

Лабораторная работа № 2

Задача о погоне

Шияпова Д.И.

05 апреля 2025

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

- Шияпова Дарина Илдаровна
- Студентка
- Российский университет дружбы народов
- 1132226458@pfur.ru



Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 16,8 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4,6 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка A равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки P такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки A ([wiki:bash?](#)).

Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

Принимем за $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ – место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $x_{k0} = k$ – место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров x_{k0} ($\theta = x_{k0} = 0$), а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Выполнение лабораторной работы

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{k - x}{4.6v}$ (во втором случае $\frac{k + x}{4.6v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k - x}{4.6v} \text{ - в первом случае}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{k + x}{4.6v} \text{ - во втором}$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{16.8}{5.6}$ и $x_2 = \frac{16.8}{5.6}$, задачу будем решать для двух

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_τ - тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$.

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса.

Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r , $r \frac{d\theta}{dt}$. Получаем:

$$v_{\tau} = \sqrt{21.16v^2 - v^2} = \sqrt{20.16}v$$

Из чего можно вывести:

$$r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{20.16}v$$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{20.16}v \end{cases}$$

С начальными условиями для первого случая:

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \frac{16.8}{5.6} \end{cases} \quad (1)$$

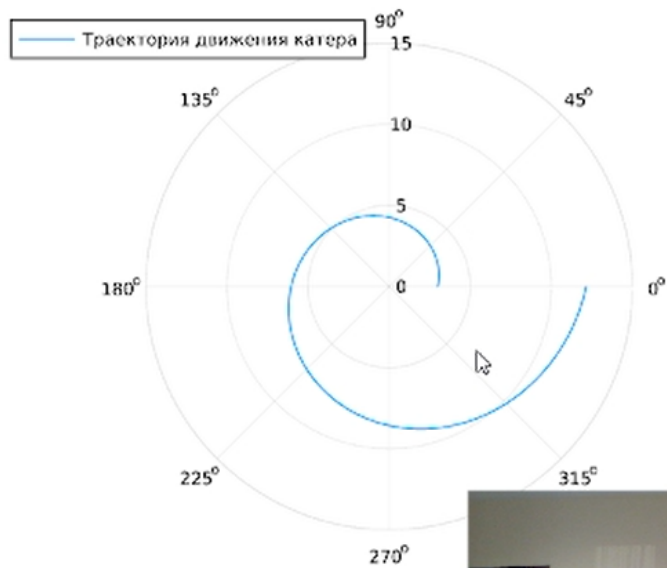
Или для второго:

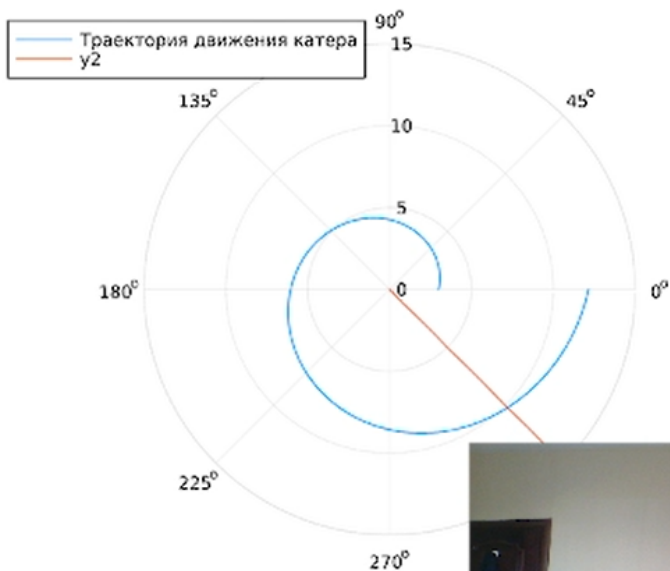
$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \frac{16.8}{3.6} \end{array} \right. \quad (2)$$

Исключая из полученной системы производную по t , можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{20.16}}$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.





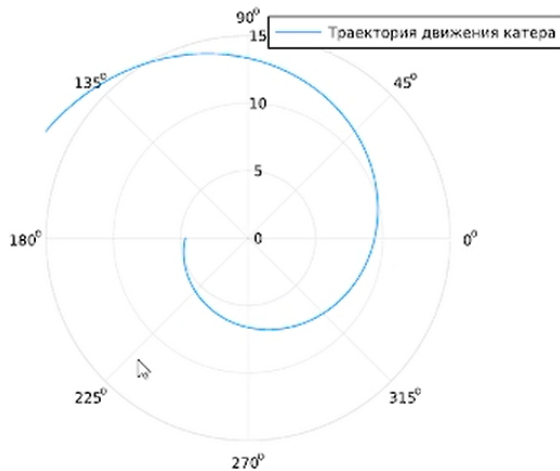


Рис. 3: Траектория движения катера во 2 случае

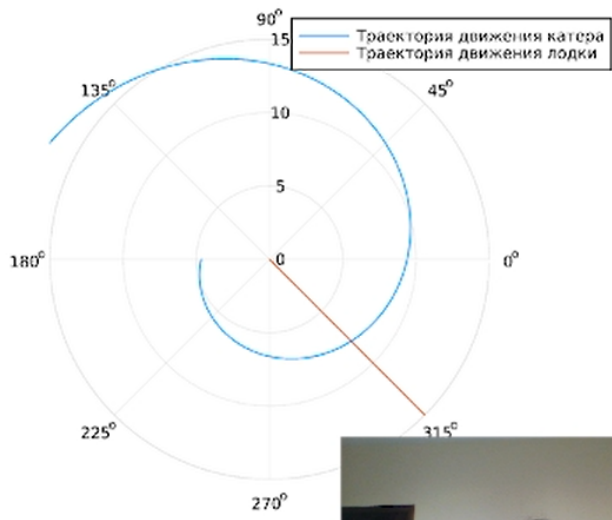


Рис. 4: Траектория движения катера во 2 случае

Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы я построила математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.