

Tafelmitschriften zur Vorlesung „Beschreibungslogik“ im Sommersemester 2019

Prof. Dr. Thomas Schneider
AG Theorie der Künstlichen Intelligenz
Fachbereich 3



Stand: 7. April 2019

Dieses Dokument ist noch unvollständig und wird regelmäßig aktualisiert.

Inhaltsverzeichnis

2	Grundlagen	3
3	Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen	8
4	Tableau-Algorithmen	9
5	Komplexität	10
6	Effiziente Beschreibungslogiken	11
7	ABoxen und Anfragebeantwortung	12

Teil 2

Grundlagen

T2.1 Beispiele für \mathcal{ALC} -Konzepte

Mit den Konzeptnamen

Student, Naturwissenschaft, Professor, Emeritus, PflichtVL, VL, Einfach, Interessant,
 A, B

und den Rollennamen

studiert, hält, hatÜbungsaufgabe,
 r

kann man z. B. folgende zusammengesetzte \mathcal{ALC} -Konzepte bilden:

- $\text{Student} \sqcap \exists \text{studiert.Naturwissenschaft}$
 (beschreibt Studierende, die mindestens eine Naturwissenschaft studieren)
- $\text{Professor} \sqcap \text{Emeritus} \sqcap \forall \text{hält.} \neg \text{PflichtVL}$
 (beschreibt Professor*innen im Ruhestand, die keine Pflichtvorlesungen halten)
- $\text{VL} \sqcap \neg \text{PflichtVL} \sqcap \forall \text{hatÜbungsaufgabe.} (\text{Einfach} \sqcup \text{Interessant})$
 (beschreibt Wahlvorlesungen, bei denen alle Übungsaufgaben einfach oder interessant sind)
- $A \sqcap \exists r. (\neg B \sqcup \forall r. A)$

(Die Beschreibungen in Klammern werden eigentlich erst richtig klar, wenn die Semantik definiert ist.)

T2.2 Beispiele für Interpretationen und Extensionen

Wir betrachten die Interpretation $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ mit

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3, v_1, v_2\} \\ \text{Mensch}^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\ \text{Student}^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\ \text{Vorlesung}^{\mathcal{I}} &= \{v_1, v_2\} \\ \text{PflichtVL}^{\mathcal{I}} &= \{v_1\} \\ \text{WahlVL}^{\mathcal{I}} &= \{v_2\} \\ \text{hört}^{\mathcal{I}} &= \{(s_1, v_1), (s_2, v_1), (s_2, v_2), (s_3, v_1)\} \\ \text{bekanntMit}^{\mathcal{I}} &= \{(s_1, s_2), (s_2, s_1), (s_1, s_1), (s_2, s_2), (s_3, s_3)\}. \end{aligned}$$

Jede Interpretation kann in offensichtlicher Weise als (knoten- und kantenbeschrifteter) gerichteter Graph aufgefasst werden; für unsere Beispielinterpretation \mathcal{I} :



Beispiele für die Extensionen einiger zusammengesetzter Konzepte in dieser Interpretation:

$$\begin{aligned}
(\text{VL} \sqcap \text{PflichtVL})^{\mathcal{I}} &= \{v_1, v_2\} \cap \{v_1\} &&= \{v_1\} \\
(\neg \text{VL})^{\mathcal{I}} &= \Delta^{\mathcal{I}} \setminus \{v_1, v_2\} &&= \{s_1, s_2, s_3\} \\
(\text{Student} \sqcup \text{VL})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \cup \{v_1, v_2\} = \Delta^{\mathcal{I}} \\
(\exists \text{bekanntMit. Student})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\
(\exists \text{bekanntMit.} \exists \text{bekanntMit. Student})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\
(\forall \text{hört. PflichtVL})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_3, v_1, v_3\}
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile beachte man die Besonderheit der Werterestriktion (\forall), dass ein Domänenelement d , welches *keine* ausgehenden r -Kanten besitzt, immer eine Instanz von $\forall r.C$ ist, für jedes beliebige Konzept C .

T2.3 Semantik von \top und \perp

Es gelten:

$$\begin{aligned}
\top^{\mathcal{I}} &= (A \sqcup \neg A)^{\mathcal{I}} = A^{\mathcal{I}} \cup (\Delta^{\mathcal{I}} \setminus A^{\mathcal{I}}) = \Delta^{\mathcal{I}} \\
\perp^{\mathcal{I}} &= (A \sqcap \neg A)^{\mathcal{I}} = A^{\mathcal{I}} \cap (\Delta^{\mathcal{I}} \setminus A^{\mathcal{I}}) = \emptyset^{\mathcal{I}}
\end{aligned}$$

Dabei folgt die erste Gleichheit jeder Zeile aus der Definition von \top bzw. \perp auf Folie 2.9, die zweite Gleichheit aus der Semantik (Def. 2.2) und die dritte aus der Mengenlehre.

T2.4 Beispiele für „unerfüllbar“ und „subsumiert“

- (a) Das Konzept $C = \exists r.A \sqcap \forall r.\neg A$ ist *nicht* erfüllbar:

Angenommen, C sei erfüllbar, d. h. es gibt eine Interpretation \mathcal{I} mit $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$. Sei $d \in C^{\mathcal{I}}$. Wegen $d \in (\exists r.A)^{\mathcal{I}}$ gibt es ein Element $e \in A^{\mathcal{I}}$ mit $(d, e) \in r^{\mathcal{I}}$. Wegen $d \in (\forall r.\neg A)^{\mathcal{I}}$ gilt aber $e \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$, also $e \notin A^{\mathcal{I}}$, was ein Widerspruch zu $e \in A^{\mathcal{I}}$ ist. Also ist die Annahme falsch.

- (b) $\exists r.(A \sqcap B) \sqsubseteq \exists r.A \sqcap \exists r.B$:

Sei \mathcal{I} eine Interpretation und $d \in (\exists r.(A \sqcap B))^{\mathcal{I}}$. Dann gibt es ein Element $e \in (A \sqcap B)^{\mathcal{I}}$ mit $(d, e) \in r^{\mathcal{I}}$. Wegen $e \in A^{\mathcal{I}}$ gilt $d \in (\exists r.A)^{\mathcal{I}}$; wegen $e \in B^{\mathcal{I}}$ gilt $d \in (\exists r.B)^{\mathcal{I}}$. Also ist $d \in (\exists r.A \sqcap \exists r.B)^{\mathcal{I}}$.

Die Rückrichtung dieser Subsumtion gilt nicht – finde ein Gegenbeispiel, d. h. eine Interpretation \mathcal{I} mit $(\exists r.A \sqcap \exists r.B)^{\mathcal{I}} \not\subseteq (\exists r.(A \sqcap B))^{\mathcal{I}}$.

T2.5 Beispiele für TBoxen und deren Semantik

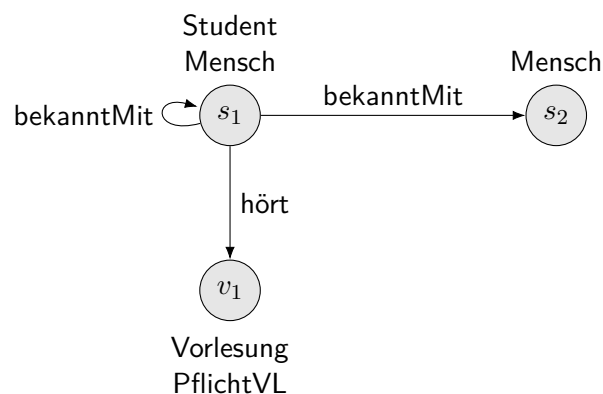
Wir betrachten folgende TBox.

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Student} \equiv \text{Mensch} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung} \\ \text{Vorlesung} \equiv \text{PflichtVL} \sqcup \text{WahlVL} \\ \text{Student} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung} \sqsubseteq \exists \text{bekanntMit.Student} \\ \text{PflichtVL} \sqcap \text{WahlVL} \sqsubseteq \perp \end{array} \right\}$$

Die Interpretation aus T2.2 ist Modell von \mathcal{T} . Sie erfüllt z. B. auch die folgende Konzeptinklusion.

$$\text{Student} \sqsubseteq \exists \text{bekanntMit.Mensch} \quad (1)$$

Ein weiteres Modell ist z. B. folgende Interpretation \mathcal{J} .



\mathcal{J} erfüllt ebenfalls die Konzeptinklusion (1) sowie z. B. $\text{VL} \equiv \text{PflichtVL}$.

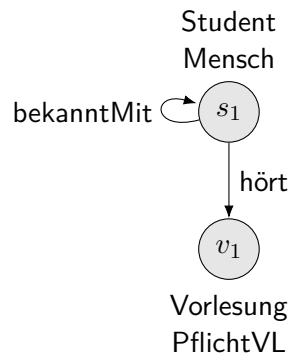
T2.6 Beispiele für „erfüllbar“ und „subsumiert“ bzgl. TBoxen

Sei \mathcal{T} die TBox aus dem vorangehenden Beispiel.

- (a) Das Konzept

$$C = \text{Student} \sqcap \forall \text{hört.PflichtVL}$$

ist erfüllbar bezüglich \mathcal{T} , denn folgende Interpretation \mathcal{I}' ist ein Modell von \mathcal{T} mit $s_1 \in C^{\mathcal{I}'}$:



Ebenso ist die Interpretation \mathcal{I} aus T2.2 ein Modell von \mathcal{T} mit $s_1 \in C^{\mathcal{I}}$.

- (b) Das Konzept

$$C = \text{Student} \sqcap \forall \text{hört.PflichtVL} \sqcap \exists \text{hört.WahlVL}$$

ist *unerfüllbar* bezüglich \mathcal{T} : Angenommen, C sei erfüllbar bzgl. \mathcal{T} . Dann gibt es ein Modell \mathcal{I} von \mathcal{T} mit einer Instanz $d \in C^{\mathcal{I}}$. Nach der Semantik von „ \sqcap “ (Def. 2.2) gelten (i) $d \in (\forall \text{hört.PflichtVL})^{\mathcal{I}}$ und (ii) $d \in (\exists \text{hört.WahlVL})^{\mathcal{I}}$. Wegen (ii) gibt es ein Element $e \in \text{WahlVL}^{\mathcal{I}}$ mit $(d, e) \in \text{hört}^{\mathcal{I}}$. Wegen (i) ist dann auch $e \in \text{PflichtVL}^{\mathcal{I}}$, also $e \in (\text{PflichtVL} \sqcap \text{WahlVL})^{\mathcal{I}}$. Weil \mathcal{I} jedoch ein Modell von \mathcal{T} ist, kann es wegen der Konzeptinklusion $\text{PflichtVL} \sqcap \text{WahlVL} \sqsubseteq \perp$ aus \mathcal{T} ein solches Element e nicht geben; ein Widerspruch. Also ist die Annahme falsch.

- (c) Für die Konzepte

$$C = \text{Student} \quad \text{und} \quad D = \exists \text{bekanntMit.Student}$$

gilt $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$: Sei \mathcal{I} ein Modell von \mathcal{T} und $d \in C^{\mathcal{I}}$, d. h. $d \in \text{Student}^{\mathcal{I}}$. Zu zeigen ist $d \in D^{\mathcal{I}}$, d. h. $d \in (\exists \text{bekanntMit.Student})^{\mathcal{I}}$.

Wegen der ersten Zeile von \mathcal{T} gilt $d \in (\exists \text{hört.Vorlesung})^{\mathcal{I}}$, also auch $d \in (\text{Student} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung})^{\mathcal{I}}$. Mit Zeile 3 von \mathcal{T} folgt wie gewünscht $d \in (\exists \text{bekanntMit.Student})^{\mathcal{I}}$.

Dies ist bereits Schlussfolgern, denn wir haben implizites Wissen aus \mathcal{T} abgeleitet:

- (a) Es *kann* Student*innen geben, die nur Pflichtvorlesungen hören.
- (b) Es kann *keine* Student*innen geben, die nur Pflichtvorlesungen, aber mindestens eine Wahlvorlesung hören.
- (c) Jede*r Student*in ist mit mindestens einer/m Student*in bekannt.

Teil 3

Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen

Teil 4

Tableau-Algorithmen

Teil 5

Komplexität

Teil 6

Effiziente Beschreibungslogiken

Teil 7

ABoxen und Anfragebeantwortung