

Факторний план

Мета лабораторної роботи: здійснити побудову регресійної моделі за даним повним факторним експериментом. Навчитись робити висновки щодо однорідності дисперсії, значимості кожного із коефіцієнтів регресії та адекватності побудованої моделі.

Теоретичні відомості

Формулювання задачі

При експериментуванні з моделлю розрізняють вхідні і вихідні змінні. Вхідні змінні називаються *факторами*. Вихідні змінні називаються *відгуками*. Кожен фактор в експерименті може приймати одне або кілька значень, що називаються *рівнями фактора*.

Порядок побудови регресійних моделей за даними повного факторного експерименту (ПФЕ) розглянемо на прикладі визначення границі міцності на згин σ , МПа у процесі гідролізу деревної маси залежно від температури t , °С, часу τ , хв. та кислотності деревної маси ω , рН.

Діапазон зміни натуральних факторів визначається $20^\circ\text{C} < t < 60^\circ\text{C}$; $0 < \tau < 60$ хв.; $4.5 \text{ рН} < \omega < 5.2 \text{ рН}$.

Нехай при кожному сполученні рівнів факторів (таких сполучень буде $N = 2^3 = 8$) проведено серії по $n = 5$ експериментів і у кожному визначена границя міцності на згин σ , МПа. Необхідно за результатами експериментів побудувати регресійну залежність

$$\sigma = \sigma(t, \tau, \omega) \quad (1)$$

Побудова регресійної залежності

Відгуки у кожному з експериментів позначимо y_{ij} , $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, n}$.

Перейдемо до кодованих факторів зробивши заміну змінних за формулами:

$$x_1 = \frac{t - 40}{20}; \quad x_2 = \frac{\tau - 30}{30}; \quad x_3 = \frac{\omega - 4.85}{0.35}. \quad (2)$$

Середнє значення відгуків y_{ij} для кожної серії дослідів $i = \overline{1, N}$ визначається за формулою:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{ij}.$$

Для оцінки відхилення результатів експерименту y_{ij} від середнього значення відгуку \bar{y}_i у кожній серії дослідів обчислюють дисперсію S_i^2 за формулою:

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

та перевіряють однорідність дисперсій за допомогою критерію Кохрена. Дисперсії вважаються однорідними при вибраному рівні значущості α , якщо $G < G_{1-\alpha}(m, f)$, де $G_{1-\alpha}(m, f)$ – критерій Кохрена, який визначається з таблиці при кількості дисперсій $m = N$ і числі степенів свободи $f = (n-1)$, G – розрахунковий критерій Кохрена, який визначається за формулою:

$$G = \left(\max_{i=\overline{1, N}} S_i^2 \right) / \left(\sum_{i=1}^N S_i^2 \right).$$

Якщо вектор середніх значень відгуків позначити $\bar{Y} = \{\bar{y}_i\}$, $i = \overline{1, N}$, тоді значення коефіцієнтів регресії $A = \{a_i\}$, $i = \overline{1, N}$ можна обчислити за формулою:

$$A = (H^T \cdot H)^{-1} \cdot H^T \cdot \bar{Y}.$$

де H – матриця Адамара ($H = \text{hadamard}(n)$). Матриця Адамара – це матриця, що складається із значень -1 та 1 , стовпчики якої ортогональні, тобто справедлива рівність:

$$H^T \cdot H = n \cdot I,$$

де n – розмірність матриці H ($[n \ n] = \text{size}(H)$), I – одинична матриця ($I = \text{eye}(n, n)$).

Після того як обчислені коефіцієнти a_i , перевіряють значимість кожного із коефіцієнтів регресії за допомогою критерію Стюдента t . Коефіцієнт a_i вважається значимим, якщо $t_i > t$, де t – значення критерію Стюдента з таблиці для заданого рівня значущості α з числом степенів свободи $f = (n - 1)$; t_i – критерій Стюдента, розрахований за формулою:

$$t_i = \frac{|a_i|}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N S_i^2}}.$$

Для визначення границі міцності на згин σ будується регресійна модель

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_3 + a_5 x_1 x_2 + a_6 x_1 x_3 + a_7 x_2 x_3 + a_8 x_1 x_2 x_3 \quad (3)$$

відкинувши доданки із незначущими коефіцієнтами.

Перевірити адекватність отриманої регресійної моделі можна за допомогою критерію Фішера (F-критерію). Регресійна модель вважається адекватною, якщо $F_p < F_T$, де F_T – табличне значення, вибране для $f_1 = N - 1$ – число степенів свободи більшої дисперсії, $f_2 = N - P$ – число степенів свободи меншої дисперсії, P – число незначущих коефіцієнтів регресійної моделі; а F_p розраховується за формулою:

$$F_p = \frac{\frac{n \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \sigma_i)^2}{N - P}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N S_i^2}.$$

За допомогою заміни змінних (2) отриману регресійну залежність (3) записують у натуральних координатах $\sigma(t, \tau, \omega)$, тобто отримують шукану залежність (1).

Завдання

Відповідно до заданого варіанту та заданих експериментальних даних побудувати регресійну залежність (1). Зробити висновки щодо однорідності дисперсії, значимості кожного із коефіцієнтів регресії та адекватності моделі.

Варіант 1.

Фактори			Результативимірювання				
t	τ	ω	1	2	3	4	5
20	0	4,5	42,1	39,7	41,6	43,8	43,2
60	0	4,5	44,2	45,3	44,6	45,9	41,8
20	60	4,5	54,3	53,7	54,2	53,1	53,4
60	60	4,5	49,2	49,6	50,4	48,3	47,3
20	0	5,2	34,5	34,6	34,0	34,9	32,9
60	0	5,2	37,2	37,4	38,7	36,5	36,8

20	60	5,2	45,7	46,0	46,0	45,0	48,0
60	60	5,2	53,1	53,2	54,8	54,4	53,3

Варіант 2.

Фактори			Результативимірювання				
t	τ	ω	1	2	3	4	5
20	0	4,5	42,6	40,2	42,1	44,3	43,7
60	0	4,5	44,7	45,8	45,1	46,4	42,3
20	60	4,5	54,8	54,2	54,7	53,6	53,9
60	60	4,5	49,7	50,1	50,9	48,8	47,8
20	0	5,2	35,0	35,1	34,5	35,4	33,4
60	0	5,2	37,7	37,9	39,2	37,0	37,3
20	60	5,2	46,2	46,5	46,5	45,5	48,5
60	60	5,2	53,6	53,7	55,3	54,9	53,8

Варіант 3.

Фактори			Результативимірювання				
t	τ	ω	1	2	3	4	5
20	0	4,5	43,1	40,7	42,6	44,8	44,2
60	0	4,5	45,2	46,3	45,6	46,9	42,8
20	60	4,5	55,3	54,7	55,2	54,1	54,4
60	60	4,5	50,2	50,6	51,4	49,3	48,3
20	0	5,2	35,5	35,6	35,0	35,9	33,9
60	0	5,2	38,2	38,4	39,7	37,5	37,8
20	60	5,2	46,7	47,0	47,0	46,0	49,0
60	60	5,2	54,1	54,2	55,8	55,4	54,3

Варіант 4.

Фактори			Результативимірювання				
t	τ	ω	1	2	3	4	5
20	0	4,5	43,6	41,2	43,1	45,3	44,7
60	0	4,5	45,7	46,8	46,1	47,4	43,3
20	60	4,5	55,8	55,2	55,7	54,6	54,9
60	60	4,5	50,7	51,1	51,9	49,8	48,8
20	0	5,2	36,0	36,1	35,5	36,4	34,4
60	0	5,2	38,7	38,9	40,2	38,0	38,3
20	60	5,2	47,2	47,5	47,5	46,5	49,5
60	60	5,2	54,6	54,7	56,3	55,9	54,8

Варіант 5.

Фактори			Результативимірювання				
t	τ	ω	1	2	3	4	5
20	0	4,5	44,1	41,7	43,6	45,8	45,2
60	0	4,5	46,2	47,3	46,6	47,9	43,8
20	60	4,5	56,3	55,7	56,2	55,1	55,4
60	60	4,5	51,2	51,6	52,4	50,3	49,3
20	0	5,2	36,5	36,6	36,0	36,9	34,9
60	0	5,2	39,2	39,4	40,7	38,5	38,8
20	60	5,2	47,7	48,0	48,0	47,0	50,0
60	60	5,2	55,1	55,2	56,8	56,4	55,3

Варіант 6.

Фактори			Результативимірювання				
t	τ	ω	1	2	3	4	5
20	0	4,5	44,6	42,2	44,1	46,3	45,7
60	0	4,5	46,7	47,8	47,1	48,4	44,3
20	60	4,5	56,8	56,2	56,7	55,6	55,9
60	60	4,5	51,7	52,1	52,9	50,8	49,8

20	0	5,2	37,0	37,1	36,5	37,4	35,4
60	0	5,2	39,7	39,9	41,2	39,0	39,3
20	60	5,2	48,2	48,5	48,5	47,5	50,5
60	60	5,2	55,6	55,7	57,3	56,9	55,8

Варіант 7.

Фактори			Результативимірювання				
t	τ	ω	1	2	3	4	5
20	0	4,5	45,1	42,7	44,6	46,8	46,2
60	0	4,5	47,2	48,3	47,6	48,9	44,8
20	60	4,5	57,3	56,7	57,2	56,1	56,4
60	60	4,5	52,2	52,6	53,4	51,3	50,3
20	0	5,2	37,5	37,6	37,0	37,9	35,9
60	0	5,2	40,2	40,4	41,7	39,5	39,8
20	60	5,2	48,7	49,0	49,0	48,0	51,0
60	60	5,2	56,1	56,2	57,8	57,4	56,3

Варіант 8.

Фактори			Результативимірювання				
t	τ	ω	1	2	3	4	5
20	0	4,5	45,6	43,2	45,1	47,3	46,7
60	0	4,5	47,7	48,8	48,1	49,4	45,3
20	60	4,5	57,8	57,2	57,7	56,6	56,9
60	60	4,5	52,7	53,1	53,9	51,8	50,8
20	0	5,2	38,0	38,1	37,5	38,4	36,4
60	0	5,2	40,7	40,9	42,2	40,0	40,3
20	60	5,2	49,2	49,5	49,5	48,5	51,5
60	60	5,2	56,6	56,7	58,3	57,9	56,8

Варіант 9.

Фактори			Результативимірювання				
t	τ	ω	1	2	3	4	5
20	0	4,5	46,1	43,7	45,6	47,8	47,2
60	0	4,5	48,2	49,3	48,6	49,9	45,8
20	60	4,5	58,3	57,7	58,2	57,1	57,4
60	60	4,5	53,2	53,6	54,4	52,3	51,3
20	0	5,2	38,5	38,6	38,0	38,9	36,9
60	0	5,2	41,2	41,4	42,7	40,5	40,8
20	60	5,2	49,7	50,0	50,0	49,0	52,0
60	60	5,2	57,1	57,2	58,8	58,4	57,3

Варіант 10.

Фактори			Результативимірювання				
t	τ	ω	1	2	3	4	5
20	0	4,5	46,6	44,2	46,1	48,3	47,7
60	0	4,5	48,7	49,8	49,1	50,4	46,3
20	60	4,5	58,8	58,2	58,7	57,6	57,9
60	60	4,5	53,7	54,1	54,9	52,8	51,8
20	0	5,2	39,0	39,1	38,5	39,4	37,4
60	0	5,2	41,7	41,9	43,2	41,0	41,3
20	60	5,2	50,2	50,5	50,5	49,5	52,5
60	60	5,2	57,6	57,7	59,3	58,9	57,8

Варіант 11.

Фактори			Результативимірювання				
t	τ	ω	1	2	3	4	5
20	0	4,5	47,1	44,7	46,6	48,8	48,2
60	0	4,5	49,2	50,3	49,6	50,9	46,8

20	60	4,5	59,3	58,7	59,2	58,1	58,4
60	60	4,5	54,2	54,6	55,4	53,3	52,3
20	0	5,2	39,5	39,6	39,0	39,9	37,9
60	0	5,2	42,2	42,4	43,7	41,5	41,8
20	60	5,2	50,7	51,0	51,0	50,0	53,0
60	60	5,2	58,1	58,2	59,8	59,4	58,3

Варіант 12.

Фактори			Результативимірювання				
t	τ	ω	1	2	3	4	5
20	0	4,5	47,6	45,2	47,1	49,3	48,7
60	0	4,5	49,7	50,8	50,1	51,4	47,3
20	60	4,5	59,8	59,2	59,7	58,6	58,9
60	60	4,5	54,7	55,1	55,9	53,8	52,8
20	0	5,2	40,0	40,1	39,5	40,4	38,4
60	0	5,2	42,7	42,9	44,2	42,0	42,3
20	60	5,2	51,2	51,5	51,5	50,5	53,5
60	60	5,2	58,6	58,7	60,3	59,9	58,8

Варіант 13.

Фактори			Результативимірювання				
t	τ	ω	1	2	3	4	5
20	0	4,5	48,1	45,7	47,6	49,8	49,2
60	0	4,5	50,2	51,3	50,6	51,9	47,8
20	60	4,5	60,3	59,7	60,2	59,1	59,4
60	60	4,5	55,2	55,6	56,4	54,3	53,3
20	0	5,2	40,5	40,6	40,0	40,9	38,9
60	0	5,2	43,2	43,4	44,7	42,5	42,8
20	60	5,2	51,7	52,0	52,0	51,0	54,0
60	60	5,2	59,1	59,2	60,8	60,4	59,3

Варіант 14.

Фактори			Результативимірювання				
t	τ	ω	1	2	3	4	5
20	0	4,5	48,6	46,2	48,1	50,3	49,7
60	0	4,5	50,7	51,8	51,1	52,4	48,3
20	60	4,5	60,8	60,2	60,7	59,6	59,9
60	60	4,5	55,7	56,1	56,9	54,8	53,8
20	0	5,2	41,0	41,1	40,5	41,4	39,4
60	0	5,2	43,7	43,9	45,2	43,0	43,3
20	60	5,2	52,2	52,5	52,5	51,5	54,5
60	60	5,2	59,6	59,7	61,3	60,9	59,8

Варіант 15.

Фактори			Результативимірювання				
t	τ	ω	1	2	3	4	5
20	0	4,5	49,1	46,7	48,6	50,8	50,2
60	0	4,5	51,2	52,3	51,6	52,9	48,8
20	60	4,5	61,3	60,7	61,2	60,1	60,4
60	60	4,5	56,2	56,6	57,4	55,3	54,3
20	0	5,2	41,5	41,6	41,0	41,9	39,9
60	0	5,2	44,2	44,4	45,7	43,5	43,8
20	60	5,2	52,7	53,0	53,0	52,0	55,0
60	60	5,2	60,1	60,2	61,8	61,4	60,3