In [1]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
```

1. Найти длину x и ширину y прямоугольника при заданном периметре P=144 см, при которых данный прямоугольник имеет наибольшую площадь S.

$$\begin{cases} P = 2(x + y) = 144 \\ S = x \cdot y \end{cases}$$

Выразим y через x
$y = 72 - x$
Тогда,

$$S = x(72 - x) = 72x - x^2$$

Найдем максимум функции.

$S' = 72 - 2x$
$72 - 2x = 0$
$x = 36$

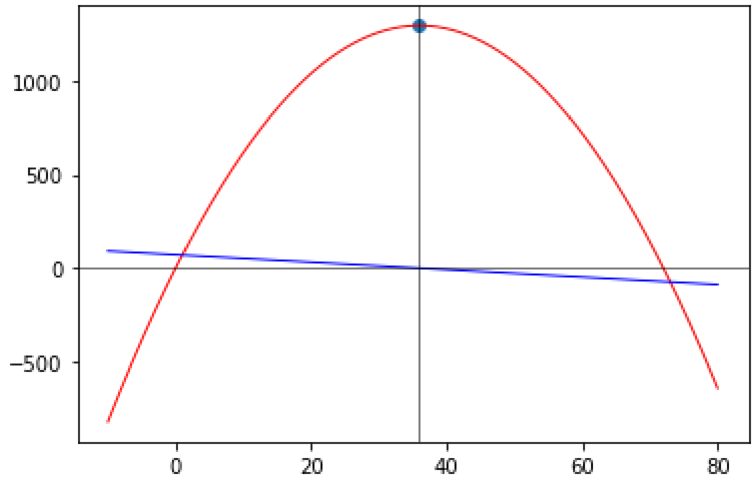
Мы нашли точку, удовлетворяющую необходимому условию экстремума.
Проверим ее на достаточность
Определим знаки производной на полученных интервалах
$(-\infty; 36) x_0 = 0, S'(x_0) = 72 - 2 \cdot 0 = 72$
$(36; +\infty) x_0 = 40, S'(x_0) = 72 - 2 \cdot 40 = -8$

Видим, что происходит смена знака в точке x_0, а значит она удовлетворяет достаточному условию.
Кроме того, данный экстремум является максимумом, так как происходит смена знака с + на -

Отсюда,
$x = 36$
$y = 72 - x = 36$

In [2]:

```
# visualization↔
```



---

2. Найти экстремумы функций (если они есть)

Необходимым условием экстремума функции является:
Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то в этой точке $f'(x_0)$ обращается в 0, либо не существует

Достаточное условие экстремума функции:
Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0, в которой она является непрерывной. Тогда если производня $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то точка x_0 является точкой экстремума

$$y = |2x| \tag{1}$$

$$y = x^3 \tag{2}$$

$$y = e^{3x} \tag{3}$$

$$y = x^3 - 5x \tag{4}$$

Найдем производную выражения (1)
$y' = \frac{4x}{|2x|}$

y' не существует в точке $x_0 = 0$
Область значений производной функции (1): $(-\infty; 0) \vee (0; +\infty)$
А значит производная y' меняет знак при переходе через точку $x_0 = 0$, следовательно данная точка является экстремумом функции (1)

Найдем производную выражения (2)
$y' = 3x^2$

Производная функции (2) определена на $(-\infty; +\infty)$
Найдем точки, в которых производная обращается в 0
$3x^2 = 0$, а следовательно $x = 0$
Область значений производной функции (2): $[0; +\infty)$
Производная функции неотрицательна, а значит в точке x_0 смены знака не происходит, значит точка не является экстремумом

Найдем производную выражения (3)
$y' = 3e^{3x}$

Производная функции (3) определена на $(-\infty; +\infty)$ и $3e^{3x} \neq 0$
А значит нет точек, подходящих под необходимое условие экстремума

Найдем производную выражения (4)
$y' = 3x^2 - 5$

Производная функции (4) определена на $(-\infty; +\infty)$
Найдем точки, в которых производная обращается в 0
$3x^2 - 5 = 0$, а следовательно $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

Определим знаки производной на полученных интервалах
$(-\infty; -\sqrt{\frac{5}{3}})$ Возьмем $x_0 = -2$. Тогда, $f'(x_0) = 3(-2)^2 - 5 = 7$
$(-\sqrt{\frac{5}{3}}; \sqrt{\frac{5}{3}})$Возьмем $x_0 = 0$. Тогда, $f'(x_0) = 3 \cdot 0^2 - 5 = -5$
$(\sqrt{\frac{5}{3}}; +\infty)$Возьмем $x_0 = 2$. Тогда, $f'(x_0) = 3 \cdot 2^2 - 5 = 7$

Отсюда следует, что происходит смена знака с + на - в точке $x_0 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$ - следовательно это точка максимума. А также с - на + в точке $x_0 = \sqrt{\frac{5}{3}}$ - следовательно это точка минимума

In [3]:

```
# visualization↔
```