Numerical analysis - Matteprosjekt

Sondre Løvhaug, Dan Rasmussen,
Eiric Halland Wærness, Håvard Granaune Matberg

11. mars 2016

Revisjonshistorie

Dato	**Versjon**	**Beskrivelse**	**Forfatter**
26 Januar 2016	0.1	Første versjon	ESN

Innhold

1 Innledning

2 Resultater

3 Referanseliste

4 Vedlegg

4.1 Oppgave 1

4.1.1 Oppgave 5.1.21

Prove the second-order formula for the fourth derivative

$$f^{(4)}(x) = \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4} + O(h^2) \quad (1)$$

Ifølge Taylor's teorem, dersom f er fem ganger kontinuerlig deriverbar, kan vi bruke f(x + h) og f(x -h)

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^4(x) + \frac{h^5}{120}f^5(x) + O(h^6) \quad (2)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^4(x) - \frac{h^5}{120}f^5(x) + O(h^6) \quad (3)$$

Legger så sammen f(x+h) + f(x-h) for å eliminere odde-talls deriverte:

$$\begin{aligned} &f(x+h) + f(x-h) = \\ &\quad f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^4(x) + \frac{h^5}{120}f^5(x) + O(h^6) + \\ &\quad f(x) - hf'(x) + x\frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^4(x) - \frac{h^5}{120}f^5(x) + O(h^6) \\ &\qquad = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x) + O(h^6) \quad (4) \end{aligned}$$

I følge Taylor's teorem, dersom f er fem ganger kontinuerlig deriverbar, kan vi bruke f(x+2h) og f(x-2h).
Legger så sammen f(x+2h) + f(x-2h) for å eliminere oddetalls-deriverte.
Siden vi allerede har regnet ut f(x+h) + f(x-h), setter vi inn for f(x+2h) og f(x-2h) og får:

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2f(x) + 2h^2 f(x) + \frac{4h^4}{3}f^4(x) + O(h^6) \quad (5)$$

For å få den fjerde-deriverte aleine, må vi eliminere den andre-deriverte. Dette gjøres ved å gange inn 4 i den første likningen (4) og trekker fra likning (5):

$$4*(f(x+h)+f(x-h)) = 8f(x)+4h^2f''(x)+\frac{4h^4}{12}f^4+4O(h^6)$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{aligned}4f(x+h)+4f(x-h)-(f(x+2h)+f(x-2h)) &= \\ 8f(x)+4h^2f''(x)+\frac{4h^4}{12}f^4(x)+4O(h^6)- \\ 2f(x)+2h^2f(x)+\frac{4h^4}{3}f^4(x)+O(h^6) \\ &= 6f(x)-h^4f^4(x)+3O(h^6)\end{aligned}$$

Snur litt om på likningen og får at:

$$\begin{aligned} h^4f^4 &= -4f(x+h)-4f(x-h)+f(x-2h)+f(x-2h)+6f(x)+3O(h^6) \\ \Rightarrow f^4(x) &= \frac{f(x-2h)-4f(x-h)+6f(x)-4f(x+h)+f(x+2h)}{h^4}+O(h^2) \quad (6)\end{aligned}$$