Ongelijkheden

IMO trainingsweekend 2013

Deze tekst probeert de basis aan te brengen voor het bewijzen van ongelijkheden op de IMO. Het is de bedoeling om te bewijzen dat een bepaalde grootheid (een uitdrukking met een aantal variabelen in) steeds minstens zo groot is als (of strikt groter dan) een andere, eventueel onder bepaalde voorwaarden. Om verwarring te vermijden maken we eerst de volgende afspraak: een reëel getal heet *positief* als het minstens nul is. Een reëel getal heet *negatief* als het hoogstens nul is. Merk op dat nul dus zowel positief als negatief is. (Weetje: in het Engels is de conventie dat *positive* een getal aanduidt dat strikt groter is dan nul en *negative* een getal dat strikt kleiner is dan nul. In het Engels is nul dus niet *positive* en ook niet *negative.*)

Deze tekst is voornamelijk gebaseerd op hoofdstuk 7 van *Problem Solving Strategies* van Arthur Engel en op *Olympiad Inequalities* van Thomas Mildorf. De meeste oefeningen komen rechtstreeks uit één van deze twee bronnen.

De basis

Laat ons beginnen met een voorbeeld.

Opgave 1. *Bewijs dat voor alle reëele getallen a, b geldt dat*

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Oplossing. Kwadraten zijn positief (!). Daarom geldt $(a-b)^2 \geq 0$. Uitwerken van het merkwaardig product levert het gevraagde. □

Dit voorbeeld illustreert de eerste techniek die je kan gebruiken om een ongelijkheid aan te tonen: kwadraten zijn positief. Ook sommen van kwadraten zijn natuurlijk positief. We zullen hier een aantal resultaten uit afleiden die vaak nuttig zijn. Het bewijzen van deze stellingen laten we als oefening aan de lezer.

Stelling 1. *Voor alle reëele getallen a, b geldt dat*

$$2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}.$$

Als a en b positief zijn, weten we dat $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Dit levert het volgende op.

Stelling 2. *Voor $a, b, x > 0$ geldt*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Het getal $\sqrt{(a^2+b^2)/2}$ wordt het *kwadratisch gemiddelde* van a en b genoemd. Het getal $(a+b)/2$ wordt het *rekenkundig gemiddelde* van a en b genoemd. Het getal $\sqrt{ab}$ wordt het *meetkundig gemiddelde* van a en b genoemd. Het getal $2ab/(a+b)$ wordt het *harmonisch gemiddelde* van a en b genoemd. De afkortingen voor deze gemiddeldes zijn (vanuit het Engels) respectievelijk QM, AM, GM en HM. We hebben dan het volgende resultaat vastgesteld.

Stelling 3. *Voor strikt positieve getallen a en b geldt*

$$\min(a,b) \leq HM \leq GM \leq AM \leq QM \leq \max(a,b).$$

Deze vier soorten gemiddeldes kunnen we uitbreiden tot rijen van n strikt positieve getallen. Voor $a_1, \ldots, a_n > 0$ hebben we

$$\text{QM} = \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

$$\text{AM} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

$$\text{GM} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

$$\text{HM} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Stelling 4. *Voor $a_1, \ldots, a_n > 0$ geldt*

$$\min_i(a_i) \leq HM \leq GM \leq AM \leq QM \leq \max_i(a_i).$$

De ongelijkheden zijn gelijkheden precies wanneer alle a_i gelijk zijn.

Als één of meer van de a_i nul zijn, dan geldt de stelling nog steeds op voorwaarde dat je het harmonisch gemiddelde weglaat (want dat is dan niet gedefinieerd).

Opgave 2 (Ongelijkheid van Nesbitt)**.** *Voor strikt positieve getallen a, b, c geldt*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Eerste oplossing. We kunnen de ongelijkheid herschrijven tot

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\geq\frac{9}{2}$$

of dus

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq\frac{9}{2}. \qquad (*)$$

Dit kunnen we herschikken tot

$$\frac{2(a+b+c)}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}}$$

hetgeen equivalent is met

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}},$$

maar dit is gewoon AM-HM voor $a+b$, $b+c$ en $c+a$. $\square$

Tweede oplossing. We beginnen met dezelfde twee stappen als in de eerste oplossing en moeten dus $(*)$ bewijzen. Dan noemen we $x=b+c$, $y=c+a$, $z=a+b$ zodat de ongelijkheid wordt

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9.$$

Dit is equivalent met

$$3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geq 9,$$

hetgeen klopt omdat alle sommen tussen haakjes minstens 2 zijn. $\square$

Derde oplossing. Onze eerste twee stappen zijn weer dezelfde. We passen AM-GM toe op beide factoren in het linkerlid van $(*)$. Dit levert op

$$\begin{aligned}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)&\geq 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\\&=9.\end{aligned}$$

$\square$

Vierde oplossing. Als we a, b en c vervangen door ta, tb en tc met $t>0$, dan blijft de ongelijkheid gelden (we mogen “de situatie herschalen”; we zeggen ook wel dat de ongelijkheid *homogeen* is). Daarom mogen we aannemen dat $a+b+c=1$ in $(*)$. Nu passen we AM-HM toe op $(a+b)^{-1}$, $(b+c)^{-1}$ en $(c+a)^{-1}$ en we vinden dat

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq\frac{3}{2(a+b+c)}=\frac{3}{2}$$

en dit was precies wat we moesten bewijzen volgens $(*)$. $\square$

De herschaal-techniek in het vierde bewijs kan waardevol zijn op een olympiade. Kijk altijd even na of een ongelijkheid homogeen is. Merk op dat de ongelijkheid tussen de gemiddeldes (stelling 4) homogene ongelijkheden bevat. Soms komen homogene ongelijkheden neer op deze stelling.

Vaak moeten ongelijkheden bewezen worden onder *nevenvoorwaarden*, extra gegevens waaraan de variabelen voldoen. Het is vaak een goed idee om de te bewijzen ongelijkheid *homogeen te maken* met behulp van deze extra gegevens. Een voorbeeld:

Opgave 3. *Als a, b, c positieve getallen zijn zodanig dat $abc = 1$, dan is $a+b+c \leq a^2+b^2+c^2$.*

Oplossing. Het linkerlid is van de eerste graad in de variabelen en het rechterlid van de tweede. Links vermenigvuldigen met $(abc)^{\frac{1}{3}} = 1$ levert dus een homogene ongelijkheid op, namelijk

$$a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{4}{3}}a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Deze volgt uit AM-GM. Inderdaad, we hebben

$$\frac{a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + b^2 + c^2}{6} \geq a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}$$

en nog twee analoge ongelijkheden door cyclisch verwisselen van de variabelen. Deze drie ongelijkheden optellen levert het gevraagde. □

Standaard ongelijkheden

Belangrijk in het bewijzen van ongelijkheden is het herkennen van bestaande ongelijkheden die goed gekend zijn. Stelling 4 mag je gebruiken op de IMO op voorwaarde dat je de naam (bijvoorbeeld QM-GM) vermeldt. Hetzelfde geldt voor de stellingen in deze sectie.

Stelling 5 (Cauchy-Schwarz)**.** *Als $a_1, \ldots, a_n$ en $b_1, \ldots, b_n$ reële getallen zijn, dan is*

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2).$$

Gelijkheid geldt precies wanneer er een reëel getal λ bestaat zodanig dat $a_i = \lambda b_i$ voor alle i of als alle b_i nul zijn.

Deze ongelijkheid komt heel vaak voor in olympiade-oplossingen, bijvoorbeeld bij de volgende opgave.

Opgave 4. *Voor strikt positieve getallen a, b, c, d geldt*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

Voor de volgende stelling moeten we weten wat *convexiteit* is. Als $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie is op een interval, noemen we deze *convex* als

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)y) \quad \text{voor alle } x, y \in [a, b] \text{ en } \lambda \in [0, 1].$$

Grafisch gezien komt dit erop neer dat het lijnstuk tussen twee punten op de grafiek nergens onder de grafiek ligt. Een functie f heet *concaaf* als $-f$ convex is, met andere woorden als het lijnstuk tussen twee punten op de grafiek nergens boven de grafiek ligt. Als f continu is en twee keer afleidbaar op $]a, b[$, dan is f convex als en slechts als de tweede afgeleide altijd positief is. Analoog is f dan concaaf als en slechts als de tweede afgeleide altijd negatief is.

We noemen een functie *strikt convex* als de ongelijkheid strikt is voor alle $\lambda \in]0, 1[$ (tenzij $x = y$), en analoog voor strikt concaaf. Veronderstel dat f continu is en twee keer afleidbaar op $]a, b[$. Als de tweede afgeleide van f strikt positief is, dan is f strikt convex (maar het omgekeerde geldt niet).

Convexiteit van functies is een krachtig hulpmiddel voor het aantonen van ongelijkheden. Het is wellicht één van de weinige plaatsen in de IMO waar het gebruik van afgeleiden nuttig is.

Stelling 6 (Jensen)**.** *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ convex. Dan geldt voor alle $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ en positieve $\omega_1, \ldots, \omega_n$ (niet allemaal nul) dat*

$$\frac{\omega_1 f(x_1) + \cdots + \omega_n f(x_n)}{\omega_1 + \cdots + \omega_n} \geq f\left(\frac{\omega_1 x_1 + \cdots + \omega_n x_n}{\omega_1 + \cdots + \omega_n}\right).$$

De ongelijkheid is strikt wanneer f strikt convex is en de x_i niet allemaal gelijk zijn.

Opgave 5. *Als a, b strikt positief zijn zodanig dat $a + b = 1$, dan is*

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Oplossing. De functie $f : x \mapsto (x + x^{-1})^2$ is convex op de verzameling van strikt positieve getallen (ga dit zelf na). We hebben dus

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

en dit is het gevraagde. □

Stelling 7 (Machtsgemiddeldes)**.** *Zij $x_1, \ldots, x_n$ en $\omega_1, \ldots, \omega_n$ positieve getallen en veronderstel dat niet alle ω_i nul zijn. Definieer*

$$f(r) = \left(\frac{\omega_1 x_1^r + \cdots + \omega_n x_n^r}{\omega_1 + \cdots + \omega_r}\right)^{\frac{1}{r}}$$

voor alle $r > 0$. Als alle x_i strikt positief zijn, definiëren we f ook voor $r < 0$ aan de hand van dezelfde formule, en dan definiëren we ook

$$f(0) = \left(x_1^{\omega_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\omega_n}\right)^{\frac{1}{\omega_1 + \cdots + \omega_n}}.$$

(De functie f is dus gedefinieerd op alle reële getallen als alle x_i strikt positief zijn, en anders alleen op de strikt positieve reële getallen.) Dan is f een stijgende functie in r die waarden aanneemt tussen $\min_i(x_i)$ en $\max_i(x_i)$. Als niet alle x_i gelijk zijn, is f strikt stijgend, en anders is f constant.

Dit is een sterke veralgemening van stelling 4. Inderdaad, als we $\omega_i = 1$ nemen voor alle i, is $f(-1)$ het harmonisch gemiddelde van de x_i, $f(0)$ het meetkundig gemiddelde, $f(1)$ het rekenkundig gemiddelde en $f(2)$ het kwadratisch gemiddelde. Stelling 4 zegt dan essentieel dat

$$f(-1) \leq f(0) \leq f(1) \leq f(2).$$

De formulering van deze stelling is lang wegens de algemeenheid, en vaak zijn speciale gevallen (zoals alle $\omega_i = 1$) al nuttig.

Stelling 8 (Schur)**.** *Veronderstel dat a, b, c positief zijn en dat $r > 0$. Dan is*

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-c)(b-a) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0$$

met gelijkheid als en slechts als $a = b = c$, of als twee getallen uit $\{a, b, c\}$ gelijk zijn en het andere nul.

Schrijf de gevallen $r = 1$ en $r = 2$ eens expliciet op en werk de haakjes uit om de ongelijkheid van Schur beter te leren kennen.

Stelling 9 (Chebyshev)**.** *Veronderstel dat $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ en $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. Dan is*

$$\frac{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} \geq \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n}.$$

Opgave 6. *Voor strikt positieve a, b, c geldt*

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

Opgave 7. *Veronderstel dat a, b, c positieve getallen zijn met $a + b + c = 1$. Bewijs dat*

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq \frac{1}{4}$$

en ga na wanneer de gelijkheid geldt.

De volgende ongelijkheid die we willen bespreken is de herschikkingsongelijkheid. We zullen deze eerst illustreren met een simpele puzzel. Veronderstel dat op een tafel stapeltjes eurobiljetten liggen, gesorteerd per waarde (dus een stapeltje van biljetten van 5, 10, 20, 50, 100, 200 en 500 euro). Van één van deze stapeltjes mag je 7 biljetten nemen, van een andere 6, van nog een andere 5, van een vierde 4, van één van de overblijvende 3, van een zesde stapeltje 2 en van het laatste stapeltje 1. Hoe maximaliseer je je winst? Het antwoord ligt voor de hand: neem 7 biljetten van 500, 6 biljetten van 200, enzovoorts tot 1 biljet van 5. Dit is het idee achter de herschikkingsongelijkheid.

Om de herschikkingsongelijkheid op een efficiënte manier te kunnen opschrijven, voeren we eerst wat notatie in. Als $a_1, \ldots, a_n$ en $b_1, \ldots, b_n$ twee rijen reële getallen zijn, noteren we hun *scalair product* als

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n.$$

Deze notatie is niet standaard, en als je ze gebruikt op de IMO moet je ze eerst uitleggen.

Stelling 10 (Herschikkingsongelijkheid)**.** *Veronderstel dat $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ en $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ twee rijen reële getallen zijn, gesorteerd van groot naar klein. Dan is*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_{\sigma(1)} & b_{\sigma(2)} & \cdots & b_{\sigma(n)} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \end{bmatrix}$$

voor eender welke permutatie σ van $\{1, 2, \ldots, n\}$. In woorden: het scalair product van twee rijen is maximaal als hun elementen op dezelfde manier gesorteerd zijn (bijvoorbeeld allebei van groot naar klein), en minimaal als ze omgekeerd gesorteerd zijn.

Deze ongelijkheid ligt redelijk voor de hand als je het voorbeeld met de eurobiljetten in het achterhoofd houdt. Toch is ze heel nuttig op olympiades, zeker als je ook de uitbreiding naar meerdere rijen kent (hoewel die alleen spreekt over het maximum).

Voor drie rijen $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ en $c_1, \ldots, c_n$ is het *gezamenlijk scalair product* gedefinieerd als

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 c_1 + \cdots + a_n b_n c_n,$$

en analoog voor meer dan drie rijen.

Stelling 11 (Herschikkingsongelijkheid voor meerdere rijen)**.** *Veronderstel dat een aantal rijen gegeven zijn van n positieve getallen elk. Dan is hun gezamenlijk scalair product maximaal als ze allemaal van groot naar klein gesorteerd zijn.*

Merk op dat de herschikkingsongelijkheid voor meerdere rijen enkel geldt voor rijen van positieve getallen.

Opgave 8. *Bewijs de ongelijkheid van Nesbitt met behulp van de herschikkingsongelijkheid.*

Bewijs. Merk op dat

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} \end{bmatrix}.$$

Het optellen van deze ongelijkheden geeft het gevraagde. □

Opgave 9. *Vind het minimum van $\sin(x)^3/\cos(x) + \cos(x)^3/\sin(x)$ voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$.*

Hint. Voor $x = \frac{\pi}{4}$ krijgen we 1. Dit is het minimum.

Opgave 10. *Voor positieve a, b, c geldt $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$.*

Ten slotte nog een lijstje van veelvoorkomende substituties:

- als $abc = 1$, kan je stellen $a = x/y$, $b = y/z$ en $c = z/x$,

- als a, b, c de zijden zijn van een driehoek (als geen enkele groter is dan de som van de twee andere), zijn ze te schrijven als $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$ met $x, y, z \geq 0$,
- goniometrische substituties.

We geven van de laatste een voorbeeld.

Opgave 11. *Zij x, y, z strikt positief zodanig dat $x + y + z = xyz$. Bewijs dat*

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Oplossing. Stel $x = \tan(a)$, $y = \tan(b)$, $z = \tan(c)$ met $a, b, c \in]0, \frac{\pi}{2}[$. De te bewijzen ongelijkheid wordt dan

$$\cos(a) + \cos(b) + \cos(c) \leq \frac{3}{2}.$$

De gelijkheid $x + y + z = xyz$ is dan

$$\tan(a) + \tan(b) + \tan(c) = \tan(a)\tan(b)\tan(c),$$

hetgeen betekent

$$-\tan(c) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} = \tan(a + b).$$

Er volgt dat $a + b + c = \pi$. Merk op dat cos concaaf is op $]0, \frac{\pi}{2}[$, zodat volgens Jensen geldt

$$\frac{\cos(a) + \cos(b) + \cos(c)}{3} \leq \cos\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Dit bewijst het gevraagde. $\square$

Oefeningen

Opgave 12. *Voor alle reële getallen x geldt $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$.*

Opgave 13. *Voor positieve reële getallen a, b, c geldt $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.*

Opgave 14. *Voor alle reële getallen a, b, c geldt $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.*

Opgave 15. *Als $a_1, a_2, \ldots, a_{2013}$ positieve reële getallen zijn waarvan het product 1 is, dan geldt*

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_{2013}) \geq 10^{600}.$$

Opgave 16. *Voor positieve getallen a, b, c, d geldt $\sqrt{(a + c)(b + d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.*

Opgave 17. *Voor strikt positieve getallen* $a_1, \ldots, a_n$ *geldt*

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Probeer in te zien dat dit betekent dat het rekenkundig gemiddelde van n *getallen minstens het harmonisch gemiddelde is van deze getallen.*

Opgave 18. *Vermenigvuldig de ongelijkheid in opgave 14 met* $(a+b+c)$ *om te bewijzen dat voor alle strikt positieve* a, b, c *geldt dat* $AM \geq GM \geq HM$ *(waarbij* $AM = (a+b+c)/3$, $GM = \sqrt[3]{abc}$ *en* $HM = 3/(a^{-1} + b^{-1} + c^{-1})$*).*

Opgave 19 (IMO 1974)**.** *Zij* $a, b, c, d > 0$. *Vind alle mogelijke waarden van*

$$\frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}.$$

Opgave 20. *Voor positieve* $x_1, \ldots, x_n$ *geldt*

$$x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \cdots + x_n^{n+1} \geq x_1 x_2 \cdots x_n (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

Opgave 21 (IMO 1975)**.** *Veronderstel dat* $x_1, \ldots, x_n$ *en* $y_1, \ldots, y_n$ *twee dalende rijen van getallen zijn. Veronderstel dat* $z_1, \ldots, z_n$ *een willekeurige permutatie is van de* y_i. *Toon aan dat*

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=}^{n} (x_i - z_i)^2.$$

Opgave 22. *Voor positieve getallen* a, b, c *geldt* $(a^2 b + b^2 c + c^2 a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2 b^2 c^2$.

Opgave 23. *Als* $a, b, c > 0$ *en* $a + b + c = 1$, *dan*

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$

Opgave 24. *Voor strikt positieve* x, y, z *gelden*

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$$

en

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

Opgave 25. *Bewijs dat* $(a^3 - a + 2)^2 > 4a^2(a^2 + 1)(a - 2)$.

Opgave 26. *Veronderstel dat* a, b, c *groter zijn dan 1 zodanig dat*

$$\frac{1}{a^2 - 1} + \frac{1}{b^2 - 1} + \frac{1}{c^2 - 1} = 1.$$

Bewijs dat

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \leq 1.$$

Opgave 27. *Bewijs dat voor reële getallen x en y geldt dat*

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}.$$

Opgave 28. *Als $a, b > 0$ en n is een natuurlijk getal, dan geldt*

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}.$$

Opgave 29. *Veronderstel dat $a, b, c > 0$, $a > c$ en $b > c$. Bewijs dat*

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

Opgave 30. *Veronderstel dat $a, b, c > 0$. Bewijs dat*

$$abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

en

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

Opgave 31. *Veronderstel dat a, b, c positief zijn zodanig dat $a + b + c = 1$. Bewijs dat $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}$.*

Opgave 32. *Als a, b, c strikt positieve getallen zijn, dan is*

$$\frac{a+b-2c}{b+c} + \frac{b+c-2a}{c+a} + \frac{c+a-2b}{a+b} \geq 0.$$

Opgave 33 (IMO 1995)**.** *Veronderstel dat a, b, c positief zijn met $abc = 1$. Bewijs dat*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Opgave 34 (IMO 1999)**.** *Zij $n \geq 2$ een natuurlijk getal. Vind het kleinste getal C zodanig dat voor alle positieve $x_1, \ldots, x_n$ geldt*

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^4.$$

Opgave 35. *Veronderstel dat $abc = -1$. Bewijs dat*

$$a^4 + b^4 + c^4 + 3(a+b+c) \geq \frac{a^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} + \frac{c^2}{b}.$$

Opgave 36 (IMO 2008)**.** *Bewijs dat voor alle reële getallen $x \neq 1$, $y \neq 1$, $z \neq 1$ die voldoen aan $xyz = 1$ de volgende ongelijkheid geldt:*

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1.$$

Bewijs dat er gelijkheid geldt voor oneindig veel drietallen rationale getallen $x \neq 1$, $y \neq 1$, $z \neq 1$ die voldoen aan $xyz = 1$.

Opgave 37. *Veronderstel dat a, b, c strikt positieve getallen zijn met $a + b + c + abc = 4$. Bewijs dat*

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b+c).$$

Opgave 38 (Shortlist IMO 2008)**.** *Veronderstel dat a, b, c, d positief zijn zodanig dat*

$$abcd = 1 \quad \textit{en} \quad a + b + c + d > \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

Bewijs dat

$$a + b + c + d < \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}.$$

Opgave 39 (IMO 2012)**.** *Veronderstel dat $n \geq 3$ en dat $a_2, \ldots, a_n$ positieve getallen zijn waarvan het product 1 is. Bewijs dat*

$$(a_2 + 1)^2 (a_3 + 1)^3 \cdots (a_n + 1)^n > n^n.$$

Extraatje: convexiteit in meerdere veranderlijken

We illustreren een techniek die gebruikmaakt van convexiteit in meerdere veranderlijken. We gaan niet in op de theorie, en als je deze techniek wil toepassen op de IMO moet je alle stappen goed verantwoorden (wellicht beter dan we hier doen).

Opgave 40. *Voor* $0 \leq a, b, c \leq 1$ *geldt*

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

Oplossing. We beschouwen het linkerlid als een functie $f(a, b, c)$ gedefinieerd op de kubus. Omdat f continu is en gedefinieerd op een gesloten en begrensd gebied neemt ze haar maximum aan. De functie is daarenboven strikt convex, zoals nagegaan kan worden door alle tweede partieel afgeleiden te berekenen. Hieruit volgt dat f haar maximum aanneemt op een punt dat niet op het lijnstuk tussen twee andere punten ligt, maar zo zijn er maar acht: alle hoekpunten van de kubus. De functiewaarde uitrekenen voor alle acht de hoekpunten levert dat f nooit groter wordt dan 1. □

Opgave 41. *Als* $0 \leq a, b, c \leq 1$*, dan is*

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2.$$

Extraatje: meer ongelijkheden

Wie extra wapens wil voor het oplossen van ongelijkheden kan zich hierin verdiepen.

Veronderstel dat $(a_1, \ldots, a_n)$ en $(b_1, \ldots, b_n)$ twee rijen reële getallen zijn. We zeggen dan dat de rij $(a_1, \ldots, a_n)$ de rij $(b_1, \ldots, b_n)$ *majoriseert* als

- beide rijen dalend zijn (niet per se strikt),
- voor alle $1 \leq k \leq n$ geldt dat $\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{k} b_i$, met gelijkheid voor $k = n$.

We schrijven dit als $(a_1, \ldots, a_n) \succ (b_1, \ldots, b_n)$. Merk op dat de getallen niet geheel hoeven te zijn. Bemerk ook dat de rijen dezelfde som moeten hebben (als gevolg van het tweede puntje). Als voorbeeld hebben we dat $(2, 0, 0)$ de rij $(1, 1, 0)$ majoriseert. De rij $(0, 3, 0)$ majoriseert de rij $(1, 0, 2)$ niet (en ook niet omgekeerd). Wel hebben we $(3, 0, 0) \succ (2, 1, 0)$.

Stelling 12 (Muirhead)**.** *Veronderstel dat* $x_1, \ldots, x_n$ *positieve getallen zijn en dat* $(a_1, \ldots, a_n) \succ (b_1, \ldots, b_n)$*. Dan is*

$$\sum_{sym} x_i^{a_i} \geq \sum_{sym} x_i^{b_i}.$$

Hierbij wordt de som genomen over alle permutaties van de x_i *(merk op: niet alleen over de cyclische). Gelijkheid geldt als en slechts als* $(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n)$ *of alle* x_i *gelijk zijn.*

Omdat $(3,1,0) \succ (2,1,1)$ zegt de ongelijkheid van Muirhead bijvoorbeeld dat

$$x^3y + x^3z + y^3x + y^3z + z^3x + z^3y \geq 2(x^2yz + y^2xz + z^2xy)$$

voor alle positieve x, y, z. Merk op dat we dit ook hadden kunnen verkrijgen door AM-GM door

$$\frac{2(x^3y) + 2(x^3z) + y^3z + z^3y}{6} \geq \sqrt[6]{(x^3y)^2(x^3z)^2(y^3z)(z^3y)} = x^2yz$$

op te tellen over alle permutaties van de variabelen. In feite kan elk resultaat dat je via Muirhead verkrijgt ook verkregen worden met AM-GM, en sommigen raden aan om een toepassing van Muirhead steeds te vervangen door AM-GM omdat dit beter gekend is onder de jury. Bespreek eventueel met je teamleider of het aan te raden is Muirhead te gebruiken.

We geven ten slotte nog een laatste stelling.

Stelling 13 (Karamata's majorization inequality)**.** *Veronderstel dat f convex is op $[a,b]$ en dat $(x_1, \ldots, x_n) \succ (y_1, \ldots, y_n)$, waarbij $x_i, y_i \in [a,b]$. Dan is*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f(y_i).$$