Numerical analysis - Matteprosjekt

Sondre Løvhaug, Dan Rasmussen,
Eiric Halland Wærness, Håvard Granaune Matberg

1. april 2016

Revisjonshistorie

Dato	**Versjon**	**Beskrivelse**	**Forfatter**
26 Januar 2016	0.1	Første versjon	ESN

Innhold

1 Innledning

2 Resultater

3 Referanseliste

4 Vedlegg

4.1 Oppgave 1

4.1.1 Oppgave 5.1.21

Prove the second-order formula for the fourth derivative

$$f^{(4)}(x) = \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4} + O(h^2) \quad (1)$$

Ifølge Taylor's teorem, dersom f er fem ganger kontinuerlig deriverbar, kan vi bruke f(x + h) og f(x -h)

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^4(x) + \frac{h^5}{120}f^5(x) + O(h^6) \quad (2)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^4(x) - \frac{h^5}{120}f^5(x) + O(h^6) \quad (3)$$

Legger så sammen f(x+h) + f(x-h) for å eliminere odde-talls deriverte:

$$\begin{aligned} f(x+h) + f(x-h) = \\ & f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^4(x) + \frac{h^5}{120}f^5(x) + O(h^6) + \\ & f(x) - hf'(x) + x\frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^4(x) - \frac{h^5}{120}f^5(x) + O(h^6) \\ & = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x) + O(h^6) \quad (4) \end{aligned}$$

I følge Taylor's teorem, dersom f er fem ganger kontinuerlig deriverbar, kan vi bruke f(x+2h) og f(x-2h).
Legger så sammen f(x+2h) + f(x-2h) for å eliminere oddetalls-deriverte.
Siden vi allerede har regnet ut f(x+h) + f(x-h), setter vi inn for f(x+2h) og f(x-2h) og får:

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2f(x) + 2h^2 f(x) + \frac{4h^4}{3}f^4(x) + O(h^6) \quad (5)$$

For å få den fjerde-deriverte aleine, må vi eliminere den andre-deriverte. Dette gjøres ved å gange inn 4 i den første likningen (4) og trekker fra likning (5):

$$4 * (f(x+h) + f(x-h)) = 8f(x) + 4h^2 f''(x) + \frac{4h^4}{12} f^4 + 4O(h^6)$$
$$\Downarrow$$
$$4f(x+h) + 4f(x-h) - (f(x+2h) + f(x-2h)) =$$
$$8f(x) + 4h^2 f''(x) + \frac{4h^4}{12} f^4(x) + 4O(h^6) -$$
$$2f(x) + 2h^2 f(x) + \frac{4h^4}{3} f^4(x) + O(h^6)$$
$$= 6f(x) - h^4 f^4(x) + 3O(h^6)$$

Snur litt om på likningen og får at:

$$h^4 f^4 = -4f(x+h) - 4f(x-h) + f(x-2h) + f(x-2h) + 6f(x) + 3O(h^6)$$
$$\Rightarrow f^4(x) = \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4} + O(h^2) \quad (6)$$

4.1.2 Oppgave 5.1.22a

Prove that if f(x) = f'(x) = 0, then

$$f^{(4)}(x+h) - \frac{16f(x+h) - 9f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} = O(h^2) \quad (7)$$

Starter med å bevise at dersom f(x) = f'(x) = 0, så er

$$f(x+h) = 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}(x+4h) = O(h^6) \qquad (8)$$

Fra oppgave 1, 5.1.21 har vi (1), vi begynner med å skrive denne om til f(x+h) og får:

$$f^{(4)}(x+h) = \frac{-4f(x) + f(x-h) + 6f(x+h) - 4f(x+2h)f(x+3h}{h^4} + O(h^2) \quad (9)$$

Nå har vi en likning for $f^{(4)}(x+h)$ og kan sette denne inn i (7)

$$\frac{-4f(x) + f(x-h) + 6f(x+h) - 4f(x+2h) + f(x+3h)}{h^4} + O(h^2)$$
$$-$$
$$\frac{16f(x+h) - 4f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} = O(h^2)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{-4f(x) + f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h}{h^4} + O(h^2) = O(h^2)$$

Fra oppgaveteksten har vi oppgitt at:

$$f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h) = O(h^6)$$

Vi setter dette inn i likninger vår og får:

$$\frac{-4f(x) + O(h^6)}{h^4} + O(h^2) = O(h^2)$$

Siden f(x) = f'(x) = 0 ender vi med:

$$\frac{-0 + O(h^6)}{h^4} + O(h^2) = O(h^2)$$
$$\Downarrow$$
$$O(h^2) + O(h^2) = O(h^2)$$

4.2 Oppgave 6

4.2.1 Oppgave 6a

Vi legger til en funksjon i Euler-likningen

$s(x) = -pgsin\frac{\pi}{L}x$

til kraftdelen til f(x)

$EIy^{(4)} = f(x) + s(x)$

Skal bevise at

$$y(x) = \frac{f}{24EI}x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2) - \frac{gpL}{EI\pi}(\frac{L^3}{\pi^3}sin\frac{\pi}{L}x - \frac{x^3}{6} + \frac{Lx^2}{2} - \frac{L^2x}{\pi^2}) \quad (10)$$

tilfredstiller Euler-Bernoullie likningen og randbetingelsene for en bjelke som er fast i den ene enden og fri i den andre
$y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0$

1. Starter med å bevise at y(0)= 0

$$y(0) = \frac{f}{24EI}0^2(0^2 - 4L0 + 6L^2) - \frac{gpL}{EI\pi}(\frac{L^3}{\pi^3}sin\frac{\pi}{L}x - \frac{0^3}{6} + \frac{L0^2}{2} - \frac{L^20}{\pi^2})$$
$$y(0) = 0 - \frac{gpL}{EI\pi}(\frac{L^3}{\pi^3}sin(0) - 0 + 0 - 0)$$
$$y(0) = 0$$

Første kriterie er oppfylt.
2. Skal nå bevise kriterie 2, at y'(0) = 0, starter med å finne den deriverte.

$$y'(x) = \frac{d}{dx}[\frac{fx^2(x^2-4Lx+6L^2)}{24EI} - \frac{gpL}{EI\pi}(\frac{L^3}{\pi^3}\sin\frac{\pi}{L}x - \frac{x^3}{6} + \frac{Lx^2}{2} - \frac{L^2x}{\pi^2})] \quad (11)$$

$$y'(x) = \frac{fx(x^2-3Lx+3L^2)}{6EI} - \frac{gpL}{EI\pi} * \frac{d}{dx}(\frac{L^3}{\pi^3}\sin\frac{\pi}{L}x - \frac{x^3}{6} + \frac{Lx^2}{2} - \frac{L^2x}{\pi^2})$$

$$y'(x) = \frac{fx(x^2-3Lx+3L^2)}{6EI} - \frac{gpL}{EI\pi}(\frac{L^2}{\pi^2}\cos(\frac{\pi}{L}x) - \frac{x^2}{2} + Lx - \frac{L^2}{\pi^2})$$

Sjekker om y'(0) = 0

$$y'(0) = \frac{f0(0^2-3L0+3L^2)}{6EI} - \frac{gpL}{EI\pi}(\frac{L^2}{\pi^2}\cos(\frac{\pi}{L}0) - \frac{0^2}{2} + L0 - \frac{L^2}{\pi^2})$$

$$y'(0) = 0 - \frac{gpL}{EI\pi}(\frac{L^2}{\pi^2} * 1 - \frac{L^2}{\pi^2})$$

$$y'(0) = 0 - \frac{gpL}{EI\pi}(0) = 0$$

Andre kriteriet er oppfylt.
3. Skal nå bevise kriteriet 3, y''(L) = 0. Starter med å finne den andre deriverte.

$$y'(x) = \frac{fx(x^2-3Lx+3L^2)}{6EI} - \frac{gpL}{EI\pi}(\frac{L^2}{\pi^2}\cos(\frac{\pi}{L}x) - \frac{x^2}{2} + Lx - \frac{L^2}{\pi^2})$$

Fra oppgave 4a, vet vi at

$$y''(x) = \frac{f(x-L)^2}{2EI} - \frac{gpL}{EI\pi}\frac{d}{dx}(\frac{L^2}{\pi^2}\cos(\frac{\pi}{L}x) - \frac{x^2}{2} + Lx - \frac{L^2}{\pi^2})$$

$$y''(x) = \frac{f(x-L)^2}{2EI} - \frac{gpL}{EI\pi} * [\frac{L}{\pi}(-\sin(\frac{\pi}{L}x)) - x + L] \quad (12)$$

Sjekker nå om y''(L)=0

$$y''(L) = \frac{f(L-L)^2}{2EI} - \frac{gpL}{EI\pi} * [\frac{L}{\pi}(-\sin(\frac{\pi}{L}L)) - L + L] \quad (13)$$

$$y''(L) = 0 - \frac{gpL}{EI\pi} * [\frac{L}{\pi}(-\sin(\pi))]$$

$$y''(L) = 0 - \frac{gpL}{EI\pi} * [\frac{L}{\pi}(0)]$$

$$y''(L) = 0 - 0 = 0$$

Tredje kriteriet stemmer da y”(L) = 0. 4. Skal nå bevise at fjerde kriteriet, y”’(L) = 0, og starter med å finne den tredje deriverte

$$y''(x) = \frac{f(x-L)^2}{2EI} - \frac{gpL}{EI\pi}(\frac{L^2}{\pi^2}\cos(\frac{\pi}{L}x) - \frac{x^2}{2} + Lx - \frac{L^2}{\pi^2})$$

$$y'''(x) = \frac{f(x-L)^2}{2EI} - \frac{gpL}{EI\pi}\frac{d}{dx}(\frac{L^2}{\pi^2}\cos(\frac{\pi}{L}x) - \frac{x^2}{2} + Lx - \frac{L^2}{\pi^2})$$

$$y'''(x) = \frac{f(x-L)}{EI} - \frac{gpL}{EI\pi}(-\cos(\frac{\pi}{L}x) - 1) \quad (14)$$

Sjekker så tredje kriteriet, y”’(L) = 0

$$y'''(L) = \frac{f(L-L)}{EI} - \frac{gpL}{EI\pi}(-\cos(\frac{\pi}{L}L) - 1)$$

$$y'''(L) = 0 - \frac{gpL}{EI\pi}(1-1)$$

$$y'''(L) = 0 - \frac{gpL}{EI\pi}0 = 0$$

Fjerde kriteriet stemmer fordi y”’(L) = 0.