Лабораторная работа № 6

Решение моделей в непрерывном и дискретном времени

Шияпова Дарина Илдаровна

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Основной целью работы является освоение специализированных пакетов для решения задач в непрерывном и дискретном времени.

2 Задание

1. Используя JupyterLab, повторите примерыи. При этом дополните графики обозначениями осей координат, легендой с названиями траекторий, названиями графиков и т.п.

2. Выполните задания для самостоятельной работы.

3 Теоретическое введение

Julia – высокоуровневый свободный язык программирования с динамической типизацией, созданный для математических вычислений [1]. Эффективен также и для написания программ общего назначения. Синтаксис языка схож с синтаксисом других математических языков, однако имеет некоторые существенные отличия.

Для выполнения заданий была использована официальная документация Julia [2].

4 Выполнение лабораторной работы

Выполним примеры из лабораторной работы для знакомства с работой с различными моделями и способами их задания решения (рис. 4.1-4.3).

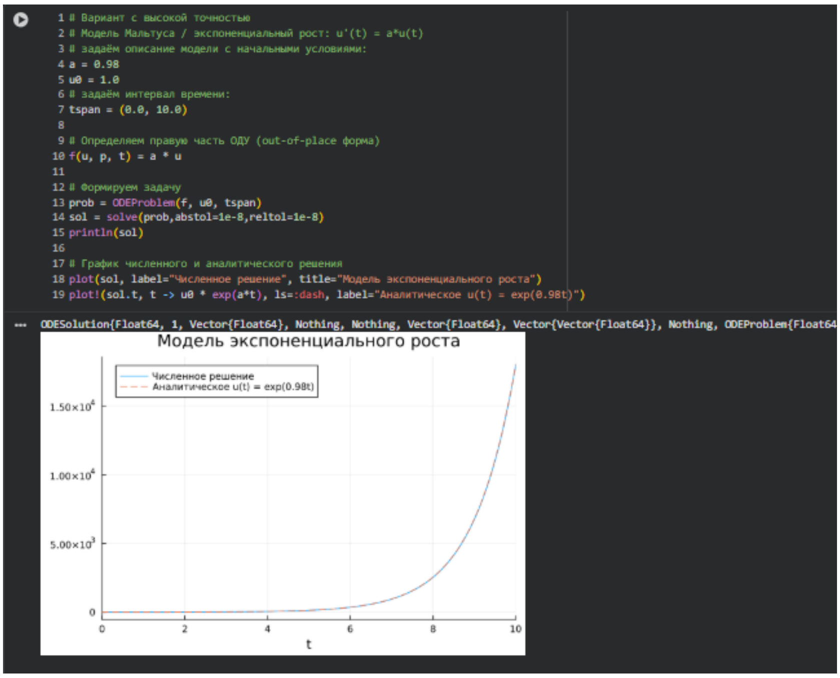

Рис. 4.1: Модель экспоненциального роста

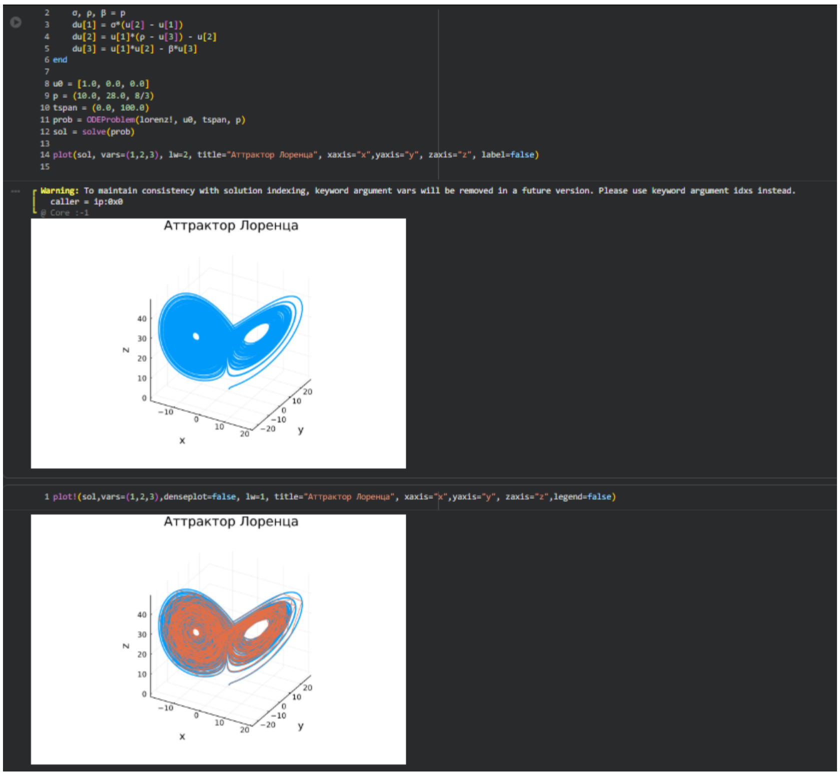

Рис. 4.2: Система Лоренца

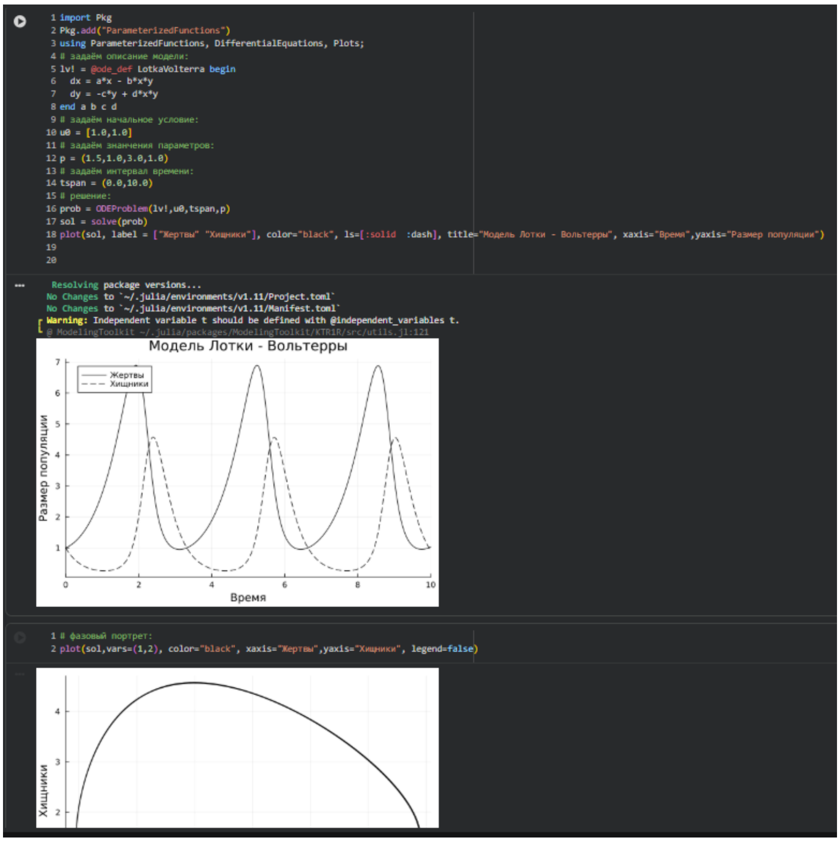

Рис. 4.3: Модель Лотки–Вольтерры

Далее перейдем к заданиям для самостоятельного выполнения.

Реализуем и проанализируем модель роста численности изолированной популяции(модель Мальтуса):

$$\dot{x} = ax, \quad a = b - c,$$

где $x(t)$ – численность изолированной популяции в момент времени t,a – коэффициент роста популяции, b – коэффициент рождаемости, c – коэффициент смертности. Построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) (рис. 4.4-4.5).

Рис. 4.4: модель Мальтуса

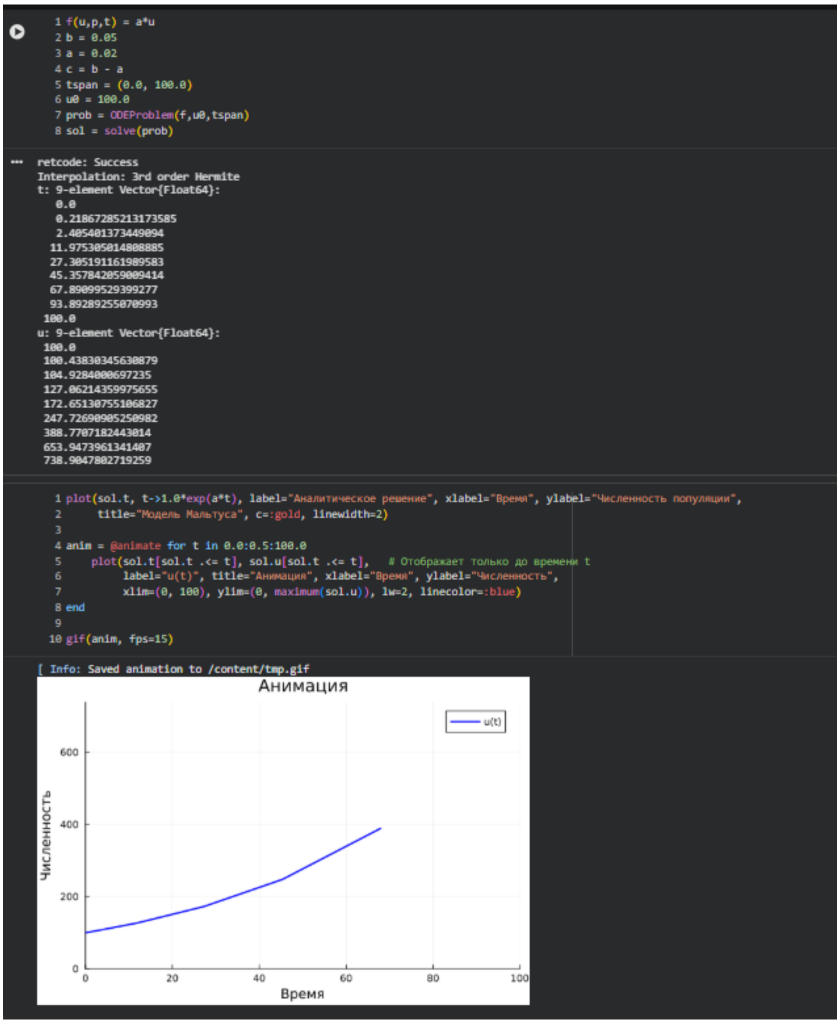

Рис. 4.5: модель Мальтуса

Реализуем и проанализируем логистическую модель роста популяции:

$$\dot{x} = rx(1 - \frac{x}{k}), \quad r > 0, \quad k > 0,$$

где r – коэффициент роста популяции, k – потенциальная ёмкость экологической системы (предельное значение численности популяции). Построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) (рис. 4.6-4.7).

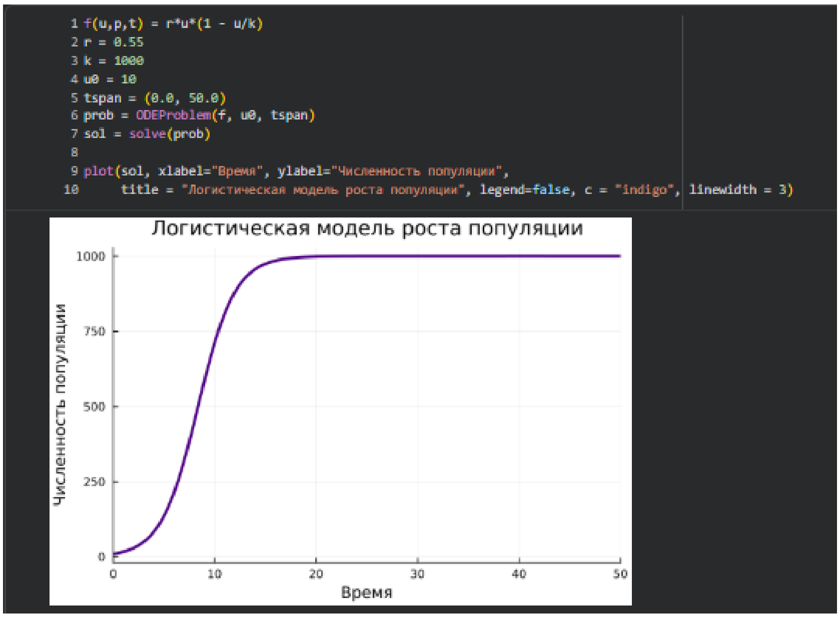

Рис. 4.6: Логистическая модель роста популяции

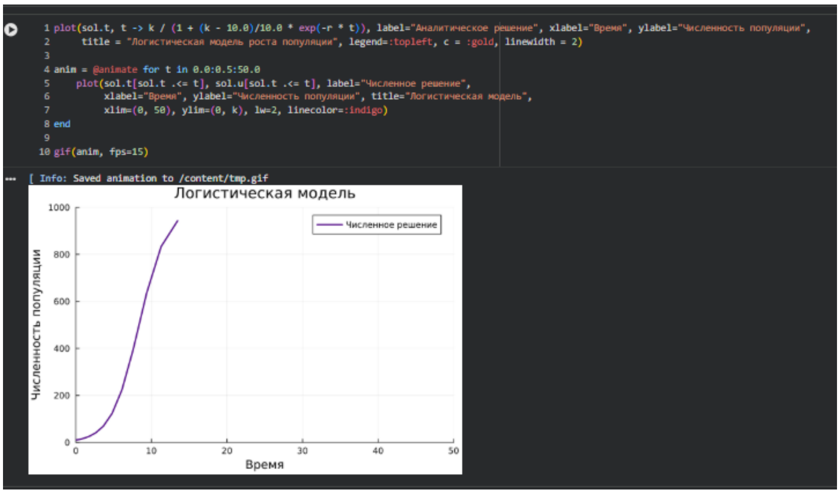

Рис. 4.7: Логистическая модель роста популяции

Реализуем и проанализируем логистическую модель эпидемии Кермака–Маккендрика (SIR-модель):

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta IS, \\ \dot{I} = \beta IS - \gamma I, \\ \dot{R} = \gamma I, \end{cases}$$

где S – численность восприимчивой популяции, I – численность инфицированных, R – численность удаленной популяции (в результате смерти или выздоровления), и N — это сумма этих трёх, а β и γ - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно (рис. 4.8).

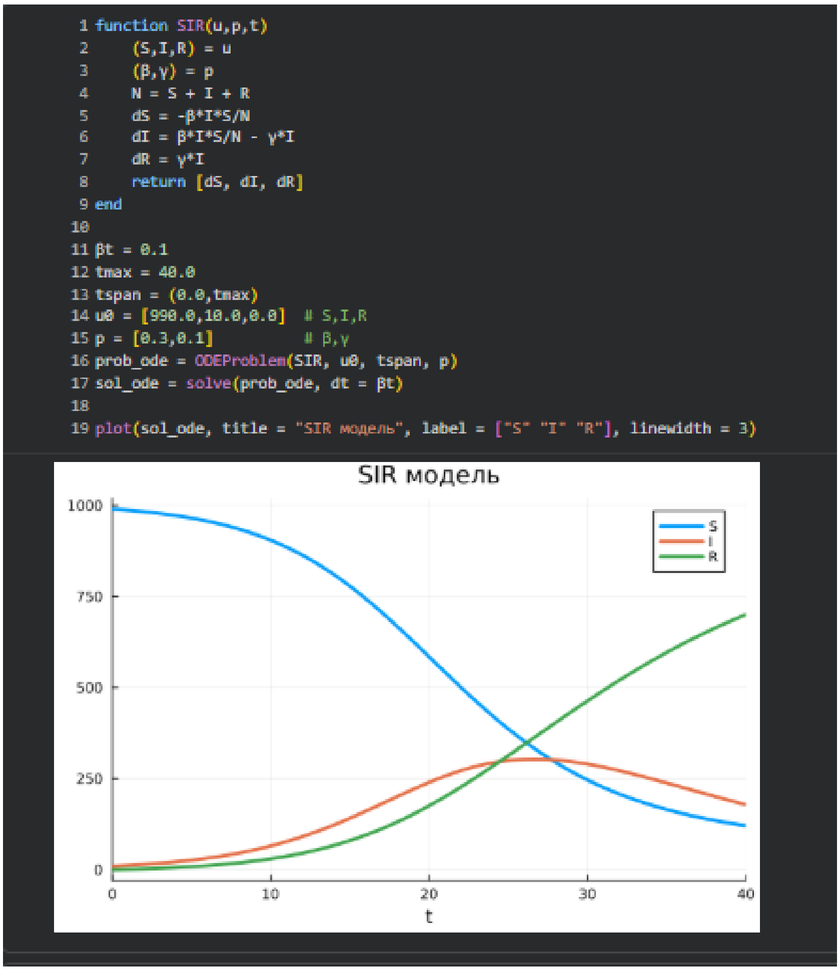

Рис. 4.8: SIR-модель

Как расширение модели SIR (Susceptible-Infected-Removed) по результатам эпидемии испанки была предложена модель SEIR (Susceptible-Exposed-Infected-Removed) (рис. 4.9).

$$
\begin{cases}
\dot{S} = -\dfrac{\beta}{N} I S, \\
\dot{E} = \dfrac{\beta}{N} I S - \delta E, \\
\dot{I} = \delta E - \gamma I, \\
\dot{R} = \gamma I,
\end{cases}
$$

```julia
function SEIR(u,p,t)
    (S,E,I,R) = u
    (β,v,δ) = p
    N = S + E + I + R
    dS = -β*I*S/N
    dE = β*I*S/N - δ*E
    dI = δ*E - v*I
    dR = v*I
    return [dS, dE, dI, dR]
end

δt = 0.1
tmax = 60.0
tspan = (0.0,tmax)
u0 = [980.0, 0.0, 10.0, 0.0]  # S,E,I,R
p = [0.5,0.1,0.2]            # β,v,δ
prob_ode = ODEProblem(SEIR, u0, tspan, p)
sol_ode = solve(prob_ode, dt = δt)

plot(sol_ode, title = "SEIR модель", label = ["S" "E" "I" "R"], linewidth = 3)
```

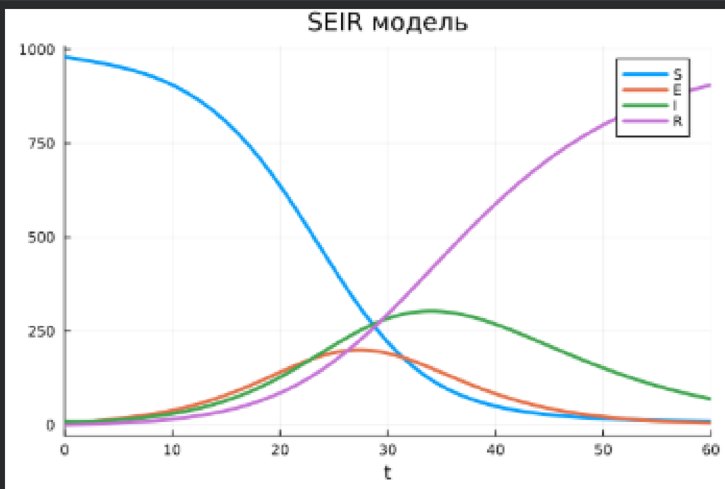

Рис. 4.9: SEIR-модель

Для дискретной модели Лотки–Вольтерры:

$$
\begin{cases}
X_1(t+1) = aX_1(t)(1 - X_1(t)) - X_1(t)X_2(t),\\
X_2(t+1) = -cX_2(t) - dX_1(t)X_2(t).
\end{cases}
$$

с начальными данными $a = 2, c = 1, d = 5$ найдем точку равновесия. Получим и сравним аналитическое и численное решения (рис. 4.10).

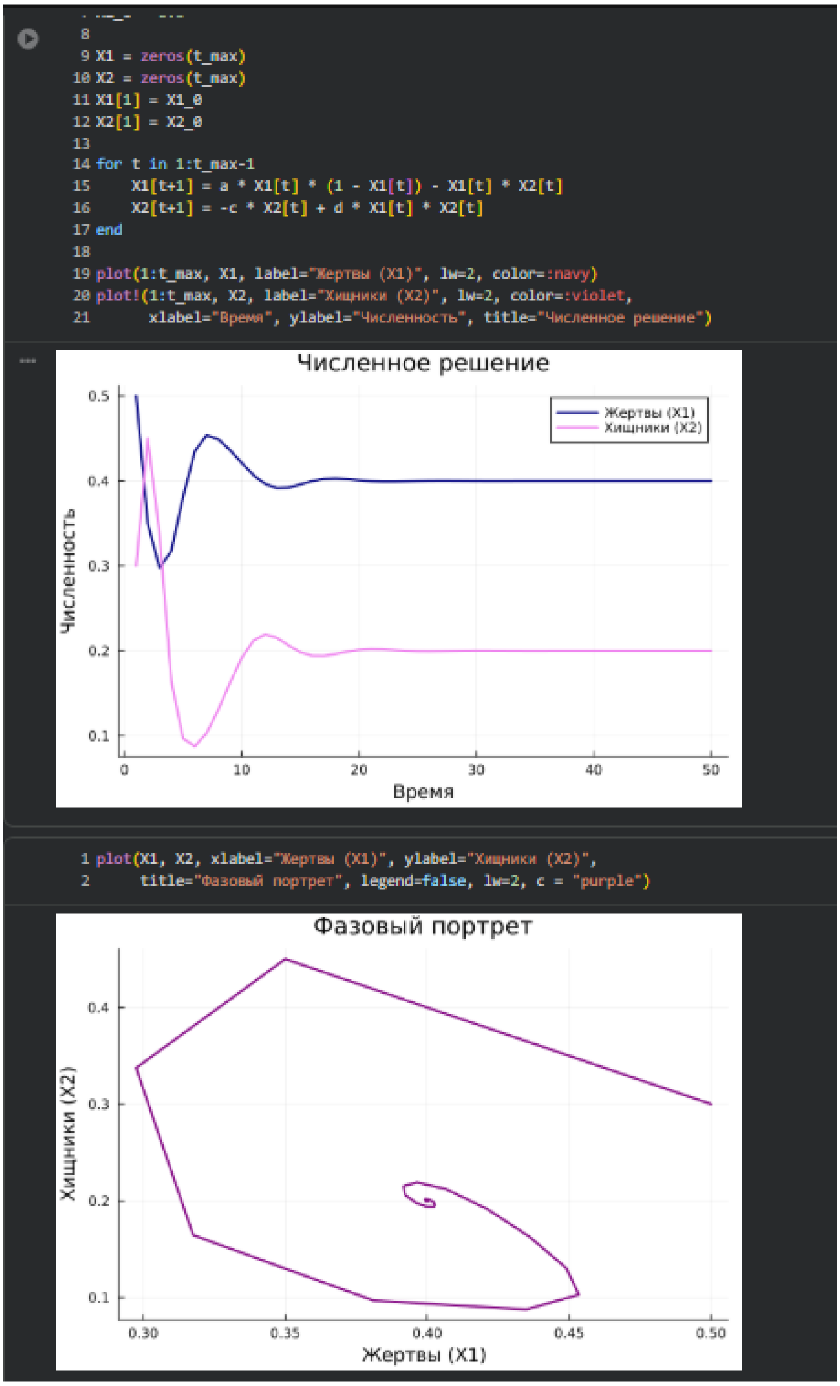

Рис. 4.10: Дискретная модель Лотки–Вольтерры

Реализуем на языке Julia модель отбора на основе конкурентных отношений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta x y, \\ \dot{y} = \alpha y - \beta x y, \end{cases}$$

Построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет (рис. 4.11-4.12).

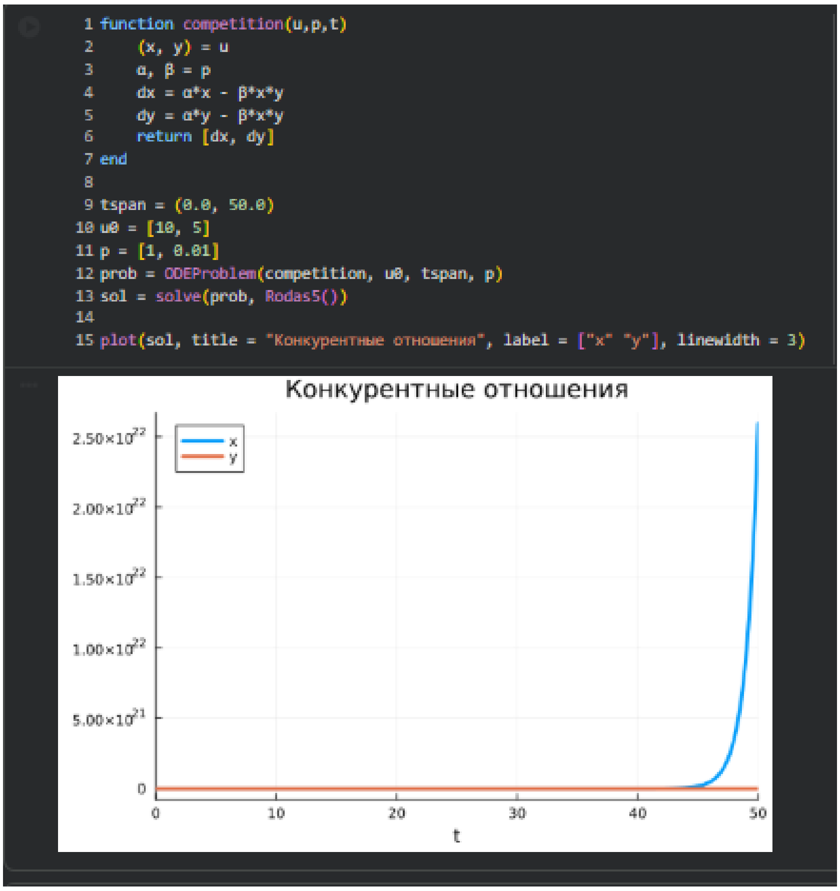

Рис. 4.11: Модель отбора на основе конкурентных отношений

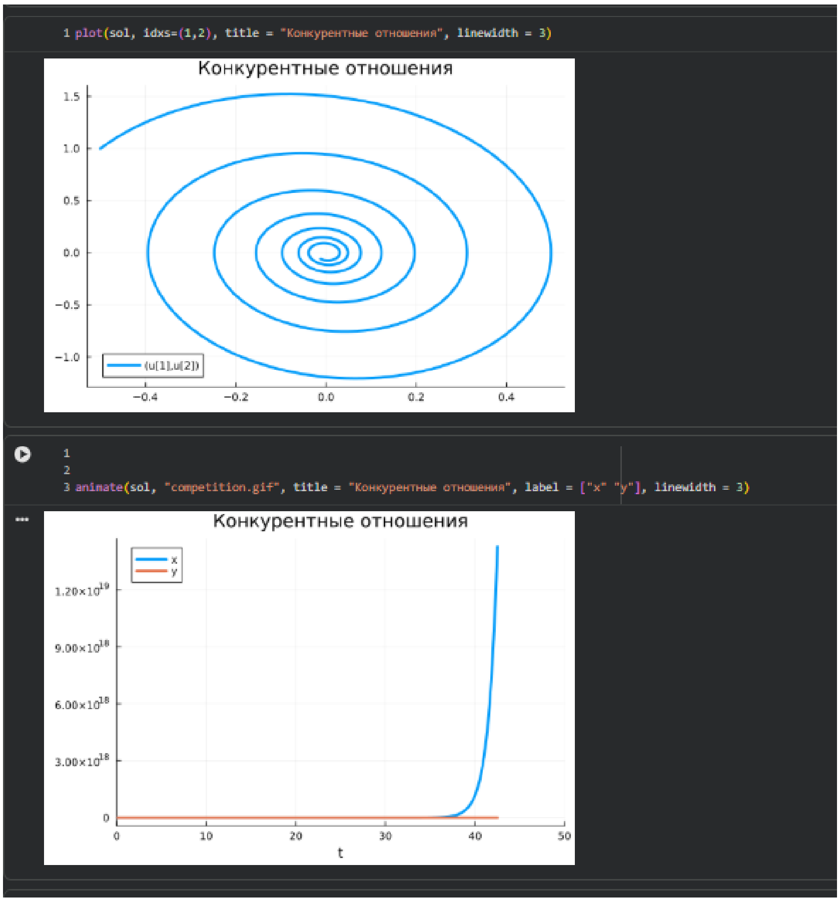

Рис. 4.12: Модель отбора на основе конкурентных отношений

Реализуем на языке Julia модель консервативного гармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 = 0, x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = y_0.$$

Построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет (рис. 4.13-4.14).

```
function harmonic(u,p,t)
    x, y = u
    ω = p
    dx = y
    dy = -ω^2 * x
    return [dx, dy]
end

tspan = (0.0, 20.0)
u0 = [-0.5, 0.0]
p = 3.7                        # частота
prob = ODEProblem(harmonic, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, Tsit5())

plot(sol, title="Гармонический осциллятор", c=["navy" "violet"], linewidth=2)
```

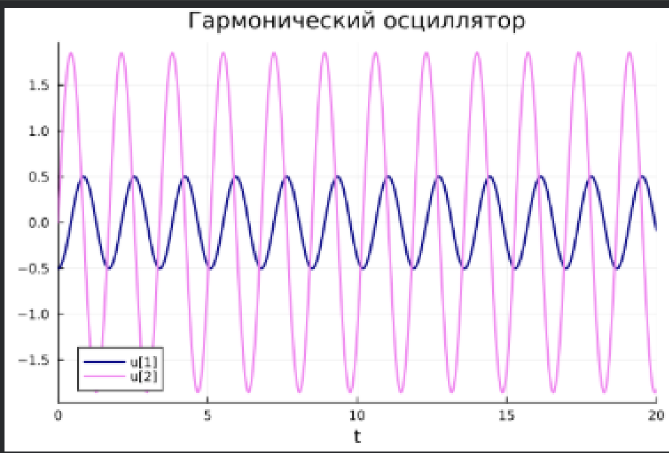

Рис. 4.13: Модель консервативного гармонического осциллятора

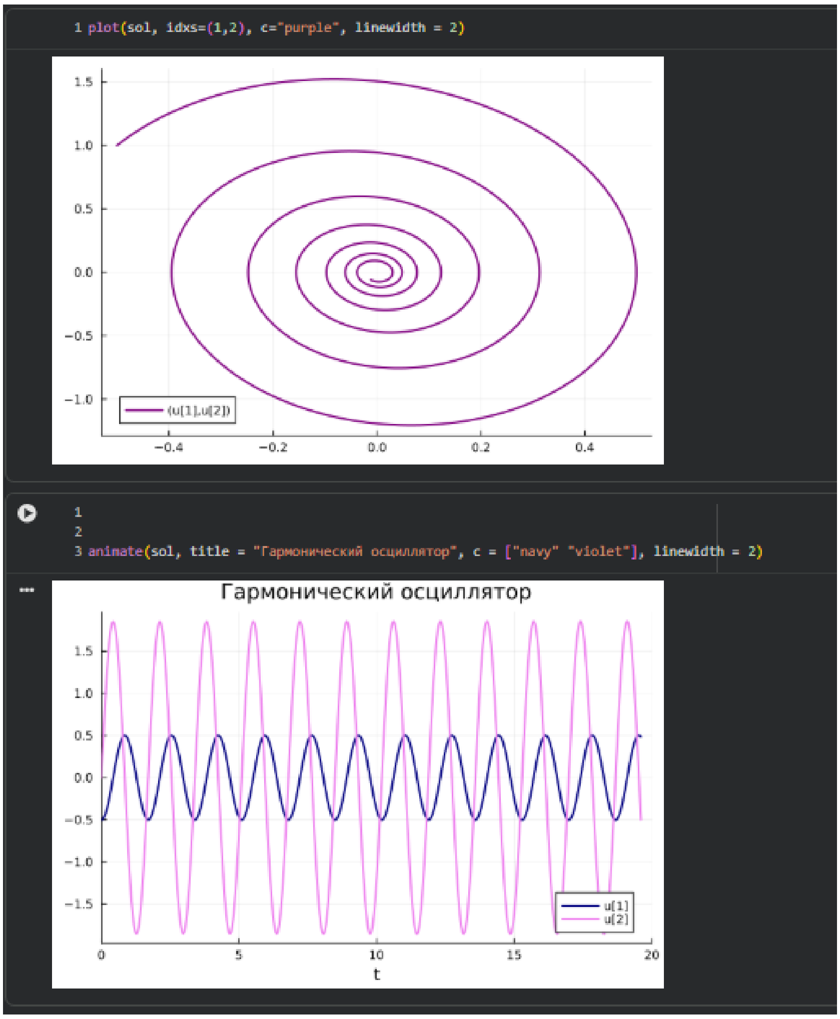

Рис. 4.14: Модель консервативного гармонического осциллятора

Реализуем на языке Julia модель свободных колебаний гармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0, x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = y_0.$$

Построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет (рис. 4.15-4.16).

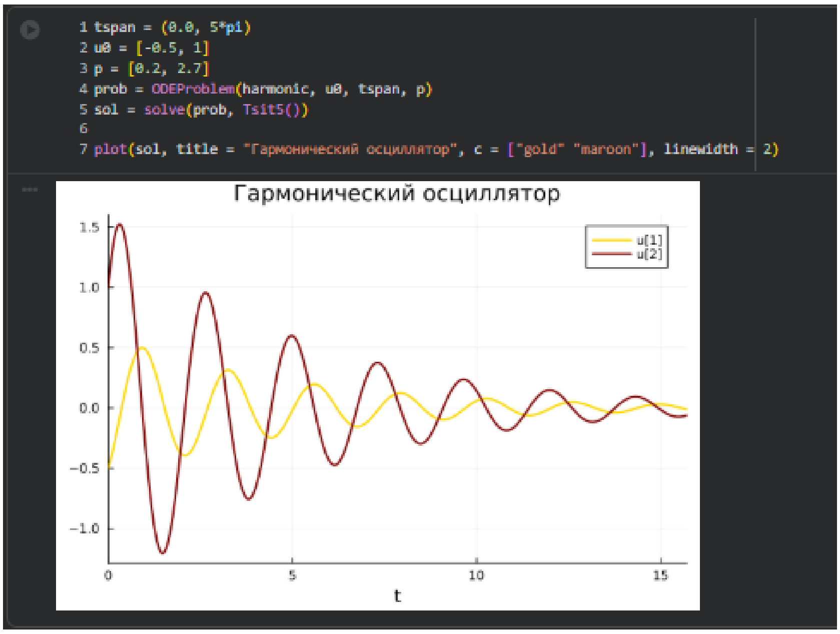

Рис. 4.15: Модель свободных колебаний гармонического осциллятора

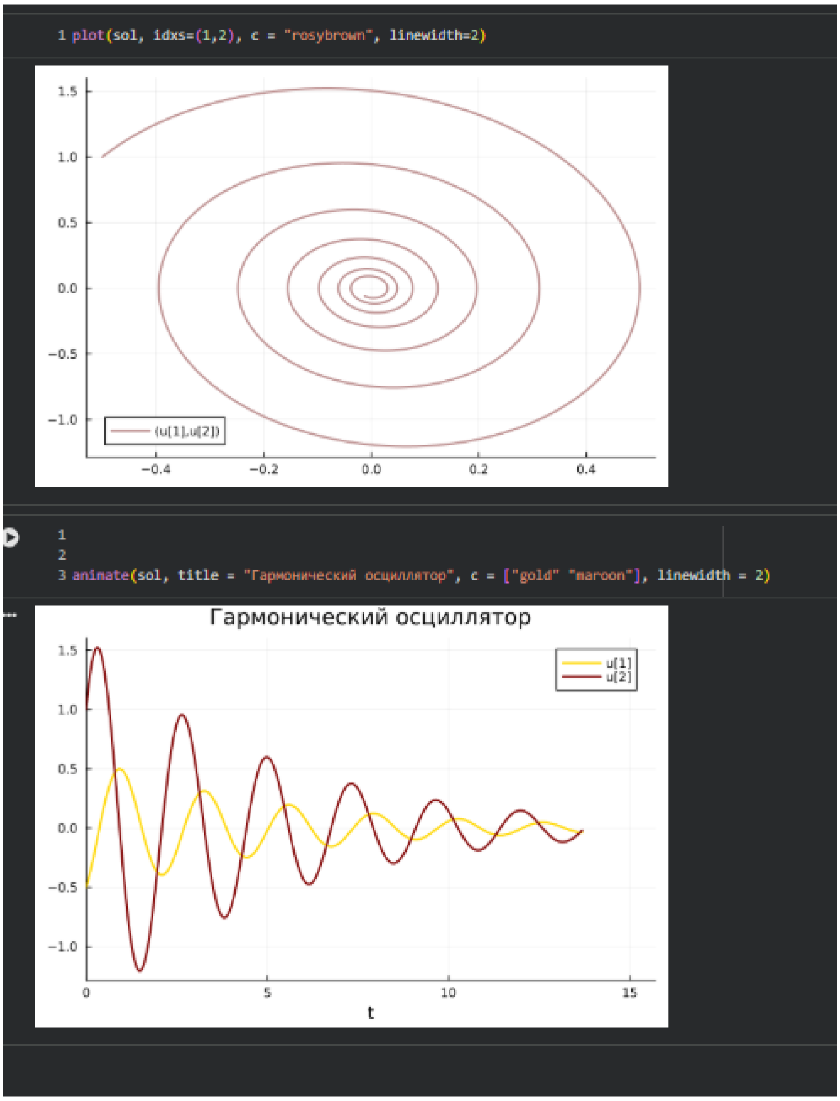

Рис. 4.16: Модель свободных колебаний гармонического осциллятора

5 Выводы

В результате выполнения данной лабораторной работы я освоила специализированные пакеты для решения задач в непрерывном и дискретном времени.

Список литературы

1. JuliaLang [Электронный ресурс]. 2025 JuliaLang.org contributors. URL: https://julialang.org/ (дата обращения: 11.10.2025).
2. Julia 1.11 Documentation [Электронный ресурс]. 2025 JuliaLang.org contributors. URL: https://docs.julialang.org/en/v1/ (дата обращения: 11.10.2025).