Типовой расчет модуль 6 (Ряды). Вариант 6

I. Исследуйте сходимость числовых рядов: а) Выясните, сходится или расходится положительный ряд; б) выясните сходится или расходится знакопеременный ряд; если ряд сходится, установите характер сходимости.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{2^n!}{n^n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n(n+1)n!}{n!(n+1)n^n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot e = \frac{e}{2} > 1$$

По признаку Даламбера ряд расходится.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n sin(\frac{e}{\pi})^n$

Данный ряд не является знакочередующимся, но если умножить его на (-1), то получим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} sin(\frac{e}{\pi})^n \tag{1}$$

Исходный ряд и ряд (1) сходятся или расходятся одновременнон согласно *свойству 1* рядов, поэтому мы можем далее исследовать ряд (1). Последовательность абсолютных величин членов ряда $sin(\frac{e}{\pi})^n$ монотонно убывает, а общий член ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} sin(\frac{e}{\pi})^n = 0$$

(предел произведения равен произведению пределов, предел правой части равен нулю, предел левой неопределен но ограничен сверху 1 и -1 снизу, т.о. произведение 0 и ограниченного числа есть 0).

По признаку Лейбница ряд сходится.

Чтобы установить характер сходимости, определим сходится или расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} sin(\frac{e}{\pi})^n, \tag{2}$$

составленный из модулей членов данного ряда. Воспользуемся для этого предельным признаком сравнения знакоположительных рядов. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{e}{\pi})^n \tag{3}$$

Ряд (3) есть ряд, полученный из сходящегося ряда геометрической прогрессии ($a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$ $(a = 1, q = \frac{e}{\pi} < 1)$) путём отбрасывания первого члена. По *свойству 3* рядов сходится и ряд (3).

Найдем предел отношения общих членов рядов (2) и (3):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sin(\frac{e}{\pi})^n}{(\frac{e}{\pi})^n}$$

Обозначив $(\frac{e}{\pi})^n = x$, заметим что $x \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sin(\frac{e}{\pi})^n}{(\frac{e}{\pi})^n} = \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1 \text{ (первый замечетельный предел)}$$

Т.е. ряд (2) сходится и, значит, исходный ряд сходится абсолютно.

Домашнее задание

Исследовать сходимость числовых рядов

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n^3+5}{n^3+6}$

Это знакоположительный ряд. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n+1}^{\infty}\frac{3n^3+5}{n^3} \quad (1)$$

его общий член

$$u_n=\frac{3n^3+5}{n^3}=\frac{3n^3}{n^3}+\frac{5}{n^3}=3+\frac{5}{n^3}$$

Такой ряд удовлетворяет условию интегрального признака Коши т.к. $u_{n+1}<u_n$

$$\int_1^{+\infty}(3+\frac{5}{n^3})dn=\lim_{a\to\infty}\int_1^a(3+\frac{5}{n^3})dn=\lim_{a\to\infty}(3n+\frac{5}{2n^2})\Big|_1^a=$$

$$=\lim_{a\to\infty}(3a+\frac{5}{2a^2}-3-\frac{5}{2})=\infty \quad \text{- ряд расходится}$$

$$\frac{3n^3+5}{n^3+6}:\frac{3n^3+5}{n^3}=\frac{3n^3+5}{n^3+6}\cdot\frac{n^3}{3n^3+5}=\frac{n^3}{n^3+6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{3n^2}=1$$

Значит исходный ряд расходится, как и ряд (1) по предельному признаку сравнения.

b) $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\dfrac{2\cdot 5\cdot ...\cdot(3n-1)}{4^{n+2}(n-5)!}$

Это знакоположительный ряд. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\frac{2\cdot 5\cdot ...\cdot(3n-1)(3n+2)}{4^{n+3}(n-4)!}:\frac{2\cdot 5\cdot ...\cdot(3n-1)}{4^{n+2}(n-5)!}=\frac{2\cdot 5\cdot ...\cdot(3n-1)(3n+2)}{4^{n+3}(n-4)!}\cdot\frac{4^{n+2}(n-5)!}{2\cdot 5\cdot ...\cdot(3n-1)}=$$

$$=\frac{(3n+2)(n-5)!}{4(n-4)!}=\frac{(3n+2)(n-5)!}{4(n-5)!(n-4)}=\frac{3n+2}{4n-16}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n-16}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4}=\frac{3}{4}<1.$$

То есть ряд сходится (при вычислении предела было применено правило Лопиталя).

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arccos\dfrac{4}{n^2+1}$