# Numerical analysis - Matteprosjekt

Sondre Løvhaug, Dan Rasmussen,
Eiric Halland Wærness, Håvard Granaune Matberg

1. april 2016

**Revisjonshistorie**

| Dato | Versjon | Beskrivelse | Forfatter |
|---|---|---|---|
| 26 Januar 2016 | 0.1 | Første versjon | ESN |

# Innhold

# 1 Innledning

Gruppe 11 ble sammensatt av at vår faglærer teamet sammen Sondre Løvhaug og Dan Rasmussen sammen med Håvard Matberg og Eric Wærness. Vi har ikke jobbet sammen på tidligere prosjekt, men det virker som gruppa ble en fin match. Etter første møte med faglærer gikk vi løst på oppgavesettet. Ved første øyekast kunne det virke noe utfordrende, men med den ustoppelige kraften fra samarbeid fikk vi raskt kommet i gang med, og løst, første oppgave.

## 2 Resultater

# 3 Referanseliste

# 4 Vedlegg

## 4.1 Oppgave 1

### 4.1.1 Oppgave 5.1.21

Prove the second-order formula for the fourth derivative

$$f^{(4)}(x) = \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4} + O(h^2) \quad (1)$$

Ifølge Taylor's teorem, dersom f er fem ganger kontinuerlig deriverbar, kan vi bruke f(x + h) og f(x -h)

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^4(x) + \frac{h^5}{120}f^5(x) + O(h^6) \quad (2)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^4(x) - \frac{h^5}{120}f^5(x) + O(h^6) \quad (3)$$

Legger så sammen f(x+h) + f(x-h) for å eliminere odde-talls deriverte:

$$\begin{aligned}
&f(x+h) + f(x-h) = \\
&\qquad f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^4(x) + \frac{h^5}{120}f^5(x) + O(h^6) + \\
&\qquad f(x) - hf'(x) + x\frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^4(x) - \frac{h^5}{120}f^5(x) + O(h^6) \\
&\qquad\qquad = 2f(x) + h^2f''(x) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x) + O(h^6) \quad (4)
\end{aligned}$$

I følge Taylor's teorem, dersom f er fem ganger kontinuerlig deriverbar, kan vi bruke f(x+2h) og f(x-2h).
Legger så sammen f(x+2h) + f(x-2h) for å eliminere oddetalls-deriverte.
Siden vi allerede har regnet ut f(x+h) + f(x-h), setter vi inn for f(x+2h) og f(x-2h) og får:

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2f(x) + 2h^2f(x) + \frac{4h^4}{3}f^4(x) + O(h^6) \quad (5)$$

For å få den fjerde-deriverte aleine, må vi eliminere den andre-deriverte. Dette gjøres ved å gange inn 4 i den første likningen (4) og trekker fra likning (5):

$$4 * (f(x+h) + f(x-h)) = 8f(x) + 4h^2 f''(x) + \frac{4h^4}{12} f^4 + 4O(h^6)$$

$$\Downarrow$$

$$4f(x+h) + 4f(x-h) - (f(x+2h) + f(x-2h)) =$$

$$8f(x) + 4h^2 f''(x) + \frac{4h^4}{12} f^4(x) + 4O(h^6) -$$

$$2f(x) + 2h^2 f(x) + \frac{4h^4}{3} f^4(x) + O(h^6)$$

$$= 6f(x) - h^4 f^4(x) + 3O(h^6)$$

Snur litt om på likningen og får at:

$$h^4 f^4 = -4f(x+h) - 4f(x-h) + f(x-2h) + f(x-2h) + 6f(x) + 3O(h^6)$$

$$\Rightarrow f^4(x) = \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4} + O(h^2) \quad (6)$$

### 4.1.2 Oppgave 5.1.22a

Prove that if f(x) = f'(x) = 0, then

$$f^{(4)}(x+h) - \frac{16f(x+h) - 9f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} = O(h^2) \quad (7)$$

Starter med å bevise at dersom f(x) = f'(x) = 0, så er

$$f(x+h) = 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}(x+4h) = O(h^6) \qquad (8)$$

Fra oppgave 1, 5.1.21 har vi (1), vi begynner med å skrive denne om til f(x+h) og får:

$$f^{(4)}(x+h) = \frac{-4f(x) + f(x-h) + 6f(x+h) - 4f(x+2h)f(x+3h}{h^4} + O(h^2) \quad (9)$$

Nå har vi en likning for $f^{(4)}(x+h)$ og kan sette denne inn i (7)

$$\frac{-4f(x) + f(x-h) + 6f(x+h) - 4f(x+2h) + f(x+3h)}{h^4} + O(h^2)$$

$$-$$

$$\frac{16f(x+h) - 4f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} = O(h^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{-4f(x) + f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h}{h^4} + O(h^2) = O(h^2)$$

Fra oppgaveteksten har vi oppgitt at:

$$f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h) = O(h^6)$$

Vi setter dette inn i likninger vår og får:

$$\frac{-4f(x) + O(h^6)}{h^4} + O(h^2) = O(h^2)$$

Siden f(x) = f'(x) = 0 ender vi med:

$$\frac{-0 + O(h^6)}{h^4} + O(h^2) = O(h^2)$$
$$\Downarrow$$
$$O(h^2) + O(h^2) = O(h^2)$$

## 4.2 Oppgave 2

lagA.m

```
function A = lagA(n)

e = ones(n,1);
A = spdiags(e*[1 -4 6 -4 1],-2:2,n,n);

A(1,1:4)  = [16 -9 8/3 -1/4];
A(n-1,n-3:n)  = [16/17 -60/17 72/17 -28/17];
A(n,n-3:n)= [-12/17 96/17 -156/17 72/17];

end
```

Scriptet for å kjøre koden:

```
disp('Oppave 2')

A = lagA(10);
full(A)
```

## 4.3 Oppgave 3

ebbeam.m
Kan sende med A i fra forrige oppgave, men velger å lage A på nytt slik at dette kan kjøres som et eget skript.

```
% Input:
% E = young's modulus for a meterial
```

```
% L = length
% d = diameter
% g = gravity
% w = width
% D = density
function y = ebbeam(E,L,d,D,w,n)

I = w*d^3/12;
h = L/n;
g = 9.81;
b = repmat(-D*w*d*g , n,1) * h^4/(E*I);

A = lagA(n);

y = A\b;
end
```

Scriptet for å kjøre koden:

```
disp('Oppgave 3')
format long;
E = 1.3e10;
D = 480;
w = 0.3;
L = 2;
d = 0.03;
n = 10;

disp('Numerisk losning')
y = ebbeam(E,L,d,D,w,n)
```

## 4.4 Oppgave 4

### 4.4.1 Oppgave 4a

Vi har at Euler-Bernouillilikningen,

$$EIy'''' = f(x) \tag{10}$$

er oppfylt av y(x), som er den vertikale forskyvningen av en L meter lang bjelke. Den korrekte løsningen av likningen med konstanten f(x) = f er;

$$y(x) = (f/24EI) * x^2 * (x^2 - 4Lx + 6L^2) \tag{11}$$

Skal nå vise at y(x) er den korrekte løsningen ved å derivere den fire ganger og sette inn i Euler-Bernouillilikningen. Begynner med å finne den deriverte med hensyn på x. Vi behandler EI og L som konstanter.

$$y = \frac{fx^2(x^2 - 4Lx + 6L^2)}{24EI} =$$

$$y' = \frac{d}{dx}[\frac{fx^2(x^2-4Lx+6L^2)}{24EI}] =$$

$$y' = \frac{\frac{d}{dx}[fx^2(x^2-4Lx+6L^2)]}{24EI} =$$

$$y' = \frac{f(\frac{d}{dx}[x^2]*(x^2-4Lx+6L^2)+x^2*\frac{d}{dx}[x^2-4Lx+6L^2])}{24EI} =$$

$$y' = \frac{f2x(x^2-4Lx+6L^2)}{24EI} + \frac{fx^2(2x-4L)}{24EI} =$$

$$y' = \frac{fx(x^2-4Lx+6L^2)}{12EI} + \frac{fx(x^2-2Lx)}{12EI} =$$

$$y' = \frac{fx(x^2-3Lx+3L^2)}{6EI}$$

Her er den derivert en gang, fortsetter med å finne den andrederiverte;

$$y'' = \frac{d}{dx}[\frac{fx(x^2-3Lx+3L^2)}{6EI}] =$$

$$y'' = \frac{f(\frac{d}{dx}[x](x^2-3Lx+3L^2)+x\frac{d}{dx}[x^2-3Lx+3L^2])}{6EI} =$$

$$y'' = \frac{f(x^2-3Lx+3L^2)+f(2x^2-3Lx)}{6EI} =$$

$$y'' = \frac{f(x^2-2Lx+L^2)}{2EI} =$$

$$y'' = \frac{f(x-L)^2}{2EI}$$

Her har vi funnet den andrederiverte, fortsetter med å finne den tredjederiverte;

$$y''' = \frac{d}{dx}[\frac{f(x-L)^2}{2EI}] =$$

$$y''' = \frac{f*\frac{d}{dx}[(x-L)^2]}{2EI} =$$

$$y''' = \frac{f(x-L)}{EI}$$

Her har vi funnet den tredjederiverte, fortsetter med å finne den fjerdederiverte;

$$y'''' = \frac{d}{dx}[\frac{f(x-L)}{EI}] =$$

$$y'''' = \frac{f*\frac{d}{dx}[(x-L)]}{EI} =$$

$$y'''' = \frac{f}{EI}$$

Vi har nå funnet den fjerdederiverte til y(x). Vi kan nå sette inn i Euler-Bernouillilikningen;

$$(1) y'''' = \frac{f(x)}{EI}$$
$$(2) EIy'''' = f(x)$$

Setter likning (1) inn i likning (2)

$$EI * \frac{f(x)}{EI} = f(x)$$
$$f(x) = f(x)$$

Her har vi vist at y(x) oppfyller likningen ved å derivere fire ganger.

### 4.4.2 Oppgave 4b

Skal vise at for den korrekte løsningen er $y^{(4)}(c) = 0$. Vi vet fra oppgave 4a at den 4. deriverte av den korrekte løsningen er:

$$y^{(4)}(x) = \frac{f}{EI} \tag{12}$$

Vi kan derfra visa at den 6. deriverte er 0.

$$f^{(5)}(x) = \frac{d}{dx}[\frac{f}{EI}] = 0 \tag{13}$$

Deriverer m.h.p x og $\frac{f}{EI}$ er en konstant.

$$y^{(6)}(x) = \frac{d}{dx}[0] = 0 \tag{14}$$

Slik har vi vist at $y^{(6)}(c) = 0$.