Tafelmitschriften zur Vorlesung „Beschreibungslogik“ im Sommersemester 2019

Prof. Dr. Thomas Schneider
AG Theorie der Künstlichen Intelligenz
Fachbereich 3
Universität Bremen

Stand: 9. April 2019

Dieses Dokument ist noch unvollständig und wird regelmäßig aktualisiert.

Inhaltsverzeichnis

2 Grundlagen 3

3 Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen 10

4 Tableau-Algorithmen 11

5 Komplexität 12

6 Effiziente Beschreibungslogiken 13

7 ABoxen und Anfragebeantwortung 14

Teil 2

Grundlagen

T2.1 Beispiele für $\mathcal{ALC}$-Konzepte

Mit den Konzeptnamen

> Student, Naturwissenschaft, Professor, Emeritus, PflichtVL, VL, Einfach, Interessant,
> A, B

und den Rollennamen

> studiert, hält, hatÜbungsaufgabe,
> r

kann man z. B. folgende zusammengesetzte $\mathcal{ALC}$-Konzepte bilden:

- $\mathsf{Student} \sqcap \exists \mathsf{studiert}.\mathsf{Naturwissenschaft}$
  (beschreibt Studierende, die mindestens eine Naturwissenschaft studieren)
- $\mathsf{Professor} \sqcap \mathsf{Emeritus} \sqcap \forall \mathsf{hält}.\neg \mathsf{PflichtVL}$
  (beschreibt Professor*innen im Ruhestand, die keine Pflichtvorlesungen halten)
- $\mathsf{VL} \sqcap \neg \mathsf{PflichtVL} \sqcap \forall \mathsf{hatÜbungsaufgabe}.(\mathsf{Einfach} \sqcup \mathsf{Interessant})$
  (beschreibt Wahlvorlesungen, bei denen alle Übungsaufgaben einfach oder interessant sind)
- $A \sqcap \exists r.(\neg B \sqcup \forall r.A)$

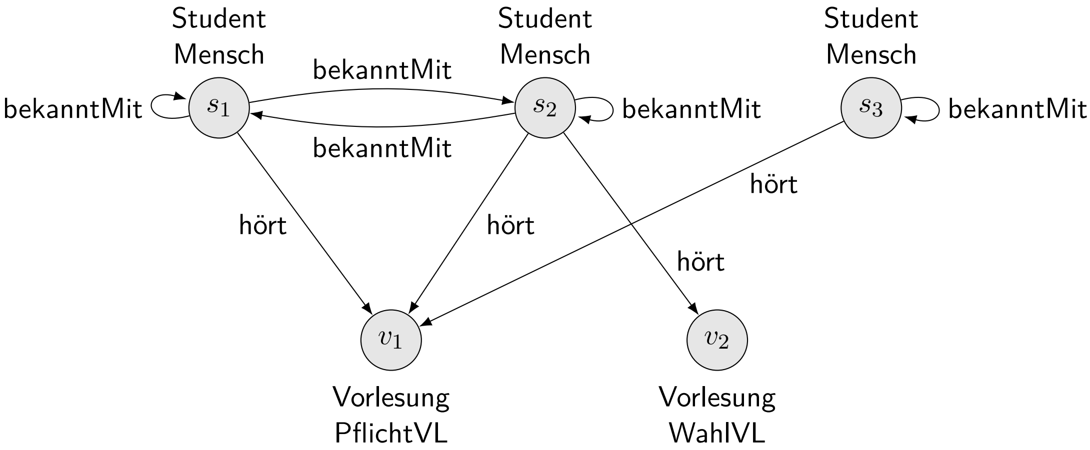
(Die Beschreibungen in Klammern werden eigentlich erst richtig klar, wenn die Semantik definiert ist.)

T2.2 Beispiele für Interpretationen und Extensionen

Wir betrachten die Interpretation $\mathcal{I} = (\Delta^\mathcal{I}, \cdot^\mathcal{I})$ mit

$$\begin{aligned}
\Delta^\mathcal{I} &= \{s_1, s_2, s_3, v_1, v_2\} \\
\mathsf{Mensch}^\mathcal{I} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\
\mathsf{Student}^\mathcal{I} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\
\mathsf{Vorlesung}^\mathcal{I} &= \{v_1, v_2\} \\
\mathsf{PflichtVL}^\mathcal{I} &= \{v_1\} \\
\mathsf{WahlVL}^\mathcal{I} &= \{v_2\} \\
\mathsf{hört}^\mathcal{I} &= \{(s_1, v_1), (s_2, v_1), (s_2, v_2), (s_3, v_1)\} \\
\mathsf{bekanntMit}^\mathcal{I} &= \{(s_1, s_2), (s_2, s_1), (s_1, s_1), (s_2, s_2), (s_3, s_3)\}.
\end{aligned}$$

Jede Interpretation kann in offensichtlicher Weise als (knoten- und kantenbeschrifteter) gerichteter Graph aufgefasst werden; für unsere Beispielinterpretation $\mathcal{I}$:



Beispiele für die Extensionen einiger zusammengesetzter Konzepte in dieser Interpretation:

$$\begin{aligned}
(\mathsf{VL} \sqcap \mathsf{PflichtVL})^{\mathcal{I}} &= \{v_1, v_2\} \cap \{v_1\} &&= \{v_1\} \\
(\neg\mathsf{VL})^{\mathcal{I}} &= \Delta^{\mathcal{I}} \setminus \{v_1, v_2\} &&= \{s_1, s_2, s_3\} \\
(\mathsf{Student} \sqcup \mathsf{VL})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \cup \{v_1, v_2\} &&= \Delta^{\mathcal{I}} \\
(\exists\mathsf{bekanntMit}.\mathsf{Student})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\
(\exists\mathsf{bekanntMit}.\exists\mathsf{bekanntMit}.\mathsf{Student})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\
(\forall\mathsf{hört}.\mathsf{PflichtVL})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_3, v_1, v_2\}
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile beachte man die Besonderheit der Werterestriktion ($\forall$), dass ein Domänenelement d, welches *keine* ausgehenden r-Kanten besitzt, immer eine Instanz von $\forall r.C$ ist, für jedes beliebige Konzept C.

T2.3 Semantik von $\top$ und $\bot$

Es gelten:

$$\begin{aligned}
\top^{\mathcal{I}} &= (A \sqcup \neg A)^{\mathcal{I}} = A^{\mathcal{I}} \cup (\Delta^{\mathcal{I}} \setminus A^{\mathcal{I}}) = \Delta^{\mathcal{I}} \\
\bot^{\mathcal{I}} &= (A \sqcap \neg A)^{\mathcal{I}} = A^{\mathcal{I}} \cap (\Delta^{\mathcal{I}} \setminus A^{\mathcal{I}}) = \emptyset^{\mathcal{I}}
\end{aligned}$$

Dabei folgt die erste Gleichheit jeder Zeile aus der Definition von $\top$ bzw. $\bot$ auf Folie 2.9, die zweite Gleichheit aus der Semantik (Def. 2.2) und die dritte aus der Mengenlehre.

T2.4 Beispiele für „unerfüllbar“ und „subsumiert“

(a) Das Konzept $C = \exists r.A \sqcap \forall r.\neg A$ is *nicht* erfüllbar:

Angenommen, C sei erfüllbar, d. h. es gibt eine Interpretation $\mathcal{I}$ mit $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$. Sei $d \in C^{\mathcal{I}}$. Wegen $d \in (\exists r.A)^{\mathcal{I}}$ gibt es ein Element $e \in A^{\mathcal{I}}$ mit $(d,e) \in r^{\mathcal{I}}$. Wegen $d \in (\forall r.\neg A)^{\mathcal{I}}$ gilt aber $e \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$, also $e \notin A^{\mathcal{I}}$, was ein Widerspruch zu $e \in A^{\mathcal{I}}$ ist. Also ist die Annahme falsch.

(b) $\exists r.(A \sqcap B) \sqsubseteq \exists r.A \sqcap \exists r.B$:

Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation und $d \in (\exists r.(A \sqcap B))^{\mathcal{I}}$. Dann gibt es ein Element $e \in (A \sqcap B)^{\mathcal{I}}$ mit $(d,e) \in r^{\mathcal{I}}$. Wegen $e \in A^{\mathcal{I}}$ gilt $d \in (\exists r.A)^{\mathcal{I}}$; wegen $e \in B^{\mathcal{I}}$ gilt $d \in (\exists r.B)^{\mathcal{I}}$. Also ist $d \in (\exists r.A \sqcap \exists r.B)^{\mathcal{I}}$.

Die Rückrichtung dieser Subsumtion gilt nicht – finde ein Gegenbeispiel, d. h. eine Interpretation $\mathcal{I}$ mit $(\exists r.A \sqcap \exists r.B)^{\mathcal{I}} \nsubseteq (\exists r.(A \sqcap B))^{\mathcal{I}}$.

T2.5 Beispiele für TBoxen und deren Semantik

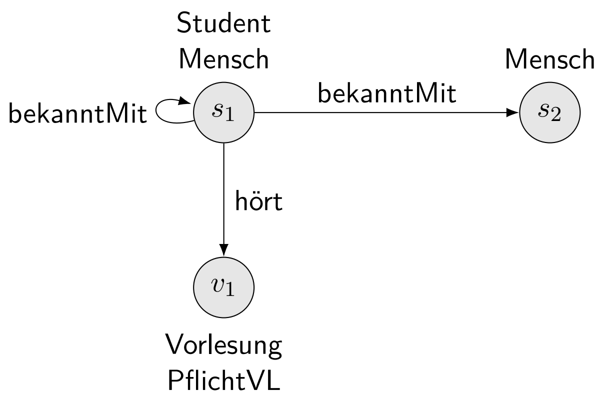
Wir betrachten folgende TBox.

$$
\mathcal{T} = \{ \quad \begin{aligned}
\mathsf{Student} &\equiv \mathsf{Mensch} \sqcap \exists \mathsf{hört}.\mathsf{Vorlesung} \\
\mathsf{Vorlesung} &\equiv \mathsf{PflichtVL} \sqcup \mathsf{WahlVL} \\
\mathsf{Student} \sqcap \exists \mathsf{hört}.\mathsf{Vorlesung} &\sqsubseteq \exists \mathsf{bekanntMit}.\mathsf{Student} \\
\mathsf{PflichtVL} \sqcap \mathsf{WahlVL} &\sqsubseteq \bot
\end{aligned} \quad \}
$$

Die Interpretation aus T2.2 ist Modell von $\mathcal{T}$. Sie erfüllt z. B. auch die folgende Konzeptinklusion.

$$\mathsf{Student} \sqsubseteq \exists \mathsf{bekanntMit}.\mathsf{Mensch} \tag{1}$$

Ein weiteres Modell ist z. B. folgende Interpretation $\mathcal{J}$.



$\mathcal{J}$ erfüllt ebenfalls die Konzeptinklusion (1) sowie z. B. $\mathsf{VL} \equiv \mathsf{PflichtVL}$.

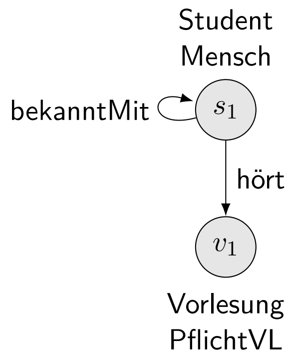
T2.6 Beispiele für „erfüllbar“ und „subsumiert“ bzgl. TBoxen

Sei $\mathcal{T}$ die TBox aus dem vorangehenden Beispiel.

(a) Das Konzept

$$C = \mathsf{Student} \sqcap \forall \mathsf{h\ddot{o}rt}.\mathsf{PflichtVL}$$

ist erfüllbar bezüglich $\mathcal{T}$, denn folgende Interpretation $\mathcal{I}'$ ist ein Modell von $\mathcal{T}$ mit $s_1 \in C^{\mathcal{I}'}$:



Ebenso ist die Interpretation $\mathcal{I}$ aus T2.2 ein Modell von $\mathcal{T}$ mit $s_1 \in C^{\mathcal{I}}$.

(b) Das Konzept

$$C = \mathsf{Student} \sqcap \forall \mathsf{h\ddot{o}rt}.\mathsf{PflichtVL} \sqcap \exists \mathsf{h\ddot{o}rt}.\mathsf{WahlVL}$$

ist *un*erfüllbar bezüglich $\mathcal{T}$: Angenommen, C sei erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}$. Dann gibt es ein Modell $\mathcal{I}$ von $\mathcal{T}$ mit einer Instanz $d \in C^{\mathcal{I}}$. Nach der Semantik von „$\sqcap$“ (Def. 2.2) gelten (i) $d \in (\forall \mathsf{h\ddot{o}rt}.\mathsf{PflichtVL})^{\mathcal{I}}$ und (ii) $d \in (\exists \mathsf{h\ddot{o}rt}.\mathsf{WahlVL})^{\mathcal{I}}$. Wegen (ii) gibt es ein Element $e \in \mathsf{WahlVL}^{\mathcal{I}}$ mit $(d, e) \in \mathsf{h\ddot{o}rt}^{\mathcal{I}}$. Wegen (i) ist dann auch $e \in \mathsf{PflichtVL}^{\mathcal{I}}$, also $e \in (\mathsf{PflichtVL} \sqcap \mathsf{WahlVL})^{\mathcal{I}}$. Weil $\mathcal{I}$ jedoch ein Modell von $\mathcal{T}$ ist, kann es wegen der Konzeptinklusion $\mathsf{PflichtVL} \sqcap \mathsf{WahlVL} \sqsubseteq \bot$ aus $\mathcal{T}$ ein solches Element e nicht geben; ein Widerspruch. Also ist die Annahme falsch.

(c) Für die Konzepte

$$C = \mathsf{Student} \qquad \text{und} \qquad D = \exists \mathsf{bekanntMit}.\mathsf{Student}$$

gilt $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$: Sei $\mathcal{I}$ ein Modell von $\mathcal{T}$ und $d \in C^{\mathcal{I}}$, d. h. $d \in \mathsf{Student}^{\mathcal{I}}$. Zu zeigen ist $d \in D^{\mathcal{I}}$, d. h. $d \in (\exists \mathsf{bekanntMit}.\mathsf{Student})^{\mathcal{I}}$.

Wegen der ersten Zeile von $\mathcal{T}$ gilt $d \in (\exists \mathsf{h\ddot{o}rt}.\mathsf{Vorlesung})^{\mathcal{I}}$, also auch $d \in (\mathsf{Student} \sqcap \exists \mathsf{h\ddot{o}rt}.\mathsf{Vorlesung})^{\mathcal{I}}$. Mit Zeile 3 von $\mathcal{T}$ folgt wie gewünscht $d \in (\exists \mathsf{bekanntMit}.\mathsf{Student})^{\mathcal{I}}$.

Dies ist bereits Schlussfolgern, denn wir haben implizites Wissen aus $\mathcal{T}$ abgeleitet:

(a) Es *kann* Student*innen geben, die nur Pflichtvorlesungen hören.

(b) Es kann *keine* Student*innen geben, die nur Pflichtvorlesungen, aber mindestens eine Wahlvorlesung hören.

(c) Jede*r Student*in ist mit mindestens einer/m Student*in bekannt.

T2.7 Beweis der Monotonie von $\mathcal{ALC}$ (Lemma 2.7)

Lemma 2.7 Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ TBoxen mit $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Dann gilt:

(1) Wenn C erfüllbar bezüglich $\mathcal{T}_2$ ist, dann ist C erfüllbar bezüglich $\mathcal{T}_1$.

(2) Wenn $\mathcal{T}_1 \models C \sqsubseteq D$, dann $\mathcal{T}_2 \models C \sqsubseteq D$.

Beweis.

(1) Sei C erfüllbar bezüglich $\mathcal{T}_2$. Dann gibt es ein Modell $\mathcal{I}$ von $\mathcal{T}_2$ mit $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$. Da $\mathcal{I}$ Modell von $\mathcal{T}_2$ ist, erfüllt $\mathcal{I}$ alle Konzeptinklusionen in $\mathcal{T}_2$, also wegen $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ auch alle Konzeptinklusionen in $\mathcal{T}_1$, und somit ist $\mathcal{I}$ auch Modell von $\mathcal{T}_1$. Also gibt es ein Modell $\mathcal{I}$ von $\mathcal{T}_1$ mit $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$; d. h. C ist erfüllbar bezüglich $\mathcal{T}_1$.

(2) Wir beweisen die Kontraposition. Es gelte $\mathcal{T}_2 \not\models C \sqsubseteq D$.[1] Dann gibt es ein Modell $\mathcal{I}$ von $\mathcal{T}_2$ mit $C^{\mathcal{I}} \not\subseteq D^{\mathcal{I}}$. Wie in (1) ist $\mathcal{I}$ auch Modell von $\mathcal{T}_1$, also $\mathcal{T}_1 \not\models C \sqsubseteq D$. ❑

Auf der Folie steht auch: „Die Umkehrungen von (1) und (2) sind im Allgemeinen *nicht* richtig.“ Davon kann man sich mittels einfacher Gegenbeispiele überzeugen: z. B. ist mit $\mathcal{T}_1 = \emptyset$ und $\mathcal{T}_2 = \{A \sqsubseteq B\}$ die Umkehrung von (2) widerlegt, denn $\mathcal{T}_2 \models A \sqsubseteq B$, aber $\mathcal{T}_1 \not\models A \sqsubseteq B$.

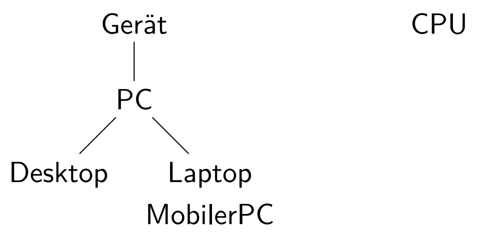
T2.8 Beispiel für Subsumtion als Ordnungsrelation

Wir betrachten folgende TBox.

$$\mathcal{T} = \{ \quad \begin{array}{rcl} \mathsf{PC} & \sqsubseteq & \mathsf{Gerät} \sqcap \exists \mathsf{hatTeil.CPU} \\ \mathsf{PC} & \equiv & \mathsf{Desktop} \sqcup \mathsf{Laptop} \\ \mathsf{Desktop} & \sqsubseteq & \neg \mathsf{Laptop} \\ \mathsf{MobilerPC} & \equiv & \mathsf{PC} \sqcap \neg \mathsf{Desktop} \end{array} \quad \}$$

Die dritte Zeile von $\mathcal{T}$ ist äquivalent zu $\mathsf{Desktop} \sqcap \mathsf{Laptop} \sqsubseteq \bot$, wie man leicht zeigt (probiere es selbst aus).

Die Ordnung „$\sqsubseteq$ bezüglich $\mathcal{T}$“ kann man durch folgendes Hasse-Diagramm darstellen:



[1] Das Zeichen $\not\models$ steht für „nicht $\models$“, also bedeutet $\mathcal{T} \not\models C \sqsubseteq D$, dass die Beziehung $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ *nicht* gilt (d. h. bezüglich $\mathcal{T}$ wird C *nicht* von D subsumiert).

Dass die Relation „$\sqsubseteq$ bezüglich $\mathcal{T}$" *nicht* antisymmetrisch ist, zeigt sich in diesem Beispiel dadurch, dass der Knoten unten rechts zwei Beschriftungen hat, also $\mathcal{T} \models \mathsf{Laptop} \equiv \mathsf{MobilerPC}$. Wäre die Relation antisymmetrisch, dann dürfte nicht gleichzeitig $\mathcal{T} \models \mathsf{Laptop} \sqsubseteq \mathsf{MobilerPC}$ und $\mathcal{T} \models \mathsf{MobilerPC} \sqsubseteq \mathsf{Laptop}$ gelten.

T2.9 Beweis der wechselseitigen Reduktionen der Schlussfolgerungsprobleme

Lemma 2.9

(1) Subsumtion ist polynomiell reduzierbar auf (Un)erfüllbarkeit:

$$\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D \quad \text{gdw.} \quad C \sqcap \neg D \text{ unerfüllbar bezüglich } \mathcal{T}$$

(2) Erfüllbarkeit ist polynomiell reduzierbar auf (Nicht-)Äquivalenz:

$$C \text{ erfüllbar bezüglich } \mathcal{T} \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{T} \not\models C \equiv \bot$$

(3) Äquivalenz ist polynomiell reduzierbar auf Subsumtion:

$$\mathcal{T} \models C \equiv D \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{T} \models \top \sqsubseteq (C \sqcap D) \sqcup (\neg C \sqcap \neg D)$$

Beweis. Wir beweisen exemplarisch Punkt (1). Die Beweise der anderen zwei Punkte sind analog.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D \quad & \text{gdw.} \quad \text{für alle Modelle } \mathcal{I} \text{ von } \mathcal{T} \text{ gilt } C^\mathcal{I} \subseteq D^\mathcal{I} \\
& \text{gdw.} \quad \text{für alle Modelle } \mathcal{I} \text{ von } \mathcal{T} \text{ gilt } C^\mathcal{I} \cap (\Delta^\mathcal{I} \setminus D^\mathcal{I}) = \emptyset \\
& \text{gdw.} \quad \text{für alle Modelle } \mathcal{I} \text{ von } \mathcal{T} \text{ gilt } (C \sqcap \neg D)^\mathcal{I} = \emptyset \\
& \text{gdw.} \quad C \sqcap \neg D \text{ unerfüllbar bezüglich } \mathcal{T}
\end{aligned}$$

Hier gilt das erste „gdw." wegen der Definition von Subsumtion (Def. 2.6), und die zweite Zeile ist äquivalent zur ersten, weil für beliebige Mengen M_1, M_2 gilt, dass $M_1 \subseteq M_2$ gdw. $M_1 \cap \overline{M_2} = \emptyset$, wobei $\overline{M_2}$ das Komplement von M_2 ist. Man überzeuge sich davon anhand eines Venn-Diagramms. Die dritte Zeile ist schließlich äquivalent zur dritten wegen der Semantik von $\sqcap$ und $\neg$ (Def. 2.2), und die vierte ist äquivalent dazu wegen der Definition von Unerfüllbarkeit (Def. 2.6). ❏

Teil 3

Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen

Teil 4

Tableau-Algorithmen

Teil 5

Komplexität

Teil 6

Effiziente Beschreibungslogiken

Teil 7

ABoxen und Anfragebeantwortung