Дискретні та неперервні випадкові величини

Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси і математична статистика

Поняття випадкової величини та функції розподілу

Випадкова величина — це величина, яка в результаті експерименту з випадковим результатом набуває того чи іншого числового значення.

Поняття випадкової величини та функції розподілу

Випадкова величина — це величина, яка в результаті експерименту з випадковим результатом набуває того чи іншого числового значення.

а) кількість очок, яка випадає на верхній грані за одне підкидання грального кубика;
б) кількість бракованих виробів серед n навмання вибраних;
в) кількість підкидань монети до першої появи герба;
г) кількість викликів, які надходять на телефонну станцію протягом деякого проміжку часу;
д) тривалість часу обслуговування покупця;
е) час виконання деякого завдання і т.д.

Поняття випадкової величини та функції розподілу

Випадкова величина — це величина, яка в результаті експерименту з випадковим результатом набуває того чи іншого числового значення.

а) кількість очок, яка випадає на верхній грані за одне підкидання грального кубика;
б) кількість бракованих виробів серед n навмання вибраних;
в) кількість підкидань монети до першої появи герба;
г) кількість викликів, які надходять на телефонну станцію протягом деякого проміжку часу;
д) тривалість часу обслуговування покупця;
е) час виконання деякого завдання і т.д.

Випадкові величини — це функції на просторі елементарних подій.

Поняття випадкової величини та функції розподілу

Випадкова величина — це величина, яка в результаті експерименту з випадковим результатом набуває того чи іншого числового значення.

а) кількість очок, яка випадає на верхній грані за одне підкидання грального кубика;
б) кількість бракованих виробів серед n навмання вибраних;
в) кількість підкидань монети до першої появи герба;
г) кількість викликів, які надходять на телефонну станцію протягом деякого проміжку часу;
д) тривалість часу обслуговування покупця;
е) час виконання деякого завдання і т.д.

Випадкові величини — це функції на просторі елементарних подій.

Випадкові величини поділяються на **дискретні**, множини можливих значень яких скінченні або зліченні, — приклади а) – г) і **неперервні**, множини можливих значень яких суцільно заповнюють деякий інтервал, — приклади д), е).

Для того, щоб описати випадкову величину, необхідно:

а) вказати множину її можливих значень;

б) охарактеризувати ймовірності всіх можливих подій, пов'язаних із випадковою величиною (наприклад, ймовірність того, що вона набуде того чи іншого значення або потрапить у деякий інтервал).

Такий повний опис випадкової величини називається її **законом розподілу**.

Поняття випадкової величини та функції розподілу

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — довільний ймовірнісний простір.

Поняття випадкової величини та функції розподілу

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — довільний ймовірнісний простір.

Не будь-які функції, визначені на Ω, можна розглядати як випадкові величини.

Поняття випадкової величини та функції розподілу

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — довільний ймовірнісний простір.

Не будь-які функції, визначені на Ω, можна розглядати як випадкові величини.

Яка ймовірність того, що значення випадкової величини $X(\omega)$ належать до тієї чи іншої множини?

Поняття випадкової величини та функції розподілу

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — довільний ймовірнісний простір.

Не будь-які функції, визначені на Ω, можна розглядати як випадкові величини.

Яка ймовірність того, що значення випадкової величини $X(\omega)$ належать до тієї чи іншої множини?

Для достатньо широкого класу множин $\{B\}$ на числовій прямій повинна бути впевненість, що множина $\{\omega : \ X(\omega) \in B\}$ належить σ-алгебрі подій $\mathcal{F}$, і тому можна розглядати ймовірність $P\{\omega : \ X(\omega) \in B\}$.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — довільний ймовірнісний простір.

Не будь-які функції, визначені на Ω, можна розглядати як випадкові величини.

Яка ймовірність того, що значення випадкової величини $X(\omega)$ належать до тієї чи іншої множини?

Для достатньо широкого класу множин $\{B\}$ на числовій прямій повинна бути впевненість, що множина $\{\omega : \ X(\omega) \in B\}$ належить σ-алгебрі подій $\mathcal{F}$, і тому можна розглядати ймовірність $P\{\omega : \ X(\omega) \in B\}$.

Достатньо припустити, що для кожного інтервалу $(-\infty, x)$ множина $\{\omega : \ X(\omega) \in (-\infty, x)\} = \{\omega : \ X(\omega) < x\}$ належить σ-алгебрі подій $\mathcal{F}$, і тоді для кожної множини дійсних чисел B, яка зображається як об'єднання або перетин скінченної або зліченної кількості проміжків, отримаємо, що $\{\omega : \ X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$.

Поняття випадкової величини та функції розподілу

Означення

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — ймовірнісний простір. **Випадковою величиною** назвемо дійсну функцію $X = X(\omega)$ визначену на Ω таку, що для кожного дійсного числа x виконується співвідношення:

$$\{\omega : \ X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}.$$

Означення

Функція дійсної змінної x, $x \in \mathbb{R}$ визначена рівністю

$$F(x) = P\{\omega : \ X(\omega) < x\} = P\{X < x\},$$

називається **функцією розподілу** випадкової величини.

Функція розподілу є найбільш загальною формою закону розподілу, придатною для характеристики всіх випадкових величин (як дискретних, так і неперервних). Знаючи функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X, можна обчислити ймовірності будь-яких подій, які з нею пов'язані.

Властивості функції розподілу

$\mathbf{F1^0}$. Ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку $[a, b)$ дорівнює приросту її функції розподілу на цьому проміжку, тобто

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a).$$

Властивості функції розподілу

$\mathbf{F1^0}$. Ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку $[a, b)$ дорівнює приросту її функції розподілу на цьому проміжку, тобто

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a).$$

$\mathbf{F2^0}$. Значення функції розподілу належать відрізку $[0, 1]$, тобто $0 \leq F(x) \leq 1$.

Властивості функції розподілу

$\mathbf{F1^0}$. Ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку $[a, b)$ дорівнює приросту її функції розподілу на цьому проміжку, тобто

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a).$$

$\mathbf{F2^0}$. Значення функції розподілу належать відрізку $[0, 1]$, тобто $0 \leq F(x) \leq 1$.

$\mathbf{F3^0}$. Якщо $x_1 \leq x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$, тобто $F(x)$ — неспадна функція.

Властивості функції розподілу

F1⁰. Ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку $[a, b)$ дорівнює приросту її функції розподілу на цьому проміжку, тобто

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a).$$

F2⁰. Значення функції розподілу належать відрізку $[0, 1]$, тобто $0 \leq F(x) \leq 1$.

F3⁰. Якщо $x_1 \leq x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$, тобто $F(x)$ — неспадна функція.

F4⁰. $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ і $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Властивості функції розподілу

F1⁰. Ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку $[a, b)$ дорівнює приросту її функції розподілу на цьому проміжку, тобто

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a).$$

F2⁰. Значення функції розподілу належать відрізку $[0, 1]$, тобто $0 \leq F(x) \leq 1$.

F3⁰. Якщо $x_1 \leq x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$, тобто $F(x)$ — неспадна функція.

F4⁰. $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ і $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

F5⁰. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$, тобто функція $F(x)$ — неперервна зліва.

Властивості функції розподілу

F1$^{\mathbf{0}}$. Ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку $[a, b)$ дорівнює приросту її функції розподілу на цьому проміжку, тобто

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a).$$

F2$^{\mathbf{0}}$. Значення функції розподілу належать відрізку $[0, 1]$, тобто $0 \leq F(x) \leq 1$.

F3$^{\mathbf{0}}$. Якщо $x_1 \leq x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$, тобто $F(x)$ — неспадна функція.

F4$^{\mathbf{0}}$. $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ і $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

F5$^{\mathbf{0}}$. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$, тобто функція $F(x)$ — неперервна зліва.

F6$^{\mathbf{0}}$. $P\{X = x\} = F(x + 0) - F(x)$.

Дискретні випадкові величини. Закон розподілу

Означення

Випадкова величина називається **дискретною**, якщо множина її можливих значень є скінченною або зліченною.

Дискретні випадкові величини. Закон розподілу

Означення

Випадкова величина називається **дискретною**, якщо множина її можливих значень є скінченною або зліченною.

Нехай X — дискретна випадкова величина, можливими і єдино можливими значеннями якої є числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Дискретні випадкові величини. Закон розподілу

Означення

Випадкова величина називається **дискретною**, якщо множина її можливих значень є скінченною або зліченною.

Нехай X — дискретна випадкова величина, можливими і єдино можливими значеннями якої є числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Через $p_k = P\{X = x_k\}$ позначимо ймовірність того, що випадкова величина X набуває значення x_k, $p_k \geq 0$.

Дискретні випадкові величини. Закон розподілу

Означення

Випадкова величина називається **дискретною**, якщо множина її можливих значень є скінченною або зліченною.

Нехай X — дискретна випадкова величина, можливими і єдино можливими значеннями якої є числа $x_1, x_2, \dots, x_n$. Через $p_k = P\{X = x_k\}$ позначимо ймовірність того, що випадкова величина X набуває значення x_k, $p_k \geq 0$.
Події $\{X = x_k\}$, $k = \overline{1, n}$ утворюють повну групу попарно несумісних подій, тому $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Дискретні випадкові величини. Закон розподілу

Означення

Випадкова величина називається **дискретною**, якщо множина її можливих значень є скінченною або зліченною.

Нехай X — дискретна випадкова величина, можливими і єдино можливими значеннями якої є числа $x_1, x_2, \dots, x_n$. Через $p_k = P\{X = x_k\}$ позначимо ймовірність того, що випадкова величина X набуває значення x_k, $p_k \geq 0$.
Події $\{X = x_k\}$, $k = \overline{1, n}$ утворюють повну групу попарно несумісних подій, тому $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Означення

Законом розподілу ймовірностей (законом розподілу) дискретної випадкової величини називається відповідність між усіма її можливими значеннями та їхніми ймовірностями.

Дискретні випадкові величини. Закон розподілу

Табличний запис закону розподілу — це таблиця значень x_k випадкової величини та відповідних їхніх ймовірностей p_k:

x_k	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Дискретні випадкові величини. Закон розподілу

Табличний запис закону розподілу — це таблиця значень x_k випадкової величини та відповідних їхніх ймовірностей p_k:

x_k	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

За допомогою табличного запису закону розподілу можна визначити функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X за формулою:

$$F(x) = P\{X < x\} = \sum_{k:x_k<x} p_k,$$

у якій сумування проводиться за всіма індексами k, для яких $x_k < x$.

Дискретні випадкові величини. Закон розподілу

У випадку, коли множина різних значень x_k випадкової величини X є нескінченною і зліченною, її закон розподілу також можна записати у формі таблиці, яка складатиметься з двох нескінченних рядків:

$$x_k: \quad x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad \text{і}$$

$$p_k: \quad p_1 = P\{X = x_1\}, p_2 = P\{X = x_2\}, \ldots, p_n = P\{X = x_n\}, \ldots,$$

до того ж $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

Біноміний закон розподілу.

Біномний закон розподілу.

Нехай проводиться n незалежних випробувань за схемою Бернуллі і $p = P(A)$ — ймовірність появи події A в кожному окремому випробуванні. Сформулюємо задачу: написати закон розподілу дискретної випадкової величини X — кількості появ події A в цих n випробуваннях.

Біномний закон розподілу.

Нехай проводиться n незалежних випробувань за схемою Бернуллі і $p = P(A)$ — ймовірність появи події A в кожному окремому випробуванні. Сформулюємо задачу: написати закон розподілу дискретної випадкової величини X — кількості появ події A в цих n випробуваннях.

Випадкова величина X може набути значень

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \ldots,\ x_n = n.$$

Біномний закон розподілу.

Нехай проводиться n незалежних випробувань за схемою Бернуллі і $p = P(A)$ — ймовірність появи події A в кожному окремому випробуванні. Сформулюємо задачу: написати закон розподілу дискретної випадкової величини X — кількості появ події A в цих n випробуваннях.

Випадкова величина X може набути значень

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \ldots,\ x_n = n.$$

Ймовірності можливих значень x_k випадкової величини X обчислюються за біномною формулою:

$$p_k = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad q = 1 - p$$

Біномний закон розподілу.

Нехай проводиться n незалежних випробувань за схемою Бернуллі і $p = P(A)$ — ймовірність появи події A в кожному окремому випробуванні. Сформулюємо задачу: написати закон розподілу дискретної випадкової величини X — кількості появ події A в цих n випробуваннях.

Випадкова величина X може набути значень

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \ldots,\ x_n = n.$$

Ймовірності можливих значень x_k випадкової величини X обчислюються за біномною формулою:

$$p_k = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad q = 1 - p$$

Описана випадкова величина X має **біномний закон розподілу**

$X = x_k$	0	1	2	$\cdots$	n
$p = p_k$	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\cdots$	p^n

Розподіл Пуассона.

Розподіл Пуассона.

Розподіл ймовірностей дискретної випадкової величини X, яка набуває значень

$$x_k : \quad 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

з ймовірностями

$$p_k = P\{X = x_k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

називається *законом розподілу Пуассона*, що залежить від параметра $\lambda,\ \lambda > 0$.

Розподіл Пуассона.

Розподіл ймовірностей дискретної випадкової величини X, яка набуває значень

$$x_k : \quad 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

з ймовірностями

$$p_k = P\{X = x_k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

називається *законом розподілу Пуассона*, що залежить від параметра $\lambda,\ \lambda > 0$.

$X = x_k$	0	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$
$p = p_k$	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\cdots$	$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$	$\cdots$

Геометричний закон розподілу.

Геометричний закон розподілу.

Розглянемо незалежні випробування Бернуллі, у кожному з яких подія A настає з ймовірністю p, $0 < p < 1$, і не настає з ймовірністю $q = 1-p$. Нехай випробування ведуться до появи події A, тобто, це означає: якщо подія A з'явилася у m-му випробуванні, то у попередніх $m-1$ її не було.

Геометричний закон розподілу.

Розглянемо незалежні випробування Бернуллі, у кожному з яких подія A настає з ймовірністю p, $0 < p < 1$, і не настає з ймовірністю $q = 1-p$. Нехай випробування ведуться до появи події A, тобто, це означає: якщо подія A з'явилася у m-му випробуванні, то у попередніх $m-1$ її не було.

Позначимо через X випадкову величину, що означає кількість випробувань, які треба провести до першої появи події A, тобто

$$x_k : \quad 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ \ldots$$

Геометричний закон розподілу.

Розглянемо незалежні випробування Бернуллі, у кожному з яких подія A настає з ймовірністю p, $0 < p < 1$, і не настає з ймовірністю $q = 1-p$. Нехай випробування ведуться до появи події A, тобто, це означає: якщо подія A з'явилася у m-му випробуванні, то у попередніх $m-1$ її не було.
Позначимо через X випадкову величину, що означає кількість випробувань, які треба провести до першої появи події A, тобто

$$x_k : \quad 1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ \ldots$$

Тоді ймовірність p_k дорівнює $p_k = P\{X = x_k\} = q^{k-1}p$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, а закон розподілу дискретної випадкової величини X називається **геометричним** і його можна подати таблицею:

$X = x_k$	1	2	3	$\cdots$	m	$\cdots$
$p = p_k$	p	qp	q^2p	$\cdots$	$q^{m-1}p$	$\cdots$

Неперервні випадкові величини. Щільність розподілу

Означення

Випадкову величину X називають **неперервною (або абсолютно неперервною)**, якщо існує невід'ємна функція $p(x)$ така, що для всіх x функція розподілу випадкової величини X визначається у вигляді

$$F(x) = P\{X < x\} = \int\limits_{-\infty}^{x} p(u)du,$$

до того ж функція $p(x)$ — неперервна всюди, крім, можливо, скінченної кількості точок.

Неперервні випадкові величини. Щільність розподілу

Означення

Випадкову величину X називають **неперервною (або абсолютно неперервною)**, якщо існує невід'ємна функція $p(x)$ така, що для всіх x функція розподілу випадкової величини X визначається у вигляді

$$F(x) = P\{X < x\} = \int_{-\infty}^{x} p(u)du,$$

до того ж функція $p(x)$ — неперервна всюди, крім, можливо, скінченної кількості точок.

Функція розподілу неперервної випадкової величини — неперервна.
Функція $p(x)$ називається **щільністю розподілу ймовірностей** випадкової величини X.
В точках своєї неперервності функцію $p(x)$ можна визначити як похідну функції розподілу: $p(x) = F'(x)$.

$$P\{a \leq X < b\}$$

Неперервні випадкові величини. Щільність розподілу

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a)$$

Неперервні випадкові величини. Щільність розподілу

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a) = \int\limits_{-\infty}^{b} p(u)du - \int\limits_{-\infty}^{a} p(u)du$$

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a) = \int\limits_{-\infty}^{b} p(u)du - \int\limits_{-\infty}^{a} p(u)du = \int\limits_{a}^{b} p(x)dx.$$

Неперервні випадкові величини. Щільність розподілу

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a) = \int\limits_{-\infty}^{b} p(u)du - \int\limits_{-\infty}^{a} p(u)du = \int\limits_{a}^{b} p(x)dx.$$

З неперервності функції розподілу неперервної випадкової величини отримуємо, що $P\{X = x\} = F(x+0) - F(x) = 0$.

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} p(u)du - \int_{-\infty}^{a} p(u)du = \int_{a}^{b} p(x)dx.$$

З неперервності функції розподілу неперервної випадкової величини отримуємо, що $P\{X = x\} = F(x+0) - F(x) = 0$. Тому для неперервної випадкової величини X

$$P\{a \leq X \leq b\} = P\{a < X \leq b\} = P\{a \leq X < b\} = P\{a < X < b\}.$$

Неперервні випадкові величини. Щільність розподілу

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} p(u)du - \int_{-\infty}^{a} p(u)du = \int_{a}^{b} p(x)dx.$$

З неперервності функції розподілу неперервної випадкової величини отримуємо, що $P\{X = x\} = F(x+0) - F(x) = 0$. Тому для неперервної випадкової величини X

$$P\{a \le X \le b\} = P\{a < X \le b\} = P\{a \le X < b\} = P\{a < X < b\}.$$

Використовуючи те, що $F(+\infty) = 1$ отримуємо **основну властивість щільності розподілу**

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1.$$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Рівномірний закон розподілу.

Рівномірний закон розподілу.
Нехай на проміжок $[a, b]$ навмання кидають точку, отже, ймовірність потрапляння точки на деяку частину проміжку пропорційна довжині цієї частини проміжку.

Рівномірний закон розподілу.
Нехай на проміжок $[a, b]$ навмання кидають точку, отже, ймовірність потрапляння точки на деяку частину проміжку пропорційна довжині цієї частини проміжку.
Випадкову величину визначимо як координату тієї точки відрізка, в яку влучила кинута точка:

$$X(\omega) = \omega, \qquad \omega \in [a, b].$$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Рівномірний закон розподілу.
Нехай на проміжок $[a, b]$ навмання кидають точку, отже, ймовірність потрапляння точки на деяку частину проміжку пропорційна довжині цієї частини проміжку.
Випадкову величину визначимо як координату тієї точки відрізка, в яку влучила кинута точка:

$$X(\omega) = \omega, \qquad \omega \in [a, b].$$

Визначимо функцію розподілу випадкової величини X.

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Рівномірний закон розподілу.
Нехай на проміжок $[a, b]$ навмання кидають точку, отже, ймовірність потрапляння точки на деяку частину проміжку пропорційна довжині цієї частини проміжку.
Випадкову величину визначимо як координату тієї точки відрізка, в яку влучила кинута точка:

$$X(\omega) = \omega, \qquad \omega \in [a, b].$$

Визначимо функцію розподілу випадкової величини X.
Якщо $x \leq a$, то $F(x) = P\{X < x\} = P(\emptyset) = 0$.

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Рівномірний закон розподілу.
Нехай на проміжок $[a, b]$ навмання кидають точку, отже, ймовірність потрапляння точки на деяку частину проміжку пропорційна довжині цієї частини проміжку.
Випадкову величину визначимо як координату тієї точки відрізка, в яку влучила кинута точка:

$$X(\omega) = \omega, \qquad \omega \in [a, b].$$

Визначимо функцію розподілу випадкової величини X.
Якщо $x \leq a$, то $F(x) = P\{X < x\} = P(\emptyset) = 0$.
Якщо $x \in (a, b]$, то $F(x) = P\{X < x\} = c(x - a)$.

Рівномірний закон розподілу.
Нехай на проміжок $[a, b]$ навмання кидають точку, отже, ймовірність потрапляння точки на деяку частину проміжку пропорційна довжині цієї частини проміжку.
Випадкову величину визначимо як координату тієї точки відрізка, в яку влучила кинута точка:

$$X(\omega) = \omega, \qquad \omega \in [a, b].$$

Визначимо функцію розподілу випадкової величини X.
Якщо $x \le a$, то $F(x) = P\{X < x\} = P(\emptyset) = 0$.
Якщо $x \in (a, b]$, то $F(x) = P\{X < x\} = c(x - a)$.
Тоді

$$F(b) = P\{X < b\} = P(\Omega) = 1 = c(b - a) \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{1}{b - a}.$$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Рівномірний розподіл задають функцією

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b; \\ 1, & x > b, \end{cases}$$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Рівномірний розподіл задають функцією

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b; \\ 1, & x > b, \end{cases}$$

Щільність розподілу ймовірностей:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Показниковий закон розподілу.

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Показниковий закон розподілу.

Означення

Неперервна випадкова величина X називається **розподіленою за показниковим законом** або **показниково розподіленою**, з параметром λ, якщо щільність розподілу її ймовірностей має вигляд:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Показниковий закон розподілу.

Означення

Неперервна випадкова величина X називається **розподіленою за показниковим законом** або **показниково розподіленою**, з параметром λ, якщо щільність розподілу її ймовірностей має вигляд:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Функція розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Ймовірність попадання значень показниково розподіленої випадкової величини у заданий інтервал:

$$P\{a < X < b\} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Ймовірність попадання значень показниково розподіленої випадкової величини у заданий інтервал:

$$P\{a < X < b\} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Серед усіх законів розподілу неперервних випадкових величин лише показниковому притаманна **властивість відсутності післядії**

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Ймовірність попадання значень показниково розподіленої випадкової величини у заданий інтервал:

$$P\{a < X < b\} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Серед усіх законів розподілу неперервних випадкових величин лише показниковому притаманна **властивість відсутності післядії**:

якщо випадкову величину пов'язати з часом, то для показникового закону розподілу минуле не впливає на передбачення подій у майбутньому.

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Ймовірність попадання значень показниково розподіленої випадкової величини у заданий інтервал:

$$P\{a < X < b\} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Серед усіх законів розподілу неперервних випадкових величин лише показниковому притаманна **властивість відсутності післядії**:

якщо випадкову величину пов'язати з часом, то для показникового закону розподілу минуле не впливає на передбачення подій у майбутньому.

Наприклад, якщо випадкова величина T — тривалість безвідмовної роботи приладу має показниковий розподіл, то час роботи приладу впродовж інтервалу часу $(0, t_0)$ не впливає на величину ймовірності його безвідмовної роботи впродовж наступного інтервалу часу $(t_0, t_0 + t)$, а залежить лише від довжини t цього інтервалу.

Нормальний закон розподілу.

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Нормальний закон розподілу.

Означення

Неперервна випадкова величина X називається **розподіленою за нормальним законом**, або **нормально розподіленою**, з параметрами $-\infty < a < \infty$ і $\sigma > 0$, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Нормальний закон розподілу.

Означення

Неперервна випадкова величина X називається **розподіленою за нормальним законом**, або **нормально розподіленою**, з параметрами $-\infty < a < \infty$ і $\sigma > 0$, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Нормальний закон розподілу з параметрами a і σ позначають $N(a, \sigma)$.

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Нормальний закон розподілу.

Означення

Неперервна випадкова величина X називається **розподіленою за нормальним законом**, або **нормально розподіленою**, з параметрами $-\infty < a < \infty$ і $\sigma > 0$, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Нормальний закон розподілу з параметрами a і σ позначають $N(a, \sigma)$.

Зауваження

Якщо випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 1$, тобто $N(0, 1)$, то такий розподіл називається **нормованим нормальним розподілом** або **стандартним нормальним розподілом**. Функцією щільності у цьому випадку є функція Гауса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Ймовірність попадання значень нормально розподіленої випадкової величини в інтервал (α, β) дорівнює різниці значень функції Лапласа $\Phi(x)$ в точках $\frac{\beta - a}{\sigma}$ і $\frac{\alpha - a}{\sigma}$:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Ймовірність попадання значень нормально розподіленої випадкової величини в інтервал (α, β) дорівнює різниці значень функції Лапласа $\Phi(x)$ в точках $\frac{\beta-a}{\sigma}$ і $\frac{\alpha-a}{\sigma}$:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Якщо взяти $\alpha = a - \varepsilon$, $\beta = a + \varepsilon$, то отримаємо:

$$P\{a-\varepsilon < X < a+\varepsilon\} = P\{|X-a| < \varepsilon\} = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right),$$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Ймовірність попадання значень нормально розподіленої випадкової величини в інтервал (α, β) дорівнює різниці значень функції Лапласа $\Phi(x)$ в точках $\frac{\beta - a}{\sigma}$ і $\frac{\alpha - a}{\sigma}$:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Якщо взяти $\alpha = a - \varepsilon$, $\beta = a + \varepsilon$, то отримаємо:

$$P\{a - \varepsilon < X < a + \varepsilon\} = P\{|X - a| < \varepsilon\} = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right),$$

тобто

$$P\{|X - a| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Ймовірність попадання значень нормально розподіленої випадкової величини в інтервал (α, β) дорівнює різниці значень функції Лапласа $\Phi(x)$ в точках $\frac{\beta-a}{\sigma}$ і $\frac{\alpha-a}{\sigma}$:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Якщо взяти $\alpha = a - \varepsilon$, $\beta = a + \varepsilon$, то отримаємо:

$$P\{a-\varepsilon < X < a+\varepsilon\} = P\{|X-a| < \varepsilon\} = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right),$$

тобто

$$P\{|X - a| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Покладемо $\varepsilon = 3\sigma$.

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Ймовірність попадання значень нормально розподіленої випадкової величини в інтервал (α, β) дорівнює різниці значень функції Лапласа $\Phi(x)$ в точках $\frac{\beta-a}{\sigma}$ і $\frac{\alpha-a}{\sigma}$:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Якщо взяти $\alpha = a - \varepsilon$, $\beta = a + \varepsilon$, то отримаємо:

$$P\{a-\varepsilon < X < a+\varepsilon\} = P\{|X-a| < \varepsilon\} = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right),$$

тобто

$$P\{|X - a| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Покладемо $\varepsilon = 3\sigma$.Одержимо:

$$P\{|X - a| < 3\sigma\} = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973,$$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

$$P\{|X-a|<3\sigma\}=2\Phi(3)=2\cdot 0,49865=0,9973.$$

Правило «трьох сигм»: якщо випадкова величина нормально розподілена, то практично вірогідно, що абсолютна величина її відхилення від параметра a не перевищує потроєного параметра σ.