Закон великих чисел

Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси і математична статистика

Нерівність Чебишова

Теорема (Нерівність Чебишова)

Якщо випадкова величина X *має скінченну дисперсію* $D(X)$, *то для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *виконується нерівність*

$$P\{|X - M(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{6.1}$$

Нерівність Чебишова

Теорема (Нерівність Чебишова)

Якщо випадкова величина X має скінченну дисперсію $D(X)$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$P\{|X - M(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{6.1}$$

Нерівність Чебишова в іншій формі:

$$P\{|X - M(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{6.2}$$

Теорема (Закон великих чисел)

Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ *попарно незалежні, мають скінченні математичні сподівання і дисперсії, і*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} D(X_k) = 0, \tag{6.3}$$

то для довільного $\varepsilon > 0$ *виконується рівність:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} M(X_k) \right| < \varepsilon \right\} = 1. \tag{6.4}$$

Закон великих чисел і його наслідки

Теорема (Закон великих чисел)

Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *попарно незалежні, мають скінченні математичні сподівання і дисперсії, і*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} D(X_k) = 0, \tag{6.3}$$

то для довільного $\varepsilon > 0$ *виконується рівність:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k) \right| < \varepsilon \right\} = 1. \tag{6.4}$$

Зауваження

Якщо для випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ виконані умови теореми 6.2, то говорять, що до них **застосовний закон великих чисел**.

Теорема (Теорема Чебишова)

Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ попарно незалежні, мають скінченні математичні сподівання, і дисперсії обмежені в сукупності

$$D(X_k) \leq C, \qquad k = \overline{1, \infty}, \tag{6.5}$$

де C — стала величина, то для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{6.6}$$

Теорема (Теорема Чебишова)

Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ попарно незалежні, мають скінченні математичні сподівання, і дисперсії обмежені в сукупності

$$D(X_k) \le C, \qquad k = \overline{1, \infty}, \tag{6.5}$$

де C — стала величина, то для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{6.6}$$

Рівність (6.6) означає, що середнє арифметичне значень випадкових величин, коли кількість доданків нескінченно зростає, збіжне за ймовірністю до середнього арифметичного їх математичних сподівань.

Зауваження

Для використання у практичній діяльності теореми Чебишова її можна сформулювати таким чином: якщо дисперсії незалежних випадкових величин обмежені, то для досить великих n з будь-якою точністю має місце наближена рівність

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k). \tag{6.7}$$

Закон великих чисел і його наслідки

Зауваження

Для використання у практичній діяльності теореми Чебишова її можна сформулювати таким чином: якщо дисперсії незалежних випадкових величин обмежені, то для досить великих n з будь-якою точністю має місце наближена рівність

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k). \tag{6.7}$$

Приклад

Скільки доданків треба взяти, щоб з надійністю 95% і точністю до 0,01 виконувалася наближена рівність (6.7)?

За умовою $\varepsilon = 0,01$.

За умовою $\varepsilon = 0,01$.

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} D(X_k)}{n^2\varepsilon^2}$$

За умовою $\varepsilon = 0,01$.

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} D(X_k)}{n^2\varepsilon^2} \geq \tag{6.8}$$

$$\geq 1 - \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} = 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

За умовою $\varepsilon = 0,01$.

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} D(X_k)}{n^2\varepsilon^2} \geq \tag{6.8}$$

$$\geq 1 - \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} = 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

де $D(X_k) \leq C$.

За умовою $\varepsilon = 0,01$.

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} D(X_k)}{n^2\varepsilon^2} \geq \tag{6.8}$$

$$\geq 1 - \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} = 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

де $D(X_k) \leq C$.

Отже, $\dfrac{C}{n\varepsilon^2} \leq 0,05$

За умовою $\varepsilon = 0,01$.

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} D(X_k)}{n^2\varepsilon^2} \geq \tag{6.8}$$

$$\geq 1 - \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} = 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

де $D(X_k) \leq C$.

Отже, $\dfrac{C}{n\varepsilon^2} \leq 0,05 \;\Rightarrow\; n \geq \dfrac{C}{0,0001 \cdot 0,05} = 200000C$.

За умовою $\varepsilon = 0,01$.

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} D(X_k)}{n^2\varepsilon^2} \geq \tag{6.8}$$

$$\geq 1 - \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} = 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

де $D(X_k) \leq C$.

Отже, $\dfrac{C}{n\varepsilon^2} \leq 0,05 \;\Rightarrow\; n \geq \dfrac{C}{0,0001 \cdot 0,05} = 200000C$.

Зауваження

Співвідношення (6.8) встановлює зв'язок між точністю ε наближеної рівності (6.7) та кількістю доданків n.

Наслідок

Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *однаково розподілені, попарно незалежні і мають скінченні дисперсії, то для довільного* $\varepsilon > 0$ *справедлива рівність*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a\right| < \varepsilon\right\} = 1, \text{ де } a = M(X_k),\ k = \overline{1,\infty}. \quad (6.9)$$

Наслідок

Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ однаково розподілені, попарно незалежні і мають скінченні дисперсії, то для довільного $\varepsilon > 0$ справедлива рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a\right| < \varepsilon\right\} = 1, \text{ де } a = M(X_k),\ k = \overline{1,\infty}. \quad (6.9)$$

Зауваження

Наслідок з теореми Чебишова служить обгрунтуванням середнього арифметичного в теорії обробки результатів вимірів.

Теорема (Теорема Бернуллі)

Нехай k — кількість успіхів у n випробуваннях Бернуллі, а p $(0 < p < 1)$ — ймовірність успіху у кожному випробуванні. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{6.10}$$

Закон великих чисел і його наслідки

Теорема (Теорема Бернуллі)

Нехай k — кількість успіхів у n випробуваннях Бернуллі, а p $(0 < p < 1)$ — ймовірність успіху у кожному випробуванні. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{6.10}$$

Зауваження

Схема Бернуллі є математичною моделлю серії випробувань, що повторюються за однакових умов. У кожному випробуванні може настати подія A, яку ми назвали успіхом. Згідно теореми Бернуллі частота k/n настання події A наближається до її ймовірності p. Цей факт підтверджується і експериментально.