МІНІСТЕРСВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ЛІСОТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

***КАФЕДРА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ***

**Б. П. Поберейко, О. І. Думанський, Б. О. Бекас, І. Б. Пірко**

**ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ**

Навчальний посібник

для студентів спеціальностей 6.050101

«Комп’ютерні науки»

**Львів -2015**

**Б. П**. **Поберейко,** **О. І. Думанський, Б. О. Бекас, І. Б. Пірко**

**«Операційне числення»**

Навчальний посібник для студентів спеціальності 6.050101 “Комп’ютерні науки”.

В укладеноиу начальному посібнику з дисципліни **«Операційне числення»** коротко наведено теоретичний матеріал курсу дисципліни. Перший розділ посібника присвячений елементам теорії функції комплексної змінної; другий – інтегральним перетворенням Лапласа, Фурє та вевлет перетворенням. До кожної теми наведені задачі та різні вправи для глибшого освоєння поданого у темі матеріалу. Для чисельної реалізації відповідних завдань розроблене програмне забезпечення з використанням середовища Matlab.

Матеріали посібника та його доцільність для даної дисципліни обговорені на засіданні кафедри ІТ протокол №\_***6***\_ від\_\_***12 березня 2015 р.***\_

**Рецензенти**: Флячок В.М. кандидат фіз. – матем. наук, доцент кафедри прикладної математики і комп’ютерних інформаційних систем Академії друкарства.

Процик Ю.С. кандидат фіз. – матем. наук, доцент кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України

**Укладачі:** Поберейко Б.П. доктор техн. наук, професор, завідувач кафедри автоматизації Національного лісотехнічного університету України.

Думанський О. І. кандидат фіз. – матем. наук, доцент кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України.

Бекас Б. О. старший викладач кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України.

Пірко І. Б. доцент кафедри інформаційних технологій Національного лісотехнічного університету України.

**Вступ**

Сучасний стан розвитку технологій ставить відповідні вимоги для підготовки фахівців у різних галузях народного господарства, зокрема у галузі „Комп’ютерні науки”. Методи опису математичних моделей технологічних процесів і фізичних явищ вимагають знань універсального циклу курсів математичного аналізу, диференціальних рівнянь і відповідно курсу теорії функцій комплексної змінної, інтегральних і дискретних перетворень Лапласа, Фур’є, вейвлет перетворень тощо.

Важливим класом функцій комплексної змінної є аналітичні функції та апарат конформних перетворень, які застосовуються для розв’язування задач механіки та фізики. Вони мають широке застосування при побудові математичних моделей та їх аналітичної реалізації у задачах гідро – і аеродинаміки, механіки деформівного твердого тіла, електродинаміки і теорії управління та при обробці цифрової інформації.

У теорії автоматичного регулювання та обробки сигналів використовуються методи, математичною основою для яких є спектральне представлення сигналів і пов’язані з цим представлення частотні характеристики систем. Зокрема, спектральні характеристики сигналів і зображень безпосередньо ґрунтуються на теорії інтегральних і дискретних перетворень Фур’є і вейвлетів.

Одним із важливих математичних інструментів, які застосовуються для дослідження математичних систем є інтегральне перетворення Лапласа. Цей апарат, будучи чисто символічним, дає можливість знаходити розв’язки звичайних лінійних диференціальних та їх систем зі сталими коефіцієнтами, інтегральних рівнянь, диференціальних рівнянь в частинних похідних. Таким чином операційне числення знаходить широке застосування для дослідження математичних моделей (лінійних та нелінійних) процесів.

# Розділ І. Елементи теорії функцій комплексної змінної.

## 1. Комплексні числа та дії над ними.

### Загальні поняття

Поряд із множиною дійсних чисел широкого застосування набули комплексні числа, які відповідно утворюють множину комплексних чисел ***С***. По своїй суті комплексні числа можна вважати заданими на множині дійсних чисел, оскільки за своїм поданням вони складаються із дійсної та уявної частини, які є виразниками дійсних чисел. Оскільки у множині дійсних чисел не існує поняття кореня парної степені із від’ємного числа, то було введено поняття уявної одиниці, тобто , який позначимо літерою *і* (у деяких випадках *j*). Наприклад, вираз  можемо записати як . Таким чином рівняння  на множині дійсних чисел не має розв’язку, то у множині комплексних чисел маємо розв’язок , який задовольняє подане рівняння.

*Означення.* Комплексним числом  називається впорядкована пара дійсних чисел .

Число  називається *дійсною* частиною комплексного числа і позначається ,  називається *уявною* частиною та позначається . Комплексне число подане y вигляді *z = x + i⋅y* називають його алгебраїчним поданням. Комплексне число *z = x - i⋅y* називають спряженим до числа *z = x + i⋅y.* Два комплексних числа є рівними, якщо рівні їх дійсні та уявні частини.

Геометричною інтерпретацією комплексного числа *z = x + i⋅y* є точка *M(x, y)* або вектор  на координатній площині *Оху*. Площину *Оху* у цьому випадку називають комплексною площиною *Z*, у якій *Ох* – дійсна вісь, а *Оу* – уявна (рис.1). Полярні координати цієї точки також є важливими характеристиками комплексного числа. Відповідний полярний радіус називається *модулем* комплексного числа, а полярний кут – його *аргументом*: , .

y

x

ϕ

r

y

x

ϕ

r

y

x

ϕ

r

Рис. 1.

Дійсна та уявна частини комплексного числа зв’язані з його модулем та аргументом співвідношеннями , .

Як відомо, кожній точці координатної площини відповідає безліч значень полярного куту, які відрізняються одне від одного на , де  – ціле число.

Для однозначного визначення аргументу комплексного числа будемо обирати його з певного проміжку довжиною . Таке значення аргументу називається його *головним значенням* та позначається . Будемо вважати, що  належить проміжку  (досить часто також використовують проміжок  ). Тоді модуль та головне значення аргументу комплексного числа доцільно обчислювати за формулами  ;

 або .

З урахуванням наведених вище співвідношень комплексне число можна представити у вигляді .

Така форма запису комплексного числа називається *тригонометричною*. У багатьох випадках доцільно подавати комплексні числа у показниковій формі, яка має наступний вигляд: , яка випливає із формули Ейлера .

Розглянемо наступні приклади. Знайти модуль і головне значення, поданих комплексних чисел, а також записати їх у тригонометричній і показниковій формах:



Розв’язок.

*а) Оскільки z = x + iy = 2, то x = 2, y = 0 і відповідно модуль , а також при x > 0, y = 0, то аргумент  отже, тригонометрична і показникова форми цього числа: *

*б) ,*

**

*в)* 









***відповідно його форми:*** 







**Операції над комплексними числами.**

Аналогічно як з дійсними числами, маємо такі ж дії із комплексними числами: додавання, віднімання, ділення, піднесення до степеня та добування кореня відповідної степені. Дві остання дії зручніше проводити над комплексними числами поданими у тригонометричній або показниковій формах.

Розглянемо операції над комплексними числами, поданими в *алгебраїчній формі*. Нехай задано два комплексних числа  і .

***Додавання і віднімання:*** При додаванні або відніманні двох комплексних чисел z1 і z2 , додаються або віднімаються їх дійсні і уявні частини.

;

.

***Множення:*** Перемножуємо їх як два двочлени, з врахуванням, що і2=-1.



.

Зокрема добуток спряжених чисел дає дійсне число і вказує на можливість розкладу суми квадратів на множники: 

***Ділення****:*******



Приклад. Подано два комплексних числа  Провести арифметичні дії над ними.

*Додавання і віднімання:*





*Множення:*

*Ділення:*

******

*Піднесення до степеня****.***

Якщо комплексне число задане в алгебраїчній формі  піднесення до деякого степеня **n** записуємо як біном Ньютона, тобто  При цьому слід замінити степені **і** їхніми значеннями: ... або у загальному випадку 

*Наприклад:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | 1 |  | 1 |  |  |  |  |  | n=1 |
|  |  |  |  | 1 |  | 2 |  | 1 |  |  |  |  | n=2 |
|  |  |  | 1 |  | 3 |  | 3 |  | 1 |  |  |  | n=3 |
|  |  | 1 |  | 4 |  | 6 |  | 4 |  | 1 |  |  | n=4 |
|  | 1 |  | 5 |  | 10 |  | 10 |  | 5 |  | 1 |  | n=5 |
| 1 |  | 6 |  | 15 |  | 20 |  | 15 |  | 6 |  | 1 | n=6 |

Дальше збираючи дійсні та уявні частини, одержимо значення виразу.

Ця операція є значно простішою, якщо комплексне число подати у тригонометричній або показниковій формі. Аналогічною є операція добування кореня. Оскільки має бути стільки коренів, тобто значень, якою є степінь кореня, то можна теж було б скористатися розкладом бінома Ньютона але уже не з цілими показниками, а з дробовими. Все ж таки це питання вирішується простіше при поданні комплексного числа у тригонометричній та показниковій формі

Розглянемо операції множення, ділення піднесення до степені та добування кореня над комплексними числами, поданими у *тригонометричній та показниковій формі*, оскільки операції додавання і віднімання здійснюються аналогічно як і для чисел в алгебраїчній формі. Нехай задано два комплексних числа - у тригонометричній і - у показниковій формах.

***Множення***

- у тригонометричній формі:

.

у показниковій 

***Ділення***

* у тригонометричній формі:

******

* у показниковій: 

***Піднесення до степеня***

Ця операція записується у вигляді:

, 

Зокрема вираз  ­– називають формулою Муавра.

***Добування кореня***

*Коренем* -го степеня з комплексного числа  називається таке число, ‑ий степінь якого дорівнює . Обчислення кореня виконується за формулами:

* у тригонометричній формі:

****, **** ,

тут одержані комплексні числа відповідають вершинам правильного n‑кутника, вписаного у коло радіуса  з центром у точці z=0.

* У показниковій формі 

У першому і другому випадках корінь -го степеня має *n* значень.

Приклад. Піднесемо комплексне число  до 6 – ої степені. 

Оскільки 

Тоді 

Приклад. Знайти всі значення кореня 4-го степеня комплексного числа 

Розв’язок***.*** Подамо це число у тригонометричній формі:

.   

При











## 2. Функції комплексної змінної

### Загальні поняття

Аналогічно як і на множині дійсних чисел маємо справу із функцією дійсної змінної, також на множині комплексних чисел існує поняття функції, але уже комплексної змінної.

Перш ніж перейти до безпосереднього означення функції комплексної змінної, з’ясуємо поняття області зміни комплексної величини. Як встановлено при розгляді комплексних чисел, відомо, що будь-яке комплексне число  визначене у комплексній площині Oxy точкою або радіусом-вектором. Очевидно множина зміни значень з комплексного числа утворить певну множину (область) *Е*,тобто комплексне число  ототожнюється з кожною точкою множини *Е*, а відтак z називаємо комплексною змінною, а *Е* – його областю зміни.

Якщо задано закон , згідно з яким кожному значенню , яке належить множині , відповідає певне значення , то кажуть, що задана ***однозначна функція*** , яка визначена на  та набуває значень в . Якщо значенню  відповідає декілька значень , то функція є ***багатозначною***.

Функцію комплексної змінної можна записати у вигляді *,* де  та  – функції дійсних змінних  та.

Існування границі функції комплексної змінної  еквівалентне одночасному існуванню границь дійсної та уявної частин  та . Аналогічно неперервність функції  у точці  еквівалентна неперервності функцій  та у точці .

Функція, неперервна у кожній точці області ***E***, називається неперервною у цій області.

### Елементарні функції комплексної змінної.

Аналогічно як і для функцій дійсної змінної є відповідні елементарні функції комплексної змінної, причому їх назви є аналогічними.

* *Дробово-лінійна функція*: ****  Її частинними випадками є функції:
  + лінійна функція *w = az + b; a, b ∈****С,*** *a ≠ 0*;
  + степенева функція *w = zn , n ∈****N****;*
  + дробово-лінійна функція першого порядку  ;
  + функція Жуковського .
* *Експоненціальна (показникова) функція:* w = ez, яку часто задають згідно формули . Оскільки вона задається через тригонометричні функції, які мають період *2π*, то вона є періодичною з уявним періодом *2πi*.При довільних значеннях комплексних змінних z1 і z2 вона характеризується властивостями: ; 
* *Тригонометричні функції: w = sin(z), w = cos(z), w = tg(z), w = ctg(z), які є періодичними з дійсними періодами – для w = sin(z), w = cos(z), – період 2π, а w = tg(z), w = ctg(z), – період π. Причому функції sin(z), cos(z) визначаються формулами: ; ; ;  Для функцій sin(z) і cos(z) при довільних змінних z1 і z2 мають місце формули.     
  А також виконується рівність *
* *Гіперболічні функції: w = sh(z), w = ch(z), w = th(z), w = cth(z), які визначаються формулами: , , ,  Для них мають місце відповідні рівності: sh(z) = -i⋅sin(i⋅z), ch(z) = cos(i⋅z), th(z) = tg(i⋅z), cth(z) = i⋅ctg(i⋅z). З приведених формул слідує, що sh(z) і ch(z), є періодичними функціями з уявним періодом 2πi, а th(z) і cth(z) – періодом πi*
* *Логарифмічна функція w = Ln(z), яка є оберненою до показникової, але на відміну від показникової вона є багатозначною функцією,  вираз  називають головним значенням логарифмічної функції і позначають ln(z), таким чином, Ln(z) = ln(z)+i⋅2πk.*
* *Загальна показникова функція w = az (a ∈ C), яка визначається за допомогою рівності az = ezln(a) і яка є теж багатозначною, причому її головне значення дорівнює ezln(a)*
* *Степенева функція w = za (a ∈ C), яка визначається за допомогою рівності za = ealn(z) і яка є багатозначною функцією, з головним значення ealn(z). Якщо a = 1/n, n ∈ N, то маємо багатозначну функцію – корінь n степеня з комплексного числа:*

.

* *Обернені тригонометричні функції w = Arcsin(z), w = Arccos(z), w = Arctg(z), w = Arcctg(z),* які визначаються як обернені по відношенню до функцій *w = sin(z)* і т. д. Усі ці функції багатозначні і виражаються через логарифмічні функції:  
   ; ; ; .
* *Обернені гіперболічні функції w = Arsh(z), w = Arch(z), w = Arth(z), w = Arcth(z)*, які оберненими до відповідних гіперболічних функцій і на відміну від них є багатозначними. Їх теж можна визначити через логарифмічні функції:   
  ; ; ; .

Розглянемо приклади*.*

1. Знайти модуль і головне значення функції:

1. *w = ez* при *z = 2 + 3i*: Тоді *w = e2+3i = e2(cos(3) + isin(3))*, отже, *⏐w⏐ = ez*; *arg(w) = 3*.
2. , якщо *z = 1 – i,*   , .

2. Виразити через тригонометричні й гіперболічні функції дійсного аргументу дійсну та уявну частини функцію w = sin(z):

sin(z) = sin(x+iy) = sin(x)cos(iy)+cos(x)sin(iy) (оскільки cos(iy) = ch(y), sin(iy) = ish(y)), то sin(z) = sin(x)ch(y)+icos(x)sh(y), отже Re sin(z) = = sin(x)ch(y), Im sin(z) = cos(x)sh(y).

3. Знайти дійсну та уявні частини значень функції: w = sin(2 + i). Згідно формули: Re sin(x+iy) = = sin(x)ch(y), Im sin(x+iy) = cos(x)sh(y), знаходимо, що Re sin(2+i) = = sin(2)ch(1), Im sin(2+i) = cos(2)sh(1).

4. Обчислити Ln(3-2i).

Розв’язок . Ln(3-2i) = Ln⏐z⏐+i(arg(z)+2π) (k = 0; ±1; ±2; …) ⏐z⏐=13; ϕ = arctg(-2/3). Отже, .

5. Знайти всі значення функції w = Arcsin(2i). Згідно означення  .

## 3. Диференційованість функцій. Умови Коші-Рімана.

Нехай задана функція комплексної змінної *w = f(z),* яка є однозначною і визначена на множині ***D***. Надамо аргументу функції z приріст *Δz*, тоді функція *w* набуде приросту Δw, причому *Δw = f(z+Δz)­–f(z).* Розглянемо границю відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо приріст незалежної змінної *Δz* будь-яким способом прямує до нуля. Якщо ця границя існує, то вона є *похідною* функції *w*, тобто

 (1)

Якщо в точці *z ∈ D* функція *w = f(z)* має похідну *f′(z),* то вона називається *диференційованою* у точці *z*. Однозначно функція, яка диференційована в кожній точці області *D* називається *аналітичною* у цій області. Функція *f(z)* називається *аналітичною* в точці *z0 ∈ D*, якщо вона аналітична у деякому її околі. Нехай задана функція *w = f(z).* Оскільки *z = x + iy*, то функція *w* є функцією двох змінних *x* і *y*, а саме *w = u(x,y) + iv(x,y),* де *u(x,y*) – дійсна частина функції *w*, а *v(x,y)* – уявна.

Мають місце наступні твердження:

1. Якщо функція *w = u(x,y) + iv(x,y),* диференційована у деякій точці *z = x + iy*, то в цій точці існують частинні похідні , причому ці похідні зв’язані умовами

 (2)

які називаються умовами Коші-Рімана.

2. Умови Коші-Рімара є необхідними та достатніми умовами того, що функція *w = f(z)* є аналітичною в області.

При виконанні умов Коші-Рімана (2) похідна *w′ = f′(z)* обчислюється згідно формули



Однозначну функцію , яка у всіх точках деякої області є неперервною диференційованою (має неперервну похідну), називають *аналітичною (регулярною)* в цій області.

Однозначні елементарні функції є аналітичними.

Елементарні функції комплексної змінної можна диференціювати за тими ж формулами, що і функції дійсної змінної.

Запишемо у зв’язку з цим похідні елементарних функцій комплексної змінної.

1. ; 2. 

3.; 4. ;

5. ; 6. ;

7. ; 8. ;

9. ; 10. ;

11. ; 12. ;

13. ; 14. ;

15. ; 16. ;

Приклади:

1. **;

2. ;

3. ** .

## 4. Інтегрування комплексних функцій. Інтегральна формула Коші

### Загальні означення

Нехай значення функції комплексної змінної  знаходиться на деякій замкнутій або не замкнутій криві *L.* яка розміщена в деякій області *D* . Розіб’ємо цю криву точками на *n* елементарних дуг *lk ,* кінці яких  *zл,zk+1* і на кожній з цих дуг виберемо по одній точці . Побудуємо добуток , де є значення функції *f(z)* у точці , . Просумувавши ці добутки, одержимо .

Означення. Інтегралом функції *f(z )*вздовж кривої *L* називається границя побудованої суми при , тобто

 1)

Цей інтеграл завжди існує, якщо границя не залежить від вибору розбиття кривої *L* на дуги та вибору точок і функція *f(z)* є неперервною.

Функція *Ф(z)* називається невизначеним інтегралом від функції  *f(z)*, якщо всюди в області *D* змінної z виконується умова , то функцію *Ф(z)* називають первісною комплексної функції *f(z)*.

Якщо крива *f(z)* є кусково гладкою, тобто складається з гладких кривих *L1, L2, …, Lm* , то інтеграл по *L* функції *f(z)* дорівнює сумі інтегралів по цих кривих:



Розглянемо спрямлювану криву *L*, в кожній точці якої задано функцію . ***Інтегралом*** від функції  вздовж *L* називають , де криву поділено на малі частки ,  – довільна точка, яка лежить на відповідній частці кривої, а границя існує і не залежить від способу поділу кривої на частки та від способу вибору точок .

Якщо *L* є кусково гладкою кривою, а функція  – кусково неперервна та обмежена, то цей інтеграл завжди існує. Він зводиться до обчислення вздовж кривої *L* криволінійних інтегралів за координатами від функцій дійсних змінних

****.

### Прийоми інтегрування функції комплексної змінної

Розглянемо способи інтегрування функції комплексної змінної.

1. Нехай функція *f(z)* є аналітичною в області *D* зміни змінної *z*, а крива *L* є гладкою лінією з початковою точкою *z1* і кінцевою *z2*, то обчислення інтегралу від функції *f(z)* здійснюється згідно формули Ньютона – Лейбніца, аналогічно як і для функції дійсної змінної

 (3)

Приклади.

1. Обчислити інтеграл , якщо *L* – довільна лінія, що з’єднує точки *z1=і* та *z2=1.*

Розв’язок. Оскільки підінтегральна функція є аналітичною всюди в області D, то для обчислення поданого інтегралу скористаємось формулою (3), тобто



2. Обчислити інтеграл , якщо *L* – довільна лінія, що з’єднує точки *z1=-π/2* та *z2= π/2.*

Розв’язок. Оскільки функція є аналітичною в області D, то аналогічно попередньому прикладу для обчислення поданого інтегралу скористаємось формулою (3), тобто





3. Якщо підінтегральна функція  має вигляд  або її можна подати у такому вигляді, то інтеграл дорівнює сумі двох криволінійних інтегралів від дійсних функцій 

 (4)

Згідно цієї формули обчислення інтегралу зводиться до обчислення криволінійних інтегралів від функцій дійсної змінної. Таким чином у цьому випадку всі властивості, які притаманні криволінійним інтегралам функції дійсної змінної є застосовними і для функції комплексної змінної.

Приклади:

1. Обчислити інтеграл , якщо  і *L* – відрізок прямої, що з’єднує точки А(2+і) і В(2+3і)*.*

Розв’язок.

У даному випадку 

Тоді 

Обчислимо перший інтеграл:



Для обчислення другого інтегралу  запишемо рівняння прямої *АВ*: .

Тоді 

Отже , 

2. Обчислити інтеграл , якщо  і L‑ парабола  , що з’єднує точки А(0,0) і В(1,1).

Розв’язок.

Запишемо функцію  у вигляді Тоді 

4. Якщо змінна z подається у параметричному вигляді, , тобто , тоді інтегрування функції  здійснюється згідно формули:

 (5)

Приклад:

Обчислити інтеграл , якщо  і *L* – еліптична крива, що з’єднує точки .

Розв’язок. 

**Теорема Коші**

Якщо функція  аналітична у однозв’язній області , межею якої є кусково гладкий контур *L*, та неперервна у замкненій області *D+ L* то інтеграл від цієї функції вздовж лінії *Г* дорівнює нулю:

.

***Теорема Коші для багатозв’язної області.*** Розглянемо область , межа якої складається з замкненої лінії *L* та ліній *, ,… *, які лежать всередині *L0* та попарно не перетинаються. Тоді, якщо функція  аналітична у області  та неперервна у замкненій області , то інтеграл від цієї функції вздовж повного контуру  дорівнює нулю:

, тобто .

***Інтегральна формула Коші.*** Розглянемо однозв’язну область  та замкнену криву *L*, яка повністю міститься у  разом з своєю внутрішністю . Якщо функція  аналітична у області , то для будь-якої точки  має місце рівність ****.

Інтеграл **** називається ***інтегралом Коші***.

***Формула типу Коші***. Якщо функція  аналітична у області  та неперервна у замкненій області *D+ L*, то у довільній внутрішній точці області  функція  має похідну будь-якого порядку, та ****.

## 5. Ряди з комплексними членами. Степеневі ряди. Круг збіжності

Розглянемо послідовність комплексних чисел  та побудуємо ряд. ***Частковою сумою*** цього ряду називається сума .

Якщо існують скінченні границі  та , то величина  також має скінченну границю , ряд  називається ***збіжним***, а число  – ***сумою*** цього ряду.

Ряд  називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд .

***Необхідна умова збіжності.*** Якщо ряд  збігається, то .

***Наслідок.*** Якщо , то ряд  розбігається.

***Ознака збіжності Д’Аламбера.*** Нехай . Тоді, якщо , ряд є абсолютно збіжним, а якщо , то  то ряд розбігається.

***Ознака збіжності Коші.*** Нехай . Тоді, якщо , ряд є абсолютно збіжним, а якщо , то  та ряд розбігається.

Функціональний ряд структури  називається ***степеневим***. Область збіжності такого ряду (тобто множину всіх значень змінної, для яких збігається відповідний числовий ряд) складають внутрішні точки ***кругу збіжності ***, та, можливо, деякі або всі точки кола ******, яке обмежує цей круг. У внутрішніх точках круга збіжності ряд є абсолютно збіжним, ззовні кола ряд розбігається. ***Радіус збіжності***  обчислюється за формулами **** або ****.

Круг збіжності також можна знайти безпосередньо з умов  або , де  та .

## 6. Розвинення функцій в ряди Тейлора та Лорана.Особливі точки.

**Ряди Тейлора та Лорана**

Функція , аналітична у внутрішніх точках круга ******, може бути представлена у цьому крузі збіжним степеневим рядом , який називається ***рядом Тейлора***.

Для елементарних функцій комплексної змінної зберігаються розвинення у ряди Тейлора та Маклорена, отримані для функцій дійсної змінної:

, ;

, ;

, ;

, ;

, ;

,  тощо.

Якщо функція  є аналітичною у кільці ******, то вона може бути представлена у точках цього кільця своїм ***рядом Лорана***

****,

де ****, , інтегрування виконується вздовж кола ******, ******.

Радіуси ****** та ****** зв’язані з коефіцієнтами Лорана співвідношеннями **** та ****.

Класифікація ізольованих особливих точок функції

Нехай задана функція  і точка – зміни змінної z. У точці z0 не виконується аналітичність функції f(z) або ряд Лорана функції  збігається в околі точки z0, за винятком самої точки. У цьому випадку точку z0 називають ізольованою особливою точкою функції f(z). Є три типи ізольованих особливих точок (усувна особлива точка, полюс певного порядку, та істотна особлива точка). Ця класифікація ізольованих особливих точок як правило здійснюється за виглядом ряду Лорана або це можна встановити згідно поведінки функції в околі особливої точки. Розглянемо більш конкретніше кожний з типів ізольованих особливих точок.

1. Усувна особлива точка. Це є точка в околі якої у радіусі Лорана відсутні від’ємні степені z - z0, тобто це є ряд, який складається тільки з головної частини ряду. Відповідно, якщо ця точка є нескінченно віддаленою точкою, то у ряді буде наявною уже правильна частина ряду. Якщо нас цікавить поведінка функції, то границя функції при z→z0 є скінченим числом, аналогічно і у нескінченно віддаленій точці, тобто  і .

2. Полюс певного порядку. У цьому випадку розклад ряду Лорана може мати обидві частини, проте у правильній частині ряду є наявною скінчене число від’ємних степенів (z-z0), якщо позначити через m найвищу степінь виразу , що входить у розклад Лорана, тобто

 (\*)

Якщо m=1, то полюс z0 називається простим, а при m>1 його називають кратним; число m називають порядком полюса. Якщо ряд (\*) помножити на (z‑z0)m, то одержимо



(\*\*)

Звичайний степеневий ряд, вільний член якого дорівнює С-m . Таким чином при , тобто точка z0 є усувною особливою точкою. Якщо маємо полюс порядку m у нескінченно віддаленій точці, то тут ряд Лорана матиме аналогічний вигляд, тобто 

Істотно особлива точка (суттєво особлива точка). Для такої точки головна частина ряду Лорана має нескінченне число членів.

Зобразимо у вигляді таблиці відповідність типам ізольованих особливих точок ряду Лорана та поведінку функції f(z):

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Типи точок | Ряд Лорана | | Поведінка функції | |
|  |  |  |  |  |
| Усувна особлива точка |  |  | (c–const) | (c1–const) |
| Полюс порядку m |  |  |  |  |
| Істотно особлива точка |  |  | не існує | не існує |

Приклад: Встановити наявні особливі точки функції f(z) та вказати їх характер: a) ; б) ; в) ; г) .

Розв’язок.

а) Функція  нулями знаменника є значення , , тобто ці дві точки є її полюсами першого порядку. Точка  є усувною особливою точкою, оскільки .

б) Розкладемо функцію  у ряд Лорана в околі точки , попередньо перетворивши функцію.   У даному ряді його головна частина в околі точки  містить нескінченне число членів, то дана точка є істотно особливою точкою.

в) Як і у попередньому прикладі, оскільки точка  є особливою, розвинемо задачу функцію  в околі цієї точки в ряд Лорана:

 Можемо зробити висновок, згідно наявного ряду, що точка  є усувною точкою, то відсутня головна частина ряду (відсутні члени з від’ємними степенями z).

г) Оскільки точка є особливою для заданої функції , то розвинемо її у ряд Лорана в околі точки  (як функцію sin(z)):



Отже, точка  є істотно особливою точкою даної функції. У нескінченно віддаленій точці  тобто точка є правильною.

Зауваження. Таким чином для точки  про її особливість можемо трактувати.

Точка  є усувною ізольованою особливою точкою, якщо головна частина у розкладі ряду Лорана відсутня.

Якщо головна частина ряду Лорана має скінчену кількість членів, тобто вона має вигляд  то ізольовано особлива точка  є полюсом m-го порядку функції .

Точка  є істотно особливою точкою, якщо головна частина має нескінчену кількість членів.

Відповідно можемо аналізувати особливість нескінченно віддаленої точки, тобто при .

Якщо у ряді Лорана відсутня правильна частина, тобто ця точка є усувною точкою

Якщо правильна частина ряду Лорана є скінченою, m-го порядку, то точка  є полюсом m-го порядку.

Якщо у ряді Лорана є нескінчена кількість членів правильної частини, то  є істотною ізольованою особливою точкою.

## 7. Лишки функції та їх обчислення

### ***Загальні поняття***

Теорія лишків займає особливе місце як і у теорії функції комплексної змінної а відтак як її апарат має важливе застосування для розв’язування прикладних задач, зокрема у механіці деформівного твердого тіла, операційному численні тощо.

Оскільки є достатньо складним питанням інтегрування вздовж замкнутого контуру функції аналітичної всередині цього контуру за винятком скінченої кількості полюсів, то це питання звелося до знаходження лишків, а відповідно лишки обчислюються простим диференціюванням. З цієї причини встановлюються способи зведення різних задач до контурного інтегрування. Сукупність таких задач та способи їх вирішення отримала назву теорія лишків.

Перейдемо до встановлення поняття лишків функції комплексної змінної. Нехай функція f(z) є аналітичною в області D, за винятком скінченої кількості ізольованих особливих точок, L – Кусково–гладкий замкнутий контур, який належить області D і не проходить через особливі точки функції f(z).

Згідно теореми Коші, якщо в області, обмеженій контуром L і на ньому функція f(z) всюди аналітична, то  у противному випадку, якщо в цій області наявна ізольована особлива точка z0 функції f(z) і замкнений контур L повністю лежить в околі цієї точки, значення інтегралу, взагалі кажучи, не буде дорівнювати нулю. Виявляється, що це значення може бути легко обчислити. Дійсно, в околі точки z0 функцію f(z) розкладемо у ряд Лорана:



Він є рівномірно збіжним на контурі L, тобто лежить в околі точки z0.

Інтегруючи почленно цей ряд вздовж контуру L, одержимо:

 (1)

оскільки мають місце рівності: , ,  Отже, із рівності (1) маємо, що

 (2)

Означення. Лишком аналітичної функції f(z) в ізольованій особливій точці z0 називається комплексне число, яке дорівнює значенню інтеграла , де L – замкнений контур, який одноразово обходить точку z0.

Для позначення лишка функції f(z) відносно точки z0 використовують такі позначення (символи): ; (residue) Таким чином, згідно означення лишка, можемо записати

 (3)

Із рівності (2) випливає, що

 (4)

Тобто лишок функції f(z) відносно ізольованої особливої точки z0 дорівнює коефіцієнту при першому від’ємному степені і розкладу функції f(z) у ряд Лорана.

Отже, лишок функції f(z) відносно ізольованої особливої точки z0 не дорівнюватиме нулю у цьому випадку, коли ця точка є полюсом певного порядку або істотною особливою точкою.

В теорії лишків має місце основна теорема про лишки. Нехай функція f(z) є аналітичною у будь-якій точці області D, за випадком скінченої кількості ізольованих особливих точок a1, a2, … , am. Нехай L – є кусково – гладка замкнена крива (замкнений контур), в області якої лежать точки ai і яка повністю лежить в області D і не проходить через точки ai.

а2

а1

аi

γi

γ2

γ1

L

Теорема Інтеграл  дорівнює сумі лишків функції f(z) відносно ізольованих особливих точок ai (i=1…m), тобто .

Суть цієї теореми полягає в тому, що кожну точку ai обводимо контурами , як зображено на рисунку, які попарно не перетинаючись лежать в області обмеженій контуром L. Тоді згідно теореми Коші (це розглядалося у темі інтегрування ФКЗ), маємо

 (\*)

Дальше помноживши вираз (\*) на , одержимо: .

### ***Методи обчислення лишків функцій.***

Оскільки з означення лишка функції це є інтеграл, при цьому підінтегральна функція має певну особливість, тобто в області яка обмежена контуром L, вздовж якого проводиться інтегрування, наявні особливі точки, то розглянемо такі три випадки обчислення лишків: обчислення лишка функції відносно полюса та істотної особливої точки, лишок функції відносно нескінченно віддаленої точки.

а) Лишок функції відносно полюса.

Нехай z0 є простим полюсом функції f(z), тоді ряд Лорана в околі цієї точки буде мати вигляд  тепер помножимо цей ряд на z – z0 і одержимо . Обчислимо границю цього цього виразу при z→z0: , або оскільки , то

. (\*)

Приклад: Обчислити лишок функції  відносно точки z=3, в якій функція має полюс першого порядку.

Розв’язок.

Згідно формули (\*) маємо . Є ще інша можливість обчислення лишка функції у цьому випадку. Нехай функція f(z) має вигляд відношення двох функцій , тобто , причому точка z0 є полюсом функції f(z) і . В цьому випадку лишок функції f(z) шукаємо у вигляді:

 (\*\*)

Приклад: Обчислити лишок функції  відносно точки z0=1.

Розв’язок.

Нехай  і . Оскільки і , то згідно формули (\*\*) маємо: . Розглянемо дальше той випадок, коли полюс функції є вищого порядку, наприклад m-го порядку. В цьому випадку ряд Лорана буде мати вигляд:





Помноживши даний ряд на (z – z0)m, одержимо:



Продиференцювавши одержаний ряд m – 1 разів і одержимо таке співвідношення:  або згідно означення лишка функції 

Приклад: Знайти лишки функцій при наявності полюсів.

Розв’язок.

Маємо два полюси z = 2 і z = -1, причому перший полюс z = 2 є полюсом першого порядку, а z = -1 – третього. Тоді для полюса z = 2, матимемо лишок , а для полюса z = -1 лишок дорівнює .

 Отже, .

б) Лишок функції відносно істотної особливої точки.

Розглянемо обчислення лишків функції f(z), відносно точки z0, якщо вона є істотною особливою точкою. Для знаходження лишку функції f(z) відносно істотної особливої точки z0, потрібно задану функцію розкласти у ряд Лорана і її лишком є коефіцієнт C-1.

Приклади: 1. Знайти лишки функції відносно точки z = 0.



Розв’язок. При в околі точки z = 0, подана функція має розклад



, отже і .



2. Знайти лишок функції відносно точки z=0.



Розв’язок. Розклад функції в околі точки z = 0 має вигляд:



Отже, 

в) Лишки функції відносно нескінченно віддаленої точки.

Нехай точка z0 є нескінченно віддаленою точкою f(z) і L довільний замкнутий контур, який повністю лежить в околі цієї точки, прикладом L може бути коло достатньо великого радіуса R. Згідно означення лишка функції відносно будь-якої точки, будемо вводити таке трактування, що лишок це є значення інтегралу , але у даному випадку вважаємо, що інтегрування здійснюється по контуру L у від’ємному напрямі, оскільки контур L проходиться за годинниковою стрілкою, щоби нескінченно віддалена точка була при обході з лівого боку.

Запишемо ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки:



Оскільки цей ряд є рівномірно збіжним на контурі L, то його можна почленно інтегрувати вздовж L-, при цьому всі члени ряду при інтегруванні дорівнюють 0, за винятком члена з С-1:  або поділити на , одержимо: 

Таким чином лишок функції в околі нескінченно віддаленої точки дорівнює коефіцієнту при першій від’ємні степені розкладу ряду Лорана взятому з протилежним знаком.

Маємо для лишків функції f(z), ще наступну теорему:

Якщо f(z) є аналітичною функцією у всій області D зміни змінної z, за винятком скінченної кількості особливих точок, то сума лишків відносно всіх її особливих точок і включаючи нескінченно віддалену точку дорівнює нулю, тобто  Із цієї умови можемо теж визначити лишок функції відносно нескінченно віддаленої точки.

Приклад: Знайти лишок функції  відносно нескінченно віддаленої точки.

Розв’язок. Розкладемо функції за степенями z – 2 у ряд Лорана:



Тоді



Маємо два коефіцієнти при (z–2)-1, а саме Оскільки сума всіх лишків =0, то , тобто  є лишком відносно нескінченно віддаленої точки. Окрім наведених вище формул, можемо скористатися наступною формулою ****



Приклад: Знайти лишок функції  відносно нескінченно віддаленої точки.

Розв’язок.

****

# Розділ ІІ. Операційне числення

**§1. Інтегральні перетворення**

**Вступ**

Інтегральні перетворення та їх властивості є основою операційного числення, азбукою телемеханіки та автоматики. До них відносяться перетворення Лапласа, Фур’є, вейвлет – перетворення, Гілберта та інші. Вперше їх застосував в електромеханічних розрахунках англійський інженер – електрик О.Хевісайд.

Основна ідея операційного числення полягає в тому, що між функцією дійсної змінної  або  яку називають оригіналом і функцією комплексної змінної  або , названої зображенням встановлюється певна відповідність, що дозволяє диференціювання та інтегрування оригіналу  або  зводити до алгебраїчних операцій над зображенням  або,тобто зводити, наприклад розв’язок звичайних диференціальних, інтегральних, диференціальних рівнянь в частинних похідних до розв’язання алгебраїчних рівнянь та інших задач.

У загальній формі означення інтегрального перетворення можна сформулювати так.

Нехай подана функція  на інтервалі (*a, b*), який може, зокрема, співпадати з дійсною віссю  або частково, тобто 

***Означення.*** Інтегральним перетворенням функції  називається функція  де - фіксована для даного перетворення функція, яку називають ядром перетворення. Якщо ядро  - комплексне, то є функцією комплексної змінної.

Перетворення використовуються для дослідження різних задач, а також для аналізу сигналів та зображень. При дослідженні задач, які мають дискретний характер, використовуються дискретні перетворення.

Обмежимось розглядом інтегральних перетворень Лапласа,Фур’є та вейвлет – перетворення, їх властивостями та застосуванням для дослідження певних інженерно – технічних задач.

**1. Інтегральне перетворення Лапласа**

Метод перетворення Лапласа полягає в тому, що тут вивченню підлягає не сама деяка функція *f(t),* яку називаємо оригіналом, а її видозміну, тобто зображення. Це зображення здійснюється за допомогою множення оригінала на деяку експоненціальну функцію і цей добуток інтегрується в межах від 0 до ∞.

**Означення.** Якщо функція *f(t)* задовольняє наступним умовам:

1. *f(t)* – однозначна і кусково-неперервна функція, (яка, взагалі кажучи, може приймати і комплексні значення);
2. *f(t)*=0 при t<0;
3. *f(t)* зростає не швидше експоненціальної функції, тобто існують такі дійсні постійні числа *μ>0* і **, що для всіх *t>0* виконується нерівність:

*,* ( число *р0* називається показником росту функції), то функція *f(t)* називається оригіналом.

Вираз , (1)

у якому *р=а+іb (а>p0)-* деяке комплексне число, називається перетворенням Лапласа, а інтеграл справа – інтегралом (оператором) Лапласа, якщо цей інтеграл є збіжним.

Отже перетворення Лапласа є інтегральним перетворенням, яке позначається символом  (2)

Приклад 1: Знайти зображення функції *f(t)=С-const.*

Розв’язок. Згідно формули (2) маємо:  Отже, для будь якої постійної функції її зображення має даний вигляд.

Приклад 2: Знайти зображення функцій *f(t)=еt,,* *f(t)=t2.*

Розв’язок.

Застосовуючи формулу (2), знаходимо:



Для обчислення інтегралу двічі використовувалося інтегрування по частинах:



## 2. Властивості перетворення Лапласа.

**1. *Лінійність.*** Якщо і  - числа, то **** тобто лінійній комбінації оригіналів відповідає така ж лінійна комбінація зображень.

**2. *Подібність (масштабування).*** Якщо , то  множення аргументу оригіналу на додатне число *а* приводить до ділення зображення та його аргументу на це число.

**3**. ***Зсув (згасання).*** Якщо , , то , тобто множення оригіналу на функцію  спричиняє зсув змінної .

**4.** ***Запізнення.*** Якщо  і , то  , тобто запізнювання оригіналу на додатну величину  приводить до множення зображення оригіналу без запізнювання на .

Пояснимо термін «запізнювання». Графіки функції  і  мають однаковий вигляд, але графік функції  зсунутий на  одиниць вправо (див. рис. 1, рис. 2). Отже, функції  і  описують той самий процес, але процес, описуваний функцією , починається з запізненням на час .



Рис. 1. Рис. 2.

Зауваження.

1. Зображення періодичного оригіналу з періодом, рівним Т, є 

2. Властивість випередження  застосовується значно рідше.

***5. Теореми диференціювання***

***Теорема диференціювання оригіналу*** Якщо і функції  є оригіналами, то





 (\*)



Зауваження. Наведені формули просто виглядять при нульових початкових умовах: якщо  то , якщо  то , і нарешті , якщо , то , тобто диференціюванню оригіналу відповідає множення його зображення на .

Розглянута властивість диференціювання оригіналу разом із властивістю лінійності широко використовується при розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь.

Приклад 1.Знайти зображення виразу  якщо 

Розв’язок.

Нехай  Тоді, відповідно до наведених формул (\*) маємо:

,

,

,

 . Отже,





Приклад 2.Згідно приведеної теореми (\*) знайти зображення функції 

Розв’язок.

Знаходимо 

Тоді згідно формули (\*) маємо:



оскільки то 

***Теорема диференціювання зображення*** Якщо  , то , ,  тобто диференціюванню зображення відповідає множення його оригіналу на .

Відповідно до наведеної теореми існування зображення,  є аналітичною функцією в півплощині . Отже, у неї існує похідна будь-якого порядку. Диференціюючи інтеграл по параметру  (обґрунтування законності цієї операції опускаємо), одержимо

, тобто

. Тоді ,  і взагалі 

Приклад:Знайти зображення функцій ,  

Розв’язок.

Так як  , то, в силу властивості диференціювання зображення, маємо , тобто . Далі знаходимо  Продовжуючи диференціювання, отримаємо  З урахуванням властивості зсуву отримаємо . Відповідно до формули, що . Отже, , тобто , або . Аналогічно, використовуючи формули, знаходимо    З урахуванням властивостей зсуву і отриманих формул, одержимо , 



***6. Теореми інтегрування***

***Інтегрування оригіналу*** Якщо  то , тобто інтегруванню оригіналу від 0 до  відповідає ділення його зображення на . Функція  є оригіналом (можна перевірити). Нехай . Тоді по властивості диференціювання оригіналу маємо  (так як ). А тому що  те  Звідси  тобто .



***Інтегрування зображення*** Якщо  і інтеграл  сходиться, то  тобто інтегруванню зображення від  до  відповідає діленню його оригіналу на .

Використовуючи формулу і змінюючи порядок інтегрування (підставу законності цієї операції упускаємо), отримаємо

.

Приклад: Знайти зображення функції ; знайти зображення  інтегрального синуса 

Розв’язок.

Так як , то , тобто . Застосовуючи властивість інтегрування оригіналу, отримаємо .

**Формули перетворень Лапласа для деяких функцій**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***№ п/п*** | ***Оригінал f(t)*** | ***Зображення F(p)*** |
| **1** | *С-const* |  |
| **2** | *exp(at)* |  |
| **3** |  |  |
| **4** | *sin(at)* |  |
| **5** | *cos(at)* |  |
| **6** | *sh(at)* |  |
| **7** | *ch(at)* |  |
| **8** | *exp(-at)sin(ωt)* |  |
| **9** | *exp(-at)cos(ωt)* |  |
| **10** | *exp(-at)sh(ωt)* |  |
| **11** | *exp(-at)ch(ωt)* |  |
| **12** | *exp(at)* |  |
| **13** | *f(t)* |  |
| **14** |  |  |
| **15** |  |  |
| **16** |  |  |
| **17** |  |  |
| **18** |  |  |
| **19** |  |  |
| **20** |  |  |
| **21** | *sh2(at)* |  |
| **22** | *ch2(at)* |  |
| **23** | *sin(ωt-φ0)* |  |
| **24** | *cos(ωt-φ0)* |  |

## 3. Обернене перетворення Лапласа.

**Загальні поняття.**

Прямим перетворення Лапласа деякої функції *f(t),* яка відповідає певним умовам, які вказані у попередній темі, полягає в тому, що за її оригіналом знаходимо її зображення *F(p),* тобто . Якщо потрібно розв’язати обернену задачу: за відомим зображенням *F(p)* знайти оригінал, тобто функцію *f(t),* то таку дію називають оберненим перетворенням Лапласа і позначають 

Отже, пряме перетворення дає зображення функції, а обернене перетворення – її оригінал.

Наприклад:  та інші.

Для знаходження оригіналу зображення потрібно вміти знаходити початкову функцію, зображенням якої є правильний раціональний дріб, тобто

. (1)

**Побудова оберненого перетворення згідно розкладу зображення на прості дроби**

Будь-який правильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми елементарних дробів чотирьох типів:



Знайдемо початкові функції (оригінали) для виписаних елементарних дробів.

Для дробу І типу маємо:

 (2)

Для дробу ІІ типу :

 (3)

Для дробу ІІІ типу спочатку зробимо тотожні перетворення :

 (4)

Позначивши відповідно перший і другий доданки

****

знаходимо їх оригінали:



Таким чином у кінцевому результаті маємо**:**

 (5)

Оскільки обчислення елементарного дробу IV типу пов’язане з громіздкими перетвореннями, то його тут не наводимо.

Взагалі для знаходження оригіналів від раціональних зображень можна ефективно скористатися методом лишків, на що вказує наступна теорема.

**Теорема.** Якщо зображення *F(p)* є правильною дробово-раціональною функцією, тобто і знаменник має корені *p1, p2, … , pn*кратності *r1, r2, … , rn* , то відповідний оригінал знаходимо за допомогою лишків

 (6)

Розглянемо приклади знаходження оригіналів за заданими зображеннями, розвинувши їх дробово – раціональні вирази на прості дроби.

Приклад 1.Знайти оригінал *f(t),* якщо ****

Розв’язок.

Розкладемо задане зображення *F(p)* на елементарні дроби:

****

Коефіцієнти А, В і С знаходимо згідно методу невизначених коефіцієнтів:

****

Тоді зображення, після розвинення на прості дроби, матиме вигляд:

****

Знаходимо оригінал функції *f(t):*



Приклад 2.Знайти оригінал *f(t),* якщо ****

Розв’язок.

Розвинемо задане зображення *F(p)* на елементарні дроби:

****

Коефіцієнти А, В і С знаходимо аналогічно, як у попередньому прикладі, згідно методу невизначених коефіцієнтів:

****

Тоді



Знаходимо оригінал *f(t):*



**Побудова оберненого перетворення згідно теорії лишків**

У деяких випадках, для знаходження оригіналу за його зображенням, зручніше скористатися наведеною вище теоремою (6), тобто за допомогою лишків.

Розглянемо застосування цього способу в наступних прикладах.

Приклад 1: Знайти оригінал функції *f(t),* якщо її зображення має вигляд:



Розв’язок.

У даному виразі *G(p)=1, P(p)=p(p-1)(p+2)* і точки *p=0, p=1, p=-2* є простими полюсами функції *F(p)*. Тоді згідно наведеної теореми знаходимо



Таким чином при р=0 

при р=1 

при р=-2 

Тоді оригінал функції *f(t)* матиме вигляд:



Приклад 2.Знайти оригінал функції *f(t),* якщо її зображення має вигляд:



Розв’язок.

У даному випадку функція *F(p)* має два простих полюси і один двократний, а саме *р=0* і *р=1* є простими, а полюс *р= -1* є двократним.

Застосовуючи теорему про лишки, маємо:



****Таким чином 



## 4. Застосування перетворення Лапласа для розв’язування інтегральних, звичайних диференціальних рівнянь і диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Перетворення Лапласа є зручним апаратом для знаходження розв’язків як звичайних диференціальних рівнянь та їх систем так і для розв’язування диференціальних рівнянь у частинних похідних, а також для розв’язування інтегральних рівнянь, сингулярних рівнянь, інтегро-диференціальних рівнянь.. Розглянемо знаходження розв’язків звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами та їх систем, та інтегральних рівнянь

**Розв’язування звичайних диференціальних рівнянь та їх систем.**

***а. Знаходження розв’язків звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами***

За допомогою перетворення Лапласа, згідно відповідних теорем, розглянемо процедуру знаходження розв’язків звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків з постійними коефіцієнтами.

Нехай задане лінійне неоднорідне рівняння ІІ порядку з постійними коефіцієнтами  при заданих початкових умовах 

Процедура знаходження розв’язку заданого рівняння складається з наступних трьох етапів:

1. Внаслідок застосування до заданого диференціального рівняння перетворення Лапласа згідно теореми диференціювання оригіналу, переходимо від диференціального рівняння відносно оригіналу до відповідного лінійного алгебраїчного рівняння для зображення.
2. За одержаним лінійним алгебраїчним рівнянням відносно зображення *Х(p)* знаходимо його, як розв’язок цього рівняння.
3. Застосовуючи до одержаного зображення обернене перетворення Лапласа, знаходимо оригінал *x(t),* який і є розв’язком заданого диференціального рівняння.

Отже згідно запропонованої процедури проводимо поетапні дії:

1. Застосуємо до заданого диференціального рівняння пряме перетворення Лапласа з врахуванням теореми про диференціювання оригіналу:



2. Тоді матимемо наступне звичайне алгебраїчне рівняння відносно Х(р), яке будемо дальше називати операторним рівнянням:



Звідси .

3. Застосовуючи обернене перетворення Лапласа до одержаного зображення знаходимо розв’язок заданого рівняння: 

Розглянемо приклади знаходження розв’язків диференціальних рівнянь.

Приклад 1:Знайти розв’язок лінійного неоднорідного рівняння **** з початковими умовами ****

Розв’язок.Застосовуючи пряме перетворення Лапласа до заданого рівняння та, враховуючи початкові умови, знаходимо:



Після перетворень одержимо наступне операторне рівняння:



Розкладемо вираз зображення на прості дроби:



Для находження коефіцієнтів *А, В, С і D* складаємо рівність:

****

Згідно оберненого перетворення Лапласа знаходимо оригінал, тобто розв’язок рівняння:

****

Приклад 2. Розв’язати лінійне неоднорідне рівняння **** з початковими умовами ****

Розв’язок.

Згідно перетворення Лапласа, знаходимо:



Одержали наступне операторне рівняння:



Розкладемо вираз зображення на прості дроби:



Для находження коефіцієнтів *А, В і С* складаємо рівність:

****

Застосовуючи обернене перетворення Лапласа знаходимо оригінал, тобто розв’язок рівняння:



Приклад 3. Розв’язати лінійне неоднорідне рівняння **** з початковими умовами ****

Розв’язок.Згідно перетворення Лапласа, знаходимо:



Одержали наступне операторне рівняння:



Знайдемо оригінал, тобто розв’язок даного рівняння, скориставшись методом лишків, а саме:



У даному випадку функція – зображення *Х(р)* має два прості полюси *р1=3* і *р2=2.*

Тоді маємо 

Отже, частковий розв’язок рівняння має вигляд:



***б. Знаходження розв’язку системи звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.***

Аналогічним шляхом за допомогою перетворень Лапласа, як і для одного диференціального рівняння можемо знайти розв’язки і системи рівнянь. В даному випадку застосовуємо оператор Лапласа до кожного із рівнянь системи і дальше процедура знаходження розв’язків аналогічна як і для одного диференціального рівняння.

Розглянемо на прикладі шлях знаходження розв’язку системи диференціальних рівнянь.

Приклад 1.Знайти частинні розв’язки системи диференціальних рівнянь при наступних початкових умовах х(0)=0, у(0)=0.

Розв’язок. Перетворимо задану систему до вигляду:

****

Застосуємо перетворення Лапласа до заданої системи і одержимо наступну систему операторних рівнянь:



Розв’язуючи одержану систему відносно *Х(р)* і *У(р),* знаходимо:



Розкладемо дані вирази на прості дроби



Складемо системи рівнянь для знаходження коефіцієнтів *А – С1*:

- система рівнянь для знаходження коефіцієнтів *А, В, С*

при *р=1 ⇒ 3=-3C; C=-1;*

*p=2 ⇒ 3= 4A; A=3/4;*

*р=-2 ⇒ 3=12B; B=1/4.*

- система рівнянь для знаходження коефіцієнтів *А1, В1, С1*

при *р=1 ⇒ 2=-3C; C=-2/3;*

*p=2 ⇒ 3= 4A; A=3/4;*

*р=-2 ⇒ -1=12B; B=-1/12.*



Повертаючись до оригіналів, знаходимо розв’язки заданої системи рівнянь:

Приклад 2. Знайти частинні розв’язки системи диференціальних рівнянь

при наступних початкових умовах х(0)=0, у(0)=5.

Розв’язок. Перетворимо задану систему до вигляду: **** Застосуємо перетворення Лапласа до заданої системи і одержимо наступну систему операторних рівнянь:



Розв’язуючи одержану систему відносно *Х(р)* і *У(р),* знаходимо:



Оригінали функцій, тобто розв’язки теж знайдемо використавши метод лишків. Згідно наведеної формули знаходимо часткові розв’язки *x(t)* i *y(t)* заданої системи диференціальних рівнянь. Оскільки функції - зображення мають три прості полюси *р1=3*, *р2=0* і *р3=-1*, то для *х(t)*

маємо:



Тоді частковий розв’язок 

Аналогічно знаходимо частковий розв’язок *y(t):*



Отже, 

Таким чином частковий розв’язок заданої системи диференціальних рівнянь має вигляд:

****

**Розв’язування інтегральних рівнянь.**

Загальні поняття та визначення.

Інтегральними рівняннями називають рівняння, в яких шукана функція знаходиться під знаком інтегралу.

У загальному випадку лінійні інтегральні рівняння (ІР) мають вигляд

 (7)

де *K(x ,t)* – ядро ІР, *f(x)* – права частина рівняння з областю існування *Q*, *λ‑*параметр рівняння (часто надають йому значення 1 або –1),  *y(x)* – шукана функція з областю існування  *Ω* - змінна або постійна.

Функції *K(x ,t), f(x), g(x),* параметр λ та області *Q* і *Ω* вважаються заданими, а функція *y(x)* – шуканою. Причому функції  *K(x,t), f(x)* і *g(x)* можуть бути як комплексними, так і дійсними, а змінні *x* і *t* – тільки дійсними.

Рівняння (7) є неоднорідним. У випадку *g(x)≡*1 і *f(x)*≡0, то рівняння (7) запишеться у вигляді

 (8)

називають однорідним.

Якщо задані функції *K(x , t), g(x)* і шукана функція *у(х)* у рівнянні (7) є функціями однієї змінної, то маємо рівняння одномірні, тобто рівняння з однією змінною. Ці рівняння можуть бути лінійними або нелінійними, аналогічно як і диференціальні рівняння.

Лінійні рівняння – це рівняння, в яких шукана функція входить лінійно.

До них відносяться рівняння Фредгольма і Вольтерри І та ІІ роду, а саме:

* рівняння Фредгольма І роду

 (9)

* рівняння Вольтерри І роду

 (10)

* рівняння Вольтерри та Фредгольма ІІ роду:

(11)



Якщо аргумент ядра має вигляд різниці, тобто *x - t* , то з таким виглядом

ядра інтегральне рівняння називається рівнянням згортки, або рівнянням із різницевим ядром. Ці рівняння мають вигляд:

 (12)

Причому інтегральні рівняння згортки наступного вигляду:

є рівнянням Вольтерри І роду

 (13)

рівняння Вольтерри ІІ роду

 (14)

Розглянемо методику знаходження розв’язку інтегральних рівнянь згортки Вольтерри І та ІІ роду за допомогою інтегрального перетворення Лапласа.

Нехай задано рівняння (13). Застосувавши до нього перетворення Лапласа, одержимо:

.

Дальше, вважаючи, що *F(p)→f(х), g(p)→K(х), Y(p)→y(х)* та згідно теореми згортки операторне рівняння, для заданого рівняння (11), запишеться у вигляді Тоді розв’язок рівняння знаходимо взявши обернене перетворення Лапласа., тобто .



Приклад.Знайти розв’язок інтегрального рівняння



Розв’язок. Побудуємо для даного рівняння операторне рівняння: 

Оскільки Взявши обернене перетворення, знаходимо розв’язок рівняння:



Розглянемо методику знаходження розв’язку інтегрального рівняння згортки Вольтерри ІІ роду за допомогою інтегрального перетворення.

Нехай задано рівняння (12). Застосувавши до нього перетворення Лапласа, одержимо: 

Дальше, вважаючи, що *F(p)→f(х), g(p)→K(х), Y(p)→y(х)* та згідно теореми згортки операторне рівняння, для заданого рівняння (11), запишеться у вигляді



Тоді розв’язок рівняння знаходимо взявши обернене перетворення Лапласа., тобто



Приклад. Знайти розв’язок інтегрального рівняння



Розв’язок. Побудуємо для даного рівняння операторне рівняння:



Оскільки 

Взявши обернене перетворення, знаходимо розв’язок рівняння:



# 2. Інтегральне перетворення Фур’є.

Якщо перетворення Лапласа за своєю суттю є символічними, то перетворення Фур’є має фізичну суть, тобто є спектральною характеристикою імпульсних сигналів. У випадку неперервних періодичних сигналів їх математичною моделлю є ряди Фур’є, тобто математичною моделлю сигналу називають функціональну залежність  можливих значень величини сигналу *f* від часу його зміни.

Залежно від вигляду функції *f(t)* сигнали поділяються на дискретні, неперервні, періодичні та неперіодичні. До періодичних відносяться сигнали *f(t)* для яких , (1)

де *Т* – період, *k* – будь-яке ціле число. Неперіодичними вважаються сигнали для яких умова (1) не виконується.

Потужним засобом дослідження (моделювання) неперервних періодичних сигналів є теорема Фур'є. Згідно її визначення будь-який складний неперервний періодичний сигнал *f(t)* можна подати у вигляді суми гармонійних коливань з частотами, кратними основній частоті , тобто

. (2)

Невідомі коефіцієнти *а0*, *аn*і *bn* у (1.3) визначаються за формулами



; (3)

.

Зазначимо, що для вирішення багатьох практичних задач математичну модель (2) - (3) подають у вигляді

, (4)

де - характеризує амплітуду сигналу, а - його фазу. Ряди Фур’є періодичних функцій з довільним перідом *Т=2l* будуються внаслідок заміни у ряді вираз на . Тоді дійсна форма ряду матиме вигляд



Де коефіцієнти такого ряду визначаються згідно формул ;

; 

Якщо функція *f(t)* – є парною з періодом *Т=2l,* то у цьому випадку  і при всіх натуральних значеннях *n* розвинення ряду буде по тільки по косинусах:  а для непарної функції коефіцієнти ряду будуть рівні нулю і ряд матиме такий вигляд: 

Часто для розгляду відповідних задач застосовується комплексний ряд Фур’є, який має наступний вигляд



Для дослідження спектральних характеристик імпульсних сигналів, тобто неперіодичних використовується пряме і обернені перетворення Фур’є. Суть його полягає в тому, що зображення є спектральною щільністю досліджуваного сигналу, за якою встановлюється його спектральні характеристики: амплітудні та фазові спектри.

Спектр ( від латинського shectrum – уява, образ, зображення) – це сукупність всіх будь – яких характеристик , які характеризують систему, процес або явище. Дослідження спектру називається спектральним аналізом, тобто це є методика дослідження кількісних та якісних характерних величин спектру. Для сигналу спектральними величинами є амплітуда, частота та початкова фаза.

Спектральна щільність є характеристикою сигналу, яка є комплексно значущою функцією частоти, яка одночасно дає інформацію як про амплітудні так і про фазовий спектри сигналу.

Розглянемо суть прямого та оберненого перетворення Фур’є.

Нехай деякий сигнал, задається функцією *x(t),* яка відповідає наступним умовам:

*а) x(t)* – визначена і неперервна на всій числовій осі при *t (-∞,∞)* за винятком скінченного числа точок розриву першого роду на будь – якому скінченному проміжку осі *t*;

*б ) x(t)* є абсолютно інтегрованою на всій осі t, тобто , тобто невластивий інтеграл від функції *x(t)* є збіжним. Тоді для такої функції існує пряме перетворення Фур’є, яке позначають *X(ω),* оскільки це є функція змінної *ω*. В літературі є різні позначення (, і т.д).

Пряме перетворення Фур’є має вигляд  (5)

Відповідно, обернене перетворення Фур’є  (6)

Як бачимо на відміну від перетворення Лапласа, яке має вигляд  з ядром ,

то перетворення Фур’є має ядро .

Якщо функція, яка задає сигнал *x(t)* відповідає вимогам перетворення Лапласа, одним з яких є те, що *х(t)=0* при *t<0* і при *q=a+i* або *p=a+i* і *Req=a =0*, то *р=it* і вважати, що перетворення Лапласа є двобічним, тобто , то із цьго перетворення одержимо перетворення Фур’є при заміні *р* на *i*.Таким чином, зображення за перетворення Фур’є, можна знаходити використовуючи таблиці зображення Лапласа.

Якщо функція , згідно якої заданий сигнал відповідає умові , при , то маємо однобічне перетворення Фур’є.

* пряме ;
* обернене 

Часто вводять однобічні косинус і синус перетворення Фур’є:

* пряме ;



* обернене ;



Функцію , яка є зображенням перетворення Фур’є називають спектральною щільністю сигналу, заданого функцією , або просто спектральною щільністю функції .

Дамо математичне та фізичне обґрунтування перетворенню Фур’є, тобто виведемо формули (5), (6) та покажемо їх фізичний зміст.

Нехай функція, яка задає одиничний неперіодичний імпульсний сигнал скінченої довжини.

Доповнимо його уявно такими же сигналами, які періодично проходять через деякий інтервал часу Т, внаслідок чого отримаємо періодичну послідовність, тобто функцію  з періодом Т, яка задає сигнал, очевидно 

Запишемо ряд Фур’є для сигналу, заданого функцією  у комплексній формі, тобто  (7),

де  (8).

Функціязадана на інтервалі одним імпульсом. Оскільки є межами цього інтервалу, то можемо записати (8) у вигляді

 (9)

Замінимо інтеграл у формулі (8) функцією

 (10) тоді запишемо, що . (11) Підставимо (11) у формулу (7) і одержимо

 (12)

Розглянемо границю виразу (12) при . При цьому перетворюємо періодичну послідовність до одного, тобто , а гармоніки спектру будуть щільно займати всю частотну вісь, при цьому амплітуди прямують до нуля (стануть нескінченно малими), маємо , або враховуючи, що ....., і при, то

 (13)

Позначивши  і враховуючи, що приріст частот при переході до сусідньої гармоніки можна ототожнити з диференцією  і вважаючи граничну суму відповідною інтегралу співвідношення (13) можна записати , тобто , формула (10) запишеться . Ми одержали формули (6) і (5).

Таким чином, встановлено, що один і той же сигнал представляється двома рівноправними математичними моделями – функцією у частотній області – пряме перетворення Фур’є і функцією у часовій області – обернене перетворення.

Отже, встановлено наступні моменти:

1. За допомогою ряду Фур’є можна періодичний сигнал розвинути на

нескінченне число гармонік з частотами, які приймають дискретні значення;

1. Інтегральне перетворення Фур’є представляє спектральну щільність у

вигляді нескінченного числа гармонік, частоти яких нескінченно близькі.

Приклад. Нехай подається сигнал нескінченної довжини – односторонній

експоненціальний відеоімпульс 





***Властивості спектральної щільності (властивості перетворення Фур’є.***

Перетворення Фур’є встановлює взаємозв’язок між представленням сигналів у часовій і частотних областях. При цьому бажано знати як зміниться представлення сигналу у частотній області, якщо сигнал підданий деякому перетворенню у часовій області і навпаки.

Знання властивостей спектральної щільності дозволяє передбачити наближений або іноді і точний вигляд спектру аналізованого сигналу і таким чином контролювати правдоподібність результату, який видається комп’ютером.

Розглянемо властивості спектральної щільності, тобто перетворення Фур’є:

1. ***Лінійність.***

Якщо функція, яка задає сигнал є лінійною комбінацією двох

функцій, тобто  то спектр суми дорівнює сумі спектрів, тобто лінійна комбінація сигналів має спектр у вигляді такої лінійної комбінації їх спектральних функцій  (1), де 

1. ***Властивості дійсної та уявної частин спектральної щільності.***

Нехай сигнал, що приймає дійсне значення. Його спектральна

щільність у загальному вигляді є комплексною



Тут  є дійсною частиною спектральної щільності, а  – уявною.

Підставивши ці вирази у формулу оберненого перетворення Фур’є маємо:



.

Щоб сигнал був дійсною величиною, необхідно щоб уявна частина = 0, тобто

; .

А це можливо тоді, коли , тобто дійсна частина спектральної щільності була парною, а уявна  – непарною:

 і .

***3. Спектральна щільність сигналу зміщеного у часі (властивість зсуву, запізнення).***

Нехай для сигналу  відома спектральна щільність, тобто . розглянемо таки же сигнал, але який виникає на  одиниць часу пізніше. Приймають точку  за початок відліку часу і подавши цей зміщений сигнал у вигляді функції , то матимемо, що  (вивести це самим, зробивши заміну ).

**Зауваження:** Оскільки , то амплітуда, як бачимо на залежить від зміщення сигналу, тобто не залежить від його розміщення на осі часу. Ця інформація є суттєвою для частотної залежності аргументу його спектральної щільності (фазовому спектру).

***4. Залежність спектральної щільності від масштабу виміру часу (властивість масштабування).***

Перш ніж перейти до встановлення співвідношень між сигналом і його спектральною щільністю, розглянемо як змінюється графік тригонометричних функцій.

Нехай вихідний сигнал , підданий зміні масштабу часу, тобто зміщений масштаб часу у  раз рівно ( – дійсне число).

Розглянемо графіки:

================

Якщо , то маємо стиснення вихідного сигналу; якщо , то розтягування сигналу у часі.

Якщо для сигналу  його спектральна щільність , тобто , то в даному випадку

. (10) (довести самим)

Таким чином, для того щоб, наприклад стиснути сигнал у часі, зберігаючи його форму, необхідно розподілити між спектральні складові у більш широкому інтервалі частот при відповідному пропорціональному зменшенні їх амплітуд.

***5. Спектральна щільність похідної.***

Нехай маємо сигнал  і його спектральну щільність , тобто; , то .

Отже, диференціювання сигналу веде до росту значень спектральної щільності в області високих частот.

**Доведення.** Оскільки при , то  (інтегруючи по частинах) =  інтегруючи по частинах знаходимо, те що треба.

Або складніше, нехай , тобто , або візьмемо оператор з обох частин рівності, або  в .

Можемо записати узагальнену формулу на випадок спектра похідної n-го порядку, тобто

.

При диференціюванні швидкість зміни сигналу у часі зростає, як наслідок модуль спектру похідної має важливе значення в області високих частот порівняно з модулем спектру вихідного сигналу.

При диференціюванні проходить загострення сигналу.

***6. Спектральна щільність інтегралу.***

Нехай деякий сигнал задається функцією . Встановимо як знайдеться його щільність при інтегруванні при тому, що 

, або виходячи із формули диференціювання сигналу маємо:

, то 

 Множник  є оператором інтегрування в частотній області.

***7. Спектр згортки сигналів.***

Згортка сигналів є часто використовуваною у радіотехніці інтегральною операцією, оскільки вона опише, зокрема, проходження сигналу через лінійну систему з постійними параметрами. В даному випадку функція  задається у вигляді .

Візьмемо від неї оператор Фур’є, тобто

;

.

Отже, спектр згортки дорівнює добутку спектрів.

***8. Спектр добутку сигналів.***

Із першої властивості знаємо, що спектр суми сигналів рівний сумі спектрів, однак такої властивості при множенні не маємо, а це співвідношення є більш складнішим.

Нехай  і  два сигнали для яких невідомі їх спектральні щільності:

 Добуток цих сигналів представимо як функцію х(t), яка його задає, тобто 

Знайдемо їх спектральну щільність, тобто візьмемо оператор Фур’є з обох частин: 

Ліва частина дає нам , а у правій частині, застосувавши обернене перетворення Фур’є, виразимо сигнал  через його спектральну щільність і підставимо у попередньо одержаний вираз (\*)



Тоді після підстановки у вираз (\*), одержимо:



Інтеграл у правій частині є згорткою, тоді:



Отже,



***9. Множення сигналу на гармонічну функцію.***

Нехай маємо деякий сигнал, який задається функцією , якого відомі спектр і гармонічну функцію . Помножимо заданий сигнал на гармонічну функцію в результаті одержимо новий сигнал :



Дослідимо, що станеться із спектром сигналу:



Отже, як бачимо спектр заданого сигналу «роздвоївся» - розпався на два додатки вдвоє меншого рівня (множник ), зміщених на  вправо  і вліво  по осі частот.

Окрім цього, при кожному доданку є множник, враховуючий початкову фазу гармонічного коливання. Пояснення цього моменту, тобто його практичного значення, зробимо при аналізі властивостей сигналів з амплітудною модуляцією.

***10. Зв’язок перетворення Фур’є і коефіцієнтів ряду Фур’є.***

Нехай маємо сигнал скінченої довжини, - його спектральна функція. Побудуємо на основі періодичний сигнал, взявши період повторення Т не меншим довжини сигналу:



Запишемо формулу спектральної щільності (перетворення Фур’є):

 (\*)

Якщо ряд Фур’є заданий у комплексній формі, тобто , то його коефіцієнт знаходимо згідно формули



Формула (\*), тобто є спектральною функцією одиничного неперіодичного імпульса, а формула (\*\*) є формулою для обчислення коефіцієнтів ряду Фур’є періодичної послідовності таких одиничних імпульсів з періодом Т. Якщо вважати, що для ряду Фур’є при t<0 і , то матимемо наступний зв’язок між : 

**Таблиця перетворень Фур’є**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**Тема. Обчислення спектрів заданих сигналів.**

1. Загальні поняття.
2. Спектральна щільність прямокутного імпульсу.
3. Несиметричний та симетричний трикутний імпульси.
4. Односторонній та двосторонній експоненціальні імпульси.
5. Фур’є – аналіз неінтезювних сигналів.
6. На попередній темі розглядалася побудова прямого і оберненого перетворень Фур’є неперіодичних сигналів. Якщо неперіодичний сигнал, тобто одиничний імпульс заданий функцією х(t), то його спектральна щільність знаходиться згідно з формули:

 (1)

яка називається прямим перетворенням Фур’є.

І відповідно, якщо відома спектральна щільність сигналу, то функція якої має задаватися знаходиться за формулою:



яка називається оберненим перетворенням Фур’є.

Тобто один і той же сигнал можемо представити двома незалежними (рівноправними) математичними моделями – функцією - у частотній області (спектральна щільність – пряме перетворення Фур’є) і функцією х(t) – у часовій області (обернене перетворення Фур’є).

Маючи спектральну щільність сигналу, заданного деякою функцією x(t) можемо вставити його спектр, тобто амплітудний і фазовий, причому:

* амплітудний спектр знаходимо згідно формули:



* фазовий спектр 

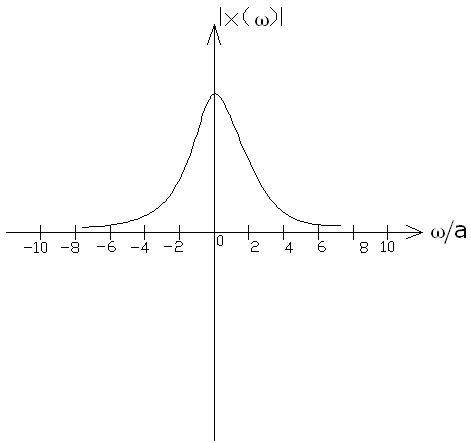
Розглянемо обчислення спектральних характеристик заданих сигналів, функції задання яких є інтезювні, та неінтезювних сигналів.

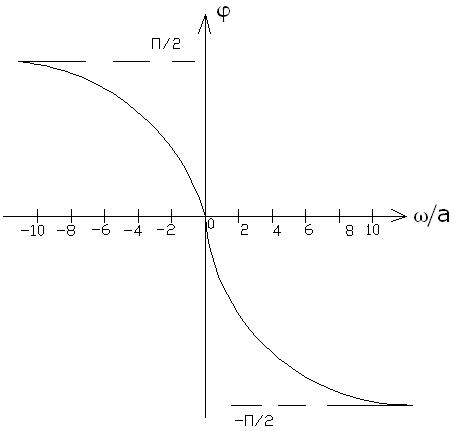
Тоді спектральні цільність цього сигналу знаходимо у вигляді



Тоді 

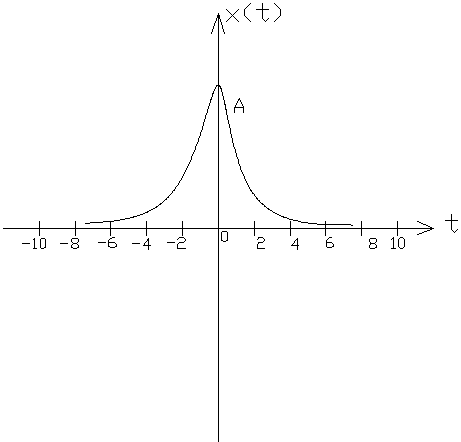






Двосторонній експоненціальний імпульс

В даному випадку маємо сигнал у вигляді одиничного імпульсу, який є симетричним. Графічно він має вигляд:



Аналітично цей сигнал задається функцією

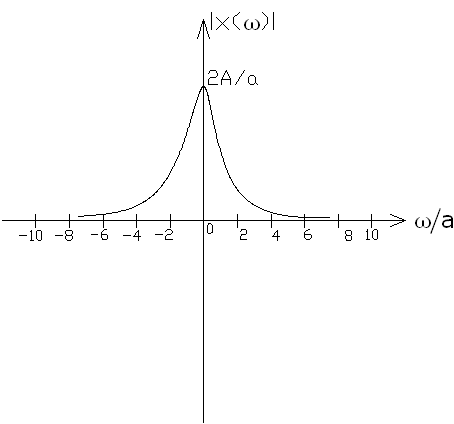


Тоді його спектр знаходимо у вигляді



Тоді 

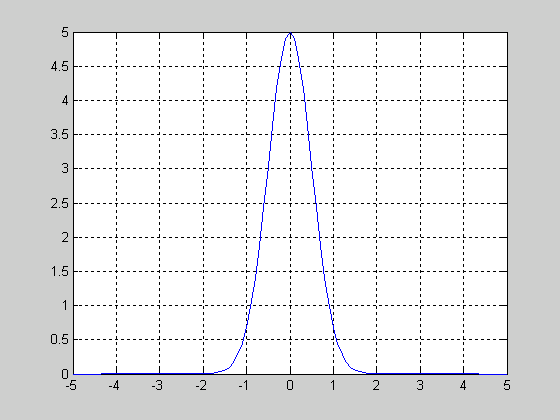
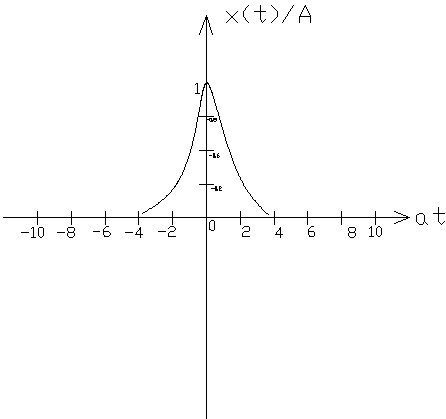
Графік амплітудний спектр відносно  буде



а фазового спектру буде нуль, оскільки 

Гаусів імпульс

Це є теж один з важливих сигналів, який має нескінченну протяжність в обох напрямах часової осі, тобто



Аналітично цей сигнал задається функцією

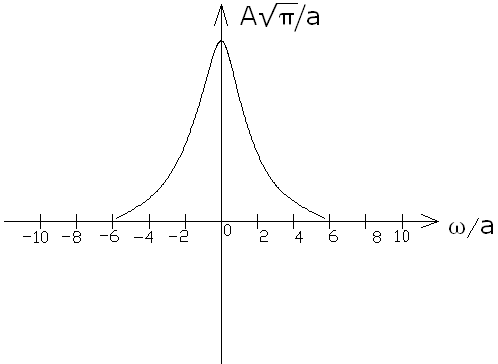


Крива Гауса має вигляд 

Знаходимо його спектр



Оскільки сигнал є парною функцією, то його спектр є чисто дійсним, тому будуємо тільки амплітудний спектр. Як бачимо із виразу знайденого спектра, то у функціональному вигляді він описується часовою функцією. Графік амплітудного спектру має вигляд



5. Фур’є – аналіз не інтегрованих сигналів.

Для застосування оператора Фур’є до заданого сигналу вимагається виконання певних умов, тобто, функція, яка задає сигнал має бути визначеною і неперервною науково-неперервною із скінченною множиною точок розриву 1 роду, а також абсолютно інтегрованою. Однак в багатьох випадках є потреба у знаходженні спектру сигналів, функції які їх задають не відповідають цим умовам.

До них відносяться сигнали, задані деякою функцію, постійним у часі сигналом, функцією одиничного скачка (Хевісаіда), гармонічний сигнал, сигнал, заданий через комплексну експоненту.

Розглянемо знаходження спектральної щільності для цих сигналів.

1. Дельта функція: 

, бо дельта має фільтруючу властивість (говорилося при розгляді класифікації сигналів) і



Отже, спектр дельта функції є постійною величиною, тобто є рівномірним у нескінченній смузі частот.

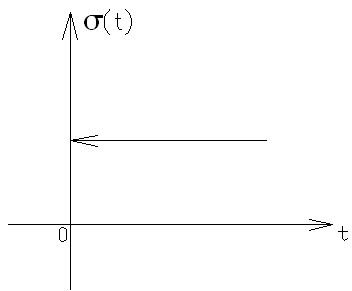
Очевидно, що обернене перетворення Фур’є для цього сигналу



2)Функція одиничного скачка

Сигнал заданий функцією одиничного скачка, тобто функцією Хевісаіда,







1. Гармонічний сигнал

Нехай маємо гармонічний сигнал



Встановимо спектральну щільність даного сигналу



2. Прямокутний імпульс. Розглянемо сигнал у вигляді прямокутного імпульсу, центрального відносно початку відліку часу, тобто сигналу, що задається функцією  Знаходимо його спектральну функцію, згідно формули (1) =,

0

|  |
| --- |
|  |
|  |
| S№: |
| S№: HA19HTALC05006 |
| S№: SN0640909930 |
| S№: |
| S№: |
| S№: Q640A488 |
| S№: |
| S№: 23780678 |
| S№: |





A

X(t)

або помноживши і поділивши отримане значення на , одержимо: (3).Як бачимо спектр представляє собою функцію вигляду sin. Знайдемо амплітуду та фазовий спектр сигналу  і очевидно дорівнює 0 при ;тобто .Оскільки спектральна функція є двійковою, то фазовий спектр приймає значення 0 і в залежності від знаку, бо.

Графіки цих спектрів мають вигляд Нехай маємо сигнал прямокутного імпульсу, але зміщеного у часі , тобто припустимо, що імпульс. що починається в нульовий момент часу.

0

X(t)

A



t

Тоді 

.

Амплітудний спектр буде таким же як і у попередньому вигляді, оскільки ,тобто,

а фазовий спектр .Як бачимо після зсуву імпульса у часі його амплітуди є незначною, а фазовий спектр має зсув, який лінійно залежить від частоти.

**Несиметричні та семитричні трикутні імпульси**

Розглянемо сигнал у вигляді несиметричного трикутного імпульсу, який задамо функцією: Знайдемо його спектральну щільність , згідно формули (1), тобто= ;;  

В даному випадку не маємо ? характеру амплітудного спектру.

Розглянемо симетричний трикутний імпульс, що задається функцією. Його графічний вигляд. Знаходимо його спектральну щільність 

**4. Односторонній і двосторонній спектральні сигнали. Гауссівський сигнал.**

Односторонний сигнал був уже розглянутий на попередніх лекціях. Тут ми мали сигнал, заданий функцією.

2. Прямокутний імпульс. Розглянемо сигнал у вигляді прямокутного імпульсу, центрального відносно початку відліку часу, тобто сигналу, що задається функцією  Знаходимо його спектральну функцію, згідно формули (1) =,

0

|  |
| --- |
|  |
|  |
| S№: |
| S№: HA19HTALC05006 |
| S№: SN0640909930 |
| S№: |
| S№: |
| S№: Q640A488 |
| S№: |
| S№: 23780678 |
| S№: |





A

X(t)

або помноживши і поділивши отримане значення на , одержимо: (3).Як бачимо спектр представляє собою функцію вигляду sin. Знайдемо амплітуду та фазовий спектр сигналу  і очевидно дорівнює 0 при ;тобто .Оскільки спектральна функція є двійковою, то фазовий спектр приймає значення 0 і в залежності від знаку, бо.

Графіки цих спектрів мають вигляд Нехай маємо сигнал прямокутного імпульсу, але зміщеного у часі , тобто припустимо, що імпульс. що починається в нульовий момент часу.

0

X(t)

A



t

Тоді 

.

Амплітудний спектр буде таким же як і у попередньому вигляді, оскільки ,тобто,

а фазовий спектр .Як бачимо після зсуву імпульса у часі його амплітуди є незначною, а фазовий спектр має зсув, який лінійно залежить від частоти.

**Несиметричні та семитричні трикутні імпульси**

Розглянемо сигнал у вигляді несиметричного трикутного імпульсу, який задамо функцією: Знайдемо його спектральну щільність , згідно формули (1), тобто= ;;  

В даному випадку не маємо ? характеру амплітудного спектру.

Розглянемо симетричний трикутний імпульс, що задається функцією. Його графічний вигляд. Знаходимо його спектральну щільність 

**4. Односторонній і двосторонній спектральні сигнали. Гауссівський сигнал.**

Односторонний сигнал був уже розглянутий на попередніх лекціях. Тут ми мали сигнал, заданий функцією.

Тут  є дійсною частиною спектральної щільності, а  – уявною.

Підставивши ці вирази у формулу оберненого перетворення Фур’є маємо:



.

Щоб сигнал був дійсною величиною, необхідно щоб уявна частина = 0, тобто

; .

А це можливо тоді, коли , тобто дійсна частина спектральної щільності була парною, а уявна  – непарною:

 і .

**3. Спектральна щільність сигналу зміщеного у часі (властивість зсуву, запізнення).**

Нехай для сигналу  відома спектральна щільність, тобто . розглянемо таки же сигнал, але який виникає на  одиниць часу пізніше. Приймають точку  за початок відліку часу і подавши цей зміщений сигнал у вигляді функції , то матимемо, що  (вивести це самим, зробивши заміну ).

**Зауваження:** Оскільки , то амплітуда, як бачимо на залежить від зміщення сигналу, тобто не залежить від його розміщення на осі часу. Ця інформація є суттєвою для частотної залежності аргументу його спектральної щільності (фазовому спектру).

**4. Залежність спектральної щільності від масштабу виміру часу (властивість масштабування).**

Перш ніж перейти до встановлення співвідношень між сигналом і його спектральною щільністю, розглянемо як змінюється графік тригонометричних функцій.

Нехай вихідний сигнал , підданий зміні масштабу часу, тобто зміщений масштаб часу у  раз рівно ( – дійсне число).

Розглянемо графіки:

================

Якщо , то маємо стиснення вихідного сигналу; якщо , то розтягування сигналу у часі.

Якщо для сигналу  його спектральна щільність , тобто , то в даному випадку

. (10) (довести самим)

Таким чином, для того щоб, наприклад стиснути сигнал у часі, зберігаючи його форму, необхідно розподілити між спектральні складові у більш широкому інтервалі частот при відповідному пропорціональному зменшенні їх амплітуд.

**5. Спектральна щільність похідної.**

Нехай маємо сигнал  і його спектральну щільність , тобто; , то .

Отже, диференціювання сигналу веде до росту значень спектральної щільності в області високих частот.

**Доведення.** Оскільки при , то  (інтегруючи по частинах) =  інтегруючи по частинах знаходимо, те що треба.

Або складніше, нехай , тобто , або візьмемо оператор з обох частин рівності, або  в .

Можемо записати узагальнену формулу на випадок спектра похідної n-го порядку, тобто

.

**Доведення.** Приймаємо, що .

При диференціюванні швидкість зміни сигналу у часі зростає, як наслідок модуль спектру похідної має важливе значення в області високих частот порівняно з модулем спектру вихідного сигналу.

Зобразимо це графіком:

==========

При диференціюванні проходить загострення сигналу.

**6. Спектральна щільність інтегралу.**

Нехай деякий сигнал задається функцією . Встановимо як знайдеться його щільність при інтегруванні при тому, що 

, або виходячи із формули диференціювання сигналу маємо:

, то 

 Множник  є оператором інтегрування в частотній області.

**7. Спектр згортки сигналів.**

Згортка сигналів є часто використовуваною у радіотехніці інтегральною операцією, оскільки вона опише, зокрема, проходження сигналу через лінійну систему з постійними параметрами. В даному випадку функція  задається у вигляді .

Візьмемо від неї оператор Фур’є, тобто

;

.

Якщо функція згідно якої заданий сигнал відповідає умові , при , то маємо однобічне перетворення Фур’є.

* пряме ;
* обернене 

Часто вводять однобічні косинус і синус перетворення Фур’є:

* пряме ;



* обернене ;



Функцію яка є зображенням перетворення Фур’є називають спектральною щільністю сигналу, заданого функцією , або просто спектральною щільністю функції .

Дамо математичне та фізичне обґрунтування перетворенню Фур’є, тобто виведемо формули (1), (2) та покажемо його фізичний зміст.

Нехай функція, яка задає одиничний неперіодичний імпульсний сигнал скінченої довжини.

Доповнимо його уявно такими же сигналами, які періодично проходять через деякий інтервал часу Т, внаслідок чого отримаємо періодичну послідовність, тобто функцію  з періодом Т, яка задає сигнал.

Очевидно 

Запишемо ряд Фур’є для сигналу, заданого функцією  у комплексній формі, тобто (3), де  (4).

Функціязадана на інтервалі одним імпульсом. Оскільки є межами цього інтервалу, то можемо записати (4) у вигляді (5).

Замінимо інтеграл у формулі (5) функцією (6) тоді запишемо, що .

Підставимо (7) у формулу (3) і одержимо (8). Розглянемо границю виразу (8) при . При цьому перетворюємо періодичну послідовність до одного, тобто , а гармоніки спектру будуть щільно займати всю частотну вісь, при цьому амплітуди прямують до нуля (стануть нескінченно малими), маємо , або враховуючи, що ....., і при, то (9). Позначивши  і враховуючи, що приріст частот при переході до сусідньої гармоніки можна ототожнити з диференціюванням  і вважаючи граничну суму відповідною інтегралу співвідношення (9) можна записати  тобто , формула (6) запишеться . Ми одержали формули (1) і (2).

Таким чином ми визначили, що один і той же сигнал представляється двома рівноправними математичними моделями – функцією у частотній області – пряме перетворення Фур’є і функцією у частотній області – обернене перетворення.

Отже, у процесі вивчення попередніх тем освоєно наступні моменти:

1. За допомогою ряду Фур’є можна періодичний сигнал розвинути на нескінченне число гармонік з частотами, які приймають дискретні значення, а також встановити спектральну та фазову характеристики сигналу.
2. Інтегральне перетворення Фур’є представляє спектральну щільність неперіодичного сигналу, тобто представляє неперіодичний сигнал у вигляді нескінченного числа гармонік, частоти яких нескінченно близькі.

Приклад: нехай маємо сигнал нескінченної довжини – односторонній експоненціальний відеоімпульс 



Тоді амплітудний і фазовий спектри цього сигналу відповідно рівні:

* амплітудний спектр -
* фазовий спектр - 

1. **Властивості спектральної щільності. (Властивості перетворення Фур’є).**

Перетворення Фур’є встановлює взаємозв’язок між представленням сигналів у часовій і частотних областях. При цьому бажано знати як зміниться представниця сигналу у частотній області, якщо сигнал підданий деякому перетворенню у часовій області і навпаки.

Знання властивостей спектральної щільності дозволяє передбачити наближений або іноді і точний вигляд спектру аналізованого сигналу і таким чином контролювати правдоподібність результату, який видається комп’ютером.

Розглянемо властивості спектральної щільності, тобто перетворення Фур’є:

1. Лінійність

Якщо функція, яка задає сигнал є лінійною комбінацією двох функцій, тобто  то спектр суми дорівнює сумі спектрів, тобто лінійна комбінація сигналів має спектр у вигляді такої лінійної комбінації їх спектральних функцій  (1), де 

1. Властивості дійсної та уявної частин спектральної щільності.

Нехай сигнал, що приймає дійсне значення. Його спектральна щільність у загальному вигляді є комплексною



Метод перетворення Лапласа полягає в тому, що тут вивченню підлягає не сама деяка функція *f(t),* яку називаємо оригіналом, а її видозміну, тобто зображення. Це зображення здійснюється за допомогою множення оригінала на деяку експоненціальну функцію і цей добуток інтегрується в межах від 0 до ∞.

**Означення.** Якщо функція *f(t)* задовольняє наступним умовам:

1. *f(t)* – однозначна і кусково-неперервна функція, (яка, взагалі кажучи, може приймати і комплексні значення);
2. *f(t)*=0 при t<0;
3. *f(t)* зростає не швидше експоненціальної функції, тобто існують такі дійсні постійні числа *μ>0* і **, що для всіх *t>0* виконується нерівність:

*,* ( число *р0* називається показником росту функції), то функція *f(t)* називається оригіналом.

Вираз , (1)

у якому *р=а+іb (а>p0)-* деяке комплексне число, називається перетворенням Лапласа, а інтеграл справа – інтегралом (оператором) Лапласа, якщо цей інтеграл є збіжним.

Отже перетворення Лапласа є інтегральним перетворенням, яке позначається символом  (2)

Приклад 1: Знайти зображення функції *f(t)=С-const.*

Розв’язок. Згідно формули (2) маємо:  Отже, для будь якої постійної функції її зображення має даний вигляд.

Приклад 2: Знайти зображення функцій *f(t)=еt,,* *f(t)=t2.*

Розв’язок.

Застосовуючи формулу (2), знаходимо:



Для обчислення інтегралу двічі використовувалося інтегрування по частинах:



## 2. Властивості перетворення Лапласа.

**1. *Лінійність.*** Якщо і  - числа, то **** тобто лінійній комбінації оригіналів відповідає така ж лінійна комбінація зображень.

**2. *Подібність (масштабування).*** Якщо , то  множення аргументу оригіналу на додатне число *а* приводить до ділення зображення та його аргументу на це число.

**3**. ***Зсув (згасання).*** Якщо , , то , тобто множення оригіналу на функцію  спричиняє зсув змінної .

**4.** ***Запізнення.*** Якщо  і , то  , тобто запізнювання оригіналу на додатну величину  приводить до множення зображення оригіналу без запізнювання на .

Пояснимо термін «запізнювання». Графіки функції  і  мають однаковий вигляд, але графік функції  зсунутий на  одиниць вправо (див. рис. 1, рис. 2). Отже, функції  і  описують той самий процес, але процес, описуваний функцією , починається з запізненням на час .



Рис. 1. Рис. 2.

Зауваження.

1. Зображення періодичного оригіналу з періодом, рівним Т, є 

2. Властивість випередження  застосовується значно рідше.

***5. Теореми диференціювання***

***Теорема диференціювання оригіналу*** Якщо і функції  є оригіналами, то





 (\*)



Зауваження. Наведені формули просто виглядять при нульових початкових умовах: якщо  то , якщо  то , і нарешті , якщо , то , тобто диференціюванню оригіналу відповідає множення його зображення на .

Розглянута властивість диференціювання оригіналу разом із властивістю лінійності широко використовується при розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь.

Приклад 1.Знайти зображення виразу  якщо 

Розв’язок.

Нехай  Тоді, відповідно до наведених формул (\*) маємо:

,

,

,

 . Отже,





Приклад 2.Згідно приведеної теореми (\*) знайти зображення функції 

Розв’язок.

Знаходимо 

Тоді згідно формули (\*) маємо:



оскільки то 

***Теорема диференціювання зображення*** Якщо  , то , ,  тобто диференціюванню зображення відповідає множення його оригіналу на .

Відповідно до наведеної теореми існування зображення,  є аналітичною функцією в півплощині . Отже, у неї існує похідна будь-якого порядку. Диференціюючи інтеграл по параметру  (обґрунтування законності цієї операції опускаємо), одержимо

, тобто

. Тоді ,  і взагалі 

Приклад:Знайти зображення функцій ,  

Розв’язок.

Так як  , то, в силу властивості диференціювання зображення, маємо , тобто . Далі знаходимо  Продовжуючи диференціювання, отримаємо  З урахуванням властивості зсуву отримаємо . Відповідно до формули, що . Отже, , тобто , або . Аналогічно, використовуючи формули, знаходимо    З урахуванням властивостей зсуву і отриманих формул, одержимо , 



***6. Теореми інтегрування***

***Інтегрування оригіналу*** Якщо  то , тобто інтегруванню оригіналу від 0 до  відповідає ділення його зображення на . Функція  є оригіналом (можна перевірити). Нехай . Тоді по властивості диференціювання оригіналу маємо  (так як ). А тому що  те  Звідси  тобто .



***Інтегрування зображення*** Якщо  і інтеграл  сходиться, то  тобто інтегруванню зображення від  до  відповідає діленню його оригіналу на .

Використовуючи формулу і змінюючи порядок інтегрування (підставу законності цієї операції упускаємо), отримаємо

.

Приклад: Знайти зображення функції ; знайти зображення  інтегрального синуса 

Розв’язок.

Так як , то , тобто . Застосовуючи властивість інтегрування оригіналу, отримаємо .

**Формули перетворень Лапласа для деяких функцій**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***№ п/п*** | ***Оригінал f(t)*** | ***Зображення F(p)*** |
| **1** | *С-const* |  |
| **2** | *exp(at)* |  |
| **3** |  |  |
| **4** | *sin(at)* |  |
| **5** | *cos(at)* |  |
| **6** | *sh(at)* |  |
| **7** | *ch(at)* |  |
| **8** | *exp(-at)sin(ωt)* |  |
| **9** | *exp(-at)cos(ωt)* |  |
| **10** | *exp(-at)sh(ωt)* |  |
| **11** | *exp(-at)ch(ωt)* |  |
| **12** | *exp(at)* |  |
| **13** | *f(t)* |  |
| **14** |  |  |
| **15** |  |  |
| **16** |  |  |
| **17** |  |  |
| **18** |  |  |
| **19** |  |  |
| **20** |  |  |
| **21** | *sh2(at)* |  |
| **22** | *ch2(at)* |  |
| **23** | *sin(ωt-φ0)* |  |
| **24** | *cos(ωt-φ0)* |  |

## 3. Обернене перетворення Лапласа.

**Загальні поняття.**

Прямим перетворення Лапласа деякої функції *f(t),* яка відповідає певним умовам, які вказані у попередній темі, полягає в тому, що за її оригіналом знаходимо її зображення *F(p),* тобто . Якщо потрібно розв’язати обернену задачу: за відомим зображенням *F(p)* знайти оригінал, тобто функцію *f(t),* то таку дію називають оберненим перетворенням Лапласа і позначають 

Отже, пряме перетворення дає зображення функції, а обернене перетворення – її оригінал.

Наприклад:  та інші.

Для знаходження оригіналу зображення потрібно вміти знаходити початкову функцію, зображенням якої є правильний раціональний дріб, тобто

. (1)

**ОСНОВИ ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ**

Вступ.

1. Витоки вейвлет-перетворень. Історична довідка. Перетворення Фур'є. Віконне перетворення Фур'є. Частотно-тимчасове віконне перетворення. Функції віконного спектрального аналізу. Принцип вейвлет-перетворень.

Вейвлетний спектр.

2. Основи вейвлет-перетворення. Незперервне вейвлет-перетворення. Поняття масштабу ВП. Процедура перетворення. Зворотне перетворення. Дискретне вейвлет-перетворення. Частотно-тимчасова локалізація вейвлет-анализа. Образне представлення перетворення. Достоїнства і недоліки вейвлетних перетворень. Практичне використання.

Вейвлетне перетворення сигналів є узагальненням спектрального аналізу, типовий представник якого – класичне перетворення Фур'є. Термін "вейвлет" (wavelet) в перекладі з англійського означає "маленька (коротка) хвиля". Вейвлети - це узагальнена назва сімейств математичних функцій певної форми, які локальні в часі і по частоті, і в яких всі функції виходять з однієї базової (що породжує) за допомогою її зрушень і розтягувань по осі часу. Вейвлет-перетворення розглядають аналізовані тимчасові функції в термінах коливань, локалізованих за часом і частотою. Як правило, вейвлет-перетворення (WT) підрозділяють на дискретне (DWT) і незперервне (CWT).

DWT використовується для перетворень і кодування сигналів, CWT - для аналізу сигналів. Вейвлет-перетворення в даний час приймаються на озброєння для величезного числа всіляких вживань, незрідка замінюючи звичайне перетворення Фур'є. Це спостерігається в багатьох областях, включаючи молекулярну динаміку, квантову механіку, астрофізику, геофізику, оптику, комп'ютерну графіку і обробку зображень, аналіз ДНК, дослідження білків, дослідження клімату, загальну обробку сигналів і розпізнавання мови.

Вейвлетний аналіз є особливим типом лінійного перетворення сигналів і фізичних даних. Базис власних функцій, по якому проводиться вейвлетне розкладання сигналів, володіє багатьма специфічними властивостями і можливостями. Вейвлетні функції базису дозволяють сконцентрувати увагу на тих або інших локальних особливостях аналізованих процесів, які не можуть бути виявлені за допомогою традиційних перетворень Фур'є і Лапласа. До таких процесів в геофізиці відносяться поля різних фізичних параметрів природних середовищ. В першу чергу це стосується полів температури, тиску, профілів сейсмічних трас і інших фізичних величин.

Вейвлети мають вигляд коротких хвилевих пакетів з нульовим середнім значенням, локалізованих по осі аргументів (незалежних змінних), інваріантних до зрушення і лінійних до операції масштабування (стиснення/розтягування). По локалізації в тимчасовому і частотному представленні вейвлети займають проміжне положення між гармонійними функціями, локалізованими по частоті, і функцією Дірака, локалізованою в часі.

Теорія вейвлетів не є фундаментальною фізичною теорією, але вона дає зручний і ефективний інструмент для вирішення багатьох практичних завдань. Основна сфера застосування вейвлетних перетворень – аналіз і обробка сигналів і функцій, нестаціонарних в часі або неоднорідних в просторі, коли результати аналізу повинні містити не лише частотну характеристику сигналу (розподіл енергії сигналу по частотних складових), але і відомості про локальні координати, на яких проявляють себе ті або інші групи частотних складових або на яких відбуваються швидкі зміни частотних складових сигналу. В порівнянні з розкладанням сигналів на ряди Фур'є вейвлети здатні з набагато вищою точністю представляти локальні особливості сигналів, аж до розривів 1-го роду (стрибків). На відміну від перетворень Фур'є, вейвлет-перетворення одновимірних сигналів забезпечує двовимірну розгортку, при цьому частота і координата розглядаються як незалежні змінні, що дає можливість аналізу сигналів відразу в двох просторах.

Одна з головних і особливо плідних ідей вейвлетного представлення сигналів на різних рівнях декомпозиції (розкладання) полягає в розділенні функцій наближення до сигналу на дві групи: що апроксимує - грубу, з досить повільною тимчасовою динамікою змін, і що деталізує - з локальною і швидкою динамікою змін на тлі плавної динаміки, з подальшим їх дробленням і деталізацією на інших рівнях декомпозиції сигналів. Це можливо як в тимчасовій, так і в частотній областях представлення сигналів вейвлетами.

**1.1. ВИТОКИ ВЕЙВЛЕТ - ПЕРЕТВОРЕННЯ**

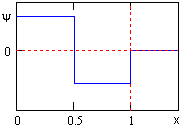
Історична довідка. Історія спектрального аналізу сходить до І. Бернуллі, Ейлера і Фур'є, який вперше побудував теорію розкладання функцій в тригонометричні ряди. Проте це розкладання довгий час застосовувалося як математичний прийом і не зв'язувалося з якими-небудь фізичними поняттями. Спектральні вистави застосовувалися і розвивалися порівняно вузьким кругом фізиків–теоретиків. Проте, починаючи з 20-х років минулого століття, у зв'язку з бурхливим розвитком радіотехніки і акустики, спектральні розкладання придбали фізичний сенс і практичне вживання. Основним засобом аналізу реальних фізичних процесів став гармонійний аналіз, а математичною основою аналізу - перетворення Фур'є. Перетворення Фур'є розкладає довільний процес на елементарні гармонійні коливання з різними частотами, а всі необхідні властивості і формули виражаються за допомогою однієї базисної функції exp(jωt) або двох дійсних функцій sin(ωt) і cos(ωt). Гармонійні коливання мають широке поширення в природі, і тому сенс перетворення Фур'є інтуїтивно зрозумілий незалежно від математичної аналітики.

Перетворення Фур'є володіє рядом чудових властивостей. Областю визначення перетворення є простір L2 інтегрованих з квадратом функцій, і багато фізичних процесів в природі можна вважати функціями, що належать цьому простору. Для вживання перетворення розроблені ефективні обчислювальні процедури типу швидкого перетворення Фур'є (ШПФ). Ці процедури входять до складу всіх пакетів прикладних математичних програм і реалізовані апаратний в процесорах обробки сигналів.

Було також встановлено, що функції можна розкласти не лише по синусах і косинусах, але і по інших ортогональних базисних системах, наприклад, поліномам Лежандра і Чебишева, функціям Лагера і Ерміта. Проте практичне вживання вони отримали лише в останні десятиліття ХХ століття завдяки розвитку обчислювальної техніки і методів синтезу цифрових лінійних систем обробки даних. Безпосередньо для цілей спектрального аналізу подібні ортогональні функції не знайшли широкого вживання із-за труднощів інтерпретації отримуваних результатів. По тих же причинах не отримали розвитку в спектральному аналізі функції типу "прямокутної хвилі" Уолша, Радемахера, і ін.

Теоретичні дослідження базисних систем привели до створення теорії узагальненого спектрального аналізу, яка дозволила оцінити межі практичного вживання спектрального аналізу Фур'є, створила методи і критерії синтезу ортогональних базисних систем. Ілюстрацією цього є те, що активно розвивається з початку 80-х років минулого століття теорія базисних функцій типу вейвлет. Завдяки прозорості фізичної інтерпретації результатів аналізу, схожої з "частотним" підходом в перетворенні Фур'є, ортогональний базис вейвлетів став популярним і ефективним засобом аналізу сигналів і зображень в акустиці, сейсміці, медицині і інших галузях науки і техніки.

Вейвлет-аналіз є різновидом спектрального аналізу, в якому роль простих коливань відіграють функції особливого роду, звані вейвлетами. Базисна функція вейвлет – це деяке "коротке" вагання, але не лише. Поняття частоти спектрального аналізу тут замінене масштабом, і, аби перекрити "короткими хвилями" всю тимчасову вісь, введено зміщення функцій в часі. Базис вейвлетів – це функції типа ψ((t-b)/a), де b - зрушення, а – масштаб. Функція ψ(t) повинна мати нульову площу і, ще краще, рівними нулю перший, другий і інші моменти. Фур'є-перетворення таких функцій дорівнює нулю при ω=0 і має вигляд смугового фільтру. При різних значеннях масштабного параметра 'a' це буде набір смугових фільтрів. Сімейства вейвлетов в тимчасовій або частотній області використовуються для представлення сигналів і функцій у вигляді суперпозицій вейвлетів на різних масштабних рівнях декомпозиції (розкладання) сигналів.



Мал. 1.1.1.

Перша згадка про подібні функції (які вейвлетами не називалися) з'явилася в роботах Хаару (Haar) ще на початку минулого століття. Вейвлет Хаару - це коротке прямокутне вагання на інтервалі [0,1], показане на мал. 1.1.1. Проте він цікавий більше теоретично, оскільки не є функцією, що безперервно диференціюється, і має довгі "хвости" в частотній області. У 30-і роки фізик Paul Levy, досліджуючи броунівський рух, виявив, що базис Хаару кращий, ніж базис Фур'є, личить для вивчення деталей броунівського руху.

Сам термін "вейвлет", як поняття, ввели в своїй статті J. Morlet і A. Grossman, опублікованою в 1984 р. Вони займалися дослідженнями сейсмічних сигналів за допомогою базису, який і назвали вейвлетом. Ваговитий вклад до теорії вейвлетів внесли Гуппілауд, Гроссман і Морлет, що сформулювали основи CWT, Інгрід Добеші, що розробила ортогональні вейвлеті (1988), Наталі Делпрат, що створила частотну для часу інтерпретацію CWT (1991), і багато інших. Математична формалізація в роботах Mallat і Meyer привела до створення теоретичних основ вейвлет-анализі, названого мультирозв’язним (кратномасштабним) аналізом.

В даний час спеціальні пакети розширень по вейвлетах присутні в основних системах комп'ютерної математики (Matlab, Mathematica, Mathcad, і ін.), а вейвлет-перетворення і вейвлетний аналіз використовуються в багатьох галузях науки і техніки для самих різних завдань. Багато дослідників називають вейвлет-аналіз "математичним мікроскопом" для точного вивчення внутрішнього складу і структур неоднорідних сигналів і функцій.

Не слід розглядати вейвлет-методи обробки і аналізу сигналів як нову універсальну технологію вирішення будь-яких завдань. Можливості вейвлетів ще не розкриті повністю, проте це не означає, що їх розвиток приведе до повної заміни традиційних засобів обробки і аналізу інформації, добре відпрацьованих і перевірених часом. Вейвлети дозволяють розширити інструментальну базу інформаційних технологій обробки даних.

Перетворення Фур'є (ПФ). В основі спектрального аналізу сигналів лежить інтегральне перетворення і ряди Фур'є. Нагадаємо деякі математичні визначення.

У просторі функцій, заданих на кінцевому інтервалі (0,T), норма, як числова характеристика довільної функції s(t), обчислюється як корінь квадратний із скалярного добутку функцій. Для комплексних функцій, квадрат норми (енергія сигналу) відповідає виразу:

||s(t)||2 = [s(t), s(t)] = (1.1.1)

де s\*(t) – функція, комплексно спряжена з s(t).

Якщо норма функції має кінцеве значення (інтеграл збігається), то говорять, що функція належить простору функцій L2[R], R=[0,T], інтегрованих з квадратом (простір Гільберта), і має кінцеву енергію. У просторі Гільберта на основі сукупності ортогональних функцій з нульовим скалярним добутком

[v(t), w(t)] = 

може бути створена система ортонормованих "осей" (базис простору), при цьому будь-який сигнал, що належить цьому простору, може бути представлений у вигляді вагової суми проекцій сигналу на ці "осі" – базисних векторів. Значення проекцій визначаються скалярними творами сигналу з відповідними функціями базисних "осей".

Базис простору може бути утворений будь-якою ортогональною системою функцій. Найбільше вживання в спектральному аналізі отримала система комплексних експоненціальних функцій. Проекції сигналу на даний базис визначаються вираженням:

Sn = (1/T) s(t) exp(-jn??t) dt, n ( (-?, ?), (1.1.2)

де ??=2?/T – частотний аргумент векторів. При відомих виразах базисних функцій сигнал s(t) однозначно визначається сукупністю коефіцієнтів Sn і може бути абсолютне точно відновлений (реконструйований) по цих коефіцієнтах:

s(t)= Sn exp(jn??t). (1.1.3)

Рівняння (1.1.2) і (1.1.3) називають прямим і зворотним перетворенням Фур'є сигналу s(t). Будь-яка функція гильбертова простору може бути представлена у вигляді комплексного ряду Фур'є (1.1.3), який називають спектром сигналу або його Фур'є-чином.

Ряд Фур'є обмежується певною кількістю членів N, що означає апроксимацію з певною погрішністю безконечномірного сигналу N – мірною системою базисних функцій спектру сигналу. Ряд Фур'є рівномірно сходиться до s(t):

||s(t) - Sn exp(jn??t)|| = 0. (1.1.4)

Таким чином, ряд Фур'є - це розкладання сигналу s(t) по базису простору L2(0,T) ортонормованих гармонійних функцій exp(jn??t) із зміною частоти, кратною частоті першої гармоніки ?1=??. Звідси витікає, що ортонормований базис простору L2(0,T) побудований з однієї функції exp(j??t)= cos(??t)+j·sin(??t) за допомогою масштабного перетворення незалежної змінної.

Для коефіцієнтів ряду Фур'є справедлива рівність Парсеваля збереження енергії сигналу в різних виставах:

(1/T) |s(t)|2 dt = |Sn|2. (1.1.5)

Розкладання в ряд Фур'є довільній функції в(t) коректно, якщо функція в(t) належить цьому ж простору L2(0,T), тобто квадратично інтегрована з кінцевою енергією:

|в(t)|2 dt < (, t ( (0,T), (1.1.6)

при цьому вона може бути періодично розширена і визначена на всій тимчасовій осі простору R(-(, () так, що

в(t)= в(t-T), t ( R

за умови збереження кінцівки енергії в просторі R(-(, ().

З позицій аналізу довільних сигналів і функцій в частотної області і точного відновлення після перетворень можна відзначити ряд недоліків розкладання сигналів в ряди Фур'є, які привели до появи віконного перетворення Фур'є і стимулювали розвиток вейвлетного перетворення. Основні з них:

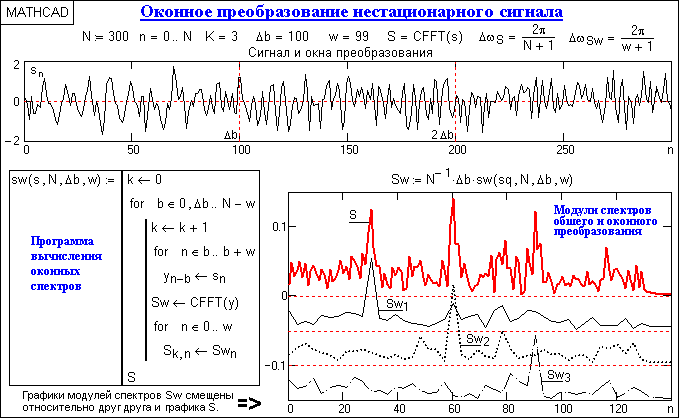
* Обмежена інформативність аналізу нестаціонарних сигналів і практично повна відсутність можливостей аналізу їх особливостей (сингулярностей), оскільки в частотної області відбувається «розмазання» особливостей сигналів (розривів, сходинок, піків і тому подібне) по всьому частотному діапазону спектру.
* Гармонійні базисні функції розкладання не здатні відображувати перепади сигналів з безконечною крутістю типа прямокутних імпульсів, оскільки для цього потрібне нескінченно велике число членів ряду. При обмеженні числа членів ряду Фур'є в околицях стрибків і розривів при відновленні сигналу виникають осциляції (явище Гіббса).
* Перетворення Фур'є відображує глобальні відомості про частоти досліджуваного сигналу і не дає уявлення про локальні властивості сигналу при швидких тимчасових змінах його спектрального складу. Так, наприклад, перетворення Фур'є не розрізняє стаціонарний сигнал з сумою двох синусоїд від нестаціонарного сигналу з двома послідовно наступними синусоїдами з тими ж частотами, оскільки спектральні коефіцієнти (1.1.2) обчислюються інтеграцією по всьому інтервалу завдання сигналу. Перетворення Фур'є не має можливості аналізувати частотні характеристики сигналу в довільні моменти часу.

Віконне перетворення Фур'є. Частковим виходом з цієї ситуації є віконне перетворення Фур'є з рухомою по сигналу віконною функцією, що має компактний носій. Часовий інтервал сигналу розділяється на підінтервали і перетворення виконується послідовно для кожного підінтервалу окремо. Тим самим здійснюється перехід до частотно-тимчасового (частотно-координатному) представлення сигналів, при цьому в межах кожного підінтервалу сигнал "вважається" стаціонарним. Результатом віконного перетворення є сімейство спектрів, яким відображується зміна спектру сигналу по інтервалах зрушення вікна перетворення. Це дозволяє виділяти на координатній осі і аналізувати особливості нестаціонарних сигналів. Розмір носія віконної функції w(t) зазвичай встановлюється сумірним з інтервалом стаціонарності сигналу. По суті, таким перетворенням один нелокалізований базис розбивається на певну кількість базисів, локалізованих в межах функції w(t), що дозволяє представляти результат перетворення у вигляді функції два змінних - частоти і тимчасового положення вікна.

Віконне перетворення виконується відповідно до вираження:

S(?,bk)= s(t) w\*(t-bk) exp(-j?t) dt. (1.1.7)

Функція w\*(t-b) є функцією вікна зрушення перетворення по координаті t, де параметром b задаються фіксовані значення зрушення. При зрушенні вікон з рівномірним кроком значення bk приймаються рівними до?b. Як вікно перетворення може використовуватися як просте прямокутне вікно, так і спеціальні вагові вікна (Бартлетта, Гауса, і ін.), що забезпечують малі спотворення спектру при вирізці віконних відрізань сигналів (нейтралізація явища Гіббса).



Мал. 1.1.2.

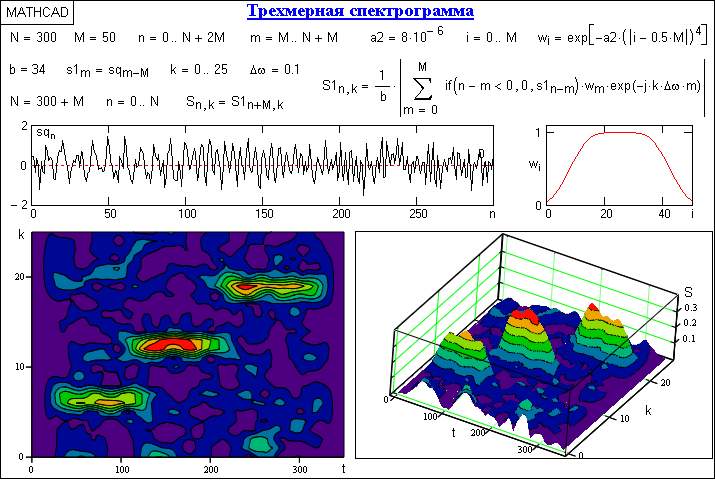
Приклад віконного перетворення для нестаціонарного сигналу на великому рівні шуму наведений на мал. 1.1.2. По спектру сигналу можна судити про наявність в його складі гармонійних коливань на трьох частотах, визначати співвідношення між амплітудами цих коливань і конкретизувати локальність коливань по інтервалу сигналу.

Координатна роздільна здатність віконного перетворення визначається шириною віконної функції і назад пропорційна частотній роздільній здатності. При ширині віконної функції, рівною b, частотна роздільна здатність визначається значенням ?? = 2?/b. При необхідній величині частотного дозволу ?? відповідно ширина віконної функції має бути рівна b = 2?/??. Для віконного перетворення Фур'є ці обмеження є принциповими. Так, для мал. 1.1.2 при розмірі масиву даних N = 300 і ширині віконної функції ?b = 100 частотна роздільна здатність результатів перетворення зменшується в N/?b = 3 рази в порівнянні з вихідними даними, і графіки Sw(n??Sw) по координаті n для наочного зіставлення з графіком S(n??S?? побудовані з кроком по частоті ??Sw = 3??S, тобто по точках n = 0, 3, 6, ., N.

Частотно-тимчасове віконне перетворення застосовується для аналізу нестаціонарних сигналів, якщо їх частотний склад змінюється в часі. Функція віконного перетворення (1.1.7) може бути переведена в двомірний варіант з незалежними змінними і за часом, і по частоті:

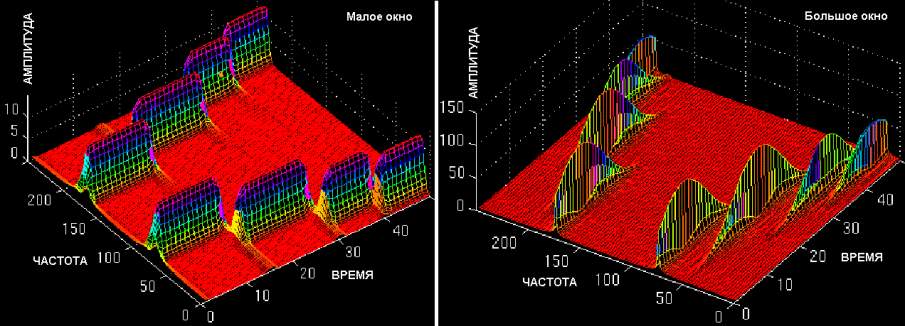
S(t?)= s(t-?) w(?) exp(-j??) d?. (1.1.8)

На мал. 1.1.3 наведений приклад обчислення і представлення (модуль правої частини головного діапазону спектру) частотно-тимчасової спектрограми при дискретному завданні вхідного сигналу sq(n). Сигнал є сумою трьох послідовних радіоімпульсів з різними частотами без пауз, з відношенням сигнал/шум, близьким до 1. Віконна функція wi задана з ефективною шириною вікна b ( 34 і повним розміром М =50. Встановлений для результатів крок по частоті ?? = 0.1 декілька вище за фактичну роздільну здатність 2?/M = 0.126. Для забезпечення роботи віконної функції по всьому інтервалу сигналу задавалися початкові і кінцеві умови обчислень (продовження обох кінців сигналу нульовими значеннями на M крапок).



Мал. 1.1.3.

Як видно за результатами обчислень, віконне перетворення дозволяє виділити інформативні особливості сигналу і за часом, і по частоті. Роздільна здатність локалізації визначається принципом невизначеності Гейзенберга, який свідчить, що неможливо отримати довільно точне частотно-тимчасове представлення сигналу. Чим вже вікно, тим краще тимчасовий дозвіл, але гірше частотне, і навпаки.

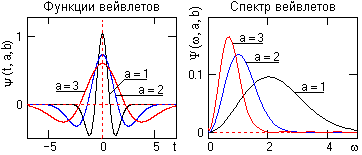
Мал. 1.1.4.

На мал. 1.1.4 наведений приклад частотно-тимчасового віконного перетворення сигналу, що складається з 4-х інтервалів, що не перетинаються, в кожному з яких сума двох гармонік різної частоти. Як вікно застосована функція гауса різної ширини. Вузьке вікно забезпечує кращий тимчасовий дозвіл і чітку фіксацію кордонів інтервалів, але широкі списи частот в межах інтервалів. Широке вікно навпроти – чітко відзначає частоти інтервалів, але з перекриттям кордонів тимчасових інтервалів. При вирішенні практичних завдань доводиться вибирати вікно для аналізу всього сигналу, тоді як різні його ділянки можуть вимагати вживання різних вікон. Якщо сигнал складається з далеко віддалених один від одного частотних компонент, то можна пожертвувати спектральним вирішенням на користь тимчасового, і навпаки.

Функції віконного спектрального аналізу в Mathcad знаходяться в пакеті Signal Processing. Вони дозволяють розбивати сигнал на піддіапазони (з перекриттям або без перекриття) і виконувати наступні операції:

* cspectrum(x,n,r[,w]) – розрахунок крос-спектру сигналу х;
* pspectrum(x,n,r[,w]) – розрахунок розподілу спектральної потужності сигналу;
* coherence(x,y,n,r[,w]) – розрахунок когерентності сигналів х і в;
* snr(x,y,n,r[,w]) – розрахунок відношення сигнал/шум для векторів х і в.

Тут: х і в – речові або комплексні масиви даних (вектори), n – число піддіапазонів розбиття вхідного сигналу х (від 1 до N – розміру масиву), до – чинник перекриття піддіапазонів (від 0 до 1), w - код вікна (1- прямокутне, 2- трапеції, 3- трикутне, 4- вікна Хеннінга, 5- вікна Хеммінга, 6- вікна Блекмана).



Мал. 1.1.5.

Принцип вейвлет-преобразования. Гармонійні базисні функції перетворення Фур'є гранично локалізовані в частотної області (до імпульсних функцій Дираку при Т ( () і не локалізовані в тимчасовій (визначені у всьому тимчасовому інтервалі від -( до (). Їх протилежністю є імпульсні базисні функції типа імпульсів Кронекера, які гранично локалізовані в тимчасової області і "розмиті" по всьому частотному діапазону. Вейвлети по локалізації в цих двох виставах можна розглядати як функції, що займають проміжне положення між гармонійними і імпульсними функціями. Вони мають бути локалізованими як в тимчасової, так і в частотної області вистави. Проте при проектуванні таких функцій ми неминуче зіткнемося з принципом невизначеності, що зв'язує ефективні значення тривалості функцій і ширини їх спектру. Чим точніше ми здійснюватимемо локалізацію тимчасового положення функції, тим ширше ставатиме її спектр, і навпаки, що наочно видно на мал. 1.1.5.

Відмітною особливістю вейвлет-анализа є те, що в нім можна використовувати сімейства функцій, що реалізовують різні варіанти співвідношення невизначеності. Відповідно, дослідник має можливість гнучкого вибору між ними і вживання тих вейвлетных функцій, які найефективніше вирішують поставлені завдання.

Вейвлетний базис простору L2(R), R(-(, (), доцільно конструювати з фінітних функцій, що належать цьому ж простору, які повинні прагнути до нуля на нескінченності. Чим швидше ці функції прагнуть до нуля, тим зручніше використовувати їх як базис перетворення при аналізі реальних сигналів. Допустимо, що такою функцією є psi - функція ??t?, рівна нулю за межами деякого кінцевого інтервалу і що має нульове середнє значення по інтервалу завдання. Останнє необхідне для завдання локалізації спектру вейвлета в частотної області. На основі цієї функції сконструюємо базис в просторі L2(R) за допомогою масштабних перетворень незалежної змінної.

Функція зміни частотній незалежній змінній в спектральному представленні сигналів відображується в тимчасовому представленні растяжением/сжатием сигналу. Для вейвлетного базису це можна виконати функцією типа ?(t) => ?(amt), а = const, m = 0, 1, ., M, тобто шляхом лінійної операції растяжения/сжатия, що забезпечує самоподобие функції на різних масштабах вистави. Проте локальність функції ?(t) на тимчасовій осі вимагає додаткової незалежної змінної послідовних зрушень функції ?(t) уздовж осі, типа ?(t) => ?(t+k), для перекриття всієї числової осі простору R(-(, (). C обліком обох умов одночасно структура базисної функції може бути прийнята наступною:



Для спрощення подальших викладень значення змінних m і до приймемо цілочисельними. При приведенні функції (1.1.10) до одиничної норми, отримуємо:



Якщо для сімейства функцій ?mk(t) виконується умова ортогональности:

〈

те сімейство ?mk(t) можна використовувати як ортонормований базис простори L2(R). Довільну функцію цього простору можна розкласти в ряд по базису ?mk(t):

s(t)= Smk ?mk(t), (1.1.13)

де коефіцієнти Smk – проекції сигналу на новий ортогональний базис функцій, як і в перетворенні Фур'є, визначаються скалярним твором

Smk = (s(t) ?mk(t)( = s(t)??mk(t) dt (1.1.14)

при цьому ряд рівномірно сходитися:

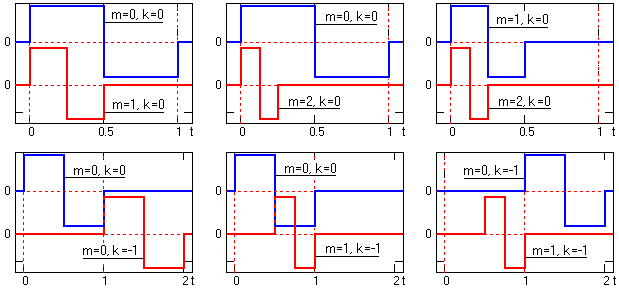
||s(t) – Smk ?mk(t),|| = 0.

При виконанні цих умов базисна функція перетворення ?(t) називається ортогональним вейвлетом.

Простим прикладом ортогональної системи функцій такого типа є функції Хаару. Базисна функція Хаару визначається співвідношенням

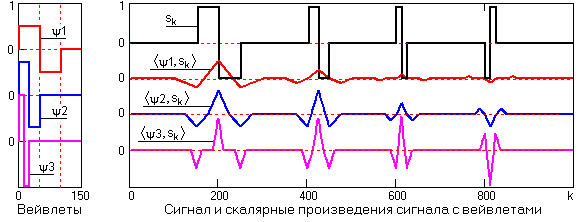


Легко перевірити, що при а = 2, m = 0, 1, 2, ..., до = 0, 1,2, . дві будь-які функції, отримані за допомогою цього базисного вейвлета шляхом масштабних перетворень і перенесень, мають одиничну норму і ортогональні. На мал. 1.1.6 наведені приклади функцій для перших трьох значень m і b при різних їх комбінаціях, де ортогональность функцій видно наочно.



Мал. 1.1.6. Функції Хаару.

Вейвлетний спектр, на відміну від перетворення Фур'є, є двовимірним і визначає двовимірну поверхню в просторі змінних m і до. При графічній виставі параметр растяжения/сжатия спектру m відкладається по осі абсцис, параметр локалізації до по осі ординат – осі незалежної змінної сигналу. Математику процесу вейвлетного розкладання сигналу в спрощеній формі розглянемо на прикладі розкладання сигналу s(t) вейвлетом Хаару з трьома послідовними за масштабом m вейвлетными функціями з параметром а=2, при цьому сам сигнал s(t) утворюємо підсумовуванням цих же вейвлетных функцій з однаковою амплітудою з різним зрушенням від нуля, як це показано на мал. 1.1.7.



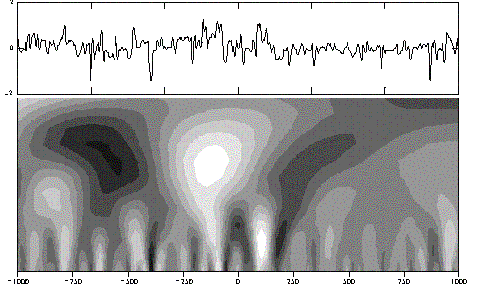
Мал. 1.1.7. Скалярні твори сигналу з вейвлетами.

Для початкового значення масштабного коефіцієнта стискування m визначається функція вейвлета (?1(t) на мал. 1.1.7), і обчислюється скалярний твір сигналу з вейвлетом (?1(t), s(t+k)( з аргументом по зрушенню до. Для наочності результати обчислення скалярних творів на мал. 1.1.7 побудовані по центрах вейвлетных функцій (тобто по аргументу до від нуля із зрушенням на половину довжини вейвлетной функції). Як і слід було чекати, максимальні значення скалярного твору наголошуються там, де локалізована ця ж вейвлетная функція.

Після побудови першого масштабного рядка розкладання, міняється масштаб вейвлетной функції (?2 на мал. 1.1.7) і виконується обчислення другого масштабного рядка спектру, і так далі

Як видно на мал. 1.1.7, чим точніше локальна особливість сигналу збігається з відповідною функцією вейвлета, тим ефективніше виділення цій особливості на відповідному масштабному рядку вейвлетного спектру. Можна бачити, що для сильно стислого вейвлета Хаару характерною локальною особливістю, що добре виділяється, є стрибок сигналу, причому виділяється не лише стрибок функції, але і напрям стрибка.

На мал. 1.1.8 наведений приклад графічного відображення вейвлетной поверхні реального фізичного процесу /4/. Вигляд поверхні визначає зміни в часі спектральних компонент різного масштабу і називається частотно-тимчасовим спектром. Поверхня зображається на малюнках, як правило, у вигляді ізоліній або умовними кольорами. Для розширення діапазону масштабів може застосовуватися логарифмічна шкала.

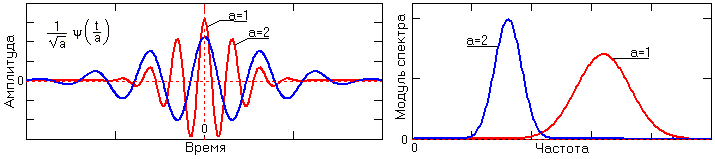


Мал. 1.1.8. Приклад вейвлетного перетворення.

**1.2. ОСНОВИ ВЕЙВЛЕТ - ПЕРЕТВОРЕННЯ /1, 3, 7, 9, 11/.**

У основі вейвлет-преобразований, в загальному випадку, лежить використання двох безперервних, взаємозалежних і інтегрованих по незалежній змінній функцій:

* Вейвлет-функции ((t), як psi-функции часу з нульовим значенням інтеграла і частотним фурье-образом ((?). Цією функцією, яку зазвичай і називають вейвлетом, виділяються локальні особливості сигналу. Як вейвлетов зазвичай вибираються функції, добре локалізовані і в тимчасової, і в частотної області. Приклад тимчасового і частотного образу функції наведений на мал. 1.2.1.
* Масштабуючій функції ?(t), як тимчасовій скейлинг-функции phi з одиничним значенням інтеграла, якою виконується грубе наближення (апроксимація) сигналу.



Мал. 1.2.1. Вейвлетниє функції в двох масштабах.

Phi-функции властиві не всім, а, як правило, лише ортогональним вейвлетам. Вони необхідні для перетворення нецентрованих і досить протяжних сигналів при роздільному аналізі низькочастотних і високочастотних складових. Роль і використання phi-функции розглянемо декілька пізніше.

Незперервне вейвлет-преобразование (НВП, CWT- Continious Wavelet Transform). Допустимо, що ми маємо функції s(t) з кінцевою енергією в просторі L2(R), визначені по всій дійсній осі R(-(, (). Для фінітних сигналів з кінцевою енергією середні значення сигналів повинні прагнути до нуля на ±(.

Безперервним вейвлет-преобразованием (або вейвлетным чином) функції s(t)( L2(R) називають функцію два змінних:

З(а,b)= (s(t) ?(а,b,t)( = s(t)??(а,b,t) dt, а, b ( R, а ? 0. (1.2.1)

де вейвлеты ?(а,b,t) ( ?ab(t) – масштабовані і зрушені копії вейвлета, що породжує ?(t) ( L2(R), сукупність яких створює базис простору L2(R).

Функціями, що породжують, можуть бути самі різні функції з компактним носієм - обмежені за часом і місцю розташування на тимчасовій осі, і що мають спектральний образ, локалізований на частотній осі. Базис простору L2(R) доцільно конструювати з однієї функції, що породжує, норма якої має дорівнювати 1. Для перекриття функцією вейвлета всієї тимчасової осі простору використовується операція зрушення (зсуви по тимчасовій осі): ?(b,t) = ?(t-b), де значення b для НВП є величиною безперервною. Для перекриття всього частотного діапазону простору L2(R) використовується операція тимчасового масштабування вейвлета з безперервною зміною незалежній змінній: ?(а,t) = |а|-1/2?(t/а). На мал. 1.2.1. видно, що якщо часовий образ вейвлета розширюватиметься (зміною значення параметра 'а'), то його "середня частота" знижуватиметься, а частотний образ (частотна локалізація) переміщатися на нижчі частоти. Таким чином, шляхом зрушення по незалежній змінній (t-b) вейвлет має можливість переміщатися по всій числовій осі довільного сигналу, а шляхом зміни масштабній змінній 'а' (у фіксованій точці (t-b) осі) "переглядати" частотний спектр сигналу по певному інтервалу околиць цієї крапки.

З використанням цих операцій вейвлетный базис функціонального простору утворюється шляхом масштабних перетворень і зрушень вейвлета, що породжує??(t):



Неважко переконатися, що норми вейвлетов ?(а,b,t) дорівнюють нормі ?(t), що забезпечує множник нормування |а|-1/2. При нормуванні до 1 вейвлета, що породжує ?(t) все сімейство вейвлетов також буде нормованим. Якщо при цьому виконується вимога ортогональности функцій, то функції ?(а,b,t) утворюють ортонормований базис простору L2(R).

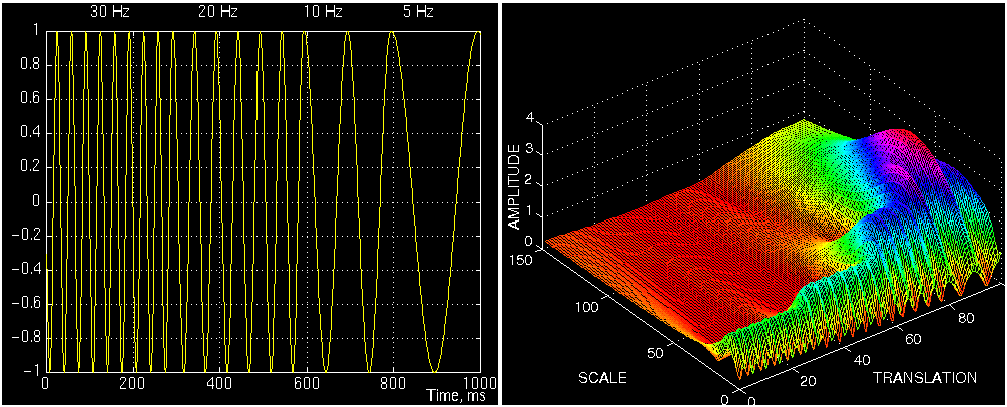
Поняття масштабу ВП має аналогію з масштабом географічних карт. Великі значення масштабу відповідають глобальному представленню сигналу, а низькі значення масштабу дозволяють розрізнити деталі. В термінах частоти низькі частоти відповідають глобальній інформації про сигнал, а високі частоти - детальній інформації і особливостям, які мають малу протяжність, тобто масштаб вейвлета, як одиниця шкали частотно-тимчасового представлення сигналів, зворотний частоті. Масштабування, як математична операція, розширює або стискує сигнал. Великі значення масштабів відповідають розширенням сигналу, а малі значення - стислим версіям. У визначенні вейвлета коефіцієнт масштабу а стоїть в знаменнику. Відповідно, а > 1 розширює сигнал, а < 1 стискує його.

Процедура перетворення стартує з масштабу а=1 і продовжується при значеннях, що збільшуються, а, тобто аналіз починається з високих частот і проводиться у бік низьких частот. Перше значення 'а' відповідає найбільш стислому вейвлету. При збільшенні значення 'а' вейвлет розширюється. Вейвлет поміщається в початок сигналу (t=0), перемножується з сигналом, інтегрується на інтервалі свого завдання і нормалізується на 1/ . Результат обчислення З(а,b) поміщається в точку (a=1, b=0) масштабно-тимчасового спектру перетворення. Зрушення b може розглядатися як час з моменту t=0, при цьому координатна вісь b повторює тимчасову вісь сигналу. Для повного включення в обробку всіх точок вхідного сигналу потрібне завдання початкових і кінцевих умов перетворення (певних значень вхідного сигналу при t<0 і t>tmax на напівширину вікна вейвлета). При однобічному завданні вейвлетов результат відноситься, як правило, до тимчасового положення середньої точки вікна вейвлета.

Потім вейвлет масштабу а=1 зрушується управо на значення b і процедура повторюється. Набуваємо значення, відповідне t=b в рядку а=1 на частотно-тимчасовому плані. Процедура повторюється до тих пір, поки вейвлет не досягне кінця сигналу. Таким чином отримуємо рядок крапок на масштабно-тимчасовому плані для масштабу а=1.

Для обчислення наступного масштабного рядка значення а збільшується на деяке значення. При НВП в аналітичній формі ?b(0 і ?a(0. При виконанні перетворення в комп'ютері виконується збільшення обох параметрів з певним кроком. Тим самим здійснюється дискретизація масштабно-тимчасової площини.

Початкове значення масштабного коефіцієнта може бути і менше 1. Для деталізації найвищих частот сигналу мінімальних розмір вікна вейвлета не повинен перевищувати періоду самої високочастотної гармоніки. Якщо в сигналі присутні спектральні компоненты, відповідні поточному значенню а, те інтеграл твору вейвлета з сигналом в інтервалі, де ця спектральна компонента присутній, дає відносно велике значення. Інакше - твір малий або дорівнює нулю, оскільки середнє значення вейвлетной функції дорівнює нулю. Із збільшенням масштабу (ширина вікна) вейвлета перетворення виділяє усе більш низькі частоти.



Мал. 1.2.2.

На мал. 1.2.2 наведений приклад модельного сигналу і спектру його безперервного вейвлет-преобразования.

Значення параметрів 'а' і 'b' в (1.2.2) є безперервними, і безліч базисних функцій є надлишковою. Сигналу, визначеному на R, відповідає вейвлетный спектр R ? R. Звідси витікає, що вейвлетный спектр НПВ має величезну надмірність.

Зворотне перетворення. Оскільки форма базисних функцій ?(а,b,t) зафіксована, то вся інформація про сигнал в (1.2.1) переноситься на значення функції З(а,b). Точність зворотного інтегрального вейвлет-преобразования залежить від вибору базисного вейвлета і способу побудови базису, тобто від значень базисних параметрів а, b. Строго теоретично вейвлет може вважатися базисною функцією L2(R) лише в разі його ортонормированности. Для практичних цілей безперервного перетворення часто буває сповна достатня стійкість і "приблизність" ортогональности системи розкладання функцій. Під стійкістю розуміється досить точна реконструкція довільних сигналів. Для ортонормованих вейвлетов зворотне вейвлет-преобразование записується за допомогою того ж базису, що і пряме:

s(t)= (1/C?) (1/a2) З(а,b)?(а,b,t) da db. (1.2.3)

де C? - нормалізуючий коефіцієнт:

C? = (|?(?)|2 /?) d? < (. (1.2.4)

Умова кінцівки C? обмежує клас функцій, які можна використовувати як вейвлетов. Зокрема, при ?=0, для забезпечення збіжності інтеграла (1.2.4) в нулі, значення ?(?) має дорівнювати нулю. Це забезпечує умову компактності фурье-образа вейвлета з локалізацією довкола деякої частоти ?o – середньої частоти вейвлетной функції. Отже, функція ?(t) повинна мати нульове середнє значення по області його визначення (інтеграл функції по аргументу має бути нульовим):

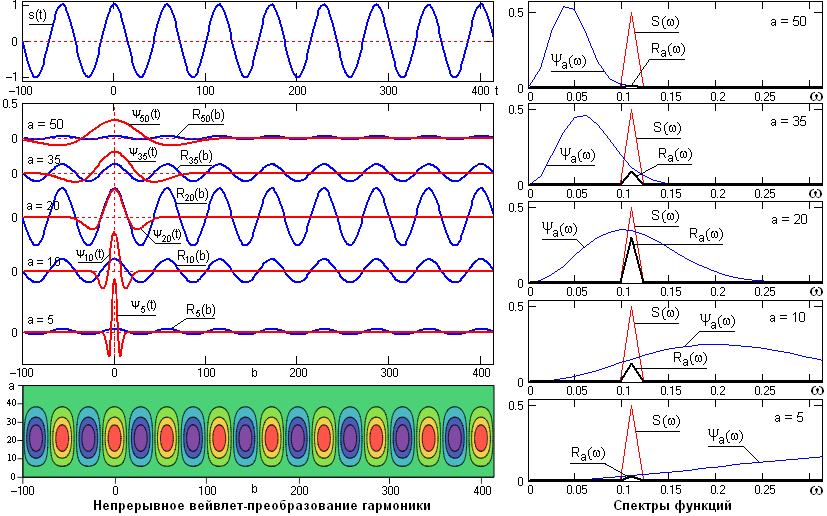


Проте це означає, що не для всіх сигналів можлива їх точна реконструкція вейвлетом ?(t), оскільки при нульовому першому моменті вейвлета коефіцієнт передачі постійної складової сигналу в перетворенні (1.2.3) дорівнює нулю. Умови точної реконструкції сигналів будуть розглянуті при описі кратномасштабного аналізу.

Крім того, навіть при виконанні умови (1.2.4) далеко не всі типи вейвлетов можуть гарантувати реконструкцію сигналів, як таку. Проте і такі вейвлеты можуть бути корисні для аналізу особливостей сигналів, як додаткового методу до інших методів аналізу і обробки даних. У загальному випадку, за відсутності строгої ортогональности вейвлетной функції (1.2.1), для зворотного перетворення застосовується вираження:

s(t)= (1/C?) (1/a2) З(а,b)?#(а,b,t) da db (1.2.3')

де індексом ?#(а,b,t) позначений ортогональний "двійник" базису ?(а,b,t), про яке буде викладено нижче.



Мал. 1.2.3.

Таким чином, безперервне вейвлет-преобразование є розкладанням сигналу по всіх можливих зрушеннях і сжатиям/растяжениям деякої локалізованої фінітної функції - вейвлета. При цьому змінна 'a' визначає масштаб вейвлета і еквівалентна частоті в перетвореннях Фур'є, а змінна 'b' – зрушення вейвлета по сигналу від початкової точки в області його визначення, шкала якого повторює тимчасову шкалу аналізованого сигналу. Вейвлетний аналіз є частотно-просторовим аналізом сигналів.

Як приклад розглянемо вейвлет-преобразование чистого гармонійного сигналу s(t), приведеного на мал. 1.2.3. На цьому ж малюнку нижче приведені вейвлеты ?a(t) симетричного типа різних масштабів.

Скалярний твір (1.2.1) "перегляду" сигналу вейвлетом певного масштабу 'a' може бути записаний в наступній формі:

Ca(b)= (s(t) ?a(t+b)( = s(t)??a(t+b) dt. (1.2.5)

Але вираження (1.2.5) еквівалентне взаємній кореляційній функції Ra(b) сигналів s(t) і ?а(t). Якщо сигнал s(t) є гармонікою, а другий сигнал симетричний, заданий на компактному носієві і має нульове середнє значення, то, як відомо, форма взаємної кореляційної функції таких сигналів також є центрованим гармонійним сигналом. У частотної області скалярний твір двох функцій відображується твором Фур'є-образів цих функцій, які приведені на малюнку в правому стовпці спектрів. Масштаби спектрів ?a(?) і Ra(?) для наочності зіставлення нормовані до спектру s(t). Максимальна амплітуда гармоніки Rа(b) спостерігатиметься при збігу середньої частоти локалізації вейвлета ?а(t) певного масштабу 'а' в частотної області з частотою сигналу s(t), що і можна бачити на мал. 1.2.3 для функції Ra(b) при масштабі вейвлета a=20. Результуючий вейвлетный спектр безперервного вейвлет-преобразования гармоніки приведений на лівому нижньому графіку і показує точне положення на тимчасовій осі 'b' максимумів і мінімумів гармонійного сигналу.

Дискретне вейвлет-преобразование. В принципі, при обробці даних на ПК може виконуватися версія безперервного вейвлет-преобразования, що дискретизує, із завданням дискретних значень параметрів (а, b) вейвлетов з довільним кроком ?a і ?b. В результаті виходить надлишкова кількість коефіцієнтів, що набагато перевершує число відліків вихідного сигналу, яке не потрібне для реконструкції сигналів.

Дискретне вейвлет-преобразование (ДВП) забезпечує досить інформації, як для аналізу сигналу, так і для його синтезу, будучи в той же час економним по числу операцій і по необхідній пам'яті. ДВП оперує з дискретними значеннями параметрів а і b, які задаються, як правило, у вигляді статечних функцій:

а = ао-m, b = k·ао-m, ao > 1, m, до ( I,

де I – простір цілих чисел {-(, (}, m – параметр масштабу, до – параметр зрушення. Базис простору L2(R) в дискретній виставі:



Вейвлет-коэффициенты прямого перетворення:

Cmk = s(t)??mk(t) dt. (1.2.7)

Значення 'a' може бути довільним, але зазвичай приймається рівним 2, при цьому перетворення називається диадным вейвлет-преобразованием. Для диадного перетворення розроблений швидкий алгоритм обчислень, аналогічний швидкому перетворенню Фур'є, що зумовило його широке використання при аналізі масивів цифрових даних.

Зворотне дискретне перетворення для безперервних сигналів при нормованому ортогональному вейвлетном базисі простору:

s(t)= Cmk??mk(t). (1.2.8)

Число використаних вейвлетов по масштабному коефіцієнту m задає рівень декомпозиції сигналу, при цьому за нульовий рівень (m = 0) зазвичай береться рівень максимального тимчасового дозволу сигналу, тобто сам сигнал, а подальші рівні (m < 0) утворюють спадаюче вейвлет-дерево. У програмному забезпеченні обчислень для виключення використання негативної нумерації по m знак 'мінус' зазвичай переноситься безпосередньо в (1.2.6), тобто використовується наступне представлення базисних функцій:



Стійкість дискретного базису визначається таким чином.

Функція ?(t)( L2(R) називається R-функцией, якщо базис на її основі по (1.2.6) є базисом Рісса (Riesz). Для базису Рісса існують значення А і В, 0 < A ? B < (, для яких виконується співвідношення

A||Cmk||2 ? || Cmk??mk(t)||2 ? B||Cmk||2

якщо енергія ряду Cmk кінцева. При цьому для будь-якої R-функции існує базис ?#mk(t), який ортогональний базису ?mk(t). Його називають ортогональним "двійником" базису ?mk(t), таким, що

〈

Якщо A = B = 1 і ао = 2, те сімейство базисних функцій {?mk(t)} є ортонормованим базисом і можливе повне відновлення вихідного сигналу, при цьому ?mk(t) ? ?#mk(t) і для реконструкції сигналів використовується формула (1.2.8). Якщо ?(t) не ортогональний вейвлет, але має "двійника", то на базі "двійника" обчислюється сімейство ?#mk(t), яке і використовується при зворотному перетворенні замість ?mk(t), при цьому точне відновлення вихідного сигналу не гарантоване, але воно буде близьке до нього в среднеквадратическом сенсі.

Як і для безперервного вейвлет-преобразования, зворотне дискретне перетворення (1.2.8) не може виконати відновлення нецентрованих сигналів через нульовий перший момент вейвлетных функцій і, відповідно, центрування значення вейвлет-коэффициентов Cmk при прямому вейвлет-преобразовании. Тому при обробці числових масивів даних дискретні вейвлеты використовуються, як правило, в парі з пов'язаними з ними дискретними скейлинг-функциями. Скейлин-функции мають з вейвлетами загальну область завдання і певне співвідношення між значеннями, але перший момент скейлин-функций по області визначення дорівнює 1. Якщо вейвлеты розглядати, як аналоги смугових фільтрів сигналу, в основному, високочастотних при виділенні локальних особливостей в сигналі, то скейлин-функции вейвлетов є аналоги низькочастотних фільтрів, якими з сигналу виділяються в окремий масив складові, не прошедшие вейвлетную фільтрацію. Скейлинг-функция вейвлета Хаару (1.1.15), що так, наприклад, породжує, задається наступним вираженням:



При позначенні скейлинг-функций індексом ?mk(t) аналітика скейлин-функций повторює вирази (1.2.6-1.2.7) і утворює додатковий базис простору L2(R). Сума вейвлет-коэффициентов і скейлинг-коэффициентов розкладання сигналів відповідно дає можливість виконувати точну реконструкцію сигналів, при цьому замість (1.2.8) використовується наступне вираження зворотного вейвлет-преобразования:

s(t)= Сак ?k(t) + Сdmk??mk(t), (1.2.9)

де Cak – скейлин-коэффициенты, які зазвичай називають коефіцієнтами апроксимації сигналу, Cdmk – вейвлет-коэффициенты або коефіцієнти деталізації. Детальніше використання скейлинг-функций буде розглянуто в темі вейвлетного кратномасштабного аналізу.

Частотно-тимчасова локалізація вейвлет-анализа. Реальні сигнали, як правило, кінцеві і належать простору L2(R). Частотний спектр сигналів назад пропорційний їх тривалості. Відповідно, досить точний низькочастотний аналіз сигналу повинен вироблятися на великих інтервалах його завдання, а високочастотний – на малих. Якщо частотний склад сигналу зазнає істотні зміни на інтервалі його завдання, то перетворення Фур'є дає лише усереднені дані частотного складу сигналу з постійним частотним дозволом. Певна частотно-тимчасова локалізація аналізу створюється вживанням віконного перетворення Фур'є, що дає сімейства частотних спектрів, локалізованих в часі, але в межах постійної ширини вікна віконної функції, а, отже, також з постійним значенням і частотного, і тимчасового дозволу.

На відміну від віконного перетворення Фур'є, вейвлет-преобразование, при аналогічних дискретних значеннях зрушень b, дає сімейства спектрів масштабних коефіцієнтів а стискування-розтягування

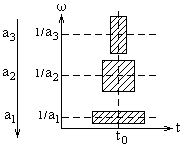
З(а,b)= s(t)?|а|-1/2?о[(t-b)/а]dt.

Якщо вважати, що кожен вейвлет має певну "ширину" свого тимчасового вікна, якому відповідає певна "середня" частота спектрального образу вейвлета, зворотна його масштабному коефіцієнту а, те сімейства масштабних коефіцієнтів вейвлет-преобразования можна вважати аналогічними сімействам частотних спектрів віконного перетворення Фур'є, але з однією принциповою відмінністю. Масштабні коефіцієнти змінюють "ширину" вейвлетов і, відповідно, "середню" частоту їх фурье-образов, а, отже, кожній частоті відповідає своя тривалість тимчасового вікна аналізу, і навпаки. Так малі значення параметра а, характеризуючі швидкі складові в сигналах, відповідають високим частотам, а великі значення – низьким частотам. За рахунок зміни масштабу вейвлеты здатні виявляти відмінності на різних частотах, а за рахунок зрушення (параметр b) проаналізувати властивості сигналу в різних крапках на всьому досліджуваному тимчасовому інтервалі. Багаторозмірне тимчасове вікно вейвлет-преобразования адаптоване для оптимального виявлення і низькочастотних, і високочастотних характеристики сигналів.

Для довільної віконної функції z(t)( L2(R) її центр і радіус визначаються формулами:

to = t |z(t)|2 dt

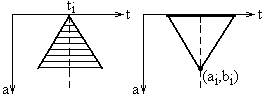




Мал. 1.2.4.

Якщо по цих функціях визначити центри і радіуси вейвлетов і їх фурье-образов, то тимчасова локалізація відбувається з центрами вікон b+ato шириною wint = 2a???t???а частотна – з центрами ?о/а, і з шириною вікна win? = 2???????/а. При цьому значення відношення центральної частоти до ширини вікна не залежить від місця розташування центральної частоти. Частотно-тимчасове вікно wint·win? = 4???t????????сужается при високій центральній частоті, і розширюється при низькій. Схематичне зображення частотно-тимчасових вікон перетворення приведене на мал. 1.2.4. Таким чином, на високих частотах краще дозвіл за часом, а на низьких - по частоті. Для високочастотної компоненты сигналу ми можемо точніше вказати її тимчасову позицію, а для низькочастотної - її значення частоти.

Зміна частотно-тимчасового вікна вейвлета визначає кут впливу значень функції в довільних точках ti на значення коефіцієнтів З(а,b). І навпаки, кут впливу з крапки З(ai,bi) на вісь t визначає інтервал значень функції, які беруть участь в обчисленні даного коефіцієнта З(ai,bi), – область достовірності. Схематично це показано на мал. 1.2.5.



Мал. 1.2.5.

По куту впливу наочно видно, що високочастотна (дрібномасштабна) інформація обчислюється на основі малих інтервалів сигналів, а низькочастотна – на основі великих. Оскільки аналізовані сигнали завжди кінцеві, то при обчисленні коефіцієнтів на кордонах завдання сигналу область достовірності виходить за межі сигналу, і для зменшення погрішності обчислень сигнал доповнюється завданням початкових і кінцевих умов.

Образне представлення перетворення. Уявимо собі довгу і вузьку скляну скриню, довільно заповнену кулями трьох різних діаметрів: 5, 10 і 15 див. Поглянемо на скриню збоку, і лінію висоти насипання вважатимемо значенням сигналу залежно від відстані від одного з торців скрині (умовно – нульового).

Візьмемо перший "вейвлет" – ідеальне диференціальне сито з діаметром отворів d=5 см, через яке проходят лише п'ятисантиметрові кулі (аналог значення ao). Пересуваючись уздовж скрині, "просіюватимемо" через це сито кулі в скрині, не перемішуючи їх по відстані від нульового торця скрині і розміщуючи кулі, що відсіваються, в такій же скрині, зберігаючи відстань від початку скрині. Змінимо масштаб "вейвлета" і повторимо цю операцію ситом з діаметром отворів 10, а потім 15 див. Якщо всі три скрині мати в своєму розпорядженні радом, ми отримаємо двовимірну "поверхню" насипання відсіяних куль, яке наочно покаже розподіл куль в скрині і по розмірах, і по їх концентрації в різних ділянках скрині.

Дана модель розкладання є досить грубою, але інтуїтивно зрозуміло, що зворотна збірка куль в скриню із збереженням їх місця розташування з певною точністю відновить висоту насипання. Заміните кулі короткими фрагментами електронних сигналів довільною, але однієї і тієї форми в межах діаметру куль, наприклад такими, як ((t) на рис.1.2.1, складете всі значення сигналів по поточних значеннях t, і Ви отримаєте складний сумарний сигнал. Використовуючи пряме вейвлет-преобразование з вейвлетами цих же складових, Ви можете розкласти сумарний сигнал (і будь-який інший довільний сигнал) на складові в масштабно-тимчасовій площині. Заміните масштабну вісь ширини вейвлетов на зворотну їй частотну вісь, і Ви представите результати в частотно-тимчасовій площині. Відмітимо лише, що точність, показність і інформативність результатів аналізу багато в чому залежатимуть як від форми і особливостей аналізованого сигналу, так і від форми вибраних вами вейвлетов і параметрів масштабування і зрушення. Це визначається тим, що диференціальне сито в прикладі з кулями – ідеальна операція розділення, тоді як при вейвлет-преобразовании "ідентифікація" складових виконується по скалярному твору сигналу і функції вейвлета. Скалярний твір в принципі не може давати однозначної відповіді типа "так-ні", а лише "наносить" на масштабно-тимчасову площину певні значення величини скалярного твору. З одного боку, вибір типа вейвлета вносить певну суб'єктивність дослідника до методики дослідження сигналів, але, з іншого боку, дає дослідникові нові можливості і свободу в пошуку найбільш ефективних і оптимальних методів обробки сигналів і витягання з них необхідної інформації.

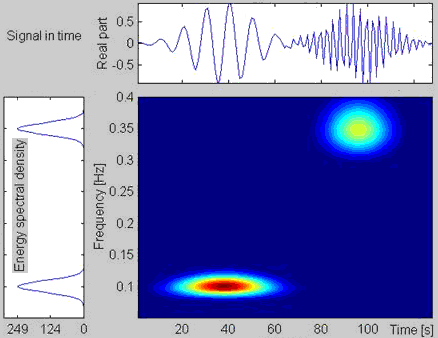
***Переваги і недоліки вейвлетних перетворень.***

* Вейвлетниє перетворення володіють всіма зручностями перетворень Фур'є.
* Вейвлетні базиси можуть бути добре локалізованими як по частоті, так і за часом. При виділенні в сигналах добре локалізованих різномасштабних процесів можна розглядати лише ті масштабні рівні розкладання, які представляють інтерес.
* Вейвлетні базиси, на відміну від перетворення Фур'є, мають багато всіляких базових функцій, властивості яких орієнтовані на вирішення різних завдань. Базисні вейвлети можуть реалізуватися функціями різної гладкості.
* Недоліком вейвлетних перетворень є їх відносна складність.

Практичне використання вейвлет-перетворень зв'язане, в основному, з дискретними вейвлетами як через повсюдне використання цифрових методів обробки даних, так і через ряд відмінностей дискретного і перервного вейвлет-перетворення.

Безперервні вейвлеты дають декілька наочніше представлення результатів аналізу у вигляді поверхонь вейвлет-коэффициентов по безперервних змінних. На мал. 1.2.6 аналізований сигнал складається з двох модульованих гауссианов. Перетворення вейвлетом Морлета чітко показує їх просторову і частотну локалізацію, тоді як спектр Фур'є дає лише частотну локалізацію.

Проте базиси на основі безперервних вейвлетов, як правило, не є строго ортонормованими, оскільки елементи базису нескінченно дифференцируемы і експоненціально спадають на нескінченності. В дискретних вейвлетов ці проблеми легко знімаються, що забезпечує точнішу реконструкцію сигналів.

Мал. 1.2.6.

Вибір конкретного вигляду і типа вейвлетов багато в чому залежить від аналізованих сигналів і завдань аналізу, при цьому чималу роль грає інтуїція і досвід дослідника. Для здобуття оптимальних алгоритмів перетворення розроблені певні критерії, але їх ще не можна вважати остаточними, оскільки вони є внутрішніми по відношенню до самих алгоритмів перетворення і, як правило, не враховують зовнішніх критеріїв, пов'язаних з сигналами і цілями їх перетворень. Звідси витікає, що при практичному використанні вейвлетов необхідно приділяти достатню увагу перевірці їх працездатності і ефективності для поставлених цілей в порівнянні з відомими методами обробки і аналізу.

**ФУНКЦІЇ ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕНЬ У MATLAB-і**

**Вступ**

Пакет розширення Wavelet Toolbox системи Matlab дозволяє використовувати вейвлетный аналіз і перетворення даних в самих різних галузях науки і техніки.

Програмне забезпечення пакету дозволяє виконувати вейвлет-преобразования як в командному режимі (і готувати спеціалізовані програми), так і в діалоговому режимі по інтерфейсу GUI (включення командою ''wavemenu'' або з вікна редактора, Wavelet Toolbox ( Main Menu).

Пакет має демонстраційні приклади вейвлетных перетворень, вікно яких включаються командою 'wavedemo'. Першою кнопкою вікна (Command line mode) включається досить обширне меню прикладів роботи в командному режимі з одно- і двовимірними вейвлетами всіх типів в звичайному і в пакетного виконання (безперервні і дискретні вейвлет-преобразования з декомпозицією і реконструкцією сигналів, стискування сигналів, очищення від шумів і ін.). Слайди прикладів супроводяться відповідними лістингами програмних фрагментів, які можна переносити в буфер (при натисненні клавіш Shift + Delete) і потім використовувати в командному рядку Matlab.

Аналогічно другою і третьою кнопками включається доступ до демонстраційних прикладів в інтерфейсі GUI.

При вивченні справжньої теми рекомендується самостійно переглядати відповідні демонстраційні приклади по ходу викладу матеріалу.

**НЕПЕРЕРВНЕ ОДНОВИМІРНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ .**

Основні функції. Незперервне одновимірне вейвлет-перетворення (НВП-1D) вже само по собі, без реконструкції сигналів, використовується для аналізу форми сигналів і виявлення їх локальних особливостей. Перетворення виконується функцією cwt в наступних форматах:

? C = cwt(S, SCALES, 'wname') – повертає коефіцієнти 'c' прямого НВП речового або комплексного сигналу S вейвлетом 'wname' в шкалі масштабування SCALES. Стандартне завдання SCALES = почало : крок : кінець (по значеннях коефіцієнта масштабування "a").

? C = cwt(S, SCALES, 'wname', 'plot') – те ж, плюс будує графік коефіцієнтів.

? C = cwt(S, SCALES, 'wname', plotmode) – те ж, із завданням для побудови графіка коефіцієнтів наступних налаштувань кольору plotmode:

* 'lvl' – забарвлення крок за кроком
* 'glb' – забарвлення з врахуванням всіх коефіцієнтів
* 'abslvl' або 'lvlabs' – забарвлення крок за кроком з використанням абсолютних значень коефіцієнтів
* 'absglb' або 'glbabs' - забарвлення з масштабуванням і з використанням абсолютних значень коефіцієнтів.

? C = cwt(S,SCALES,'wname', plotmode, xlim) – те ж, з додатковим налаштуванням кольору xlim = [xmin, xmax], де значеннями в квадратних дужках встановлюються номери точок векторів коефіцієнтів З (значення зрушення bmin і bmax), по інтервалу яких визначаються значення Cmin і Cmax інтервалу зміни колірного забарвлення.

♣ Приклад безперервного вейвлет-преобразования синусоїди двома типами вейвлетов і з двома видами забарвлення результатів (мал. 5.1.1).

t=linspace(-3,3,2048); s=sin(t).^17; subplot(331); plot(t,s);

subplot(334); [psi,X] = mexihat(-4,4,100); plot(X,psi);

subplot(337); [p1,psi,p2,p3,X] = wavefun('bior1.5',8); plot(X,psi);

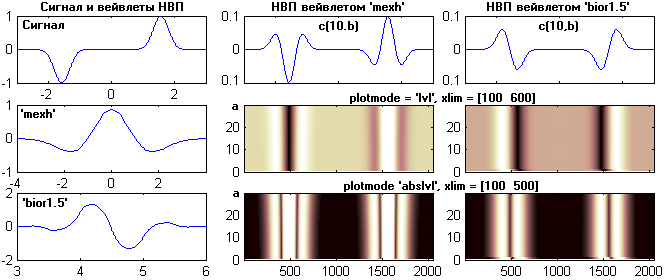
subplot(335); c1=cwt(s,1:32, 'mexh','lvl'[100 600]);

subplot(336); c2=cwt(s,1:32, 'bior1.5','lvl'[100 600]);

subplot(338);c1=cwt(s,1:32, 'mexh','abslvl'[100 400]);

subplot(339);c2=cwt(s,1:32, 'bior1.5','abslvl'[100 400]);

subplot(332); plot(t,c1(10,:)); subplot(333); plot(t,c2(10,:));



Ріс.5.1.1.

Як видно на малюнку, симетричність або несиметрична (непарність) функції вейвлета істотно впливає на форму вейвлет-спектра, так само як і тип зафарбовування, що дозволяє цілеспрямовано виявляти особливості локальних сигналів, наприклад – точки перегинів сигнальних функцій, які наголошуються вертикальними смугами з вейвлетом 'mtxh' при plotmode=abslvl.

♣ Приклад НВП гамма-каротажної кривої (мал. 5.1.2).

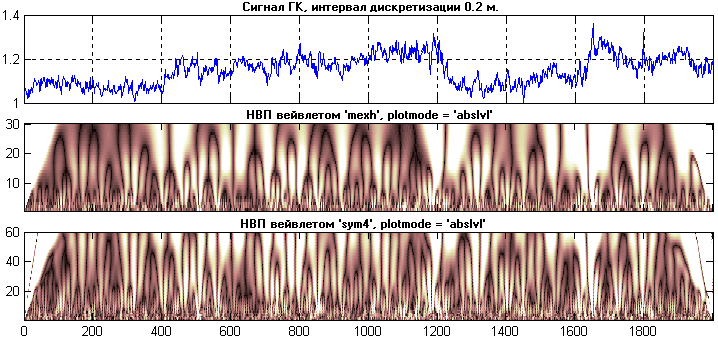
A=dlmread('c:\MATLAB6p1\work\Zag3f.prn'', ',120);

xn=1; xk=2000; xd=xk-xn; GK=A([xn:xk],5); da=1; dk=32;

subplot(311); plot(GK); grid; axis([0,xd,1,5]);

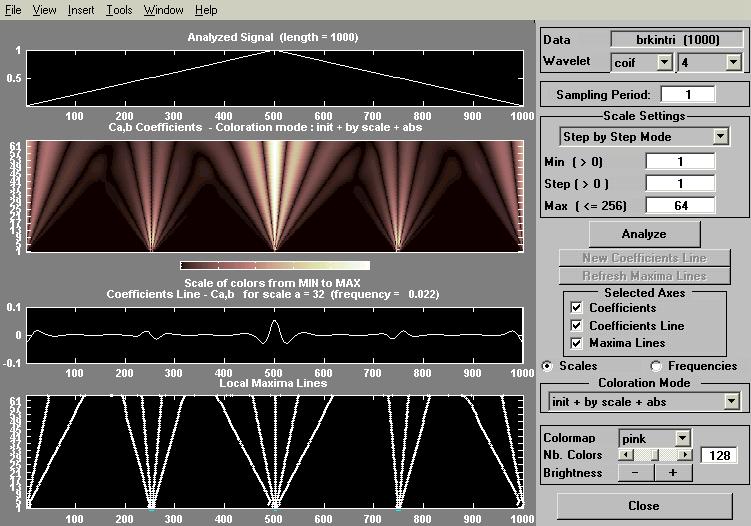
subplot(312); c1=cwt(GK,1:da:dk, 'mexh','abslvl'[100 400]);

subplot(313); c1=cwt(GK,1:da:dk, 'sym4','abslvl'[100 400]);



Ріс.5.1.2.

На мал. 5.1.2 приведені вейвлет-спектры гамма-каротажної кривої. Через природу ядерних випромінювань діаграми ГК завжди сильно ускладнені статистичними флюктуациями, на тлі яких досить важкий виділяти кордони пластів гірських порід з різною гамма-активністю. На вейвлет-спектрах з plotmode=abslvl ці кордони фіксуються по перегинах функцій ГК вертикальними смугами мінімумів (темні колірні смуги), що дозволяє по масштабних перетинах середнього і верхнього рівня деталізувати сигнальну функцію на локальні блоки.



Мал. 5.1.3.

Інтерфейс GUI зручний для аналізу даних в діалоговому режимі. На мал. 5.1.3 приведено вікно, яке включається з 'Wavelet Toolbox Main Menu' кнопкою 'Continuous Wavelet 1-D'. Демонстраційні сигнали завантажуються у вікно з меню File ( Example Analysis, встановлюється тип вейвлета, параметри аналізу і натискується кнопка 'Analyze', після чого в графічній частині вікна з'являється сигнал і результати його розкладання в трьох виставах (повне, перетин по середньому рівню розкладання і лінії локальних максимумів). Графічну виставу можна змінювати нижче розташованими кнопками і перемикачами, а також використовуючи типові можливості віконного меню. Коефіцієнти розкладання можна записати на диск у вигляді mat-файла (File ( Save Coefficients) і вважати потім в робочу область Matlab для детального вивчення.

При виконанні безперервного розкладання комплексними вейвлетами в 'Wavelet Toolbox Main Menu' використовується кнопка 'Complex Continuous Wavelet 1-D'.

При обробці даних, записаних в інших (не .mat) форматах, слід спочатку перевести дані в mat-формат, що можна виконати з основного вікна Matlab (Файл ( Імпорт даних), або з вікна команд. При обробці одновимірних сигналів друге переважно, оскільки одночасно дає можливість підготувати для GUI однорядкові векторні масиви. Нижче наведений приклад прочитування каротажних геофизичних даних з файлу las-формата, заздалегідь перейменованого в prn-формат для використання функції dlmread, і перекладу стовпців 1 і 5 ліченого масиву (сітка глибин і діаграма ГК) в строкові вектори з подальшим записом у файли mat-формата.

fprn='c:\MATLAB6p1\work\MainData\Заг3\Zag3f.prn';

fn=72; A=dlmread(fprn', ',fn); rows=size(A,1); cols=size(A,2);

xn=1; xk=rows; Zag3f\_9\_2473=A(xn:xk,1:5);

DEPT=A(xn:xk,1); GK=A(xn:xk,5);

save 'c:\MATLAB6p1\work\MainData\Заг3\gk3f.mat' GK;

save 'c:\MATLAB6p1\work\MainData\Заг3\dept3f.mat' DEPT;

Запис файлів в mat-формате може виконуватися і безпосередньо з вікна робочої області (клік правою кнопкою миші на вибраному для запису масиві ( "зберегти вибране як...).

**§2. Дискретні перетворення**

# Список рекомендованої літератури:

**Основна**

1. Арамович И. Г. та ін. Функции комплексного переменного. Операционное ичисление. Теорія устойчивости. – М.: Наука, 1968.– 280 с.

2. Василенко І. П. та ін. Вища математика. Основні означення, приклади і задачі.Ч.2. – К.: Либідь, 1992. – 186 с.

3. Кострубій П. П. та ін. Елементи теорії функції комплексної змінної. Перетворення Фур’є і Лапласа. Збірник задач і вправ. – Львів: В-во Львівської політехніки, 2011. – 200 с.

4. Руданський Ю. К. та ін. Теорія функції комплексної змінної. Інтегральні перетворення Фур’є і Лапласа.– Львів: В-во Львівської політехніки, 2011. – 245 с.

5. Стадник М. М., Хом’якевич М. О. Елементи теорії функції комплекснї змінної та операційне числення. – Київ – Львів: НМЦВО, 2000. – 146 с.

**Додаткова**

1. Думанський О. І. Операційне числення. Конспект лекцій. – Львів: Електронний варіант, 2011. - 104 с.

2. Думанський О. І., Гайвась І. В., Млинко О. І. Операційне числення. Навчальний практикум. – Електронний варіант, 2010. – 46 с.

3. Думанський О. І. Завдань до лабораторних робіт з дисципліни «Операційне числення». – Електронний варіант, 2011. – 72 с.

4. Данко П. Е., Попов А. Р., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. ІІ і ІІІ. – М.: Наука, 1980. – 254 с.

5. Мартиненко В. С. Операционное исчисление. – К.: В – во Київського університету, 1965. – 104 с.

6. Шелковников Ф. А., Тайкашвили К. Г. Сборник упражнений по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1976.

7. Половко А. М., Бутусов П. Н. Matlab для студента. – Санкт-Петербург: «БХВ-Петербург», 2005.

8. Солонина А. И., Арбузов С. М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в Matlab. - Санкт-Петербург: «БХВ-Петербург», 2008.

# Зміст

[Розділ І. Елементи теорії функцій комплексної змінної. 4](#_Toc350036939)

[1. Комплексні числа та дії над ними. 4](#_Toc350036940)

[Загальні поняття 4](#_Toc350036941)

[2. Функції комплексної змінної 10](#_Toc350036942)

[Загальні поняття 10](#_Toc350036943)

[Елементарні функції комплексної змінної. 11](#_Toc350036944)

[3. Диференційованість функцій. Умови Коші-Рімана. 13](#_Toc350036945)

[4. Інтегрування комплексних функцій. Інтегральна формула Коші 14](#_Toc350036946)

[Загальні означення 14](#_Toc350036947)

[Прийоми інтегрування функції комплексної змінної 15](#_Toc350036948)

[5. Ряди з комплексними членами. Степеневі ряди. Круг збіжності 19](#_Toc350036949)

[6. Розвинення функцій в ряди Тейлора та Лорана. 20](#_Toc350036950)

[Особливі точки. 20](#_Toc350036951)

[7. Лишки функції та їх обчислення 24](#_Toc350036952)

[Загальні поняття 24](#_Toc350036953)

[Методи обчислення лишків функцій. 26](#_Toc350036954)

[Розділ ІІ. Операційне числення 29](#_Toc350036955)

[1. Інтегральне перетворення Лапласа 30](#_Toc350036956)

[2. Властивості перетворення Лапласа. 31](#_Toc350036957)

[3. Обернене перетворення Лапласа. 37](#_Toc350036958)

[4. Застосування перетворення Лапласа для розв’язування інтегральних, звичайних диференціальних рівнянь і диференціальних рівнянь в частинних похідних. 41](#_Toc350036959)

[Розділ ІІІ. Завдання до контрольної роботи 50](#_Toc350036960)

[Додаток 60](#_Toc350036961)

[Основи роботи у програмному середовищі matlab 60](#_Toc350036962)

[Список рекомендованої літератури: 73](#_Toc350036963)

[Зміст 74](#_Toc350036964)

**НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ**

**Поберейко Богдан Петрович**

**Думанський Остап Іванович,**

**Бекас Богдан Олексійович**

**Пірко Ігор Богданович**

Методичні вказівки і завдання до контрольної роботи з дисципліни **«Операційне числення»** для студентів спеціальностей 6.050101 “Комп’ютерні науки” заочної форми навчання.