Функционал $V[y(x)]$ теперь имеет следующий вид:

$$V[y(x)] = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(y(x) - \frac{1}{2}(y'(x))^2 \right) \sin x \, dx$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа для данного функционала:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

Здесь: - $L = \left(y(x) - \frac{1}{2}(y'(x))^2\right)\sin x$ - $y'(x)$ — это производная функции $y(x)$ по x.
Найдем необходимые частные производные:
- $\frac{\partial L}{\partial y} = \sin x$ - $\frac{\partial L}{\partial y'} = -y'(x)\sin x$
Теперь подставим эти выражения в уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dx}\left(-y'(x)\sin x\right) - \sin x = 0$$

Раскроем производную:

$$-\frac{d}{dx}\left(y'(x)\sin x\right) - \sin x = 0$$

Применяя правило произведения для производной:

$$-\left(y''(x)\sin x + y'(x)\cos x\right) - \sin x = 0$$

Упрощаем уравнение:

$$y''(x)\sin x + y'(x)\cos x + \sin x = 0$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка.
Рассмотрим это уравнение в следующем виде:

$$y''(x)\sin x + y'(x)\cos x = -\sin x$$

Разделим обе части уравнения на $\sin x$ (при условии, что $\sin x \neq 0$ на интервале $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$):

$$y''(x) + y'(x)\cot x = -1$$

Для решения этого уравнения введем новую переменную $z(x) = y'(x)$. Тогда уравнение можно записать в виде:

$$z'(x) + z(x)\cot x = -1$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $z(x)$. Для его решения используем метод вариации постоянной или стандартный метод интегрирующего множителя.

Найдем интегрирующий множитель. Стандартная форма уравнения:

$$z'(x) + P(x)z(x) = Q(x)$$

где $P(x) = \cot x$ и $Q(x) = -1$.

Интегрирующий множитель $\mu(x)$ определяется как:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int \cot x\,dx} = e^{\ln|\sin x|} = \sin x$$

Умножим уравнение на интегрирующий множитель:

$$\sin x \cdot z'(x) + \sin x \cdot z(x)\cot x = -\sin x$$

Левая часть — это производная произведения:

$$\frac{d}{dx}(z(x)\sin x) = -\sin x$$

Теперь проинтегрируем обе части уравнения:

$$z(x)\sin x = \int -\sin x\,dx = \cos x + C_1$$

Отсюда получаем:

$$z(x) = \frac{\cos x + C_1}{\sin x}$$

Теперь вернемся к переменной $y'(x) = z(x)$:

$$y'(x) = \cot x + \frac{C_1}{\sin x}$$

Интегрируем это выражение для нахождения $y(x)$:

$$y(x) = \int \left(\cot x + \frac{C_1}{\sin x} \right) dx$$

Первый интеграл — это стандартный результат:

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x|$$

Второй интеграл — это:

$$\int \frac{C_1}{\sin x} \, dx = C_1 \ln|\tan \frac{x}{2}|$$

Таким образом, общее решение:

$$y(x) = \ln|\sin x| + C_1 \ln|\tan \frac{x}{2}| + C_2$$

Используем граничные условия:

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\ln\sqrt{2}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

1. Подставим $x = \frac{\pi}{2}$ в общее решение:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln|\sin\frac{\pi}{2}| + C_1 \ln|\tan\frac{\pi}{4}| + C_2 = 0$$

Так как $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ и $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, получаем:

$$\ln 1 + C_1 \ln 1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

2. Подставим $x = \frac{\pi}{4}$:

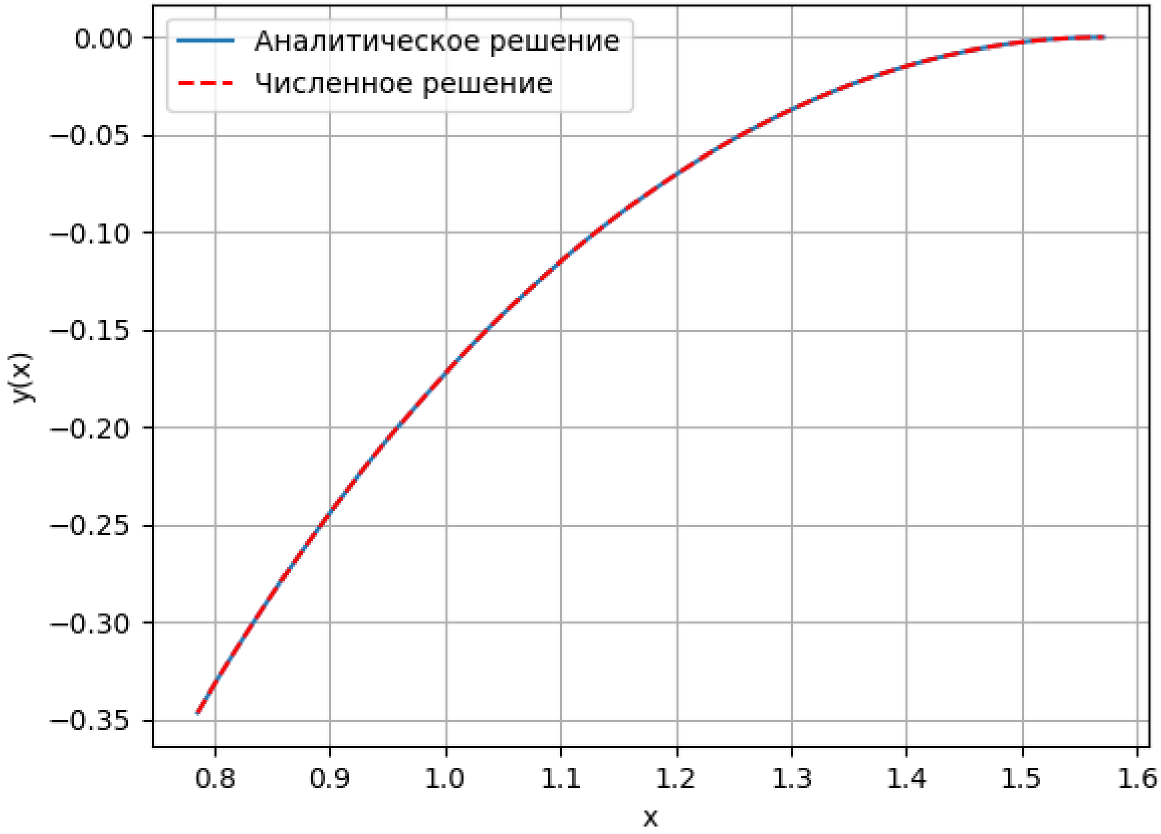
$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln|\sin\frac{\pi}{4}| + C_1 \ln|\tan\frac{\pi}{8}| = -\ln\sqrt{2}$$

Так как $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln\sqrt{2}$, имеем:

$$-\ln\sqrt{2} + C_1 \ln\left(\sqrt{2} - 1\right) = -\ln\sqrt{2}$$

Отсюда следует, что $C_1 = 0$.
Таким образом, решение задачи:

$$y(x) = \ln|\sin x|$$


Аналитическое решение
Численное решение
0.00
−0.05
−0.10
−0.15
−0.20
−0.25
−0.30
−0.35
y(x)
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
1.6
x