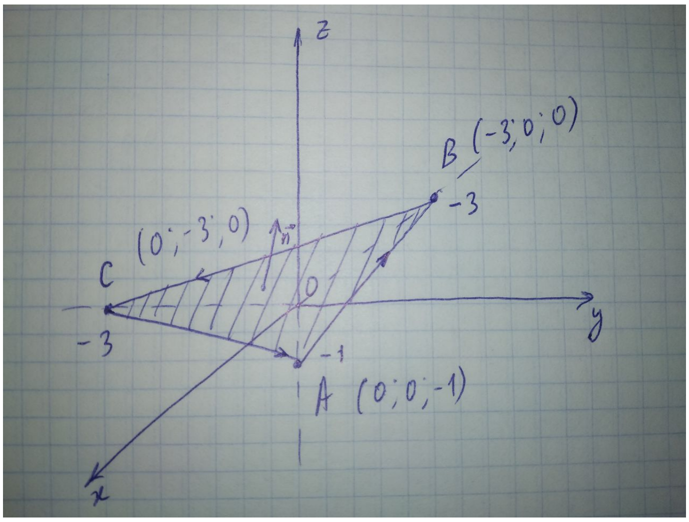
5. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ по контуру l , получающемуся при пересечении заданной плоскости α координатными плоскостями.

$$\vec{a} = \vec{i} + y\vec{j} - zx\vec{k}; \quad \alpha : x + y + 3z = -3$$

$$(x \leq 0; y \leq 0; z \leq 0).$$

Вычислим Ц по контуру $l(ABCA)$ через криволинейный интеграл первого рода.



По условию $a_x = 1; \quad a_y = y; \quad a_z = -zx$, имеем

$$\text{Ц} = \int_{ABCA} (cos\alpha + ycos\beta - zxcos\gamma)dS$$

С учётом св-ва аддитивности криволинейного интеграла 1 рода по контуру имеем

$$\text{Ц} = \left\{ \int_{AB} + \int_{BC} + \int CA \right\} [cos\alpha + ycos\beta - xzcos\gamma]dS$$

$$I_1 = \int_{AB} (cos\alpha + ycos\beta - xzcos\gamma)dS$$

- это интеграл вдоль отрезка AB, касательный вектор к которому $\vec{r}$, очевидно, можно взять просто равным вектору $\vec{AB}(-3; 0; 1)$

Касательный вектор постоянен, т.к. AB - отрезок прямой. Направляющие косинусы этого вектора совпадают с искомыми $cos\alpha, cos\beta, cos\gamma$

$$cos\alpha = \frac{a_x}{|a|} = \frac{-3}{\sqrt{10}} \quad cos\beta = 0; \quad cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Чтобы вычислить дифференциал дуги dS, напишем параметрические уравнения линии AB (как отрезка прямой с направляющим вектором $\vec{r} = \vec{AB}$ и проходящей через точку $A(0; 0; -1)$.

$$\begin{cases} x(t) = 0 - 3t \\ y(t) = 0 \qquad , \quad t \in [0; 1] \\ z(t) = -1 + t \end{cases}$$

Учитывая параметрическое представление линии AB и формулу для вычисления dS, получаем

$$dS = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2 dt} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}dt$$

Подставляя полученные результаты в равенство для I_1, имеем следующее выражение криволинейного интеграла 1го рода I_1 через определённый интеграл:

$$I_1 = \int_0^1 (-\frac{3}{\sqrt{10}} + 0 \cdot 0 + \frac{1 \cdot (-3t)(t-1)}{\sqrt{10}})\sqrt{10}dt =$$

$$= \int_0^1 (-3 + 3t - 3t^2)dt = -3\int_0^1 (t^2 - t + 1)dt =$$

$$= -3(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t)\Big|_0^1 = -3(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1) = -3.5$$

Аналогично для $I_2 = \int_{BC}(cos\alpha + ycos\beta - xzcos\gamma)dS$ Имеем

$$\vec{r} = \vec{BC} = (3;-3;0); \quad cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad cos\beta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad cos\gamma = 0;$$

Параметрическое представление отрезка

$$\begin{cases} x(t) = -3 + 3t \\ y(t) = 0 - 3t \\ z(t) = 0 \end{cases}, \quad t \in [0;1]$$

а выражение для dS имеет вид

$$\sqrt{3^2 + (-3)^2}dt = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \text{Поэтому}$$

$$I_2 = \int_0^1 (\frac{1}{\sqrt{2}} + -3t \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) - 0 \cdot (3t-3) \cdot 0)3\sqrt{2}dt =$$

$$= 3\int_0^1 (1 + 3t)dt = 3\ (t + 3\frac{t^2}{2})\Big|_0^1 =$$

$$3(1 + \frac{3}{2}) = 3 + \frac{9}{2} = 4.5 + 3 = 7.5$$

Для $I_3 = \int_{CA}(cos\alpha + ycos\beta - xzcos\gamma)dS$ Получаем

$$\vec{r} = \vec{CA} = (0;3;-1); \quad cos\alpha = 0; cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}; \quad cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

Параметрическое представление отрезка

$$\begin{cases} x(t) = 0 + 0t \\ y(t) = -3 + 3t \\ z(t) = 0 - t \end{cases}, \quad t \in [0;1]$$

а выражение для dS имеет вид

$$dS = \sqrt{3^2 + (-1)^2}dt = \sqrt{10}dt$$

$$I_3 = \int_0^1 \Big(0 + (3t-3)\frac{3}{\sqrt{10}} - 0 \cdot (-t)\big(-\frac{1}{\sqrt{10}}\big)\Big)\sqrt{10}dt =$$

$$= 9\int_0^1 (t-1)dt = 9\ (\frac{t^2}{2} - t)\Big|_0^1 = 9(\frac{1}{2} - 1) = -4.5$$

$$\text{Ц} = I_1 + I_2 + I_3 = -3.5 + 7.5 - 4.5 = -0.5$$

Вычислим теперь циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ с помощью криволинейного интеграла второго рода:

$$Ц = \int_l a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{ABCA} dx + ydy - zxdz$$

Пользуясь аддитивностью

$$Ц = \Big\{ \int_{AB} + \int_{BC} + \int CA \Big\} (dx + ydy - zxdz)$$

Разобьём правую часть на 3 слагаемых

$$J_1 = \int_{AB} dx + ydy - zxdz$$

$$\begin{cases} x(t) = 0 - 3t \\ y(t) = 0 \qquad , \quad t \in [0;1] \\ z(t) = -1 + t \end{cases}$$

Тогда $dx = -3dt; \quad dy = 0; \quad dz = dt$. Поставляя в равенство для J_1

$$J_1 = \int_0^1 (-3 - (t - 1 \cdot (-3t))dt =$$

$$= \int_0^1 (-3 - (3t - 3t^2))dt = 3 \int_0^1 (t^2 - t - 1)dt = 3\ (\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t)\Big|_0^1 =$$

$$= 3(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1) = 1 - \frac{3}{2} - 3 = -3.5$$

Аналогично $J_2 = \int_{BC} dx + ydy - xzdz$.

$$\begin{cases} x(t) = -3 + 3t \\ y(t) = 0 - 3t \qquad , \quad t \in [0;1] \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

$$dx = 3dt; \quad dy = -3dt; \quad dz = 0;$$

Поэтому

$$J_2 = \int_0^1 (3 - 3t(-3))dt = \int_0^1 (3 + 9t)dt =$$

$$= 3 \int_0^1 (3t + 1)dt = 3\ (\frac{3t^2}{2} + t)\Big|_0^1 = 3(\frac{3}{2} + 1) = 4.5 + 3 = 7.5$$

Для $J_3 = \int_{CA} dx + ydy - zxdz$ с учётом

$$\begin{cases} x(t) = 0 + 0t \\ y(t) = -3 + 3t \qquad , \quad t \in [0;1] \\ z(t) = 0 - t \end{cases}$$

$$dx = 0; \quad dy = 3dt; \quad dz = -dt$$

.

$$J_3 = \int_0^1 (3t - 3) \cdot 3dt = 9 \int_0^1 (t - 1)dt = 9\ (\frac{t^2}{2} - t)\Big|_0^1 =$$

$$= 9(\frac{1}{2} - 1) = -4.5$$

$$Ц = J_1 + J_2 + J_3 = -3.5 + 7.5 - 4.5 = -0.5$$

Проверим циркуляцию с помощью формулы Стокса. Вначале вычислим $rot\vec{a}$:

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & y & -xz \end{vmatrix} =$$

$$\vec{i}\Big(-\frac{\partial(xz)}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\Big) + \vec{j}\Big(\frac{\partial(1)}{\partial z} + \frac{\partial(xz)}{\partial x}\Big) + \vec{k}\Big(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial(1)}{\partial y}\Big) = \vec{i}(0) + \vec{j}(z) + \vec{k}\cdot 0 = z\vec{j}$$

$$Ц = \iint_\sigma (0\cdot cos\lambda + zcos\mu + 0\cdot cos\nu)d\sigma$$

- выражение для циркуляции через поверхностный интеграл 1го рода, σ - треугольник ABC, ограниченный контуром l - ломаной $ABCA$. Итак

$$Ц = \int_\sigma zcos\mu d\sigma$$

Вычислим $cos\mu$.
Для этого заметим, что нормаль. к поверхности σ (части плоскости $\alpha : x + y + 3z = -3$) может служить вектор $\vec{n} = (1; 1; 3)$. Отметим, что поскольку поверхность σ - часть плоскости, то $\vec{n} = const$. Направляющие косинусы $\vec{n}$ равны

$$cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{11}}; \quad cos\mu = \frac{1}{\sqrt{11}}; \quad cos\nu = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

Направление вектора $\vec{n}$ совпадает с направлением нормали, согласованной с направлением обхода контура l. Поэтому

$$Ц = \iint_\sigma z\cdot\frac{1}{\sqrt{11}}d\sigma$$

Используя выражение поверхностного интеграла через двойной интеграл по области D_{yz} - проекции $\triangle ABC$ на плоскость xOz

$$Ц = \iint_{D_{xz}} z\frac{1}{\sqrt{11}}\sqrt{(\frac{\partial y}{\partial x})^2 + 1 + (\frac{\partial y}{\partial z})^2}dxdz$$

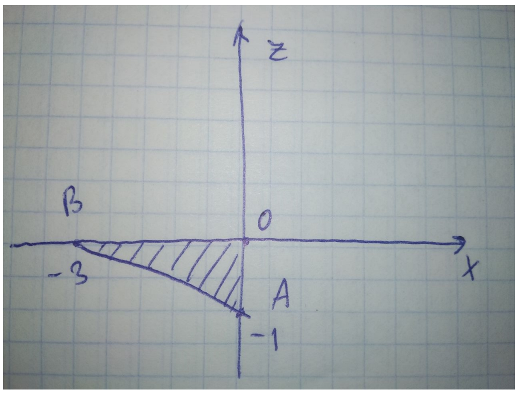
$$y = 3z - x - 3$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 3$$

$$\sqrt{(\frac{\partial y}{\partial x})^2 + 1 + (\frac{\partial y}{\partial z})^2} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$$

$$Ц = \iint_{D_{xz}} z\frac{1}{\sqrt{11}}\sqrt{11}dxdz = \iint_{D_{xz}} zdxdz$$

Область интегрирования D_{xz} - это треугольник AOB



Уравнение прямой имеет вид $z = -1 - \frac{1}{3}x$

$$Ц = \iint_{D_{xz}} z dx dz = \int_{-3}^{0} dx \int_{-1-\frac{1}{3}x}^{0} z dz =$$

$$= \int_{-3}^{0} dx \, (\frac{z^2}{2})\Big|_{-1-\frac{1}{3}x}^{0} = \int_{-3}^{0} (-\frac{1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}x^2}{2}) dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \, (x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{27})\Big|_{-3}^{0} = -\frac{1}{2}(-(-3+\frac{9}{3}-\frac{27}{27})) = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -0.5$$

Выполним расчёт циркуляции по формуле Стокса, используя при этом поверхностный интеграл 2го рода

$$Ц = \iint_{\sigma} (0 \cdot dy dz + z dx dz + 0 \cdot dx dy) = \iint_{\sigma} z dx dz$$

Выражаем через двойной интеграл, имеем:

$$Ц = \iint_{D_{xz}} z dx dz$$

Очевидно, что этот интеграл совпадает с соответствующим выражением поверхностного интеграла 1го рода $\iint_{\sigma} z \frac{1}{\sqrt{11}} d\sigma$ через двойной интеграл. Поэтому

$$Ц = \iint_{D_{xz}} z dx dz = -0.5$$

Ответ: -0.5