Моделювання динамічних систем з використанням М-файлів

Мета лабораторної роботи: познайомитися з роботою m-файлів в середовищі MatLab. Розробити необхідні m-файли для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем за допомогою чисельних методів.

Теоретичні відомості

Задача Коші на відрізку $[x_0, X]$ задається диференціальним рівнянням

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

та початковою умовою

$$y(x_0) = y_0 . \tag{2}$$

Будемо шукати значення наближеного розв'язку цієї задачі лише у фіксованих точках $x_i, i = \overline{1, N}$, заданого відрізку. Вибрані вузлові точки можна вважати рівновіддаленими:

$$x_i = x_0 + ih, i = 1,2,..., N, h > 0, N = \left[\frac{X - x_0}{h}\right].$$

Розглянемо метод типу Рунге-Кута четвертого порядку точності, який являється одним із найпоширеніших методів розв'язування задач з початковими умовами для звичайних диференціальних рівнянь. Даний метод описується наступними шістьма співвідношеннями:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i ; \tag{3}$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}) ; \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} K_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i); & K_2^{(i)} &= hf(x_i + h/2; y_i + K_1^{(i)}/2); \\ K_3^{(i)} &= hf(x_i + h/2; y_i + K_2^{(i)}/2); & K_4^{(i)} &= hf(x_i + h; y_i + K_3^{(i)}). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

При однократному використанні методу значення функції $f(x, y)$ необхідно обчислювати чотири рази з аргументами x_i та y_i, $x_i + h/2$ та $y_i + K_1^{(i)}/2$, $x_i + h/2$ та $y_i + K_2^{(i)}/2$, $x_i + h$ та $y_i + K_3^{(i)}$.

Завдання

Відповідно до заданого варіанту:

1. На заданому проміжку $[a,b]$ з заданим кроком h розв'язати задачу Коші за допомогою методу Рунге-Кута. Побудувати графік розв'язку задачі. Метод Рунге-Кута та функцію з індивідуального варіанту реалізувати в окремих m-файлах.
2. На заданому проміжку $[a,b]$ з заданим кроком h розв'язати задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою методу Рунге-Кута. Побудувати графік розв'язків задачі. Метод Рунге-Кута та систему функцій з індивідуального варіанту реалізувати в окремих m-файлах.

Варіант 1.

1) $y' = x - \cos y$, $y(0) = 0.5$, $a = 0$, $b = 0.5$, $h = 0.1$.

2) $\begin{cases} y' = -0.2xy^2 + z^2 - x^2 - 1 \\ z' = \dfrac{10}{z^2} - y - \dfrac{x}{z} \end{cases}$, $y(0) = 10$, $z(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0.5$, $h = 0.1$.

Варіант 2.

1) $y' = \dfrac{y}{x} + \ln xy^2$, $y(1) = -3$, $a = 1$, $b = 2$, $h = 0.1$.

2) $\begin{cases} y' = e^{-(y^2+z^2)} + 0.1x \\ z' = 2y^2 + z \end{cases}$, $y(0) = 0.5$, $z(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0.5$, $h = 0.1$.

Варіант 3.

1) $y' = -0.5xy^2 - x^2 + 1$, $y(0) = 10$, $a = 0$, $b = 0.7$, $h = 0.1$.

2) $\begin{cases} y' = z - \cos x \\ z' = y + \sin x \end{cases}$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, $a = 0$, $b = 0.5$, $h = 0.1$.

Варіант 4.

1) $y' = y^2 e^x - 2y$, $y(0) = 1$, $a = 0.5$, $b = 1.5$, $h = 0.1$.

2) $\begin{cases} y' = xy^2 + z \\ z' = y^2 e^x - 2z \end{cases}$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0.7$, $h = 0.1$.

Варіант 5.

1) $y' = y^2 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2}$, $y(1) = 0$, $a = 1$, $b = 1.5$, $h = 0.1$.

2) $\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x} + \ln xz^2 \\ z' = y^2 + \dfrac{z}{x} + \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$, $y(1) = 2$, $z(1) = 0$, $a = 1$, $b = 3$, $h = 0.1$.

Варіант 6.

1) $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y(0) = 0.5$, $a = 0$, $b = 0.5$, $h = 0.05$.

2) $\begin{cases} y' = \cos x + \sin z \\ z' = \sin x + \cos y \end{cases}$, $y(\pi) = 1$, $z(\pi) = \cos(1)$, $a = \pi$, $b = 2\pi$, $h = \pi/5$.

Варіант 7.

1) $y' = \sin(0.5y^2) + y + x$, $y(0) = 1$, $a = 0$, $b = 2$, $h = 0.2$.

2) $\begin{cases} y' = -2xy^2 + z^2 - x - 1 \\ z' = \dfrac{1}{2z^2} - y - \dfrac{x}{y} \end{cases}$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0.5$, $h = 0.05$.

Варіант 8.

1) $y' = e^{-(y^2+x^2)} + 0.1x$, $y(0) = 0.5$, $a = 0$, $b = 0.5$, $h = 0.1$.

2) $\begin{cases} y' = \sin(0.5y^2) + z + x \\ z' = x + y - 4z^2 + 1 \end{cases}$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0.5$, $a = 0$, $b = 0.5$, $h = 0.05$.

Варіант 9.

1) $y' = y + \sin x$, $y(0) = 5$, $a = 0$, $b = 2$, $h = 0.2$.

2) $\begin{cases} y' = \ln(x + \sqrt{x^2 + z^2}) \\ z' = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$, $y(0) = 0.5$, $z(0) = 1$, $a = 0$, $b=0.5$, $h = 0.05$.

Варіант 10.

1) $y' = -\dfrac{xy}{1 + x^2}$, $y(0) = 2$, $a = 0$, $b = 0.3$, $h = 0.05$.

2) $\begin{cases} y' = y + \sqrt{x^2 + z^2} \\ z' = \sqrt{x^2 + y} \end{cases}$, $y(0) = 0.5$, $z(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0.5$, $h = 0.05$.

Варіант 11.

1) $y' = y + (1 + x)y^2$, $y(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0.5$, $h = 0.1$.

2) $\begin{cases} y' = x^2 + z - 4y + 5 \\ z' = x^2 + y^2 \end{cases}$, $y(0) = 0.5$, $z(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0.5$, $h = 0.05$.

Варіант 12.

1) $y' = \dfrac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$, $y(1) = 0$, $a = 1$, $b = 2$, $h = 0.2$.

2) $\begin{cases} y' = e^{z/x} \\ z' = x + y^2 - 4z + 8 \end{cases}$, $y(2) = 3$, $z(0) = 1$, $a = 3$, $b = 3.8$, $h = 0.05$.

Варіант 13.

1) $y' = \dfrac{x^2 y^2 - (2x + 1)y + 1}{x}$, $y(1) = 0$, $a = 1$, $b = 1.5$, $h = 0.1$.

2) $\begin{cases} y' = \ln(x + \sqrt{x^2 + z^2}) \\ z' = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$, $y(0) = 0.5$, $z(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0.5$, $h = 0.1$.

Варіант 14.

1) $y' = 12/(x^2 + y^2 + 3)$, $y(0) = 0$, $a = 0$, $b = 2$, $h = 0.2$.

2) $\begin{cases} y' = \ln(x + \sqrt{x^2 + z^2}) \\ z' = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$, $y(0) = 0.5$, $z(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0.5$, $h = 0.05$.

Варіант 15.

1) $y' = \left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) / \left(e^{\frac{x}{y}}\left(\dfrac{x}{y} - 1\right)\right)$, $y(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0.4$, $h = 0.05$.

2) $\begin{cases} y' = \dfrac{\cos y}{z + x} + y^2 \\ z' = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$, $a = 0$, $b = 0.5$, $h = 0.05$.