Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ “Информатика и системы управления”

КАФЕДРА "Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии”

ОТЧЁТ

К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3

ПО КУРСУ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ТЕМУ:

“Построение и программная реализация алгоритмов численного дифференцирования”

Студент	ИУ7-53 БВ	________________	Д.П. Косаревский
	(Группа)	(Подпись, дата)	(И.О.Фамилия)
Преподаватель		________________	В.М. Градов
		(Подпись, дата)	(И.О.Фамилия)

Москва 2021 г.

Цель работы: Получение навыков построения алгоритма вычисления производных от сеточных функций.

Задание:

Задана табличная (сеточная) функция. Имеется информация, что закономерность представленная таблицей, может быть описана формулой

$$y = \frac{a_0 x}{a_1 + a_2 x}$$

Параметры функции:

x	y	1	2	3	4	5
1	0.571					
2	0.889					
3	1.091					
4	1.231					
5	1.333					
6	1.412					

Вычислить первые разностные производные от функции и занести их в столбцы (1)-(4) таблицы:

1. односторонняя разностная производная ,
2. центральная разностная производная,
3. 2-я формула Рунге с использованием односторонней производной,
4. введены выравнивающие переменные.

В столбец 5 внести вторую разностную производную.

Результаты

В результате работы была достигнута поставленная цель и получены следующие результаты:

Заполненная таблица:

x	y	1	2	3	4	5
1	0.571	0.3180	0.3760	0.3760	0.4085	-0.1160
2	0.889	0.2020	0.2600	0.2330	0.2469	-0.1160
3	1.091	0.1400	0.1710	0.1590	0.1654	-0.0620
4	1.231	0.1020	0.1210	0.1135	0.1177	-0.0380
5	1.333	0.0790	0.0905	0.0830	0.0895	-0.0230
6	1.412	0.0790	0.0675	0.0675	0.0895	-0.0230

Краткие комментарии по поводу использованных формул и их точности:

Столбец 1 – Односторонняя разностная производная.

Были использованы формулы первого порядка точности.

Для первых пяти узлов вычислены правосторонние разностные производные, по формуле:

$$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + O(h)$$

Для шестого узла – левосторонняя разностная производная, по формуле:

$$y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + O(h)$$

Столбец 2 – Центральная разностная производная.

Использованы формулы второго порядка точности для вычисления 1-й производной в крайних узлах:

$$y'_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2)$$

$$y'_5 = \frac{y_3 - 4y_4 + 3y_5}{2h} + O(h^2)$$

Столбец 3 – Вторая формула Рунге.

Использованы формулы правосторонней и левосторонней производной повышенной точности.

Для первых четырёх узлов – правосторонняя:

$$y'_n = \frac{4y_{n+1} - 3y_n - y_{n+2}}{2h} + O(h^2)$$

Для пятого и шестого – левосторонняя:

$$y'_n = \frac{-4y_{n-1} + 3y_n + y_{n-2}}{2h} + O(h^2)$$

Столбец 4 – Выравнивающие переменные.

Использованы формулы:

$$y'_n = \frac{y_n}{x_n} * \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} * \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n - x_{n+1}}$$

$$y'_n = \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} * \frac{x_n}{y_n} * \frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n}$$

Столбец 5 – Вторая разностная производная.

Использованы формулы второго и первого порядка точности.

Первый узел:

$$y''_0 = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} + O(h)$$

Узлы со второго по пятый:

$$y''_n = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Шестой узел:

$$y''_n = \frac{y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n}{h^2} + O(h)$$

Работающую программу можно увидеть и протестировать через web-интерфейс по следующей ссылке:

https://share.streamlit.io/dkosarevsky/math_modelling/main.py

Программа написана на языке программирования Python 3.9.7 с использованием следующих библиотек:

- streamlit
- pandas

Код

```
import streamlit as st
import pandas as pd

from typing import List


def one_sided_derivative(n: int, x_arr_len: int, y_arr: List, h: int) -> float:
    """ Односторонняя разностная производная """
    if n + 1 == x_arr_len:
        return (y_arr[n] - y_arr[n - 1]) / h
    return (y_arr[n + 1] - y_arr[n]) / h


def central_derivative(n: int, x_arr_len: int, y_arr: List, h: int) -> float:
    """ Центральная разностная производная """
    if n == 0:
        return (-3 * y_arr[0] + 4 * y_arr[1] - y_arr[2]) / (2 * h)
    elif n + 1 < x_arr_len:
        return (y_arr[n + 1] - y_arr[n - 1]) / (2 * h)
    return (y_arr[n - 2] - 4 * y_arr[n - 1] + 3 * y_arr[n]) / (2 * h)


def runge_derivative(n: int, x_arr_len: int, y_arr: List, h: int) -> float:
    """ Рунге (2-ая формула) с использованием односторонней производной """
    if n + 2 >= x_arr_len:
        return (3 * y_arr[n] - 4 * y_arr[n - 1] + y_arr[n - 2]) / (2 * h)
    return (-y_arr[n + 2] + 4 * y_arr[n + 1] - 3 * y_arr[n]) / (2 * h)


def alignment_variables(n: int, x_arr_len: int, y_arr: List, x_arr: List) -> float:
    """ Выравнивающие переменные """
    if n + 1 < x_arr_len:
        return y_arr[n] / x_arr[n] * x_arr[n + 1] / y_arr[n + 1] * (y_arr[n] - y_arr[n + 1]) /
(x_arr[n] - x_arr[n + 1])
    return y_arr[n - 1] / x_arr[n - 1] * x_arr[n] / y_arr[n] * (y_arr[n - 1] - y_arr[n]) /
(x_arr[n - 1] - x_arr[n])


def second_derivative(n: int, x_arr_len: int, y_arr: List, h: int) -> float:
    """ Вторая разностная производная """
    if n == 0:
        return (y_arr[2] - 2 * y_arr[1] + y_arr[0]) / (h * h)
    elif n + 1 < x_arr_len:
        return (y_arr[n + 1] - 2 * y_arr[n] + y_arr[n - 1]) / (h * h)
    return (y_arr[n] - 2 * y_arr[n - 1] + y_arr[n - 2]) / (h * h)


def main():
    st.markdown("### Лабораторная работа №3")
    st.markdown("**Тема:** Построение и программная реализация алгоритмов численного
дифференцирования.")
    st.markdown("""**Цель работы:**
    Получение навыков построения алгоритма вычисления производных от сеточных функций.""")

    formula = r"""
    $$
```

```
    y = \frac{a_0x}{a_1 + a_2x}
    $$
    """
    st.markdown("""**Задание:**
        Задана табличная (сеточная) функция.
        Имеется информация, что закономерность представленная таблицей, может быть описана
формулой""")
    st.write(formula)
    st.write("Параметры функции:")

    a1, a2, a3 = st.columns(3)
    b1, b2, b3 = st.columns(3)
    c1, c2, c3 = st.columns(3)
    d1, d2, d3 = st.columns(3)
    e1, e2, e3 = st.columns(3)
    f1, f2, f3 = st.columns(3)

    x1 = a1.number_input("x₁", min_value=1, max_value=10, value=1, step=1)
    x2 = b1.number_input("x₂", min_value=1, max_value=10, value=2, step=1)
    x3 = c1.number_input("x₃", min_value=1, max_value=10, value=3, step=1)
    x4 = d1.number_input("x₄", min_value=1, max_value=10, value=4, step=1)
    x5 = e1.number_input("x₅", min_value=1, max_value=10, value=5, step=1)
    x6 = f1.number_input("x₆", min_value=1, max_value=10, value=6, step=1)

    y1 = a2.number_input("y₁:", min_value=.001, max_value=10., value=.571, format="%.4f")
    y2 = b2.number_input("y₂", min_value=.001, max_value=10., value=.889, format="%.4f")
    y3 = c2.number_input("y₃", min_value=.001, max_value=10., value=1.091, format="%.4f")
    y4 = d2.number_input("y₄", min_value=.001, max_value=10., value=1.231, format="%.4f")
    y5 = e2.number_input("y₅", min_value=.001, max_value=10., value=1.333, format="%.4f")
    y6 = f2.number_input("y₆", min_value=.001, max_value=10., value=1.412, format="%.4f")

    h = a3.number_input("h:", min_value=1, max_value=10, value=1, step=1)

    x_array = [x1, x2, x3, x4, x5, x6]
    y_array = [y1, y2, y3, y4, y5, y6]
    x_array_len = len(x_array)
    x_array_range = range(x_array_len)

    st.write("---")
    st.write("Итоговая таблица:")
    result_data = {
        "x": x_array,
        "y": y_array,
        "1": [one_sided_derivative(ln, x_array_len, y_array, h) for ln in x_array_range],
        "2": [central_derivative(ln, x_array_len, y_array, h) for ln in x_array_range],
        "3": [runge_derivative(ln, x_array_len, y_array, h) for ln in x_array_range],
        "4": [alignment_variables(ln, x_array_len, y_array, x_array) for ln in x_array_range],
        "5": [second_derivative(ln, x_array_len, y_array, h) for ln in x_array_range],
    }
    result = pd.DataFrame(data=result_data).applymap("{0:.4f}".format)
    st.table(result.assign(hack="").set_index("hack"))




if __name__ == "__main__":
    main()
```

Вопросы

1. Получить формулу порядка точности $O(h^2)$ для первой разностной производной y'_N в крайнем правом узле x_N.

Для получения формулы необходимо выполнить разложение функции в ряд Тейлора в узлах y_{N-1} и y_{N-2}

$$y_{N-1} = y_N - hy'_N + \frac{h^2}{2!}y''_N - \frac{h^3}{3!}y'''_N + \dots$$

$$y_{N-2} = y_N - 2hy'_N + \frac{4h^2}{2!}y''_N - \frac{8h^3}{3!}y'''_N + \dots$$

$$4y_{N-1} - y_{N-2} = 3y_N - 2hy'_N + \frac{4h^3}{3!}y'''_N + \dots$$

$$y'_N = \frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{2h} + \frac{h^2}{3}y'''_N$$

$$y'_N = \frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{2h} + O(h^2)$$

2. Получить формулу порядка точности $O(h^2)$ для второй разностной производной y''_0 в крайнем левом узле x_0.

Для получения формулы необходимо выполнить разложение функции в ряд Тейлора:

$$y_1 = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \frac{h^3}{3!}y'''_0 + \frac{h^4}{4!}y''''_0 + \dots$$

$$y_2 = y_0 + 2hy'_0 + \frac{4h^2}{2!}y''_0 + \frac{8h^3}{3!}y'''_0 + \frac{16h^4}{4!}y''''_0 + \dots$$

$$y_3 = y_0 + 3hy'_0 + \frac{9h^2}{2!}y''_0 + \frac{27h^3}{3!}y'''_0 + \frac{81h^4}{4!}y''''_0 + \dots$$

$$y_2 - 2y_1 = -y_0 + \frac{2h^2}{2!}y''_0 + \frac{6h^3}{3!}y'''_0 + \frac{14h^4}{4!}y''''_0 + \dots$$

$$y_3 - 3y_1 = -2y_0 + \frac{6h^2}{2!}y''_0 + \frac{24h^3}{3!}y'''_0 + \frac{78h^4}{4!}y''''_0 + \dots$$

$$4y_2 - 8y_1 - y_3 + 3y_1 = -2y_0 + \frac{2h^2}{2!}y''_0 - \frac{22h^4}{4!}y''''_0 + \dots$$

$$-5y_1 + 4y_2 - y_3 = -2y_0 + h^2y''_0 - \frac{11h^4}{4!}y''''_0 + \dots$$

$$y''_0 = \frac{2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3}{h^2} + \frac{11h^2}{12} y''''_0$$

$$y''_0 = \frac{2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3}{h^2} + O(h^2)$$

3. Используя 2-ю формулу Рунге, дать вывод выражения для первой производной y'_0 в левом крайнем узле

$$y'_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2).$$

Вторая формула Рунге:

$$\Omega = \Phi(h) + \frac{\Phi(h) - \Phi(mh)}{m^p - 1} + O(h^{p+1})$$

$$\Phi(h) = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

$$\Phi(2h) = \frac{y_2 - y_0}{2h}$$

p = 1

m = 2

$$y'_0 = \frac{2y_1 - 2y_0}{h} - \frac{y_2 - y_0}{2h} + O(h^2)$$

$$y'_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2)$$