In [1]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
```

1. Найти область определения функции:

$$z = \sqrt{1 - x^3} + \ln(y^2 - 1) \tag{1}$$

Функция (1) определена при

$x \in (-\infty; 1] \wedge y \in (1; +\infty)$

---

2. Найти производные 1-го порядка функции:

$$z = (1 + \frac{\ln x}{\ln y})^3 \tag{2}$$

$z'_x = ((1 + \frac{\ln x}{\ln y})^3)'_x (1 + \frac{\ln x}{\ln y})'_x = \frac{3(1+\frac{\ln x}{\ln y})^2}{x \ln y}$

$z'_y = ((1 + \frac{\ln x}{\ln y})^3)'_y (1 + \frac{\ln x}{\ln y})'_y = 3(1 + \frac{\ln x}{\ln y})^2 \ln x (\ln y)^{-1})' = 3(1 + \frac{\ln x}{\ln y})^2 \ln x(-\frac{1}{\ln^2 y} \cdot \frac{1}{y}) = -\frac{3 \ln x(1+\frac{\ln}{\ln}}{y \ln^2 y}$

---

3. Найти полный дифференциал функции в точке (1;1)

$$z = \sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}} \tag{3}$$

Полный дифференциал функции представляет из себя

$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

Найдем частные производные первого порядка

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{2xy+\cos \frac{x}{y}}}(2y - \frac{\sin \frac{x}{y}}{y}) = \frac{2y^2 - \sin \frac{x}{y}}{2y\sqrt{2xy+\cos \frac{x}{y}}}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{2xy+\cos \frac{x}{y}}}(2x + \frac{x \sin \frac{x}{y}}{y^2}) = \frac{2xy^2 + x \sin \frac{x}{y}}{2y^2\sqrt{2xy+cos \frac{x}{y}}}$

Найдем полный дифференциал в точке (1;1)

$dz(1;1) = \frac{2-\sin 1}{2\sqrt{2+\cos 1}} dx + \frac{2+\sin 1}{2\sqrt{2+\cos 1}} dy \approx 0.36dx + 0.89dy$

Значит функция возрастает по обеим переменным в точке (1;1)

---

4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y \tag{4}$$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 6$
$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 9$

Найдем точки, удовлетворяющие необходимому условию на экстремум

$\begin{cases} x + 2y - 9 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 - 2y \\ 2(9 - 2y) + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$

Получили точку $M_0(1; 4)$

Проверим ее на достаточное условие. Найдем частные производные второго порядка

$z''_{xx} = 2$
$z''_{yy} = 2$
$z''_{xy} = 1$
$z''_{yx} = 1$

$\begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\Delta = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 > 0$

Делаем вывод, что в точке M_0 есть экстремум и это минимум, так как $z''_{xx} > 0$