

# **Tafelmitschriften zur Vorlesung „Beschreibungslogik“ im Sommersemester 2019**

Dr. Jean Christoph Jung, Prof. Dr. Thomas Schneider  
AG Theorie der Künstlichen Intelligenz  
Fachbereich 3



Stand: 13. Mai 2020

Dieses Dokument ist noch unvollständig und wird regelmäßig aktualisiert.

# Inhaltsverzeichnis

<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Tableau-Algorithmen</b>	<b>18</b>
<b>5</b>	<b>Komplexität</b>	<b>27</b>
<b>6</b>	<b>Effiziente Beschreibungslogiken</b>	<b>28</b>
<b>7</b>	<b>ABoxen und Anfragebeantwortung</b>	<b>29</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>30</b>

## **Teil 2**

# **Grundlagen**

## T2.1 Beispiele für $\mathcal{ALC}$ -Konzepte

Mit den Konzeptnamen

Student, Naturwissenschaft, Professor, Emeritus, PflichtVL, VL, Einfach, Interessant,  
 $A, B$

und den Rollennamen

studiert, hält, hatÜbungsaufgabe,  
 $r$

kann man z. B. folgende zusammengesetzte  $\mathcal{ALC}$ -Konzepte bilden:

- $\text{Student} \sqcap \exists \text{studiert.Naturwissenschaft}$   
 (beschreibt Studierende, die mindestens eine Naturwissenschaft studieren)
- $\text{Professor} \sqcap \text{Emeritus} \sqcap \forall \text{hält.} \neg \text{PflichtVL}$   
 (beschreibt Professor\*innen im Ruhestand, die keine Pflichtvorlesungen halten)
- $\text{VL} \sqcap \neg \text{PflichtVL} \sqcap \forall \text{hatÜbungsaufgabe.} (\text{Einfach} \sqcup \text{Interessant})$   
 (beschreibt Wahlvorlesungen, bei denen alle Übungsaufgaben einfach oder interessant sind)
- $A \sqcap \exists r. (\neg B \sqcup \forall r. A)$

(Die Beschreibungen in Klammern werden eigentlich erst richtig klar, wenn die Semantik definiert ist.)

## T2.2 Beispiele für Interpretationen und Extensionen

Wir betrachten die Interpretation  $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$  mit

$$\begin{aligned}\Delta^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3, v_1, v_2\} \\ \text{Mensch}^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\ \text{Student}^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\ \text{Vorlesung}^{\mathcal{I}} &= \{v_1, v_2\} \\ \text{PflichtVL}^{\mathcal{I}} &= \{v_1\} \\ \text{WahlVL}^{\mathcal{I}} &= \{v_2\} \\ \text{hört}^{\mathcal{I}} &= \{(s_1, v_1), (s_2, v_1), (s_2, v_2), (s_3, v_1)\} \\ \text{bekanntMit}^{\mathcal{I}} &= \{(s_1, s_2), (s_2, s_1), (s_1, s_1), (s_2, s_2), (s_3, s_3)\}.\end{aligned}$$

Jede Interpretation kann in offensichtlicher Weise als (knoten- und kantenbeschrifteter) gerichteter Graph aufgefasst werden; für unsere Beispielinterpretation  $\mathcal{I}$ :



Beispiele für die Extensionen einiger zusammengesetzter Konzepte in dieser Interpretation:

$$\begin{aligned}
(\text{VL} \sqcap \text{PflichtVL})^{\mathcal{I}} &= \{v_1, v_2\} \cap \{v_1\} &&= \{v_1\} \\
(\neg \text{VL})^{\mathcal{I}} &= \Delta^{\mathcal{I}} \setminus \{v_1, v_2\} &&= \{s_1, s_2, s_3\} \\
(\text{Student} \sqcup \text{VL})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \cup \{v_1, v_2\} = \Delta^{\mathcal{I}} \\
(\exists \text{bekanntMit. Student})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\
(\exists \text{bekanntMit.} \exists \text{bekanntMit. Student})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\
(\forall \text{hört. PflichtVL})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_3, v_1, v_2\}
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile beachte man die Besonderheit der Werterestriktion ( $\forall$ ), dass ein Domänenelement  $d$ , welches *keine* ausgehenden  $r$ -Kanten besitzt, immer eine Instanz von  $\forall r.C$  ist, für jedes beliebige Konzept  $C$ .

## T2.3 Semantik von $\top$ und $\perp$

Es gelten:

$$\begin{aligned}
\top^{\mathcal{I}} &= (A \sqcup \neg A)^{\mathcal{I}} = A^{\mathcal{I}} \cup (\Delta^{\mathcal{I}} \setminus A^{\mathcal{I}}) = \Delta^{\mathcal{I}} \\
\perp^{\mathcal{I}} &= (A \sqcap \neg A)^{\mathcal{I}} = A^{\mathcal{I}} \cap (\Delta^{\mathcal{I}} \setminus A^{\mathcal{I}}) = \emptyset^{\mathcal{I}}
\end{aligned}$$

Dabei folgt die erste Gleichheit jeder Zeile aus der Definition von  $\top$  bzw.  $\perp$  auf Folie 2.9, die zweite Gleichheit aus der Semantik (Def. 2.2) und die dritte aus der Mengenlehre.

## T2.4 Beispiele für „unerfüllbar“ und „subsumiert“

- (a) Das Konzept  $C = \exists r.A \sqcap \forall r.\neg A$  ist *nicht* erfüllbar:

Angenommen,  $C$  sei erfüllbar, d. h. es gibt eine Interpretation  $\mathcal{I}$  mit  $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ . Sei  $d \in C^{\mathcal{I}}$ . Wegen  $d \in (\exists r.A)^{\mathcal{I}}$  gibt es ein Element  $e \in A^{\mathcal{I}}$  mit  $(d, e) \in r^{\mathcal{I}}$ . Wegen  $d \in (\forall r.\neg A)^{\mathcal{I}}$  gilt aber  $e \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$ , also  $e \notin A^{\mathcal{I}}$ , was ein Widerspruch zu  $e \in A^{\mathcal{I}}$  ist. Also ist die Annahme falsch.

- (b)  $\exists r.(A \sqcap B) \sqsubseteq \exists r.A \sqcap \exists r.B$ :

Sei  $\mathcal{I}$  eine Interpretation und  $d \in (\exists r.(A \sqcap B))^{\mathcal{I}}$ . Dann gibt es ein Element  $e \in (A \sqcap B)^{\mathcal{I}}$  mit  $(d, e) \in r^{\mathcal{I}}$ . Wegen  $e \in A^{\mathcal{I}}$  gilt  $d \in (\exists r.A)^{\mathcal{I}}$ ; wegen  $e \in B^{\mathcal{I}}$  gilt  $d \in (\exists r.B)^{\mathcal{I}}$ . Also ist  $d \in (\exists r.A \sqcap \exists r.B)^{\mathcal{I}}$ .

Die Rückrichtung dieser Subsumtion gilt nicht – finde ein Gegenbeispiel, d. h. eine Interpretation  $\mathcal{I}$  mit  $(\exists r.A \sqcap \exists r.B)^{\mathcal{I}} \not\subseteq (\exists r.(A \sqcap B))^{\mathcal{I}}$ .

## T2.5 Beispiele für TBoxen und deren Semantik

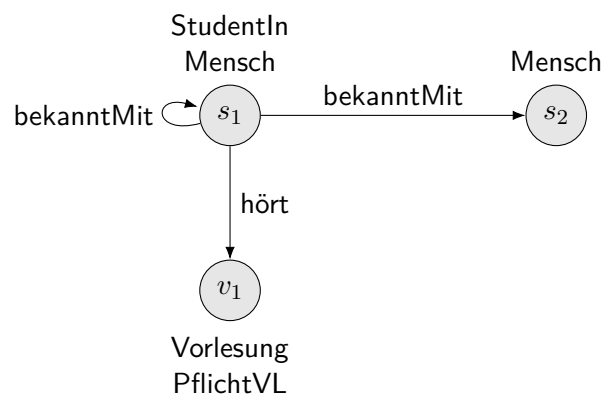
Wir betrachten folgende TBox.

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{StudentIn} & \equiv \text{Mensch} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung} \\ \text{Vorlesung} & \equiv \text{PflichtVL} \sqcup \text{WahlVL} \\ \text{StudentIn} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung} & \sqsubseteq \exists \text{bekanntMit.StudentIn} \\ \text{PflichtVL} \sqcap \text{WahlVL} & \sqsubseteq \perp \end{array} \right\}$$

Die Interpretation aus T2.2 ist Modell von  $\mathcal{T}$ . Sie erfüllt z. B. auch die folgende Konzeptinklusion.

$$\text{StudentIn} \sqsubseteq \exists \text{bekanntMit.Mensch} \quad (1)$$

Ein weiteres Modell ist z. B. folgende Interpretation  $\mathcal{J}$ .



$\mathcal{J}$  erfüllt ebenfalls die Konzeptinklusion (1) sowie z. B.  $\text{VL} \equiv \text{PflichtVL}$ .

## T2.6 Beispiele für „erfüllbar“ und „subsumiert“ bzgl. TBoxen

Sei  $\mathcal{T}$  die TBox aus dem vorangehenden Beispiel.

- (a) Das Konzept

$$C = \text{StudentIn} \sqcap \forall \text{hört.PflichtVL}$$

ist erfüllbar bezüglich  $\mathcal{T}$ , denn folgende Interpretation  $\mathcal{I}'$  ist ein Modell von  $\mathcal{T}$  mit  $s_1 \in C^{\mathcal{I}'}$ :



Ebenso ist die Interpretation  $\mathcal{I}$  aus T2.2 ein Modell von  $\mathcal{T}$  mit  $s_1 \in C^{\mathcal{I}}$ .

- (b) Das Konzept

$$C = \text{StudentIn} \sqcap \forall \text{hört.PflichtVL} \sqcap \exists \text{hört.WahlVL}$$

ist *unerfüllbar* bezüglich  $\mathcal{T}$ : Angenommen,  $C$  sei erfüllbar bzgl.  $\mathcal{T}$ . Dann gibt es ein Modell  $\mathcal{I}$  von  $\mathcal{T}$  mit einer Instanz  $d \in C^{\mathcal{I}}$ . Nach der Semantik von „ $\sqcap$ “ (Def. 2.2) gelten (i)  $d \in (\forall \text{hört.PflichtVL})^{\mathcal{I}}$  und (ii)  $d \in (\exists \text{hört.WahlVL})^{\mathcal{I}}$ . Wegen (ii) gibt es ein Element  $e \in \text{WahlVL}^{\mathcal{I}}$  mit  $(d, e) \in \text{hört}^{\mathcal{I}}$ . Wegen (i) ist dann auch  $e \in \text{PflichtVL}^{\mathcal{I}}$ , also  $e \in (\text{PflichtVL} \sqcap \text{WahlVL})^{\mathcal{I}}$ . Weil  $\mathcal{I}$  jedoch ein Modell von  $\mathcal{T}$  ist, kann es wegen der Konzeptinklusion  $\text{PflichtVL} \sqcap \text{WahlVL} \sqsubseteq \perp$  aus  $\mathcal{T}$  ein solches Element  $e$  nicht geben; ein Widerspruch. Also ist die Annahme falsch.

- (c) Für die Konzepte

$$C = \text{StudentIn} \quad \text{und} \quad D = \exists \text{bekanntMit.StudentIn}$$

gilt  $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ : Sei  $\mathcal{I}$  ein Modell von  $\mathcal{T}$  und  $d \in C^{\mathcal{I}}$ , d. h.  $d \in \text{StudentIn}^{\mathcal{I}}$ . Zu zeigen ist  $d \in D^{\mathcal{I}}$ , d. h.  $d \in (\exists \text{bekanntMit.StudentIn})^{\mathcal{I}}$ .

Wegen der ersten Zeile von  $\mathcal{T}$  gilt  $d \in (\exists \text{hört.Vorlesung})^{\mathcal{I}}$ , also auch  $d \in (\text{StudentIn} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung})^{\mathcal{I}}$ . Mit Zeile 3 von  $\mathcal{T}$  folgt wie gewünscht  $d \in (\exists \text{bekanntMit.StudentIn})^{\mathcal{I}}$ .

Dies ist bereits Schlussfolgern, denn wir haben implizites Wissen aus  $\mathcal{T}$  abgeleitet:

- (a) Es *kann* Student\*innen geben, die nur Pflichtvorlesungen hören.
- (b) Es kann *keine* Student\*innen geben, die nur Pflichtvorlesungen, aber mindestens eine Wahlvorlesung hören.
- (c) Jede\*r Student\*in ist mit mindestens einer/m Student\*in bekannt.

## T2.7 Beweis der Monotonie von $\mathcal{ALC}$ (Lemma 2.7)

**Lemma 2.7** Seien  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  TBoxen mit  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ . Dann gilt:

- (1) Wenn  $C$  erfüllbar bezüglich  $\mathcal{T}_2$  ist, dann ist  $C$  erfüllbar bezüglich  $\mathcal{T}_1$ .
- (2) Wenn  $\mathcal{T}_1 \models C \sqsubseteq D$ , dann  $\mathcal{T}_2 \models C \sqsubseteq D$ .

**Beweis.**

- (1) Sei  $C$  erfüllbar bezüglich  $\mathcal{T}_2$ . Dann gibt es ein Modell  $\mathcal{I}$  von  $\mathcal{T}_2$  mit  $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ . Da  $\mathcal{I}$  Modell von  $\mathcal{T}_2$  ist, erfüllt  $\mathcal{I}$  alle Konzeptinklusionen in  $\mathcal{T}_2$ , also wegen  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$  auch alle Konzeptinklusionen in  $\mathcal{T}_1$ , und somit ist  $\mathcal{I}$  auch Modell von  $\mathcal{T}_1$ . Also gibt es ein Modell  $\mathcal{I}$  von  $\mathcal{T}_1$  mit  $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ ; d. h.  $C$  ist erfüllbar bezüglich  $\mathcal{T}_1$ .
- (2) Wir beweisen die Kontraposition. Es gelte  $\mathcal{T}_2 \not\models C \sqsubseteq D$ .<sup>1</sup> Dann gibt es ein Modell  $\mathcal{I}$  von  $\mathcal{T}_2$  mit  $C^{\mathcal{I}} \not\subseteq D^{\mathcal{I}}$ . Wie in (1) ist  $\mathcal{I}$  auch Modell von  $\mathcal{T}_1$ , also  $\mathcal{T}_1 \not\models C \sqsubseteq D$ .  $\square$

Auf der Folie steht auch: „Die Umkehrungen von (1) und (2) sind im Allgemeinen *nicht* richtig.“ Davon kann man sich mittels einfacher Gegenbeispiele überzeugen: z. B. ist mit  $\mathcal{T}_1 = \emptyset$  und  $\mathcal{T}_2 = \{A \sqsubseteq B\}$  die Umkehrung von (2) widerlegt, denn  $\mathcal{T}_2 \models A \sqsubseteq B$ , aber  $\mathcal{T}_1 \not\models A \sqsubseteq B$ .

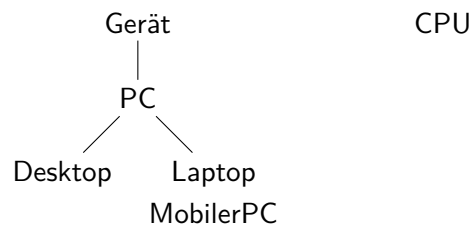
## T2.8 Beispiel für Subsumtion als Ordnungsrelation

Wir betrachten folgende TBox.

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{l} \text{PC} \sqsubseteq \text{Gerät} \sqcap \exists \text{hatTeil.CPU} \\ \text{PC} \equiv \text{Desktop} \sqcup \text{Laptop} \\ \text{Desktop} \sqsubseteq \neg \text{Laptop} \\ \text{MobilerPC} \equiv \text{PC} \sqcap \neg \text{Desktop} \end{array} \right\}$$

Die dritte Zeile von  $\mathcal{T}$  ist äquivalent zu  $\text{Desktop} \sqcap \text{Laptop} \sqsubseteq \perp$ , wie man leicht zeigt (probiere es selbst aus).

Die Ordnung „ $\sqsubseteq$  bezüglich  $\mathcal{T}$ “ kann man durch folgendes Hasse-Diagramm darstellen:



<sup>1</sup>Das Zeichen  $\not\models$  steht für „nicht  $\models$ “, also bedeutet  $\mathcal{T} \not\models C \sqsubseteq D$ , dass die Beziehung  $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$  *nicht* gilt (d. h. bezüglich  $\mathcal{T}$  wird  $C$  *nicht* von  $D$  subsumiert).



Dass die Relation „ $\sqsubseteq$  bezüglich  $\mathcal{T}$ “ *nicht* antisymmetrisch ist, zeigt sich in diesem Beispiel dadurch, dass der Knoten unten rechts zwei Beschriftungen hat, also  $\mathcal{T} \models \text{Laptop} \equiv \text{MobilerPC}$ . Wäre die Relation antisymmetrisch, dann dürfte nicht gleichzeitig  $\mathcal{T} \models \text{Laptop} \sqsubseteq \text{MobilerPC}$  und  $\mathcal{T} \models \text{MobilerPC} \sqsubseteq \text{Laptop}$  gelten.

## T2.9 Wechselseitige Reduktion der Schlussfolgerungsprobleme

### Lemma 2.9

- (1) Subsumtion ist polynomiell reduzierbar auf (Un)erfüllbarkeit:  
 $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$  gdw.  $C \sqcap \neg D$  unerfüllbar bezüglich  $\mathcal{T}$
- (2) Erfüllbarkeit ist polynomiell reduzierbar auf (Nicht-)Äquivalenz:  
 $C$  erfüllbar bezüglich  $\mathcal{T}$  gdw.  $\mathcal{T} \not\models C \equiv \perp$
- (3) Äquivalenz ist polynomiell reduzierbar auf Subsumtion:  
 $\mathcal{T} \models C \equiv D$  gdw.  $\mathcal{T} \models \top \sqsubseteq (C \sqcap D) \sqcup (\neg C \sqcap \neg D)$

**Beweis.** Wir beweisen exemplarisch Punkt (1). Die Beweise der anderen zwei Punkte sind analog.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} \models C \sqsubseteq D & \text{ gdw. } \text{für alle Modelle } \mathcal{I} \text{ von } \mathcal{T} \text{ gilt } C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}} \\
 & \text{gdw. } \text{für alle Modelle } \mathcal{I} \text{ von } \mathcal{T} \text{ gilt } C^{\mathcal{I}} \cap (\Delta^{\mathcal{I}} \setminus D^{\mathcal{I}}) = \emptyset \\
 & \text{gdw. } \text{für alle Modelle } \mathcal{I} \text{ von } \mathcal{T} \text{ gilt } (C \sqcap \neg D)^{\mathcal{I}} = \emptyset \\
 & \text{gdw. } C \sqcap \neg D \text{ unerfüllbar bezüglich } \mathcal{T}
 \end{aligned}$$

Hier gilt das erste „gdw.“ wegen der Definition von Subsumtion (Def. 2.6), und die zweite Zeile ist äquivalent zur ersten, weil für beliebige Mengen  $M_1, M_2$  gilt, dass  $M_1 \subseteq M_2$  gdw.  $M_1 \cap \overline{M_2} = \emptyset$ , wobei  $\overline{M_2}$  das Komplement von  $M_2$  ist. Man überzeuge sich davon anhand eines Venn-Diagramms. Die dritte Zeile ist schließlich äquivalent zur dritten wegen der Semantik von  $\sqcap$  und  $\neg$  (Def. 2.2), und die vierte ist äquivalent dazu wegen der Definition von Unerfüllbarkeit (Def. 2.6).  $\square$

## T2.10 Beispiel für inverse Rollen

Betrachte folgende  $\mathcal{ALC}$ -TBox:

$$\mathcal{T} = \{ \text{Professor} \sqsubseteq \text{Verrückt} \sqcap \exists \text{gibt.Vorlesung}, \\
 \text{Vorlesung} \sqsubseteq \forall \text{wirdGegebenVon}.\neg \text{Verrückt} \}$$

Intuitiv sollte **Professor** unerfüllbar bezüglich  $\mathcal{T}$  sein; dies ist aber nicht der Fall, weil **Professor** in folgendem Modell von  $\mathcal{T}$  eine Instanz hat:



In  $\mathcal{ALCI}$  kann man die zweite Konzeptinklusion in  $\mathcal{T}$  durch

$$\text{Vorlesung} \sqsubseteq \forall \text{gibt}^- . \neg \text{Verrückt}$$

ersetzen. Dann wird Professor unerfüllbar bezüglich  $\mathcal{T}$  (aber  $\mathcal{T}$  hat immer noch Modelle).

## T2.11 Beispiele für Zahlenrestriktionen

Definition einer Hand als ein Organ mit genau fünf Fingern:

$$\text{Hand} \equiv \text{Organ} \sqcap (\geq 5 \text{ hatTeil.Finger}) \sqcap (\leq 5 \text{ hatTeil.Finger})$$

Forderung, dass in jedem Semester mindestens zwei Wahlpflichtmodule angeboten werden:

$$\text{Semester} \sqsubseteq (\geq 2 \text{ angeboten.Wahlpflichtmodul})$$

## T2.12 Beispiele für die Übersetzung von $\mathcal{ALC}$ nach FO

Wir betrachten folgendes  $\mathcal{ALC}$ -Konzept.

$$C = \text{Mensch} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung}$$

Wir erhalten  $\pi_x(C)$  anhand der induktiven Definition auf der Folie, indem wir mit den Konzeptnamen beginnen und uns zu komplexeren Konzepten „hocharbeiten“:

$$\pi_x(\text{Mensch}) = \text{Mensch}(x)$$

$$\pi_y(\text{Vorlesung}) = \text{Vorlesung}(y)$$

$$\pi_x(\exists \text{hört.Vorlesung}) = \exists y(\text{hört}(x, y) \wedge \text{Vorlesung}(y))$$

$$\pi_x(\text{Mensch} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung}) = \text{Mensch}(x) \wedge \exists y(\text{hört}(x, y) \wedge \text{Vorlesung}(y))$$

$$\text{also} \quad \pi_x(C) = \text{Mensch}(x) \wedge \exists y(\text{hört}(x, y) \wedge \text{Vorlesung}(y))$$

Wenn wir außerdem die TBox

$$\mathcal{T} = \{\text{StudentIn} \equiv \text{Mensch} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung}\}$$

gegeben haben, dann ist

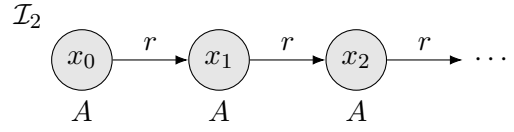
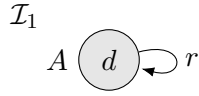
$$\pi(\mathcal{T}) = \forall x (\text{StudentIn}(x) \leftrightarrow \text{Mensch}(x) \wedge \exists y(\text{hört}(x, y) \wedge \text{Vorlesung}(y))).$$

## **Teil 3**

# **Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen**

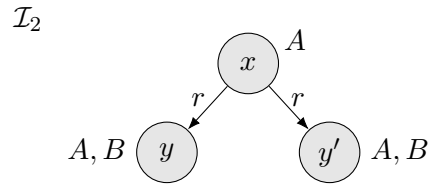
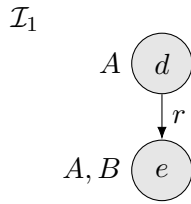
## T3.1 Beispiele für Bisimulationen

1. Für die Interpretationen



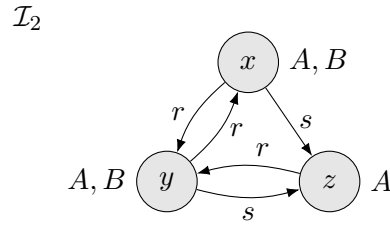
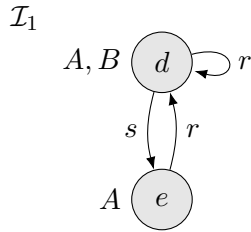
ist  $\rho = \Delta^{\mathcal{I}_1} \times \Delta^{\mathcal{I}_2}$  eine Bisimulation.

2. Für die Interpretationen



ist  $\rho = \{(d, x), (e, y), (e, y')\}$  eine Bisimulation.

3. Für die Interpretationen



ist  $\rho = \{(d, x), (d, y), (e, z)\}$  eine Bisimulation.

## T3.2 Beweis des Bisimulationstheorems

**Theorem 3.2** Seien  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$  Interpretationen,  $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$  und  $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ .

Wenn  $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$ , dann gilt für alle  $\mathcal{ALC}$ -Konzepte  $C$ :

$$d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} \quad \text{gdw.} \quad d_2 \in C^{\mathcal{I}_2}$$

**Beweis.** Sei  $\rho$  eine Bisimulation zwischen  $\mathcal{I}_1$  und  $\mathcal{I}_2$  mit  $d_1 \rho d_2$ . Wir beweisen die Behauptung per Induktion über die Struktur von  $C$ .

**Induktionsanfang.** Hier ist  $C = A$  für einen Konzeptnamen  $A$ . Nach Bedingung (1) für Bisimulationen (Definition 3.1) gilt wie gewünscht:  $d_1 \in A^{\mathcal{I}_1}$  gdw.  $d_2 \in A^{\mathcal{I}_2}$

**Induktionsschritt.** Wir müssen fünf Fälle gemäß des äußersten Konstruktors von  $C$  unterscheiden ( $\neg, \sqcap, \sqcup, \exists, \forall$ ). Wegen der (leicht nachzuweisenden) Äquivalenzen

$$C \sqcup D \equiv \neg(\neg C \sqcap \neg D) \quad \text{und} \quad \forall r.C \equiv \neg \exists r.\neg C$$

genügt es, wenn wir uns auf die drei Fälle  $\neg, \sqcap, \exists$  beschränken.

$$C = \neg D$$

$$\begin{array}{lll} d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} & \text{gdw.} & d_1 \notin D^{\mathcal{I}_1} & (\text{Semantik „}\neg\text{“}) \\ & & d_2 \notin D^{\mathcal{I}_2} & (\text{Induktionsvoraussetzung}) \\ & & d_2 \in C^{\mathcal{I}_2} & (\text{Semantik „}\neg\text{“}) \end{array}$$

$$C = D \sqcap E$$

$$\begin{array}{lll} d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} & \text{gdw.} & d_1 \in D^{\mathcal{I}_1} \text{ und } d_1 \in E^{\mathcal{I}_1} & (\text{Semantik „}\sqcap\text{“}) \\ & & d_2 \in D^{\mathcal{I}_2} \text{ und } d_2 \in E^{\mathcal{I}_2} & (\text{Induktionsvoraussetzung}) \\ & & d_2 \in C^{\mathcal{I}_2} & (\text{Semantik „}\sqcap\text{“}) \end{array}$$

$$C = \exists r.D$$

Für die Richtung „ $\Rightarrow$ “ argumentieren wir so:

$$\begin{array}{ll} d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} & \\ \Rightarrow \text{es gibt } e_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1} \text{ mit } (d_1, e_1) \in r^{\mathcal{I}_1} \text{ und } e_1 \in D^{\mathcal{I}_1} & (\text{Semantik „}\exists\text{“}) \\ \Rightarrow \text{es gibt } e_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2} \text{ mit } (d_2, e_2) \in r^{\mathcal{I}_2} \text{ und } e_1 \rho e_2 & (\text{Bedingung (2) Bisim.}) \\ \Rightarrow e_2 \in D^{\mathcal{I}_2} & (\text{Induktionsvoraus.}) \\ \Rightarrow d_2 \in (\exists r.D)^{\mathcal{I}_2} & (\text{Semantik „}\exists\text{“}) \end{array}$$

Das Argument für die Richtung „ $\Leftarrow$ “ ist analog, unter Verwendung von Bedingung (3) für Bisimulationen.  $\square$

### T3.3 Nichtausdrückbarkeit konkreter Eigenschaften

**Theorem 3.4** In  $\mathcal{ALC}$  sind *nicht ausdrückbar*:

- das  $\mathcal{ALCI}$ -Konzept  $\exists r^{\neg}.\top$
- die  $\mathcal{ALCQ}$ -Konzepte
  - $(\leq n r.\top)$ , für alle  $n > 0$
  - $(\geq n r.\top)$ , für alle  $n > 1$

**Beweis.** Siehe Proposition 3.3 und 3.4 in [BHLS17].

### T3.4 Gegenbeispiel für Rückrichtung Bisimulationstheorem

**Behauptung.** Es gibt Interpretationen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{J}$  und  $d \in \mathcal{I}$ ,  $e \in \mathcal{J}$ , so dass

- (i)  $d \in C^{\mathcal{I}}$  gdw.  $e \in C^{\mathcal{J}}$  für alle  $\mathcal{ALC}$ -Konzepte  $C$ ,
- (ii) aber  $(\mathcal{I}, d) \not\sim (\mathcal{J}, e)$ .

**Beweis.** Betrachte die folgenden Interpretationen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{J}$ .

... Bild folgt ...

Es gilt (ii): versucht man, eine Bisimulation  $\rho$  mit  $d \rho e$  zu konstruieren, so benötigt man wegen  $(e, e') \in r^{\mathcal{I}}$  einen  $r$ -Nachfolger  $d'$  von  $d$  mit  $d' \rho e'$ . Da jeder  $r$ -Nachfolger von  $d$  aber nur endlich viele weitere Nachfolger hat, kann man wegen des unendlichen  $r$ -Pfads unterhalb von  $e'$  irgendwann nicht mehr Bedingung (3) von Bisimulationen gewährleisten.

Außerdem kann man mittels struktureller Induktion zeigen, dass (i) gilt. □

### T3.5 Beispiel für ein Baummodell

Sei  $C = A \sqcap \exists s.B \sqcap \forall s.\exists r.A$  und  $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq \exists s.A\}$ . Ein Baummodell von  $C$  und  $\mathcal{T}$ :



### T3.6 Beispiel für das Unravelling

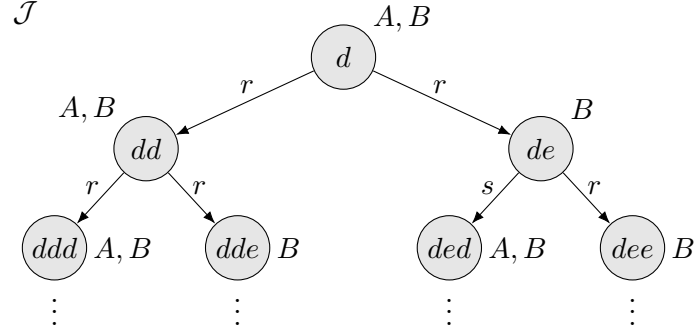
Wir betrachten folgende Interpretation  $\mathcal{I}$ .



Dann gibt es beispielsweise folgende  $d$ -Pfade:

- $\rho = ddedee$  mit  $\text{end}(\rho) = e$
- $\rho' = deeed$  mit  $\text{end}(\rho') = d$

Das Unravelling von  $\mathcal{I}$  an Stelle  $d$  gemäß Definition 3.7 ist folgende Interpretation  $\mathcal{J}$ .



### T3.7 Beweis des Unravelling-Lemmas

**Lemma 3.8** Für alle  $\mathcal{ALC}$ -Konzepte  $C$  und alle  $p \in \Delta^{\mathcal{J}}$  gilt:

$$\text{end}(p) \in C^{\mathcal{I}} \quad \text{gdw.} \quad p \in C^{\mathcal{J}}$$

**Beweis.** Mit dem Bisimulationstheorem (Theorem 3.2) genügt es zu zeigen, dass  $\text{end}(p)$  und  $p$  bisimilar sind, d. h.  $(\mathcal{I}, \text{end}(p)) \sim (\mathcal{J}, p)$ . Siehe dazu Lemma 3.22 in [BHLS17].

### T3.8 Beweis der Baummodelleigenschaft von $\mathcal{ALC}$

**Theorem 3.6** Wenn ein  $\mathcal{ALC}$ -Konzept  $C$  bezüglich einer  $\mathcal{ALC}$ -TBox  $\mathcal{T}$  erfüllbar ist, dann haben  $C$  und  $\mathcal{T}$  ein gemeinsames Baummodell  $\mathcal{I}$ .

**Beweis.** Siehe Theorem 3.24 in [BHLS17].

### T3.9 Beispiel für Teilkonzepte

Sei  $C = \forall r. \exists r. (A \sqcap B)$ . Dann ist  $\text{sub}(C) = \{A, B, A \sqcap B, \exists r. (A \sqcap B), \forall r. \exists r. (A \sqcap B)\}$ .

Sei  $\mathcal{T} = \{A \sqsubseteq \exists r. B, \forall r. B \sqsubseteq A\}$ . Dann ist  $\text{sub}(\mathcal{T}) = \{A, B, \exists r. B, \forall r. B\}$ .

### T3.10 Beispiel für Typen und Filtration

Seien  $C = A \sqcap B$  und  $\mathcal{T} = \{A \sqsubseteq \exists r.A\}$ . Dann ist  $\text{sub}(C, \mathcal{T}) = \{A, B, A \sqcap B, \exists r.A\}$ .

Wir betrachten die folgende Interpretation  $\mathcal{I}$ .



Dann gilt für  $d$  und die vier Teilkonzepte in  $\text{sub}(C, \mathcal{T})$ :  $d \in A^{\mathcal{I}}$ ,  $d \notin B^{\mathcal{I}}$ ,  $d \notin (A \sqcap B)^{\mathcal{I}}$  und  $d \in (\exists r.A)^{\mathcal{I}}$ . Also ist

$$t_{\mathcal{I}}(d) = \{A, \exists r.A\}.$$

Analog erhält man:

$$t_{\mathcal{I}}(e) = \{A, \exists r.A\} \quad t_{\mathcal{I}}(f) = \{A, B, A \sqcap B, \exists r.A\} \quad t_{\mathcal{I}}(g) = \{A, \exists r.A\}$$

Es gilt also  $d \simeq e \simeq g \not\simeq f$ , und somit gibt es zwei Äquivalenzklassen bezüglich  $\simeq$ :

$$[d] = \{d, e, g\} \quad [f] = \{f\}$$

Die Filtration von  $\mathcal{I}$  bezüglich  $C$  und  $\mathcal{T}$  gemäß Definition 3.17 ist dann folgende Interpretation  $\mathcal{J}$ .



### T3.11 Beweis des Filtrationstheorems

**Theorem 3.17** Sei  $\mathcal{I}$  ein Modell von  $C$  und  $\mathcal{T}$ , und sei  $\mathcal{J}$  die Filtration von  $\mathcal{I}$  bezüglich  $C$  und  $\mathcal{T}$ . Dann ist auch  $\mathcal{J}$  ein Modell von  $C$  und  $\mathcal{T}$ .

**Beweis.** Wir verwenden die folgende Hilfsaussage.

$$\text{Für alle } d \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ und } D \in \text{sub}(C, \mathcal{T}) \text{ gilt: } d \in D^{\mathcal{I}} \quad \text{gdw.} \quad [d] \in D^{\mathcal{J}}$$

Für den Beweis dieser Hilfsaussage siehe Lemma 3.15 in [BHLS17].

Da  $\mathcal{I}$  ein Modell von  $C$  und  $\mathcal{T}$  ist, gibt es ein Element  $d \in C^{\mathcal{I}}$ . Mit der Hilfsaussage folgt  $[d] \in C^{\mathcal{J}}$ ; somit ist  $\mathcal{J}$  ein Modell von  $C$ .

Um zu zeigen, dass  $\mathcal{J}$  auch ein Modell von  $\mathcal{T}$  ist, betrachten wir eine beliebige Konzeptinklusion  $D \sqsubseteq E \in \mathcal{T}$  und eine beliebige Instanz  $[d] \in D^{\mathcal{J}}$ . Mit der Hilfsaussage folgt  $d \in D^{\mathcal{I}}$ ; also  $d \in E^{\mathcal{I}}$  (da  $\mathcal{T}$  Modell von  $\mathcal{I}$  ist); also mit der Hilfsaussage  $[d] \in E^{\mathcal{J}}$ .  $\square$



### T3.12 $\mathcal{ALCQI}$ hat nicht die endliche Modelleigenschaft

Betrachte die TBox  $\mathcal{T} = \{(1) \top \sqsubseteq \exists r. \neg A, (2) \top \sqsubseteq (\leq 1 r^-. \top)\}$ . Dann hat der Konzeptname  $A$  bezüglich  $\mathcal{T}$  nur *unendliche Modelle*:

Sei  $\mathcal{I}$  ein Modell von  $A$  und  $\mathcal{T}$  und  $d_0 \in \Delta^{\mathcal{I}}$ . Wir müssen zeigen, dass  $|\Delta^{\mathcal{I}}| = \infty$ .

Da  $\mathcal{I}$  Modell von  $\mathcal{T}$  ist, muss es wegen (1) einen  $r$ -Nachfolger  $d_1$  von  $d_0$  geben mit  $d_1 \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$ . Da  $d_0 \in A^{\mathcal{I}}$ , muss  $d_1 \neq d_0$  gelten.

Wegen (1) muss es wiederum einen  $r$ -Nachfolger  $d_2$  von  $d_1$  geben mit  $d_2 \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$ . Wie im vorigen Fall muss  $d_1 \neq d_0$  gelten. Außerdem muss  $d_2 \neq d_1$  gelten, da sonst  $d_1$  zwei  $r$ -Vorgänger hätte ( $d_0$  und  $d_1$ ) und dann (2) verletzt wäre.

Dieses Argument kann man so fortsetzen und immer wieder die Existenz eines neuen Elements  $d_{i+1}$  folgern, dass verschieden von allen  $d_0, \dots, d_i$  sein muss. Deshalb muss  $\Delta^{\mathcal{I}}$  unendlich sein.

### T3.13 Anzahl der Interpretationen der Größe $\leq 2^n$

**Behauptung.** Sei  $n = |C| + |\mathcal{T}|$ . Dann gibt es höchstens  $2^{2^{5n}}$  Interpretationen  $\mathcal{I}$  mit  $|\Delta^{\mathcal{I}}| \leq 2^n$ .

**Beweis.** Zunächst betrachten wir die Anzahl aller Interpretationen  $\mathcal{I}$  mit  $|\Delta^{\mathcal{I}}| = 2^n$ .

Jedes Element  $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$  kann in  $A^{\mathcal{I}}$  sein oder nicht, für jeden der  $\leq n$  Konzeptnamen  $A$  in  $\text{sub}(C, \mathcal{T})$ . Also gibt es  $2^{2^n \cdot n}$  Möglichkeiten für die Extensionen der Konzeptnamen in  $C$  und  $\mathcal{T}$ .

Jedes Paar von Elementen  $(d, e) \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$  kann in  $r^{\mathcal{I}}$  sein oder nicht, für jeden der  $\leq n$  Rollennamen  $r$  in  $\text{sub}(C, \mathcal{T})$ . Also gibt es  $2^{2^n \cdot 2^n \cdot n}$  Möglichkeiten für die Extensionen der Rollennamen in  $C$  und  $\mathcal{T}$ .

Die Gesamtzahl der möglichen Extensionen aller Konzept- und Rollennamen in  $C$  und  $\mathcal{T}$  ist dann das Produkt dieser beiden Zahlen, also:

$$\begin{aligned} 2^{2^n \cdot n} \cdot 2^{2^n \cdot 2^n \cdot n} &= 2^{2^n \cdot n + 2^{2^n} \cdot n} \\ &\leq 2^{2^{2^n} + 2^{3n}} \\ &\leq 2^{2 \cdot 2^{3n}} \\ &= 2^{2^{3n+1}} \\ &\leq 2^{2^{4n}} \end{aligned}$$

Betrachtet man nun die Anzahl der Interpretationen  $\mathcal{I}$  mit  $|\Delta^{\mathcal{I}}| \leq 2^n$ , dann sind dies maximal  $2^n \cdot 2^{2^{4n}} = 2^{2^{4n} + n} \leq 2^{2^{5n}}$ .  $\square$

## **Teil 4**

# **Tableau-Algorithmen**

## T4.1 Umwandlung in NNF

**Lemma 4.2.** Jedes Konzept kann in Linearzeit in ein äquivalentes Konzept in NNF umgewandelt werden.

**Beweis.** Dies geschieht durch erschöpfendes Anwenden folgender Regeln.

- Auflösen doppelter Negation: ersetze  $\neg\neg C$  durch  $C$
- de Morgan: ersetze  $\neg(C \sqcap D)$  durch  $\neg C \sqcup \neg D$ ; ersetze  $\neg(C \sqcup D)$  durch  $\neg C \sqcap \neg D$
- Dualität von  $\exists$  und  $\forall$ : ersetze  $\neg\exists r.C$  durch  $\forall r.\neg C$ ; ersetze  $\neg\forall r.C$  durch  $\exists r.\neg C$

Jede Regelanwendung ist äquivalenzerhaltend und schiebt die entsprechende Negation weiter nach innen (oder löst sie auf).

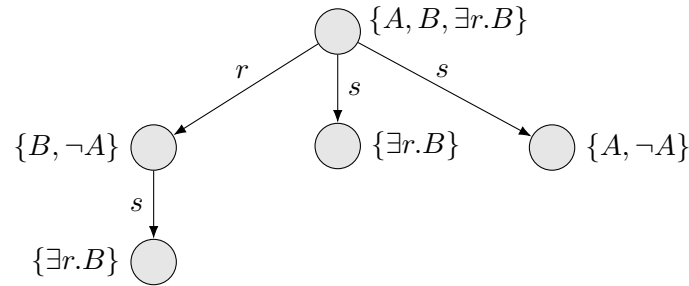
Man kann zeigen, dass linear viele Regelanwendungen ausreichen.  $\square$

## T4.2 Beispiel I-Baum

Sei  $C_0 = A \sqcap \forall r.(\neg A \sqcap \exists r.B)$ .

Dann ist  $\text{sub}(C_0) = \{A, B, \neg A, \exists r.B, \neg A \sqcap \exists r.B, \forall r.(\neg A \sqcap \exists r.B), C_0\}$ .

Der folgende Baum ist ein I-Baum für  $C_0$ .



Beachte, dass die Knotenbeschriftung im Allgemeinen nicht der Semantik genügen muss; die Tableau-Regeln werden jedoch dafür sorgen, dass sie das (größtenteils) tut.

## T4.3 Beispiel Tableau-Algorithmus

Sei  $C_0 = (\exists r.A \sqcap \exists r.\neg A) \sqcap (\forall r.A \sqcup \forall r.B)$ . Im Folgenden ist ein möglicher<sup>2</sup> Lauf des Tableau-Algorithmus auf  $C_0$  angegeben. Nach den ersten drei Schritten liefert dieser folgendes Zwischenergebnis:

	$C_0$	(1)
●	$\exists r.A \sqcap \exists r.\neg A$	(2a)
	$\forall r.A \sqcup \forall r.B$	(2b)
	$\exists r.A, \exists r.\neg A$	(3)

<sup>2</sup>Da die Reihenfolge der Regelanwendungen nicht festgelegt ist, gibt es im Allgemeinen mehrere Läufe. Das Ergebnis (Menge der vollständigen I-Bäume) ist jedoch nicht von der Reihenfolge abhängig.

Dabei wurden folgende Regeln angewendet.

- (1) initialer Baum  $\mathcal{B}_{\text{ini}}$
- (2a), (2b)  $\sqcap$ -Regel auf (1)
- (3)  $\sqcap$ -Regel auf (2a)

Als nächstes wenden wir die  $\sqcup$ -Regel auf  $\forall r.A \sqcup \forall r.B$  (2b) an. Dadurch erhalten wir zwei I-Bäume  $\mathcal{B}_1$  und  $\mathcal{B}_2$ :



In  $\mathcal{B}_1$  lässt sich die  $\exists$ -Regel auf die beiden Konzepte in (3) anwenden, wodurch jeweils ein neuer  $r$ -Nachfolger des Wurzelknotens erzeugt wird:



Nun lässt sich die  $\forall$ -Regel auf (4a) und den rechten Nachfolger anwenden (der linke ist bereits mit  $A$  beschriftet), und wir erhalten:



Dieser I-Baum ist vollständig (denn es ist keine weitere Regel anwendbar), und er enthält einen offensichtlichen Widerspruch wegen (6) und (7) – ab jetzt immer mit dem Symbol  $\zeta$  gekennzeichnet.

Schließlich wenden wir in  $\mathcal{B}_2$  dieselben Regeln an und erhalten folgenden I-Baum:



Es wurden also folgende Regeln angewendet:

- (8)  $\exists$ -Regel auf  $\exists r.A$  (3)
- (9)  $\exists$ -Regel auf  $\exists r.\neg A$  (3)
- (10)  $\forall$ -Regel auf (4b) und linken  $r$ -Nachfolger
- (11)  $\forall$ -Regel auf (4b) und rechten  $r$ -Nachfolger

Dieser Baum ist vollständig, enthält aber *keinen* offensichtlichen Widerspruch. Somit gibt der Algorithmus auf der Eingabe  $C_0$  „erfüllbar“ zurück.

## T4.4 Verzweigungsgrad der I-Bäume

**Behauptung 1.** Es werden nur I-Bäume mit einem Verzweigungsgrad von maximal  $|C_0|$  generiert.

**Beweis.** Nur die  $\exists$ -Regel generiert Nachfolgerknoten, und zwar höchstens einen pro Konzept  $\exists r.C$  in  $\text{sub}(C_0)$ . Nach Lemma 3.13 ist aber  $|\text{sub}(C_0)| \leq C_0$ .  $\square$

## T4.5 Tiefe der I-Bäume

**Behauptung 2.** Es werden nur I-Bäume mit einer Tiefe von maximal  $|C_0|$  generiert.

**Beweis.** Dazu genügt es, folgende Behauptung zu beweisen:

**Behauptung 2a.** Wenn  $v$  ein Knoten mit Tiefe  $i$  ist, dann gilt für alle  $C \in \mathcal{L}(v)$ :

$$\text{rd}(C) \leq \text{rd}(C_0) - i \quad ((*) )$$

Dabei zählen wir die Tiefe eines Knotens beginnend von der Wurzel, welche die Tiefe 0 hat. Behauptung 2a besagt also, dass die Rollentiefe der Konzepte in den Knotenbeschriftungen mit der Tiefe eines Knotens abnimmt.

Es ist leicht zu sehen, dass die gewünschte Behauptung 2 bereits aus Behauptung 2a folgt: Wegen der Tableau-Regeln ist jeder Knoten mit mindestens einem Konzept beschriftet

(der initiale Knoten mit  $C_0$  und alle weiteren Knoten mit dem  $C$  aus der  $\exists$ -Regel). Wenn ein generierter I-Baum also eine Tiefe  $k > |C_0|$  hätte, dann gäbe es einen Knoten  $v$  der Tiefe  $k$  und in dessen Beschriftung  $\mathcal{L}(v)$  ein Konzept  $C$ . Wegen Behauptung 2a wäre dann aber  $\text{rd}(C) < 0$ , was nicht möglich ist.

**Beweis von Behauptung 2a.** Wir verwenden Induktion über die Anzahl der Regelnwendungen.

**Induktionsanfang.** Nach 0 Regelnwendungen gibt es nur den initialen Knoten  $v_{\text{ini}}$  mit  $\mathcal{L}(v_{\text{ini}}) = \{C_0\}$ . Ungleichung (\*) folgt, da  $i = 0$ .

**Induktionsschritt.** Hier unterscheiden wir vier Fälle nach der Regel, durch deren Anwendung das Konzept  $C$  zur Knotenbeschriftung  $\mathcal{L}(v)$  hinzugefügt wurde.

**$\sqcap$ -Regel.** Vor der Anwendung der Regel gab es ein Konzept  $C \sqcap D \in \mathcal{L}(v)$ , und durch die Anwendung wurden  $C$  und  $D$  zu  $\mathcal{L}(v)$  hinzugefügt. Nach Induktionsvoraussetzung ist  $\text{rd}(C \sqcap D) \leq \text{rd}(C_0) - i$ , also auch  $\text{rd}(C) \leq \text{rd}(C_0) - i$  wegen  $C \leq \text{rd}(C \sqcap D)$ . Analog für  $\text{rd}(D)$ .

**$\sqcup$ -Regel.** Analog (probiert es selbst aus).

**$\exists$ -Regel.** Vor der Anwendung der Regel gab es einen Vorgängerknoten  $v'$  von  $v$  mit  $\exists r.C \in \mathcal{L}(v')$ , und durch die Anwendung wurde  $(v', r, v)$  zu  $E$  hinzugefügt und  $\mathcal{L}(v) = \{C\}$  gesetzt. Nun gilt:

$$\begin{aligned} \text{rd}(C) &= \text{rd}(\exists r.C) - 1 && \text{(Definition rd)} \\ &\leq \left( \text{rd}(C_0) - (i - 1) \right) - 1 && \text{(Induktionsvorauss.; } v' \text{ hat Tiefe } i - 1) \\ &= \text{rd}(C_0) - i \end{aligned}$$

**$\forall$ -Regel.** Ähnlich (probiert es selbst aus). □

## T4.6 Anzahl der Regelnwendungen pro I-Baum

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass für  $k := |C_0|$  gilt:

$$k^k \cdot k \leq 2^{2k^2}$$

Das kann man wie folgt sehen:

$$\begin{aligned} k^k \cdot k &= k^{k+1} && \text{(Potenzgesetze)} \\ &\leq k^{2k} && \text{(da } k \geq 1) \\ &= (2^{\log k})^{2k} && \text{(Definition Zweierlogarithmus log)} \\ &= 2^{\log k \cdot 2k} && \text{(Potenzgesetze)} \\ &\leq 2^{k \cdot 2k} && \text{(da } \log(k) \leq k) \\ &= 2^{2k^2} \end{aligned}$$

□

## T4.7 Letzter Schritt im Terminierungsbeweis

Wir ordnen jeder Menge  $M_i$  von I-Bäumen eine Multimenge  $MM_i$  wie folgt zu: Für jeden Baum  $\mathcal{B} \in M_i$  enthält  $MM_i$  die Zahl

$m(\mathcal{B}) = „n \text{ minus die Anzahl } j \text{ der Regelanwendungen, mittels derer } \mathcal{B} \text{ generiert wurde}“.$

Somit ist  $MM_i$  eine Multimenge über der Grundmenge  $\mathbb{N}$ . Da  $<$  auf  $\mathbb{N}$  wohlfundiert ist, ist mit Theorem 4.7 auch  $<_{mul}$  auf  $MM(\mathbb{N})$  wohlfundiert. Außerdem gilt  $MM_i >_{mul} MM_{i+1}$  für jedes  $i \geq 0$ , denn mit jeder Regelanwendung wird in  $M_i$  ein I-Baum durch maximal zwei I-Bäume  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  ersetzt mit  $m(\mathcal{B}_1), m(\mathcal{B}_2) < m(\mathcal{B})$ ; somit erhält man  $MM_{i+1}$  aus  $MM_i$ , indem man  $m(\mathcal{B})$  durch die kleineren Zahlen  $m(\mathcal{B}_1), m(\mathcal{B}_2)$  ersetzt.

Wegen der Wohlfundiertheit von  $<_{mul}$  und der Beobachtung  $MM_i >_{mul} MM_{i+1}$  muss die Folge der  $MM_i$  endlich sein.  $\square$

## T4.8 Verbleibender Beweis der Korrektheit

**Behauptung.** Für alle Konzepte  $C$  und Knoten  $v \in V$  gilt:  $C \in \mathcal{L}(v)$  impliziert  $v \in C^{\mathcal{I}}$

Zunächst zeigen wir, dass diese Behauptung die Aussage des Theorems 4.8 impliziert.

Da  $C_0 \in \mathcal{L}(v_{ini})$  in  $\mathcal{B}_{ini}$ , gilt auch  $C_0 \in \mathcal{L}(v_{ini})$  in  $\mathcal{B}$ , denn Knotenbeschriftungen werden durch das Anwenden der Tableauregeln nicht gelöscht. Also ist wegen der obigen Behauptung  $v_{ini} \in C_0^{\mathcal{I}}$ , und damit ist  $C_0$  erfüllbar.

**Beweis der Behauptung** per Induktion über die Struktur von  $C$ .

**Induktionsanfang.** Für Konzeptnamen  $C = A$  gilt die Behauptung wegen der Definition von  $\mathcal{I}$ .

**Induktionsschritt.** Hier müssen wir für jeden der Operatoren  $\neg, \sqcap, \sqcup, \exists, \forall$  einen gesonderten Fall betrachten, denn wegen der NNF kann man nun nicht mehr annehmen, dass  $\sqcup$  durch  $\sqcap$  oder  $\forall$  durch  $\exists$  ausgedrückt wird.

$C = \neg A$  für einen Konzeptnamen  $A$ . Da der I-Baum  $\mathcal{B}$  keinen offensichtlichen Widerspruch enthält, folgt aus  $\neg A \in \mathcal{L}(v)$ , dass  $A \notin \mathcal{L}(v)$ . Nach Definition von  $\mathcal{I}$  gilt dann aber  $v \notin A^{\mathcal{I}}$ , also  $v \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$ .

$C = D_1 \sqcap D_2$ . Wenn  $C \in \mathcal{L}(v)$  in  $\mathcal{B}$ , dann auch  $D_1 \in \mathcal{L}(v)$  und  $D_2 \in \mathcal{L}(v)$ , da  $\mathcal{B}$  vollständig ist und somit insbesondere die  $\sqcap$ -Regel nicht anwendbar ist. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt daraus nun  $v \in D_1^{\mathcal{I}}$  und  $v \in D_2^{\mathcal{I}}$ ; wegen der Semantik von  $\sqcap$  gilt damit  $v \in (D_1 \sqcap D_2)^{\mathcal{I}}$ .

$C = D_1 \sqcup D_2$ . Analog.

$C = \exists r.D$ . Wegen  $C \in \mathcal{L}(v)$  und da die  $\exists$ -Regel nicht anwendbar ist, gibt es  $v' \in V$  mit  $(v, r, v') \in E$  und  $D \in \mathcal{L}(v')$ . Nach Induktionsvoraussetzung folgt aus dem letzteren, dass  $v' \in D^{\mathcal{I}}$ . Da wegen Definition von  $\mathcal{I}$  auch  $(v, v') \in r^{\mathcal{I}}$  sein muss, folgt  $v \in (\exists r.D)^{\mathcal{I}}$  mit der Semantik von  $\exists$ .

$C = \forall r.D$ . Ähnlich.  $\square$

## T4.9 Beispiel für Realisierbarkeit

Das folgende Bild zeigt einen I-Baum  $\mathcal{B}$  (links) und eine Interpretation  $\mathcal{I}$ , die  $\mathcal{B}$  realisiert, (rechts) sowie die zugehörige Abbildung  $\pi$  gemäß Definition 4.9 (gestrichelte Pfeile).



Man beachte, dass die Knoten von  $\mathcal{B}$  (links) mit Mengen von Konzepten beschriftet sind, aber die Elemente von  $\mathcal{I}$  (rechts) mit Konzeptnamen – so, wie wir Interpretationen immer darstellen.

## T4.10 Verbleibender Beweis der Vollständigkeit

**Behauptung.** Für alle  $i \leq n$  ist  $M_i$  realisierbar.

**Beweis.** Per Induktion über  $i$ .

**Induktionsanfang.**  $M_0 = \{\mathcal{B}_{\text{ini}}\}$  ist realisierbar, da  $\mathcal{B}_{\text{ini}}$  realisierbar ist, und zwar durch ein beliebiges Modell von  $C_0$  (welches existiert, da  $C_0$  nach Voraussetzung von Theorem 4.10 erfüllbar ist).

**Induktionsschritt.** Wir nehmen an, dass  $M_i$  realisierbar sei, und zeigen, dass dann auch  $M_{i+1}$  realisierbar ist. Dazu unterscheiden wir vier Fälle gemäß der Regel, mit der  $M_{i+1}$  aus  $M_i$  erzeugt wird. Sei also  $\mathcal{B} = (V, E, \mathcal{L})$  ein realisierbarer Baum aus  $M_i$ , auf den eine Regel angewendet wird.

**$\sqcup$ -Regel.** Dann entsteht  $M_{i+1}$  aus  $M_i$ , indem  $\mathcal{B}$  durch zwei Bäume  $\mathcal{B}' = (V, E, \mathcal{L}')$  und  $\mathcal{B}'' = (V, E, \mathcal{L}'')$  ersetzt wird, und es gibt einen Knoten  $v \in V$  mit

- $C \sqcup D \in \mathcal{L}(v)$ ;
- $\mathcal{L}'(v) = \mathcal{L}(v) \cup \{C\}$ ,  $\mathcal{L}''(v) = \mathcal{L}(v) \cup \{D\}$ ;
- $\mathcal{L}'(u) = \mathcal{L}''(u) = \mathcal{L}(u)$  für alle  $u \neq v$ .



Es genügt zu zeigen: wenn  $\mathcal{B}$  realisierbar, dann  $\mathcal{B}'$  realisierbar *oder*  $\mathcal{B}''$  realisierbar.

Sei  $\mathcal{I}$  eine Interpretation, die  $\mathcal{B}$  realisiert, und  $\pi : V \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}}$  die zugehörige Abbildung gemäß Definition 4.9. Dann gilt insbesondere  $\pi(v) \in (C \sqcup D)^{\mathcal{I}}$ . Nach Semantik von  $\sqcup$  ist dann  $\pi(v) \in C^{\mathcal{I}}$  oder  $\pi(v) \in D^{\mathcal{I}}$ . Im ersten Fall realisiert  $\mathcal{I}$  den Baum  $\mathcal{B}'$ , im zweiten  $\mathcal{B}''$ .

**$\sqcap$ -Regel.** Analog, aber mit nur *einem* Baum  $\mathcal{B}'$  (probiert es selbst aus).

**$\exists$ -Regel.** Dann entsteht  $M_{i+1}$  aus  $M_i$ , indem  $\mathcal{B}$  durch einen Baum  $\mathcal{B}' = (V', E', \mathcal{L}')$  ersetzt wird, und es gibt Knoten  $v, v' \in V$  mit

- $\exists r.C \in \mathcal{L}(v)$ ;
- $V' = V \uplus \{v'\}$ ,  $E' = E \cup \{(v, r, v')\}$
- $\mathcal{L}'(v') = \{C\}$ ;
- $\mathcal{L}'(u) = \mathcal{L}(u)$  für alle  $u \neq v'$ .

Es genügt zu zeigen: wenn  $\mathcal{B}$  realisierbar, dann  $\mathcal{B}'$  realisierbar.

Sei  $\mathcal{I}$  eine Interpretation, die  $\mathcal{B}$  realisiert, und  $\pi : V \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}}$  die zugehörige Abbildung gemäß Definition 4.9. Dann gilt insbesondere  $\pi(v) \in (\exists r.C)^{\mathcal{I}}$ , also gibt es ein  $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$  mit  $(\pi(v), d) \in r^{\mathcal{I}}$  und  $d \in C^{\mathcal{I}}$ . Wenn man nun  $\pi$  erweitert um  $\pi(v') = d$ , dann bezeugt die resultierende Funktion, dass  $\mathcal{B}'$  durch  $\mathcal{I}$  realisiert wird.

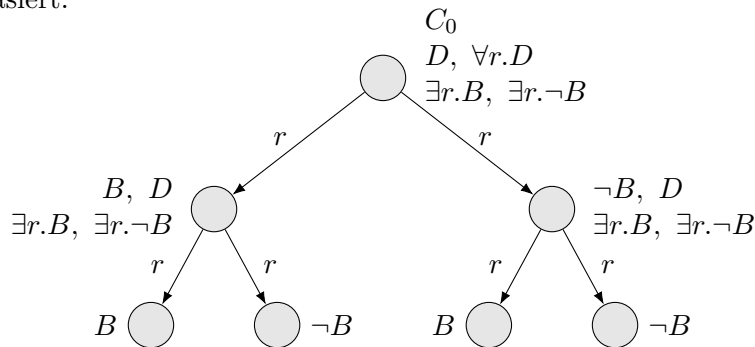
**$\forall$ -Regel.** Ähnlich (probiert es selbst aus). □

## T4.11 Beispiel für den Worst Case bei der Komplexitätsanalyse

Sei  $n = 2$ . Dann ist  $C_0 = \forall r^0.(\exists r.B \sqcap \exists r.\neg B) \sqcap \forall r^1.(\exists r.B \sqcap \exists r.\neg B)$ . (Folie 4.25). Kürzt man nun das doppelt vorkommende Teilkonzept ab mit  $D = \exists r.B \sqcap \exists r.\neg B$ , dann ist

$$C_0 = D \sqcap \forall r.D.$$

Der Tableau-Algorithmus erzeugt folgenden I-Baum, der auf dem vollständigen Binärbaum der Tiefe 2 basiert:



Es sollte nun leicht zu sehen sein, dass für beliebiges  $n$  der entsprechende I-Baum auf dem vollständigen Binärbaum der Tiefe  $n$  basiert, welcher  $2^n$  Knoten hat.

## T4.12 Beispiel für Backjumping

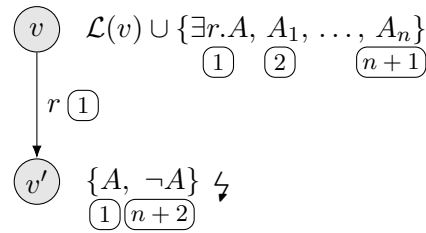
Nehmen wir an, ein Knoten  $v$  in einem I-Baum sei markiert wie folgt, wobei die Konzepte in  $\mathcal{L}(v)$  durchnummeriert werden.

$$\mathcal{L}(v) = \{ \underbrace{(\exists r.A) \sqcup B}_{(1)}, \underbrace{A_1 \sqcup A'_1}_{(2)}, \dots, \underbrace{A_n \sqcup A'_n}_{(n+1)}, \underbrace{\forall r.\neg A}_{(n+2)} \}$$

Nehmen wir weiterhin an, der Tableau-Algorithmus verarbeite die Konzepte aus  $\mathcal{L}(v)$  in der angegebenen Reihenfolge und wählt bei den Disjunktionen immer zuerst das linke Disjunkt. Dann wird

- im 1. Schritt das Konzept  $\exists r.A$  zu  $\mathcal{L}(v)$  hinzugefügt ( $\sqcup$ -Regel auf  $(1)$  angewendet);
- im 2. Schritt ein  $r$ -Nachfolger  $v'$  zu  $v$  hinzugefügt und mit  $\{A\}$  markiert ( $\exists$ -Regel auf  $\exists r.A \in \mathcal{L}(v)$  angewendet);
- im den nächsten  $n$  Schritten die linken Disjunkte von  $(2) - (n+1)$  zu  $\mathcal{L}(v)$  hinzugefügt ( $\sqcup$ -Regel);
- im folgenden Schritt das Konzept  $\neg A$  zu  $\mathcal{L}(v')$  hinzugefügt ( $\forall$ -Regel auf  $\forall r.\neg A \in \mathcal{L}(v)$  angewendet).

Danach sieht die „Umgebung“ von  $v$  im I-Baum wie folgt aus, wobei die Einträge der Knotenlabels mit der Nummer des Konzeptes aus  $\mathcal{L}(v)$  versehen sind, von dem sie stammen (dies repräsentiert die „Dependenzmenge“).



Wegen des offensichtlichen Widerspruchs in  $v'$  (angezeigt durch  $\perp$ ) muss Backtracking durchgeführt werden. Einfaches Backtracking probiert hier aber  $2^n$  sinnlose Alternativen aus, nämlich sämtliche Kombination der jeweils zwei Disjunkte von  $(2) - (n+1)$ , und findet erst dann die Ursache des Problems: Der Konflikt wurde letztlich durch das linke Disjunkt  $\exists r.A$  von  $(1)$  und Konzept  $\forall r.\neg A$   $(n+2)$  ausgelöst. Mit Backjumping hingegen wird wie im Bild angedeutet Buch über die Herkunft der Konzepte geführt; deshalb kann direkt zur Ursache des Problems zurückgesprungen werden – hier zum 1. Schritt der obigen Aufzählung.

# **Teil 5**

## **Komplexität**

## **Teil 6**

# **Effiziente Beschreibungslogiken**

## **Teil 7**

# **ABoxen und Anfragebeantwortung**

# Literaturverzeichnis

- [BHLS17] Baader, Franz, Ian Horrocks, Carsten Lutz und Uli Sattler: *An Introduction to Description Logic*. Cambridge University Press, 2017. <https://tinyurl.com/suub-intro-dl-ebook>.