

Лабораторная работа №4

Модель гармонических колебаний

Шияпова Дарина Илдаровна

Содержание

1	Цель работы	4
2	Задание	5
3	Теоретическое введение	6
4	Выполнение лабораторной работы	8
4.1	Модель колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы	8
4.2	Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы	11
4.3	Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы	14
5	Выводы	19
	Список литературы	20

Список иллюстраций

4.1	Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы	9
4.2	Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы	10
4.3	Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы. OpenModelica	11
4.4	Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы. OpenModelica	11
4.5	Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы	12
4.6	Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы	13
4.7	Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы. OpenModelica	14
4.8	Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы. OpenModelica	14
4.9	Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы	16
4.10	Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы	16
4.11	Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы. OpenModelica	17
4.12	Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы. OpenModelica	17

1 Цель работы

Построить математическую модель гармонического осциллятора.

2 Задание

Построить фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

$$\ddot{x} + 18x = 0,$$

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

$$\ddot{x} + 8\dot{x} + 2x = 0,$$

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 7x = 3\cos(7t).$$

На интервале $t \in [0; 73]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 1.3$, $y_0 = -0.3$.

3 Теоретическое введение

Гармонические колебания — колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по гармоническому (синусоидальному, косинусоидальному) закону.

Уравнение гармонического колебания имеет вид

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

или

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где x — отклонение колеблющейся величины в текущий момент времени t от среднего за период значения (например, в кинематике — смещение, отклонение колеблющейся точки от положения равновесия); A — амплитуда колебания, то есть максимальное за период отклонение колеблющейся величины от среднего за период значения, размерность A совпадает с размерностью x ; ω (радиан/с, градус/с) — циклическая частота, показывающая, на сколько радиан (градусов) изменяется фаза колебания за 1 с;

$(\omega t + \varphi_0) = \varphi$ (радиан, градус) — полная фаза колебания (сокращённо — фаза, не путать с начальной фазой);

φ_0 (радиан, градус) — начальная фаза колебаний, которая определяет значение полной фазы колебания (и самой величины x) в момент времени $t = 0$. Дифференциальное уравнение, описывающее гармонические колебания, имеет

ВИД

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

[wiki_bash?].

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Модель колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

Для начала реализуем эту модель на языке программирования Julia.

```
# Используемые библиотеки
```

```
using DifferentialEquations, Plots;
```

```
# Начальные условия
```

```
tspan = (0,73)
```

```
u0 = [1.3, -0.3]
```

```
p1 = [0, 18]
```

```
# Задание функции
```

```
function f1(u, p, t)
```

```
    x, y = u
```

```
    g, w = p
```

```
    dx = y
```

```
    dy = -g .*y - w^2 .*x
```

```
    return [dx, dy]
```

```
end
```



```
# Постановка проблемы и ее решение
```

```
problem1 = ODEProblem(f1, u0, tspan, p1)
```

```
sol1 = solve(problem1, Tsit5(), saveat = 0.05)
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. 4.1) и его фазового портрета (рис. 4.2).

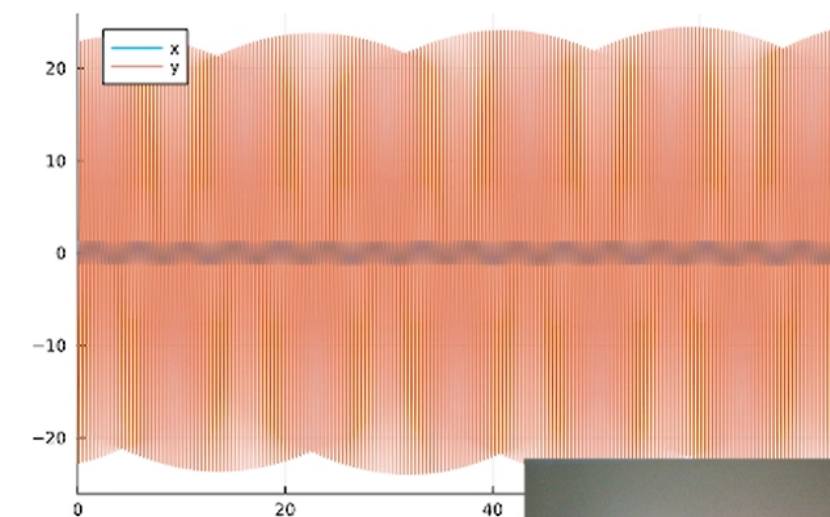


Рис. 4.1: Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

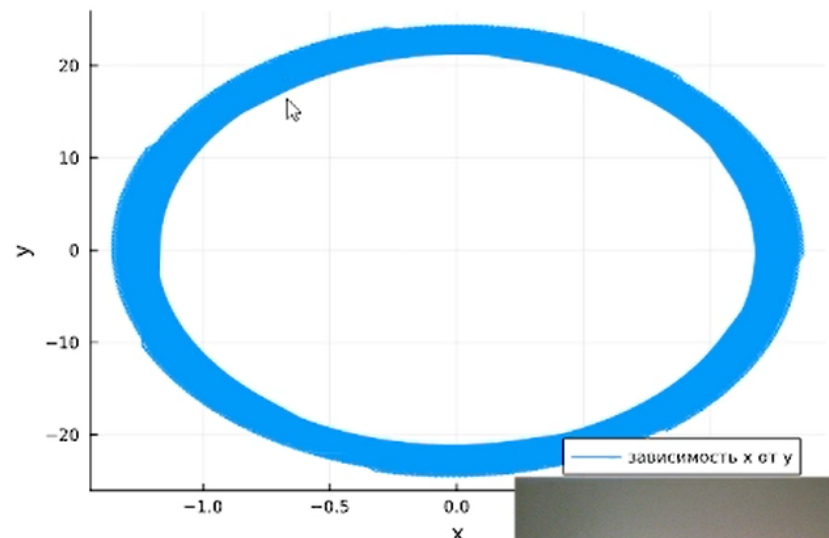


Рис. 4.2: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

Можно заметить, что колебание осциллятора периодически, график не задухает. Теперь реализуем эту модель посредством OpenModelica.

```
model lab4_1
  parameter Real g = 0;
  parameter Real w = 18;
  parameter Real x0 = 1.3;
  parameter Real y0 = -0.3;
  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
  der(x) = y;
  der(y) = -g .*y - w^2 .*x;
end lab4_1;
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. 4.3) и его фазового портрета (рис. 4.4).

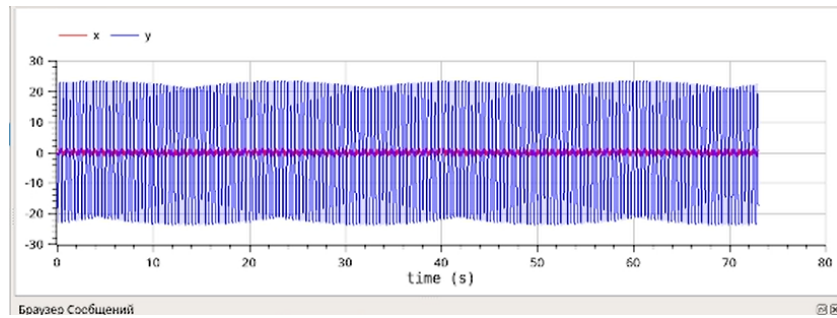


Рис. 4.3: Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы. OpenModelica

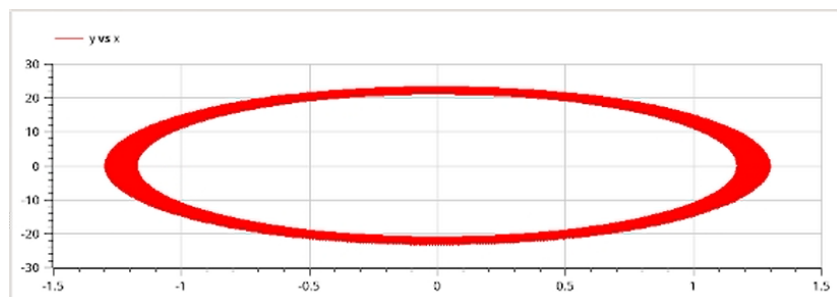


Рис. 4.4: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы. OpenModelica

Также несложно увидеть, что графики, полученные с помощью OpenModelica и Julia идентичны.

4.2 Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

Реализуем эту модель на языке программирования Julia.

```
# Используемые библиотеки
using DifferentialEquations, Plots;

# Начальные условия
```

```

tspan = (0,73)
u0 = [1.3, -0.3]
p2 = [8, 2]

# Задание функции
function f1(u, p, t)
    x, y = u
    g, w = p
    dx = y
    dy = -g .*y - w^2 .*x
    return [dx, dy]
end

# Постановка проблемы и ее решение
problem2 = ODEProblem(f1, u0, tspan, p2)
sol2 = solve(problem2, Tsit5(), saveat = 0.05)

```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. 4.5) и его фазового портрета (рис. 4.6).

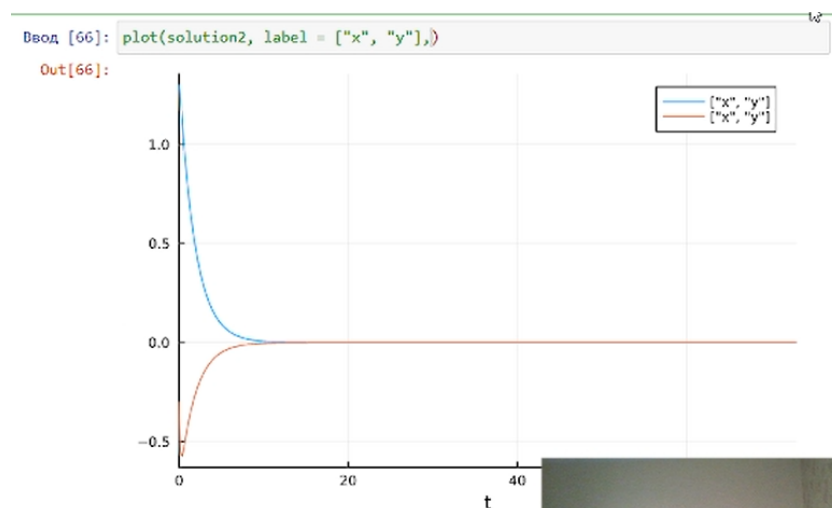


Рис. 4.5: Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

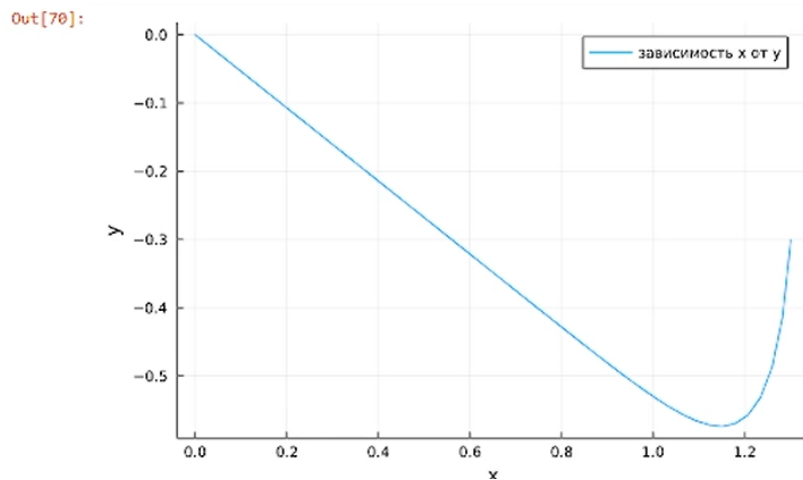


Рис. 4.6: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

В этом случае сначала происходят колебания осциллятора, а затем график затухает, поскольку у нас есть параметр, отвечающий за потери энергии.

Теперь реализуем эту модель посредством OpenModelica.

```
model lab4_2
  parameter Real g = 8;
  parameter Real w = 2;
  parameter Real x0 = 1.3;
  parameter Real y0 = -0.3;
  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
  der(x) = y;
  der(y) = -g .* y - w^2 .* x;
end lab4_2;
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. 4.7) и его фазового портрета (рис. 4.8).

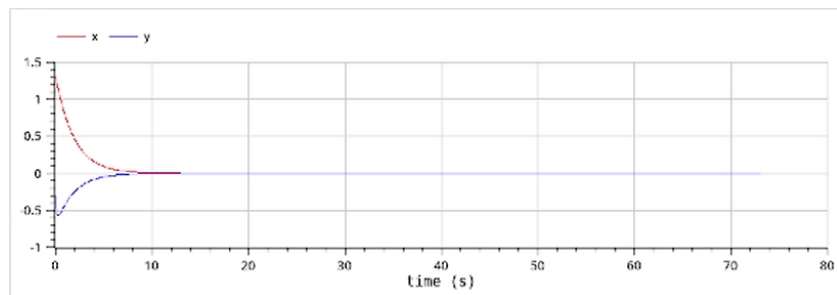


Рис. 4.7: Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы. OpenModelica

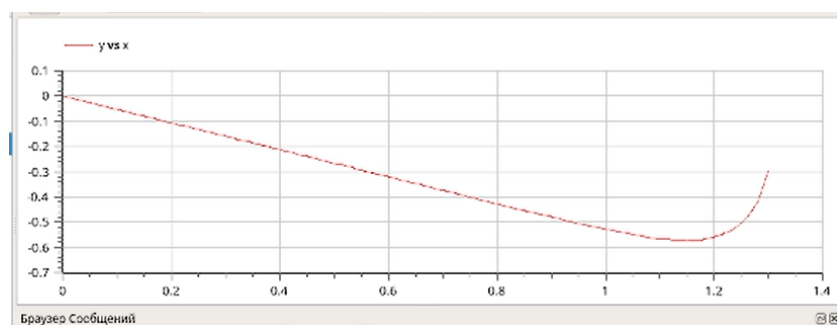


Рис. 4.8: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы. OpenModelica

Во второй модели также несложно увидеть, что графики, полученные с помощью OpenModelica и Julia идентичны.

4.3 Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

Реализуем эту модель на языке программирования Julia.

```
# Используемые библиотеки
using DifferentialEquations, Plots;

# Начальные условия
```

```

tspan = (0,73)
u0 = [1.3, -0.3]
p3 = [3, 7]

# Функция, описывающая внешние силы, действующие на осциллятор
f(t) = 3*sin(7*t)

# Задание функции
function f2(u, p, t)
    x, y = u
    g, w = p
    dx = y
    dy = -g .*y - w^2 .*x .+f(t)
    return [dx, dy]
end

# Постановка проблемы и ее решение
problem3 = ODEProblem(f2, u0, tspan, p3)
sol3 = solve(problem3, Tsit5(), saveat = 0.05)

```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. 4.9) и его фазового портрета (рис. 4.10).

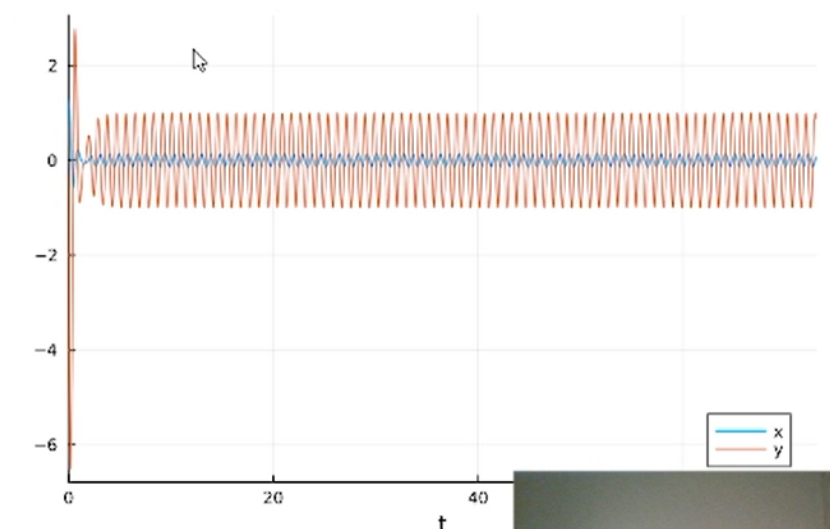


Рис. 4.9: Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

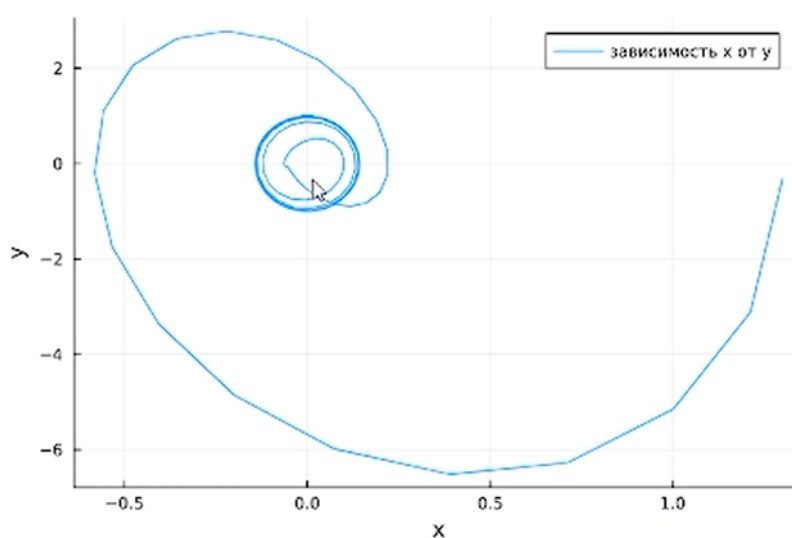


Рис. 4.10: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

Теперь реализуем эту модель посредством OpenModelica.

```
model lab4_3
  parameter Real g = 3;
  parameter Real w = 7;
```



```

parameter Real x0 = 1.3;
parameter Real y0 = -0.3;
Real x(start=x0);
Real y(start=y0);
equation
  der(x) = y;
  der(y) = -g .*y - w^2 .*x + 3*sin(7*time);
end lab4_3;

```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. 4.11) и его фазового портрета (рис. 4.12).

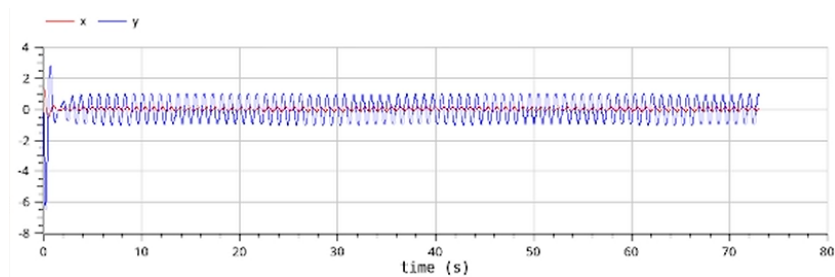


Рис. 4.11: Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы. OpenModelica

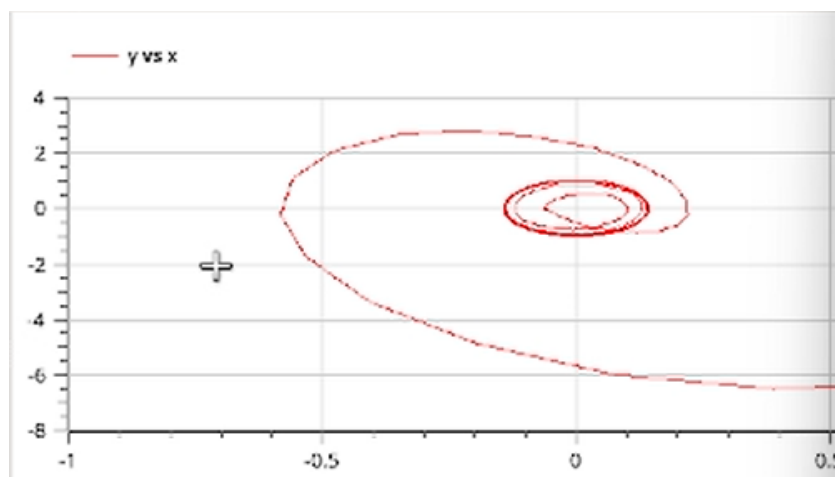


Рис. 4.12: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы. OpenModelica

В третьем случае графики, полученные с помощью OpenModelica и Julia все также идентичны.

5 Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы я построила математическую модель гармонического осциллятора.

Список литературы