Лабораторна робота № 1

Задано: аналітичні залежності цільових функцій $f_1(x)$, $f_2(x)$ і порогові обмеження f_1^*, f_2^*.

Потрібно: визначити множину Парето на заданому інтервалі $[x_1, x_2]$, якщо виконуються умови $f_1(x) \geq f_1^*$, $f_2(x) \geq f_2^*$. Звузити множину Парето, використовуючи прийоми (варіанти) технічних обмежень.

Розв'язуючи рівняння, всі обчислення виконати з точністю до 0,0001, у разі звуження інтервалів значення меж округлити до 0,001 і крок сітки брати таким, що дорівнює 0,001.

Варіанти завдання подано в табл 1.

Таблиця 1. Цільові функції суб'єктів та значення змінних

Варіант	**Цільові функції суб'єктів**		**Значення**			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_1^*	f_2^*	x_1	x_2
	Обмеження: $f_1(x) \geq f_1^*$, $f_2(x) \geq f_2^*$					
1	$100\log(x)$	$100-x^2$	60	19	0	10
2	2^x	$9-x^2$	2	6	0	4
3	$\sin x$	$4-x^2$	$\sqrt{2}/2$	0,5	0	2
4	$20+6x-3x^2$	$9\ln(x)+9$	20	10	1	5
5	2^x	$5+2x+x^3$	5	15	1	5
6	$0{,}8\exp(-2(x-3)^2)$	$10-6x+x^2$	0,2	1	1	5
7	$20x^{-1}$	$5+6x-x^{1,5}$	5	12	1	5
8	3^{x+1}	$5+4x-3x^2$	1	3	1	3
9	$\sqrt{5x^2+10}$	$3-0{,}5x^2$	10	6	1	6
10	$15\sin(x+1)$	$10\cos(2x-2{,}4)+12$	12,82	16	6	8
	Обмеження: $f_1(x) \leq f_1^*$, $f_2(x) \geq f_2^*$					
11	$1-x^2$	$\lvert x\rvert$	–2	2	–2	2
12	$3+12x+0{,}4x^3$	$\sin(x^3)+7x^2$	50	10	0	4
13	$5\lvert x-2\rvert+10\lvert x-3\rvert$	$15+4x$	25	23	0	5
14	$2+0{,}5\exp(x)$	$8+x^3$	3	7	–3	3
15	$-32-x+10x^2$	$10+x-32x^2$	0,001	–10	–2	2
16	$5\log(x+9)$	$-12+4x$	10	2	0,001	5
17	$9-6x+x^2$	$18-9x-0{,}1x^2$	45	10	–5	4
18	$1-1{,}6x+7x^2$	$6+8x-3x^2$	45	5	–2	2
19	$1-x+x^3$	$56-x-3x^2$	15	5	–5	2
20	$1+\ln(x)$	$-1+x+x^2$	1	–0,25	0,001	1,5

Приклад

Потрібно знайти множину Парето і визначити умови раціонального компромісу для заданих цільових функцій

$$f_1 = 2^x, \quad f_2(x) = 9 - x^2, \quad x \in [0; 4] \tag{4.17}$$

за обмежень

$$f_1(x) \geqslant f_1^*; \quad f_2(x) \geqslant f_2^*;$$
$$f_1^* = 2; \quad f_2^* = 6.$$

Спочатку визначимо множину Парето на інтервалі $[x^-, x^+]$, де справедливі нерівності

$$\frac{f_1(x)}{2} \geqslant 1; \quad \frac{f_2(x)}{6} \geqslant 1$$

або

$$2^x \geqslant 2, \quad 9 - x^2 \geqslant 6. \tag{4.18}$$

Аналітичне розв'язання системи нерівностей (4.18) свідчить, що шукана множина Парето лежить в інтервалі $x \in [1, \sqrt{3}]$ (рис. 4.4).

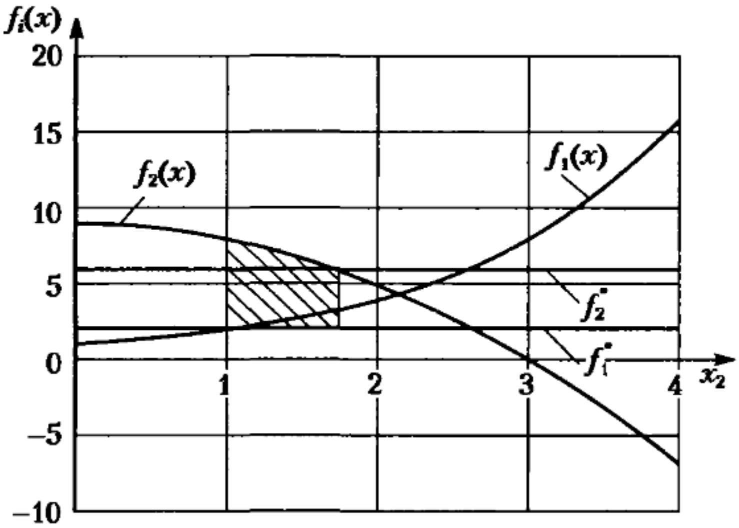

Рис. 4.4. Визначення множини Парето для системи (4.17)

Для звуження множини Парето і зведення вихідної двокритерійної задачі до однокритерійної скористаємося технічними обмеженнями, що ґрунтуються на принципах мінімаксу $\min\limits_x \max\limits_i f_i(x)/f_i^*$ та максиміну $\max\limits_x \min\limits_i f_i(x)/f_i^*$. Значення відношень $f_1(x)/f_1^*$ і $f_2(x)/f_2^*$, $\min\limits_x \max\limits_i f_i(x)/f_i^*$ і $\max\limits_x \min\limits_i f_i(x)/f_i^*$ на інтервалі $x \in [1, \sqrt{3}]$, що обчислені з кроком сітки 0,01, подано у табл. 4.1.

Таблиця 4.1. Значення $f_1(x)/f_1^*$ і $f_2(x)/f_2^*$, $\min\limits_x \max\limits_i f_i(x)/f_i^*$ і $\max\limits_x \min\limits_i f_i(x)/f_i^*$

x	f_1/f_1^*	f_2/f_2^*	$\max f_i/f_i^*$	$\min\max(f_i/f_i^*)$	$\min(f_i/f_i^*)$	$\max\min(f_i/f_i^*)$
1	1	1,333333	1,333333	–	1	–
1,1	1,071773	1,298333	1,298333	–	1,071773	–
1,2	1,148698	1,26	1,26	–	1,148698	–
1,3	1,231144	1,218333	1,231144	1,231144	1,218333	1,218333
1,4	1,319508	1,173333	1,319508	–	1,173333	–
1,5	1,414214	1,125	1,414214	–	1,125	–
1,6	1,515717	1,073333	1,515717	–	1,073333	–
1,7	1,624505	1,018333	1,624505	–	1,018333	–
1,8	1,741101	0,96	1,741101	–	0,96	–

З таблиці видно, що для двох досліджуваних функцій як раціональний компроміс слід вибрати стратегію $x = 1,3$.