Розв’язування граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь

Мета лабораторної роботи: познайомитися із способами розв’язування граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь. Розробити необхідні m-файли для розв’язування граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем за допомогою вбудованих функцій MATLAB.

Теоретичні відомості

Формулювання задачі

Нехай задане рівняння

$$F(x, y, y',..., y^{(n)}) = 0\,,\; a \le x \le b\,. \tag{1}$$

Гранична задача на двох точках для рівняння (1) формулюється наступним чином: знайти функцію $y(x)$, яка на відрізку $[a, b]$ задовольняє (1), а на кінцях відрізку – граничним умовам:

$$\varphi_i(y(a), y'(a),..., y^{(n-1)}(a)) = 0,\; i = 1,2,..., L; \tag{2}$$

$$\psi_j(y(b), y'(b),..., y^{(n-1)}(b)) = 0,\; i = L+1, L+2,..., n. \tag{3}$$

Якщо рівняння (1)-(3) лінійні відносно $y(x), y'(x),..., y^{(n)}(x)$, то гранична задача (1)-(3) називається лінійною. Для простоти обмежимося випадком лінійної граничної задачі при $n = 2$. Тоді диференціальне рівняння і умови записуються у вигляді

$$y''(x) + p(x)y'(x) - q(x)y(x) = f(x), a \le x \le b; \tag{4}$$

$$\alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = \gamma_0; \tag{5}$$

$$\alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_1. \tag{6}$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – відомі функції; α_0, $\beta_0, \gamma_0, \alpha_1$, β_1, γ_1 – задані константи.

Питання існування та єдиності функції $y(x)$ розглядається в курсі диференціальних рівнянь. Тут будемо вважати, що $y(x)$ існує, єдина і існують похідні від $y(x)$ достатньо високого порядку. Для цього необхідне виконання умов $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$.

Розв’язування граничних задач

На прикладі проілюструємо як звести диференціальне рівняння другого порядку до системи двох диференціальних рівнянь першого порядку та розглянемо функцію bvp4c, яка дозволяє розв’язувати такі системи рівнянь. Нехай задана гранична задача для звичайного диференціального рівняння:

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) - 2y(x) = x^2,\; 0.5 \le x \le 1; \tag{7}$$

$$y'(0.5) = -0.5\,,\; y'(1) = -1\,. \tag{8}$$

Щоб розв’язати диференціальне рівняння з граничними умовами у MATLAB, необхідно пробити наступні кроки.

1. Зведеннязадачі до першого порядку

Щоб застосувати функцію bvp4c, необхідно звести диференціальне рівняння другого порядку до системи диференціальних рівнянь першого порядку. Використовуючи заміну $y_1(x) = y(x)$ та $y_2(x) = y'(x)$ диференціальне рівняння (7) можна замінити системою двох диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -\dfrac{1}{x} y_2(x) + 2y_1(x) - x^2. \end{cases} \tag{9}$$

Граничні умови (8) набудуть вигляду

$$\begin{cases} y_2(0.5) + 0.5 = 0, \\ y_2(1) + 1 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

2. Кодування системи рівнянь першого порядку

Після того як задачу представлено у вигляді системи рівнянь першого порядку, можна переходити до її кодування у вигляді функцій, які пізніше заможна підставити у функцію `bvp4c`. Функцію необхідно записати у формі:

```
dydx = odefun(x,y)
```

Наведений нижче код представляє систему (9) закодовану у вигляді функції `exampleode`.

```
function dydx = exampleode(x,y)
dydx = [   y(2)
           -1/x*y(2)+2*y(1)-x^2  ];
```

3. Кодуванняграничних умов

Необхідно також закодувати граничні умови у вигляді:

```
res = bcfun(ya,yb)
```

Нижченаведений код представляє граничні умови (10) закодовані у функцію `examplebc`.

```
function res = examplebc(ya,yb)
res = [  ya(2) + 0.5
         yb(2) + 1  ];
```

4. Вибір початкового наближення

Щоб сформувати структуру `solinit` за допомогою функції `bvpinit`, необхідно задати початкове наближення для розв'язку граничної задачі.

```
solinit = bvpinit(linspace(0.5,1,10),@mat4init);
```

Функція `example4init` задає початкове наближення для розв'язку – функцію, яка задовольняє задані граничні умови, та її похідну.

```
function yinit = example4init(x)
yinit = [  -x^2/2
           -x ];
```

В цьому прикладі використано оператор `@`, щоб передати `example4init` як функцію для управління `bvpinit`.

5. Розв'язання граничної задачі

Основна функція `example4bvp` викликає функції `example4ode` та `example4bc` як параметри функції `bvp4c`, а також створює структуру `solinit` за допомогою `bvpinit`.

```
sol = bvp4c(@example4ode,@examle4bc,solinit);
```

6. *Перегляд результату*

Використаємо `deval`, щоб обчислити значення чисельного розв'язку в 100 рівновіддалених точках заданого проміжку, і зобразимо пораховані значення на графіку.

```
xint = linspace(0.5,1);
Sxint = deval(sol,xint);
plot(xint,Sxint(1,:))
title('Boundary Values Problem solution')
xlabel('x')
ylabel('solution y')
```

Наступний рисунок відображає результат розв'язування граничної задачі для звичайного диференціального рівняння.

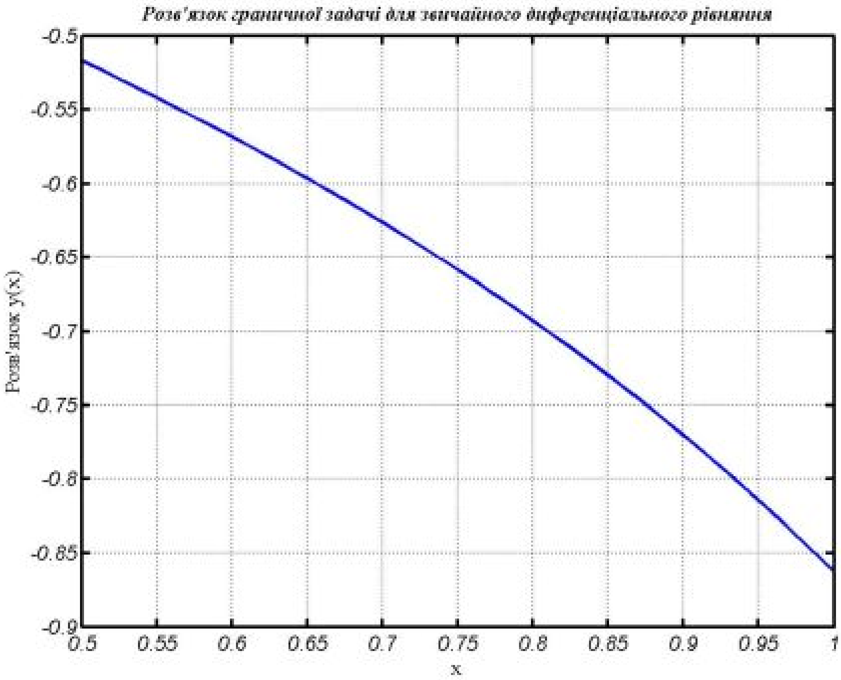

Рис. 4.1 Розв'язок граничної задачі для звичайного диференціального рівняння

Завдання

Відповідно до заданого варіанту розв'язати у MATLAB граничну задачу для звичайного диференціального рівняння.

Варіант 1.

$$y''(x)-\frac{2}{x}y'(x)-\frac{4}{x^2+2}y(x)=8,\ 0.5\le x\le 1;\ y'(0.5)=0.5,\ y(1)+y'(1)=-1.$$

Варіант 2.

$$y''(x)+y'(x)-\frac{1}{x}y(x)=\frac{x+1}{x},\ 0.5\le x\le 1;\ y'(0.5)=-0.5\ln 2,\ y(1)=0.$$

Варіант 3.

$$y''(x)+y'(x)-\frac{6}{2x^2+1}y(x)=6x+0.5,\ 0.5\le x\le 1;\ y'(0.5)=1.25,\ y(1)+y'(1)=5.$$

Варіант 4.

$$y''(x)-\frac{1}{x}y'(x)=-\frac{2}{x^2},\ 0.5\le x\le 1;\ y'(0.5)=2,\ y(1)=0.$$

Варіант 5.

$$y''(x)+y'(x)-\frac{2}{\cos^2 x}y(x)=\frac{1}{\cos^2 x},\ 0\le x\le 0.5;\ y(0)=0,\ y'(0.5)=1/\cos^2 0.5.$$

Варіант 6.

$$y''(x)-2y'(x)-2y(x)=-3xe^x,\ 0\le x\le 0.5;\ y(0)=0,\ y'(0.5)=0.82436.$$

Варіант 7.

$$y''(x)+2y'(x)-\frac{4}{x}y(x)=2,\ 0.5\le x\le 1;\ y'(0.5)=-1.5,\ y(1)+y'(1)=4.$$

Варіант 8.

$$y''(x)-\frac{6x}{3x^2-0.5}y'(x)-\frac{1}{x}y(x)=0.5-x^2,\ 0.5\le x\le 1;\ y'(0.5)=0.25,\ 2y(1)+y'(1)=3.5.$$

Варіант 9.

$$y''(x)+\frac{1}{x}y'(x)=\frac{1}{x},\ 0.5\le x\le 1;\ y'(0.5)=3,\ y(1)=1.$$

Варіант 10.

$$y''(x)+2xy'(x)-y(x)=2(x^2+1)\cos x,\ 0\le x\le 0.5;\ y(0)=0,\ y'(0.5)=0.5\sin 0.5.$$

Варіант 11.

$$y''(x)+y'(x)-2y(x)=3e^x,\ 0\le x\le 1;\ y(0)=0,\ y(1)+y'(1)=3e.$$

Варіант 12.

$$y''(x)-2\,\mathrm{tg}\,x\,y'(x)=0,\ 0\le x\le 1;\ y(0)=0,\ y'(1)=\mathrm{tg}1.$$

Варіант 13.

$$y''(x)-y'(x)-2y(x)=-2e^x,\ 0\le x\le 0.5;\ y'(0)=0,\ y(0.5)+y'(0.5)=3.29744.$$

Варіант 14.

$$y''(x)+2xy'(x)-y(x)=2(x^2+1)\sin x,\ 0\le x\le 0.5;\ y(0)=0,\ y'(0.5)=-0.5\cos 0.5.$$

Варіант 15.

$$y''(x)-x^2y'(x)-\frac{2}{x^2}y(x)=1,\ 0.5\le x\le 1;\ y(0.5)-y'(0.5)=6,\ y(1)=1.$$