Лекція 1

Випадкові події. Основні теореми теорії ймовірностей

1.1 Елементи комбінаторики

Комбінаторика — це розділ математики, в якому вивчаються розташування та вибір об'єктів за певними правилами і методи обчислення всіх можливих способів, якими це можна здійснити.

Перші теоретичні дослідження проблем комбінаторики були проведені у XVII ст. Б. Паскалем, П. Ферма, Г. Лейбніцем, а у XVIII ст. Я. Бернуллі, Л. Ейлером. Але лише у наш час у зв'язку з розвитком теорії обчислювальних машин, теорії інформації та дискретної математики комбінаторика посправжньому стала математичною наукою. Зокрема, її методи відіграють важливу роль при розв'язуванні задач теорії ймовірностей.

Скінченні множини та операції над ними

Всяка сукупність довільних елементів утворює множину. Множина визначена, якщо відомі всі її елементи. Множина, що має скінченну кількість елементів, називається скінченною. Введемо основні позначення. Множини позначатимемо великими латинськими літерами: A, B, C, $\ldots$, а їх елементи — малими: a, b, c, $\ldots$. Кількість елементів множини A позначатимемо через $N(A)$.

Означення. *Дві множини рівні між собою*, якщо всі елементи першої є елементами другої і, навпаки, всі елементи другої є елементами першої.

Означення. *Сумою або об'єднанням множин A і B* називається множина $C = A + B$ $(C = A \bigcup B)$, яка складається лише з тих елементів, що належать принаймні одній із множин A і B.

Приклад 1.1. Нехай $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4\}$. Тоді $A + B = \{1; 2; 3; 4\}$.

Означення. Множина C, якій належать ті і тільки ті елементи, що є спільними для множин A і B, називається *добутком або перерізом множин A і B* і позначається $C = AB$ ($C = A \bigcap B$).

Приклад 1.2. Розглянемо A і B з попереднього прикладу. Тоді $AB = \{2; 3\}$.

Означення. Множина, яка не містить жодного елемента, називається *порожньою* і позначається $\emptyset$.

Очевидно, якщо множини A і B не мають спільних елементів, то $AB = \emptyset$. Кількість елементів множини, що є сумою двох множин A і B, обчислюють за формулою:

$$N(A + B) = N(A) + N(B) - N(AB). \tag{1.1}$$

Приклад 1.3. Кожний студент групи — або дівчина, або блондин, або любить математику. В групі 20 дівчат, з них 12 блондинок, одна блондинка любить математику. Всього у групі 24 блондина, математику з них любить 12, а всього люблять математику 17 студентів, з них 6 дівчат. Скільки студентів у групі?

Розв'язання. Нехай A — множина дівчат, B — блондинів, C — люблять математику. Тоді $N(A + B + C)$ шукане число. Очевидно, AB — множина блондинок, AC — множина дівчат, що люблять математику, BC — множина блондинів, що люблять математику, ABC — множина блондинок, що люблять математику. Отже,

$$N(A + B + C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(AB) - N(AC)-$$
$$-N(BC) + N(ABC) = 20 + 24 + 17 - (12 + 6 + 12) + 1 = 32.$$

$\square$

Основні принципи комбінаторики

Значне число формул і теорем комбінаторики грунтується на двох основних принципах.

Принцип суми. *Якщо множина A містить $N(A) = n$ елементів, множина B – $N(B) = m$ елементів, а $AB = \emptyset$, тоді множина $A+B$ містить $N(A + B) = n + m$ елементів.*

Доведення випливає з рівності 1.1.

Зауваження. Принцип суми має місце для будь-якого скінченного числа множин.

Принцип добутку. *Нехай потрібно виконати послідовно k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу — n_2 способами, третю — n_3 способами і так до k-ої дії, яку можна виконати n_k способами, то всі k дій разом можуть бути виконані $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ способами.*

Приклад 1.4. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо:

а) жодна з цифр не повторюється;

б) цифри можуть повторюватися;

в) числа повинні бути непарними (цифри можуть повторюватись)?

Розв'язання. а) Першою цифрою можуть бути цифри 1, 2, 3, 4, 5, тобто існує 5 способів її вибору. Якщо перша вибрана, то друга цифра може бути вибрана — 5 способами, третя — 4 способами, четверта — 3 способами. Отже, згідно з принципом добутку, загальне число способів дорівнює: $5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$.

б) Першою цифрою може бути одна з цифр 1, 2, 3, 4, 5 (5 способів), для кожної з наступних цифр існує 6 способів (0, 1, 2, 3, 4, 5). Отже, кількість шуканих чисел дорівнює $5 \times 6 \times 6 \times 6 = 1080$.

в) Першою може бути одна з цифр 1, 2, 3, 4, 5, а останньою — одна з цифр 1, 3, 5. Отже, загальна кількість непарних чисел дорівнює $5 \times 6 \times 6 \times 3 = 540$. □

Упорядковані множини. Сполуки без повторень

Означення. Множина називається *впорядкованою*, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність деяке натуральне число (номер елемента) так, що різним елементам відповідають різні числа.

Впорядковані множини вважаються різними, якщо вони відрізняються або своїми елементами, або їх порядком.

Означення. Підмножини, складені з будь-яких елементів даної множини, які відрізняються елементами або порядком цих елементів, називаються *сполуками*.

Приклад 1.5. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 можна скласти багато різних сполук по 2, 3, 4, 5 цифр. Наприклад, 12, 21, 123, 1234 .... Серед цих сполук є такі, що відрізняються кількістю цифр (12, 123, 1234 ...) або їх порядком (12, 21).

Сполуки бувають трьох видів: розміщення, перестановки, сполучення (комбінації).

Означення. *Розміщеннями з n елементів по k $(k < n)$* називають такі упорядковані сполуки, які складаються з k елементів, взятих із даних n елементів, і відрізняються одна від другої елементами або їх порядком.

Число розміщень з n елементів по k позначається A_n^k і обчислюється за формулою

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{1.2}$$

Зауваження. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$, $0! = 1$.

Приклад 1.6. Скількома способами можна розсадити 4 студентів на 25 стільцях?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює A_{25}^4:

$$A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600.$$

□

Означення. *Розміщеннями з n елементів по n* називаються перестановками.

Число перестановок із n елементів позначається через P_n і обчислюється за формулою

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! \tag{1.3}$$

Зауваження. Різні перестановки з n елементів відрізняються лише порядком елементів.

Приклад 1.7. Скількома способами можна розмістити на книжковій полиці чотири томи математичної енциклопедії?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює числу способів упорядкування множини, що містить чотири елементи, тобто $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. □

Означення. *Сполученнями (комбінаціями) із n елементів по k* називаються сполуки, що містять k елементів, взятих із даних n елементів, і які відрізняються хоча б одним елементом. Число сполучень із n елементів по k позначається через C_n^k і обчислюється за формулою

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.4}$$

Зауваження. Із означення сполучень випливає, що сполучення отримують із розміщень, вилучивши сполуки, які відрізняються лише порядком елементів, тобто перестановки.

Зауваження. Мають місце рівності:

$$\text{а) } C_n^k = C_n^{n-k}; \qquad \text{б) } \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n; \qquad \text{в) } C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Приклад 1.8. Скількома способами можна вибрати 3 книги з 7?

Розв'язання. Шукане число дорівнює $C_7^3 = \dfrac{7!}{3!4!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$ □