

Tafelmitschriften zur Vorlesung „Beschreibungslogik“ im Sommersemester 2019

Dr. Jean Christoph Jung, Prof. Dr. Thomas Schneider
AG Theorie der Künstlichen Intelligenz
Fachbereich 3



Stand: 23. Juni 2020

Dieses Dokument ist noch unvollständig und wird regelmäßig aktualisiert.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2 | Grundlagen | 3 |
| 3 | Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen | 11 |
| 4 | Tableau-Algorithmen | 18 |
| 5 | Komplexität | 31 |
| 6 | Effiziente Beschreibungslogiken | 43 |
| 7 | ABoxen und Anfragebeantwortung | 52 |
| | Literaturverzeichnis | 53 |

Teil 2

Grundlagen

T2.1 Beispiele für \mathcal{ALC} -Konzepte

Mit den Konzeptnamen

Student, Naturwissenschaft, Professor, Emeritus, PflichtVL, VL, Einfach, Interessant, A, B

und den Rollennamen

studiert, hält, hatÜbungsaufgabe,
 r

kann man z. B. folgende zusammengesetzte \mathcal{ALC} -Konzepte bilden:

- $\text{Student} \sqcap \exists \text{studiert.Naturwissenschaft}$
(beschreibt Studierende, die mindestens eine Naturwissenschaft studieren)
- $\text{Professor} \sqcap \text{Emeritus} \sqcap \forall \text{hält}.\neg \text{PflichtVL}$
(beschreibt Professor*innen im Ruhestand, die keine Pflichtvorlesungen halten)
- $\text{VL} \sqcap \neg \text{PflichtVL} \sqcap \forall \text{hatÜbungsaufgabe} . (\text{Einfach} \sqcup \text{Interessant})$
(beschreibt Wahlvorlesungen, bei denen alle Übungsaufgaben einfach oder interessant sind)
- $A \sqcap \exists r. (\neg B \sqcup \forall r. A)$

(Die Beschreibungen in Klammern werden eigentlich erst richtig klar, wenn die Semantik definiert ist.)

T2.2 Beispiele für Interpretationen und Extensionen

Wir betrachten die Interpretation $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ mit

$$\begin{aligned}\Delta^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3, v_1, v_2\} \\ \text{Mensch}^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\ \text{Student}^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\ \text{Vorlesung}^{\mathcal{I}} &= \{v_1, v_2\} \\ \text{PflichtVL}^{\mathcal{I}} &= \{v_1\} \\ \text{WahlVL}^{\mathcal{I}} &= \{v_2\} \\ \text{hört}^{\mathcal{I}} &= \{(s_1, v_1), (s_2, v_1), (s_2, v_2), (s_3, v_1)\} \\ \text{bekanntMit}^{\mathcal{I}} &= \{(s_1, s_2), (s_2, s_1), (s_1, s_1), (s_2, s_2), (s_3, s_3)\}.\end{aligned}$$

Jede Interpretation kann in offensichtlicher Weise als (knoten- und kantenbeschrifteter) gerichteter Graph aufgefasst werden; für unsere Beispielinterpretation \mathcal{I} :



Beispiele für die Extensionen einiger zusammengesetzter Konzepte in dieser Interpretation:

$$\begin{aligned}
(\text{VL} \sqcap \text{PflichtVL})^{\mathcal{I}} &= \{v_1, v_2\} \cap \{v_1\} &&= \{v_1\} \\
(\neg \text{VL})^{\mathcal{I}} &= \Delta^{\mathcal{I}} \setminus \{v_1, v_2\} &&= \{s_1, s_2, s_3\} \\
(\text{Student} \sqcup \text{VL})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \cup \{v_1, v_2\} = \Delta^{\mathcal{I}} \\
(\exists \text{bekanntMit. Student})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\
(\exists \text{bekanntMit.} \exists \text{bekanntMit. Student})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\
(\forall \text{hört. PflichtVL})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_3, v_1, v_2\}
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile beachte man die Besonderheit der Werterestriktion (\forall), dass ein Domänenelement d , welches *keine* ausgehenden r -Kanten besitzt, immer eine Instanz von $\forall r.C$ ist, für jedes beliebige Konzept C .

T2.3 Semantik von \top und \perp

Es gelten:

$$\begin{aligned}
\top^{\mathcal{I}} &= (A \sqcup \neg A)^{\mathcal{I}} = A^{\mathcal{I}} \cup (\Delta^{\mathcal{I}} \setminus A^{\mathcal{I}}) = \Delta^{\mathcal{I}} \\
\perp^{\mathcal{I}} &= (A \sqcap \neg A)^{\mathcal{I}} = A^{\mathcal{I}} \cap (\Delta^{\mathcal{I}} \setminus A^{\mathcal{I}}) = \emptyset^{\mathcal{I}}
\end{aligned}$$

Dabei folgt die erste Gleichheit jeder Zeile aus der Definition von \top bzw. \perp auf Folie 2.9, die zweite Gleichheit aus der Semantik (Def. 2.2) und die dritte aus der Mengenlehre.

T2.4 Beispiele für „unerfüllbar“ und „subsumiert“

- (a) Das Konzept $C = \exists r.A \sqcap \forall r.\neg A$ ist *nicht* erfüllbar:

Angenommen, C sei erfüllbar, d. h. es gibt eine Interpretation \mathcal{I} mit $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$. Sei $d \in C^{\mathcal{I}}$. Wegen $d \in (\exists r.A)^{\mathcal{I}}$ gibt es ein Element $e \in A^{\mathcal{I}}$ mit $(d, e) \in r^{\mathcal{I}}$. Wegen $d \in (\forall r.\neg A)^{\mathcal{I}}$ gilt aber $e \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$, also $e \notin A^{\mathcal{I}}$, was ein Widerspruch zu $e \in A^{\mathcal{I}}$ ist. Also ist die Annahme falsch.

- (b) $\exists r.(A \sqcap B) \sqsubseteq \exists r.A \sqcap \exists r.B$:

Sei \mathcal{I} eine Interpretation und $d \in (\exists r.(A \sqcap B))^{\mathcal{I}}$. Dann gibt es ein Element $e \in (A \sqcap B)^{\mathcal{I}}$ mit $(d, e) \in r^{\mathcal{I}}$. Wegen $e \in A^{\mathcal{I}}$ gilt $d \in (\exists r.A)^{\mathcal{I}}$; wegen $e \in B^{\mathcal{I}}$ gilt $d \in (\exists r.B)^{\mathcal{I}}$. Also ist $d \in (\exists r.A \sqcap \exists r.B)^{\mathcal{I}}$.

Die Rückrichtung dieser Subsumtion gilt nicht – finde ein Gegenbeispiel, d. h. eine Interpretation \mathcal{I} mit $(\exists r.A \sqcap \exists r.B)^{\mathcal{I}} \not\subseteq (\exists r.(A \sqcap B))^{\mathcal{I}}$.

T2.5 Beispiele für TBoxen und deren Semantik

Wir betrachten folgende TBox.

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{StudentIn} & \equiv \text{Mensch} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung} \\ \text{Vorlesung} & \equiv \text{PflichtVL} \sqcup \text{WahlVL} \\ \text{StudentIn} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung} & \sqsubseteq \exists \text{bekanntMit.StudentIn} \\ \text{PflichtVL} \sqcap \text{WahlVL} & \sqsubseteq \perp \end{array} \right\}$$

Die Interpretation aus T2.2 ist Modell von \mathcal{T} . Sie erfüllt z. B. auch die folgende Konzeptinklusion.

$$\text{StudentIn} \sqsubseteq \exists \text{bekanntMit.Mensch} \quad (1)$$

Ein weiteres Modell ist z. B. folgende Interpretation \mathcal{J} .



\mathcal{J} erfüllt ebenfalls die Konzeptinklusion (1) sowie z. B. $\text{VL} \equiv \text{PflichtVL}$.

T2.6 Beispiele für „erfüllbar“ und „subsumiert“ bzgl. TBoxen

Sei \mathcal{T} die TBox aus dem vorangehenden Beispiel.

- (a) Das Konzept

$$C = \text{StudentIn} \sqcap \forall \text{hört.PflichtVL}$$

ist erfüllbar bezüglich \mathcal{T} , denn folgende Interpretation \mathcal{I}' ist ein Modell von \mathcal{T} mit $s_1 \in C^{\mathcal{I}'}$:



Ebenso ist die Interpretation \mathcal{I} aus T2.2 ein Modell von \mathcal{T} mit $s_1 \in C^{\mathcal{I}}$.

- (b) Das Konzept

$$C = \text{StudentIn} \sqcap \forall \text{hört.PflichtVL} \sqcap \exists \text{hört.WahlVL}$$

ist *unerfüllbar* bezüglich \mathcal{T} : Angenommen, C sei erfüllbar bzgl. \mathcal{T} . Dann gibt es ein Modell \mathcal{I} von \mathcal{T} mit einer Instanz $d \in C^{\mathcal{I}}$. Nach der Semantik von „ \sqcap “ (Def. 2.2) gelten (i) $d \in (\forall \text{hört.PflichtVL})^{\mathcal{I}}$ und (ii) $d \in (\exists \text{hört.WahlVL})^{\mathcal{I}}$. Wegen (ii) gibt es ein Element $e \in \text{WahlVL}^{\mathcal{I}}$ mit $(d, e) \in \text{hört}^{\mathcal{I}}$. Wegen (i) ist dann auch $e \in \text{PflichtVL}^{\mathcal{I}}$, also $e \in (\text{PflichtVL} \sqcap \text{WahlVL})^{\mathcal{I}}$. Weil \mathcal{I} jedoch ein Modell von \mathcal{T} ist, kann es wegen der Konzeptinklusion $\text{PflichtVL} \sqcap \text{WahlVL} \sqsubseteq \perp$ aus \mathcal{T} ein solches Element e nicht geben; ein Widerspruch. Also ist die Annahme falsch.

- (c) Für die Konzepte

$$C = \text{StudentIn} \quad \text{und} \quad D = \exists \text{bekanntMit.StudentIn}$$

gilt $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$: Sei \mathcal{I} ein Modell von \mathcal{T} und $d \in C^{\mathcal{I}}$, d. h. $d \in \text{StudentIn}^{\mathcal{I}}$. Zu zeigen ist $d \in D^{\mathcal{I}}$, d. h. $d \in (\exists \text{bekanntMit.StudentIn})^{\mathcal{I}}$.

Wegen der ersten Zeile von \mathcal{T} gilt $d \in (\exists \text{hört.Vorlesung})^{\mathcal{I}}$, also auch $d \in (\text{StudentIn} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung})^{\mathcal{I}}$. Mit Zeile 3 von \mathcal{T} folgt dann $d \in (\exists \text{bekanntMit.StudentIn})^{\mathcal{I}}$.

Dies ist bereits Schlussfolgern, denn wir haben implizites Wissen aus \mathcal{T} abgeleitet:

- (a) Es *kann* Student*innen geben, die nur Pflichtvorlesungen hören.
- (b) Es kann *keine* Student*innen geben, die nur Pflichtvorlesungen, aber mindestens eine Wahlvorlesung hören.
- (c) Jede*r Student*in ist mit mindestens einer/m Student*in bekannt.

T2.7 Beweis der Monotonie von \mathcal{ALC} (Lemma 2.7)

Lemma 2.7 Seien \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 TBoxen mit $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Dann gilt:

- (1) Wenn C erfüllbar bezüglich \mathcal{T}_2 ist, dann ist C erfüllbar bezüglich \mathcal{T}_1 .
- (2) Wenn $\mathcal{T}_1 \models C \sqsubseteq D$, dann $\mathcal{T}_2 \models C \sqsubseteq D$.

Beweis.

- (1) Sei C erfüllbar bezüglich \mathcal{T}_2 . Dann gibt es ein Modell \mathcal{I} von \mathcal{T}_2 mit $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$. Da \mathcal{I} Modell von \mathcal{T}_2 ist, erfüllt \mathcal{I} alle Konzeptinklusionen in \mathcal{T}_2 , also wegen $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ auch alle Konzeptinklusionen in \mathcal{T}_1 , und somit ist \mathcal{I} auch Modell von \mathcal{T}_1 . Also gibt es ein Modell \mathcal{I} von \mathcal{T}_1 mit $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$; d. h. C ist erfüllbar bezüglich \mathcal{T}_1 .
- (2) Wir beweisen die Kontraposition. Es gelte $\mathcal{T}_2 \not\models C \sqsubseteq D$.¹ Dann gibt es ein Modell \mathcal{I} von \mathcal{T}_2 mit $C^{\mathcal{I}} \not\subseteq D^{\mathcal{I}}$. Wie in (1) ist \mathcal{I} auch Modell von \mathcal{T}_1 , also $\mathcal{T}_1 \not\models C \sqsubseteq D$. \square

Auf der Folie steht auch: „Die Umkehrungen von (1) und (2) sind im Allgemeinen *nicht* richtig.“ Davon kann man sich mittels einfacher Gegenbeispiele überzeugen: z. B. ist mit $\mathcal{T}_1 = \emptyset$ und $\mathcal{T}_2 = \{A \sqsubseteq B\}$ die Umkehrung von (2) widerlegt, denn $\mathcal{T}_2 \models A \sqsubseteq B$, aber $\mathcal{T}_1 \not\models A \sqsubseteq B$.

T2.8 Beispiel für Subsumtion als Ordnungsrelation

Wir betrachten folgende TBox.

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{l} \text{PC} \sqsubseteq \text{Gerät} \sqcap \exists \text{hatTeil.CPU} \\ \text{PC} \equiv \text{Desktop} \sqcup \text{Laptop} \\ \text{Desktop} \sqsubseteq \neg \text{Laptop} \\ \text{MobilerPC} \equiv \text{PC} \sqcap \neg \text{Desktop} \end{array} \right\}$$

Die dritte Zeile von \mathcal{T} ist äquivalent zu $\text{Desktop} \sqcap \text{Laptop} \sqsubseteq \perp$, wie man leicht zeigt (probiere es selbst aus).

Die Ordnung „ \sqsubseteq bezüglich \mathcal{T} “ kann man durch folgendes Hasse-Diagramm darstellen:



Dass die Relation „ \sqsubseteq bezüglich \mathcal{T} “ *nicht* antisymmetrisch ist, zeigt sich in diesem Beispiel dadurch, dass der Knoten unten rechts zwei Beschriftungen hat, also $\mathcal{T} \models \text{Laptop} \equiv \text{MobilerPC}$. Wäre die Relation antisymmetrisch, dann dürfte nicht gleichzeitig $\mathcal{T} \models \text{Laptop} \sqsubseteq \text{MobilerPC}$ und $\mathcal{T} \models \text{MobilerPC} \sqsubseteq \text{Laptop}$ gelten.

¹Das Zeichen $\not\models$ steht für „nicht \models “, also bedeutet $\mathcal{T} \not\models C \sqsubseteq D$, dass die Beziehung $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ *nicht* gilt (d. h. bezüglich \mathcal{T} wird C *nicht* von D subsumiert).

T2.9 Wechselseitige Reduktion der Schlussfolgerungsprobleme

Lemma 2.9

- (1) Subsumtion ist polynomiell reduzierbar auf (Un)erfüllbarkeit:
 $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ gdw. $C \sqcap \neg D$ unerfüllbar bezüglich \mathcal{T}
- (2) Erfüllbarkeit ist polynomiell reduzierbar auf (Nicht-)Äquivalenz:
 C erfüllbar bezüglich \mathcal{T} gdw. $\mathcal{T} \not\models C \equiv \perp$
- (3) Äquivalenz ist polynomiell reduzierbar auf Subsumtion:
 $\mathcal{T} \models C \equiv D$ gdw. $\mathcal{T} \models \top \sqsubseteq (C \sqcap D) \sqcup (\neg C \sqcap \neg D)$

Beweis. Wir beweisen exemplarisch Punkt (1). Die Beweise der anderen zwei Punkte sind analog.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} \models C \sqsubseteq D & \text{ gdw. } \text{für alle Modelle } \mathcal{I} \text{ von } \mathcal{T} \text{ gilt } C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}} \\
 & \text{gdw. } \text{für alle Modelle } \mathcal{I} \text{ von } \mathcal{T} \text{ gilt } C^{\mathcal{I}} \cap (\Delta^{\mathcal{I}} \setminus D^{\mathcal{I}}) = \emptyset \\
 & \text{gdw. } \text{für alle Modelle } \mathcal{I} \text{ von } \mathcal{T} \text{ gilt } (C \sqcap \neg D)^{\mathcal{I}} = \emptyset \\
 & \text{gdw. } C \sqcap \neg D \text{ unerfüllbar bezüglich } \mathcal{T}
 \end{aligned}$$

Hier gilt das erste „gdw.“ wegen der Definition von Subsumtion (Def. 2.6), und die zweite Zeile ist äquivalent zur ersten, weil für beliebige Mengen M_1, M_2 gilt, dass $M_1 \subseteq M_2$ gdw. $M_1 \cap \bar{M}_2 = \emptyset$, wobei \bar{M}_2 das Komplement von M_2 ist. Man überzeuge sich davon anhand eines Venn-Diagramms. Die dritte Zeile ist schließlich äquivalent zur dritten wegen der Semantik von \sqcap und \neg (Def. 2.2), und die vierte ist äquivalent dazu wegen der Definition von Unerfüllbarkeit (Def. 2.6). \square

T2.10 Beispiel für inverse Rollen

Betrachte folgende \mathcal{ALC} -TBox:

$$\mathcal{T} = \{ \text{Professor} \sqsubseteq \text{Verrückt} \sqcap \exists \text{gibt.Vorlesung} \\
 \text{Vorlesung} \sqsubseteq \forall \text{wirdGegebenVon}.\neg \text{Verrückt} \}$$

Intuitiv sollte **Professor** unerfüllbar bezüglich \mathcal{T} sein; dies ist aber nicht der Fall, weil **Professor** in folgendem Modell von \mathcal{T} eine Instanz hat:



In \mathcal{ALCI} kann man die zweite Konzeptinklusion in \mathcal{T} durch

$$\text{Vorlesung} \sqsubseteq \forall \text{gibt}^-. \neg \text{Verrückt}$$

ersetzen. Dann wird **Professor** unerfüllbar bezüglich \mathcal{T} (aber \mathcal{T} hat immer noch Modelle).

T2.11 Beispiele für Zahlenrestriktionen

Definition einer Hand als ein Organ mit genau fünf Fingern:

$$\text{Hand} \equiv \text{Organ} \sqcap (\geq 5 \text{ hatTeil.Finger}) \sqcap (\leq 5 \text{ hatTeil.Finger})$$

Forderung, dass in jedem Semester mindestens zwei Wahlpflichtmodule angeboten werden:

$$\text{Semester} \sqsubseteq (\geq 2 \text{ angeboten.Wahlpflichtmodul})$$

T2.12 Beispiele für die Übersetzung von \mathcal{ALC} nach FO

Wir betrachten folgendes \mathcal{ALC} -Konzept.

$$C = \text{Mensch} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung}$$

Wir erhalten $\pi_x(C)$ anhand der induktiven Definition auf der Folie, indem wir mit den Konzeptnamen beginnen und uns zu komplexeren Konzepten „hocharbeiten“:

$$\begin{aligned}\pi_x(\text{Mensch}) &= \text{Mensch}(x) \\ \pi_y(\text{Vorlesung}) &= \text{Vorlesung}(y) \\ \pi_x(\exists \text{hört.Vorlesung}) &= \exists y(\text{hört}(x, y) \wedge \text{Vorlesung}(y)) \\ \pi_x(\text{Mensch} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung}) &= \text{Mensch}(x) \wedge \exists y(\text{hört}(x, y) \wedge \text{Vorlesung}(y)) \\ \text{also } \pi_x(C) &= \text{Mensch}(x) \wedge \exists y(\text{hört}(x, y) \wedge \text{Vorlesung}(y))\end{aligned}$$

Wenn wir außerdem die TBox

$$\mathcal{T} = \{\text{StudentIn} \equiv \text{Mensch} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung}\}$$

gegeben haben, dann ist

$$\pi(\mathcal{T}) = \forall x(\text{StudentIn}(x) \leftrightarrow \text{Mensch}(x) \wedge \exists y(\text{hört}(x, y) \wedge \text{Vorlesung}(y))).$$

Teil 3

Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen

T3.1 Beispiele für Bisimulationen

1. Für die Interpretationen



ist $\rho = \Delta^{\mathcal{I}_1} \times \Delta^{\mathcal{I}_2}$ eine Bisimulation.

2. Für die Interpretationen



ist $\rho = \{(d, x), (e, y), (e, y')\}$ eine Bisimulation.

3. Für die Interpretationen



ist $\rho = \{(d, x), (d, y), (e, z)\}$ eine Bisimulation.

T3.2 Beweis des Bisimulationstheorems

Theorem 3.2 Seien $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ Interpretationen, $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ und $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$.

Wenn $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$, dann gilt für alle \mathcal{ALC} -Konzepte C :

$$d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} \quad \text{gdw.} \quad d_2 \in C^{\mathcal{I}_2}$$

Beweis. Sei ρ eine Bisimulation zwischen \mathcal{I}_1 und \mathcal{I}_2 mit $d_1 \rho d_2$. Wir beweisen die Behauptung per Induktion über die Struktur von C .

Induktionsanfang. Hier ist $C = A$ für einen Konzeptnamen A . Nach Bedingung (1) für Bisimulationen (Definition 3.1) gilt wie gewünscht: $d_1 \in A^{\mathcal{I}_1}$ gdw. $d_2 \in A^{\mathcal{I}_2}$

Induktionsschritt. Wir müssen fünf Fälle gemäß des äußersten Konstruktors von C unterscheiden ($\neg, \sqcap, \sqcup, \exists, \forall$). Wegen der (leicht nachzuweisenden) Äquivalenzen

$$C \sqcup D \equiv \neg(\neg C \sqcap \neg D) \quad \text{und} \quad \forall r.C \equiv \neg \exists r.\neg C$$

genügt es, wenn wir uns auf die drei Fälle \neg, \sqcap, \exists beschränken.

$$C = \neg D$$

$$\begin{array}{lll} d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} & \text{gdw.} & d_1 \notin D^{\mathcal{I}_1} & (\text{Semantik „}\neg\text{“}) \\ & & d_2 \notin D^{\mathcal{I}_2} & (\text{Induktionsvoraussetzung}) \\ & & d_2 \in C^{\mathcal{I}_2} & (\text{Semantik „}\neg\text{“}) \end{array}$$

$$C = D \sqcap E$$

$$\begin{array}{lll} d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} & \text{gdw.} & d_1 \in D^{\mathcal{I}_1} \text{ und } d_1 \in E^{\mathcal{I}_1} & (\text{Semantik „}\sqcap\text{“}) \\ & & d_2 \in D^{\mathcal{I}_2} \text{ und } d_2 \in E^{\mathcal{I}_2} & (\text{Induktionsvoraussetzung}) \\ & & d_2 \in C^{\mathcal{I}_2} & (\text{Semantik „}\sqcap\text{“}) \end{array}$$

$$C = \exists r.D$$

Für die Richtung „ \Rightarrow “ argumentieren wir so:

$$\begin{array}{ll} d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} & \\ \Rightarrow \text{es gibt } e_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1} \text{ mit } (d_1, e_1) \in r^{\mathcal{I}_1} \text{ und } e_1 \in D^{\mathcal{I}_1} & (\text{Semantik „}\exists\text{“}) \\ \Rightarrow \text{es gibt } e_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2} \text{ mit } (d_2, e_2) \in r^{\mathcal{I}_2} \text{ und } e_1 \rho e_2 & (\text{Bedingung (2) Bisim.}) \\ \Rightarrow e_2 \in D^{\mathcal{I}_2} & (\text{Induktionsvoraus.}) \\ \Rightarrow d_2 \in (\exists r.D)^{\mathcal{I}_2} & (\text{Semantik „}\exists\text{“}) \end{array}$$

Das Argument für die Richtung „ \Leftarrow “ ist analog, unter Verwendung von Bedingung (3) für Bisimulationen. \square

T3.3 Nichtausdrückbarkeit konkreter Eigenschaften

Theorem 3.4 In \mathcal{ALC} sind *nicht ausdrückbar*:

- das \mathcal{ALCI} -Konzept $\exists r^{\neg}.\top$
- die \mathcal{ALCQ} -Konzepte
 - $(\leq n r.\top)$, für alle $n > 0$
 - $(\geq n r.\top)$, für alle $n > 1$

Beweis. Siehe Proposition 3.3 und 3.4 in [BHLS17].

T3.4 Gegenbeispiel für Rückrichtung Bisimulationstheorem

Behauptung. Es gibt Interpretationen \mathcal{I} und \mathcal{J} und $d \in \mathcal{I}$, $e \in \mathcal{J}$, so dass

- (i) $d \in C^{\mathcal{I}}$ gdw. $e \in C^{\mathcal{J}}$ für alle \mathcal{ALC} -Konzepte C ,
- (ii) aber $(\mathcal{I}, d) \not\sim (\mathcal{J}, e)$.

Beweis. Betrachte die folgenden Interpretationen \mathcal{I} und \mathcal{J} .

... Bild folgt ...

Es gilt (ii): versucht man, eine Bisimulation ρ mit $d \rho e$ zu konstruieren, so benötigt man wegen $(e, e') \in r^{\mathcal{I}}$ einen r -Nachfolger d' von d mit $d' \rho e'$. Da jeder r -Nachfolger von d aber nur endlich viele weitere Nachfolger hat, kann man wegen des unendlichen r -Pfads unterhalb von e' irgendwann nicht mehr Bedingung (3) von Bisimulationen gewährleisten.

Außerdem kann man mittels struktureller Induktion zeigen, dass (i) gilt. □

T3.5 Beispiel für ein Baummodell

Sei $C = A \sqcap \exists s.B \sqcap \forall s.\exists r.A$ und $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq \exists s.A\}$. Ein Baummodell von C und \mathcal{T} :



T3.6 Beispiel für das Unravelling

Wir betrachten folgende Interpretation \mathcal{I} .



Dann gibt es beispielsweise folgende d -Pfade:

- $\rho = ddedee$ mit $\text{end}(\rho) = e$
- $\rho' = deeed$ mit $\text{end}(\rho') = d$

Das Unravelling von \mathcal{I} an Stelle d gemäß Definition 3.7 ist folgende Interpretation \mathcal{J} .



T3.7 Beweis des Unravelling-Lemmas

Lemma 3.8 Für alle \mathcal{ALC} -Konzepte C und alle $p \in \Delta^{\mathcal{J}}$ gilt:

$$\text{end}(p) \in C^{\mathcal{I}} \quad \text{gdw.} \quad p \in C^{\mathcal{J}}$$

Beweis. Mit dem Bisimulationstheorem (Theorem 3.2) genügt es zu zeigen, dass $\text{end}(p)$ und p bisimilar sind, d. h. $(\mathcal{I}, \text{end}(p)) \sim (\mathcal{J}, p)$. Siehe dazu Lemma 3.22 in [BHLS17].

T3.8 Beweis der Baummodelleigenschaft von \mathcal{ALC}

Theorem 3.6 Wenn ein \mathcal{ALC} -Konzept C bezüglich einer \mathcal{ALC} -TBox \mathcal{T} erfüllbar ist, dann haben C und \mathcal{T} ein gemeinsames Baummodell \mathcal{I} .

Beweis. Siehe Theorem 3.24 in [BHLS17].

T3.9 Beispiel für Teilkonzepte

Sei $C = \forall r. \exists r. (A \sqcap B)$. Dann ist $\text{sub}(C) = \{A, B, A \sqcap B, \exists r. (A \sqcap B), \forall r. \exists r. (A \sqcap B)\}$.

Sei $\mathcal{T} = \{A \sqsubseteq \exists r. B, \forall r. B \sqsubseteq A\}$. Dann ist $\text{sub}(\mathcal{T}) = \{A, B, \exists r. B, \forall r. B\}$.

T3.10 Beispiel für Typen und Filtration

Seien $C = A \sqcap B$ und $\mathcal{T} = \{A \sqsubseteq \exists r.A\}$. Dann ist $\text{sub}(C, \mathcal{T}) = \{A, B, A \sqcap B, \exists r.A\}$.

Wir betrachten die folgende Interpretation \mathcal{I} .



Dann gilt für d und die vier Teilkonzepte in $\text{sub}(C, \mathcal{T})$: $d \in A^{\mathcal{I}}$, $d \notin B^{\mathcal{I}}$, $d \notin (A \sqcap B)^{\mathcal{I}}$ und $d \in (\exists r.A)^{\mathcal{I}}$. Also ist

$$t_{\mathcal{I}}(d) = \{A, \exists r.A\}.$$

Analog erhält man:

$$t_{\mathcal{I}}(e) = \{A, \exists r.A\} \quad t_{\mathcal{I}}(f) = \{A, B, A \sqcap B, \exists r.A\} \quad t_{\mathcal{I}}(g) = \{A, \exists r.A\}$$

Es gilt also $d \simeq e \simeq g \not\simeq f$, und somit gibt es zwei Äquivalenzklassen bezüglich \simeq :

$$[d] = \{d, e, g\} \quad [f] = \{f\}$$

Die Filtration von \mathcal{I} bezüglich C und \mathcal{T} gemäß Definition 3.17 ist dann folgende Interpretation \mathcal{J} .



T3.11 Beweis des Filtrationstheorems

Theorem 3.17 Sei \mathcal{I} ein Modell von C und \mathcal{T} , und sei \mathcal{J} die Filtration von \mathcal{I} bezüglich C und \mathcal{T} . Dann ist auch \mathcal{J} ein Modell von C und \mathcal{T} .

Beweis. Wir verwenden die folgende Hilfsaussage.

$$\text{Für alle } d \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ und } D \in \text{sub}(C, \mathcal{T}) \text{ gilt: } d \in D^{\mathcal{I}} \quad \text{gdw.} \quad [d] \in D^{\mathcal{J}}$$

Für den Beweis dieser Hilfsaussage siehe Lemma 3.15 in [BHLS17].

Da \mathcal{I} ein Modell von C und \mathcal{T} ist, gibt es ein Element $d \in C^{\mathcal{I}}$. Mit der Hilfsaussage folgt $[d] \in C^{\mathcal{J}}$; somit ist \mathcal{J} ein Modell von C .

Um zu zeigen, dass \mathcal{J} auch ein Modell von \mathcal{T} ist, betrachten wir eine beliebige Konzeptinklusion $D \sqsubseteq E \in \mathcal{T}$ und eine beliebige Instanz $[d] \in D^{\mathcal{J}}$. Mit der Hilfsaussage folgt $d \in D^{\mathcal{I}}$; also $d \in E^{\mathcal{I}}$ (da \mathcal{T} Modell von \mathcal{I} ist); also mit der Hilfsaussage $[d] \in E^{\mathcal{J}}$. \square

T3.12 \mathcal{ALCQI} hat nicht die endliche Modelleigenschaft

Betrachte die TBox $\mathcal{T} = \{(1) \top \sqsubseteq \exists r. \neg A, (2) \top \sqsubseteq (\leq 1 r^-. \top)\}$. Dann hat der Konzeptname A bezüglich \mathcal{T} nur *unendliche Modelle*:

Sei \mathcal{I} ein Modell von A und \mathcal{T} und $d_0 \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Wir müssen zeigen, dass $|\Delta^{\mathcal{I}}| = \infty$.

Da \mathcal{I} Modell von \mathcal{T} ist, muss es wegen (1) einen r -Nachfolger d_1 von d_0 geben mit $d_1 \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$. Da $d_0 \in A^{\mathcal{I}}$, muss $d_1 \neq d_0$ gelten.

Wegen (1) muss es wiederum einen r -Nachfolger d_2 von d_1 geben mit $d_2 \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$. Wie im vorigen Fall muss $d_1 \neq d_0$ gelten. Außerdem muss $d_2 \neq d_1$ gelten, da sonst d_1 zwei r -Vorgänger hätte (d_0 und d_1) und dann (2) verletzt wäre.

Dieses Argument kann man so fortsetzen und immer wieder die Existenz eines neuen Elements d_{i+1} folgern, dass verschieden von allen d_0, \dots, d_i sein muss. Deshalb muss $\Delta^{\mathcal{I}}$ unendlich sein.

T3.13 Anzahl der Interpretationen der Größe $\leq 2^n$

Behauptung. Sei $n = |C| + |\mathcal{T}|$. Dann gibt es höchstens $2^{2^{5n}}$ Interpretationen \mathcal{I} mit $|\Delta^{\mathcal{I}}| \leq 2^n$.

Beweis. Zunächst betrachten wir die Anzahl aller Interpretationen \mathcal{I} mit $|\Delta^{\mathcal{I}}| = 2^n$.

Jedes Element $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ kann in $A^{\mathcal{I}}$ sein oder nicht, für jeden der $\leq n$ Konzeptnamen A in $\text{sub}(C, \mathcal{T})$. Also gibt es $2^{2^n \cdot n}$ Möglichkeiten für die Extensionen der Konzeptnamen in C und \mathcal{T} .

Jedes Paar von Elementen $(d, e) \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$ kann in $r^{\mathcal{I}}$ sein oder nicht, für jeden der $\leq n$ Rollennamen r in $\text{sub}(C, \mathcal{T})$. Also gibt es $2^{2^n \cdot 2^n \cdot n}$ Möglichkeiten für die Extensionen der Rollennamen in C und \mathcal{T} .

Die Gesamtzahl der möglichen Extensionen aller Konzept- und Rollennamen in C und \mathcal{T} ist dann das Produkt dieser beiden Zahlen, also:

$$\begin{aligned} 2^{2^n \cdot n} \cdot 2^{2^n \cdot 2^n \cdot n} &= 2^{2^n \cdot n + 2^{2^n} \cdot n} \\ &\leq 2^{2^{2n} + 2^{3n}} \\ &\leq 2^{2 \cdot 2^{3n}} \\ &= 2^{2^{3n+1}} \\ &\leq 2^{2^{4n}} \end{aligned}$$

Betrachtet man nun die Anzahl der Interpretationen \mathcal{I} mit $|\Delta^{\mathcal{I}}| \leq 2^n$, dann sind dies maximal $2^n \cdot 2^{2^{4n}} = 2^{2^{4n} + n} \leq 2^{2^{5n}}$. \square

Teil 4

Tableau-Algorithmen

T4.1 Umwandlung in NNF

Lemma 4.2. Jedes Konzept kann in Linearzeit in ein äquivalentes Konzept in NNF umgewandelt werden.

Beweis. Dies geschieht durch erschöpfendes Anwenden folgender Regeln.

- Auflösen doppelter Negation: ersetze $\neg\neg C$ durch C
- de Morgan: ersetze $\neg(C \sqcap D)$ durch $\neg C \sqcup \neg D$; ersetze $\neg(C \sqcup D)$ durch $\neg C \sqcap \neg D$
- Dualität von \exists und \forall : ersetze $\neg\exists r.C$ durch $\forall r.\neg C$; ersetze $\neg\forall r.C$ durch $\exists r.\neg C$

Jede Regelanwendung ist äquivalenzerhaltend und schiebt die entsprechende Negation weiter nach innen (oder löst sie auf).

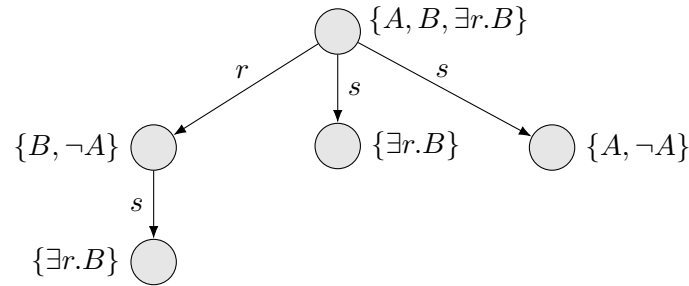
Man kann zeigen, dass linear viele Regelanwendungen ausreichen. \square

T4.2 Beispiel I-Baum

Sei $C_0 = A \sqcap \forall r.(\neg A \sqcap \exists r.B)$.

Dann ist $\text{sub}(C_0) = \{A, B, \neg A, \exists r.B, \neg A \sqcap \exists r.B, \forall r.(\neg A \sqcap \exists r.B), C_0\}$.

Der folgende Baum ist ein I-Baum für C_0 .



Beachte, dass die Knotenbeschriftung im Allgemeinen nicht der Semantik genügen muss; die Tableau-Regeln werden jedoch dafür sorgen, dass sie das (größtenteils) tut.

T4.3 Beispiel Tableau-Algorithmus

Sei $C_0 = (\exists r.A \sqcap \exists r.\neg A) \sqcap (\forall r.A \sqcup \forall r.B)$. Im Folgenden ist ein möglicher² Lauf des Tableau-Algorithmus auf C_0 angegeben. Nach den ersten drei Schritten liefert dieser folgendes Zwischenergebnis:

| | | |
|---------|---------------------------------------|------|
| | C_0 | (1) |
| \circ | $\exists r.A \sqcap \exists r.\neg A$ | (2a) |
| | $\forall r.A \sqcup \forall r.B$ | (2b) |
| | $\exists r.A, \exists r.\neg A$ | (3) |

²Da die Reihenfolge der Regelanwendungen nicht festgelegt ist, gibt es im Allgemeinen mehrere Läufe. Das Ergebnis (Menge der vollständigen I-Bäume) ist jedoch nicht von der Reihenfolge abhängig.

Dabei wurden folgende Regeln angewendet.

- (1) initialer Baum \mathcal{B}_{ini}
- (2a), (2b) \sqcap -Regel auf (1)
- (3) \sqcap -Regel auf (2a)

Als nächstes wenden wir die \sqcup -Regel auf $\forall r.A \sqcup \forall r.B$ (2b) an. Dadurch erhalten wir zwei I-Bäume \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 :



In \mathcal{B}_1 lässt sich die \exists -Regel auf die beiden Konzepte in (3) anwenden, wodurch jeweils ein neuer r -Nachfolger des Wurzelknotens erzeugt wird:



Nun lässt sich die \forall -Regel auf (4a) und den rechten Nachfolger anwenden (der linke ist bereits mit A beschriftet), und wir erhalten:



Dieser I-Baum ist vollständig (denn es ist keine weitere Regel anwendbar), und er enthält einen offensichtlichen Widerspruch wegen (6) und (7) – ab jetzt immer mit dem Symbol ⚡ gekennzeichnet.

Schließlich wenden wir in \mathcal{B}_2 dieselben Regeln an und erhalten folgenden I-Baum:



Es wurden also folgende Regeln angewendet:

- (8) \exists -Regel auf $\exists r.A$ (3)
- (9) \exists -Regel auf $\exists r.\neg A$ (3)
- (10) \forall -Regel auf (4b) und linken r -Nachfolger
- (11) \forall -Regel auf (4b) und rechten r -Nachfolger

Dieser Baum ist vollständig, enthält aber *keinen* offensichtlichen Widerspruch. Somit gibt der Algorithmus auf der Eingabe C_0 „erfüllbar“ zurück.

T4.4 Verzweigungsgrad der I-Bäume

Behauptung 1. Es werden nur I-Bäume mit einem Verzweigungsgrad von maximal $|C_0|$ generiert.

Beweis. Nur die \exists -Regel generiert Nachfolgerknoten, und zwar höchstens einen pro Konzept $\exists r.C$ in $\text{sub}(C_0)$. Nach Lemma 3.13 ist aber $|\text{sub}(C_0)| \leq C_0$. \square

T4.5 Tiefe der I-Bäume

Behauptung 2. Es werden nur I-Bäume mit einer Tiefe von maximal $|C_0|$ generiert.

Beweis. Dazu genügt es, folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung 2a. Wenn v ein Knoten mit Tiefe i ist, dann gilt für alle $C \in \mathcal{L}(v)$:

$$\text{rd}(C) \leq \text{rd}(C_0) - i \quad ((*))$$

Dabei zählen wir die Tiefe eines Knotens beginnend von der Wurzel, welche die Tiefe 0 hat. Behauptung 2a besagt also, dass die Rollentiefe der Konzepte in den Knotenbeschriftungen mit der Tiefe eines Knotens abnimmt.

Es ist leicht zu sehen, dass die gewünschte Behauptung 2 bereits aus Behauptung 2a folgt: Wegen der Tableau-Regeln ist jeder Knoten mit mindestens einem Konzept beschriftet

(der initiale Knoten mit C_0 und alle weiteren Knoten mit dem C aus der \exists -Regel). Wenn ein generierter I-Baum also eine Tiefe $k > |C_0|$ hätte, dann gäbe es einen Knoten v der Tiefe k und in dessen Beschriftung $\mathcal{L}(v)$ ein Konzept C . Wegen Behauptung 2a wäre dann aber $\text{rd}(C) < 0$, was nicht möglich ist.

Beweis von Behauptung 2a. Wir verwenden Induktion über die Anzahl der Regelnwendungen.

Induktionsanfang. Nach 0 Regelnwendungen gibt es nur den initialen Knoten v_{ini} mit $\mathcal{L}(v_{\text{ini}}) = \{C_0\}$. Ungleichung (*) folgt, da $i = 0$.

Induktionsschritt. Hier unterscheiden wir vier Fälle nach der Regel, durch deren Anwendung das Konzept C zur Knotenbeschriftung $\mathcal{L}(v)$ hinzugefügt wurde.

\sqcap -Regel. Vor der Anwendung der Regel gab es ein Konzept $C \sqcap D \in \mathcal{L}(v)$, und durch die Anwendung wurden C und D zu $\mathcal{L}(v)$ hinzugefügt. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\text{rd}(C \sqcap D) \leq \text{rd}(C_0) - i$, also auch $\text{rd}(C) \leq \text{rd}(C_0) - i$ wegen $C \leq \text{rd}(C \sqcap D)$. Analog für $\text{rd}(D)$.

\sqcup -Regel. Analog (probiert es selbst aus).

\exists -Regel. Vor der Anwendung der Regel gab es einen Vorgängerknoten v' von v mit $\exists r.C \in \mathcal{L}(v')$, und durch die Anwendung wurde (v', r, v) zu E hinzugefügt und $\mathcal{L}(v) = \{C\}$ gesetzt. Nun gilt:

$$\begin{aligned} \text{rd}(C) &= \text{rd}(\exists r.C) - 1 && \text{(Definition rd)} \\ &\leq \left(\text{rd}(C_0) - (i - 1) \right) - 1 && \text{(Induktionsvorauss.; } v' \text{ hat Tiefe } i - 1) \\ &= \text{rd}(C_0) - i \end{aligned}$$

\forall -Regel. Ähnlich (probiert es selbst aus). □

T4.6 Anzahl der Regelnwendungen pro I-Baum

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass für $k := |C_0|$ gilt:

$$k^k \cdot k \leq 2^{2k^2}$$

Das kann man wie folgt sehen:

$$\begin{aligned} k^k \cdot k &= k^{k+1} && \text{(Potenzgesetze)} \\ &\leq k^{2k} && \text{(da } k \geq 1) \\ &= (2^{\log k})^{2k} && \text{(Definition Zweierlogarithmus log)} \\ &= 2^{\log k \cdot 2k} && \text{(Potenzgesetze)} \\ &\leq 2^{k \cdot 2k} && \text{(da } \log(k) \leq k) \\ &= 2^{2k^2} \end{aligned}$$

□

T4.7 Letzter Schritt im Terminierungsbeweis

Wir ordnen jeder Menge M_i von I-Bäumen eine Multimenge MM_i wie folgt zu: Für jeden Baum $\mathcal{B} \in M_i$ enthält MM_i die Zahl

$m(\mathcal{B}) = „n \text{ minus die Anzahl } j \text{ der Regelanwendungen, mittels derer } \mathcal{B} \text{ generiert wurde}“.$

Somit ist MM_i eine Multimenge über der Grundmenge \mathbb{N} . Da $<$ auf \mathbb{N} wohlfundiert ist, ist mit Theorem 4.7 auch $<_{mul}$ auf $MM(\mathbb{N})$ wohlfundiert. Außerdem gilt $MM_i >_{mul} MM_{i+1}$ für jedes $i \geq 0$, denn mit jeder Regelanwendung wird in M_i ein I-Baum durch maximal zwei I-Bäume $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ ersetzt mit $m(\mathcal{B}_1), m(\mathcal{B}_2) < m(\mathcal{B})$; somit erhält man MM_{i+1} aus MM_i , indem man $m(\mathcal{B})$ durch die kleineren Zahlen $m(\mathcal{B}_1), m(\mathcal{B}_2)$ ersetzt.

Wegen der Wohlfundiertheit von $<_{mul}$ und der Beobachtung $MM_i >_{mul} MM_{i+1}$ muss die Folge der MM_i endlich sein. \square

T4.8 Verbleibender Beweis der Korrektheit

Behauptung. Für alle Konzepte C und Knoten $v \in V$ gilt: $C \in \mathcal{L}(v)$ impliziert $v \in C^{\mathcal{I}}$

Zunächst zeigen wir, dass diese Behauptung die Aussage des Theorems 4.8 impliziert.

Da $C_0 \in \mathcal{L}(v_{ini})$ in \mathcal{B}_{ini} , gilt auch $C_0 \in \mathcal{L}(v_{ini})$ in \mathcal{B} , denn Knotenbeschriftungen werden durch das Anwenden der Tableauregeln nicht gelöscht. Also ist wegen der obigen Behauptung $v_{ini} \in C_0^{\mathcal{I}}$, und damit ist C_0 erfüllbar.

Beweis der Behauptung per Induktion über die Struktur von C .

Induktionsanfang. Für Konzeptnamen $C = A$ gilt die Behauptung wegen der Definition von \mathcal{I} .

Induktionsschritt. Hier müssen wir für jeden der Operatoren $\neg, \sqcap, \sqcup, \exists, \forall$ einen gesonderten Fall betrachten, denn wegen der NNF kann man nun nicht mehr annehmen, dass \sqcup durch \sqcap oder \forall durch \exists ausgedrückt wird.

$C = \neg A$ für einen Konzeptnamen A . Da der I-Baum \mathcal{B} keinen offensichtlichen Widerspruch enthält, folgt aus $\neg A \in \mathcal{L}(v)$, dass $A \notin \mathcal{L}(v)$. Nach Definition von \mathcal{I} gilt dann aber $v \notin A^{\mathcal{I}}$, also $v \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$.

$C = D_1 \sqcap D_2$. Wenn $C \in \mathcal{L}(v)$ in \mathcal{B} , dann auch $D_1 \in \mathcal{L}(v)$ und $D_2 \in \mathcal{L}(v)$, da \mathcal{B} vollständig ist und somit insbesondere die \sqcap -Regel nicht anwendbar ist. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt daraus nun $v \in D_1^{\mathcal{I}}$ und $v \in D_2^{\mathcal{I}}$; wegen der Semantik von \sqcap gilt damit $v \in (D_1 \sqcap D_2)^{\mathcal{I}}$.

$C = D_1 \sqcup D_2$. Analog.

$C = \exists r.D$. Wegen $C \in \mathcal{L}(v)$ und da die \exists -Regel nicht anwendbar ist, gibt es $v' \in V$ mit $(v, r, v') \in E$ und $D \in \mathcal{L}(v')$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt aus dem letzteren, dass $v' \in D^{\mathcal{I}}$. Da wegen Definition von \mathcal{I} auch $(v, v') \in r^{\mathcal{I}}$ sein muss, folgt $v \in (\exists r.D)^{\mathcal{I}}$ mit der Semantik von \exists .

$C = \forall r.D$. Ähnlich. \square

T4.9 Beispiel für Realisierbarkeit

Das folgende Bild zeigt einen I-Baum \mathcal{B} (links) und eine Interpretation \mathcal{I} , die \mathcal{B} realisiert, (rechts) sowie die zugehörige Abbildung π gemäß Definition 4.9 (gestrichelte Pfeile).



Man beachte, dass die Knoten von \mathcal{B} (links) mit Mengen von Konzepten beschriftet sind, aber die Elemente von \mathcal{I} (rechts) mit Konzeptnamen – so, wie wir Interpretationen immer darstellen.

T4.10 Verbleibender Beweis der Vollständigkeit

Behauptung. Für alle $i \leq n$ ist M_i realisierbar.

Beweis. Per Induktion über i .

Induktionsanfang. $M_0 = \{\mathcal{B}_{\text{ini}}\}$ ist realisierbar, da \mathcal{B}_{ini} realisierbar ist, und zwar durch ein beliebiges Modell von C_0 (welches existiert, da C_0 nach Voraussetzung von Theorem 4.10 erfüllbar ist).

Induktionsschritt. Wir nehmen an, dass M_i realisierbar sei, und zeigen, dass dann auch M_{i+1} realisierbar ist. Dazu unterscheiden wir vier Fälle gemäß der Regel, mit der M_{i+1} aus M_i erzeugt wird. Sei also $\mathcal{B} = (V, E, \mathcal{L})$ ein realisierbarer Baum aus M_i , auf den eine Regel angewendet wird.

\sqcup -Regel. Dann entsteht M_{i+1} aus M_i , indem \mathcal{B} durch zwei Bäume $\mathcal{B}' = (V, E, \mathcal{L}')$ und $\mathcal{B}'' = (V, E, \mathcal{L}'')$ ersetzt wird, und es gibt einen Knoten $v \in V$ mit

- $C \sqcup D \in \mathcal{L}(v)$;
- $\mathcal{L}'(v) = \mathcal{L}(v) \cup \{C\}$, $\mathcal{L}''(v) = \mathcal{L}(v) \cup \{D\}$;
- $\mathcal{L}'(u) = \mathcal{L}''(u) = \mathcal{L}(u)$ für alle $u \neq v$.

Es genügt zu zeigen: wenn \mathcal{B} realisierbar, dann \mathcal{B}' realisierbar *oder* \mathcal{B}'' realisierbar.

Sei \mathcal{I} eine Interpretation, die \mathcal{B} realisiert, und $\pi : V \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}}$ die zugehörige Abbildung gemäß Definition 4.9. Dann gilt insbesondere $\pi(v) \in (C \sqcup D)^{\mathcal{I}}$. Nach Semantik von \sqcup ist dann $\pi(v) \in C^{\mathcal{I}}$ oder $\pi(v) \in D^{\mathcal{I}}$. Im ersten Fall realisiert \mathcal{I} den Baum \mathcal{B}' , im zweiten \mathcal{B}'' .

\sqcap -Regel. Analog, aber mit nur *einem* Baum \mathcal{B}' (probiert es selbst aus).

\exists -Regel. Dann entsteht M_{i+1} aus M_i , indem \mathcal{B} durch einen Baum $\mathcal{B}' = (V', E', \mathcal{L}')$ ersetzt wird, und es gibt Knoten $v, v' \in V$ mit

- $\exists r.C \in \mathcal{L}(v)$;
- $V' = V \uplus \{v'\}$, $E' = E \cup \{(v, r, v')\}$
- $\mathcal{L}'(v') = \{C\}$;
- $\mathcal{L}'(u) = \mathcal{L}(u)$ für alle $u \neq v'$.

Es genügt zu zeigen: wenn \mathcal{B} realisierbar, dann \mathcal{B}' realisierbar.

Sei \mathcal{I} eine Interpretation, die \mathcal{B} realisiert, und $\pi : V \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}}$ die zugehörige Abbildung gemäß Definition 4.9. Dann gilt insbesondere $\pi(v) \in (\exists r.C)^{\mathcal{I}}$, also gibt es ein $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $(\pi(v), d) \in r^{\mathcal{I}}$ und $d \in C^{\mathcal{I}}$. Wenn man nun π erweitert um $\pi(v') = d$, dann bezeugt die resultierende Funktion, dass \mathcal{B}' durch \mathcal{I} realisiert wird.

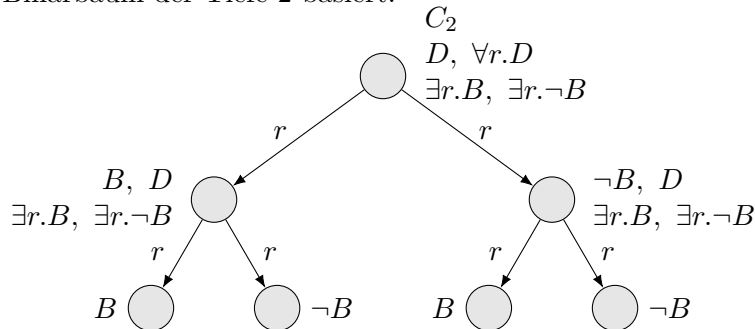
\forall -Regel. Ähnlich (probiert es selbst aus). □

T4.11 Beispiel für den Worst Case bei der Komplexitätsanalyse

Wir betrachten $n = 2$, also das Konzept $C_2 = \forall r^0.(\exists r.B \sqcap \exists r.\neg B) \sqcap \forall r^1.(\exists r.B \sqcap \exists r.\neg B)$. (Folie 4.25). Kürzt man nun das doppelt vorkommende Teilkonzept ab mit $D = \exists r.B \sqcap \exists r.\neg B$, dann ist

$$C_2 = D \sqcap \forall r.D.$$

Der Tableau-Algorithmus erzeugt mit der Eingabe C_2 folgenden I-Baum, der auf dem vollständigen Binärbaum der Tiefe 2 basiert:



Es sollte nun leicht zu sehen sein, dass für beliebiges n der entsprechende I-Baum auf dem vollständigen Binärbaum der Tiefe n basiert, welcher 2^n Knoten hat.

T4.12 Beispiel für Backjumping

Nehmen wir an, ein Knoten v in einem I-Baum sei markiert wie folgt, wobei die Konzepte in $\mathcal{L}(v)$ durchnummeriert werden.

$$\mathcal{L}(v) = \{ \underbrace{(\exists r.A) \sqcup B}_{(1)}, \underbrace{A_1 \sqcup A'_1}_{(2)}, \dots, \underbrace{A_n \sqcup A'_n}_{(n+1)}, \underbrace{\forall r.\neg A}_{(n+2)} \}$$

Nehmen wir weiterhin an, der Tableau-Algorithmus verarbeite die Konzepte aus $\mathcal{L}(v)$ in der angegebenen Reihenfolge und wählt bei den Disjunktionen immer zuerst das linke Disjunkt. Dann wird

- im 1. Schritt das Konzept $\exists r.A$ zu $\mathcal{L}(v)$ hinzugefügt (\sqcup -Regel auf (1) angewendet);
- im 2. Schritt ein r -Nachfolger v' zu v hinzugefügt und mit $\{A\}$ markiert (\exists -Regel auf $\exists r.A \in \mathcal{L}(v)$ angewendet);
- im den nächsten n Schritten die linken Disjunkte von $(2) - (n+1)$ zu $\mathcal{L}(v)$ hinzugefügt (\sqcup -Regel);
- im folgenden Schritt das Konzept $\neg A$ zu $\mathcal{L}(v')$ hinzugefügt (\forall -Regel auf $\forall r.\neg A \in \mathcal{L}(v)$ angewendet).

Danach sieht die „Umgebung“ von v im I-Baum wie folgt aus, wobei die Einträge der Knotenlabels mit der Nummer des Konzeptes aus $\mathcal{L}(v)$ versehen sind, von dem sie stammen (dies repräsentiert die „Dependenzmenge“).



Wegen des offensichtlichen Widerspruchs in v' (angezeigt durch \perp) muss Backtracking durchgeführt werden. Einfaches Backtracking probiert hier aber 2^n sinnlose Alternativen aus, nämlich sämtliche Kombination der jeweils zwei Disjunkte von $(2) - (n+1)$, und findet erst dann die Ursache des Problems: Der Konflikt wurde letztlich durch das linke Disjunkt $\exists r.A$ von (1) und Konzept $\forall r.\neg A$ $(n+2)$ ausgelöst. Mit Backjumping hingegen wird wie im Bild angedeutet Buch über die Herkunft der Konzepte geführt; deshalb kann direkt zur Ursache des Problems zurückgesprungen werden – hier zum 1. Schritt der obigen Aufzählung.

T4.13 Beispiel für Normalform der TBoxen

Wir betrachten die TBox

$$\mathcal{T} = \{A \sqsubseteq \exists r.B, A \sqcup B \sqsubseteq \forall r.B\}.$$

Beim Umwandeln in Normalform werden zuerst die beiden Konzeptinklusionen in eine einzige Konzeptinklusion mit \top auf der linken Seite umgewandelt, wie auf der Folie angegeben:

$$\{\top \sqsubseteq (\neg A \sqcup \exists r.B) \sqcap (\neg(A \sqcup B) \sqcup \forall r.B)\}$$

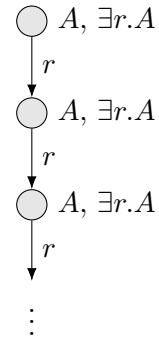
Nun muss noch NNF hergestellt werden, indem die rechte Negation „nach innen gezogen“ wird:

$$\mathcal{T}' = \{\top \sqsubseteq (\neg A \sqcup \exists r.B) \sqcap ((\neg A \sqcap \neg B) \sqcup \forall r.B)\}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass die bei resultierende TBox \mathcal{T}' immer äquivalent zur ursprünglichen TBox \mathcal{T} ist, d. h. \mathcal{T} und \mathcal{T}' haben dieselben Modelle.

T4.14 Beispiel für Nicht-Terminierung

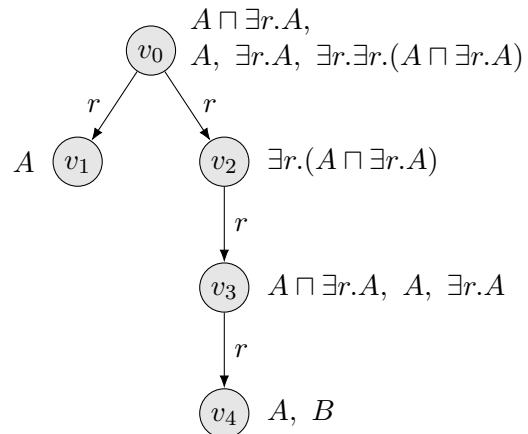
Sei $C_0 = A$ und $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq \exists r.A\}$ (bereits in Normalform). Wenn man das bisherige Tableauverfahren um die TBox-Regel erweitert, terminiert der Algorithmus auf der Eingabe (C_0, \mathcal{T}) nicht mehr, denn es sind immer abwechselnd die TBox-Regel und die \exists -Regel anwendbar, wodurch der nebenstehende unendliche I-Baum erzeugt wird.



T4.15 Beispiel für Blockierung

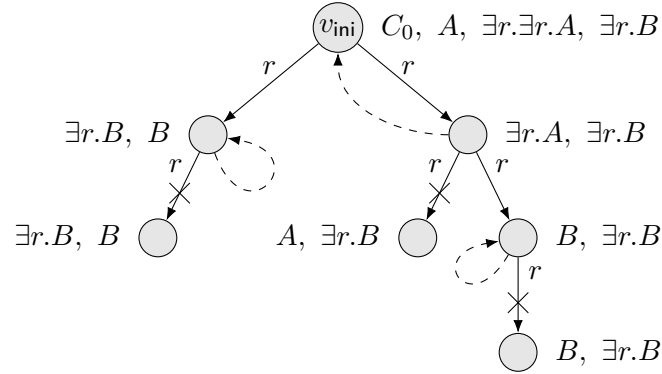
Im nebenstehenden I-Baum ist/sind

- v_1 direkt blockiert durch v_0 ;
- v_3 direkt blockiert durch v_0 ;
- v_1, v_3, v_4 blockiert;
- v_0, v_2 *nicht* blockiert.



T4.16 Beispiel für die \exists' -Regel

Seien $C_0 = A \sqcap \exists r. \exists r. A$ und $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq \exists r. B\}$. Dann erzeugt das Tableauverfahren mit der neuen \exists' -Regel (und Blockierung) folgenden I-Baum.



Blockierte Knoten sind dadurch gekennzeichnet, dass die eingehende r -Kante durchkreuzt ist. Alle blockierten Knoten in diesem Beispiel sind direkt blockiert.

Die gestrichelten Pfeile zeigen an, durch welches Element der blockierte Nachfolger blockiert wird. Sie sind genau genommen nicht Bestandteil des I-Baums, aber sie werden bei der Modellkonstruktion im Korrektheitsbeweis nützlich sein.

T4.17 Verbleibender Beweis der Korrektheit (mit TBoxen)

Behauptung. Für alle Konzepte C und Knoten $v \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gilt: $C \in \mathcal{L}(v)$ impliziert $v \in C^{\mathcal{I}}$

Man beachte, dass die Behauptung nur über die $v \in \Delta^{\mathcal{I}}$ eine Aussage macht, also über die im vollständigen I-Baum \mathcal{B} *unblockierten* Knoten.

Zunächst zeigen wir, dass diese Behauptung die Aussage des Theorems 4.13 impliziert.

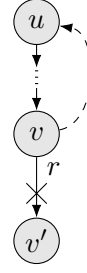
Da $C_0 \in \mathcal{L}(v_{\text{ini}})$, gilt nach der obigen Behauptung $v_{\text{ini}} \in C_0^{\mathcal{I}}$. Da außerdem die TBox-Regel nicht mehr anwendbar ist (\mathcal{B} ist vollständig), gilt $C_{\mathcal{T}} \in \mathcal{L}(v)$ für alle $v \in V$. Wegen der Behauptung ist somit \mathcal{I} auch ein Modell von \mathcal{T} .

Beweis der Behauptung per Induktion über die Struktur von C . Der Induktionsanfang ($C = A$) und die Fälle $C = \neg A$, $C = D_1 \sqcap D_2$, $C = D_1 \sqcup D_2$ im Induktionsschritt sind genauso wie in der Variante ohne TBoxen (T4.8). Für die übrigen zwei Fälle argumentieren wie folgt:

$C = \exists r. D$. Wegen $C \in \mathcal{L}(v)$ und da die \exists' -Regel nicht anwendbar ist, gibt es $v' \in V$ mit $(v, r, v') \in E$ und $D \in \mathcal{L}(v')$.

Falls v' unblockiert ist, folgt $(v, v') \in r^{\mathcal{I}}$ nach Definition von \mathcal{I} und $v' \in D^{\mathcal{I}}$ nach Induktionsvoraussetzung.

Falls v' blockiert ist, argumentieren wir wie folgt: da der direkte Vorgänger von v' der unblockierte Knoten v ist, gibt es einen *unblockierten* Vorgänger u von v' , durch den v' *direkt* blockiert ist, siehe nebenstehende Skizze. (Der Knoten u kann, aber muss nicht mit v übereinstimmen; siehe das vorangehende Beispiel). Nach Definition von \mathcal{I} ist $(v, u) \in r^{\mathcal{I}}$. Da außerdem $D \in \mathcal{L}(v') \subseteq \mathcal{L}(u)$ gilt, ist $u \in D^{\mathcal{I}}$ nach Induktionsvoraussetzung.



In beiden Fällen folgt $v \in (\exists r.D)^{\mathcal{I}}$.

$C = \forall r.D$. Um zu zeigen, dass $v \in (\forall r.D)^{\mathcal{I}}$, betrachten wir ein beliebiges Element u mit $(v, u) \in r^{\mathcal{I}}$ und müssen zeigen, dass $u \in D^{\mathcal{I}}$.

Nach Definition von $r^{\mathcal{I}}$ gibt es wegen $(v, u) \in r^{\mathcal{I}}$ zwei mögliche Fälle:

- (1) $(v, r, u) \in E$ für einen *unblockierten* Knoten u . Da die \forall -Regel nicht anwendbar ist, gilt $D \in \mathcal{L}(u)$, also nach Induktionsvoraussetzung $u \in D^{\mathcal{I}}$.
- (2) $(v, r, v') \in E$ für einen Knoten v' , der durch u direkt blockiert wird; siehe wieder die obige Skizze. Da die \forall -Regel nicht anwendbar ist, gilt $D \in \mathcal{L}(v')$. Da außerdem $\mathcal{L}(v') \subseteq \mathcal{L}(u)$, folgt auch hier $D \in \mathcal{L}(u)$ und nach IV $u \in D^{\mathcal{I}}$. \square

T4.18 Tiefe der I-Bäume (mit TBoxen)

Behauptung. Es werden nur I-Bäume mit einer Tiefe von maximal 2^k generiert, wobei $k = |C_0| + |\mathcal{T}|$.

Beweis. Angenommen, es werde ein I-Baum der Tiefe $> 2^k$ erzeugt. Dazu muss irgendwann die \exists' -Regel auf einen Knoten v der Tiefe 2^k angewendet werden. Es gibt also einen Pfad v_0, \dots, v_{2^k} von der Wurzel $v_0 = v_{\text{ini}}$ zum Knoten $v_{2^k} = v$ (zeichnet den Baum und den Pfad selbst auf). Auf diesem Pfad gibt es $2^k + 1$ Knoten. Da es aber nur $2^{\text{sub}(C_0, \mathcal{T})} \leq 2^k$ mögliche Knotenbeschriftungen gibt, muss es nach dem Schubfachprinzip zwei verschiedene Knoten v_i, v_j auf dem Pfad geben mit derselben Beschriftung $\mathcal{L}(v_i) = \mathcal{L}(v_j)$. Also ist v_j blockiert und damit auch v , was ein Widerspruch zur oben gefolgerten Anwendung der \exists' -Regel ist. Damit ist die Annahme widerlegt und die Behauptung bewiesen. \square

T4.19 Beispiel für Absorption

Wir betrachten die TBox, die aus folgenden zwei Konzeptinklusionen besteht.

$$(1) \ A \sqsubseteq C \quad (2) \ A \sqcap C' \sqsubseteq D'$$

Die zweite kann man umformen in die äquivalente Konzeptinklusion

$$(2') \ A \sqsubseteq \neg C' \sqcup D'$$

und dann in (1) „absorbieren“, d. h. die folgende Konzeptinklusion ist äquivalent zur ursprünglichen TBox:

$$A \sqsubseteq C \sqcap (\neg C' \sqcup D')$$

Bringt man diese Konzeptinklusion in Normalform $\top \sqsubseteq C_{\mathcal{T}}$, dann sind zwei Disjunktionen ineinander geschachtelt; also erzeugt das Tableauverfahren 3 I-Bäume (probiert es aus). Im Gegensatz dazu treten bei der Normalisierung von (1) und (2) zwei Disjunktionen getrennt voneinander auf; also erzeugt das Tableauverfahren 4 I-Bäume. Durch Absorption hat man somit in diesem einfachen Beispiel eine nichtdeterministische Auswahl gespart.

Teil 5

Komplexität

T5.1 Beispiel für Typen

Wir betrachten die Eingabe $C_0 = A$ und $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq C_{\mathcal{T}}\}$ mit

$$C_{\mathcal{T}} = \exists r. \exists r. A \sqcap \forall r. A' \sqcap (\neg A \sqcup \neg A')$$

Dann ist die Menge der Sub-Konzepte also:

$$\text{sub}(C_0, \mathcal{T}) = \{A, C_{\mathcal{T}}, \exists r. \exists r. A, \exists r. A, \forall r. A', A', \neg A \sqcup \neg A', \neg A, \neg A'\}$$

Wegen $C_{\mathcal{T}} \in t$ für jeden Typen für C_0 und \mathcal{T} und der Typ-Bedingung für \sqcap , muss jeder Typ die Menge $M = \{C_{\mathcal{T}}, \exists r. \exists r. A, \forall r. A', \neg A \sqcup \neg A'\}$ enthalten. Man kann sich leicht überzeugen, dass es insgesamt sechs Typen für C_0 und \mathcal{T} gibt, nämlich:

$$\begin{aligned} t_0 &= M \cup \{\neg A, \neg A'\} & t'_0 &= M \cup \{\neg A, \neg A', \exists r. A\} \\ t_1 &= M \cup \{\neg A, A'\} & t'_2 &= M \cup \{\neg A, A', \exists r. A\} \\ t_2 &= M \cup \{A, \neg A'\} & t'_3 &= M \cup \{A, \neg A', \exists r. A\} \end{aligned}$$

Der Typ t'_0 ist schlecht in der Menge aller Typen: für $\exists r. A \in t'_0$ ist die Menge aus Definition 5.3 $\{A, A'\}$, aber kein Typ enthält A und A' . Analog kann man sich überlegen, dass t'_1 und t'_2 ebenfalls schlecht sind.

Intuitiv ist t'_0 schlecht aus folgendem Grund. Angenommen, es gäbe ein Modell \mathcal{I} von C_0 und \mathcal{T} in dem t'_0 realisiert wird, das heißt $t'_0 = \text{tp}_{\mathcal{I}}(d)$, für ein d . Da $\exists r. A \in t'_0$ und $\forall r. A' \in t'_0$ muss es ein e geben mit $e \in A^{\mathcal{I}}$ und $e \in A'^{\mathcal{I}}$. Dann enthält aber der (semantische) Typ $\text{tp}_{\mathcal{I}}(e)$ sowohl A als auch A' . Da in Modellen von \mathcal{T} jeder semantische Typ die Bedingungen für einen syntaktischen Typen erfüllt, müsste es einen solchen Typen in der Liste oben geben. Das ist jedoch nicht der Fall, also kann t'_0 nicht in einem Modell von C_0, \mathcal{T} realisiert werden.

Das Typeliminationsverfahren berechnet folgende Mengen:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{t_0, t_1, t_2, t'_0, t'_1, t'_2\} \\ \Gamma_1 &= \{t_0, t_1, t_2\} \\ \Gamma_2 &= \emptyset \end{aligned}$$

da man sich überlegen kann, dass t_0, t_1, t_2 schlecht in Γ_1 sind.

T5.2 Verbleibender Beweis der Korrektheit

Beispiel. Wir beginnen mit einem Beispiel für die Modellkonstruktion aus dem Korrektheitsbeweis. Sei $C_0 = A$ und $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq C_{\mathcal{T}}\}$ mit

$$C_{\mathcal{T}} = \forall r. \exists r. A \sqcap (\neg A \sqcup \exists r. A).$$

Damit ist die Menge der Teilkonzepte

$$\text{sub}(C_0, \mathcal{T}) = \{A, C_{\mathcal{T}}, \forall r. \exists r. A, \exists r. A, \neg A \sqcup \exists r. A, \neg A\}.$$

Ähnlich wie in T5.1 muss jeder Typ für C_0 und \mathcal{T} die Menge $M = \{C_{\mathcal{T}}, \forall r. \exists r. A, \neg A \sqcup \exists r. A\}$ enthalten. Es gibt also die folgenden Typen:

$$\begin{aligned} t_0 &= M \cup \{\neg A\} \\ t_1 &= M \cup \{A, \exists r. A\} \\ t_2 &= M \cup \{\neg A, \exists r. A\} \end{aligned}$$

Beachte, dass die Menge $M \cup \{A\}$ kein Typ ist wegen $\neg A \sqcup \exists r. A \in M$ und der \sqcup -Bedingung von Typen. Man kann sich leicht überzeugen, dass keiner von t_0, t_1, t_2 schlecht ist.

Das konstruierte Modell ist nun wie folgt:



Behauptung. Für alle $C \in \text{sub}(C_0, \mathcal{T})$ und alle $t \in \Gamma_i$ gilt:

$$C \in t \quad \text{impliziert} \quad t \in C^{\mathcal{I}}.$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch strukturelle Induktion über den Aufbau der Konzepte. Für den Induktionsanfang unterscheiden wir die beiden Fälle $C = A$ und $C = \neg A$, für einen Konzeptnamen A .

- Für $C = A$, gilt die Behauptung per Definition von \mathcal{I} .
- Für $C = \neg A \in t$ gilt wegen Bedingung 1 von Typen, dass $A \notin t$, also $t \notin A^{\mathcal{I}}$, wegen der Definition von \mathcal{I} . Daher auch $t \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$.

Für den Induktionsschritt müssen wir vier Fälle unterscheiden.

- Falls $C = D \sqcap D' \in t$, dann auch $D, D' \in t$ wegen Bedingung 2 von Typen. Mit der Induktionsvoraussetzung bekommen wir $t \in D^{\mathcal{I}}$ und $t \in D'^{\mathcal{I}}$. Aus der Semantik folgt nun $t \in (D \sqcap D')^{\mathcal{I}}$.

- Falls $C = D \sqcup D' \in t$, dann auch $D \in t$ oder $D' \in t$ wegen Bedingung 3 von Typen. Mit der Induktionsvoraussetzung bekommen wir $t \in D^{\mathcal{I}}$ oder $t \in D'^{\mathcal{I}}$. Aus der Semantik folgt nun $t \in (D \sqcup D')^{\mathcal{I}}$.
- Falls $C = \exists r.D \in t$, dann gibt es einen Typen $t' \in \Gamma_i$ sodass $\{D\} \cup \{E \mid \forall r.E \in t\} \subseteq t'$, da t nicht schlecht in Γ_i . Wegen der Definition von $r^{\mathcal{I}}$ gilt $(t, t') \in r^{\mathcal{I}}$. Außerdem bekommen wir $t' \in D^{\mathcal{I}}$ aus der Induktionsvoraussetzung. Daher auch $t \in (\exists r.D)^{\mathcal{I}}$.
- Falls $C = \forall r.D \in t$, dann sei $t' \in \Gamma_i$ ein beliebiger Typ mit $(t, t') \in r^{\mathcal{I}}$. Aus der Definition von $r^{\mathcal{I}}$ folgt dass $D \in t'$. Aus der Induktionsvoraussetzung bekommen wir $t' \in D^{\mathcal{I}}$. Daher auch $t \in (\forall r.D)^{\mathcal{I}}$.

Das beendet den Beweis der Behauptung und müssen nur noch argumentieren, dass das konstruierte \mathcal{I} ein Modell von C_0 und \mathcal{T} ist.

- Wir haben angenommen, dass $C_0 \in t_0$ für ein $t_0 \in \Gamma_i$. Wegen der Behauptung gilt also $t_0 \in C_0^{\mathcal{I}}$, also insbesondere $C_0^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$.
- Aus Bedingung 4 für Typen folgt dass $C_{\mathcal{T}} \in t$, für jedes $t \in \Gamma_i$. Wegen der Behauptung gilt also $t \in C_{\mathcal{T}}^{\mathcal{I}}$ für alle $t \in \Gamma_i = \Delta^{\mathcal{I}}$, und somit ist \mathcal{I} Modell von \mathcal{T} . \square

T5.3 Verbleibender Beweis der Vollständigkeit

Behauptung. $\Gamma \subseteq \Gamma_i$, für alle $i \leq k$.

Beweis per Induktion über i .

Induktionsanfang $i = 0$. Alle (semantischen) Typen in Γ erfüllen die Bedingungen 1-4 von syntaktischen Typen, daher ist $\Gamma \subseteq \Gamma_0$.

Induktionsschritt Sei $i > 0$ und $t \in \Gamma \subseteq \Gamma_{i-1}$. Zu zeigen: t ist nicht schlecht in Γ_{i-1} .

Sei $\exists r.C \in t$ und $S = \{C\} \cup \{D \mid \forall r.D \in t\}$.

Da $t \in \Gamma$ gibt es $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $t_{\mathcal{I}}(d) = t$.

\Rightarrow es gibt $e \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $(d, e) \in r^{\mathcal{I}}$ und $e \in D^{\mathcal{I}}$, für alle $D \in S$.

\Rightarrow $S \subseteq t_{\mathcal{I}}(e)$ und $t' = t_{\mathcal{I}}(e) \in \Gamma \subseteq \Gamma_{i-1}$.

\Rightarrow t ist nicht schlecht in Γ_{i-1} . \square

T5.4 Beispiel für ExpTime-Spiele

Wir betrachten folgende zwei Beispiele.

Spiel (a) ist wie folgt definiert.

- $\varphi = \neg(p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge \neg(q_1 \leftrightarrow q_2)$
- Spielerin 1 kontrolliert Variablen p_1, q_1 ; Spielerin 2 kontrolliert Variablen p_2, q_2 .
- π_0 belegt alle Variablen mit 0.

Das heißt, dass Spielerin 1 nur gewinnen kann, wenn die Variablen p_1, p_2 unterschiedlich belegt sind und ebenso die Variablen q_1, q_2 .

Folgendes ist ein möglicher Verlauf des Spiels.

| | p_1 | p_2 | q_1 | q_2 |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Anfangsbelegung π_0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Zug von Spielerin 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Zug von Spielerin 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Zug von Spielerin 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| Zug von Spielerin 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |

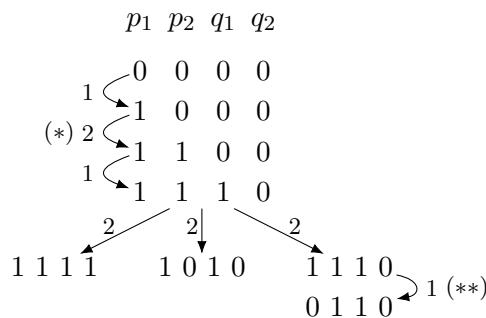
Ab diesem Spielstand kann Spielerin 2 gewinnen, wenn sie immer den letzten Zug von Spielerin 1 „rückgängig macht“ (bzw. passt, wenn Spielerin 1 das tut).

Spiel (b) ist definiert wie Spiel (a), außer dass die Formel geändert wird in

$$\varphi' = \varphi \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge q_1 \wedge q_2).$$

Durch das zusätzliche Disjunkt $(p_1 \wedge p_2 \wedge q_1 \wedge q_2)$ hat also Spielerin 1 eine weitere Möglichkeit zu gewinnen, nämlich wenn alle Variablen mit 1 belegt sind.

Drei mögliche Spielverläufe sind wie folgt dargestellt.



Dabei bedeutet die Verzweigung, dass hier drei mögliche Züge von Spielerin 2 in Betracht gezogen wurden. In den ersten beiden Fällen gewinnt Spielerin 1; im dritten Fall kann sie durch den mit (**) dargestellten Zug gewinnen. Also gewinnt Spielerin 1 in allen drei dargestellten Spielverläufen.

Allerdings kann es sein, dass Spielerin 2 statt des mit (*) dargestellten Zuges einen anderen Zug macht. Darauf kommen wir im folgenden Beispiel zurück.

T5.5 Beispiel für Gewinnstrategien

In Spiel (a) aus dem vorigen Beispiel hat Spielerin 2 folgende Gewinnstrategie.



Dabei zeigen die Kantenbeschriftungen in der 1. Ebene die Art des Zuges von Spielerin 2 an; die übrigen Beschriftungen kann man bei Bedarf leicht selbst ergänzen.

Die Einträge \vdots bedeuten, dass der Baum ab dem entsprechenden Knoten unendlich fortgesetzt wird. Die Konfigurationen dieser Knoten kommen bis auf eine Ausnahme im bereits gezeichneten Baum vor; also ist deren Fortsetzung eindeutig bestimmt. Die Ausnahme ist die Konfiguration $(1, 1111)$; dort kann man aber leicht selbst den Baum fortsetzen, bis man in wenigen Schritten in allen Pfaden Positionen erreicht, die bereits im gezeichneten Baum vorkommen.

In Spiel (b) hat Spielerin 2 *keine* Gewinnstrategie, denn wir haben im vorigen Beispiel bereits gesehen, dass Spielerin 1 gewinnen kann. Dazu muss man allerdings auch alle Spielverläufe betrachten, die sich ergeben, wenn Spielerin 2 anstelle des mit (*) markierten Zuges die verbleibenden zwei möglichen Züge macht (vervollständige selbst!).

T5.6 Verbleibender Beweis der Korrektheit, „ \Rightarrow “

Behauptung. \mathcal{I} ist ein Modell von W und \mathcal{T}_S .

Beweis. Wegen $W^{\mathcal{I}} = \{w\}$ ist $W^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$, und es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{I} jede der Konzeptinklusionen (1)–(8) erfüllt. Wir zeigen hier, dass (2) erfüllt wird; die Argumentation für die übrigen Fälle kann man leicht selbst ergänzen (probiere es aus!).

Um zu zeigen, dass

$$S_1 \sqsubseteq \exists r.(\neg V_0 \sqcap \dots \sqcap \neg V_{n-1}) \sqcap \bigcap_{i < k} \exists r.V_i \quad (2)$$

von \mathcal{I} erfüllt wird, betrachten wir eine beliebige Instanz von S_1 , d. h. ein Element $v \in S_1^{\mathcal{I}}$. Wir müssen zeigen, dass v auch eine Instanz der rechten Seite von (2) ist.

Da $\Delta^{\mathcal{I}} = V$ nach Definition von \mathcal{I} , muss v ein Knoten des Baums $B := (V, E, \ell)$ sein, der die Gewinnstrategie repräsentiert. Sei $\ell(v) = (i, \pi)$. Nach Definition von $S_1^{\mathcal{I}}$ (Folie 5.29) ist $i = 1$. Da B die Eigenschaft (c) von Gewinnstrategien erfüllt (Folie 5.23), gibt es Knoten $v_0, \dots, v_k \in V$ mit $(v, v_i) \in E$ und $\ell(v_i) = (2, \pi_i)$ für alle $i \leq k$, so dass π_0, \dots, π_k alle 1-Variationen von π sind. Nach Definition von $r^{\mathcal{I}}$ (Folie 5.29) folgt nun $(v, v_i) \in r^{\mathcal{I}}$ für alle $i \leq k$, und nach Definition von $V_j^{\mathcal{I}}$ gibt es

- $u_i \in \{v_0, \dots, v_k\}$ mit $u_i \in V_i^{\mathcal{I}}$, für alle $i \leq k$, und ein
- $u \in \{v_0, \dots, v_k\}$ mit $u \notin V_0^{\mathcal{I}} \cup \dots \cup V_{n-1}^{\mathcal{I}}$.

Also ist v eine Instanz der rechten Seite von (2). □

T5.7 Verbleibender Beweis der Korrektheit, „ \Leftarrow “

Behauptung. (V, E, ℓ) ist eine Gewinnstrategie für Spielerin 2.

Beweis. Wir zeigen, dass (V, E, ℓ) die vier Eigenschaften einer Gewinnstrategie (Folie 5.23) erfüllt. Dazu verwenden wir die Definition von (V, E, ℓ) von Folie 5.30 sowie die Tatsache, dass das zugrunde liegende Modell \mathcal{I} die Konzeptinklusionen (1)–(8) erfüllt (Folien 5.27–5.28).

- (a) wird wegen (1) und der Definition von (V, E, ℓ) erfüllt.
 (b) Sei $\ell(v) = (2, \pi)$. Dann ist $v \in S_2^{\mathcal{I}}$. Wegen (3) gibt es ein Element $v' \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $(v, v') \in r^{\mathcal{I}}$ sowie

- (i) $v' \in (\neg V_0 \sqcap \dots \sqcap \neg V_{n-1})^{\mathcal{I}}$ oder
 (ii) $v' \in V_i^{\mathcal{I}}$ für ein $i \in \{k, \dots, n-1\}$.

Im Fall (ii) garantiert (4), dass $v' \notin V_j^{\mathcal{I}}$ für alle $j \neq i$.

Sei nun $\ell(v') = (i', \pi')$. Wegen (5) und (6) ist somit in beiden Fällen π' eine 2-Variation von π . Außerdem liefert (7), dass $v' \in S_1^{\mathcal{I}}$, also $i' = 1$.

- (c) lässt sich ähnlich wie (b) zeigen, indem man (2) statt (3) nutzt.
 (d) gilt wegen (8). □

T5.8 Beispiel i -Typen und \mathcal{ALC} -Worlds

Sei $C_0 = A \sqcap \exists r. B \sqcap \exists r. \neg B \sqcap \forall r. \exists r. \neg A$. Dann ist $\text{rd}(C_0) = 2$ und die Menge der Subkonzepte:

$$\text{sub}(C_0) = \{C_0, A, \exists r. B, B, \exists r. \neg B, \neg B, \forall r. \exists r. \neg A, \exists r. \neg A, \neg A\}.$$

Beispiele für i -Typen, $i \leq 2$:

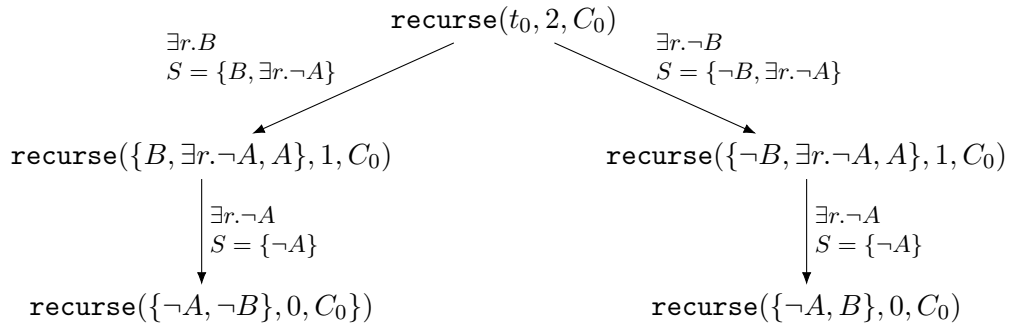
$$\begin{aligned} 0\text{-Typ: } & \{A, \neg B\} \\ 1\text{-Typ: } & \{A, B, \exists r. B, \exists r. \neg B\} \\ 2\text{-Typ: } & \{\neg A, \neg B, \exists r. B, \forall r. \exists r. \neg A\} \end{aligned}$$

$\mathcal{ALC}\text{-Worlds}(C_0)$ hat einen erfolgreichen Lauf:

Zunächst wird der initiale Typ $t_0 = \{C_0, A, \exists r. B, \exists r. \neg B, \forall r. \exists r. \neg A, \neg B\}$ geraten und folgender Aufruf zu **recurse** getätigt:

$$\text{recurse}(t_0, 2, C_0)$$

Der Lauf kann nun als *Aufrufbaum* dargestellt werden, wobei die Kanten immer mit der “verursachenden” Existenzrestriktion und dem entsprechenden S beschriftet sind:



Aus dem Aufrufbaum von **recurse** können wir nun das folgende Modell ablesen:



T5.9 Beispiel eines PSpace-Spiels

Wir betrachten folgendes Beispiel.

- $\varphi = (\neg p_1 \rightarrow p_2) \wedge (\neg p_2 \rightarrow (p_4 \rightarrow \neg p_3))$
- Spielerin 1 kontrolliert Variablen p_1, p_3 ; Spielerin 2 kontrolliert Variablen p_2, p_4 ; die Variablen werden genau in der Reihenfolge p_1, \dots, p_4 gespielt.
- (Eine Anfangsbelegung gibt es nicht.)

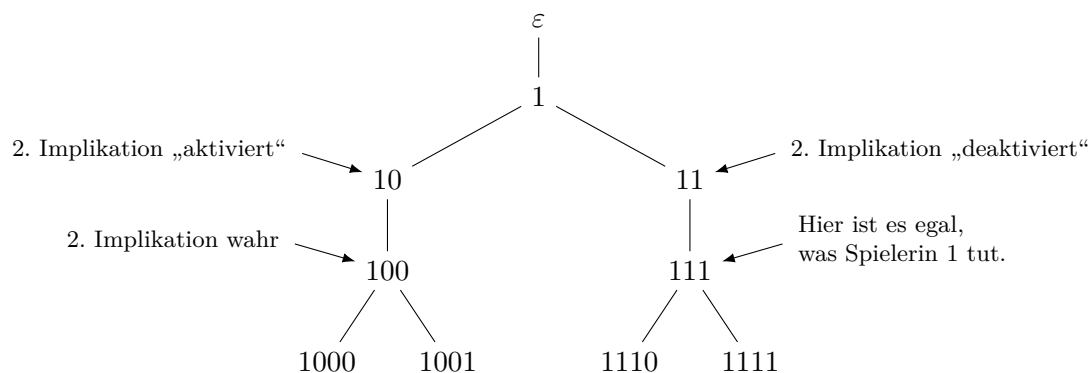
Jeder Spielverlauf besteht somit aus genau 4 Zügen. Ein möglicher Spielverlauf, bei dem beide Spielerinnen „optimal“ spielen, ist folgender:

- Spielerin 1 belegt p_1 mit 1.
Sonst würde Spielerin 2 gewinnen, indem sie p_2 mit 0 belegt, wodurch die erste Implikation und damit die gesamte Formel nicht erfüllt ist.
- Spielerin 2 belegt p_2 mit 0.
Sonst wäre die zweite Implikation immer wahr, und Spielerin 1 würde gewinnen.
- Spielerin 1 belegt p_3 mit 0.
Damit wird die dritte Implikation wahr und somit auch die zweite, egal wie p_4 belegt wird.
- Spielerin 2 belegt p_4 mit 0.

Die gespielte Belegung 1000 erfüllt φ ; somit gewinnt Spielerin 1.

T5.10 Beispiel für eine Gewinnstrategie

Aus den Überlegungen im vorangegangenen Beispiel ergibt sich folgende Gewinnstrategie für Spielerin 1.



Dabei sind die (partiellen) Belegungen gemäß Definition 5.22 als Wörter notiert; in der Wurzel (leeres Wort ε) ist also noch keine Variable gesetzt, im Kind 1 wurde p_1 auf 1 gesetzt usw. In jedem Blatt steht eine Belegung, die φ erfüllt.

T5.11 Beispiele für Rollenwertvergleiche

1. *globaler Rollenwertvergleich*: wie auf Folie 5.64 unten

$$\text{hört} \circ \text{angebotenVon} \sqsubseteq \text{eingeschriebenAn}$$

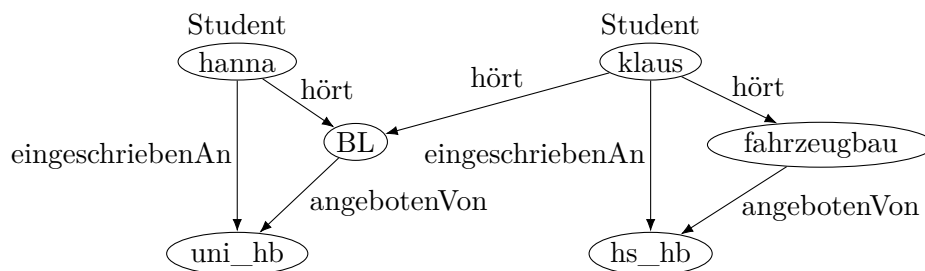
Umgangssprachlich: “wer einen Kurs hört, der irgendwo angeboten wird, ist ebenda eingeschrieben”

2. *lokaler Rollenwertvergleich*:

$$\text{KorrekterStudent} \equiv \text{Student} \sqcap (\text{hört} \circ \text{angebotenVon} \sqsubseteq \text{eingeschriebenAn})$$

Umgangssprachlich: “korrekte Studierende sind Studierende, die an allen Einrichtungen, an denen sie einen Kurs hören, auch eingeschrieben sind”

Betrachten wir die folgende Interpretation \mathcal{I} :



Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\text{hört} \circ \text{angebotenVon})^{\mathcal{I}}(\text{hanna}) &= \{\text{uni_hb}\} \\ (\text{hört} \circ \text{angebotenVon})^{\mathcal{I}}(\text{klaus}) &= \{\text{uni_hb}, \text{hs_hb}\} \\ (\text{hört} \circ \text{angebotenVon})^{\mathcal{I}}(\text{BL}) &= \emptyset \\ &\vdots \\ (\text{eingeschriebenAn})^{\mathcal{I}}(\text{hanna}) &= \{\text{uni_hb}\} \\ (\text{eingeschriebenAn})^{\mathcal{I}}(\text{klaus}) &= \{\text{hs_hb}\} \\ (\text{eingeschriebenAn})^{\mathcal{I}}(\text{BL}) &= \emptyset \\ &\vdots \end{aligned}$$

Und damit:

$$\underbrace{(\text{hört} \circ \text{angebotenVon} \sqsubseteq \text{eingeschriebenAn})^{\mathcal{I}}}_{\rho} = \{\text{hanna}, \text{BL}, \text{fahrzeugbau}, \text{uni_hb}, \text{hs_hb}\}$$

Deshalb gilt:

- $\text{hanna} \in \text{KorrekterStudent}^{\mathcal{I}}$, aber $\text{klaus} \notin \text{KorrekterStudent}^{\mathcal{I}}$;
- \mathcal{I} erfüllt ρ *nicht*;

T5.12 Formalisierung von Dominoproblemen

Die Instanz des Dominoproblems ist $\mathcal{D} = (T, H, V)$:

$$T = \{t_1, t_2, t_3\}$$

$$H = \{(t_1, t_2), (t_2, t_1), (t_3, t_3)\}$$

$$V = \{(t_1, t_3), (t_2, t_3), (t_3, t_1), (t_3, t_2)\}$$

Beachtet: die Quadrate dürfen *nicht gedreht* werden.

Die angegebene Lösung (Folie 5.69) ist dann:

$$\tau(0,0) = t_1, \quad \tau(1,0) = t_2, \quad \tau(2,0) = t_1, \dots,$$

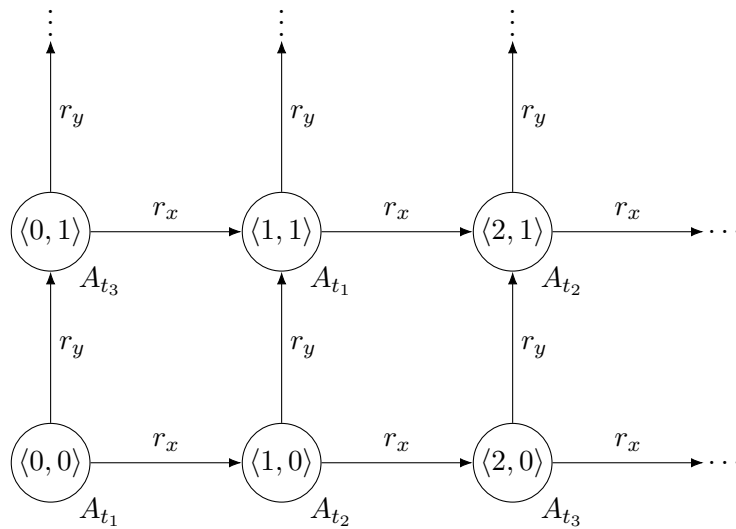
$$\tau(0,1) = t_3, \quad \tau(1,1) = t_3, \quad \dots,$$

$$\tau(0,2) = t_1, \quad \dots,$$

\vdots

T5.13 \Rightarrow -Richtung von Lemma 5.33

Die konstruierte Interpretation sieht wie folgt aus (die Konzeptnamen A_{t_i} sind zufällig gewählt):



Man kann relativ leicht zeigen, dass die konstruierte Interpretation alle Konzeptinklusionen der TBox $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ erfüllt (siehe Fragebogen).

T5.14 \Leftarrow -Richtung von Lemma 5.33 – Vorbereitung

Sei \mathcal{I} ein Modell von \top bzgl. \mathcal{T} . Wir konstruieren in zwei Schritten die Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}}$.

Schritt 1:

- Setze $f(0, 0) = d$ für ein beliebiges $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$.
- Für alle $i = 0, 1, 2, \dots$:
 - wähle $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $(f(i, i), d) \in r_x^{\mathcal{I}}$ und setze $f(i + 1, i) = d$
 - wähle $e \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $(f(i + 1, i), e) \in r_y^{\mathcal{I}}$ und setze $f(i + 1, i + 1) = e$

Beachte: Alle diese Elemente d, e existieren, da \mathcal{I} die Konzeptinklusion (1)

$$\top \sqsubseteq \exists r_x. \top \sqcap \exists r_y. \top$$

erfüllt.

Schritt 2: Wir “vervollständigen” f indem wir die folgenden Schritte erschöpfend anwenden:

- Wenn $f(i, j)$, $f(i + 1, j)$ und $f(i + 1, j + 1)$ definiert sind und $f(i, j + 1)$ noch nicht, dann wähle $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $(f(i, j), d) \in r_y^{\mathcal{I}}$ und $(d, f(i + 1, j + 1)) \in r_x^{\mathcal{I}}$ und setze $f(i, j + 1) = d$.
- Wenn $f(i, j)$, $f(i, j + 1)$ und $f(i + 1, j + 1)$ definiert sind und $f(i + 1, j)$ noch nicht, dann wähle $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $(f(i, j), d) \in r_x^{\mathcal{I}}$ und $(d, f(i + 1, j + 1)) \in r_y^{\mathcal{I}}$ und setze $f(i + 1, j) = d$.

Alle diese Elemente d existieren da \mathcal{I} die Rollenwertvergleiche (4) und die Konzeptinklusion (1) erfüllt.

T5.15 \Leftarrow -Richtung von Lemma 5.33

Wir zeigen, dass τ eine Lösung ist:

- τ ist wohldefiniert: Wegen Konzeptinklusion (2) gibt es für jedes $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ genau ein t sodass $d \in A_t^{\mathcal{I}}$. Damit gibt es für jedes $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ genau ein t mit $\tau(i, j) = t$.
- τ ist eine Lösung: Wegen Konzeptinklusionen (3) sind die horizontalen bzw. vertikalen Passbedingungen erfüllt.

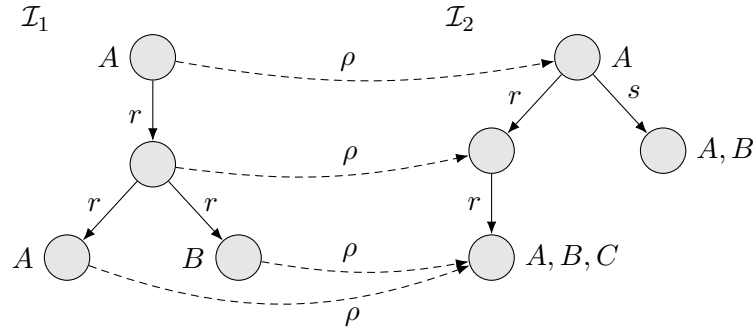
Dokument wird fortgesetzt.

Teil 6

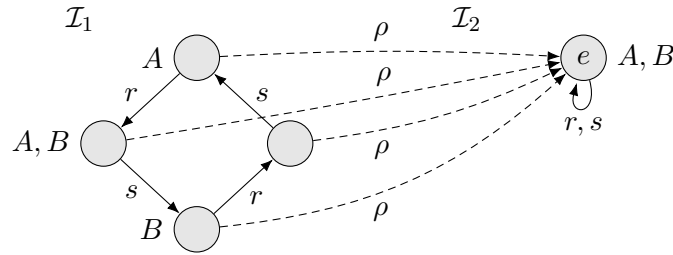
Effiziente Beschreibungslogiken

T6.1 Beispiele Simulation

Beispiel 1



Beispiel 2



Wenn nur die Konzept- und Rollennamen A, B, r, s verwendet werden, gilt mit \mathcal{I}_2 aus Beispiel 2 sogar für *jede* Interpretation \mathcal{I} und *jedes* Element $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$:

$$(\mathcal{I}, d) \preceq (\mathcal{I}_2, e)$$

T6.2 Beweis des Simulationstheorems

Theorem 6.3 Seien $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ Interpretationen, $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ und $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$.

Wenn $(\mathcal{I}_1, d_1) \preceq (\mathcal{I}_2, d_2)$, dann gilt für alle \mathcal{EL} -Konzepte C :

$$d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} \quad \text{impliziert} \quad d_2 \in C^{\mathcal{I}_2}$$

Beweis. Sei ρ eine Simulation von \mathcal{I}_1 nach \mathcal{I}_2 mit $d_1 \rho d_2$. Wir beweisen die Behauptung per Induktion über die Struktur von C . Der Beweis ist letztlich derselbe wie für die entsprechenden Fälle des Bisimulationstheorems (Theorem 3.2).

Induktionsanfang. Wenn $C = A$ für einen Konzeptnamen A , dann gilt nach Bedingung (1) für Simulationen (Definition 6.2) wie gewünscht: $d_1 \in A^{\mathcal{I}_1}$ impliziert $d_2 \in A^{\mathcal{I}_2}$.

Wenn $C = \top$, dann gilt die Implikation, weil die rechte Seite trivialerweise wahr ist.

Induktionsschritt. Wir müssen nur noch zwei Fälle gemäß des äußersten Konstruktors von C unterscheiden (\sqcap, \exists):

$C = D \sqcap E$. Wir können genauso wie im entsprechenden Fall des Beweises des Bisimulationstheorems mittels Semantik von „ \sqcap “ und Induktionsvoraussetzung argumentieren:

$$\begin{aligned}
d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} &\Rightarrow d_1 \in D^{\mathcal{I}_1} \text{ und } d_1 \in E^{\mathcal{I}_1} && \text{(Semantik „}\sqcap\text{“)} \\
&\Rightarrow d_2 \in D^{\mathcal{I}_2} \text{ und } d_2 \in E^{\mathcal{I}_2} && \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\
&\Rightarrow d_2 \in C^{\mathcal{I}_2} && \text{(Semantik „}\sqcap\text{“)}
\end{aligned}$$

$C = \exists r.D$. Hier können wir genauso wie im \exists -Fall des Beweises des Bisimulationstheorems (Richtung „ \Rightarrow “) mittels Semantik von „ \exists “, Bedingung (2) von Simulationen und Induktionsvoraussetzung argumentieren:

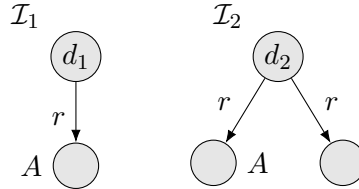
$$\begin{aligned}
d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} &\Rightarrow \text{es gibt } e_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1} \text{ mit } (d_1, e_1) \in r^{\mathcal{I}_1} \text{ und } e_1 \in D^{\mathcal{I}_1} && \text{(Semantik „}\exists\text{“)} \\
&\Rightarrow \text{es gibt } e_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2} \text{ mit } (d_2, e_2) \in r^{\mathcal{I}_2} \text{ und } e_1 \rho e_2 && \text{(Bedingung (2) Simul.)} \\
&\Rightarrow e_2 \in D^{\mathcal{I}_2} && \text{(Induktionsvoraus.)} \\
&\Rightarrow d_2 \in (\exists r.D)^{\mathcal{I}_2} && \text{(Semantik „}\exists\text{“)} \quad \square
\end{aligned}$$

T6.3 Simulation versus Bisimulation; Ausdrucksstärke.

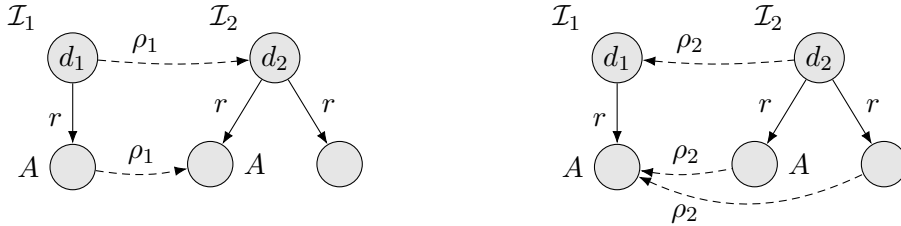
Lemma 6.4. Es gibt (\mathcal{I}_1, d_1) und (\mathcal{I}_2, d_2) , so dass:

- (1) $(\mathcal{I}_1, d_1) \precsim (\mathcal{I}_2, d_2)$ und $(\mathcal{I}_2, d_2) \precsim (\mathcal{I}_1, d_1)$
- (2) $(\mathcal{I}_1, d_1) \not\sim (\mathcal{I}_2, d_2)$

Beweis. Wir wählen (\mathcal{I}_1, d_1) und (\mathcal{I}_2, d_2) wie folgt.



Punkt (1) aus dem Lemma wird durch folgende Simulationen ρ_1, ρ_2 bezeugt:



Punkt (2) gilt, denn wenn es eine Bisimulation gäbe, dann müsste diese mindestens ρ_1 und ρ_2 enthalten, aber die „unterste Kante“ von ρ_2 verbindet zwei Elemente, die nicht Instanzen derselben Konzeptnamen sind (und verstößt damit gegen Bedingung 1 von Bisimulationen). \square

Lemma 6.5. Das \mathcal{ALC} -Konzept $\forall r.A$ ist nicht in \mathcal{EL} ausdrückbar.

Beweis. Angenommen es gebe ein \mathcal{EL} -Konzept C , das äquivalent zu $\forall r.A$ ist. Da für die obige Interpretation \mathcal{I}_1 gilt $d_1 \in (\forall r.A)^{\mathcal{I}_1}$, ist also $d_1 \in C^{\mathcal{I}_1}$. Da $(\mathcal{I}_1, d_1) \prec (\mathcal{I}_2, d_2)$, folgt mit dem Simulationstheorem (Theorem 6.3) $d_2 \in C^{\mathcal{I}_2}$, was im Widerspruch zu $d_2 \notin (\forall r.A)^{\mathcal{I}_2}$ steht. \square

Zwei Anmerkungen zu Lemma 6.5 und dessen Beweis:

- In \mathcal{ELI} – der Erweiterung von \mathcal{EL} mit inversen Rollen – sind dagegen manche Werterestriktionen ausdrückbar; nämlich ist $A \sqsubseteq \forall r.B$ äquivalent zu $\exists r^-.A \sqsubseteq B$.
- Man kann aus dem Beweis des Lemmas wieder die Methodologie zum Beweisen der Nicht-Ausdrückbarkeit als ein separates Theorem herausarbeiten, analog zu Theorem 3.5.

T6.4 Erfüllbarkeit in \mathcal{EL}

Lemma 6.6. Jedes \mathcal{EL} -Konzept ist erfüllbar bzgl. jeder \mathcal{EL} -TBox.

Beweis. Betrachte die folgende Interpretation \mathcal{I} .

$$\mathcal{I} \\ A_1, A_2, \dots \quad \textcircled{d} \curvearrowright r_1, r_2, \dots$$

Dabei bedeutet die Schreibweise „ \dots “, dass d eine Instanz *jedes* Konzeptnamens und (d, d) eine Instanz *jedes* Rollennamens ist. Nun ist leicht zu sehen, dass für jedes \mathcal{EL} -Konzept C gilt: $C^{\mathcal{I}} = \{d\}$ (was man bequem per Induktion über die Struktur von C zeigen kann). Also ist \mathcal{I} ein Modell jedes \mathcal{EL} -Konzeptes und damit auch jeder \mathcal{EL} -TBox. \square

T6.5 Kanonisches Modell ist ein Modell

Lemma 6.8. Für alle \mathcal{EL} -Konzepte C gilt: Die Interpretation \mathcal{I}_C ist Modell von C mit $d_W \in C^{\mathcal{I}_C}$.

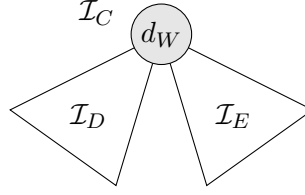
Beweis. Wir gehen wieder per Induktion über die Struktur von C vor.

Induktionsanfang. Wenn $C = A$ für einen Konzeptnamen A , dann ist $\mathcal{I}_C = \bullet^A$, also wie gewünscht $d_W \in A^{\mathcal{I}_C}$.

Wenn $C = \top$, dann gilt die Aussage trivialerweise, weil $\top^{\mathcal{I}_C} = \Delta^{\mathcal{I}_C}$.

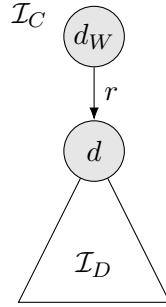
Induktionsschritt. Wir müssen wieder zwei Fälle gemäß des äußersten Konstruktors von C unterscheiden (\neg, \exists):

$C = D \sqcap E$. Dann ist \mathcal{I}_C wie folgt aufgebaut.



Nach Induktionsvoraussetzung ist $d_W \in D^{\mathcal{I}_D}$ und $d_W \in E^{\mathcal{I}_E}$. Daraus folgt $d_W \in D^{\mathcal{I}_C}$ und $d_W \in E^{\mathcal{I}_C}$, weil die Identität eine Simulation von \mathcal{I}_D (bzw. \mathcal{I}_E) nach \mathcal{I}_C ist. Mit der Semantik der Konjunktion folgt nun $d_W \in C^{\mathcal{I}_C}$.

$C = \exists r.D$. Dann ist \mathcal{I}_C wie folgt aufgebaut.



Die Induktionsvoraussetzung liefert $d \in D^{\mathcal{I}_D}$; wie oben folgt daraus wieder $d \in D^{\mathcal{I}_C}$. Mit der Semantik der Existenzrestriktion folgt nun $d_W \in C^{\mathcal{I}_C}$. \square

T6.6 Kanonisches Modell ist kanonisch

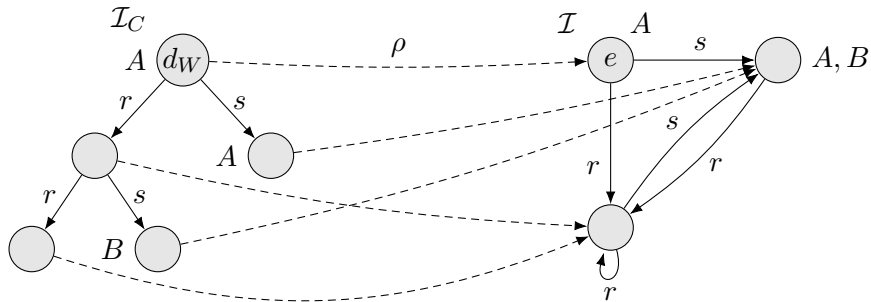
Lemma 6.9. Für alle \mathcal{EL} -Konzepte C , Interpretationen \mathcal{I} und $e \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gilt:

$$e \in C^{\mathcal{I}} \quad \text{gdw.} \quad (\mathcal{I}_C, d_W) \lesssim (\mathcal{I}, e)$$

Beispiel. Wir betrachten das \mathcal{EL} -Konzept

$$C = A \sqcap \exists r.(\exists r.\top \sqcap \exists s.B) \sqcap \exists s.A$$

sowie folgende Simulation ρ von \mathcal{I}_C in eine Interpretation \mathcal{I} .



Es gilt also sowohl $e \in C^{\mathcal{I}}$ als auch $(\mathcal{I}_C, d_W) \lesssim (\mathcal{I}, e)$.

Beweis des Lemmas.

„ \Leftarrow “ Angenommen, es gelte $(\mathcal{I}_C, d_W) \lesssim (\mathcal{I}, e)$. Dann liefert Lemma 6.8, dass $d_W \in C^{\mathcal{I}_C}$, und mit Theorem 6.3 erhalten wir $e \in C^{\mathcal{I}}$.

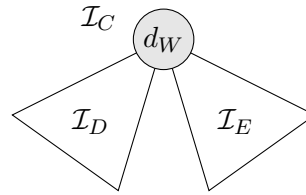
„ \Rightarrow “ Wir gehen wieder per Induktion über die Struktur von C vor.

Induktionsanfang. Wenn $C = A$ für einen Konzeptnamen A , dann ist $\mathcal{I}_C = \bullet^A$, und $\rho = \{(d_W, e)\}$ ist eine Simulation von \mathcal{I}_C nach \mathcal{I} .

Für $C = \top$ argumentieren wir analog.

Induktionsschritt. Wir müssen wieder zwei Fälle gemäß des äußersten Konstruktors von C unterscheiden (\neg, \exists):

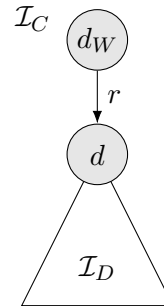
$C = D \sqcap E$. Dann ist \mathcal{I}_C wie folgt aufgebaut.



Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Simulationen ρ_D für $(\mathcal{I}_D, d_W) \lesssim (\mathcal{I}, e)$ und ρ_E für $(\mathcal{I}_E, d_W) \lesssim (\mathcal{I}, e)$. Nun lässt sich leicht prüfen, dass $\rho_D \cup \rho_E$ ebenfalls eine Simulation ist; dies zeigt $(\mathcal{I}_C, d_W) \lesssim (\mathcal{I}, e)$.

$C = \exists r.D$. Aus der Voraussetzung $e \in C^{\mathcal{I}}$ folgt zunächst mit der Semantik von „ \exists “, dass es ein $e' \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gibt mit $(e, e') \in r^{\mathcal{I}}$ und $e' \in D^{\mathcal{I}}$.

Weiterhin ist \mathcal{I}_C wie folgt aufgebaut.



Die Induktionsvoraussetzung liefert nun eine Simulation ρ für $(\mathcal{I}_D, d) \lesssim (\mathcal{I}, e')$. Nun lässt sich leicht prüfen, dass $\rho \cup \{(d_W, e)\}$ ebenfalls eine Simulation ist; dies zeigt $(\mathcal{I}_C, d_W) \lesssim (\mathcal{I}, e)$. \square

T6.7 Charakterisierung von Subsumtion

Lemma 6.10. Für alle \mathcal{EL} -Konzepte C, D gilt:

$$C \sqsubseteq D \text{ gdw. } (\mathcal{I}_D, d_W) \preceq (\mathcal{I}_C, d_W)$$

Beweis.

„ \Rightarrow “ Angenommen $C \sqsubseteq D$. Wir betrachten das kanonische Modell \mathcal{I}_C von C . Wegen $d_W \in C^{\mathcal{I}_C}$ (Lemma 6.8) und $C \sqsubseteq D$ gilt $d_W \in D^{\mathcal{I}_C}$. Aus Lemma 6.9 (angewendet auf D, \mathcal{I}_C, d_W) folgt nun $(\mathcal{I}_D, d_W) \preceq (\mathcal{I}_C, d_W)$.

„ \Leftarrow “ Angenommen $(\mathcal{I}_D, d_W) \preceq (\mathcal{I}_C, d_W)$ (i). Um zu zeigen, dass $C \sqsubseteq D$, betrachten wir eine beliebige Interpretation \mathcal{I} und eine Instanz $d \in C^{\mathcal{I}}$. Zu zeigen ist $d \in D^{\mathcal{I}}$.

Aus $d \in C^{\mathcal{I}}$ folgt mit Lemma 6.9: $(\mathcal{I}_C, d_W) \preceq (\mathcal{I}, d)$ (ii). Wegen (i) und (ii) gibt es also

- eine Simulation ρ_1 von \mathcal{I}_D nach \mathcal{I}_C mit $d_W \rho_1 d_W$ und
- eine Simulation ρ_2 von \mathcal{I}_C nach \mathcal{I} mit $d_W \rho_2 d$.

Die Komposition $\rho = \rho_1 \circ \rho_2$ ist eine Simulation von \mathcal{I}_D nach \mathcal{I} mit $d_W \rho d$; somit liefert Lemma 6.9 (angewendet auf D, \mathcal{I}, d) wie gewünscht $d \in D^{\mathcal{I}}$. \square

T6.8 Maximale Simulation

Um die maximale Simulation ρ von \mathcal{I}_D nach \mathcal{I}_C zu bestimmen, berechnet man eine Folge ρ_0, ρ_1, \dots von Relationen wie folgt.

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \{(e, d) \in \Delta^{\mathcal{I}_D} \times \Delta^{\mathcal{I}_C} \mid e \in A^{\mathcal{I}_D} \text{ impliziert } d \in A^{\mathcal{I}_C} \text{ für alle Konzeptnamen } A\} \\ \rho_{i+1} &= \rho_i \setminus \{(e, d) \mid \text{es gibt einen Rollennamen } r \text{ und } (e, e') \in r^{\mathcal{I}_D}, \\ &\quad \text{so dass } (e', d') \notin \rho_i \text{ für alle } (d, d') \in r^{\mathcal{I}_C}\} \end{aligned}$$

Diese Folge ist monoton und stabilisiert sich nach höchstens $|C| \cdot |D|$ Schritten; das resultierende ρ_i ist die größte Simulation von \mathcal{I}_D nach \mathcal{I}_C in dem Sinne, dass (i) ρ_i eine Simulation von \mathcal{I}_D nach \mathcal{I}_C ist und (ii) jede Simulation von \mathcal{I}_D nach \mathcal{I}_C in ρ_i enthalten ist (zeige (i) und (ii) selbst).

T6.9 Beispiel Normalisierung

Betrachten wir eine TBox mit den folgenden Konzeptinklusionen:

$$\begin{aligned} A \sqcap \exists r.B &\sqsubseteq A \\ A \sqcap B &\sqsubseteq \exists r.A \end{aligned}$$

Um komplexe Konzepte links und rechts von \sqsubseteq soweit wie möglich vermeiden, führen wir zwei neue Konzeptnamen $A_{\exists r.B}$ und $A_{\exists r.A}$ ein und erhalten die folgenden Inklusionen:

$$\begin{aligned} A \sqcap A_{\exists r.B} &\sqsubseteq A & \exists r.B &\sqsubseteq A_{\exists r.B} \\ A \sqcap B &\sqsubseteq A_{\exists r.A} & A_{\exists r.A} &\sqsubseteq \exists r.A \end{aligned}$$

In den beiden linken Konzeptinklusionen kommen nun nur Konzeptnamen und Konjunktion vor; in den beiden rechten kommen zwar Existenzrestriktionen vor, dafür aber keine Konjunktionen.

T6.10 Beispiel Subsumtion mit TBox

Wir betrachten folgende TBox (in Normalform):

$$\mathcal{T} = \{ A_2 \sqsubseteq A_1 \tag{2}$$

$$A_1 \sqsubseteq \exists r.A_3 \tag{3}$$

$$A_1 \sqsubseteq \exists s.A_1 \tag{4}$$

$$A_1 \sqcap A_2 \sqsubseteq A_3 \tag{5}$$

$$\exists r.A_3 \sqsubseteq A_2 \} \tag{6}$$

Durch erschöpfende Anwendung von **R1** erhalten wir die folgenden Konzeptinklusionen:

$$A_1 \sqsubseteq A_1 \quad A_2 \sqsubseteq A_2 \quad A_3 \sqsubseteq A_3 \tag{7}$$

Durch erschöpfende Anwendung von **R2** erhalten wir die folgenden Konzeptinklusionen:

$$A_1 \sqsubseteq \top \quad A_2 \sqsubseteq \top \quad A_3 \sqsubseteq \top \tag{8}$$

Nun bekommt man durch Anwendung von **R3** auf (2), (7) und (5):

$$A_2 \sqsubseteq A_3 \tag{9}$$

Durch Anwendung von **R4** auf (3), (7) und (6) erhält man außerdem:

$$A_1 \sqsubseteq A_2 \tag{10}$$

Jetzt können wir nochmal **R3** auf (9) und (10) anwenden und erhalten:

$$A_1 \sqsubseteq A_3 \tag{11}$$

Weitere Regeln sind nicht anwendbar. Die TBox \mathcal{T}^* ist nun die Menge aller Konzeptinklusionen aus \mathcal{T} und allen abgeleiteten Konzeptinklusionen (7)–(11).

T6.11 Korrektheit Subsumtionsalgorithmus

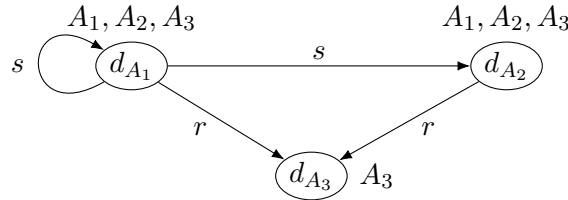
Sei $\mathcal{T}_{i+1} = \mathcal{T}_i \cup \{A \sqsubseteq B\}$. Dann gibt es eine Regel, so dass alle Vorbedingungen in \mathcal{T}_i enthalten sind und $A \sqsubseteq B$ die Nachbedingung ist. Durch Analyse der Regeln und semantisches Argumentieren zeigt man leicht, dass $\mathcal{T}_i \models A \sqsubseteq B$.

Wir machen das hier nur am Beispiel von **R4** mit der Nachbedingung $A \sqsubseteq B$. Da die Regel anwendbar war, muss es Konzeptinklusionen (1) $A \sqsubseteq r.A_1$, (2) $A_1 \sqsubseteq B_1$ und (3) $\exists r.B_1 \sqsubseteq B$ in \mathcal{T}_i geben.

Um $\mathcal{T}_i \models A \sqsubseteq B$ zu zeigen, nehmen wir ein beliebiges Modell \mathcal{I} von \mathcal{T}_i , ein Element $d \in A^{\mathcal{I}}$ und zeigen, dass $d \in B^{\mathcal{I}}$. Wegen $d \in A^{\mathcal{I}}$ und Konzeptinklusion (1) gibt es ein $e \in A_1^{\mathcal{I}}$ mit $(d, e) \in r^{\mathcal{I}}$. Wegen Konzeptinklusion (2) gilt auch $e \in B_1^{\mathcal{I}}$. Wegen Konzeptinklusion (3) bekommen wir $d \in B^{\mathcal{I}}$, wie gefordert.

T6.12 Beispiel Kanonische Interpretation

Wir geben die kanonische Interpretation $\mathcal{I}_{\mathcal{T}^*}$ für die (vervollständigte) TBox \mathcal{T}^* aus T6.10 an:



T6.13 Beweis von Lemma 6.20

Wir zeigen, dass alle Konzeptinklusionen in \mathcal{T}^* erfüllt sind. Wir unterscheiden drei Fälle entsprechend der Normalform:

$A_1 \sqcap \dots \sqcap A_n \sqsubseteq A$: Angenommen $d_B \in A_i^{\mathcal{I}}$ für alle $i = 1, \dots, n$. Nach Definition von \mathcal{I} ist $B \sqsubseteq A_i \in \mathcal{T}^*$ für $i = 1, \dots, n$. (Wenn $A_i = \top$, dann folgt das nicht aus der Definition von \mathcal{I} , sondern aus **R2**.) Da \mathcal{T}^* abgeschlossen unter Anwendung von **R3** ist, gilt auch $B \sqsubseteq A \in \mathcal{T}^*$, also $d_B \in A^{\mathcal{I}}$ nach Definition von \mathcal{I} .

$A_1 \sqsubseteq \exists r.A_2$: Angenommen $d_B \in A_1^{\mathcal{I}}$. Nach Definition von \mathcal{I} gilt $B \sqsubseteq A_1 \in \mathcal{T}^*$. (Falls $A_1 = \top$, folgt das wieder aus **R2**.) Nach Definition von \mathcal{I} , also $(d_B, d_{A_2}) \in r^{\mathcal{I}}$. Da \mathcal{T}^* abgeschlossen unter Anwendung von **R1** ist, gilt auch $A_2 \sqsubseteq A_2 \in \mathcal{T}^*$ und damit $d_{A_2} \in A_2^{\mathcal{I}}$. Per Semantik folgt also $d_B \in (\exists r.A_2)^{\mathcal{I}}$.

$\exists r.A_1 \sqsubseteq A_2$: Angenommen $d_{B_1} \in (\exists r.A_1)^{\mathcal{I}}$. Dann gibt es d_{B_2} mit $(d_{B_1}, d_{B_2}) \in r^{\mathcal{I}}$ und $d_{B_2} \in A_1^{\mathcal{I}}$. Die Definition von \mathcal{I} liefert Konzeptinklusionen $B_1 \sqsubseteq B_3, B_3 \sqsubseteq \exists r.B_2, B_2 \sqsubseteq A_1 \in \mathcal{T}^*$ (für irgendein B_3). Da \mathcal{T}^* abgeschlossen unter Anwendung von **R4** (angewendet auf $\exists r.A_1 \sqsubseteq A_2, B_3 \sqsubseteq \exists r.B_2$ und $B_2 \sqsubseteq A_1$) ist, gilt $B_3 \sqsubseteq A_2 \in \mathcal{T}^*$. Regel **R3** angewendet auf $B_1 \sqsubseteq B_3$ und $B_3 \sqsubseteq A_2$ liefert $B_1 \sqsubseteq A_2 \in \mathcal{T}^*$ und damit $d_{B_1} \in A_2^{\mathcal{I}}$, nach Definition von \mathcal{I} . \square

Teil 7

ABoxen und Anfragebeantwortung

Literaturverzeichnis

- [BHLS17] Baader, Franz, Ian Horrocks, Carsten Lutz und Uli Sattler: *An Introduction to Description Logic*. Cambridge University Press, 2017. <https://tinyurl.com/suub-intro-dl-ebook>.