

Tafelmitschriften zur Vorlesung „Beschreibungslogik“ im Sommersemester 2019

Prof. Dr. Thomas Schneider
AG Theorie der Künstlichen Intelligenz
Fachbereich 3



Stand: 12. Mai 2019

Dieses Dokument ist noch unvollständig und wird regelmäßig aktualisiert.

Inhaltsverzeichnis

2	Grundlagen	3
3	Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen	11
4	Tableau-Algorithmen	18
5	Komplexität	24
6	Effiziente Beschreibungslogiken	25
7	ABoxen und Anfragebeantwortung	26
	Literaturverzeichnis	27

Teil 2

Grundlagen

T2.1 Beispiele für \mathcal{ALC} -Konzepte

Mit den Konzeptnamen

Student, Naturwissenschaft, Professor, Emeritus, PflichtVL, VL, Einfach, Interessant,
 A, B

und den Rollennamen

studiert, hält, hatÜbungsaufgabe,
 r

kann man z. B. folgende zusammengesetzte \mathcal{ALC} -Konzepte bilden:

- $\text{Student} \sqcap \exists \text{studiert.Naturwissenschaft}$
 (beschreibt Studierende, die mindestens eine Naturwissenschaft studieren)
- $\text{Professor} \sqcap \text{Emeritus} \sqcap \forall \text{hält.} \neg \text{PflichtVL}$
 (beschreibt Professor*innen im Ruhestand, die keine Pflichtvorlesungen halten)
- $\text{VL} \sqcap \neg \text{PflichtVL} \sqcap \forall \text{hatÜbungsaufgabe.} (\text{Einfach} \sqcup \text{Interessant})$
 (beschreibt Wahlvorlesungen, bei denen alle Übungsaufgaben einfach oder interessant sind)
- $A \sqcap \exists r. (\neg B \sqcup \forall r. A)$

(Die Beschreibungen in Klammern werden eigentlich erst richtig klar, wenn die Semantik definiert ist.)

T2.2 Beispiele für Interpretationen und Extensionen

Wir betrachten die Interpretation $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ mit

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3, v_1, v_2\} \\ \text{Mensch}^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\ \text{Student}^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\ \text{Vorlesung}^{\mathcal{I}} &= \{v_1, v_2\} \\ \text{PflichtVL}^{\mathcal{I}} &= \{v_1\} \\ \text{WahlVL}^{\mathcal{I}} &= \{v_2\} \\ \text{hört}^{\mathcal{I}} &= \{(s_1, v_1), (s_2, v_1), (s_2, v_2), (s_3, v_1)\} \\ \text{bekanntMit}^{\mathcal{I}} &= \{(s_1, s_2), (s_2, s_1), (s_1, s_1), (s_2, s_2), (s_3, s_3)\}. \end{aligned}$$

Jede Interpretation kann in offensichtlicher Weise als (knoten- und kantenbeschrifteter) gerichteter Graph aufgefasst werden; für unsere Beispielinterpretation \mathcal{I} :



Beispiele für die Extensionen einiger zusammengesetzter Konzepte in dieser Interpretation:

$$\begin{aligned}
(\text{VL} \sqcap \text{PflichtVL})^{\mathcal{I}} &= \{v_1, v_2\} \cap \{v_1\} &&= \{v_1\} \\
(\neg \text{VL})^{\mathcal{I}} &= \Delta^{\mathcal{I}} \setminus \{v_1, v_2\} &&= \{s_1, s_2, s_3\} \\
(\text{Student} \sqcup \text{VL})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \cup \{v_1, v_2\} = \Delta^{\mathcal{I}} \\
(\exists \text{bekanntMit. Student})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\
(\exists \text{bekanntMit.} \exists \text{bekanntMit. Student})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_2, s_3\} \\
(\forall \text{hört. PflichtVL})^{\mathcal{I}} &= \{s_1, s_3, v_1, v_2\}
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile beachte man die Besonderheit der Werterestriktion (\forall), dass ein Domänenelement d , welches *keine* ausgehenden r -Kanten besitzt, immer eine Instanz von $\forall r.C$ ist, für jedes beliebige Konzept C .

T2.3 Semantik von \top und \perp

Es gelten:

$$\begin{aligned}
\top^{\mathcal{I}} &= (A \sqcup \neg A)^{\mathcal{I}} = A^{\mathcal{I}} \cup (\Delta^{\mathcal{I}} \setminus A^{\mathcal{I}}) = \Delta^{\mathcal{I}} \\
\perp^{\mathcal{I}} &= (A \sqcap \neg A)^{\mathcal{I}} = A^{\mathcal{I}} \cap (\Delta^{\mathcal{I}} \setminus A^{\mathcal{I}}) = \emptyset^{\mathcal{I}}
\end{aligned}$$

Dabei folgt die erste Gleichheit jeder Zeile aus der Definition von \top bzw. \perp auf Folie 2.9, die zweite Gleichheit aus der Semantik (Def. 2.2) und die dritte aus der Mengenlehre.

T2.4 Beispiele für „unerfüllbar“ und „subsumiert“

- (a) Das Konzept $C = \exists r.A \sqcap \forall r.\neg A$ ist *nicht* erfüllbar:

Angenommen, C sei erfüllbar, d. h. es gibt eine Interpretation \mathcal{I} mit $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$. Sei $d \in C^{\mathcal{I}}$. Wegen $d \in (\exists r.A)^{\mathcal{I}}$ gibt es ein Element $e \in A^{\mathcal{I}}$ mit $(d, e) \in r^{\mathcal{I}}$. Wegen $d \in (\forall r.\neg A)^{\mathcal{I}}$ gilt aber $e \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$, also $e \notin A^{\mathcal{I}}$, was ein Widerspruch zu $e \in A^{\mathcal{I}}$ ist. Also ist die Annahme falsch.

- (b) $\exists r.(A \sqcap B) \sqsubseteq \exists r.A \sqcap \exists r.B$:

Sei \mathcal{I} eine Interpretation und $d \in (\exists r.(A \sqcap B))^{\mathcal{I}}$. Dann gibt es ein Element $e \in (A \sqcap B)^{\mathcal{I}}$ mit $(d, e) \in r^{\mathcal{I}}$. Wegen $e \in A^{\mathcal{I}}$ gilt $d \in (\exists r.A)^{\mathcal{I}}$; wegen $e \in B^{\mathcal{I}}$ gilt $d \in (\exists r.B)^{\mathcal{I}}$. Also ist $d \in (\exists r.A \sqcap \exists r.B)^{\mathcal{I}}$.

Die Rückrichtung dieser Subsumtion gilt nicht – finde ein Gegenbeispiel, d. h. eine Interpretation \mathcal{I} mit $(\exists r.A \sqcap \exists r.B)^{\mathcal{I}} \not\subseteq (\exists r.(A \sqcap B))^{\mathcal{I}}$.

T2.5 Beispiele für TBoxen und deren Semantik

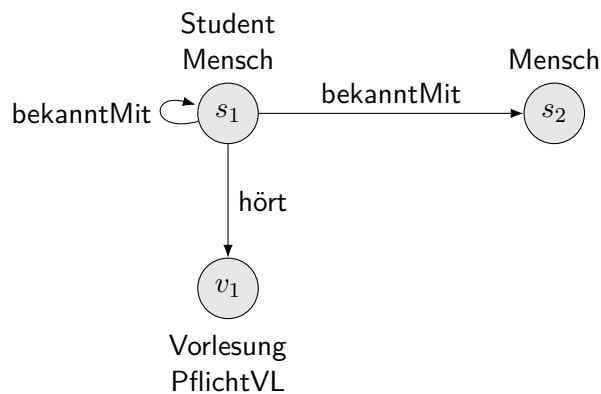
Wir betrachten folgende TBox.

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Student} & \equiv \text{Mensch} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung} \\ \text{Vorlesung} & \equiv \text{PflichtVL} \sqcup \text{WahlVL} \\ \text{Student} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung} & \sqsubseteq \exists \text{bekanntMit.Student} \\ \text{PflichtVL} \sqcap \text{WahlVL} & \sqsubseteq \perp \end{array} \right\}$$

Die Interpretation aus T2.2 ist Modell von \mathcal{T} . Sie erfüllt z. B. auch die folgende Konzeptinklusion.

$$\text{Student} \sqsubseteq \exists \text{bekanntMit.Mensch} \quad (1)$$

Ein weiteres Modell ist z. B. folgende Interpretation \mathcal{J} .



\mathcal{J} erfüllt ebenfalls die Konzeptinklusion (1) sowie z. B. $\text{VL} \equiv \text{PflichtVL}$.

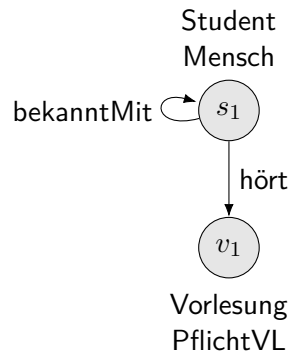
T2.6 Beispiele für „erfüllbar“ und „subsumiert“ bzgl. TBoxen

Sei \mathcal{T} die TBox aus dem vorangehenden Beispiel.

- (a) Das Konzept

$$C = \text{Student} \sqcap \forall \text{hört.PflichtVL}$$

ist erfüllbar bezüglich \mathcal{T} , denn folgende Interpretation \mathcal{I}' ist ein Modell von \mathcal{T} mit $s_1 \in C^{\mathcal{I}'}$:



Ebenso ist die Interpretation \mathcal{I} aus T2.2 ein Modell von \mathcal{T} mit $s_1 \in C^{\mathcal{I}}$.

- (b) Das Konzept

$$C = \text{Student} \sqcap \forall \text{hört.PflichtVL} \sqcap \exists \text{hört.WahlVL}$$

ist *unerfüllbar* bezüglich \mathcal{T} : Angenommen, C sei erfüllbar bzgl. \mathcal{T} . Dann gibt es ein Modell \mathcal{I} von \mathcal{T} mit einer Instanz $d \in C^{\mathcal{I}}$. Nach der Semantik von „ \sqcap “ (Def. 2.2) gelten (i) $d \in (\forall \text{hört.PflichtVL})^{\mathcal{I}}$ und (ii) $d \in (\exists \text{hört.WahlVL})^{\mathcal{I}}$. Wegen (ii) gibt es ein Element $e \in \text{WahlVL}^{\mathcal{I}}$ mit $(d, e) \in \text{hört}^{\mathcal{I}}$. Wegen (i) ist dann auch $e \in \text{PflichtVL}^{\mathcal{I}}$, also $e \in (\text{PflichtVL} \sqcap \text{WahlVL})^{\mathcal{I}}$. Weil \mathcal{I} jedoch ein Modell von \mathcal{T} ist, kann es wegen der Konzeptinklusion $\text{PflichtVL} \sqcap \text{WahlVL} \sqsubseteq \perp$ aus \mathcal{T} ein solches Element e nicht geben; ein Widerspruch. Also ist die Annahme falsch.

- (c) Für die Konzepte

$$C = \text{Student} \quad \text{und} \quad D = \exists \text{bekanntMit.Student}$$

gilt $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$: Sei \mathcal{I} ein Modell von \mathcal{T} und $d \in C^{\mathcal{I}}$, d. h. $d \in \text{Student}^{\mathcal{I}}$. Zu zeigen ist $d \in D^{\mathcal{I}}$, d. h. $d \in (\exists \text{bekanntMit.Student})^{\mathcal{I}}$.

Wegen der ersten Zeile von \mathcal{T} gilt $d \in (\exists \text{hört.Vorlesung})^{\mathcal{I}}$, also auch $d \in (\text{Student} \sqcap \exists \text{hört.Vorlesung})^{\mathcal{I}}$. Mit Zeile 3 von \mathcal{T} folgt wie gewünscht $d \in (\exists \text{bekanntMit.Student})^{\mathcal{I}}$.

Dies ist bereits Schlussfolgern, denn wir haben implizites Wissen aus \mathcal{T} abgeleitet:

- (a) Es *kann* Student*innen geben, die nur Pflichtvorlesungen hören.
- (b) Es kann *keine* Student*innen geben, die nur Pflichtvorlesungen, aber mindestens eine Wahlvorlesung hören.
- (c) Jede*r Student*in ist mit mindestens einer/m Student*in bekannt.

T2.7 Beweis der Monotonie von \mathcal{ALC} (Lemma 2.7)

Lemma 2.7 Seien \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 TBoxen mit $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Dann gilt:

- (1) Wenn C erfüllbar bezüglich \mathcal{T}_2 ist, dann ist C erfüllbar bezüglich \mathcal{T}_1 .
- (2) Wenn $\mathcal{T}_1 \models C \sqsubseteq D$, dann $\mathcal{T}_2 \models C \sqsubseteq D$.

Beweis.

- (1) Sei C erfüllbar bezüglich \mathcal{T}_2 . Dann gibt es ein Modell \mathcal{I} von \mathcal{T}_2 mit $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$. Da \mathcal{I} Modell von \mathcal{T}_2 ist, erfüllt \mathcal{I} alle Konzeptinklusionen in \mathcal{T}_2 , also wegen $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ auch alle Konzeptinklusionen in \mathcal{T}_1 , und somit ist \mathcal{I} auch Modell von \mathcal{T}_1 . Also gibt es ein Modell \mathcal{I} von \mathcal{T}_1 mit $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$; d. h. C ist erfüllbar bezüglich \mathcal{T}_1 .
- (2) Wir beweisen die Kontraposition. Es gelte $\mathcal{T}_2 \not\models C \sqsubseteq D$.¹ Dann gibt es ein Modell \mathcal{I} von \mathcal{T}_2 mit $C^{\mathcal{I}} \not\subseteq D^{\mathcal{I}}$. Wie in (1) ist \mathcal{I} auch Modell von \mathcal{T}_1 , also $\mathcal{T}_1 \not\models C \sqsubseteq D$. \square

Auf der Folie steht auch: „Die Umkehrungen von (1) und (2) sind im Allgemeinen *nicht* richtig.“ Davon kann man sich mittels einfacher Gegenbeispiele überzeugen: z. B. ist mit $\mathcal{T}_1 = \emptyset$ und $\mathcal{T}_2 = \{A \sqsubseteq B\}$ die Umkehrung von (2) widerlegt, denn $\mathcal{T}_2 \models A \sqsubseteq B$, aber $\mathcal{T}_1 \not\models A \sqsubseteq B$.

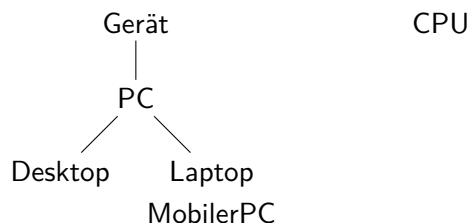
T2.8 Beispiel für Subsumtion als Ordnungsrelation

Wir betrachten folgende TBox.

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{l} \text{PC} \sqsubseteq \text{Gerät} \sqcap \exists \text{hatTeil.CPU} \\ \text{PC} \equiv \text{Desktop} \sqcup \text{Laptop} \\ \text{Desktop} \sqsubseteq \neg \text{Laptop} \\ \text{MobilerPC} \equiv \text{PC} \sqcap \neg \text{Desktop} \end{array} \right\}$$

Die dritte Zeile von \mathcal{T} ist äquivalent zu $\text{Desktop} \sqcap \text{Laptop} \sqsubseteq \perp$, wie man leicht zeigt (probiere es selbst aus).

Die Ordnung „ \sqsubseteq bezüglich \mathcal{T} “ kann man durch folgendes Hasse-Diagramm darstellen:



¹Das Zeichen $\not\models$ steht für „nicht \models “, also bedeutet $\mathcal{T} \not\models C \sqsubseteq D$, dass die Beziehung $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ *nicht* gilt (d. h. bezüglich \mathcal{T} wird C *nicht* von D subsumiert).

Dass die Relation „ \sqsubseteq bezüglich \mathcal{T} “ *nicht* antisymmetrisch ist, zeigt sich in diesem Beispiel dadurch, dass der Knoten unten rechts zwei Beschriftungen hat, also $\mathcal{T} \models \text{Laptop} \equiv \text{MobilerPC}$. Wäre die Relation antisymmetrisch, dann dürfte nicht gleichzeitig $\mathcal{T} \models \text{Laptop} \sqsubseteq \text{MobilerPC}$ und $\mathcal{T} \models \text{MobilerPC} \sqsubseteq \text{Laptop}$ gelten.

T2.9 Wechselseitige Reduktion der Schlussfolgerungsprobleme

Lemma 2.9

- (1) Subsumtion ist polynomiell reduzierbar auf (Un)erfüllbarkeit:
 $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ gdw. $C \sqcap \neg D$ unerfüllbar bezüglich \mathcal{T}
- (2) Erfüllbarkeit ist polynomiell reduzierbar auf (Nicht-)Äquivalenz:
 C erfüllbar bezüglich \mathcal{T} gdw. $\mathcal{T} \not\models C \equiv \perp$
- (3) Äquivalenz ist polynomiell reduzierbar auf Subsumtion:
 $\mathcal{T} \models C \equiv D$ gdw. $\mathcal{T} \models \top \sqsubseteq (C \sqcap D) \sqcup (\neg C \sqcap \neg D)$

Beweis. Wir beweisen exemplarisch Punkt (1). Die Beweise der anderen zwei Punkte sind analog.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} \models C \sqsubseteq D & \text{ gdw. } \text{für alle Modelle } \mathcal{I} \text{ von } \mathcal{T} \text{ gilt } C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}} \\
 & \text{gdw. } \text{für alle Modelle } \mathcal{I} \text{ von } \mathcal{T} \text{ gilt } C^{\mathcal{I}} \cap (\Delta^{\mathcal{I}} \setminus D^{\mathcal{I}}) = \emptyset \\
 & \text{gdw. } \text{für alle Modelle } \mathcal{I} \text{ von } \mathcal{T} \text{ gilt } (C \sqcap \neg D)^{\mathcal{I}} = \emptyset \\
 & \text{gdw. } C \sqcap \neg D \text{ unerfüllbar bezüglich } \mathcal{T}
 \end{aligned}$$

Hier gilt das erste „gdw.“ wegen der Definition von Subsumtion (Def. 2.6), und die zweite Zeile ist äquivalent zur ersten, weil für beliebige Mengen M_1, M_2 gilt, dass $M_1 \subseteq M_2$ gdw. $M_1 \cap \overline{M_2} = \emptyset$, wobei $\overline{M_2}$ das Komplement von M_2 ist. Man überzeuge sich davon anhand eines Venn-Diagramms. Die dritte Zeile ist schließlich äquivalent zur dritten wegen der Semantik von \sqcap und \neg (Def. 2.2), und die vierte ist äquivalent dazu wegen der Definition von Unerfüllbarkeit (Def. 2.6). \square

T2.10 Beispiel für inverse Rollen

Betrachte folgende \mathcal{ALC} -TBox:

$$\mathcal{T} = \{ \text{Professor} \sqsubseteq \text{Verrückt} \sqcap \exists \text{gibt.Vorlesung} \\
 \text{Vorlesung} \sqsubseteq \forall \text{wirdGegebenVon}.\neg \text{Verrückt} \}$$

Intuitiv sollte **Professor** unerfüllbar bezüglich \mathcal{T} sein; dies ist aber nicht der Fall, weil **Professor** in folgendem Modell von \mathcal{T} eine Instanz hat:



In \mathcal{ALCI} kann man die zweite Konzeptinklusion in \mathcal{T} durch

$$\text{Vorlesung} \sqsubseteq \forall \text{gibt}^- . \neg \text{Verrückt}$$

ersetzen. Dann wird Professor unerfüllbar bezüglich \mathcal{T} (aber \mathcal{T} hat immer noch Modelle).

T2.11 Beispiele für Zahlenrestriktionen

Definition einer Hand als ein Organ mit genau fünf Fingern:

$$\text{Hand} \equiv \text{Organ} \sqcap (\geq 5 \text{ hatTeil.Finger}) \sqcap (\leq 5 \text{ hatTeil.Finger})$$

Forderung, dass in jedem Semester mindestens zwei Wahlpflichtmodule angeboten werden:

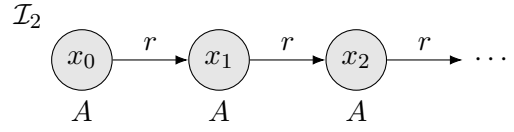
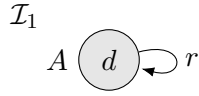
$$\text{Semester} \sqsubseteq (\geq 2 \text{ angeboten.Wahlpflichtmodul})$$

Teil 3

Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen

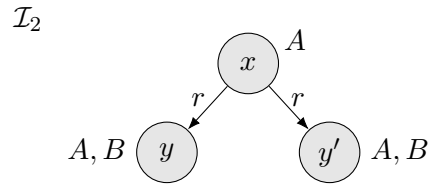
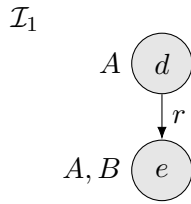
T3.1 Beispiele für Bisimulationen

1. Für die Interpretationen



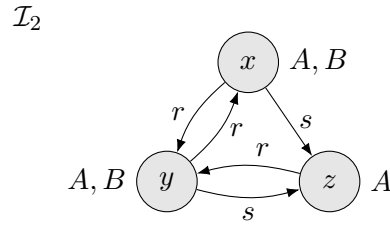
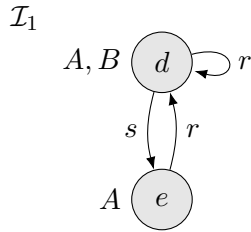
ist $\rho = \Delta^{\mathcal{I}_1} \times \Delta^{\mathcal{I}_2}$ eine Bisimulation.

2. Für die Interpretationen



ist $\rho = \{(d, x), (e, y), (e, y')\}$ eine Bisimulation.

3. Für die Interpretationen



ist $\rho = \{(d, x), (d, y), (e, z)\}$ eine Bisimulation.

T3.2 Beweis des Bisimulationstheorems

Theorem 3.2 Seien $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ Interpretationen, $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$ und $d_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$.

Wenn $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$, dann gilt für alle \mathcal{ALC} -Konzepte C :

$$d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} \quad \text{gdw.} \quad d_2 \in C^{\mathcal{I}_2}$$

Beweis. Sei ρ eine Bisimulation zwischen \mathcal{I}_1 und \mathcal{I}_2 mit $d_1 \rho d_2$. Wir beweisen die Behauptung per Induktion über die Struktur von C .

Induktionsanfang. Hier ist $C = A$ für einen Konzeptnamen A . Nach Bedingung (1) für Bisimulationen (Definition 3.1) gilt wie gewünscht: $d_1 \in A^{\mathcal{I}_1}$ gdw. $d_2 \in A^{\mathcal{I}_2}$

Induktionsschritt. Wir müssen fünf Fälle gemäß des äußersten Konstruktors von C unterscheiden ($\neg, \sqcap, \sqcup, \exists, \forall$). Wegen der (leicht nachzuweisenden) Äquivalenzen

$$C \sqcup D \equiv \neg(\neg C \sqcap \neg D) \quad \text{und} \quad \forall r.C \equiv \neg \exists r.\neg C$$

genügt es, wenn wir uns auf die drei Fälle \neg, \sqcap, \exists beschränken.

$$C = \neg D$$

$$\begin{array}{lll} d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} & \text{gdw.} & d_1 \notin D^{\mathcal{I}_1} & (\text{Semantik „}\neg\text{“}) \\ & & d_2 \notin D^{\mathcal{I}_2} & (\text{Induktionsvoraussetzung}) \\ & & d_2 \in C^{\mathcal{I}_2} & (\text{Semantik „}\neg\text{“}) \end{array}$$

$$C = D \sqcap E$$

$$\begin{array}{lll} d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} & \text{gdw.} & d_1 \in D^{\mathcal{I}_1} \text{ und } d_1 \in E^{\mathcal{I}_1} & (\text{Semantik „}\sqcap\text{“}) \\ & & d_2 \in D^{\mathcal{I}_2} \text{ und } d_1 \in E^{\mathcal{I}_2} & (\text{Induktionsvoraussetzung}) \\ & & d_2 \in C^{\mathcal{I}_2} & (\text{Semantik „}\sqcap\text{“}) \end{array}$$

$$C = \exists r.D$$

Für die Richtung „ \Rightarrow “ argumentieren wir so:

$$\begin{array}{ll} d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} & \\ \Rightarrow \text{es gibt } e_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1} \text{ mit } (d_1, e_1) \in r^{\mathcal{I}_1} \text{ und } e_1 \in D^{\mathcal{I}_1} & (\text{Semantik „}\exists\text{“}) \\ \Rightarrow \text{es gibt } e_2 \in \Delta^{\mathcal{I}_2} \text{ mit } (d_2, e_2) \in r^{\mathcal{I}_2} \text{ und } e_1 \rho e_2 & (\text{Bedingung (2) Bisim.}) \\ \Rightarrow e_2 \in D^{\mathcal{I}_2} & (\text{Induktionsvoraus.}) \\ \Rightarrow d_2 \in (\exists r.D)^{\mathcal{I}_2} & (\text{Semantik „}\exists\text{“}) \end{array}$$

Das Argument für die Richtung „ \Leftarrow “ ist analog, unter Verwendung von Bedingung (3) für Bisimulationen. \square

T3.3 Nichtausdrückbarkeit konkreter Eigenschaften

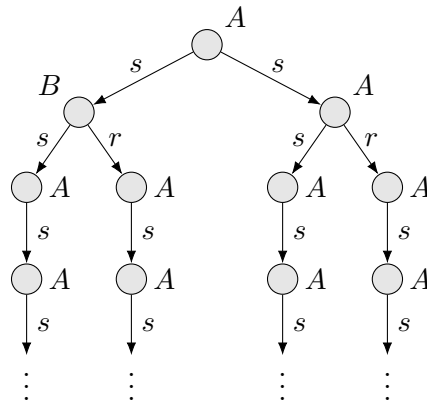
Theorem 3.4 In \mathcal{ALC} sind *nicht ausdrückbar*:

- das \mathcal{ALCI} -Konzept $\exists r^{\neg}.\top$
- die \mathcal{ALCQ} -Konzepte
 - $(\leq n r.\top)$, für alle $n > 0$
 - $(\geq n r.\top)$, für alle $n > 1$

Beweis. Siehe Proposition 3.3 und 3.4 in [BHLS17].

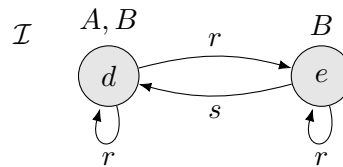
T3.4 Beispiel für ein Baummodell

Sei $C = A \sqcap \exists s.B \sqcap \forall s.\exists r.A$ und $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq \exists s.A\}$. Ein Baummodell von C und \mathcal{T} :



T3.5 Beispiel für das Unravelling

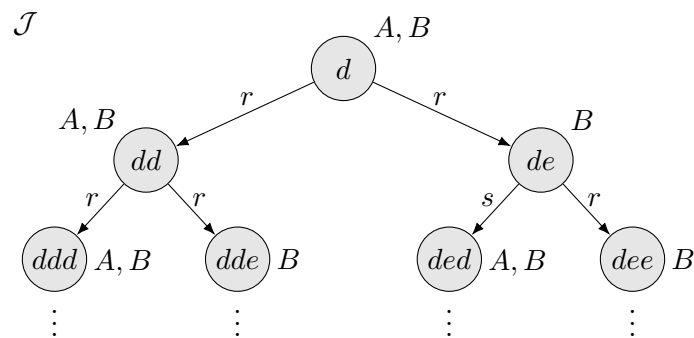
Wir betrachten folgende Interpretation \mathcal{I} .



Dann gibt es beispielsweise folgende d -Pfade:

- $\rho = ddedee$ mit $\text{end}(\rho) = e$
- $\rho' = deeed$ mit $\text{end}(\rho') = d$

Das Unravelling von \mathcal{I} an Stelle d gemäß Definition 3.7 ist folgende Interpretation \mathcal{J} .



T3.6 Beweis des Unravelling-Lemmas

Lemma 3.8 Für alle \mathcal{ALC} -Konzepte C und alle $p \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gilt:

$$\text{end}(p) \in C^{\mathcal{I}} \quad \text{gdw.} \quad p \in C^{\mathcal{J}}$$

Beweis. Mit dem Bisimulationstheorem (Theorem 3.2) genügt es zu zeigen, dass $\text{end}(p)$ und p bisimilar sind, d. h. $(\mathcal{I}, \text{end}(p)) \sim (\mathcal{J}, p)$. Siehe dazu Lemma 3.22 in [BHLS17].

T3.7 Beweis der Baummodelleigenschaft von \mathcal{ALC}

Theorem 3.6 Wenn ein \mathcal{ALC} -Konzept C bezüglich einer \mathcal{ALC} -TBox \mathcal{T} erfüllbar ist, dann haben C und \mathcal{T} ein gemeinsames Baummodell \mathcal{I} .

Beweis. Siehe Theorem 3.24 in [BHLS17].

T3.8 Gegenbeispiel für Rückrichtung Bisimulationstheorem

Behauptung. Es gibt Interpretationen \mathcal{I} und \mathcal{J} und $d \in \mathcal{I}$, $e \in \mathcal{J}$, so dass

- (i) $d \in C^{\mathcal{I}}$ gdw. $e \in C^{\mathcal{J}}$ für alle \mathcal{ALC} -Konzepte C ,
- (ii) aber $(\mathcal{I}, d) \not\sim (\mathcal{J}, e)$.

Beweis. Betrachte die folgenden Interpretationen \mathcal{I} und \mathcal{J} .

... Bild folgt ...

Es gilt (ii): versucht man, eine Bisimulation ρ mit $d \rho e$ zu konstruieren, so benötigt man wegen $(e, e') \in r^{\mathcal{I}}$ einen r -Nachfolger d' von d mit $d' \rho e'$. Da jeder r -Nachfolger von d aber nur endlich viele weitere Nachfolger hat, kann man wegen des unendlichen r -Pfads unterhalb von e' irgendwann nicht mehr Bedingung (3) von Bisimulationen gewährleisten.

Außerdem kann man mittels struktureller Induktion zeigen, dass (i) gilt. \square

T3.9 Beispiel für Teilkonzepte

Sei $C = \forall r. \exists r. (A \sqcap B)$. Dann ist $\text{sub}(C) = \{A, B, A \sqcap B, \exists r. (A \sqcap B), \forall r. \exists r. (A \sqcap B)\}$.

Sei $\mathcal{T} = \{A \sqsubseteq \exists r. B, \forall r. B \sqsubseteq A\}$. Dann ist $\text{sub}(\mathcal{T}) = \{A, B, \exists r. B, \forall r. B\}$.

T3.10 Beispiel für Typen und Filtration

Seien $C = A \sqcap B$ und $\mathcal{T} = \{A \sqsubseteq \exists r.A\}$. Dann ist $\text{sub}(C, \mathcal{T}) = \{A, B, A \sqcap B, \exists r.A\}$.

Wir betrachten die folgende Interpretation \mathcal{I} .



Dann gilt für d und die vier Teilkonzepte in $\text{sub}(C, \mathcal{T})$: $d \in A^{\mathcal{I}}$, $d \notin B^{\mathcal{I}}$, $d \notin (A \sqcap B)^{\mathcal{I}}$ und $d \in (\exists r.A)^{\mathcal{I}}$. Also ist

$$t_{\mathcal{I}}(d) = \{A, \exists r.A\}.$$

Analog erhält man:

$$t_{\mathcal{I}}(e) = \{A, \exists r.A\} \quad t_{\mathcal{I}}(f) = \{A, B, A \sqcap B, \exists r.A\} \quad t_{\mathcal{I}}(g) = \{A, \exists r.A\}$$

Es gilt also $d \simeq e \simeq g \not\simeq f$, und somit gibt es zwei Äquivalenzklassen bezüglich \simeq :

$$[d] = \{d, e, g\} \quad [f] = \{f\}$$

Die Filtration von \mathcal{I} bezüglich C und \mathcal{T} gemäß Definition 3.17 ist dann folgende Interpretation \mathcal{J} .



T3.11 Beweis des Filtrationstheorems

Theorem 3.17 Sei \mathcal{I} ein Modell von C und \mathcal{T} , und sei \mathcal{J} die Filtration von \mathcal{I} bezüglich C und \mathcal{T} . Dann ist auch \mathcal{J} ein Modell von C und \mathcal{T} .

Beweis. Wir verwenden die folgende Hilfsaussage.

$$\text{Für alle } d \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ und } D \in \text{sub}(C, \mathcal{T}) \text{ gilt: } d \in D^{\mathcal{I}} \quad \text{gdw.} \quad [d] \in D^{\mathcal{J}}$$

Für den Beweis dieser Hilfsaussage siehe Lemma 3.15 in [BHLS17].

Da \mathcal{I} ein Modell von C und \mathcal{T} ist, gibt es ein Element $d \in C^{\mathcal{I}}$. Mit der Hilfsaussage folgt $[d] \in C^{\mathcal{J}}$; somit ist \mathcal{J} ein Modell von C .

Um zu zeigen, dass \mathcal{J} auch ein Modell von \mathcal{T} ist, betrachten wir eine beliebige Konzeptinklusion $D \sqsubseteq E \in \mathcal{T}$ und eine beliebige Instanz $[d] \in D^{\mathcal{J}}$. Mit der Hilfsaussage folgt $d \in D^{\mathcal{I}}$; also $d \in E^{\mathcal{I}}$ (da \mathcal{T} Modell von \mathcal{I} ist); also mit der Hilfsaussage $[d] \in E^{\mathcal{J}}$. \square

T3.12 \mathcal{ALCQI} hat nicht die endliche Modelleigenschaft

Betrachte die TBox $\mathcal{T} = \{(1) \top \sqsubseteq \exists r. \neg A, (2) \top \sqsubseteq (\leq 1 r^-. \top)\}$. Dann hat der Konzeptname A bezüglich \mathcal{T} nur *unendliche Modelle*:

Sei \mathcal{I} ein Modell von A und \mathcal{T} und $d_0 \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Wir müssen zeigen, dass $|\Delta^{\mathcal{I}}| = \infty$.

Da \mathcal{I} Modell von \mathcal{T} ist, muss es wegen (1) einen r -Nachfolger d_1 von d_0 geben mit $d_1 \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$. Da $d_0 \in A^{\mathcal{I}}$, muss $d_1 \neq d_0$ gelten.

Wegen (1) muss es wiederum einen r -Nachfolger d_2 von d_1 geben mit $d_2 \in (\neg A)^{\mathcal{I}}$. Wie im vorigen Fall muss $d_1 \neq d_0$ gelten. Außerdem muss $d_2 \neq d_1$ gelten, da sonst d_1 zwei r -Vorgänger hätte (d_0 und d_1) und dann (2) verletzt wäre.

Dieses Argument kann man so fortsetzen und immer wieder die Existenz eines neuen Elements d_{i+1} folgern, dass verschieden von allen d_0, \dots, d_i sein muss. Deshalb muss $\Delta^{\mathcal{I}}$ unendlich sein.

T3.13 Anzahl der Interpretationen der Größe $\leq 2^n$

Behauptung. Sei $n = |C| + |\mathcal{T}|$. Dann gibt es höchstens $2^{2^{5n}}$ Interpretationen \mathcal{I} mit $|\Delta^{\mathcal{I}}| \leq 2^n$.

Beweis. Zunächst betrachten wir die Anzahl aller Interpretationen \mathcal{I} mit $|\Delta^{\mathcal{I}}| = 2^n$.

Jedes Element $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ kann in $A^{\mathcal{I}}$ sein oder nicht, für jeden der $\leq n$ Konzeptnamen A in $\text{sub}(C, \mathcal{T})$. Also gibt es $2^{2^n \cdot n}$ Möglichkeiten für die Extensionen der Konzeptnamen in C und \mathcal{T} .

Jedes Paar von Elementen $(d, e) \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$ kann in $r^{\mathcal{I}}$ sein oder nicht, für jeden der $\leq n$ Rollennamen r in $\text{sub}(C, \mathcal{T})$. Also gibt es $2^{2^n \cdot 2^n \cdot n}$ Möglichkeiten für die Extensionen der Rollennamen in C und \mathcal{T} .

Die Gesamtzahl der möglichen Extensionen aller Konzept- und Rollennamen in C und \mathcal{T} ist dann das Produkt dieser beiden Zahlen, also:

$$\begin{aligned} 2^{2^n \cdot n} \cdot 2^{2^n \cdot 2^n \cdot n} &= 2^{2^n \cdot n + 2^{2^n} \cdot n} \\ &\leq 2^{2^{2^n} + 2^{3n}} \\ &\leq 2^{2 \cdot 2^{3n}} \\ &= 2^{2^{3n+1}} \\ &\leq 2^{2^{4n}} \end{aligned}$$

Betrachtet man nun die Anzahl der Interpretationen \mathcal{I} mit $|\Delta^{\mathcal{I}}| \leq 2^n$, dann sind dies maximal $2^n \cdot 2^{2^{4n}} = 2^{2^{4n} + n} \leq 2^{2^{5n}}$. \square

Teil 4

Tableau-Algorithmen

T4.1 Umwandlung in NNF

Lemma 4.2. Jedes Konzept kann in Linearzeit in ein äquivalentes Konzept in NNF umgewandelt werden.

Beweis. Dies geschieht durch erschöpfendes Anwenden folgender Regeln.

- Auflösen doppelter Negation: ersetze $\neg\neg C$ durch C
- de Morgan: ersetze $\neg(C \sqcap D)$ durch $\neg C \sqcup \neg D$; ersetze $\neg(C \sqcup D)$ durch $\neg C \sqcap \neg D$
- Dualität von \exists und \forall : ersetze $\neg\exists r.C$ durch $\forall r.\neg C$; ersetze $\neg\forall r.C$ durch $\exists r.\neg C$

Jede Regelanwendung ist äquivalenzerhaltend und schiebt die entsprechende Negation weiter nach innen (oder löst sie auf).

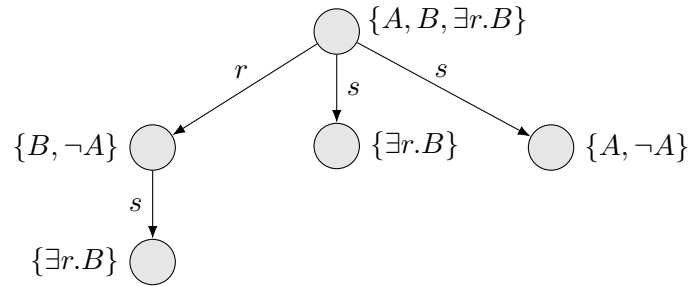
Man kann zeigen, dass linear viele Regelanwendungen ausreichen. \square

T4.2 Beispiel I-Baum

Sei $C_0 = A \sqcap \forall r.(\neg A \sqcap \exists r.B)$.

Dann ist $\text{sub}(C_0) = \{A, B, \neg A, \exists r.B, \neg A \sqcap \exists r.B, \forall r.(\neg A \sqcap \exists r.B), C_0\}$.

Der folgende Baum ist ein I-Baum für C_0 .



Beachte, dass die Knotenbeschriftung im Allgemeinen nicht der Semantik genügen muss; die Tableau-Regeln werden jedoch dafür sorgen, dass sie das (größtenteils) tut.

T4.3 Beispiel Tableau-Algorithmus

Sei $C_0 = (\exists r.A \sqcap \exists r.\neg A) \sqcap (\forall r.A \sqcup \forall r.B)$. Im Folgenden ist ein möglicher² Lauf des Tableau-Algorithmus auf C_0 angegeben. Nach den ersten drei Schritten liefert dieser folgendes Zwischenergebnis:

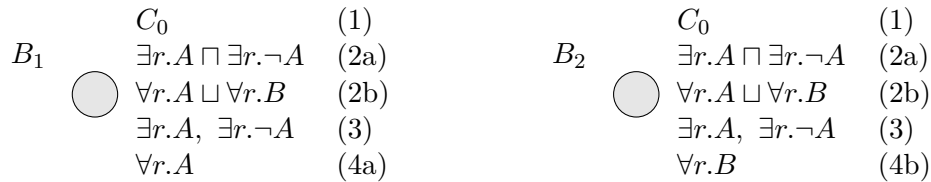
	C_0	(1)
\circ	$\exists r.A \sqcap \exists r.\neg A$	(2a)
	$\forall r.A \sqcup \forall r.B$	(2b)
	$\exists r.A, \exists r.\neg A$	(3)

²Da die Reihenfolge der Regelanwendungen nicht festgelegt ist, gibt es im Allgemeinen mehrere Läufe. Das Ergebnis (Menge der vollständigen I-Bäume) ist jedoch nicht von der Reihenfolge abhängig.

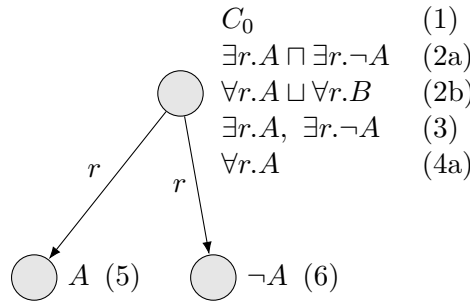
Dabei wurden folgende Regeln angewendet.

- (1) initialer Baum B_{ini}
- (2a), (2b) \sqcap -Regel auf (1)
- (3) \sqcap -Regel auf (2a)

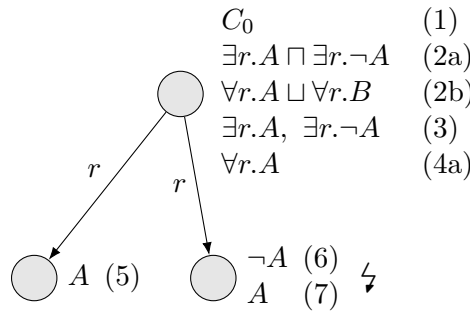
Als nächstes wenden wir die \sqcup -Regel auf $\forall r.A \sqcup \forall r.B$ (2b) an. Dadurch erhalten wir zwei I-Bäume B_1 und B_2 :



In B_1 lässt sich die \exists -Regel auf die beiden Konzepte in (3) anwenden, wodurch jeweils ein neuer r -Nachfolger des Wurzelknotens erzeugt wird:



Nun lässt sich die \forall -Regel auf (4a) und den rechten Nachfolger anwenden (der linke ist bereits mit A beschriftet), und wir erhalten:



Dieser I-Baum ist vollständig (denn es ist keine weitere Regel anwendbar), und er enthält einen offensichtlichen Widerspruch wegen (6) und (7) – ab jetzt immer mit dem Symbol ⚡ gekennzeichnet.

Schließlich wenden wir in B_2 dieselben Regeln an und erhalten folgenden I-Baum:



Es wurden also folgende Regeln angewendet:

- (8) \exists -Regel auf $\exists r.A$ (3)
- (9) \exists -Regel auf $\exists r.\neg A$ (3)
- (10) \forall -Regel auf (4b) und linken r -Nachfolger
- (11) \forall -Regel auf (4b) und rechten r -Nachfolger

Dieser Baum ist vollständig, enthält aber *keinen* offensichtlichen Widerspruch. Somit gibt der Algorithmus auf der Eingabe C_0 „erfüllbar“ zurück.

T4.4 Verzweigungsgrad der I-Bäume

Behauptung 1. Es werden nur I-Bäume mit einem Verzweigungsgrad von maximal $|C_0|$ generiert.

Beweis. Nur die \exists -Regel generiert Nachfolgerknoten, und zwar höchstens einen pro Konzept $\exists r.C$ in $\text{sub}(C_0)$. Nach Lemma 3.13 ist aber $|\text{sub}(C_0)| \leq C_0$. \square

T4.5 Tiefe der I-Bäume

Behauptung 2. Es werden nur I-Bäume mit einer Tiefe von maximal $|C_0|$ generiert.

Beweis. Dazu genügt es, folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung 2a. Wenn v ein Knoten mit Tiefe i ist, dann gilt für alle $C \in \mathcal{L}(v)$:

$$\text{rd}(C) \leq \text{rd}(C_0) - i \quad ((*))$$

Dabei zählen wir die Tiefe eines Knotens beginnend von der Wurzel, welche die Tiefe 0 hat. Behauptung 2a besagt also, dass die Rollentiefe der Konzepte in den Knotenbeschriftungen mit der Tiefe eines Knotens abnimmt.

Es ist leicht zu sehen, dass die gewünschte Behauptung 2 bereits aus Behauptung 2a folgt: Wegen der Tableau-Regeln ist jeder Knoten mit mindestens einem Konzept beschriftet

(der initiale Knoten mit C_0 und alle weiteren Knoten mit dem C aus der \exists -Regel). Wenn ein generierter I-Baum also eine Tiefe $k > |C_0|$ hätte, dann gäbe es einen Knoten v der Tiefe k und in dessen Beschriftung $\mathcal{L}(v)$ ein Konzept C . Wegen Behauptung 2a wäre dann aber $\text{rd}(C) < 0$, was nicht möglich ist.

Beweis von Behauptung 2a. Wir verwenden Induktion über die Anzahl der Regelnwendungen.

Induktionsanfang. Nach 0 Regelnwendungen gibt es nur den initialen Knoten v_{ini} mit $\mathcal{L}(v_{\text{ini}}) = \{C_0\}$. Ungleichung (*) folgt, da $i = 0$.

Induktionsschritt. Hier unterscheiden wir vier Fälle nach der Regel, durch deren Anwendung das Konzept C zur Knotenbeschriftung $\mathcal{L}(v)$ hinzugefügt wurde.

\sqcap -Regel. Vor der Anwendung der Regel gab es ein Konzept $C \sqcap D \in \mathcal{L}(v)$, und durch die Anwendung wurden C und D zu $\mathcal{L}(v)$ hinzugefügt. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\text{rd}(C \sqcap D) \leq \text{rd}(C_0) - i$, also auch $\text{rd}(C) \leq \text{rd}(C_0) - i$ wegen $C \leq \text{rd}(C \sqcap D)$. Analog für $\text{rd}(D)$.

\sqcup -Regel. Analog (probiert es selbst aus).

\exists -Regel. Vor der Anwendung der Regel gab es einen Vorgängerknoten v' von v mit $\exists r.C \in \mathcal{L}(v')$, und durch die Anwendung wurde (v', r, v) zu E hinzugefügt und $\mathcal{L}(v) = \{C\}$ gesetzt. Nun gilt:

$$\begin{aligned} \text{rd}(C) &= \text{rd}(\exists r.C) - 1 && \text{(Definition rd)} \\ &\leq \left(\text{rd}(C_0) - (i - 1) \right) - 1 && \text{(Induktionsvorauss.; } v' \text{ hat Tiefe } i - 1) \\ &= \text{rd}(C_0) - i \end{aligned}$$

\forall -Regel. Ähnlich (probiert es selbst aus). □

T4.6 Anzahl der Regelnwendungen pro I-Baum

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass für $k := |C_0|$ gilt:

$$k^k \cdot k \leq 2^{2k^2}$$

Das kann man wie folgt sehen:

$$\begin{aligned} k^k \cdot k &= k^{k+1} && \text{(Potenzgesetze)} \\ &\leq k^{2k} && \text{(da } k \leq 1) \\ &= (2^{\log k})^{2k} && \text{(Definition Zweierlogarithmus log)} \\ &= 2^{\log k \cdot 2k} && \text{(Potenzgesetze)} \\ &\leq 2^{k \cdot 2k} && \text{(da } \log(k) \leq k) \\ &= 2^{2k^2} \end{aligned}$$

□

T4.7 Letzter Schritt im Terminierungsbeweis

Wir ordnen jeder Menge M_i von I-Bäumen eine Multimenge MM_i wie folgt zu: Für jeden Baum $B \in M_i$ enthält MM_i die Zahl

$m(B) = „n$ minus die Anzahl j der Regelanwendungen, mittels derer B generiert wurde“.

Somit ist MM_i eine Multimenge über der Grundmenge \mathbb{N} . Da $<$ auf \mathbb{N} wohlfundiert ist, ist mit Theorem 4.7 auch $<_{\text{mul}}$ auf $MM(\mathbb{N})$ wohlfundiert. Außerdem gilt $MM_i <_{\text{mul}} MM_{i+1}$ für jedes $i \geq 0$, denn mit jeder Regelanwendung wird in M_i ein I-Baum durch maximal zwei I-Bäume B_1, B_2 ersetzt mit $m(B_1), m(B_2) < m(B)$; somit erhält man MM_{i+1} aus MM_i , indem man $m(B)$ durch die kleineren Zahlen $m(B_1), m(B_2)$ ersetzt.

Wegen der Wohlfundiertheit von $<_{\text{mul}}$ und der Beobachtung $MM_i <_{\text{mul}} MM_{i+1}$ muss die Folge der MM_i endlich sein. \square

Teil 5

Komplexität

Teil 6

Effiziente Beschreibungslogiken

Teil 7

ABoxen und Anfragebeantwortung

Literaturverzeichnis

- [BHLS17] Baader, Franz, Ian Horrocks, Carsten Lutz und Uli Sattler: *An Introduction to Description Logic*. Cambridge University Press, 2017. <https://tinyurl.com/suub-intro-dl-ebook>.