In [1]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
```

Исследовать функцию на условный экстремум:

$$U = 3 - 8x + 6y$$

если

$$x^2 + y^2 = 36$$

Составим функцию Лагранжа

$L = 3 - 8x + 6y + \lambda(x^2 + y^2 - 36)$

Найдем частные производные первого порядка

$L'_x = \lambda \cdot 2x - 8$
$L'_y = \lambda \cdot 2y + 6$
$L'_\lambda = x^2 + y^2 - 36$

Для нахождения точек, удовлетворяющих необходимому условию экстремума, составим систему уравнений

$\begin{cases} \lambda \cdot 2x - 8 = 0 \\ \lambda \cdot 2y + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda} \\ y = -\frac{3}{\lambda} \\ (\frac{4}{\lambda})^2 + (-\frac{3}{\lambda})^2 - 36 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda} \\ y = -\frac{3}{\lambda} \\ \lambda_{1,2} = \pm\frac{5}{6} \end{cases}$

Получим

при $\lambda = -\frac{5}{6}$ точка, подозреваемая на экстремум $(-\frac{24}{5}, \frac{18}{5})$
при $\lambda = \frac{5}{6}$ точка, подозреваемая на экстремум $(\frac{24}{5}, -\frac{18}{5})$

Для проверки достаточного условия используем матричную форму

$A = \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix}$

$L''_{xx} = 2\lambda$
$L''_{yy} = 2\lambda$
$L''_{x\lambda} = L''_{\lambda x} = 2x$
$L''_{y\lambda} = L''_{\lambda y} = 2y$
$L''_{xy} = L''_{yx} = 0$
$L''_{\lambda\lambda} = 0$

Следовательно

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Найдем определитель матрицы A в общем виде

$$|A| = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{vmatrix} - 2x \cdot \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 2\lambda \end{vmatrix} + 2y \cdot \begin{vmatrix} 2x & 2\lambda \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = -2x(2x \cdot 2\lambda) - 2y(2y \cdot 2\lambda) = -8\lambda(x^2 + y^2)$$

Очевидно, что знак определителя зависит только от λ

Для первой точки при $\lambda = -\frac{5}{6}; (-\frac{24}{5}, \frac{18}{5}) \Rightarrow |A| > 0$. Следовательно это максимум
Для второй точки при $\lambda = \frac{5}{6}; (\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}) \Rightarrow |A| < 0$. Следовательно это минимум

Исследовать функцию на условный экстремум:

$$U = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15$$

если

$$x^2 + 16y^2 = 64$$

Составим функцию Лагранжа

$$L = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15 + \lambda(x^2 + 16y^2 - 64)$$

Найдем частные производные первого порядка

$$L'_x = 4x + 12y + 2x\lambda$$
$$L'_y = 12x + 64y + 32y\lambda$$
$$L'_\lambda = x^2 + 16y^2 - 64$$

Для нахождения точек, удовлетворяющих необходимому условию экстремума, составим систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + 12y + 2x\lambda = 0 \\ 12x + 64y + 32y\lambda = 0 \\ x^2 + 16y^2 - 64 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 6y + x\lambda = 0 \\ 3x + 16y + 8y\lambda = 0 \\ x^2 + 16y^2 - 64 = 0 \end{cases}$$

Выразим x

$$2x + x\lambda = -6y$$
$$x = -\frac{6y}{2+\lambda}$$

Подставим во второе уравнение

$$3(-\frac{6y}{2+\lambda}) + 16y + 8y\lambda = 0$$
$$-\frac{18y}{2+\lambda} + 16y + 8y\lambda = 0$$
$$2y(4\lambda + 8 - \frac{9}{2+\lambda}) = 0$$

Найдем λ

$\frac{4\lambda(\lambda+2)+8(\lambda+2)-9}{\lambda+2} = 0$
$4\lambda^2 + 8\lambda + 8\lambda + 16 - 9 = 0$
$4\lambda^2 + 16\lambda + 7 = 0$

Найдем корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-16\pm\sqrt{16^2-4\cdot4\cdot7}}{2\cdot4} = \frac{-16\pm12}{8} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2}; \lambda_2 = -\frac{7}{2}$$

Найдем x, y при $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} 2x + 6y + x(-\frac{1}{2}) = 0 \\ 3x + 16y + 8y(-\frac{1}{2}) = 0 \\ x^2 + 16y^2 - 64 = 0 \end{cases}$$

Выразим x

$$x(2 - \frac{1}{2}) = -6y \Rightarrow x = -4y$$

Отсюда

$(-4y)^2 + 16y^2 - 64 = 0$
$32y^2 = 64$
$y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$
$x = \mp4\sqrt{2}$

Аналогично, при $\lambda = -\frac{7}{2}$

$$x(2 - \frac{7}{2}) = -6y \Rightarrow x = 4y$$

Значит,

$$y = \pm\sqrt{2}; x = \pm4\sqrt{2}$$

В результате получим

при $\lambda = -\frac{1}{2}$ точки, подозреваемые на экстремум $(4\sqrt{2}, -\sqrt{2}); (-4\sqrt{2}, \sqrt{2})$
при $\lambda = -\frac{7}{2}$ точки, подозреваемые на экстремум $(4\sqrt{2}, \sqrt{2}); (-4\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

Для проверки достаточного условия используем матричную форму

$$A = \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix}$$

$L''_{xx} = 2\lambda + 4$
$L''_{yy} = 32\lambda + 64$
$L''_{x\lambda} = L''_{\lambda x} = 2x$
$L''_{y\lambda} = L''_{\lambda y} = 32y$
$L''_{xy} = L''_{yx} = 12$
$L''_{\lambda\lambda} = 0$

Следовательно

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 32y \\ 2x & 2\lambda + 4 & 12 \\ 32y & 12 & 32\lambda + 64 \end{pmatrix}$$

Найдем определитель матрицы A в общем виде

$$|A| = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2\lambda + 4 & 12 \\ 12 & 32\lambda + 64 \end{vmatrix} - 2x \cdot \begin{vmatrix} 2x & 12 \\ 32y & 32\lambda + 64 \end{vmatrix} + 32y \cdot \begin{vmatrix} 2x & 2\lambda + 4 \\ 32y & 12 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$|A| = -2x(2x(32\lambda + 64) - 12 \cdot 32y) + 32y(2x \cdot 12 - 32y(2\lambda + 4)) = -2x(64\lambda x + 128x - 384y) + 3$$

$$- 256x^2 + 768xy + 768xy - 2048\lambda y^2 - 4096y^2 = -128(\lambda x^2 + 2x^2 - 12xy + 16\lambda y^2 + 32y^2)$$

Для первой точки при $\lambda = -\frac{1}{2}; (4\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \Rightarrow |A| < 0$. Следовательно это минимум
Для второй точки при $\lambda = \frac{1}{2}; (-4\sqrt{2}, \sqrt{2}) \Rightarrow |A| < 0$. Следовательно это минимум
Для первой точки при $\lambda = -\frac{7}{2}; (-4\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \Rightarrow |A| > 0$. Следовательно это максимум
Для второй точки при $\lambda = -\frac{7}{2}; (4\sqrt{2}, \sqrt{2}) \Rightarrow |A| > 0$. Следовательно это максимум

Найти производную функции

$$U = x^2 + y^2 + z^2$$

по направлению вектора

$$\overline{c}(-9, 8, -12)$$

в точке

$$M(8; -12; 9)$$

Сначала найдем градиент функции в точке M

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2y$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = 2z$$

$$gradU|_M = (16, -24, 18)$$

Нормируем вектор $\overline{c}$

$$|\overline{c}| = \sqrt{(-9)^2 + 8^2 + (-12)^2} = 17$$
$$\overline{c}_0 = (-\frac{9}{17}, \frac{8}{17}, -\frac{12}{17})$$

Отсюда, производная функции по направлению будет равна

$$\frac{\partial U}{\partial l_c} = 16 \cdot (-\frac{9}{17}) + (-24) \cdot \frac{8}{17} + 18 \cdot (-\frac{12}{17}) = -\frac{552}{17} = -\frac{544}{17} - \frac{8}{17} = -(32 + \frac{8}{17}) \approx -32.47$$

Найти производную функции

$$U = e^{x^2+y^2+z^2}$$

по направлению вектора

$$\overline{d} = (4, -13, -16)$$

в точке

$$L(-16; 4; -13)$$

Сначала найдем градиент функции в точке M

$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$
$\frac{\partial U}{\partial y} = 2y \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$
$\frac{\partial U}{\partial z} = 2z \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$

$gradU|_M = (16, -24, 18)$

$e^{x^2+y^2+z^2}(L) = e^{441}$

Нормируем вектор $\overline{d}$

$|\overline{d}| = \sqrt{(4)^2 + (-13)^2 + (-16)^2} = 21$
$\overline{d}_0 = (\frac{4}{21}, -\frac{13}{21}, -\frac{16}{21})$

Отсюда, производная функции по направлению будет равна

$\frac{\partial U}{\partial l_d} = 2 \cdot (-16) \cdot e^{441} \cdot \frac{4}{21} + 2 \cdot 4 \cdot e^{441} \cdot (-\frac{13}{21}) + 2 \cdot (-13) \cdot e^{441} \cdot (-\frac{16}{21}) = 2 \cdot e^{441} \cdot (-\frac{64}{21} - \frac{52}{21} + \frac{208}{21})$