Лабораторная работа №2

Задача о погоне

Шияпова Дарина Илдаровна

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.

2 Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 16,8 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4,6 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки

3 Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка A равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки P такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки A [**wiki:bash?**].

4 Выполнение лабораторной работы

Формула для выбора варианта: `(1132226458%70)+1` = 49 вариант.

Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

Принимем за $t_0 = 0, x_0 = 0$ – место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения,$x_{k0} = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров x_{k0} ($\theta = x_{k0} = 0$), а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстояниих от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{k-x}{4.6v}$ (во втором случае $\frac{k+x}{4.6v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояниех можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{4.6v} \text{ – в первом случае}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{k+x}{4.6v} \text{ – во втором}$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{16.8}{5,1}$ и $x_2 = \frac{16.8}{3,1}$, задачу будем решать для двух случаев.

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и - v_τ тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$.

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r, $r\frac{d\theta}{dt}$.

Получаем:

$$v_\tau = \sqrt{21.16v^2 - v^2} = \sqrt{20.16}v$$

Из чего можно вывести:

$$r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{20.16}v$$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$
\begin{cases}
\frac{dr}{dt} = v \\
r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{20.16}v
\end{cases}
$$

С начальными условиями для первого случая:

$$
\begin{cases}
\theta_0 = 0 \\
r_0 = \frac{16.8}{5.6}
\end{cases} \tag{1}
$$

Или для второго:

$$
\begin{cases}
\theta_0 = -\pi \\
r_0 = \frac{16.8}{3.6}
\end{cases} \tag{2}
$$

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению:

$$
\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{20.16}}
$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

4.1 Построение модели

```
using DifferentialEquations, Plots

# расстояние от лодки до катера

k = 16.8

# начальные условия для 1 и 2 случаев
```

```
r0 = k/5.6
r0_2 = k/3.6
theta0 = (0.0, 2*pi)
theta0_2 = (-pi, pi)

# данные для движения лодки браконьеров

fi = 3*pi/4;
t = (0, 50);

# функция, описывающая движение лодки браконьеров

x(t) = tan(fi)*t;

# функция, описывающая движение катера береговой охраны

f(r, p, t) = r/sqrt(20.16)

# постановка проблемы и решение ДУ для 1 случая

prob = ODEProblem(f, r0, theta0)

sol = solve(prob, saveat = 0.01)

# отрисовка траектории движения катера

plot(sol.t, sol.u, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траекория движения катера"
```

В результате получаем такой рисунок (рис. 4.1):

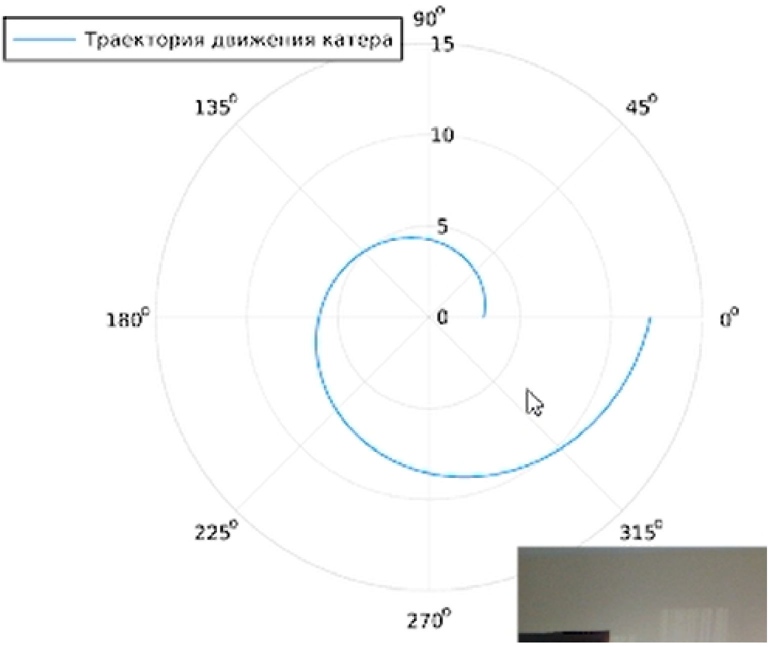

Рис. 4.1: Траекория движения катера в 1 случае

```
## необходимые действия для построения траектории движения лодки

ugol = [fi for i in range(0,15)]

x_lims = [x(i) for i in range(0,15)]

# отрисовка траектории движения лодки вместе с катером

plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траекория движения лодки"
```

В результате получаем такой рисунок (рис. 4.2):

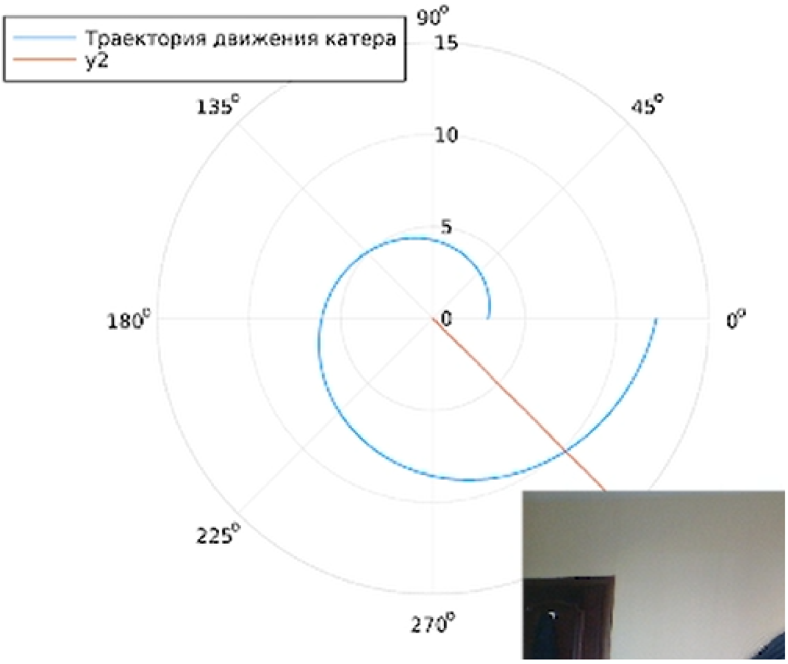

Рис. 4.2: Траекория движения катера и лодки

Теперь перейдем к решению в случае 2.

```
# постановка проблемы и решение ДУ для 2 случая

prob_2 = ODEProblem(f, r0_2, theta0_2)

sol_2 = solve(prob_2, saveat = 0.01)

# отрисовка траектории движения катера

plot(sol_2.t, sol_2.u, proj=:polar, lims=(0,15), label = "Траекория движения кате
```

В результате получаем такой рисунок (рис. 4.3):

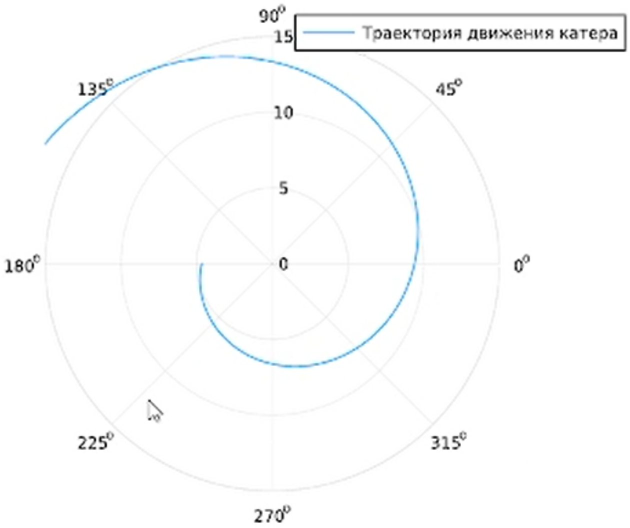

Рис. 4.3: Траекория движения катера во 2 случае

```
# отрисовка траектории движения лодки вместе с катером

plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траекория движения лодки"
```

В результате получаем такой рисунок (рис. 4.4):

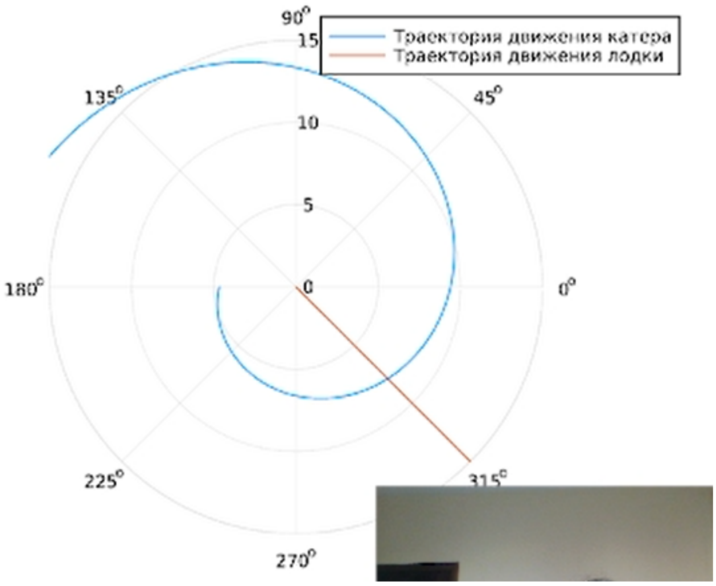

Рис. 4.4: Траекория движения катера во 2 случае

5 Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы я построила математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.

Список литературы