Повторні незалежні випробування

Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси і математична статистика

Схема Бернуллі

Приклад

В урні є білі та чорні кульки. Під подією A будемо розуміти подію появи білої кульки при послідовному діставанні кульок із урни. Ймовірність цієї події позначимо $P(A) = p$. Будемо вважати, що вона не залежить від того, в котрий раз ми дістаємо білу кульку. Щоб забезпечити таку незалежність, кожного разу будемо повертати кульку в урну і ретельно перемішувати кульки. Очевидно, протилежна подія $\overline{A}$ — «поява чорної кульки» — буде мати ймовірність $q = 1 - p$. Визначити ймовірність $P_n(k)$ того, що у n випробуваннях біла кулька з'явиться k разів.

Приклад

Яка ймовірність $P_n(k)$ появи k разів герба при n послідовних підкиданнях симетричної монети за умови, що ймовірність появи герба в одному випробуванні дорівнює p?

Приклад

Яка ймовірність того, що з n новонароджених народилося k хлопчиків, якщо ймовірність народження хлопчика дорівнює p?

Схема Бернуллі

Означення

Випробування називаються **незалежними** стосовно деякої події A, якщо ймовірність цієї події в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань.

Означення

Серія повторних незалежних випробувань з одним із можливих результатів A або $\overline{A}$, у кожному з яких подія A має одну і ту саму ймовірність $P(A) = p$, називається **схемою Бернуллі**.

Простір елементарних подій кожного окремого випробування Бернуллі складається із двох подій $\Omega = \{A, \overline{A}\}$ (A — «успіх», $\overline{A}$ — «невдача»), а простір елементарних подій n незалежних випробувань Бернуллі містить 2^n подій.

Схема Бернуллі

Нехай здійснено n незалежних випробувань Бернуллі, в яких спостерігається поява події A. Яка ймовірність появи k разів події A у n випробуваннях, якщо ймовірність появи події A в одному випробуванні дорівнює p, а непояви — $q = 1 - p$?
Шукану ймовірність позначимо через $P_n(k)$.

Схема Бернуллі

Нехай здійснено n незалежних випробувань Бернуллі, в яких спостерігається поява події A. Яка ймовірність появи k разів події A у n випробуваннях, якщо ймовірність появи події A в одному випробуванні дорівнює p, а непояви — $q = 1 - p$?
Шукану ймовірність позначимо через $P_n(k)$.

Формула Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Схема Бернуллі

Теорема

Ймовірність того, що у n *випробуваннях Бернуллі, у кожному з яких ймовірність появи події дорівнює* p $(0 < p < 1)$, *подія настане* k *разів і не настане* $(n-k)$ *разів, дорівнює* $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Наслідок

Сума ймовірностей $P_n(k)$, $k = \overline{0, n}$, *у* n *незалежних випробуваннях дорівнює одиниці, тобто*

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1.$$

Найвірогідніше число «успіхів» у схемі Бернуллі

Теорема

Найвірогідніше число «успіхів» k_0 в n випробуваннях за схемою Бернуллі задовольняє умову $np - q \leq k_0 \leq np + p$. Якщо $np + p$ — неціле, то є одне таке значення $k_0 = [np + p]$, якщо $np + p$ — ціле, то таких значень два ($np - q$ і $np + p$). Тут $[\cdot]$ — ціла частина числа.

Граничні теореми для схеми Бернуллі

Теорема (Гранична теорема Пуассона)

Якщо ймовірність появи події A в кожному з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі рівна p і якщо для $n \to \infty$ $p \to 0$ так, що $np \to \lambda$ $(0 < \lambda < \infty)$, то

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

для будь-якого $k = 0, 1, 2, \ldots$, де $P_n(k)$ — ймовірність появи k разів події A в n випробуваннях.

Граничні теореми для схеми Бернуллі

При великих n $(n > 100)$ і малих p $(np < 30)$ можна користуватися наближеними формулами (**асимптотичними формулами Пуассона**):

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda};$$

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad \lambda = np.$$

$$\left| \sum_{k \in M} P_n(k) - \sum_{k \in M} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| < np^2,$$

де $M \subset \{0, 1, 2, \ldots\}$. Зокрема, якщо M складається з одного числа k, то

$$\left| P_n(k) - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| < np^2.$$

Граничні теореми для схеми Бернуллі

Теорема (Локальна теорема Муавра-Лапласа)

Якщо ймовірність p появи події A у кожному випробуванні стала і $0 < p < 1$, то для великих значень n ймовірність $P_n(k)$ того, що подія A з'явиться у n незалежних випробуваннях k разів, обчислюється за наближеною формулою

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{npq}}, \qquad \text{якщо } x_0 = \frac{k - np}{\sqrt{npq}},$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ — **функція Гауса**.

Основні властивості функції Гауса:

$\varphi 1^0$. Функція визначена на всій числовій осі, тобто для $x \in (-\infty; +\infty)$.

$\varphi 2^0$. Функція Гауса парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

$\varphi 3^0$. $\max\limits_{x} \varphi(x) = \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

$\varphi 4^0$. $\varphi(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Для обчислення $P_n(k_1, k_2)$ використовують інтегральну теорему Муавра-Лапласа.

Теорема (Інтегральна теорема Муавра-Лапласа)

Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала і $0 < p < 1$, то ймовірність $P_n(k_1, k_2)$ того, що подія A настане не менше k_1 і не більше k_2 разів, наближено дорівнює визначеному інтегралу

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \text{ де } x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \text{ і } x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функція $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ називається **функцією Лапласа**.

$$\Phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(z) dz$$

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x')$$

Основні властивості функції Лапласа:

$\Phi 1^0$. $\Phi(x)$ — непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

$\Phi 2^0$. $\Phi(0) = 0$.

$\Phi 3^0$. $\Phi(x)$ зростає для $x \in (-\infty; +\infty)$.

$\Phi 4^0$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \frac{1}{2}$.

Ймовірність відхилення відносної частоти від сталої ймовірності

Знайдемо ймовірність відхилення частоти $W = \frac{m}{n}$ від сталої ймовірності p $(0 < p < 1)$, тобто $P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\}$, де $\Phi(x)$ — функція Лапласа.

Ймовірність відхилення відносної частоти від сталої ймовірності

Знайдемо ймовірність відхилення частоти $W = \frac{m}{n}$ від сталої ймовірності p $(0 < p < 1)$, тобто $P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\}$, де $\Phi(x)$ — функція Лапласа.

Теорема (Теорема Бернуллі)

Якщо у кожному з n незалежних випробувань подія A настає з ймовірністю p $(0 < p < 1)$, то при досить великому числі випробувань n з ймовірністю близькою до одиниці, відхилення відносної частоти появи події від її сталої ймовірності не перевищуватиме як завгодно малого наперед заданого числа ε.