Numerical analysis - Matteprosjekt

Sondre Løvhaug, Dan Rasmussen,
Eiric Halland Wærness, Håvard Granaune Matberg

11. mars 2016

Revisjonshistorie

Dato	Versjon	Beskrivelse	Forfatter
26 Januar 2016	0.1	Første versjon	ESN

Innhold

1 Innledning

2 Resultater

3 Referanseliste

4 Vedlegg

4.1 Oppgave 1

4.1.1 Oppgave 5.1.21

Prove the second-order formula for the fourth derivative

$$f^{(4)}(x) = \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4} + O(h^2) \quad (1)$$

Ifølge Taylor's teorem, dersom f er fem ganger kontinuerlig deriverbar, kan vi bruke f(x + h) og f(x -h)

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^4(x) + \frac{h^5}{120}f^5(x) + O(h^6) \quad (2)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^4(x) - \frac{h^5}{120}f^5(x) + O(h^6) \quad (3)$$

Legger så sammen f(x+h) + f(x-h) for å eliminere odde-talls deriverte:

$$\begin{aligned}
&f(x+h) + f(x-h) = \\
&\qquad f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^4(x) + \frac{h^5}{120}f^5(x) + O(h^6) + \\
&\qquad f(x) - hf'(x) + x\frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^4(x) - \frac{h^5}{120}f^5(x) + O(h^6) \\
&\qquad\qquad = 2f(x) + h^2f''(x) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x) + O(h^6) \quad (4)
\end{aligned}$$

I følge Taylor's teorem, dersom f er fem ganger kontinuerlig deriverbar, kan vi bruke f(x+2h) og f(x-2h).
Legger så sammen f(x+2h) + f(x-2h) for å eliminere oddetalls-deriverte.
Siden vi allerede har regnet ut f(x+h) + f(x-h), setter vi inn for f(x+2h) og f(x-2h) og får:

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2f(x) + 2h^2f(x) + \frac{4h^4}{3}f^4(x) + O(h^6) \quad (5)$$

For å få den fjerde-deriverte aleine, må vi eliminere den andre-deriverte. Dette gjøres ved å gange inn 4 i den første likningen (4) og trekker fra likning (5):

$$4 * (f(x+h) + f(x-h)) = 8f(x) + 4h^2 f''(x) + \frac{4h^4}{12} f^4 + 4O(h^6)$$

$$\Downarrow$$

$$4f(x+h) + 4f(x-h) - (f(x+2h) + f(x-2h)) =$$

$$8f(x) + 4h^2 f''(x) + \frac{4h^4}{12} f^4(x) + 4O(h^6) -$$

$$2f(x) + 2h^2 f(x) + \frac{4h^4}{3} f^4(x) + O(h^6)$$

$$= 6f(x) - h^4 f^4(x) + 3O(h^6)$$

Snur litt om på likningen og får at:

$$h^4 f^4 = -4f(x+h) - 4f(x-h) + f(x-2h) + f(x-2h) + 6f(x) + 3O(h^6)$$

$$\Rightarrow f^4(x) = \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4} + O(h^2) \quad (6)$$

4.1.2 Oppgave 5.1.22a

Prove that if f(x) = f'(x) = 0, then

$$f^{(4)}(x+h) - \frac{16f(x+h) - 9f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} = O(h^2) \quad (7)$$

Starter med å bevise at dersom f(x) = f'(x) = 0, så er

$$f(x+h) = 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}(x+4h) = O(h^6) \qquad (8)$$

Fra oppgave 1, 5.1.21 har vi (1), vi begynner med å skrive denne om til f(x+h) og får:

$$f^{(4)}(x+h) = \frac{-4f(x) + f(x-h) + 6f(x+h) - 4f(x+2h)f(x+3h}{h^4} + O(h^2) \quad (9)$$

Nå har vi en likning for $f^{(4)}(x+h)$ og kan sette denne inn i (7)

$$\frac{-4f(x) + f(x-h) + 6f(x+h) - 4f(x+2h) + f(x+3h)}{h^4} + O(h^2)$$

$$-$$

$$\frac{16f(x+h) - 4f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} = O(h^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{-4f(x) + f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h}{h^4} + O(h^2) = O(h^2)$$

Fra oppgaveteksten har vi oppgitt at:

$$f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h) = O(h^6)$$

Vi setter dette inn i likninger vår og får:

$$\frac{-4f(x) + O(h^6)}{h^4} + O(h^2) = O(h^2)$$

Siden f(x) = f'(x) = 0 ender vi med:

$$\frac{-0 + O(h^6)}{h^4} + O(h^2) = O(h^2)$$
$$\Downarrow$$
$$O(h^2) + O(h^2) = O(h^2)$$