

Comisión ..... Apellido y Nombre ..... legajo .....

Se tendrán en cuenta para la corrección los siguientes criterios: Desarrollo y justificación de los pasos para llegar a la respuesta - Escritura explícita de la respuesta - Claridad y orden en la escritura

- 1) a) Dada una sucesión geométrica de la que se conocen los siguientes términos:  $a_1 = 3$  y  $a_6 = 96$ , hallar la razón y dar la definición explícita.  
 b) Definir con sus palabras qué es una sucesión aritmética.
- 2) a) La suma de los 40 primeros términos de una sucesión aritmética de diferencia  $-3$  es  $-2260$ . Hallar  $a_1$   
 b) Expresar la siguiente suma usando notación sigma:  $\frac{3}{4} + \frac{4}{4} + \frac{5}{4} + \frac{6}{4} + \frac{7}{4} + \frac{8}{4} + \frac{9}{4} + \frac{10}{4} + \frac{11}{4} + \frac{12}{4}$
- 3) a) ¿Cuántas cadenas de 8 bits comienzan o terminan con 0?  
 b) En un juego de azar se eligen 6 números entre el 1 y el 46, ¿Cuántas posibles elecciones hay?
- 4) a) Hallar, usando operaciones elementales, el rango de la siguiente matriz:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$   
 b) Indicar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, justificando, con una demostración o un contraejemplo según corresponda: "Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , entonces  $A - A^t = 0_{n \times n}$  (la matriz nula  $n \times n$ )"
- 5) a) Expresar el siguiente sistema en su forma matricial y llevarlo a su forma escalonada y reducida por filas: 
$$\begin{cases} -x + 3z = 5 \\ -y - 6z = a \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$$
  
 b) Indicar el valor de  $a$  para que el sistema tenga solución y dar la o las soluciones del sistema.

### TEMA 3

① a)  $a_1 = 3$  y  $a_5 = 96$   
 $a_n$  es geom.  $\Rightarrow a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$   
 $n \geq 1$

$$a_1 = 3$$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 = 96$$

$$3 \cdot r^4 = 96 \Rightarrow r^4 = 32$$

$$\Rightarrow \boxed{r=2} \text{ es la razón}$$

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}, \quad n \geq 1; n \in \mathbb{N}$$

es la def. explícita.

b) Una suc. es aritmética si, a partir del primer término, cada término se puede obtener del anterior, sumando un mismo nro. (llamado diferencia).

$$\textcircled{2} \text{ a) } S_m = \sum_{i=1}^m a_i = \frac{m \cdot (a_1 + a_m)}{2} \quad \textcircled{2}$$

$$S_{40} = \sum_{i=1}^{40} a_i = \frac{40 \cdot (a_1 + a_{40})}{2} = -2260$$

$$a_m = a_1 + (m-1) \cdot d = p$$

$$a_{40} = a_1 + 39 \cdot (-3)$$

$$40(a_1 + a_1 - 117) = -4520$$

$$2a_1 = \frac{-4520}{40} + 117$$

$$= -113 + 117$$

$$= 4 \Rightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$\text{b) } \frac{3}{4} + \frac{4}{4} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{11}{4} + \frac{12}{4}$$

$$= \sum_{i=3}^{12} \frac{i}{4}$$

③ También se puede pensar así:  $2^7 + 2^7 - 2^6$  (3)

a) comienzan con 0

0 2 2 2 2 2 2 1

terminan con 0

1 2 2 2 2 2 2 0

comienzan y terminan con 0.

0 2 2 2 2 2 2 0 = 192

$$= 2^6 + 2^6 + 2^6 = 3 \cdot 2^6$$

b) No importa el orden  $\Rightarrow$  es el mto. combinatorio

$$\binom{46}{6} = \frac{46!}{6! 40!} = \frac{46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9.366.819$$

4) a) Averigüo la matriz  $A_R$  (4)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 + (-2)F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_R$$

como  $A_R$  tiene 3 filas no nulas,  
el rango de  $A$  es 3.

b) "Si  $A \in \mathbb{R}^{m \times m} \rightarrow A - A^T = 0_{m \times m}$ "  
Es falso. Contraejemplo:

Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$A - A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_{2 \times 2}$$



$$2) \begin{cases} -x + 0y + 3z = 5 \\ 0x - y - 6z = a \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -6 & a \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \cdot F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & a \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_3 + (-1)F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & a \\ 0 & 1 & 6 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \cdot F_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -a \\ 0 & 1 & 6 & 8 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_3 + (-1)F_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 8+a \end{array} \right)$$

b) Para que sea compatible,  
 $8+a=0 \Rightarrow \boxed{a=-8}$

$$\begin{cases} x = -5 + 3z \\ y = 8 - 6z \end{cases}$$

$$S. \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -5 + 3z \\ \wedge y = 8 - 6z \}$$

Comisión ..... Apellido y Nombre ..... legajo .....

Se tendrán en cuenta para la corrección los siguientes criterios: Desarrollo y justificación de los pasos para llegar a la respuesta - Escritura explícita de la respuesta - Claridad y orden en la escritura

- 1) a) Dada una sucesión geométrica de la que se conocen los siguientes términos:  $a_1 = -2$  y  $a_6 = -\frac{1}{16}$ , hallar la razón y dar la definición explícita.  
 b) Definir con sus palabras qué es una sucesión aritmética.
- 2) a) La suma de los 50 primeros términos de una sucesión aritmética de diferencia 4 es 50. Hallar  $a_1$   
 b) Expresar la siguiente suma usando notación sigma:  $\frac{7}{3} + \frac{8}{3} + \frac{9}{3} + \frac{10}{3} + \frac{11}{3} + \frac{12}{3} + \frac{13}{3} + \frac{14}{3} + \frac{15}{3} + \frac{16}{3}$
- 3) a) ¿Cuántas cadenas de 8 bits tienen 1 en el 2do o en el 3er lugar?  
 b) En un juego de azar se eligen 7 números entre el 1 y el 50, ¿Cuántas posibles elecciones hay?
- 4) a) Hallar, usando operaciones elementales, el rango de la siguiente matriz:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$   
 b) Indicar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, justificando, con una demostración o un contraejemplo según corresponda: "Si  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  entonces  $B^t - B = 0_{n \times n}$  (la matriz nula  $n \times n$ )"
- 5) a) Expresar el siguiente sistema en su forma matricial y llevarlo a su forma escalonada y reducida por filas:  

$$\begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ -2x - y - 6z = 2 \\ -x - 3z = \alpha \end{cases}$$
  
 b) Indicar el valor de  $\alpha$  para que el sistema tenga solución y dar la o las soluciones del sistema.

#### TEMA 4

①

$$\textcircled{1} \textcircled{a)} \quad a_1 = -2 \text{ y } a_6 = -\frac{1}{16}$$

$a_n$  es geométrica  $\Rightarrow$

$$a_m = a_1 \cdot r^{m-1}, \quad m \geq 1, m \in \mathbb{N}$$

$$a_1 = -2$$

$$a_6 = -2 \cdot r^5 = -\frac{1}{16} \Rightarrow r^5 = \left(-\frac{1}{16}\right) : (-2)$$

$$r^5 = \frac{1}{32} \Rightarrow \boxed{r = \frac{1}{2}} \text{ es la razón.}$$

$$a_m = (-2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}, \quad m \geq 1, m \in \mathbb{N}$$

es la definición explícita.

b) Una suc. es aritmética si, a partir del primer término, cada término se puede obtener del anterior, sumando un mismo nro (la diferencia).



$$g) a) S_m = \sum_{i=1}^m a_i = \frac{m \cdot (a_1 + a_m)}{2} \text{ (2)}$$

$$S_{50} = \sum_{i=1}^{50} a_i = \frac{50 \cdot (a_1 + a_{50})}{2} = 50$$

como  $a_m$  es aritmética  $\rightarrow$

$$a_m = a_1 + (m-1) \cdot d$$

$d = 4$

$$50 (a_1 + a_{50}) = 100$$

$$50 \cdot (a_1 + a_1 + 49 \cdot 4) = 100$$

$$2a_1 + 196 = 2$$

$$2a_1 = -194 \Rightarrow \boxed{a_1 = -97}$$

$$b) \frac{7}{3} + \frac{8}{3} + \frac{9}{3} + \dots + \frac{15}{3} + \frac{16}{3}$$

$$= \sum_{i=7}^{16} \frac{i}{3}$$

③ 2). si hay un 1 en el 2º lugar, debe haber un 0 en el 3º

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{0}{2} \frac{-}{2} \frac{-}{2} \frac{-}{2} \frac{-}{2} = 2^6 = 64$$

• si hay un 1 en el 3º lugar, debe haber un 0 en el 2º

$$\frac{0}{2} \frac{1}{2} \frac{-}{2} \frac{-}{2} \frac{-}{2} \frac{-}{2} \frac{-}{2} = 2^6$$

• puede haber un 1 en el 3º y un 1 en el 2º

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{-}{2} \frac{-}{2} \frac{-}{2} \frac{-}{2} = 2^6$$

∴ Hay  $2^6 + 2^6 + 2^6 = 3 \cdot 2^6$  cadenas de 8 bits.   
  $= 192$

b) No importa el orden  $\Rightarrow$  es el ms combinatorio.

$$\binom{50}{7} = \frac{50!}{7!(50-7)!}$$

c) Realizo operaciones elementales y filas para encontrar la matriz  $A_R$ . (4)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 + (-2)f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 + (-1)f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_R$$

como  $A_R$  tiene 2 filas no nulas, el rango de  $A$  es 2.

b) "Si  $B \in \mathbb{R}^{m \times m} \Rightarrow B^T - B = 0_{m \times m}$ "

Es falso. Contraejemplo:

Sea  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$B^T - B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_{2 \times 2}$$

$$\textcircled{5} \quad 2) \quad \begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ -2x - y - 6z = 2 \\ -x + 0y - 3z = a \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -6 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & a \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + 2F_1, F_3 + F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & -3 & a \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_3 + 1F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & a+3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_1 + (-1)F_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & a+3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_3 + (-1)F_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array} \right)$$

b) Para que sea compatible,

$$a-5=0 \Rightarrow \boxed{a=5}$$

$$x = -5 - 3z$$

$$y = 8$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -5 - 3z \wedge y = 8\}$$