Ejercicios Tema 2. Conjuntos y Aplicaciones

Objetivos: Al terminar el tema el alumno debe ser capaz de:

1. Conocer las operaciones con conjuntos: complementario, unión, intersección y producto cartesiano.
2. Conocer las propiedades del álgebra de Boole definida en conjuntos.
3. Dada una correspondencia, reconocer si es o no aplicación.
4. Saber calcular la imagen directa y la imagen recíproca de un conjunto por una aplicación.
5. Saber si una aplicación es o no inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva.
6. Saber componer aplicaciones.

Ejercicios:

1. Describe los siguientes conjuntos, indicando todos sus elementos, y halla el cardinal de cada uno de ellos:

i) El conjunto de los enteros pares cuyo cuadrado es menor que 16.

ii) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x + 1 \leq 8\}$.

iii) El conjunto de los enteros positivos cuyo triple es menor que 24.

iv) El conjunto de las cadenas binarias de longitud menor o igual que 2.

v) El conjunto de soluciones reales de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

vi) El conjunto de soluciones enteras de la ecuación $(x - 1)(x - 1) = 0$.

2. Comprueba en los siguientes casos si $B \in A$ (B es un elemento de A), $B \subseteq A$ (B es un subconjunto de A), o ambos casos o ninguno:

i) $B = \{1\}$ y $A = \{1, 2, 3\}$

ii) $B = \{1\}$ y $A = \big\{\{1\}, \{2\}, 3\big\}$

iii) $B = \{1\}$ y $A = \big\{1, 2, \{1, 2\}\big\}$

iv) $B = \{1, 2\}$ y $A = \big\{1, 2, \{1, 2\}, 3\big\}$

v) $B = \{1\}$ y $A = \big\{\{1, 2\}, 3\big\}$

vi) $B = \{1, 2\}$ y $A = \big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\big\}$

3. Sea $A = \{x, y, \{x\}, \{z\}, \{y, z\}\}$. Justifica si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones:

i) $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$

ii) $y \in \mathcal{P}(A)$

iii) $\{\{y, z\}\} \in \mathcal{P}(A)$

iv) $\{\{x\}, \{y\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

v) $\{\{x\}, \{z\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

vi) $\{\{x, y\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

4. En el dominio $U = \mathbb{Z}$, se consideran los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$$A_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es múltiplo de } 3\}, \qquad A_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es múltiplo de } 4\},$$
$$A_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ divide a } 60\}.$$

Razona si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes:

i) $[20 \in A_2 \cap \overline{A_1}] \ \wedge \ [18 \in A_2 \setminus A_3]$

ii) $\{10, 4, 6\} \subseteq \overline{A_1 \cup \overline{A_3}}$

iii) $\exists x \ [\ x \in \overline{A_3} \cap (A_2 \cup A_1)]$

5. Dados los conjuntos:

$$U = \{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq n \leq 24\} \qquad B = \{n \in U \mid n \text{ es par}\}$$
$$A = \{n \in U \mid n \text{ es divisor de } 24\} \qquad C = \{n \in U \mid n \text{ es primo}\}$$

Determina los elementos de los siguientes conjuntos:

i) $A \cup B$

ii) $A \cap B \cap C$

iii) $\overline{A \cup B}$

iv) $\overline{A \cap B}$

v) $(A \cup B) \cap C$

vi) $C \setminus B$

6. Para $X = \{1, \{y, z\}, y, \emptyset\}$ e $Y = \{1, y, z\}$, determina los conjuntos siguientes:

i) $X \setminus \emptyset$

ii) $X \setminus \{\emptyset\}$

iii) $\{y, z\} \setminus X$

iv) $X \setminus \{\{y, z\}\}$

v) $X \cap Y$

vi) $\mathcal{P}(Y) \cap X$

7. Sean $A = \{\emptyset, \{a\}, b\}$ y $B = \{a, b\}$. Indica, razonadamente, si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes:

i) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(A)$

ii) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(B)$

iii) $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A)$

iv) $\{a, b\} \in \mathcal{P}(B)$

v) $\{\{a\}, \{b\}\} \in \mathcal{P}(A)$

vi) $\{\{a\}, \{b\}\} \in \mathcal{P}(B)$

8. Halla el número de subconjuntos de cardinal par del conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ que no tienen ni a b ni a c.

9. Para un universo U, sean $A, B \subseteq U$ tales que $|A \cup B| = 13$ y $|A \cap B| = 5$. Calcula el número de conjuntos C tales que $A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B$.

10. Sean A y B conjuntos con $B \subset A$, tales que $|A| = 52$ y $|B| = 23$.

i) Calcula el número de elementos de $\mathcal{P}(A \setminus B)$.

ii) Calcula el número de suconjuntos de A que contienen un único elemento de B.

11. Sean $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ y $C = \{1, 2, 5, 9, 10\}$. Justifica si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones:

$$(2,7) \in (A \cap B) \times C \qquad (2,8) \notin A \times (B \cup C) \qquad (5,7) \in (A \cup B) \times (B \cap C)$$

12. Sean $A, B, C \subseteq U$ conjuntos cualesquiera, demuestra que:

i) $A = B \iff (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) = U$.

ii) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$

iii) $A \subseteq C \iff A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

iv) Si A es el complementario de C, entonces $A \cup (B \cap C) = A \cup B$.

13. Sea A un conjunto no vacío cualquiera y sean $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$. Sabiendo que $\left(\mathcal{P}(A), \overline{}, \cup, \cap\right)$ tiene estructura de álgebra de Boole, utiliza mapas de Karnaugh para simplificar cada uno de los conjuntos siguientes:

i) $(X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y})$ ii) $\left[X \cup \overline{(Y \cup \overline{Z})}\right] \cap \overline{\left[\overline{X} \cap (\overline{Y} \cup \overline{Z})\right]}$

14. Sea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 9\}$. Da una partición de A formada por tres subconjuntos de A.

15. Comprueba si son o no inyectivas y/o sobreyectivas las siguientes aplicaciones:

i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(z) = z + 2$ para cada $z \in \mathbb{Z}$.

ii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(z) = 2z + 1$ para cada $z \in \mathbb{Z}$.

iii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(z) = 3z^2 + 2$ para cada $z \in \mathbb{Z}$.

iv) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x, y) = 2xy$ para cada $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

v) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x, y) = x(y - 2) + 1$ para cada $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

16. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ y $f : A \to B$ tal que $f(1) = f(2) = a$ y $f(3) = f(4) = c$. Calcula:

i) $f(\{1\})$ iv) $f(\{1, 2\})$ vii) $f^{-1}(\{a, c\})$

ii) $f(\{1, 3\})$ v) $f^{-1}(\{c\})$ viii) $f(\{1, 2, 3\})$

iii) $\mathrm{Im}(f)$ vi) $f^{-1}(\{b\})$ ix) $f^{-1}(B)$

17. Sea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ el conjunto de números naturales y sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la aplicación definida por $f(x, y) = 3x(y + 2)$, para cada $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Calcula $f(2, 5)$, $f^{-1}(\{18\})$ y $f^{-1}(\{4, 6\})$.

¿Es f una aplicación inyectiva? ¿Es sobreyectiva? Razona las respuestas.

18. Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$ conjuntos, y sea $f : A \to B$ una aplicación tal que $f(a) = 8, f(b) = 2$.

i) Calcula $f(c)$ y $f(d)$ de modo que f sea inyectiva y $c \in f^{-1}(\{4\})$.

ii) Estudia si f es sobreyectiva y biyectiva.

iii) Halla, si existe, la aplicación f^{-1}.

19. Define una aplicación inyectiva $f : \{a, b, c\} \to \{x, y, z, t\}$ que verifique todas las condiciones siguientes:

i) $\operatorname{Im} f \subseteq \{x, y, z\}$ ii) $a \in f^{-1}(\{x\})$ iii) $c \in f^{-1}(\{y, t\})$.

20. Define una aplicación $f : \{a, b, c, d\} \to \{x, y, z, t\}$ que verifique todas las condiciones siguientes:

i) $f(\{a, b\}) = \{x, y\}$

ii) $c \in f^{-1}(\{z\})$

iii) $a \notin f^{-1}(\{x, z\})$

iv) $f(\{c, d\}) = \{y, z\}$

¿Es f una aplicación sobreyectiva? Calcula $f^{-1}(\{x, z\})$.

21. Sean $A = \{a, b, c, d, e, k\}$, $B = \{d, e\}$ y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(A) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ X \quad &\rightsquigarrow \; f(X) = |X \cup B| \end{aligned}$$

Estudia si f una aplicación inyectiva y/o sobreyectiva. Calcula:

i) $f(\emptyset)$

ii) $f(\{a\})$

iii) $f(\{b, c\})$

iv) $f(C_1)$,
para $C_1 = \big\{\{a, d\}, \emptyset\big\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

v) $f(C_2)$,
para $C_2 = \big\{\{b\}, \{b, c\}\big\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

vi) $f^{-1}(Y_1)$, para $Y_1 = \{3\} \subseteq \mathbb{N}$

vii) $f^{-1}(Y_2)$, para $Y_2 = \{1\} \subseteq \mathbb{N}$

viii) $f^{-1}(Y_3)$, para $Y_3 = \{2, 6\} \subseteq \mathbb{N}$

22. **(a)** Sea $f : X \to Y$ una aplicación **inyectiva**. Decide si es **verdadera o falsa** cada una de las siguientes afirmaciones. Razona la respuesta.

- Todo elemento de X tiene una única imagen en Y.
- Todo elemento de Y es imagen de, al menos, un elemento de X.
- Todo elemento de Y es imagen de, a lo sumo, un elemento de X.

(b) Sean $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{a, e\}$. Considera $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ la aplicación definida por $f(X) = (X \cap B, X \cap \overline{B})$ para cada $X \in \mathcal{P}(A)$.

- Halla $f(\emptyset)$, $f(\{a, i, u\})$ y $f(A)$.
- Demuestra que f es inyectiva. ¿Es f sobreyectiva? ¿Por qué?