

# **Tafelmitschriften zur Vorlesung „Beschreibungslogik“ im Sommersemester 2019**

Dr. Jean Christoph Jung, Prof. Dr. Thomas Schneider  
AG Theorie der Künstlichen Intelligenz  
Fachbereich 3



Stand: 28. Mai 2020

Dieses Dokument ist noch unvollständig und wird regelmäßig aktualisiert.

# Inhaltsverzeichnis

<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Tableau-Algorithmen</b>	<b>18</b>
<b>5</b>	<b>Komplexität</b>	<b>31</b>
<b>6</b>	<b>Effiziente Beschreibungslogiken</b>	<b>37</b>
<b>7</b>	<b>ABoxen und Anfragebeantwortung</b>	<b>38</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>39</b>

## **Teil 2**

# **Grundlagen**

## T2.1 Beispiele für $\mathcal{ALC}$ -Konzepte

Mit den Konzeptnamen

Student, Naturwissenschaft, Professor, Emeritus, PflichtVL, VL, Einfach, Interessant,  $A, B$

und den Rollennamen

studiert, hält, hatÜbungsaufgabe,  
 $r$

kann man z. B. folgende zusammengesetzte  $\mathcal{ALC}$ -Konzepte bilden:

- $\text{Student} \sqcap \exists \text{studiert.Naturwissenschaft}$   
(beschreibt Studierende, die mindestens eine Naturwissenschaft studieren)
- $\text{Professor} \sqcap \text{Emeritus} \sqcap \forall \text{hält.} \neg \text{PflichtVL}$   
(beschreibt Professor\*innen im Ruhestand, die keine Pflichtvorlesungen halten)
- $\text{VL} \sqcap \neg \text{PflichtVL} \sqcap \forall \text{hatÜbungsaufgabe.} (\text{Einfach} \sqcup \text{Interessant})$   
(beschreibt Wahlvorlesungen, bei denen alle Übungsaufgaben einfach oder interessant sind)
- $A \sqcap \exists r. (\neg B \sqcup \forall r. A)$

(Die Beschreibungen in Klammern werden eigentlich erst richtig klar, wenn die Semantik definiert ist.)

## T2.2 Beispiele für Interpretationen und Extensionen

Wir betrachten die Interpretation  $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$  mit

$$\begin{aligned}\Delta^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3, v_1, v_2\} \\ \text{Mensch}^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\ \text{Student}^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\ \text{Vorlesung}^{\mathcal{I}} &= \{v_1, v_2\} \\ \text{PflichtVL}^{\mathcal{I}} &= \{v_1\} \\ \text{WahlVL}^{\mathcal{I}} &= \{v_2\} \\ \text{hört}^{\mathcal{I}} &= \{(s_1, v_1), (s_2, v_1), (s_2, v_2), (s_3, v_1)\} \\ \text{bekanntMit}^{\mathcal{I}} &= \{(s_1, s_2), (s_2, s_1), (s_1, s_1), (s_2, s_2), (s_3, s_3)\}.\end{aligned}$$

Jede Interpretation kann in offensichtlicher Weise als (knoten- und kantenbeschrifteter) gerichteter Graph aufgefasst werden; für unsere Beispielinterpretation  $\mathcal{I}$ :



Beispiele für die Extensionen einiger zusammengesetzter Konzepte in dieser Interpretation:

$$\begin{aligned}
 (\text{VL} \sqcap \text{PflichtVL})^{\mathcal{I}} &= \{v_1, v_2\} \cap \{v_1\} &&= \{v_1\} \\
 (\neg \text{VL})^{\mathcal{I}} &= \Delta^{\mathcal{I}} \setminus \{v_1, v_2\} &&= \{s_1, s_2, s_3\} \\
 (\text{Student} \sqcup \text{VL})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \cup \{v_1, v_2\} = \Delta^{\mathcal{I}} \\
 (\exists \text{bekanntMit. Student})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\
 (\exists \text{bekanntMit.} \exists \text{bekanntMit. Student})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\
 (\forall \text{hört. PflichtVL})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_3, v_1, v_2\}
 \end{aligned}$$

In der letzten Zeile beachte man die Besonderheit der Werterestriktion ( $\forall$ ), dass ein Domänenelement  $d$ , welches *keine* ausgehenden  $r$ -Kanten besitzt, immer eine Instanz von  $\forall r.C$  ist, für jedes beliebige Konzept  $C$ .

## T2.3 Semantik von $\top$ und $\perp$

Es gelten:

$$\begin{aligned}
 \top^{\mathcal{I}} &= (A \sqcup \neg A)^{\mathcal{I}} = A^{\mathcal{I}} \cup (\Delta^{\mathcal{I}} \setminus A^{\mathcal{I}}) = \Delta^{\mathcal{I}} \\
 \perp^{\mathcal{I}} &= (A \sqcap \neg A)^{\mathcal{I}} = A^{\mathcal{I}} \cap (\Delta^{\mathcal{I}} \setminus A^{\mathcal{I}}) = \emptyset^{\mathcal{I}}
 \end{aligned}$$

Dabei folgt die erste Gleichheit jeder Zeile aus der Definition von  $\top$  bzw.  $\perp$  auf Folie 2.9, die zweite Gleichheit aus der Semantik (Def. 2.2) und die dritte aus der Mengenlehre.

## T2.4 Beispiele für „unerfüllbar“ und „subsumiert“

- (a) Das Konzept  $C = \exists r.A \sqcap \forall r.\neg A$  ist *nicht* erfüllbar:

Angenommen,  $C$  sei erfüllbar, d. h. es gibt eine Interpretation  $\mathcal{I}$  mit  $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ . Sei  $d \in C^{\mathcal{I}}$ . Wegen  $d \in (\exists r.A)^{\mathcal{I}}$  gibt es ein Element  $e \in A^{\mathcal{I}}$  mit  $(d, e) \in r^{\mathcal{I}}$ . Wegen  $d \in (\forall r.\neg A)^{\mathcal{I}}$  gilt aber  $e \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$ , also  $e \notin A^{\mathcal{I}}$ , was ein Widerspruch zu  $e \in A^{\mathcal{I}}$  ist. Also ist die Annahme falsch.

- (b)  $\exists r.(A \sqcap B) \sqsubseteq \exists r.A \sqcap \exists r.B$ :

Sei  $\mathcal{I}$  eine Interpretation und  $d \in (\exists r.(A \sqcap B))^{\mathcal{I}}$ . Dann gibt es ein Element  $e \in (A \sqcap B)^{\mathcal{I}}$  mit  $(d, e) \in r^{\mathcal{I}}$ . Wegen  $e \in A^{\mathcal{I}}$  gilt  $d \in (\exists r.A)^{\mathcal{I}}$ ; wegen  $e \in B^{\mathcal{I}}$  gilt  $d \in (\exists r.B)^{\mathcal{I}}$ . Also ist  $d \in (\exists r.A \sqcap \exists r.B)^{\mathcal{I}}$ .

Die Rückrichtung dieser Subsumtion gilt nicht – finde ein Gegenbeispiel, d. h. eine Interpretation  $\mathcal{I}$  mit  $(\exists r.A \sqcap \exists r.B)^{\mathcal{I}} \not\subseteq (\exists r.(A \sqcap B))^{\mathcal{I}}$ .

## T2.5 Beispiele für TBoxen und deren Semantik

Wir betrachten folgende TBox.

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{l} \text{StudentIn} \equiv \text{Mensch} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung} \\ \text{Vorlesung} \equiv \text{PflichtVL} \sqcup \text{WahlVL} \\ \text{StudentIn} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung} \sqsubseteq \exists \text{bekanntMit.StudentIn} \\ \text{PflichtVL} \sqcap \text{WahlVL} \sqsubseteq \perp \end{array} \right\}$$

Die Interpretation aus T2.2 ist Modell von  $\mathcal{T}$ . Sie erfüllt z. B. auch die folgende Konzeptinklusion.

$$\text{StudentIn} \sqsubseteq \exists \text{bekanntMit.Mensch} \quad (1)$$

Ein weiteres Modell ist z. B. folgende Interpretation  $\mathcal{J}$ .



$\mathcal{J}$  erfüllt ebenfalls die Konzeptinklusion (1) sowie z. B.  $\text{VL} \equiv \text{PflichtVL}$ .

## T2.6 Beispiele für „erfüllbar“ und „subsumiert“ bzgl. TBoxen

Sei  $\mathcal{T}$  die TBox aus dem vorangehenden Beispiel.

- (a) Das Konzept

$$C = \text{StudentIn} \sqcap \forall \text{hört.PflichtVL}$$

ist erfüllbar bezüglich  $\mathcal{T}$ , denn folgende Interpretation  $\mathcal{I}'$  ist ein Modell von  $\mathcal{T}$  mit  $s_1 \in C^{\mathcal{I}'}$ :



Ebenso ist die Interpretation  $\mathcal{I}$  aus T2.2 ein Modell von  $\mathcal{T}$  mit  $s_1 \in C^{\mathcal{I}}$ .

- (b) Das Konzept

$$C = \text{StudentIn} \sqcap \forall \text{hört.PflichtVL} \sqcap \exists \text{hört.WahlVL}$$

ist *unerfüllbar* bezüglich  $\mathcal{T}$ : Angenommen,  $C$  sei erfüllbar bzgl.  $\mathcal{T}$ . Dann gibt es ein Modell  $\mathcal{I}$  von  $\mathcal{T}$  mit einer Instanz  $d \in C^{\mathcal{I}}$ . Nach der Semantik von „ $\sqcap$ “ (Def. 2.2) gelten (i)  $d \in (\forall \text{hört.PflichtVL})^{\mathcal{I}}$  und (ii)  $d \in (\exists \text{hört.WahlVL})^{\mathcal{I}}$ . Wegen (ii) gibt es ein Element  $e \in \text{WahlVL}^{\mathcal{I}}$  mit  $(d, e) \in \text{hört}^{\mathcal{I}}$ . Wegen (i) ist dann auch  $e \in \text{PflichtVL}^{\mathcal{I}}$ , also  $e \in (\text{PflichtVL} \sqcap \text{WahlVL})^{\mathcal{I}}$ . Weil  $\mathcal{I}$  jedoch ein Modell von  $\mathcal{T}$  ist, kann es wegen der Konzeptinklusion  $\text{PflichtVL} \sqcap \text{WahlVL} \sqsubseteq \perp$  aus  $\mathcal{T}$  ein solches Element  $e$  nicht geben; ein Widerspruch. Also ist die Annahme falsch.

- (c) Für die Konzepte

$$C = \text{StudentIn} \quad \text{und} \quad D = \exists \text{bekanntMit.StudentIn}$$

gilt  $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ : Sei  $\mathcal{I}$  ein Modell von  $\mathcal{T}$  und  $d \in C^{\mathcal{I}}$ , d. h.  $d \in \text{StudentIn}^{\mathcal{I}}$ . Zu zeigen ist  $d \in D^{\mathcal{I}}$ , d. h.  $d \in (\exists \text{bekanntMit.StudentIn})^{\mathcal{I}}$ .

Wegen der ersten Zeile von  $\mathcal{T}$  gilt  $d \in (\exists \text{hört.Vorlesung})^{\mathcal{I}}$ , also auch  $d \in (\text{StudentIn} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung})^{\mathcal{I}}$ . Mit Zeile 3 von  $\mathcal{T}$  folgt dann  $d \in (\exists \text{bekanntMit.StudentIn})^{\mathcal{I}}$ .

Dies ist bereits Schlussfolgern, denn wir haben implizites Wissen aus  $\mathcal{T}$  abgeleitet:

- (a) Es *kann* Student\*innen geben, die nur Pflichtvorlesungen hören.
- (b) Es kann *keine* Student\*innen geben, die nur Pflichtvorlesungen, aber mindestens eine Wahlvorlesung hören.
- (c) Jede\*r Student\*in ist mit mindestens einer/m Student\*in bekannt.

## T2.7 Beweis der Monotonie von $\mathcal{ALC}$ (Lemma 2.7)

**Lemma 2.7** Seien  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  TBoxen mit  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ . Dann gilt:

- (1) Wenn  $C$  erfüllbar bezüglich  $\mathcal{T}_2$  ist, dann ist  $C$  erfüllbar bezüglich  $\mathcal{T}_1$ .
- (2) Wenn  $\mathcal{T}_1 \models C \sqsubseteq D$ , dann  $\mathcal{T}_2 \models C \sqsubseteq D$ .

**Beweis.**

- (1) Sei  $C$  erfüllbar bezüglich  $\mathcal{T}_2$ . Dann gibt es ein Modell  $\mathcal{I}$  von  $\mathcal{T}_2$  mit  $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ . Da  $\mathcal{I}$  Modell von  $\mathcal{T}_2$  ist, erfüllt  $\mathcal{I}$  alle Konzeptinklusionen in  $\mathcal{T}_2$ , also wegen  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$  auch alle Konzeptinklusionen in  $\mathcal{T}_1$ , und somit ist  $\mathcal{I}$  auch Modell von  $\mathcal{T}_1$ . Also gibt es ein Modell  $\mathcal{I}$  von  $\mathcal{T}_1$  mit  $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ ; d. h.  $C$  ist erfüllbar bezüglich  $\mathcal{T}_1$ .
- (2) Wir beweisen die Kontraposition. Es gelte  $\mathcal{T}_2 \not\models C \sqsubseteq D$ .<sup>1</sup> Dann gibt es ein Modell  $\mathcal{I}$  von  $\mathcal{T}_2$  mit  $C^{\mathcal{I}} \not\subseteq D^{\mathcal{I}}$ . Wie in (1) ist  $\mathcal{I}$  auch Modell von  $\mathcal{T}_1$ , also  $\mathcal{T}_1 \not\models C \sqsubseteq D$ .  $\square$

Auf der Folie steht auch: „Die Umkehrungen von (1) und (2) sind im Allgemeinen *nicht* richtig.“ Davon kann man sich mittels einfacher Gegenbeispiele überzeugen: z. B. ist mit  $\mathcal{T}_1 = \emptyset$  und  $\mathcal{T}_2 = \{A \sqsubseteq B\}$  die Umkehrung von (2) widerlegt, denn  $\mathcal{T}_2 \models A \sqsubseteq B$ , aber  $\mathcal{T}_1 \not\models A \sqsubseteq B$ .

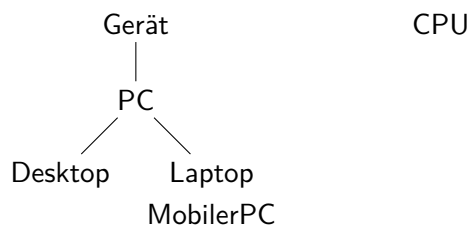
## T2.8 Beispiel für Subsumtion als Ordnungsrelation

Wir betrachten folgende TBox.

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{l} \text{PC} \sqsubseteq \text{Gerät} \sqcap \exists \text{hatTeil.CPU} \\ \text{PC} \equiv \text{Desktop} \sqcup \text{Laptop} \\ \text{Desktop} \sqsubseteq \neg \text{Laptop} \\ \text{MobilerPC} \equiv \text{PC} \sqcap \neg \text{Desktop} \end{array} \right\}$$

Die dritte Zeile von  $\mathcal{T}$  ist äquivalent zu  $\text{Desktop} \sqcap \text{Laptop} \sqsubseteq \perp$ , wie man leicht zeigt (probiere es selbst aus).

Die Ordnung „ $\sqsubseteq$  bezüglich  $\mathcal{T}$ “ kann man durch folgendes Hasse-Diagramm darstellen:



Dass die Relation „ $\sqsubseteq$  bezüglich  $\mathcal{T}$ “ *nicht* antisymmetrisch ist, zeigt sich in diesem Beispiel dadurch, dass der Knoten unten rechts zwei Beschriftungen hat, also  $\mathcal{T} \models \text{Laptop} \equiv \text{MobilerPC}$ . Wäre die Relation antisymmetrisch, dann dürfte nicht gleichzeitig  $\mathcal{T} \models \text{Laptop} \sqsubseteq \text{MobilerPC}$  und  $\mathcal{T} \models \text{MobilerPC} \sqsubseteq \text{Laptop}$  gelten.

<sup>1</sup>Das Zeichen  $\not\models$  steht für „nicht  $\models$ “, also bedeutet  $\mathcal{T} \not\models C \sqsubseteq D$ , dass die Beziehung  $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$  *nicht* gilt (d. h. bezüglich  $\mathcal{T}$  wird  $C$  *nicht* von  $D$  subsumiert).



## T2.9 Wechselseitige Reduktion der Schlussfolgerungsprobleme

### Lemma 2.9

- (1) Subsumtion ist polynomiell reduzierbar auf (Un)erfüllbarkeit:  
 $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$  gdw.  $C \sqcap \neg D$  unerfüllbar bezüglich  $\mathcal{T}$
- (2) Erfüllbarkeit ist polynomiell reduzierbar auf (Nicht-)Äquivalenz:  
 $C$  erfüllbar bezüglich  $\mathcal{T}$  gdw.  $\mathcal{T} \not\models C \equiv \perp$
- (3) Äquivalenz ist polynomiell reduzierbar auf Subsumtion:  
 $\mathcal{T} \models C \equiv D$  gdw.  $\mathcal{T} \models \top \sqsubseteq (C \sqcap D) \sqcup (\neg C \sqcap \neg D)$

**Beweis.** Wir beweisen exemplarisch Punkt (1). Die Beweise der anderen zwei Punkte sind analog.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} \models C \sqsubseteq D & \text{ gdw. } \text{für alle Modelle } \mathcal{I} \text{ von } \mathcal{T} \text{ gilt } C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}} \\
 & \text{gdw. } \text{für alle Modelle } \mathcal{I} \text{ von } \mathcal{T} \text{ gilt } C^{\mathcal{I}} \cap (\Delta^{\mathcal{I}} \setminus D^{\mathcal{I}}) = \emptyset \\
 & \text{gdw. } \text{für alle Modelle } \mathcal{I} \text{ von } \mathcal{T} \text{ gilt } (C \sqcap \neg D)^{\mathcal{I}} = \emptyset \\
 & \text{gdw. } C \sqcap \neg D \text{ unerfüllbar bezüglich } \mathcal{T}
 \end{aligned}$$

Hier gilt das erste „gdw.“ wegen der Definition von Subsumtion (Def. 2.6), und die zweite Zeile ist äquivalent zur ersten, weil für beliebige Mengen  $M_1, M_2$  gilt, dass  $M_1 \subseteq M_2$  gdw.  $M_1 \cap \bar{M}_2 = \emptyset$ , wobei  $\bar{M}_2$  das Komplement von  $M_2$  ist. Man überzeuge sich davon anhand eines Venn-Diagramms. Die dritte Zeile ist schließlich äquivalent zur dritten wegen der Semantik von  $\sqcap$  und  $\neg$  (Def. 2.2), und die vierte ist äquivalent dazu wegen der Definition von Unerfüllbarkeit (Def. 2.6).  $\square$

## T2.10 Beispiel für inverse Rollen

Betrachte folgende  $\mathcal{ALC}$ -TBox:

$$\mathcal{T} = \{ \text{Professor} \sqsubseteq \text{Verrückt} \sqcap \exists \text{gibt.Vorlesung} \\
 \text{Vorlesung} \sqsubseteq \forall \text{wirdGegebenVon}.\neg \text{Verrückt} \}$$

Intuitiv sollte **Professor** unerfüllbar bezüglich  $\mathcal{T}$  sein; dies ist aber nicht der Fall, weil **Professor** in folgendem Modell von  $\mathcal{T}$  eine Instanz hat:



In  $\mathcal{ALCI}$  kann man die zweite Konzeptinklusion in  $\mathcal{T}$  durch

$$\text{Vorlesung} \sqsubseteq \forall \text{gibt}^-. \neg \text{Verrückt}$$

ersetzen. Dann wird **Professor** unerfüllbar bezüglich  $\mathcal{T}$  (aber  $\mathcal{T}$  hat immer noch Modelle).

## T2.11 Beispiele für Zahlenrestriktionen

Definition einer Hand als ein Organ mit genau fünf Fingern:

$$\text{Hand} \equiv \text{Organ} \sqcap (\geq 5 \text{ hatTeil.Finger}) \sqcap (\leq 5 \text{ hatTeil.Finger})$$

Forderung, dass in jedem Semester mindestens zwei Wahlpflichtmodule angeboten werden:

$$\text{Semester} \sqsubseteq (\geq 2 \text{ angeboten.Wahlpflichtmodul})$$

## T2.12 Beispiele für die Übersetzung von $\mathcal{ALC}$ nach FO

Wir betrachten folgendes  $\mathcal{ALC}$ -Konzept.

$$C = \text{Mensch} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung}$$

Wir erhalten  $\pi_x(C)$  anhand der induktiven Definition auf der Folie, indem wir mit den Konzeptnamen beginnen und uns zu komplexeren Konzepten „hocharbeiten“:

$$\pi_x(\text{Mensch}) = \text{Mensch}(x)$$

$$\pi_y(\text{Vorlesung}) = \text{Vorlesung}(y)$$

$$\pi_x(\exists \text{hört.Vorlesung}) = \exists y(\text{hört}(x, y) \wedge \text{Vorlesung}(y))$$

$$\pi_x(\text{Mensch} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung}) = \text{Mensch}(x) \wedge \exists y(\text{hört}(x, y) \wedge \text{Vorlesung}(y))$$

$$\text{also} \quad \pi_x(C) = \text{Mensch}(x) \wedge \exists y(\text{hört}(x, y) \wedge \text{Vorlesung}(y))$$

Wenn wir außerdem die TBox

$$\mathcal{T} = \{\text{StudentIn} \equiv \text{Mensch} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung}\}$$

gegeben haben, dann ist

$$\pi(\mathcal{T}) = \forall x(\text{StudentIn}(x) \leftrightarrow \text{Mensch}(x) \wedge \exists y(\text{hört}(x, y) \wedge \text{Vorlesung}(y))).$$

## **Teil 3**

# **Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen**

## T3.1 Beispiele für Bisimulationen

1. Für die Interpretationen



ist  $\rho = \Delta^{\mathcal{I}_1} \times \Delta^{\mathcal{I}_2}$  eine Bisimulation.

2. Für die Interpretationen



ist  $\rho = \{(d, x), (e, y), (e, y')\}$  eine Bisimulation.

3. Für die Interpretationen



ist  $\rho = \{(d, x), (d, y), (e, z)\}$  eine Bisimulation.

## T3.2 Beweis des Bisimulationstheorems

**Theorem 3.2** Seien  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$  Interpretationen,  $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$  und  $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ .

Wenn  $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$ , dann gilt für alle  $\mathcal{ALC}$ -Konzepte  $C$ :

$$d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} \quad \text{gdw.} \quad d_2 \in C^{\mathcal{I}_2}$$

**Beweis.** Sei  $\rho$  eine Bisimulation zwischen  $\mathcal{I}_1$  und  $\mathcal{I}_2$  mit  $d_1 \rho d_2$ . Wir beweisen die Behauptung per Induktion über die Struktur von  $C$ .

**Induktionsanfang.** Hier ist  $C = A$  für einen Konzeptnamen  $A$ . Nach Bedingung (1) für Bisimulationen (Definition 3.1) gilt wie gewünscht:  $d_1 \in A^{\mathcal{I}_1}$  gdw.  $d_2 \in A^{\mathcal{I}_2}$

**Induktionsschritt.** Wir müssen fünf Fälle gemäß des äußersten Konstruktors von  $C$  unterscheiden ( $\neg, \sqcap, \sqcup, \exists, \forall$ ). Wegen der (leicht nachzuweisenden) Äquivalenzen

$$C \sqcup D \equiv \neg(\neg C \sqcap \neg D) \quad \text{und} \quad \forall r.C \equiv \neg \exists r.\neg C$$

genügt es, wenn wir uns auf die drei Fälle  $\neg, \sqcap, \exists$  beschränken.

$$C = \neg D$$

$$\begin{array}{lll} d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} & \text{gdw.} & d_1 \notin D^{\mathcal{I}_1} & (\text{Semantik „}\neg\text{“}) \\ & & d_2 \notin D^{\mathcal{I}_2} & (\text{Induktionsvoraussetzung}) \\ & & d_2 \in C^{\mathcal{I}_2} & (\text{Semantik „}\neg\text{“}) \end{array}$$

$$C = D \sqcap E$$

$$\begin{array}{lll} d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} & \text{gdw.} & d_1 \in D^{\mathcal{I}_1} \text{ und } d_1 \in E^{\mathcal{I}_1} & (\text{Semantik „}\sqcap\text{“}) \\ & & d_2 \in D^{\mathcal{I}_2} \text{ und } d_2 \in E^{\mathcal{I}_2} & (\text{Induktionsvoraussetzung}) \\ & & d_2 \in C^{\mathcal{I}_2} & (\text{Semantik „}\sqcap\text{“}) \end{array}$$

$$C = \exists r.D$$

Für die Richtung „ $\Rightarrow$ “ argumentieren wir so:

$$\begin{array}{ll} d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} & \\ \Rightarrow \text{es gibt } e_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1} \text{ mit } (d_1, e_1) \in r^{\mathcal{I}_1} \text{ und } e_1 \in D^{\mathcal{I}_1} & (\text{Semantik „}\exists\text{“}) \\ \Rightarrow \text{es gibt } e_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2} \text{ mit } (d_2, e_2) \in r^{\mathcal{I}_2} \text{ und } e_1 \rho e_2 & (\text{Bedingung (2) Bisim.}) \\ \Rightarrow e_2 \in D^{\mathcal{I}_2} & (\text{Induktionsvoraus.}) \\ \Rightarrow d_2 \in (\exists r.D)^{\mathcal{I}_2} & (\text{Semantik „}\exists\text{“}) \end{array}$$

Das Argument für die Richtung „ $\Leftarrow$ “ ist analog, unter Verwendung von Bedingung (3) für Bisimulationen.  $\square$

### T3.3 Nichtausdrückbarkeit konkreter Eigenschaften

**Theorem 3.4** In  $\mathcal{ALC}$  sind *nicht ausdrückbar*:

- das  $\mathcal{ALCI}$ -Konzept  $\exists r^{\neg}.\top$
- die  $\mathcal{ALCQ}$ -Konzepte
  - $(\leq n r.\top)$ , für alle  $n > 0$
  - $(\geq n r.\top)$ , für alle  $n > 1$

**Beweis.** Siehe Proposition 3.3 und 3.4 in [BHLS17].

### T3.4 Gegenbeispiel für Rückrichtung Bisimulationstheorem

**Behauptung.** Es gibt Interpretationen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{J}$  und  $d \in \mathcal{I}$ ,  $e \in \mathcal{J}$ , so dass

- (i)  $d \in C^{\mathcal{I}}$  gdw.  $e \in C^{\mathcal{J}}$  für alle  $\mathcal{ALC}$ -Konzepte  $C$ ,
- (ii) aber  $(\mathcal{I}, d) \not\sim (\mathcal{J}, e)$ .

**Beweis.** Betrachte die folgenden Interpretationen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{J}$ .

... Bild folgt ...

Es gilt (ii): versucht man, eine Bisimulation  $\rho$  mit  $d \rho e$  zu konstruieren, so benötigt man wegen  $(e, e') \in r^{\mathcal{J}}$  einen  $r$ -Nachfolger  $d'$  von  $d$  mit  $d' \rho e'$ . Da jeder  $r$ -Nachfolger von  $d$  aber nur endlich viele weitere Nachfolger hat, kann man wegen des unendlichen  $r$ -Pfads unterhalb von  $e'$  irgendwann nicht mehr Bedingung (3) von Bisimulationen gewährleisten.

Außerdem kann man mittels struktureller Induktion zeigen, dass (i) gilt. □

### T3.5 Beispiel für ein Baummodell

Sei  $C = A \sqcap \exists s.B \sqcap \forall s.\exists r.A$  und  $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq \exists s.A\}$ . Ein Baummodell von  $C$  und  $\mathcal{T}$ :



### T3.6 Beispiel für das Unravelling

Wir betrachten folgende Interpretation  $\mathcal{I}$ .



Dann gibt es beispielsweise folgende  $d$ -Pfade:

- $\rho = ddedee$  mit  $\text{end}(\rho) = e$
- $\rho' = deeed$  mit  $\text{end}(\rho') = d$

Das Unravelling von  $\mathcal{I}$  an Stelle  $d$  gemäß Definition 3.7 ist folgende Interpretation  $\mathcal{J}$ .



### T3.7 Beweis des Unravelling-Lemmas

**Lemma 3.8** Für alle  $\mathcal{ALC}$ -Konzepte  $C$  und alle  $p \in \Delta^{\mathcal{J}}$  gilt:

$$\text{end}(p) \in C^{\mathcal{I}} \quad \text{gdw.} \quad p \in C^{\mathcal{J}}$$

**Beweis.** Mit dem Bisimulationstheorem (Theorem 3.2) genügt es zu zeigen, dass  $\text{end}(p)$  und  $p$  bisimilar sind, d. h.  $(\mathcal{I}, \text{end}(p)) \sim (\mathcal{J}, p)$ . Siehe dazu Lemma 3.22 in [BHLS17].

### T3.8 Beweis der Baummodelleigenschaft von $\mathcal{ALC}$

**Theorem 3.6** Wenn ein  $\mathcal{ALC}$ -Konzept  $C$  bezüglich einer  $\mathcal{ALC}$ -TBox  $\mathcal{T}$  erfüllbar ist, dann haben  $C$  und  $\mathcal{T}$  ein gemeinsames Baummodell  $\mathcal{I}$ .

**Beweis.** Siehe Theorem 3.24 in [BHLS17].

### T3.9 Beispiel für Teilkonzepte

Sei  $C = \forall r. \exists r. (A \sqcap B)$ . Dann ist  $\text{sub}(C) = \{A, B, A \sqcap B, \exists r. (A \sqcap B), \forall r. \exists r. (A \sqcap B)\}$ .

Sei  $\mathcal{T} = \{A \sqsubseteq \exists r. B, \forall r. B \sqsubseteq A\}$ . Dann ist  $\text{sub}(\mathcal{T}) = \{A, B, \exists r. B, \forall r. B\}$ .

### T3.10 Beispiel für Typen und Filtration

Seien  $C = A \sqcap B$  und  $\mathcal{T} = \{A \sqsubseteq \exists r.A\}$ . Dann ist  $\text{sub}(C, \mathcal{T}) = \{A, B, A \sqcap B, \exists r.A\}$ .

Wir betrachten die folgende Interpretation  $\mathcal{I}$ .



Dann gilt für  $d$  und die vier Teilkonzepte in  $\text{sub}(C, \mathcal{T})$ :  $d \in A^{\mathcal{I}}$ ,  $d \notin B^{\mathcal{I}}$ ,  $d \notin (A \sqcap B)^{\mathcal{I}}$  und  $d \in (\exists r.A)^{\mathcal{I}}$ . Also ist

$$t_{\mathcal{I}}(d) = \{A, \exists r.A\}.$$

Analog erhält man:

$$t_{\mathcal{I}}(e) = \{A, \exists r.A\} \quad t_{\mathcal{I}}(f) = \{A, B, A \sqcap B, \exists r.A\} \quad t_{\mathcal{I}}(g) = \{A, \exists r.A\}$$

Es gilt also  $d \simeq e \simeq g \not\simeq f$ , und somit gibt es zwei Äquivalenzklassen bezüglich  $\simeq$ :

$$[d] = \{d, e, g\} \quad [f] = \{f\}$$

Die Filtration von  $\mathcal{I}$  bezüglich  $C$  und  $\mathcal{T}$  gemäß Definition 3.17 ist dann folgende Interpretation  $\mathcal{J}$ .



### T3.11 Beweis des Filtrationstheorems

**Theorem 3.17** Sei  $\mathcal{I}$  ein Modell von  $C$  und  $\mathcal{T}$ , und sei  $\mathcal{J}$  die Filtration von  $\mathcal{I}$  bezüglich  $C$  und  $\mathcal{T}$ . Dann ist auch  $\mathcal{J}$  ein Modell von  $C$  und  $\mathcal{T}$ .

**Beweis.** Wir verwenden die folgende Hilfsaussage.

$$\text{Für alle } d \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ und } D \in \text{sub}(C, \mathcal{T}) \text{ gilt: } d \in D^{\mathcal{I}} \quad \text{gdw.} \quad [d] \in D^{\mathcal{J}}$$

Für den Beweis dieser Hilfsaussage siehe Lemma 3.15 in [BHLS17].

Da  $\mathcal{I}$  ein Modell von  $C$  und  $\mathcal{T}$  ist, gibt es ein Element  $d \in C^{\mathcal{I}}$ . Mit der Hilfsaussage folgt  $[d] \in C^{\mathcal{J}}$ ; somit ist  $\mathcal{J}$  ein Modell von  $C$ .

Um zu zeigen, dass  $\mathcal{J}$  auch ein Modell von  $\mathcal{T}$  ist, betrachten wir eine beliebige Konzeptinklusion  $D \sqsubseteq E \in \mathcal{T}$  und eine beliebige Instanz  $[d] \in D^{\mathcal{J}}$ . Mit der Hilfsaussage folgt  $d \in D^{\mathcal{I}}$ ; also  $d \in E^{\mathcal{I}}$  (da  $\mathcal{T}$  Modell von  $\mathcal{I}$  ist); also mit der Hilfsaussage  $[d] \in E^{\mathcal{J}}$ .  $\square$



### T3.12 $\mathcal{ALCQI}$ hat nicht die endliche Modelleigenschaft

Betrachte die TBox  $\mathcal{T} = \{(1) \top \sqsubseteq \exists r. \neg A, (2) \top \sqsubseteq (\leq 1 r^-. \top)\}$ . Dann hat der Konzeptname  $A$  bezüglich  $\mathcal{T}$  nur *unendliche Modelle*:

Sei  $\mathcal{I}$  ein Modell von  $A$  und  $\mathcal{T}$  und  $d_0 \in \Delta^{\mathcal{I}}$ . Wir müssen zeigen, dass  $|\Delta^{\mathcal{I}}| = \infty$ .

Da  $\mathcal{I}$  Modell von  $\mathcal{T}$  ist, muss es wegen (1) einen  $r$ -Nachfolger  $d_1$  von  $d_0$  geben mit  $d_1 \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$ . Da  $d_0 \in A^{\mathcal{I}}$ , muss  $d_1 \neq d_0$  gelten.

Wegen (1) muss es wiederum einen  $r$ -Nachfolger  $d_2$  von  $d_1$  geben mit  $d_2 \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$ . Wie im vorigen Fall muss  $d_1 \neq d_0$  gelten. Außerdem muss  $d_2 \neq d_1$  gelten, da sonst  $d_1$  zwei  $r$ -Vorgänger hätte ( $d_0$  und  $d_1$ ) und dann (2) verletzt wäre.

Dieses Argument kann man so fortsetzen und immer wieder die Existenz eines neuen Elements  $d_{i+1}$  folgern, dass verschieden von allen  $d_0, \dots, d_i$  sein muss. Deshalb muss  $\Delta^{\mathcal{I}}$  unendlich sein.

### T3.13 Anzahl der Interpretationen der Größe $\leq 2^n$

**Behauptung.** Sei  $n = |C| + |\mathcal{T}|$ . Dann gibt es höchstens  $2^{2^{5n}}$  Interpretationen  $\mathcal{I}$  mit  $|\Delta^{\mathcal{I}}| \leq 2^n$ .

**Beweis.** Zunächst betrachten wir die Anzahl aller Interpretationen  $\mathcal{I}$  mit  $|\Delta^{\mathcal{I}}| = 2^n$ .

Jedes Element  $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$  kann in  $A^{\mathcal{I}}$  sein oder nicht, für jeden der  $\leq n$  Konzeptnamen  $A$  in  $\text{sub}(C, \mathcal{T})$ . Also gibt es  $2^{2^n \cdot n}$  Möglichkeiten für die Extensionen der Konzeptnamen in  $C$  und  $\mathcal{T}$ .

Jedes Paar von Elementen  $(d, e) \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$  kann in  $r^{\mathcal{I}}$  sein oder nicht, für jeden der  $\leq n$  Rollennamen  $r$  in  $\text{sub}(C, \mathcal{T})$ . Also gibt es  $2^{2^n \cdot 2^n \cdot n}$  Möglichkeiten für die Extensionen der Rollennamen in  $C$  und  $\mathcal{T}$ .

Die Gesamtzahl der möglichen Extensionen aller Konzept- und Rollennamen in  $C$  und  $\mathcal{T}$  ist dann das Produkt dieser beiden Zahlen, also:

$$\begin{aligned} 2^{2^n \cdot n} \cdot 2^{2^n \cdot 2^n \cdot n} &= 2^{2^n \cdot n + 2^{2^n} \cdot n} \\ &\leq 2^{2^{2^n} + 2^{3n}} \\ &\leq 2^{2 \cdot 2^{3n}} \\ &= 2^{2^{3n+1}} \\ &\leq 2^{2^{4n}} \end{aligned}$$

Betrachtet man nun die Anzahl der Interpretationen  $\mathcal{I}$  mit  $|\Delta^{\mathcal{I}}| \leq 2^n$ , dann sind dies maximal  $2^n \cdot 2^{2^{4n}} = 2^{2^{4n} + n} \leq 2^{2^{5n}}$ .  $\square$

## **Teil 4**

# **Tableau-Algorithmen**

## T4.1 Umwandlung in NNF

**Lemma 4.2.** Jedes Konzept kann in Linearzeit in ein äquivalentes Konzept in NNF umgewandelt werden.

**Beweis.** Dies geschieht durch erschöpfendes Anwenden folgender Regeln.

- Auflösen doppelter Negation: ersetze  $\neg\neg C$  durch  $C$
- de Morgan: ersetze  $\neg(C \sqcap D)$  durch  $\neg C \sqcup \neg D$ ; ersetze  $\neg(C \sqcup D)$  durch  $\neg C \sqcap \neg D$
- Dualität von  $\exists$  und  $\forall$ : ersetze  $\neg\exists r.C$  durch  $\forall r.\neg C$ ; ersetze  $\neg\forall r.C$  durch  $\exists r.\neg C$

Jede Regelanwendung ist äquivalenzerhaltend und schiebt die entsprechende Negation weiter nach innen (oder löst sie auf).

Man kann zeigen, dass linear viele Regelanwendungen ausreichen.  $\square$

## T4.2 Beispiel I-Baum

Sei  $C_0 = A \sqcap \forall r.(\neg A \sqcap \exists r.B)$ .

Dann ist  $\text{sub}(C_0) = \{A, B, \neg A, \exists r.B, \neg A \sqcap \exists r.B, \forall r.(\neg A \sqcap \exists r.B), C_0\}$ .

Der folgende Baum ist ein I-Baum für  $C_0$ .



Beachte, dass die Knotenbeschriftung im Allgemeinen nicht der Semantik genügen muss; die Tableau-Regeln werden jedoch dafür sorgen, dass sie das (größtenteils) tut.

## T4.3 Beispiel Tableau-Algorithmus

Sei  $C_0 = (\exists r.A \sqcap \exists r.\neg A) \sqcap (\forall r.A \sqcup \forall r.B)$ . Im Folgenden ist ein möglicher<sup>2</sup> Lauf des Tableau-Algorithmus auf  $C_0$  angegeben. Nach den ersten drei Schritten liefert dieser folgendes Zwischenergebnis:

	$C_0$	(1)
$\circ$	$\exists r.A \sqcap \exists r.\neg A$	(2a)
	$\forall r.A \sqcup \forall r.B$	(2b)
	$\exists r.A, \exists r.\neg A$	(3)

<sup>2</sup>Da die Reihenfolge der Regelanwendungen nicht festgelegt ist, gibt es im Allgemeinen mehrere Läufe. Das Ergebnis (Menge der vollständigen I-Bäume) ist jedoch nicht von der Reihenfolge abhängig.

Dabei wurden folgende Regeln angewendet.

- (1) initialer Baum  $\mathcal{B}_{\text{ini}}$
- (2a), (2b)  $\sqcap$ -Regel auf (1)
- (3)  $\sqcap$ -Regel auf (2a)

Als nächstes wenden wir die  $\sqcup$ -Regel auf  $\forall r.A \sqcup \forall r.B$  (2b) an. Dadurch erhalten wir zwei I-Bäume  $\mathcal{B}_1$  und  $\mathcal{B}_2$ :



In  $\mathcal{B}_1$  lässt sich die  $\exists$ -Regel auf die beiden Konzepte in (3) anwenden, wodurch jeweils ein neuer  $r$ -Nachfolger des Wurzelknotens erzeugt wird:



Nun lässt sich die  $\forall$ -Regel auf (4a) und den rechten Nachfolger anwenden (der linke ist bereits mit  $A$  beschriftet), und wir erhalten:



Dieser I-Baum ist vollständig (denn es ist keine weitere Regel anwendbar), und er enthält einen offensichtlichen Widerspruch wegen (6) und (7) – ab jetzt immer mit dem Symbol  $\zeta$  gekennzeichnet.

Schließlich wenden wir in  $\mathcal{B}_2$  dieselben Regeln an und erhalten folgenden I-Baum:



Es wurden also folgende Regeln angewendet:

- (8)  $\exists$ -Regel auf  $\exists r.A$  (3)
- (9)  $\exists$ -Regel auf  $\exists r.\neg A$  (3)
- (10)  $\forall$ -Regel auf (4b) und linken  $r$ -Nachfolger
- (11)  $\forall$ -Regel auf (4b) und rechten  $r$ -Nachfolger

Dieser Baum ist vollständig, enthält aber *keinen* offensichtlichen Widerspruch. Somit gibt der Algorithmus auf der Eingabe  $C_0$  „erfüllbar“ zurück.

## T4.4 Verzweigungsgrad der I-Bäume

**Behauptung 1.** Es werden nur I-Bäume mit einem Verzweigungsgrad von maximal  $|C_0|$  generiert.

**Beweis.** Nur die  $\exists$ -Regel generiert Nachfolgerknoten, und zwar höchstens einen pro Konzept  $\exists r.C$  in  $\text{sub}(C_0)$ . Nach Lemma 3.13 ist aber  $|\text{sub}(C_0)| \leq C_0$ .  $\square$

## T4.5 Tiefe der I-Bäume

**Behauptung 2.** Es werden nur I-Bäume mit einer Tiefe von maximal  $|C_0|$  generiert.

**Beweis.** Dazu genügt es, folgende Behauptung zu beweisen:

**Behauptung 2a.** Wenn  $v$  ein Knoten mit Tiefe  $i$  ist, dann gilt für alle  $C \in \mathcal{L}(v)$ :

$$\text{rd}(C) \leq \text{rd}(C_0) - i \quad ((*) )$$

Dabei zählen wir die Tiefe eines Knotens beginnend von der Wurzel, welche die Tiefe 0 hat. Behauptung 2a besagt also, dass die Rollentiefe der Konzepte in den Knotenbeschriftungen mit der Tiefe eines Knotens abnimmt.

Es ist leicht zu sehen, dass die gewünschte Behauptung 2 bereits aus Behauptung 2a folgt: Wegen der Tableau-Regeln ist jeder Knoten mit mindestens einem Konzept beschriftet

(der initiale Knoten mit  $C_0$  und alle weiteren Knoten mit dem  $C$  aus der  $\exists$ -Regel). Wenn ein generierter I-Baum also eine Tiefe  $k > |C_0|$  hätte, dann gäbe es einen Knoten  $v$  der Tiefe  $k$  und in dessen Beschriftung  $\mathcal{L}(v)$  ein Konzept  $C$ . Wegen Behauptung 2a wäre dann aber  $\text{rd}(C) < 0$ , was nicht möglich ist.

**Beweis von Behauptung 2a.** Wir verwenden Induktion über die Anzahl der Regelnwendungen.

**Induktionsanfang.** Nach 0 Regelnwendungen gibt es nur den initialen Knoten  $v_{\text{ini}}$  mit  $\mathcal{L}(v_{\text{ini}}) = \{C_0\}$ . Ungleichung (\*) folgt, da  $i = 0$ .

**Induktionsschritt.** Hier unterscheiden wir vier Fälle nach der Regel, durch deren Anwendung das Konzept  $C$  zur Knotenbeschriftung  $\mathcal{L}(v)$  hinzugefügt wurde.

**$\sqcap$ -Regel.** Vor der Anwendung der Regel gab es ein Konzept  $C \sqcap D \in \mathcal{L}(v)$ , und durch die Anwendung wurden  $C$  und  $D$  zu  $\mathcal{L}(v)$  hinzugefügt. Nach Induktionsvoraussetzung ist  $\text{rd}(C \sqcap D) \leq \text{rd}(C_0) - i$ , also auch  $\text{rd}(C) \leq \text{rd}(C_0) - i$  wegen  $C \leq \text{rd}(C \sqcap D)$ . Analog für  $\text{rd}(D)$ .

**$\sqcup$ -Regel.** Analog (probiert es selbst aus).

**$\exists$ -Regel.** Vor der Anwendung der Regel gab es einen Vorgängerknoten  $v'$  von  $v$  mit  $\exists r.C \in \mathcal{L}(v')$ , und durch die Anwendung wurde  $(v', r, v)$  zu  $E$  hinzugefügt und  $\mathcal{L}(v) = \{C\}$  gesetzt. Nun gilt:

$$\begin{aligned} \text{rd}(C) &= \text{rd}(\exists r.C) - 1 && \text{(Definition rd)} \\ &\leq \left( \text{rd}(C_0) - (i - 1) \right) - 1 && \text{(Induktionsvorauss.; } v' \text{ hat Tiefe } i - 1) \\ &= \text{rd}(C_0) - i \end{aligned}$$

**$\forall$ -Regel.** Ähnlich (probiert es selbst aus). □

## T4.6 Anzahl der Regelnwendungen pro I-Baum

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass für  $k := |C_0|$  gilt:

$$k^k \cdot k \leq 2^{2k^2}$$

Das kann man wie folgt sehen:

$$\begin{aligned} k^k \cdot k &= k^{k+1} && \text{(Potenzgesetze)} \\ &\leq k^{2k} && \text{(da } k \geq 1) \\ &= (2^{\log k})^{2k} && \text{(Definition Zweierlogarithmus log)} \\ &= 2^{\log k \cdot 2k} && \text{(Potenzgesetze)} \\ &\leq 2^{k \cdot 2k} && \text{(da } \log(k) \leq k) \\ &= 2^{2k^2} \end{aligned}$$

□

## T4.7 Letzter Schritt im Terminierungsbeweis

Wir ordnen jeder Menge  $M_i$  von I-Bäumen eine Multimenge  $MM_i$  wie folgt zu: Für jeden Baum  $\mathcal{B} \in M_i$  enthält  $MM_i$  die Zahl

$m(\mathcal{B}) = „n \text{ minus die Anzahl } j \text{ der Regelanwendungen, mittels derer } \mathcal{B} \text{ generiert wurde}“.$

Somit ist  $MM_i$  eine Multimenge über der Grundmenge  $\mathbb{N}$ . Da  $<$  auf  $\mathbb{N}$  wohlfundiert ist, ist mit Theorem 4.7 auch  $<_{mul}$  auf  $MM(\mathbb{N})$  wohlfundiert. Außerdem gilt  $MM_i >_{mul} MM_{i+1}$  für jedes  $i \geq 0$ , denn mit jeder Regelanwendung wird in  $M_i$  ein I-Baum durch maximal zwei I-Bäume  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  ersetzt mit  $m(\mathcal{B}_1), m(\mathcal{B}_2) < m(\mathcal{B})$ ; somit erhält man  $MM_{i+1}$  aus  $MM_i$ , indem man  $m(\mathcal{B})$  durch die kleineren Zahlen  $m(\mathcal{B}_1), m(\mathcal{B}_2)$  ersetzt.

Wegen der Wohlfundiertheit von  $<_{mul}$  und der Beobachtung  $MM_i >_{mul} MM_{i+1}$  muss die Folge der  $MM_i$  endlich sein.  $\square$

## T4.8 Verbleibender Beweis der Korrektheit

**Behauptung.** Für alle Konzepte  $C$  und Knoten  $v \in V$  gilt:  $C \in \mathcal{L}(v)$  impliziert  $v \in C^{\mathcal{I}}$

Zunächst zeigen wir, dass diese Behauptung die Aussage des Theorems 4.8 impliziert.

Da  $C_0 \in \mathcal{L}(v_{ini})$  in  $\mathcal{B}_{ini}$ , gilt auch  $C_0 \in \mathcal{L}(v_{ini})$  in  $\mathcal{B}$ , denn Knotenbeschriftungen werden durch das Anwenden der Tableauregeln nicht gelöscht. Also ist wegen der obigen Behauptung  $v_{ini} \in C_0^{\mathcal{I}}$ , und damit ist  $C_0$  erfüllbar.

**Beweis der Behauptung** per Induktion über die Struktur von  $C$ .

**Induktionsanfang.** Für Konzeptnamen  $C = A$  gilt die Behauptung wegen der Definition von  $\mathcal{I}$ .

**Induktionsschritt.** Hier müssen wir für jeden der Operatoren  $\neg, \sqcap, \sqcup, \exists, \forall$  einen gesonderten Fall betrachten, denn wegen der NNF kann man nun nicht mehr annehmen, dass  $\sqcup$  durch  $\sqcap$  oder  $\forall$  durch  $\exists$  ausgedrückt wird.

$C = \neg A$  für einen Konzeptnamen  $A$ . Da der I-Baum  $\mathcal{B}$  keinen offensichtlichen Widerspruch enthält, folgt aus  $\neg A \in \mathcal{L}(v)$ , dass  $A \notin \mathcal{L}(v)$ . Nach Definition von  $\mathcal{I}$  gilt dann aber  $v \notin A^{\mathcal{I}}$ , also  $v \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$ .

$C = D_1 \sqcap D_2$ . Wenn  $C \in \mathcal{L}(v)$  in  $\mathcal{B}$ , dann auch  $D_1 \in \mathcal{L}(v)$  und  $D_2 \in \mathcal{L}(v)$ , da  $\mathcal{B}$  vollständig ist und somit insbesondere die  $\sqcap$ -Regel nicht anwendbar ist. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt daraus nun  $v \in D_1^{\mathcal{I}}$  und  $v \in D_2^{\mathcal{I}}$ ; wegen der Semantik von  $\sqcap$  gilt damit  $v \in (D_1 \sqcap D_2)^{\mathcal{I}}$ .

$C = D_1 \sqcup D_2$ . Analog.

$C = \exists r.D$ . Wegen  $C \in \mathcal{L}(v)$  und da die  $\exists$ -Regel nicht anwendbar ist, gibt es  $v' \in V$  mit  $(v, r, v') \in E$  und  $D \in \mathcal{L}(v')$ . Nach Induktionsvoraussetzung folgt aus dem letzteren, dass  $v' \in D^{\mathcal{I}}$ . Da wegen Definition von  $\mathcal{I}$  auch  $(v, v') \in r^{\mathcal{I}}$  sein muss, folgt  $v \in (\exists r.D)^{\mathcal{I}}$  mit der Semantik von  $\exists$ .

$C = \forall r.D$ . Ähnlich.  $\square$

## T4.9 Beispiel für Realisierbarkeit

Das folgende Bild zeigt einen I-Baum  $\mathcal{B}$  (links) und eine Interpretation  $\mathcal{I}$ , die  $\mathcal{B}$  realisiert, (rechts) sowie die zugehörige Abbildung  $\pi$  gemäß Definition 4.9 (gestrichelte Pfeile).



Man beachte, dass die Knoten von  $\mathcal{B}$  (links) mit Mengen von Konzepten beschriftet sind, aber die Elemente von  $\mathcal{I}$  (rechts) mit Konzeptnamen – so, wie wir Interpretationen immer darstellen.

## T4.10 Verbleibender Beweis der Vollständigkeit

**Behauptung.** Für alle  $i \leq n$  ist  $M_i$  realisierbar.

**Beweis.** Per Induktion über  $i$ .

**Induktionsanfang.**  $M_0 = \{\mathcal{B}_{\text{ini}}\}$  ist realisierbar, da  $\mathcal{B}_{\text{ini}}$  realisierbar ist, und zwar durch ein beliebiges Modell von  $C_0$  (welches existiert, da  $C_0$  nach Voraussetzung von Theorem 4.10 erfüllbar ist).

**Induktionsschritt.** Wir nehmen an, dass  $M_i$  realisierbar sei, und zeigen, dass dann auch  $M_{i+1}$  realisierbar ist. Dazu unterscheiden wir vier Fälle gemäß der Regel, mit der  $M_{i+1}$  aus  $M_i$  erzeugt wird. Sei also  $\mathcal{B} = (V, E, \mathcal{L})$  ein realisierbarer Baum aus  $M_i$ , auf den eine Regel angewendet wird.

**$\sqcup$ -Regel.** Dann entsteht  $M_{i+1}$  aus  $M_i$ , indem  $\mathcal{B}$  durch zwei Bäume  $\mathcal{B}' = (V, E, \mathcal{L}')$  und  $\mathcal{B}'' = (V, E, \mathcal{L}'')$  ersetzt wird, und es gibt einen Knoten  $v \in V$  mit

- $C \sqcup D \in \mathcal{L}(v)$ ;
- $\mathcal{L}'(v) = \mathcal{L}(v) \cup \{C\}$ ,  $\mathcal{L}''(v) = \mathcal{L}(v) \cup \{D\}$ ;
- $\mathcal{L}'(u) = \mathcal{L}''(u) = \mathcal{L}(u)$  für alle  $u \neq v$ .



Es genügt zu zeigen: wenn  $\mathcal{B}$  realisierbar, dann  $\mathcal{B}'$  realisierbar *oder*  $\mathcal{B}''$  realisierbar.

Sei  $\mathcal{I}$  eine Interpretation, die  $\mathcal{B}$  realisiert, und  $\pi : V \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}}$  die zugehörige Abbildung gemäß Definition 4.9. Dann gilt insbesondere  $\pi(v) \in (C \sqcup D)^{\mathcal{I}}$ . Nach Semantik von  $\sqcup$  ist dann  $\pi(v) \in C^{\mathcal{I}}$  oder  $\pi(v) \in D^{\mathcal{I}}$ . Im ersten Fall realisiert  $\mathcal{I}$  den Baum  $\mathcal{B}'$ , im zweiten  $\mathcal{B}''$ .

**$\sqcap$ -Regel.** Analog, aber mit nur *einem* Baum  $\mathcal{B}'$  (probiert es selbst aus).

**$\exists$ -Regel.** Dann entsteht  $M_{i+1}$  aus  $M_i$ , indem  $\mathcal{B}$  durch einen Baum  $\mathcal{B}' = (V', E', \mathcal{L}')$  ersetzt wird, und es gibt Knoten  $v, v' \in V$  mit

- $\exists r.C \in \mathcal{L}(v)$ ;
- $V' = V \uplus \{v'\}$ ,  $E' = E \cup \{(v, r, v')\}$
- $\mathcal{L}'(v') = \{C\}$ ;
- $\mathcal{L}'(u) = \mathcal{L}(u)$  für alle  $u \neq v'$ .

Es genügt zu zeigen: wenn  $\mathcal{B}$  realisierbar, dann  $\mathcal{B}'$  realisierbar.

Sei  $\mathcal{I}$  eine Interpretation, die  $\mathcal{B}$  realisiert, und  $\pi : V \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}}$  die zugehörige Abbildung gemäß Definition 4.9. Dann gilt insbesondere  $\pi(v) \in (\exists r.C)^{\mathcal{I}}$ , also gibt es ein  $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$  mit  $(\pi(v), d) \in r^{\mathcal{I}}$  und  $d \in C^{\mathcal{I}}$ . Wenn man nun  $\pi$  erweitert um  $\pi(v') = d$ , dann bezeugt die resultierende Funktion, dass  $\mathcal{B}'$  durch  $\mathcal{I}$  realisiert wird.

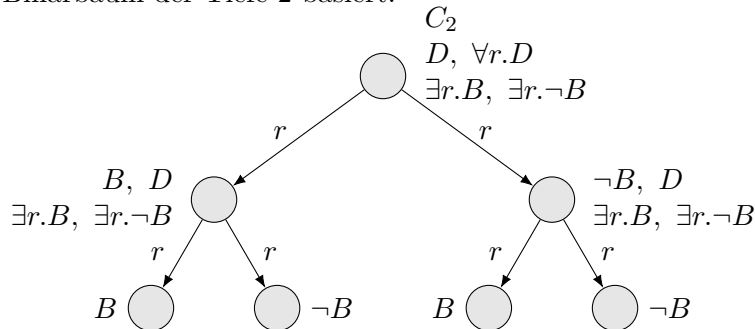
**$\forall$ -Regel.** Ähnlich (probiert es selbst aus). □

## T4.11 Beispiel für den Worst Case bei der Komplexitätsanalyse

Wir betrachten  $n = 2$ , also das Konzept  $C_2 = \forall r^0.(\exists r.B \sqcap \exists r.\neg B) \sqcap \forall r^1.(\exists r.B \sqcap \exists r.\neg B)$ . (Folie 4.25). Kürzt man nun das doppelt vorkommende Teilkonzept ab mit  $D = \exists r.B \sqcap \exists r.\neg B$ , dann ist

$$C_2 = D \sqcap \forall r.D.$$

Der Tableau-Algorithmus erzeugt mit der Eingabe  $C_2$  folgenden I-Baum, der auf dem vollständigen Binärbaum der Tiefe 2 basiert:



Es sollte nun leicht zu sehen sein, dass für beliebiges  $n$  der entsprechende I-Baum auf dem vollständigen Binärbaum der Tiefe  $n$  basiert, welcher  $2^n$  Knoten hat.

## T4.12 Beispiel für Backjumping

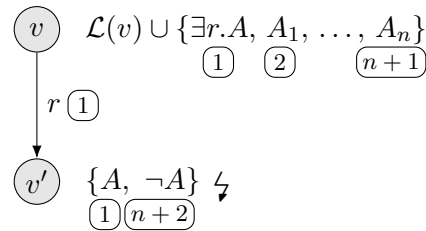
Nehmen wir an, ein Knoten  $v$  in einem I-Baum sei markiert wie folgt, wobei die Konzepte in  $\mathcal{L}(v)$  durchnummeriert werden.

$$\mathcal{L}(v) = \{ \underbrace{(\exists r.A) \sqcup B}_{(1)}, \underbrace{A_1 \sqcup A'_1}_{(2)}, \dots, \underbrace{A_n \sqcup A'_n}_{(n+1)}, \underbrace{\forall r.\neg A}_{(n+2)} \}$$

Nehmen wir weiterhin an, der Tableau-Algorithmus verarbeite die Konzepte aus  $\mathcal{L}(v)$  in der angegebenen Reihenfolge und wählt bei den Disjunktionen immer zuerst das linke Disjunkt. Dann wird

- im 1. Schritt das Konzept  $\exists r.A$  zu  $\mathcal{L}(v)$  hinzugefügt ( $\sqcup$ -Regel auf  $(1)$  angewendet);
- im 2. Schritt ein  $r$ -Nachfolger  $v'$  zu  $v$  hinzugefügt und mit  $\{A\}$  markiert ( $\exists$ -Regel auf  $\exists r.A \in \mathcal{L}(v)$  angewendet);
- im den nächsten  $n$  Schritten die linken Disjunkte von  $(2) - (n+1)$  zu  $\mathcal{L}(v)$  hinzugefügt ( $\sqcup$ -Regel);
- im folgenden Schritt das Konzept  $\neg A$  zu  $\mathcal{L}(v')$  hinzugefügt ( $\forall$ -Regel auf  $\forall r.\neg A \in \mathcal{L}(v)$  angewendet).

Danach sieht die „Umgebung“ von  $v$  im I-Baum wie folgt aus, wobei die Einträge der Knotenlabels mit der Nummer des Konzeptes aus  $\mathcal{L}(v)$  versehen sind, von dem sie stammen (dies repräsentiert die „Dependenzmenge“).



Wegen des offensichtlichen Widerspruchs in  $v'$  (angezeigt durch  $\perp$ ) muss Backtracking durchgeführt werden. Einfaches Backtracking probiert hier aber  $2^n$  sinnlose Alternativen aus, nämlich sämtliche Kombination der jeweils zwei Disjunkte von  $(2) - (n+1)$ , und findet erst dann die Ursache des Problems: Der Konflikt wurde letztlich durch das linke Disjunkt  $\exists r.A$  von  $(1)$  und Konzept  $\forall r.\neg A$   $(n+2)$  ausgelöst. Mit Backjumping hingegen wird wie im Bild angedeutet Buch über die Herkunft der Konzepte geführt; deshalb kann direkt zur Ursache des Problems zurückgesprungen werden – hier zum 1. Schritt der obigen Aufzählung.

## T4.13 Beispiel für Normalform der TBoxen

Wir betrachten die TBox

$$\mathcal{T} = \{A \sqsubseteq \exists r.B, A \sqcup B \sqsubseteq \forall r.B\}.$$

Beim Umwandeln in Normalform werden zuerst die beiden Konzeptinklusionen in eine einzige Konzeptinklusion mit  $\top$  auf der linken Seite umgewandelt, wie auf der Folie angegeben:

$$\{\top \sqsubseteq (\neg A \sqcup \exists r.B) \sqcap (\neg(A \sqcup B) \sqcup \forall r.B)\}$$

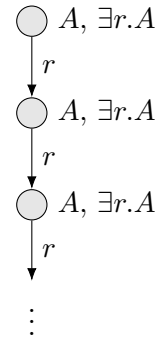
Nun muss noch NNF hergestellt werden, indem die rechte Negation „nach innen gezogen“ wird:

$$\mathcal{T}' = \{\top \sqsubseteq (\neg A \sqcup \exists r.B) \sqcap ((\neg A \sqcap \neg B) \sqcup \forall r.B)\}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass die bei resultierende TBox  $\mathcal{T}'$  immer äquivalent zur ursprünglichen TBox  $\mathcal{T}$  ist, d. h.  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}'$  haben dieselben Modelle.

## T4.14 Beispiel für Nicht-Terminierung

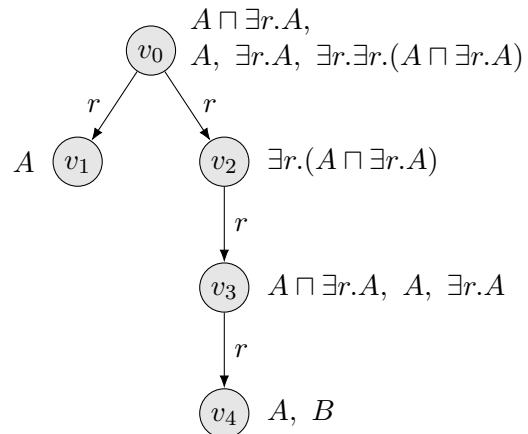
Sei  $C_0 = A$  und  $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq \exists r.A\}$  (bereits in Normalform). Wenn man das bisherige Tableauverfahren um die TBox-Regel erweitert, terminiert der Algorithmus auf der Eingabe  $(C_0, \mathcal{T})$  nicht mehr, denn es sind immer abwechselnd die TBox-Regel und die  $\exists$ -Regel anwendbar, wodurch der nebenstehende unendliche I-Baum erzeugt wird.



## T4.15 Beispiel für Blockierung

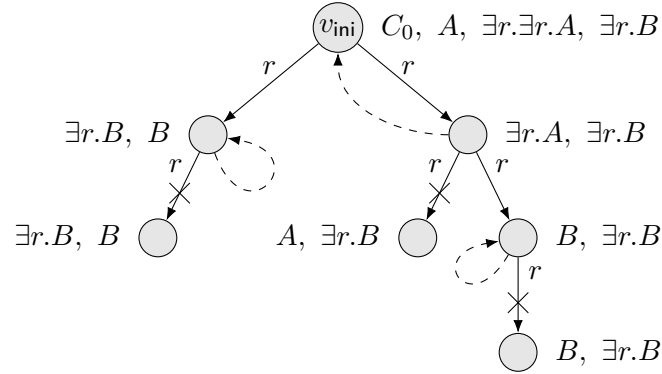
Im nebenstehenden I-Baum ist/sind

- $v_1$  direkt blockiert durch  $v_0$ ;
- $v_3$  direkt blockiert durch  $v_0$ ;
- $v_1, v_3, v_4$  blockiert;
- $v_0, v_2$  *nicht* blockiert.



## T4.16 Beispiel für die $\exists'$ -Regel

Seien  $C_0 = A \sqcap \exists r. \exists r. A$  und  $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq \exists r. B\}$ . Dann erzeugt das Tableauverfahren mit der neuen  $\exists'$ -Regel (und Blockierung) folgenden I-Baum.



Blockierte Knoten sind dadurch gekennzeichnet, dass die eingehende  $r$ -Kante durchkreuzt ist. Alle blockierten Knoten in diesem Beispiel sind direkt blockiert.

Die gestrichelten Pfeile zeigen an, durch welches Element der blockierte Nachfolger blockiert wird. Sie sind genau genommen nicht Bestandteil des I-Baums, aber sie werden bei der Modellkonstruktion im Korrektheitsbeweis nützlich sein.

## T4.17 Verbleibender Beweis der Korrektheit (mit TBoxen)

**Behauptung.** Für alle Konzepte  $C$  und Knoten  $v \in \Delta^{\mathcal{I}}$  gilt:  $C \in \mathcal{L}(v)$  impliziert  $v \in C^{\mathcal{I}}$

Man beachte, dass die Behauptung nur über die  $v \in \Delta^{\mathcal{I}}$  eine Aussage macht, also über die im vollständigen I-Baum  $\mathcal{B}$  *unblockierten* Knoten.

Zunächst zeigen wir, dass diese Behauptung die Aussage des Theorems 4.13 impliziert.

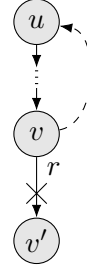
Da  $C_0 \in \mathcal{L}(v_{\text{ini}})$ , gilt nach der obigen Behauptung  $v_{\text{ini}} \in C_0^{\mathcal{I}}$ . Da außerdem die TBox-Regel nicht mehr anwendbar ist ( $\mathcal{B}$  ist vollständig), gilt  $C_{\mathcal{T}} \in \mathcal{L}(v)$  für alle  $v \in V$ . Wegen der Behauptung ist somit  $\mathcal{I}$  auch ein Modell von  $\mathcal{T}$ .

**Beweis der Behauptung** per Induktion über die Struktur von  $C$ . Der Induktionsanfang ( $C = A$ ) und die Fälle  $C = \neg A$ ,  $C = D_1 \sqcap D_2$ ,  $C = D_1 \sqcup D_2$  im Induktionsschritt sind genauso wie in der Variante ohne TBoxen (T4.8). Für die übrigen zwei Fälle argumentieren wie folgt:

**$C = \exists r. D$ .** Wegen  $C \in \mathcal{L}(v)$  und da die  $\exists'$ -Regel nicht anwendbar ist, gibt es  $v' \in V$  mit  $(v, r, v') \in E$  und  $D \in \mathcal{L}(v')$ .

Falls  $v'$  unblockiert ist, folgt  $(v, v') \in r^{\mathcal{I}}$  nach Definition von  $\mathcal{I}$  und  $v' \in D^{\mathcal{I}}$  nach Induktionsvoraussetzung.

Falls  $v'$  blockiert ist, argumentieren wir wie folgt: da der direkte Vorgänger von  $v'$  der unblockierte Knoten  $v$  ist, gibt es einen *unblockierten* Vorgänger  $u$  von  $v'$ , durch den  $v'$  *direkt* blockiert ist, siehe nebenstehende Skizze. (Der Knoten  $u$  kann, aber muss nicht mit  $v$  übereinstimmen; siehe das vorangehende Beispiel). Nach Definition von  $\mathcal{I}$  ist  $(v, u) \in r^{\mathcal{I}}$ . Da außerdem  $D \in \mathcal{L}(v') \subseteq \mathcal{L}(u)$  gilt, ist  $u \in D^{\mathcal{I}}$  nach Induktionsvoraussetzung.



In beiden Fällen folgt  $v \in (\exists r.D)^{\mathcal{I}}$ .

**$C = \forall r.D$ .** Um zu zeigen, dass  $v \in (\forall r.D)^{\mathcal{I}}$ , betrachten wir ein beliebiges Element  $u$  mit  $(v, u) \in r^{\mathcal{I}}$  und müssen zeigen, dass  $u \in D^{\mathcal{I}}$ .

Nach Definition von  $r^{\mathcal{I}}$  gibt es wegen  $(v, u) \in r^{\mathcal{I}}$  zwei mögliche Fälle:

- (1)  $(v, r, u) \in E$  für einen *unblockierten* Knoten  $u$ . Da die  $\forall$ -Regel nicht anwendbar ist, gilt  $D \in \mathcal{L}(u)$ , also nach Induktionsvoraussetzung  $u \in D^{\mathcal{I}}$ .
- (2)  $(v, r, v') \in E$  für einen Knoten  $v'$ , der durch  $u$  direkt blockiert wird; siehe wieder die obige Skizze. Da die  $\forall$ -Regel nicht anwendbar ist, gilt  $D \in \mathcal{L}(v')$ . Da außerdem  $\mathcal{L}(v') \subseteq \mathcal{L}(u)$ , folgt auch hier  $D \in \mathcal{L}(u)$  und nach IV  $u \in D^{\mathcal{I}}$ .  $\square$

## T4.18 Tiefe der I-Bäume (mit TBoxen)

**Behauptung.** Es werden nur I-Bäume mit einer Tiefe von maximal  $2^k$  generiert, wobei  $k = |C_0| + |\mathcal{T}|$ .

**Beweis.** Angenommen, es werde ein I-Baum der Tiefe  $> 2^k$  erzeugt. Dazu muss irgendwann die  $\exists'$ -Regel auf einen Knoten  $v$  der Tiefe  $2^k$  angewendet werden. Es gibt also einen Pfad  $v_0, \dots, v_{2^k}$  von der Wurzel  $v_0 = v_{\text{ini}}$  zum Knoten  $v_{2^k} = v$  (zeichnet den Baum und den Pfad selbst auf). Auf diesem Pfad gibt es  $2^k + 1$  Knoten. Da es aber nur  $2^{\text{sub}(C_0, \mathcal{T})} \leq 2^k$  mögliche Knotenbeschriftungen gibt, muss es nach dem Schubfachprinzip zwei verschiedene Knoten  $v_i, v_j$  auf dem Pfad geben mit derselben Beschriftung  $\mathcal{L}(v_i) = \mathcal{L}(v_j)$ . Also ist  $v_j$  blockiert und damit auch  $v$ , was ein Widerspruch zur oben gefolgerten Anwendung der  $\exists'$ -Regel ist. Damit ist die Annahme widerlegt und die Behauptung bewiesen.  $\square$

## T4.19 Beispiel für Absorption

Wir betrachten die TBox, die aus folgenden zwei Konzeptinklusionen besteht.

$$(1) \ A \sqsubseteq C \quad (2) \ A \sqcap C' \sqsubseteq D'$$

Die zweite kann man umformen in die äquivalente Konzeptinklusion

$$(2') \ A \sqsubseteq \neg C' \sqcup D'$$

und dann in (1) „absorbieren“, d. h. die folgende Konzeptinklusion ist äquivalent zur ursprünglichen TBox:

$$A \sqsubseteq C \sqcap (\neg C' \sqcup D')$$

Bringt man diese Konzeptinklusion in Normalform  $\top \sqsubseteq C_{\mathcal{T}}$ , dann sind zwei Disjunktionen ineinander geschachtelt; also erzeugt das Tableauverfahren 3 I-Bäume (probiert es aus). Im Gegensatz dazu treten bei der Normalisierung von (1) und (2) zwei Disjunktionen getrennt voneinander auf; also erzeugt das Tableauverfahren 4 I-Bäume. Durch Absorption hat man somit in diesem einfachen Beispiel eine nichtdeterministische Auswahl gespart.

# **Teil 5**

## **Komplexität**

## T5.1 Beispiel für Typen

Wir betrachten die Eingabe  $C_0 = A$  und  $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq C_{\mathcal{T}}\}$  mit

$$C_{\mathcal{T}} = \exists r. \exists r. A \sqcap \forall r. A' \sqcap (\neg A \sqcup \neg A')$$

Dann ist die Menge der Sub-Konzepte also:

$$\text{sub}(C_0, \mathcal{T}) = \{A, C_{\mathcal{T}}, \exists r. \exists r. A, \exists r. A, \forall r. A', A', \neg A \sqcup \neg A', \neg A, \neg A'\}$$

Wegen  $C_{\mathcal{T}} \in t$  für jeden Typen für  $C_0$  und  $\mathcal{T}$  und der Typ-Bedingung für  $\sqcap$ , muss jeder Typ die Menge  $M = \{C_{\mathcal{T}}, \exists r. \exists r. A, \forall r. A', \neg A \sqcup \neg A'\}$  enthalten. Man kann sich leicht überzeugen, dass es insgesamt sechs Typen für  $C_0$  und  $\mathcal{T}$  gibt, nämlich:

$$\begin{aligned} t_0 &= M \cup \{\neg A, \neg A'\} & t'_0 &= M \cup \{\neg A, \neg A', \exists r. A\} \\ t_1 &= M \cup \{\neg A, A'\} & t'_2 &= M \cup \{\neg A, A', \exists r. A\} \\ t_2 &= M \cup \{A, \neg A'\} & t'_3 &= M \cup \{A, \neg A', \exists r. A\} \end{aligned}$$

Der Typ  $t'_0$  ist schlecht in der Menge aller Typen: für  $\exists r. A \in t'_0$  ist die Menge aus Definition 5.3  $\{A, A'\}$ , aber kein Typ enthält  $A$  und  $A'$ . Analog kann man sich überlegen, dass  $t'_1$  und  $t'_2$  ebenfalls schlecht sind.

Intuitiv ist  $t'_0$  schlecht aus folgendem Grund. Angenommen, es gäbe ein Modell  $\mathcal{I}$  von  $C_0$  und  $\mathcal{T}$  in dem  $t'_0$  realisiert wird, das heißt  $t'_0 = \text{tp}_{\mathcal{I}}(d)$ , für ein  $d$ . Da  $\exists r. A \in t'_0$  und  $\forall r. A' \in t'_0$  muss es ein  $e$  geben mit  $e \in A^{\mathcal{I}}$  und  $e \in A'^{\mathcal{I}}$ . Dann enthält aber der (semantische) Typ  $\text{tp}_{\mathcal{I}}(e)$  sowohl  $A$  als auch  $A'$ . Da in Modellen von  $\mathcal{T}$  jeder semantische Typ die Bedingungen für einen syntaktischen Typen erfüllt, müsste es einen solchen Typen in der Liste oben geben. Das ist jedoch nicht der Fall, also kann  $t'_0$  nicht in einem Modell von  $C_0, \mathcal{T}$  realisiert werden.

Das Typeliminationsverfahren berechnet folgende Mengen:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{t_0, t_1, t_2, t'_0, t'_1, t'_2\} \\ \Gamma_1 &= \{t_0, t_1, t_2\} \\ \Gamma_2 &= \emptyset \end{aligned}$$

da man sich überlegen kann, dass  $t_0, t_1, t_2$  schlecht in  $\Gamma_1$  sind.



## T5.2 Korrektheitsbeweis

**Beispiel.** Wir beginnen mit einem Beispiel für die Modellkonstruktion aus dem Korrektheitsbeweis. Sei  $C_0 = A$  und  $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq C_{\mathcal{T}}\}$  mit

$$C_{\mathcal{T}} = \forall r. \exists r. A \sqcap (\neg A \sqcup \exists r. A).$$

Damit ist die Menge der Teilkonzepte

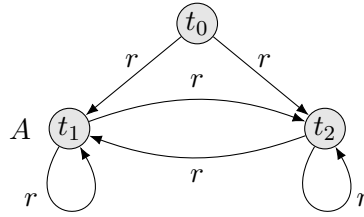
$$\text{sub}(C_0, \mathcal{T}) = \{A, C_{\mathcal{T}}, \forall r. \exists r. A, \exists r. A, \neg A \sqcup \exists r. A, \neg A\}.$$

Ähnlich wie in T5.1 muss jeder Typ für  $C_0$  und  $\mathcal{T}$  die Menge  $M = \{C_{\mathcal{T}}, \forall r. \exists r. A, \neg A \sqcup \exists r. A\}$  enthalten. Es gibt also die folgenden Typen:

$$\begin{aligned} t_0 &= M \cup \{\neg A\} \\ t_1 &= M \cup \{A, \exists r. A\} \\ t_2 &= M \cup \{\neg A, \exists r. A\} \end{aligned}$$

Beachte, dass die Menge  $M \cup \{A\}$  kein Typ ist wegen  $\neg A \sqcup \exists r. A \in M$  und der  $\sqcup$ -Bedingung von Typen. Man kann sich leicht überzeugen, dass keiner von  $t_0, t_1, t_2$  schlecht ist.

Das konstruierte Modell ist nun wie folgt:



**Behauptung.** Für alle  $C \in \text{sub}(C_0, \mathcal{T})$  und alle  $t \in \Gamma_i$  gilt:

$$C \in t \quad \text{impliziert} \quad t \in C^{\mathcal{I}}.$$

**Beweis.** Wir beweisen die Behauptung durch strukturelle Induktion über den Aufbau der Konzepte. Für den Induktionsanfang unterscheiden wir die beiden Fälle  $C = A$  und  $C = \neg A$ , für einen Konzeptnamen  $A$ .

- Für  $C = A$ , gilt die Behauptung per Definition von  $\mathcal{I}$ .
- Für  $C = \neg A \in t$  gilt wegen Bedingung 1 von Typen, dass  $A \notin t$ , also  $t \notin A^{\mathcal{I}}$ , wegen der Definition von  $\mathcal{I}$ . Daher auch  $t \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$ .

Für den Induktionsschritt müssen wir vier Fälle unterscheiden.

- Falls  $C = D \sqcap D' \in t$ , dann auch  $D, D' \in t$  wegen Bedingung 2 von Typen. Mit der Induktionsvoraussetzung bekommen wir  $t \in D^{\mathcal{I}}$  und  $t \in D'^{\mathcal{I}}$ . Aus der Semantik folgt nun  $t \in (D \sqcap D')^{\mathcal{I}}$ .

- Falls  $C = D \sqcup D' \in t$ , dann auch  $D \in t$  oder  $D' \in t$  wegen Bedingung 3 von Typen. Mit der Induktionsvoraussetzung bekommen wir  $t \in D^{\mathcal{I}}$  oder  $t \in D'^{\mathcal{I}}$ . Aus der Semantik folgt nun  $t \in (D \sqcup D')^{\mathcal{I}}$ .
- Falls  $C = \exists r.D \in t$ , dann gibt es einen Typen  $t' \in \Gamma_i$  sodass  $\{D\} \cup \{E \mid \forall r.E \in t\} \subseteq t'$ , da  $t$  nicht schlecht in  $\Gamma_i$ . Wegen der Definition von  $r^{\mathcal{I}}$  gilt  $(t, t') \in r^{\mathcal{I}}$ . Außerdem bekommen wir  $t' \in D^{\mathcal{I}}$  aus der Induktionsvoraussetzung. Daher auch  $t \in (\exists r.D)^{\mathcal{I}}$ .
- Falls  $C = \forall r.D \in t$ , dann sei  $t' \in \Gamma_i$  ein beliebiger Typ mit  $(t, t') \in r^{\mathcal{I}}$ . Aus der Definition von  $r^{\mathcal{I}}$  folgt dass  $D \in t'$ . Aus der Induktionsvoraussetzung bekommen wir  $t' \in D^{\mathcal{I}}$ . Daher auch  $t \in (\forall r.D)^{\mathcal{I}}$ .

Das beendet den Beweis der Behauptung und müssen nur noch argumentieren, dass das konstruierte  $\mathcal{I}$  ein Modell von  $C_0$  und  $\mathcal{T}$  ist.

- Wir haben angenommen, dass  $C_0 \in t_0$  für ein  $t_0 \in \Gamma_i$ . Wegen der Behauptung gilt also  $t_0 \in C_0^{\mathcal{I}}$ , also insbesondere  $C_0^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ .
- Aus Bedingung 4 für Typen folgt dass  $C_{\mathcal{T}} \in t$ , für jedes  $t \in \Gamma_i$ . Wegen der Behauptung gilt also  $t \in C_{\mathcal{T}}^{\mathcal{I}}$  für alle  $t \in \Gamma_i = \Delta^{\mathcal{I}}$ , und daher insbesondere  $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$ .  $\square$

## T5.3 Vollständigkeitsbeweis

**Behauptung.**  $\Gamma \subseteq \Gamma_i$ , für alle  $i \leq k$ .

**Beweis** per Induktion über  $i$ .

**Induktionsanfang**  $i = 0$ . Alle (semantischen) Typen in  $\Gamma$  erfüllen die Bedingungen 1-4 von syntaktischen Typen, daher ist  $\Gamma \subseteq \Gamma_0$ .

**Induktionsschritt** Sei  $i > 0$  und  $t \in \Gamma \subseteq \Gamma_{i-1}$ . Zu zeigen:  $t$  ist nicht schlecht in  $\Gamma_{i-1}$ .

Sei  $\exists r.C \in t$  und  $S = \{C\} \cup \{D \mid \forall r.D \in t\}$ .

Da  $t \in \Gamma$  gibt es  $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$  mit  $t_{\mathcal{I}}(d) = t$ .

$\Rightarrow$  es gibt  $e \in \Delta^{\mathcal{I}}$  mit  $(d, e) \in r^{\mathcal{I}}$  und  $e \in D^{\mathcal{I}}$ , für alle  $D \in S$ .

$\Rightarrow$   $S \subseteq t_{\mathcal{I}}(e)$  und  $t' = t_{\mathcal{I}}(e) \in \Gamma \subseteq \Gamma_{i-1}$ .

$\Rightarrow$   $t$  ist nicht schlecht in  $\Gamma_{i-1}$ .  $\square$

## T5.4 Beispiel für ExpTime-Spiele

Wir betrachten folgende zwei Beispiele.

**Spiel (a)** ist wie folgt definiert.

- $\varphi = \neg(p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge \neg(q_1 \leftrightarrow q_2)$
- Spielerin 1 kontrolliert Variablen  $p_1, q_1$ ; Spielerin 2 kontrolliert Variablen  $p_2, q_2$ .
- $\pi_0$  belegt alle Variablen mit 0.

Das heißt, dass Spielerin 1 nur gewinnen kann, wenn die Variablen  $p_1, p_2$  unterschiedlich belegt sind und ebenso die Variablen  $q_1, q_2$ .

Folgendes ist ein möglicher Verlauf des Spiels.

	$p_1$	$p_2$	$q_1$	$q_2$
Anfangsbelegung $\pi_0$	0	0	0	0
Zug von Spielerin 1	1	0	0	0
Zug von Spielerin 2	1	1	0	0
Zug von Spielerin 1	1	1	1	0
Zug von Spielerin 2	1	1	1	1

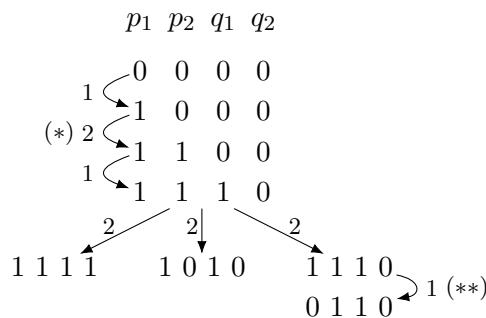
Ab diesem Spielstand kann Spielerin 2 gewinnen, wenn sie immer den letzten Zug von Spielerin 1 „rückgängig macht“ (bzw. passt, wenn Spielerin 1 das tut).

**Spiel (b)** ist definiert wie Spiel (a), außer dass die Formel geändert wird in

$$\varphi' = \varphi \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge q_1 \wedge q_2).$$

Durch das zusätzliche Disjunkt  $(p_1 \wedge p_2 \wedge q_1 \wedge q_2)$  hat also Spielerin 1 eine weitere Möglichkeit zu gewinnen, nämlich wenn alle Variablen mit 1 belegt sind.

Drei mögliche Spielverläufe sind wie folgt dargestellt.



Dabei bedeutet die Verzweigung, dass hier drei mögliche Züge von Spielerin 2 in Betracht gezogen wurden. In den ersten beiden Fällen gewinnt Spielerin 1; im dritten Fall kann sie durch den mit (\*\*) dargestellten Zug gewinnen. Also gewinnt Spielerin 1 in allen drei dargestellten Spielverläufen.

Allerdings kann es sein, dass Spielerin 2 statt des mit (\*) dargestellten Zuges einen anderen Zug macht. Darauf kommen wir im folgenden Beispiel zurück.

## T5.5 Beispiel für Gewinnstrategien

In Spiel (a) aus dem vorigen Beispiel hat Spielerin 2 folgende Gewinnstrategie.



Dabei zeigen die Kantenbeschriftungen in der 1. Ebene die Art des Zuges von Spielerin 2 an; die übrigen Beschriftungen kann man bei Bedarf leicht selbst ergänzen.

Die Einträge  $\vdots$  bedeuten, dass der Baum ab dem entsprechenden Knoten unendlich fortgesetzt wird. Die Konfigurationen dieser Knoten kommen bis auf eine Ausnahme im bereits gezeichneten Baum vor; also ist deren Fortsetzung eindeutig bestimmt. Die Ausnahme ist die Konfiguration (1, 1111); dort kann man aber leicht selbst den Baum fortsetzen, bis man in wenigen Schritten in allen Pfaden Positionen erreicht, die bereits im gezeichneten Baum vorkommen.

In Spiel (b) hat Spielerin 2 *keine* Gewinnstrategie, denn wir haben im vorigen Beispiel bereits gesehen, dass Spielerin 1 gewinnen kann. Dazu muss man allerdings auch alle Spielverläufe betrachten, die sich ergeben, wenn Spielerin 2 anstelle des mit (\*) markierten Zuges die verbleibenden zwei möglichen Züge macht (vervollständige selbst!).

## **Teil 6**

# **Effiziente Beschreibungslogiken**

## **Teil 7**

# **ABoxen und Anfragebeantwortung**

# Literaturverzeichnis

- [BHLS17] Baader, Franz, Ian Horrocks, Carsten Lutz und Uli Sattler: *An Introduction to Description Logic*. Cambridge University Press, 2017. <https://tinyurl.com/suub-intro-dl-ebook>.