Лабораторна робота

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

Рівномірний розподіл

Неперервна випадкова величина ξ, що приймає значення на відрізку [a,b], розподілена рівномірно на [a,b], якщо щільність розподілу $p_\xi(x)$ і функція розподілу випадкової величини ξ мають відповідно вигляд:

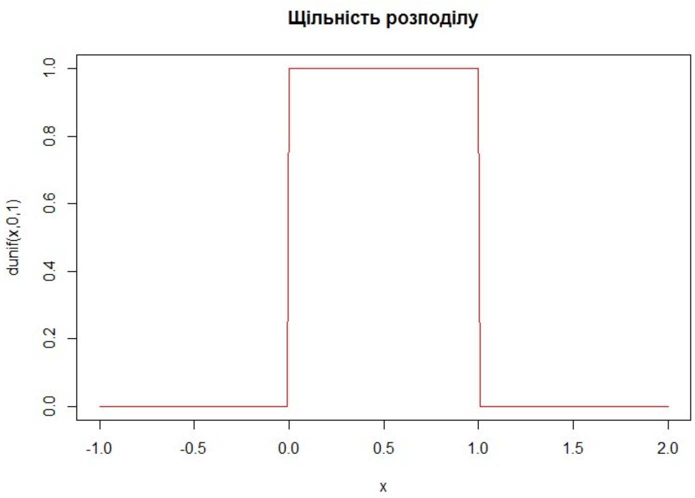
$$p_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\notin[a,b]\\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\end{cases} \qquad F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

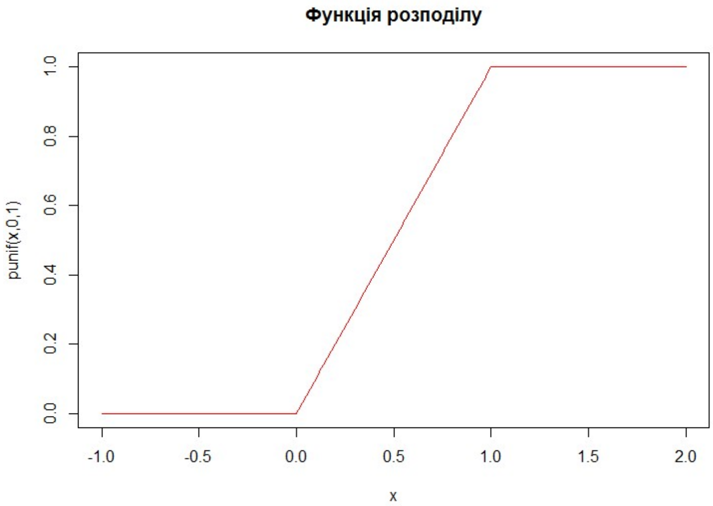
В R значення в точці x щільності розподілу і функції розподілу випадкової величини, що має рівномірний розподіл на відрізку [a,b], обчислюються за допомогою вбудованих функцій $\boldsymbol{dunif(x,a,b)}$ і $\boldsymbol{punif(x,a,b)}$.

Приклад 1. Побудувати в R графіки щільності розподілу і функції розподілу випадкової величини, що приймає значення на відрізку [0,1] і має рівномірний розподіл.

Реалізація в R:

```
x <- seq(-1,2,by=0.1)
plot(x, dunif(x,0,1), col="red",
     type="l", xlab="x", ylab="dunif(x,0,1)", main = "Щільність розподілу")
plot(x, punif(x,0,1), col="red",
     type="l", xlab="x", ylab="punif(x,0,1)", main = "Функція розподілу")
```





Показниковий розподіл

Неперервна випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром $\lambda > 0$, якщо щільність розподілу $p_{\xi}(x)$ має вигляд:

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

Звідси видно, що показниково розподілена випадкова величина приймає тільки невід'ємні значення. Функція розподілу такої випадкової величини має вигляд:

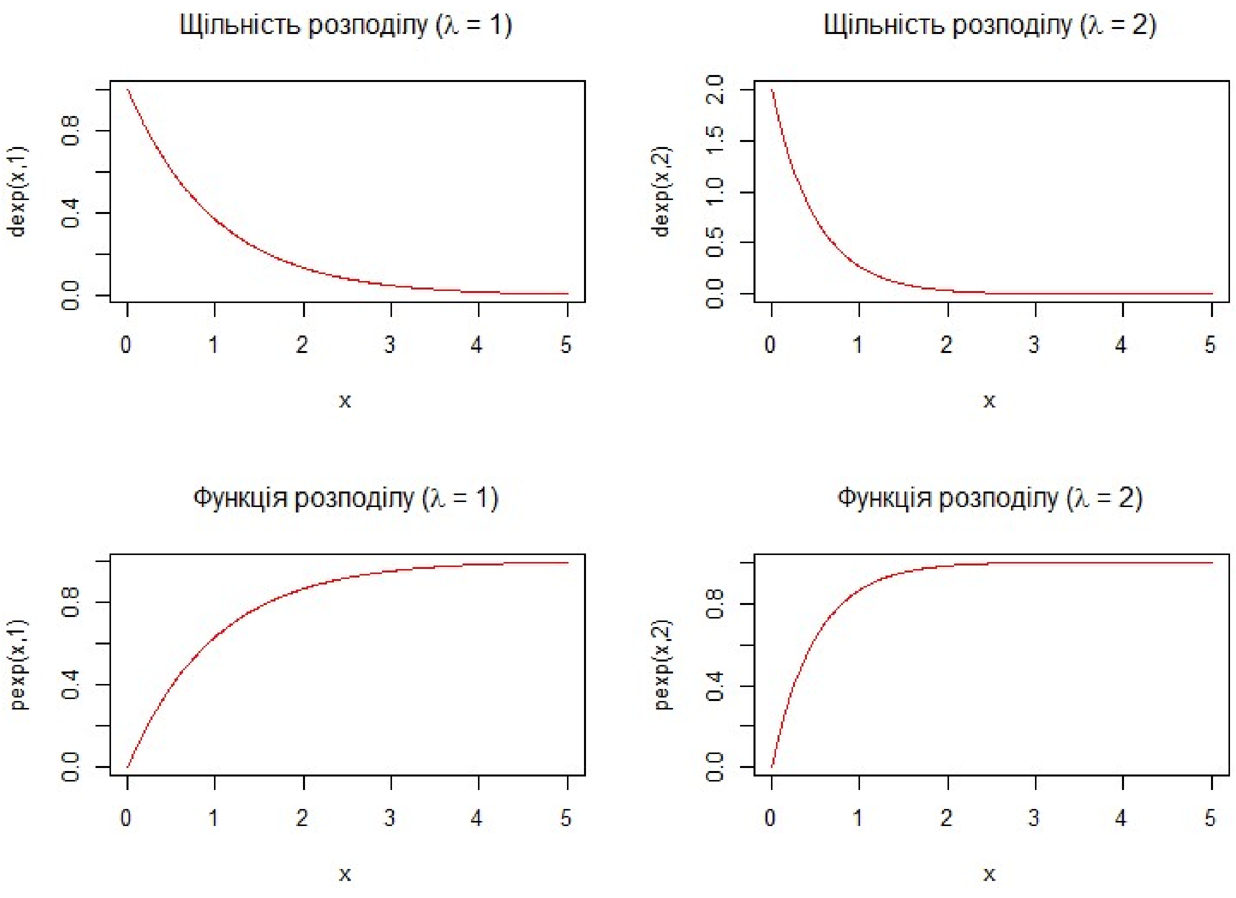
$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

В R значення в точці x щільності розподілу і функції розподілу випадкової величини, що має показниковий розподіл з параметром λ, обчислюються за допомогою вбудованих функцій $\boldsymbol{dexp}(\boldsymbol{x}, \lambda)$ і $\boldsymbol{pexp}(\boldsymbol{x}, \lambda)$.

Приклад 2. Побудувати в R графіки щільностей розподілів і функцій розподілів випадкових величин, що мають показникові розподіли з параметрами $\lambda = 1$ і $\lambda = 2$.

Реалізація в R:

```
x <- seq(0,5,by=0.01)

par(mfrow=c(2,2))

plot(x, dexp(x,1), col="red", type="l", xlab="x", ylab="dexp(x,1)",
     main = expression(paste("Щільність розподілу (", lambda, " = 1)")))

plot(x, dexp(x,2), col="red", type="l", xlab="x", ylab="dexp(x,2)",
     main = expression(paste("Щільність розподілу (", lambda, " = 2)")))

plot(x, pexp(x,1), col="red", type="l", xlab="x", ylab="pexp(x,1)",
     main = expression(paste("Функція розподілу (", lambda, " = 1)")))

plot(x, pexp(x,2), col="red", type="l", xlab="x", ylab="pexp(x,2)",
     main = expression(paste("Функція розподілу (", lambda, " = 2)")))
```



Нормальний розподіл

Цей розподіл відіграє винятково важливу роль в теорії ймовірностей і в математичній статистиці. Випадкова величина ξ нормально розподілена з параметрами a і σ, $\sigma > 0$, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Якщо випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами a і σ, то будемо записувати це у вигляді $\xi \sim N(a,\sigma)$. Випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл, якщо $a = 0$ і $\sigma = 1$, $\xi \sim N(0,1)$. Щільність стандартного нормального розподілу має вигляд:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

а його функція розподілу – $F_\xi(x) = \Phi(x)$, де $\Phi(x)$ – функція Лапласа:

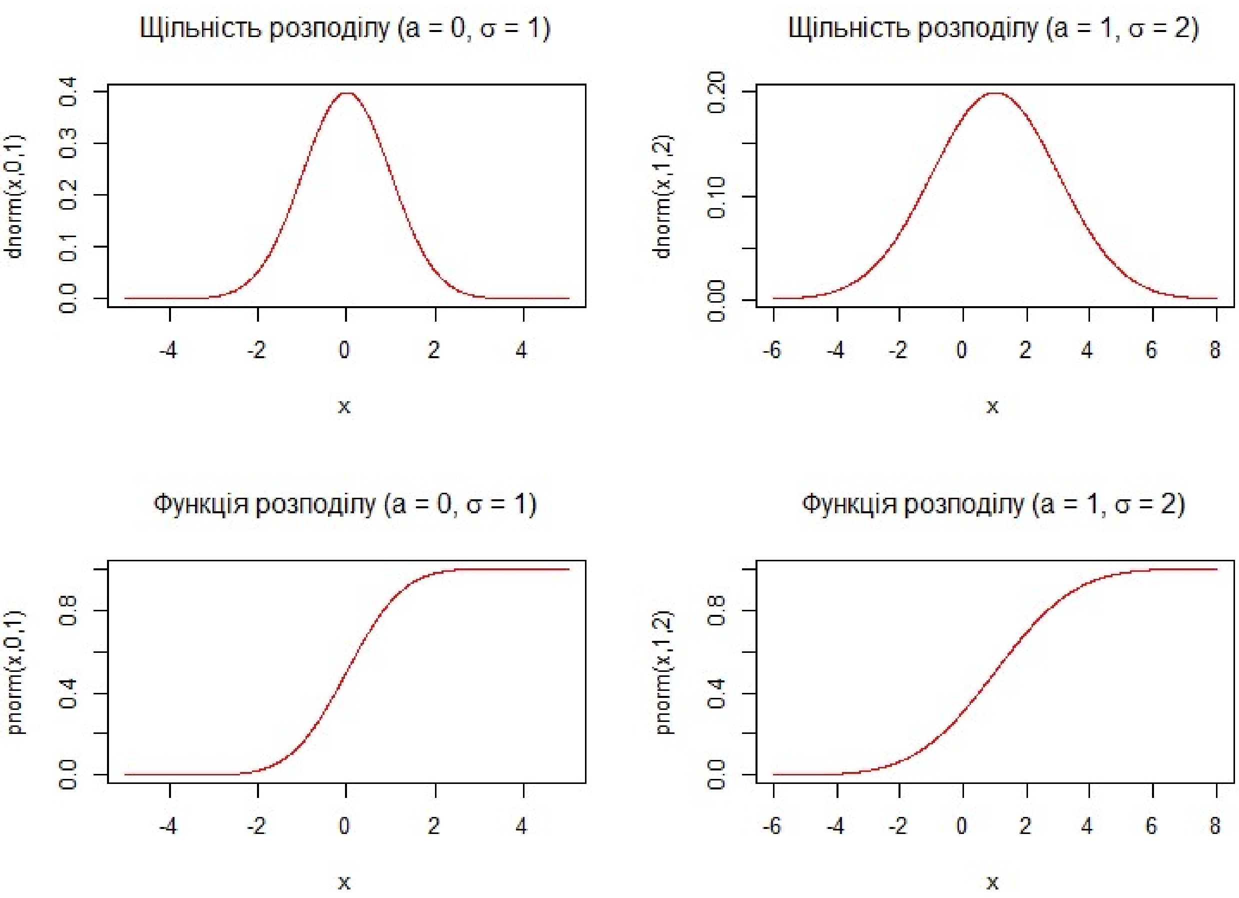
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Функція розподілу нормальної величини $\eta \sim \mathrm{N}(\mathrm{a}, \sigma)$ також виражається через функцію Лапласа

$$F_\eta(x) = \Phi(\frac{x-a}{\sigma})$$

В R значення в точці x щільності розподілу і функції розподілу нормальної випадкової величини з параметрами a, σ обчислюються за допомогою вбудованих функцій $\boldsymbol{dnorm(x, a, \sigma)}$ і $\boldsymbol{pnorm(x, a, \sigma)}$.

Приклад 3. Побудувати в R графіки щільностей розподілів і функцій розподілів для $\xi \sim \mathrm{N}(0,1)$ і $\eta \sim \mathrm{N}(1,2)$.



Розподіл хі-квадрат (χ^2–розподіл)

Розподіл хі-квадрат (χ^2 –розподіл)

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ – незалежні випадкові величини, кожна з яких має стандартний нормальний розподіл $N(0,1)$. Складемо випадкову величину

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$$

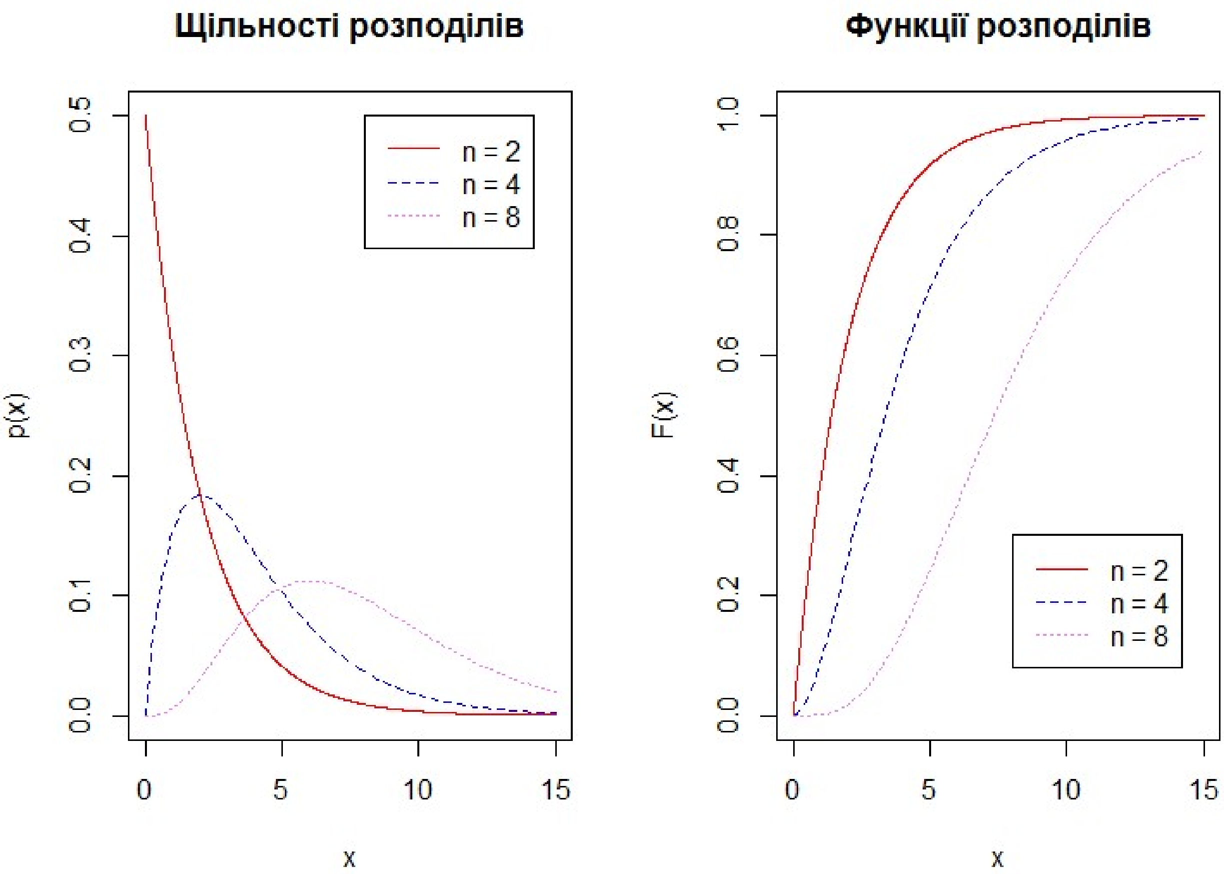
Її розподіл називається χ^2-розподілом з *n* ступенями свободи.

В R значення в точці x щільності розподілу і функції χ^2-розподілу з *n* ступенями свободи обчислюються за допомогою вбудованих функцій $\boldsymbol{dchisq(x,n)}$ і $\boldsymbol{pchisq(x,n)}$.

Приклад 4. Побудувати в R графіки щільностей розподілів і функцій розподілів χ^2 з 2, 4, 8 ступенями свободи.

Реалізація в R:

```r
x <- seq(0,15,by=0.01);
y1 <- dchisq(x,2)
y2 <- dchisq(x,4)
y3 <- dchisq(x,8)

#створення графічного вікна
par(mfrow=c(1,2))

#побудова графіків щільностей розподілів
plot(x,dchisq(x,2), type="l", col="red", xlab="x", ylab="p(x)",
     ylim=c(0,max(y1,y2,y3)), main="Щільності розподілів")
curve(dchisq(x,4), col="blue", lty=2, add=T)
curve(dchisq(x,8), col="violet", lty=3, add=T)
legend(8,0.5, c("n = 2","n = 4", "n = 8"),
       col=c("red","blue","violet"), lty=c(1,2,3))

#побудова графіків функцій розподілів
plot(x,pchisq(x,2), type="l", col="red", xlab="x", ylab="F(x)",
     main="Функції розподілів")
curve(pchisq(x,4), col="blue", lty=2, add=T)
curve(pchisq(x,8), col="violet", lty=3, add=T)
legend(8,0.3, c("n = 2", "n = 4", "n = 8"),
       col=c("red","blue","violet"), lty=c(1,2,3))
```



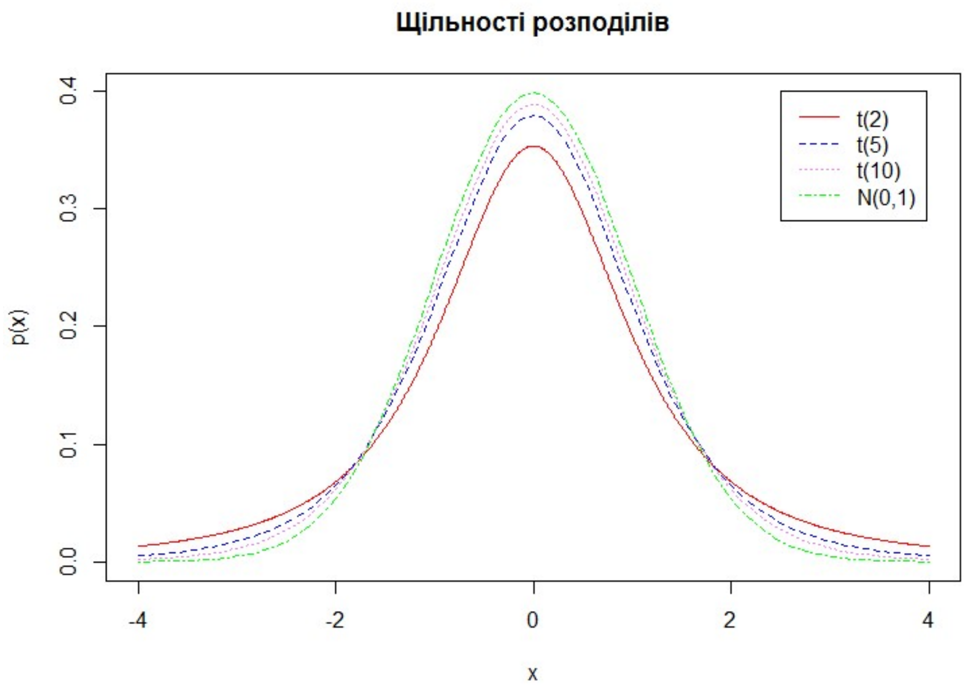
Розподіл Стьюдента (t-розподіл)

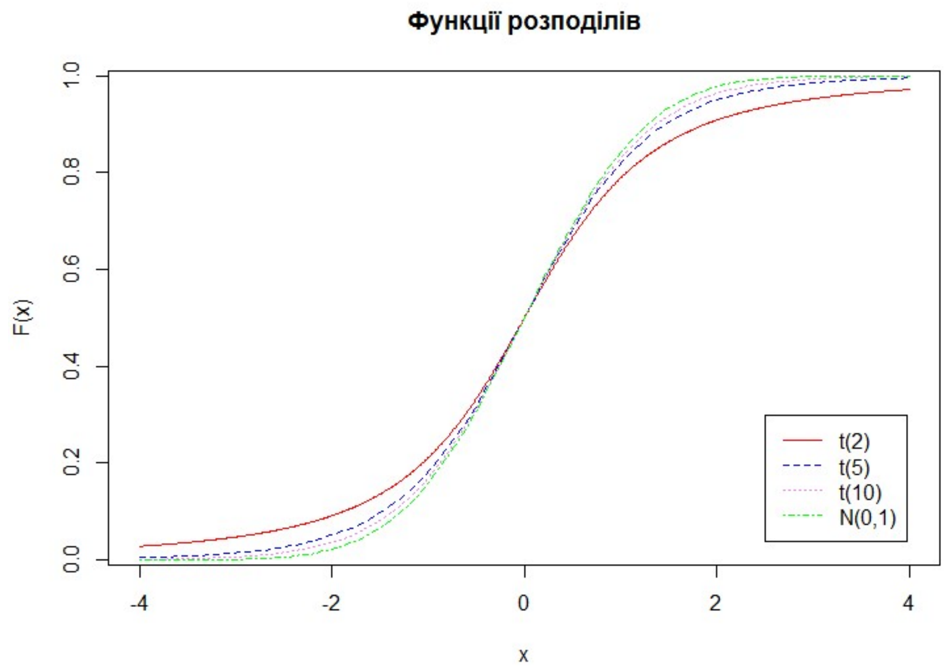
Нехай випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл, а випадкова величина χ_n^2 – χ^2–розподіл з *n* ступенями свободи. Якщо ξ і χ_n^2 – незалежні, то про випадкову величину $\tau_n = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$ кажуть, що вона має розподіл Стьюдента з числом ступенів свободи *n*.

При великих *n* розподіл Стьюдента практично не відрізняється від стандартного нормального розподілу.

В R значення в точці x щільності розподілу і функції розподілу Стьюдента обчислюються вбудованими функціями $\boldsymbol{dt(x,n)}$ і $\boldsymbol{pt(x,n)}$.

Приклад 5. Побудувати в R графіки щільностей розподілів і функцій розподілів Стьюдента з числом ступенів свободи n = 2, 5, 10. Порівняти з відповідними графіками стандартного нормального розподілу.

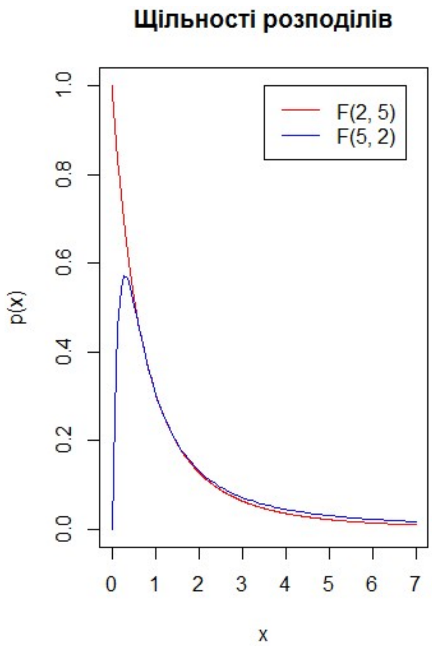


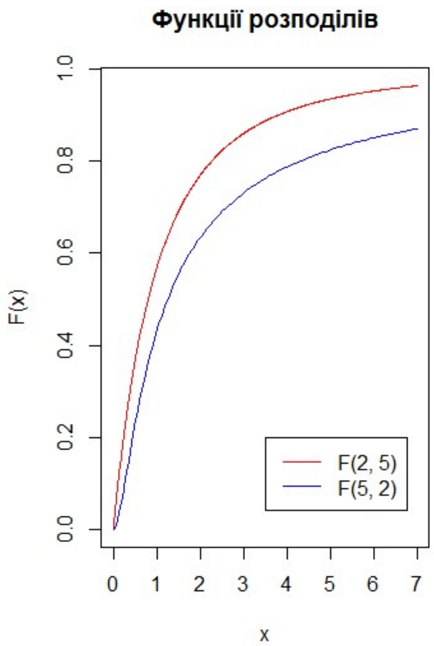


F-розподіл Фішера

Нехай випадкові величини χ_n^2 і χ_m^2 – незалежні і мають розподіл χ^2 з n і m ступенями свободи відповідно. Тоді випадкова величина $F_{n,m} = \frac{\chi_n^2/n}{\chi_m^2/m}$ має F-розподіл. В R значення в точці x щільності розподілу і функції F-розподілу Фішера обчислюються вбудованими функціями $\boldsymbol{df(x, n, m)}$ і $\boldsymbol{pf(x, n, m)}$.

Приклад 6. Побудувати в R графіки щільностей розподілів і функцій розподілів Фішера для n = 2, 5 і m = 5, 2 відповідно.





Індивідульні завдання

Завдання 1

Побудувати в R графіки щільності розподілу і функції розподілу випадкової величини, що приймає значення на відрізку **[L, L+2]** і має рівномірний розподіл.

(**L** – номер варіанту)

Завдання 2

Побудувати в R графіки щільностей розподілів і функцій розподілів випадкових величин, що мають показникові розподіли з параметрами $\lambda = \mathrm{L} + 2$ і $\lambda = \mathrm{L} + 5.$

(**L** – номер варіанту)

Завдання 3

Побудувати в R графіки щільностей розподілів і функцій розподілів для $\xi \sim \mathrm{N}(0,1)$ і $\eta \sim \mathrm{N}(2\mathrm{L} - 1, \mathrm{L}).$ **L** – номер варіанту)

Завдання 4

Побудувати в R графіки щільностей розподілів і функцій розподілів χ^2 з **L+2**, **L+3**, **L+7** ступенями свободи. (**L** – номер варіанту)

Завдання 5

Побудувати в R графіки щільностей розподілів і функцій розподілів Стьюдента з числом ступенів свободи **n = L+2, L+3, L+7**. Порівняти з відповідними графіками стандартного нормального розподілу. (**L** – номер варіанту)

Завдання 6

Побудувати в R графіки щільностей розподілів і функцій розподілів Фішера для **n = L, L+2 і m = L+2, L**. (**L** – номер варіанту)