

Типовой расчет модуль 6 (Ряды). Вариант 6

I. Исследуйте сходимость числовых рядов: а) Выясните, сходится или расходится положительный ряд; б) выясните сходится или расходится знакопеременный ряд; если ряд сходится, установите характер сходимости.

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{2^n!}{n^n} &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n (n+1)n!}{n!(n+1)n^n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot e = \frac{e}{2} > 1 \end{aligned}$$

По признаку Даламбера ряд расходится.

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{e}{\pi}\right)^n$$

Данный ряд не является знакочередующимся, но если умножить его на $(-1)^n$, то получим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{e}{\pi}\right)^n \quad (1)$$

Исходный ряд и ряд (1) сходятся или расходятся одновременно согласно *свойству 1* рядов, поэтому мы можем далее исследовать ряд (1). Последовательность абсолютных величин членов ряда $\sin\left(\frac{e}{\pi}\right)^n$ монотонно убывает, а общий член ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{e}{\pi}\right)^n = 0$$

(предел произведения равен произведению пределов, предел правой части равен нулю, предел левой неопределен но ограничен сверху 1 и -1 снизу, т.о. произведение 0 и ограниченного числа есть 0).

По признаку Лейбница ряд сходится.

Чтобы установить характер сходимости, определим сходится или расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{e}{\pi}\right)^n, \quad (2)$$

составленный из модулей членов данного ряда. Воспользуемся для этого предельным признаком сравнения знакоположительных рядов. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n \quad (3)$$

Ряд (3) есть ряд, полученный из сходящегося ряда геометрической прогрессии $(a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots (a = 1, q = \frac{e}{\pi} < 1))$ путём отбрасывания первого члена. По *свойству 3* рядов сходится и ряд (3).

Найдем предел отношения общих членов рядов (2) и (3):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{e}{\pi}\right)^n}{\left(\frac{e}{\pi}\right)^n}$$

Обозначив $\left(\frac{e}{\pi}\right)^n = x$, заметим что $x \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{e}{\pi}\right)^n}{\left(\frac{e}{\pi}\right)^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (первый замечательный предел)}$$

Т.е. ряд (2) сходится и, значит, исходный ряд сходится абсолютно.

Домашнее задание

Исследовать сходимость числовых рядов

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 + 5}{n^3 + 6}$

Это знакоположительный ряд. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 + 5}{n^3} \quad (1)$$

его общий член

$$u_n = \frac{3n^3 + 5}{n^3} = \frac{3n^3}{n^3} + \frac{5}{n^3} = 3 + \frac{5}{n^3}$$

Такой ряд удовлетворяет условию интегрального признака Коши т.к. $u_{n+1} < u_n$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \left(3 + \frac{5}{n^3}\right) dn &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \left(3 + \frac{5}{n^3}\right) dn = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(3n + \frac{5}{2n^2}\right) \Big|_1^a = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(3a + \frac{5}{2a^2} - 3 - \frac{5}{2}\right) = \infty \quad \text{- ряд расходится} \\ \frac{3n^3 + 5}{n^3 + 6} : \frac{3n^3 + 5}{n^3} &= \frac{3n^3 + 5}{n^3 + 6} \cdot \frac{n^3}{3n^3 + 5} = \frac{n^3}{n^3 + 6} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 + 6} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{3n^2} = 1 \end{aligned}$$

Значит исходный ряд расходится, как и ряд (1) по предельному признаку сравнения.

b) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{4^{n+2}(n-5)!}$

Это знакоположительный ряд. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)(3n+2)}{4^{n+3}(n-4)!} : \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{4^{n+2}(n-5)!} &= \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)(3n+2)}{4^{n+3}(n-4)!} \cdot \frac{4^{n+2}(n-5)!}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)} = \\ &= \frac{(3n+2)(n-5)!}{4(n-4)!} = \frac{(3n+2)(n-5)!}{4(n-5)!(n-4)} = \frac{3n+2}{4n-16} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{4n-16} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} = \frac{3}{4} < 1. \end{aligned}$$

То есть ряд сходится (при вычислении предела было применено правило Лопиталья).

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos \frac{4}{n^2 + 1}$

$$u_n = \arccos \frac{4}{n^2 + 1} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{n^2 + 1}}{2}}$$
$$(\arccos x = 2 \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{2}})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \arcsin \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{n^2 + 1}}{2}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{2}} = 2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

т.о. ряд расходится т.к. не выполнен необходимый признак сходимости.

$$d) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1) \ln(n-1)}$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(n-1) \ln(n-1)}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1) \ln(n-1)}$$

с общим членом

$$v_n = \frac{1}{(n-1) \ln(n-1)}.$$

Данный ряд получается путём умножения исходного ряда на -1 и является знакопеременным.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n-1) \ln(n-1)} = 0$$

Заметим также что $v_n > v_{n+1}$ поэтому ряд сходится по признаку Лейбница, а значит, по свойству 1 рядов, сходится и исходный ряд.

Определим характер сходимости.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1) \ln(n-1)} \quad (1)$$

Такой ряд удовлетворяет условиям интегрального признака Коши. Применим его:

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1) \ln(x-1)} = \left[\begin{matrix} t = x-1; \\ dt = dx \end{matrix} \right] = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln t)}{\ln t} = \ln |\ln t| \Big|_2^{\infty} = \infty.$$

Т.е. несобственный интеграл расходится, стало быть расходится и ряд (1), состоящий из модулей членов исходного ряда. Т.о. исходный ряд сходится условно.