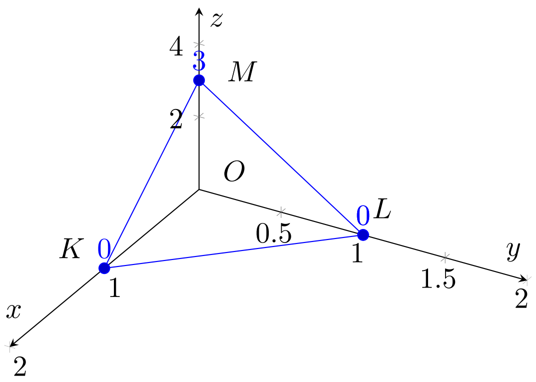
1). Поток (2ой способ для проверки – через поверхностный интеграл 1-го рода) Часть S плоскости σ, лежащая в первом октанте, представляет собой треугольник



Разрешив уравнение плоскости σ относительно z, получим

$$z = 3 - 3x - 3y$$

Найдем частные производные этой функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} \ = \ p(x, y) \ = \ -3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \ = \ q(x, y) \ = \ -3$$

Радикал, стоящий в знаменателях направляющих косинусов, равен

$$\sqrt{1 + p^2\left(x, y\right) + q^2\left(x, y\right)} \ = \ \sqrt{1 + 9 + \ 9} \ = \ \sqrt{19}$$

Согласно условию задачи, $cos\gamma >\ 0$, следовательно, перед радикалом выбираем знак «+». В результате получим

$$cos\alpha = \frac{-\left(-3\right)}{\sqrt{19}} = \frac{3}{\sqrt{19}}$$

$$cos\beta = \frac{-\left(-3\right)}{\sqrt{19}} = \frac{3}{\sqrt{19}}$$

$$cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{19}}$$

Найдем скалярное произведение $\bar{a}\ \cdot\ \bar{n}$:

$$\bar{a}\cdot\bar{n} = \frac{3}{\sqrt{19}}\cdot 0 + \frac{3}{\sqrt{19}}\left(3y + z\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{19}}\right)\cdot 3\left(x + y\right) =$$

$$= \frac{9y + 3z - 3x - 3y}{\sqrt{19}} = \frac{6y + 3z - 3x}{\sqrt{19}}.$$

Для вычисления потока преобразуем поверхностный интеграл по части S плоскости σ в двойной интеграл по плоской области D_{xy} – проекции плоскости S на плоскость Oxy. Для этого в выражении $\bar{a}\ \cdot\ \bar{n}$ заменим $z\ =\ 3 - 3x - 3y$ и выразим дифференциал площади поверхности по формуле

$$ds = \sqrt{1 + p^2\left(x, y\right) + q^2\left(x, y\right)}dxdy = \sqrt{19}dxdy$$

Получим

$$Q = \iint_{D_{xy}}\left(9 - 3y - 12x\right)dxdy$$

Полученное выражение представляет собой двойной интеграл по треугольнику OKL, лежащему в плоскости Oxy. Расставим пределы интегрирования и вычислим этот интеграл.

$$Q = \iint_{D_{xy}} (9 - 3y - 12)\, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (9 - 3y - 12x)\, dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left(9y - \frac{3y^2}{2} - 12xy \right) \Bigg|_0^{1-x} =$$

$$= \int_0^1 \left(9 - 9x - \frac{3 - 6x + 3x^2}{2} - 12x + 12x^2 \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(9 - 9x - \frac{3}{2} + 3x - \frac{3x^2}{2} - 12x + 12x^2 \right) dx \ =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{21}{2}x^2 - 18x + \frac{15}{2} \right) dx = \left(\frac{7}{2}x^3 - 9x^2 + \frac{15}{2}x \right) \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{7}{2} - 9 + \frac{15}{2} = \frac{22}{2} - 9 = 11 - 9 = 2.$$

Ответ: 2.

2) Циркуляция векторного поля $\bar{a}$ по контуру l представляет собой криволинейный интеграл второго рода

$$C = \int_l \bar{a} \cdot d\bar{r} = \int_l a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

Для нашей задачи получим

$$C = \int_{KLMK} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{KLMK} (3y + z) dy - 3(x + y) dz$$

По условию задачи обход контура производится в направлении $K \to L \to M \to K$ Применим св-во аддитивности интеграла и представим C в виде суммы трёх криволинейных интегралов I_{KL}, I_{LM}, I_{MK}, взятых по отрезкам KL, LM, MK соответственно, т.е.

$$C = I_{KL} + I_{LM} + I_{MK}$$

Найдём значения каждого из них.

а) Отрезок KL представляет собой отрезок прямой, заданной системой

$$\begin{cases} z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$y = 1 - x$$

$$dy = -dx,$$

Откуда следует, что $dz = 0$. При движении от точки K к точке L координата x меняется от 1 до 0. Следовательно

$$I_{KL} = \int_1^0 -(3(1 - x))dx = -3 \int_1^0 (1 - x)dx =$$

$$= -3(x - \frac{x^2}{2}) \Bigg|_1^0 = -3(-1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

б). Отрезок LM представляет собой отрезок прямой, заданной системой

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \frac{2}{3}, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$dx = 0$$

$$dy = -\frac{1}{3}dz$$

При движении от точки L к точке M координата z меняется от 0 до 3. Следовательно

$$I_{LM} = \int_0^3 (-(3 - z + z) \cdot \frac{1}{3} - 3(1 - \frac{z}{3}))dz =$$

$$= \int_0^3 (-1 - 3 + z)dz = \int_0^3 (z - 4)dz =$$

$$= (\frac{z^2}{2} - 4z)\Big|_0^3 = \frac{9}{2} - 4 \cdot 3 = \frac{9}{2} - 12 = -\frac{15}{2} = -7.5$$

в). Отрезок MK представляет собой отрезок прямой, заданной системой

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 - \frac{z}{3}, \end{cases}$$

Откуда следует, что $dy = 0$. При движении от точки M к точке K координата Z меняется от 3 до 0. Следовательно

$$I_{MK} = \int_3^0 -3(1 - \frac{z}{3})dz) = \int_3^0 (z - 3)dz =$$

$$= (\frac{z^2}{2} - 3z)\Big|_3^0 = 0 - 0 - (\frac{9}{2} - 3 \cdot 3) = -\frac{9}{2} + 9 = \frac{9}{2}$$

Окончательно получим

$$C = \frac{3}{2} - \frac{15}{2} + \frac{9}{2} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

Ответ: -1.5