
Aula 12
Condução do Calor
(caso estacionário)

Plano da Aula

Introdução:

- Condução estacionária.

Condução 1D estacionária:

- Equações 1D, geoterma do manto, geotermas continentais.

Condução 2D estacionária:

- Equações 2D, temperaturas superficiais periódicas e topografia.

Introdução

A transferência de calor na litosfera é através do mecanismo de condução.

Usando a lei de Fourier

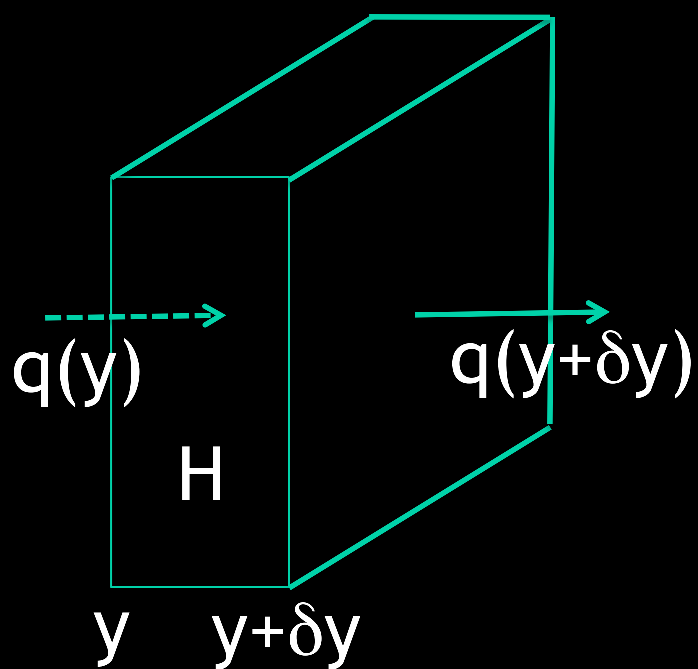
$$q = - k \, dT/dy$$

e a conservação da energia vamos poder achar a variação da temperatura com a profundidade.

Vamos começar com o caso estacionário ⇔ quando "T" não muda com "t"

Condução 1D estacionária

Consideramos a situação em que o calor é transferido em uma direção única e sem variações temporais.



$$q(y+\delta y) = q(y) + \delta y\ (dq/dy)$$

$$q(y+\delta y) - q(y) = \delta y\ (dq/dy) =$$

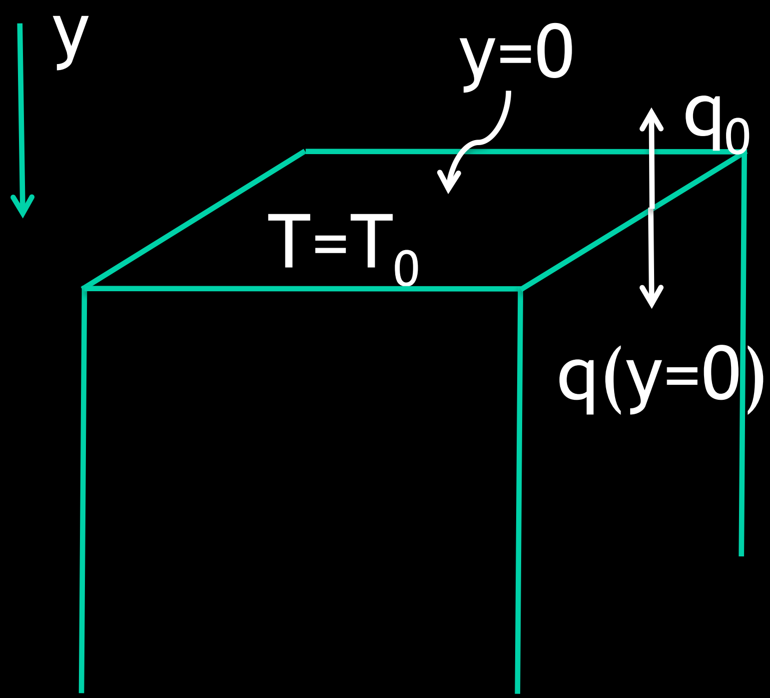
$$= \delta y\ [-k\ (d^2T/dy^2)]$$

$$q(y+\delta y) - q(y) = \delta y\ \rho H$$

$$0 = k\ d^2T/dy^2 + \rho H$$

Solução para um semi-espaço

Supomos que o meio é um semi-espaço com a superfície em y = 0. As condições de contorno são: $T(0)=T_0$ e $q(0)=-q_0$.



$$\rho Hy=-k(dT/dy)+c_1=q+c_1$$

onde $c_1=q_0$

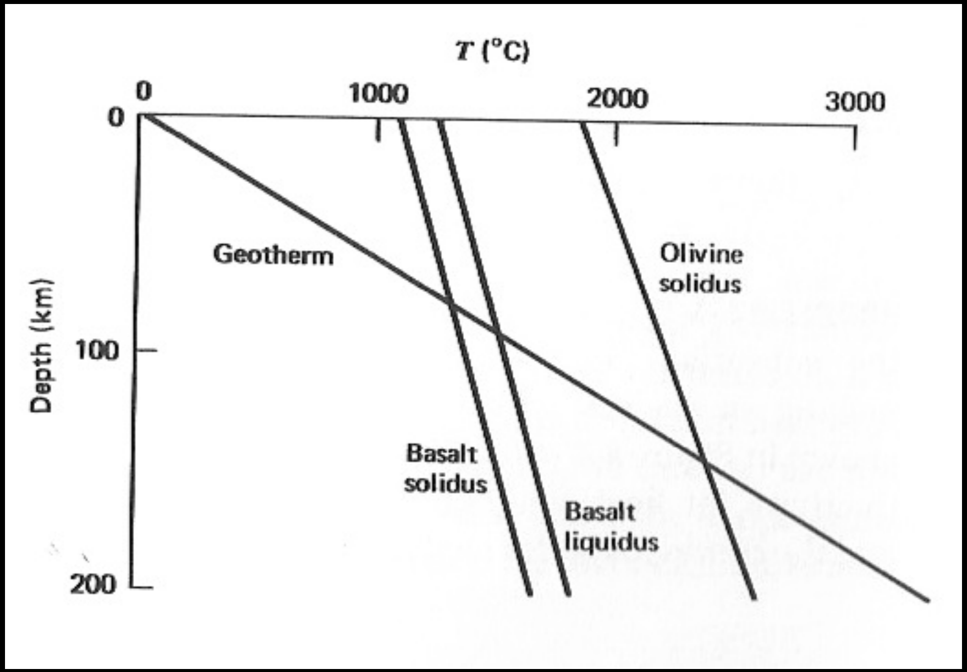
$$\tfrac{1}{2}\rho Hy^2=-kT+q_0y+c_2$$

onde $c_2=kT_0$

$$T=T_0+(q_0/k)y-(\rho H/2k)y^2$$

Geoterma do manto

Podemos usar a equação anterior para avaliar o mecanismo de transferência de calor no manto terrestre.



$T_0 = 0\ ^oC$

$q_0 = 70\ mW/m^2$

$\rho = 3.300\ kg/m^3$

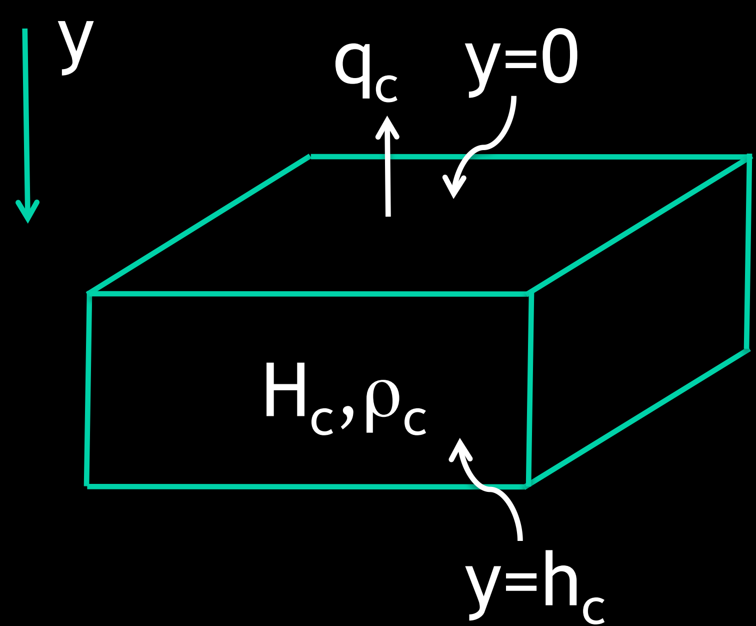
$H = 7{,}38\ 10^{-12}\ W/kg$

$k = 4\ W\ m^{-1}\ K^{-1}$

Mas o manto não pode estar fundido!!

Camada sobre semi-espaço

Consideramos uma crosta de espessura h_c e produção de calor uniforme H_c.



$$\rho_c H_c y = -k(dT/dy) + c_1 = q + c_1$$

Como $q(y=0) = -q_c \Rightarrow c_1 = q_c$

$$q + q_c = \rho_c H_c y$$

Para determinar a contribuição da crosta

$$q(y=h_c) = 0 \quad \Rightarrow \quad q_c = \rho_c H_c h_c$$

Crosta oceânica

A crosta oceânica é formada por basalto. Assim ρ_c=2.900 kg/m^3, h_c=6 km, H_c=2,6 10^{-11} W/kg => q_c=0,45 mW/m^2

A contribuição da crosta oceânica é desprezível e invalida uma geoterma condutiva para o manto.

Em outra aula veremos que a geoterma do manto é devida à transferência de calor por convecção.

Geotermas continentais

A crosta dos continentes é formada por granito. Para ρ_c= 2.700 kg/m^3, h_c= 35 km, H_c=9,6 10^{-11} W/kg => q_c = 91 mW/m^2

A contribuição de uma crosta granítica é grande de mais (a média para os conti-nentes é de 65 mW/m^2).

Assim, tem que haver uma diminuição de isótopos com a profundidade devido à mudança da litologia.

Distribuição exponencial

Vamos supor uma diminuição de tipo exponencial

$$H=H_0 \exp(-y/h_r)$$

A equação da condução é

$$0=k(d^2T/dy^2)+\rho H_0 e^{-y/hr}$$

Integrando

$$c_1=k(dT/dy)-\rho h_r H_0 e^{-y/hr}$$

$$c_1=-q-\rho h_r H_0 e^{-y/hr}$$

Se q_m é o fluxo no base da litosfera,

Distribuição exponencial

$$q \to -q_m \text{ para } y \to \infty \Rightarrow c_1 = q_m$$

e o fluxo de calor é expresso como

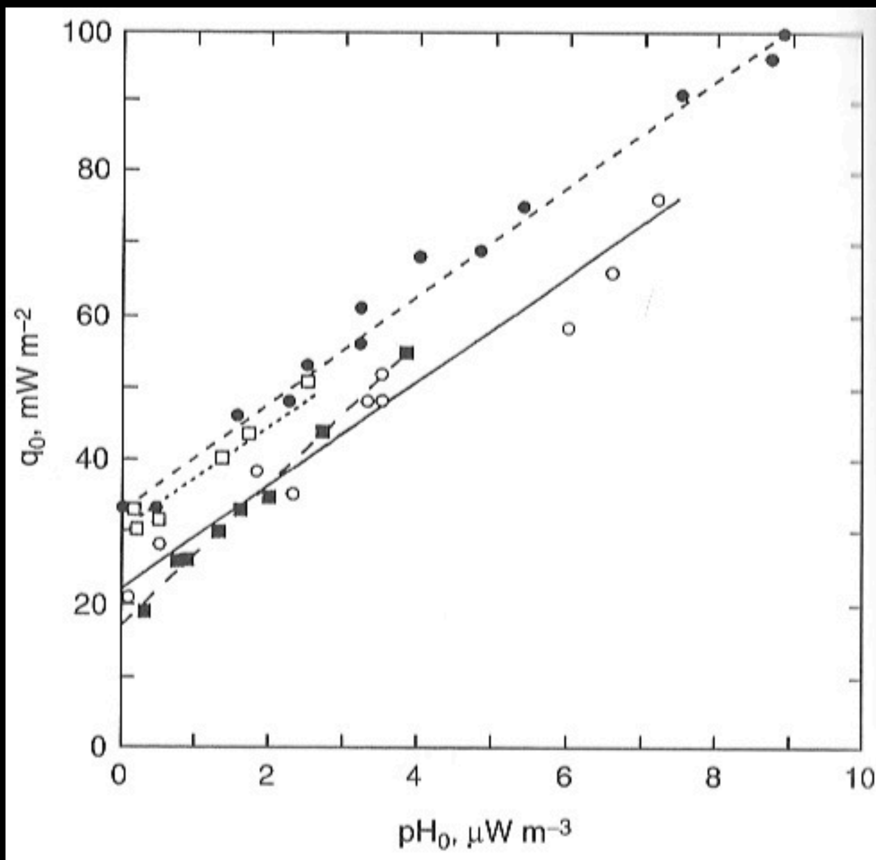
$$q = -q_m - \rho H_0 h_r \, e^{-y/hr}$$

Na superfície da Terra (y=0)

$$q_0 = q_m + \rho h_r H_0$$

Para uma distribuição exponencial, há uma relação linear entre fluxo (q_0) e produção (H_0) superficiais.

Distribuição exponencial



Sierra Nevada

q_m=17 mW/m^2; h_r=10 km

Noruega e Suécia

q_m=22 mW/m^2; h_r=7.2 km

Leste do Canadá

q_m=30.5 mW/m^2; h_r=7.1 km

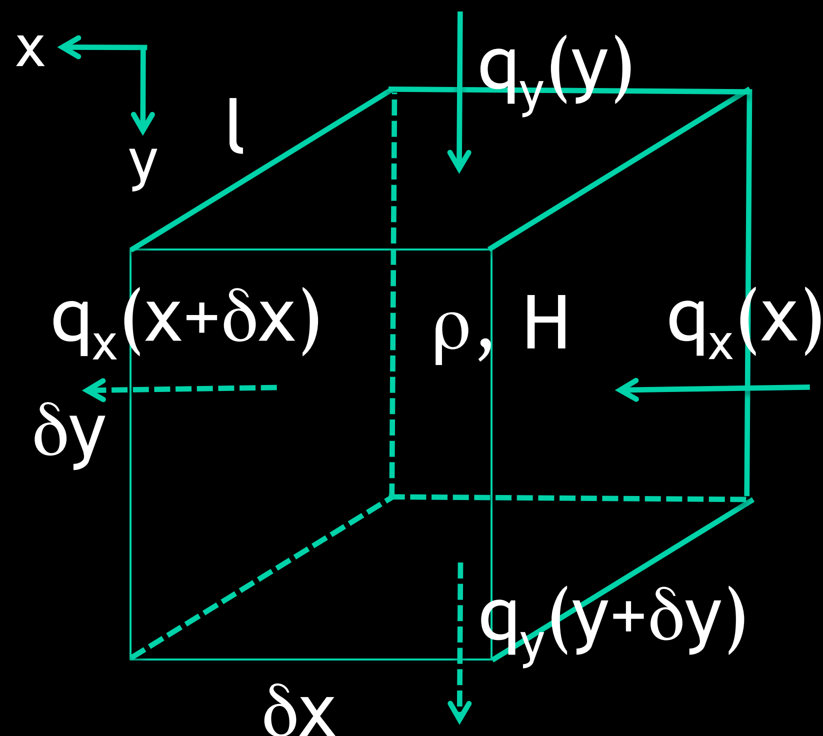
Leste dos EUA

q_m=33 mW/m^2; h_r=7.5 km

Uma dependência exponencial explica a relação linear ... mas não é única.

Condução 2D estacionária

Consideramos a situação em que o calor é transferido em duas direções e sem variações temporais.

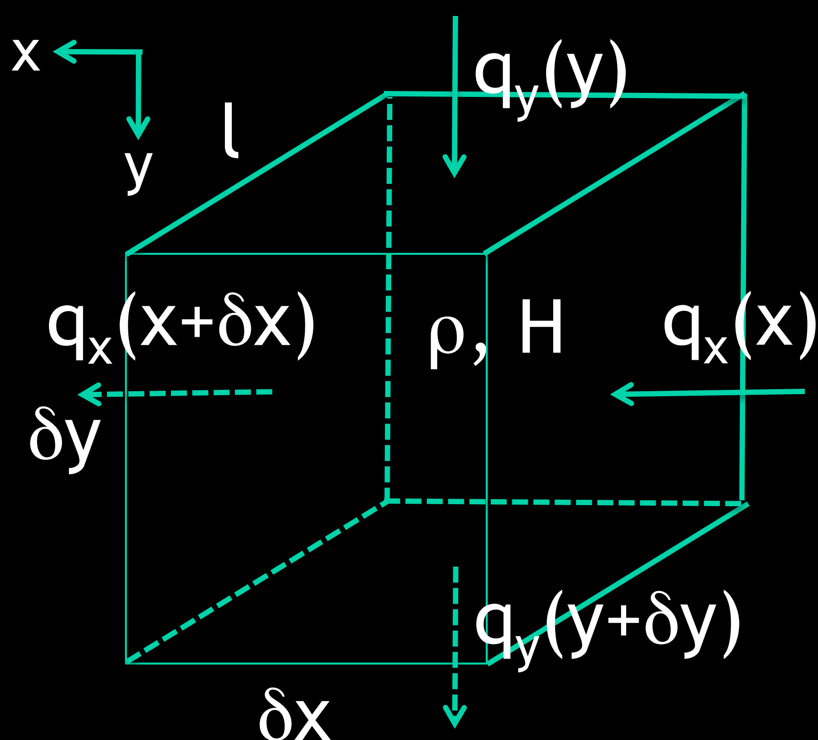


$$[q_x(x+\delta x)-q_x(x)]\,\delta y\, l +$$
$$[q_y(y+\delta y)-q_y(y)]\,\delta x\, l =$$
$$(\partial q_x/\partial x+\partial q_y/\partial y)\delta x\delta y l$$

$$\partial q_x/\partial x+\partial q_y/\partial y = \rho H$$

Condução 2D estacionária

Consideramos a situação em que o calor é transferido em duas direções e sem variações temporais.



Como, de acordo com a lei de Fourier,

$$q_x = -k\ \partial T/\partial x$$

$$q_y = -k\ \partial T/\partial y$$

$$-k[\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2] = \rho H$$

Temperaturas superficiais periódicas

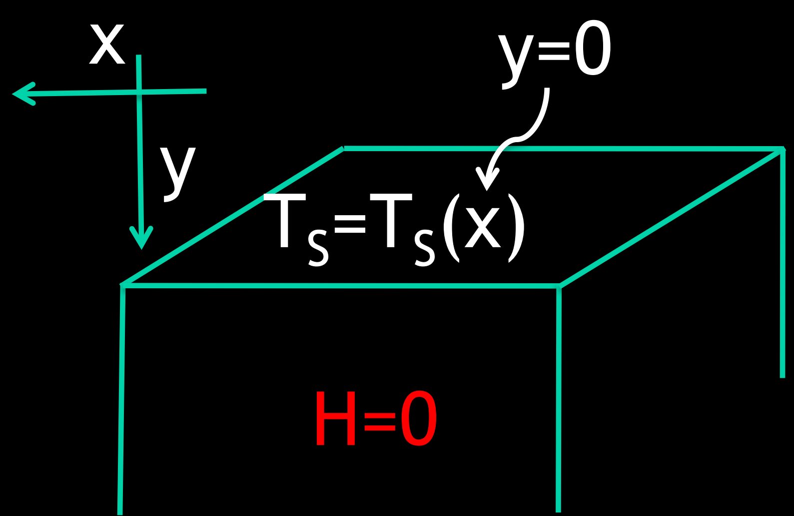
Vamos supor agora que há variações laterais na temperatura, por exemplo, devidas a:

- Topografia - Existem variações na altura da superfície e a temperatura varia devido à sua dependência com a altura.
- Bordas entre a terra e corpos d'água (p.e. (lagoas ou mares).

É importante para a interpretação de medições de temperatura nos poços.

Temperaturas superficiais periódicas

Supomos que o meio é um semi-espaço com a superfície em y=0 e que H=0:



$$\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 = 0$$

Supomos também uma variação de temperatura periôdica na superfície:

$$T_S(x) = T_0 + \Delta T \cos 2\pi x/\lambda$$

Temperaturas superficiais periódicas

Vamos usar separação de variáveis,

$$T(x,y)=T_0+\Delta T\ X(x)\ Y(y)$$

Para y=0

$$T(x,0) = T_0+\Delta T\ X(x)\ Y(0) = T_0+\Delta T \cos 2\pi x/\lambda$$

pelo que

$$X(x) = \cos 2\pi x/\lambda \text{ e } Y(0) = 1$$

Substituindo na equação de condução

$$0 = -(4\pi^2/\lambda^2)\ Y + d^2Y/dy^2$$

Temperaturas superficiais periódicas

A solução geral é

$$Y(y) = c_1\, e^{-2\pi y/\lambda} + c_2\, e^{2\pi y/\lambda}$$

Usando a condição de contorno de temperatura finita para y->∞ => $c_2=0$,

$$Y(y) = c_1\, e^{-2\pi y/\lambda}$$

Usando a condição de contorno anterior de $Y(0) = 1$ => $c_1=1$. Assim,

$$T(x,y) = T_0 + \Delta T \cos(2\pi x/\lambda)\, e^{-2\pi y/\lambda}$$

Temperaturas superficiais periódicas

Vamos agora acrescentar a contribuição do calor radioativo. Para uma distribuição exponencial, vimos que

$$q=-q_m-\rho H_0 h_r\, e^{-y/hr}$$

Usando a lei de Fourier

$$-k\,(dT/dy)=-q_m-\rho H_0 h_r\, e^{-y/hr}$$

e, integrando,

$$-kT = -q_m y + \rho H_0 h_r^2\, e^{-y/hr} + c_2$$

Temperaturas superficiais periódicas

Como $T(y=0)=T_0$, temos $c_2=-kT_0-\rho H_0 h_r^2$.

A geoterma para uma distribuição exponencial de calor radioativo é assim

$$T = T_0 + q_m y/k + (\rho H_0 h_r^2/k)\ [1-\exp(-y/h_r)]$$

Como a equação da condução é linear em T, o princípio da superposição pode ser usado para obter

$$T(x,y) = T_0 + q_m y/k + (q_0-q_m)h_r/k\ (1-e^{-y/hr}) + \Delta T \cos(2\pi x/\lambda)\ e^{-2\pi y/\lambda}$$

Efeito da topografia

Vamos supor que a topografia da superfície é dada por

$$h(x) = h_0 \cos 2\pi x/\lambda$$

Assumindo que a atmosfera tem um gradiente de temperatura β,

$$T_S=T_0+\beta y \qquad \beta=6{,}5\ \mathrm{K/m}$$

A projeção da temperatura para y=0 é

$$T|_{y=0}= T|_{y=h}-(\partial T/\partial y)|_{y=0}\, h =$$

$$T_0 + \{ \beta-(\partial T/\partial y)|_{y=0} \}\, h$$

Efeito da topografia

Aplicando a lei de Fourier ($q_0 = -q|_{y=0}$),

$$(\partial T/\partial y)|_{y=0} = q_0/k = (q_m + \rho h_r H_0)/k$$

Substituindo

$$T|_{y=0} = T_0 + \left\{\beta - (q_m + \rho h_r H_0)/k\right\} h_0 \cos 2\pi x/\lambda$$

a partir da qual deduzimos que

$$\Delta T = (\beta - q_m/k - \rho H_0 h_r/k)\, h_0$$

e, finalmente, que

$$T = T_0 + q_m y/k + \rho H_0 h_r^2/k\,(1 - e^{-y/hr})$$
$$+(\beta - q_m/k - \rho H_0 h_r/k)\, h_0 \cos 2\pi x/\lambda\; e^{-2\pi y/\lambda}$$