26. Trọng số đỉnh

Hãy chứng tỏ rằng có thể tính các đường đi ngắn nhất trong một đồ thị có hướng với các trọng số không âm tại các đỉnh (trong đó trọng số của một đường đi là tổng các trọng số của các đỉnh) bằng cách xây dựng một đồ thị có hướng với trọng số cạnh.

**Giải**

Đồ thị có hướng G với các trọng số không âm

Xây dựng G' có cùng số lượng đỉnh với G.

Với mỗi cạnh (u, v) trong G, thêm một cạnh từ u đến v trong G' với trọng số là trọng số của đỉnh v trong G.

Giả sử rằng có một đường đi ngắn nhất từ đỉnh nguồn s đến đỉnh t trong đồ thị G, và đường đi này không phải là đường đi ngắn nhất trong đồ thị G'.

* Tồn tại một đường đi từ s đến t trong đồ thị G' có tổng trọng số nhỏ hơn đường đi ngắn nhất trong G.

Xét đỉnh u trong đường đi ngắn nhất từ s đến t trong G. Trong G', đỉnh u tương ứng với đỉnh trong G và trọng số của đỉnh u trong G' tương ứng với trọng số của đỉnh u trong G.

* Nếu thay thế đường đi ngắn nhất từ s đến t trong G bằng đường đi tương ứng trong G', tổng trọng số của đường đi này sẽ nhỏ hơn đường đi ngắn nhất ban đầu trong G.
* Vô lý => dpcm