Розв’язування крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними

Мета лабораторної роботи: познайомитися із способами розв’язування класичних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Розробити необхідні m-файли для розв’язування задач крайових за допомогою вбудованих функцій MATLAB.

Теоретичні відомості

Формулювання задачі

Нехай необхідно знайти $u(x,t)$ –розв’язок диференціального рівняння виду:

$$c\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) + s\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{5.1}$$

В MATLAB для розв’язування диференціальних рівнянь з частинних похідними по одній координаті x та по часу t використовується функція `pdepe`. При цьому $t_0 \le t \le T$ і $a \le x \le b$. Відрізок $[a,b]$ повинен бути скінченним. m може приймати значення 0, 1 або 2.

В початковий момент часу $t = t_0$, для всіх x шукана функція задовольняє початкову умову виду:

$$u(x,t_0) = u_0(x). \tag{5.2}$$

На кінцях відрізку $x = a$ та $x = b$ в будь-який момент часу t шукана функція задовольняє граничним умовам:

$$p(x,t,u) + q(x,t)\, f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0. \tag{5.3}$$

Разом початкову умову та граничні умови називають крайовими умовами. Таким чином, сформульована крайова задача для рівняння (5.1) з умовами (5.2)-(5.3).

Розв’язування крайових задач

Основний синтаксис функції, що розв’язує диференціальні рівняння в частинних похідних має наступний вигляд:

```
sol = pdepe(m,pdefun,icfun,bcfun,xmesh,tspan)
```

`m` Визначає симетричність задачі. m може бути 0 – якщо задача не симетрична, 1 – якщо циліндрична, і 2 – якщо задача сферична. Відповідає m у рівнянні (5.1).

`pdefun` Функція, яка визначає компоненти диференціального рівняння. Вона обчислює функції c, f та s, що задають рівняння (5.1), у вигляді

```
[c,f,s] = pdefun(x,t,u,dudx)
```

де `x` та `t` – скалярні величини, а `u` та `dudx` – вектори шуканих величин та похідних по координаті відповідно.

`icfun` Функція, що обчислює початкові умови, у вигляді:

```
u = icfun(x)
```

Викликана з певним значенням аргументу `x`, `icfun` обчислює та повертає початкові значення компонент шуканої функції в точці `x` у вигляді вектора-стовпчика`u`.

`bcfun` Функція, що визначає p та q із граничних умов. Вона має вигляд

```
[pl,ql,pr,qr] = bcfun(xl,ul,xr,ur,t)
```

де `ul` – значення шуканої функції на лівій границі `xl = ` a, `ur` – значення шуканої функції на правій границі`xr = ` b. `pl`та`ql` – це вектори-стовпчики, що містять значення p та q обчислені в `xl`. Відповідно, `pr` та `qr` відповідають значенням p та q у `xr`.

xmesh Вектор`[x0, x1, ..., xn]`, який визначає точки, в яких за допомогою чисельних методів шукається розв'язок для кожного значення у векторі `tspan`. `x0` та `xn` відповідають кінцям відрізку a та b.

tspan Вектор `[t0, t1, ..., tf]`, який визначає моменти часу, у яких шукається розв'язок для кожного значення в векторі `xmesh`. `t0` та `tf` відповідають моментам часу t_0 та T.

Результат функції `sol` – це тривимірний масив, такий що:

`sol(:,:,k)` апроксимує `k`-тий компонент розв'язку;

`sol(i,:,k)` апроксимує `k`-тий компонент розв'язку у момент часу `tspan(i)` для всіх точок `xmesh(:)`;

`sol(i,j,k)` апроксимує `k`-тий компонент розв'язку у момент часу `tspan(i)` у точці `xmesh(j)`.

Завдання

Відповідно до заданого варіанту розв'язати у MATLAB крайову задачу для диференціального рівняння в частинних похідних. Побудувати графіки шуканої функції від часу при $x = a; \frac{a+b}{2}; b$, графіки від координати при $t = \frac{T}{3}; \frac{2T}{3}; T$, а також тривимірний графік функції від часу та від координати.

Варіант 1.

Рівняння вологообміну для соснової дошкитовщиною 0,04м та початковою вологістю 0.25кг/кг можна записати:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 \le x \le 0.04,\ 0 \le t \le 7200.$$

Гранична умова третього роду описує вологообмін з навколишнім середовищем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \beta(u(0.04,t) - u_p) = 0.$$

Гранична умова другого роду вказує на відсутність вологообміну

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0.$$

Знайти розподіл вологості по товщині дошки через 2 год., якщо $a = 3.0891234 \cdot 10^{-10}$, $\beta = 8.5446111 \cdot 10^{-7}$, $u_p = 0.102$.

Варіант 2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{0.032}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le 2,$$

$$u(0,t)=e^{0.032t},\ u(1,t)=e^{0.032(t-1)},\ 0\le t\le 2,$$
$$u(x,0)=e^{-0.032x},\ 0\le x\le 1.$$

Варіант 3.

Дошка деревини буку товщиною 0,04м та початковою температурою 25°C нагрівається з однієї сторони $x=0.04$ при температурі $t_c=65$°C. Інша сторона дошки термоізольована. Рівняння розподілу температури $u(x,t)$ записується:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0\le x\le 0.04,\ 0\le t\le 7200.$$

Гранична умова третього роду описує теплообмін з навколишнім середовищем

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha(u(0.04,t)-t_c)=0.$$

Гранична умова другого роду вказує на відсутність теплообміну

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

Знайти розподіл температури по товщині дошки через 2 год., якщо $c=3000\frac{Дж}{кг\cdot град}$, $\rho=530\frac{кг}{м^3}$, $\lambda=0{,}245364$, $\alpha=11.7452822564$.

Варіант 4.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(-\alpha^2 t+1)e^{-\alpha x},\ 0\le x\le 1,\ 0\le t\le 10,$$
$$u(0,t)=t,\ u(1,t)=te^{-\alpha},\ 0\le t\le 10,$$
$$u(x,0)=0,\ 0\le x\le 1,\ \alpha=0.03.$$

Варіант 5.

Рівняння вологообміну для соснової дошкитовщиною 0,04м та початковою вологістю 0.25кг/кг можна записати:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ -0.02\le x\le 0.02,\ 0\le t\le 7200.$$

Гранична умова третього роду описує вологообмін з навколишнім середовищем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\beta(u(0.02,t)-u_p)=0.$$

Гранична умова першого роду вказує на симетричність задачі відносно початку координат

$$u(0,t)=0.$$

Знайти розподіл температури по товщині дошки через 20 год., якщо $a=3.0891234\cdot 10^{-10}$, $\beta=8.5446111\cdot 10^{-7}$, $u_p=0.089$.

Варіант 6.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+\alpha x)^4-12\alpha^2 t(1+\alpha x)^2,\ 0\le x\le 1,\ 0\le t\le 10,$$
$$u(0,t)=t,\ u(1,t)=t(1+\alpha)^4,\ 0\le t\le 10,$$
$$u(x,0)=0,\ 0\le x\le 1,\ \alpha=0.02.$$

Варіант 7.

Дерев'яна стіна з букових дошок товщиною 0,05м та початковою температурою 20°С є зовнішньою стороною приміщення. Температура ззовні $t_c = 0$°С. Температура в приміщені починає зростати за законом $t_{пр}(t) = 20 + t/600$. Рівняння розподілу температури $u(x,t)$ записується:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 \le x \le 0.05,\ 0 \le t \le 10800.$$

Граничні умови третього роду описують теплообмін з навколишнім середовищем

$$-\lambda\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha(u(0,t) - t_{пр}(t)) = 0,$$

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha(u(x,t) - t_c) = 0.$$

Знайти розподіл температури по товщині дошки через 3 год., якщо $c = 3000\dfrac{Дж}{кг \cdot град}$,

$\rho = 560\dfrac{кг}{м^3}$, $\lambda = 0{,}245364$, $\alpha = 11.7452822564$.

Варіант 8.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le 8,$$

$$u(0,t) = t,\ u(1,t) = 0.5 + t,\ 0 \le t \le 8,$$

$$u(x,0) = x^2/2,\ 0 \le x \le 1.$$

Варіант 9.

Дошка деревини сосни товщиною 0,05м та початковою температурою 20°С нагрівається з двох сторін при температурі $t_c = 80$°С. Рівняння теплообміну:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ -0.025 \le x \le 0.025,\ 0 \le t \le 7200.$$

Граничні умови третього роду описують теплообмін з навколишнім середовищем

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha(u(0.025,t) - t_c) = 0.$$

Гранична умова першого роду вказує на симетричність задачі відносно початку координат

$$u(0,t) = 0.$$

Знайти розподіл температури по товщині дошки через 2 год., якщо $c = 3000\dfrac{Дж}{кг \cdot град}$,

$\rho = 430\dfrac{кг}{м^3}$, $\lambda = 0{,}245364$, $\alpha = 11.7452822564$.

Варіант 10.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x^2 - 2t),\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le 10,$$

$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = \alpha t,\ 0 \le t \le 10,$$

$$u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 1,\ \alpha = 0.02.$$

Варіант 11.

Дошка деревини сосни товщиною 0,05м та початковою температурою 20°С нагрівається з двох сторін при температурі $t_c = 80$°С. Рівняння теплообміну:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 \le x \le 0.05,\ 0 \le t \le 7200.$$

Граничні умови третього роду описують теплообмін з навколишнім середовищем

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha (u(0,t) - t_c) = 0,$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha (u(0.05,t) - t_c) = 0.$$

Знайти розподіл температури по товщині дошки через 4 год., якщо $c = 3000 \frac{Дж}{кг \cdot град}$, $\rho = 430 \frac{кг}{м^3}$, $\lambda = 0,245364$, $\alpha = 11.7452822564$.

Варіант 12.

Рівняння вологообміну для соснової дошкитовщиною 0,05м та початковою вологістю 0.3кг/кг можна записати:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 \le x \le 0.05,\ 0 \le t \le 7200.$$

Граничні умови третього роду описують вологообмін з навколишнім середовищем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \beta (u(x,t) - u_p) = 0.$$

Знайти розподіл вологості по товщині дошки через 15 год., якщо $a = 3.0891234 \cdot 10^{-10}$, $\beta = 8.5446111 \cdot 10^{-7}$, $u_p = 0.096$.

Варіант 13.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.02 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha (2x - t^2),\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le 10,$$

$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = \alpha t,\ 0 \le t \le 10,$$

$$u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 1,\ \alpha = 0.005.$$

Варіант 14.

Дошка деревини сосни товщиною 0,03м та початковою температурою 11°С нагрівається з одного боку при температурі $t_l = 60$°С, а з другого – при температурі $t_r = 80$°С. Рівняння теплообміну:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 \le x \le 0.03,\ 0 \le t \le 7200.$$

Гранична умова третього роду описує теплообмін з навколишнім середовищем

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha (u(0,t) - t_l) = 0,$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha (u(0.03,t) - t_r) = 0.$$

Знайти розподіл температури по товщині дошки через 2 год., якщо $c = 3000 \frac{Дж}{кг \cdot град}$, $\rho = 430 \frac{кг}{м^3}$, $\lambda = 0{,}245364$, $\alpha = 11.7452822564$.

Варіант 15.

Рівняння вологообміну для соснової дошкитовщиною 0,05м та початковою вологістю 0.3кг/кг можна записати:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 \le x \le 0.05,\ 0 \le t \le 7200.$$

Граничні умови третього роду описують вологообмін з навколишнім середовищем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \beta(u(x,t) - u_p) = 0.$$

Знайти розподіл вологості по товщині дошки через 12 год., якщо $a = 3.0891234 \cdot 10^{-10}$, $\beta = 8.5446111 \cdot 10^{-7}$, $u_p = 0.096$.