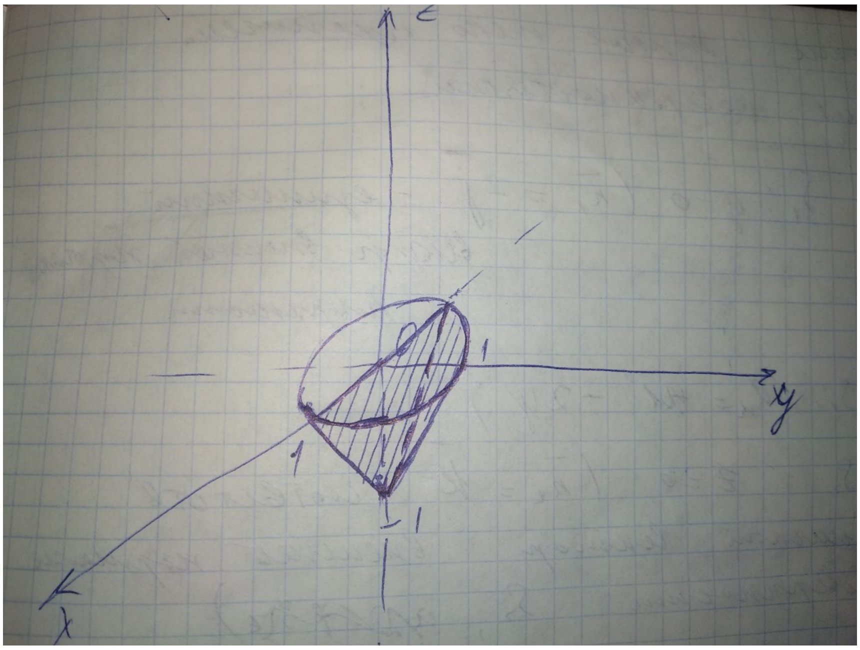
4.Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}$ из тела T, ограниченного указанными поверхностями, двумя способами: с помощью поверхностного интеграла 1-го рода и с помощью поверхностного интеграла 2-го рода. Результат проверить с помощью Th Гаусса-Остроградского.

$$T : z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0, y = 0 (y \geq 0);$$

$$\vec{a} = \vec{i} + 2y\vec{j}$$

Поверхностный интеграл 1-го рода:

$$\Pi = \iint_S a_n dS$$



Решение (Поверхностный интеграл 1-го рода)
Данное тело ограничено тремя поверхностями:

$S1 : y = 0 \quad (\vec{n}_1 = -\vec{j}$ - единичный вектор внешней нормали к поверхности $S_1)$

$$S_1 : a_n = -2y;$$

$S_2 : z = 0 \quad (\vec{n}_2 = \vec{k}$ - соответств. единичный вектор внешней нормали к поверхности $S_2)$

$$S_2 : a_n = 0$$

S_3 - часть конуса $z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}$.
Вычислим

$$p(x,y) = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

$$qx, y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$dS = \sqrt{1 + p^2(x,y) + q^2(x,y)}dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}dxdy} = \sqrt{2}dxdy$$

Нормаль $\vec{n}_3$ образует тупой угол с осью Oz, т.е. соответствует нижней стороне поверхности S_3, следовательно,

$$cos\lambda = \frac{p(x,y)}{\sqrt{1 + p^2(x,y) + q^2(x,y)}} = \frac{x}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$cos\mu = \frac{q(x,y)}{\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}} = \frac{y}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$cos\nu = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_n = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$$

$$\Pi_1 = \iint_{S_1} a_n dS = \iint_{S_1} -2y dx dz = 0,$$

т.к. на поверхности $S_1 \quad y = 0$

$$\Pi_2 = \iint_{S_2} a_{n_2} dS = 0,$$

т.к. $a_{n_2} = 0$

$$\Pi_3 = \iint_{S_3} (a_x cos\lambda + a_y cos\mu + a_z cos\nu) dS =$$

$$= \iint_{S_3} \left(\frac{x}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2y^2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}} \right) dS =$$

(поверхностный интеграл)

$$\iint_D \left(\frac{x}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2y^2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}} \right) \sqrt{2} dx dy =$$

(двойной интеграл)

$$\iint_D \frac{(x+2y^2)\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \iint_D \frac{x+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Перейдём к полярным координатам

$$x = rcos\varphi, \quad y = rsin\varphi, \quad |I(r,\varphi)| = r$$

Получим

$$\Pi_3 = \iint_D \frac{rcos\varphi + 2r^2 sin^2\varphi}{r} \cdot r dr d\varphi = \iint_D (rcos\varphi + 2r^2 sin^2\varphi) dr d\varphi$$

$$\int_0^\pi d\varphi \int_0^1 (rcos\varphi + 2r^2 sin^2\varphi) dr$$

$$I_{\text{внутр}} = \int_0^1 (rcos\varphi + 2r^2 sin^2\varphi) dr = (\frac{r^2}{2} cos\varphi + \frac{2r^3}{3} sin^2\varphi)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} cos\varphi + \frac{2}{3} sin^2\varphi$$

$$\Pi_3 = \int_0^\pi (\frac{1}{2} cos\varphi + \frac{2}{3} sin^2\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} sin\varphi \Bigg|_0^\pi + I_2;$$

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{2}{3} sin^2\varphi = \frac{2}{3} \int_0^\pi sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 - cos2\varphi) d\varphi = \frac{2}{3} \int_0^\pi (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}d\varphi + \frac{2}{3}\int_0^{\pi}(-\frac{1}{2}cos2\varphi)d\varphi = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi}cos2\varphi d\varphi =$$
$$= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}cos2\varphi d(2\varphi) = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{6}(sin2\varphi)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}.$$
$$\Pi_3 = \frac{1}{2}sin\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

2 способ (поверхностный интеграл 2-го рода)

Решение

$$\Pi = \iint\limits_{(S,n)} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{(S,n)} dydz + 2ydzdx$$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$$

$$\Pi_1 : z = 0, dz = 0$$

$$\Pi_1 = \iint\limits_{(S,n)} dydz + 2ydzdx = 0$$

$$\Pi_2 : y = 0, dy = 0$$

$$\Pi_2 = \iint\limits_{(S,n)} dydz + 2ydzdx = 0$$

Третья составляющая тела T - поверхность

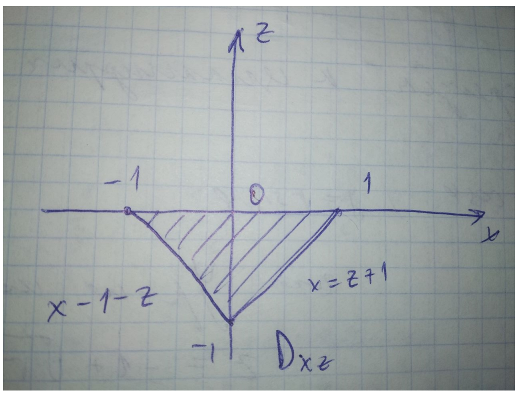
$$S_3(z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2})$$

Поток через неё:

$$\Pi_3 = \iint_{S_3} dydz + 2ydzdx = \iint_{D_{yz}} dydz + 2\iint_{D_{xz}} \sqrt{(z+1)^2 - x^2}dzdx - \iint_{D_{yz}} dydz$$

Здесь 1ое и 3е слагаемые - это противоположеные по знаку значения, которые взаимоуничтожаются. Это вызвано тем, что поверхность S_3 симметрична относительно плоскости zOy. Проекция на эту плоскость состоит из двух частей. Перед интегралом по проекции части поверхности, лежащей в восьмом октанте берётся знак "+"т.к. угол между нормалью к поверхности и осью Ox в этом случае острый. Перед интегралом по проекции части поверхности, лежащей в пятом октанте, берётся знак минус, т.к. угол между вектором нормали к этой части поверхности, направленным изнутри наружу, и осью Ox тупой. Таким образом, после сокращения этих двух слагаемых, имеем

$$\Pi_3 = 2\iint_{D_{xz}} \sqrt{(z+1)^2 - x^2}dzdx =$$



$$2\int_{-1}^{0}dz\int_{-1-z}^{z+1}\sqrt{(z+1)^2-x^2}dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{0}dz\Big(\frac{x}{2}\cdot\sqrt{(z+1)^2-x^2}+\frac{(z+1)^2}{2}arcsin(\frac{x}{z+1})\Big)\Big|_{-1-z}^{z+1} =$$

$$2\int_{-1}^{0}dz\Big(\frac{(z+1)^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{(z+1)^2}{2}\cdot(-\frac{\pi}{2})\Big) =$$

$$= 2\int_{-1}^{0}\frac{2(z+1)^2\cdot\pi}{4}dz = \pi\int_{-1}^{0}(z+1)^2dz = \pi\int_{-1}^{0}(z^2+2z+1)dz =$$

$$= \pi\,(\frac{z^3}{3}+z^2+z)\Big|_{-1}^{0} = \pi(-(-\frac{1}{3}+1-1)) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Pi = \Pi_1+\Pi_2+\Pi_3 = 0+0+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$

3) По теореме Остроградского-Гаусса

$$\Pi = \iiint\limits_{G} div\bar{a}dxdydz.$$

$$div\bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = (1)'_x+(2y)'_y+(0)'_z = 2$$

Объём G равен половине объема конуса с основанием $\begin{cases} z=1, \\ x^2+y^2\le 1 \end{cases}$ и высотой $z\in[0;1]$

Радиус основания $R=1$, высота $H=1$

$$\Pi = \iiint\limits_{V} 2dxdydz = 2\iiint\limits_{V} dxdydz = 2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\pi R^2 H\right) = \frac{\pi}{3}$$

Ответ. $\frac{\pi}{3}$