In [1]:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
%matplotlib inline
```

1. Исследовать ряд на сходимость, используя признак д'Аламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

Признак д'Аламбера гласит, что

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Если $q < 1$ то ряд сходится, если $q > 1$ - расходится. При q=1 - требуются дополнительные исследования

В нашем случае

$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{(n+1)^{(n+1)}}{((n+1)!)^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^{(n+1)}}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^{(n+1)}}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n!)^2 \cdot (n+1)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \lim_{n \to}$

Видим, что максимальная степень n в числителе меньше чем в знаменателе, а значит при n стремящемся к бесконечности предел будет стремиться к 0

$q = 0 \Rightarrow q < 1$, а значит ряд сходится

---

2. Исследовать ряд на сходимость, используя радикальный признак Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Радикальный признак Коши говорит, что

Если,

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$
то при
$q < 1$ - ряд сходится
$q > 1$ - ряд расходится
$q = 1$ - требуются дополнительные исследования

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2}$
$q = \frac{1}{2} \Rightarrow q < 1$ А значит ряд сходится

---

3. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \ln n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+\ln n}$ - ряд знакочередующийся

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\ln n} = 0$ - ряд убывает

Проверим монотонность убывания:

$\frac{1}{n+\ln n} - \frac{1}{(n+1)+\ln(n+1)} = \frac{n+1+\ln(n+1)-n-\ln n}{(n+\ln n)\cdot((n+1)+\ln(n+1))} = \frac{(1+\ln \frac{n+1}{n})}{(n+\ln n)\cdot((n+1)+\ln(n+1))} = \frac{1+\ln(1+\frac{1}{n})}{(n+\ln n)\cdot((n+1)+\ln(n+1))} > 0 \Rightarrow a_n >$

Первое условие признака Лейбница выполнено, значит ряд сходится

Теперь проверим сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Для этого воспользуемся предельным признаком сходимости

Воспользуемся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Тогда,

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \div \frac{1}{n+\ln n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+\ln n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\ln n}{n}\right) = 1$

Так как гармонический ряд расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\ln n}$ также расходится

Вывод:

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n}$ сходится условно

---

4. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Раабе:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$$

По признаку Раабе:

Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\right) = D$

То,

При $D < 1$ - ряд расходится
При $D > 1$ - ряд сходится
При $D = 1$ - Нужны дополнительные исследования

Отсюда,

$D = \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \left(\frac{3^n}{2^n} \div \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \left(\frac{3^n}{2^n} \cdot \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} - 1\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \left(\frac{2}{3} - 1\right)\right) = \lim$

Следовательно $D < 1$, а значит ряд расходится

---

5. Разложить функцию по Тейлору в единице:

$$f(x) = \ln(16x^2)$$

Ряд Тейлора выглядит следующим образом

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

Значит, $f(x)$ в точке 0

$f(x) = \ln 16 + 2(x-1)$

---

6. Дана функция:

$$f(x) = x^2$$

- Разложить функцию в ряд Фурье по косинусам на отрезке $x \in [-\pi; \pi]$
- Построить график функции и ее разложения

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$

Так как функция $f(x) = x^2$ является четной, то разложение в ряд Фурье для нее не содержит элемента b_n и выглядит как

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

Коэффициенты a_0, a_n в этом случае выглядят как

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$
$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx$

Найдем коэффициенты

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}(\frac{x^3}{3})\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos nxdx$

Применим интегрирование по частям

$$\begin{bmatrix} u = x^2 & v = \frac{1}{n}\sin nx \\ du = 2xdx & dv = \cos nxdx \end{bmatrix}$$

$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x^2 \sin nx\Big|_0^\pi - \frac{2}{n}\int_0^\pi x \sin nx dx\right) = \frac{2}{\pi n}\left(x^2 \sin nx\Big|_0^\pi - 2\int_0^\pi x \sin nx dx\right)$

$x^2 \sin nx\Big|_0^\pi$ будет равен 0, так как $\sin n\pi = 0$ для натуральных n

Также по частям найдем $\int_0^\pi x \sin nx dx$

$$\begin{bmatrix} u = x & v = -\frac{1}{n}\cos nx \\ du = 1 & dv = \sin nx dx \end{bmatrix}$$

$a_n = \frac{2}{\pi n}\left(- 2(-\frac{1}{n}x \cos nx + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx dx)\right) = \frac{4}{\pi n^2}\left(x \cos nx\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos nx dx)\right) = \frac{4}{\pi n^2}\left(\pi \cos n\pi + \frac{1}{n}\right.$

Здесь, $\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^\pi = 0$ для всех натуральных n
$\pi \cos n\pi = \pi \cdot (-1)^n$

Отсюда

$a_n = \frac{4}{\pi n^2} \cdot \pi \cdot (-1)^n = \frac{4}{n^2} \cdot (-1)^n$

Итого, разложение функции $f(x) = x^2$ на ряд Фурье будет выглядеть как

$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot (-1)^n \cos nx$

In [22]:

```
def fourier_x2(n, x):
    return (4/n**2)*((-1)**n)*np.cos(n*x)

plt.figure(figsize=(8, 8))
num = 4
x = np.linspace(-np.pi, np.pi, 1000)
y1 = x**2
y2 = np.pi**2/3 + sum([fourier_x2(n, x) for n in range(1, num+1)])

plt.plot(x, y1, lw=1, color='blue', label='f(x)=x^2')
plt.plot(x, y2, lw=1, color='red', label=f'Fourier n={num}')

plt.axvline(color='black', lw=1.5)
plt.axhline(color='black', lw=1.5)
plt.grid('true')
plt.legend(loc='best')
plt.show()
```