Статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності

Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси і математична статистика

Точкові оцінки параметрів розподілу(незміщені, слушні, ефективні)

Вивчаючи певну ознаку X генеральної сукупності, ми можемо знати характер закону розподілу випадкової величини X, але параметри цього закону залишаються невідомими.

Точкові оцінки параметрів розподілу(незміщені, слушні, ефективні)

Вивчаючи певну ознаку X генеральної сукупності, ми можемо знати характер закону розподілу випадкової величини X, але параметри цього закону залишаються невідомими.

Задача

На основі одержаної вибірки з генеральної сукупності визначити наближені числові значення невідомих параметрів розподілу.

Точкові оцінки параметрів розподілу(незміщені, слушні, ефективні)

Вивчаючи певну ознаку X генеральної сукупності, ми можемо знати характер закону розподілу випадкової величини X, але параметри цього закону залишаються невідомими.

Задача

На основі одержаної вибірки з генеральної сукупності визначити наближені числові значення невідомих параметрів розподілу.

Такі наближені числові значення параметрів розподілу називають їхніми **точковими статистичними оцінками**, або скорочено — **точковими оцінками**.

Точкові оцінки параметрів розподілу(незміщені, слушні, ефективні)

Нехай ми вивчаємо випадкову величину X, закон розподілу якої відомий, але містить невідомий параметр θ. Потрібно знайти точкову статистичну оцінку параметра θ за результатами n незалежних випробувань, у кожному з яких випадкова величина X набуває значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (вибірка обсягу n).

Точкові оцінки параметрів розподілу(незміщені, слушні, ефективні)

Нехай ми вивчаємо випадкову величину X, закон розподілу якої відомий, але містить невідомий параметр θ. Потрібно знайти точкову статистичну оцінку параметра θ за результатами n незалежних випробувань, у кожному з яких випадкова величина X набуває значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (вибірка обсягу n).

Означення

Будь-яку однозначну функцію $\theta_n^* = \theta_n^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, за допомогою якої знаходять наближене значення параметра θ розподілу випадкової величини, називають **точковою оцінкою** цього параметра.

Точкові оцінки параметрів розподілу(незміщені, слушні, ефективні)

Означення

Точкова оцінка $\theta_n^* = \theta_n^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ параметра розподілу θ випадкової величини X називається **незміщеною**, якщо її математичне сподівання дорівнює точному значенню цього параметра.

Точкові оцінки параметрів розподілу(незміщені, слушні, ефективні)

Означення

Точкова оцінка $\theta_n^* = \theta_n^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ параметра розподілу θ випадкової величини X називається **незміщеною**, якщо її математичне сподівання дорівнює точному значенню цього параметра.

Означення

Незміщена оцінка $\theta_n^* = \theta_n^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається **ефективною**, якщо вона має найменшу дисперсію серед усіх незміщених оцінок параметра θ, обчислених за вибірками одного і того ж обсягу.

Точкові оцінки параметрів розподілу(незміщені, слушні, ефективні)

Означення

Точкова оцінка $\theta_n^* = \theta_n^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ параметра розподілу θ називається **слушною (змістовною)**, якщо θ_n^* збігається за ймовірністю до оцінюваного параметра при необмеженому зростанні обсягу вибірки, тобто виконується така рівність:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\{|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon\} = 1,$$

де $\varepsilon > 0$ як завгодно мале число.

Точкові оцінки параметрів розподілу(незміщені, слушні, ефективні)

Означення

Точкова оцінка $\theta_n^* = \theta_n^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ параметра розподілу θ називається **слушною (змістовною)**, якщо θ_n^* збігається за ймовірністю до оцінюваного параметра при необмеженому зростанні обсягу вибірки, тобто виконується така рівність:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n \to \infty} P\{|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon\} = 1,$$

де $\varepsilon > 0$ як завгодно мале число.

Теорема (Умова слушності незміщеної оцінки)

Якщо дисперсія незміщеної оцінки при необмеженому зростанні обсягу вибірки прямує до нуля, то така оцінка є слушною, тобто

$$\forall n \; M(\theta_n^*) = \theta, \; \lim_{n \to \infty} D(\theta_n^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \lim_{n \to \infty} P\{|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon\} = 1.$$

Точкова оцінка математичного сподівання)

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — вибірка, отримана в результаті n незалежних випробувань над випадковою величиною X — деякою ознакою генеральної сукупності, яка має математичне сподівання $M(X) = a$.

Точкова оцінка математичного сподівання)

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — вибірка, отримана в результаті n незалежних випробувань над випадковою величиною X — деякою ознакою генеральної сукупності, яка має математичне сподівання $M(X) = a$.
За точкову оцінку математичного сподівання $a = M(X)$ беруть вибіркове середнє:

$$a_n^* = \overline{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Точкова оцінка математичного сподівання

Оцінка $a_n^* = \overline{x}_{\text{в}}$ є незміщеною для $M(X) = a$.

$$M(\overline{x}_{\text{в}}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(x_i) = \frac{1}{n}\cdot na = a$$

Точкова оцінка математичного сподівання

Припустимо додатково, що випадкова величина X має скінченну дисперсію $D(X) = \sigma^2$.

Точкова оцінка математичного сподівання

Припустимо додатково, що випадкова величина X має скінченну дисперсію $D(X) = \sigma^2$.
Тоді можна стверджувати, що оцінка $a_n^* = \overline{x}_{\text{в}}$ є слушною.

$$D(\overline{x}_{\text{в}}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(x_i) = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Точкова оцінка математичного сподівання

Припустимо додатково, що випадкова величина X має скінченну дисперсію $D(X) = \sigma^2$.
Тоді можна стверджувати, що оцінка $a_n^* = \overline{x}_{\text{в}}$ є слушною.

$$D(\overline{x}_{\text{в}}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(x_i) = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} D(\overline{x}_{\text{в}}) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sigma^2}{n} = 0$, то це означає, що оцінка $\overline{x}_{\text{в}}$ є слушною для параметра a.

Точкова оцінка математичного сподівання

Твердження

Якщо випадкова величина X нормально розподілена з параметрами $M(X) = a$ і $D(X) = \sigma^2$, то оцінка $\overline{x}_{\text{в}}$ має у класі всіх незміщених оцінок математичного сподівання a мінімальну дисперсію, яка дорівнює $\dfrac{\sigma^2}{n}$. Тому $\overline{x}_{\text{в}}$ є ефективною оцінкою параметра a.

Точкова оцінка дисперсії. Підправлена дисперсія

Якщо випадкова вибірка складається з результатів n незалежних випробувань $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над випадковою величиною X із математичним сподіванням $M(X) = a$ і дисперсією $D(X) = \sigma^2$, то за точкову оцінку дисперсії беруть вибіркову дисперсію

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2,$$

яка є зміщеною оцінкою параметра $D(X) = \sigma^2$, або підправлену вибіркову дисперсію

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2,$$

яка є незміщеною оцінкою параметра $D(X) = \sigma^2$.

Точкова оцінка дисперсії. Підправлена дисперсія

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}}$$

Дріб $\dfrac{n}{n-1}$ називають **поправкою Бесселя**. Для малих n поправка Бесселя значно відрізняється від одиниці. Для $n > 50$ практично немає різниці між $D_{\text{в}}$ і s^2.

Точкова оцінка дисперсії. Підправлена дисперсія

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_\text{в}$$

Дріб $\dfrac{n}{n-1}$ називають **поправкою Бесселя**. Для малих n поправка Бесселя значно відрізняється від одиниці. Для $n > 50$ практично немає різниці між $D_\text{в}$ і s^2.

Оцінки $D_\text{в}$ і s^2 є слушними і не є ефективними.

Точкова оцінка дисперсії. Підправлена дисперсія

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}}$$

Дріб $\frac{n}{n-1}$ називають **поправкою Бесселя**. Для малих n поправка Бесселя значно відрізняється від одиниці. Для $n > 50$ практично немає різниці між $D_{\text{в}}$ і s^2.

Оцінки $D_{\text{в}}$ і s^2 є слушними і не є ефективними.

У випадку, коли математичне сподівання a відоме і випадкова величина X нормально розподілена, то незміщеною, слушною та ефективною оцінкою дисперсії $D(X) = \sigma^2$ є оцінка

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2.$$

Поняття про інтервальні оцінки параметрів розподілу

Означення

Надійністю точкової оцінки θ^* параметра розподілу θ називають ймовірність γ, з якою виконується нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$, тобто

$$P\{|\theta - \theta^*| < \delta\} = \gamma. \tag{8.1}$$

Означення

Надійністю точкової оцінки θ^* параметра розподілу θ називають ймовірність γ, з якою виконується нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$, тобто

$$P\{|\theta - \theta^*| < \delta\} = \gamma. \tag{8.1}$$

Співвідношення (8.1) перетворимо до рівносильного виразу:

$$P\{-\delta < \theta - \theta^* < \delta\} = \gamma \qquad \text{або} \qquad P\{\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\} = \gamma.$$

Означення

Надійністю точкової оцінки θ^* параметра розподілу θ називають ймовірність γ, з якою виконується нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$, тобто

$$P\{|\theta - \theta^*| < \delta\} = \gamma. \tag{8.1}$$

Співвідношення (8.1) перетворимо до рівносильного виразу:

$$P\{-\delta < \theta - \theta^* < \delta\} = \gamma \qquad \text{або} \qquad P\{\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\} = \gamma.$$

Означення

Інтервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$, для якого виконується рівність (8.1), називається **інтервалом довіри (надійним інтервалом)**, а його межі $\theta^* - \delta$ і $\theta^* + \delta$ — **надійними межами** для параметра розподілу θ.

Поняття про інтервальні оцінки параметрів розподілу

Означення

Надійністю точкової оцінки θ^* параметра розподілу θ називають ймовірність γ, з якою виконується нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$, тобто

$$P\{|\theta - \theta^*| < \delta\} = \gamma. \tag{8.1}$$

Співвідношення (8.1) перетворимо до рівносильного виразу:

$$P\{-\delta < \theta - \theta^* < \delta\} = \gamma \qquad \text{або} \qquad P\{\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\} = \gamma.$$

Означення

Інтервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$, для якого виконується рівність (8.1), називається **інтервалом довіри (надійним інтервалом)**, а його межі $\theta^* - \delta$ і $\theta^* + \delta$ — **надійними межами** для параметра розподілу θ.

Інтервал довіри для параметра розподілу θ є інтервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$, який з імовірністю γ «накриває» точне значення цього параметра.

Поняття про інтервальні оцінки параметрів розподілу

Загальний спосіб, за допомогою якого знаходять інтервал довіри, полягає в тому, що розв'язують рівняння (8.1) і визначають з нього число δ. А для цього потрібно обчислити ймовірність $P\{\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\}$. Останнє обчислення можна зробити, якщо відомий закон розподілу точкової оцінки $\theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ або пов'язаної з нею іншої випадкової величини, бо тоді можна використати відомі формули з теорії ймовірностей:

$$P\{\alpha \leq \theta^* < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha), \quad \text{або} \quad P\{\alpha \leq \theta^* < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx,$$

де $F(x)$ — функція розподілу і $p(x)$ — щільність розподілу випадкової величини θ^*.

Теореми про надійні межі для математичного сподівання

Теорема

Нехай X *— нормально розподілена ознака генеральної сукупності, для якої* $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$, $\overline{x}_в$ *— вибіркове середнє, обчислене за вибіркою обсягу* n *з цієї генеральної сукупності. Тоді*

$$\forall t > 0 \qquad P\left\{|\overline{x}_в - a| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t\right\} = 2\Phi(t), \tag{8.2}$$

де $\Phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$

Теорема

Нехай X *— довільно розподілена ознака генеральної сукупності, для якої* $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$, $\overline{x}_в$ *— вибіркове середнє, обчислене за вибіркою обсягу* n *з цієї генеральної сукупності. Тоді*

$$\forall t > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left\{|\overline{x}_в - a| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t\right\} = 2\Phi(t). \tag{8.3}$$

Інтервальні оцінки для математичного сподівання

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — результати n незалежних спостережень за випадковою величиною X, на підставі яких необхідно знайти інтервал довіри для невідомого параметра $a = M(X)$.

Інтервальні оцінки для математичного сподівання

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — результати n незалежних спостережень за випадковою величиною X, на підставі яких необхідно знайти інтервал довіри для невідомого параметра $a = M(X)$.
Оскільки для математичного сподівання точковою оцінкою є вибіркове середнє $\overline{x}_{\text{в}}$, то для знаходження інтервалу довіри $\overline{x}_{\text{в}} - \delta < a < \overline{x}_{\text{в}} + \delta$ потрібно розв'язати рівняння:

$$P\{|\overline{x}_{\text{в}} - a| < \delta\} = \gamma \quad \Leftrightarrow \quad P\{\overline{x}_{\text{в}} - \delta < a < \overline{x}_{\text{в}} + \delta\} = \gamma. \qquad (8.4)$$

Інтервальні оцінки для математичного сподівання

Якщо середнє квадратичне відхилення σ відоме, X — нормально розподілена випадкова величина або обсяг вибірки значний ($n > 30$), то ми можемо записати, що

$$P\left\{|\overline{x}_{\text{в}} - a| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t\right\} = 2\Phi(t) = \gamma.$$

Тоді, якщо $t = t_\gamma$ — розв'язок рівняння $2\Phi(t) = \gamma$, то з надійністю γ інтервал

$$\overline{x}_{\text{в}} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\gamma < a < \overline{x}_{\text{в}} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\gamma$$

є інтервалом довіри для математичного сподівання a.

Інтервальні оцінки для математичного сподівання

Якщо середнє квадратичне відхилення σ невідоме, але обсяг вибірки значний $(n > 30)$, то інтервал довіри можна записати у вигляді

$$\overline{x}_{\text{в}} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\gamma < a < \overline{x}_{\text{в}} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\gamma, \tag{8.5}$$

де s — підправлене середнє квадратичне відхилення, знайдене за вибіркою обсягу n.

Інтервальні оцінки для математичного сподівання

Якщо середнє квадратичне відхилення σ невідоме, обсяг вибірки незначний ($n < 30$), але X — нормально розподілена випадкова величина, то інтервал довіри також записують у вигляді (8.5), де значення $t_\gamma = t(\gamma, n)$ шукають за таблицями як розв'язок рівняння

$$P\{|T| < t_\gamma\} = \int\limits_{-t_\gamma}^{t_\gamma} s(x,n)dx = 2\int\limits_{0}^{t_\gamma} s(x,n)dx = \gamma,$$

де $T = \dfrac{\overline{x}_{\text{в}} - a}{s/\sqrt{n}}$ — випадкова величина, розподілена за законом Стьюдента з $k = n - 1$ ступенями вільності, який характеризується щільністю розподілу

$$s(x,n) = B_n\left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \qquad x \in (-\infty, +\infty),$$

де B_n — деяка нормуюча константа. Розподіл Стьюдента залежить лише від одного параметра n і при $n \to \infty$ наближається до нормального закону розподілу.

Приклад

Випадкова величина X розподілена нормально з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 3$. Знайти інтервал довіри з надійністю $\gamma = 0,95$ для оцінки невідомого математичного сподівання a, якщо вибіркове середнє $\overline{x}_{\text{в}} = 20,02$ знайдене за даними вибірки обсягу $n = 36$.

Приклад

Випадкова величина X розподілена нормально з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 3$. Знайти інтервал довіри з надійністю $\gamma = 0,95$ для оцінки невідомого математичного сподівання a, якщо вибіркове середнє $\overline{x}_{\text{в}} = 20,02$ знайдене за даними вибірки обсягу $n = 36$.

З рівняння $2\Phi(t) = 0,95$ за допомогою таблиць функції Лапласа знаходимо $t = t_\gamma = 1,96$.

Приклад

Випадкова величина X розподілена нормально з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 3$. Знайти інтервал довіри з надійністю $\gamma = 0,95$ для оцінки невідомого математичного сподівання a, якщо вибіркове середнє $\overline{x}_\text{в} = 20,02$ знайдене за даними вибірки обсягу $n = 36$.

З рівняння $2\Phi(t) = 0,95$ за допомогою таблиць функції Лапласа знаходимо $t = t_\gamma = 1,96$.
Межі інтервалу довіри шукаємо за формулами:

$$\overline{x}_\text{в} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\gamma = 20,02 - \frac{3}{\sqrt{36}} \cdot 1,96 = 19,04;$$

$$\overline{x}_\text{в} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\gamma = 20,02 + \frac{3}{\sqrt{36}} \cdot 1,96 = 21,00.$$

Приклад

Випадкова величина X розподілена нормально з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 3$. Знайти інтервал довіри з надійністю $\gamma = 0,95$ для оцінки невідомого математичного сподівання a, якщо вибіркове середнє $\overline{x}_{\text{в}} = 20,02$ знайдене за даними вибірки обсягу $n = 36$.

З рівняння $2\Phi(t) = 0,95$ за допомогою таблиць функції Лапласа знаходимо $t = t_\gamma = 1,96$.
Межі інтервалу довіри шукаємо за формулами:

$$\overline{x}_{\text{в}} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\gamma = 20,02 - \frac{3}{\sqrt{36}} \cdot 1,96 = 19,04;$$

$$\overline{x}_{\text{в}} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\gamma = 20,02 + \frac{3}{\sqrt{36}} \cdot 1,96 = 21,00.$$

Отже, $a \in (19,04; 21,00)$ з надійністю 0,95.

Інтервали довіри для оцінки середнього квадратичного відхилення нормально розподіленої випадкової величини

Нехай ознака X генеральної сукупності розподілена нормально. Знайдемо надійні межі для середнього квадратичного відхилення σ з заданою надійністю γ.

$$P\{|\sigma - s| < \delta\} = \gamma \quad \Leftrightarrow \quad P\{s - \delta < \sigma < s + \delta\} = \gamma.$$

Інтервали довіри для оцінки середнього квадратичного відхилення нормально розподіленої випадкової величини

Нехай ознака X генеральної сукупності розподілена нормально. Знайдемо надійні межі для середнього квадратичного відхилення σ з заданою надійністю γ.

$$P\{|\sigma - s| < \delta\} = \gamma \quad \Leftrightarrow \quad P\{s - \delta < \sigma < s + \delta\} = \gamma.$$

Перетворимо подвійну нерівність $s - \delta < \sigma < s + \delta$:

$$s\left(1 - \frac{\delta}{s}\right) < \sigma < s\left(1 + \frac{\delta}{s}\right) \quad \Leftrightarrow \quad s(1-q) < \sigma < s(1+q), \qquad (8.6)$$

де $q = \dfrac{\delta}{s}$.

Інтервали довіри для оцінки середнього квадратичного відхилення нормально розподіленої випадкової величини

Нехай ознака X генеральної сукупності розподілена нормально. Знайдемо надійні межі для середнього квадратичного відхилення σ з заданою надійністю γ.

$$P\{|\sigma - s| < \delta\} = \gamma \quad \Leftrightarrow \quad P\{s - \delta < \sigma < s + \delta\} = \gamma.$$

Перетворимо подвійну нерівність $s - \delta < \sigma < s + \delta$:

$$s\left(1 - \frac{\delta}{s}\right) < \sigma < s\left(1 + \frac{\delta}{s}\right) \quad \Leftrightarrow \quad s(1-q) < \sigma < s(1+q), \qquad (8.6)$$

де $q = \dfrac{\delta}{s}$.

Залишається знайти q.

Інтервали довіри для оцінки середнього квадратичного відхилення нормально розподіленої випадкової величини

Розглянемо випадкову величину $\chi = \sqrt{n-1}s/\sigma$, де n — обсяг вибірки. Відомо, що випадкова величина $(n-1)s^2/\sigma^2$ — розподілена за законом χ^2 з $n-1$ ступенями вільності, тому квадратний корінь з неї позначають через χ.

Інтервали довіри для оцінки середнього квадратичного відхилення нормально розподіленої випадкової величини

Розглянемо випадкову величину $\chi = \sqrt{n-1}s/\sigma$, де n — обсяг вибірки. Відомо, що випадкова величина $(n-1)s^2/\sigma^2$ — розподілена за законом χ^2 з $n-1$ ступенями вільності, тому квадратний корінь з неї позначають через χ.

Щільність розподілу χ має вигляд

$$R(x,n) = A_n x^{n-2} e^{-x^2/2},$$

де A_n — деяка стала. Цей розподіл не залежить від оцінюваного параметра σ, а залежить лише від обсягу вибірки n.

Інтервали довіри для оцінки середнього квадратичного відхилення нормально розподіленої випадкової величини

Для $q < 1$

$$P\{s-\delta < \sigma < s+\delta\} = P\{s(1-q) < \sigma < s(1+q)\} =$$

$$= P\left\{\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}\right\} = \int\limits_{\chi_1}^{\chi_2} R(x,n)dx = \gamma,$$

де $\chi_1 = \sqrt{n-1}/(1+q)$, $\chi_2 = \sqrt{n-1}/(1-q)$. З цього рівняння можна за заданими n і γ (за допомогою таблиці $q = q(\gamma, n)$) знайти q.

Інтервали довіри для оцінки середнього квадратичного відхилення нормально розподіленої випадкової величини

Для $q < 1$

$$P\{s - \delta < \sigma < s + \delta\} = P\{s(1 - q) < \sigma < s(1 + q)\} =$$

$$= P\left\{\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}\right\} = \int\limits_{\chi_1}^{\chi_2} R(x, n)dx = \gamma,$$

де $\chi_1 = \sqrt{n-1}/(1+q)$, $\chi_2 = \sqrt{n-1}/(1-q)$. З цього рівняння можна за заданими n і γ (за допомогою таблиці $q = q(\gamma, n)$) знайти q. Якщо $q > 1$, то нерівність (8.6) набуде вигляду

$$0 < \sigma < s(1 + q).$$

У цьому випадку q також шукають за таблицею значень $q = q(\gamma, n)$.

Інтервали довіри для оцінки середнього квадратичного відхилення нормально розподіленої випадкової величини

Приклад

За результатами 15-ти вимірювань, здійснених одним приладом, обчислили підправлене середнє квадратичне відхилення випадкових помилок вимірювань $s = 0,12$. Оцінити точність приладу (середнє квадратичне відхилення σ) з надійністю $\gamma = 0,99$.

Інтервали довіри для оцінки середнього квадратичного відхилення нормально розподіленої випадкової величини

Приклад

За результатами 15-ти вимірювань, здійснених одним приладом, обчислили підправлене середнє квадратичне відхилення випадкових помилок вимірювань $s = 0,12$. Оцінити точність приладу (середнє квадратичне відхилення σ) з надійністю $\gamma = 0,99$.

Задача зводиться до відшукання інтервалу довіри

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q),$$

який покриває σ з заданою надійністю $\gamma = 0,99$.

Інтервали довіри для оцінки середнього квадратичного відхилення нормально розподіленої випадкової величини

Приклад

За результатами 15-ти вимірювань, здійснених одним приладом, обчислили підправлене середнє квадратичне відхилення випадкових помилок вимірювань $s = 0,12$. Оцінити точність приладу (середнє квадратичне відхилення σ) з надійністю $\gamma = 0,99$.

Задача зводиться до відшукання інтервалу довіри

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q),$$

який покриває σ з заданою надійністю $\gamma = 0,99$.

За таблицею $q = q(\gamma, n)$ за $\gamma = 0,99$ і $n = 15$ знаходимо $q = 0,73$. Шуканий інтервал довіри

$$0,12(1-0,73) < \sigma < 0,12(1+0,73) \text{ або } 0,03 < \sigma < 0,21.$$