

Типовой расчет модуль 6 (Ряды). Вариант 6

I. Исследуйте сходимость числовых рядов: а) Выясните, сходится или расходится положительный ряд; б) выясните сходится или расходится знакпеременный ряд; если ряд сходится, установите характер сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{2^n!}{n^n} &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n (n+1)n!}{n!(n+1)n^n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot e = \frac{e}{2} > 1 \end{aligned}$$

По признаку Даламбера ряд расходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{e}{\pi}\right)^n$

Данный ряд не является знакочередующимся, но если умножить его на (-1) , то получим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{e}{\pi}\right)^n \quad (1)$$

Исходный ряд и ряд (1) сходятся или расходятся одновременно согласно *свойству 1* рядов, поэтому мы можем далее исследовать ряд (1). Последовательность абсолютных величин членов ряда $\sin\left(\frac{e}{\pi}\right)^n$ монотонно убывает, а общий член ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{e}{\pi}\right)^n = 0$$

(предел произведения равен произведению пределов, предел правой части равен нулю, предел левой неопределен но ограничен сверху 1 и -1 снизу, т.о. произведение 0 и ограниченного числа есть 0).

По признаку Лейбница ряд сходится.

Чтобы установить характер сходимости, определим сходится или расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{e}{\pi}\right)^n, \quad (2)$$

составленный из модулей членов данного ряда. Воспользуемся для этого предельным признаком сравнения знакположительных рядов. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n \quad (3)$$

Ряд (3) есть ряд, полученный из сходящегося ряда геометрической прогрессии $(a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots (a = 1, q = \frac{e}{\pi} < 1))$ путём отбрасывания первого члена. По *свойству 3* рядов сходится и ряд (3).