Лабораторная работа № 4

Линейная алгебра

Шияпова Дарина Илдаровна

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Основной целью работы является изучение возможностей специализированных пакетов Julia для выполнения и оценки эффективности операций над объектами линейной алгебры.

2 Задание

1. Используя JupyterLab, повторите примеры.
2. Выполните задания для самостоятельной работы.

3 Теоретическое введение

Julia – высокоуровневый свободный язык программирования с динамической типизацией, созданный для математических вычислений [**julialang?**]. Эффективен также и для написания программ общего назначения. Синтаксис языка схож с синтаксисом других математических языков, однако имеет некоторые существенные отличия.

Для выполнения заданий была использована официальная документация Julia [**juliadoc?**].

4 Выполнение лабораторной работы

Выполним примеры из раздела про поэлементные операции над многомерными массивами (рис. 4.1-4.2).

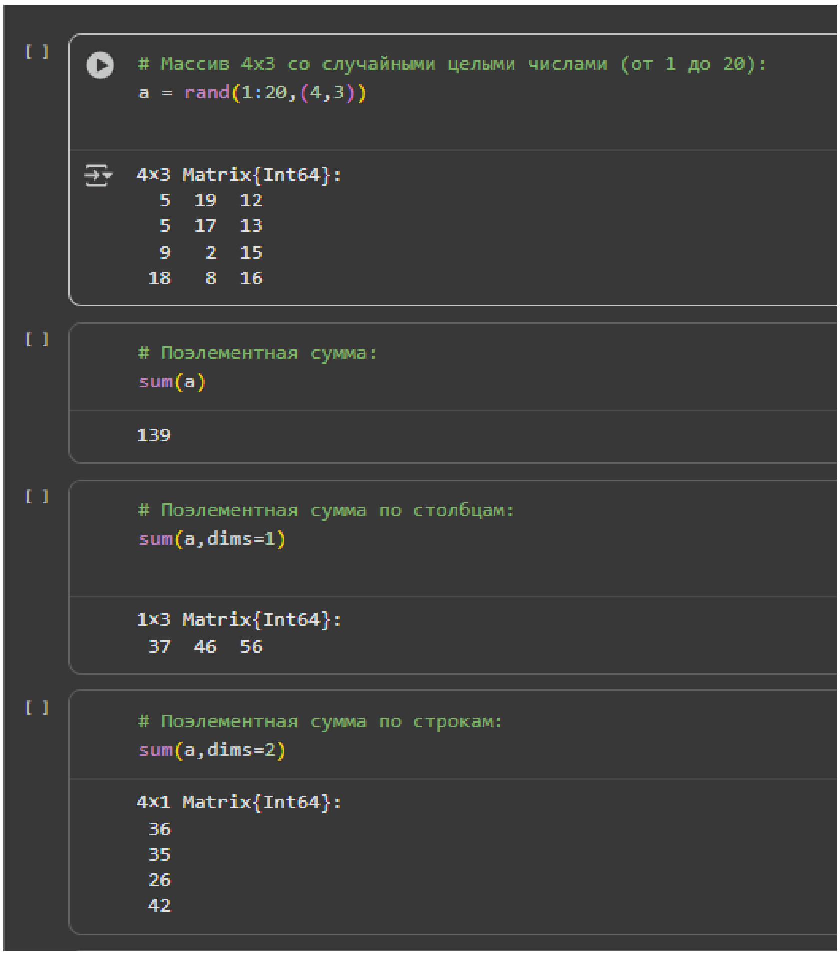


Рис. 4.1: Поэлементные операции над многомерными массивами

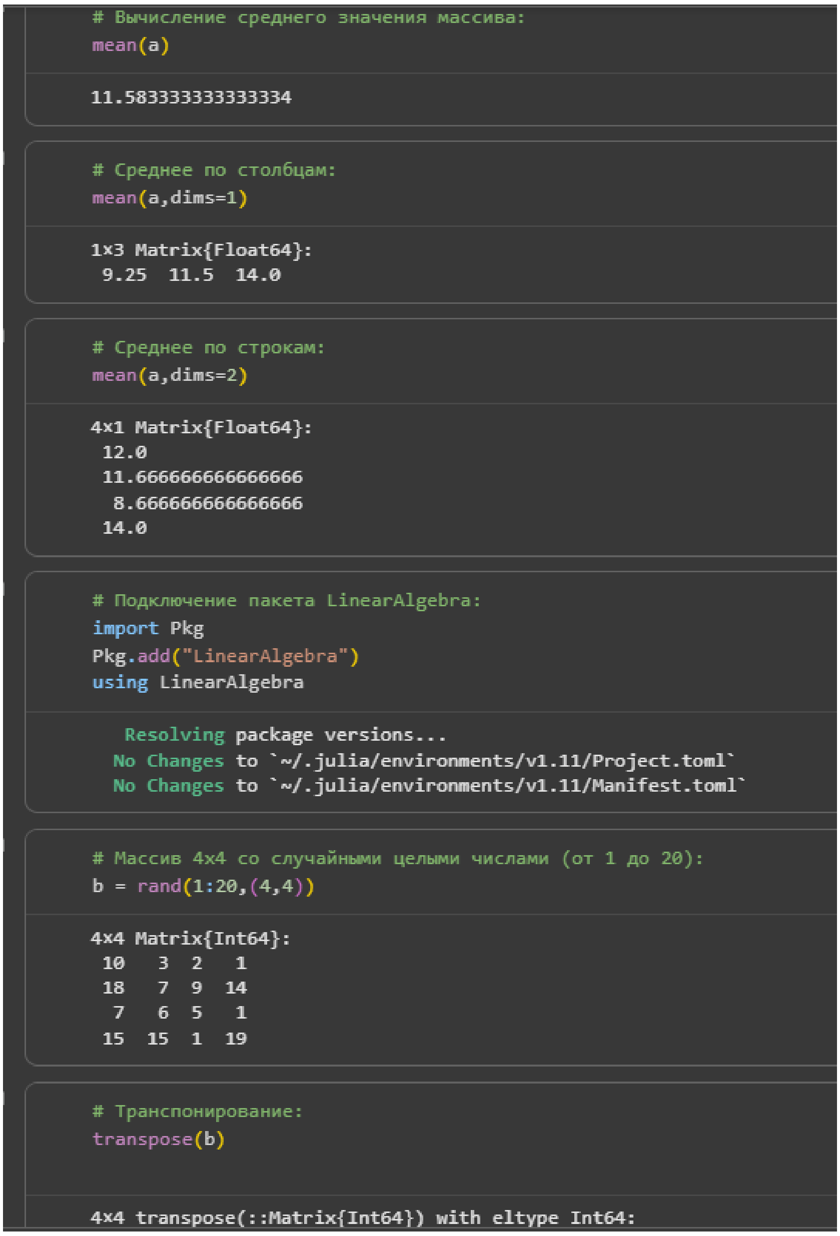


Рис. 4.2: Поэлементные операции над многомерными массивами

Выполним примеры из раздела про транспонирование,след,ранг,определитель и инверсия матрицы (рис. 4.3).

Рис. 4.3: Транспонирование,след,ранг,определительи инверсия матрицы

Выполним примеры из раздела про матричное умножение,единичная матрица,скалярное произведение (рис. 4.4).

```
# Матрица 2x3 со случайными целыми значениями от 1 до 10:
A = rand(1:10,(2,3))
# Матрица 3x4 со случайными целыми значениями от 1 до 10:
B = rand(1:10,(3,4))

3×4 Matrix{Int64}:
 9  9   1  2
 8  5  10  3
 3  6   2  8
```

```
# Произведение матриц A и B:
A*B

2×4 Matrix{Int64}:
 82  106  44  94
 74   86  58  80
```

```
# Единичная матрица 3x3:
Matrix{Int}(I, 3, 3)

3×3 Matrix{Int64}:
 1  0  0
 0  1  0
 0  0  1
```

```
# Скалярное произведение векторов X и Y:
X = [2, 4, -5]
Y = [1,-1,3]
dot(X,Y)

-17
```

```
# тоже скалярное произведение:
X'Y

-17
```

Рис. 4.4: Матричное умножение,единичная матрица,скалярное произведение

Выполним примеры из раздела про факторизацию и специальные матричные структуры (рис. 4.4-4.7).

```
# Задаём квадратную матрицу 3x3 со случайными значениями:
A = rand(3, 3)

3×3 Matrix{Float64}:
 0.953052  0.256058  0.668292
 0.9789    0.655134  0.119584
 0.852723  0.369336  0.0593227
```

```
# Задаём единичный вектор:
x = fill(1.0, 3)

3-element Vector{Float64}:
 1.0
 1.0
 1.0
```

```
# Задаём вектор b:
b = A*x

3-element Vector{Float64}:
 1.8774028946026402
 1.7536181410124794
 1.281381554509779
```

```
# Решение исходного уравнения получаем с помощью функции \
# (убеждаемся, что x - единичный вектор):
A\b

3-element Vector{Float64}:
 1.0000000000000007
 0.9999999999999989
 0.9999999999999997
```

```
# LU-факторизация:
Alu = lu(A)

LU{Float64, Matrix{Float64}, Vector{Int64}}
L factor:
3×3 Matrix{Float64}:
 1.0       0.0       0.0
 0.973595  1.0       0.0
 0.871103  0.527412  1.0
U factor:
3×3 Matrix{Float64}:
```

Рис. 4.5: Факторизация.Специальные матричные структуры

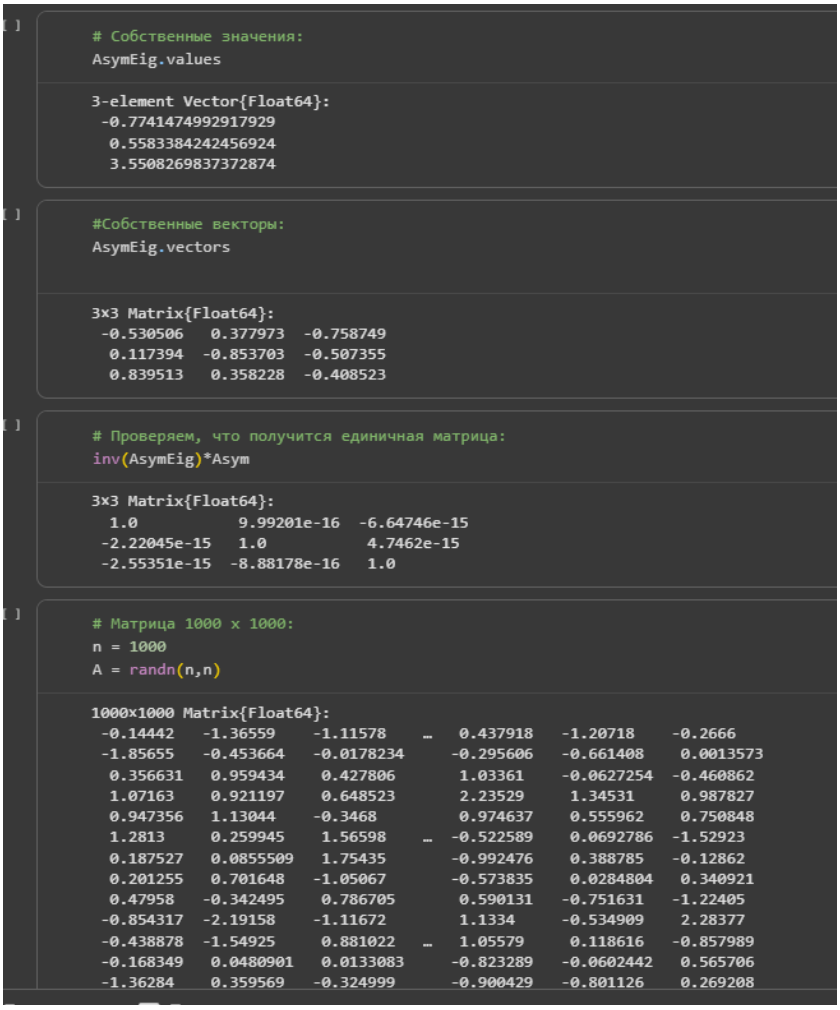


Рис. 4.6: Факторизация.Специальные матричные структуры

```julia
import Pkg
Pkg.add("BenchmarkTools")
using BenchmarkTools
```

```
   Resolving package versions...
  No Changes to `~/.julia/environments/v1.11/Project.toml`
  No Changes to `~/.julia/environments/v1.11/Manifest.toml`
```

```julia
# Оценка эффективности выполнения операции по нахождению
# собственных значений симметризованной матрицы:
@btime eigvals(Asym);
```

```
  128.290 ms (21 allocations: 7.99 MiB)
```

```julia
# Оценка эффективности выполнения операции по нахождению
# собственных значений зашумлённой матрицы:
@btime eigvals(Asym_noisy);
```

```
  771.415 ms (27 allocations: 7.93 MiB)
```

```julia
# Оценка эффективности выполнения операции по нахождению
# собственных значений зашумлённой матрицы,
# для которой явно указано, что она симметричная:
@btime eigvals(Asym_explicit);
```

```
  129.169 ms (21 allocations: 7.99 MiB)
```

```julia
# Трёхдиагональная матрица 1000000 x 1000000:
n = 1000000;
A = SymTridiagonal(randn(n), randn(n-1))
```

```
1000000×1000000 SymTridiagonal{Float64, Vector{Float64}}:
  1.25177  -1.95644    ⋅         ⋅        …   ⋅         ⋅          ⋅
 -1.95644  -0.857361   0.33407   ⋅            ⋅         ⋅          ⋅
   ⋅        0.33407    2.25289  -1.08965      ⋅         ⋅          ⋅
   ⋅         ⋅        -1.08965  -0.24222      ⋅         ⋅          ⋅
   ⋅         ⋅          ⋅        2.00241      ⋅         ⋅          ⋅
   ⋅         ⋅          ⋅         ⋅       …   ⋅         ⋅          ⋅
   ⋅         ⋅          ⋅         ⋅           ⋅         ⋅          ⋅
   ⋅         ⋅          ⋅         ⋅           ⋅         ⋅          ⋅
   ⋅         ⋅          ⋅         ⋅           ⋅         ⋅          ⋅
```

Рис. 4.7: Факторизация.Специальные матричные структуры

Выполним примеры из раздела про общую линейную алгебру (рис. 4.8).

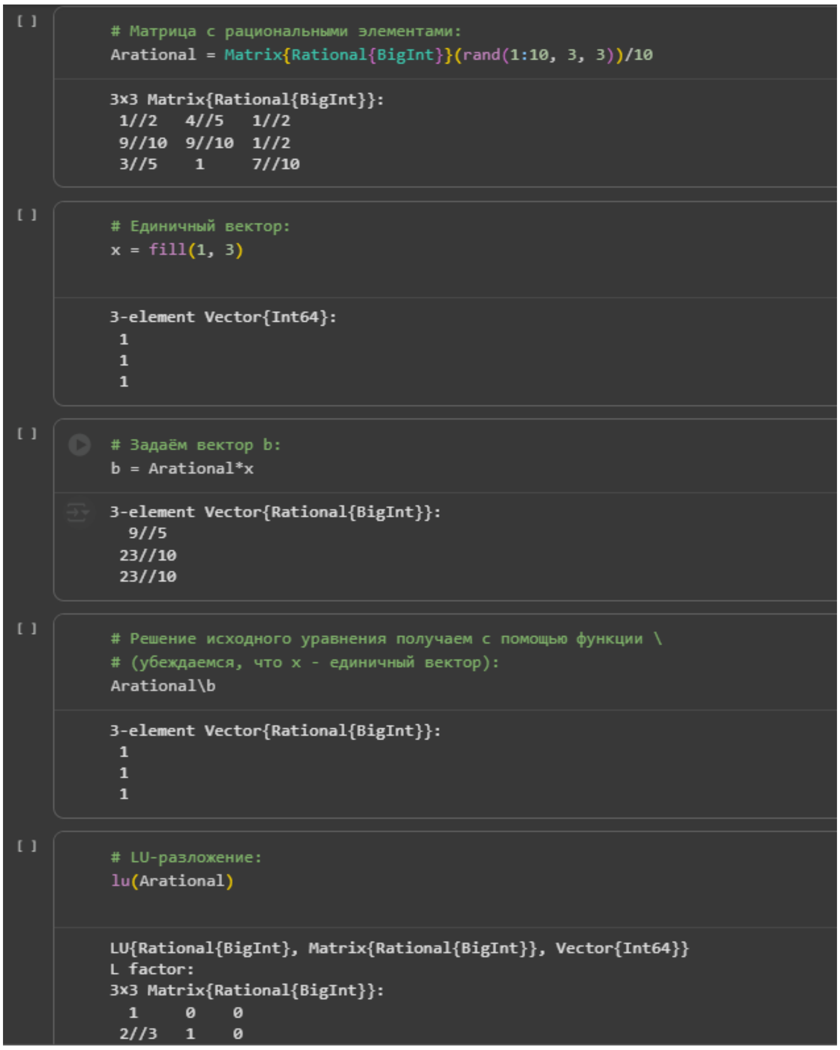


Рис. 4.8: Общаялинейная алгебра

4.1 Задания для самостоятельного выполнения

Зададим вектор v. Умножим вектор v скалярно сам на себя и сохраним результат вdot_v (рис. 4.9).

```
# 1. Задаем вектор v
v = [1, 2, 3, 4, 5]  # можно использовать любой вектор

# Скалярно умножаем вектор v сам на себя и сохраняем результат в dot_v
dot_v = dot(v, v)

55
```

Рис. 4.9: Произведение векторов

Умножим v матрично на себя(внешнее произведение), присвоив результат переменной outer_v (рис. 4.10).

```
# 2.
outer_v = v * v' # используем бибЛ LinearAlgebra

5×5 Matrix{Int64}:
 1   2   3   4   5
 2   4   6   8  10
 3   6   9  12  15
 4   8  12  16  20
 5  10  15  20  25
```

Рис. 4.10: Произведение векторов

Решим СЛАУ с двумя неизвестными (рис. 4.11-4.13).

```
# Система:
# x + y = 2
# x - y = 3
A1 = [1 1; 1 -1]

Alu1 = lu(A1)

b1 = [2, 3]

slaul = A1\b1
show(slaul)

Alu1\b1
```

```
[2.5, -0.5]
2-element Vector{Float64}:
  2.5
 -0.5
```

Рис. 4.11: Системы линейных уравнений

```
# Система:
# x + y = 2
# 2x + 2y = 4

# Матрица коэффициентов A
A2 = [1  1;
      2  2]

# Вектор правых частей b
b2 = [2, 4]

if (det(A2) != 0)
    slau2 = A2\b2
    print(slau2)
else
    print("Нет решений")
end
```

```
Нет решений
```

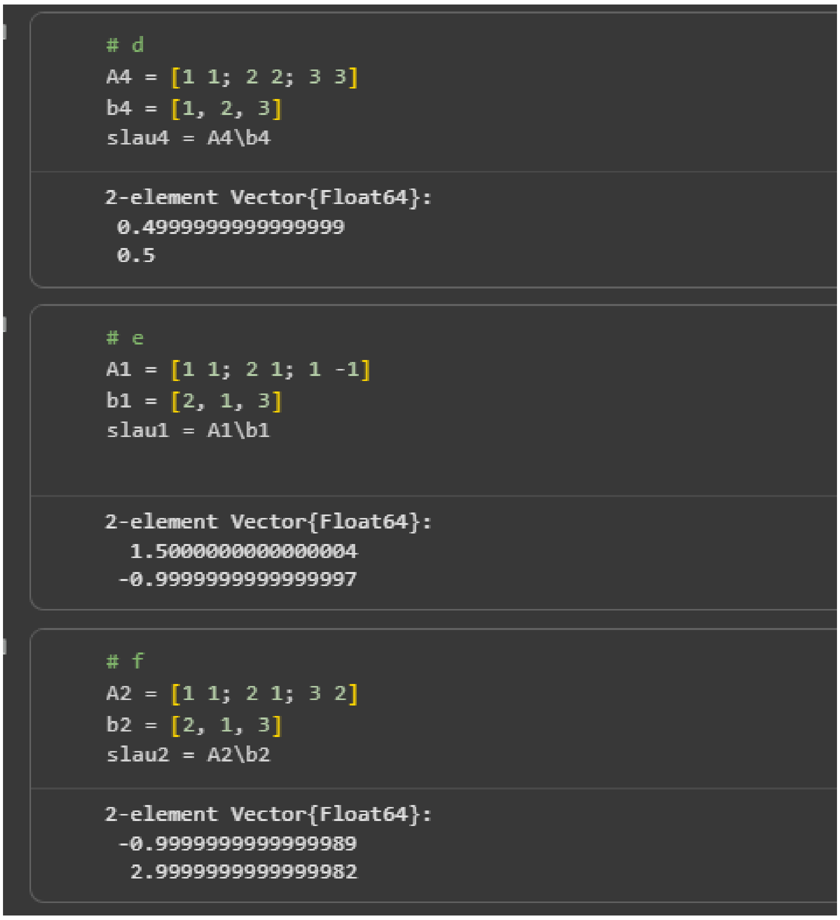
```
# c
A3 = [1 1; 2 2]
b3 = [2, 5]
if (det(A3) != 0)
    slau3 = A3\b3
    print(slau3)
else
    print("Нет решений")
end
```

```
Нет решений
```

```
# d
A4 = [1 1; 2 2; 3 3]
b4 = [1, 2, 3]
slau4 = A4\b4
```

```
2-element Vector{Float64}:
 0.4999999999999999
 0.5
```

Рис. 4.12: Систем линейных уравнений



```
# d
A4 = [1 1; 2 2; 3 3]
b4 = [1, 2, 3]
slau4 = A4\b4

2-element Vector{Float64}:
 0.4999999999999999
 0.5
```

```
# e
A1 = [1 1; 2 1; 1 -1]
b1 = [2, 1, 3]
slau1 = A1\b1

2-element Vector{Float64}:
  1.5000000000000004
 -0.9999999999999997
```

```
# f
A2 = [1 1; 2 1; 3 2]
b2 = [2, 1, 3]
slau2 = A2\b2

2-element Vector{Float64}:
 -0.9999999999999989
  2.9999999999999982
```

Рис. 4.13: Систем линейных уравнений

Решим СЛАУ с тремя неизвестными (рис. 4.14).

```
# a
A3 = [1 1 1; 1 -1 -2]
b3 = [2, 3]
slau2 = A3\b3
```

```
3-element Vector{Float64}:
  2.2142857142857144
  0.35714285714285704
 -0.5714285714285712
```

```
#  b
A2 = [1 1 1; 2 2 -3; 3 1 1]
     b2 = [2, 4, 1]
     slau2 = A2\b2
```

```
3-element Vector{Float64}:
 -0.5
  2.5
  0.0
```

```
#  c
A3 = [1 1 1; 1 1 2; 2 2 3]
     b3 = [1, 0, 1]
     if (det(A3) != 0)
         slau3 = A3\b3
         print(slau3)
     else
         print("Нет решений")
     end
```

```
Нет решений
```

```
# d
A3 = [1 1 1; 1 1 2; 2 2 3]
     b3 = [1, 0, 0]
     if (det(A3) != 0)
         slau3 = A3\b3
         print(slau3)
     else
         print("Нет решений")
     end
```

```
Нет решений
```

Рис. 4.14: Систем линейных уравнений

Приведем матрицы к диагональному виду (рис. 4.15).

```
A = [1 -2; -2 1]
AsymEig = eigen(A)
display(diagm(AsymEig.values))
```

```
2×2 Matrix{Float64}:
 -1.0  0.0
  0.0  3.0
```

```
B = [1 -2; -2 3]
Beig = eigen(B)
display(diagm(Beig.values))
```

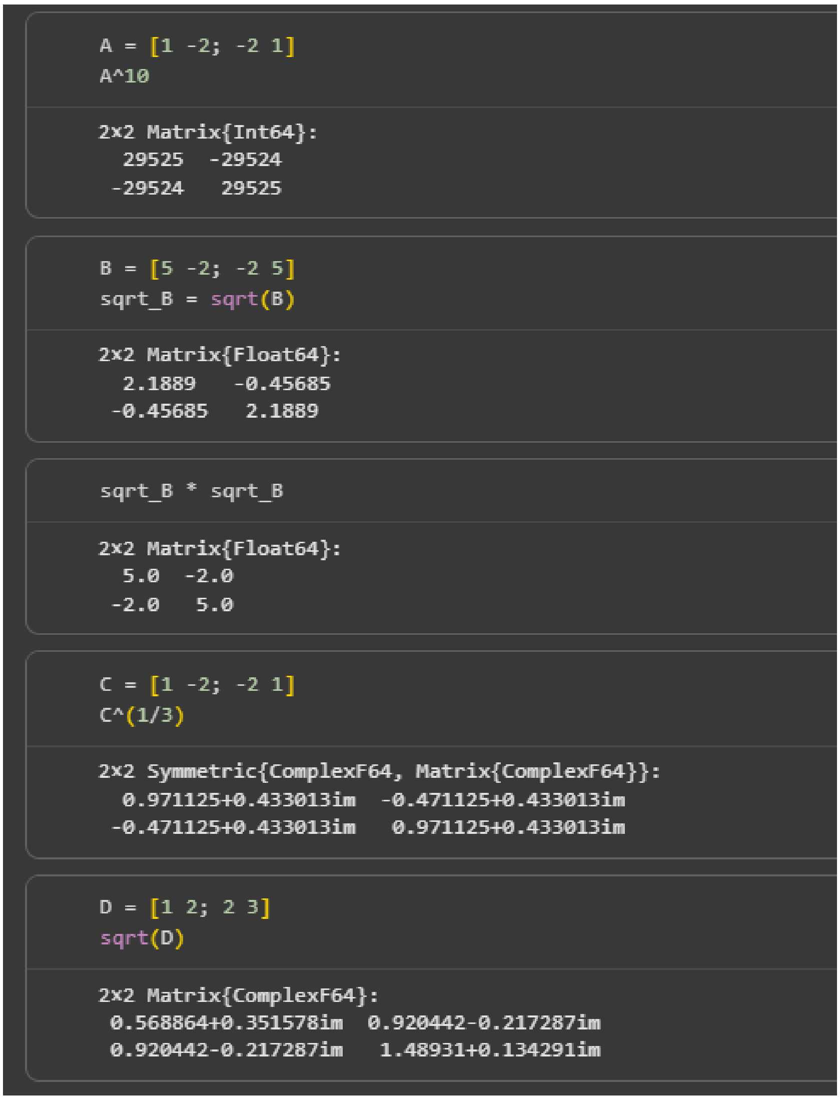
```
2×2 Matrix{Float64}:
 -0.236068  0.0
  0.0       4.23607
```

```
C = [1 -2 0; -2 1 2; 0 2 0]
Ceig = eigen(C)
display(diagm(Ceig.values))
```

```
3×3 Matrix{Float64}:
 -2.14134  0.0       0.0
  0.0      0.515138  0.0
  0.0      0.0       3.6262
```

Рис. 4.15: Операции с матрицами

Вычислим (рис. 4.16).



```
A = [1 -2; -2 1]
A^10

2×2 Matrix{Int64}:
  29525  -29524
 -29524   29525

B = [5 -2; -2 5]
sqrt_B = sqrt(B)

2×2 Matrix{Float64}:
  2.1889   -0.45685
 -0.45685   2.1889

sqrt_B * sqrt_B

2×2 Matrix{Float64}:
  5.0  -2.0
 -2.0   5.0

C = [1 -2; -2 1]
C^(1/3)

2×2 Symmetric{ComplexF64, Matrix{ComplexF64}}:
  0.971125+0.433013im  -0.471125+0.433013im
 -0.471125+0.433013im   0.971125+0.433013im

D = [1 2; 2 3]
sqrt(D)

2×2 Matrix{ComplexF64}:
 0.568864+0.351578im  0.920442-0.217287im
 0.920442-0.217287im   1.48931+0.134291im
```

Рис. 4.16: Операции с матрицами

Найдем собственные значения матрицы A. Создадим диагональную матрицу из собственных значений матрицы A. Создадим нижнедиагональную матрицу из матрицы A. Оценим эффективность выполняемых операций (рис. 4.17).

```
A = [140 97 74 168 131; 97 106 89 131 36; 74 89 152 144 71; 168 131 144 54 142; 131 36 71 142 36]

5×5 Matrix{Int64}:
 140   97   74  168  131
  97  106   89  131   36
  74   89  152  144   71
 168  131  144   54  142
 131   36   71  142   36

Aeig = eigen(A)
diagm(Aeig.values)

5×5 Matrix{Float64}:
 -128.493    0.0       0.0       0.0       0.0
    0.0    -55.8878    0.0       0.0       0.0
    0.0      0.0      42.7522    0.0       0.0
    0.0      0.0       0.0      87.1611    0.0
    0.0      0.0       0.0       0.0     542.468

LowerTriangular(A)

5×5 LowerTriangular{Int64, Matrix{Int64}}:
 140    ⋅    ⋅    ⋅    ⋅
  97  106    ⋅    ⋅    ⋅
  74   89  152    ⋅    ⋅
 168  131  144   54    ⋅
 131   36   71  142   36
```

Рис. 4.17: Операции с матрицами

Линейная модель может быть записана как СЛАУ

$$x - Ax = y,$$

где элементы матрицы A и столбца y – неотрицательные числа. По своему смыслу в экономике элементы матрицы A и столбцов x, y не могут быть отрицательными числами.

Матрица A называется продуктивной,если решение x системы при любой неотрицательной правой части y имеет только неотрицательные элементы x_i.Используя это определение, проверим, являются ли матрицып родуктивными (рис. 4.18-4.19).

```julia
a = [1 2; 3 4]
b = 1/2*a
c = 1/10*a
E = Matrix(I, 2, 2)
```

```
2×2 Matrix{Bool}:
 1  0
 0  1
```

```julia
inv(E - a) # Не продуктивная
```

```
2×2 Matrix{Float64}:
 -0.0  -0.333333
 -0.5   0.0
```

```julia
inv(E - b) # Не продуктивная
```

```
2×2 Matrix{Float64}:
 -0.4  -0.8
 -1.2  -0.4
```

```julia
inv(E - c) # продуктивная
```

```
2×2 Matrix{Float64}:
 1.2  0.266667
 0.4  1.2
```

Рис. 4.18: Линейные модели экономики

```julia
a = [1 2; 3 1]
b = 1/2*a
c = 1/10*a
E = Matrix(I, 2, 2)
```

```
2×2 Matrix{Bool}:
 1  0
 0  1
```

```julia
inv(E - a)^-1 # Не продуктивная
```

```
2×2 Matrix{Float64}:
 -0.0  -2.0
 -3.0   0.0
```

```julia
inv(E - b)^-1 # Не продуктивная
```

```
2×2 Matrix{Float64}:
  0.5  -1.0
 -1.5   0.5
```

```julia
inv(E - c)^-1 # Не продуктивная
```

```
2×2 Matrix{Float64}:
  0.9  -0.2
 -0.3   0.9
```

Рис. 4.19: Линейные модели экономики

```julia
d = [0.1 0.2 0.3; 0 0.1 0.2; 0 0.1 0.3]
```

```
3x3 Matrix{Float64}:
 0.1  0.2  0.3
 0.0  0.1  0.2
 0.0  0.1  0.3
```

```julia
aeig = eigen(a)
abs.(aeig.values).< 1
```

```
2-element BitVector:
 0
 0
```

```julia
beig = eigen(b)
abs.(beig.values).< 1
```

```
2-element BitVector:
 1
 0
```

```julia
ceig = eigen(c)
abs.(ceig.values).< 1
```

```
2-element BitVector:
 1
 1
```

```julia
deig = eigen(d)
abs.(deig.values).< 1
```

```
3-element BitVector:
 1
 1
 1
```

Рис. 4.20: Линейные модели экономики

5 Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы я изучила возможности специализированных пакетов Julia для выполнения и оценки эффективности операций над объектами линейной алгебры.

Список литературы