Лабораторная работа №8

Модель конкуренции двух фирм

Шияпова Дарина Илдаровна

Содержание

# 1 Цель работы

Исследовать математическую модель конкуренции двух фирм.

# 2 Задание

*Случай 1.*

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

где

Также введена нормировка .

*Случай 2.*

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

$$M\_0^1=5.4, \, M\_0^2=5.1,\\ p\_{cr}=27, \,N=30, q=1\\ \tau\_1=8, \, \tau\_2=9,\\ \tilde{p\_1}=13, \, \tilde{p\_2}=10.1$$

*Обозначения:*

* – число потребителей производимого продукта.
* – длительность производственного цикла
* – рыночная цена товара
* – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.
* – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени
* - безразмерное время

1. Построить графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 1.
2. Построить графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 2.

# 3 Теоретическое введение

Математическому моделированию процессов конкуренции и сотрудничества двух фирм на различных рынках посвящено довольно много научных работ, в основном использующих аппарат теории игр и статистических решений. В качестве примера можно привести работы таких исследователей, как Курно, Стакельберг, Бертран, Нэш, Парето [**model?**].

Следует отметить, что динамические дифференциальные модели уже давно и успешно используются для математического моделирования самых разнообразных по своей природе процессов. Достаточно упомянуть широко использующуюся в экологии модель «хищник-жертва» Вольтерра, математическую теорию развития эпидемий, модели боевых действий

Задача решалась в следующей постановке.

На рынке однородного товара присутствуют две основные фирмы, разделяющие его между собой, т.е. имеет место классическая дуополия.

Безусловно, это является весьма сильным предположением, однако оно вполне оправдано в тех случаях, когда доля продаж остальных конкурентов на рассматриваемом сегменте рынке пренебрежимо мала. Хорошим примером может служить отечественный рынок микропроцессоров, который по существу разделили между собой две фирмы: Intel и AMD.

Изменение объемов продаж конкурирующих фирм с течением времени описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

где , , , , .

* – число потребителей производимого продукта.
* – длительность производственного цикла
* – рыночная цена товара
* – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.
* – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени
* – безразмерное время

# 4 Выполнение лабораторной работы

## 4.1 Реализация на Julia

Для реализации на языке программирования Julia будем использовать библиотеки DifferentialEquations.jl для решения дифференциальных уравнений и Plots.jl для отрисовки графиков.

Параметры и начальные условия для обоих случаев нашей задачи одинаковы, так что зададим их:

p\_cr = 27 #критическая стоимость продукта  
tau1 = 8 #длительность производственного цикла фирмы 1  
p1 = 13 #себестоимость продукта у фирмы 1  
tau2 = 9 #длительность производственного цикла фирмы 2  
p2 = 10.1 #себестоимость продукта у фирмы 2  
N = 30 #число потребителей производимого продукта  
q = 1; #максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени  
  
a1 = p\_cr/(tau1^2\*p1^2\*N\*q);  
a2 = p\_cr/(tau2^2\*p2^2\*N\*q);  
b = p\_cr/(tau1^2\*tau2^2\*p1^2\*p2^2\*N\*q);  
c1 = (p\_cr-p1)/(tau1\*p1);  
c2 = (p\_cr-p2)/(tau2\*p2);  
  
u0 = [5.4, 5.1] #начальные значения M1 и M2  
p = [a1, a2, b, c1, c2]  
tspan = (0.0, 30.0) #временной интервал

### 4.1.1 Случай 1

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы. В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.)

Зададим функцию, описывающую систему уравнений для этого случая:

function f(u, p, t)  
 M1, M2 = u  
 a1, a2, b, c1, c2 = p  
 M1 = M1 - (a1/c1)\*M1^2 - (b/c1)\*M1\*M2  
 M2 = (c2/c1)\*M2 - (a2/c1)\*M2^2 - (b/c1)\*M1\*M2  
 return [M1, M2]  
end

Далее решаем систему ДУ, сначала определив проблему с помощью метода ODEProblem(), а затем решим с помощью solve() солвером Tsit5() с шагом 0.01. Нарисуем график с помощью plot().

prob = ODEProblem(f, u0, tspan, p)  
sol = solve(prob, Tsit5(), saveat = 0.01)  
plot(sol, yaxis = "Оборотные средства предприятия", label = ["M1" "M2"], c = ["green" "purple"])

В результате получаем следующий график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой (рис. 1). По графику видно, что рост оборотных средств предприятий идет независимо друг от друга. В математической модели этот факт отражается в коэффициенте, стоящим перед членом : в рассматриваемой задаче он одинаковый в обоих уравнениях (). Это было обозначено в условиях задачи. Каждая фирма достигает свое максимальное значение объема продаж и остается на рынке с этим значением, то есть каждая фирма захватывает свою часть рынка потребителей, которая не изменяется.

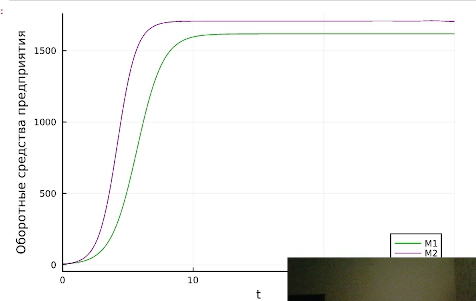


Рис. 1: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

### 4.1.2 Случай 2

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед будет отличаться.

Зададим функцию, описывающую систему уравнений для этого случая:

function f(u, p, t)  
 M1, M2 = u  
 a1, a2, b, c1, c2 = p  
 M1 = M1 - (a1/c1)\*M1^2 - (b/c1+0.00015)\*M1\*M2  
 M2 = (c2/c1)\*M2 - (a2/c1)\*M2^2 - (b/c1)\*M1\*M2  
 return [M1, M2]  
end

Далее решаем систему ДУ, сначала определив проблему с помощью метода ODEProblem(), а затем решим с помощью solve() солвером Tsit5() с шагом 0.01. Нарисуем график с помощью plot().

prob = ODEProblem(f, u0, tspan, p)  
sol = solve(prob, Tsit5(), saveat = 0.01)  
plot(sol, yaxis = "Оборотные средства предприятия", label = ["M1" "M2"], c = ["green" "purple"])

В результате получаем следующий график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой (рис. 2). По графику видно, что первая фирма, несмотря на начальный рост, достигнув своего максимального объема продаж, начитает нести убытки и, в итоге, терпит банкротство. Динамика роста объемов оборотных средств второй фирмы остается без изменения: достигнув максимального значения, остается на этом уровне.

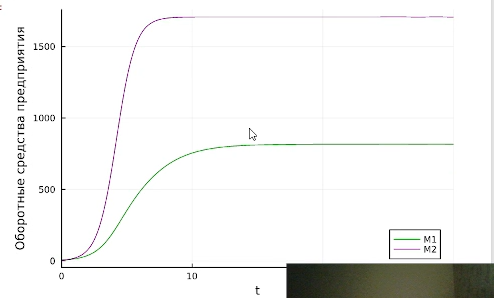


Рис. 2: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

Посмотрим на приближенный график (рис. 3).

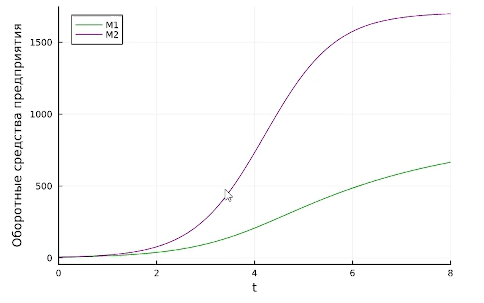


Рис. 3: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

## 4.2 Реализация на OpenModelica

### 4.2.1 Случай 1

Зададим параметры, начальные условия и систему уравнений.

parameter Real p\_cr = 27;  
 parameter Real tau1 = 8;   
 parameter Real p1 = 13;  
 parameter Real tau2 = 9;  
 parameter Real p2 = 10.1;   
 parameter Real N = 30;  
 parameter Real q = 1;  
 parameter Real a1 = p\_cr/(tau1^2\*p1^2\*N\*q);  
 parameter Real a2 = p\_cr/(tau2^2\*p2^2\*N\*q);  
 parameter Real b = p\_cr/(tau1^2\*tau2^2\*p1^2\*p2^2\*N\*q);   
 parameter Real c1 = (p\_cr-p1)/(tau1\*p1);  
 parameter Real c2 = (p\_cr-p2)/(tau2\*p2);  
   
 Real M1(start=5.4);  
 Real M2(start=5.1);  
   
equation  
  
 der(M1) = M1 - (a1/c1)\*M1^2 - (b/c1)\*M1\*M2;  
 der(M2) = (c2/c1)\*M2 - (a2/c1)\*M2^2 - (b/c1)\*M1\*M2;

Далее выполним симуляцию на временном интервале и с шагом дифференцирования, как при реализации на Julia. Получим следующий график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой (рис. 4). По графику видно, что рост оборотных средств предприятий идет независимо друг от друга. Каждая фирма достигает свое максимальное значение объема продаж и остается на рынке с этим значением, то есть каждая фирма захватывает свою часть рынка потребителей, которая не изменяется.

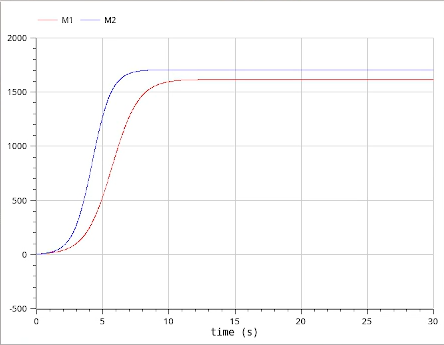


Рис. 4: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

### 4.2.2 Случай 2

Зададим параметры, начальные условия и систему уравнений.

parameter Real p\_cr = 27;  
 parameter Real tau1 = 8;   
 parameter Real p1 = 13;  
 parameter Real tau2 = 9;  
 parameter Real p2 = 10.1;   
 parameter Real N = 30;  
 parameter Real q = 1;  
 parameter Real a1 = p\_cr/(tau1^2\*p1^2\*N\*q);  
 parameter Real a2 = p\_cr/(tau2^2\*p2^2\*N\*q);  
 parameter Real b = p\_cr/(tau1^2\*tau2^2\*p1^2\*p2^2\*N\*q);   
 parameter Real c1 = (p\_cr-p1)/(tau1\*p1);  
 parameter Real c2 = (p\_cr-p2)/(tau2\*p2);  
   
 Real M1(start=5.4);  
 Real M2(start=5.1);  
   
equation  
  
 der(M1) = M1 - (a1/c1)\*M1^2 - (b/c1+0.00015)\*M1\*M2;  
 der(M2) = (c2/c1)\*M2 - (a2/c1)\*M2^2 - (b/c1)\*M1\*M2;

Далее выполним симуляцию на временном интервале и с шагом дифференцирования, как при реализации на Julia. Получим следующий график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой (рис. 5). По графику видно, что первая фирма, несмотря на начальный рост, достигнув своего максимального объема продаж, начитает нести убытки и, в итоге, терпит банкротство. Динамика роста объемов оборотных средств второй фирмы остается без изменения: достигнув максимального значения, остается на этом уровне.

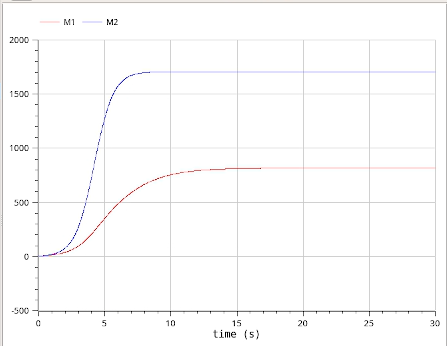


Рис. 5: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

Посмотрим на приближенный график (рис. 6).

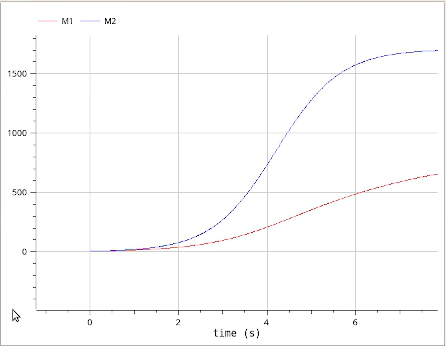


Рис. 6: График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2

## 4.3 Сравнение построения модели на Julia и в OpenModelica

Все графики получились идентичными. Что Julia, что OpenModelica справились с решением системы ДУ и построением графиков.

# 5 Выводы

В результате выполнения лабораторной работы была исследована модель конкуренции двух фирм.

# Список литературы