Отчет по Пуассоновским потокам

Как генерируются пуассоновские потоки?

Пуассоновский поток — это последовательность случайных событий, происходящих в некоторый момент времени. Время между событиями (интервалы) имеет экспоненциальное распределение с параметром λ — интенсивностью потока. Для генерации пуассоновских потоков:

1. Генерируются интервалы между событиями: время ожидания до следующего события экспоненциально распределено (Expon(λ)). Для генерации этих интервалов используется формула:

   interval = -1 / λ * ln(U),

   где U — равномерно распределённая случайная величина на отрезке [0, 1].

2. Накопление событий во времени: суммируются интервалы между событиями для получения момента каждого события. Генерированные интервалы добавляются к текущему времени, пока не достигнут конца наблюдаемого промежутка.

Определение и свойства пуассоновских потоков

Пуассоновский поток описывает случайный процесс, при котором события происходят независимо друг от друга с постоянной интенсивностью λ.

Основные свойства:

1. Отсутствие памяти: вероятность того, что событие произойдет в ближайший момент времени, не зависит от того, когда произошло последнее событие.
2. Независимость событий: количество событий в непересекающихся промежутках времени — независимые случайные величины.
3. Гомогенность: вероятность появления события в малом интервале времени Δt примерно равна λΔt, где λ — интенсивность потока.

Распределение величины потока

Количество событий N(T), произошедших за фиксированное время T, имеет пуассоновское распределение с параметром λT:

   P(N(T) = k) = (λT)^k * e^(-λT) / k! , k = 0, 1, 2, ...

где:

- λ — интенсивность потока (среднее число событий в единицу времени),
- T — период времени наблюдения.

Это означает, что вероятность появления точно k событий за время T описывается этой формулой.

Математическое ожидание и дисперсия пуассоновского потока

Математическое ожидание (среднее количество событий) для пуассоновского потока равно:
$E[N(T)] = \lambda T$.

Дисперсия числа событий за время T также равна λT:
$Var(N(T)) = \lambda T$.

Это важное свойство пуассоновского процесса: среднее значение и дисперсия числа событий одинаковы.

Оценка интенсивности

Чтобы оценить интенсивность λ по наблюдениям, можно использовать эмпирическую оценку интенсивности:
$\hat{\lambda} = \Sigma N(T_i) / (nT)$,
где $N(T_i)$ — число событий за время T_i, n — количество наблюдений.

Вероятность в пуассоновском потоке

Вероятность того, что произойдет k событий за время T, определяется пуассоновским распределением. Вероятность появления хотя бы одного события на малом промежутке времени Δt приблизительно равна $\lambda\Delta t$. Для небольших Δt вероятность более чем одного события очень мала.

Смысл χ^2-статистики

Статистика χ^2 используется для проверки гипотезы о том, что наблюдаемые частоты событий соответствуют ожидаемым (теоретическим) частотам для пуассоновского распределения.

Шаги проведения теста:
1. Наблюдаемые частоты: подсчитываются фактические частоты количества событий в разных интервалах времени.
2. Ожидаемые частоты: вычисляются по формуле пуассоновского распределения с параметром λ.
3. χ^2-статистика:
$$\chi^2 = \Sigma ((O_i - E_i)^2 / E_i),$$
где O_i — наблюдаемые частоты, E_i — ожидаемые частоты.

Если χ^2-статистика мала, то гипотеза о том, что наблюдения соответствуют пуассоновскому распределению, подтверждается.

Основная задача лабораторной работы

Основная задача ЛР — исследовать пуассоновские потоки и их характеристики, проверить гипотезы о распределении времени между событиями (экспоненциальное) и числе событий (пуассоновское распределение), используя статистические методы (тесты Колмогорова-Смирнова и χ^2).

Практические частоты

Практические частоты — это фактически наблюдаемые числа событий за время T. Они сравниваются с ожидаемыми частотами, вычисленными с использованием пуассоновского распределения для проверки соответствия модели и реальных данных.