1. Найти неопределенный интеграл

$$\int(2x^2-2x-1+\sin x-\cos x+\ln x+e^x)dx$$

$\int(2x^2-2x-1+\sin x-\cos x+\ln x+e^x)dx=2\int x^2dx-2\int 2xdx-\int 1\cdot dx+\int\sin xdx-\int cos$
$-\ x-\cos x-\sin x+e^x+x\ln x-x+C=(*)$

Интеграл $\ln xdx$ можно решить методом интегрирования по частям

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

$f(x)=\ln x \quad g(x)=x$
$f'(x)=\frac{1}{x} \quad g'(x)=1$

$\int\ln x = x\cdot\ln x-\int\frac{1}{x}xdx = x\ln x-x$

$(*)=\mathbf{\frac{2x^3}{3}-x^2-2x-\cos x-\sin x+e^x+x\ln x+C}$

---

2. Найти неопределенный интеграл

$$\int(2x+6xz^2-5x^2y-3\ln z)dx$$

$\int(2x+6xz^2-5x^2y-3\ln z)dx=2\int xdx+6z^2\int xdx-5y\int x^2dx-3\ln z\int 1\cdot dx=\frac{2\cdot x^2}{2}+\frac{6z^2\cdot x^2}{2}$
$\mathbf{-\frac{5x^3y}{3}+x^2(3z^2+1)-3x\ln z}+C$

---

3. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^\pi 3x^2\sin(2x)dx$$

Для вычисления по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$$

найдем первообразную функции

$\int 3x^2\sin(2x)dx = 3\int x^2\sin(2x)dx = (*)$
по методу интегрирования по частям

$f(x) = x^2 \qquad g(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$
$f'(x) = 2x \qquad g'(x) = \sin 2x$

Первообразную g(x) можно найти следующим образом:
Пусть $t = 2x$, тогда $x = \frac{1}{2}t$
$\int \sin 2x dx = \int \sin t d\frac{1}{2}t = -\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{1}{2}cos 2x + C$

Используя
$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Получим
$(*) = 3(-\frac{1}{2}x^2 \cos 2x - \int 2x(-\frac{1}{2}cos 2x)dx) = 3(-\frac{1}{2}x^2 \cos 2x + \int xcos 2x dx)$

Интеграл $\int xcos 2x dx$ аналогично найдем по частям

$f(x) = x \qquad g(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$
$f'(x) = 1 \qquad g'(x) = \cos 2x$

$\int xcos 2x dx = \frac{1}{2}x \sin 2x - \int 1 \cdot \frac{1}{2}\sin 2x dx = \frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}\cos 2x) +$

$3(-\frac{1}{2}x^2 \cos 2x + \int xcos 2x dx) = 3(-\frac{1}{2}x^2 \cos 2x + \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C)$

Значит,

$\int \mathbf{3x^2} \sin(\mathbf{2x})\mathbf{dx} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}(\mathbf{2x^2} \cos \mathbf{2x} - \mathbf{2x} \sin \mathbf{2x} - \cos \mathbf{2x} + \mathbf{C})$

Теперь найдем определенный интеграл $\int_0^\pi 3x^2 \sin(2x)dx$

$\int_0^\pi 3x^2 \sin(2x)dx = -\frac{3}{4}(2\pi^2 \cos 2\pi - 2\pi \sin 2\pi - \cos 2\pi + C) - (-\frac{3}{4}(2 \cdot 0^2 \cos 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \sin 2 \cdot 0 -$
$+ \frac{3}{4}(-1 + C) = -\frac{6\pi^2}{4} - \frac{3}{4}C + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}C = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\pi^{\mathbf{2}}$

4. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$$

Данный интеграл можно найти, например, методом замены переменной

Пусть

$t = x + 1$

Тогда

$x = t - 1$
$dx = dt$

Отсюда

$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \mathrm{C} = 2 \cdot \sqrt{t} + C = (*)$

Произведем обратную замену

$$(*) = \mathbf{2\sqrt{x+1} + C}$$