

¿Vivimos en un universo finito que se expande a la velocidad de la luz?

Alberto Sánchez Vargas

Trabajo de Fin de Grado tutorizado por Yago Ascasibar Sequeiros, Violeta González Pérez

Grado en Física, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Madrid

8 de mayo de 2023

E-mail: alberto.sanchezvargas@estudiante.uam.es

ABSTRACT:

Índice

1. Introducción a la cosmología actual	2
2. Cosmología alternativa	3
2.1. Un universo finito que se expande a la velocidad de la luz	3
2.2. Composición de este universo y cosmologías similares	5
2.3. Problemas que soluciona este modelo	7
3. Sondas cosmológicas y datos observacionales	10
4. Resultados y discusión	13
4.1. Diagrama de Hubble-Lemaître	13
4.2. BAO	15
4.3. Otros trazadores	17
5. Implicaciones	19
6. Conclusiones	21
A. Derivación de distancias cósmicas en este modelo	22
B. Lentes gravitacionales y anillos de Einstein	23
C. Métrica y otros cálculos	24
D. Parametrización del universo con un solo fluido	25
E. Distancia de horizonte/partículas	26

1. Introducción a la cosmología actual

Actualmente, existe un amplio consenso entre la comunidad científica, aceptando que vivimos en un universo infinito, con geometría espacial plana. Tal universo debería estar expandiéndose a un ritmo acelerado, a causa de la presencia de un fluido misterioso consistente con la constante cosmológica introducida por Einstein. La composición de este universo podría deducirse a raíz de diversas sondas observacionales, favoreciendo fuertemente al modelo conocido como Λ CDM plano, donde la energía oscura (Λ) conformaría el 70 % del universo, mientras que la materia oscura no relativista (CDM) y la materia bariónica usual contribuirían en torno al 25 % y 5 % respectivamente [1]. La cantidad de fenómenos que explica, junto con la inmensa mayoría de medidas observacionales cosmológicas, respaldan este modelo. Sin embargo, en los últimos años se han ido identificado bastantes tensiones observacionales y extrañas casualidades, poniendo en cuestión el paradigma actual y motivando la búsqueda de extensiones o modificaciones de esta teoría [2, 3]. La crítica más dura es la conocida como *Hubble tension*, que consiste en obtener medidas dispares de la velocidad actual de expansión del universo (H_0), según los datos que se consideren. Aunque esta discrepancia sea la más significativa estadísticamente, no es ni de lejos la única pieza que no encaja en el marco del Λ CDM.

Comenzaremos por presentar la primera ecuación de Friedmann, que representa la evolución del universo en función de su composición

$$\left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right]^2 = H^2(z) = H_0^2 [\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda], \quad (1.1)$$

siendo $a(t)$ el factor de escala (tamaño del universo), $\dot{a}(t)$ su derivada temporal (ritmo de expansión del universo), H_0 la constante de Hubble y Ω_i los parámetros de densidades de energía de radiación, materia, curvatura y energía oscura, de izquierda a derecha. Las Ω_i deben sumar 1. En el caso del Λ CDM habitual, $\Omega_r = 0$, $\Omega_m \approx 0.3$, $\Omega_k = 0$ y $\Omega_\Lambda \approx 0.7$. La curvatura del universo viene determinada por Ω_k , siendo $\Omega_k < 0$ un universo cerrado (elíptico), $\Omega_k > 0$ un universo abierto (hiperbólico) y

$\Omega_k = 0$ un universo plano.

2. Cosmología alternativa

2.1. Un universo finito que se expande a la velocidad de la luz

En este trabajo se presenta un paradigma alternativo al actual, partiendo de la premisa de que el Universo sea altamente simétrico. Para ello, postulamos que se expanda en las coordenadas *espaciotemporales* isotrópicamente en torno al único evento singular, el Big Bang. En el panel inferior de la Figura 1, se muestra una representación bidimensional del modelo. El tiempo representa la coordenada radial que separa cualquier suceso del Big Bang. El espacio tridimensional está representado como una circunferencia con centro en el Big Bang. Así, a un tiempo fijo t , el universo tiene un radio de curvatura $R(t) = ct$, donde hemos asumido que la expansión del universo debe ser lineal, y a la velocidad de la luz. La gran simetría de este modelo contrasta con cualquier geometría plana, como el Λ CDM, que toma como predilecta una dirección del espaciotiempo (panel superior de la Figura 1). Esta dirección es hacia la que se expande el universo, aquella con $t > 0$, de forma que tan solo queda definido la mitad del espaciotiempo. No existe una razón obvia para que exista una coordenada de tiempo semi-infinita (*¿qué sucedió antes del Big Bang, por qué no hay espacio?*). En otras palabras, el Λ CDM no da una razón convincente por la que *no hay nada antes* del Big Bang. El modelo que tratamos, por construcción, no tiene cabida para sucesos *antes* del Big Bang. Como t es una coordenada radial, que tiene el sentido físico de especificar el intervalo temporal entre un suceso y el Big Bang, $t < 0$ es imposible.

En resumen, a partir de argumentos exclusivamente estéticos y metafísicos, postulamos un universo con curvatura (hiperesférico, para ser más precisos) que se expande a la velocidad de la luz. El objetivo ahora será traducir estos postulados de simetría en condiciones matemáticas para poder construir un modelo físico, predictivo y falsable, y estudiar su viabilidad con las medidas astronómicas actuales.

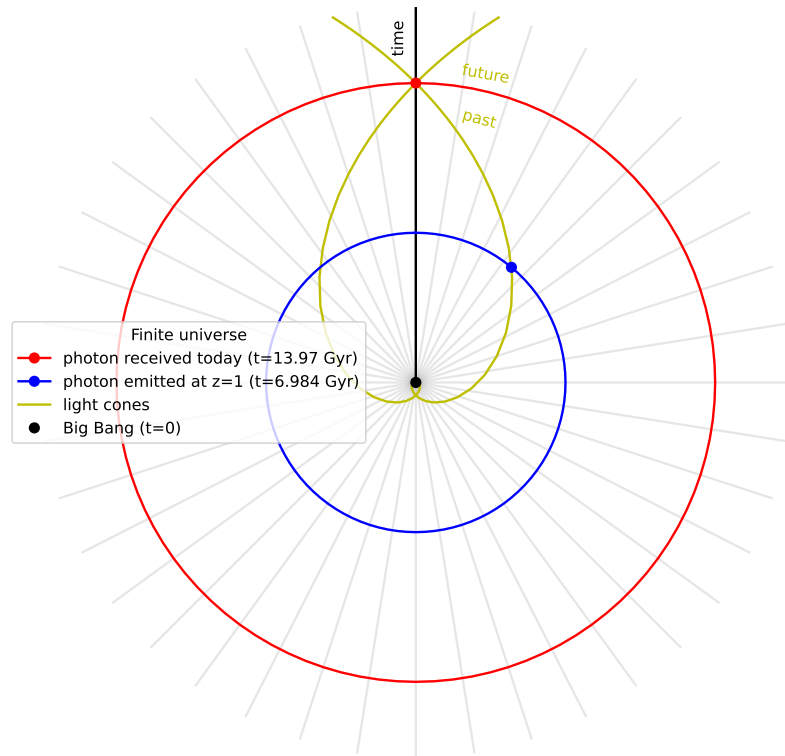
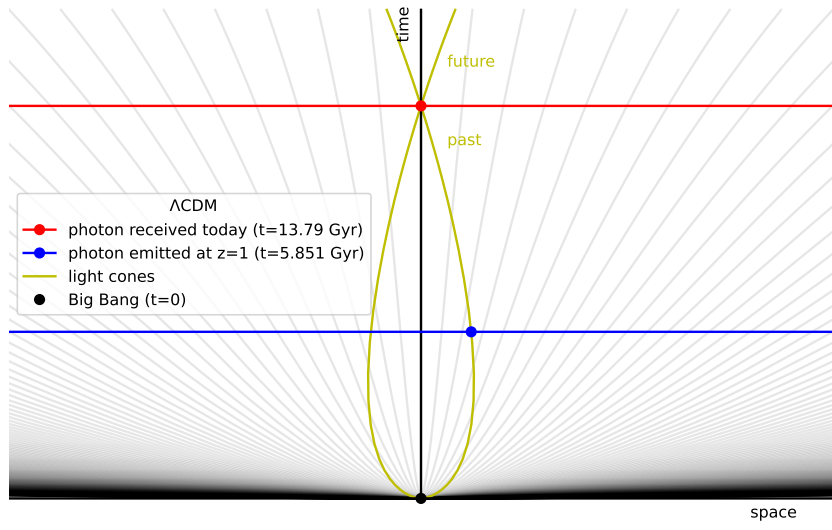


Figura 1. Se utiliza la observación de una galaxia a redshift $z = 1$ para ilustrar la comparación entre el Λ CDM estándar (panel superior) y el modelo propuesto (panel inferior).

2.2. Composición de este universo y cosmologías similares

Las dos condiciones fundamentales de las que partimos son: que el universo se expanda linealmente a la velocidad de la luz ($R(t) = ct$) y que sea hiperesférico ($k = 1$). Con la definición del factor de escala $a(t) \equiv R(t)/R(t_0)$, tenemos que $a(t) = t/t_0$, $\dot{a}(t) = 1/t_0$ y $H(t) = 1/t$, siendo t_0 el tiempo cósmico transcurrido desde el Big Bang.

Así, el parámetro de densidad de energía asociado a la curvatura queda:

$$\Omega_k(t) \equiv -\frac{kc^2}{H^2(t)R^2(t)} = -1. \quad (2.1)$$

Haciendo explícita la dependencia con el tiempo en la ecuación (1.1):

$$H^2(t) = t^{-2} = H_0^2 \left[\Omega_r \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-4} + \Omega_m \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-3} + \Omega_k \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2} + \Omega_\Lambda \right]. \quad (2.2)$$

Para que esta ecuación se cumpla a todo tiempo t , es necesario que Ω_r , Ω_m y Ω_Λ se anulen. Sin embargo, como $\Omega_k = -1$, este modelo exige la introducción de un término extra, que escale también como a^{-2} . Esta variante de la ecuación de Friedmann puede tratarse como un ejemplo muy especial de la cosmología ω CDM, en la cual se considera un tipo de “energía oscura” generalizada, un fluido cósmico cuya densidad (ρ) y la presión que ejerce (p) se relaciona con la habitual ecuación de estado $p = \omega\rho$:

$$H^2(t) = H_0^2 \left[\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_{\text{DE}} a^{-3(1+w_{\text{DE}})} \right], \quad (2.3)$$

donde $\Omega_m = \Omega_r = 0$, $\Omega_k = -1$, $\Omega_{\text{DE}} = 2$, y $w_{\text{DE}} = -1/3$ en nuestro caso particular.

Es decir, evitamos la necesidad de una constante cosmológica, añadida *ad hoc* en la ecuación de Friedmann, pero no logramos prescindir de otro tipo de fluido, cuya presencia sigue siendo igualmente difícil de justificar. Consecuentemente, el universo que postulamos solo contiene un fluido, con $p = -1/3\rho$. Con esta ecuación de estado, idéntica a la de la curvatura, se da lugar a una familia de universos conocidos

como “cosmologías coasting”, cuya expansión es siempre lineal. Esto fue notado por primera vez por E. Kolb en Ref. [4], que llamó a este misterioso fluido “materia K”. Analizó los tres tipos de geometrías y todas las densidades de energía posibles para la materia K, la cual dominaría actualmente la composición del universo.

De forma similar, en el universo plano $R_h = ct$ ideado por F. Melia [5], se impone que la densidad total de todos los componentes del universo cumplan conjuntamente que la “masa activa” sea cero:

$$3p + \rho = 0. \quad (2.4)$$

Aunque obtiene los mismos resultados que un universo plano en el que solo hay materia K, en realidad contiene materia, radiación, y energía oscura con ω_{DE} , cumpliéndose en todo momento que $\omega \equiv p_T/\rho_T = (p_r/3 + \omega_{DE} p_{DE})/\rho_T = -1/3$. Es decir, las densidades de cada componente no se conservan por separado, sino que se ajustan entre sí, a través de supuestas interacciones partícula-partícula [6]. Es justamente la condición de masa activa nula la que garantiza que cualquier universo no esté en expansión acelerada.

Un universo totalmente vacío ($p = 0, \rho = 0$) con geometría hiperbólica ($\Omega_k = 1$) también cumple (2.4), siendo este el vetusto universo de Milne [7]. Otras variantes más actuales tratan de darle algo más de sentido físico, como el universo Milne-Dirac [8], en el que se introduce materia y antimateria, o como en Ref. [9], donde se intenta extender el factor de escala $a(t)$ al plano complejo.

Por último, en Ref. [10] se resume el caso más general de expansión lineal, considerando los tres tipos de geometría y cualquier velocidad de expansión. Efectivamente, el modelo que aquí consideramos aporta predicciones idénticas al caso con $k = 1$ y velocidad de expansión c . Desde un punto de vista fenomenológico, podemos tratar a ambos como equivalentes, si bien es verdad que tanto la composición como la motivación de partida son ligeramente distintas [11–13]. Realmente, el optar por varios fluidos que cumplen la condición de masa activa cero, o por una composición basada exclusivamente en materia K ($\omega = -1/3$), no altera las predicciones de distancias

cósmicas del modelo.

Sin lugar a dudas, los universos con expansión lineal han sido investigado en relativa profundidad durante muchos años, convirtiéndose en una alternativa disruptiva al bien asentado modelo estándar de la cosmología. Aun más, salen reforzados de las restricciones observacionales de las “power-law cosmologies”, que asumen un factor de escala como potencia del tiempo, $a(t) \propto t^\beta$, y encuentran que $\beta \approx 1$ [14–16].

Paralelamente, los universos finitos también han resultado atractivos, a veces desde la óptica del propio Λ CDM [17], otras veces en el mismo contexto de la expansión lineal [18–21]. Con menor frecuencia, son objetos de interés justamente por el leitmotiv de este trabajo, la simetría y la interpretación geométrica del espaciotiempo [22].

Aunque estas alternativas solucionan algunos problemas que el Λ CDM no logra explicar, no han recibido excesiva atención por parte de la mayoría de cosmólogos [23]. A continuación, detallaremos cuáles son las ventajas que ofrecen desde un punto de vista teórico.

2.3. Problemas que soluciona este modelo

En primer lugar, notemos que la cosmología estándar se basa en las conocidas como teorías inflacionarias [24] para explicar algunos asuntos que de otra manera no podrían justificarse satisfactoriamente. La inflación consiste en suponer que instantes después del Big Bang, el espacio incrementa rápidamente su tamaño en muchos órdenes de magnitud. Los mecanismos físicos que puedan dar lugar a este fenómeno (el campo del “inflatón”) están todavía bajo escrutinio, y no han recibido ninguna confirmación experimental.

Los modelos de expansión lineal, por otro lado, solucionan algunos problemas cosmológicos sin necesidad de suponer inflación. Los principales asuntos en los que se ven favorecidos frente al Λ CDM son los siguientes (véase Ref. [25]):

- **Problema del horizonte.** La homogeneidad a grandes escalas del fondo cósmico de microondas en el marco del Λ CDM solo puede ser explicada si todas

las regiones del universo hubieran estado en contacto en los primeros instantes tras el Big Bang. Después, se produciría una brevísima etapa de inflación que dejaría a estas regiones incomunicadas entre sí. En las cosmologías coasting, esto se explica de forma natural porque todo el universo se encuentra causalmente conectado en todo momento (véase Apéndice E). De hecho, la expansión lineal es la única de las cosmologías con $a(t) \propto t^\beta$ que no tiene horizonte de partículas ni horizonte de eventos [26].

- **Problema de la planitud.** La curvatura medida en el marco del Λ CDM es casi nula, lo que sería consecuencia de que la densidad de energía estuviese muy cerca de su valor crítico. Este tipo de universos son generalmente inestables, y para que sobrevivan $\sim 10^{10}$ años sus parámetros iniciales H y ρ tendrían que estar ajustados con mucha precisión, de 1 parte en 10^{55} [24]. Esto se resolvería suponiendo un universo inicial con cualquier curvatura, pero que es aplanado mediante un proceso de inflación. Los universos con $a(t) \propto t^\beta$, y $\beta \geq 1$ no tienen este problema aunque sean planos, porque el ritmo de expansión no está relacionado con la densidad de energía [25].

- **Problema de la coincidencia cósmica.** En el Λ CDM, los valores optimizados de las densidades de materia y de energía oscura son ambos del orden de la unidad en este momento ($\Omega_m \approx 0.3$, $\Omega_\Lambda \approx 0.7$). Para que esto suceda, teniendo en cuenta que ambas densidades evolucionan con el tiempo de forma distinta, sus valores tendrían que ajustarse en la época de Planck con una precisión del orden de 1 parte en 10^{122} [25]. Una vez más, el Λ CDM requiere que sus parámetros estén muy finamente ajustados en torno a valores muy concretos. Los modelos de expansión lineal no padecen de problemas de *fine-tuning* por la misma razón que antes.

- **Problema de la constante cosmológica.** Tradicionalmente, se suele considerar que Λ representa la energía que posee el espacio vacío debido a fluctuaciones cuánticas. Sin embargo, la energía asociada a la constante cosmológica en el Λ CDM es inferior en ~ 120 órdenes de magnitud a la energía del vacío en la época de Planck [27]. El hecho de considerar una energía oscura que escala como a^{-2} alivia este problema, ya que la densidad de energía en función del tiempo queda como

$\rho(t) = \frac{3}{4\pi G t^2}$. En Refs. [13, 20] se señala que esta evolución ($\propto t^{-2}$) es la única potencia en t que permite partir de la escala cuántica de Planck y recuperar el comportamiento clásico de las ecuaciones de Einstein a grandes escalas. Es decir, es la única evolución que respeta el principio de correspondencia.

• **Problema de la sincronidad.** En el Λ CDM ocurre una sorprendente coincidencia, que se hace explícita al medir la edad adimensional $t_0 H_0 \approx 1$. Realmente, esperaríamos que adoptase cualquier valor positivo del amplio intervalo $0 < t_0 H_0 < \infty$, siendo este el único momento en la historia del universo en el que es aproximadamente 1 [28], comprobado a través de medidas astrofísicas y cosmológicas. Además, si se media el efecto de la energía oscura en el Λ CDM a lo largo de la edad del universo, se obtiene que $\langle \omega \rangle \approx -1/3$ en el momento actual [5]. Así, estamos justo en la época del universo en la que las fases de aceleración y desaceleración de la cosmología estándar son equivalentes a una expansión lineal. Asumir que el universo realmente se expanda de forma lineal elimina esta improbable coincidencia, ya que se cumple que $t_0 H_0 = 1$ y $\omega = -1/3$ a cualquier tiempo del universo.

Los dos primeros problemas se resuelven mediante inflación, mientras que los tres últimos no tienen solución en el paradigma actual de la cosmología. Las cosmologías coasting también explican satisfactoriamente las observaciones de objetos astronómicos muy antiguos [26], siendo la edad del universo $t_0 = H_0^{-1}$. Esto no es un problema actual del Λ CDM, que predice que el universo es ligeramente más joven, pero de una edad similar.

Una vez que hemos analizado las ventajas que tienen los modelos de expansión lineal y mencionado las propuestas más populares, nos centraremos en el modelo finito de expansión a la velocidad de la luz. Resuelve todos los problemas anteriormente mencionados, además de cumplir los requerimientos estéticos impuestos en la Sección 2.1. Sumado a esto, cabe destacar que es extremadamente sencillo, teniendo un único parámetro: la edad del universo, t_0 ; mientras que el Λ CDM estándar necesita seis [1]. No obstante, se le presentan grandes desafíos, es necesario que prediga correctamente la formación de estructuras, la abundancia relativa de elementos en

la nucleosíntesis, la temperatura del CMB, y otras características del universo primitivo en general. Pese al relativo éxito resolviendo algunos problemas concretos, tan solo hemos tratado argumentos que no pueden tomarse como evidencias sólidas y definitivas en contra de la cosmología establecida, que es capaz de explicar casi todas las observaciones existentes y concordar con datos de la expansión del universo con una precisión exquisita. Consecuentemente, para que este modelo pueda ser seriamente considerado como alternativa, debemos encontrar acuerdo con las medidas observacionales de las distancias cósmicas, lo que discutiremos en las Secciones 3 y 4.

3. Sondas cosmológicas y datos observacionales

- **Supernovas Tipo Ia (SNe Ia).** Las supernovas de Tipo Ia son explosiones de enanas blancas de gran luminosidad, con curvas de luz características que nos permiten utilizarlas como candelas estándar. Calibrándolas mediante otras observaciones más cercanas (paralaje, Cefeidas), tenemos un método razonablemente fiable con el que calcular la distancia que nos separa de las SNe y sondear la expansión del universo. Como primer paso para construir un diagrama de Hubble-Lemaître, consideramos la muestra de Pantheon+ [29], consistente en 1701 curvas de luz. Estos datos son particularmente importantes, ya que en muchas ocasiones se utilizan para calibrar otras candelas estándar. Tradicionalmente usadas para costreñir los parámetros cosmológicos, también suelen combinarse con otras sondas, ya que solo cubren el intervalo $0.001 < z_{\text{SNe}} < 2.3$.

- **Brotos de Rayos Gamma (GRBs).** Las GRBs son eventos violentos y altamente energéticos que también pueden ser usados como candelas estándar. La principal ventaja que ofrecen es que alcanzan distancias mucho mayores que la mayoría de sondas cosmológicas, pero también son considerablemente más difíciles de calibrar. Seleccionamos la muestra que se obtiene en Ref. [30], donde se calibran los 116 GRBs presentados en Ref. [31] y se incluyen otros 25 (141 en total). Los datos de Pantheon (un subconjunto de Pantheon+) se utilizan para a bajo redshift. Es-

Referencias

- [1] Nabila Aghanim, Yashar Akrami, Mark Ashdown, J Aumont, C Baccigalupi, M Ballardini, AJ Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak, et al. Planck 2018 results-VI. Cosmological Parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, 2020.
- [2] Elcio Abdalla, Guillermo Franco Abellán, Amin Aboubrahim, Adriano Agnello, Özgür Akarsu, Yashar Akrami, George Alestas, Daniel Aloni, Luca Amendola, Luis A Anchordoqui, et al. Cosmology intertwined: A review of the particle physics, astrophysics, and cosmology associated with the cosmological tensions and anomalies. *Journal of High Energy Astrophysics*, 34:49–211, 2022.
- [3] Fulvio Melia. A candid assessment of standard cosmology. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 134(1042):121001, 2022.
- [4] Edward W. Kolb. A Coasting Cosmology. *The Astrophysical Journal*, 344:543, September 1989. doi: 10.1086/167825.
- [5] Fulvio Melia and ASH Shevchuk. The $R_h = ct$ universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 419(3):2579–2586, 2012.
- [6] Fulvio Melia. On recent claims concerning the $R_h = ct$ universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 446(2):1191–1194, 2015.
- [7] Edward Arthur Milne. World-structure and the expansion of the universe. *Zeitschrift für Astrophysik*, 6:1, 1933.
- [8] Aurélien Benoit-Lévy and Gabriel Chardin. Introducing the Dirac-Milne universe. *Astronomy & Astrophysics*, 537:A78, 2012.
- [9] Moncy V. John. Realistic coasting cosmology from the Milne model. *arXiv e-prints*, art. arXiv:1610.09885, October 2016. doi: 10.48550/arXiv.1610.09885.
- [10] Moncy V. John. $R_h = ct$ and the eternal coasting cosmological model. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 484(1):L35–L37, March 2019. doi: 10.1093/mnrasl/sly243.
- [11] Moncy V John and K Babu Joseph. A modified Ozer-Taha type cosmological model. *Physics Letters B*, 387(3):466–470, 1996.

- [12] Moncy V John and K Babu Joseph. A low matter density decaying vacuum cosmology from a complex metric. *Classical and Quantum Gravity*, 14(5):1115, 1997.
- [13] Moncy V John and K Babu Joseph. Generalized Chen-Wu type cosmological model. *Physical Review D*, 61:087304, 1999.
- [14] Geetanjali Sethi, Abha Dev, and Deepak Jain. Cosmological constraints on a power law universe. *Physics Letters B*, 624(3-4):135–140, September 2005. doi: 10.1016/j.physletb.2005.08.005.
- [15] Abha Dev, Margarita Safonova, Deepak Jain, and Daksh Lohiya. Cosmological tests for a linear coasting cosmology. *Physics Letters B*, 548(1-2):12–18, November 2002. doi: 10.1016/S0370-2693(02)02814-9.
- [16] Abha Dev, Meetu Sethi, and Daksh Lohiya. Linear coasting in cosmology and SNe Ia. *Physics Letters B*, 504(3):207–212, 2001.
- [17] Eleonora Di Valentino, Alessandro Melchiorri, and Joseph Silk. Planck evidence for a closed universe and a possible crisis for cosmology. *Nature Astronomy*, 4(2): 196–203, nov 2019. doi: 10.1038/s41550-019-0906-9.
- [18] Marc Kamionkowski and Nicolaos Toumbas. A low-density closed universe. *Physical Review Letters*, 77(4):587, 1996.
- [19] Murat Özer and M. O. Taha. A model of the universe free of cosmological problems. *Nuclear Physics B*, 287:776–796, January 1987. doi: 10.1016/0550-3213(87)90128-3.
- [20] Wei Chen and Yong-Shi Wu. Implications of a cosmological constant varying as R^{-2} . *Physical Review D*, 41(2):695, 1990.
- [21] R. E. Allen. Four testable predictions of instanton cosmology. In *Second international workshop on particle physics and the early universe (COSMO-98)*. ASCE, 1999. doi: 10.1063/1.59392.
- [22] Jose B. Almeida. An hypersphere model of the Universe - The dismissal of dark matter, 2004.
- [23] Martín López-Corredoira and Louis Marmet. Alternative ideas in cosmology. *International Journal of Modern Physics D*, 31(08), mar 2022. doi: 10.1142/s0218271822300142.

- [24] Alan H Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, 23(2):347, 1981.
- [25] Juan Casado. Linear expansion models vs. standard cosmologies: a critical and historical overview. *Astrophysics and Space Science*, 365(1):16, 2020.
- [26] Savita Gehlaut, Pranav Kumar, Geetanjali, and Daksh Lohiya. A Concordant “Freely Coasting Cosmology”. *arXiv e-prints*, art. astro-ph/0306448, June 2003. doi: 10.48550/arXiv.astro-ph/0306448.
- [27] Steven Weinberg. The cosmological constant problem. *Reviews of Modern Physics*, 61(1):1–23, January 1989. doi: 10.1103/RevModPhys.61.1.
- [28] Arturo Avelino and Robert P Kirshner. The dimensionless age of the universe: a riddle for our time. *The Astrophysical Journal*, 828(1):35, 2016.
- [29] Dillon Brout, Dan Scolnic, Brodie Popovic, Adam G Riess, Anthony Carr, Joe Zuntz, Rick Kessler, Tamara M Davis, Samuel Hinton, David Jones, et al. The Pantheon+ analysis: cosmological constraints. *The Astrophysical Journal*, 938(2):110, 2022.
- [30] Celia Escamilla-Rivera, Maryi Carvajal, Cristian Zamora, and Martin Hendry. Neural networks and standard cosmography with newly calibrated high redshift GRB observations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2022(04):016, 2022.
- [31] J. S. Wang, F. Y. Wang, K. S. Cheng, and Z. G. Dai. Measuring dark energy with the $E_{iso} - E_p$ correlation of gamma-ray bursts using model-independent methods. *Astronomy & Astrophysics*, 585:A68, January 2016. doi: 10.1051/0004-6361/201526485.
- [32] Guido Risaliti and Elisabeta Lusso. Cosmological constraints from the Hubble diagram of quasars at high redshifts. *Nature Astronomy*, 3(3):272–277, 2019.
- [33] E. Lusso, E. Piedipalumbo, G. Risaliti, M. Paolillo, S. Bisogni, E. Nardini, and L. Amati. Tension with the flat Λ CDM model from a high-redshift Hubble diagram of supernovae, quasars, and gamma-ray bursts. *Astronomy & Astrophysics*, 628:L4, August 2019. doi: 10.1051/0004-6361/201936223.

- [34] E Lusso, G Risaliti, E Nardini, G Bargiacchi, M Benetti, S Bisogni, S Capozziello, F Civano, L Eggleston, M Elvis, et al. Quasars as standard candles-III. Validation of a new sample for cosmological studies. *Astronomy & Astrophysics*, 642:A150, 2020.
- [35] Shadab Alam, Marie Aubert, Santiago Avila, Christophe Balland, Julian E Bautista, Matthew A Bershad, Dmitry Bizyaev, Michael R Blanton, Adam S Bolton, Jo Bovy, et al. Completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Cosmological implications from two decades of spectroscopic surveys at the Apache Point Observatory. *Physical Review D*, 103(8):083533, 2021.
- [36] Samuel R. Hinton, Eyal Kazin, Tamara M. Davis, Chris Blake, Sarah Brough, Matthew Colless, Warrick J. Couch, Michael J. Drinkwater, Karl Glazebrook, Russell J. Jurek, David Parkinson, Kevin A. Pimbblet, Gregory B. Poole, Michael Pracy, and David Woods. Measuring the 2D baryon acoustic oscillation signal of galaxies in WiggleZ: cosmological constraints. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 464(4):4807–4822, February 2017. doi: 10.1093/mnras/stw2725.
- [37] KC Chan, S Avila, A Carnero Rosell, I Ferrero, J Elvin-Poole, E Sanchez, H Camacho, A Porredon, M Crocce, TMC Abbott, et al. Dark Energy Survey Year 3 results: Measurement of the baryon acoustic oscillations with three-dimensional clustering. *Physical Review D*, 106(12):123502, 2022.
- [38] E. de Carvalho, A. Bernui, G.C. Carvalho, C.P. Novaes, and H.S. Xavier. Angular Baryon Acoustic Oscillation measure at $z=2.225$ from the SDSS quasar survey. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(04):064, apr 2018. doi: 10.1088/1475-7516/2018/04/064.
- [39] Arianna Favale, Adrià Gómez-Valent, and Marina Migliaccio. Cosmic chronometers to calibrate the ladders and measure the curvature of the Universe. A model-independent study, 2023.
- [40] H. I. Ringermacher and L. R. Mead. In Defense of an Accelerating Universe: Model Insensitivity of the Hubble Diagram. *arXiv e-prints*, art. arXiv:1611.00999, November 2016. doi: 10.48550/arXiv.1611.00999.
- [41] J. T. Nielsen, A. Guffanti, and S. Sarkar. Marginal evidence for cosmic acceleration

- from Type Ia supernovae. *Scientific Reports*, 6:35596, October 2016. doi: 10.1038/srep35596.
- [42] Fulvio Melia. Cosmological test using the Hubble diagram of high- z quasars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 489(1):517–523, October 2019. doi: 10.1093/mnras/stz2120.
- [43] Peter Schneider, Christopher Kochanek, and Joachim Wambsganss. *Gravitational lensing: strong, weak and micro: Saas-Fee advanced course 33*, volume 33. Springer Science & Business Media, 2006.
- [44] Savita Gahla. Testing Linearly Coasting Cosmology by Strong Lensing System. *arXiv e-prints*, art. arXiv:2301.06714, January 2023. doi: 10.48550/arXiv.2301.06714.
- [45] Shuo Cao, Marek Biesiada, Raphaël Gavazzi, Aleksandra Piórkowska, and Zong-Hong Zhu. Cosmology with Strong-lensing Systems. , 806(2):185, June 2015. doi: 10.1088/0004-637X/806/2/185.