Assumimos que o meio é um semi-espaço com superfície em $y=0$ e que $T_S=T_S(t)$



$$\partial T/\partial t = \kappa\, \partial^2 T/\partial y^2$$

$$T_S = T_0 + \Delta T \cos \omega t$$

Usando “separação de variáveis”,

$$T(y,t) = T_0 + Y_1(y) \cos \omega t + Y_2(y) \sin \omega t$$

Aquecimento periódico

e substituindo

$$-\omega Y_1 = \kappa\, d^2Y_2/dy^2$$

$$\omega Y_2 = \kappa\, d^2Y_1/dy^2$$

A solução do sistema pode ser feita a partir de

$$d^4Y_2/dy^4 + \omega^2/\kappa^2\, Y_2 = 0$$

Assumindo $Y_2(y)=Ce^{\alpha y}$ e substituindo,

$$\alpha^4 + \omega^2/\kappa^2 = 0 \;\; \text{->} \;\; \alpha=\pm(1\pm i)/\sqrt{2}\,(\omega/\kappa)^{1/2}$$

Aquecimento periódico

dando a solução geral

$$Y_2 = c_1\, e^{[(1+i)/\surd 2]\, \surd(\omega/\kappa) y} + c_2\, e^{[(1-i)/\surd 2]\, \surd(\omega/\kappa) y}$$

$$+ c_3\, e^{[-(1+i)/\surd 2]\, \surd(\omega/\kappa) y} + c_4\, e^{[-(1-i)/\surd 2]\, \surd(\omega/\kappa) y}$$

Como as flutuações da temperatura decaem com a profundidade, $c_1=c_2=0$

$$Y_2 = e^{-y\surd(\omega/2\kappa)} \left[c_3\, e^{-iy\surd(\omega/2\kappa)} + c_4\, e^{iy\surd(\omega/2\kappa)}\right]$$

ou

$$Y_2 = e^{-y\surd(\omega/2\kappa)} \left[b_1 \cos \surd(\omega/2\kappa)\, y \right.$$

$$\left. + b_2 \sin\surd(\omega/2\kappa) y \right]$$

Aquecimento periódico

De forma semelhante,

$$Y_1 = e^{-y\surd(\omega/2\kappa)}\,[b_3 \cos \surd(\omega/2\kappa)\, y$$
$$+\, b_4 \sin\surd(\omega/2\kappa)\,]$$

Lembrando que

$$-\omega Y_1 = \kappa\, d^2Y_2/dy^2$$

temos que $b_3=b_2$ e $b_4=-b_1$. Assim,

$$Y_1 = e^{-y\surd(\omega/2\kappa)}\,[b_2 \cos \surd(\omega/2\kappa)\, y$$
$$-\, b_1 \sin\surd(\omega/2\kappa)\,]$$

Aquecimento periódico

Substituindo y=0 na solução

$$T(0,t) = T_0 + Y_1(0) \cos \omega t + Y_2(0) \sin \omega t$$

e comparando com $T_S(t)$ na superfície,

$$T(0,t) = T_0 + \Delta T \cos \omega t$$

deduzimos que,

$$Y_2(0)=b_1=0 \text{ e } Y_1(0)=b_2=\Delta T.$$

Assim,

$$T = T_0 + \Delta T\, e^{-y\surd(\omega/2\kappa)} \cos[\omega t - y\surd(\omega/2\kappa)]$$

“Skin depth”

A equação anterior mostra que a perturbação máxima da temperatura diminui com a profundidade

$$\Delta T(y) = \Delta T\, e^{-y\sqrt{(\omega/2\kappa)}}$$

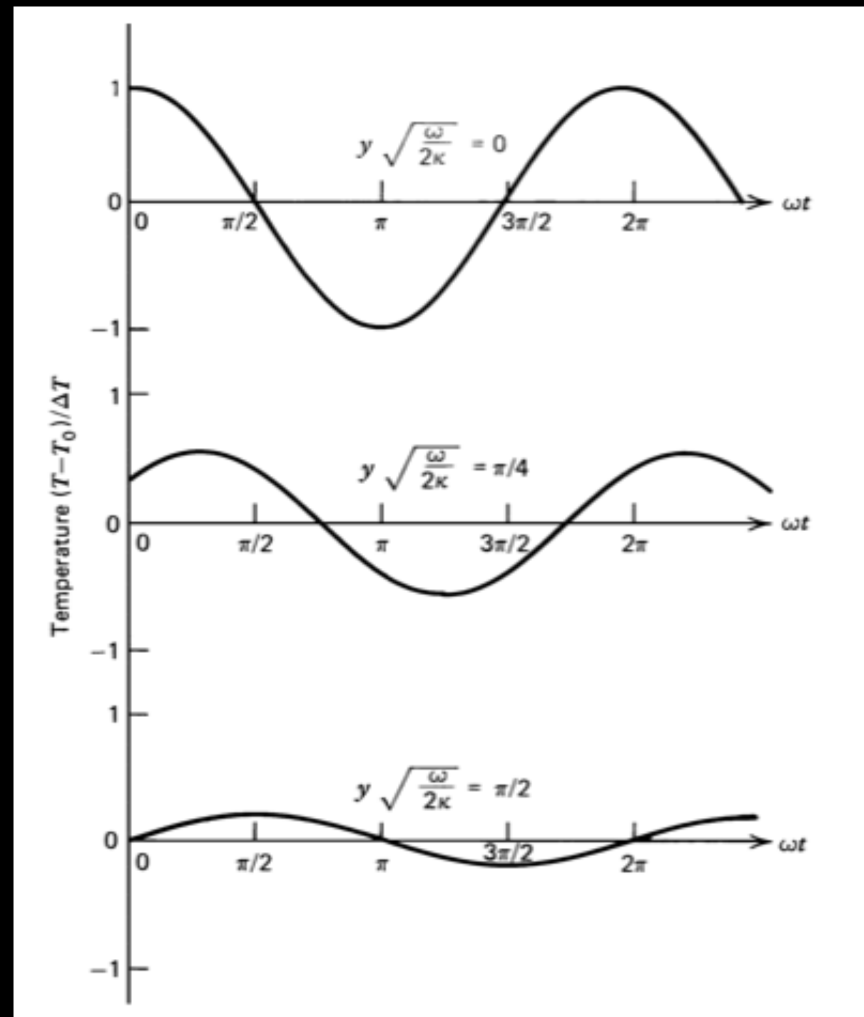
Definimos o “skin depth” como a profundidade onde a perturbação é 1/e do valor na superfície,

$$d_w=(2\kappa/\omega)^{1/2}$$

"Skin depth"

A equação mostra também que há um desfasamento entre a flutuação na superfície e a flutuação em pro-fundidade y de

$$\phi = y\,(\omega/2\kappa)^{1/2}$$



Aquecimento instantâneo

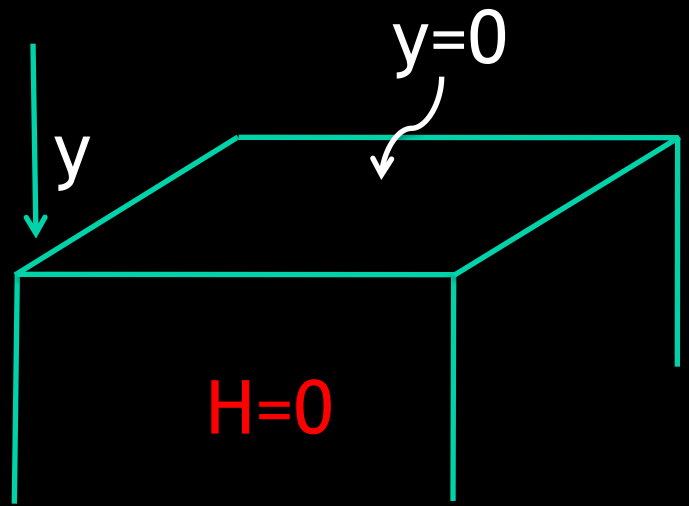
Vamos agora considerar a solução da equação 1D dependente do tempo para mudanças súbitas da temperatura.

A solução permite formular estimativas para questões como:

- A idade da Terra.
- O aquecimento das paredes de uma câmara magmâtica
- A estrutura térmica da litosfera oceânica.

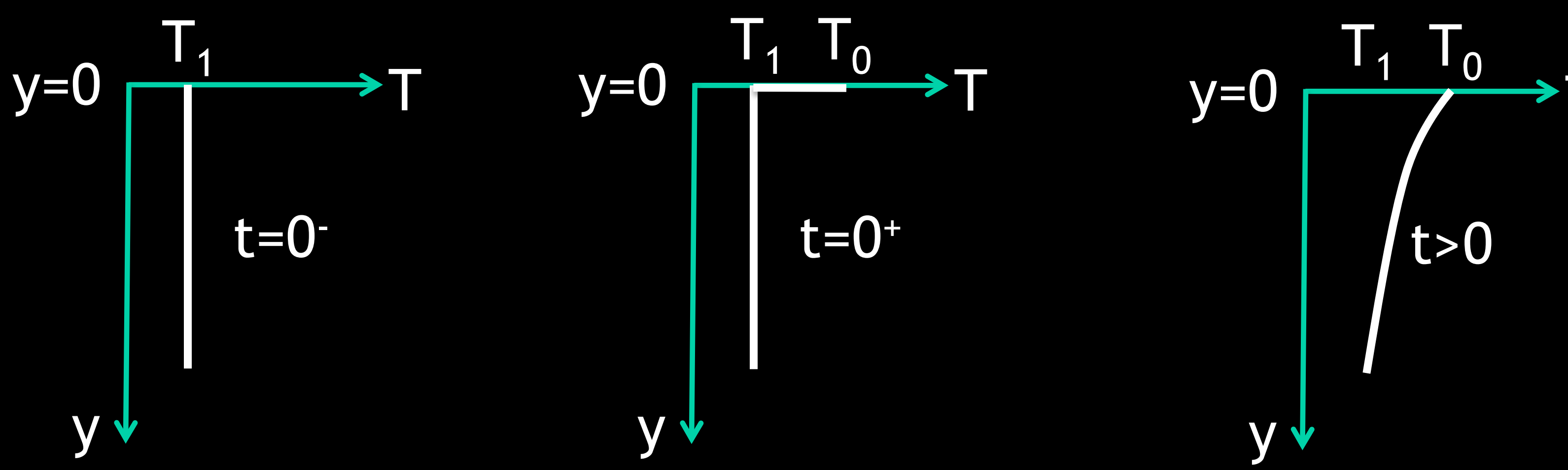
Aquecimento instantâneo

Vamos supor um semi-espaço



$$\partial T/\partial t = \kappa\, \partial^2 T/\partial y^2$$

com as condições de contorno



$T=T_1$ para $t=0^-$, $y>0$ $T=T_0$ para $y=0$, $t=0^+$ $T \to T_1$ para $y \to \infty$, $t>0$

Solução por "semelhança"

Primeiro definimos uma temperatura adimensional como

$$\theta = (T-T_1)/(T_0-T_1)$$

pelo que o problema é reformulado através da equação

$$\partial\theta/\partial t = \kappa\, \partial^2\theta/\partial y^2$$

com as condições de contorno

$$\theta(y,0)=0;\ \theta(0,t)=1;\ \theta(\infty,t)=0$$

Solução por “semelhança”

Em seguida, fazemos uma mudança de variáveis. Como a quantidade $(\kappa t)^{1/2}$ tem dimensiones de distância, definimos

$$\eta = y/2(\kappa t)^{1/2}$$

Assim,

$$\partial^2\theta/\partial y^2 = d^2\theta/d\eta^2\ (1/4\kappa t)$$

$$\partial\theta/\partial t = -d\theta/d\eta\ (\eta/2t)$$

e a equação resultante fica como,

$$-\eta(d\theta/d\eta) = \tfrac{1}{2}\,(d^2\theta/d\eta^2),\ \theta(\infty)=0,\ \theta(0)=1$$

Solução por "semelhança"

A primeira integração da equação é

$$d\theta/d\eta = c_1 \exp(-\eta^2)$$

e a segunda integração é

$$\theta = c_1 \int_0^{\eta} \exp(-\eta'^2)\, d\eta' + c_2$$

Usando $\theta(0)=1$,

$$1 = c_1 \int_0^{0} \exp(-\eta'^2)\, d\eta' + c_2 \;\; => \;\; c_2 = 1$$

Solução por "semelhança"

E usando $\theta(\infty)=0$,

$$0 = c_1 \int_0^{\infty} \exp(-\eta'^2)\, d\eta' + 1 = c_1 \sqrt{\pi}/2 + 1$$

temos que $c_1=-2/\sqrt{\pi}$. Assim,

$$\theta = 1 - 2/\sqrt{\pi} \int_0^{\eta} \exp(-\eta'^2)\, d\eta' = 1-\mathrm{erf}(\eta) = \mathrm{erfc}(\eta)$$

e, finalmente,

$$(T-T_1)/(T_0-T_1) = \mathrm{erfc}(y/2\sqrt{\kappa t})$$

Camada limite térmica

A região perto da superfície em que há um gradiente significativo de temperatura é chamada de camada limite (térmica).

A espessura da camada limite é definida como a distância onde $\theta=1/10$,

$$\eta_T = \mathrm{erfc}^{-1}\ (0.1) = 1.16$$

e

$$y_T = 2\eta_T(\kappa t)^{1/2} = 2.32\ (\kappa t)^{1/2}$$

Fluxo térmico

O fluxo de calor pode ser calculado a partir da lei de Fourier, como

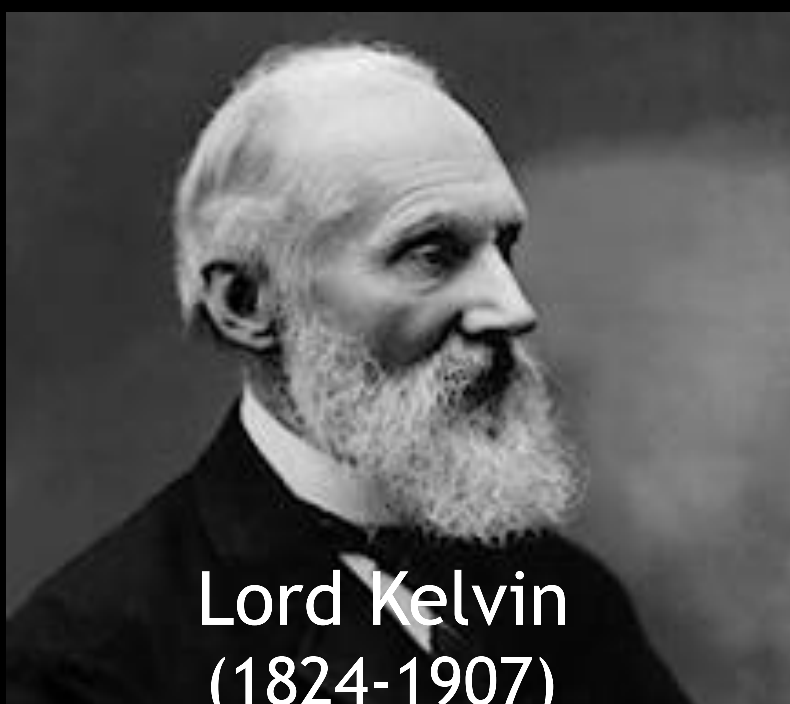
$$q_0 = -k(\partial T/\partial y)|_{y=0} = k(T_0 - T_1)/(\pi\kappa t)^{1/2}$$

O valor de q(t=0) é infinito, mas o calor transmitido para o semi-espaço para um tempo “t” é finito e igual a

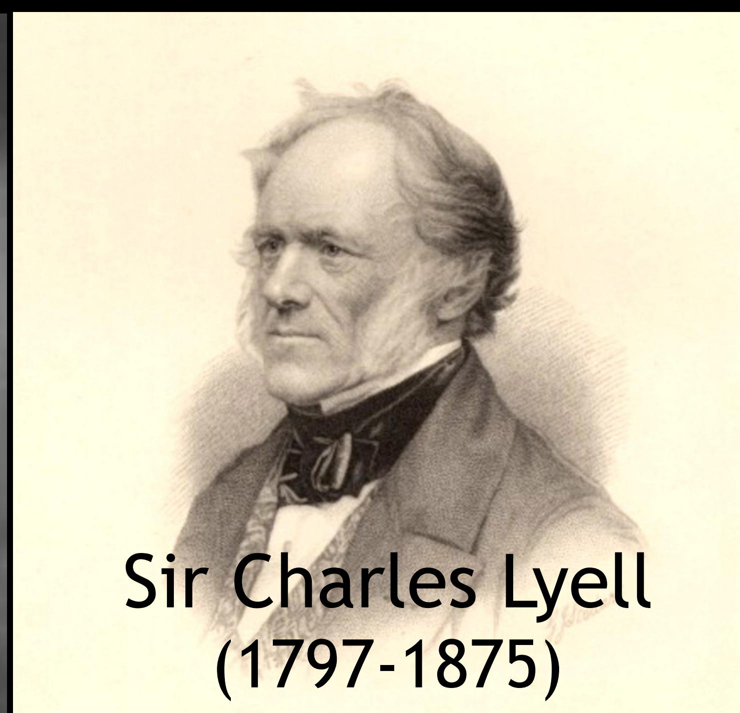
$$Q = \int_0^t q\, dt' = 2k(T_0 - T_1)/(\kappa\pi)^{1/2} \sqrt{t}$$

A idade da Terra

A meados do século XIX, Lord Kelvin usou essa teoria para estimar a idade da Terra.



Lord Kelvin
(1824-1907)



Sir Charles Lyell
(1797-1875)

A idade da Terra

Ele assumiu que a Terra formou-se a temperatura T_1 e que sua superfície foi mantida a temperatura T_0 ($T_0 < T_1$).

Usando a equação do fluxo de calor

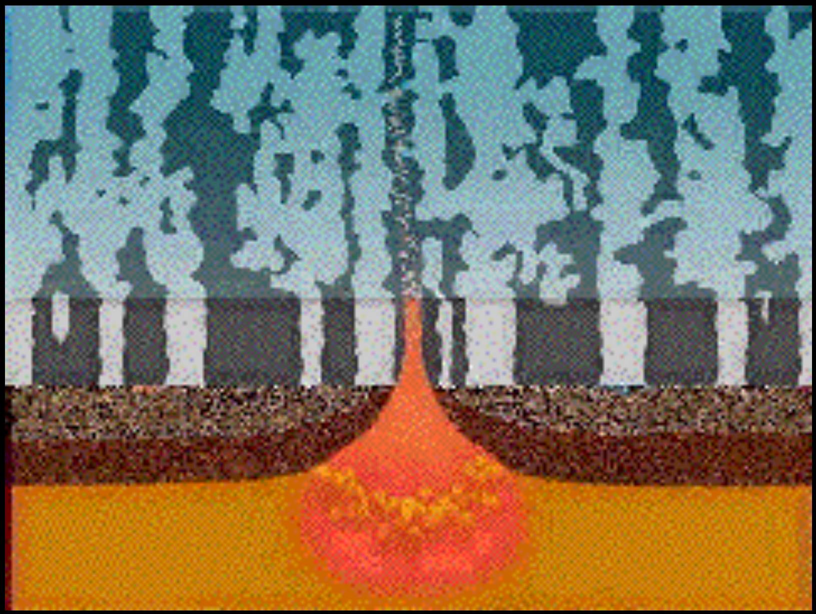
$$t = (T_1-T_0)^2/\pi\kappa(\partial T/\partial y)^2|_{y=0}$$

o gradiente na superfície é função de t.

Para $\partial T/\partial y|_{y=0}=25$ ºK/m, $T_1-T_0=2000$ ºK, e $\kappa=1$ mm²/s -> $t_0=65\ 10^6$ anos.

Modelos de Litosfera

O resfriamento instantâneo é um processo relevante para a criação de litosfera oceânica.

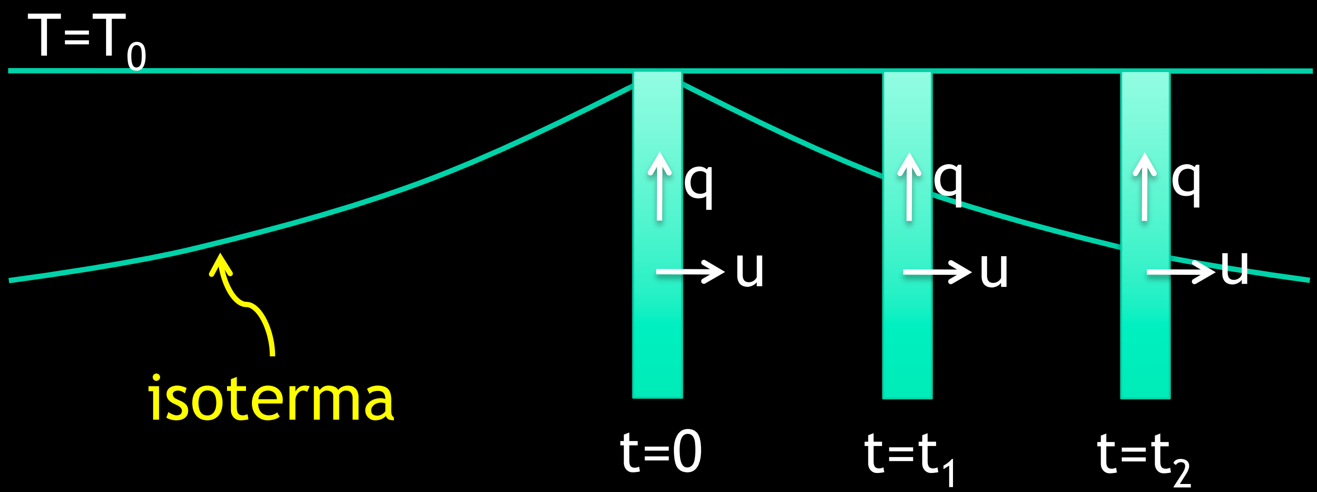


- O magma sobe para a superfície.
- O manto é resfriado pela água do oceano.
- A placa se afasta da borda.

Como a litosfera é rígida, consideramos a isoterma a 1600 K como sua base.

Modelo de semi-espaço

Para adaptar a solução do resfriamento instantâneo do semi-espaço à situação da litosfera oceânica, fazemos $t=x/u$:



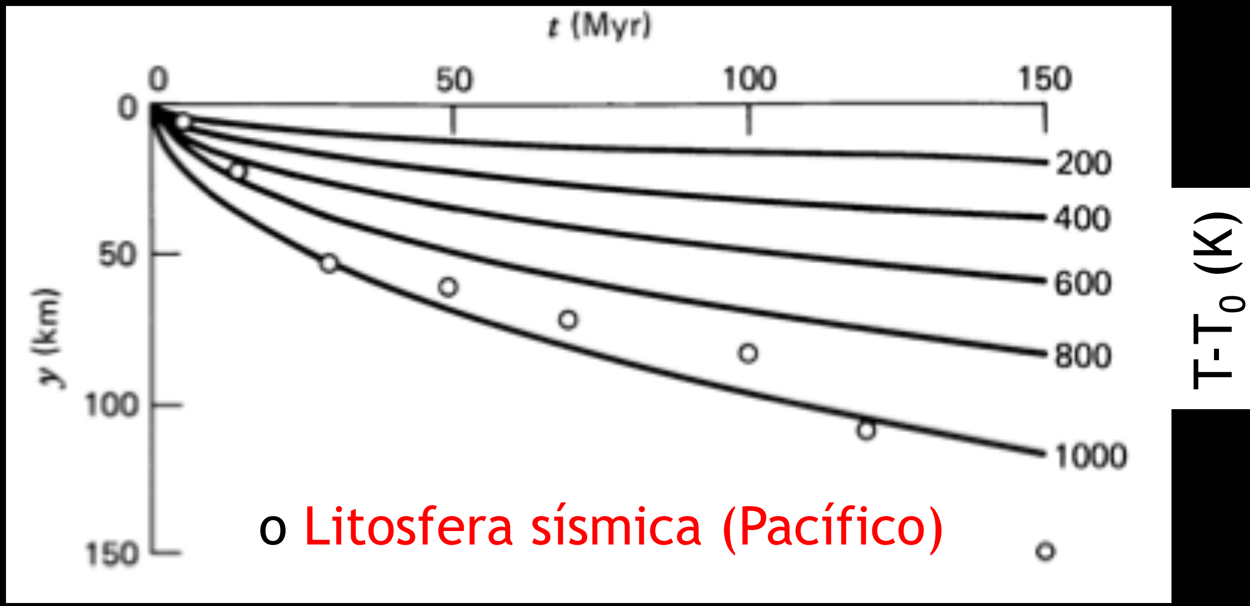
$$\frac{T-T_0}{T_1-T_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2(\kappa x/u)^{1/2}}\right)$$

Espessura da litosfera

A espessura da litosfera pode ser defini-da como a espessura da camada limite,

$$y_L = 2.32\ (\kappa x/u)^{1/2}$$

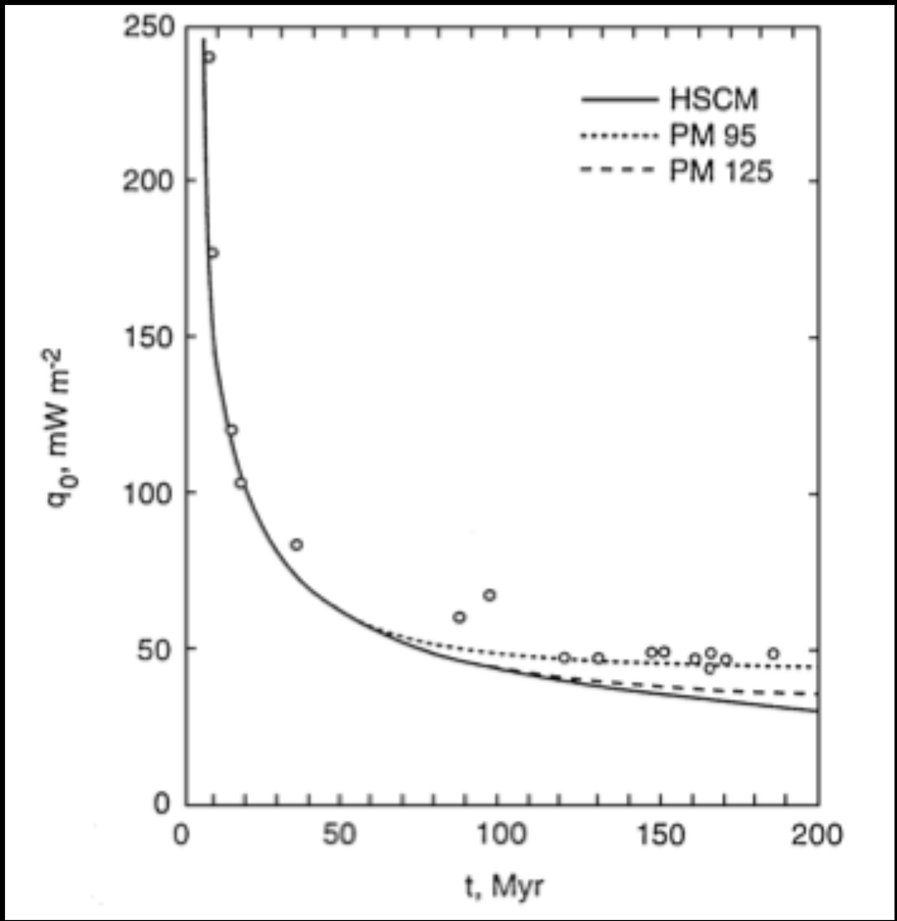
onde y_L é definida para $T\text{-}T_0/T_1\text{-}T_0=0.9$



Isotermas para $T_1\text{-}T_0=1300\ ^oK$ e $\kappa=1\ mm^2/s$

Fluxo térmico

O fluxo de calor na superfície oceânica, q_0, é dado por



$$q_0 = k\,(T_1 - T_0)\,(u/\pi\kappa x)^{1/2}$$

- Para k=3.3 W/mK
- Medições de q_0 em sedimentos grossos
- Bom acordo para idades jovens.

Fluxo térmico médio

O fluxo oceânico médio é dado por

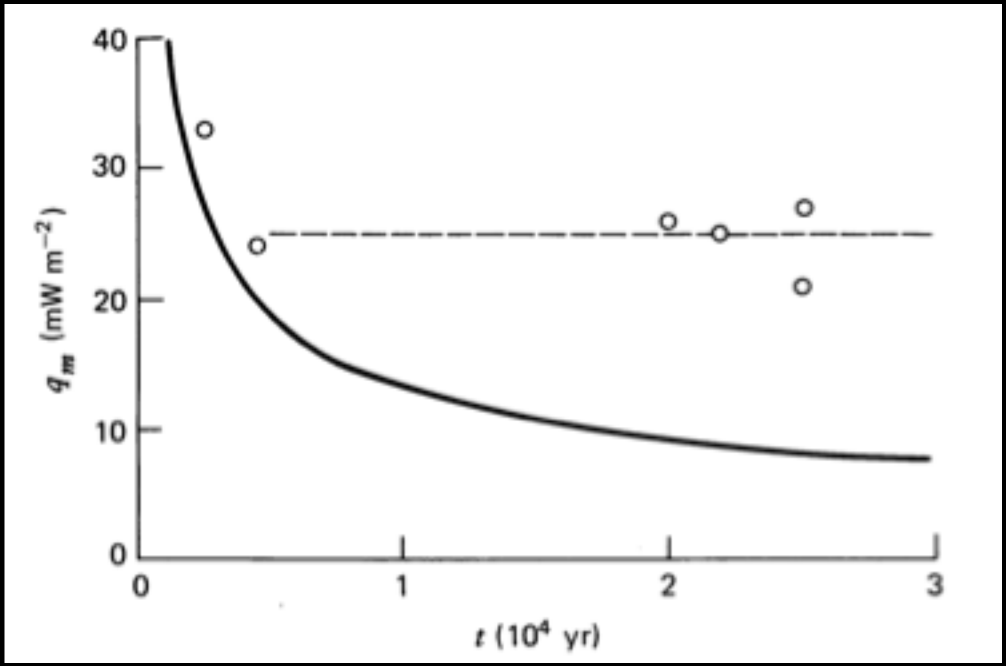
$$\bar{q}_0 = (1/\tau)\int_0^\tau q_0\, dt = 2k(T_1\text{-}T_0)/(\pi\kappa\tau)^{1/2}$$

Para τ=120.8 My -> $\bar{q}_0$ = 78.5 mW/m^2.

O valor é um pouco menor que o valor de 101 mW/m^2 observado, mas pode ser concluído que o fluxo oceânico é devido ao resfriamento da litosfera.

Esfriamento continental

O modelo do semi-espaço não funciona para resfriamento continental.

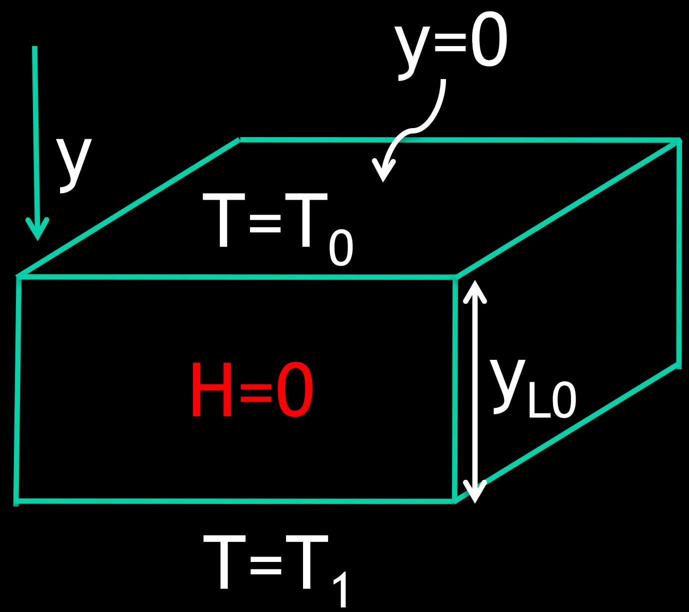


Isoterma para k=3.3 W/m°K, T_1-T_0=1300 °K e κ=1 mm²/s

- O valor q_m representa a contribuição do manto.
- Melhor acordo para q_m=25 mW/m²
- Esse foi o valor estimado para a contribuição do manto (28 mW/m²)

Modelo de placa

A litosfera oceânica não engrossa com a idade, mas atinge um equilíbrio térmico estacionário devido ao aquecimento na sua base.



$$\partial T/\partial t = \kappa\, \partial^2 T/\partial y^2$$

$T=T_1$ para $t=0$, $0 \le y \le y_{L0}$

$T=T_0$ para $y=0$, $t>0$

$T=T_1$ para $y=y_{L0}$, $t>0$

Modelo de placa

A solução para este problema é obtido através de séries infinitas,

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)\left[(y/y_{L0}) + (2/\pi)\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)\exp(-\kappa n^2\pi^2 t/y^2_{L0})\sin(n\pi y/y_{L0})\right]$$

Tem que perceber que

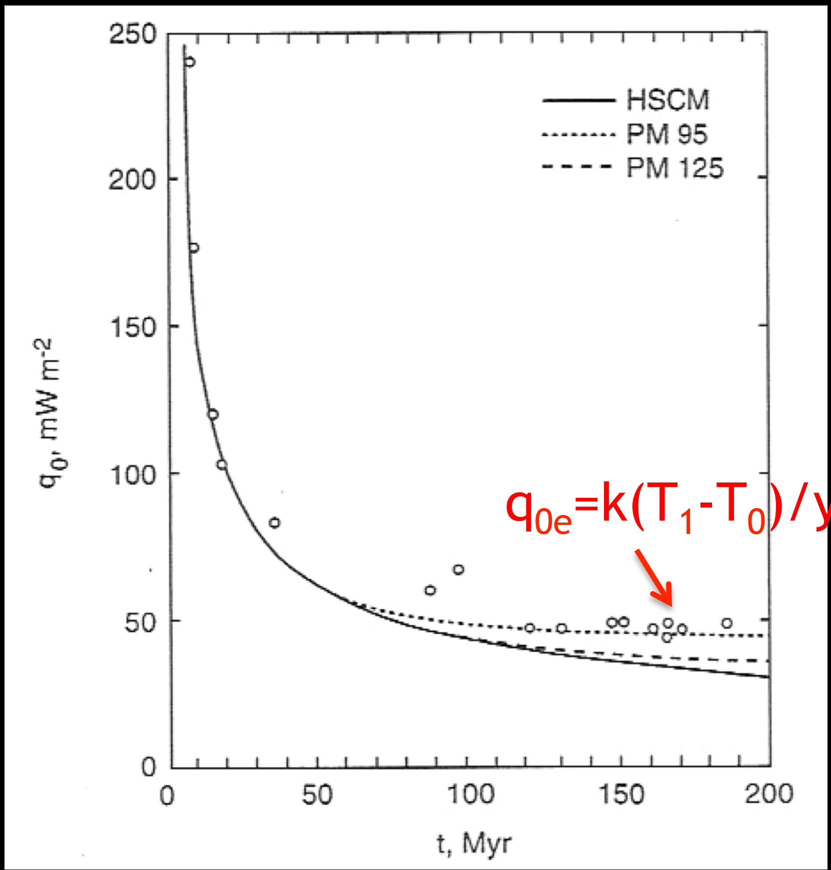
$$T = T_0 + (T_1 - T_0)\, y/y_{L0} \qquad \text{para } t \gg y^2_{L0}/\kappa$$

$$(T - T_1)/(T_0 - T_1) = \mathrm{erfc}(y/2\sqrt{\kappa t}) \qquad \text{para } t \ll y^2_{L0}/\kappa$$

Modelo de placa

Usando a lei de Fourier

$$q_0=k(T_1-T_0)/y_{L0}\,\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)\exp(-\kappa n^2\pi^2 t/y^2_{L0})\right]$$



$q_{0e}=k(T_1-T_0)/y_{L0}$

- O acordo é bom para y_{L0}=95 km
- Para t < 50 My a espessura da camada limite é menor que a da placa.
- Para 't' > 50 My, a $T=T_1$ na base da placa limita o crescimento da camada limite.