Лабораторная работа №8

Модель конкуренции двух фирм

Шияпова Дарина Илдаровна

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Исследовать математическую модель конкуренции двух фирм.

2 Задание

Случай 1.

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \dfrac{b}{c_1}M_1M_2 - \dfrac{a_1}{c_1}M_1^2, \\ \\ \dfrac{dM_2}{d\theta} = \dfrac{c_2}{c_1}M2 - \dfrac{b}{c_1}M_1M_2 - \dfrac{a_1}{c_1}M_2^2, \end{cases}$$

где $a_1 = \dfrac{p_{cr}}{\tau_1^2\tilde{p}_1^2Nq}$, $a_2 = \dfrac{p_{cr}}{\tau_2^2\tilde{p}_2^2Nq}$, $b = \dfrac{p_{cr}}{\tau_1^2\tilde{p}_1^2\tau_2^2\tilde{p}_2^2Nq}$, $c_1 = \dfrac{p_{cr} - \tilde{p_1}}{\tau_1\tilde{p}_1}$, $c_2 = \dfrac{p_{cr} - \tilde{p_1}}{\tau_2\tilde{p}_2}$

Также введена нормировка $t = c_1\theta$.

Случай 2.

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dM_1}{d\theta} = M_1 - (\dfrac{b}{c_1} + 0.00015)M_1 M_2 - \dfrac{a_1}{c_1} M_1^2, \\ \\ \dfrac{dM_2}{d\theta} = \dfrac{c_2}{c_1} M2 - \dfrac{b}{c_1} M_1 M_2 - \dfrac{a_1}{c_1} M_2^2, \end{cases}$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

$$M_0^1 = 5.4,\ M_0^2 = 5.1, p_{cr} = 27,\ N = 30, q = 1 \tau_1 = 8,\ \tau_2 = 9, \tilde{p_1} = 13,\ \tilde{p_2} = 10.1$$

Обозначения:

- N – число потребителей производимого продукта.
- τ – длительность производственного цикла
- p – рыночная цена товара
- $\tilde{p}$– себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.
- q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени
- $\theta = \dfrac{t}{c_1}$- безразмерное время

1. Построить графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 1.
2. Построить графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 2.

3 Теоретическое введение

Математическому моделированию процессов конкуренции и сотрудничества двух фирм на различных рынках посвящено довольно много научных работ, в основном использующих аппарат теории игр и статистических решений. В качестве примера можно привести работы таких исследователей, как Курно, Стакельберг, Бертран, Нэш, Парето [**model?**].

Следует отметить, что динамические дифференциальные модели уже давно и успешно используются для математического моделирования самых разнообразных по своей природе процессов. Достаточно упомянуть широко использующуюся в экологии модель «хищник-жертва» Вольтерра, математическую теорию развития эпидемий, модели боевых действий

Задача решалась в следующей постановке.

На рынке однородного товара присутствуют две основные фирмы, разделяющие его между собой, т.е. имеет место классическая дуополия.

Безусловно, это является весьма сильным предположением, однако оно вполне оправдано в тех случаях, когда доля продаж остальных конкурентов на рассматриваемом сегменте рынке пренебрежимо мала. Хорошим примером может служить отечественный рынок микропроцессоров, который по существу разделили между собой две фирмы: Intel и AMD.

Изменение объемов продаж конкурирующих фирм с течением времени описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \dfrac{b}{c_1} M_1 M_2 - \dfrac{a_1}{c_1} M_1^2, \\ \frac{dM_2}{d\theta} = \dfrac{c_2}{c_1} M_1 - \dfrac{b}{c_1} M_1 M_2 - \dfrac{a_2}{c_1} M_2^2, \end{cases}$$

где $a_1 = \dfrac{p_{cr}}{(\tau_1^2 \tilde{p_1} Nq)}$, $a_2 = \dfrac{p_{cr}}{(\tau_2^2 * \tilde{p_2} Nq)}$, $b = \dfrac{p_{cr}}{(\tau_1^2 \tau_2^2 \tilde{p_1}^2 \tilde{p_2}^2 Nq)}$, $c_1 = \dfrac{(p_{cr} - p_1)}{(\tau_1 \tilde{p_1})}$, $c_2 = \dfrac{(p_{cr} - p_2)}{(\tau_2 \tilde{p_2})}$.

- N – число потребителей производимого продукта.
- τ – длительность производственного цикла
- p – рыночная цена товара
- $\tilde{p}$ – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.
- q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени
- $\theta = \dfrac{t}{c_1}$ – безразмерное время

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Реализация на Julia

Для реализации на языке программирования Julia будем использовать библиотеки `DifferentialEquations.jl` для решения дифференциальных уравнений и `Plots.jl` для отрисовки графиков.

Параметры и начальные условия для обоих случаев нашей задачи одинаковы, так что зададим их:

```
p_cr = 27 #критическая стоимость продукта
tau1 = 8 #длительность производственного цикла фирмы 1
p1 = 13 #себестоимость продукта у фирмы 1
tau2 = 9 #длительность производственного цикла фирмы 2
p2 = 10.1 #себестоимость продукта у фирмы 2
N = 30 #число потребителей производимого продукта
q = 1; #максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени

a1 = p_cr/(tau1^2*p1^2*N*q);
a2 = p_cr/(tau2^2*p2^2*N*q);
b = p_cr/(tau1^2*tau2^2*p1^2*p2^2*N*q);
c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

u0 = [5.4, 5.1] #начальные значения M1 и M2
```

```
p = [a1, a2, b, c1, c2]
tspan = (0.0, 30.0) #временной интервал
```

4.1.1 Случай 1

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы. В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.)

Зададим функцию, описывающую систему уравнений для этого случая:

```
function f(u, p, t)
    M1, M2 = u
    a1, a2, b, c1, c2 = p
    M1 = M1 - (a1/c1)*M1^2 - (b/c1)*M1*M2
    M2 = (c2/c1)*M2 - (a2/c1)*M2^2 - (b/c1)*M1*M2
    return [M1, M2]
end
```

Далее решаем систему ДУ, сначала определив проблему с помощью метода `ODEProblem()`, а затем решим с помощью `solve()` солвером `Tsit5()` с шагом 0.01. Нарисуем график с помощью `plot()`.

```
prob = ODEProblem(f, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, Tsit5(), saveat = 0.01)
plot(sol, yaxis = "Оборотные средства предприятия", label = ["M1" "M2"], c = ["gr
```

В результате получаем следующий график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой (рис. 4.1). По графику видно, что рост оборотных средств предприятий идет независимо друг от друга. В математической модели этот факт отражается в коэффициенте, стоящим перед членом $M_1 M_2$: в рассматриваемой задаче он одинаковый в обоих уравнениях ($\frac{b}{c_1}$). Это было обозначено в условиях задачи. Каждая фирма достигает свое максимальное значение объема продаж и остается на рынке с этим значением, то есть каждая фирма захватывает свою часть рынка потребителей, которая не изменяется.

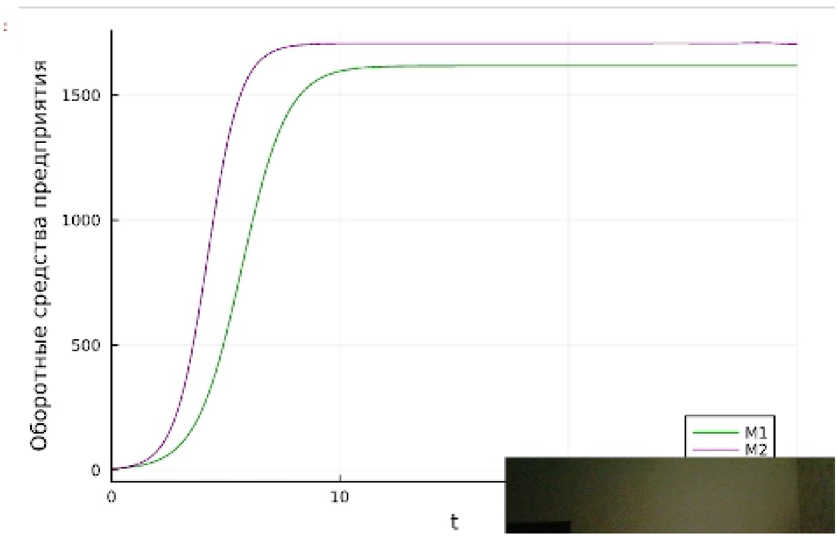

Рис. 4.1: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

4.1.2 Случай 2

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться.

Зададим функцию, описывающую систему уравнений для этого случая:

```
function f(u, p, t)
    M1, M2 = u
    a1, a2, b, c1, c2 = p
    M1 = M1 - (a1/c1)*M1^2 - (b/c1+0.00015)*M1*M2
    M2 = (c2/c1)*M2 - (a2/c1)*M2^2 - (b/c1)*M1*M2
    return [M1, M2]
end
```

Далее решаем систему ДУ, сначала определив проблему с помощью метода `ODEProblem()`, а затем решим с помощью `solve()` солвером `Tsit5()` с шагом 0.01. Нарисуем график с помощью `plot()`.

```
prob = ODEProblem(f, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, Tsit5(), saveat = 0.01)
plot(sol, yaxis = "Оборотные средства предприятия", label = ["M1" "M2"], c = ["gr
```

В результате получаем следующий график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой (рис. 4.2). По графику видно, что первая фирма, несмотря на начальный рост, достигнув своего максимального объема продаж, начитает нести убытки и, в итоге, терпит банкротство. Динамика роста объемов оборотных средств второй фирмы остается без изменения: достигнув максимального значения, остается на этом уровне.

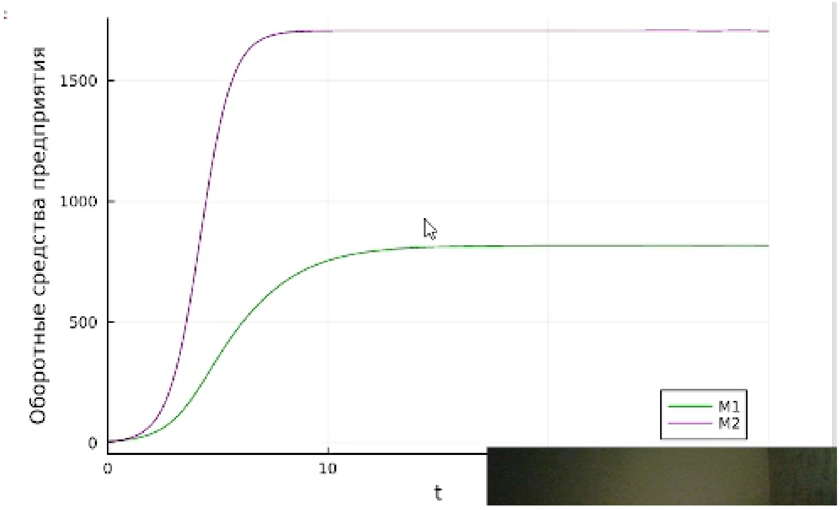

Рис. 4.2: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

Посмотрим на приближенный график (рис. 4.3).

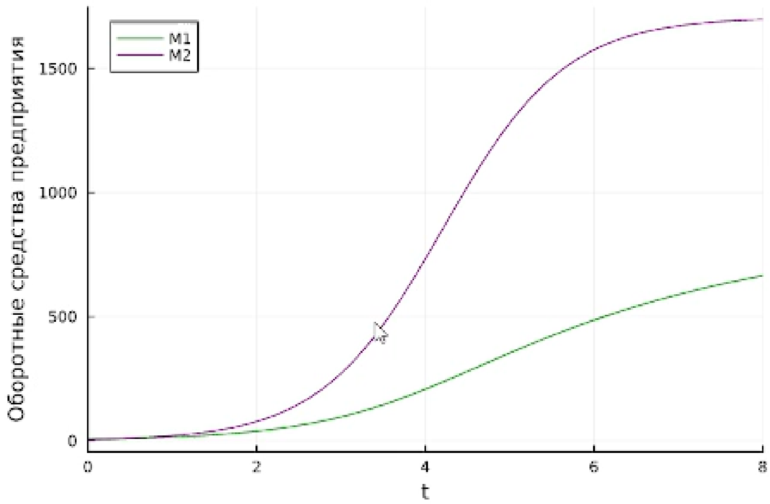

Рис. 4.3: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

4.2 Реализация на OpenModelica

4.2.1 Случай 1

Зададим параметры, начальные условия и систему уравнений.

```
parameter Real p_cr = 27;
```

```
  parameter Real tau1 = 8;
  parameter Real p1 = 13;
  parameter Real tau2 = 9;
  parameter Real p2 = 10.1;
  parameter Real N = 30;
  parameter Real q = 1;
  parameter Real a1 = p_cr/(tau1^2*p1^2*N*q);
  parameter Real a2 = p_cr/(tau2^2*p2^2*N*q);
  parameter Real b = p_cr/(tau1^2*tau2^2*p1^2*p2^2*N*q);
  parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
  parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

  Real M1(start=5.4);
  Real M2(start=5.1);

equation

  der(M1) = M1 - (a1/c1)*M1^2 - (b/c1)*M1*M2;
  der(M2) = (c2/c1)*M2 - (a2/c1)*M2^2 - (b/c1)*M1*M2;
```

Далее выполним симуляцию на временном интервале и с шагом дифференцирования, как при реализации на Julia. Получим следующий график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой (рис. 4.4). По графику видно, что рост оборотных средств предприятий идет независимо друг от друга. Каждая фирма достигает свое максимальное значение объема продаж и остается на рынке с этим значением, то есть каждая фирма захватывает свою часть рынка потребителей, которая не изменяется.

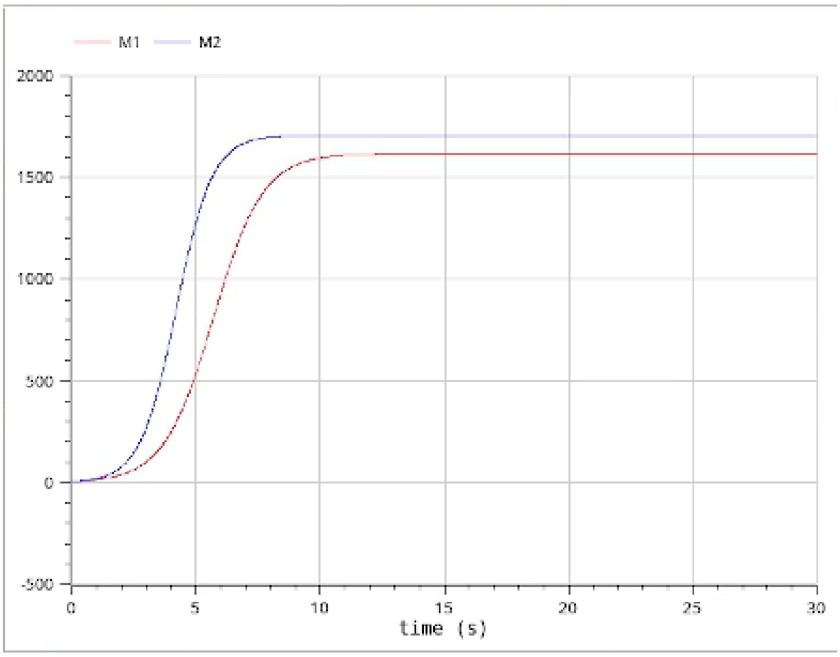

Рис. 4.4: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

4.2.2 Случай 2

Зададим параметры, начальные условия и систему уравнений.

```
parameter Real p_cr = 27;
parameter Real tau1 = 8;
parameter Real p1 = 13;
parameter Real tau2 = 9;
parameter Real p2 = 10.1;
parameter Real N = 30;
parameter Real q = 1;
parameter Real a1 = p_cr/(tau1^2*p1^2*N*q);
parameter Real a2 = p_cr/(tau2^2*p2^2*N*q);
parameter Real b = p_cr/(tau1^2*tau2^2*p1^2*p2^2*N*q);
parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);
```

```
  Real M1(start=5.4);
  Real M2(start=5.1);

equation

  der(M1) = M1 - (a1/c1)*M1^2 - (b/c1+0.00015)*M1*M2;
  der(M2) = (c2/c1)*M2 - (a2/c1)*M2^2 - (b/c1)*M1*M2;
```

Далее выполним симуляцию на временном интервале и с шагом дифференцирования, как при реализации на Julia. Получим следующий график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой (рис. 4.5). По графику видно, что первая фирма, несмотря на начальный рост, достигнув своего максимального объема продаж, начитает нести убытки и, в итоге, терпит банкротство. Динамика роста объемов оборотных средств второй фирмы остается без изменения: достигнув максимального значения, остается на этом уровне.

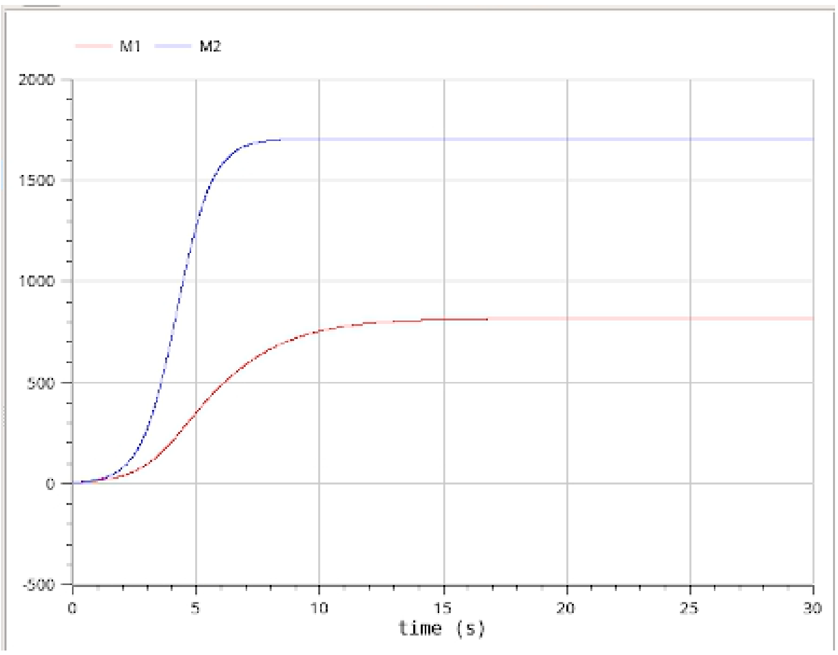

Рис. 4.5: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

Посмотрим на приближенный график (рис. 4.6).

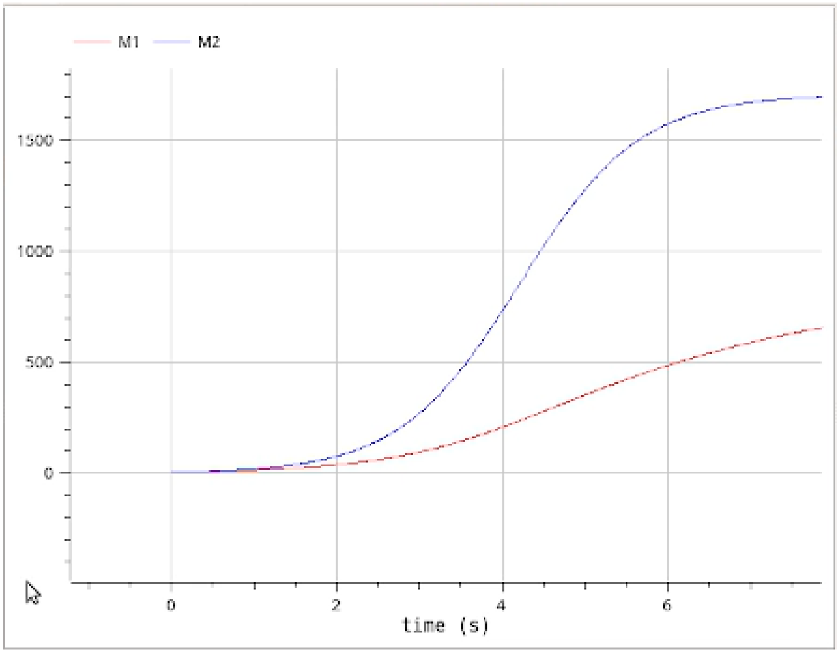

Рис. 4.6: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

4.3 Сравнение построения модели на Julia и в OpenModelica

Все графики получились идентичными. Что Julia, что OpenModelica справились с решением системы ДУ и построением графиков.

5 Выводы

В результате выполнения лабораторной работы была исследована модель конкуренции двух фирм.

Список литературы