Statiske Spil med Komplet Information

Anders Munk-Nielsen

Blok 4, 2022

Overordnet

- **Forelæser:** Anders Munk-Nielsen
  - Adjunkt på Økonomisk Institut, KU
  - anders.munk-nielsen@econ.ku.dk
  - Kontor: 25.1.15 på CSS
- **Forskningsinteresser:**
  - Empirisk konkurrenceøkonomi (IO)
  - Bilmarkedet, medicinmarkedet, indkomstprocesser.
  - Strukturel mikroøkonometri
- **Instruktorer:** Ernst og Omar.

Praktisk

- **Forelæsninger:** Man/fredag 10–12, tirsdag 13–15.
- **Plan:** Se Absalon. Tjek før alle forelæsninger.
- **Øvelser:** Man/fredag 10–12, tirsdag 15–17.
  - Opgaver lægges på Absalon til hver uge.
  - Nogle uger kun to øvelser.
- **2 obligatoriske opgaver:**
  - Kan afleveres i grupper (op til 4 studerende)
  - Meget eksamensrelevante opgaver
  - Afleveringsdatoer: 20. maj og 6. juni

Praktisk

- **Flytninger/aflysninger:** Se Absalon. Bl.a. store bededag på fredag.
- **Slåfejl i slides?** Muligt – spørg!
  - Kommentér endelig til forelæsningerne
- **Formål med slides:** Udgangspunkt for egne noter, ikke færdige dokumenter!
- **Stil spørgsmål!!** Du er forvirret $\Rightarrow \exists$ forvirret studerende $\neq$ dig.
- **Forberedelse:** Læs, men læs *aktivt* og prioriterende!
- **Eksamen:** Arbejdes løbende på de elementer, der skal indgå!
- **Anbefaling:** Udvikl løbende på en kodebase

Mikrooverblik

- **Mikro A:** Uafhængige agenter, "små" ift. markedet
  - $a_i^* = \arg\max_{a_i} \mathbb{E}[u_i(a)]$: individuel (forventet) nyttemaksimering
  - Markedsprisen løser $\sum_i D(a_i^*, p^*) = \sum_i S(a_i^*, p^*)$: priserne clearer markederne rationel adfærd
- **Mikro B:** Afhængighed mellem agenter
  - $a_i^* = \arg\max_{a_i} \mathbb{E}[u_i(a_i^*, a_{-i}^*)]$
  - Agenternes valg hænger uadskilleligt sammen
  - Sådanne situationer kaldes "strategiske" og modelleres i spilteori

Pensumoverblik

Emne	**Eksamen**
Statiske spil, komplet information	Matrix-spil
Dynamiske spil, komplet information	2-periode spil (fx Stackelberg), tavse karteller
Statiske spil, inkomplet information	Auktioner
Dynamiske spil, inkomplet information	Signaleringsspil (fortolkning + typeopgave)

Eksamen

- Struktur givet på forhånd – specifikke værdier kommer til sidst.
- Take home afleveringer og konkurrencer undervejs vil indgå.
- Udarbejd en kodebase undervejs, som er klar til at køre til eksamen.
- Deltag i konkurrencer og diskutér indsigterne aktivt, så du har noget klogt at sige.

Eksamen

Bruge **algoritmer**, der kan

1. løse **diskrete spil** for Nash ligevægten, eller udnytte ustrategiske spillere
2. finde **prisligevægten** i bilmarkedet i Europa for en vilkårlig producent – både i simultane og sekventielle spil
3. koordinere tavse **karteller** og opnå suprakompetitiv profit
4. byde optimalt i en række **auktionsformater** på vegne af et menneske

Eksamen

- **Opg. 1:** Typeopgaver “i hånden”,
- **Opg. 2:** Matrixspil,
- **Opg. 3:** Priskonkurrence (statisk + gentaget),
- **Opg. 4:** Auktion.

Overblik

	Statisk	**Dynamisk**
Komplet information	Matrix-spil	Sekventielle spil
Inkomplet information	Fx auktioner	Signaleringsspil

Kursets opbygning

	Statisk	Dynamisk
Komplet information	Fx bimatrixspil	Fx Stackelberg, karteller
Inkomplet information	Fx auktioner	Fx signalleringsspil

Algoritmer i kurset

FL	Navn	Strategier	Handlinger	Fuld	Kommentarer
1	Iterated Elimination of Strictly Dominated Strategies	Rene	Diskrete	✓	Fjerner handlinger
2	Brute Force Pure Strategy Nash Search	Rene	Diskrete	✓	Langsom
2	Iterated Best Response	Rene	Kontinuerte	÷	Virker ikke altid
3	2×2 cookbook	Blandede	Diskrete	✓	Løsning "i hånden"
3	Linear Programming	Blandede	Diskrete	÷	Kun sym. nulsumsspil
3	Support Enumeration	Blandede	Diskrete	✓	Langsom
5	Backwards Induction	Begge	Begge	✓	Dynamiske spil
11	Multi-type Bimatrix	Begge	Diskrete	✓	Bayesianske spil
13	2nd to 1st price auction	Rene	Kontinuerte	✓	Auktioner
	Homotopy Method	Blandede	Diskrete	÷	

Løsningskoncepter

FL	Løsningskoncept	Passer til
1	Iterativt Elimineret Ligevægt	Spil med komplet information
2	Nash-ligevægt (NE)	Statiske spil, komplet information
5	Underspilsperfekt Nash-ligevægt (SPNE)	Dynamiske spil, komplet information
11	Bayesiansk Nash-ligevægt (BNE)	Statiske spil, inkomplet information
15	Perfekt Bayesiansk-ligevægt (PBE)	Dynamiske spil, inkomplet information
	Markov Perfekt-ligevægt (MPE)	Dynamiske spil

Koncepter

- **Ligevægt:** Et “stabilt” outcome
  - **SDE:** Strengt dominant ligevægt
  - **NE:** Nash
  - **SPNE:** Underspilsperfekt (*Subgame Perfect*) Nash
  - **BNE:** Bayesiansk Nash (når typer/payoffs er ukendte)
  - **PBE:** Perfekt Bayesiansk Nash (signaler)
  - **MPE:** Markov Perfekt (udelukker signaler)
  - **QRE:** Kvanteligevægt (*Quantal Response Equilibrium*, begrænset rationalitet)
- **Strategier:** Kan være **rene** (*pure*) eller **blandede** (*mixed*)

Algoritmer

- **IESDS:** udelukke “håbløse” strategier
- **Iterated Best Response:** grådig måde at løse for Nash, typisk i rene strategier
- **Backwards Induction:** løser dynamiske spil baglæns, finder SPNE
- **Homotopy Method:** grådig måde at løse for Nash.

Notation

- **Simple spil** består af $G = \left(\{1,2\}, \{S_i\}_{i\in\{1,2\}}, \{u_i\}_{i\in\{1,2\}}\right)$.
  - $\{1,2\}$: spillerne – vi vil fokusere *primært* på 2-personers spil
  - S_i: strategimængden,
  - u^i: payoffs (nyttefunktion eller præferencer, $\succsim^i$).
    - Nogle gange specificeres blot *matricer*
  - Mere avancerede spil har flere detaljer.
- **Mig vs. modspiller:** s_i vil betyde "mig," og s_j "modstanderen" (dvs. $i \neq j$ og $i, j \in \{1,2\}$).

Statiske spil med komplet information

Hvad er et spil?

- **Forrige fag:** *ustrategiske* valgsituationer – “single agent problems”
- **Nu:** *strategiske* valgsituationer – spil.
- **Strategisk:** spillernes payoffs afhænger af de øvrige spilleres beslutninger.

Normalform

Et spil på normalform specificerer

1. **Spillerne**: fx $\{1, 2\}$
2. Mulige **strategier**: fx $S_1 = \{\mathrm{U}, \mathrm{D}\}$ og $S_2 = \{\mathrm{L,R}\}$
3. **Nytter**: fx en nyttefunktion $u_1 : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$

- **Bemærk**: Når S_1 og S_2 er diskrete, så er payoffs uden tab af generalitet givet ved to matricer, fx

$$U_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Normal form

Normal form

Et spil på normal form består af $(N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$, hvor

1. $N = \{1, 2, ..., n\}$ er mængden af spillere,
2. S_i er spiller i's mulige strategier (dvs. handlinger),
3. u_i er payoff-funktionen (eller: nyttefunktionen) for i, $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$, hvor $S \equiv S_1 \times ... \times S_n$

I kurset vil vi møde spil på

- Normalform,
- Udvidet form.

Statiske spil med komplet information

Statisk spil

Et statisk spil er et spil, hvor

1. en *strategi* blot er en *handling*, og
2. hver spiller vælger sin strategi uden at observere de øvrige spilleres.

Komplet information

Et spil har komplet information, hvis hver spiller kender nyttefunktionen for de øvrige spillere.

- **Senere** vil vi se eksempler på spil, der bryder hver af disse betingelser.

Bimatrixform

Eksempel på et spil på bimatrixform

Betragt spillet, $G = \left(\{1,2\}, (\{\mathrm{T},\mathrm{B}\}, \{\mathrm{L},\mathrm{R}\}), \left(u^1, u^2\right)\right)$. Vi skriver payoffs som

$$
\begin{array}{ccc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{\text{Spiller 2}} \\
 & & \multicolumn{1}{c}{\mathrm{L}} & \multicolumn{1}{c}{\mathrm{R}} \\
\cline{3-4}
\text{Spiller 1} & \mathrm{T} & 2{,}2 & 2{,}0 \\
\cline{3-4}
 & \mathrm{B} & 3{,}0 & 0{,}9 \\
\cline{3-4}
\end{array}
$$

hvorved fx forstås $u^1(\mathrm{T},\mathrm{L}) = 2$, $u^1(\mathrm{B},\mathrm{L}) = 3$, $u^2(\mathrm{B},\mathrm{R}) = 9$, osv.

Antagelser

Antagelser

- **"Rationalitet":** Spillerne agerer i egen-interesse, dvs. de vælger den strategi $s_i \in S_i$, der maksimerer $v_i(s_i, s_{-i})$ givet deres forventninger til modstanderne, s_{-i}.
- **"Intelligens":** Spillerne forstår alt omkring spillet, dem selv og deres modstanderes præferencer.
- **Fælles viden:** Alle ved at alle ved at ... alle ved at ovenstående gælder.
- **Selvhåndhævende:** En forudsigelse (eller ligevægt) skal håndhæve sig selv uden brug for ekstern ageren.

Eksempel: "Golden Balls"

- Se "Golden Balls" eksemplet
- Hvilket outcome forventer du?
- Opskriv:
    - Spillere,
    - strategier,
    - payoffs.

Fangernes Dilemma

Vigtige eksempler på spil

Lec #	Navn	Bemærkninger
1	**Fangernes dilemma**	**Nash EQ ej "optimal"**
1	Skønhedskonkurrencen / "gæt 2/3"	K'te ordens rationalitet
	Cournot	Ren, indre Nash EQ
	Bertrand	Ren Nash på randen
	Sten-saks-papir	Ingen Nash i rene strategier
	Bach eller Stravinsky ("Battle of the sexes")	Flere ligevægte
	Bank run	2-stage
	Ultimatumspil	Retfærdighed
	Gentaget ultimatumspil	Baglæns Induktion
	Stackelberg	First-mover fordel
	Gentaget fangernes dilemma	NE spilles i hver periode
	Uendeligt gentaget fangernes dilemma	Grim trigger og tit-for-tat.
	Bach-Stravinsky med ukendte typer	Unik ligevægt
	Cournot med hemmelige omkostninger	Løses eksplicit
	Auktion: 1st price sealed bid	"Bid shading"
	Auktion: 2nd price sealed bid	Nash at byde sandfærdigt!
	Auktion: common value	Vinderens forbandelse
	Bayesianske spil (undercover betjent)	Handlinger som signal
	Signaling på jobmarkedet	Signalværdien i uddannelse

Spil: Fangernes dilemma (Prisonners' dilemma)

Strisserne kom før de ventede dem og fangede to forbrydere. Desværre har politiet kun nok bevismateriale til at dømme for ulovlig besiddelse (1 måned), så de skal bruge en tilståelse. Hvis kun én vidner mod den anden, går vidnet fri som belønning, mens den anden får en hård straf (9 måneder). Hvis begge tilstår, får de 6 måneder.

Fangernes dilemma på normalform

1. **Spillerne:** *Bandit 1* og *Bandit 2*.
2. **Strategier:** $A^1 = A^2 = \{\text{tie}, \text{sladre}\}$.
3. **Payoffs:** Samme nyttefunktion, $u^1 = u^2$ med

$$\begin{aligned} u^1(\text{tie}, \text{tie}) &= -1 & u^1(\text{tie}, \text{sladre}) &= -9 \\ u^1(\text{sladre}, \text{tie}) &= 0 & u^1(\text{sladre}, \text{sladre}) &= -6 \end{aligned}$$

Fangernes dilemma på bimatrixform

		Spiller 2	
		tie	sladre
Spiller 1	tie	?,?	?,?
	sladre	?,?	?,?

Fangernes dilemma på bimatrixform

		Bandit 2: tie	Bandit 2: sladre
Bandit 1	tie	-1,-1	-9,0
	sladre	0,-9	-6,-6

- Hvad er "gode" strategier for Spiller 1?

Fangernes dilemma på bimatrixform

Bandit 2 (columns), Bandit 1 (rows)

	tie	sladre
tie	-1,-1	-9,0
sladre	0,-9	-6,-6

- Hvis 2 spiller tie, så er sladre bedste svar [fordi $0 > -1$]

Fangernes dilemma på bimatrixform

		Bandit 2: tie	Bandit 2: sladre
Bandit 1	tie	-1,-1	-9,0
Bandit 1	sladre	0,-9	-6,-6

- Hvis 2 spiller tie, så er sladre bedste svar.
- Hvis 2 spiller sladre, så er sladre også bedste svar [-6 > -9]
- ⇒ **Konklusion:** Det er bedre at sladre uanset hvad modstanderen gør.
  - Vi siger: "Tie er *strengt domineret* af sladre."

Streng Dominans

Definition 4.1: Streng Dominans

Lad $s_i, s_i' \in S_i$: s_i' er **strengt domineret af** s_i, hvis

$$v_i(s_i, s_{-i}) > v_i(s_i', s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

Vi vil skrive $s_i >_i s_i'$.

- **Påstand 4.1:** Ingen rationel spiller vil nogensinde spille en strengt domineret strategi.
- $\Rightarrow$ Derfor vil vi "slette sådanne" fra strategimængden.

Vigtig indsigt

		Bandit 2	
		tie	sladre
Bandit 1	tie	-1,-1	-9,0
	sladre	0,-9	-6,-6

- **Strategiprofilen** $s = (\text{sladre}, \text{sladre})$ er en **strengt dominant ligevægt**.
  - $\Rightarrow$ særligt stabil form for ligevægt:
  - Kræver kun rationalitet.
- **Paradokset i FD:** Der eksisterer en "bedre situation"
  - **(tie, tie)** er den Pareto-optimale tilstand.
- **Senere** skal vi se på, hvad man "kan gøre" for at opretholde den Pareto-optimale strategiprofil som en ligevægt.
  - Gentagen interaktion og trusler vil spille en rolle.

Løsning på spillet

- **Løsning?** En løsning er et bud på, hvordan spillet vil blive spillet i praksis.
- **Løsningskoncept:** En strengt dominant ligevægt er vores første koncept omkring sådan et bud.
  - Senere: Nash-ligevægten.
- **Godt koncept?**
  - **Antagelser?** Kræver kun rationalitet $\Rightarrow$ meget plausibel.
  - **Generalitet?** Mange spil har ingen sådan ligevægt...

Elimination og IESDS

Rationalitet

- **I FD** var det nemt at se, at rationalitet gav en direkte løsning.
- **I større spil** er det ikke sikkert, vi kan se løsningen "med det samme"
- $\Rightarrow$ Itereret Elimination af Strengt Dominerede Strategier (**IESDS**)
    - Kan finde en "løsning" på flere spil...
    - ... men beror på en antagelse om et højere grad af sofistikation hos spillerne!

Let's play a game

Spil: 3*3 bimatrix

Gå ind på Socrative og vælg din handling som Spiller 1 i flg. spil:

		Spiller 2		
		V	M	H
Spiller 1	O	3,0	2,1	0,0
	M	1,1	1,1	5,0
	N	0,1	4,2	8,1

Algoritme: IESDS

Algoritme: Iterated Elimination of Strictly Dominated Strategies

1. For alle spillere $i \in N$
2. For alle strategier $s_i \in S_i$
3. Hvis $s_i <_i s_i'$ for nogen $s_i' \in S_i$, så slet den fra S_i og fortsæt.
4. Fortsæt så længe mindst én strategi blev fjernet, ellers stop.

Returner mængden af overlevende strategier for hver spiller.

IESDS til undsættelse

		Spiller 2 V	M	H
Spiller 1	O	3,0	2,1	0,0
	M	1,1	1,1	5,0
	N	0,1	4,2	8,1

IESDS til undsættelse

		Spiller 2		
		V	M	H
Spiller 1	O	3,0	2,1	0,0
	M	1,1	1,1	5,0
	N	0,1	4,2	8,1

- Spiller 2: $s_2 = \mathrm{H}$ er strengt domineret af $s_2 = \mathrm{M}$

IESDS til undsættelse

		Spiller 2	
		V	M
Spiller 1	O	3,0	2,1
	M	1,1	1,1
	N	0,1	4,2

- Spiller 2: $s_2 = \text{H}$ er strengt domineret af $s_2 = \text{M}$
- Spiller 1: $s_1 = \text{M}$ er strengt domineret af $s_1 = \text{O}$

IESDS til undsættelse

		Spiller 2	
		V	M
Spiller 1	O	3,0	2,1
	N	0,1	4,2

- Spiller 2: $s_2 = \mathrm{H}$ er strengt domineret af $s_2 = \mathrm{M}$
- Spiller 1: $s_1 = \mathrm{M}$ er strengt domineret af $s_1 = \mathrm{O}$
- Spiller 2: $s_2 = \mathrm{V}$ er strengt domineret af $s_2 = \mathrm{M}$

IESDS til undsættelse

		Spiller 2
		V
Spiller 1	O	3,0
	N	0,1

- Spiller 2: $s_2 = \mathrm{H}$ er strengt domineret af $s_2 = \mathrm{M}$
- Spiller 1: $s_1 = \mathrm{M}$ er strengt domineret af $s_1 = \mathrm{O}$
- Spiller 2: $s_2 = \mathrm{V}$ er strengt domineret af $s_2 = \mathrm{M}$
- Spiller 1: $s_1 = \mathrm{N}$ er strengt domineret af $s_1 = \mathrm{O}$

IESDS til undsættelse

		Spiller 2
		V
Spiller 1	O	3,0

- Spiller 2: $s_2 = \text{H}$ er strengt domineret af $s_2 = \text{M}$
- Spiller 1: $s_1 = \text{M}$ er strengt domineret af $s_1 = \text{O}$
- Spiller 2: $s_2 = \text{V}$ er strengt domineret af $s_2 = \text{M}$
- Spiller 1: $s_1 = \text{N}$ er strengt domineret af $s_1 = \text{O}$
- Ingen dominerede strategier: returner $S' = (S'_1 = \{\text{O}\}, S'_2 = \{\text{V}\})$.

IESDS til undsættelse

- **Resultat:** IESDS resulterede i, at spillet reduceredes til et unikt par af strategier: $s = (O, V)$.
  - Dette er altså et godt bud på en fornuftig "løsning" til spillet.
- **Generelt:** IESDS er en måde at reducere dimensionaliteten af et spil.
  - I skal selv kode algoritmen op og bruge den i det bimatrix-spil, der kommer til eksamen og i aflevering 1.

K’te ordens rationalitet

Spil: Gæt 2/3

Spil: Gæt 2/3 af gennemsnittet

- Gæt et tal i $S_i = [0; 100]$
- Vinderen er de(n), der kommer tættest på at gætte 2/3 af gennemsnittet af alle gæt.

Vigtige eksempler på spil

Lec #	Navn	Bemærkninger
1	Fangernes dilemma	Nash EQ ej "optimal"
1	**Skønhedskonkurrencen / "gæt 2/3"**	**K'te ordens rationalitet**
	Cournot	Ren, indre Nash EQ
	Bertrand	Ren Nash på randen
	Sten-saks-papir	Ingen Nash i rene strategier
	Bach eller Stravinsky ("Battle of the sexes")	Flere ligevægte
	Bank run	2-stage
	Ultimatumspil	Retfærdighed
	Gentaget ultimatumspil	Baglæns Induktion
	Stackelberg	First-mover fordel
	Gentaget fangernes dilemma	NE spilles i hver periode
	Uendeligt gentaget fangernes dilemma	Grim trigger og tit-for-tat.
	Bach-Stravinsky med ukendte typer	Unik ligevægt
	Cournot med hemmelige omkostninger	Løses eksplicit
	Auktion: 1st price sealed bid	"Bid shading"
	Auktion: 2nd price sealed bid	Nash at byde sandfærdigt!
	Auktion: common value	Vinderens forbandelse
	Bayesianske spil (undercover betjent)	Handlinger som signal
	Signaling på jobmarkedet	Signalværdien i uddannelse

Spillet på normalform

1. **Spillerne**: N = de studerende,
2. **Strategierne**: $S_i = [0; 100]$ for alle $i \in N$,
3. **Payoffs**: Lad $\overline{s} := \frac{2}{3}\frac{1}{n}\sum_{i \in N} s_i$. Da er u_i symmetrisk (ens for alle i) med

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } |s_i - \overline{s}| = \min_{j \in N} \left|s_j - \overline{s}\right| \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(dvs. hvis i's gæt er nærmest til 2/3 af gennemsnittet)

Dominerede strategier?

- Er der nogen **dominerede strategier?**
- **Ja:** Fx er 100 domineret
  - $\overline{s}$ maksimeres hvis $s_i = \max_{s \in S_i} s = 100$
  - Da er $\overline{s} = 66\frac{2}{3}$
  - ... dvs. ethvert $s_i > 66\frac{2}{3}$ er strengt domineret.

k'te-ordens rationalitet

Definition: k'te ordens rationalitet

En k'te ordens rationel spiller maksimerer forventet nytte,

$$\max_{s_i \in S_i} \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} w_k(s_{-i}) u(s_i, s_{-i}),$$

hvor $w_k(s_{-i})$ er den subjektive forventning til, at hver strategikombination spilles:

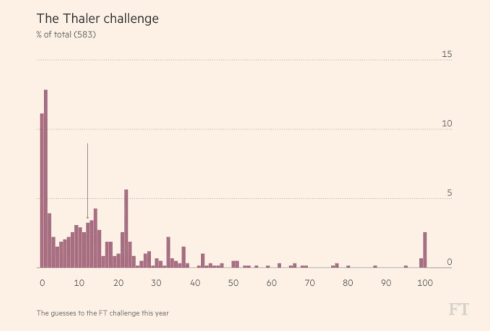
- **1. orden:** forventer at modstandere vælger strategierne tilfældigt med uniform sandsynlighed,
- **2. orden:** forventer at alle modstandere er **1. orden**
- ...
- k**'te orden:** forventer at alle modstandere er $k-1$**'te orden**.

Heuristikker i kurset

FL	Navn	Spil
1	k'th order rationality	Keynes' skønhedskonkurrence
3	Maximin/minimax	2-personers nulsumsspil

Spillet i virkeligheden

- Politiken, 2005: $\bar{s} = 21,6$ ($N = 19.196$)
- Financial Times, 1997: $\bar{s} = 12$ ($N = 583$)



- **Løsning?**
  - Hvad er det "bedste gæt"?
  - Kan alle være (lige) rationelle?

Skønhedskonkurrencen og k'te ordens rationalitet

I spillet "gæt 2/3" fra før

- **1. ordens rationel:** forventer $a^j \in \text{Uniform}(0, 100) \Rightarrow \mathbb{E}(\overline{a}) = 50 \Rightarrow BR = 33\frac{1}{3}$
- **2. ordens rationel:** $w_1(x) = \mathbf{1}\{x = 33\frac{1}{3}\} \Rightarrow BR = 22,2$
- ...
- k**. ordens rationel:** $BR(a^{-i}) = 50 \times (\frac{2}{3})^k$

Konklusion: Hvis alle er "$k = \infty$" rationelle, så vil $BR \to 0$

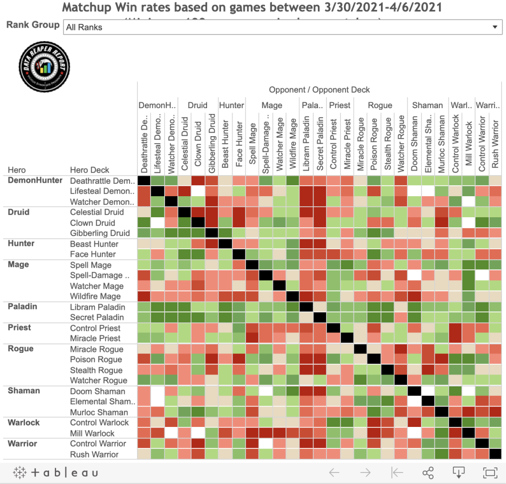
Mere realistiske / empiriske modeller

- **Modellen** ovenfor antager, at alle er ens.
- I virkeligheden kunne der være en **fordeling** af typer
  - Fx 10% type 0, 40% type 1, 20% type 2, 20% type 3.
- **Lad** $w = (0.1, 0.5, 0.2, 0.1, 0, ...)$ være fordelingen af typer.
- Da ville vi observere

$$\bar{s} = 0.1 \times 50 + 0.4 \times 33.3 + 0.2 \times 22.2 + 0.2 \times 14.8 = 25.7$$

  - Dermed er 22.2 det tætteste gæt, så vinderen er: de 2. ordens rationelle!
- I Politiken var gennemsnittet 21.6, og 12 i Financial Times.
  - herudfra kunne man estimere fordelingen af rationalitetsordener i Danmark...
- **Se mere:** `https://youtu.be/agFr_wCzOZg`

Eksempel: Hearthstone



Målet med spilteori

- **Formålet** med spilteori er dels **deskriptivt** og **preskriptivt**.
- **Deskriptivt:** vi ønsker at kunne beskrive spil og ageren i strategiske situationer.
- **Preskriptivt:** vi ønsker at kunne "løse" spil og tale om, hvilken strategi agenter "bør" bruge.

Til næste gang: vælg handling her

		Player 2				
		Run	Hide	Play d.	Fight	Freeze
Player 1	Run	8,2	9,7	5,5	4,6	8,3
	Hide	9,4	1,0	7,6	5,8	4,1
	Play dead	5,4	7,9	2,8	9,6	7,0
	Fight	3,4	9,8	2,2	0,1	6,3
	Freeze	7,4	5,4	3,9	0,4	2,2

Nash-ligevægten

Anders Munk-Nielsen

Blok 4, 2022

Nash-ligevægten (NE)

Nash-ligevægten (NE)

Planen for i dag:

1. **Forstå** Nash-ligevægten (NE),
2. **Argumentere** intuitivt eller formelt-matematisk omkring NE
3. **Beregne** Nash-ligevægten i
   3.1 Diskrete spil: vha. Brute Force-algoritmen,
   3.2 Kontinuerte spil: vha. analytiske eller numeriske Best Response funktioner.

Løsningsmetode

Fra sidst

Player 2 (columns) / Player 1 (rows)

	Run	Hide	Play d.	Fight	Freeze
Run	8,2	9,7	5,5	4,6	8,3
Hide	9,4	1,0	7,6	5,8	4,1
Play dead	5,4	7,9	2,8	9,6	7,0
Fight	3,4	9,8	2,2	0,1	6,3
Freeze	7,4	5,4	3,9	0,4	2,2

Bedste Svar

Definition: Bedste Svar

s_i er et bedste svar til s_{-i}, hvis

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(\tilde{s}_i, s_{-i}) \quad \forall \tilde{s}_i \in S_i.$$

Definition: Bedste Svar Mængden

$$BR_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i | s_i \text{ er et bedste svar til } s_{-i}\}.$$

Bemærk

- $BR_i(s_{-i}) \subset S_i$.
- Hvis det bedste svar er unikt, er $BR_i(s_{-i})$ en *funktion*, ellers kaldes den en *korrespondance*.

Bedste Svar

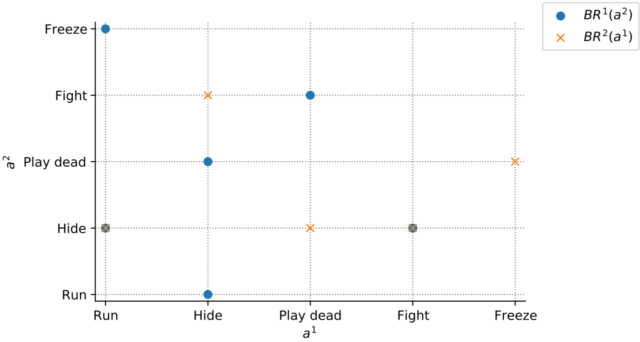
Player 2

Player 1

	Run	Hide	Play d.	Fight	Freeze
Run	8,2	9,7	5,5	4,6	8,3
Hide	9,4	1,0	7,6	5,8	4,1
Play dead	5,4	7,9	2,8	9,6	7,0
Fight	3,4	9,8	2,2	0,1	6,3
Freeze	7,4	5,4	3,9	0,4	2,2

- **Bonus spg.:** Eksisterer der altid et bedste svar i et matrixspil?

Bedste svar



- **Diskuter:** hvad kan vi sige om (Run, Hide) og (Fight, Hide)?

Nash-ligevægten

Definition: Nash-ligevægt

En handlingsvektor, $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ så $s_i^* \in BR_i(s_{-i}^*)$ for alle i kaldes en **Nash-ligevægt**.

- **Nash-ligevægten er** en vektor af strategier. Fx (Hide, Run).
- **Nash-ligevægten er ikke** en vektor af payoffs!

Algoritmer i kurset

FL	Navn	Strategier	Handlinger	Fuld	Kommentarer
1	Iterated Elimination of Strictly Dominated Strategies	Rene	Diskrete	✓	Fjerner handlinger
2	**Brute Force Pure Strategy Nash Search**	**Rene**	**Diskrete**	✓	**Langsom**
2	Iterated Best Response	Rene	Kontinuerte	÷	Virker ikke altid
3	2×2 cookbook	Blandede	Diskrete	✓	Løsning "i hånden"
3	Linear Programming	Blandede	Diskrete	÷	Kun til nulsumsspil
3	Support Enumeration	Blandede	Diskrete	✓	Langsom
	Backwards Induction	Begge	Begge	✓	Dynamiske spil
	Homotopy Method	Blandede	Diskrete	÷	

Algoritme: Brute Force

Algoritme: Brute Force Pure Stratety Nash

Følgende algoritme finder Nash-ligevægte i *rene* strategier for spil med *diskrete* handlinger.

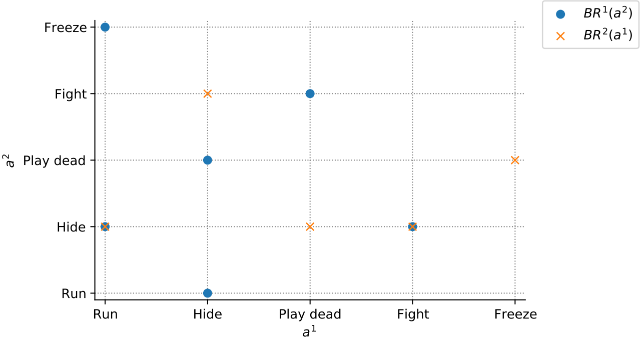
Input: payoff-matricer, $(U_i)_{i \in N}$. Initialisér listen NE.

1. For alle $s = (s_1, ..., s_n) \in S$
2. Hvis $s_i \in BR_i(s_{-i})$ for alle $i \in N$: tilføj s_i til listen NE.

Alternativ strategi:

1. Konstruer $BR_i(s_{-i})$ for alle $i \in N$,
2. Find NE $= \{(s_1, ..., s_n) | s_i \in BR_i(s_{-i}) \forall i\}$ ved at bruge et *inner join*.

Nash-ligevægten grafisk



- Alle punkter, som overlapper.

IESDS vs. Nash

- **Husk:** *Iterated Elimination of Strictly Dominated Strategies (IESDS)*
  - Returnerer en delmængde: IESDS(S) $\subset S$
  - **Dvs.** generelt giver IESDS mange overlevende strategier.
- **Spørgsmål:** er der nogensinde en sammenhæng mellem NE Nash-ligevægten (NE) og IESDS?
  - $\Rightarrow$ ja, hvis IESDS kun efterlader én handling for hver spiller.

IESDS og NE

Resultat: IESDS og Nash

Hvis IESDS eliminerer alle strategier på nær $s^* \equiv (s_1^*, ..., s_n^*)$, så er s^* en Nash-ligevægt.

Bevis ved modstrid for $n = 2$:

- Modstridsantagelse: der findes $\tilde{s} \in S$ så
  1. $\tilde{s}$ er en Nash-ligevægt,
  2. $\tilde{s}$ blev fjernet af IESDS.
- 2 giver, at mindst én i (fx $i = 1$) havde $\hat{s}^1$ så

$$u_1(\hat{s}_1, s_2) > u_1(\tilde{s}_1, s_2) \quad \forall s_2 \in S_2.$$

- $\forall s_2 \in S_2 \Rightarrow$ specifikt for $s_2 = \tilde{s}_2$ (ej fjernet af IESDS)

$$u_1(\hat{s}_1, \tilde{s}_2) > u_1(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2).$$

- Dette er i modstrid med 1. ↯

Vigtige Eksempler

Modeksempel på eksistens

Matching pennies

Dette spil har ingen Nash-ligevægte (i rene strategier): fx er $BR^1(\text{plat}) = \text{krone}$, men $BR^2(\text{krone}) = \text{plat}$ (tjek selv resten).

		Bob	
		plat	krone
Frantz	plat	0,1	1,0
	krone	1,0	0,1

Også et eksempel på *straffespark*.

Modeksempel på unikhed: Koordinationsspil

Bach eller Stravinsky

Begge spillere har en favorit, men kan ikke udstå at være alene. Spillet har to NE: $\{(\text{Bach}, \text{Bach}), (\text{Stravinsky}, \text{Stravinsky})\}$. Spillerne er dog uenige om, hvilken der er bedst.
(også kendt som "*battle of the sexes.*").

		Dengse	
		Bach	Stravinsky
Smagfuld	Bach	2,1	0,0
	Stravinsky	0,0	1,2

- **Udfordringen** er, hvordan spillerne *koordinerer* på hvilken af de to ligevægte, der vælges.

Koordinationsspil med enighed

Hjortejagt (stag hunt)

Også to NE, $\{(\text{hjort}, \text{hjort}), (\text{hare}, \text{hare})\}$, men denne gang foretrækker begge den samme.

		Jørgen	
		Hjort	Hare
Nikolaj	Hjort	3,3	0,2
	Hare	2,0	1,1

- Hvad skal der **ændres**, før *Hjortejagt* bliver til *Fangernes Dilemma*?
- Hvad er **forskellen** ift. Bach-Eller-Stravinsky? (Hint: Pareto-optimalitet?)

Modeksempel på eksistens

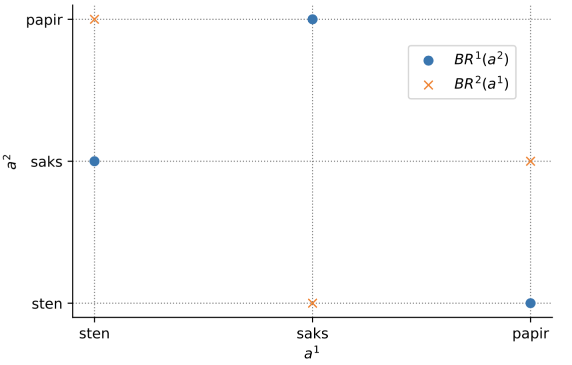
Sten saks papir

r

		Spiller 2		
		sten	saks	papir
Spiller 1	sten	0,0	1,-1	-1,1
	saks	-1,1	0,0	-1,1
	papir	1,-1	-1,1	0,0

- Ingen NE!

Bedste svar i sten-saks-papir



- Hvordan spiller man så?

Spil i kurset

FL	Navn	Bemærkninger
1	Fangernes dilemma	Nash EQ ej "optimal"
1	Skønhedskonkurrencen / "gæt 2/3"	K'te ordens rationalitet
2	**Matching pennies (Anti-koordinationsspil)**	**Ingen NE i rene strategier**
2	**Sten-saks-papir**	**Ingen NE i rene strategier**
2	**Hjortejagt (koordinationsspil)**	**To NE, enighed**
2	**Bach eller Stravinsky ("Battle of the sexes")**	**To NE, uenighed**
2	Cournot	Ren, indre Nash EQ
2	Bertrand	Ren Nash på randen
	Bank run	2-stage
	Ultimatumspil	Retfærdighed
	Gentaget ultimatumspil	Baglæns Induktion
	Stackelberg	First-mover fordel
	Gentaget fangernes dilemma	NE spilles i hver periode
	Uendeligt gentaget fangernes dilemma	Grim trigger og tit-for-tat.
	Bach-Stravinsky med ukendte typer	Unik ligevægt
	Cournot med hemmelige omkostninger	Løses eksplicit
	Auktion: 1st price sealed bid	"Bid shading"
	Auktion: 2nd price sealed bid	Nash at byde sandfærdigt!
	Auktion: common value	Vinderens forbandelse
	Bayesianske spil (undercover betjent)	Handlinger som signal
	Signaling på jobmarkedet	Signalværdien i uddannelse

Cournot

Cournot-konkurrence

Spil: Cournot-konkurrence

To firmaer, $N = \{1, 2\}$, skal vælge udbudte mængder, $q_i \in [0; 1]$.
Marginalomkostningerne er $c_i = c \in [0; 1)$, og efterspørgslen er

$$P = \max(1 - Q, 0), \quad Q \equiv \textstyle\sum_{i \in N} q_i.$$

Payoffs er

$$u_i(q_i, q_j) = (1 - q_i - q_j - c) q_i$$

Bemærkninger:

- **Kontinuerte handlingsrummene,** $S_i = [0; 1]$
  - $\Rightarrow$ … vi kan ikke bare loope over alle strategikombinationer Brute Force virker ikke.
- **Alternativ**: Løse for Best Response analytisk

Best response i Cournot

$$\max_{q_i} (1 - q_i - q_j - c) q_i$$

$$\Rightarrow \text{FOC} : (1 - q_i - q_j - c) - q_i = 0$$

$$\Leftrightarrow q_i = \frac{1 - q_j - c}{2}.$$

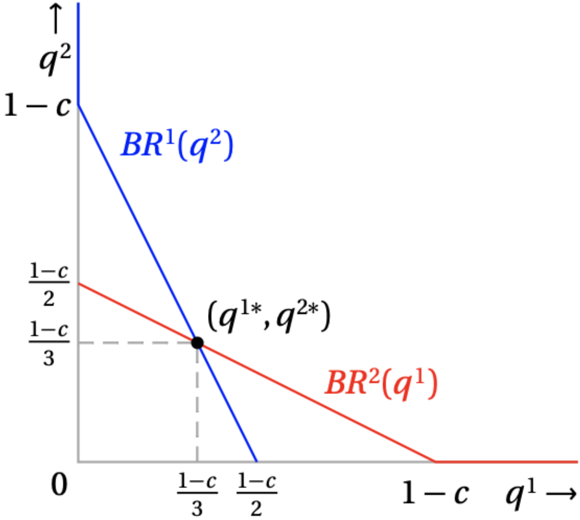
Unik indre løsning + **kontinuert** funktion af q_j

Symmetri giver BR funktionerne

$$\begin{aligned} q_1^* &= \frac{1 - q_2^* - c}{2} \\ q_2^* &= \frac{1 - q_1^* - c}{2}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow BR_i(q_j) = \frac{1 - q_j - c}{2}.$$

Cournot BR: Grafisk



Bemærk: koordineringsfejl

- **Kartellet** ville løse

$$\max_{q_1,q_2} u^1 + u^2 = (1 - q^1 - q^2 - c)q^1 + (1 - q^1 - q^2 - c)q^2.$$

- ækvivalent med $\max_Q (1 - Q - c)Q$, som er **monopolistens** problem med løsning

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1-c}{2}, \\ \Rightarrow q^1 = q^2 &= \frac{1-c}{4}. \end{aligned}$$

- **Kartellet** opnår altså højere profit (tjek det!) ved at sænke produktionen
  - De konkurrerende firmaer er *fristede* til at hæve produktionen
  - Som i fangernes dilemma er Nash-ligevægten fristende, men stiller spillerne dårligere, end hvis de kunne styre hinanden.
  - Jf. OPEC kartellet: aftalte at sænke olieproduktionen.

Spil med kontinuerte handlinger

- **Eksemplet** med Cournot havde
  1. Eksistens af Nash-ligevægt (NE)
  2. Unikhed af NE,
  3. Vi løste for NE ud fra BR-funktioner.
- **Spørgsmål:** hvornår kan vi generalisere dette?
  $\rightarrow$ Proposition 15.1: Spil der
  1. er symmetriske,
  2. har kompakte handlingsmængder,
  3. og hvor BR-funktionerne er kontinuerte
     [antagelse på højt niveau]

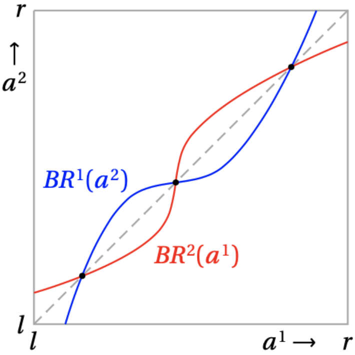
NE med kontinuerte handlinger

Proposition: Eksistens af NE med Kontinuert BR

Lad $G = \left\langle \{1,2\}, (S_i)_{i\in\{1,2\}}, (u_i)_{i\in\{1,2\}} \right\rangle$ være et symmetrisk spil. Antag $S_i \subset \mathbb{R}$ er en kompakt mængde (dvs. $S_i = [l; u]$) samt at $BR_i(s_2)$ er unik og en kontinuert funktion af a^2.
Så eksisterer der $x \in [l; u]$ så x er en Nash-ligevægt.

- **Bevis:** bemærk først at $BR_i : [l; u] \mapsto [l; u]$.
- Definer $g(x) \equiv BR_i(x) - x$, hvor det fordi $BR_i : [l; u] \to [l; u]$ må gælde, at $g(l) \geq 0$ og $g(u) \leq 0$.
- Da g arver kontinuitet fra BR_i, må den krydse $g(x) = 0$ på et tidspunkt.
- Og siden spillet er symmetrisk, må $BR_j = BR_i$. ■

Grafisk bevis for eksistens



- Rød forbinder venstre $\longrightarrow$ højre side, blå forbinder bund $\mapsto$ top.
  - [hvorfor?]
- Umuligt at de ikke krydser, *hvis de er kontinuerte*!
- **Bemærk:** grafen indikerer tre ligevægte, så *ikke* unikhed!

Løsningsmetode for kontinuerte "pæne" spil

Intuitiv opskrift: løsning af kontinuerte spil

1. Konstruer *funktionerne* $BR_1(s_2)$ og $BR_2(s_1)$. Fx ved at løse førsteordensbetingelserne analytisk.
2. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} s_1 &= BR_1(s_2), \\ s_2 &= BR_2(s_1). \end{aligned}$$

- **Bemærk:** Resultatet om eksistens kræver symmetri samt at $BR_i(s_{-i})$ er *unik* $\forall s_{-i}$ (dvs. en funktion) og *kontinuert*.
- **Trin 2:** system af 2 ikke-lineære ligninger i 2 ubekendte
  - Python: `scipy.optimize.fsolve`
- **Problem set 2** opg. 4.

Algoritmer i kurset

FL	Navn	Strategier	Handlinger	Fuld	Kommentarer
1	Iterated Elimination of Strictly Dominated Strategies	Rene	Diskrete	✓	Fjerner handlinger
2	Brute Force Pure Strategy Nash Search	Rene	Diskrete	✓	Langsom
2	**Iterated Best Response**	**Rene**	**Kontinuerte**	÷	**Virker ikke altid**
3	2×2 cookbook	Blandede	Diskrete	✓	Løsning "i hånden"
3	Linear Programming	Blandede	Diskrete	÷	Kun til nulsumsspil
3	Support Enumeration	Blandede	Diskrete	✓	Langsom
	Backwards Induction	Begge	Begge	✓	Dynamiske spil
	Homotopy Method	Blandede	Diskrete	÷	

Iterated Best Response

- **Nogle gange** kan I risikere, at I ikke kan opstille $BR_i(\cdot)$ *analytisk*
  - Fx hvis I kun får $u^1(p^1, p^2)$ som en *numerisk funktion*

Algoritme: Iterativt Bedste Svar

1. Initialisér $s = (s_1, ..., s_n)$
2. For hver spiller i: sæt

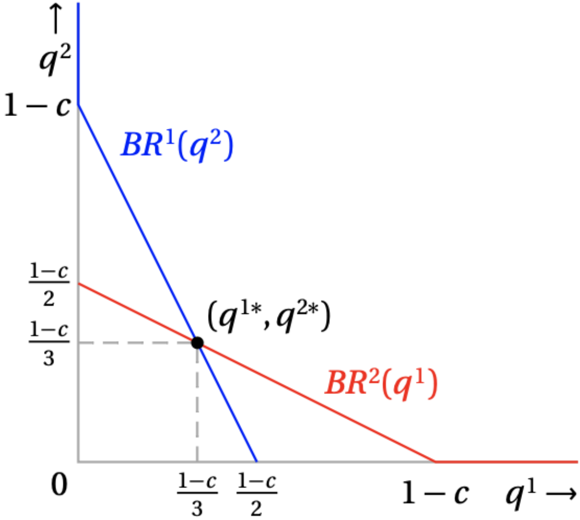
$$s_i := \arg\max_{\tilde{s}_i \in S_i} u_i(\tilde{s}_i, s_{-i}),$$

   maksimeringen kan fx bruge en numerisk optimizer.

3. Stop når ændringerne i handlingerne er "små."

- **Bemærk:** konvergens og NE:
  - $\Rightarrow$ Hvis IBR konvergerer, er det kun en NE, hvis u_i er "pæn." [der kunne være andre løsninger "langt væk"]
  - $\Leftarrow$ Og selv hvis den er, er det ikke sikkert IBR konvergerer til løsningen. [den kan gå i ring]

Iterativt Bedste Svar Grafisk



Bertrand

Spil: Bertrand-konkurrence

To firmaer ($N = \{1, 2\}$) skal vælge en pris, $p_i \in S_i = [0; 1]$, og har marginalomkostninger $c \in [0; 1)$. Kun den billigste sælger noget (de deler ligeligt ved match), og den solgte mængde er

$$Q = \max(0, 1 - p).$$

Dvs. payoffs ($u_i(\cdot) = \pi_i(\cdot)$) er

$$\pi_i(p_i, p_j) = \begin{cases} (p_i - c)\max(0, 1 - p_i) & \text{hvis } p_i < p_j \\ \frac{1}{2}(p_i - c)\max(0, 1 - p_i) & \text{hvis } p_i = p_j \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

- **Påstand:** Den unikke NE er $(p_1, p_2) = (c, c)$.

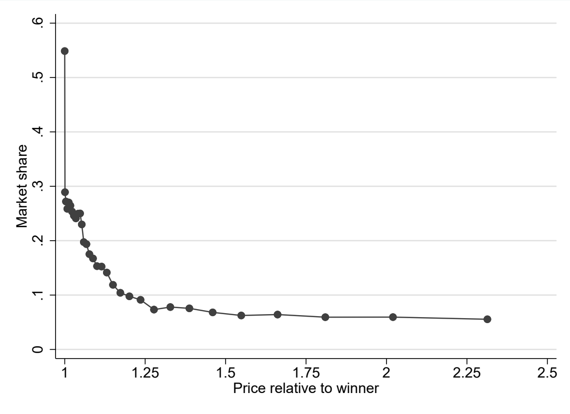
Bevis for Bertrand-ligevægten

- **Påstand:** Den unikke NE er $(p_1, p_2) = (c, c)$.
- **Bevis** for at (p_1, p_2) med $p_1, p_2 > c$ ikke er NE:
  - Antag (p_1, p_2) er en NE med $p_1 > c$ eller $p_2 > c$.
  - Betragt den højestbydende og konstruer en alternativ bedre strategi, hvor hun underbyder.
  - Hvis $p_1 > p_2 > c$, vil $\tilde{p}_1 = p_2 - \epsilon$ (for et mikrolille $\epsilon > 0$) altid dominere.
    - [derefter vil 2 ønske at underbyde, osv.]
- **Bevis** for at (c, c) er en NE).
  - Hvis $p_2 = c$, er $i = 1$ indifferent mellem alle strategier (payoff $= 0$ uanset).
  - Dvs. $c \in BR_1(c)$. Og tilsvarende for $i = 2$.

Bertrand vs. Cournot

- **Nævn** en mere ikonisk duo!
- **Primær forskel:**
  - **Cournot**: varer er differentierede $\Rightarrow$ stjæler "kontinuert"
  - **Bertrand**: varer er identiske (kun pris er forskellig) $\Rightarrow$ stjæler diskontinuert
- **Bemærk:** man kan sagtens have "differentieret Bertrand" – priskonkurrence, hvor man stjæler kontinuert
  - Det vil I møde til hjemmeopgave og eksamen!
- **Mere generelt:** Efterspørgslen er $D_1(p_1, p_2)$ og $D_2(p_1, p_2)$
  - Spørgsmålet er, om der sker noget diskontinuert, når $p^1 = p^2$.

Eksempel fra virkeligheden



- Efterspørgslen efter receptpligtig medicin i Danmark.
- Apotekeren anbefaler den billigste pakning til alle – ca. 25%-point følger blindt anbefalingen (ser det ud til).

Mellem Bertrand og Cournot

- **Stabilitet:** Cournot er mere stabil; Bertrand-ligevægten hviler på indifferencen.
    - Hvis modparten spiller $p^j = c$, så giver alle p_i payoff nul.
- **Lille ændring:** hvad hvis man stadig sælger *lidt* hvis $p_i > p^j$?
- **Varian (1980):** *A model of sales*: der er to slags forbrugere
    - U% er uinformerede, loyale til deres yndlingsbrand
    - I% er informerede og vælger billigst.
- **Efterspørgslen** bliver da

$$D_1(p_1, p_2) = \begin{cases} I + \frac{U}{2} & \text{hvis } p_1 < p_2 \\ \frac{I}{2} + \frac{U}{2} & \text{hvis } p_1 = p_2 \\ \frac{U}{2} & \text{hvis } p_1 > p_2. \end{cases}$$

- **Modellen lukkes** med antagelsen at $p_i \in S_i = [c; \overline{p}]$ [så firmaerne ikke sætter $p_i = \infty$]
- **I Problem set 3** skal I arbejde med denne model.

Auktioner

First-price sealed bid

First-price sealed bid

n bydere trækker deres valuering, v_i, af et gode, der er på auktion. De skal afgive et bud, b_i, og modtager derefter payoff

$$u_i(b_1, ..., b_n) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{hvis } b_i < b_j \forall j \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(idet vi ser bort fra uafgjorte auktioner).

Bemærkninger:

- Der er **mange** NE!
  - Lad $(v_{(1)}, ..., v_{(n)})$ være den sorterede vektor.
  - Da er $b_{(n)} = v_{(n-1)}$ og $b_{(i)} = v_{(i)}$ for $i < n$ (og n vinder over $n-1$).

First-price sealed bid

- **Påstand:** i alle NE for en first-price sealed bid auktion, vil spilleren (n) vinde og betale en pris i intervallet $[v_{(n-1)}; v_{(n)}]$.
- **Bevis trin 1:** spiller (n) vinder.
  - Antag for modstrid, at (j) vinder. Dvs. $b_{(j)} > b_{(n)}$ (for at vinde) og $b_{(j)} < v_{(j)}$ (for at (j) får positiv nytte).
  - Da kunne (n) have spillet enhver $\tilde{b}_{(n)} \in (v_{(j)}; v_{(n)})$ og vundet og samtidig fået positivt payoff. $\lightning$
- **Bevis trin 2:** spiller (n) vinder med $b_{(n)} < v_{(n-1)}$.
  - Siden (n) vinder må $b_{(n-1)} < b_{(n)}$.
  - Da kan spiller $(n-1)$ afvige og byde $\tilde{b}_{(n-1)} \in (b_{(n-1)}; b_{(n)})$ og vinde med positivt payoff. $\lightning$

Second-price sealed bid

Second-price sealed bid

n bydere trækker deres valuering, v_i, af et gode, der er på auktion. De skal afgive et bud, b_i, og modtager derefter payoff

$$u_i(b_1, ..., b_n) = \begin{cases} v_i - \max_{j \neq i} b_j & \text{hvis } b_i < b_j \forall j \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(idet vi ser bort fra uafgjorte auktioner).

- Fx eBay
- SPSB auktioner har næsten altid ligevægten $b_i = v_i$ [truthtelling]

Ligevægt i SPSB

Et lidt uformelt bevis for, at $b_i = v_i$ er en NE.

- **Betragt** strategivektoren b^* hvor $b_i = v_i$.
- **Hvilke afvigelser** kunne i overveje?
- Hvis $v_i < \max_j v_j$ vil i aldrig overbyde $b_{(n)}$, fordi hun så betaler mere end sin valuering
- Hvis $v_i = \max_j v^j$ er der to mulige afvigelser:
  - $\tilde{b}_{(n)} \in (b_{(n-1)}; b_{(n)})$: her vinder hun stadig, men payoff er uændret (betaler $b_{(n-1)}$ uanset)
  - $\tilde{b}_{(n)} < b_{(n-1)}$: nu taber hun og får nul, hvilket er strengt dårligere end udgangspunktet $(u = v_{(n)} - v_{(n-1)})$.

Opsummering

Opsummering

- **Nash-ligevægten:** alle spiller bedste svar på modstandernes strategi.
- **Eksistens:**
  - Bevist for symmetriske spil med kontinuerte og unikke bedste svar.
  - Eksisterer ikke altid for rene strategier...
    - ... men eksisterer altid for blandede! (næste gang)
- **Unikhed:** gælder sjældent! Beregningstungt at verificere generelt.

Modeksempel på eksistens

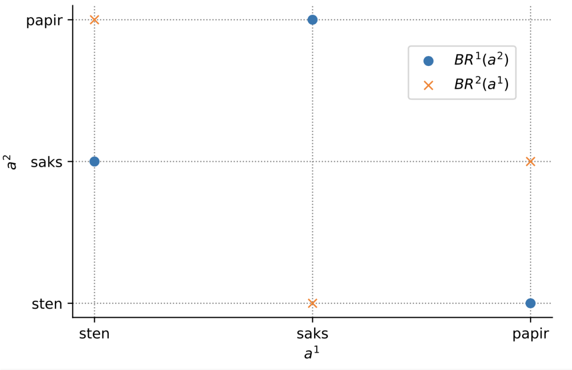
Sten saks papir

Spiller 2 (kolonner), Spiller 1 (rækker)

	sten	saks	papir
sten	0,0	1,-1	-1,1
saks	-1,1	0,0	-1,1
papir	1,-1	-1,1	0,0

- Ingen NE!

Bedste svar i sten-saks-papir



- **I stedet:** Velkendt (?) at man spiller tilfældigt med

$$\Pr(\text{sten}) = \Pr(\text{saks}) = \Pr(\text{papir}) = \frac{1}{3}.$$

Til næste gang

STEN saks papir

		Spiller 2		
		STEN	saks	papir
Spiller 1	STEN	0,0	**2,-2**	-1,1
	saks	**-2,2**	0,0	-1,1
	papir	1,-1	-1,1	0,0

- **Tænk over:** hvad skal sandsynlighedsvægten være på **STEN**?

Blandede Strategier

Anders Munk-Nielsen

Blok 4, 2022

I dag

I dag handler om blandede strategier (kapitel 6).

1. Hvad er *blandede strategier* (en: *mixed strategies*)?
2. Nulsumsspil (*zero sum games*)
3. Algoritme: Løsning for blandede strategier i nulsumsspil
4. Typeopgave: plotte Best Response-grafer i 2×2 spil
5. Algoritme: Løsning for blandede strategier i generelle bimatrix spil
6. Nash's Teorem

Blandede Strategier

Eksempel fra Big Bang Theory

Rock-paper-scissors-lizard-spock

Som Sheldon siger: *"Anecdotal evidence suggests that players familiar with each other will tie 75-80% of the time due to the limited number of options."*

`https://youtu.be/iSHPVCBsnLw?t=23`

Player 1 \ Player 2	Sten	Saks	Papir	Firben	Spock
Sten	0,0	-1,1	1,-1	1,-1	-1,1
Saks	1,-1	0,0	-1,1	-1,1	1,-1
Papir	-1,1	1,-1	0,0	1,-1	-1,1
Firben	-1,1	1,-1	-1,1	0,0	1,-1
Spock	1,-1	-1,1	1,-1	-1,1	0,0

STEN-saks-papir

STEN saks papir

Hvor tit bør man spille STEN her i dette spil?

Player 1 \ Player 2	STEN	saks	papir
STEN	0,0	**2,-2**	-1,1
saks	**-2,2**	0,0	-1,1
papir	1,-1	-1,1	0,0

Blandede strategier: Intuitivt

- Man kan **ikke vinde** i sten-saks-papir, hvis man er forudsigelig!
- $\Rightarrow$ **løsningen** er at vælge en strategi "tilfældigt"
  - I alm. sten-saks-papir vælger man med ssh. $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$
  - ... men i STEN-saks-papir, bør man måske lægge lidt mere vægt på STEN...
    - ... men hvor meget?
    - $\Rightarrow$ det løser vi i dag!

Blandet strategi (en: Mixed Strategy)

Betragt et spil på normalform, $(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$.

Definition: Blandet strategi

En blandet strategi for spiller i er en fordeling over S_i, dvs. det er en vektor af sandsynligheder $\sigma_i \equiv (\sigma_{i1}, ..., \sigma_{iK})$, hvor $K = |S_i|$ er antallet af strategier.

- Hvert element, σ_{ik}, angiver sandsynligheden for at *handlingen* $s_k \in S_i$ vælges af i.

- **Bemærk:** En ren strategi har $\sigma_{ik} = 1$ for ét k.

Notation

- **Enhedssimpleks:** betingelsen om, at σ_i er sandsynligheder, kan skrives
$$\sigma_i \in \Delta^K \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^K \middle| x_k \in [0;1] \wedge \sum_{k=1}^K x_k = 1 \right\},$$
hvor Δ^K kaldes "enhedssimplekset i $\mathbb{R}^K$"
(nogle gange skriver vi Δ (uden top-K) af dovenskab)
    - Bogen skriver ΔS_i som "mængden af mulige sandsynlighedsfordelinger på strategimænden S_i."
- **Handling vs. strategi:** σ_i er en strategi over *handlingerne* $\{s_{i1}, ..., s_{im}\}$.
    - Nogle kalder handlingsrummet $A_i \equiv \{a_{i1}, ..., a_{iK}\}$, og lader $s_i = (s_{i1}, ..., s_{im}) \in \Delta^K$ være strategien (sandsynlighederne, der blandes med).

Forventet Nytte

Definition 6.5: Forventet nytte

- **Ex Ante:** Hvis 1 vælger den blandede strategi $\sigma_1 \in \Delta S_1$ og 2 vælger $\sigma_2 \in \Delta S_2$ (begge er søjlevektorer), så er ex ante forventet nytte

$$\begin{aligned} v_i(\sigma_1, \sigma_2) &= \mathbb{E}_{s_1, s_2}\left[u_1(s_1, s_2)\right] = \sigma_1{}' U_1 \sigma_2 \\ &= \textstyle\sum_{s_1 \in S_1} \sum_{s_2 \in S_2} \sigma_1(s_1)\sigma_2(s_2) u_1(s_1, s_2). \end{aligned}$$

- **Interim:** Hvis 1 vælger handlingen $s_{1m} \in S_1$, og 2 vælger den blandede strategi $\sigma_2 \in \Delta S_2$, så er interim forventet nytte

$$v_i(s_{1m}, \sigma_2) = \mathbb{E}_{s_2}[u_1(s_{1m}, s_2)] = (U_1\sigma_2)_{(m)} = \textstyle\sum_{s_2 \in S_2} \sigma_2(s_2) u_1(s_{1m}, s_2).$$

- **Ex Post:** Hvis 1 vælger handlingen $s_{1m} \in S_1$, og 2 vælger $s_{2\ell} \in S_2$, så er 1's nytte (deterministisk)

$$v_i(s_1, s_2) = u_1(s_{1m}, s_{2\ell}).$$

Flere definitioner

- **Def. 6.2: Støtten** for σ_i: De handlinger, der spilles med strengt positiv sandsynlighed.
- **Def. 6.7: Dominans** defineres ud fra den forventede nytte:
  - $\sigma_i \succ_i \sigma_i'$ hvis $v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) > v_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$ for alle $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$.
- **Def. 6.6: En Nash-ligevægt** er en strategiprofil, $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$, så $\sigma_i^* \in BR_i(\sigma_{-i}^*)$ for alle i, dvs. hvis den maksimerer forventet nytte

$$v_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \quad \forall \sigma_i \in \Delta S_i, \forall i \in N.$$

Hvad vil man blande over?

Proposition 6.1: Nytten af Handlinger i Støtten

Hvis σ^* er en Nash-ligevægt og s_i, s_i' er to handlinger (rene strategier) i støtten for σ_i^*, må de give samme forventet nytte

$$v_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = v_i(s_i', \sigma_{-i}^*) = v_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*).$$

- **Det følger**, at alle handlinger, som der ikke blandes over må give *lavere* forventet nytte.
  - God ting at tjekke! (Kan man evt. kommentere på)

IESDS og Blandede Strategier

- **Resultat:** Der er situationer, hvor
  - Ingen rene strategier er strengt dominerede af en ren strategi,
  - En blandet strategi dominerer en ren strategi.

Eksempel: Blandet Strategi dominerer

Player 2

Player 1		L	C	R
	U	5,1	1,4	1,0
	M	3,2	0,0	3,5
	D	4,3	4,4	0,3

$$\sigma_2 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \Rightarrow \mathbb{E}\left[u_2(\cdot, \sigma_2)\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} > u_2(\cdot, \mathrm{L}).$$

Dvs. $\sigma_2 >_2$ L, men C $\not>_2$ L og R $\not>$ L.

IESDS og Blandede Strategier

- **Faktum:**

$$\sigma_i \text{ er strengt domineret} \Rightarrow \sigma_i \text{ er aldrig et bedste svar.}$$

  - Pr. def. er $\sigma_i \prec_i \sigma_i'$ hvis $v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) < v_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$ *for alle* $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$.
  - Derfor vil σ_i' også være et bedre svar til alle σ_{-i}.
- **Men:** Går det den anden vej? $\Rightarrow$ ja!

Proposition 6.2

I et 2-personers spil er σ_i strengt domineret *hvis og kun hvis* den aldrig er et bedste svar.

- **Definition:** En strategi er **rationaliserbar** (*rationalizable*) hvis den er et bedste svar på en mulig strategi, $\sigma_{-i} \in S_{-i}$.
- $\Rightarrow$ Hvis vi kunne køre IESDS *for blandede strategier*, så ville resultatet være mængden af rationaliserbare strategier.

Kogebog for 2×2

Eksempel: Matching Pennies

Spil: Matching Pennies

		Spiller 2: plat	Spiller 2: krone
Spiller 1	plat	-1,1	1,-1
	krone	1,-1	-1,1

- **Eksempel** på beregning af bedste svar i binært spil
  - Eksamensrelevant – I træner også til øvelser.
- **Kogebog**
  1. Opstil forventede nytte for 1 hvis 2 blander
  2. Beregn nytten ved de rene strategier
  3. Løs for 1's bedste svar

Matching Pennies: kogebog

- **Trin 1:** Spiller 1 antager, at spiller 2 blander med sandsynlighederne

$$\sigma_2 = (q, 1-q) \in \Delta_2$$

	q plat	$1-q$ krone
plat	-1,1	1,-1
krone	1,-1	-1,1

- **Trin 2:** Nytterne er

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u_1(\text{plat}, \sigma_2)] &= q \times -1 + (1-q) \times 1 = 1 - 2q \\ \mathbb{E}[u_1(\text{krone}, \sigma_2)] &= q \times 1 + (1-q) \times -1 = 2q - 1\end{aligned}$$

- **Trin 3:** Find bedste svar, step 1/3

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u_1(\text{plat}, \sigma_2)] &> \mathbb{E}[u_1(\text{krone}, \sigma_2)] \\ \Leftrightarrow 1 - 2q &> 2q - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &> q.\end{aligned}$$

Matching Pennies: Kogebog

- **Trin 3 fortsat:** tilsvarende beregninger for "<" og "=" giver

$$BR_1\left((q, 1-q)\right) = \begin{cases} \text{plat} & \text{hvis } q < \frac{1}{2} \\ \{\text{plat}, \text{krone}\} & \text{hvis } q = \frac{1}{2} \\ \text{krone} & \text{hvis } q > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- **Alternativt trin 3:** I stedet for ulighederne, kan vi gå "mere direkte" til værks
- **Trin 3 (alternativ):** Trin 2 viste

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u_1(\text{plat}, \sigma_2)] &= 1 - 2q \\ \mathbb{E}[u_1(\text{krone}, \sigma_2)] &= 2q - 1 \end{aligned}$$

Hvis Spiller 1 blander med $\sigma_1 = (p, 1-p)$, så skal p vælges så den løser

$$\max_{p \in [0;1]} \mathbb{E}[u_1(\sigma_1, \sigma_2)].$$

Matching Pennies: Kogebog

- **Den forventede nytte** kan splittes op, ide de to spilleres randomisering er uafhængig [den skal jo være uforudsigelig]

$$\mathbb{E}[u_1(a_1, a_2)] = p\mathbb{E}[u_1(\text{plat}, \sigma_2)] + (1-p)\mathbb{E}[u_1(\text{krone}, \sigma_2)].$$

- **Indsættelse** giver, at p skal løse

$$\begin{aligned}
&\max_{p \in [0;1]} p(1-2q) + (1-p)(2q-1) \\
&= \max_{p \in [0;1]} p(2-4q) + 2q - 1.
\end{aligned}$$

- **Lineær form**, $\max_{p \in [0;1]} ap + b$, dvs. løsningen er $p = 1$ når $a > 0$, $p = 0$ når $a < 0$.
  - Men når $a = 0$ opnås max for alle $p \in [0; 1]$
- **Bedste svar** (nu defineret som $BR_i : \Delta_2 \to \Delta_2$)

$$BR_1((q, 1-q)) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } q > \frac{1}{2} \\ [0;1] & \text{hvis } q = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{hvis } q < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Matching Pennies: Spiller 2

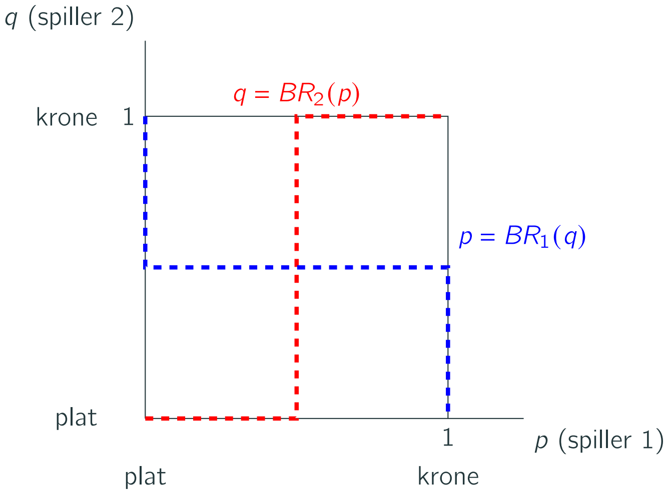
- **Identisk tilgang** for Spiller 2 giver

$$BR_2\Big((p, 1-p)\Big) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } p > \frac{1}{2} \\ [0;1] & \text{hvis } p = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{hvis } p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- **Resultat:** kogebogen har givet os funktionerne $BR_1(q)$ og $BR_2(p)$.
  - **VIGTIGT:** Spiller 2 blander kun, hvis $p = \frac{1}{2}$, og 1 blander kun hvis $q = \frac{1}{2}$!
- **Konklusion:** der er kun én ligevægt i blandede strategier:

$$\text{MSNE} = \Bigg\{\Bigg(\underbrace{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}_{\sigma_1}, \underbrace{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}_{\sigma_2}\Bigg)\Bigg\}.$$

Grafisk illustration



Jeg beklager swastikaen :(

Opsummering

- **I 2×2 spil:** strategivalget $\sigma_i \in \Delta^2$ svarer til at vælge èn kontinuert variabel, $p \in [0;1]$.
  - $\Rightarrow$ vi kan plotte bedste-svar korrespondancen, $BR_1(q)$.
  - **"Korrespondance":** som en "funktion", men den kan returnere en *mængde*
    - Fx $BR_1(\frac{1}{2}) = [0;1]$.
- **Kogebogen** skal I træne til øvelserne og bruge i hjemmeopgave og til eksamen.
  - **I større spil** er $BR_i : \Delta^K \rightarrow \Delta^K$, det er sværere at visualisere.
- **Sprogligt:** $\sigma_1 = (p, 1-p)$ er en (blandet/mikset) *strategi*, som siger, at Spiller 1 med sandsynlighed p spiller *handlingen* "plat," og med sandsynlighed $1-p$ spiller *handlingen* "krone."
  - Strategiparret $\big((p, 1-p), (q, 1-q)\big)$ udgør en *Nash-ligevægt*.

Eksistens af Nash-ligevægt

Nash's Eksistenssætning

Definition: Endeligt spil

Et spil $(N, \{S_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$kaldes *endeligt*, hvis der er endeligt mange spillere med endeligt mange strategier. Dvs. hvis $N = \{1, 2, ..., n\}$ og $S_i = \{a_{i1}, ..., a_{ik}\}$ for $n, k \in \mathbb{N}$.

Teorem (Nash, 1950)

Alle *endelige spil* har mindst én (muligvis blandet) Nash-ligevægt.

Eksempel uden eksistens

- **Nyttigt** at kende teoremets begrænsninger.
- **Antagelser:**
  - Endeligt mange spillere (N)
  - Endelige handlingsmængder (S_i)

Spil: Højeste gæt

To spillere ($N = \{1, 2\}$) skal gætte et naturligt tal ($S_i = \mathbb{N}$, dvs. *ikke endelig*). Den der gættter højest vinder 1 kr., den anden får intet:

$$u_i(a_i, a_j) = \mathbf{1}\{a_i > a_j\}.$$

Eksempel uden NE

- **Påstand:** Der findes ingen rene Nash-ligevægte.
- **Bevis (modstrid):** Lad $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}_2$ være en Nash-ligevægt.
  - Hvis $n_1 \geq n_2$, vil $\tilde{n}_2 := n_1 + 1$ være en profitabel afvigelse for spiller 2.
  - Hvis $n_1 \leq n_2$, vil $\tilde{n}_1 := n_2 + 1$ være en profitabel afvigelse for spiller 1.
  - Ergo vil der altid være mindst én, der vil afvige. $\lightning$
- **Påstand:** Der findes ingen NE i blandede strategier.
- **Bevis trin 1:** Antag der kun blandes over endeligt mange strategier, dvs. $\sigma_j(s_{jk}) > 0$ kun for endeligt mange $k \in \mathbb{N}$.
  - En profitabel afvigelse vil være at spille den rene strategi, som er 1 større end den største handling, modparten blander over.
- **Bevis trin 2:** Antag der blandes over uendeligt mange handlinger.
  - En profitabel afvigelse er at fjerne den mindste handling, der blandes over, og fordele sandsynlighedsmassen over de resterende handlinger. $\blacksquare$

Opsummering: modeksemplet

- **Modeksemplet** brød med antagelsen om *endeligt handlingsrum*.
  - $\Rightarrow$ bedste svar er altid at overbyde ud i det uendelige.
- **På en måde** kan man sige (meget upræcist), at "ligevægten er $s_1 = s_2 = \infty$", ...
  - ... vi tillader bare ikke ∞ som handling, derfor findes den ikke.
  - Handlingsrummet er nemlig $S_i = \mathbb{N}$, og $\infty \notin \mathbb{N}$.

Eksistenssætningen med 2 spillere

- **Betragt** spillet $(\{1,2\},\{S_1,S_2\},\{u_1,u_2\})$, hvor $|S_i| = K_i < \infty$ for $i = 1,2$.
- **Definér** payoff-matricen som U_i, der har det (k,j)'te element $u_i(s_{1k}, s_{2j})$.
- **En Nash-ligevægt** er da et par σ_1, σ_2, så

$$\sigma_1 \in \arg\max_{\sigma \in \Delta^{k_1}} \sigma' U_1 \sigma_2$$

$$\sigma_2 \in \arg\max_{\sigma \in \Delta^{k_2}} \sigma_1{}' U_2 \sigma.$$

  - Med andre ord:

$$\sigma_1 \in BR_1(\sigma_2) \wedge \sigma_2 \in BR_2(\sigma_1).$$

- **Eksistenssætningen** siger altså, at der **altid** findes et sådant par for endelige spil!
  - Der kan sagtens være mange!
- **Til eksamen/hjemmeopgaver:** altid godt at nævne eksistenssætningen, før man går i gang!

Skitse af beviset

- **Teorem:** Ethvert endeligt spil har en Nash-ligevægt.
- **Bevis (skitse):** Betragt en strategi-profil $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in S$.
- **Fiks ide 1/2:** Definer φ_{ik}, mernytten ved at spille $s_{k\,i}$ som *ren* strategi:

$$\varphi_{i,k}(\sigma) = \max\{0, u_i(s_{ik}, \sigma_{-i}) - u_i(\sigma)\}.$$

- **Fiks ide 2/2:** Definer $f : \Delta \longrightarrow \Delta$, hvor $f(\sigma) = \tilde{\sigma}$ med

$$\tilde{\sigma}_{k\,i} = \frac{\sigma_{ik} + \varphi_{i,k}(\sigma)}{\sum_{\ell=1}^{|S_i|} \sigma_{i\ell} + \varphi_{i,\ell}(\sigma)} = \frac{\sigma_{ik} + \varphi_{i,k}(\sigma)}{1 + \sum_{\ell=1}^{|S_i|} \varphi_{i,\ell}(\sigma)}.$$

  - **Intuitivt:** f tager en strategivektor og returnerer en ny, som "forbedrer" hver i's strategi ved at flytte sandsynlighedsmasse i retning af handlinger, der er bedste svar.
- **Da** Δ er *kompakt* of f er *kontinuert*, siger Brouwer's Fikspunktsætning, at den har (mindst) et fikspunkt, $f(\sigma^*) = \sigma^*$.
  - Vi mangler blot at vise, at ethvert fikspunkt til f er en ligevægt.

Skitse af beviset

- **Vi har** defineret $f(\sigma) = \tilde{\sigma}$ så

$$\tilde{\sigma}_{k\,i} = \frac{\sigma_{ik} + \varphi_{i,k}(\sigma)}{1 + \sum_{\ell=1}^{|S_i|} \varphi_{i,\ell}(\sigma)},$$

  og vi ved, at der findes σ^* så $f(\sigma^*) = \sigma^*$.
- **Påstand:** $\sigma \in \Delta$ er NE hvis og kun hvis $f(\sigma) = \sigma$.
- **Bevis, "⇒":** Hvis σ er NE, så er der ingen mernytte ved at vælge *nogen* anden strategi, dvs. $\varphi_{ik}(\sigma) = 0\ \forall i, k$.
- **Bevis, "⇐":** Kort fortalt skal vi blot vise, at der må være et k så $\varphi_{ik}(\sigma) = 0$ (ikke alle rene strategier kan være forbedringer)
  - Men siden σ er et fikspunkt, skal $\tilde{\sigma}_{k\,i} = \sigma_{ik}$,
  - $\Rightarrow$ ergo skal $\varphi_{i\ell}(\sigma) = 0$ for alle ℓ.
  - Og dette skal gælde for alle i. ■

Opsummering på beviset

- **Vores trick** var f, som tager en strategivektor og returnerer en ny,
  - hvor alle i tager et skridt i *retningen* af deres bedste svar
  - (de flytter sandsynlighedsmasse i retning af forbedringer)
  - **Altså:** f er ikke $BR(\cdot)$, fordi $BR(.)$ ikke altid er unik! $f(.)$ er derimod en pæn, kontinuert funktion
    - Den er valgt sådan for at Brouwer's fikspunktsætning kan bruges
- **Ide:** Måske kunne vi bruge f som basis for en algoritme til at finde Nash-ligevægte?
- **Diskuter** med din ven, hvordan algoritmens egenskaber påvirkes, hvis der er
  1. Stabile / ustabile fikspunkter
  2. Multiple ligevægte

Beviset fra Bogen

Teorem (Nash's Eksistenssætning)

Ethvert endeligt spil har en Nash-ligevægt (evt. i blandede strategier).

- **Direkte** iteration på $BR(\sigma) \equiv (BR_1(\sigma_{-1}), ..., BR_n(\sigma_{-n}))$. Dvs. $BR : \Delta S \rightrightarrows \Delta S$.
- **Udfordring:** $BR_i(\sigma_{-i})$ er ikke nødvendigvis *unik*.
  - I Matching Pennies så vi, at

$$BR_1\left((q, 1-q)\right) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } q > \frac{1}{2} \\ [0;1] & \text{hvis } q = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{hvis } q < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- **Løsning:** Kaukatani's Fikspunktssætning – gælder for *korrespondancer*.
- **Nøglen:** Agenten er altid indifferent mellem alle s_{im} i støtten for σ_i.
  - I 2×2: p er enten 0, 1 eller hele $[0;1]$. Ingen andre muligheder.

Nulsumsspil

Definition: Nulsumsspil

Et bimatrix-spil $G = (\{1,2\},(S_1,S_2),(u_1,u_2))$ er et *nulsumsspil*, hvis

$$u_1(s) + u_2(s) = 0 \quad \forall s \in S \equiv S_1 \times S_2.$$

- **Intuitivt:** Alt hvad 1 vinder er på bekosning af 2.
- **Matrix-form:** Hvis U_1, U_2 er payoff-matricerne, er

$$U_2 = -U_1.$$

- **Vigtig** klasse af spil! Kæmpe felt i CS/ECON.
- Kun meningsfuldt for **2 spillere**!

Eksempel: STEN-saks-papir

Spil: STEN saks papir

Dette er et nulsumsspil. [bonus info: det er også symmetrisk]

		Preben 2		
		STEN	saks	papir
Preben 1	STEN	0,0	2,-2	-1,1
	saks	-2,2	0,0	-1,1
	papir	1,-1	-1,1	0,0

Definition 15.5: Strengt kompetitivt spil

Spillet $(\{1,2\},(S_1,S_2),(u_1,u_2))$ kaldes *strengt kompetitivt*, hvis det for alle strategiprofiler a, b gælder:

$$u_1(a) \geq u_1(b) \Leftrightarrow u_2(a) \leq u_2(b).$$

- **Påstand:** $\tilde{u}_2(a) := -u_1(a)$ repræsenterer spiller 2's præferencer.
- **Bevis:** Vi skal vise, at for vilkårlige $a, b \in S$ er

$$\tilde{u}_2(a) \geq \tilde{u}_2(b) \Leftrightarrow u_2(a) \geq u_2(b).$$

  - Indses ved indsættelse og brug af regneregler for uligheder. "■"

Nul- eller konstantsum?

Konstantsumspil

Lad $G = (\{1,2\}, (S_1, S_2), (u_1, u_2))$ være givet. Hvis der findes $k \in \mathbb{R}$ så

$$u_1(a) + u_2(b) = k,$$

så er G ækvivalent med et nulsumsspil.

- **Bevis:** Hvis u_1 repræsenterer 1's præferencer, så vil $\tilde{u}_1(a) := u_1(a) - k$ også repræsentere de samme præferencer.
- **Implikation:** For et spil med payoff-matricerne U_1, U_2:
  - hvis $\texttt{len}(\texttt{unique}(U_1 + U_2)) = 1$, så er det et nulsumsspil.

Maximin

Heurestik: Maximin (rene strategier)

En spiller siges at følge en *maximin* heuristik (tommelfingerregel), hvis vedkommende vælger strategien, som løser

$$\max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u(s_i, s_{-i}).$$

- **Intuitivt:** Personen forestiller sig worst-case outcomes for hver af sine valg, og vælger det bedste worst-case payoff ($\max\min$).

- Se `https://youtu.be/QQHPDLfbIK4` for mere intuition.

Maximin og Nash-ligevægte

Proposition (15.3 i OR): Maximin og Nash-ligevægt

Lad $G = (\{1,2\}, (S_1, S_2), (u_1, u_2))$ være et nulsumsspil.

1. Hvis $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ er en Nash-ligevægt, så gælder:

$$s_1 \text{ løser } \max_{s_1} \left[\min_{s_2} u_1(s_1, s_2) \right],$$

$$s_2 \text{ løser } \max_{s_2} \left[\min_{s_1} u_2(s_1, s_2) \right].$$

2. Hvis G har flere Nash-ligevægte, så er hver spillers payoff det samme i alle ligevægte.
   [det kan godt være systematisk højere for spiller 1 end 2, hvis spillet fx er unfair]

- Beviset er i bogen – ikke pensum.

Maximin: Blandede strategier

- **Med blandede strategier** er spillernes forventede payoffs

$$\text{Spiller 1 løser} : \max_{\sigma_1 \in \Delta} \min_{\sigma_2 \in \Delta} \sigma_1' U_1 \sigma_2$$

$$\text{Spiller 2 løser} : \max_{\sigma_2 \in \Delta} \min_{\sigma_1 \in \Delta} \sigma_1' U_2 \sigma_2.$$

- **Indsigt:** I nulsumsspil er $U_2 = -U_1 := U$. Dvs.

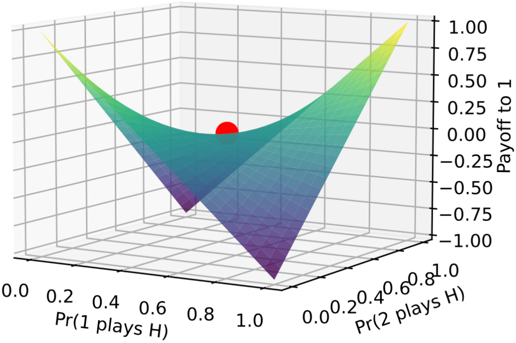
$$\text{Spiller 2 løser} \ : \min_{\sigma_2 \in \Delta} \max_{\sigma_1 \in \Delta} \sigma_1' U \sigma_2.$$

  - **Intuitivt:** Spiller 2 minimerer sandsynligheden for at 1 vinder.
    "Playing to win $\Leftrightarrow$ playing not to lose"

- **Nash-ligevægten** skal opfylde begge ligningerne.

Maximin og Matching Pennies

Figure 1: Matching Pennies: $u_1(\sigma_1, \sigma_2)$



- $z = u_1(\sigma_1, \sigma_2)$, så 1 vil op og 2 vil ned.
- I *saddelpunktet* $\left((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right)$ har begge flad gradient
  - $\Rightarrow$ kan ikke forbedre payoff i nogen retning.

Lineær Programmering

- **Snedig ide:** Lad os prøve at skrive problemerne på en form, så vi kan bruge lineær programmering (LP).
  - Så kan vi bruge efficiente algoritmer.
- **Sandsynlighedsvektorer:** Vi leder efter $\sigma_i \in \Delta S_i$.
  - Hvis $|S_i| = K$, svarer det til

$$\Delta^K \equiv \{x \in \mathbb{R}^K | x \geq 0 \wedge \mathbf{1}'_K x = 1\},$$

hvor $\mathbf{1}_K = (1, 1, ..., 1)'$ $(K \times 1)$.

Minimax-sætningen

Teorem: Minimax-sætningen

For enhver payoff-matrix, U, eksisterer der blandede strategier, $\sigma_1^\star \in \Delta S_1, \sigma_2^\star \in \Delta S_2$, så

$$\max_{\sigma_1} \min_{\sigma_2} \sigma_1' U \sigma_2 = \min_{\sigma_2} \max_{\sigma_1} \sigma_1' U \sigma_2 = \sigma_1^{\star\prime} U \sigma_2^\star.$$

- **Bemærk**: Hvis spillet er symmetrisk, er $\sigma_1^{\star\prime} U \sigma_2^\star = 0$.

Mod LP

- **Problem:** Hverken $\max_{\sigma_1} \min_{\sigma_2} \sigma_1{}' U \sigma_2$ eller $\min_{\sigma_2} \max_{\sigma_1} \sigma_1{}' U \sigma_2$ er på lineær form.
- **Men:** Antag Spiller 1 spiller en ren strategi, som svar på spiller 2's strategi. Så er 2's problem

$$\min_{\sigma_2} \left[\max_{s} U_{(s,:)} \sigma_2 \right] \quad \text{u.b.b. } \underbrace{\mathbf{1}' \sigma_2 = 1 \wedge \sigma_2 \geq \mathbf{0}}_{\text{dvs. } \sigma_2 \in \Delta},$$

  - hvor $U_{(s,:)}$ betyder "s'te række i U",
    - evt. $U_{(s,:)} = \mathrm{e}_s' U$, hvor $\mathrm{e}_s = (0, ..., 1, ..., 0)'$ er den s'te enhedsvektor.
- **En omskrivning** giver 2's problem på formen

$$\begin{aligned} &\min_{\sigma_2} v \\ \text{u.b.b. } & v \geq U_{(s,:)} \sigma_2 \quad \text{for } s = 1, ..., K_1 \\ & \sigma_2 \geq 0 \\ & \mathbf{1}' \sigma_2 = 1 \end{aligned}$$

  - Dette er et lineært problem!

De to lineære problemer

Spiller 1 løser

$$\overline{v} \max_{\sigma_1} v$$
$$\text{u.b.b. } v \leq \sigma_1 U_{(:,s)} \, \forall s$$
$$\sigma_1 \geq 0$$
$$\mathbf{1}'\sigma_1 = 1$$

Spiller 2 løser

$$\underline{v} \min_{\sigma_2} v$$
$$\text{u.b.b. } v \geq U_{(s,:)} \sigma_2 \, \forall s$$
$$\sigma_2 \geq 0$$
$$\mathbf{1}'\sigma_2 = 1$$

- **Minimaxsætningen** siger, at der eksisterer $\sigma_1^\star, \sigma_2^\star$ der løser hvert af disse med fælles værdi

$$\underline{v} = \overline{v} = \sigma_1^{\star\prime} U \sigma_2^\star.$$

- **Implikation:** Så er $(\sigma_1^\star, \sigma_2^\star)$ Nash-ligevægten!

Problemet på LP form

- **Python:** `scipy.optimize.linprog` tager problemer på formen

$$\max_x c'x$$
$$\text{u.b.b. } Ax \leq b$$
$$\tilde{A}x = \tilde{b}$$

- Vi "tænker" på $x = (v, \sigma_{11}, ..., \sigma_{1K})' \in \mathbb{R}^{K+1}$ og skriver

$$c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{K+1\times 1}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -U_{11} & \cdots & -U_{1K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -U_{K1} & \cdots & -U_{KK} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}_{2K\times K+1}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{2K\times 1}$$

$$\tilde{A} = (0, 1, \cdots, 1)_{1\times k+1}, \quad \tilde{b} = 1.$$

Problemet på LP form

- $Ax \leq b$ er to-delt:
  - Top: $v - U\sigma \leq \mathbf{0}$
  - Bund: $0 \cdot v - \mathbf{I}\sigma \leq \mathbf{0} \Leftrightarrow \sigma \geq \mathbf{0}$
- $\tilde{A}x = \tilde{b}$ er en skalar-betingelse:
  - $0 \cdot v + \mathbf{1}'\sigma = 1 \Leftrightarrow \sum_{\ell=1}^{K} \sigma_\ell = 1$
  - Dvs.: sikrer at sandsynlighederne summerer til 1
- **Altså** er problemet vi skal give `linprog` dette

$$
\begin{aligned}
&\max_{\sigma_1} v \\
\text{u.b.b. } & v \leq \sum_{\ell=1}^{K} \sigma_{\ell 1} U_{\ell j} \quad j = 1, ..., K \\
& \sigma_j \geq 0 \quad j = 1, ..., k_1 \\
& \sum_{\ell=1}^{k} \sigma_\ell = 1.
\end{aligned}
$$

Python-kode

```python
from scipy.optimize import linprog

def: solve_by_LP(U):
        num_vars, num_cols = U.shape
        assert num_vars == num_cols # U must be square

        oo = np.zeros((1,num_vars))
        ii = np.ones((1,num_vars))

        # objective: c = [-1, 0, 0, ..., 0]
        c = np.insert(oo, 0, -1.0)

        # inequality constraints: A*x <= b
        top  = np.hstack( (ii.T, -1*U.T) )
        bot  = np.hstack( (oo.T, -1*np.eye(num_vars)) )
        A_ub = np.vstack((top, bot))

        b_ub = np.zeros((1, 2*num_vars))
        b_ub = np.matrix(b_ub)

        # equality contraints: Ax = b
        A_eq = np.matrix(np.hstack((0, np.ones((num_vars,)))))
        b_eq = 1.0 # just one condition so scalar
        sol = linprog(c, A_ub, b_ub, A_eq, b_eq)
        return sol.x[1:]
```

Bemærkninger

- **Lineær Programmering** kan kun bruges for
  - 2-personers spil
  - Symmetriske nulsumsspil
- **Fordel:** LP er “kun” polynomisk tid!
  - Se eksempel i jupyter

Generel løsning

Generel løsningsmetode

- **Betragt** $G = (\{1,2\}, (U_1, U_2))$, hvor U_1 og U_2 er $K_1 \times K_2$ matricer
  - (dvs. $S_1 = \{1, ..., K_1\}$ og $S_2 = \{1, ..., K_2\}$)
- **Metoden** `support_enumeration()` kan løse G for alle blandede Nash-ligevægte.

```
import nashpy
U1 = np.array([[0,-2,1], [1,0,-1], [-1,1,0]])
U2 = -U1 # zero sum symmetric game
G = nashpy.Game(U1, U2) # U1 and U2 are payoff matrices
sol = G.support_enumeration() # returns a generator

# loop through generator, yielding the computation
for s in sol:
        print(s)
# note: now we have exhausted the generator - sol will be empty
```

- **Beregningsmæssig kompleksitet** kommer fra at undersøge alle kombinationer af mulige støtter
  - støtten for σ_i er de handlinger, $s_{\ell i}$, som spilles med positiv sandsynlighed: $\sigma_{\ell i} > 0$.
- **Detaljer** er i Nisan et al. (2007): *Algorithmic Game Theory*. Algorithm 3.4 (p. 56).

Alternative algoritmer

- `nashpy.Game().lemke_hawson_enumeration()`: Ala `support_enumeration()` men søger på en smartere måde gennem mulige kombinationer af "støtten" til ligevægten.
- Homotopi-metoden (fx `gambit-logit`): Iterativ approksimativ metode.
- `nashpy.Game().fictitious_play()`: iterativ simulationsbaseret metode.
  - Spillerne holder styr på de historiske spille-rater og antager, at $\sigma_{ik} =$ andelen af gange, i har spillet $s_{k\,i}$.

Lemke-Howson

For en *given støtte* (*en: support*):

Linear Complementarity Formulation

$$
\begin{aligned}
u_1(s_{1j}, \sigma_2) - r_{1j} &= u_1^* \quad \forall s_{1j} \in S_1 \\
u_2(\sigma_1, s_{2k}) - r_{2k} &= u_2^* \quad \forall s_{2k} \in S_2 \\
\sigma_1 &\in \Delta S_1 \\
\sigma_2 &\in \Delta S_2 \\
r_{1j} &\geq 0 \wedge r_{1j} s_{1j} = 0 \quad \forall j \in \{1, ..., |S_1|\} \\
r_{2k} &\geq 0 \wedge r_{2k} s_{2k} = 0 \quad \forall k \in \{1, ..., |S_2|\}.
\end{aligned}
$$

- r_1, r_2: "slack"-variable
  - Hvis $s_{1j} \in \text{support}(\sigma_1)$, er der ingen slack, dvs. $u_1(s_{1j}, \sigma_2) = u_1^*$ (den rene strategi giver maksimal nytte)
  - Ellers er der slack, og $\sigma_1(s_{1j}) = 0$, men $u_1(s_{1j}, \sigma_2) < u_1^*$.

Dynamiske Spil

Anders Munk-Nielsen

Blok 4, 2021

Introduktion

Overblik

	Statisk	Dynamisk
Komplet information	~~Matrix-spil~~	**Sekventielle spil**
Inkomplet information	Fx auktioner	Signaleringsspil

Hovedpointer fra i dag

- Troværdige trusler
- Backwards Induction
- Den underspilsperfekte Nash-ligevægt (SPNE)

Algoritmer i kurset

FL	Navn	Strategier	Handlinger	Fuld	Kommentarer
1	Iterated Elimination of Strictly Dominated Strategies	Rene	Diskrete	✓	Fjerner handlinger
2	Brute Force Pure Strategy Nash Search	Rene	Diskrete	✓	Langsom
2	Iterated Best Response	Rene	Kontinuerte	÷	Virker ikke altid
3	2×2 cookbook	Blandede	Diskrete	✓	Løsning "i hånden"
3	Linear Programming	Blandede	Diskrete	÷	Kun sym. nulsumsspil
3	Support Enumeration	Blandede	Diskrete	✓	Langsom
5	**Backwards Induction**	**Begge**	**Begge**	✓	**Dynamiske spil**
11	Multi-type Bimatrix	Begge	Diskrete	✓	Bayesianske spil
13	2nd to 1st price auction	Rene	Kontinuerte	✓	Auktioner
	Homotopy Method	Blandede	Diskrete	÷	

K1: Skønhedskonkurrencen

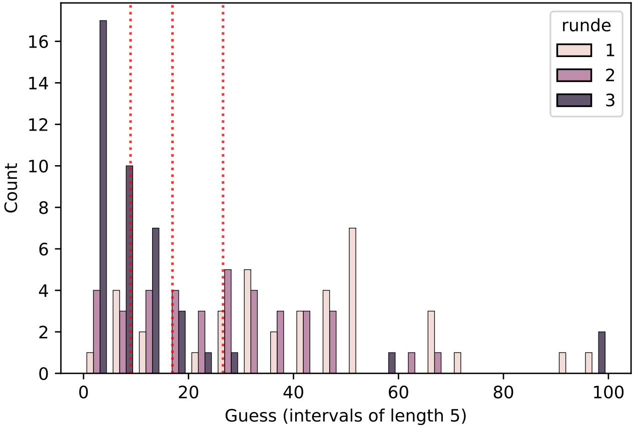
Skønhedskonkurrencen

runde	mean	2/3*mean
1	39.9	26.6
2	25.4	16.9
3	13.4	9.0

- **Winner:** (guessed 9.000)
- **2nd:** (guessed 9.130)
- **3rd:** (guessed 8.690)

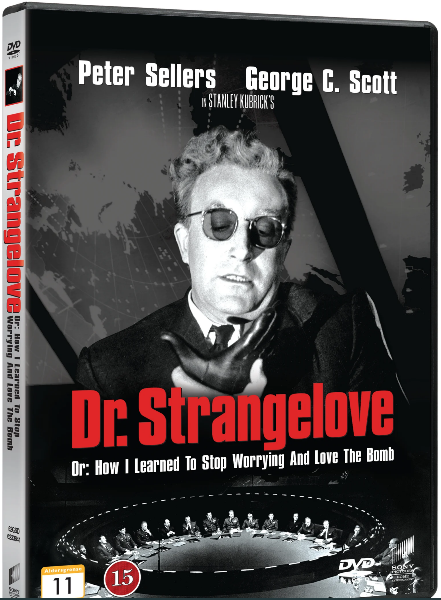
Convergence?

Figure 1: Gæt efter runder



Credible Threats

Eksempel: Dr. Strangelove

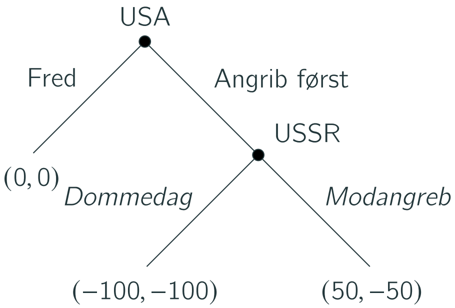


Nyligt Eksempel

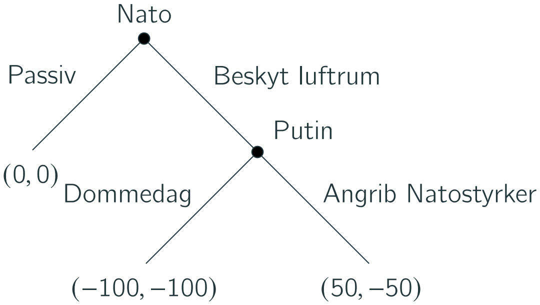
Figure 2: Vladimir Putin

"Russian President Vladimir Putin very publicly put Russian nuclear forces on a higher state of alert recently. And President Biden has

Graf


USA
Fred
Angrib først
USSR
(0, 0)
Dommedag
Modangreb
(−100, −100)
(50, −50)

Situationen i Ukraine



Dommedagsspillet på normal form

- Spillerne: $N = \{\text{USA}, \text{USSR}\}$
- Strategier: $A_{\text{USA}} = \{\text{Angrib}, \text{ikke}\}$, $A_{\text{USSR}} = \{\text{Dommedag}, \text{Normalt angreb}\}$
- **Opgave:** opskriv spillet på *statisk* normalform og find Nash-ligevægtene.

Mistet informationm

Når spillet skrives på **normal form** kan vi ikke se, at USSR kender USA's handling, før den vælger sin. En del af **spillets timing** er gået tabt.

Nash-ligevægten i dynamiske spil

- **Nash-ligevægten** er stadig defineret
  - ... den ignorerer blot de dynamiske aspekter af spillet.
- **Simplere version** af spillet: **Granatspillet:** *Hvis ikke du giver mig din madpakke, så dræber jeg os begge med denne granat*.
- **Dommedagsspillet** har de to Nash-ligevægte: (Ikke, Dommedag) og (Angirb, Normalt angreb)
  - **Diskutér** realismen i disse.

Backwards Induction

Definitioner

Definition: Spil på udvidet form med endelig horisont

Et udvidet form spil, $G = (N, X, (H)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$, består af

- **Spillere**: $N = \{1, ..., n\}$
- **Træet:** En samling af "knuder" (*nodes*), $x \in X$.
- **Terminale knuder**: $Z \subset X$, hvor spillet slutter og payoffs realiseres.
- **Præferencer:** $u_i : Z \longrightarrow \mathbb{R}$.
  - Dvs. spillerne går kun op i, hvor spillet slutter.
  - Hvis stierne dertil betyder noget, skal de terminale knuder gøres forskellige!
- **Informationsmængder:** $h_i \in H_i$, hvor $h_i = \{x\}$ kaldes en "singleton" informationsmængde.
- **Spillerfunktionen**: $i(h)$ angiver, hvis tur det er til at handle til hver informationsmængde i træet, $h_i \in H$.

2 spillere, alternerende træk

- **Simpelt dynamisk spil:** Hvis spillerne skiftes til at tage tur, kan vi kalde $t = 1, 2, ..., T$ for *stadiet* eller *perioden*
- **Spillerfunktionen** er da $i(t) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } t \text{ er ulige} \\ 2 & \text{ellers.} \end{cases}$
- **Hvis** de mulige handlinger for spiller i er A_i i alle perioder t, så er

$$H = \{(a_1, ..., a_T) | \text{for } t = 1, ..., T : a_t \in A_1 \text{ for } t \text{ lige og } a_t \in A_2 \text{ for } t \text{ ulige}\}.$$

Algoritmer i kurset

FL	Navn	Strategier	Handlinger	Fuld	Kommentarer
1	Iterated Elimination of Strictly Dominated Strategies	Rene	Diskrete	✓	Fjerner handlinger
2	Brute Force Pure Strategy Nash Search	Rene	Diskrete	✓	Langsom
2	Iterated Best Response	Rene	Kontinuerte	÷	Virker ikke altid
3	2×2 cookbook	Blandede	Diskrete	✓	Løsning "i hånden"
4	Linear Programming	Blandede	Diskrete	÷	Kun sym. nulsumsspil
4	Support Enumeration	Blandede	Diskrete	✓	Langsom
5	**Backwards Induction**	**Begge**	**Begge**	✓	**Dynamiske spil**
11	Multi-type Bimatrix	Begge	Diskrete	✓	Bayesianske spil
13	2nd to 1st price auction	Rene	Kontinuerte	✓	Auktioner
	Homotopy Method	Blandede	Diskrete	÷	

Algoritme: Backwards Induction

Algoritme: Backwards Induction

1. **Initialisering:** Udfyld værdien i de terminale knuder:

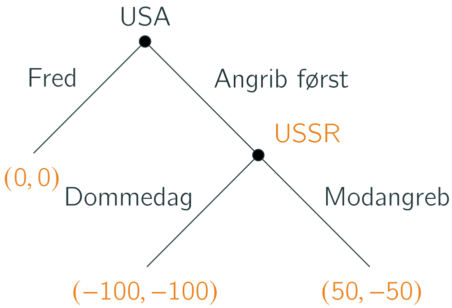
$$V_{iT}(x) = u_i(x) \quad x \in Z.$$

   Lad $X_T = Z$, hvor T er "sidste periode" i træet.

2. **For** $t = T - 1$ **til 1**: (looper op ad træet)
   2.1 Find de nederste "uløste" knuder: X_t
   2.2 Find $a^*_{i(x)} = \arg\max_{a \in A_i(x)} V_{it}[(x, a)]$ for $x \in X_t$
   Hvor $x' := (x, a) \in X_{t+1}$ er vores notation for den knude, vi kommer til fra x, hvis $a \in A_i(x)$ vælges.
   2.3 Sæt $V_{it}(x) := V_{it+1}[(x, a^*)]$ for $x \in X_t$

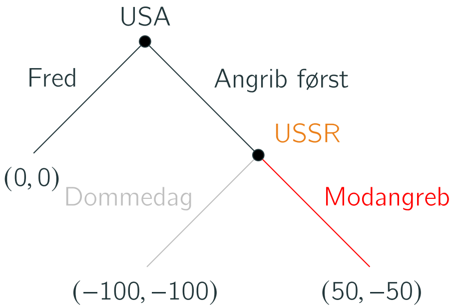
3. **Gentag** trin 2 indtil alle knuder $x \in X$ er løst.

Anvendelse: dommedagsspillet



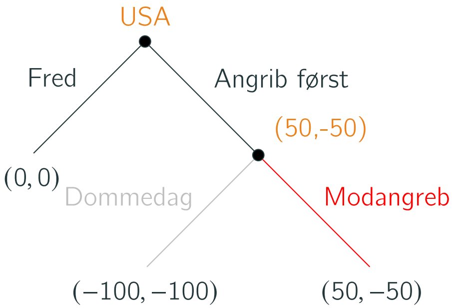
- Terminale knuder ($Z =: X_2$)
- Knuder netop før (X_1)

Anvendelse: dommedagsspillet



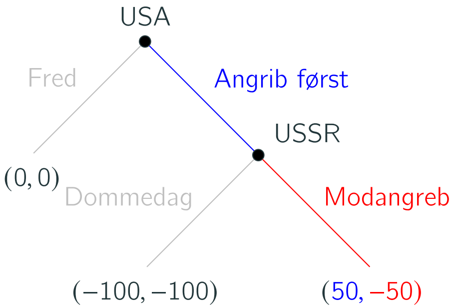
- $u_{\text{USSR}}(\text{Modangreb}) > u_{\text{USSR}}(\text{Dommedag}) \Rightarrow a^*_{\text{USSR},T} = \text{Modangreb}$

Anvendelse: dommedagsspillet



- **I første** periode vælger USA altså mellem
  - Fred: giver payoff 0 (terminal knude),
  - Angrib først: giver payoff $\Rightarrow V_{\text{USA},T-1}(\text{Angrib først}) = 50$
    (fordi USSR vil svare med $a^*_{\text{USSR}} = \text{Modangreb}$)

Anvendelse: dommedagsspillet



- **Resultatet** af algoritmen er handlingerne:
  1. USA's handling: Angrib først,
  2. USSR's handling: Modangreb
- **Payoffs** fra denne er (50, -50).

Dr. Strangelove

- **Hvad med filmen?** Pointen i dommedagsmaskinen er, at ingen mennesker kan gøre noget.
  - Ethvert menneske ville tøve i sidste øjeblik og ikke begå selvmord.
  - Eksempel: Stanislav Pretrov afbrød atomangreb mod USA d. 26. Sept. 1983
    (og brød med protokollerne!)
- **Dr. Strangelove's maskine** er et perfekt eksempel på et *commitment device*
- Det er nemlig **irrationelt** at ødelægge verden, men **rationelt** at binde sig til handlingen ...
  - ... så undgår man krig fuldstændig.
- **Svagheden:** hvis man ikke informerer andre om dommedagsmaskinen!

Historie

- **Spilteori** voksede enormt i 40'erne og 50'erne
- **John von Neumann** var en hovedspiller.
  - Dr. Strangelove er løst modelleret over von Neumann
- **Strategi:** *Mutually Assured Destruction (MAD)*
  - "Sikrede" fred gennem truslen om dommedag.

Entry Game

Entry Game

Entry Game

To firmaer, 1 og 2, skal konkurrere. I periode $t = 1$ skal firma 1 vælge om det vil indtræde på markedet eller ej, $a \in A_1 = \{\text{Indtræde}, \text{ikke}\}$. I periode $t = 2$ skal firma 2 vælge, om det vil sætte en aggressivt lav pris, eller an akkomoderende høj pris, $a_2 \in A_2 = \{\text{Bekæmpe, Akkommodere}\}$.

- Se Problem Set 5

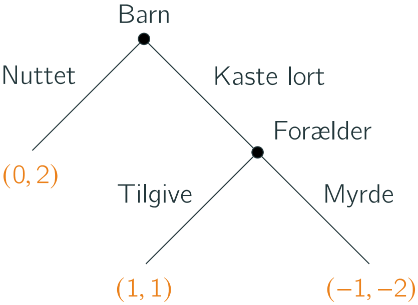
Ækvivalent Spil: Opdragelse

Opdragelsesspil

Et barn og dets forælder hygger sig en formiddag.

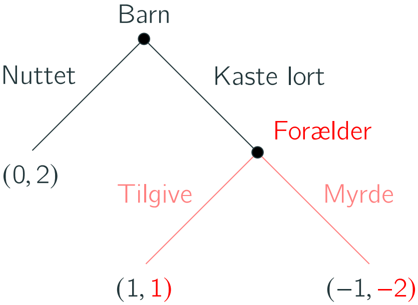
1. Barnet vælger først, om det vil opføre sig nuttet eller kaste sin lort rundt i stuen.
2. Dernæst skal forældren vælge enten at tilgive barnet eller give en næse.

Spillet på udvidet form

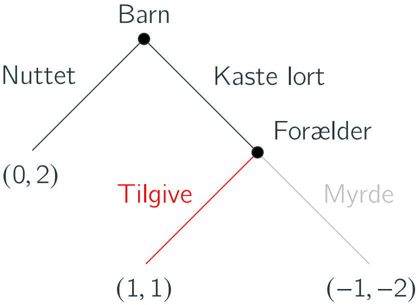


- **Terminale knuder**

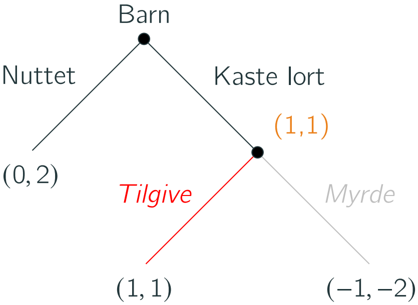
Spillet på udvidet form



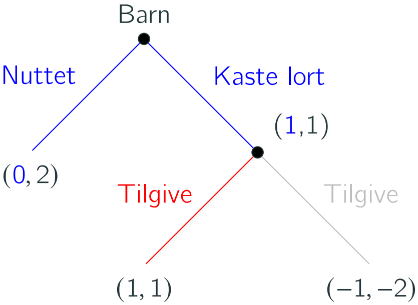
Spillet på udvidet form



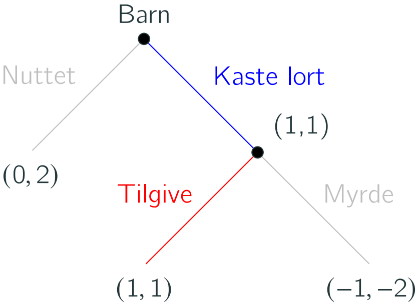
Spillet på udvidet form



Spillet på udvidet form



Spillet på udvidet form



- **Resultatet** af algoritmen flg. handlingsprofil:
    1. Barnet: Kaste lort
    2. Forælder: Tilgive
- **Payoffs**: (1,1)

Strategier

Strategi

Definition: Strategi

I et dynamisk spil er en **ren strategi** en handling, $a_i \in A_i(h_i)$ i enhver tænkelig situation, hvor spilleren skal handle, $h_i \in H_i$.

- **Backwards induction** specificerede kun en sekvens af handlinger.
- **Strategien** skal også sige, hvad man *ville have* gjort, under alternative stier.
  - Dvs. handlinger *off the equilibrium path*.

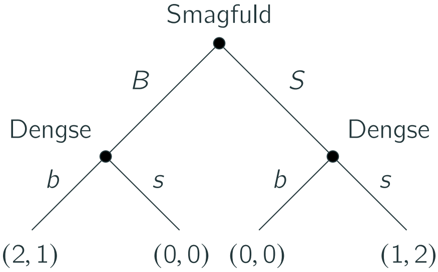
Husk: Bach eller Stravinsky

Spil: Bach eller Stravinsky

		Dengse	
		Bach	Stravinsky
Smagfuld	Bach	2,1	0,0
	Stravinsky	0,0	1,2

- **2 rene ligevægte statisk:** (Bach, Bach) eller (Stravinsky, Stravinsky). (Og en ligevægt i blandede strategier)
  - **Men:** Spillerne er *uenige* om værdien af ligevægtene.
- **Dynamisk:** Nu kan Dengsen tage et valg for hvert valg, den Smagfulde tager.

Sekventiel Bach-eller-Stravinsky



Dynamiske spil på normalform

- **Ren strategi:** En handling i alle situationer.
  - Dvs. den kan være forskellig alt efter hvad modparten gør.
- **Intuitivt:** Noget man kunne skrive op i en funktion.
- **Dvs. antallet af handlinger** er lig $\sum_{h_i \in H_i} |A_i(h_i)|$
  - Hvis $A_1 = \{L, R\}$ og $A_2(a_1 = L) = A_2(a_1 = R) = \{l, r\}$, så er der 4 handlinger.

Spillet på normal form

- **Dengse:** skal vælge en handling *for hver handling* Smagfuld vælger.
  - Fx (b, s) er "b som svar på B og s som svar på S"

		Dengse			
		(b, b)	(b, s)	(s, b)	(s, s)
Smagfuld	B	2,1	2,1	0,0	0,0
	S	0,0	1,2	0,0	1,2

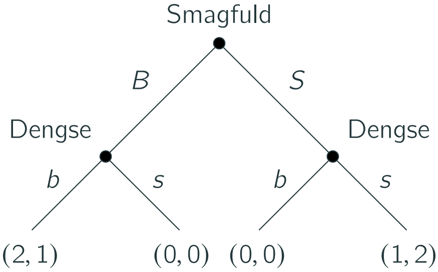
- **Nash-ligevægte:** findes ved bedste svar

		Dengse			
		(b, b)	(b, s)	(s, b)	(s, s)
Smagfuld	B	2,1	2,1	0,0	0,0
	S	0,0	1,2	0,0	1,2

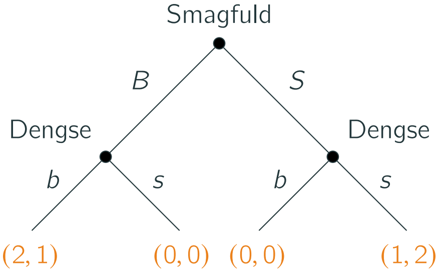
- 3 rene Nash-Ligevægte:

$$\text{PSNE} = \{(B, (b, b)), (B, (b, s)), (S, (s, s))\}.$$

Sekventiel Bach-eller-Stravinsky

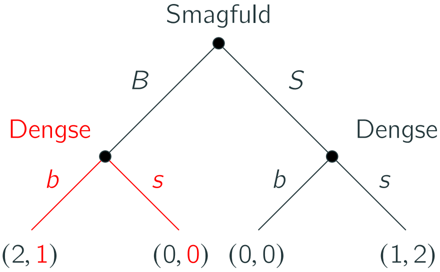


Sekventiel Bach-eller-Stravinsky



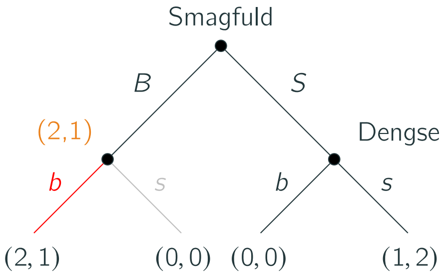
- Terminale knuder (Z)

Sekventiel Bach-eller-Stravinsky



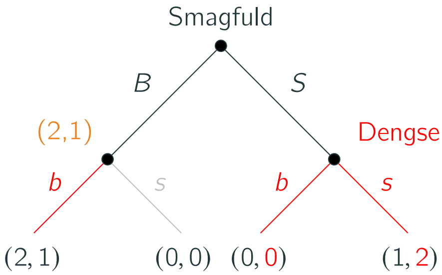
- X_{T-1}

Sekventiel Bach-eller-Stravinsky



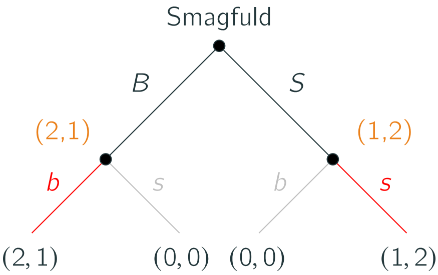
- X_{T-1}

Sekventiel Bach-eller-Stravinsky



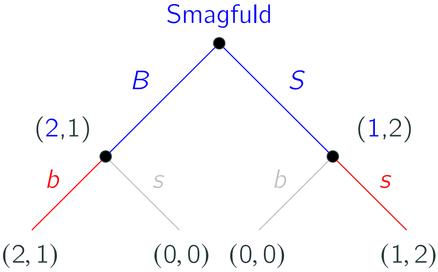
- X_{T-1}

Sekventiel Bach-eller-Stravinsky



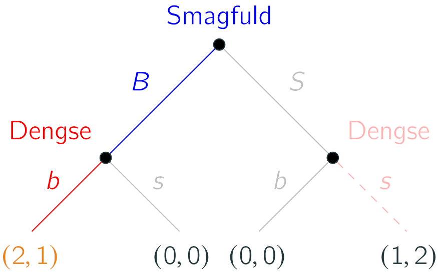
- Færdig med X_{T-1}

Sekventiel Bach-eller-Stravinsky



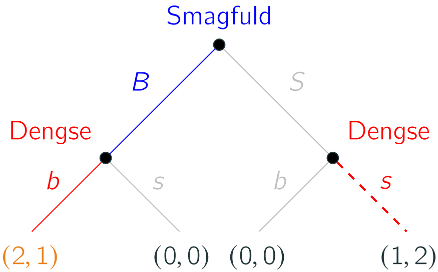
- Første periode: X_{T-2}

Sekventiel Bach-eller-Stravinsky



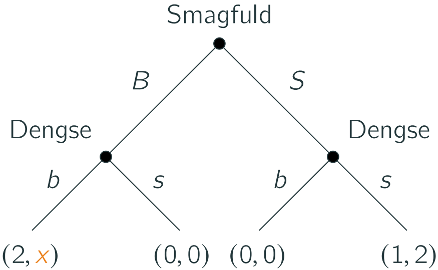
- **Færdig!** Algoritmen har returneret
  1. Smagfuld spiller B,
  2. Dengsen spiller b
- **Payoffs** er (2,1).
- **Bemærk:** Situationen (S,s) observeres ikke, fordi Smagfuld spiller B.
  - Men Dengse *ville have* svaret med s.

Væk fra ligevægtsstien



- Spillernes **mulige strategier** er
  - Smagfuld: $\{B, S\}$.
  - Dengse: $\{(b, b), (b, s), (s, b), (s, s)\}$.
    Fx læses (b, s) "spil b som svar på B og s som svar på S".
- De **optimale** strategier her var
  - Smagfuld: B
  - Dengse: (b, s)

Indskudsspørgsmål



- **Spørgsmål:** Hvad hvis dengsen fik lov til at bestemme værdien af $x \in \mathbb{R}$, før spillet skulle startes?

Dynamisk vs. statisk

- **Statisk:** to Nash-ligevægte.
  - Tydeligt, når spillet opstilles på normal form.
- **Dynamisk, Nash-ligevægt:** 3 ligevægte: $\{(B,(b,b)),(B,(b,s)),(S,(s,s))\}$.
- **Dynamisk, backwards induction:** første-spilleren får sin foretrukne ligevægt: $\{(B,(b,s))\}$.
- **Diskutér:** hvad er der "galt" med de to Nash-ligevægte, der ikke kom ud af BI?
  - Vi skal bruge et **nyt ligevægtsbegreb!** $\Rightarrow$ SPNE!

Mutually Assured Destruction

Mutually Assured Destruction (8.3.3)

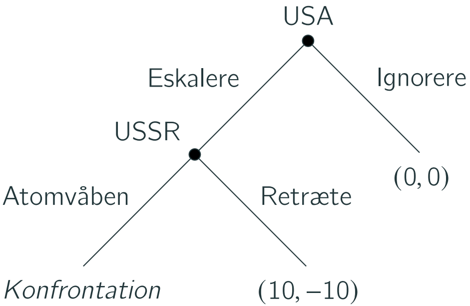


Table 1: Konfrontation

		USSR	
		r	d
USA	R	-5,-5	-100,-100
	D	-100,-100	-100,-100

Spillet på normalform

Table 2: Konfrontation

		USSR			
		Rr	Rd	Ar	Ad
USA	IR	0,0	0,0	0,0	0,0
	ID	0,0	0,0	0,0	0,0
	ER	10,-10	10,-10	-5,-5	-100,-100
	ED	10,-10	10,-10	-100,-100	-100,-100

- R,r står for "retræte,"
- D,d står for "dommedag."

Nash-ligevægte (i rene strategier)

Table 3: Mutually Assured Destruction på Normalform

		USSR			
		Rr	Rd	Ar	Ad
USA	IR	0,0	0,0	0,0	0,0
	ID	0,0	0,0	0,0	0,0
	ER	10,-10	10,-10	-5,-5	-100,-100
	ED	10,-10	10,-10	-100,-100	-100,-100

- **Mange ligevægte!** Senere skal vi rydde op i disse.

$$\text{PSNE} = \{(ED, Rr), (ED, Rd), (IR, Ar), (Ir, Ad), (ID, Ar), (ID, Ad)\}$$

Slutspillet

Table 4: Konfrontation

		USSR r	USSR d
USA	R	-5,-5	-100,-100
USA	D	-100,-100	-100,-100

- **To Nash-ligevægte** betragtet i isolation:

$$\text{PSNE}^{\text{slutspil}} = \{(R, r), (D, d)\}.$$

- **Vidt forskellige** implikationer:
  - (R, r): Begge tager retræte og taber ansigt – planeten overlever
  - (D, d): Hvis modstanderen ødelægger planeten, har man intet at tabe.

Diskussion

Table 5: Konfrontation

		USSR r	USSR d
USA	R	-5,-5	-100,x
USA	D	x,-100	-100,-100

- Hvis kun den ene part smider bomben, så er det måske federe end hvis begge gør?
- $\Rightarrow$ hvad skal der gælde om x?
- Hvornår "flipper" vi forudsigelserne?

Dynamiske Spil II
Stackelberg, Imperfekt information

Anders Munk-Nielsen

Blok 4, 2021

Introduktion

Overblik

	Statisk	Dynamisk
Komplet information	~~Matrix-spil~~	**Sekventielle spil**
Inkomplet information	Fx auktioner	Signaleringsspil

- **Indtil nu: perfekt** information
- **Nu: imperfekt** information

Information

Vigtig sondring:

- **Komplet information:** Modstanderens “type” (dvs. payoffs) er kendt.
- **Perfekt information:** Alle hidtidige handlinger er observerede

Eksempler:

	Perfekt	Imperfekt
Komplet	Skak	Bridge, Poker
Inkomplet	Risk	Agricola

Hovedpointer

- Imperfekt information
- First-mover advantage (i Stackelberg)
- Informationsmægnder

SPNE

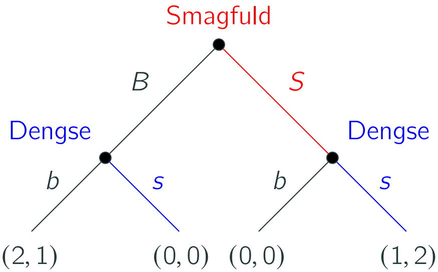
Underspilsperfekt Nash-ligevægt (SPNE)

Definition: Underspilsperfekt Nash-ligevægt

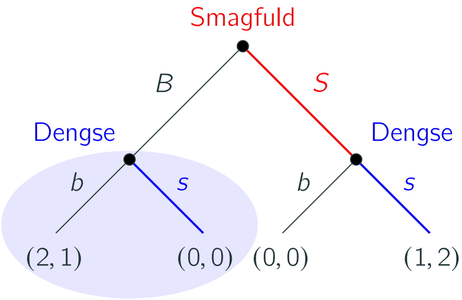
(Subgame Perfect Nash Equilibrium, SPNE) En SPNE er en strategiprofil, $s = (s^i)_{i \in N}$, så ingen spiller ønsker at afvige i noget *underspil*.
Matematisk: for alle $h \in H \setminus Z$ skal det være optimalt at vælge den $a \in A^i(h)$, som s^i dikterer.

- **Forskel:**
  - **NE:** Nash-ligevægten kræver kun optimalitet fra *udgangspunktet*.
  - **SPNE:** kræver optimalitet *i alle underspil*.
    - Dvs. i alle knuder, vi kan ende i undervejs.
    - Det er en raffinering af Nash-ligevægten.

Nash-ligevægten $(B, (s, s))$

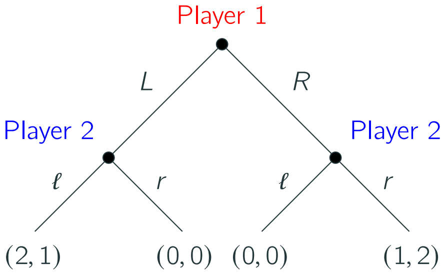


Betragt et "Underspil"



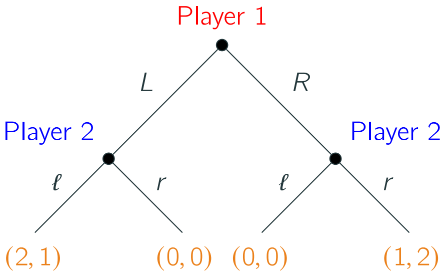
- I dette underspil vælger Dengse ikke rationelt
- Men underspillet er *off the equilibrium path*, hvilket gør det "irrelevant" for Nash-ligevægten
  - Men det er ikke tilladt i en SPNE!
- Det er en **utroværdig trussel**, som får Smagfuld til at vælge S(travinsky).

Definitionerne i spil



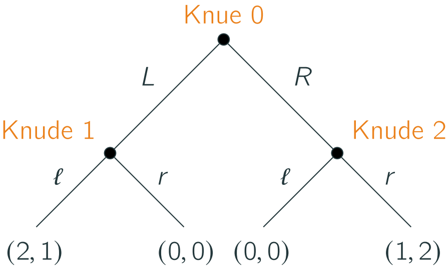
- Lad os finde underspil, terminale knuder (Z), og startknuden.

Definitionerne i spil



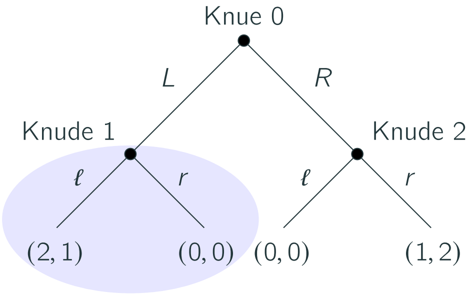
- **Terminale knuder**, Z: Slutningne på spillet – ingen handlinger her

Knuder og historikker



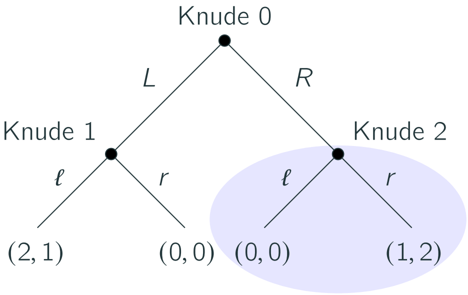
- **Knude 1** Her er historikken $h = (L)$, og $P(h) = 2$
- **Knude 2** Her er historikken $h = (R)$, og $P(h) = 2$
- **Knude 0** Her er historikken $h = \emptyset$ (Intet er sket), og $P(h) = 1$.

Underspil



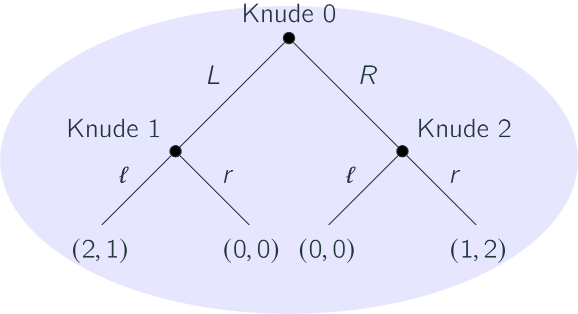
1. Underspil 1

Underspil



2. Underspil 2

Underspil



3. Underspil 3: hele spillet (pr definition også et underspil).

Egenskaber ved SPNE

Proposition 16.2

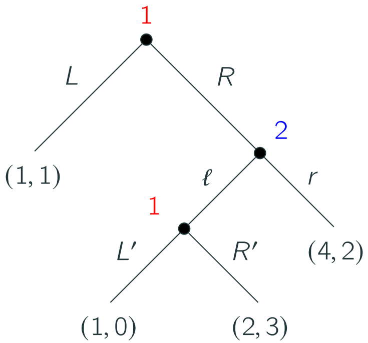
Lad G være et udvidet form spil med endelig horisont. Da er en strategiprofil genereret af Backwards Induction ohvis og kun hvis den er en underspilsperfekt Nash-ligevægt.

SPNE vs. Nash

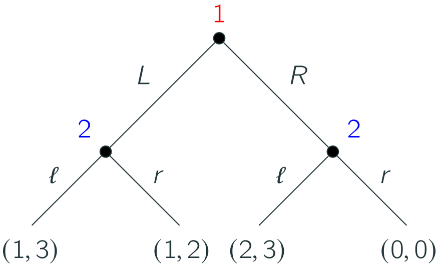
Enhver Nash-ligevægt er også SPNE, men ikke nødvendigvis omvendt.

- Derfor siger vi, at SPNE er en raffinering af NE.

Eksempel



Opgave: find NE og SPNE for dette spil



	(ℓ,ℓ)	(ℓ,r)	(r,ℓ)	(r,r)
L	1,3	1,3	1,2	1,2
r	2,3	0,0	2,3	0,0

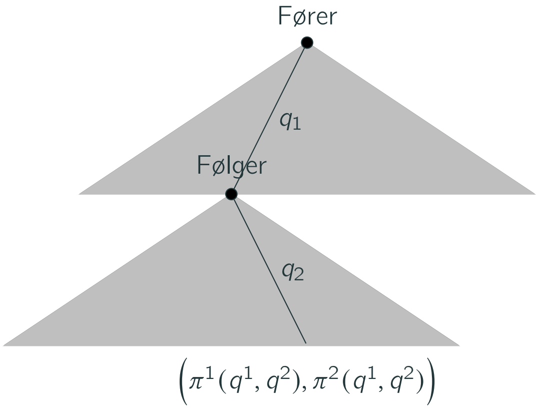
Stackelberg

Stackelberg Duopol

- 1934, Heinrich von Stackelberg (tysk økonom, 1905–1946).
- **Heinrich:** Firmaer tager ikke simultane, men sekventielle beslutninger.
- **Historien:**
  - To firmaer skal vælge (q_1, q_2), konstante marginalomkostninger, c.
  - Firma 1 (fører) vælger $q_1 \geq 0$
  - Firma 2 (følger) vælger $q_2 \geq 0$
  - (Invers) efterspørgselsfunktion:

$$p(Q) = \max(a - Q, 0), \qquad Q = q_1 + q_2.$$

Grafisk illustration af spillet



De grå områder indikerer, at der er tale om *kontinuerte* valg.

Løsning af Stackelberg

- **Terminale "knuder":** situationer hvor begge firmaer har valgt mængder $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}_+^2$, og payoffs realiseres
- **Backwards induction:** Vi starter i sidste periode, hvor følgeren vælger q_2 for alle mulige historikker
    - En historik er et $q_1 \in \mathbb{R}_+$: dem er der ∞ mange af.
    - $\Rightarrow$ heldigvis kan vi løse for BR for alle
- **Periode 2:** For ethvert givet q_1 løser følgeren

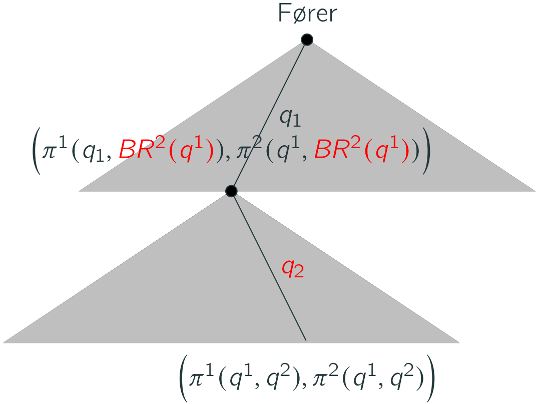
$$\max_{q_2 \geq 0} \pi^2(q_1, q_2) = q_2 \left(a - q_1 - q_2 - c\right)$$

- **Bedste svar** er da

$$BR^2(q_1) = \frac{a - q_1 - c}{2}.$$

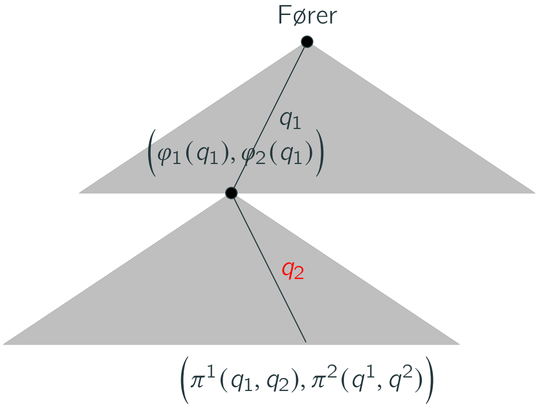
- **Indtil videre** det samme som Cournot duopol, men næste skridt er anderledes...(!)..

Grafisk illustration af spillet



- Vi indsætter løsningen i næstsidste knude

Grafisk illustration af spillet



- Payoffs efter første periode er blot en funktion af q_1
  - fordi q_2 blot er en funktion af q_1

Løsning af Stackelberg

- **Periode 1:** Føreren løser

$$\begin{aligned}
\max_{q_1 \geq 0} \pi^1(q_1, BR^2(q_1)) &= q_1\left(a - q_1 - BR^2(q_1) - c\right) \\
&= q_1\left(a - q_1 - \frac{a - q_1 - c}{2} - c\right)
\end{aligned}$$

- **Pæn** kriteriefunktion med

$$\text{FOC} : -3q_1^* + \frac{3}{2}(a - c) = 0$$

$$\Leftrightarrow q_1^* = \frac{a - c}{2}.$$

- **Indsættelse giver**

$$q_2^* = BR^2(q_1^*) = \frac{a - c}{4}.$$

- **Payoffs:** $Q = \frac{a-c}{4} + \frac{a-c}{2} = \frac{3}{4}(a - c)$ so $\pi^i = (a - c - Q)q_i$

$$\pi_1^* = \frac{(a - c)^2}{8}, \quad \pi_2^* = \frac{(a - c)^2}{16}.$$

Stackelberg: Takeaways

- **Payoffs:**

$$\pi_1^* = \frac{(a-c)^2}{8} > \pi_2^* = \frac{(a-c)^2}{16}.$$

  - $\Rightarrow$ **det er en fordel at rykke først!**
- **Statisk Cournot:** $\pi_1 = \pi_2 = \pi_{SC}^* = \frac{(a-c)^2}{9}$
  - $\Rightarrow \pi_1^* > \pi_{SC}^* > \pi_2^*$
  - Fører tjener mere end Cournot – følger tjener mindre.
- **100$ spørgsmålet:** hvorfor er det bedst at rykke først?
  - $\Rightarrow$ er det altid sådan?
- **Begge** firmaer ønsker at sætte den høje pris.
  - Men kun føreren har mulighed for at **committe** sig til at gøre det.
  - **Følgeren** kunne *true* med at sætte den høje mængde...
    - ... men det ville ikke være en troværdig trussel

Statisk vs. dynamisk Cournot

- **Cournot duopol**: Den statiske Nash-ligevægt $(q_1^{\text{NE}}, q_2^{\text{NE}})$ løser

$$q_1^{\text{NE}} = BR^1(q_2^{\text{NE}}),$$
$$q_2^{\text{NE}} = BR^2(q_1^{\text{NE}}).$$

- **Stackelberg**: Den underspilsperfekte Nash-ligevægt, $(q_1^{\text{SPNE}}, q_2^{\text{SPNE}})$, løser

$$q_1^{\text{SPNE}} = BR^1(BR^2(q_1^{\text{SPNE}})),$$
$$q_2^{\text{SPNE}} = BR^2(q_1^{\text{SPNE}}).$$

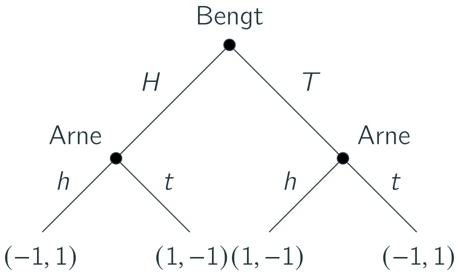
  - Den **utroværdige trussel** fra 2 ville være, at sætte $q_2 = q^{\text{NE}}$ uanset hvad 1 gør
    - Men hvis 1 har spillet $q_1 = q_1^{\text{SPNE}}$, så vil $q_2 = q^{\text{NE}}$ ikke være profitmaksimerende...
    - ... dvs. der vil være et incitament til at afvige!

First-mover fordelen

Stackelberg:

- **Føreren** har en fordel
  - Pre-committer til sin højere mængde
- **Følgeren** har mere information, men det er en **ulempe**
  - Normalt tænker man intuitivt, at mere information altid er bedre.
- **Et modeksempel** i sekventiel *matching pennies*

Dynamisk matching pennies



- **Nu** blev det for alvor Arnes tur!!(!)!
- **Hvad er forskellen?**

Forskellen

- **Påstand:** hvis det statiske spil har en *unik* Nash-ligevægt i rene strategier, så vil føreren aldrig være stillet værre.
    - **Bevis:** [hint: hvad sker der i periode 2, hvis føreren spiller sin Nash-handling?]
- **Hvad** siger det om den statiske vs. dynamiske version af
    - Stackelberg [statisk version = Cournot duopol]?
    - Matching pennies?
- **Prøv** at formulere en hypotese ud fra om et givet spil er
    - et koordinationsspil (fx stag hunt eller Bach/Stravinsky)
    - eller et antikoordinationsspil (fx matching pennies).

Andre eksempler

- **Spørgsmål:** vil du helst rykke først eller sidst i spillet *Chicken*?

Skurkefrans

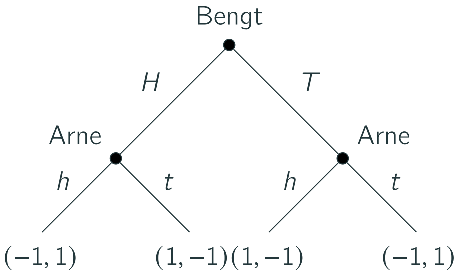
James Dean	Kør	Afvig
Kør	-100,-100	2,-2
Afvig	-2,2	0,0

- **Spørgsmål:** hvad med fangernes dilemma?

Benny

Kjeld	Sladre	Tie
Sladre	-1,-1	0,-9
Tie	-9,0	-6,-6

Summary: Extensive vs. normal form



Arne

Bengt	(h,h)	(h,t)	(t,h)	(t,t)
H	-1,1	-1,1	1,-1	1,-1
T	1,-1	-1,1	1,-1	-1,1

Imperfekt Information

Introduktion

- **Nu:** tilføje muligheden for, at nogle handlinger ikke observeres.
  - **Eksempel:** initial placering i sænke slagskibe
- **Nyt begreb:** informationssæt – opsummerer, hvad hver spiller ved.

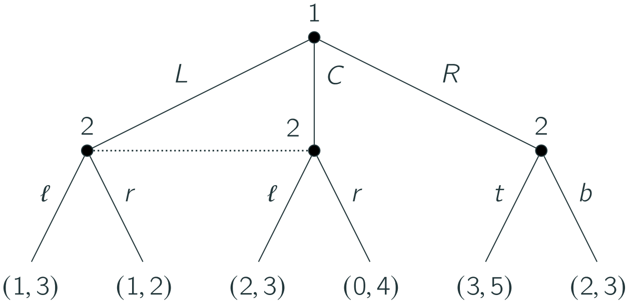
Definition: Informationssæt

Et informationssæt i et spil på udvidet form er en mængde af knuder, der opfylder

1. den samme spiller skal handle i hver knude,
2. når spillet kommer til én af knuderne i mængden, så ved den handlende spiller ikke, hvilken en af dem.

- **Grafisk** repræsenterer vi det ved *stiplede linjer*

Informationssæt: eksempel



- **Hvis** 1 spiller L eller C ved 2 ikke hvilken; men hvis R så ved hun det.
  - Hvis L, så er ℓ bedst, men hvis C er r bedst.

Agenda

For at kunne arbejde med spil med imperfekt information skal vi dække

- **Definitionen** + kunne afgøre hvorvidt et givent spil på grafisk form er korrekt specificeret.
- **Løse** med backwards induction
    - Kræver at vi kan arbejde med informationsmængder

Generalisering

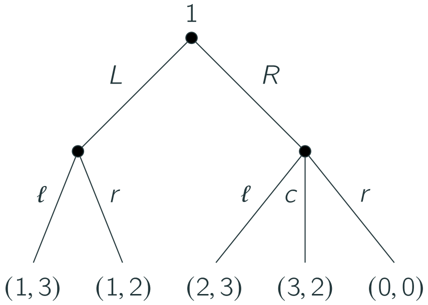
Perfekt vs. imperfekt information

1. **Spil med perfekt information:** alle informationsmængder er singleton (indeholder kun én knude)
2. **Spil med imperfekt information:** mindst én informationsmængde er ikke singleton.

- **Bemærk:** Et spil hvor ingen spiller observerer nogen anden spillers handling før hun tager sin egen, kan uden tab af information opstilles som et bimatrixspil.

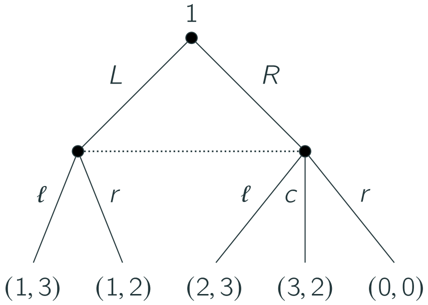
Eksempler

Eksempel 1



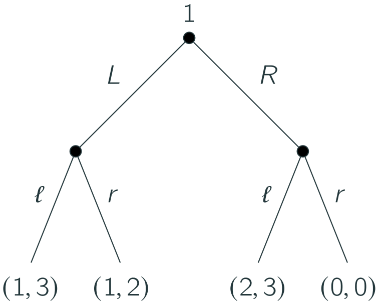
- **Spg.:** Er dette et acceptabelt udvidet form spil?

Eksempel 2



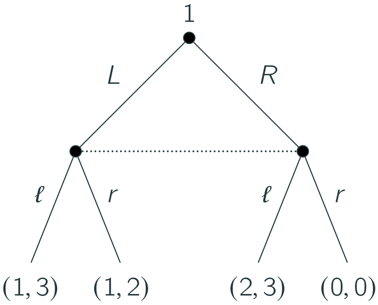
- **Spg.:** Er dette et acceptabelt udvidet form spil?

Eksempel 3



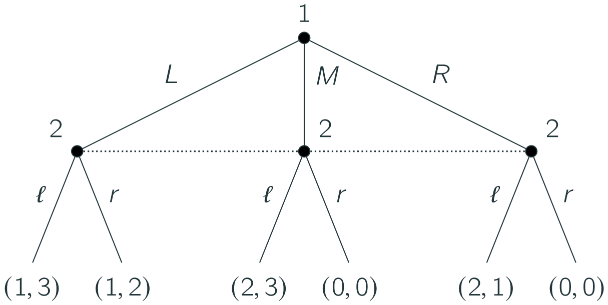
- **Spg.:** Hvor mange *strategier* har hver spiller

Eksempel 3



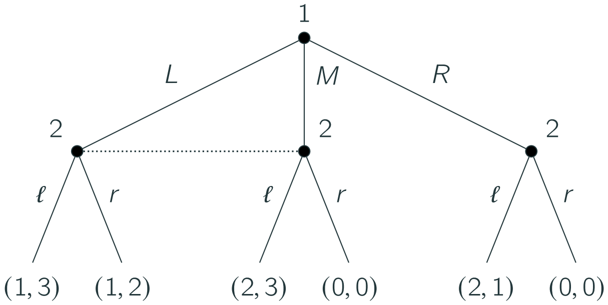
- **Spg.:** Hvor mange *strategier* har hver spiller

Eksempel 4



- **Spg.:** Hvor mange *strategier* har hver spiller

Eksempel 4



- **Spg.:** Hvor mange *strategier* har hver spiller

Eksempel: Bank run

Spil: Bank Run

To investorer har hver deponeret D kr. i en bank. Lader de pengene stå løbetiden ud, får de $R > D$ kr. Deres valg er, om de vil hæve nu eller vente. Problemet er, at banken ikke har pengene liggende. Hvis mindst én hæver nu, har banken kun $2r$ at give ud, $r < D$. Venter de, kan det fulde $2R$ udbetales.

Eksempel: Bank run

Spil: Bank Run

Periode 1:

	Hæve	Vente
Hæve	r, r	$D, 2r - D$
Vente	$D, 2r - D$	(Periode 2)

Periode 2:

	Hæve	Vente
Hæve	R, R	$2R - D, D$
Vente	$D, 2R - D$	R, R

- **Næste gang:** formalisere algoritmen for Backwards Induction i dette spil med imperfekt information.

Imperfekt information

Anders Munk-Nielsen

Blok 4, 2022

Introduktion

Overblik

	Statisk	**Dynamisk**
Komplet information	~~Matrix-spil~~	**Sekventielle spil**
Inkomplet information	Fx auktioner	Signaleringsspil

Imperfekt Information

Introduktion

- **Nu:** tilføje muligheden for, at nogle handlinger ikke observeres.
  - **Eksempel:** initial placering i sænke slagskibe
- **Nyt begreb:** informationssæt – opsummerer, hvad hver spiller ved.

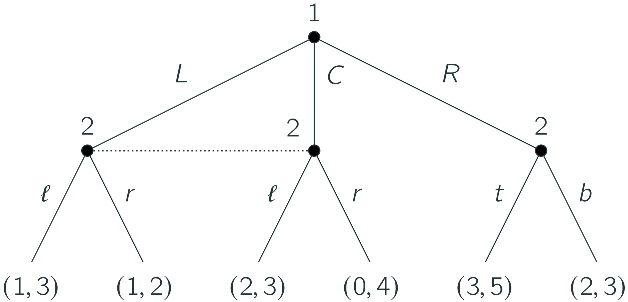
Definition 7.2 intuitivt: Informationsmængde

Et informationsmængde i et spil på udvidet form er en mængde af knuder, $h \subset X \setminus Z$, der opfylder

1. den samme spiller skal handle i hver knude,
2. når spillet kommer til én af knuderne i mængden, så ved den handlende spiller ikke, hvilken en af dem.

- **Grafisk** repræsenterer vi det ved *stiplede linjer*

Informationssæt: eksempel



- **Hvis** 1 spiller L eller C ved 2 ikke hvilken; men hvis R så ved hun det.
    - Hvis L, så er ℓ bedst, men hvis C er r bedst.

Agenda

For at kunne arbejde med spil med imperfekt information skal vi dække

- **Definitionen** + kunne afgøre hvorvidt et givent spil på grafisk form er korrekt specificeret.
- **Løse** med backwards induction
  - Kræver at vi kan arbejde med informationsmængder

Generalisering

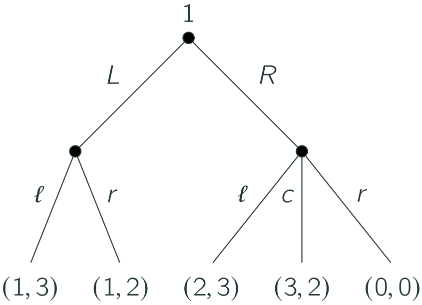
Perfekt vs. imperfekt information

1. **Spil med perfekt information:** alle informationsmængder er singleton (indeholder kun én knude)
2. **Spil med imperfekt information:** mindst én informationsmængde er ikke singleton.

- **Bemærk:** Et spil hvor ingen spiller observerer nogen anden spillers handling før hun tager sin egen, kan uden tab af information opstilles som et bimatrixspil.

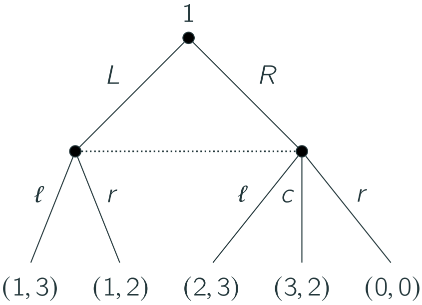
Eksempler

Eksempel 1



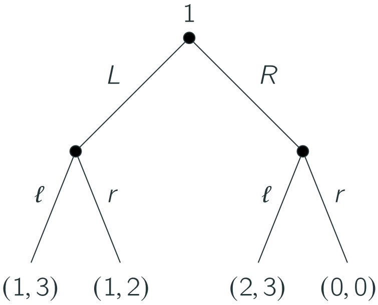
- **Spg.:** Er dette et acceptabelt udvidet form spil?

Eksempel 2



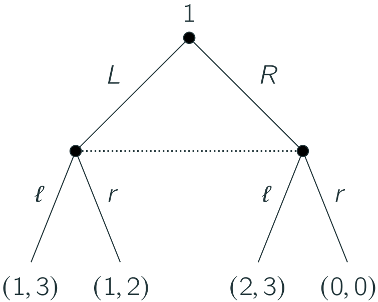
- **Spg.:** Er dette et acceptabelt udvidet form spil?

Eksempel 3



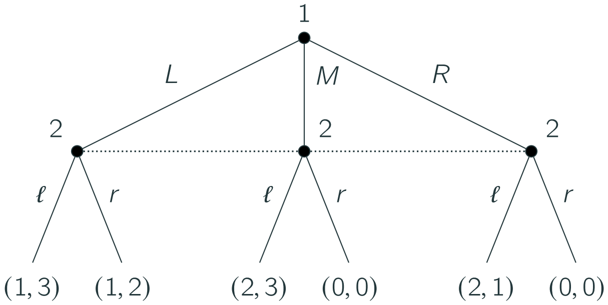
- **Spg.:** Hvor mange *strategier* har hver spiller

Eksempel 3



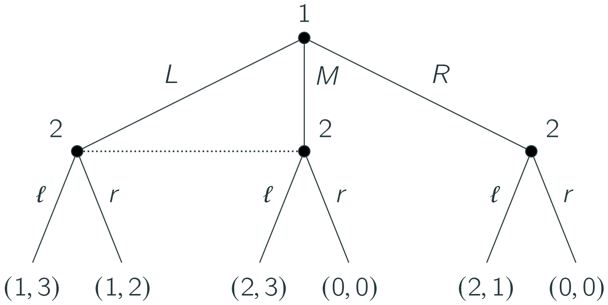
- **Spg.:** Hvor mange *strategier* har hver spiller

Eksempel 4



- **Spg.:** Hvor mange *strategier* har hver spiller

Eksempel 4



- **Spg.:** Hvor mange *strategier* har hver spiller

SPNE med Imperfekt Information

SPNE med Imperfekt Information

- **Nu:** Backwards Induction-algoritmen tilpasset spil med imperfekt information.
- **Udfordring:** nogle knuder "hænger sammen" i informationssæt.
  - Med perfekt information, var der bare knuder.
  - Nu skal vi håndtere "klynger" af sammenhængende knuder.
- **Løsning:** "elefantmetoden" – dele spillet op i mindre spil, som vi kan løse
  - Underspil: "Små spil i spillet"

SPNE med Imperfekt Information

Nu: Definere SPNE for spil med *imperfekt* information.

Definition: SPNE

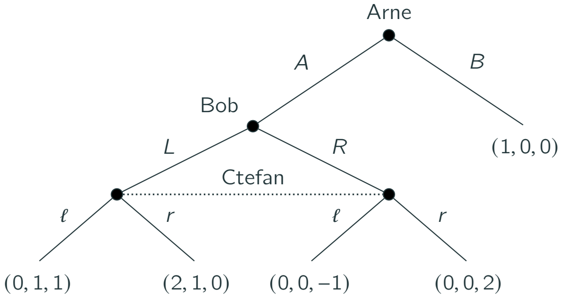
En *Underspilsperfekt Nash-ligevægt (SPNE)* er en strategiprofil, $(\sigma_i)_{i \in N}$, så ingen spiller ønsker at afvige i noget *underspil*.

Definition: Underspil

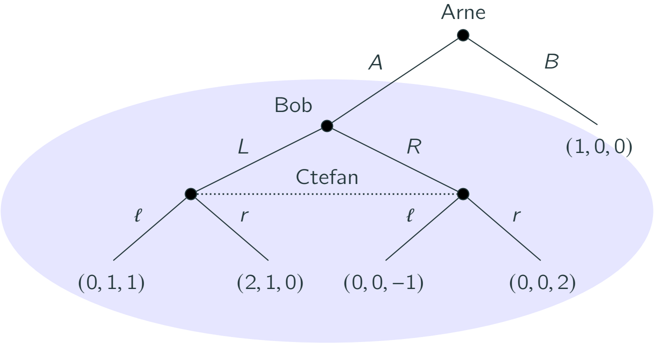
Et underspil af et udvidet form spil med imperfekt information skal opfylde

1. Det begynder ved en knude, x, som er singleton (eneste knude i sin informationsmængde) $h = \{x\}$.
2. Det inkluderer alle knuder, der følger efter x,
3. Det "skærer" ingen informationsmængder over
   dvs. hvis y også er i informationsmængden, $y \in h(y)$, så skal y også være med i underspillet.

Eksempel: Underspil med Imperfekt Information

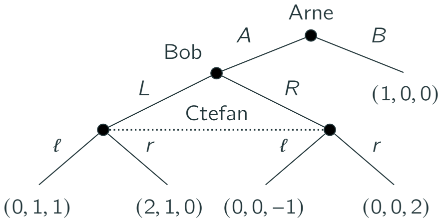


Eksempel: Underspil med Imperfekt Information



- **Dette** er spillets eneste underspil… det er et spil inde i spillet
  - … og det kan analyseres som et **statisk spil med simultane handlinger**.

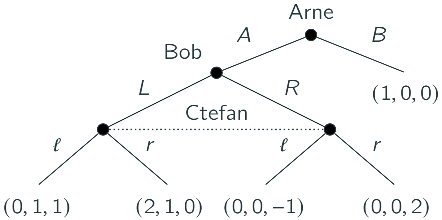
Underspillet



- Underspillet er mellem Bob og Ctefan, som hver har to rene strategier

		Ctefan	
		ℓ	r
Bob	L	1,1	1,0
	R	0,-1	0,2

Underspillet



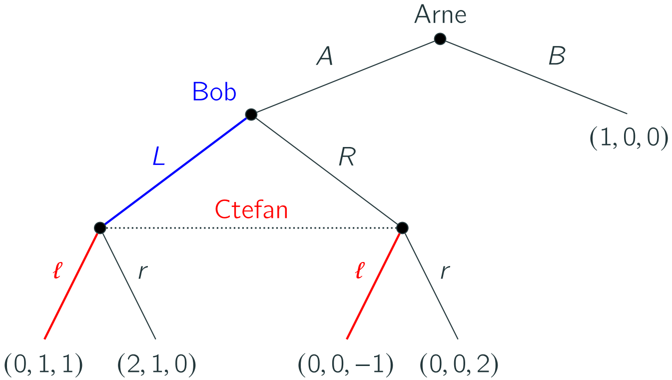
- Underspillet er mellem Bob og Ctefan, som hver har to rene strategier (faktisk er R strengt domineret af L for Bob)

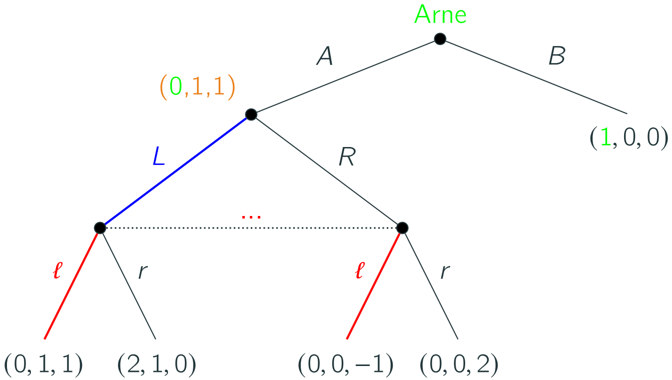
Ctefan

Bob	ℓ	r
L	**1**,**1**	**1**,0
R	0,-1	0,**2**

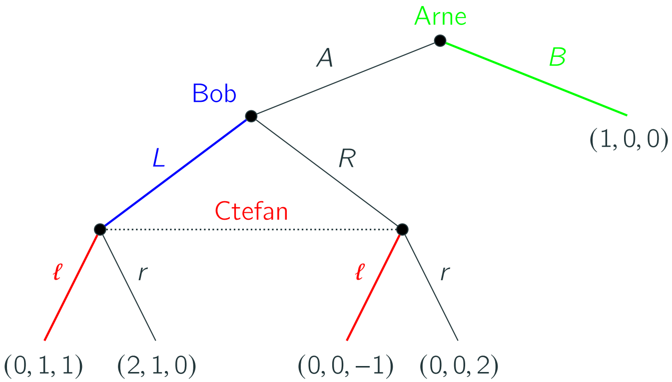
  - $\Rightarrow$ Nash-ligevægten er unik, og den er (L, ℓ).

Eksempel: Underspil med Imperfekt Information




Arne
A
B
(0,1,1)
(1, 0, 0)
L
R
...
ℓ
r
ℓ
r
(0, 1, 1)
(2, 1, 0)
(0, 0, −1)
(0, 0, 2)

Forsmag på Backwards Induction



- **SPNE** er $\{(B, L, \ell)\}$
- **Bonusspørgsmål:** Vis at (B, R, ℓ) er NE, men ikke SPNE.

Spot underspillet

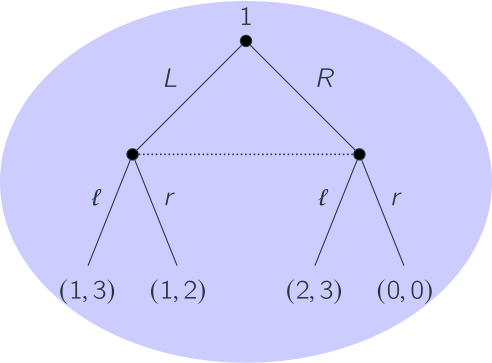
Spot underspillet

En hylende sjov selskabsleg for hele familien!

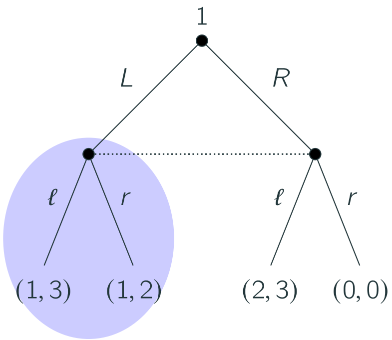
Definition: Underspil

1. Starter ved singleton knude $x \in G$ (dvs. $h(x) = \{x\}$)
2. Indeholder alle efterkommere og ingen ikke-efterkommere,
3. Skærer ingen informationsmængder over.

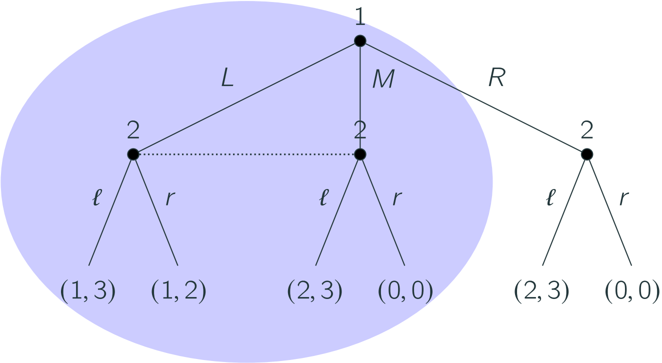
Er dette et underspil?



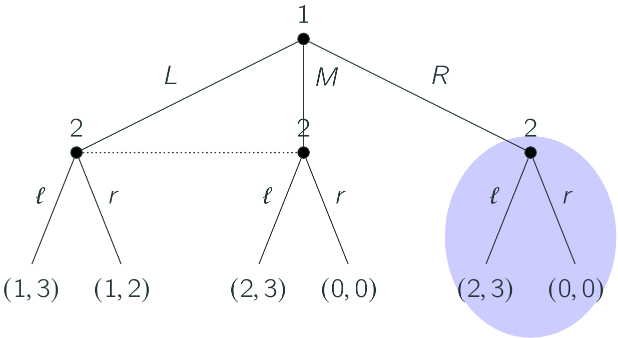
Er dette et underspil?



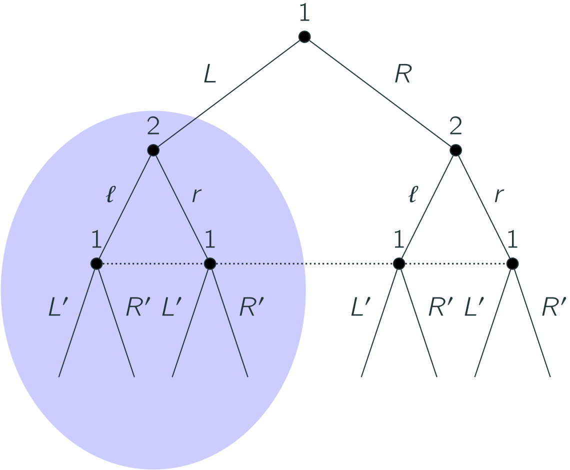
Er dette et underspil?



Er dette et underspil?



Spil: Imperfect Recall



Bankstormløb

Eksempel: Bankstormløb

Spil: Bankstormløb (Bank Run)

To investorer har hver deponeret D kr. i en bank. Lader de pengene stå løbetiden ud, får de $R > D$ kr. Deres valg er, om de vil hæve nu eller vente. Problemet er, at banken ikke har pengene liggende. Hvis mindst én hæver nu, har banken kun $2r$ at give ud, $r < D$.
I periode 2 kan $2R$ udbetales. Hvis begge eller ingen hæver, får begge R. Men hvis én venter der, får denne kun D, og den anden får resten $(2R - D)$.

- $(\frac{1}{2}D < r < D < R)$

Eksempel: Bank run

Spil: Bank Run

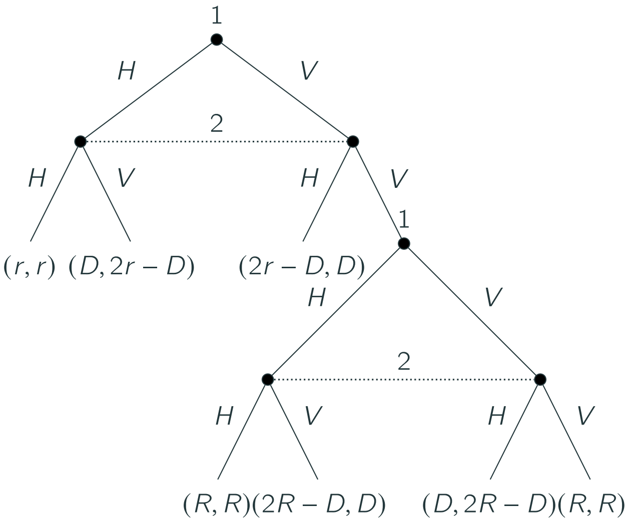
Periode 1:

	Hæve	Vente
Hæve	r, r	$D, 2r - D$
Vente	$2r - D, D$	(Periode 2)

Periode 2:

	Hæve	Vente
Hæve	R, R	$2R - D, D$
Vente	$D, 2R - D$	R, R

Bank Run: Grafisk repræsentation



- **Underspil:** spillet har kun to – periode 2, og hele spillet.

BI: Løsning af underspillet

- **Underspillet** i periode 2 er uden tab af generalitet et simultant spil.

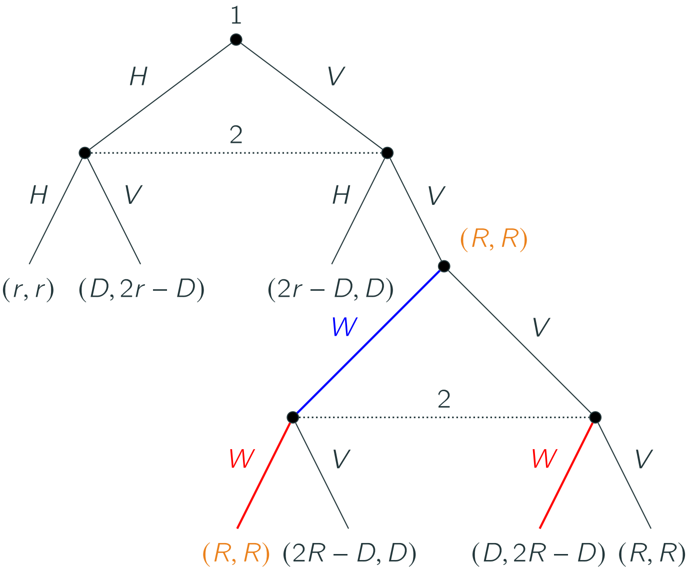
	Hæve	Vente
Hæve	R, R	$2R - D, D$
Vente	$D, 2R - D$	R, R

- **Løses** ved at finde bedste svar

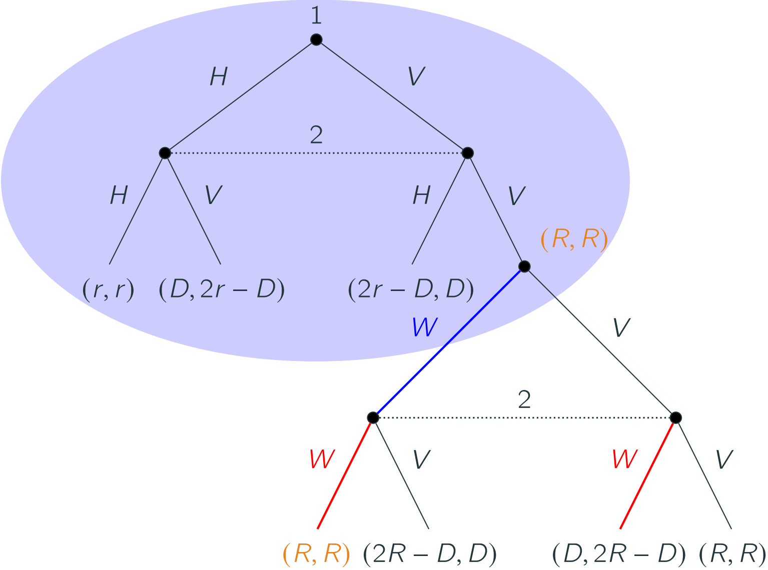
	Hæve	Vente
Hæve	R, R	$2R - D, D$
Vente	$D, 2R - D$	R, R

  - Hæve er en dominerende strategi for begge spillere. $(R > D \Rightarrow 2R - D > R)$
- $\Rightarrow$ ligevægten er unik: $\text{NE} = \{(\text{H}, \text{H})\}$
  - Payoffs (or dermed værdien af periode 2) er (R, R)

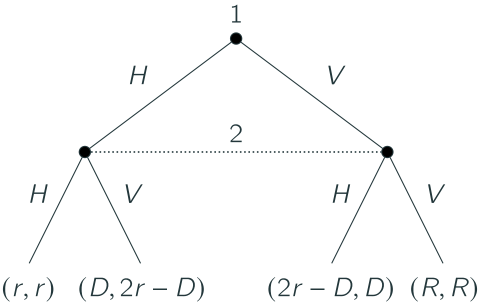
Backwards Induction



Backwards Induction



Første periode



Ækvivalent matrixform:

	H	V
H	r, r	$D, 2r - D$
V	$2r - D, D$	R, R

$(D > r \Rightarrow 2r - D < r)$

Løsning

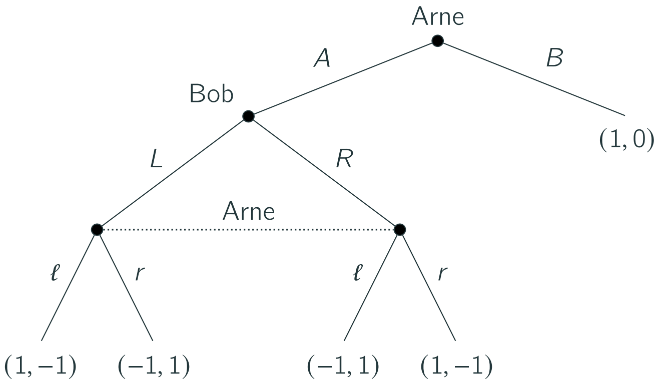
Resultat af Backwards Induction:

1. $((V,H),(V,H)) \in$ SPNE:
2. $((H,H),(H,H)) \in$ SPNE:

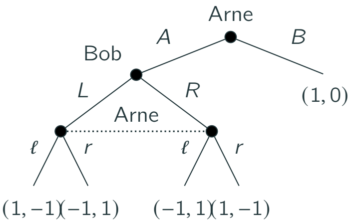
- Bemærk: begge ligevægte er dermed også NE, da SPNE $\subset$ NE.
  - En yderligere NE, som ikke er SPNE er $((H,V),(H,V))$, hvor periode 2 ikke sker *på ligevægtsstien*)

- **1** er socialt efficient – investeringerne fuldbyrdes, og der skabes maksimal værdi.
- **2** kan fortolkes som et *Bank Run*
  - Hvis begge investorer er bange for, at den anden hæver førtidigt, er det rationelt at hæve
    - på trods af og under fuld forståelse for, at kun $r < D$ kan hæves.

Sidste eksempel



Sidste eksempel



- **Underspillet** er *Matching Pennies*
  - $\Rightarrow$ ingen *ren* NE
  - Blandet $NE = \left\{ \left((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \right) \right\}$ med $\underline{\mathbb{E}(u_i) = 0}$ for $i = 1, 2$.
    - Bemærk: Arne tager forventningen til payoffs i underspillet!
- $\Rightarrow B \succ_{\text{Arne}} A$.

Gentagne Spil

Anders Munk-Nielsen

Blok 4, 2022

Introduktion

Overblik

	Statisk	**Dynamisk**
Komplet information	~~Matrix-spil~~	**Sekventielle spil**
Inkomplet information	Fx auktioner	Signaleringsspil

Indsigter

Gentagne spil, $G(T)$

- **Endelig horisont:**
  - Hvis G's NE er unik, er $G(T)$'s unikke SPNE at gentage den.
  - Hvis G har flere NE, kan der ske flere ting...
- **Uendelig horisont:**
  - Ikke-NE kan understøttes!
  - ... NE'en optræder som en troværdig trussel
  - Eks.: **grim trigger**

Først: resultaterne fra Konkurrence 2...

Konkurrence 2

Først: resultaterne fra bimatrix-konkurrencen...

Gentagne Spil

Gentaget spil

Definition: Gentaget Spil

Lad G være et statisk spil, kaldet **stadiespillet** (*the stage game*). Da er $G(T)$ for $T \in \mathbb{N}$ det dynamiske spil, hvor G spilles T gange, og outcome fra hvert spil observeres før den næste runde. Payoffs er summen af payoffs fra hver af de T stadiespil.

Eksempel: gentaget fangernes dilemma

Gentaget Fangernes Dilemma

Lad G være det almindelige Fangernes Dillemma stadiespil:

Kjeld \ Benny	tie	sladre
tie	4,4	0,5
sladre	5,0	1,1

Da er $G(2)$ det dynamiske spil, hvor Kjeld og Benny spiller to runder af G.

Løsning af gentaget FD

- **Løsning**: ved backwards induction.
- **Periode 2:** dette underspil er blot $G(1)$. Dvs. den unikke NE er $(\text{sladre}, \text{sladre})$
  - Dette gælder uanset, hvad der skete i stadie 1...
  - ... payoffs påvirkes ikke af første runde.
- **Periode 1:** Indsæt payoffs fra følgende runde:

Kjeld \ Benny	tie	sladre
tie	4+1,4+1	0+1,5+1
sladre	5+1,0+1	1+1,1+1

- **Løsning:** nu har vi et simpelt statisk spil med simultane træk
  - $\Rightarrow$ løsningen er igen (sladre, sladre).
- **Konklusion:** Den unikke SPNE er $\Big((\text{sladre}, \text{sladre}), (\text{sladre}, \text{sladre})\Big)$.

Gentaget FD: strategier

- **Hvor mange strategier** har hver spiller?
  - Husk: en strategi = en plan i alle mulige historikker (informationsmængder).
- **Mulige historikker:** G har 4 mulige outcomes $\Rightarrow 4 \times 2$.

SPNE i endeligt gentagne spil

Proposition 10.1

Hvis G har en unik Nash-ligevægt, så har $G(T)$ en unik underspilsperfekt Nash-ligevægt, hvor G's Nash-ligevægt spilles i hver periode.

Bevis:

- I sidste periode (mindste underspil) skal de spille G's NE (krav for at have en SPNE til *hele* spillet $G(T)$).
- Derfor vil intet i næstsidste periode påvirke, hvad der sker i sidste periode
  - $\Rightarrow$ eneste NE i dette underspil er derfor at spille G's NE også i næstsidste periode.
- Osv... ■

- **Implikation:** Hvis G er FD, så vil $G(T)$ have den unikke SPNE, hvor der spilles (sladre, sladre) T gange.

Bemærk

- G er **stadiespillet** – det, der spilles i hver runde.
    - Fx Fangernes Dilemma.
- Selve **spillet** er $G(T)$: et udvidet form dynamisk spil.
- Fx er (sladre, sladre) blot et sæt handlinger i stadiespillet...
    - ... en ligevægt i *spillet* ($G(T)$) skal specificere en strategi for alle historikker (alle underspil).
- En **strategi** kunne være: "(Tie i første runde, i anden runde, spil Tie hvis modparten spillede Tie i første; ellers spil Sladre)".

Multiple ligevægte

Udvidet FD

Udvidet fangernes dilemma

Betragt det gentagne spil $G(T)$, hvor stadiespillet G er

		Benny		
		tie	sladre	trippe
Kjeld	tie	4,4	0,5	0,0
	sladre	5,0	1,1	0,0
	trippe	0,0	0,0	2,2

- **Bemærk:** Stadiespillet G har to ligevægte:

$$\text{NE} = \left\{ (\text{sladre}, \text{sladre}), (\text{trippe}, \text{trippe}) \right\}$$

- **SPNE** kræver, at der spilels en NE i sidste runde...
  - ... men siger intet om *hvilken* ligevægt, der vælges!

Foreslået strategi

- **Forslag til strategi:**
  - Periode 1: spil (tie, tie).
  - Periode 2:
    - Spil (trippe, trippe), hvis outcomet i første periode var (tie, tie);
    - ellers spil (sladre, sladre).
- **Påstand:** dette er en SPNE.
- **Bevis:** Bemærk først, at der spilles NE i sidste periode uanset hvad
  - Strategien består af regler for, *hvilken* af de to NE'er, der vælges.
- **I Første periode:** kan vi indsætte værdierne fra periode 2
  - Hvis man spiller tie, får man payoff 2 for næste periode
  - Alt andet giver payoff 1 for næste periode

Foreslået strategi

- I **Første periode:** kan vi indsætte værdierne fra periode 2
  - Hvis man spiller tie, får man payoff 4 for næste periode
  - Alt andet (sladre eller trippe) giver payoff 1 for næste periode
- **Payoff-matricen** for periode 1 er dermed

		Benny		
		tie	sladre	trippe
Kjeld	tie	6,6	1,6	1,1
	sladre	6,1	2,2	1,1
	trippe	1,1	1,1	3,3

  - Tre ligevægte, blandt andet (tie, tie).
    - bonussen fra næste periode har flyttet tie-payoff op på niveau med sladre.
- **Konklusion:** Flg. strategi er en symmetrisk SPNE
  - Spil (tie, tie) i første periode og i anden periode spil (trippe, trippe) hvis første periode var (tie, tie) og ellers (sladre, sladre).

Opsamling

- **Resultat:** det *udvidede* FD har en SPNE, hvor spillerne tier i første periode!
- **Intuitivt set** "truer" spillerne med NE (tie, tie), hvis modparten ikke arter sig i første periode.
- Spillerne har fået en **troværdig trussel** i og med, at stadiespillet har flere ligevægte
  - Troværdigheden kommer af, at det er en NE!

Resultat

I endeligt gentagne spil, $G(T)$, *kan der kun* eksistere en SPNE, hvor der spilles en ikke-NE strategi i et stadiespil undervejs, *hvis* der er flere ligevægte i stadiespillet.
(men dette er ikke en garanti for, at en sådan SPNE eksisterer)

Gentaget NE

- **Vi viste**, at der er en SPNE, hvor der spilles (tie, tie) i første periode.
- **Men:** der findes *også* SPNE'er, hvor spillernes strategier er
  - Spil altid sladre,
  - Spil altid trippe.
  - men ikke "altid tie," for i sidste periode er dette ikke NE.

Proposition 9.1

Betragt en NE for stadiespillet. Der findes en SPNE, hvor begge spilleres strategi er, at spille denne NE i hvert stadie.

Uendeligt gentagne spil

$T = \infty$

- **Vi så** i *endeligt* gentagne spil, at gentagelse kan radikalt ændre outcomes, når der er mindst 2 NE i stadiespillet
- **Nu:** $T = \infty$ – hvad kan der så ske?
  - **Forhandlingsspil**: vi vil se, at $T < \infty$ vs. $T = \infty$ ændrer radikalt på situationen
    - $T < \infty$: sidste periode er altafgørende
    - $T = \infty$: $\begin{cases} \text{uden diskontering} & \Rightarrow \text{ alt kan ske} \\ \text{med diskontering} & \Rightarrow \text{ unik og "fornuftig" ligevægt} \end{cases}$
- **Strategier:** vi skal se på to eksempler
  - Trigger strategy,
  - Tit-for-tat strategy.
- **Spil:** Fangernes dilemma

Diskontering

- **I forhandling** kunne vi arbejde med $\delta = 1$ (dvs. uden diskontering)
  - Det var først ved accept, at payoffs $\neq 0$ blev udløst.
- Vi skal se på **fangernes dilemma**
  - Hvis (sladre, sladre) giver (1,1), så kan vi ikke håndtere en ∞ sum af payoffs uden diskontering

$$U_i(u_{i1}, u_{i2}, ...) = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t u_{it}$$

- **Fortolkning af diskonteringsfaktoren**
  - Forrentning: hvis renten er r (fx 0.05), er $\delta = \frac{1}{1+r}$
  - Slutning: hver periode slutter spillet med ssh. $1 - \delta$
- **Vigtig formel:** summen af en geometrisk række:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t = \frac{1}{1-\delta} \quad \forall \delta \in (0; 1).$$

(dvs. $\sum_{t=1}^{\infty} \delta^t = \frac{\delta}{1-\delta}$)

Fortolkning af diskontering

Hvordan fortolkes δ?

- **Alternativomkostning:** "penge i dag" kunne være sat i obligationer,
- **Utålmodighed:** I dag er vigtigere end i morgen
- **Spillet kunne slutte:** δ fortolkes som "$\Pr$(næste runde sker)"

One deviation property

Teorem 9.1: One deviation property

I ethvert *endeligt* spil er en strategi SPNE hvis og kun hvis den overholder, at det aldrig er optimalt at afvige *én* gang, for så for evigt at vende tilbage til strategien.

- **Kan vises:** teoremet gælder også for uendelige spil med diskontering.

Grim Trigger

Trigger strategien

- **Fangernes Dilemma**

		Benny: tie	Benny: sladre
Kjeld	tie	4,4	0,5
	sladre	5,0	1,1

Trigger-strategien

Initialisering: Spil tie i periode 1.

1. Hvis (tie, tie) blev spillet i alle forrige perioder, spil tie.
2. Hvis noget andet blev spillet, spil sladre.

- **Intuitivt**: samarbejd, hvis modparten gør det, ellers spil NE for evigt.
- **Implikation:** der spilles (tie, tie) for evigt!
- **Diskuter:** hvad er godt/skidt ved denne strategi?

Ligevægtsbevis

- **Påstand:** (trigger, trigger) er en underspilsperfekt Nash-ligevægt i det uendeligt gentagne Fangernes Dilemma hvis $\delta \geq \frac{1}{4}$
- **Bevis:** vi skal vise, at *trigger* er det bedste svar (BR) til *trigger* i *alle underspil*.
- **Plan:** Vi splitter underspil (historikker) op efter, om de er på ligevægtsstien eller ej.
  - **Trin 1:** vis at *trigger* er BR hvis vi er *på ligevægtesstien*,
    - Dvs. hvor ingen har afveget indtil videre,
  - **Trin 2:** vis at *trigger* er BR, hvis vi er *væk fra ligevægtsstien,*
    - Hvor nogen har afveget: dvs. strategien foreskriver *sladre* for evigt.

Bevis: trin 1

- **Påstand:** *trigger* er bedste svar, hvis vi er på ligevægtsstien, så længe $\delta \geq \frac{1}{4}$.
  - Dvs. hvis der blev spillet (tie, tie) sidst.
- **Bevis:** Strategien foreskriver at spille tie, så eneste mulige afvigelse *(one-shot-deviation)* er:
  - Sladre nu, derefter tilbage til trigger for evigt.
  - **Effekten** er én periode med $u = 5$, derefter straffer j med *sladre* for evigt,
    - og i vil derfor også *sladre* for evigt (trigger strategien, som ser at der er blevet sladret tidligere (godt nok af i selv!))
- **Payoff** fra trigger strategien er nutidsværdien af at være i Coorporation Phase (dvs. på ligevægtsstien) hvor $u_i(\text{tie}, \text{tie}) = 4$

$$\begin{aligned} V^C &= 4 + \delta 4 + \delta^2 4 + \dots \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t 4 = 4 \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t = \frac{4}{1-\delta}. \end{aligned}$$

Bevis trin 1: på ligevægtsstien

- **Afvigelser:** hvis *i* afviger i blot en periode, vil der *derefter* blive spillet *sladre* for evigt (**Defection Phase**) hvor $u(\text{sladre}, \text{sladre}) = 1$

$$V^D = 1 + \delta \cdot 1 + \delta^2 \cdot 1 + ... = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t = \frac{1}{1-\delta}$$

- **Indsætter** værdierne i payoff-matricen for ethvert underspil:

	tie	sladre
tie	$4+\delta V^C, 4+\delta V^C$	$0+\delta V^D, 5+\delta V^D$
sladre	$5+\delta V^D, 0+\delta V^D$	$1+\delta V^D, 1+\delta V^D$

- **Hvornår** er det så optimalt at samarbejde? Når $BR_i(\text{tie}) = \text{tie}$, dvs.

$$\begin{aligned} 4+\delta V^C &\geq 5+\delta V^D \\ \Leftrightarrow 4+\delta\frac{4}{1-\delta} &\geq 5+\delta\frac{1}{1-\delta} \\ \Leftrightarrow \delta &\geq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

  - **Konklusion:** Hvis $\delta \geq \frac{1}{4}$ er det ikke rationelt at afvige *på ligevægtsstien*.

Bevis trin 2: væk fra ligevægtsstien

- **Påstand:** *trigger* et et bedste svar *væk* fra ligevægtsstien.
- **Bevis:** vi skal karakterisere ethvert underspil, der *ikke* er på ligevægtsstien.
  - Alle sådanne opstår, der har været spillet noget andet end *tie* – dvs. vi er i **Defection Phase**
- **Payoffs** i sådanne underspil er

	tie	**sladre**
tie	$4+\delta V^D, 4+\delta V^D$	$0+\delta V^D, 5+\delta V^D$
sladre	$5+\delta V^D, 0+\delta V^D$	$1+\delta V^D, 1+\delta V^D$

  - (hvor modstanderen antages at spille **sladre** nu (og i al evighed))
- $\Rightarrow$ i's bedste svar er også *sladre*, idet

$$\delta V^D < 1 + \delta V^D \quad \forall \delta. \quad \blacksquare$$

  - (faktisk er sladre en strengt dominerende strategi i dette underspil)

Konklusion

Resultat

Strategiprofilen, (trigger, trigger), er en underspilsperfekt Nash-ligevægt for det uendeligt gentagede Fangernes Dilemma, hvis $\delta \geq \frac{1}{4}$.

- **Diskuter:** hvorfor virker det ikke for lave værdier af δ?
- **Diskuter:** straffen er ret hård (NE for evigt)
  - Er det muligt at bløde den op?
  - Er den praktisk realistisk at bruge? (fejl, blødsødenhed, usikkerhed, ...)?

$T < \infty$ vs. $T = \infty$

- **I endelige spil** ($T < \infty$) er der en “sidste runde effekt”
  - NE spilles i sidste runde altid $\Rightarrow$ derfor også næstsidste osv.
  - $\Rightarrow$ NE spilles i alle runder.
  - **Kun** hvis der var *multiple* ligevægte i stadiespillet, kunne vi opretholde andet end NE
- **I uendelige spil** ($T = \infty$) er der ingen sidste runde
  - $\Rightarrow$ der kan findes en SPNE baseret på handlinger, der ikke udgør en NE for stadiespillet
  - I stedet bruges NE for stadiespillet som en **straf** i *trigger strategien*.

Gentagne Spil

Anders Munk-Nielsen

Blok 4, 2022

Stiltiende Karteller

Overblik

	Statisk	**Dynamisk**
Komplet information	~~Matrix-spil~~	**Sekventielle spil**
Inkomplet information	Fx auktioner	Signaleringsspil

Indsigter

- **Tit-for-tat:** performer godt i konkurrencer, men er ikke SPNE!
- **Folk theorem:** dynamiske spil har *mange* ligevægte.
- **Kogebog** for løsning af dynamiske kartel-strategier.

Tit-for-tat

Spil

Spil: Uendeligt gentaget fangernes dilemma

Betragt $G(\infty)$, hvor stadiespillet, G, er Fangernes Dilemma,

		Benny	
		tie	sladre
Kjeld	tie	4,4	0,5
	sladre	5,0	1,1

og hvor spillerne diskonterer med den fælles faktor $\delta \in (0; 1)$.

Tit-for-tat

Strategi: Tit-for-tat (noget for noget)

Initialisering: spil *tie*.

- Spil det, modparten spillede i sidste periode.

- **Bemærk:** to TFT-spillere resulterer i
    1. Begge spiller *tie* (initialisering)
    2. Begge kopierer *tie* fra modparten,
    3. ... *tie* ...

  $\Rightarrow$ dvs. (tie, tie) for evigt.
- **Payoff** for (TFT, TFT) er dermed V^C fra før,

$$V^C = 4 + \delta 4 + \delta^2 4 + ... = \frac{4}{1-\delta}.$$

Tit for tat er ikke en SPNE!

Påstand

Tit-for-tat er kun en underspilsperfekt Nash-ligevægt, hvis δ har én bestemt værdi $\delta^* \in (0; 1)$. Ellers ikke.

Bevis

- **Teknik:** en SPNE skal være robust mod (alle) one-shot afvigelser
    - Dvs. afvige fra TFT i kun én periode og så vende tilbage for evigt.
- **Payoffs:** vi skal udregne for
    - Ligevægtsstien (payoff fra at begge spillere holder sig til TFT for evigt)
    - Afvigelse (det viser sig at blive cyklisk)

Bevis

- **Ligevægtsstien:** *handlingssekvensen* bliver

$$(\text{tie}, \text{tie}), (\text{tie}, \text{tie}), (\text{tie}, \text{tie}), \ldots$$

  så Cooperation payoffet er

$$V^C = 4 + 4\delta + 4\delta^2 + \ldots = 4\textstyle\sum_{t=0}^{\infty}\delta = \dfrac{4}{1-\delta}.$$

- **Afvigelsen:** I første periode spiller i *sladre*, men derefter Tit-for-tat:
  - Handlingssekvensen bliver nu *cyklisk*:

$$(\text{sladre}, \text{tie}), (\text{tie}, \text{sladre}), (\text{sladre}, \text{tie}), (\text{tie}, \text{sladre}), \ldots$$

  - Payoffs i Defection-fasen er derfor

$$(V_i^D, V_j^D) = (5,0), (0,5), (5,0), (0,5), \ldots$$

$$V_i^D = 5\textstyle\sum_{t=0}^{\infty}\mathbf{1}_{\{t \text{ lige}\}}\delta^t = 5\sum_{t=0}^{\infty}(\delta^2)^t = \dfrac{5}{1-\delta^2},$$

$$V_j^D = 5\textstyle\sum_{t=0}^{\infty}\mathbf{1}_{\{t \text{ ulige}\}}\delta^t = 5\sum_{t=1}^{\infty}(\delta^2)^t = \dfrac{5\delta}{1-\delta^2}.$$

  (hvor i er den af de to, der først afviger til *sladre*)

Bevis

- **Mangler** sidste mulighed: hvis (sladre, sladre) blev spillet og begge spiller Tit-for-tat i den følgende periode
  - $\Rightarrow$ så vil begge kopiere, og handlingssekvensen bliver

$$(\text{sladre}, \text{sladre}), (\text{sladre}, \text{sladre}), \ldots$$

- **Payoffs** bliver dermed for begge spillere

$$V^S = 1 + \delta + \delta^2 + \ldots = \frac{1}{1-\delta}.$$

Bevis

- **Payoffs** for underspillet hvor vi spiller noget i dag, og derefter Tit-for-tat for evigt:

	tie	sladre
tie	$4+\delta V^C, 4+\delta V^C$	$0+\delta V_2^D, 5+\delta V_1^D$
sladre	$5+\delta V_1^D, 0+\delta V_2^D$	$1+\delta V^S, 1+\delta V^S$

- **Nu:** betragt forskellige historikker, vi kan stå i, og overvej mulige deviations:
- **Periode 1:** I den initiale periode siger strategien, at der spilles (tie, tie),
  - … så fx må 1 ikke have incitament til at spille sladre:

$$4+\delta V^C \quad \geq \quad 5+\delta V_i^D.$$

Bevis

- **Payoffs:**

	tie	sladre
tie	$4+\delta V^C, 4+\delta V^C$	$0+\delta V_2^D, 5+\delta V_1^D$
sladre	$5+\delta V_1^D, 0+\delta V_2^D$	$1+\delta V^S, 1+\delta V^S$

- **Periode 1:** krævede altså

$$4+\delta V^C \quad \geq \quad 5+\delta V^D$$

- **Betragt** historikken, hvor der sidste periode blev spillet (tie, sladre): $h = \left(..., (\text{tie}, \text{sladre})\right)$
- Her foreskriver TFT:
  - 2 skal spille tie
    - 1 skal spille sladre.
  - **Kunne** 1 monstro ville afvige og i stedet spille tie?
- **Uligheden** der skal respekteres, er

$$4+\delta V^C \leq 5+\delta V^D.$$

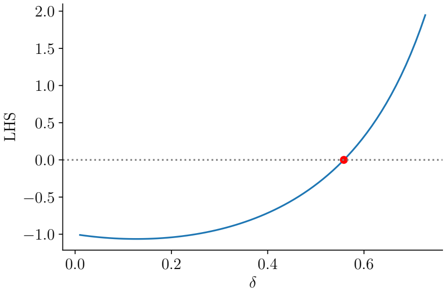
Bevis

- **Hov:** det er eksakt det modsatte af **Periode 1**!!
  - $\Rightarrow$ begge kan kun respekteres, hvis "=" gælder:

$$\delta(V^C - V^D) = 1$$
$$\Leftrightarrow \delta\left(\frac{4}{1-\delta} - \frac{5}{1-\delta^2}\right) = 1$$

  - $\Rightarrow$ Ligningen har kun en løsning for $\delta \in (0;1)$: knivsæg! $\blacksquare$

Løsning til ligningen




```
from scipy.optimize import fsolve
def lhs(delta):
    return delta * (4./(1.-delta) - 5./(1.-delta**2)) - 1.
x0 = 0.5 # pick a reasonable starting value
delta_star = fsolve(delta, x0) # make numerical solver fint the "red dot"
```

Konklusion

- **Tit-for-tat** er *kun* en SPNE for *nøjagtigt én* værdi af δ (dvs. på en *knivsæg)*
  - Ellers er der incitament til at afvige.
  - **Normalt** er δ ikke noget, vi ønsker at lægge restriktioner på...
    - Den er bare givet af miljøet, ikke noget agenterne eller vi kan vælge
- **Intuitionen for resultatet:** strategien kræver, at $BR^1(\text{tie})$ indeholder begge mulige strategier
  (pga. krævet adfærd i forskellige undrespil)
  - Periode 1: her foreskriver TFT, at $BR_1(\text{tie}) = \text{tie}$
  - I underspillet $h = (...(\text{tie}, \text{sladre}))$: her foreskriver TFT, at $BR_1(\text{tie}) = \text{sladre}$.

Tit-for-tat i praksis

- Fisk gør det! youtu.beuikKXWWpjkU
- **Robert Axelrod:** afholdt konkurrencer i 1980'erne
  - ... her var Tit-for-tat svær at slå
- **Intuitivt:** den slår en balance:
  - **Trigger strategien:** Maksimal straf
    - $\Rightarrow$ super træls, hvis man "ved et uheld" spiller Defect (sladre)
  - **Naivt samarbejde:** alt for nem at *udnytte*.
- **Straf-fasen** i tit-for-tat varer kun én periode.
  - Til gengæld er den ikke underspilsperfekt:
    - Enten gider man ikke samarbejde i første periode,
    - eller også gider man ikke forblive i de "cykliske" afvigelser.

Straf i praksis

- **Diskuter:** Hvornår er det realistisk at holde sig til sin strategi?
  - Mere på spil? Personlig kontakt? Algoritmer?
- **Eksempel:** konkurser – ofte er der forhandlinger. Fx Trump
  BQ: *You're not talking about renegotiating sovereign bonds that the U.S. has already issued.*
  DT: *No, I don't want to renegotiate the bonds, but I think you can do discounting. I think depending on where interest rates are, I think you can buy back. I'm not talking about with a renegotiation, but you can buy back at discounts, you can do things at discounts. I'm not even suggesting that we don't borrow money at very low rates long term so we don't have to worry about when they come due.*
- **Hvordan** kan vi **modellere genforhandling?** Hvad gør det?
- **Refinement:** *renegotiation proofness* – et krav i feltet *mekanismedesign* til en kontrakt:
  - Parterne skal ikke i et underspil kunne ønske at genforhandle kontrakten og kunne vinde ved det.

Folk Theorem

Folk Theorem

Definition: opnåelige payoffs

Lad $G = (\{1,2\}, S, U)$ være et diskret spil. Da er de opnåelige payoffs, V, de kombinationer (u_1, u_2), så

$$u_1 = \sigma_1' U_1 \sigma_2 \text{ og } u_2 = \sigma_1' U_2 \sigma_2$$

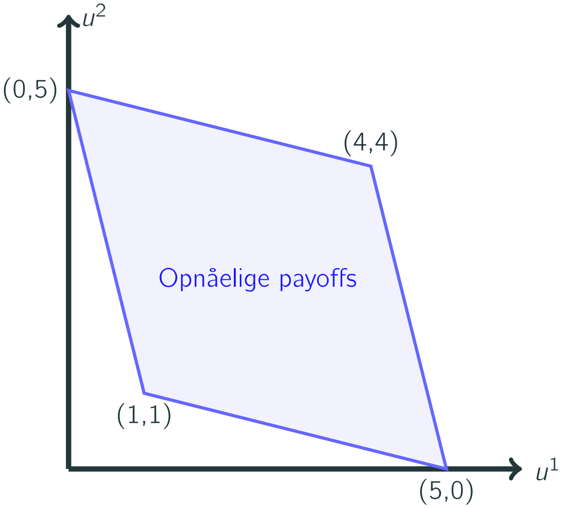
for strategivektorer (sandsynlighedsfordelinger) $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Delta S$.

- Alternativ formulering:

$$V^{\text{FD}} = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = p_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + p_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + (1 - p_1 - p_2 - p_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Eksempel: FD

- **Eksempel:** i fangernes dilemma, er payoffs (4,4), (5,0), (0,5), (1,1).



Minimax payoff

Definition: MiniMax payoff

Minimax-payoff'et i *rene strategier* for spiller i, m_i, defineres som

$$m_i = \min_{a_{-i} \in S_{-i}} \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}).$$

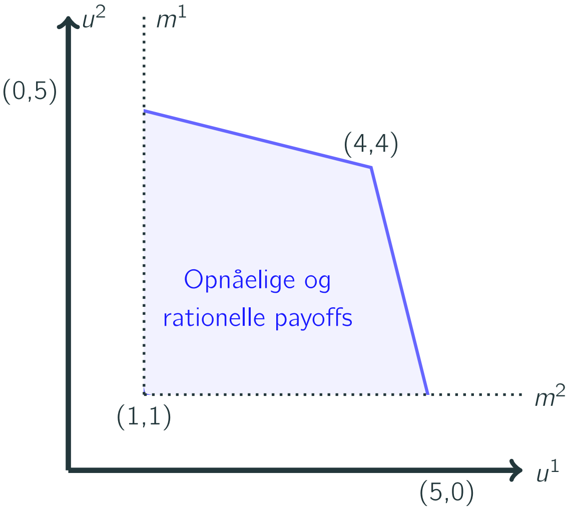
- **Eksempel:** i FD er $\max U_1 = (5, 1)$, så $m_1 = 1$.
- **Intuitivt:** Først vælger 1 en celle i hver kolonne, så vælger 2 blandt disse mulige outcomes det værste for 1.
  - $\Rightarrow$ m_i er et *worst-case* payoff for i under rene strategier.

Definition: minimax payoff

Minimax payoffet i blandede strategier, μ_i, defineres som

$$\mu_i = \min_{\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}} \max_{s_i \in S_i} \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}(s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i}).$$

Opnåelige og rationelle payoffs



Rationalitet

- **Bemærk:** pr definition må $\mu^i \leq m^i$ (minimeres over streng delmængde)
- **Eksempel – Matching Pennies:**

	plat	krone
plat	-1,1	1,-1
krone	1,-1	-1,1

  - $m_1 = 1$,
  - $\mu_1 = 0$ (opnås ved $\sigma_2(\text{plat}) = \frac{1}{2}, \sigma_2(\text{krone}) = \frac{1}{2}$)

Definition: rationalitet

En payoff vektor $v = (v_1, ..., v_n)$ er individuelt rationel, hvis $v_i \geq m_i$ for alle $i \in N$.

Folk Theorem

Folk Theorem

Lad v være en opnåelig og individuelt rationel payoff-vektor for stadiespillet G. Så findes der $\underline{\delta} \in (0;1)$ således, at der for alle $\delta \in (\underline{\delta};1)$ eksisterer en SPNE af $G(\infty)$, hvor payoff til spiller i (i forventning) er v^i.

Hvis desuden $v^i > m^i$ for alle i, så er denne SPNE en ligevægt i rene strategier.

Eksempel: Gentaget FD

- **Lad** os lave et konstruktivt eksempel
  - Typeopgave!!
- **Betragt** $G(\infty, \delta)$, hvor stadiespillet G er Fangernes Dilemma, og $\delta \in (0; 1)$.
- **Antag** vi ønsker at konstruere en ligevægt, der giver payoff et payoff v, fx $v = (4, 4)$.
- $\Rightarrow$ **vi har bevist**, at *Trigger*-strategien er SPNE:
  - Spil *tie* i første periode
  - Hvis nogen har afveget nogensinde spil *sladre*, ellers spil *tie*.
  - Vi viste, at det er en SPNE, hvis $\delta \geq \frac{1}{4}$.

Mere generelle Trigger-strategier

- **Antag** vi ønsker at konstruere en strategi, der understøtter arbitrære opnåelige payoffs, v, langs ligevægtsstien
- Antag der findes en strategiprofil, $s^* \in S$, som giver nytteprofilen, dvs. $v_i = u_i(s^*)$.
  - **Fangernes dilemma:** Vi ønsker (4,4) og bruger $s^* = (\text{tie}, \text{tie})$.
- **Som trigger** bruger vi en alternativ SPNE i spillet, $\hat{s} \in S$, så $v_i > u_i(\hat{s})$ for alle i
  - **Fangernes dilemma:** her brugte vi SPNE'en $\hat{s} = (\text{sladre, sladre})$, som gav $u_i(\hat{s}) = 1$.

Bevis: GT er SPNE

- **General Trigger-strategi:** Spil a^* indtil nogen afviger; spil derefter $\hat{s}$.
- **Påstand:** dette er en SPNE.
- **Bevis:** Vi skal vise, GT er BR i alle historikker:
- **Historikker med afvigelser:** I disse spiller modstanderen $\hat{s}$ for evigt.
  - Siden $\hat{s}$ er en NE for G, er $(\hat{s}, \hat{s}, ...)$ en SPNE for $G(\infty)$.
- **Historikker på ligevægtsstien** – payoff for at *blive*
  - Payoff for at blive (dvs. spille a^*) er

$$U(\text{trigger}, \text{trigger}) = u_i(s^*) + \delta V^C, \quad \text{hvor } V^C = u_i(s^*)\frac{1}{1-\delta}.$$

  - Afvigelse: fra næste periode spilles $(\hat{a})$ for evigt, så kun *i dags payoff* påvirkes:

$$U(\text{afvige}, \text{trigger}) = \max_{s_i} u_i(s_i, s^*_{-i}) + \delta V^D, \quad \text{hvor } V^D = u_i(\hat{a})\frac{1}{1-\delta}.$$

Bevis: GT er SPNE

- **Hvis** GT skal være en SPNE, må vi kræve

$$
\begin{aligned}
U(\text{trigger}, \text{trigger}) &\geq U(\text{afvige}, \text{trigger}) \\
\Leftrightarrow u_i(s^*) + \delta V^C &\geq \max_{s_i} u_i(s_i, s^*_{-i}) + \delta V^D \\
\Leftrightarrow v_i + \delta v_i \frac{1}{1-\delta} &\geq \overline{v} + \delta u_i(\hat{s}) \frac{1}{1-\delta} \\
\Leftrightarrow v_i &\geq (1-\delta)\overline{v} + \delta u_i(\hat{s})
\end{aligned}
$$

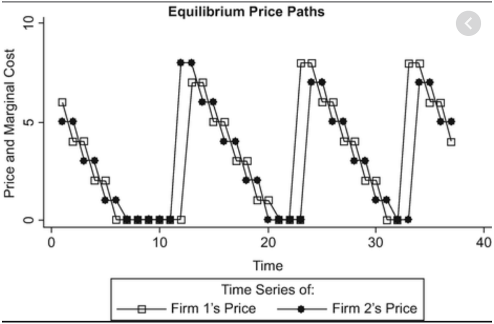
- Definer nu δ_i som det δ, der løser uligheden med lighed.
  - Bemærk at $\overline{v} \geq u_i(s^*) \equiv v_i > u_i(\hat{s})$, så δ_i må eksistere (det er en konveks kombination af to endepunkter af et interval)
- **Lad** $\overline{\delta} := \max_i(\delta_i)$.
- Så holder rationalitet for alle $\delta > \overline{\delta}$., og dermed er s^* en NE i det udvidede stadiespil. ■
- **Intuitivt:** *Uanset* hvor lille forskel $u_i(s^*) - u_i(\hat{s})$ og hvor stor en fristelse til afvigelse, $\overline{v} - v_i$,
  - så hvis spillet varer uendeligt, og man er tålmodig nok, så er det motivation for at blive tro mod triggeren!

Dynamiske ligevægte

Andre ligevægte?

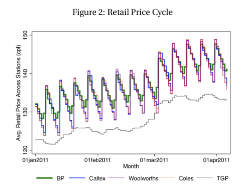
- Vi har studeret **statiske** ligevægte
  - Modellen er dynamisk, men ligevægten er, at der bydes det samme i alle perioder.
- Der findes også **dynamiske** versioner, fx *Edgeworth Cycles*.

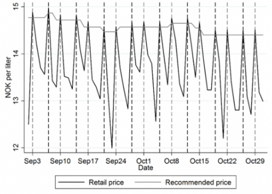
Figure 1: Edgeworth Priscykler



- **Fordel:** her kan vi *se* der sker noget (det er ikke bare faste, høje marginalomkostninger)

Benzinmarkeder





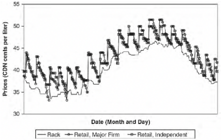
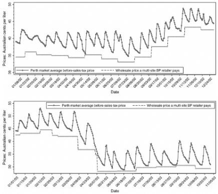


Figure 4.1: Figure from Noel (2007) showing evidence for Edgeworth price cycles in the Canadian gasoline retail market. This figure depicts twelve-hourly price series for a "representative" sample of gas stations located in Toronto operated by a major brand and an independent competitor.



Sponsored Search (Yahoo!)

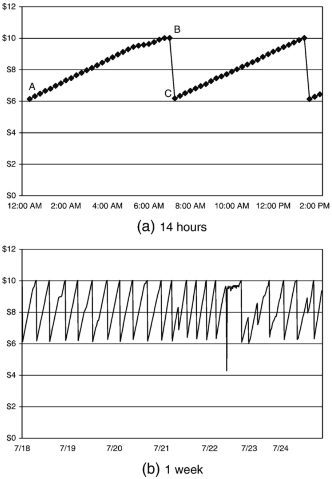
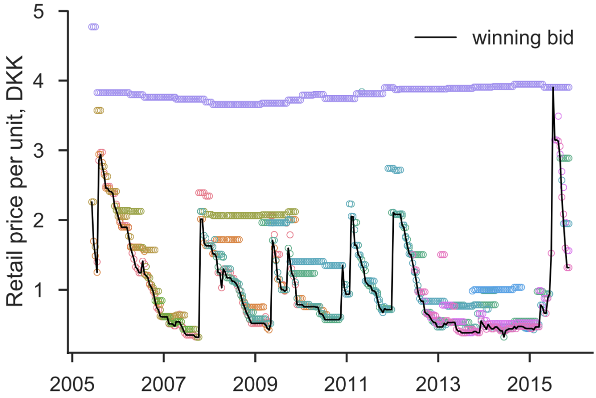


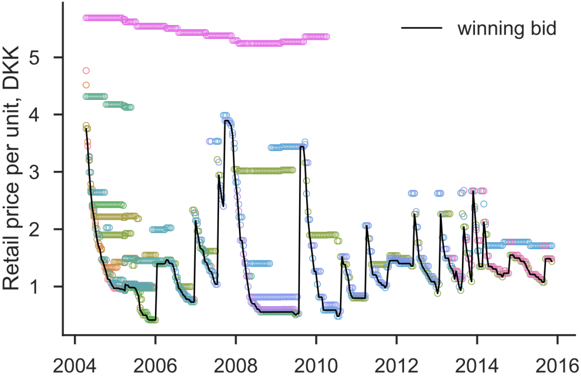
Fig. 1. "Sawtooth" bidding pattern. (a) 14 h. (b) 1 week.

Priscykler i benzin

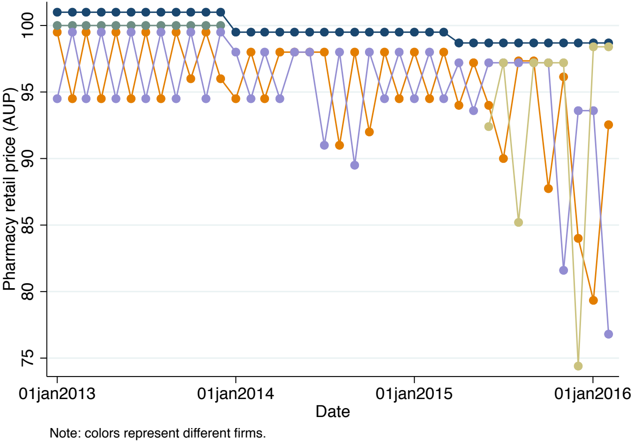
Figure 1: Price of Lamotrigin, anti-convulsant (epilepsy)



Farmapriser i DK: Carvedilol



Farmapriser fra Sverige: Budrotationer



Gentaget Priskonkurrence

Spil i kurset

FL	Navn	Bemærkninger
1	Fangernes dilemma	Nash EQ ej "optimal"
1	Skønhedskonkurrencen / "gæt 2/3"	K'te ordens rationalitet
2	Cournot	Ren, indre Nash EQ
2	Bertrand	Ren Nash på randen
2	Matching pennies (Anti-koordinationsspil)	Ingen NE i rene strategier
2	Sten-saks-papir	Ingen NE i rene strategier
2	Hjortejagt (koordinationsspil)	To NE, enighed
2	Bach eller Stravinsky ("Battle of the sexes")	To NE, uenighed
5	Dommedag	Utroværdig trussel
6	Stackelberg	First-mover fordel
6	Bank run	2-stage
7	Ultimatumspil	Retfærdighed
7	Gentaget ultimatumspil	Baglæns Induktion
9	Gentaget fangernes dilemma	NE spilles i hver periode
9	Uendeligt gentaget fangernes dilemma	Grim trigger og tit-for-tat.
10	**Gentaget Bertrand/Cournot**	**Trigger $\Rightarrow$ stiltiende kartel**
	Bach-Stravinsky med ukendte typer	Unik ligevægt
	Cournot med hemmelige omkostninger	Løses eksplicit
	Auktion: 1st price sealed bid	"Bid shading"
	Auktion: 2nd price sealed bid	Nash at byde sandfærdigt!
	Auktion: common value	Vinderens forbandelse
	Bayesianske spil (undercover betjent)	Handlinger som signal
	Signaling på jobmarkedet	Signalværdien i uddannelse

Gentaget Bertrand

Gentaget (ren) Bertrand

Lad $G(\infty, \delta)$ være det uendeligt gentagne spil med diskonteringsfaktor $\delta \in (0; 1)$, hvor stadiespillet, G, har $N = \{1, 2\}$ og $S_i = \mathbb{R}_+$, og hvor payoffs er

$$\pi^i(p^i, p^j) = \begin{cases} (p_i - c)D(p_i) & \text{hvis } p_i < p_j \\ (p_i - c)D(p_i)\frac{1}{2} & \text{hvis } p_i = p_j \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

- **NE:** Bemærk at stadiespillet har NE $= \{(c, c)\}$:
  - Den unikke NE er, at begge spillere byder marginalomkostningerne.
- $\Rightarrow$ Dermed ved vi, at én SPNE (der er måske flere) er den, hvor begge spillere sætter $p = c$ i alle perioder.
- **Men:** måske kan vi understøtte højere payoffs jf. Folk Theorem.

Stiltiende Kartel (tacit collusion)

- **Definér** monopolprisen som

$$p^m = \arg\max_{p \in \mathbb{R}} (p - c) D(p).$$

og monopolprofitten som $\pi^m \equiv (p^m - c) D(p^m)$.

- **Betragt** flg. Trigger strategi:
  - Start med $p_i = p^m$, derefter

$$p_i = \begin{cases} p^m & \text{hvis } p_{t-1} = (p^m, p^m) \\ c & \text{ellers,} \end{cases}$$

    hvor p_{t-1} angiver sidste periodes priser

- **Bemærk:** da $(p_1, p_2) = (c, c) \in \mathrm{NE}(G)$, er det en SPNE at spille (c, c) for evigt.
  - $\Rightarrow$ dvs. truslen er troværdig.
- Men er firmaerne tålmodige nok?

Udledning af δ-ulighed

- **Påstand:** der findes $\bar{\delta} \in (0; 1)$, så Trigger-strategien er SPNE for alle $\delta > \bar{\delta}$.
- **Bevis:** Vi skal vise, at man ikke vil afvige hverken *på* eller *væk fra* ligevægtsstien.
- **Payoff på stien** under Cooperation

$$V^C = \pi^C + \delta\pi^C + \delta^2\pi^C + \ldots = \frac{\pi^C}{1-\delta},$$

hvor

$$\pi^C = \frac{\pi^m}{2} = (p^m - c)\frac{D(p^m)}{2}.$$

- **Payoff** under **Defection**. Her spilles NE:

$$\pi^D = (c-c)D(c) = 0,$$

så

$$V^D = 0 \times \frac{1}{1-\delta} = 0.$$

Udledning af δ-ulighed

- **Påstand:** den optimale one-shot afvigelse er $\hat{p} = p^* - \varepsilon$ for ε "så lille som mulig"
  - Matematisk set eksisterer ε ikke... teknisk set...
  - ... man kan antage $S_i = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ for $|s_k - s_{k-1}| = \varepsilon$ "lille" (fx en øre)
- $\Rightarrow$ Da får i hele markedet til den højest mulige pris: $\hat{\pi} \cong 2\pi^C$
- **Rationalitet** af strategien kræver dermed

$$\begin{aligned} \overbrace{\pi^C + \delta V^C}^{\text{NTV af Trigger}} &\geq \overbrace{\hat{\pi} + \delta V^D}^{\text{NTV af Afvigelse}} \\ \Leftrightarrow \underbrace{\delta(V^C - V^D)}_{\text{ændring på langt sigt}} &\geq \underbrace{\hat{\pi} - \pi^C}_{\text{ændring i dag}}. \end{aligned}$$

- Indsætter vi *approksimationen* $\hat{\pi} \equiv D(p^* - \varepsilon)(p^* - \varepsilon - c) \cong \pi^*$,[1] fås

$$\Leftrightarrow \frac{\delta}{1-\delta}\frac{1}{2}\pi^* \geq \frac{1}{2}\pi^*$$

$$\Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

Gentaget Bertrand

- **Konklusion:** hvis $\delta \geq \frac{1}{2}$, kan det tavse kartel opretholde monopolprisen med Trigger-strategien.
- **Dette** er et ret bredt interval af δ'er!
  - ... fordi der er nul profit i NE!
  - Meget alvorlig trussel, men den er troværdig, for det er en SPNE.
- **I stedet** for approksimationen, kunne vi have indsat

$$\begin{aligned} \delta(V^C - V^D) &\geq \hat{\pi} - \pi^C \\ \Leftrightarrow \frac{\delta}{1-\delta}(\pi^C - \pi^D) &\geq \hat{\pi} - \pi^C \\ \Leftrightarrow \delta &\geq \frac{\hat{\pi} - \pi^C}{\hat{\pi} - \pi^D}. \end{aligned}$$

Gentaget Cournot

Gentaget Cournot

Lad $G(\infty, \delta)$ være det uendeligt gentagne spil med diskonteringsfaktor $\delta \in (0;1)$, hvor stadiespillet, G, har $N = \{1,2\}$ og $S_i = \mathbb{R}_+$, og hvor payoffs er

$$\pi_i(q_i, q_j) = \left[P(q_i + q_j) - c\right] q_i,$$

og $P(Q)$ er en "pæn" funktion på $\mathbb{R}_+$ (så profitmaksimeringsproblemet har en indre løsning, dvs. $\pi(q_1, q_2)$ bliver strengt konveks)

- **Bemærk:** Stadiespillet, G, har en unik Nash-ligevægt, (q^*, q^*), som løser

$$q_1^* = \arg\max_{q_1 \geq 0} \left[P(q_1 + q_2) - c\right] q_1$$

$$q_2^* = \arg\max_{q_2 \geq 0} \left[P(q_1 + q_2) - c\right] q_2.$$

- **Men,** en monopolist eller et *statisk* kartel, ville løse

$$q_1 = q_2 = \frac{Q^m}{2}, \quad Q^m = \arg\max_{Q \geq 0} \left[P(Q) - c\right] Q.$$

Gentaget Cournot

- **Trigger**-strategien ville her være
  - Initialisering: spil $\frac{Q^m}{2}$,
  - Derefter, hvis historikken kun består af $(\frac{Q^m}{2}, \frac{Q^m}{2})$, så spil $\frac{Q^m}{2}$, ellers spil q^* for evigt.
- **Er den rationel?** Vi beregner ligevægts payoffs under Cooperation

$$V^C = \frac{\pi^C}{1-\delta}, \quad \pi^C = \frac{1}{2}\left[P(Q^m) - c\right] Q^m.$$

- **Efter afvigelsen** er Deviation at vi for evigt spiller NE, (q^*, q^*):

$$V^D = \frac{\pi^D}{1-\delta}, \quad \pi^D = \left[P(q^* + q^*) - c\right] q^*.$$

- **Den optimale** One-Shot afvigelse, $\hat{q}$, som giver $\hat{\pi}$, afhænger dermed *kun* af nuværende periodes payoff. Dvs.

$$\hat{q} = \arg\max_{q \geq 0} \left[P\left(q + \frac{Q^m}{2}\right) - c\right] q.$$

Gentaget Cournot: Trigger

- **Rationalitet – på stien**: vi skal overholde

$$\begin{aligned}
\pi^C + \delta V^C &\geq \hat{\pi} + \delta V^D \\
\delta(V^C - V^D) &\geq \hat{\pi} - \pi^C \\
\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\delta}{1-\delta}(\pi^C - \pi^D)}_{\text{ændring i fremtiden}} &\geq \underbrace{\hat{\pi} - \pi^C}_{\text{ændring i dag}} \\
\Leftrightarrow \delta &\geq \frac{\hat{\pi} - \pi^C}{\hat{\pi} - \pi^D}.
\end{aligned}$$

  NB! $\hat{\pi} > \pi^C > \pi^D$ sikrer $\delta \in (0;1)$.
- **Fristelsen** til at afvige er $\hat{\pi} - \pi^C$.
  - Jo mindre den er, des mindre incitament til at afvige.
- **Tålmodighed:** når $\delta \to 1$ vil LHS $\to \infty$, så længe $\pi^C > \pi^D$, mens RHS stor fast.
  - $\Rightarrow$ dvs. der eksisterer altid et $\delta \in (0;1)$, så vi er tålmodige nok til at vedligeholde det stiltiende kartel.

Kogebog

1. **Løs** for Nash-ligevægtens payoff i stadiespillet, π^D (straffen)
2. **Løs** for (eller vælg) det ønskede kooperative outcome, π^C
3. **Find** payoff for den optimale one-shot afvigels, $\hat{\pi}$ (fristelsen)
4. **Udled og forklar** uligheden

$$\delta \geq \frac{\hat{\pi} - \pi^C}{\hat{\pi} - \pi^D}.$$

5. **Find** det δ^i for hver spiller i, som tilfredsstiller uligheden.
   - Vælg det største, $\overline{\delta} := \max_i \delta^i$, som det krav, der gør at alle spillere vil være med.

I virkeligheden

Karteller i praksis

- **I modellen:** straffen sker aldrig, for ingen afviger på ligevægtsstien
- **I praksis** ser vi straffe ske som spillerne tester hinanden, laver fejl, etc.
- **Koordinering** kan også være meget krævende
- **Tavse vs. eksplicitte karteller**:
  - Et tavst kartel er ikke ulovligt:
    - Vi kan ikke se forskel på grim trigger og højere marginalomkostninger!!
  - Et [eksplicit] kartel er ulovligt, og beskyldninger er injurierende!!

Olie i 2020

- I 2020 brød dialogen mellem OPEC (primært arabiske stater) og Rusland vedr. produktionsnedsættelser brød sammen
- Resulterede i skiftevis annonceringer om *stigninger* i produktionen midt under COVID krisen og lockdown
- Største fald i olieprisen siden Golfkrigen!

Figure 2: Oliepris (WTI)

The Great Electrical Conspiracy

- En sag om et **eksplicit kartel**
- 1960: Stor sag ved Department of Justice
- Price-fixing i bud ved auktioner om elektriske turbiner
- Vinderen aftalt på forhånd af et system:
  - Månens faser afgjorde, hvem der skulle vinde!
- Store firmaer involverede!
  - Normalt har man ellers tænkt, at de vil have svært ved at motivere CEOs
  - man kan ikke skrive det ned i en kontrakt
  - Derfor er de fleste kartelsager i praksis vedr. mindre firmaer.

Andre interessante sager

- **Cement i DK:** Svend Albæk, Peter Møllgaard and Per B. Overgaard, 1997: *Government-Assisted Oligopoly Coordination? A Concrete Case*
- **Vitaminkartellet:** Igami & Sugaya, 2021: *Measuring the Incentive to Collude: The Vitamin Cartels, 1990-1999*
- **Frimærkekartellet:** Asker 2010: *A Study of the Internal Organization of a Bidding Cartel*
- **Drug prices:** (en sag, som stadig kørere) https://knowledge.wharton.upenn.edu/article/generic-drug-price-fixing/

Spændende emner

- **Prisalgoritmer:** faciliterer en meget stærk og garanteret commitment.
  - https://www.kfst.dk/media/yecpmmxu/prisalgoritmer.pdf
- **Prisgaranti:** kan også være en måde at hæve priser uden at tabe efterspørgsel
  - se https://www.kfst.dk/media/50982/effekter-af-prismatching.pdf

Forhandling (bargaining)

Anders Munk-Nielsen

Blok 4, 2022

Introduktion

Overblik

	Statisk	**Dynamisk**
Komplet information	~~Matrix-spil~~	**Sekventielle spil**
Inkomplet information	Fx auktioner	Signaleringsspil

Indsigter

Forhandlingsspil

- **Ensidige eller alternerende bud:** altafgørende for fordelingen
- **Alternerende bud:** sidste periode er vigtig
- **Uendelig horisont:** *meget* kan ske ...
  - ... men utålmodighed giver en unik løsning!

Agenda

	Perioder	Hvem byder	Diskontering	Forhandlingsmagt
1	2	Kun en	÷	Byderen
2	T	Begge	÷	Sidste byder
3	∞	Kun en	÷	Ingen (“alt kan ske”)
4	∞	Kun en	✓	Byderen
5	∞	Begge	✓	Første byder

Lidt at vågne på: Ultimatumspillet

Spil: Ultimatumspillet (take-it-or-leave-it)

I skal dele 1000 kr. Spiller 1 foreslår $x \in [0; 100\%]$ til sig selv og $(1 - x) \times 1000$ kr. til modparten. Spiller 2 skal derefter acceptere eller forkaste tilbuddet: forkastes det, modtager begge 0 kr.

Spil i kurset

FL	Navn	Bemærkninger
1	Fangernes dilemma	Nash EQ ej "optimal"
1	Skønhedskonkurrencen / "gæt 2/3"	K'te ordens rationalitet
2	Cournot	Ren, indre Nash EQ
2	Bertrand	Ren Nash på randen
2	Matching pennies (Anti-koordinationsspil)	Ingen NE i rene strategier
2	Sten-saks-papir	Ingen NE i rene strategier
2	Hjortejagt (koordinationsspil)	To NE, enighed
2	Bach eller Stravinsky ("Battle of the sexes")	To NE, uenighed
5	Dommedag	Utroværdig trussel
6	Stackelberg	First-mover fordel
6	Bank run	2-stage
7	**Ultimatumspil**	**Retfærdighed**
7	Gentaget ultimatumspil	Baglæns Induktion
	Gentaget fangernes dilemma	NE spilles i hver periode
	Uendeligt gentaget fangernes dilemma	Grim trigger og tit-for-tat.
	Bach-Stravinsky med ukendte typer	Unik ligevægt
	Cournot med hemmelige omkostninger	Løses eksplicit
	Auktion: 1st price sealed bid	"Bid shading"
	Auktion: 2nd price sealed bid	Nash at byde sandfærdigt!
	Auktion: common value	Vinderens forbandelse
	Bayesianske spil (undercover betjent)	Handlinger som signal
	Signaling på jobmarkedet	Signalværdien i uddannelse

Ultimatumspillet

Ultimatumspillet

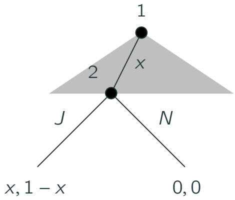
Spil: Ultimatumspillet

To spillere, $N = \{1, 2\}$, $S_1 = [0; 1]$, $S_2 = \{J, N\}$ ("Ja/Nej"). Payoffs er

$$u_1(s_1, s_2) = \mathbf{1}\{s_2 = J\}s_1,$$
$$u_2(s_1, s_2) = \mathbf{1}\{s_2 = J\}(1 - s_1).$$

- **Fremover** vil vi kalde s_1 for x med fortolkningen *"procentdelen af godet til personen selv."*
- **En strategi** er et x for spillet 1, og for spiller 2 er det $f : [0; 1] \to \{0, 1\}$.
  - Uden tab af generalitet er 2's valg et *cutoff* (dvs. accepter alt over $\overline{x}$)

Ultimatumspillet



SPNE

SPNE

Ultimatumspillet har en unik underspilsperfekt ligevægt, hvor 1 byder $(x, 1-x)$, og 2 accepterer alle $x \in [0;1]$.

- **Bemærk**: Det er altid optimalt for 2 at acceptere ethvert $x \in [0;1]$.
  - Fordi hun kan aldrig få *strengt højere* nytte ved at sige nej.
- **Bevis trin 1:** Dette er en ligevægt
  - Afvigelser for spiller 1 – hvis spiller 2 accepterer alt, så er det optimalt at vælge x mindst mulig, dvs. $x = 1$.
  - Afvigelser for spiller 2 – uanset hvad x er, så kan afvisning højst give 0, så intet strengt bedre.
- **Bevis – trin 2:** Det er den eneste ligevægt
  - Antag en anden ligevægt har $x' > 0$. Da $s_2 = Y$ altid er optimalt, accepteres denne.
  - Betragt en profitabel afvigelse, $x'' = \frac{1}{2}x'$. Denne accepteres også, og den stiller 1 bedre. ↯

Ultimatumspillet

- **Indsigt:** Spiller 2 har ingen *magt* til at disciplinere 1.
  - Det er svagt dominerende at acceptere alt.
  - … dvs. måske tilbyde et lille $\varepsilon > 0$ for at gøre det strengt
- **I praksis** spiller mennesker ikke sådan...
  - Sociale præferencer.

Ultimatumspillet i forskellige lande

TABLE 1—THE ULTIMATUM GAME IN SMALL-SCALE SOCIETIES

Group	Country	Mean offer[a]	Modes[b]	Rejection rate[c]	Low-offer rejection rate[d]
Machiguenga	Peru	0.26	0.15/0.25 (72)	0.048 (1/21)	0.10 (1/10)
Hadza (big camp)	Tanzania	0.40	0.50 (28)	0.19 (5/26)	0.80 (4/5)
Hadza (small camp)	Tanzania	0.27 (38)	0.20 (8/29)	0.28 (5/16)	0.31
Tsimané	Bolivia	0.37	0.5/0.3/0.25 (65)	0.00 (0/70)	0.00 (0/5)
Quichua	Ecuador	0.27	0.25 (47)	0.15 (2/13)	0.50 (1/2)
Torguud	Mongolia	0.35	0.25 (30)	0.05 (1/20)	0.00 (0/1)
Khazax	Mongolia	0.36	0.25		
Mapuche	Chile	0.34	0.50/0.33 (46)	0.067 (2/30)	0.2 (2/10)
Au	PNG	0.43	0.3 (33)	0.27 (8/30)	1.00 (1/1)
Gnau	PNG	0.38	0.4 (32)	0.4 (10/25)	0.50 (3/6)
Sangu farmers	Tanzania	0.41	0.50 (35)	0.25 (5/20)	1.00 (1/1)
Sangu herders	Tanzania	0.42	0.50 (40)	0.05 (1/20)	1.00 (1/1)
Unresettled villagers	Zimbabwe	0.41	0.50 (56)	0.1 (3/31)	0.33 (2/5)
Resettled villagers	Zimbabwe	0.45	0.50 (70)	0.07 (12/86)	0.57 (4/7)
Achuar	Ecuador	0.42	0.50 (36)	0.00 (0/16)	0.00 (0/1)
Orma	Kenya	0.44	0.50 (54)	0.04 (2/56)	0.00 (0/0)
Aché	Paraguay	0.51	0.50/0.40 (75)	0.00 (0/51)	0.00 (0/8)
Lamelara[e]	Indonesia	0.58	0.50 (63)	0.00 (3/8)	0.00 (4/20)

Ultimatumspillet: teori vs. virkelighed

Teori vs. virkelighed

I praksis tilbyder mennesker $x \gg 0$, og de forkaster tilbud med “små” x. Hvad kunne være mulige forklaringer?

Forbedringer?

Spørgsmål: hvordan kan vi "forbedre" (/påvirke) outcomes fra forhandlingerne?

- Kan rollen for **sociale præferencer** nedbringes? Hvad betyder
  - Mængden af penge, der skal deles?
  - Konteksten såsom anonymitet, online/in person, foran venner/fremmede, landet, lokalet, sproget i præsentationen af spillet?
- **Runder:** Kan det påvirke outcomes, hvis der er **flere runder** med bud og modbud?
  - Ville spillerne blive enige?
    - Hvis ja, hvor mange runder?
  - Gør det noget, om der er et endeligt antal runder (fx 4) vs. ingen øvre grænse?

Rationalitet og størrelsen af kagen

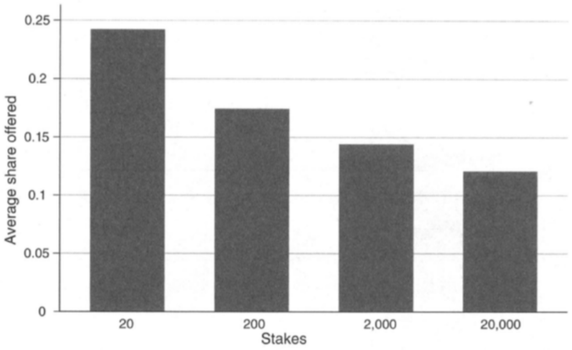


FIGURE 1. OFFER PROPORTION ACROSS STAKES

Nedbrug og størrelsen af kagen

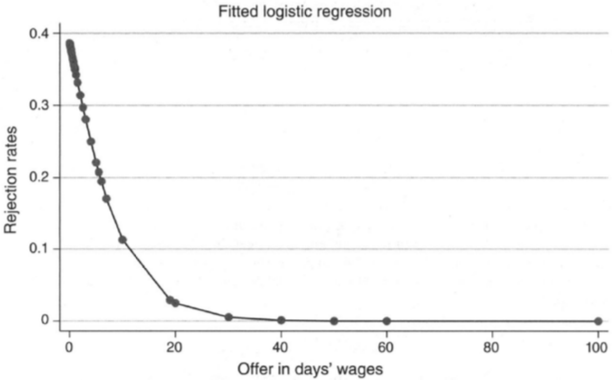


FIGURE 3. PREDICTED REJECTION RATES (*fitted logistic regression*)

Sekventiel Forhandling

Et par resultater vedr. dynamisk forhandling

- **Sammenbrud:** er det muligt, at rationelle spillere ikke når til enighed?

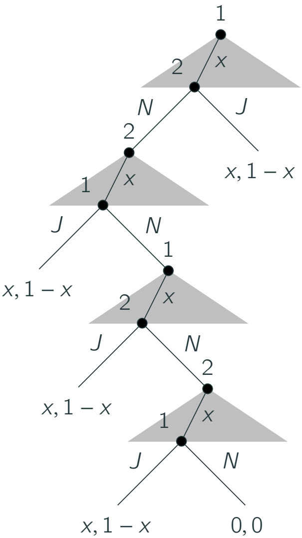
- **Accept i første runde:** er det muligt, at spillerne først når til accept efter et par runder?

Endelig horisont, alternerende bud

Spil 2: Forhandling med endelig horisont og alternerende bud

To spillere skiftes til at foreslå en fordeling $x \in [0; 1]$ og acceptere eller forkaste $a \in \{J, N\}$. Hvis der accepteres, slutter spillet med payoffs $(x, 1 - x)$, men hvis der forkastes, fortsætter spillet frem til periode T. Hvis der forkastes i sidste periode er payofs (0,0).

Spillet grafisk med $T = 4$



SPNE

Lad i indikere spilleren, der rykker i den sidste periode, og $j = 1 - i$ modparten. I enhver underspilsperfekt ligevægt vil payoff for i være 1, og den anden spiller vil få 0.

Bevis:

- Lad strategierne hedde σ:
  - i foreslår $x = 1$ i alle situationer og accepterer kun $x = 1$.
  - j foreslår $x = 1$ i alle situationer og accepterer alt.
- **Betragt sidste periode**, T. Dette underspil er identisk med spillet, vi analyserede før 1.
  - $\Rightarrow$ Her er det en Nash-ligevægt: i får alt, j intet.
- **Tidligere perioder:** uanset, hvad der foreslås, kan i afvige og foreslå σ, hvillket i hvert fald accepteres i periode T.

Uendelig horisont

Uendelig horisont

Spil 3: Forhandling med uendelig horisont og tosidige bud

To spillere, hvor 1 foreslår fordelinger, $x \in [0;1]$, og 2 vælger at acceptere eller forkaste, $s \in \{J, N\}$. Hvis der accepteres, slutter spillet med payoffs $(x, 1-x)$, men hvis der forkastes, fortsætter spillet. ~~frem til periode T~~

Bemærk, der er ingen sidste periode!

- **Intuitivt** er "$T = \infty$".
  - Den slags skaber altid en masse matematisk bøvl at håndtere.
- **Tosidige bud:** Spillerne skiftes til at foreslå en fordeling.

SPNE med Ensidige Bud

SPNE med uendelig horisont og ensidige bud

1. For ethvert $x^* \in [0;1]$ findes der en underspilsperfekt Nash-ligevægt, som resulterer i, at den første spiller foreslår x^*, hvorefer den anden accepterer.
2. Spillet har også en underspilsperfekt Nash-ligevægt, hvor spillerne aldrig når til enighed.

Bevis for 1:

- Betragt strategiprofilen, hvor
  - spiller 1 altid foreslår x^*,
  - og spiller 2 accepterer alle forslag x med $x \leq x^*$ (så hun får mindst $1 - x^*$).
- **Spiller 1:** Uanset hvilket underspil (dvs. start eller efter en sekvens af N) kan 1 højst opnå x^* givet 2's strategi.
- **Spiller 2:** Givet 1's strategi hjælper det ikke 2 at afvise (der kommer intet bedre i fremtiden)

SPNE med Ensidige Bud

SPNE med uendelig horisont og ensidige bud

1. For ethvert $x^* \in [0;1]$ findes der en underspilsperfekt Nash-ligevægt, som resulterer i, at den første spiller foreslår x^*, hvorefer den anden accepterer.
2. Spillet har også en underspilsperfekt Nash-ligevægt, hvor spillerne aldrig når til enighed.

Bevis for 2:

- Betragt strategiprofilen, hvor
  - Spiller 1 foreslår $x^* = 1$ initialt,
  - Hvis sidste forslag var $x = 1$, foreslå det samme; ellers foreslå $x = 0$.
  - Spiller 2: afvis $x = 1$, accepter $x = 0$.
- **Spiller 1:** vil altid få payoff 0 (afvisning af $(1, 0)$ eller accept af $(0,1)$), så ingen muligheder for at stille sig strengt bedre.

SPNE: fortsat

SPNE med uendelig horisont og ensidige bud

1. For ethvert $x^* \in [0; 1]$ findes der en underspilsperfekt Nash-ligevægt, som resulterer i, at den første spiller foreslår x^*, hvorefer den anden accepterer.
2. Spillet har også en underspilsperfekt Nash-ligevægt, hvor spillerne aldrig når til enighed.

Bevis for 2, fortsat: Skal vise, at spiller 2 ikke har nogen profitable afvigelser

- Hvis seneste bud var (1,0), så hjælper det ikke at afvige ved at acceptere (giver payoff på 0)
- Hvis 1 bød (0,1) hjælper det ikke at afvige: 2 bør acceptere (og få det maksimale payoff)
- Hvis 1 bød $(x, 1-x)$ for et $x \in (0; 1)$, så vil 2's afvigelse føre til, at 1 i *næste* periode byder (0,1) (jf. 1's postulerede strategi), så det er bedre at vente. ■

Opsamling

- **Forskellen** var, om spillet havde en <u>**sidste periode**</u> eller ej.
- $T < \infty$: Backwards Induction fører til, at sidste periodes resultat føres bagud.
  - Spilleren, som giver sidste tilbud, får al forhandlingsmagten *(bargaining power)*!
- $T = \infty$: "Alt kan ske" (rettere: <u>meget</u> kan ske)
  - **Forhandlingsmagten** til forslagsstilleren (spiller 1) er forsvundet!
- **Urealistisk:** Hvis $T = 1,000,000$ år, burde det ikke påvirke noget, hvad der sker i sidste periode...
  - $\Rightarrow$ løsningen er diskontering.

Diskontering

Diskontering

- **Intertemporal nytte:** når agenten får nytte fra flere perioder.
  - Mest normale: eksponentiel diskontering

Definition: Eksponentiel diskontering

$$U(u_1, ..., u_T) = \sum_{t=1}^{T} \delta^t u_t, \quad \delta \in (0; 1].$$

δ kaldes diskonteringsfaktoren.

- **Egenskab:** Konsistente valg over tid.
  - Modsat fx hyperbolsk diskontering.
- **Fortolkning:** hvis den risikofrie rente er r (fx 5%), så er

$$\delta = \frac{1}{1 + r}$$

  en naturlig diskonteringsfaktor, som gør agenten indifferent mellem x i nytte i dag og $(1 + r)x$ i morgen.
  - Meget vigtigt fx i længerevarende offentlige projekter.

Uendelig horisont med diskontering

Spil 4: Forhandlingsspil med uendelig horisont, ensidige forslag og diskontering

Som 3, men payoff ved accept af $x \in [0;1]$ i periode t er nu $\alpha^t x$ for spiller 1 og $\beta^t(1-x)$ for spiller 2.

- **Påstand:** strategien fra før er *ikke* en SPNE.
- **Bevis:** Lad $(x^*, 1-x^*)$ være forslaget til en SPNE fra før, for modstrid.
- **Dvs.** 2 vil acceptere $(x^*, 1-x^*)$ i næste periode iflg. ligevægtsstrategien.
- **1's afvigelse** kan da være $(x^* + \varepsilon, 1 - x^* - \varepsilon)$ for et (lille) $\varepsilon > 0$.
    - Der findes $\varepsilon > 0$ småt nok, så $1 - x^* - \varepsilon > \beta(1 - x^*)$.
    - $\Rightarrow$ 2 vil acceptere dette
    - $\Rightarrow$ for 1 er det win-win, da $x^* + \varepsilon > \beta x^*$
    - $\Rightarrow$ afvigelsen var profitabel. $\lightning$
- **Implikation:** for enhver sådan strategi findes en afvigelse.

SPNE: "$T = \infty$" med diskontering

SPNE

For ethvert sæt af diskonteringsfaktorer, $\alpha, \beta' \in (0;1)$, har spillet en **unik** underspilsperfekt Nash-ligevægt, (1,0), hvor spiller 1 får det hele i første periode.

Bevis: Betragt strategien

- Spiller 1 foreslår altid (1,0), og
- Spiller 2 accepterer alle forslag.

Beviset består af

1. Denne strategi er en SPNE,
2. Payoff for spiller 2 må være 0,
3. Afrunding.

SPNE: Bevis trin 1

- **Påstand:** strategien er *en* SPNE
- **Bevis:** vi undersøger mulige afvigelser *på ligevægtsstien*
  - **Spiller 1:** Ingen grund til at foreslå mindre når 2 altid accepterer.
  - **Spiller 2:** Ingen grund til at afslå, hvis 1 holder sig til sin strategi (der kommer ingen bedre tilbud senere)

SPNE: Bevis trin 2

- **Påstand:** Spiller 2 får payoff 0.
- **Bevis:** Lad os navngive det maksimale payoff for spiller 2 på tværs af alle SPNE ved M.
- **2 vil acceptere** ethvert forslag, der giver mere end at få M en periode senere
  - Dvs. 2 accepterer hvis $x > \beta M$.
- **Dvs.** en *nedre grænse* for 1's payoff er $1 - \beta M$.
- **Men** hvis 1's worst case er $1 - \beta M$, så er *best case* for 2 βM.
- **Konklusion:** M er øvre grænse og βM er nedre grænse for... men $\beta < 1$!
- $\Rightarrow$ dette kræver $M = 0$. ■
  - (Bemærk: hvis $\beta = 1$ kræves dette ikke!)

SPNE: Bevis trin 3

- **Påstand**: følgende strategi udgør den eneste SPNE.
  - Spiller 1 foreslår altid (1,0), og
  - Spiller 2 accepterer alle forslag.
- **Bevis:** Antag for modstrid, at der skulle være en SPNE, hvor 1 får payoff $\tilde{x} < 1$.
- **Afvigelse** for 1: foreslå $(\tilde{x} - \varepsilon, 1 - \tilde{x} - \varepsilon)$ (for et $\varepsilon < 1 - \tilde{x}$).
  - 2 accepterer dette (jf. at 2 højst forventer at få 0)
  - 1 stilles bedre end ved $\tilde{x}$. ↯
- **Denne type modstrid** kan konstrueres for alle $\tilde{x} \neq 1$. Ergo er eneste mulige SPNE en, hvor 1 byder (1,0). ■

Spil

Spil 5

Betragt et forhandlingsspil med uendelig tidshorisont, alternerende bud, og diskontering med faktorerne $\alpha, \beta \in (0; 1)$.

- **Det nye:** Nu kan *begge* stille forslag, skiftevis.

SPNE

SPNE

Spillet har en unik underspilsperfekt Nash-ligevægt, hvor

- Spiller 1 foreslår altid $(x^*, 1-x^*)$ og accepterer alle tilbud med $x \geq 1-y^*$,
- Spiller 2 foreslår altid $(1-y^*, y^*)$, og accepterer alle tilbud med $y \geq 1-x^*$,

og hvor

$$x^* = \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}, \quad y^* = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}.$$

Bemærk: Disse forslag er den unikke løsning til ligningerne:

$$\alpha x^* = 1-y^* \wedge \beta y^* = 1-x^*$$

- Dermed er fx 1 indifferent mellem $1-y^*$ nu og x^* i næste periode.

SPNE: Bevis, trin 1

- **Påstand:** Strategien udgør en SPNE.
- **Bevis:** Vi leder efter profitable afvigelser for begge spillere
- **Spiller 1:** i en historik, hvor det er 1's tur til at foreslå:
  - Hun kan foreslå x^* og få enighed med det samme.
  - Hun kan afvige og få mindre, eller få uenighed, hvilket kun kan føre til mindre payoff (givet 2's strategi)
- I en historik, hvor 1 modtager et tilbud, kald det $(1 - y, y)$
  - Hvis $1 - y \geq x^*$ siger 1's strategi: accepter, hvilket giver $1 - y^*$ nu.
  - Hvis 1 afviger, kunne hun ikke opnå bedre end x^* mindst én periode senere, hvilket har værdi αx^*.
    - Men y^* løser netop netop $\alpha x^* = \alpha \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta} = 1 - y^*$.
- **Tilsvarende**, hvis hun modtager $y < 1 - y^* = \alpha x^*$, er det bedre at afvige og foreslå x^* næste periode.
- **Spiller 2:** analogt bevis.

SPNE: Bevis, trin 2

- **Definer** G^i: spillet, som følger efter spiller $i = 1, 2$ giver et bud. (bemærk: alle sådanne spil er identiske!)
  - M^i: maksimalt opnåelige payoff over alle SPNE af G^i,
  - m^i: mindst opnåelige payoff.
- **Påstand:** $m^2 \geq 1 - \alpha M^1$.
- **Bevis:** Betragt G^2.
  - Hvis 1 afslår, går turen til G^1, hvor 1 ikke kan få mere end M^1
  - Ergo accepterer 1 alle tilbud $(1-y, y)$ med $1 - y \geq \alpha M^1$.
  - $\Rightarrow$ 2's payoff er mindst det, dvs. $m^2 \geq 1 - \alpha M^1$. ■
- **Påstand:** $M^1 \leq 1 - \beta m^2$.
- **Bevis:** Betragt G^1 (1's tur)
  - Hvis 2 afslår tilbud, kommer G^2, hvor 2 *mindst* kan opnå m^2.
  - Dvs. 2 forkaster med sikkerhed alle tilbud $(x, 1-x)$ med $1 - x < \beta m^2$.
  - $\Rightarrow$ 1's payoff kan i intet SPNE af G^1 overstige $1 - \beta m^2$. ■

Bevis, trin 2

- **Påstand:** $M^1 = x^*$
- **Status:** Vi har vist

$$m^2 \geq 1 - \alpha M^1 \wedge M^1 \leq 1 - \beta m^2$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha M^1 \leq m^2 \leq \frac{1 - M^1}{\beta}.$$

- **Omskrivning** af venstre og højre del:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha M^1 &\leq \frac{1 - M^1}{\beta} \\ \Leftrightarrow \beta - \alpha\beta M^1 &\leq 1 - M^1 \\ \Leftrightarrow M^1 &\leq \frac{1 - \beta}{1 - \alpha\beta} = x^*. \end{aligned}$$

- **Siden** strategien er *en* SPNE (trin 1) må $M^1 \geq x^*$.
- **Konklusion:** $M^1 = x^*$. ■
- Tilsvarende skridt viser, at $m^2 = y^*$.

Bevis, trin 2

- **Påstand:** $M^2 = y^*$ og $m^1 = x^*$.
- **Beviset** springer vi over... helt analogt. $\square$
- **Konklusion:** $M^1 = m^1 = x^*$ betyder, at 1's payoff er eksakt x^* i ethvert SPNE af G^1.
  - Og 2's payoff er eksakt y^* i ethvert SPNE af G^2.
- **Som modtager**: I G^1 kan 2 altid afslå et forslag og få minimum y^* i næste periode, med værdi $\beta y^* = 1 - x^*$.
- **MEN:** I G^1 er det kun muligt for begge at opnå payoffs på $(x^*, 1 - x^*)$, hvis de når til enighed *nu!* (hvis de venter, så forsvinder gevinsterne i diskontering)
  - Dermed skal de foreslåede strategier være ligevægten, og må være eneste! $\blacksquare$

Intuition

- **Ligevægten** var altså

$$
\begin{aligned}
1 \text{ foreslår } & \left(\frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}, \beta\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}\right) \\
2 \text{ foreslår } & \left(\alpha\frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}, \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}\right).
\end{aligned}
$$

  - Hvis α er lav, får 1 mere
  - Hvis β er lav, får 2 mere
  - $\Rightarrow$ **Tålmodighed er forhandlingsmagt**
- **Under symmetri** $\alpha = \beta =: \delta$ simplificerer SPNE til

$$
\left(\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}\right).
$$

  - 1 får mere: *førerfordel* (*first-mover advantage*)
  - **Men** fordelen forsvinder med tålmodighed:
    - $\delta \to 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}\right) \to (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
    - Ingen forhandlingsmagt ved at rykke først, hvis 2 ikke har noget imod at vente.

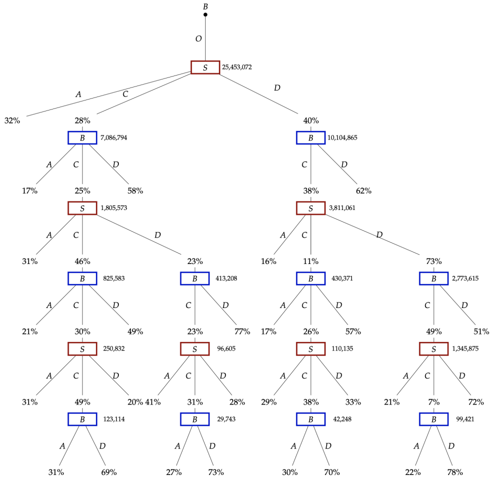
Empirisk evidens

Indsigter fra eBay

- **Kilde**: *Backus, Blake, Larsen & Tadelis (2020)*.
- Forhandlinger fra millioner af eBay artikler

Data fra eBay

Figure 3: Bargaining Sequence Patterns

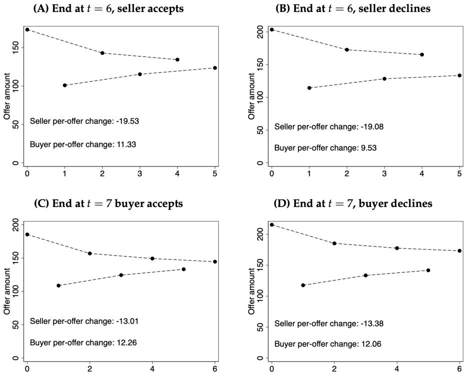


O = offer, A = accept, C = counter-offer, D = decline.

eBay

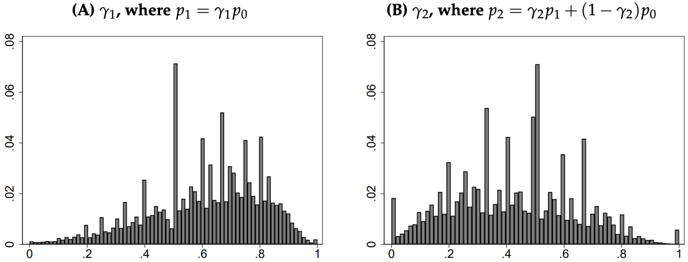
- Kun 32% af forhandlinger resulterer i enighed i første runde
- **Bud** bevæger sig *gradvist* – og adfærden udviser *reciprocitet*.

Figure 4: Average Offers Over the Duration of Bargaining ($t = 6, 7$)



Ikke alle tal er lige!

Figure 8: Where Current Offer Lies Relative to Previous Offers



- Foreslåede bud har det med at *bunche* omkring "runde tal"

Bayesianske Spil

Anders Munk-Nielsen

Blok 4, 2022

Bayesianske Spil

Overblik

	Statisk	**Dynamisk**
Komplet information	~~Matrix-spil~~	~~Sekventielle spil~~
Inkomplet information	**Auktionsspil mv.**	Signaleringsspil

Indsigter

- **Bayesianske spil:** modstanderens *type* er ukendt.
- De kan ses som et spil med **imperfekt information**
    - "Skæbnen" eller "naturen" rykker først og trækker spillernes typer.

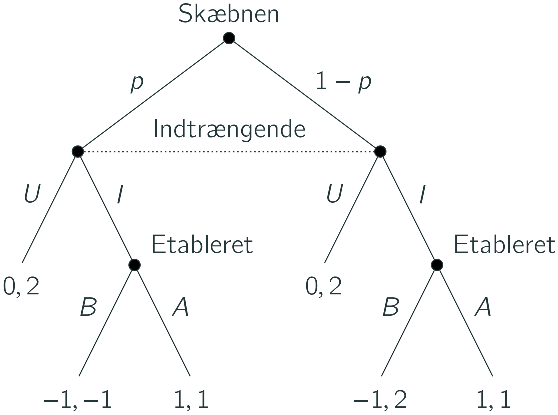
Lidt at vågne på

Indtrængningsspil (Entry Game)

En indtrængende virksomhed overvejer at træde ind på et nyt marked. Den etablerede virksomhed er enten stærk med ssh. p eller svag med ssh. $1 - p$. En stærk virksomhed føler ingen smerte ved at bekæmpe (B), men det gør en svag, som formentlig vil akkomodere (A). Indtrængerend skal vælge enten at indtræde (I) eller udeblive (U).

- Spil med din nabo med $p = \frac{1}{2}$: Indtrængeren trækker hemmeligt fra random.org (og beviser sin trækning ex post).

Lidt at vågne på



Introduktion

Eksempler

- **Forsikring:** Forsikringsselskabet kan ikke observere en persons risikoniveau som bestemmes af
  - Sundhedstilstand,
  - Kørselsadfærd,
  - Forsigtighed, etc.
- **Auktioner:** Ingen kender hinandens værdisætning af godet.
- **Firmaer** kender ikke hinandens omkostninger,
- **Job markedet:** Arbejdsgivere observerer ikke produktivitet / evner

Definition: Betinget sandsynlighed

$$\Pr(A|B) \equiv \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}.$$

Nogle gange skriver vi $\Pr(A \cap B) \equiv \Pr(A, B)$.

- **Intuitivt:** ssh. for Es givet ♠ = ssh. for "♠ Es" ($\frac{1}{56}$) ÷ ssh. for ♠ ($\frac{1}{4}$) $= \frac{1}{14}$.

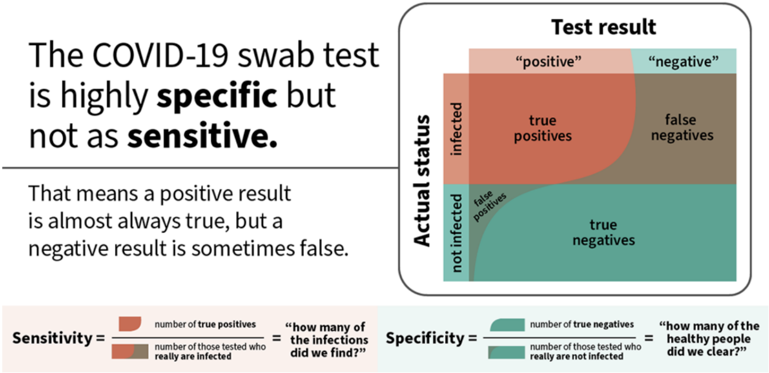
Definition: Bayes' Teorem

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A)\Pr(A)}{\Pr(B)} \quad \Pr(B) > 0.$$

Bevis: Vi omskriver ligningen

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \Pr(A|B)\Pr(B) &= \Pr(B|A)\Pr(A) \\ \Leftrightarrow \Pr(A, B) &= \Pr(B, A) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Eksempel: Næsetesten



Covid Tests

- **EU** kræver jf. denne HSC rapport fra Feb 2021
  - $\geq 90\%$ sensitivitet (hvor mange infektioner, vi finder), og
  - $\geq 97\%$ specificitet (hvor mange raske, vi kommer til at sende i isolation).
- **Danmark** d. 19/5: 173.133 PCR tests, 916 positive
  - $\Rightarrow$ **Antag** at der pt. er $\frac{916}{173.133} \cong 0,53\%$ i befolkningen med COVID-19.
- **Ssh. for falsk positiv:** (C = Covid, + = positiv test)

$$
\begin{aligned}
\Pr(C|+) &= \frac{\Pr(+|C)\Pr(C)}{\Pr(+)} = \frac{\Pr(+|C)\Pr(C)}{\Pr(+|C)\Pr(C)+\Pr(+|\neg C)\Pr(\neg C)} \\
&= \frac{97\% \times 0,53\%}{97\% \times 0,53\% + 3\% \times 99,47\%} \\
&= \frac{0,5141\%}{0,5141\% + 2,98\%} \quad = \frac{\text{falske positive tests}}{\text{alle positive tests}} \\
&= 14.7\%.
\end{aligned}
$$

- **Konklusion:** Pr(rask|positiv næsetest) = 85, 3%.

Bayesianske Spil

Formel definition

Definitioner

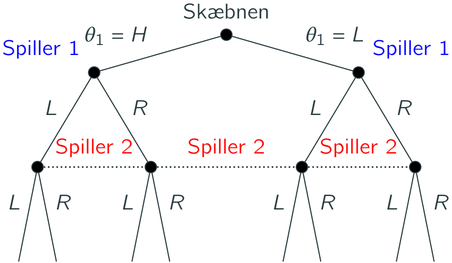
Et Bayesiansk spil er

$$G = \left\langle N, \{A_i\}_{i=1}^{n}, \{\Theta_i\}_{i=1}^{n}, \{v_i(\cdot;\theta_i), \theta_i \in \Theta_i\}_{i=1}^{n}, \{\phi_i\}_{i=1}^{n} \right\rangle.$$

- **Spillere**, $N = \{1, ..., n\}$,
- **Handlingsrum**, $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$,
- **Typer**, $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times ... \times \Theta_n$: $\theta_i \in \Theta_i$, fx $\Theta_i = \{\theta_1, ..., \theta_K\}$.
- **Payoffs**: $u_i(a;\theta_i)$, hvor $a \in A$ og $\theta_i \in \Theta_i$.
- **Subjektive (a posteriori) forventninger:** $\phi_i(\theta_{-i}|\theta_i)$: ssh. for at modstandere har typerne θ_{-i}, givet min observerede type θ_i
  - Tillader korrelation mellem typer.

Imperfekt Information-fortolkning

- **Fiks ide:** vi kan se spillet som et dynamisk spil med inkomplet information
    - **Først** trækker **skæbnen** typerne, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n) \in \Theta$.
    - **Dernæst** spilles et **simultant** 2×2 spil, men spillerne ser kun sin deres egen type
- **Eksempel:** hvis $\Theta_1 = \{H, L\}$ og $\Theta_2 = \{M\}$, så er spillet



Forventninger

- **Forventninger:** Vi vil kræve, at agenterne er "fornuftige" ift. hvad de forventer om modspillernes typer.
  - **Eksempel:** For en virksomhed, kunne "typen" være de marginale omkostninger, $\theta_i = c_i$.
  - **Hvis** omkostninger er korrelerede, så har firma i's trækning af c_i information ift. hvad de skal regne med om deres konkurrenter.
- **Stadier** af spillet:
  1. **Ex ante:** Før skæbnen trækker nogen typer,
  2. **Mellemstadiet** (**interim**): når i kender θ_i, men ikke θ_{-i},
  3. **Ex post:** Når alle typer er trukket og handlinger er udført.
- **Krav:** i mellemstadiet skal i bruge Bayes' regel til at danne forventninger til θ_{-i}: $\phi_i(\theta_{-i}|\theta_i)$.
  - I mange opgaver har θ_i ingen indflydelse på θ_{-i}, hvorved $\phi_i(\theta_{-i}|\theta_i) = \phi_i(\theta_{-i})$, som kaldes "a priori" forventningen til θ_{-i} (modsat "a posteriori").

Strategier

Definition: Ren Strategi

I et (statisk) Bayesiansk Spil, $G = (N, A, \Theta, \Phi, U)$ er en *ren strategi* for spiller i en handling i alle eventualiteter, hvor i skal handle:

$$s_i : \Theta_i \rightarrow A_i.$$

Definition: Blandet Strategi

En blandet strategi er en sandsynlighedsfordeling over de rene strategier.

Forventet Nytte

Definition: Forventet Nytte i Mellemstadiet (blandede strategier)

Individ i's forventede nytte, hvis spillerne spiller strategiprofilen $s = \big(s_1(\cdot), ..., s_n(\cdot)\big)$, er

$$\mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[u_i(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}); \theta_i)\right] = \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} \phi_i(\theta_{-i}|\theta_i) u_i\left[s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}); \theta_i\right]).$$

Definition: Ex ante Forventet Nytte

Ex ante er i's forventede nytte hvis spillerne følger strategiprofilen s

$$\mathbb{E}_{\theta_i, \theta_{-i}}[u_i(\cdot)] = \sum_{\theta_{ik} \in \Theta_i} \Pr(\theta_i = \theta_{ik}) \mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[u_i(s_i(\theta_{ik}), s_{-i}(\theta_{-i}); \theta_{ik})\right]$$

Den Bayesianske Nash-ligevægt

Definition: Bayesiansk Nash-ligevægt

En strategiprofil, $s(\cdot)$, er en Bayesiansk Nash-ligevægt (BNE), hvis den maksimerer den forventede nytte i mellemstadiet:

$$s_i \in \arg\max_{s_i'(\cdot)} \mathbb{E}_{\theta_{-i},} \left\{ u_i \left[s_i'(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}); \theta_i \right] \right\} \quad \forall \theta_i \in \Theta_i.$$

- **Intuitivt:** Strategien er et bedste svar *i forventning* på $s_{-i}(\cdot)$

Definitionen i et simplere spil

BNE i rene strategier med 2 spillere og uafhængighed

Hvis $N = \{1, 2\}$ og θ_1 og θ_2 er uafhængige, så er den rene strategiprofil, $s^* = (s_1^*, s_2^*)$, en BNE, hvis den for alle $\theta_i \in \Theta_i$ løser

$$s_i^*(\theta_i) \in \arg\max_{a_i \in A_i} \sum_{\theta_j \in \Theta_j} \Pr(\theta_j) u_i \left[a_i, s_j^*(\theta_j); \theta_i \right],$$

for begge spillere $i = 1, 2$ og $j \neq i$.

Eksempel: BoS

Dating med Typer

- **Hvorfor** foreslår man sin egen favoritaktivitet til første date?
- **Datingmarkedet** har to typer
  - Sjov type: begge vil gerne bruge tid sammen, men uenige om hvad
  - Clingy type: 1 er clingy (sjov, men ikke "haha" sjov)
- **Typerne** har lige ssh., $\Pr(\theta_1 = \text{sjov}) = \frac{1}{2}$
- Spillet er enten BoS eller antikoordination (Matching Pennies)

Table 1: $\theta_1 = \text{sjov}$

Sjov date	Dig: Bach	Dig: Stravinsky
Bach	2,1	0,0
Stravinsky	0,0	1,2

Table 2: $\theta_1 = \text{clingy}$

lingy date	Dig: Bach	Dig: Stravinsky
Bach	2,0	0,2
Stravinsky	0,1	1,0

Opsætning som Bayesiansk spil

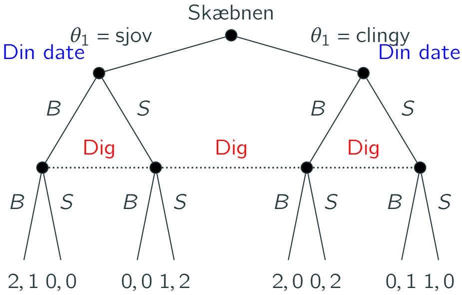
- **Typerne** er $\Theta_1 = \{\text{sjov}, \text{clingy}\}$, $\Theta_2 = \{\text{rar person}\}$,
- **Fælles ex ante beliefs** (overbevisning)

$$p(\text{sjov}) = \frac{1}{2} \Rightarrow p(\text{clingy}) = \frac{1}{2}.$$

- **Rene strategier:** (en handling for enhver type, man selv måtte have)
  - $S_1 = \{(B, B), (B, S), (S, B), (S, S)\}$
  - $S_2 = \{B, S\}$
- **interim forventninger:** Uafhængige typer (1 har kun en type) så

$$\phi_1(\theta_2|\theta_1) = \phi_1(\theta_2) = \frac{1}{2} \text{ for } \theta_2 \in \{\text{sjov,clingy}\} \quad \text{og } \phi_2(\theta_1|\theta_2) = 1$$

Udvidet form



Bedste Svar: 2 observerer typen

Table 3: θ_1 = sjov

Sjov		Dig: Bach	Dig: Stravinsky
	Bach	2,1	0,0
	Stravinsky	0,0	1,2

Table 4: θ_1 = clingy

Clingy		Dig: Bach	Dig: Stravinsky
	Bach	2,0	0,2
	Stravinsky	0,1	1,0

- **BR for din date:** (markeret i tabellen)
- **Bemærk:** spiller 1 observerer sin type, før hun handler
    - $\Rightarrow$ derfor er BR-funktionerne betinget på typen.

Er $((S,S),S)$ en BNE?

- **Spørgsmål:** er der et BNE, hvor du (spiller 2) vælger Stravinsky?
- $\Rightarrow$ din date har Best Responses (S,S) til dette
  - **Payoffs** skal tage forventning over θ_1
- **Hvis** du spiller S (holder dig til den foreslåede ligevægt):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[u_2((S,S),S)\right] &= p(\text{sjov})u_2(S,S|\text{sjov}) + \left[1-p(\text{sjov})\right]u_2(S,S|\text{clingy}) \\ &= \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}0 = 1.\end{aligned}$$

- **Hvis du afviger** (og spiller B)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[u_2((S,S),B)\right] &= p(\text{sjov})u_2(B,S|\text{sjov}) + \left[1-p(\text{sjov})\right]u_2(B,S|\text{clingy}) \\ &= \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

- **Konklusion: Ja,** $\Big((S,S),S\Big) \in \text{BNE}$
  Afvigelsen giver dig lavere payoff

Er $((B,B),B)$ en BNE?

- **Under ligevægten** er payoff

$$\mathbb{E}\left[u_2\Big((B,B),B\Big)\right] = p(\text{sjov})u_2(B,B|\theta_1=\text{sjov}) + [1-p(\text{sjov})]\,u_2(B,B|\theta_1=\text{clingy}) = \frac{1}{2}1+\frac{1}{2}0=\frac{1}{2}.$$

- **Afvigelse:**

$$\mathbb{E}\left[u_2((B,B),S)\right] = p(\text{sjov})u_2(B,S|\theta_1=\text{sjov}) + [1-p(\text{sjov})]\,u_2(B,S|\theta_1=\text{clingy}) = \frac{1}{2}0+\frac{1}{2}2=1.$$

- **Konklusion: Nej**, $((B,B),B)\notin$ BNE
  - Du (spiller 2) vil være fristet til at afvige og gå til Stravinsky.

Opsummering

- **BoS med komplet information** har to Nash ligevægte.
- **BoS med inkomplet information** har kun én Bayesiansk Nash-ligevægt
  - Spilleren *uden information* får sin foretrukne ligevægt!
    - $\Rightarrow$ endnu et eksempel, hvor information er en ulempe.

FD vs. Stag

"Bred matrixform"

- **Vi indså**, at strategierne var
  - $S_1 = \{(B, B), (B, S), (S, B), (S, S)\}$
  - $S_2 = \{B, S\}$
- **Fristelse:** hvad med at skrive spillet på "normal form" (dvs. matrixform)

	BB	BS	SB	SS
B		?,?		
S				

  - Hvad skal der stå i cellen?
- $\Rightarrow$ *ex ante* nytten ved at spiller 2 binder sig til (B, S) og 1 til B:

$$\mathbb{E}_{\theta_1,\theta_2}\left[u_2\Big((B, B), B\Big)\right] = \ldots = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{E}_{\theta_1,\theta_2}\left[u_1\Big((B, B), B\Big)\right] = \ldots$$

Løsningsmetode

- **Det følgende** præsenterer en løsningsmetode i Python for
  - bimatrix-spil,
  - hvor den ene spiller kan have to typer; den anden kun en.

Bimatrix med to typer

To spillere, $N = \{1, 2\}$, hvor spiller 1 kun har én type, mens spiller to kan være to typer: $\theta_2 \in \Theta_2 = \{\theta_L, \theta_H\}$. Payoffs opsummeres i matricerne $U_{1L}, U_{1H}, U_{2L}, U_{2H}$.

Python til den redning

```
def compute_full_matrix(U1, U2, p, action_names=None):
# U1 = [u11, u12]
# U2 = [u21, u22]
# each uij is an nA1*nA2-matrix of payoffs
# p (scalar): probability of type=0

        nA1, nA2 = U1[0].shape

        # allocate outputs
        t1 = np.empty((nA1, nA2*nA2))
        t2 = np.empty((nA1, nA2*nA2))

        # player 1 chooses an action without knowing what type 2 is
        for ia1 in range(nA1): # choice if type 0
            i_col = 0

            # player 2 chooses an action conditional on observing her type
            for a2_1 in range(nA2): # choice if type 1
                for a2_2 in range(nA2):
                    t1[ia1,i_col] = p * U1[0][ia1,a2_1] + (1.0-p) * U1[1][ia1,a2_2]
                    t2[ia1,i_col] = p * U2[0][ia1,a2_1] + (1.0-p) * U2[1][ia1,a2_2]

                    i_col += 1
```

Resultat: Datingspillet

	BB	BS	SB	SS
B	(0.5, 2.0)	(1.5, 1.0)	(0.0, 1.0)	(1.0, 0.0)
S	(0.5, 0.0)	(0.0, 0.5)	(1.5, 0.5)	(1.0, 1.0)

Resultat: Datingspillet

	BB	BS	SB	SS
B	$\boxed{(0.5, 2.0)}$	(1.5, 1.0)	(0.0, 1.0)	(1.0, 0.0)
S	(0.5, 0.0)	(0.0, 0.5)	(1.5, 0.5)	$\boxed{(1.0, 1.0)}$

- BNE findes som NE i denne normalform.

Eksempel: FD-Stag

Konkret eksempel

- **Eksemplet** følger `youtube.com/watch?v=E0_CA9TwZ8c`.

SH eller PD

Spiller 1 har payoffs fra Hjortejagten uanset hvad, men spiller 2 har enten Fangernes Dilemma, eller Hjortejagt.

Table 5: θ_2 = FD (ssh. 0.2)

	L	R
U	3,3	0,4
D	2,1	1,2

Table 6: θ_2 = HJ (ssh. 0.8)

	L	R
U	3,3	0,2
D	2,0	1,1

- **Rene strategier:** $S_1 = \{U, D\}$, og $S_2 = \{LL, LR, RL, RR\}$.

Spillet på normalform

	LL	LR	RL	RR
U		?,?		
D				

- **Denne repræsentation** af spillet er anderledes:
  - Vi kan ikke se typerne.
- **Ex ante nytten** for (U, LR) for spiller 1 er fx:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[u_1(U, LR)] &= 0.2 \times u_1(U, L; \mathrm{FD}) + 0.8 \times u_1(U, R; \mathrm{HJ}) \\
&= 0.2 \times 3 + 0.8 \times 0 = 0.6.
\end{aligned}
$$

... osv. $\Rightarrow$ to the python-mobile!

Fra Python

	LL	IR	RL	RR
U	3.0,3.0	0.6,2.2	2.4,3.2	0.0,2.4
D	2.0,0.2	1.2,1.0	1.8,0.4	1.0,1.2

Fra Python... efter IESDS

	LL	IR	RL	RR
U	3.0,3.0	0.6,2.2	2.4,3.2	0.0,2.4
D	2.0,0.2	1.2,1.0	1.8,0.4	1.0,1.2

Fra Python

	LL	IR	RL	RR
U	3.0,3.0	**0.6,2.2**	2.4,3.2	0.0,2.4
D	2.0,0.2	1.2,1.0	**1.8,0.4**	1.0,1.2

Sammenligning med dynamiske spil

- **Fordelen** ved normal form repræsentationen:
  - Vi kan finde Nash-ligevægte "let"
- **I dynamiske spil**: vi fik "for mange" ligevægte med
  - SPNE var en *raffinering*, som valgte en *delmængde* af NE'erne.
- **Hvorfor** er der ingen "tomme trusler" her?
  - $\Rightarrow$ præcis pga. argumentet om ex ante vs. interim optimering!
- I dynamiske spil, var det **ikke** det samme!
  - $\Rightarrow$ Her blev der afsløret information *imellem* de to valg skulle tages
  - Dvs. de to valg skulle tages under forskellige informationssæt.

Matrix i "bred" form

- **Påstand:** der er ækvivalent at maksimere ex ante over hele S_2 eller interim over $\{L, R\}$ for hver type separat.
- **Ex ante** forventet nytte er

$$\mathbb{E}\Big\{u_2\left[s_1, s_2(\theta_2)\right]\Big\} = p(\theta_{\text{FD}})u_2\left(s_1, s_{2,\text{FD}}; \theta_{\text{FD}}\right) + \left[1 - p(\theta_{\text{FD}})\right] u_2 u_2\left(s_1, s_{2,\text{HJ}}; \theta_{\text{H}}\right.$$

- **Mellemstadiet** (*interim*) forventet nytte: betinger på $\theta_2 = \theta_{\text{FD}}$.

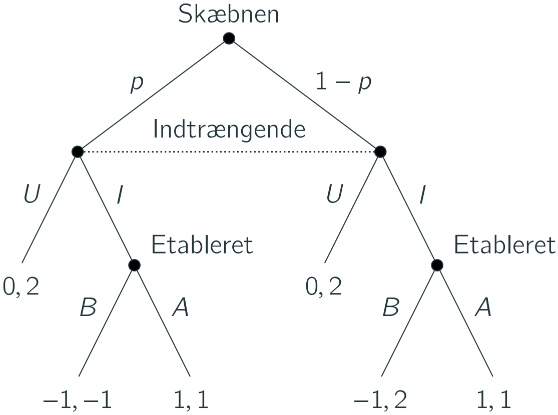
$$\mathbb{E}\left[u_2(s_1, s_{2\text{FD}})|\theta_{\text{FD}}\right] = u_2(s_1, s_{2\text{FD}}; \theta_{\text{FD}})$$

  - Det eneste der er tilbage at tage forventning over, er hvis spiller 1 bruger en blandet strategi.
- **Fordi** de to dele i ex ante nytten er additivt separable, er de flg. ækvivalente:
  1. $\max_{s_2(\cdot) \in S_2} \mathbb{E}\Big\{u_2\left[s_1, s_2(\theta_2)\right]\Big\}$ ex ante
  2. $\max_{s_{2\text{FD}} \in \{L,R\}} u_2(s_1, s_{2\text{FD}}; \theta_{\text{FD}})$ og $\max_{s_{2\text{HJ}} \in \{L,R\}} u_2(s_1, s_{2\text{HJ}}; \theta_{\text{HJ}})$ mellemstadiet

  ■
- $\Rightarrow$ Oplagt at opstille spillet i **bredt format**

Eksempel: Entry

Indtrængningsspil

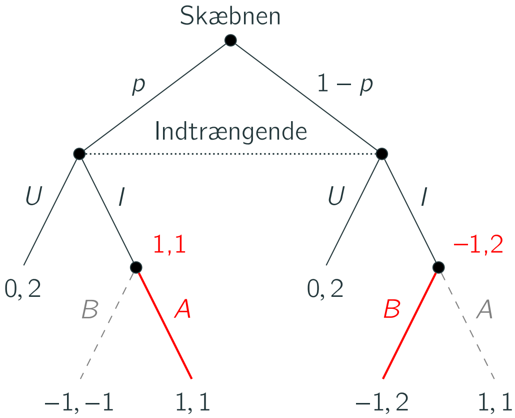


Spillet som Bayesiansk Spil

- **Spillerne**: $N = \{1, 2\}$ for {Indtrænger, Etableret}
- **Strategier**:
    1. $S_1 = \{I, U\}$
    2. $S_2 = \{(B, B), (B, A), (A, B), (A, A)\}$
- **Typer**: $\Theta_1 = \{\theta_1\}$ og $\Theta_2 = \{\theta_L, \theta_H\}$.
- **Forventninger**: θ_2 er uafhængig af θ_1 (som ikke er stokastisk)
    - $\phi_1(\theta_2 = \theta_L|\theta_1) = \frac{1}{2}$
- **Payoffs:** (se træet)

BNE vha. Baglæns Induktion

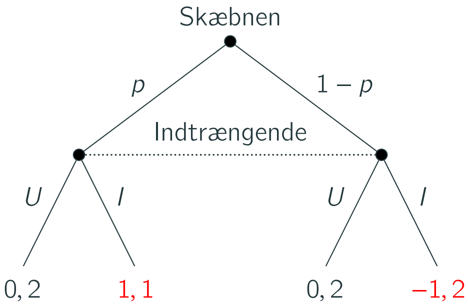
- **Backwards induction:** vi kan prøve at løse baglæns.



- ⇒ **men:** 1 ved ikke, hvor vi er

BNE

- **Løsning:** tag forventningen mht. typen θ_2



- **Forventet nytte**:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\theta_2}\{u_1[U,(A,B)]\} &= 0p+0(1-p)=0\\ \mathbb{E}_{\theta_2}\{u_1[I,(A,B)]\} &= p-(1-p)=2p-1.\end{aligned}$$

- **Optimal strategi:**

1

Alternativ opstilling

- **Ide:** Vi så at strategierne var
  1. $S_1 = \{I, U\}$
  2. $S_2 = \{(B, B), (B, A), (A, B), (A, A)\}$
- **Hvad med** bare at opstille payoff-matricen? (på "bred form")

	BB	BA	AB	AA
U			?,?	
I				

  hvad skal stå her?

- De *ex ante* forventede nytter: fx

$$\mathbb{E}_{\theta_2}\left\{u_1\left[I,(A,B)\right]\right\} = 2p-1,$$
$$\mathbb{E}_{\theta_2}\left\{u_1\left[I,(A,B)\right]\right\} = p+2(1-p) = 2-p.$$

	AA	AB	BA	BB
U	0,2	0,2	0,2	0,2
I	1,1	$2p-1, 2-p$	$1-2p, 1-2p$	$-1, 2-3p$

Konkret for $p = \frac{1}{2}$

	AA	AB	BA	BB
U	0,2	0,2	0,2	0,2
I	1,1	$\frac{1}{3}, \frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$	$-1, 0$

Konkret for $p = \frac{1}{2}$

	AA	AB	BA	BB
U	0,2	0,2	$\boxed{0,2}$	$\boxed{0,2}$
I	1,1	$\boxed{\frac{1}{3},\frac{4}{3}}$	$-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}$	$-1,0$

- **Konklusion:**

$$\text{BNE} = \{(I,(A,B)),(U,(B,A)),(U,(B,B))\}.$$

  - Det er Nash-ligevægte for dette spil på normalform, som vi har udledt fra vores Bayesianske spil!
- **Bemærk:** Kun $(I,(A,B))$ er også en SPNE.
  - BNE udelukker ikke "utroværdige trusler."
  - … det krav kan vi *tilføje* …

Cournot

Cournot

Spil: Cournot med Inkomplet Information

To firmaer, $N = \{1, 2\}$ skal vælge mængder, $q_i \in A_i = \mathbb{R}_+$.
Efterspørgslen giver $P(Q) = a - Q$, så payoffs er

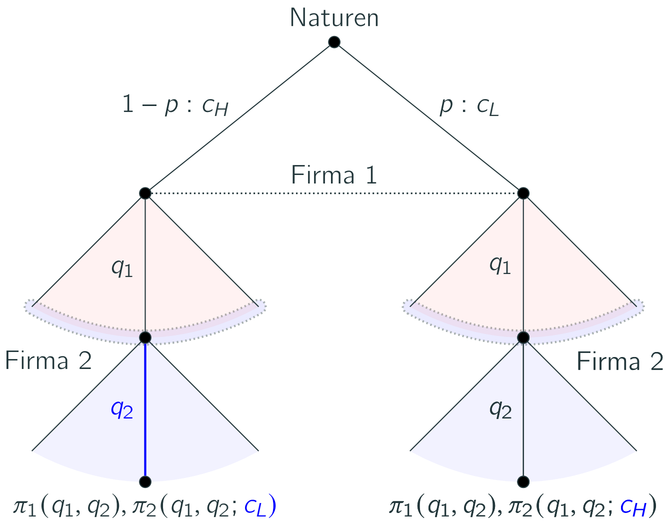
$$\pi_i(q_i, q_j) = \left[P(q_i + q_j) - c_i\right] q_i,$$

hvor spillernes typer afgør deres marginalomkostning, idet

- Firma 1 altid har samme omkostning, $c_1 = c$,
- Firma 2 kan have to værdier, $c_2 \in \Theta_2 = \{c_L, c_H\}$, med

$$\Pr(c_2 = c_H) = p \in (0; 1).$$

Udvidet form



Opstillet som Bayesiansk spil

- **Typerne** er $\Theta_1 = \{c\}$, $\Theta_2 = \{c_L, c_H\}$,
- **Handlingsmængderne** er $A_1 = \mathbb{R}_+ = A_2$.
- **Fælles prior beliefs** er $p(c_H) = p$, $p(c_L) = 1 - p$ (og $\Pr(c_1 = c) = 1$).
- **Strategier** (vi fokuserer på rene strategier)
    - Firma 1: en mængde,
    - Firma 2: to mængder (en for hver værdi af c_2)
- **Information:** Firma 2 observerer $c_2 \in \{c_L, c_H\}$ i interim stadiet og betinger sit valg herpå...
    - ... vi starter med at løse dens valg

Firma 2's bedste svar

- **(Forventet) profit** er (der er intet at tage forventning over for firma 2, da $c_1 = c$ med sikkerhed)

$$\mathbb{E}[\pi_2(q_1, q_2; c_2)] = (a - q_1 - q_2 - c_2)q_2, \quad c_2 \in \{c_L, c_H\}$$

- **Førsteordensbetingelsen** giver (som i klassisk Cournot)

$$\begin{aligned} 0 &= (a - q_1 - q_2 - c_2) - q_2 \\ \Leftrightarrow q_2 &= \frac{a - q_1 - c_2}{2}. \end{aligned}$$

- **Dvs.** firma 2's strategi er (en funktion for hvert firma)

$$BR_2(q_1|c_H) = \frac{a - q_1 - c_H}{2}, \quad BR_2(q_2|c_L) = \frac{a - q_1 - c_L}{2}.$$

Firma 1

- **Nu** ved Firma 1, hvad 2's unikke bedste svar er i hver realisation af c_2
- **Firma 1's forventede profit** er dermed

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\pi_1(q_1,\cdot)] &= \sum_{c_2 \in \Theta_2} \Pr(c_2)\pi_1(q_1, q_2(c_2); c_2) \\
&= p\pi_1(q_1, q_{2H}; c_H) + (1-p)\pi_1(q_1, q_{2L}; c_H) \\
&= p(a - q_1 - q_{2H} - c)q_1 + (1-p)(a - q_1 - q_{2L} - c)q_1 \\
&= \Big(a - q_1 - \underbrace{[pq_{2H} + (1-p)q_{2L}]}_{\text{2's forventede mængde}} - c\Big)q_1
\end{aligned}$$

  - $\Rightarrow$ Dvs. som alm. Cournot med $q_2 := \mathbb{E}_{c_2}[q_2(c_2)]$

- **Førsteordensbetingelsen** giver $BR_1(q_{2L}, q_{2H})$

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\mathbb{E}[\pi_1(q_1,\cdot)] = 0$$

$$\Leftrightarrow q_1 = \frac{a - pq_{2H} + (1-p)q_{2L} - c}{2}.$$

Samlet system

- **Begge** firmaer maksimerer profit, når flg. *tre* ligninger er opfyldt

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{a - [pq_{2H} + (1-p)q_{2L}] - c}{2} \\ q_{2H} &= \frac{a - q_1 - c_H}{2} \\ q_{2L} &= \frac{a - q_1 - c_L}{2}. \end{aligned}$$

- **Løsningen** er

$$\begin{aligned} q_1^* &= \frac{a - 2c + pc_H + (1-p)c_L}{3} \\ q_{2H}^* &= \frac{a - 2c_H + c}{3} + \frac{1-p}{6}(c_H - c_L) \\ q_{2L}^* &= \frac{a - 2c_L + c}{3} - \frac{p}{6}(c_H - c_L). \end{aligned}$$

Opsummering

- **Specialtilfælde:** når $c_L = c_H = c$, får vi

$$q_1^* = q_{2H}^* = q_{2L}^* = \frac{a - c}{3}.$$

  - $\Rightarrow$ **alm. Cournot** er et *specialtilfælde* af modellen med inkomplet information.

- **Ordning:** For alle $c_H > c_L$ har vi

$$q_{2H}^* < q_{2L}^*$$

  - Det mest omkostningseffektive firma producerer mest.

Harsanyi

Harsanyi's Indsigt

- **Harsanyi:** Fortolkning af alm. MSNE som en *grænse* af en sekvens af BNE'er.

Pertuberet Matching Pennies

Som alm. Matching Pennies, men spiller i's nytte sættes til

$$\tilde{u}_i(a_i, a_j) = u_i(a_i, a_j) + \varepsilon_{ia_i},$$

hvor ε_i er en stokastisk variabel, som er privat information, og $\varepsilon_i \perp\!\!\!\perp \varepsilon_j$ (uafhængighed)

- ε_i er uobserveret nytte
  - **Eks. straffespark:** Nogle er bedre med højre end andre.

Pertuberet Matching Pennies

		Bob: H	Bob: T
Frantz	H	$1 = \varepsilon_1, -1 + \varepsilon_2$	$-1 + \varepsilon_1, 1$
	T	$-1, 1 + \varepsilon_2$	$1, -1$

- **Antag** at $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim \text{IID}\mathcal{U}(-\epsilon, \epsilon) \Rightarrow \mathbb{E}(\varepsilon_1)$ og $\Pr(\varepsilon_1 \geq 0) = \frac{1}{2}\ \forall \epsilon > 0$.
- **Påstand:** Flg. er en symmetrisk BNE:

$$s_i^*(\varepsilon_i) = \begin{cases} H & \text{hvis } \varepsilon_i \geq 0 \\ L & \text{hvis } \varepsilon_i < 0. \end{cases}$$

- **Bevis:** Fra 1's perspektiv: $\Pr(2 \text{ spiller } H) = \frac{1}{2}$. Dvs.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\varepsilon_2}[v_1(H, s_2^*(\cdot); \varepsilon_1)] &= \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_1) + \frac{1}{2}(-1 + \varepsilon_1) = \varepsilon_1 \\ \mathbb{E}_{\varepsilon_2}[v_1(L, s_2^*(\cdot); \varepsilon_1)] &= \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(1) = 0. \end{aligned}$$

  - $\Rightarrow H \succ_1 L \Leftrightarrow \varepsilon_1 \geq 0$. ■

Implikation

- **Påstand:** Når $\epsilon \to 0$ konvergerer payoffs og outcomes fra det perturberede spil til det sædvanlige matching pennies (MP).
- **Strategier:** Som vist er $\Pr(a_i = H) = \frac{1}{2}$ for begge $i = 1, 2$ for alle ϵ.
  - Hvadenten a_i styres af ε_1 (perturberede) eller blanding (sædvanlige) er outcome ssh. ($\Pr(a_1, a_2)$) de samme
- **Payoffs:** For (T, T) er payoffs ens, men ellers er der ε_1 og/eller ε_2.
  - Men $|\varepsilon_i| < \epsilon$, så $\epsilon \to 0 \Rightarrow$ "ε_i bliver ubetydelig". ■

Auktioner

Anders Munk-Nielsen

Blok 4, 2022

Introduktion

Overblik

	Statisk	**Dynamisk**
Komplet information	~~Matrix-spil~~	~~Sekventielle spil~~
Inkomplet information	**Auktionsspil**	Signaleringsspil

Indsigter

- **2nd price auktionen:** let at finde ligevægten
  - Dominerende strategi at byde sin valuering.
- **1st price auktionen:** to måder at løse
  - Den hårde vej,
  - “Gæt og verificer,”
  - Provenuækvivalens.
- **Andre formater** løser bestemte problemer
  - Average Pay: winner’s curse – men sårbar for karteller
  - Double Auction: fx spektrumauktioner

Auktionsformater

Auktionsformater

	Vinder	Betaling
1st price SB	$\arg\max_{i \in N} b_i$	b_i
2nd price SB	$\arg\max_{i \in N} b_i$	$\max_{j \neq i} b_j$
Avg. pay	$\arg\min_{i \in N} \lvert b_i - \overline{b} \rvert$	b_i
Reverse	$\arg\min_{i \in N} b_i$	b_i
All pay	$\arg\max_{i \in N} b_i$	b_i*

** I All Pay auktionen skal selv taberne betale deres bud.*

Auktionsformater

- **Engelsk:** stigende priser, kan byde flere gange.
- **Hollandsk:** et "ur" starter på en høj pris og aftager, indtil nogen melder "min!"
- **Japansk:** bydere starter stående, auktionarius kalder priser ud,
- **Vickrey:** forseglede bud indgives, vinderen betaler næsthøjeste bud.
- **Sealed bid:** bydere afgiver bud i hemmelighed uden at vide meget om de øvrige deltagere.
  - Nemmere at opleve **ex post regret**

Notation

Hvad	**Tadelis**	**Slides/kode**
Valuering	θ_i	v_i
Strategi (bud)	$s_i(\theta_i)$	$b_i(v_i)$
Payoff	$v_i\left(b, s_{-i}(\theta_{-i}); \theta_i\right)$	$u_i\left(b, b_j(v_j)\right)$
k'te ordensstatisik	$x_n^{[k]}$	$x_{(k)}$

First-Price Sealed Bid

First-Price Sealed Bid

First-Price Sealed Bid

To bydere, $N = \{1, 2\}$, skal afgive et forseglet bud, $b_i \geq 0$. De trækker hver især en valuering, $v_i \geq 0$, fra en fordeling $F(\cdot)$, som er privat information. Vi antager, at v_i og v_j er IID (kaldet IPV antagelsen).

Efter bud er afgivne, åbner auktionarius buddene og erklærer det højeste bud som vinderen. Denne byder modtager payoffet $v_i - b_i$, og den anden får payoff 0.

Opstilling som Bayesiansk spil

- **Spillerne** $N = \{1, 2\}$
- **Handlinger:** $b_i \in A_i = [0; \infty)$**,** $i = 1, 2$
- **Typer:** $v_i \in \Theta_i = [0; \infty)$
- **Payoffs:**

$$u_i(b_i, b_j; v_i) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{hvis } b_i < b_j, \\ \frac{v_i - b_i}{2} & \text{hvis } b_i = b_j, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

  - Somme tider undertrykker vi "v_i" fra nyttefunktionen...
  - Det er underordnet, hvad der sker, hvis $b_i = b_j$, skal det vise sig.
- **Prior** fordeling af typer, $p(v_i) = f(v_i)$ (pdf).
- **En ren strategi** er en handling for enhver mulig type:
  - Dvs. en *funktion*, $b_i(v_i)$, så $b_i : \Theta_i \rightarrow A_i$.

BNE: Ligevægt

- **BNE:** En Bayesiansk Nash-ligevægt er i denne kontekst et par af funktioner, $\left(b_1^*(\cdot), b_2^*(\cdot)\right)$, så begge spillere maksimerer forventet nytte.
- **Forventet interrim nytte** er betinget på realisationen af v_i da i observerer sin type inden budafgivelse, og tager formen

$$\mathbb{E}_{v_j}\left\{u_i\left[b_i(v_i), b_j(v_j)\right]\Big| v_i\right\}.$$

  - Pga. IPV, kan vi droppe betingning på v_i da v_j er uafh.

$$= \mathbb{E}_{v_j}\left\{u_i\left[b_i(v_i), b_j(v_j)\right]\right\}.$$

- **Udfordringen** er, at vi skal maksimere over et *funktionsrum*
  - Dvs. over alle mulige afbildninger $b : [0; \infty) \to [0; \infty)$...
- **Løsning:** restriktere opmærksomheden til en mindre gruppe af fuktioner...
  - ... fx en familie indekseret ved et tal, fx

$$b(v) = cv, \quad \text{for et } c \in [0; \infty).$$

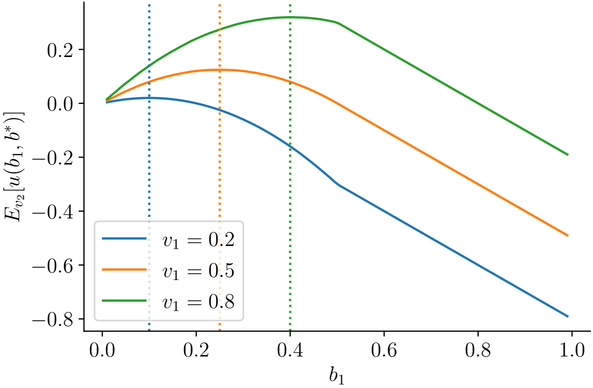
  - (Bemærk: vi kan helt udelukke $c > 1$ som irrationelt.)

Numerisk interrim maksimering

- **Numerisk** kan vi beregne **interrim forventet nytte** ved at erstatte "$\mathbb{E}$" med "$R^{-1}\sum_{r=1}^{R}$" over R trækninger af $v_j \sim \mathcal{U}(0,1)$

```
R = 100000 # no. draws
v2 = np.random.uniform(0,1,(R,))
b2 = 0.5 * v2 # keeping opponent strategy fixed

xx = np.linspace(0.01, 0.99, 100) # possible strategies
vv1 = [.2, .5, .8] # three examples of our draws
yy = np.empty((100,3))

for iv,v1 in  enumerate(vv1): # our true type
    for i,b1 in  enumerate(xx): # our bid
        u = (b1>b2) * (v1-b1)
        yy[i, iv] = np.mean(u) # average out opponent draws
```

Figur



Note: De stiplede linjer angiver den analytiske BNE strategi, $b^*(v) = \frac{n-1}{n} v$, hørende til hver linje.

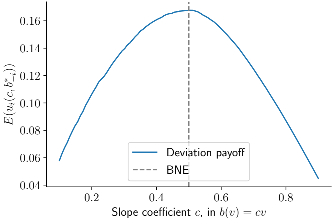
Numerisk ex ante maksimering

- **Alternativt** kan vi se på **ex ante forventet nytte**
- **Her** skal vi vælge en *strategi* dvs. en funktion, $b_i(v)$
- **Vi kan ikke** søge over *alle* mulige funktioner, $b : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$,
  - så vi restrikterer opmærksomhed til en *familie* af funktioner,
  - fx de *lineære* budfunktioner $b(v;c) = cv$, hvor $c \geq 0$.
- **Optimeringsproblemet** bliver da

$$\max_{c\geq 0} \mathbb{E}_{v_1,v_2} \{u\,[cv_1, b^*(v_2)]\}\,.$$

```
R = 10000 # no. simulation draws (so that avg. -> expectation)
v1 = np.random.uniform(0,1,(R,))
v2 = np.random.uniform(0,1,(R,))

cc = np.linspace(0.1, 0.9, 100) # grid over which to plot E(u)
yy = np.empty((100,))

b_star = lambda v,N: (N-1)/N * v # the BNE of the game
b2 = b_star(v2, 2) # player 2 plays the equilibrium

for i,c in  enumerate(cc):
        b1 = c * v1 # our bid in the strategy indicated by c
        u = (b1 > b2) * (v1 - b1) # utility
        yy[i] = np.mean(I_win * u_win) # avg. over draws
```

Ex Ante Maksimering



Analytisk Løsning

- **Det viser sig** at netop for $v_i \sim \text{IID}\mathcal{U}(0,1)$, kan vi løse analytisk for det optimale bud.
- **Påstand:** $(b^*(v_1), b^*(v_2)) = (\frac{1}{2}v_1, \frac{1}{2}v_2)$ er en Bayesiansk Nash-ligevægt.
- **Bevis:** Opstil interrim forventet nytte ved at byde b_1 givet realiseret trækning v_1:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{v_2}[u(b_1, b^*(v_2))|v_1] &= \Pr(1 \text{ wins}) \times (v_1 - b_1) + \Pr(2 \text{ wins}) \times 0 \\ &= \Pr[b_1 > b^*(v_2)](v_1 - b_1).\end{aligned}$$

- **Vindersandsynligheden:** da $b^*(v) = \frac{1}{2}v \Leftrightarrow v = 2b$ bliver fordi b_1 er ikke-stokastisk

$$\Pr(b_1 > b^*(v_2)) = \Pr(v_2 < 2b_1) \equiv F(2b_1) = 2b_1,$$

hvor F er v_2's cdf, som er $F(v) = v$ for $v \in [0;1]$.
- **Dermed er**

$$\mathbb{E}_{v_2}[u(b_1, b^*(v_2))|v_1] = 2b_1(v_1 - b_1)$$

Analytisk løsnign

- **Vi har**:
$$\mathbb{E}_{v_2}[u_1(b_1, b^*(v_2))|v_1] = 2b_1 v_1 - 2{b_1}^2.$$
- **Pæn funktion**, så optimum skal opfylde FOC:
$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{E}(u_1(\cdot))}{\partial b_1} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2v_1 - 4b_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow b_1 &= \frac{1}{2} v_1. \end{aligned}$$
- **Altså:** hvis modstanderen følger strategien, er det også optimalt for mig at gøre det.
- **Bemærk:** dette holdt for enhver værdi af v_1, som 1 måtte trække!
- $\Rightarrow$ **konklusion:** (b^*, b^*) med $b^*(v) = \frac{1}{2}v$ for alle $v \in [0;1]$ er en BNE. ■

Bid shading

- **Resultat:** I en first-price sealed bid, hvor $v_i \sim \mathcal{U}(0,1)$, skal man byde *halvdelen af sin valuering*.
  - Vi viste dette ved *gæt og verificer*-metoden.
  - $\Rightarrow$ mere generalt har vi blot vores "best response" karakterisering.
- **Bid shading** = at man byder mindre end sin værdiansættelse.
  - **Implikation:** agenterne afslører ikke deres type ingen truth-telling
- **Allokering:** i BNE vil godet blive allokeret til agenten med højest værdi af godet!
  - Essentiel egenskab for en auktion!
- **Tradeoff:** forventet nytte var

$$\mathbb{E}(u_1) = \underbrace{\Pr(b_1 < b_2)}_{\text{vinderchance}} \times \underbrace{(v_1 - b_1)}_{\text{vindergevinst}}$$

1. "Risk": Ssh. for at vinde falder i b_1, men
2. "Return": Nytten af at vinde stiger i b_1.

Diskussion

Teorem

I en FPSB med $v_i \sim \text{IID}\mathcal{U}(0,1)$ og n spillere, er flg. en symmetrisk BNE:

$$b_i^*(v) = \frac{n-1}{n}v, \quad i = 1, ..., n.$$

- **Forklar** hvorfor man skal byde tættere på sin valuering, hvis der er flere bydere end 2 i auktionen.
- Mao.: forklar hvorfor $b^*(v)$ er stigende i n ($=$ antal spillere)

Mange steder vil vi antage, at $b^*(v)$ er ikke-aftagende in v.

- **Forklar** hvad det vil sige, hvis $b^*(v)$ ikke er monotont voksende i v.

Second-Price Sealed Bid

2nd Price Sealed Bid

Spil: 2nd Price Sealed Bid

n bydere trækker deres valueringer, $v_i \sim F$, som privat information og afgiver forseglede bud, b_i. Auktionarius erklærer højsetbydende, i, som vinder, og denne får payoff $v_i - b_{(2)}$, hvor $b_{(2)} = \min_{j \neq i} b_j$, og alle andre spillere får payoff nul.

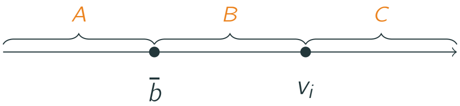
Streng dominans

Teorem: Sandfærdighed i 2nd Price Sealed Bid

I en 2nd price sealed bid auktion er det en *strengt dominant* strategi at byde sandfærdigt, dvs. $b^*(v) = v$.

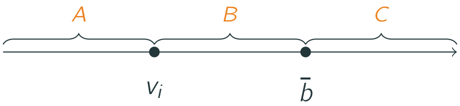
- **Bevis:** vi lægger *ingen* antagelser på, hvilken strategi andre bydere end i følger, og vi vil vise, at $b^*(v_i) = v_i$ er bedste svar, for enhver trækning v_i.
- **Lad** $\overline{b} = \max_{j \neq i} b_j$. Vi opdeler efter, om $v_i \gtrless \overline{b}$

Tilfælde 1: $v_i > \overline{b}$



- **Tilfælde 1:** $v_i > \overline{b}$
- Her vinder hun, hvis hun byder $b_i = v_i$, og får payoff $v_i - \overline{b}$.
- **Afvigelser:**
  - $b_i \in A$: så taber hun $\Rightarrow u_i = 0 \Rightarrow$ værre.
  - $b_i \in B$: vinder stadig, payoff uændret.
  - $b_i \in C$: vinder stadig, payoff uændret.
- **Konklusion:** ingen rationelle afvigelser.

Tilfælde 2: $v_i < \overline{b}$



- **Tilfælde 2:** $v_i < \overline{b}$
- **Strategien** medfører, at hun taber og får payoff 0.
- **Afvigelser:**
  - $b_i \in A$: taber stadig, uændret payoff $u_i = 0$,
  - $b_i \in B$: taber stadig, uændret payoff $u_i = 0$,
  - $b_i \in C$: vinder, men har overbudt $\Rightarrow u_i < 0$, strengt værre
- **Konklusion:** ingen mulige afvigelser.

Resultat

- **For ethvert** træk v_i og enhver strategi b_{-i} og træk v_{-i}, er det bedste svar at byde $b_i(v_i) = v_i$. $\blacksquare$
    - $\Rightarrow$ vi har vist *streng dominans*.
- **Implikation:** *Uanset* hvad ens modstandere har gang i, er det optimalt at byde sin valuering.

Implikationer

- **Lad** $x_i^r \sim \text{IID}F$, hvor $i = 1, ..., n$ er spillerne og $r = 1, ..., R$ er forskellige auktioner.
- **Vindende bud** er $b_r^{\text{win}} = \max_i x_i^r$
- **Vindende betaling** er $p_r = x_{[n-1]}^r$ (den andenhøjeste værdi)

```
x = np.random.chisquare(1., size=(n,R))

# sorter hver kolonne i stigende rækkefølge
xs = np.sort(x, axis=0)

# vindende bud = max
b = xs[-1, :]

# vindende byder betaler andenhøjeste bud
p = xs[-2, :]
```

Auktioner II

Anders Munk-Nielsen

Blok 4, 2022

Introduktion

Overblik

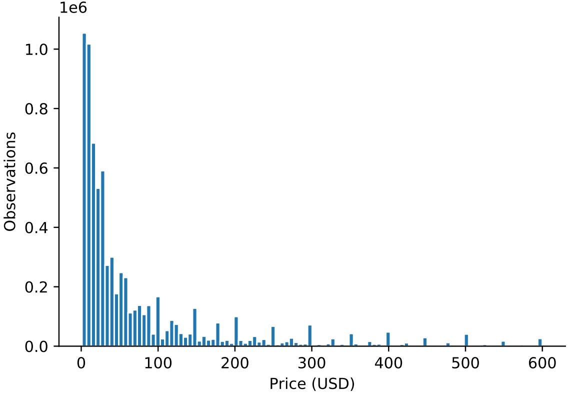
	Statisk	**Dynamisk**
Komplet information	~~Matrix-spil~~	~~Sekventielle spil~~
Inkomplet information	**Auktionsspil**	Signaleringsspil

Indsigter

- **2nd price auktionen:** let at finde ligevægten
  - Dominerende strategi at byde sin valuering.
- **1st price auktionen:** to måder at løse
  - Den hårde vej,
  - "Gæt og verificer,"
  - Provenuækvivalens.
- **Andre formater** løser bestemte problemer
  - Average Pay: winner's curse – men sårbar for karteller
  - Double Auction: fx spektrumauktioner

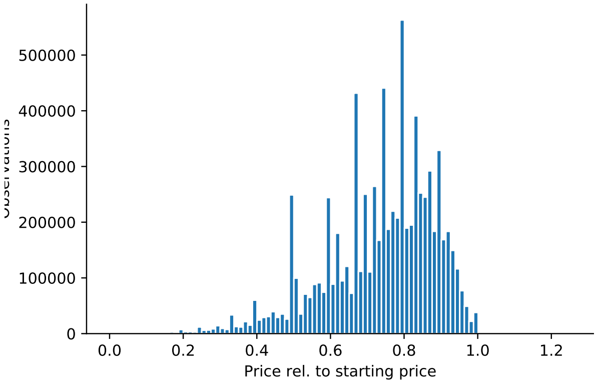
Priser fra eBay

Figure 1: Pris (USD)



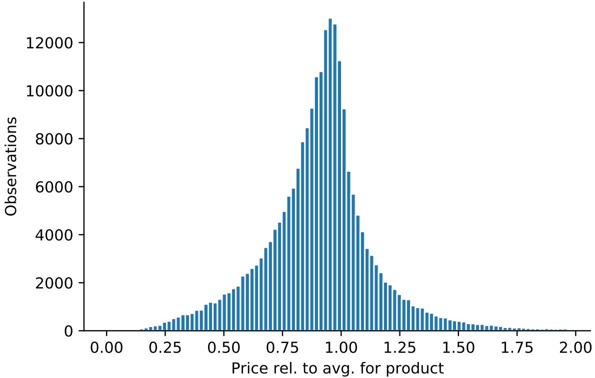
Priser fra eBay

Figure 2: Pris (rel. til start)



Priser fra eBay

Figure 3: Pris (rel. til gennemsnit)



Lidt at vågne på: “runde priser”

- **Diskuter:** hvorfor kan vi ikke have “spikes” i ligevægtsfordelingen? Hvorfor afviger folk ikke i praksis?
- **Anekdote:** når jeg spiller Hammerslag med min kæreste, gætter jeg altid som nr. 2 og altid $a_{-i} \pm 1$kr.

Ordensstatistikker

Ordensstatistikker (Order Statistics)

Definition: Ordensstatistik

Lad $(X_1, ..., X_n)$ være n trækninger, som er fordelt $X_i \sim \text{IID}F$. Betragt den sorterede vektor, $(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)})$, så $X_{(k)} \leq X_{(k+1)}$. Med andre ord er $X_{(1)} = \min_{i \in 1,...,n} X_i$, og $X_{(n)} = \max_{i \in 1,...,n} X_i$, og generelt kalder vi $X_{(k)}$ den k'te ordensstatistik (*en.: k'th order statistic*).

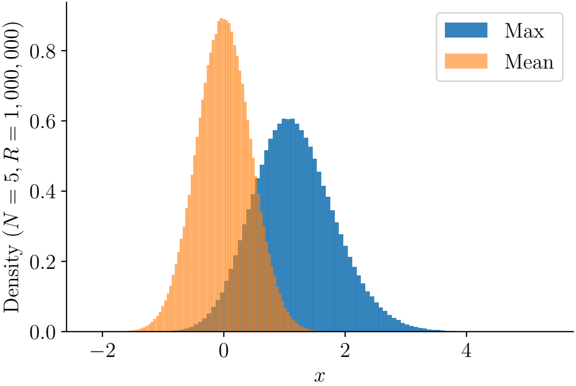
- **Intuitivt:** den k'te største værdi.

Ordensstatistikker

- **Analytisk** resultat for den uniforme fordeling
- **Kodeeksempel:** træk $R = 1.000.000$ repetitioner af $N = 5$ samples.

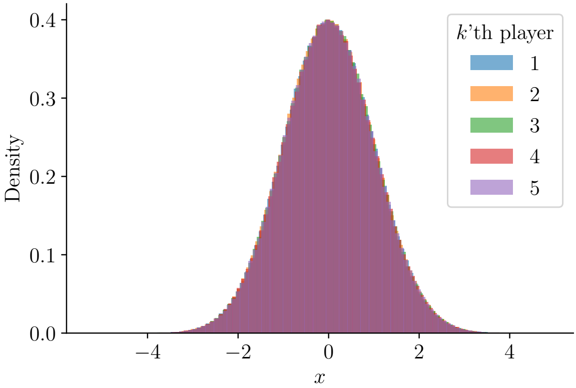
```python
import numpy as np, matplotlib.pyplot as plt
N = 5
R = 1000000
k = 4 # the second-highest value

u = np.random.normal((N,R))
u = np.sort(u, 0) # sorts each row independently

# histogram of the k'th order statistic
plt.hist(u[k-1, :]) # (k-1 since base 0)
```

Numerisk eksempel



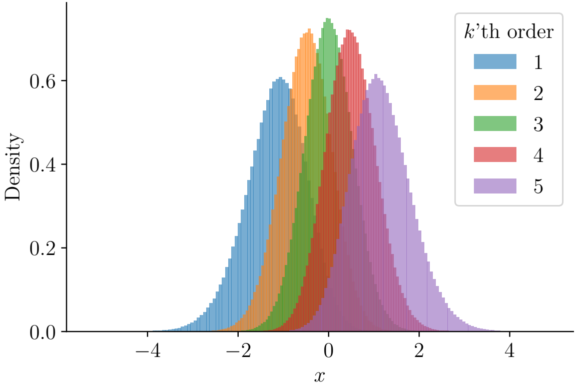
- **Fig.:** mean $= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} X_i$, max $= \max(X_1, ..., X_5)$ n'te ordensstatistik.
  - Overvej, hvad der sker når hhv. $R \to \infty$ og $N \to \infty$.

Før sortering



- **Fig.** viser fordelingen af X_i, dvs. uden sortering.
  - De er ens fordi $X_i \sim$ IID

k'te ordensstatistikker

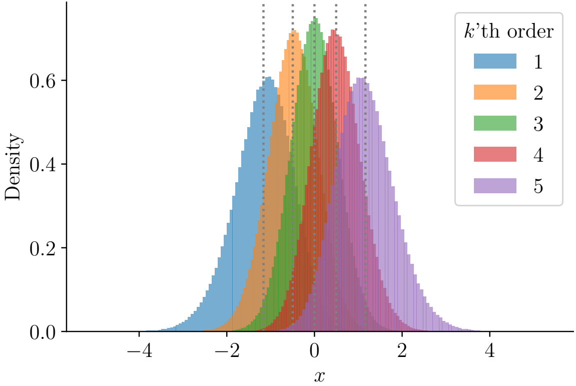


- **Fig.** viser fordelingen af $X_{(k)}$ for $k = 1, \ldots, 5$.

Forventet værdi

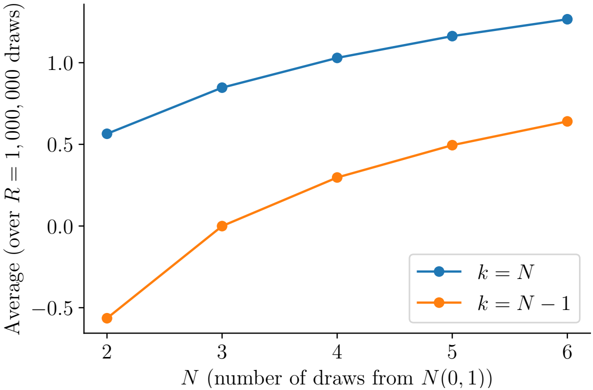
- **Spørgsmål:** hvordan mon N (antal trækninger i hver repetition) påvirker gennemsnittet for hvert histogram?
- $\Rightarrow$ **svar:** vi kan beregne $R^{-1} \sum_{r=1}^{R} X_{(k)}^{[r]}$.
  - Når $R \to \infty$, vil dette $\to \mathbb{E}(X_{(k)})$.
- **Dette** er en **algoritme** til at beregne $\mathbb{E}(X_{(k)})$ approksimativt.
  - Træk N stikprøver R gange: `u = np.random.normal((N,R))`
  - Sorter: `u = np.sort(u, 0)`
  - Beregn: `np.mean(u, 1)` hvilket giver en N-vektor, hvor det k'te element er (approksimationen til) den forventede k'te ordensstatistik.

Fordelinger og gennemsnit



- **De stiplede linjer** angiver gns. beregnet separat for hver fordeling af ordensstatistikker.
  - $\Rightarrow$ vi kunne gøre det samme for $N = 2, ..., 6$
    (og for alle $c \in \mathbb{N}$)

Forventede ordensstatistikker



- **Fig.** viser $\mathbb{E}(X_{(k)})$ for $k = n - 1, n$
  - Dvs. for den største og næststørste værdi.

Ordensstatistikker analytisk

Resultat: Ordensstatistikker fra den uniforme fordeling

Lad $X_{(k)}$ være den k'te ordensstatistik fra den uniforme fordeling. Da er

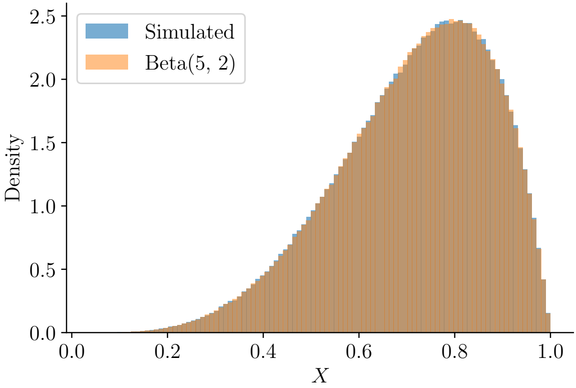
$$X_{(k)} \sim \mathcal{B}(k, n+1-k).$$

Den forventede værdi

$$\mathbb{E}(X_{(k)}) = \frac{k}{n+1}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

- **Kun** for den uniforme fordeling.
- **Enkelte andre** fordelinger kan løses analytisk, men det er undtagelsen, ikke reglen.

Simulation



- **Fig.** viser simulerede $n-1$'te ordens statistikker for $n=5$ sammen med trækninger fra en $\mathcal{B}(5,2)$ fordeling.

Trunkeret fordeling

- Vi får også behov for at kunne håndtere en **trunkeret fordeling**.
- **Intuitivt:** Vi trækker fra en fordeling F, men "sletter" observationer, der er større end en bestemt værdi

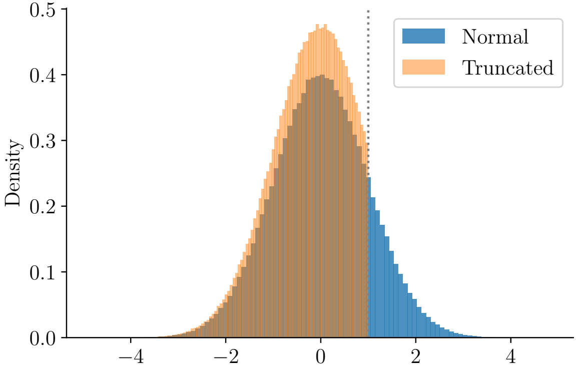
```
v = np.random.normal(0,1,(R,))
v = v[v <= 1.0] # truncation at 1.0
plt.hist(v)
```

- **Analytisk:** Hvis $X_i \sim \text{IID}F$, så er CDF for den trunkerede fordeling til intervallet $[a; b]$, $\tilde{F}$, givet ved

$$\tilde{F}(x) = \frac{F(x)}{F(b) - F(a)}, \quad \text{for } x \in [a; b].$$

  - Øvre trunkering, $X \leq k$, giver altså $\frac{F(x)}{F(k)}$, (intuitivt: "$F(-\infty) = 0$")

Trunkeret fordeling



- Proportional stigning: sandsynlighedsmassen er blot "ganget på" overalt på $(-\infty; 1]$.

Provenuækvivalens

Motivation

- **Provenuækvivalens:** “mange” auktionsformater giver samme provenu til auktionarius.
- Et af de **vigtigste resultater i auktionsteori**.
  - … besvarer spørgsmålet om, hvilket auktionsformat, man bør bruge.
- **For os:** vigtigt at kende for at
  - kunne sammenligne auktionsformater,
  - kunne løse first-price sealed bid via et smart trick.

Provenuækvivalens

Teorem: Provenuækvivalens

Antag der er n spillere, som trækker valueringer $v \sim \text{IID}F$. Betragt to auktionsmekanismer, hvor

1. i ligevægt allokerer de altid goderne på samme måde,
2. enhver agent med den mindste mulige værdi, $v = 0$, får $\mathbb{E}[u(b^*)] = 0$.

$\Rightarrow$ Da vil de to auktioner generere samme forventede provenu, og enhver byder med samme valuering, vil give same forventede betaling.

Implikation

- **Second price:** simpelt at løse
  - dominant strategi at byde sandfærdigt: $b^*(v_i) = v_i$ og betale $p_i = v_{(n-1)}$.
- **First price:** kompliceret i mange situationer
  - Håndterbart for $v_i \sim \mathcal{U}(a, b)$...
  - ... kompliceret for andre fordelinger.
- **Snedigt trick:** vi kan udnytte provenuækvivalens.

Uniform: Analytisk vs. Provenuækvivalens

- **Tidligere:** så vi den analytiske løsning på en first-price auktion med uniforme valueringer:
$$b^*(v_i) = \frac{n-1}{n} v_i.$$
- **Nu:** udlede dette ud fra provenuækvivalens.
  - Fordi FPSB og SPSB auktionerne opfylder teoremets betingelser.
  - ... fordi
- **Provenuækvivalens** $\Rightarrow$ alle bydere vil *i forventning* betale det samme i ligvægt i en FPSB og en SPSB auktion.
- **Implikation:** alle skal byde *som om* de var vinderen i en SPSB auktion.
  - i^* med $v_i = \max_j v_j$ vil have ret i denne antagelse, ...
  - ... alle andre tager fejl, men det gør intet, for de taber alligevel.
    - Betinget på at have $v_j < v_{i^*}$, tager man.

Implementering

- **Hvad** vil det sige at byde *"som om man var vinderen i en SPSB"*?
  - $\Rightarrow$ man skal *betinge* på, at ens bud er max.
  - Dvs. to ting gælder:
    - ens eget bud, v_i, er ikke-stokastisk, og
    - $n - 1$ IID trækninger af v, hvor de blev trukket lavere end v_i (dvs. øvre trunkering ved v_i)
- **Dernæst** skal man byde optimalt ud fra en SPSB, givet denne betingning på budfordelingen.
  - $\Rightarrow$ dvs. man skal byde sådan, at man i forventning betaler $n - 1$'te ordensstatistik for denne trunkerede fordeling.

Implementering: analytisk

- **Matematisk:** byder i med valuering v_i skal byde

$$\mathbb{E}(\tilde{v}_{(n-1)}), \quad \text{hvor } \tilde{v} \sim \mathcal{U}(0, v_i).$$

  - Mao. skal vi beregne den $n-1$'te ordensstatistik (maksimum) for en stikprøve på $n-1$ trækninger fra en uniform trunkeret til $[0; v_i]$.

- **Analytisk løsning:** For general $w \sim \mathcal{U}(0, a)$, og en stikprøve på $N = n-1$, er $\mathbb{E}(w_{(k)}) = \frac{k}{n-1+1} = \frac{k}{n}$, så

$$b^*(v_i) = \mathbb{E}(\tilde{v}_{(n-1)}) = \frac{n-1}{n} v_i.$$

  - **Hurra,** det var præcis, hvad vi fandt tidligere.

Implementering numerisk

- **Målet** i med valuering v_i skal i en FPSB auktion byde

$$b^*(v_i) = \mathbb{E}(\tilde{v}_{(n-1)}),$$

  - Dvs. den forventede værdi af maksimum blandt $n-1$ trækninger fra $\mathcal{U}(0, v_i)$.
- Vi kan **simulere** $\mathbb{E}(\tilde{v}_{(n-1)})$ ved at
  1. trække $(n-1) \times R$ gange fra den trunkerede fordeling, $\{\tilde{v}_{j,r}\}_{j=1,r=1}^{n-1,R}$,
  2. finde den største værdi, $\tilde{v}_{(n-1),r} := \max_{j=1,\dots,n-1} \tilde{v}_{j,r}$,
  3. returnere $R^{-1} \sum_{r=1}^{\infty} \tilde{v}_{(n-1),r}$.

  Ved Store Tals Lov vil $R^{-1} \sum_{r=1}^{\infty} \tilde{v}_{(n-1),r} \to \mathbb{E}(\tilde{v}_{(n-1)})$ når $R \to \infty$.
- **Trækning** fra den trunkerede fordeling kan opnås
  - For den uniforme: `np.random.uniform(0, vi, (N,R))`
  - For generelle fordelinger, fx normalfordelingen

```
v = np.random.normal(0, 1, (N,R))
v = v[v <= vi]
```