Kiểm định giả thuyết thống kê

Nguyễn Thị Hiên

Ngày 11 tháng 4 năm 2024

1. Bài toán kiểm định giả thuyết thống kê
   - Định nghĩa
   - Giả thuyết không và đối thuyết
   - Cách đặt giả thuyết
   - Miền bác bỏ - Tiêu chuẩn kiểm định
   - Sai lầm loại I và loại II
   - *p*- giá trị
2. Kiểm định giả thuyết cho trường hợp một mẫu
   - Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng
   - Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ
3. Kiểm định giả thuyết cho trường hợp hai mẫu độc lập
   - So sánh hai tỷ lệ
   - So sánh hai kỳ vọng
     - So sánh hai kỳ vọng, TH biết phương sai
     - So sánh hai kỳ vọng, TH không biết phương sai, mẫu lớn
     - So sánh hai kỳ vọng, TH không biết phương sai, mẫu nhỏ
4. So sánh hai kỳ vọng hai mẫu không độc lập

Định nghĩa

Định nghĩa

- Giả thuyết thống kê là những phát biểu về các tham số, quy luật phân phối, hoặc tính độc lập của các đại lượng ngẫu nhiên.
- Kiểm định giả thuyết là quá trình mà qua đó có thể quyết định bác bỏ giả thuyết hay không, dựa vào mẫu $(X_1, \ldots, X_n)$ lấy từ tổng thể.

Ví dụ 1:

Giám đốc một nhà máy sản xuất bo mạch chủ máy vi tính tuyên bố rằng tuổi thọ trung bình của một bo mạch chủ do nhà máy sản xuất là 5 năm; đây là một giả thuyết về kỳ vọng của biến ngẫu nhiên $X =$ tuổi thọ của một bo mạch chủ. Để đưa ra kết luận là chấp nhận hay bác bỏ giả thuyết trên, ta cần dựa vào mẫu điều tra và quy tắc kiểm định thống kê.

Định nghĩa

Định nghĩa

Trong bài toán kiểm định giả thuyết,

- Giả thuyết không (null hypothesis) là giả thuyết cần được kiểm định. Ký hiệu: H_0.
- Đối thuyết (alternative hypothesis) là giả thuyết được xem xét để thay thế giả thuyết không. Ký hiệu: H_1.

Xét bài toán kiểm định tham số, giả sử ta quan trắc mẫu ngẫu nhiên $(X_1, \ldots, X_n)$ từ biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất $f(x;\theta)$ phụ thuộc vào tham số θ. Gọi Θ là không gian tham số, và Θ_0 và Θ_0^c là hai tập con rời nhau của Θ sao cho $\Theta_0 \cup \Theta_0^c = \Theta$. Giả thuyết (giả thuyết không) và đối thuyết của bài toán có dạng như sau

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_0^c \end{cases}$$

Giả thuyết không và đối thuyết

Ví dụ

1. Gọi μ độ thay đổi trung bình trong huyết áp của một bệnh nhân sau khi dùng thuốc bác sĩ điều trị cần quan tâm đến giả thuyết sau

   $H_0 : \mu = 0$ Không có ảnh hưởng thuốc lên huyết áp của bệnh nhân
   $H_1 : \mu \neq 0$ Có ảnh hưởng của thuốc lên huyết áp của bệnh nhân.

2. Một khách hàng quan tâm đến tỷ lệ sản phẩm kém chất lượng trong một lô hàng mua của một nhà cung cấp. Giả sử tỷ lệ sản phẩm kém tối đa được phép là 5%. Khách hàng cần quan tâm đến giả thuyết sau

   $H_0 : p \geq 0.05$ Tỷ lệ sản phẩm kém cao hơn mức cho phép
   $H_1 : p < 0.05$ Tỷ lệ sản phẩm kém ở mức chấp nhận được

Cách đặt giả thuyết

1. Giả thuyết được đặt ra sao cho khi chấp nhận hay bác bỏ nó sẽ có tác dụng trả lời bài toán thực tế đặt ra.
2. Giả thuyết được đặt ra sao cho nếu nó đúng thì ta sẽ xác định được quy luật phân phối xác suất của đại lượng ngẫu nhiên được chọn làm tiêu chuẩn kiểm định.
3. Khi đặt giả thuyết, ta thường so sánh cái chưa biết với cái đã biết. Cái chưa biết là điều mà ta cần kiểm định, kiểm tra, làm rõ. "Cái đã biết" là những thông tin trong quá khứ, các định mức kinh tế, kỹ thuật.

Cách đặt giả thuyết

Tổng quát, một bài toán kiểm định giả thuyết cho tham số θ sẽ có một trong 3 dạng dưới đây (θ_0 là giá trị kiểm định đã biết): Hai phía:

$$\begin{cases} H_0 & : \theta = \theta_0 \\ H_1 & : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

Một phía bên trái:

$$\begin{cases} H_0 & : \theta \geq \theta_0 \\ H_1 & : \theta < \theta_0 \end{cases}$$

Một phía bên phải:

$$\begin{cases} H_0 & : \theta \leq \theta_0 \\ H_1 & : \theta > \theta_0 \end{cases}$$

Miền bác bỏ-Tiêu chuẩn kiểm định

Định nghĩa

Xét bài toán kiểm định giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1. Giả sử rằng H_0 đúng, từ mẫu ngẫu nhiên $X = (X_1, \ldots, X_n)$ chọn hàm $Z = h(X_1, \ldots, X_n; \theta_0)$ sao cho với số $\alpha > 0$ bé tùy ý ta có thể tìm dược tập hợp W_α thỏa điều kiện

$$P(Z \in W_\alpha) = \alpha$$

Tập hợp W_α gọi là miền bác bỏ giả thuyết H_0 và phần bù W_α^c gọi là miền chấp nhận giả thuyết H_0. Đại lượng ngẫu nhiên $Z = h(X_1, \ldots, X_n; \theta_0)$ gọi là tiêu chuẩn kiểm định giả thuyết H_0. Giá trị α gọi là mức ý nghĩa của bài toán kiểm định.

Miền bác bỏ-Tiêu chuẩn kiểm định

Thực hiện quan trắc dựa trên mẫu ngẫu nhiên $(X_1, \ldots, X_n)$ ta thu được mẫu thực nghiệm $(x_1, \ldots, x_n)$. Từ mẫu thực nghiệm này, ta tính được giá trị của Z là $z = h(x_1, \ldots, x_n; \theta_0)$.

- Nếu $z \in W_\alpha$ thì ta bác bỏ giả thuyết H_0.
- Nếu $z \in W_\alpha^c$ thì ta chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

Sai lầm loại I và loại II

Trong bài toán kiểm định giả thuyết thống kê, ta có thể mắc phải các sai lầm sau

a. Sai lầm loại I: là sai lầm mắc phải khi ta bác bỏ H_0 trong khi thực tế giả thuyết H_0 đúng. Xác suất mắc sai lầm loại I được gọi là mức ý nghĩa của kiểm định α.

$$\alpha = P(W_\alpha | H_0)$$

b. Sai lầm loại II: là sai lầm mắc phải khi ta chấp nhận giả thuyết H_0 trong khi thực tế H_0 sai. Xác suất mắc sai lầm loại II được kí hiệu β.

$$\beta = P(W_\alpha^c | H_1)$$

Sai lầm loại I và loại II

Hình: Sai lầm loại I và sai lầm loại II

Quyết định \ Thực tế	H_0 đúng	H_0 sai
Không bác bỏ H_0	Không có sai lầm $(1-\alpha)$	Sai lầm loại II β
Bác bỏ H_0	Sai lầm loại I α	Không có sai lầm $(1-\beta)$

$p-$ giá trị

Định nghĩa 4.

Tương ứng với một giá trị thống kê kiểm định tính trên một mẫu các giá trị quan trắc xác định, $p-$ giá trị là mức ý nghĩa nhỏ nhất dùng để bác bỏ giả thuyết H_0.

Dựa vào đối thuyết H_1, các bước tính $p-$ giá trị như sau:

1. Xác định thống kê kiểm định: TS. Tính giá trị thống kê kiểm định dựa trên mẫu $(x_1, \ldots, x_n)$, giả sử bằng a.
2. $p-$ giá trị cho bởi

$$p = \begin{cases} P(|TS| > |a||H_0), & \text{kiểm định hai phía} \\ P(TS < a|H_0), & \text{kiểm định một phía - bên trái} \\ P(TS > a|H_0), & \text{kiểm định một phía - bên phải} \end{cases}$$

3. Bác bỏ H_0 khi $p-$giá trị nhỏ hơn mức ý nghĩa

Kiểm định giả định giả thuyết cho trường hợp một mẫu

- Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng
  - Trường hợp biết phương sai,
  - Trường hợp không biết phương sai, mẫu nhỏ,
  - Trường hợp không biết phương sai, mẫu lớn.
- Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ
  - Trường hợp mẫu nhỏ,
  - Trường hợp mẫu lớn.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng. TH biết σ^2

- Các giả định:
  - Mẫu ngẫu nhiên $X_1, \dots, X_n$ được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với kỳ vọng μ chưa biết.
  - Phương sai σ^2 đã biết.
  - Cho trước giá trị μ_0, cần so sánh kỳ vọng μ với μ_0.
- Bài toán kiểm định có 3 trường hợp, với mức ý nghĩa α cho trước:

$$(a) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng. TH biết σ^2

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết không và đối thuyết,
2. Xác định mức ý nghĩa α,
3. Lấy mẫu ngẫu nhiên cỡ n : $x_1, \ldots, x_n$ và tính thống kê kiểm định

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{1}$$

4. Xác định miền bác bỏ W_α : bảng bên dưới

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng. TH biết σ^2

Giả Thuyết	Miền bác bỏ
$H_0: \quad \mu = \mu_0$ $H_1: \quad \mu \neq \mu_0$	$W_\alpha = \{z_0 : \lvert z_0 \rvert > z_{1-\alpha/2}\}$
$H_0: \quad \mu = \mu_0$ $H_1: \quad \mu < \mu_0$	$W_\alpha = \{z_0 : z_0 < -z_{1-\alpha}\}$
$H_0: \quad \mu = \mu_0$ $H_1: \quad \mu > \mu_0$	$W_\alpha = \{z_0 : z_0 > z_{1-\alpha}\}$

Bảng: Miền bác bỏ với đối thuyết tương ứng

5. Kết luận: Bác bỏ H_0/ Chưa đủ cơ sở bác bỏ H_0.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng. TH biết σ^2

- **Sử dụng $p-$ giá trị (p-value):** tính $p-$giá trị dựa theo đối thuyết và kết luận bác bỏ H_0 khi $p-$giá trị $\leq \alpha$, với mức ý nghĩa α cho trước. Công thức tính $p-$giá trị theo các trường hợp xem ở bảng bên dưới.

Giả Thuyết	$p-$giá trị
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$p = 2[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)]$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$p = \Phi(z_0)$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$p = 1 - \Phi(z_0)$

Bảng: $p-$giá trị với đối thuyết tương ứng

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng. TH biết σ^2

Ví dụ 2:

Dây chuyền sản xuất kem đánh răng P/S được thiết kế để đóng hộp những tuýt kem có trọng lượng trung bình là 6 oz (1 oz = 28g). Một mẫu gồm 30 tuýt kem được chọn ngẫu nhiên để kiểm tra định kỳ. Bộ phận điều khiển dây chuyền phải đảm bảo để trọng lượng trung bình mỗi tuýt kem là 6 oz; nếu nhiều hơn hoặc ít hơn, dây chuyền phải được điều chỉnh lại.
Giả sử trung bình mẫu của 30 tuýt kem là 6.1 oz và độ lệch tiêu chuẩn của tổng thể $\sigma = 0.2$ oz.
Thực hiện kiểm định giả thuyết với mức ý nghĩa 3% để xác định xem dây chuyền sản xuất có vận hành tốt hay không?

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng. TH biết σ^2

Ví dụ 3:

Một bệnh viện tại trung tâm thành phố cung cấp cứu tại nhà. Với khoảng 20 xe cấp cứu, mục tiêu của trung tâm là cung cấp dịch vụ cấp cứu trong khoảng thời gian trung bình là 12 phút sau khi nhận được điện thoại yêu cầu. Một mẫu ngẫu nhiên gồm thời gian đáp ứng khi có yêu cầu của 40 ca cấp cứu được chọn. Trung bình mẫu là 13.25 phút. Biết rằng độ lệch tiêu chuẩn của tổng thể là $\sigma = 3.2$ phút. Giám đốc EMS muốn thực hiện một kiểm định, với mức ý nghĩa 5%, để xác định xem liệu thời gian một ca cấp cứu có bé hơn hoặc bằng 12 phút hay không?

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng. TH không biết σ^2, mẫu nhỏ

- Các giả định:
  - Mẫu ngẫu nhiên $X_1, \dots, X_n$ được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với kỳ vọng μ và phương sai σ^2 chưa biết.
  - Sử dụng ước lượng không chệch S thay cho σ.
  - Cỡ mẫu nhỏ: $n \leq 30$.
  - Cho trước giá trị μ_0, cần so sánh kỳ vọng μ với μ_0.
- Bài toán kiểm định có 3 trường hợp, với mức ý nghĩa α cho trước:

$$(a)\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng. TH không biết σ^2, mẫu nhỏ

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết không và đối thuyết,
2. Xác định mức ý nghĩa α,
3. Lấy mẫu ngẫu nhiên cỡ $n : x_1, \ldots, x_n$ và tính thống kê kiểm định

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \tag{2}$$

   Biến ngẫu nhiên t_0 có phân phối Student với $n-1$ bậc tự do.
4. Xác định miền bác bỏ W_α : bảng bên dưới

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng. TH không biết σ^2, mẫu nhỏ

Giả Thuyết	Miền bác bỏ
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$W_\alpha = \left\{ t_0 : \lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2}^{n-1} \right\}$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$W_\alpha = \left\{ t_0 : t_0 < -t_{1-\alpha}^{n-1} \right\}$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$W_\alpha = \left\{ t_0 : t_0 > t_{1-\alpha}^{n-1} \right\}$

Bảng: Miền bác bỏ với đối thuyết tương ứng (TH mẫu nhỏ)

5. Kết luận: Bác bỏ H_0/ Chưa đủ cơ sở bác bỏ H_0.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng. TH không biết σ^2, mẫu nhỏ

- **Sử dụng $p-$ giá trị (p-value):** tính $p-$giá trị dựa theo đối thuyết và kết luận bác bỏ H_0 khi $p-$giá trị $\leq \alpha$, với mức ý nghĩa α cho trước. Công thức tính $p-$giá trị theo các trường hợp xem ở bảng bên dưới.

Giả Thuyết	$p-$giá trị
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$p = 2\mathbb{P}(t^{n-1} \geq \|t_0\|)$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$p = \mathbb{P}(t^{n-1} \leq t_0)$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$p = \mathbb{P}(t^{n-1} \geq t_0)$

Bảng: $p-$giá trị với đối thuyết tương ứng (TH mẫu nhỏ)

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng. TH không biết σ^2, mẫu lớn

- Các giả định:
  - Mẫu ngẫu nhiên $X_1, \dots, X_n$ được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với kỳ vọng μ và phương sai σ^2 chưa biết.
  - Sử dụng ước lượng không chệch S thay cho σ.
  - Cỡ mẫu nhỏ: $n > 30$.
  - Cho trước giá trị μ_0, cần so sánh kỳ vọng μ với μ_0.
- Bài toán kiểm định có 3 trường hợp tương tự hai trường hợp trên, với mức ý nghĩa α cho trước.
- Khi cỡ mẫu lớn biến ngẫu nhiên

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \tag{3}$$

sẽ hội tụ về phân phối chuẩn hóa $\mathcal{N}(0, 1)$. Khi đó các bước kiểm định cũng như miền bác bỏ W_α hoặc $p-$giá trị sẽ được tính tương tự như trong trường hợp biết phương sai, chỉ thay thế $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ bằng Z_0 ở phương trình (3).

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng. TH không biết σ^2, mẫu lớn

Ví dụ 4:

Trạm cảnh sát giao thông trên đường cao tốc sẽ thực hiện việc bắn tốc độ định kỳ tại các địa điểm khác nhau để kiểm tra tốc độ của các phương tiện giao thông. Một mẫu về tốc độ của các loại xe được chọn để thực hiện kiểm định giả thuyết sau

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 65 \\ H_1: & \mu > 65 \end{cases}$$

Những vị trí mà bác bỏ H_0 là những vị trí tốt nhất được chọn để đặt radar kiểm soát tốc độ.
Tại địa điểm F, một mẫu gồm tốc độ của 64 phương tiện được bắn tốc độ ngẫu nhiên có trung bình là 66.2 mph và độ lệch tiêu chuẩn 4.2 mph. Sử dụng $\alpha = 5\%$ để kiểm định giả thuyết.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

- **Bài toán:**
  Cho tổng thể X, trong đó tỷ lệ phần tử mang đặc tính A nào đó là trong tổng thể là p (p chưa biết). Từ mẫu ngẫu nhiên $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ hãy kiểm định với mức ý nghĩa α.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

Ví dụ 5:

Trong kỳ nghỉ giáng sinh và đầu năm mới, Cục An toàn giao thông đã thống kê được rằng có 500 người chết và 25000 người bị thương do các vụ tai nạn giao thông trên toàn quốc. Theo thông cáo của Cục ATGT thì khoảng 50% số vụ tai nạn có liên quan đến rượu bia.
Khảo sát ngẫu nhiên 120 vụ tai nạn thấy có 67 vụ do ảnh hưởng của rượu bia. Sử dụng số liệu trên để kiểm định lời khẳng định của Cục ATGT với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

- Giả định: Cỡ mẫu lớn; để phân phối chuẩn xấp xỉ phân phối nhị thức tốt nhất cần có $np_0 \geq 5$ và $n(1-p_0) \geq 5$.
- Quan sát sựu xuất hiện của biến cố "phần tử mang đặc tính A" trong n phép thử độc lập. Gọi Y là số lần xuất hiện biến cố trên thì $Y \sim B(n,p)$. Và
$$\hat{p} = \frac{Y}{n}$$
là một ước lượng không chệch cho p.
- Nếu H_0 đúng, thống kê
$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$
có phân phối chuẩn hóa $\mathcal{N}(0,1)$. Chọn z_0 làm tiêu chuẩn kiểm định.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết không và đối thuyết,
2. Xác định mức ý nghĩa α,
3. Lấy mẫu ngẫu nhiên cỡ $n : x_1, \ldots, x_n$ và tính thống kê kiểm định

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \tag{4}$$

4. Xác định miền bác bỏ W_α : tương tự kiểm định kỳ vọng trường hợp biết phương sai.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

Giả Thuyết	Miền bác bỏ
$H_0: \quad p =_0$ $H_1: \quad p \neq p_0$	$W_\alpha = \left\{z_0 : \lvert z_0\rvert > z_{1-\alpha/2}\right\}$
$H_0: \quad p = p_0$ $H_1: \quad p < p_0$	$W_\alpha = \left\{z_0 : z_0 < -z_{1-\alpha}\right\}$
$H_0: \quad p = p_0$ $H_1: \quad p > p_0$	$W_\alpha = \left\{z_0 : z_0 > z_{1-\alpha}\right\}$

Bảng: Miền bác bỏ với đối thuyết tương ứng

5. Kết luận: Bác bỏ H_0/ Chưa đủ cơ sở bác bỏ H_0.

So sánh hai tỷ lệ

- Khảo sát những phần tử thỏa một tính chất A nào đó trên hai tổng thể độc lập với tỷ lệ tương ứng là p_1 và p_2; từ hai tổng thể chọn ra hai mẫu với cỡ lần lượt là n và m. Gọi X và Y là số phần tử thỏa tính chất A trong mẫu 1 và mẫu 2. Khi đó, ta có $X \sim B(n, p_1)$ và $Y \sim B(m, p_2)$.
- Bài toán: so sánh hai tỷ lệ p_1 và p_2.
- Bài toán kiểm định giả thuyết, với mức ý nghĩa α gồm các trường hợp sau:

$$(a)\begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 = D_0 \\ H_1 : p_1 - p_2 \neq D_0 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 = D_0 \\ H_1 : p_1 - p_2 < D_0 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 = D_0 \\ H_1 : p_1 - p_2 > D_0 \end{cases}$$

- Các giả định
  - Hai mẫu độc lập,
  - Cỡ mẫu lớn, $np_1 > 5; n(1 - p_1) > 5$ và $mp_2 > 5; m(1 - p_2) > 5$

So sánh hai tỷ lệ

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết không và đối thuyết,
2. Xác định mức ý nghĩa α,
3. Tính thống kê kiểm định

$$z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - D_0}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \tag{5}$$

với

$$\hat{p}_1 = \frac{X}{n}; \hat{p}_2 = \frac{Y}{m}; \hat{p} = \frac{X+Y}{n+m}$$

nếu H_0 đúng, $Z_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$.

So sánh hai tỷ lệ

4. Xác định miền bác bỏ

Đối thuyết	**Miền bác bỏ**	$p-$**giá trị**
$H_1 : p_1 - p_2 \neq D_0$	$\lvert z_0 \rvert > z_{1-\alpha/2}$	$p = 2[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)]$
$H_1 : p_1 - p_2 < D_0$	$z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p = \Phi(z_0)$
$H_1 : p_1 - p_2 > D_0$	$z_0 > z_{1-\alpha}$	$p = 1 - \Phi(z_0)$

5. Kết luận: Nếu bác bỏ H_0, ta kết luận H_1 đúng với $(1-\alpha)100\%$ độ tin cậy. Ngược lại ta kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với α cho trước.

So sánh hai tỷ lệ

Ví dụ 6:

Một công ty sản xuất thuốc cần kiểm tra một loại thuốc có tác dụng làm giảm việc xuất hiện cơn đau ngực ở các bệnh nhân. Công ty thực hiện thí nghiệm trên 400 người, chia làm hai nhóm: nhóm 1 gồm 200 được uống thuốc và nhóm 2 gồm 200 người được uống giả dược. Theo dõi thấy ở nhóm 1 có 8 người lên cơn đau ngực và nhóm 2 có 25 người lên cơn đau ngực. Với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$, hãy cho kết luận về hiệu quả của thuốc mới sản xuất.

So sánh hai kỳ vọng, TH biết phương sai

- Các giả định:
  - $X_1, \ldots, X_n$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 1 có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_1 và phương sai σ_1^2.
  - $Y_1, \ldots, Y_n$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 1 có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_2 và phương sai σ_2^2.
  - Tổng thể 1 và 2 (đại diện bởi X và Y) độc lập với nhau.
  - Các phương sai σ_1^2 và σ_2^2 đã biết.
- Bài toán kiểm định giả thuyết trên hai mẫu độc lập với mức ý nghĩa α cho trước gồm các dạng sau:

$$(a)\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = D_0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq D_0 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = D_0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < D_0 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = D_0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > D_0 \end{cases}$$

So sánh hai kỳ vọng, TH biết phương sai

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết không và đối thuyết,
2. Xác định mức ý nghĩa α,
3. Tính thống kê kiểm định

$$z_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - D_0}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right)} } \tag{6}$$

nếu H_0 đúng, $Z_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

So sánh hai kỳ vọng, TH biết phương sai

4. Xác định miền bác bỏ

Đối thuyết	**Miền bác bỏ**	$p-$**giá trị**
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq D_0$	$\lvert z_0 \rvert > z_{1-\alpha/2}$	$p = 2[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)]$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < D_0$	$z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p = \Phi(z_0)$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > D_0$	$z_0 > z_{1-\alpha}$	$p = 1 - \Phi(z_0)$

5. Kết luận: Nếu bác bỏ H_0, ta kết luận H_1 đúng với $(1-\alpha)100\%$ độ tin cậy. Ngược lại ta kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với α cho trước.

So sánh hai kỳ vọng, TH biết phương sai

Ví dụ 7:

Một công ty sản xuất sơn nghiên cứu về 1 loại phụ gia làm giảm thời gian khô của sơn. Thực hiên thí nghiệm trên 2 mẫu: mẫu thứ nhất gồm 10 vật mẫu được sơn bằng loại sơn bình thường; mẫu thứ hai gồm 10 mẫu vật được sơn với sơn có chất phụ gia mới. Trong những nghiên cứu trước, biết rằng độ lệch tiêu chuẩn của thời gian khô sau khi quét sơn là 8 phút và không thay đổi khi thêm phụ gia vào. Trung bình của mẫu 1 và mẫu 2 lần lượt là $\bar{x} = 121$ phút và $\bar{y} = 112$ phút. Với mức ý nghĩa 5%, hãy cho kết luận về loại sơn với chất phụ gia mới.

So sánh kỳ vọng, TH không biết phương sai, mẫu lớn

- Các giả định:
  - $X_1, \ldots, X_n$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 1 có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_1 và phương sai σ_1^2.
  - $Y_1, \ldots, Y_n$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 1 có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_2 và phương sai σ_2^2.
  - Tổng thể 1 và 2 (đại diện bởi X và Y) độc lập với nhau.
  - Các phương sai σ_1^2 và σ_2^2 chưa biết.
  - Cỡ mẫu lớn: $n > 30$ và $m > 30$.

$$z_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - D_0}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right)} \tag{7}$$

nếu H_0 đúng, $Z_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

  - Miền bác bỏ (hoặc $p-$giá trị) trong trường hợp này đươc tính tương tụ trường hợp biết phương sai (thay thế σ_1 và σ_2 bởi S_1 và S_2).

So sánh kỳ vọng, TH không biết phương sai, mẫu lớn

- Đối với trường hợp mẫu lớn, khi phương sai tổng thể σ_1^2 và σ_2^2 không biết, ta thay thế bằng các phương sai mẫu S_1^2 và S_2^2 mà không tạo ra nhiều khác biệt.
- Khi $n > 30$ và $m > 30$, đại lượng

So sánh kỳ vọng, TH không biết phương sai, mẫu lớn

Ví dụ 8:

Khảo sát về chiều cao của sinh hai khoa Toán và CNTT: chọn ngẫu nhiên 50 sinh viên khoa Toán, tính được chiều cao trung bình là 163 cm và độ lệch tiêu chuẩn 5 cm. Đo chiều cao 50 khoa CNTT, có trung bình mẫu là 166 cm và độ lệch tiêu chuẩn 8 cm. Với mức ý nghĩa $\alpha = 1\%$, hãy cho kết luận về chiều cao của sinh viên hai khoa.

So sánh hai kỳ vọng, TH không biết phương sai, mẫu nhỏ

- Các giả định:
  - $X_1, \ldots, X_n$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 1 có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_1 và phương sai σ_1^2.
  - $Y_1, \ldots, Y_n$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 1 có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_2 và phương sai σ_2^2.
  - Tổng thể 1 và 2 (đại diện bởi X và Y) độc lập với nhau.
  - Các phương sai σ_1^2 và σ_2^2 chưa biết.
  - Cỡ mẫu nhỏ : $n \leq 30$ và $m \leq 30$.
- Ta xét hai trường hợp:
  1. Trường hợp phương sai bằng nhau $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$,
  2. Trường hợp phương sai khác nhau $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
- Ta sử dụng quy tắc sau để xác định phương sai có bằng nhau hai không

Rule - of - Thumb

Phương sai σ_1^2 và σ_2^2 của hai tổng thể được xem như bằng nhau nếu tỷ số

$$0,5 \leq \frac{s_{max}}{s_{min}} \leq 2$$

So sánh hai kỳ vọng, TH không biết phương sai, mẫu nhỏ, TH $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

- Ta sử dụng một ước lượng chung cho cả σ_1^2 và σ_2^2 là S_p^2 phương sai mẫu chung

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$$

- Thống kê

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

có phân phối Student với $n+m-2$ bậc tự do.

So sánh hai kỳ vọng, TH không biết phương sai, mẫu nhỏ, TH $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

- Đặt $df = n + m - 2$, miền bác bỏ và $p-$ giá trị trong trường hợp này có dạng

Đối thuyết	**Miền bác bỏ**	**$p-$giá trị**
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq D_0$	$\lvert t_0\rvert > t^{df}_{\alpha/2}$	$p = 2\mathbb{P}(t^{df} \geq \lvert t_0\rvert)$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < D_0$	$t_0 < -t^{df}_{1-\alpha}$	$p = \mathbb{P}(t^{df} \leq t_0)$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > D_0$	$t_0 > t^{df}_{1-\alpha}$	$p = \mathbb{P}(t^{df} \geq t_0)$

- Kết luận: Bác bỏ H_0/ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

So sánh hai kỳ vọng, TH không biết phương sai, mẫu nhỏ, TH $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

- Ta sử dụng thống kê

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}}$$

khi đó t_0 có phân phối Student với bậc tự do df được xác định như sau

$$df = \frac{[(s_1^2/n) + (s_2^2/m)]^2}{\frac{(s_1^2/n)^2}{n-1} + \frac{(s_2^2/m)^2}{m-1}} \tag{8}$$

- Miền bác bỏ trong trương hợp này giống như trong trườn hợp phương sai bằng nhau, chỉ thay bậc tự do df cho bởi phương trình (8)

So sánh hai kỳ vọng, TH không biết phương sai, mẫu nhỏ

Ví dụ 9:

Tại một thành phố, khu vực A, người ta chọn ngẫu nhiên 17 sinh viên và cho làm bài kiểm tra để đo chỉ số IQs, thu được trung bình mẫu là 106 và độ lệch tiêu chuẩn bằng 10; tại khu vực B, chỉ số IQs trung bình của một mẫu gồm 14 sinh viên bằng 109 với độ lệch tiêu chuẩn là 7. Giả sử phương sai bằng nhau. Có sự khác biệt về chỉ số IQs của sinh viên ở hai khu vực A và B hay không? $\alpha = 0.02$.

So sánh hai kỳ vọng, TH không biết phương sai, mẫu nhỏ

Ví dụ 10:

Hàm lượng thạch tín (Đv:ppb) trong nước càng cao càng có hại cho sức khỏe. Người ta kiểm tra hàm lượng thạch tín ở hai khu vực trung tâm thành phố Biên Hòa và khu vực gần sân bay Biên Hòa. Tại mỗi khu vực, người ta đo ngẫu nhiên hàm lượng thạch tín trong nước ứng với 10 điểm khác nhau. Số liệu cho bởi bảng thống kê bên dưới

Trung tâm TP	3	7	25	10	15	6	12	25	15	7
KV gần sân bay	48	44	40	38	33	21	20	12	1	18

Với $\alpha = 0.05$, hãy kiểm tra xem có sự khác biệt về hàm lượng thạch tín ở hai khu vực này.

So sánh hai kỳ vọng hai mẫu không độc lập (paired $t-$test)

- Khi hai mẫu không độc lập thì mỗi giá trị quan trắc được trong một mẫu có mối liên hệ tương ứng với một giá trị quan trắc ở mẫu thứ hai. Như vậy, ta có thể ghép cặp ứng giá trị trong hai mẫu với nhau.
- Việc ghép cặp là kết quả của việc:
  - quan trắc giá trị trước và sau khi thực hiện 1 thí nghiệm. Chẳng hạn như đo trọng lượng trước và sau khi thực hiện một chế độ ăn kiêng.
  - so sánh cùng một đặc tính.
  - thí nghiệm trên cùng 1 địa điểm.
  - thí nghiệm với cùng thời gian.

So sánh hai kỳ vọng hai mẫu không độc lập (paired $t-$test)

- Xét (X_{1i}, X_{2i}), với $i = 1, 2, \ldots, n$ là tập gồm n cặp gái trị quan trắc với giả sử rằng kỳ vọng phương sai của hai tổng thể đại diện bới X_1 và X_2 độc lập lần lượt là μ_1 và $\sigma_1^2; \mu_2$ và σ_2^2.
- Định nghĩa độ sai khác giữa mỗi cặp trong tập hợp các giá trị quan trắc là

$$D_i = X_{1i} - X_{2i},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

- Các $D_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ được giả sử có phân phối chuẩn.

So sánh hai mẫu không độc lập (paired $t-$test)

- Gọi $\mu_D = E(D_i)$, bởi vì $D_1, \ldots, D_n$ là những biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối, nếu $d_1, \ldots, d_n$ là những giá trị của $D_1, \ldots, D_n$, ta định nghĩa

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i$$

$$s_d^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i - d)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{n}{n-1}(\bar{d})^2$$

- Ta cần kiểm định các giả thuyết và đối thuyết, với mức ý nghĩa α sau:

$$(a)\begin{cases} H_0 : \mu_D = D_0 \\ H_1 : \mu_D \neq D_0 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} H_0 : \mu_D = D_0 \\ H_1 : \mu_D < D_0 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} H_0 : \mu_D = D_0 \\ H_1 : \mu_D > D_0 \end{cases}$$

So sánh hai kỳ vọng hai mẫu không độc lập (paired $t-$test)

Các bước kiểm định

- TH mẫu nhỏ
  1. Phát biểu giả thuyết không và đối thuyết,
  2. Xác định mức ý nghĩa α,
  3. Tính thống kê kiểm định

$$t_0 = \frac{\bar{d} - D_0}{s_n/\sqrt{n}} \tag{9}$$

Biến ngẫu nhiên t_0 có phân phối Student với $n-1$ bậc tự do.

So sánh hai kỳ vọng hai mẫu không độc lập (paired $t-$test)

4. Xác định miền bác bỏ

Đối thuyết	**Miền bác bỏ**	**$p-$giá trị**
$H_1 : \mu_D \neq D_0$	$\|t_0\| > t^{n-1}_{\alpha/2}$	$p = 2\mathbb{P}(t^{n-1} \geq \|t_0\|)$
$H_1 : \mu_D < D_0$	$t_0 < -t^{n-1}_{1-\alpha}$	$p = \mathbb{P}(t^{n-1} \leq t_0)$
$H_1 : \mu_D > D_0$	$t_0 > t^{n-1}_{1-\alpha}$	$p = \mathbb{P}(t^{n-1} \geq t_0)$

5. Kết luận: Nếu bác bỏ H_0, ta kết luận H_1 đúng với $(1-\alpha)100\%$ độ tin cậy. Ngược lại ta kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với α cho trước.

- TH cỡ mẫu lớn ($n > 30$), bài toán kiểm định hai mẫu phụ thuộc thực hiện tương tụ như trong trường hợp một mẫu ngẫu nhiên $(D_1, \ldots, D_n)$.

So sánh hai kỳ vọng hai mẫu không độc lập (paired $t-$test)

Ví dụ 11:

Một bác sĩ dinh dưỡng nghiên cứu một chế độ ăn kiêng và tập thể dục mới để làm giảm lượng đường trong máu của các bệnh nhân bị bệnh tiểu đường. 10 bệnh nhân bị bệnh tiểu đường được chọn để thử nghiệm chương trình này, bảng kết quả bên dưới cho biết lượng đường trong máu trước và sau khi các bệnh nhân tham gia chương trình

Trước	268	225	252	192	307	228	246	298	231	185
Sau	106	186	223	110	203	101	211	176	194	203

Số liệu được cung cấp có đủ bằng chứng để kết luận rằng chế độ ăn kiêng và tập thể dục làm giảm lượng đường trong máu không ? $\alpha = 0.05$.