Багатовимірні випадкові величини

Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси і математична статистика

Випадкові вектори та їхні функції розподілу

Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ визначені кілька випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, які іноді зручно розглядати як координати випадкового вектора $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ із n-вимірного простору $\mathbb{R}^n$.

Випадкові вектори та їхні функції розподілу

Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ визначені кілька випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, які іноді зручно розглядати як координати випадкового вектора $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ із n-вимірного простору $\mathbb{R}^n$.

Закон розподілу випадкового вектора $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ у загальному випадку визначається функцією розподілу.

Означення

Функцією розподілу n-вимірної випадкової величини $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ називається ймовірність сумісного виконання нерівностей:

$$X_1 < x_1,\ X_2 < x_2,\ \ldots,\ X_n < x_n; \quad x_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{1, n},$$

тобто

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\}.$$

Випадкові вектори та їхні функції розподілу

Розглянемо властивості функції розподілу для випадку $n = 2$, тобто для двовимірної випадкової величини (X, Y).

Випадкові вектори та їхні функції розподілу

Розглянемо властивості функції розподілу для випадку $n = 2$, тобто для двовимірної випадкової величини (X, Y).

Функція розподілу $F(x, y)$ має такі властивості:

- $F(x, y)$ — неспадна функція за кожним аргументом;

Випадкові вектори та їхні функції розподілу

Розглянемо властивості функції розподілу для випадку $n = 2$, тобто для двовимірної випадкової величини (X, Y).

Функція розподілу $F(x, y)$ має такі властивості:

- $F(x, y)$ — неспадна функція за кожним аргументом;
- для функції $F(x, y)$ виконуються такі граничні співвідношення:

$$F(-\infty, y) = 0,\ F(x, -\infty) = 0,\ F(-\infty, -\infty) = 0,\ F(\infty, \infty) = 1;$$

Випадкові вектори та їхні функції розподілу

Розглянемо властивості функції розподілу для випадку $n = 2$, тобто для двовимірної випадкової величини (X, Y).

Функція розподілу $F(x, y)$ має такі властивості:

- $F(x, y)$ — неспадна функція за кожним аргументом;
- для функції $F(x, y)$ виконуються такі граничні співвідношення:

$$F(-\infty, y) = 0,\ F(x, -\infty) = 0,\ F(-\infty, -\infty) = 0,\ F(\infty, \infty) = 1;$$

- $\lim\limits_{y\to\infty} F(x, y) = F(x, \infty) = F_X(x)$;
  $\lim\limits_{x\to\infty} F(x, y) = F(\infty, y) = F_Y(y)$,
  де $F_X(x)$ — функція розподілу випадкової величини X; $F_Y(u)$ — функція розподілу випадкової величини Y.

Двовимірні випадкові величини

Двовимірну випадкову величину (X, Y) назвемо **дискретною**, якщо її складові X і Y є дискретними одновимірними випадковими величинами, і **неперервною**, якщо її складові X і Y є неперервними одновимірними випадковими величинами.

Складові X і Y двовимірної випадкової величини (X, Y) називають ще її **компонентами**.

Випадок дискретної величини

Для задання дискретної випадкової величини (X, Y) досить задати її можливі значення (x_i, y_k) та ймовірності кожного з них:

$$p_{ik} = P\{X = x_i, Y = y_k\}, \quad i, k = 1, 2, \dots \ .$$

Випадок дискретної величини

Для задання дискретної випадкової величини (X, Y) досить задати її можливі значення (x_i, y_k) та ймовірності кожного з них:

$$p_{ik} = P\{X = x_i, Y = y_k\}, \quad i, k = 1, 2, \dots \ .$$

Для одновимірних випадкових величин X і Y введемо позначення:

$$p_i = P\{X = x_i\},\ i = 1, 2, \dots; \qquad q_k = P\{Y = y_k\},\ k = 1, 2, \dots .$$

Знайдемо зв'язок між ймовірностями p_{ik} та p_i і q_k.

Випадок дискретної величини

Подію $\{X = x_i\}$ можна представити як суму попарно несумісних подій:

$$\{X = x_i\} = \{X = x_i, Y = y_1\} + \{X = x_i, Y = y_2\} + \cdots \ .$$

Випадок дискретної величини

Подію $\{X = x_i\}$ можна представити як суму попарно несумісних подій:

$$\{X = x_i\} = \{X = x_i, Y = y_1\} + \{X = x_i, Y = y_2\} + \cdots \ .$$

Звідси за аксіомою адитивності

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}.$$

Випадок дискретної величини

Подію $\{X = x_i\}$ можна представити як суму попарно несумісних подій:

$$\{X = x_i\} = \{X = x_i, Y = y_1\} + \{X = x_i, Y = y_2\} + \cdots \ .$$

Звідси за аксіомою адитивності

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}.$$

Аналогічно можна отримати формулу

$$q_k = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ik}.$$

Випадок дискретної величини

Подію $\{X = x_i\}$ можна представити як суму попарно несумісних подій:

$$\{X = x_i\} = \{X = x_i, Y = y_1\} + \{X = x_i, Y = y_2\} + \cdots \ .$$

Звідси за аксіомою адитивності

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}.$$

Аналогічно можна отримати формулу

$$q_k = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ik}.$$

Справедлива наступна рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p_{ik} = \sum_{k=1}^{\infty} q_k = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Випадок неперервної величини

Для двовимірної неперервної випадкової величини (X, Y) існує невід'ємна функція $p(x, y)$ така, що функція розподілу випадкового вектора (X, Y) визначається у вигляді

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(u, v) du dv, \tag{4.1}$$

до того ж функція $p(x, y)$ неперервна всюди, крім, можливо, скінченної кількості точок і називається **щільністю розподілу ймовірностей** випадкового вектора (X, Y).

Випадок неперервної величини

Для двовимірної неперервної випадкової величини (X, Y) існує невід'ємна функція $p(x, y)$ така, що функція розподілу випадкового вектора (X, Y) визначається у вигляді

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(u, v) du dv, \tag{4.1}$$

до того ж функція $p(x, y)$ неперервна всюди, крім, можливо, скінченної кількості точок і називається **щільністю розподілу ймовірностей** випадкового вектора (X, Y).

З (4.1) випливає, що в точках неперервності щільність розподілу можна визначити як другу мішану похідну функції розподілу:

$$p(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Випадок неперервної величини

Використовуючи, що $F(\infty, \infty) = 1$, з (4.1) отримуємо основну властивість щільності розподілу випадкового вектора (X, Y):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = 1.$$

Випадок неперервної величини

Використовуючи, що $F(\infty, \infty) = 1$, з (4.1) отримуємо основну властивість щільності розподілу випадкового вектора (X, Y):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = 1.$$

Якщо можливі значення двовимірної неперервної випадкової величини (X, Y) розміщені в області $G \subset \mathbb{R}^2$, то формула (4.1) набуває вигляду:

$$P\{(x, y) \in G\} = \iint_G p(x, y) dx dy.$$

Випадок неперервної величини

Знаючи щільність розподілу $p(x, y)$ випадкового вектора (X, Y), можна знайти щільності розподілу його компонент $p_X(x)$ та $p_Y(y)$.

Випадок неперервної величини

Знаючи щільність розподілу $p(x, y)$ випадкового вектора (X, Y), можна знайти щільності розподілу його компонент $p_X(x)$ та $p_Y(y)$.Справді,

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} p(u, v)dudv,$$

Випадок неперервної величини

Знаючи щільність розподілу $p(x, y)$ випадкового вектора (X, Y), можна знайти щільності розподілу його компонент $p_X(x)$ та $p_Y(y)$. Справді,

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(u, v) du dv,$$

звідки

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x, v) dv.$$

Випадок неперервної величини

Знаючи щільність розподілу $p(x, y)$ випадкового вектора (X, Y), можна знайти щільності розподілу його компонент $p_X(x)$ та $p_Y(y)$. Справді,

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} p(u, v) du dv,$$

звідки

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, v) dv.$$

Аналогічно можна отримати формулу для $p_Y(y)$:

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u, y) du.$$

Незалежні випадкові величини

Знаючи закон розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y), можна знайти закон розподілу окремих величин X і Y.

Незалежні випадкові величини

Знаючи закон розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y), можна знайти закон розподілу окремих величин X і Y.

Чи можна, знаючи закони розподілу окремих випадкових величин X і Y, знайти закон розподілу випадкового вектора (X, Y)?

Незалежні випадкові величини

Знаючи закон розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y), можна знайти закон розподілу окремих величин X і Y.

Чи можна, знаючи закони розподілу окремих випадкових величин X і Y, знайти закон розподілу випадкового вектора (X, Y)?

Це можна зробити лише в одному частковому випадку, коли випадкові величини X і Y є незалежні.

Незалежні випадкові величини

Знаючи закон розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y), можна знайти закон розподілу окремих величин X і Y.

Чи можна, знаючи закони розподілу окремих випадкових величин X і Y, знайти закон розподілу випадкового вектора (X, Y)?

Це можна зробити лише в одному частковому випадку, коли випадкові величини X і Y є незалежні.

Означення

Випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ називаються **незалежними**, якщо для будь-яких дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2) \cdot \ldots \cdot F_n(x_n),$$

де $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функція розподілу випадкового вектора $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $F_k(x_k)$ — функція розподілу випадкової величини X_k, $k = \overline{1, n}$.

Незалежні випадкові величини

Розглянемо випадок $n = 2$.

Розглянемо випадок $n = 2$.

Якщо X, Y — дискретні випадкові величини, то їхня незалежність означає, що для будь-яких i, k події $\{X = x_i\}$ і $\{Y = y_k\}$ є незалежні

Розглянемо випадок $n = 2$.

Якщо X, Y — дискретні випадкові величини, то їхня незалежність означає, що для будь-яких i, k події $\{X = x_i\}$ і $\{Y = y_k\}$ є незалежні, тому

$$p_{ik} = P\{X = x_i, Y = y_k\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_k\} = p_i q_k,\ i, k = 1, 2, \ldots.$$

Незалежні випадкові величини

Нехай, X, Y — неперервні випадкові величини з функціями розподілу $F_X(x)$ та $F_Y(y)$ і щільностями розподілу ймовірностей $p_X(x)$ та $p_Y(y)$ відповідно. Нехай $F(x, y)$ і $p(x, y)$ — функція розподілу і щільність розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y).

Незалежні випадкові величини

Нехай, X, Y — неперервні випадкові величини з функціями розподілу $F_X(x)$ та $F_Y(y)$ і щільностями розподілу ймовірностей $p_X(x)$ та $p_Y(y)$ відповідно. Нехай $F(x, y)$ і $p(x, y)$ — функція розподілу і щільність розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y).

За означенням незалежності X і Y маємо: $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

Нехай, X, Y — неперервні випадкові величини з функціями розподілу $F_X(x)$ та $F_Y(y)$ і щільностями розподілу ймовірностей $p_X(x)$ та $p_Y(y)$ відповідно. Нехай $F(x, y)$ і $p(x, y)$ — функція розподілу і щільність розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y).

За означенням незалежності X і Y маємо: $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

Диференціюючи двічі (по x і по y), одержимо:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F'_X(x) \cdot F'_Y(y),$$

Незалежні випадкові величини

Нехай, X, Y — неперервні випадкові величини з функціями розподілу $F_X(x)$ та $F_Y(y)$ і щільностями розподілу ймовірностей $p_X(x)$ та $p_Y(y)$ відповідно. Нехай $F(x, y)$ і $p(x, y)$ — функція розподілу і щільність розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y).

За означенням незалежності X і Y маємо: $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

Диференціюючи двічі (по x і по y), одержимо:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F'_X(x) \cdot F'_Y(y),$$

тобто

$$p(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y). \tag{4.2}$$

Незалежні випадкові величини

Умова (4.2) є не лише необхідною, а й достатньою для незалежності неперервних випадкових величин X і Y.

Умова (4.2) є не лише необхідною, а й достатньою для незалежності неперервних випадкових величин X і Y.

Справді, якщо (4.2) виконується, то

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)dudv = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p_X(u)p_Y(v)dudv =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du \int_{-\infty}^{y} p_Y(v)dv = F_X(x)\cdot F_Y(y),$$

Умова (4.2) є не лише необхідною, а й достатньою для незалежності неперервних випадкових величин X і Y.

Справді, якщо (4.2) виконується, то

$$F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} p(u, v) du dv = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} p_X(u) p_Y(v) du dv =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} p_X(u) du \int\limits_{-\infty}^{y} p_Y(v) dv = F_X(x) \cdot F_Y(y),$$

а це означає, що X і Y — незалежні.