Основні числові характеристики випадкових величин

Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси і математична статистика

Нехай X — величина, яка може набувати значень $x_1, x_2, \dots$ відповідно з ймовірностями $p_1, p_2, \dots$.

Означення

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називається число

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots , \tag{5.1}$$

якщо ряд у правій частині абсолютно збіжний.

Якщо ряд (5.1) не збіжний абсолютно, то кажуть, що математичне сподівання не існує.

Математичне сподівання і його властивості

Нехай X — величина, яка може набувати значень $x_1, x_2, \ldots$ відповідно з ймовірностями $p_1, p_2, \ldots$.

Означення

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називається число

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots, \tag{5.1}$$

якщо ряд у правій частині абсолютно збіжний.

Якщо ряд (5.1) не збіжний абсолютно, то кажуть, що математичне сподівання не існує.

У випадку скінченної кількості можливих значень дискретної випадкової величини її математичне сподівання

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

завжди існує.

Математичне сподівання і його властивості

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких випадкова величина X може набувати деякого значення з множини $\{x_1, x_2, \ldots,$ Припустимо, що значення x_1 набуте n_1 разів, значення x_2 набуте n_2 разів, ..., значення x_k набуте n_k разів.

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких випадкова величина X може набувати деякого значення з множини $\{x_1, x_2, \ldots,$
Припустимо, що значення x_1 набуте n_1 разів, значення x_2 набуте n_2 разів, ..., значення x_k набуте n_k разів.
Середнє арифметичне значення набутих випадковою величиною X значень в n випробуваннях обчислимо за формулою:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k) = x_1 \cdot \frac{n_1}{n} + x_2 \cdot \frac{n_2}{n} + \ldots + x_k \cdot \frac{n_k}{n}.$$

Відношення $\dfrac{n_i}{n}$ — це відносна частота події $\{X = x_i\}$.

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких випадкова величина X може набувати деякого значення з множини $\{x_1, x_2, \ldots,$
Припустимо, що значення x_1 набуте n_1 разів, значення x_2 набуте n_2 разів, ..., значення x_k набуте n_k разів.
Середнє арифметичне значення набутих випадковою величиною X значень в n випробуваннях обчислимо за формулою:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k\right) = x_1 \cdot \frac{n_1}{n} + x_2 \cdot \frac{n_2}{n} + \ldots + x_k \cdot \frac{n_k}{n}.$$

Відношення $\dfrac{n_i}{n}$ — це відносна частота події $\{X = x_i\}$.
Якщо кількість випробувань n — число досить велике, то

$$\frac{n_i}{n} \approx p_i = P\{X = x_i\}.$$

Математичне сподівання і його властивості

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких випадкова величина X може набувати деякого значення з множини $\{x_1, x_2, \ldots,$
Припустимо, що значення x_1 набуте n_1 разів, значення x_2 набуте n_2 разів, ..., значення x_k набуте n_k разів.
Середнє арифметичне значення набутих випадковою величиною X значень в n випробуваннях обчислимо за формулою:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k) = x_1 \cdot \frac{n_1}{n} + x_2 \cdot \frac{n_2}{n} + \ldots + x_k \cdot \frac{n_k}{n}.$$

Відношення $\dfrac{n_i}{n}$ — це відносна частота події $\{X = x_i\}$.
Якщо кількість випробувань n — число досить велике, то

$$\frac{n_i}{n} \approx p_i = P\{X = x_i\}.$$

Тому і середнє арифметичне $\overline{x}$ буде в цьому випадку наближатися до математичного сподівання $M(X)$:

$$\overline{x} \approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_k p_k = M(X).$$

Ймовірнісний зміст математичного сподівання

Математичне сподівання наближено дорівнює (тим точніше, чим більша кількість випробувань n) середньому арифметичному спостережуваних значень випадкової величини X.

Нехай X — неперервна випадкова величина з щільністю розподілу ймовірностей $p(x)$.

Означення

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X називається число

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx, \tag{5.2}$$

якщо інтеграл у правій частині абсолютно збіжний.

Якщо інтеграл (5.2) не збіжний абсолютно, то кажуть, що математичне сподівання не існує.

Математичне сподівання і його властивості

У випадку, коли можливі значення неперервної випадкової величини зосереджені на проміжку (a, b) її математичне сподівання

$$M(X) = \int\limits_a^b xp(x)dx,$$

завжди існує.

У випадку, коли можливі значення неперервної випадкової величини зосереджені на проміжку (a, b) її математичне сподівання

$$M(X) = \int_a^b xp(x)dx,$$

завжди існує.

Оскільки в точках неперервності $p(x)$ маємо: $p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, то формулу (5.2) можна записати також у вигляді

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x). \tag{5.3}$$

Приклад

Для випадкової величини X, розподіленої за законом Пуассона,

$$p_k = P\{X = x_k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$M(X) =$$

Приклад

Для випадкової величини X, розподіленої за законом Пуассона,

$$p_k = P\{X = x_k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \ k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k =$$

Приклад

Для випадкової величини X, розподіленої за законом Пуассона,

$$p_k = P\{X = x_k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} =$$

Приклад

Для випадкової величини X, розподіленої за законом Пуассона,

$$p_k = P\{X = x_k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

Приклад

Для випадкової величини X, розподіленої за законом Пуассона,

$$p_k = P\{X = x_k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} =$$

Приклад

Для випадкової величини X, розподіленої за законом Пуассона,

$$p_k = P\{X = x_k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \ k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.$$

Приклад

Для випадкової величини X, розподіленої за законом Пуассона,

$$p_k = P\{X = x_k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

Математичне сподівання випадкової величини X, розподіленої за законом Пуассона, рівне параметру цього розподілу λ.

Приклад

Для випадкової величини X, рівномірно розподіленої на проміжку $[a, b]$,

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\[2ex] 0, & x \notin [a, b]; \end{cases}$$

$$M(X) =$$

Приклад

Для випадкової величини X, рівномірно розподіленої на проміжку $[a, b]$,

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]; \end{cases}$$

$$M(X) = \int\limits_a^b x p(x) dx =$$

Приклад

Для випадкової величини X, рівномірно розподіленої на проміжку $[a, b]$,

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]; \end{cases}$$

$$M(X) = \int\limits_a^b x p(x) dx = \int\limits_a^b \frac{x dx}{b-a} =$$

Приклад

Для випадкової величини X, рівномірно розподіленої на проміжку $[a, b]$,

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]; \end{cases}$$

$$M(X) = \int\limits_a^b xp(x)dx = \int\limits_a^b \frac{xdx}{b-a} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Приклад

Для випадкової величини X, рівномірно розподіленої на проміжку $[a, b]$,

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b]; \\ 0, & x \notin [a,b]; \end{cases}$$

$$M(X) = \int_a^b xp(x)dx = \int_a^b \frac{xdx}{b-a} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Математичне сподівання випадкової величини X, рівномірно розподіленої на проміжку $[a, b]$, — це середина цього проміжку.

Властивості математичного сподівання

- Якщо X — неперервна випадкова величина з щільністю розподілу ймовірностей $p(x)$, а $f(x)$ — неперервна функція на множині можливих значень X, то

$$M(f(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx. \tag{5.4}$$

Властивості математичного сподівання

- Якщо X — неперервна випадкова величина з щільністю розподілу ймовірностей $p(x)$, а $f(x)$ — неперервна функція на множині можливих значень X, то

$$M(f(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx. \tag{5.4}$$

Якщо X — дискретна випадкова величина з законом розподілу

$$P\{X = x_k\} = p_k, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

то

$$M(f(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)p_k. \tag{5.5}$$

Математичне сподівання і його властивості

- Якщо X, Y — неперервні випадкові величини, $p(x,y)$ — щільність розподілу ймовірностей випадкового вектора (X, Y), а $f(x,y)$ — неперервна функція на множині можливих значень випадкового вектора (X, Y), то

$$M(f(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)p(x,y)dxdy. \qquad (5.6)$$

Математичне сподівання і його властивості

- Якщо X, Y — неперервні випадкові величини, $p(x, y)$ — щільність розподілу ймовірностей випадкового вектора (X, Y), а $f(x, y)$ — неперервна функція на множині можливих значень випадкового вектора (X, Y), то

$$M(f(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)p(x,y)dxdy. \qquad (5.6)$$

Якщо X, Y — дискретні випадкові величини із законами розподілу

$$P\{X = x_i\} = p_i,\ \ i = 1, 2, \ldots,\ \ P\{Y = y_k\} = q_k,\ \ k = 1, 2, \ldots,$$

то

$$M(f(X,Y)) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f(x_i, y_k)p_{ik}, \qquad (5.7)$$

де $p_{ik} = P\{X = x_i, Y = y_k\}$, $i, k = 1, 2, \ldots$ — закон розподілу випадкового вектора (X, Y).

Математичне сподівання і його властивості

- Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій величині, тобто якщо $C = const$, то $M(C) = C$.

Математичне сподівання і його властивості

- Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій величині, тобто якщо $C = const$, то $M(C) = C$.
- Сталий множник виноситься за знак математичного сподівання, тобто якщо $C = const$, то $M(CX) = CM(X)$.

Математичне сподівання і його властивості

- Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій величині, тобто якщо $C = const$, то $M(C) = C$.

- Сталий множник виноситься за знак математичного сподівання, тобто якщо $C = const$, то $M(CX) = CM(X)$.

- Математичне сподівання алгебраїчної суми двох (або кількох) випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі математичних сподівань цих величин, тобто $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.

Математичне сподівання і його властивості

- Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій величині, тобто якщо $C = const$, то $M(C) = C$.
- Сталий множник виноситься за знак математичного сподівання, тобто якщо $C = const$, то $M(CX) = CM(X)$.
- Математичне сподівання алгебраїчної суми двох (або кількох) випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі математичних сподівань цих величин, тобто $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.
- Якщо випадкові величини X і Y — незалежні, то $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

Приклад

Знайти математичне сподівання кількості успіхів μ та частоти успіхів μ/n в n випробуваннях за схемою Бернуллі, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні дорівнює p і $q = 1 - p$.

Приклад

Знайти математичне сподівання кількості успіхів μ та частоти успіхів μ/n в n випробуваннях за схемою Бернуллі, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні дорівнює p і $q = 1 - p$.

Позначимо через μ_k кількість успіхів у випробуванні під номером k.

Приклад

Знайти математичне сподівання кількості успіхів μ та частоти успіхів μ/n в n випробуваннях за схемою Бернуллі, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні дорівнює p і $q = 1 - p$.

Позначимо через μ_k кількість успіхів у випробуванні під номером k.

Тоді

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$$

Приклад

Знайти математичне сподівання кількості успіхів μ та частоти успіхів μ/n в n випробуваннях за схемою Бернуллі, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні дорівнює p і $q = 1 - p$.

Позначимо через μ_k кількість успіхів у випробуванні під номером k.

Тоді

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n, \quad M(\mu_k) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p,$$

оскільки кількість успіхів в одному випробуванні рівна 1 з ймовірністю p або 0 з ймовірністю q.

Приклад

Знайти математичне сподівання кількості успіхів μ та частоти успіхів μ/n в n випробуваннях за схемою Бернуллі, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні дорівнює p і $q = 1 - p$.

Позначимо через μ_k кількість успіхів у випробуванні під номером k.

Тоді

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n, \quad M(\mu_k) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p,$$

оскільки кількість успіхів в одному випробуванні рівна 1 з ймовірністю p або 0 з ймовірністю q.

Отже,

$$M(\mu) = M(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n) = M(\mu_1) + M(\mu_2) + \ldots + M(\mu_n) = np;$$

Приклад

Знайти математичне сподівання кількості успіхів μ та частоти успіхів μ/n в n випробуваннях за схемою Бернуллі, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні дорівнює p і $q = 1 - p$.

Позначимо через μ_k кількість успіхів у випробуванні під номером k.

Тоді

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n, \quad M(\mu_k) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p,$$

оскільки кількість успіхів в одному випробуванні рівна 1 з ймовірністю p або 0 з ймовірністю q.

Отже,

$$M(\mu) = M(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n) = M(\mu_1) + M(\mu_2) + \ldots + M(\mu_n) = np;$$

$$M\left(\frac{\mu}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot M(\mu) = \frac{np}{n} = p.$$

Дисперсія та її властивості

Дисперсія випадкової величини характеризує відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.

Дисперсія та її властивості

Дисперсія випадкової величини характеризує відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.

Для характеристики цього відхилення неможливо використати його математичне сподівання, оскільки воно дорівнює нулю:

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

Дисперсія випадкової величини характеризує відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.

Для характеристики цього відхилення неможливо використати його математичне сподівання, оскільки воно дорівнює нулю:

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

Означення

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї випадкової величини від її математичного сподівання, тобто

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Дисперсія та її властивості

З властивостей математичного сподівання випливає, що дисперсію дискретної і нерерервної випадкових величин можна обчислити відповідно за формулами:

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - M(X))^2 p_k; \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))^2 p(x)dx.$$

З властивостей математичного сподівання випливає, що дисперсію дискретної і неререрервної випадкових величин можна обчислити відповідно за формулами:

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - M(X))^2 p_k; \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 p(x) dx.$$

Означення

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називається корінь квадратний із дисперсії $D(X)$, тобто

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Властивості дисперсії

Властивості дисперсії

- Дисперсія будь-якої випадкової величини невід'ємна: $D(X) \geq 0$.

Властивості дисперсії

- Дисперсія будь-якої випадкової величини невід'ємна: $D(X) \geq 0$.
- Дисперсія сталої величини дорівнює нулю, тобто якщо $C = const$, то $D(C) = 0$.

Властивості дисперсії

- Дисперсія будь-якої випадкової величини невід'ємна: $D(X) \geq 0$.
- Дисперсія сталої величини дорівнює нулю, тобто якщо $C = const$, то $D(C) = 0$.
- Сталий множник виноситься у квадраті за знак дисперсії, тобто якщо $C = const$, то $D(CX) = C^2 D(X)$.

Властивості дисперсії

- Дисперсія будь-якої випадкової величини невід'ємна: $D(X) \geq 0$.
- Дисперсія сталої величини дорівнює нулю, тобто якщо $C = const$, то $D(C) = 0$.
- Сталий множник виноситься у квадраті за знак дисперсії, тобто якщо $C = const$, то $D(CX) = C^2 D(X)$.
- Дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата цієї величини і квадратом її математичного сподівання, тобто $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

Властивості дисперсії

- Дисперсія будь-якої випадкової величини невід'ємна: $D(X) \geq 0$.
- Дисперсія сталої величини дорівнює нулю, тобто якщо $C = const$, то $D(C) = 0$.
- Сталий множник виноситься у квадраті за знак дисперсії, тобто якщо $C = const$, то $D(CX) = C^2 D(X)$.
- Дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата цієї величини і квадратом її математичного сподівання, тобто $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.
- Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин, тобто $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Властивості дисперсії

- Дисперсія будь-якої випадкової величини невід'ємна: $D(X) \geq 0$.
- Дисперсія сталої величини дорівнює нулю, тобто якщо $C = const$, то $D(C) = 0$.
- Сталий множник виноситься у квадраті за знак дисперсії, тобто якщо $C = const$, то $D(CX) = C^2 D(X)$.
- Дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата цієї величини і квадратом її математичного сподівання, тобто $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.
- Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин, тобто $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.
- Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин, тобто $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.

Властивості дисперсії (продовження)

- Якщо кожна з випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ не залежить від суми попередніх, то дисперсія суми цих величин дорівнює сумі їхніх дисперсій, тобто

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n).$$

Властивості дисперсії (продовження)

- Якщо кожна з випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ не залежить від суми попередніх, то дисперсія суми цих величин дорівнює сумі їхніх дисперсій, тобто

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n).$$

- Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — попарно незалежні, то дисперсія суми цих величин дорівнює сумі їхніх дисперсій:

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n).$$

Дисперсія випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона

Дисперсія випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона

Для випадкової величини X, розподіленої за законом Пуассона,

$$p_k = P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ M(X) = \lambda,$$

Дисперсія випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона

Для випадкової величини X, розподіленої за законом Пуассона,

$$p_k = P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \dots,\ M(X) = \lambda,$$

$$D(X) = \lambda$$

Дисперсія випадкової величини X, розподіленої за законом Пуассона, як і математичне сподівання, рівна параметрові цього розподілу λ.

Дисперсія рівномірно розподіленої випадкової величини

Дисперсія рівномірно розподіленої випадкової величини

Для випадкової величини X, рівномірно розподіленої на проміжку $[a, b]$,

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]; \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; \ M(X^2) =$$

Дисперсія рівномірно розподіленої випадкової величини

Для випадкової величини X, рівномірно розподіленої на проміжку $[a,b]$,

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b]; \\ 0, & x \notin [a,b]; \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{a+b}{2};\ M(X^2) = \int\limits_a^b x^2 p(x)dx = \frac{a^2+ab+b^2}{3};$$

Дисперсія рівномірно розподіленої випадкової величини

Для випадкової величини X, рівномірно розподіленої на проміжку $[a, b]$,

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]; \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; \; M(X^2) = \int\limits_a^b x^2 p(x) dx = \frac{a^2 + ab + b^2}{3};$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Дисперсія випадкової величини, розподіленої за біномним законом

Дисперсія випадкової величини, розподіленої за біномним законом

Так розподілена кількість успіхів μ в n випробуваннях за схемою Бернуллі, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні дорівнює p і $q = 1 - p$.

Дисперсія випадкової величини, розподіленої за біномним законом

Так розподілена кількість успіхів μ в n випробуваннях за схемою Бернуллі, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні дорівнює p і $q = 1 - p$.

Позначимо через μ_k кількість успіхів у випробуванні під номером k.

Дисперсія випадкової величини, розподіленої за біномним законом

Так розподілена кількість успіхів μ в n випробуваннях за схемою Бернуллі, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні дорівнює p і $q = 1 - p$.

Позначимо через μ_k кількість успіхів у випробуванні під номером k.

Тоді $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$, $M(\mu_k) =$

Дисперсія випадкової величини, розподіленої за біноміним законом

Так розподілена кількість успіхів μ в n випробуваннях за схемою Бернуллі, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні дорівнює p і $q = 1 - p$.

Позначимо через μ_k кількість успіхів у випробуванні під номером k.

Тоді $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$, $M(\mu_k) = p$, $\mu_k^2 =$

Дисперсія випадкової величини, розподіленої за біномним законом

Так розподілена кількість успіхів μ в n випробуваннях за схемою Бернуллі, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні дорівнює p і $q = 1 - p$.

Позначимо через μ_k кількість успіхів у випробуванні під номером k.

Тоді $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$, $M(\mu_k) = p$, $\mu_k^2 = \mu_k$, оскільки кількість успіхів в одному випробуванні може набувати лише значень 1 або 0.

Дисперсія випадкової величини, розподіленої за біномним законом

Так розподілена кількість успіхів μ в n випробуваннях за схемою Бернуллі, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні дорівнює p і $q = 1 - p$.

Позначимо через μ_k кількість успіхів у випробуванні під номером k.

Тоді $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$, $M(\mu_k) = p$, $\mu_k^2 = \mu_k$, оскільки кількість успіхів в одному випробуванні може набувати лише значень 1 або 0.Отже,

$$M(\mu_k^2) = M(\mu_k) = p,$$

Дисперсія випадкової величини, розподіленої за біномним законом

Так розподілена кількість успіхів μ в n випробуваннях за схемою Бернуллі, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні дорівнює p і $q = 1 - p$.

Позначимо через μ_k кількість успіхів у випробуванні під номером k.

Тоді $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$, $M(\mu_k) = p$, $\mu_k^2 = \mu_k$, оскільки кількість успіхів в одному випробуванні може набувати лише значень 1 або 0.Отже,

$$M(\mu_k^2) = M(\mu_k) = p, \; D(\mu_k) = M(\mu_k^2) - (M(\mu_k))^2 =$$

Дисперсія випадкової величини, розподіленої за біномним законом

Так розподілена кількість успіхів μ в n випробуваннях за схемою Бернуллі, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні дорівнює p і $q = 1 - p$.

Позначимо через μ_k кількість успіхів у випробуванні під номером k.

Тоді $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$, $M(\mu_k) = p$, $\mu_k^2 = \mu_k$, оскільки кількість успіхів в одному випробуванні може набувати лише значень 1 або 0.Отже,

$$M(\mu_k^2) = M(\mu_k) = p,\ D(\mu_k) = M(\mu_k^2) - (M(\mu_k))^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Дисперсія випадкової величини, розподіленої за біномним законом

Так розподілена кількість успіхів μ в n випробуваннях за схемою Бернуллі, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні дорівнює p і $q = 1 - p$.

Позначимо через μ_k кількість успіхів у випробуванні під номером k.

Тоді $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$, $M(\mu_k) = p$, $\mu_k^2 = \mu_k$, оскільки кількість успіхів в одному випробуванні може набувати лише значень 1 або 0.Отже,

$$M(\mu_k^2) = M(\mu_k) = p, \; D(\mu_k) = M(\mu_k^2) - (M(\mu_k))^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Випадкові величини $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ — попарно незалежні (бо випробування за схемою Бернуллі є незалежними)

Дисперсія випадкової величини, розподіленої за біномним законом

Так розподілена кількість успіхів μ в n випробуваннях за схемою Бернуллі, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні дорівнює p і $q = 1 - p$.

Позначимо через μ_k кількість успіхів у випробуванні під номером k.

Тоді $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$, $M(\mu_k) = p$, $\mu_k^2 = \mu_k$, оскільки кількість успіхів в одному випробуванні може набувати лише значень 1 або 0.Отже,

$$M(\mu_k^2) = M(\mu_k) = p,\ D(\mu_k) = M(\mu_k^2) - (M(\mu_k))^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Випадкові величини $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ — попарно незалежні (бо випробування за схемою Бернуллі є незалежними), тому

$$D(\mu) = D(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n) = D(\mu_1) + D(\mu_2) + \ldots + D(\mu_n) = npq.$$

Математичне сподівання та дисперсія нормально розподіленої випадкової величини

Математичне сподівання та дисперсія нормально розподіленої випадкової величини

Неперервна випадкова величина X називається **розподіленою за нормальним законом з параметрами $-\infty < a < \infty$ і $\sigma > 0$**, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Математичне сподівання та дисперсія нормально розподіленої випадкової величини

Неперервна випадкова величина X називається **розподіленою за нормальним законом з параметрами** $-\infty < a < \infty$ **і** $\sigma > 0$, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

$$M(X) = a; \qquad D(X) = \sigma^2.$$

Математичне сподівання і дисперсія нормально розподіленої випадкової величини відповідно дорівнюють a і σ^2, тобто виражаються через параметри цього розподілу.
Середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини рівне параметрові σ цього розподілу:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sigma.$$

Математичне сподівання двовимірної випадкової величини

Означення

Математичним сподіванням n-вимірної випадкової величини $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ називається n-вимірний вектор $(M(X_1), M(X_2), \ldots, M(X_n))$, де $M(X_k)$ — математичне сподівання випадкової величини X_k.

Математичне сподівання двовимірної випадкової величини

Означення

Математичним сподіванням n-вимірної випадкової величини $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ називається n-вимірний вектор $(M(X_1), M(X_2), \dots, M(X_n))$, де $M(X_k)$ — математичне сподівання випадкової величини X_k.

Розглянемо, двовимірну неперервну випадкову величину (X, Y) з щільністю розподілу ймовірностей $p(x, y)$.

Математичне сподівання двовимірної випадкової величини

Означення

Математичним сподіванням n-вимірної випадкової величини $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ називається n-вимірний вектор $(M(X_1), M(X_2), \ldots, M(X_n))$, де $M(X_k)$ — математичне сподівання випадкової величини X_k.

Розглянемо, двовимірну неперервну випадкову величину (X, Y) з щільністю розподілу ймовірностей $p(x, y)$.

Якщо $p_X(x)$, $p_Y(y)$ — щільності розподілу випадкових величин X і Y, то згідно з означенням математичного сподівання одновимірної випадкової величини

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx, \qquad M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y) dy.$$

Математичне сподівання двовимірної випадкової величини

$$p_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy, \qquad p_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx,$$

Математичне сподівання двовимірної випадкової величини

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy, \qquad p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx,$$

тому

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xp(x,y)dxdy.$$

Математичне сподівання двовимірної випадкової величини

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy, \qquad p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx,$$

тому

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xp(x,y)dxdy.$$

Аналогічно отримаємо формулу для $M(Y)$:

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yp(x,y)dxdy.$$

Означення

Дисперсією (або дисперсійною матрицею) n**-вимірної випадкової величини** $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ називається сукупність n^2 чисел, які визначаються формулами

$$b_{ik} = M\left((X_i - M(X_i))(X_k - M(X_k))\right), \qquad i, k = \overline{1, n}.$$

Означення

Дисперсією (або дисперсійною матрицею) n**-вимірної випадкової величини** $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ називається сукупність n^2 чисел, які визначаються формулами

$$b_{ik} = M\left((X_i - M(X_i))(X_k - M(X_k))\right), \qquad i, k = \overline{1, n}.$$

Дисперсійна матриця симетрична: $b_{ik} = b_{ki}$.

Дисперсія двовимірної випадкової величини. Коваріація, коефіцієнт кореляції та його властивості

Для двовимірної випадкової величини (X, Y) дисперсією є сукупність 3-х чисел: $b_{11},\ b_{22}$ і $b_{12} = b_{21}$.

Дисперсія двовимірної випадкової величини. Коваріація, коефіцієнт кореляції та його властивості

Для двовимірної випадкової величини (X, Y) дисперсією є сукупність 3-х чисел: $b_{11},\ b_{22}$ і $b_{12} = b_{21}$.

Перші два числа є дисперсіями компонент цієї випадкової величини:

$$b_{11} = M((X - M(X))(X - M(X))) = M(X - M(X))^2 = D(X),$$

$$b_{22} = M(Y - M(Y))^2 = D(Y),$$

Для двовимірної випадкової величини (X, Y) дисперсією є сукупність 3-х чисел: $b_{11},\ b_{22}$ і $b_{12} = b_{21}$.

Перші два числа є дисперсіями компонент цієї випадкової величини:

$$b_{11} = M((X - M(X))(X - M(X))) = M(X - M(X))^2 = D(X),$$

$$b_{22} = M(Y - M(Y))^2 = D(Y),$$

а третя називається **коваріацією випадкових величин X і Y**:

$$cov(X, Y) = M((X - M(X))(Y - M(Y))).$$

Дисперсія двовимірної випадкової величини. Коваріація, коефіцієнт кореляції та його властивості

$$cov(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y).$$

Дисперсія двовимірної випадкової величини. Коваріація, коефіцієнт кореляції та його властивості

$$cov(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y).$$

З отриманої формули випливає, що коваріація незалежних випадкових величин дорівнює нулю.

Дисперсія двовимірної випадкової величини. Коваріація, коефіцієнт кореляції та його властивості

$$cov(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y).$$

З отриманої формули випливає, що коваріація незалежних випадкових величин дорівнює нулю.
Зв'язок між дисперсією та коваріацією встановлюють формули:

$$cov(X,X) = D(X); \quad D(X+Y) = D(X) + 2cov(X,Y) + D(Y).$$

Дисперсія двовимірної випадкової величини. Коваріація, коефіцієнт кореляції та його властивості

Використовуючи означення математичного сподівання, одержимо:

Дисперсія двовимірної випадкової величини. Коваріація, коефіцієнт кореляції та його властивості

Використовуючи означення математичного сподівання, одержимо:

- для дискретного розподілу

$$cov(X, Y) = \sum_{i,k} (x_i - M(X))(y_k - M(Y))p_{ik};$$

Дисперсія двовимірної випадкової величини. Коваріація, коефіцієнт кореляції та його властивості

Використовуючи означення математичного сподівання, одержимо:

- для дискретного розподілу

$$cov(X,Y)=\sum_{i,k}(x_i-M(X))(y_k-M(Y))p_{ik};$$

- для неперервного розподілу

$$cov(X,Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))(y-M(Y))p(x,y)dxdy.$$

Дисперсія двовимірної випадкової величини. Коваріація, коефіцієнт кореляції та його властивості

Використовуючи означення математичного сподівання, одержимо:

- для дискретного розподілу

$$cov(X,Y) = \sum_{i,k} (x_i - M(X))(y_k - M(Y))p_{ik};$$

- для неперервного розподілу

$$cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))(y - M(Y))p(x,y)dxdy.$$

Коваріація двох випадкових величин X і Y характеризує не тільки ступінь взаємозалежності цих випадкових величин, а й також їхнє розсіювання навколо точки $(M(X), M(Y))$ на площині.

Означення

Коефіцієнтом кореляції між випадковими величинами X і Y називається відношення коваріації до добутку середніх квадратичних відхилень цих величин:

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}.$$

Властивості коефіцієнта кореляції

Дисперсія двовимірної випадкової величини. Коваріація, коефіцієнт кореляції та його властивості

Властивості коефіцієнта кореляції

- Коефіцієнт кореляції незалежних випадкових величин дорівнює нулю.

Властивості коефіцієнта кореляції

- Коефіцієнт кореляції незалежних випадкових величин дорівнює нулю.
- Для будь-яких випадкових величин $|\rho(X, Y)| \leq 1$.

Властивості коефіцієнта кореляції

- Коефіцієнт кореляції незалежних випадкових величин дорівнює нулю.
- Для будь-яких випадкових величин $|\rho(X,Y)| \leq 1$.
- $|\rho(X,Y)| = 1$ тоді і лише тоді, коли випадкові величини зв'язані лінійною залежністю $Y = \alpha X + \beta$. Тоді

$$\rho(X,Y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha > 0; \\ -1, & \text{якщо } \alpha < 0. \end{cases}$$

Модуль коефіцієнта кореляції випадкових величин X і Y характеризує ступінь лінійної залежності між ними. Якщо лінійної залежності немає, то $\rho(X,Y)=0$. Якщо між випадковими величинами існує лінійна функціональна залежність $Y=\alpha X+\beta$, то $\rho(X,Y)=1$ при $\alpha>0$ і $\rho(X,Y)=-1$ при $\alpha<0$.

Модуль коефіцієнта кореляції випадкових величин X і Y характеризує ступінь лінійної залежності між ними. Якщо лінійної залежності немає, то $\rho(X, Y) = 0$. Якщо між випадковими величинами існує лінійна функціональна залежність $Y = \alpha X + \beta$, то $\rho(X, Y) = 1$ при $\alpha > 0$ і $\rho(X, Y) = -1$ при $\alpha < 0$.

Означення

Дві випадкові величини X і Y називаються **корельованими**, якщо $\rho(X, Y) \neq 0$, і **некорельованими**, якщо $\rho(X, Y) = 0$.

Дисперсія двовимірної випадкової величини. Коваріація, коефіцієнт кореляції та його властивості

Приклад

Нехай випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $[-1, 1]$, $Y = X^2$.

Приклад

Нехай випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $[-1, 1]$, $Y = X^2$.Тоді

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & x \in [-1, 1]; \\ 0, & x \notin [-1, 1]; \end{cases} \qquad M(X) = 0;$$

Дисперсія двовимірної випадкової величини. Коваріація, коефіцієнт кореляції та його властивості

Приклад

Нехай випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $[-1, 1]$, $Y = X^2$.Тоді

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1, 1]; \\ 0, & x \notin [-1, 1]; \end{cases} \qquad M(X) = 0;$$

$$cov(X, Y) = M(XY) - M(X)M(Y) =$$

Приклад

Нехай випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $[-1, 1]$, $Y = X^2$.Тоді

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1, 1]; \\ 0, & x \notin [-1, 1]; \end{cases} \qquad M(X) = 0;$$

$$cov(X, Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = M(X^3) =$$

Дисперсія двовимірної випадкової величини. Коваріація, коефіцієнт кореляції та його властивості

Приклад

Нехай випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $[-1, 1]$, $Y = X^2$.Тоді

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1, 1]; \\ 0, & x \notin [-1, 1]; \end{cases} \qquad M(X) = 0;$$

$$cov(X, Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = M(X^3) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^3 dx =$$

Дисперсія двовимірної випадкової величини. Коваріація, коефіцієнт кореляції та його властивості

Приклад

Нехай випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $[-1,1]$, $Y = X^2$.Тоді

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1,1]; \\ 0, & x \notin [-1,1]; \end{cases} \qquad M(X) = 0;$$

$$cov(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = M(X^3) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x^3 dx = 0.$$

Приклад

Нехай випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $[-1,1]$, $Y = X^2$.Тоді

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1,1]; \\ 0, & x \notin [-1,1]; \end{cases} \qquad M(X) = 0;$$

$$cov(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = M(X^3) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(X,Y) = 0.$$

Дисперсія двовимірної випадкової величини. Коваріація, коефіцієнт кореляції та його властивості

Приклад

Нехай випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $[-1, 1]$, $Y = X^2$.Тоді

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1, 1]; \\ 0, & x \notin [-1, 1]; \end{cases} \qquad M(X) = 0;$$

$$cov(X, Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = M(X^3) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(X, Y) = 0.$$

Для нормально розподілених випадкових величин X і Y некорельованість рівносильна незалежності.