Конспект по вычислительной математике

$$x_i = f(x_{i-1})$$

$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$$

Решение трансцендентного уравнения

Если на интервале a, b функция $f(x)$ непрерывна и монотонна (имеет знакопостоянную производную), а её значения на концах интервала имеют разные знаки, то на рассматриваемом отрезке есть один и только один корень.

рис1.jpg \T2A\cyrr \T2A\cyri \T2A\cyrs 1.jpg

Решение сводится к нахождению интервала и уточнению по заданному методу.

Метод половинного деления

Находим середину отрезка

рис2.jpg \T2A\cyrr \T2A\cyri \T2A\cyrs 2.jpg

Если $f(a) \cdot f(c) < 0$, то функция пересекает ось абсцисс на интервале ac, тогда в следующей итерации a, c становится ab если $f(b) \cdot f(c) < 0$, то функция пересекает ось абсцисс на bc, $c \Rightarrow b = c$

условие остановки $|a - b| < 2\varepsilon$

Метод применим даже к функциям с множеством перегибов и с пересечениями оси абсцисс.

Метод хорд

рис3.jpg \T2A\cyrr \T2A\cyri \T2A\cyrs 3.jpg

Проводим хорду ab

$$f'(x) > 0$$

$$\lim_{i \to \infty} a_i = x^*$$

$$A(a_i f(a_i))$$

$$B(b, f(b))$$

$$\frac{I - f(a_i)}{f(b) - f(a_i)} = \frac{x - a}{b - a_i}$$

для $I = 0 \quad x = a_{i+1}$

$$a_{i+1} = a_i - \frac{f(a_i)}{f(b) - f(a_i)}(b - a_i)$$

рис4.jpg \T2A\cyrr \T2A\cyri \T2A\cyrs 4.jpg

$$b_{i+1} = b_i - \frac{f(b_i)}{f(b_i) - f(a)}(b_i - a)$$

В качестве неподвижного конца интервала рассматривается соотношение $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, тот конец для которого оно выполняется , выбирается в качестве неподвижного.

Чтобы последовательность сходилась необходимо чтобы $f'(x)$ и $f''(x)$ на всем интервале имели постоянный знак. Выбирается интервал, проверяется какой конец неподвижный и используется формула

Остановка когда

$$|a_i - a_{i-1}| < \varepsilon$$

или

$$|b_i - b_{i-1}| < \varepsilon$$

$$Ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

Точность:

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} < \varepsilon$$

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{(2(2n-1))!}{x^{2(n-1}} = \frac{x_i}{x_{i-1}} = D = \frac{x^2}{(2n-1)2n}$$