Aula 08
Elasticidade Linear

Plano da Aula

Introdução:

- Reologia das rochas, resistência.

Elasticidade Linear:

- Esforço uniaxial, módulos de elasticidade, deformação uniaxial, sedimentação e erosão.
- Esforço plano, esforços na litosfera, módulo de cisalhamento, deformação plana.

Esforço 3D isotrópico

Introdução

Os materiais elásticos são deformados quando uma força é aplicada e retor-nam à sua forma original quando a for-ça é removida.

Reologia das rochas

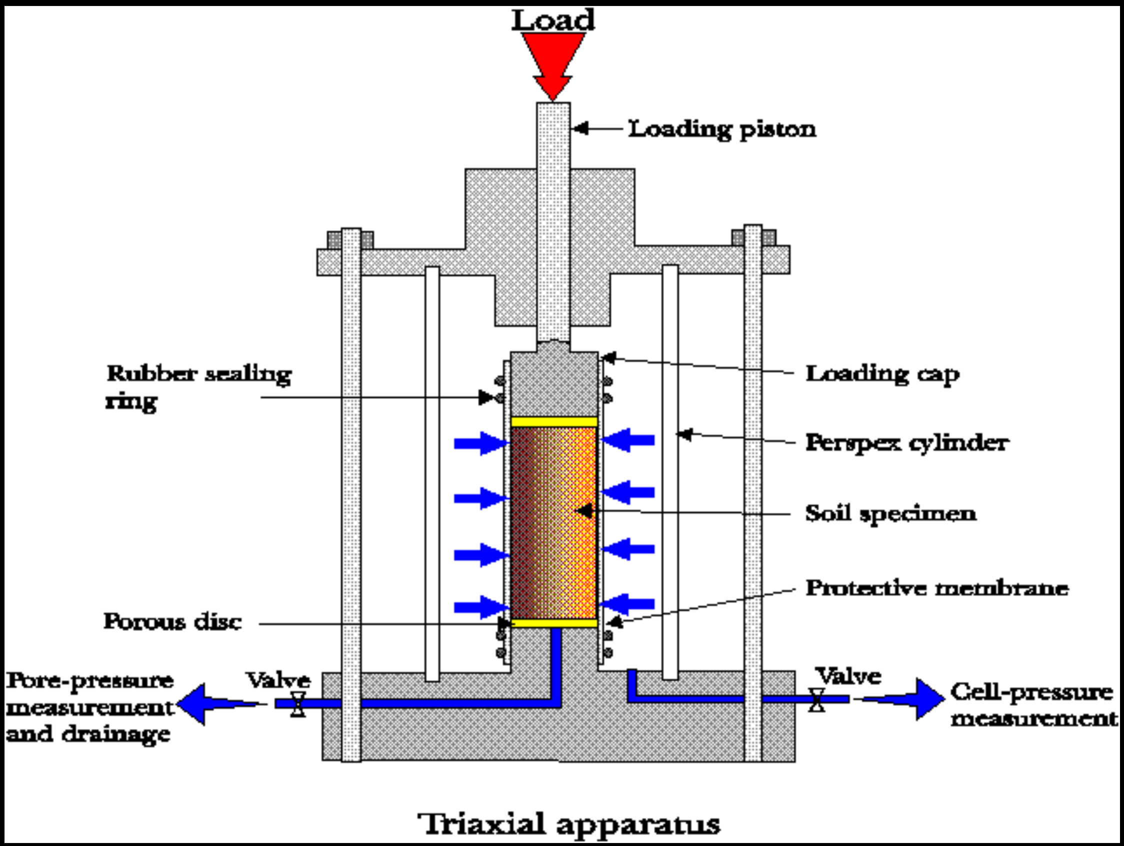
É definida pela resposta da rocha a um esforço aplicado. Depende de:

- Composição da rocha
- Pressão de poro
- Pressão confinante
- Taxa de deformação
- Temperatura

Os resultados podem ser diferentes para compressão, tensão ou cisalhamento.

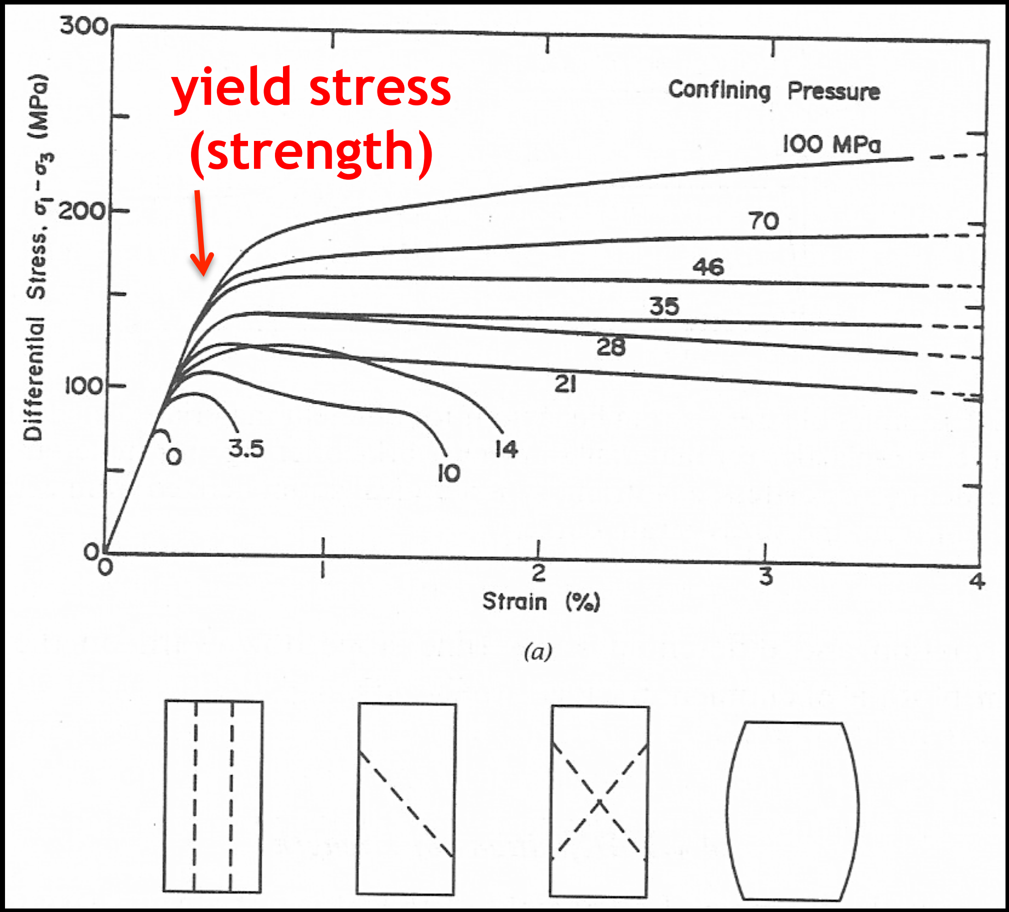
Testes de compressão tri-axial

As amostras são submetidas a um esforço vertical variável, enquanto confinadas com pressão uniforme lateral.

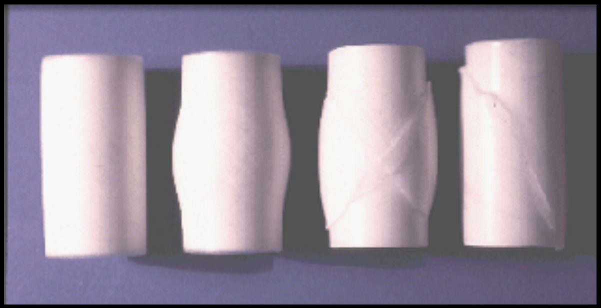


Reologia das rochas (sem poros)

Para amostras de rocha sem poros os resultados experimentais mostram que:

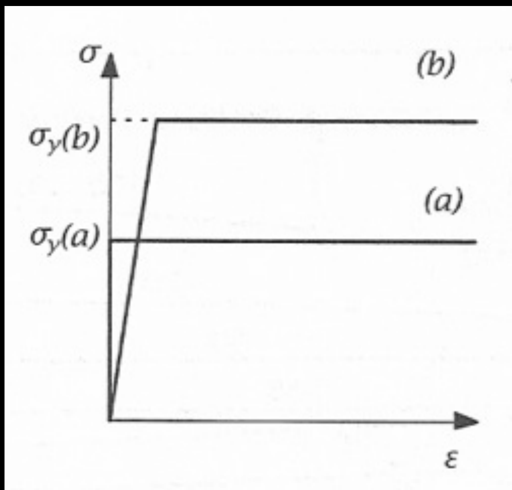


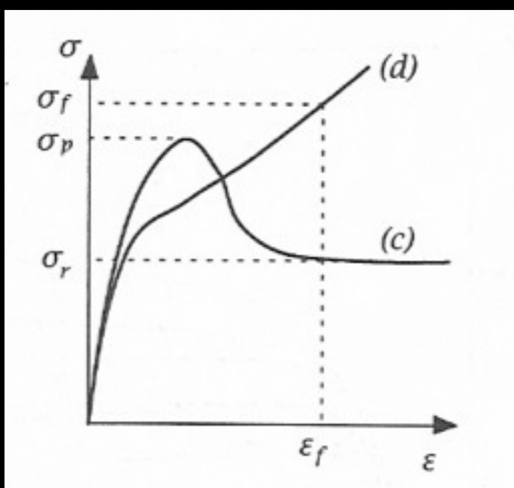
- Para esforços pequenos o regime é linear.
- Depois se torna frágil ou dúctil.



Esforço-deformação (sem poros)

Os resultados experientais mostram que há até 4 possibilidades:





(a) Plástico ideal – O material não é deformado, até σ_y(a). Mantendo esse esforço o material deforma continuamente.

(b) Elasto-plástico ideal – O material é elástico para $\sigma < \sigma_y$(b).

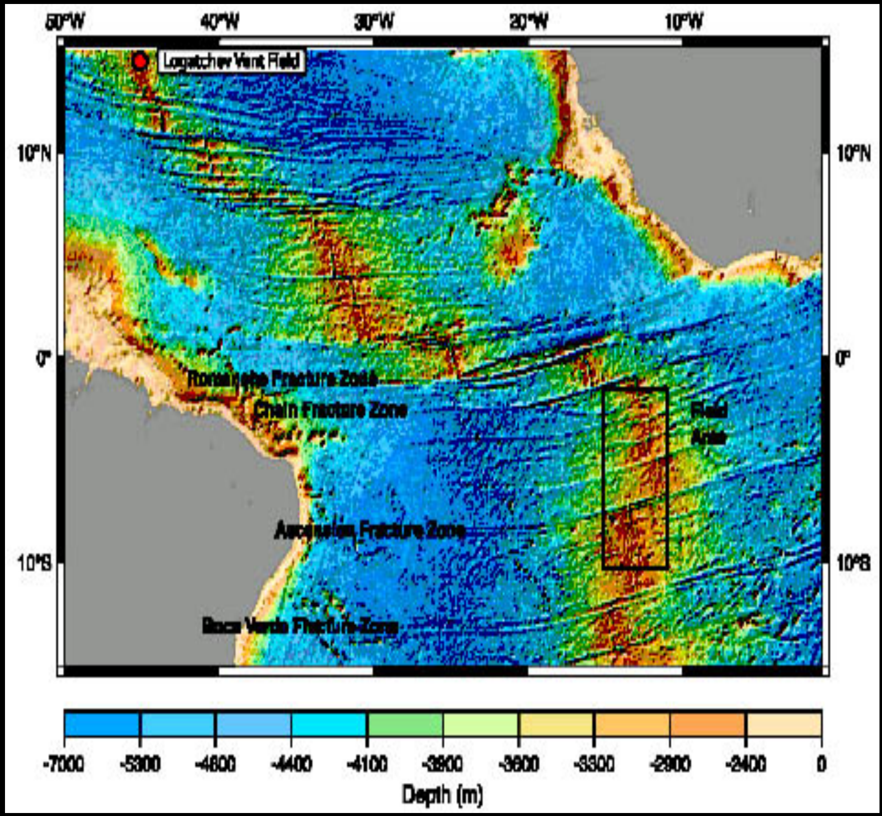
(c) Work softening – O material se torna mais fácil de deformar para $\sigma > \sigma_p$.

(d) Work hardening – O material se torna mais difícil de deformar.

Placas tectônicas e elasticidade

A tectônica de placas assume que as placas não são deformadas em escalas de tempo geológico:

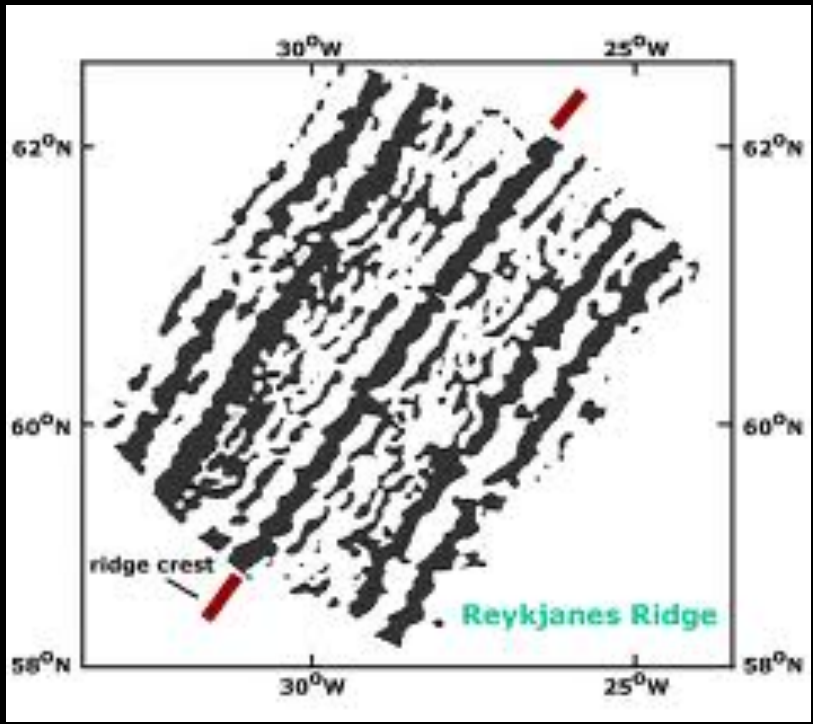
- Zonas de fractura permanecem lineares e equidistantes (~10^8 yr).
- As faixa magnéticas são lineares.
- A gravidade não removeu estruturas crustais antigas (10^9 anos).



Placas tectônicas e elasticidade

A tectônica de placas assume que as placas não são deformadas em escalas de tempo geológico:

- Zonas de fractura permanecem lineares e equidistantes (~10^8 yr).
- As faixa magnéticas são lineares.
- A gravidade não removeu estruturas crustais antigas (10^9 anos).



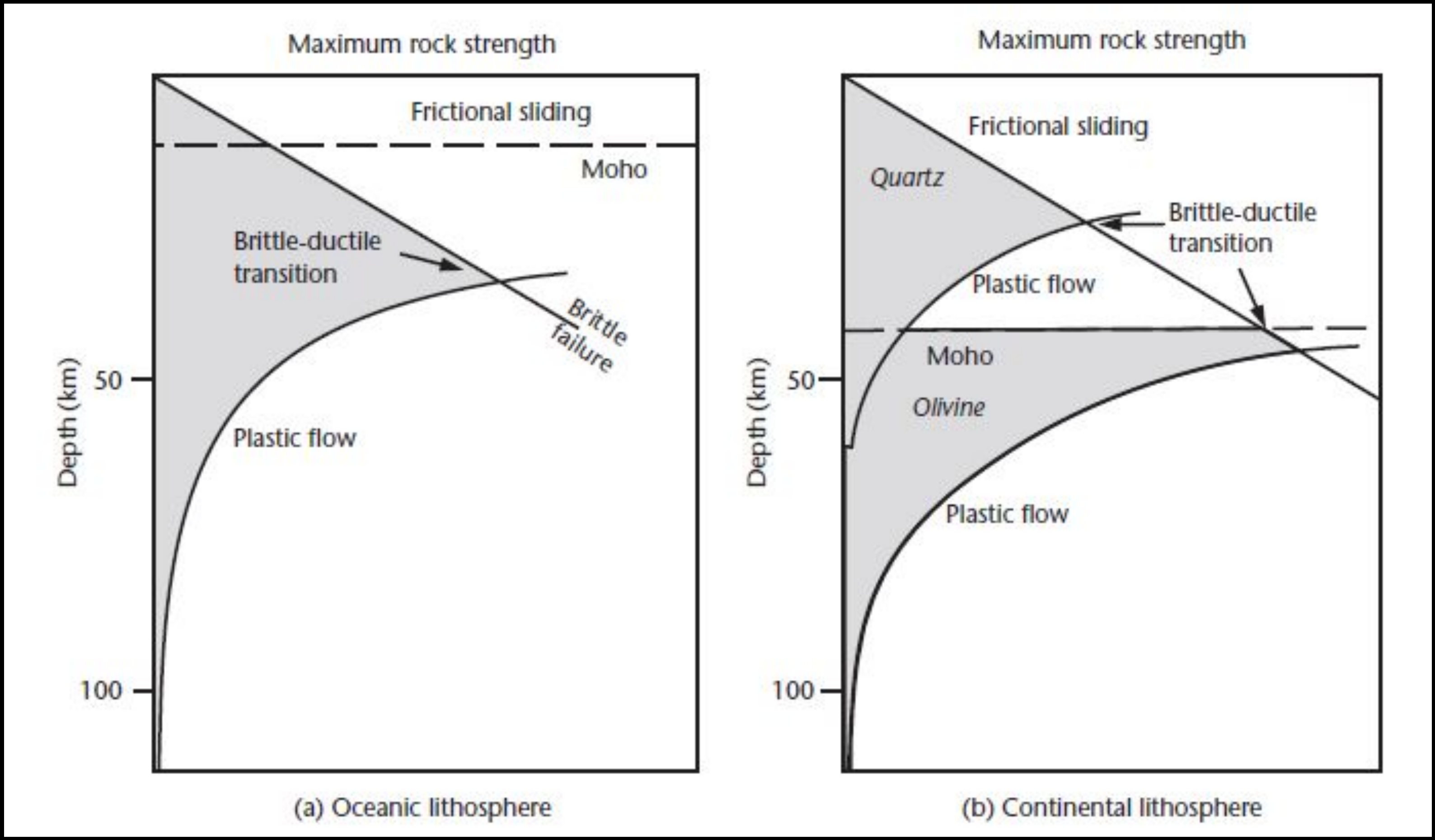
Placas tectônicas e elasticidade

A tectônica de placas assume que as placas não são deformadas em escalas de tempo geológico:

- Zonas de fractura permanecem lineares e equidistantes (~10^8 yr).
- As faixa magnéticas são lineares.
- A gravidade não removeu estruturas crustais antigas (10^9 anos).

Resistência (strength) da litosfera

A resistência da litosfera muda com a profundidade.



Elasticidade Linear

Um sólido elástico linear é aquele em que o esforço é proporcional à deformação.

Usando os esforços e deformações principais:

$$\sigma_1 = (\lambda+2G)\varepsilon_1 + \lambda\varepsilon_2 + \lambda\varepsilon_3$$

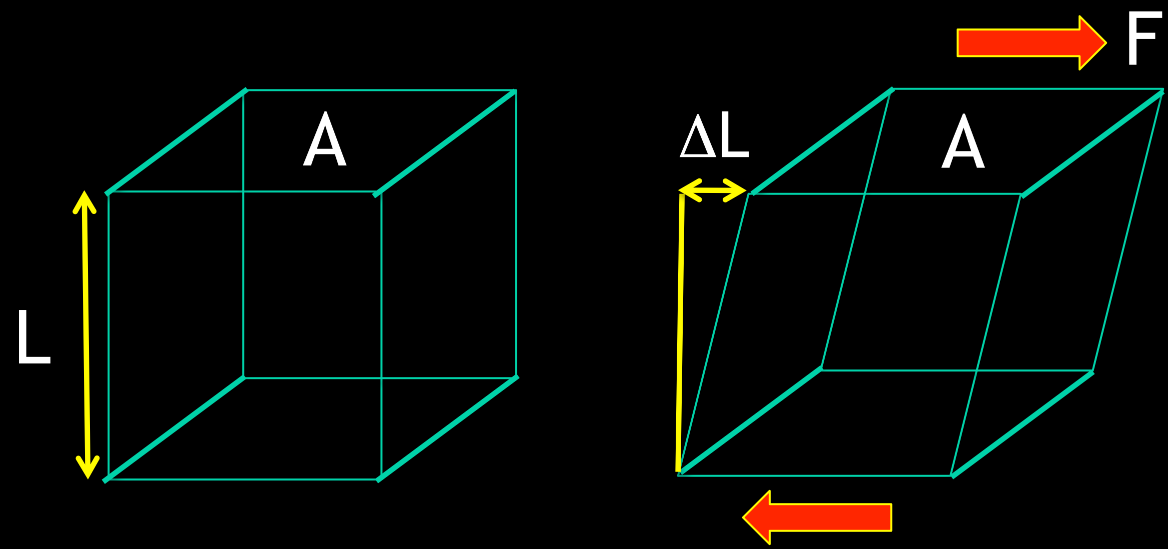
$$\sigma_2 = \lambda\varepsilon_1 + (\lambda+2G)\varepsilon_2 + \lambda\varepsilon_3$$

$$\sigma_3 = \lambda\varepsilon_1 + \lambda\varepsilon_2 + (\lambda+2G)\varepsilon_3$$

λ e G são os parâmetros de Lamé e o G é chamado também de módulo de rigidez.

Módulo de Rigidez (ou Cisalhamento)

É uma medida da resistência do material ao cisalhamento (alteração da forma e não do volume). Para fluidos G=0.



$$G = \frac{1}{2}\,\tau_{12}/\varepsilon_{12} = (F/A)/(\Delta L/L)$$

É dado pela metade do quociente entre o esforço de cisalhamento e a deformação.

Elasticidade Linear

A relação inversa é

$$\varepsilon_1 = (1/E)\sigma_1 - (\nu/E)\sigma_2 - (\nu/E)\sigma_3$$

$$\varepsilon_2 = -(\nu/E)\sigma_1 + (1/E)\sigma_2 - (\nu/E)\sigma_3$$

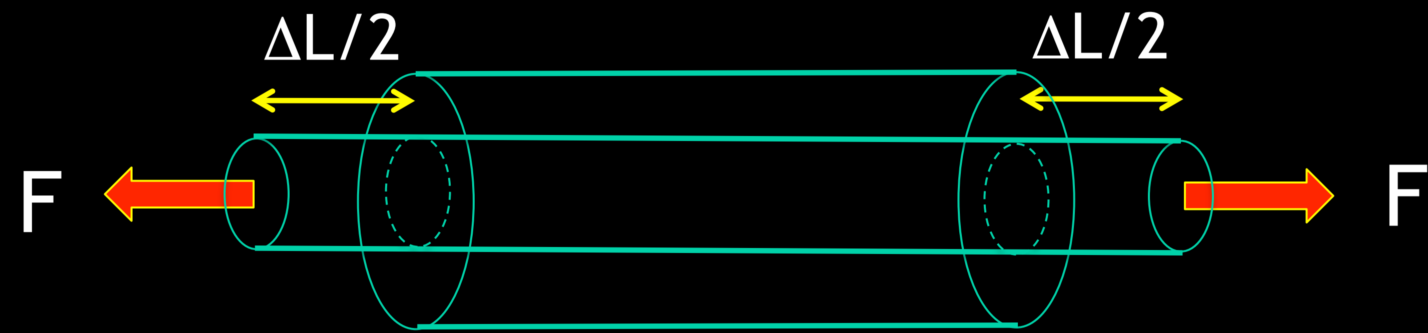
$$\varepsilon_3 = -(\nu/E)\sigma_1 - (\nu/E)\sigma_2 + (1/E)\sigma_3$$

onde ν e E são a razão de Poisson e o módulo de Young, respectivamente.

O comportamento elástico de um material pode ser caracterizado por ambos λ e G ou E e ν.

Módulo de Young

Descreve o comportamento de um cilindro de comprimento L, que é puxado em ambas as extremidades.

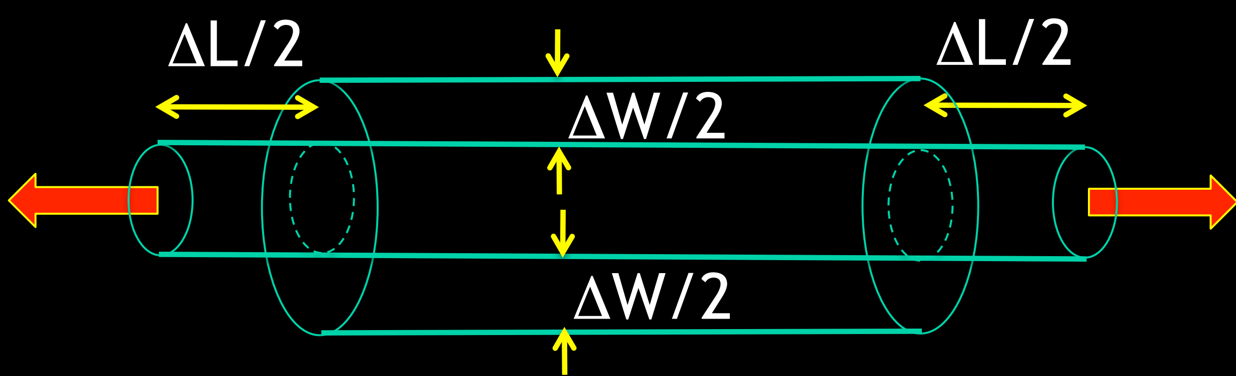


O seu valor é dado pela razão entre o esforço e a deformação extensionais.

$$\sigma_{11} = F/S = E\ \Delta L/L = E\ \varepsilon_{11}$$

Razão de Poisson

É a razão entre a contração lateral (mudança relativa de largura W) de um cilindro que está sendo puxado sobre as suas extremidades e sua extensão longitudinal L.



$$\nu = (\Delta W/W)/(\Delta L/L)$$

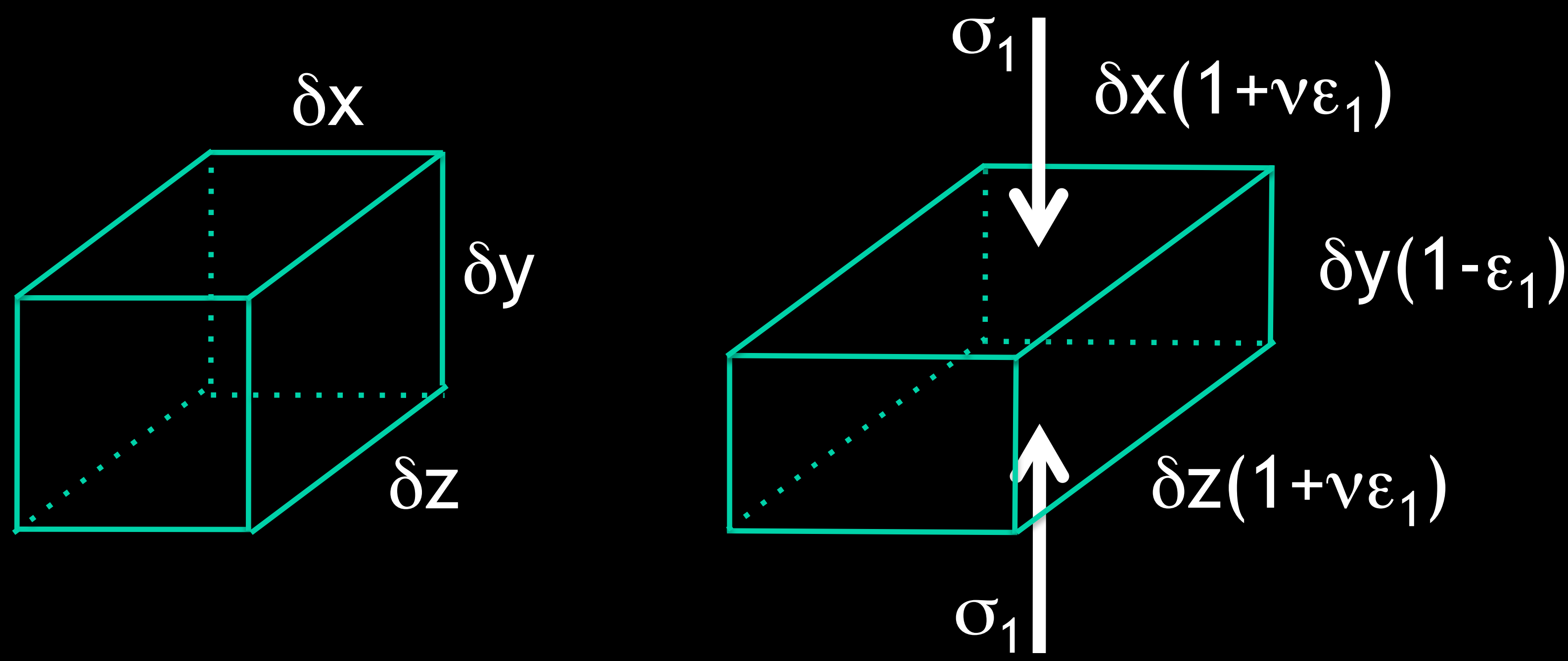
Propriedades elásticas das rochas

	Density kg m^{-3}	E 10^{11} Pa	G 10^{11} Pa	ν	k W m^{-1} K^{-1}	α 10^{-5} K^{-1}
Sedimentary						
Shale	2100–2700	0.1–0.7	0.1–0.3	0.1–0.2	1.2–3	
Sandstone	1900–2500	0.1–0.6	0.04–0.2	0.1–0.3	1.5–4.2	3
Limestone	1600–2700	0.5–0.8	0.2–0.3	0.15–0.3	2–3.4	2.4
Dolomite	2700–2850	0.5–0.9	0.2–6.4	0.1–0.4	3.2–5	
Metamorphic						
Gneiss	2600–2850	0.4–0.6	0.2–0.3	0.15–0.25	2.1–4.2	
Amphibole	2800–3150		0.5–1.0	0.4	2.1–3.8	
Marble	2670–2750	0.3–0.8	0.2–0.35	0.2–0.3	2.5–3	
Igneous						
Basalt	2950	0.6–0.8	0.25–0.35	0.2–0.25	1.3–2.9	
Granite	2650	0.4–0.7	0.2–0.3	0.2–0.25	2.4–3.8	2.4
Diabase	2900	0.8–1.1	0.3–0.45	0.25	2–4	
Gabbro	2950	0.6–1.0	0.2–0.35	0.15–0.2	1.9–4.0	1.6
Diorite	2800	0.6–0.8	0.3–0.35	0.25–0.3	2.8–3.6	
Pyroxenite	3250	1.0	0.4		4.1–5	
Anorthosite	2640–2920	0.83	0.35	0.25	1.7–2.1	
Granodiorite	2700	0.7	0.3	0.25	2.0–3.5	
Mantle						
Peridotite	3250				3–4.5	2.4
Dunite	3000–3700	1.4–1.6	0.6–0.7		3.7–4.6	
Miscellaneous						
Ice	917		0.092	0.31–0.36	2.2	5

Esforço uniaxial

Caso em que apenas um dos esforços principais é diferente de zero.

Para $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ➡ $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1$



Esforço uniaxial

E também $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\lambda/2(\lambda+G)\ \varepsilon_1$. Comparando

$$\nu=\lambda/2(\lambda+G)$$

Substituindo em $\sigma_1=(\lambda+2G)\varepsilon_1+\lambda\varepsilon_2+\lambda\varepsilon_3$

$$\sigma_1=G(3\lambda+2G)/(\lambda+G)\ \varepsilon_1$$

de onde

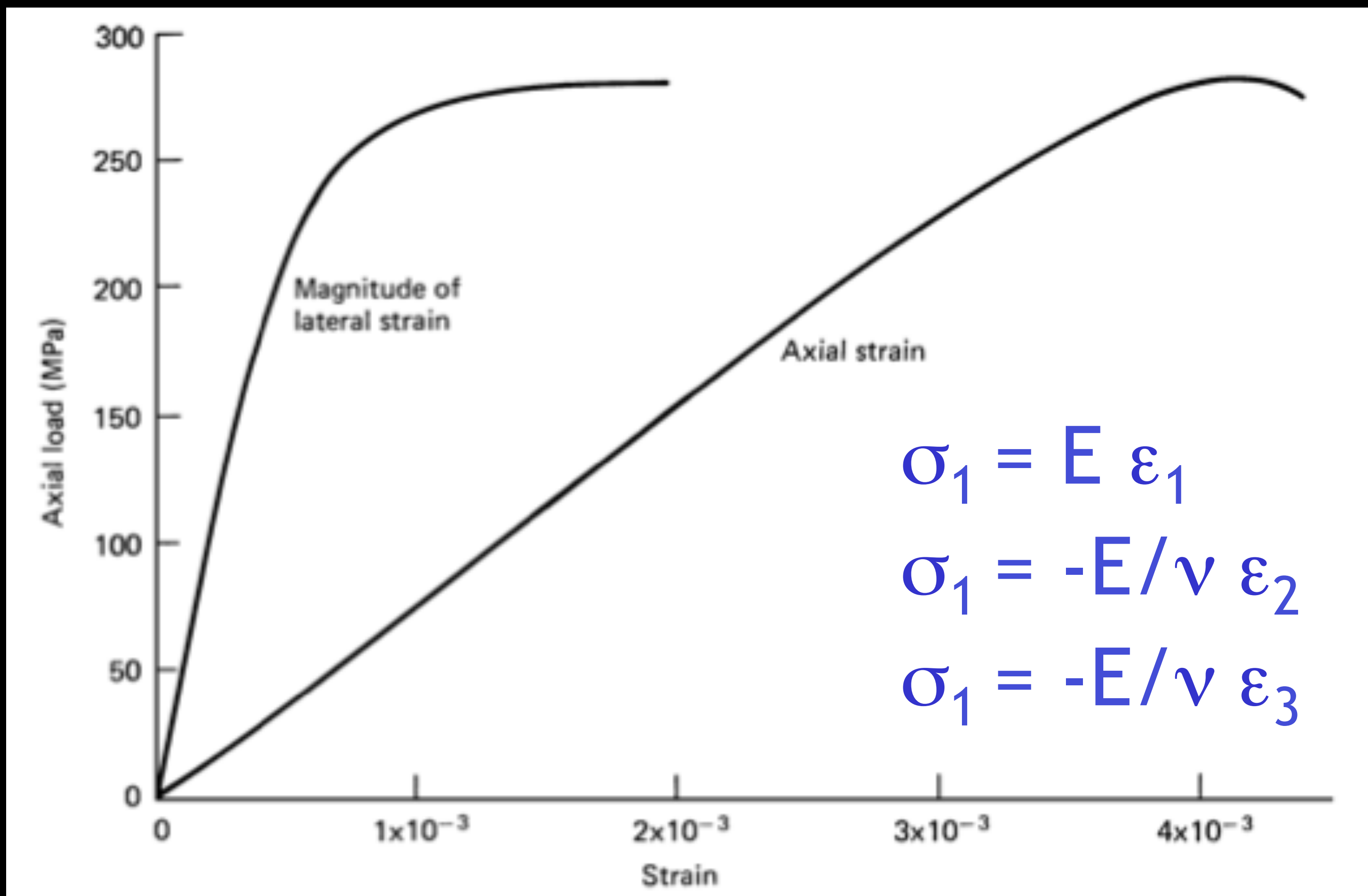
$$E = G(3\lambda+2G)/(\lambda+G)$$

E invertindo o sistema de equações

$$G=E/2(1+\nu);\ \lambda=E\nu/(1+\nu)(1-2\nu)$$

Medição das constantes elásticas

Testes de compressão uniaxial são um dos métodos mais simples.



$$\sigma_1 = E\,\varepsilon_1$$

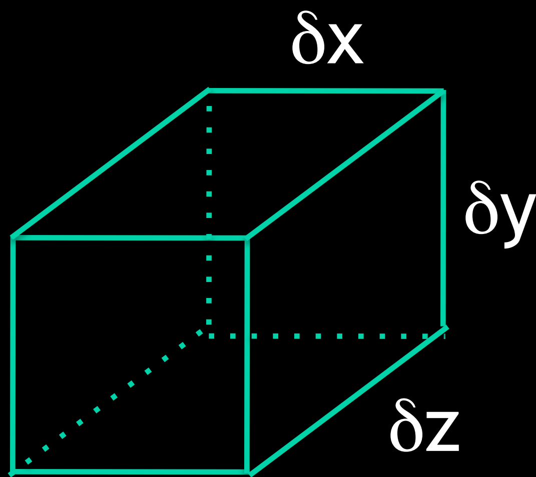
$$\sigma_1 = -E/\nu\,\varepsilon_2$$

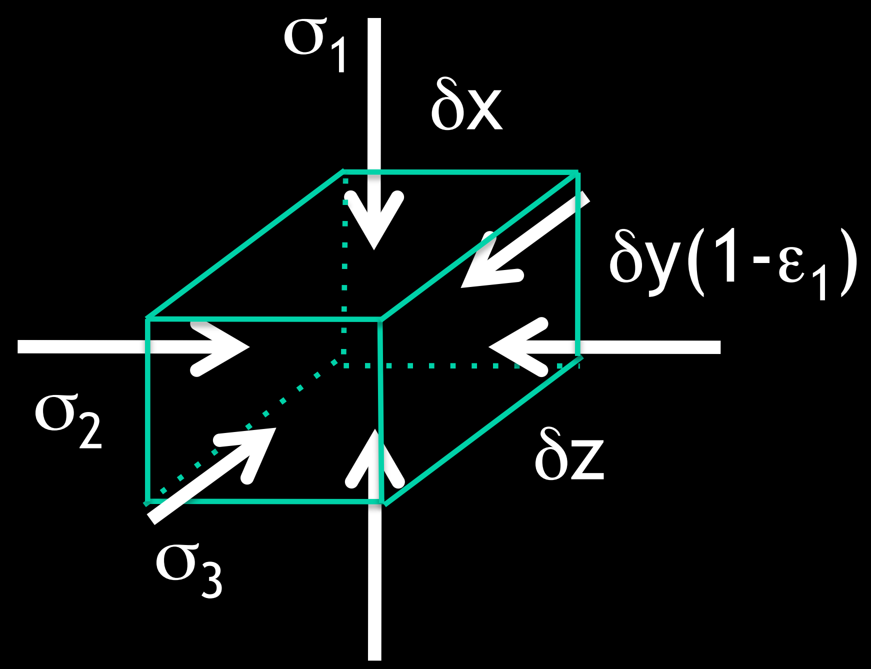
$$\sigma_1 = -E/\nu\,\varepsilon_3$$

Deformação uniaxial

Caso em que apenas uma das deforma-ções principais é diferente de zero.

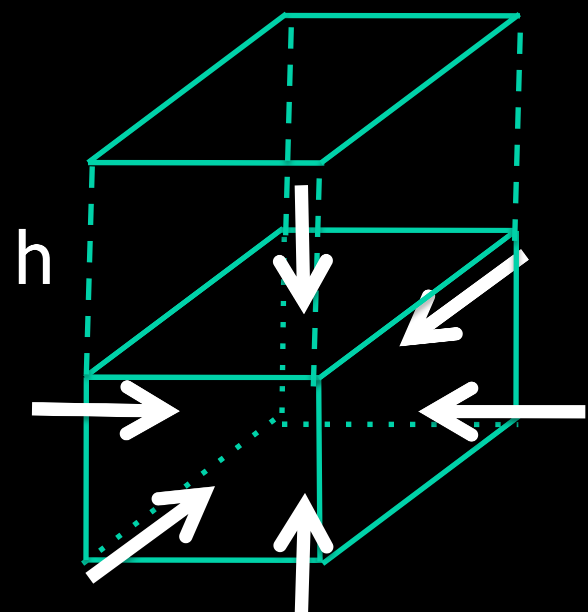
Para $\varepsilon_1 \neq 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0 \Rightarrow \sigma_2 = \sigma_3 = \nu/(1-\nu)\sigma_1$





Deformação uniaxial e sedimentação

Vamos calcular alterações no esforço devidas à sedimentação



$\sigma_1 = \rho g h$

$\sigma_2 = \sigma_3 = \nu/(1-\nu)\rho g h$

$$p = 1/3(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = \frac{1+\nu}{3(1-\nu)}\rho g h$$

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - p = \frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)}\rho g h$$

$$\sigma'_2 = \sigma'_3 = \frac{-(1-2\nu)}{3(1-\nu)}\rho g h$$

Para $\nu=0.25$, $\rho=3 g/cm^3$, $h=2km$

$\sigma_2' = \sigma_3' = -13.3$ MPa

Deformação uniaxial e erosão

Partimos do estado litostático ($\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\rho gh$). A alteração no esforço vertical após da erosão é:

$$\Delta\sigma_1=-\rho gh \;\Rightarrow\; \sigma_1^*=0$$

Então,

$$\Delta\sigma_2=\Delta\sigma_3=\frac{\nu}{1-\nu}\,\Delta\sigma_1$$

e os esforços após a erosão,

$$\sigma^*_2=\sigma^*_3=\sigma_2+\Delta\sigma_2=\rho gh-\frac{\nu}{1-\nu}\rho gh=\frac{1-2\nu}{1-\nu}\,\rho gh$$

Para $\nu=0.25$, $\rho=3\text{g/cm}^3$, $h=5\text{km}$ $\sigma_2^*=\sigma_3^*=$ 100 MPa

Esforço plano

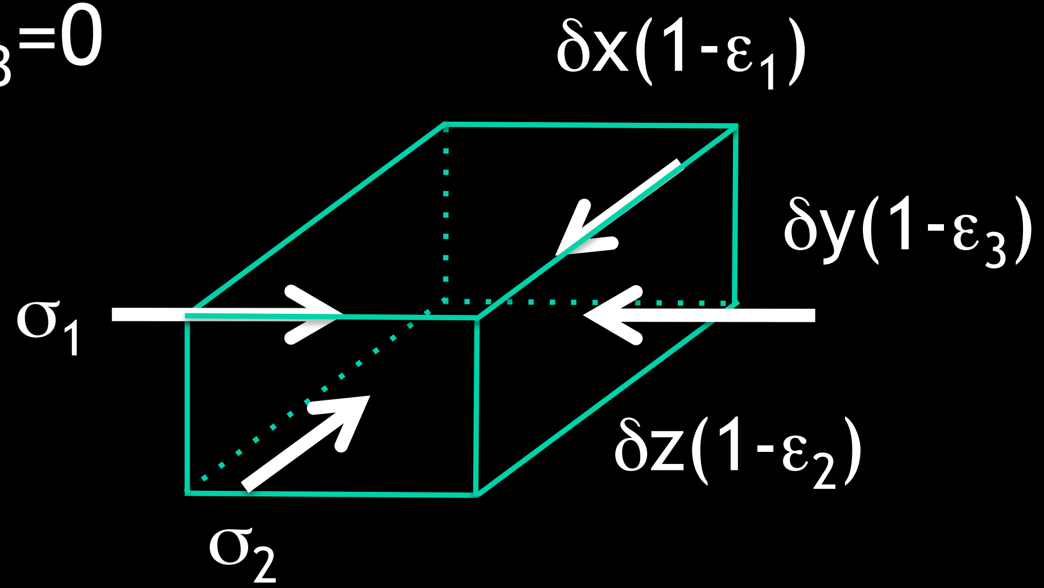
Caso em que apenas um dos esforços principais é igual a zero (σ_3=0).

Para $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_3 = 0$

$\varepsilon_1 = (\sigma_1 - \nu\sigma_2)/E$

$\varepsilon_2 = (\sigma_2 - \nu\sigma_1)/E$

$\varepsilon_3 = -\nu(\sigma_1 + \sigma_2)/E$



Esforços na litosfera

Vamos supor que, além dos esforços litostáticos, há esforços tectônicos horizontais na litosfera ($\Delta\sigma_1=\Delta\sigma_2$). Assim,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \Delta\sigma_1(1-\nu)/E; \quad \varepsilon_3 = -\Delta\sigma_1\, 2\nu/E$$

A litosfera vai engrossar e a área vai diminuir, mas a massa é conservada.

$$\delta(\rho A h_L) = 0$$

Vamos calcular a mudança do esforço vertical normal na base da litosfera ($\Delta\sigma_3$)

Esforços na litosfera

$$\Delta\sigma_3 = \delta(\rho g h_L) = \delta(\rho g h_L A/A) = (1/A)\,\cancelto{0}{\delta(\rho g h_L A)} +$$
$$\rho g h_L A\,\delta(1/A) = \rho g h_L\,(-\delta A/A)$$

Como

$$-\delta A/A = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2(1-\nu)/E\,\Delta\sigma_1$$

Temos que

$$\Delta\sigma_3 = 2(1-\nu)/E\,\rho g h_L\,\Delta\sigma_1$$

A mudança no esforço vertical é pequena em comparação ao horizontal.

Para ν=0.25, ρ=3.0 g/cm^3, E= 100 Mpa, h_L=100 km

$\Delta\sigma_3/\Delta\sigma_1$= 0.045

Deformação plana

Caso em que apenas uma das deformações principais é igual a zero ($\varepsilon_3=0$).

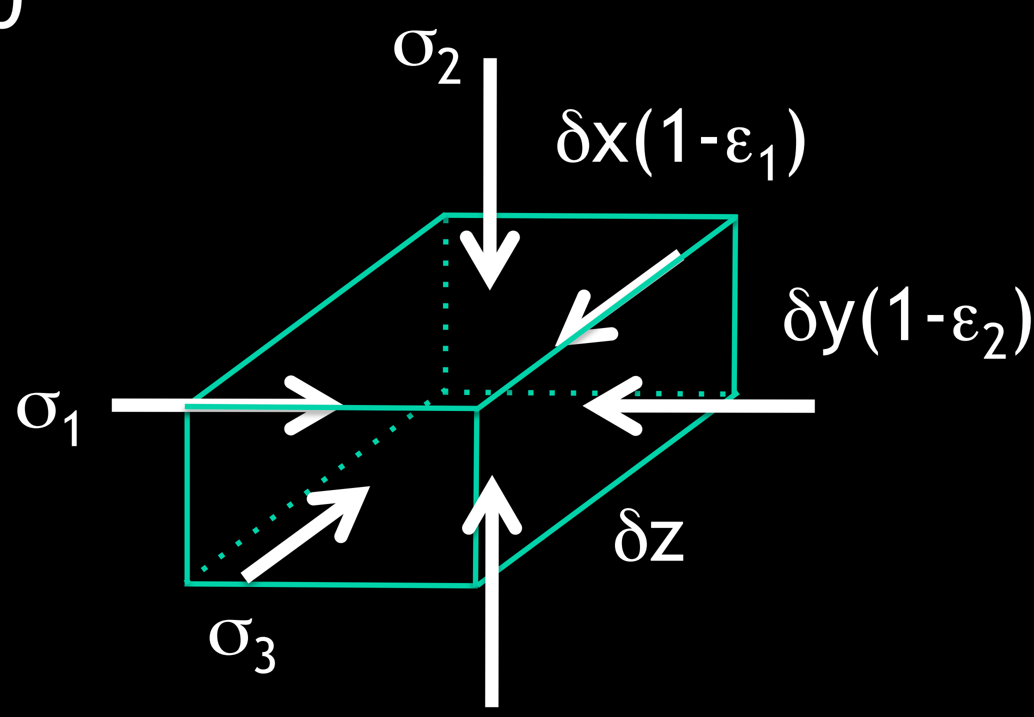
Para $\varepsilon_1 \neq 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$, $\varepsilon_3=0$

$$\sigma_1 = (\lambda+2G)\varepsilon_1+\lambda\varepsilon_2$$

$$\sigma_2 = \lambda\varepsilon_1+(\lambda+2G)\varepsilon_2$$

$$\sigma_3 = \lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$

$$\varepsilon_1 = \nu(\sigma_1+\sigma_2)$$



Esforço 3D isotrópico

Caso em que todos os esforços principais são iguais.

$$\Delta\sigma_1=\Delta\sigma_2=\Delta\sigma_3=\delta p \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\Delta/3$$

A pressão litostática é

$$\delta p = (3\lambda+2G)(\Delta/3) = K\Delta = (1/\beta)\Delta$$

onde K é o módulo de incompressibili-dade β é a compressibilidade.

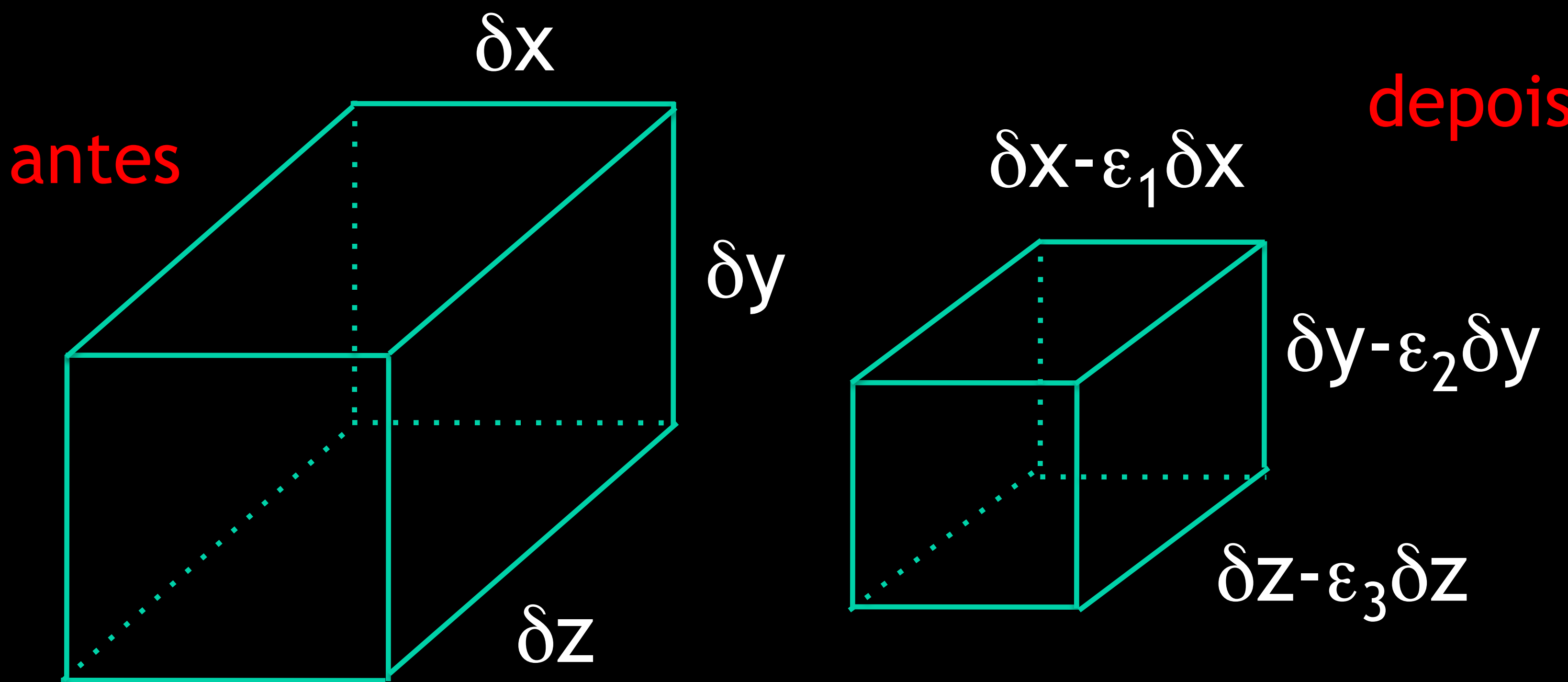
Assim,

$$\beta = 3/(3\lambda+2G)$$

Dilatação

A dilatação é definida como

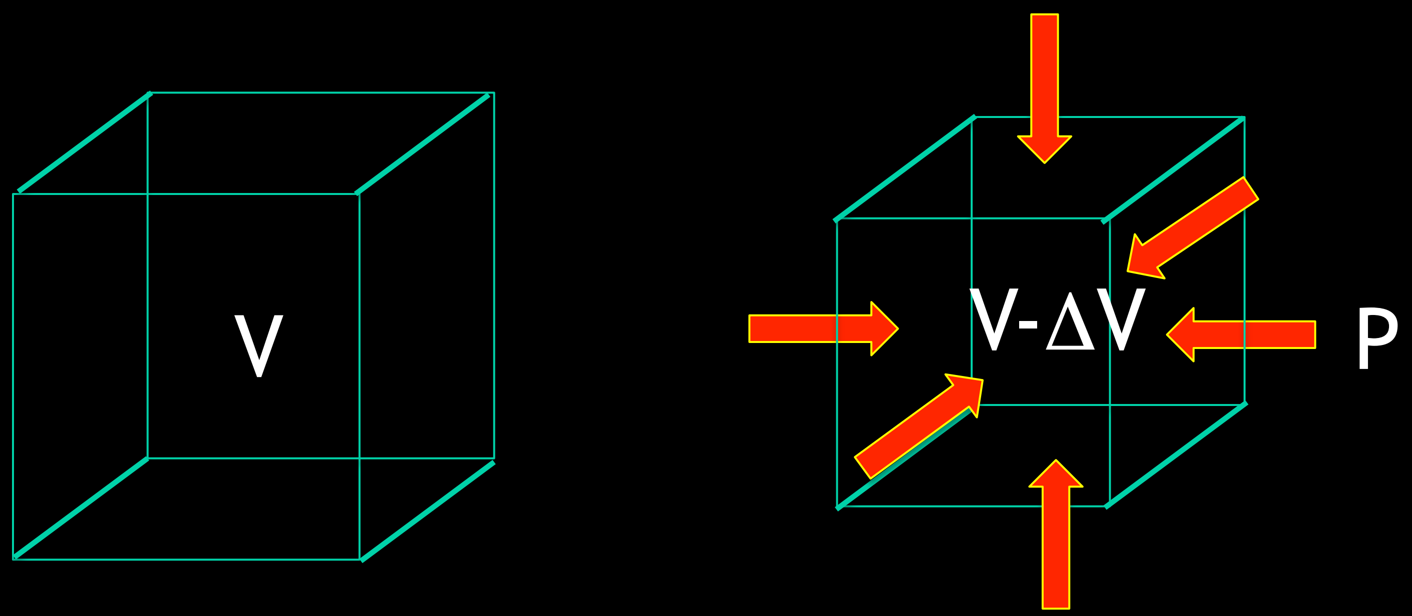
$$\Delta = -\delta V / V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$



Para $\Delta=0$ o material é incompressível.

Módulo de Incompressibilidade (*Bulk Modulus*)

E definido como a razão entre a mudança da pressão hidrostática (P) e a variação relativa do volume.



$$K = \Delta P / (\Delta V / V)$$

Esforço 3D isotrópico

Como a massa é conservada

$$\delta(\rho V) = 0 \quad \rho\delta V + V\delta\rho = 0$$

assim

$$\delta\rho/\rho = -\delta V/V = \Delta$$

combinando com a equação anterior

$$\delta\rho = \rho\beta\delta p$$

A equação é usada para determinar o aumento da densidade com a profundidade na Terra ($\delta p=-\rho g\delta r$)