Tema 3

Combinatoria

> Recuerda que estas notas son, únicamente, parte del material de trabajo de los profesores de esta asignatura. Los contenidos de este tema se pueden ver en los capítulos 2, 3, 4 y 5 del libro:
>
> F. Aguado, F. Gago, M. Ladra, G. Pérez, C. Vidal, A. Vieites (2018).
> *Problemas resueltos de combinatoria. Laboratorio con SageMath.* Editorial Paraninfo.

La Combinatoria estudia las distintas formas de agrupar o seleccionar los elementos de un conjunto finito, calcula cuántas selecciones hay y, en ocasiones, las genera. El tipo de selección que se puede hacer depende de varios aspectos; por ejemplo, del número de elementos que se selecionan, de si influye o no el orden en la selección, de si un mismo elemento puede seleccionarse una o más veces o si deben seleccionarse todos los elementos disponibles. En este tema estudiaremos técnicas y procedimientos que permitan "contar" las configuraciones posibles pero sin enumerarlas directamente.

3.1 Técnicas básicas

Consideremos el siguiente ejemplo: Si una biblioteca dispone de 50 libros distintos sobre Lógica y 70 libros distintos sobre Combinatoria, un alumno puede elegir entre $120 = 50 + 70$ libros para consultar uno (solo uno) de esos temas. De la misma forma, si un restaurante italiano prepara 5 variedades de espaguetis, 6 de macarrones y 3 de lasaña, un cliente puede elegir entre $14 = 5+6+3$ platos de pasta para comer.

En general, si un suceso A puede ocurrir de m maneras distintas y otro suceso B puede ocurrir de k maneras, y no pueden ocurrir ambos simultáneamente, entonces el suceso "A o B" puede ocurrir de $m + k$ formas. Este hecho se extiende de la forma siguiente:

Proposición 1. (Principio de la suma) *Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos finitos tales que, para todo $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Entonces:*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

Demostración. Esta igualdad, que puede representarse de forma abreviada por $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$, se demuestra por inducción en n. $\square$

Podemos pensar que cada conjunto A_i está formado por las distintas maneras de realizar una tarea i ($i = 1, 2, \ldots, n$) y no se pueden realizar dos tareas simultáneamente. El principio de la suma dice que el número de formas de realizar alguna de esas n tareas es la suma de las maneras de realizar cada una de ellas.

Importante. Como consecuencia del principio anterior, para cualquier subconjunto $A \subseteq U$ se verifica $|U| = |A| + |\overline{A}|$, siendo $\overline{A}$ el complementario de A. Por lo tanto,

$$|A| = |U| - |\overline{A}|$$

Ejemplo 1. *Una empresa cuenta con una plantilla de* 150 *personas entre directivos, empleados de taller y encargados de limpieza. ¿Cuántos empleados de taller hay en la empresa si se sabe que hay* 14 *directivos y* 21 *encargados de limpieza?*

$\triangleright$ Aplicando el resultado anterior, el número de empleados de taller es $150 - (14 + 21) = 115$.

Proposición 2. (Principio del producto) *Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos finitos. Entonces:*

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ \ldots \ \cdot |A_n|$$

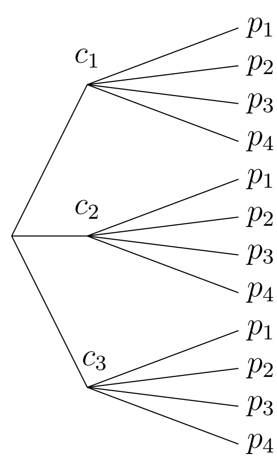
Demostración. La demostración de este resultado se realiza por inducción en n. $\square$

Ejemplo 2. *Una persona tiene en su armario* 7 *prendas de vestir todas ellas diferentes:* 3 *camisas y* 4 *pantalones. ¿De cuántas formas puede vestirse?*

$\triangleright$ Por el principio del producto, podrá vestirse de $3 \cdot 4 = 12$ formas distintas, ya que si $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ es el conjunto de camisas y $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ el de pantalones, las distintas formas de vertirse corresponden a los 12 los elementos del conjunto

$$C \times P = \{(c_1, p_1), (c_1, p_2), (c_1, p_3), (c_1, p_4), (c_2, p_1), (c_2, p_2), \ldots, (c_3, p_4)\}$$

El siguiente diagrama en árbol representa todos los casos posibles.



Ejemplo 3. *Se quiere diseñar un código para cada alumno de la Facultad utilizando letras (considerando las* 26 *del alfabeto, sin la ñ) y cifras (del* 0 *al* 9*), y se permite repetir las letras pero no las cifras.*

i) *¿Cuántos códigos diferentes se pueden hacer si deben estar formados por dos letras seguidas de cuatro cifras?*

   ▷ Aplicando el principio del producto, se pueden formar $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 676 \cdot 5040 = 3407040$ códigos distintos.

ii) *¿Cuántos códigos se pueden obtener si se permite que haya códigos formados solo con cuatro cifras, códigos con una sola letra seguida de cuatro cifras, y códigos con dos letras seguidas de cuatro cifras?*

   ▷ Siguiendo el razonamiento anterior, hay $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ códigos sin letras, $26 \cdot 5040 = 131040$ códigos con una sola letra y 3407040 códigos con dos letras y cuatro cifras. En total, aplicando el principio de la suma, tenemos $5040 + 131040 + 3407040 = 3543120$ casos posibles.

Podemos pensar en el principio del producto de la siguiente forma. Una gran tarea se puede dividir en n etapas o subtareas sucesivas, cada conjunto A_i está constituido por las distintas formas de realizar la etapa i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Siempre que se cumpla que modificar la forma en que se realiza una etapa cualquiera modifica la forma de realizar la tarea total, el principio del producto dice que el número de formas de realizar la tarea principal es el producto de las formas de realizar cada una de las etapas.

Por último, vamos a enunciar el **Principio de distribución** o **Principio del cajón de Dirichlet** también conocido como el **Principio del palomar** pues este principio dice, en su versión más simple y clásica, que si queremos colocar m palomas en n palomares, con $m > n$, al menos un palomar debe contener 2 o más palomas.

Proposición 3. (Principio de distribución) *Sean n y p dos números enteros positivos. Si se reparten más de np objetos en n cajas, alguna caja debe contener al menos $p+1$ objetos (más de p objetos).*

Obsérvese que si cada caja contiene p o menos objetos, el número total de objetos repartidos en las n cajas será menor o igual que np, lo que contradice la hipótesis.

Así, si queremos colocar m objetos en n cajas, con $m > n$, al menos una caja debe contener dos o más objetos, esto es, no puede existir un aplicación inyectiva de un conjunto de m elementos en un conjunto de n elementos, cuando $m > n$.

Ejemplo 4. *Tenemos que pintar* 64 *bicicletas con* 7 *colores distintos. Demuestra que hemos de pintar al menos* 10 *del mismo color.*

▷ Se aplica el principio de distribución con $n = 7$ (colores), $p = 9$ y $m = 1$, ya que hay $7 \cdot 9 + 1 = 64$ objetos.

Ejemplo 5. *Si se escogen seis números distintos cualesquiera del* 1 *al* 10*, por lo menos dos de estos números suman* 11*.*

$\triangleright$ Consideremos las cinco "cajas" $\{1, 10\}$, $\{2, 9\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 7\}$ y $\{5, 6\}$. Asociemos a cada número la caja que lo contiene. Puesto que hay cinco cajas y seis números, habrá dos números en la misma caja, lo cual implica que suman 11.

3.2 Variaciones, Permutaciones y Combinaciones

Contaremos las diferentes colecciones que se pueden formar, según una ley dada (repitiendo o no los elementos, teniendo en cuenta o no el orden), con los elementos de un conjunto finito.

3.2.1 Variaciones

Sea n un número natural no nulo; se define el **factorial** de n, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Además, $0! = 1$.

Para todo natural $n \geq 1$, se verifica que $n! = n \cdot (n-1)!$

Definición 1. *Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto finito de n elementos y r un número natural menor o igual que n. Una* **variación** *(ordinaria o sin repetición) de orden r de los n elementos de A es una selección o lista ordenada de r elementos distintos de A.*

Dos variaciones son distintas si se diferencian en algún elemento o en la posición de alguno de estos en la variación. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 123 y 124 son variaciones de orden tres diferentes, también 123 y 321.

Teorema 1. *El número de variaciones de un conjunto de n elementos de orden r es*

$$V(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-(r-2)) \cdot (n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Demostración. Aplicación del principio del producto: Para el primer elemento de la selección se elige uno de los n elementos de A; para la segunda posición, y teniendo en cuenta que los elementos no pueden repetirse, se escoge uno de los $n-1$ elementos restantes, y así sucesivamente. $\square$

Ejemplo 6. *¿De cuántas formas se pueden clasificar los tres atletas del equipo universitario entre las cinco primeras posiciones de la prueba de 1.500 metros lisos?*

$$V(5, 3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

$$\underset{5\text{ casos}}{\_}\quad \underset{4\text{ casos}}{\_}\quad \underset{3\text{ casos}}{\_}$$

Nota 1. *Una variación de orden r de los elementos de A es una aplicación inyectiva de $\{1, 2, \ldots, r\}$ en A, siendo $f(1)$ el primer elemento de la selección, $f(2)$ el segundo y así sucesivamente. Por ejemplo, si consideramos el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $r = 3$, la variación "ebc" viene dada por la aplicación $f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{a, b, c, d, e\}$ definida por $f(1) = e, f(2) = b$ y $f(3) = c$.*

En general, el número de aplicaciones inyectivas de un conjunto de cardinal r a un conjunto de cardinal n, con $r \leq n$, es $n(n-1)(n-2)\cdot \cdots \cdot (n-(r-2))(n-(r-1)) = V(n,r)$.

Ejemplo 7. *Disponemos de siete despachos individuales libres y queremos asignar cuatro de ellos a cuatro nuevos empleados. ¿De cuántas formas se puede realizar la asignación?*

$\triangleright$ En este caso hay que definir una aplicación del conjunto de los cuatro empleados al conjunto de los siete despachos, y esta aplicación ha de ser inyectiva ya que no se puede asignar un despacho a más de una persona. Hay $V(7,4) = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840$ posibles asignaciones.

Ejemplo 8. *El consejo directivo de una empresa farmacéutica tiene* 10 *miembros de los cuales tres son médicos. Se va a elegir presidente, vicepresidente, secretario y tesorero del consejo.*

i) ¿De cuántas formas se pueden elegir si se quiere que lo presida un médico?

ii) Idem si queremos que haya exactamente un médico entre los elegidos.

iii) Idem si se quiere que haya al menos un médico entre los cuatro.

i) Para presidente tenemos 3 candidatos. Para los otros tres puestos, podemos elegir a cualquiera que no sea el presidente (son 9), así en total tenemos $3\cdot V(9,3) = 3\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 1512$ posibilidades.

ii) Supongamos que el médico es el presidente. Tenemos 3 candidatos para ese puesto. Para los otros tres puestos hay 7 candidatos (todos los miembros del consejo que no son médicos), lo que nos da un total de $3\cdot V(7,3) = 3\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 630$ comisiones presididas por un médico. Para los otros tres puestos el razonamiento es similar, y la respuesta es $4\cdot 630 = 2520$.

iii) Restaremos a las posibilidades totales ($V(10,4) = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040$) las posibilidades que tenemos de elegir los cuatro puestos sin ningún médico que serán $V(7,4) = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840$. Nos quedan pues $5040 - 840 = 4200$ formas de elegir los candidatos garantizando que al menos uno de ellos es un médico.

3.2.2 Variaciones con repetición

Definición 2. *Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto finito de n elementos y r un número natural. Una* **variación con repetición** *de orden r de los n elementos de A es una selección o lista ordenada de r elementos, no necesariamente distintos, de A.*

Dos variaciones con repetición son distintas si se diferencian en el número de veces que aparece algún elemento de A o en la posición de estos en la variación. Por ejemplo, si $A = \{1,2,3,4\}$, son variaciones con repetición de orden tres diferentes 123 y 124, 123 y 321, 122 y 112, y 122 y 212.

En general, dos variaciones con o sin repetición de un conjunto A de orden r son distintas si en alguna de las r selecciones o posiciones los correspondientes elementos de A son diferentes.

Nota 2. *Análogo a la Nota 1: cualquier variación con repetición de orden r de los elementos de A es una aplicación de $\{1, 2, \dots, r\}$ en A. Aquí no se exige que la aplicación sea inyectiva, pues las imágenes (es decir, los elementos de la selección) pueden repetirse. Siguiendo con el ejemplo de la nota anterior, la variación con repetición "ccb" está dada por la aplicación*

$$f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{a, b, c, d, e\}$$

definida por $f(1) = c, f(2) = c$ y $f(3) = b$.

Teorema 2. *El número de variaciones con repetición de un conjunto de n elementos de orden r es $VR(n, r) = n^r$.*

Demostración. Al poder repetir los elementos, en cada una de las elecciones tenemos disponibles los n elementos, por lo que el principio del producto garantiza el resultado. □

Ejemplo 9. *¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos* 1, 3, 5, 7 *y* 9*?*

$$VR(5, 3) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

_ _ _

5 casos 5 casos 5 casos

Ejemplo 10. *¿De cuántas maneras se pueden distribuir* 8 *bolas diferentes en cinco cajas de distinto color?*

▷ Se trata de contar el número de aplicaciones del conjunto de las 8 bolas al conjunto de las 5 cajas, que es $VR(5, 8) = 5^8 = 390625$.

3.2.3 Permutaciones

Definición 3. *Sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto finito de n elementos. Una* **permutación** *del conjunto A es una aplicación biyectiva de A en A. El conjunto de las permutaciones de A se representa por S_A.*

Ejemplo 11. *¿Cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar con los dígitos* 1, 3, 5, 7 *y* 9*?*

▷ Como son cinco dígitos distintos, el resultado es $5! = 120$.

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

_ _ _ _ _

5 casos 4 casos 3 casos 2 casos 1 caso

Teorema 3. *El número de permutaciones de un conjunto de n elementos es*

$$P(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Ejemplo 12. *Un grupo de peregrinos está formado por 10 italianos y 8 argentinos. Cuando llegan al albergue tienen que formar una fila para coger habitación. ¿De cuántas formas se pueden colocar en la fila de modo que no se separen los peregrinos de la misma nacionalidad?*

▷ Hay dos opciones, primero el grupo de italianos y a continuación el grupo de argentinos, o al revés. Además, los peregrinos italianos entre sí se pueden ordenar de $P(10) = 10!$ formas distintas y los argentinos de $P(8) = 8!$ formas. El resultado final es $2 \cdot P(10) \cdot P(8)$.

Las permutaciones de un conjunto A también se pueden definir como las posibles reordenaciones de los n elementos de A; es decir, como aplicaciones inyectivas (en este caso también biyectivas) del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ en A o variaciones de n elementos de orden n, $V(n, n) = n! = P(n)$.

3.2.4 Permutaciones con repetición

Estudiemos el caso de las permutaciones permitiendo la repetición de los elementos. Sabemos que hay 8! formas de ordenar las letras de "COMPUTER". Si consideramos las letras de la palabra "CAJA", está claro que no son $4! = 24$ posibles ordenaciones ya que las dos A juegan el mismo papel. De hecho, solo hay 12 ordenaciones posibles. De forma similar, las posibles ordenaciones de las letras de "ARRABAL" no son $7! = 5040$, solo son 420.

Consideremos n objetos, distribuidos en r tipos o clases distintas. Los objetos de un mismo tipo son iguales entre sí, pero diferentes de los de cualquier otro tipo. Hay n_1 objetos del tipo 1, n_2 objetos del tipo 2 y, sucesivamente, n_r objetos del tipo r; así $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$. Las distintas permutaciones que se pueden hacer en estas condiciones reciben el nombre de **permutaciones con repetición** de n objetos con n_1, $n_2, \ldots$, n_r repeticiones y su número es

$$PR(n; n_1, n_2, \ldots, n_r) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}$$

con $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$.

Demostración. Por el principio del producto, de cada una de las permutaciones con repetición se obtienen $n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!$ permutaciones usuales, una por cada posible ordenación de los n_i objetos de cada tipo, si los consideramos distintos. Por tanto,

$$PR(n; n_1, n_2, \ldots, n_r) \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \ \ldots \ \cdot n_r! = n! = P(n).$$

Despejando se obtiene la expresión. □

Ejemplo 13.

i) *¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de la palabra ABRACADABRA?*

▷ Como hay 5 Aes, 2 Bes, 2 erres, una C y una D, tenemos

$$PR(11; 5, 2, 2, 1, 1) = \frac{11!}{5!\, 2!\, 2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 = 83160$$

posibles ordenaciones.

ii) ¿En cuántas figuran cuatro Aes juntas (exactamente cuatro)?

▷ Formamos un bloque con cuatro Aes y ordenamos primero 2 erres, 2 Bes, la otra A, una D y una C, lo cual puede hacerse de

$$PR(7;2,2,1,1,1) = \frac{7!}{2!\,2!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4} = 1260$$

formas. Por otro lado, el bloque de Aes que tenemos podemos colocarlo en cualquiera de las seis posiciones que no se corresponden con la anterior y la posterior a la A[1], para que no queden las cinco Aes juntas. Así, la respuesta es:

$$6\cdot 1260 = 7560 \textit{ colocaciones posibles.}$$

iii) ¿En cuántas figura cada B seguida de al menos 2 Aes?

▷ Formamos dos bloques BAA, BAA. Quedan 2 erres, una C, una D, una A y dos bloques. Por lo tanto, tenemos

$$\frac{7!}{2!\,2!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4} = 1260 \textit{ posibilidades.}$$

Ejemplo 14. *Para trasladarnos de un punto A(0,0) hasta un punto B(5,4) podemos movernos únicamente de izquierda a derecha y de abajo a arriba. ¿De cuántas maneras podemos ir desde A hasta B?*

▷ Una posible ruta sería DDDDDAAAA (se corresponde con bordear el rectángulo). Cualquier ruta es una cadena de 9 elementos con 5 Des y 4 Aes. Así, la solución es:

$$PR(9;5,4) = \frac{9!}{5!\,4!}$$

3.2.5 Combinaciones

Supongamos que entre cuatro alumnos, Antón, Brais, Carlos y Diego, queremos elegir una comisión de tres para asistir a una reunión. La comisión formada por Antón, Brais y Carlos es la misma que la formada por Carlos, Antón y Brais. El orden no importa, lo que importa es estar o no en la comisión, ¿cuántas comisiones se pueden formar? Otro ejemplo usual de selecciones en las que no importa el orden es el de las manos en un juego de cartas.

Definición 4. *Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto finito de n elementos y sea r un número natural menor o igual que n. Una* **combinación** *(ordinaria o sin repetición) de orden r de los n elementos de A es un subconjunto (selección no ordenada) de r elementos distintos de A.*

Dos combinaciones son diferentes si difieren en alguno de sus elementos.

[1]Si la ordenación fuese $ABBRRCD$, podemos situarlo en lugar de cualquiera de los $\square$, es decir $AB\square B\square R\square R\square C\square D\square$.

Teorema 4. *El número de combinaciones de orden r de un conjunto de n elementos es*

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

Demostración. De cada una de las $C(n,r)$ posibles combinaciones se obtienen $P(r) = r!$ variaciones distintas; las posibles ordenaciones de los r elementos seleccionados. Por el principio del producto

$$C(n,r)\cdot r! = V(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

despejando se obtiene la expresión. □

El número anterior se llama número combinatorio

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

Propiedad 1. *Sean n, r enteros tales que $0 \le r \le n$, se verifica*

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r},$$

Ejemplo 15. *Un estudiante debe realizar un examen de MD con diez preguntas de las que debe contestar siete. ¿Cuántos tipos diferentes de examen puede corregir el profesor? Si debe contestar tres de entre las cinco primeras y cuatro de entre las cinco últimas, ¿cuántos tipos posibles de examen hay en este caso? Lo mismo si en las especificaciones previas se dice que debe contestar al menos tres de entre las cinco primeras preguntas.*

▷ En el primer caso son $\binom{10}{7} = 120$, en el segundo $\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{4} = 10\cdot 5 = 50$ y, en el tercero, $\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{4} + \binom{5}{4}\cdot\binom{5}{3} + \binom{5}{5}\cdot\binom{5}{2} = 50 + 50 + 10 = 110.$

Ejemplo 16. *Elena quiere escoger cinco cartas de una baraja de póker (13 de cada palo: picas, tréboles, diamantes y corazones) ¿De cuántas formas puede hacerlo si quiere escoger al menos un trébol?*

▷ Tiene $\binom{52}{5} = 2598960$ formas de escoger las cinco cartas. De estas, las que no le interesan son aquellas en las que no hay tréboles que son $\binom{39}{5} = 575757$. Luego, la respuesta es $2598960 - 575757 = 2023203$ posibles selecciones.

Ejemplo 17. *Un gimnasio abre todos los días de la semana y cada socio acude al menos tres días por semana. ¿Cuál es el mínimo número de socios que debe tener para garantizar que al menos dos de ellos coinciden los mismos días?*

▷ Cada socio puede acudir 3, 4, 5, 6 o todos los días de la semana, lo que nos da un total de

$$\sum_{k=3}^{7}\binom{7}{k}=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}-\sum_{k=0}^{2}\binom{7}{k}=2^7-\sum_{k=0}^{2}\binom{7}{k}=128-1-7-21=99$$

posibles selecciones de los días de la semana que acude cada socio. Si hay 100 socios, al menos dos coinciden los mismos días.

3.2.6 Combinaciones con repetición

En una heladería disponen de 4 sabores (fresa, nata, vainilla y chocolate) para un helado. ¿De cuántas formas se pueden elegir 10 helados? En este caso, importa el número de helados de cada sabor y no el orden en que se piden, por ello se trata de combinaciones pero es obvio que hemos de repetir sabor ya que n (4) es menor que r (10).

Definición 5. *Sea $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ un conjunto finito de n elementos y sea r un número natural cualquiera. Una* **combinación con repetición** *de orden r de los n elementos de A es una selección no ordenada de r elementos, no necesariamente distintos, de A.*

Dos combinaciones con repetición de orden r son distintas si el número de apariciones de algún elemento de A en las selecciones es diferente. Por ejemplo, si $A=\{1,2,3,4\}$, son combinaciones con repetición de orden tres diferentes: $\{1,2,3\}$ y $\{1,2,4\}$, $\{1,2,2\}$ y $\{1,1,2\}$[2]. Sin embargo, son la misma combinación $\{1,2,3\}$ y $\{1,3,2\}$, al igual que $\{2,1,2\}$ y $\{2,2,1\}$.

Teorema 5. *El número de combinaciones con repetición de un conjunto de n elementos de orden r es*

$$CR(n,r)=C(n+r-1,r)=\binom{n+r-1}{r}=\binom{n+r-1}{n-1}.$$

Antes de demostrar este resultado consideremos de nuevo el ejemplo inicial. Si denotamos por f el helado de fresa, n el de nata, v el de vainilla y c el de chocolate, la petición de cuatro helados de fresa, dos de nata, uno de vainilla y tres de chocolate se puede representar de la forma

$$f\,f\,f\,f\,n\,n\,v\,c\,c\,c,$$

(que coincide, obviamente, con la peticiones $f\,f\,n\,v\,f\,f\,c\,n\,c\,c$ y $f\,c\,c\,n\,c\,f\,n\,v\,f\,f$, aunque no aparezcan representados juntos los helados del mismo sabor). Esta representación se puede identificar con la secuencia

$$1\,1\,1\,1\,\big|\,1\,1\,\big|\,1\,\big|\,1\,1\,1,$$

que corresponde a la solución $(4,2,1,3)$ de la ecuación $x_1+x_2+x_3+x_4=10$ donde x_i, para $i=1,2,3,4$, denota el número de helados que se piden de fresa, nata, vainilla y chocolate, respectivamente. Otras posibles peticiones vienen representadas en la siguiente tabla:

[2] Para indicar que no importa el orden de los elementos, representamos entre llaves los elementos que forman una combinación con repetición, pero no debemos confundir con la notación de conjuntos, en estos no se pueden repetir los elementos.

petición	representación	(x_1, x_2, x_3, x_4)
$f\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,c\,c$	$1 \mid 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \mid \; \mid 1\,1$	$(1, 7, 0, 2)$
$n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,n\,c$	$\mid 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \mid \; \mid 1$	$(0, 9, 0, 1)$
$f\,f\,f\,v\,v\,v\,v\,v\,v\,c$	$1\,1\,1 \mid \; \mid 1\,1\,1\,1\,1\,1 \mid 1$	$(3, 0, 6, 1)$

Demostración. Cada combinación con repetición de orden r de los elementos de A se corresponde con una solución de

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r,$$

siendo x_i el número de veces que elegimos el elemento i-ésimo. Así pues, estamos considerando únicamente soluciones $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $x_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \geq 0$, para cada i. Por otro lado, cada solución no negativa $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de la ecuación anterior se corresponde con una cadena de r unos y $n-1$ barras distribuidos como:

$$\overbrace{1\ldots1}^{x_1} \mid \overbrace{1\ldots1}^{x_2} \mid \cdots \mid \overbrace{1\ldots1}^{x_n}$$

Por lo tanto, buscamos el número de formas de colocar $n-1$ barras en $n+r-1$ posiciones[3]. Ese número es $\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}$. □

Ejemplo 18. *¿De cuántas formas se pueden colocar* 12 *bolas en cinco recipientes si a) cada bola es de un color diferente, b) todas las bolas son iguales?*

▷ Si los objetos son todos diferentes, para cada objeto tenemos 5 elecciones posibles (los cinco recipientes), luego hay 5^{12} posibilidades; son cadenas ordenadas de longitud 12 formadas con 1, 2, 3, 4 y 5, es decir $VR(5, 12)$.

Si las bolas son iguales, lo que interesa es saber cuántas bolas habrá en cada recipiente, es decir, el número de soluciones enteras no negativas ($x_i \geq 0$) de

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 12,$$

que es $CR(5, 12) = \binom{16}{12} = \binom{16}{4} = 1820.$

Ejemplo 19. *¿De cuántas formas se pueden elegir* 11 *helados entre cinco sabores si queremos que haya al menos un helado de cada sabor?*

▷ Empezamos sirviendo cinco helados, uno de cada sabor[4]. Quedan por servir 6 helados con 5 sabores, lo cual equivale a encontrar las soluciones enteras no negativas de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 - 5 = 6,$$

[3]Pensemos, por ejemplo, en $n = 3$ y $r = 5$. La solución $1 + 2 + 2 = 5$ se corresponde con la combinación $a_1a_2a_2a_3a_3$ y con la cadena $1 \mid 11 \mid 11$. A su vez, la cadena $111 \mid 1 \mid 1$ se corresponde con la solución $3 + 1 + 1 = 5$ y con la combinación $a_1a_1a_1a_2a_3$. ¿Con qué cadenas se corresponden las combinaciones $a_1a_1a_1a_1a_1$ y $a_2a_2a_3a_3a_3$?

[4]Es como introducir una bola en cada caja para que ninguna quede vacía.

que son

$$CR(5,6) = \binom{10}{6} = \binom{10}{4} = 210.$$

El siguiente cuadro resume las fórmulas para las agrupaciones vistas

r objetos entre n	**Ordenadas**	**No Ordenadas**
Sin repetición	$V(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$	$C(n,r) = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
Con repetición	$VR(n,r) = n^r$	$CR(n,r) = \binom{n-1+r}{r}$

3.3 Binomios y Multinomios

Teorema 6. Binomio de Newton. *Sean x, y dos variables y n un número natural, se tiene que*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$$

Demostración.

$$(x+y)^n = (x+y)\cdot(x+y)\cdot \overset{n}{\ldots} \cdot (x+y)$$

Para cada valor de k, $0 \leq k \leq n$, el coeficiente de $x^k \cdot y^{n-k}$ coincide con el número de formas de seleccionar la variable x en k de los n factores (seleccionando la variable y en los $n-k$ restantes) sin importar el orden ni repetir factor. Esto es, puede realizarse de $C(n,k) = \binom{n}{k}$ formas. Por tanto

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$$

La segunda igualdad se tiene porque $(x+y)^n = (y+x)^n$. □

Corolario 1. *Se verifican las igualdades*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad y \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Demostración. Basta tomar en el teorema anterior $x = y = 1$ en la primera igualdad, y $x = 1$ y $y = -1$ en la segunda. Recordemos que 2^n es el número de subconjuntos de un conjunto de cardinal n y $\binom{n}{k}$ es el número de subconjuntos de cardinal k, para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. □

Ejemplo 20. *Casos particulares son las fórmulas*

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2;\\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3;\\
(x+y)^7 &= \sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}x^k y^{7-k} =\\
&= \binom{7}{0}x^7+\binom{7}{1}x^6y+\binom{7}{2}x^5y^2+\binom{7}{3}x^4y^3+\\
&+ \binom{7}{4}x^3y^4+\binom{7}{5}x^2y^5+\binom{7}{6}xy^6+\binom{7}{7}y^7 =\\
&= x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6+y^7.
\end{aligned}$$

Ejemplo 21. *Halla el coeficiente de x^9y^3 en $(2x-3y)^{12}$. ¿Cuál es la suma de todos los coeficientes?*

▷ Según acabamos de ver

$$(2x-3y)^{12} = \sum_{i=0}^{12}\binom{12}{i}(2x)^i(-3y)^{12-i} = \sum_{i=0}^{12}\binom{12}{i}2^i(-3)^{12-i}x^iy^{12-i}$$

Por lo tanto, el coeficiente que nos piden es el que aparece en el sumando correspondiente a $i=9$:

$$\tbinom{12}{9}2^9(-3)^3x^9y^3 = 220\cdot 512\cdot(-27)\,x^9y^3 = -3041280\,x^9y^3$$

Por otro lado, la suma de los coeficientes se obtiene tomando $x=y=1$ en $(2x-3y)^{12}$. Así resulta:

$$\sum_{i=0}^{12}\binom{12}{i}2^i(-3)^{12-i} = (-1)^{12} = 1.$$

Teorema 7. Multinomio de Leibniz. *Sean x_1, x_2,..., x_k variables y sea n un número natural.*

$$(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n = \sum_{n_1+\ldots+n_k=n} PR(n;n_1,n_2,\ldots,n_k)\; x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdot\ \ldots\ \cdot x_k^{n_k}$$

siendo n_1, n_2,..., n_k números enteros no negativos.

Demostración.

$$(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n = (x_1+x_2+\ldots+x_k)\cdot(x_1+x_2+\ldots+x_k)\cdot \overset{n}{\ldots}\cdot(x_1+x_2+\ldots+x_k)$$

El coeficiente de $x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdot\ \ldots\ \cdot x_k^{n_k}$ coincide con el número de formas de seleccionar en los n factores, n_1 veces la variable x_1, n_2 veces la variable x_2, y sucesivamente hasta n_k veces la variable x_k. Esto se puede realizar de $PR(n;n_1,n_2,\ldots,n_k) = \dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ \ldots\ \cdot n_k!}$ formas, obteniéndose la expresión. □

Ejemplo 22.

$$(x+y+z)^{10} = \sum_{r+s+t=10} PR(10; r, s, t)\ x^r y^s z^t = \sum_{r+s+t=10} \frac{10!}{r!\ s!\ t!} x^r y^s z^t$$

Ejemplo 23. *Halla el coeficiente de $w^3x^2yz^2$ en $(2w - x + 3y - 2z)^8$. ¿Cuál es la suma de todos los coeficientes?*

$\triangleright$ Según acabamos de ver

$$(2w - x + 3y - 2z)^8 = \sum_{i+j+k+r=8} \frac{8!}{i!\, j!\, k!\, r!} (2w)^i(-x)^j(3y)^k(-2z)^r$$

Por lo tanto, el coeficiente que nos piden aparece en el sumando correspondiente a $i = 3$, $j = 2$, $k = 1$ y $r = 2$:

$$\frac{8!}{3!\,2!\,1!\,2!}(2w)^3(-x)^2(3y)^1(-2z)^2 = 161280\, w^3x^2yz^2.$$

Por otro lado, la suma de los coeficientes

$$\sum_{i+j+k+r=8} \frac{8!}{i!\, j!\, k!\, r!}\, 2^i(-1)^j 3^k(-2)^r$$

se obtiene tomando $w = x = y = z = 1$ en $(2w - x + 3y - 2z)^8$, es decir

$$\sum_{i+j+k+r=8} \frac{8!}{i!\, j!\, k!\, r!}\, 2^i(-1)^j 3^k(-2)^r = (2-1+3-2)^8 = 2^8 = 256.$$

3.4 Principio de inclusión-exclusión

En su forma más simple, el principio dice que si A y B son dos conjuntos finitos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

En efecto, los elementos que pertenecen a ambos conjuntos se cuentan dos veces, una en el cardinal de A y otra en el cardinal de B. Para evitar esto, se resta el número de elementos de $A \cap B$. Para el caso de tres conjuntos A, B y C el principio es

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) + |A \cap B \cap C|.$$

Veamos la generalización de estas fórmulas para obtener el cardinal de una unión finita de conjuntos. Sea S un conjunto finito y sean $P_1, P_2, \ldots, P_n$ propiedades sobre los elementos de S. Se definen los subconjuntos S_i de S

$$S_i = \{x \in S \ \mid\ x \text{ verifica la propiedad } P_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

El conjunto

$$\bigcup_{i=1}^{n} S_i = \{x \in S \ \mid \ x \text{ verifica alguna propiedad } P_i\};$$

y el conjunto

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{S_i} = \{x \in S \ \mid \ x \text{ no verifica ninguna propiedad } P_i\}$$

son uno el complementario del otro: $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} S_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{S_i}$.

Teorema 8.

i)

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{S_i}\right| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |S_i| + \sum_{1\leq i<j\leq n} |S_i \cap S_j| + \ldots + (-1)^n |S_1 \cap \ldots \cap S_n| =$$

$$= |S| + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \ldots \cap S_{i_k}| .$$

ii)

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |S_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |S_i \cap S_j| + \ldots + (-1)^{n-1} |S_1 \cap \ldots \cap S_n| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \ldots \cap S_{i_k}| .$$

Demostración. Nótese que ambas son equivalentes ya que

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{S_i}\right| = |S| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right|$$

Para probar la primera igualdad tomemos cualquier elemento $x \in S$ y veamos que x se "cuenta" tantas veces a la izquierda de la igualdad como a la derecha. Distinguimos dos casos:

- x no satisface ninguna de las propiedades P_i, es decir $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \overline{S_i}$ y contribuye con un 1 en la parte izquierda. Por otro lado, $x \in S$ pero $x \notin S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}$, para todos $i_1 < \cdots < i_k$ y para todo k. Luego x también se cuenta una vez en el segundo miembro de la igualdad.

- x satisface m de las n propiedades ($m \leq n$), es decir x pertenece a m de los n conjuntos S_i. Como x no pertenece a $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{S_i}$, x contribuye con 0 en la parte de la izquierda de la igualdad.

  En la parte derecha x contribuye 1 en $|S|$, con m en el sumando $\sum_{i=1}^{n} |S_i|$, una vez en cada conjunto al que pertenece. En general, para cada natural k, $1 \leq k \leq m$, x pertenece a $\binom{m}{k}$ intersecciones del tipo $S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}$, las posibles combinaciones de orden k de los m conjuntos. Para valores de k mayores que m, x no pertenece a ninguna de las intersecciones. Por todo ello, x contribuye con

$$1 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = (1 + (-1))^m = 0.$$

en la parte derecha de la igualdad.

□

Para $n = 4$, las expresiones obtenidas en el teorema anterior son:

$$\begin{aligned}
\left|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3} \cap \overline{S_4}\right| = {} & |S| \\
& - \big(|S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4|\big) \\
& + \big(|S_1 \cap S_2| + |S_1 \cap S_3| + |S_1 \cap S_4| + |S_2 \cap S_3| + |S_2 \cap S_4| + |S_3 \cap S_4|\big) \\
& - \big(|S_1 \cap S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_4| + |S_1 \cap S_3 \cap S_4| + |S_2 \cap S_3 \cap S_4|\big) \\
& + |S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4| \\
|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| = {} & \big(|S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4|\big) \\
& - \big(|S_1 \cap S_2| + |S_1 \cap S_3| + |S_1 \cap S_4| + |S_2 \cap S_3| + |S_2 \cap S_4| + |S_3 \cap S_4|\big) \\
& + \big(|S_1 \cap S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_4| + |S_1 \cap S_3 \cap S_4| + |S_2 \cap S_3 \cap S_4|\big) \\
& - |S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4|
\end{aligned}$$

Ejemplo 24. *¿De cuántas formas se pueden repartir* 12 *bolas distintas en cinco cajas de manera que ninguna caja quede vacía?*

▷ Llamemos S al conjunto de maneras de repartir 12 bolas distintas en cinco cajas distintas. Es claro que el cardinal de S es 5^{12}. Si ahora

$$S_i = \{x \in S \ | \ \text{la caja } i \text{ queda vacía}\} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

nos piden el cardinal de

$$\bigcap_{i=1}^{5} \overline{S_i} = \{x \in S \ | \ \text{ ninguna caja queda vacía}\}$$

En primer lugar, $|S_i| = 4^{12}$ ya que se trata de repartir 12 bolas distintas en 4 cajas (todas menos la i-ésima). Análogamente, $|S_i \cap S_j| = 3^{12}$ pues se calcula las formas de repartir las 12 bolas en 3 cajas (todas menos la i-ésima y la j-ésima), $|S_i \cap S_j \cap S_k| = 2^{12}$, $|S_i \cap S_j \cap S_k \cap S_r| = 1$ y $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5 = \emptyset$. Resumiendo, quedan

$$\left|\bigcap_{i=1}^{5} \overline{S_i}\right| = 5^{12} - 5 \cdot 4^{12} + 10 \cdot 3^{12} - 10 \cdot 2^{12} + 5 = 165528000$$

formas de repartir 12 bolas en cinco cajas sin que ninguna quede vacía.

Podemos interpretar cada uno de los repartos de este ejemplo como una aplicación sobreyectiva del conjunto de las 12 bolas al conjunto de las 5 cajas, el hecho de que ninguna caja quede vacía se corresponde con la condición de sobreyectiva. Este ejemplo se generaliza a continuación.

Ejemplo 25. *¿Cuántas aplicaciones sobreyectivas se pueden definir del conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ de m elementos en el conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ de n elementos?*

▷ Llamemos S al conjunto de aplicaciones de A en B y

$$S_i = \{f : A \to B \mid b_i \notin Im(f)\} \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Entonces

$$\overline{S_i} = \{f : A \to B \mid b_i \in Im(f)\} \quad \text{y}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{S_i} = \{f : A \to B \mid b_1, b_2, \ldots, b_n \in Im(f)\} = \{f : A \to B \mid f \text{ es sobreyectiva }\}$$

Razonando como en el ejemplo anterior, se obtiene que el número buscado es

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{S_i}\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

Ejemplo 26. *Una madre quiere repartir* 11 *pasteles iguales entre sus cuatro hijos de manera que cada uno reciba al menos un pastel y no más de tres, ¿cuántas posibilidades tiene para hacerlo?*

▷ Se trata de calcular el número de soluciones de la ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11 \quad \text{con } 1 \leq x_i \leq 3.$$

Comenzamos dándole a cada niño un pastel[5], con lo que ahora tenemos que resolver

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11 - 4 = 7 \quad \text{donde } 0 \leq y_i \leq 2.$$

Llamemos S al conjunto de soluciones con $y_i \geq 0$, para todo i. Sabemos que $|S| = \binom{10}{7} = 120$. Si ahora cada

$$S_i = \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in S \mid y_i \geq 3\}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

nos queda $|S_i| = CR(4, 4) = \binom{7}{4} = 35$, $|S_i \cap S_j| = CR(4, 1) = \binom{4}{1} = 4$. Teniendo en cuenta que

$$\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3} \cap \overline{S_4} = \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \mid y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7, \ \ 0 \leq y_1, y_2, y_3, y_4 \leq 2\}$$

la madre puede repartir los pasteles de

$$|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3} \cap \overline{S_4}| = \binom{10}{7} - 4 \cdot \binom{7}{4} + 6 \cdot \binom{4}{1} = 120 - 4 \cdot 35 + 6 \cdot 4 = 144 - 140 = 4$$

formas (se corresponden con $2+3+3+3 = 3+2+3+3 = 3+3+2+3 = 3+3+3+2 = 11$).

[5]Es decir, haciendo el cambio de variable $y_i = x_i - 1$.

Desórdenes

Un desorden es una permutación de un conjunto finito en la cual ningún elemento es la imagen de sí mismo; en otras palabras, una permutación que no deja a ningún elemento en su posición original.

Supongamos que 5 personas dejan sus abrigos en el guardarropa de un restaurante. ¿De cuántas formas se le pueden devolver los abrigos si se sabe que ninguno de ellos recibirá el suyo?
Consideremos los conjuntos $S = \{\text{formas de ordenar 5 abrigos}\}$ y, para cada $i = 1, 2, 3, 4, 5$
$S_i = \{x \in S \mid \text{la persona } i\text{-ésima recibe su abrigo}\}$, lo que queremos calcular es el cardinal de

$$\bigcap_{i=1}^{5} \overline{S_i} = |S| + \sum_{k=1}^{5} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le 5} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}|.$$

Es claro que $|S| = 5!$, $|S_i| = 4!$ y, en general, $|S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}| = (5-k)!$, para cada $1 \le k \le 5$. Así que la respuesta es:

$$5! - 5 \cdot 4! + \binom{5}{2} \cdot 3! - \binom{5}{3} \cdot 2! + \binom{5}{4} \cdot 1! - 1 = 120 - 120 + 60 - 20 + 5 - 1 = 44.$$

Generalizando el razonamiento anterior, el número de desórdenes de un conjunto de n elementos es:

$$d(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Ejemplo 27. *Supongamos que cinco personas dejan su abrigo y su paraguas en el guardarropa. ¿De cuántas formas se le pueden devolver las prendas si cada una de ellas no recibe ni su abrigo ni su paraguas? ¿Y si cada una no recibe alguna de las dos prendas?*

▷ En el primer caso, tenemos $d(5) = 44$ formas de desordenar 5 paraguas y $d(5)$ formas de desordenar 5 abrigos, lo que hacen un total de $d(5) \cdot d(5) = 44 \cdot 44 = 1936$.

En el segundo caso, queremos que cada persona reciba o bien un paraguas, o bien un abrigo, que no sean los suyos. Sea entonces S el conjunto de formas de repartir los 5 paraguas y los 5 abrigos y, para cada i, denotemos

$$S_i = \{x \in S \mid \text{la persona } i \text{ recibe su abrigo y su paraguas}\},$$

$$\overline{S_i} = \{x \in S \mid \text{la persona } i \text{ no recibe su abrigo o no recibe su paraguas}\}$$

y lo que debemos hallar el cardinal de $\bigcap_{i=1}^{5} \overline{S_i}$.

Ahora bien, $|S| = 5! \cdot 5!$ y, para cada $1 \le k \le 5$, si consideramos $S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}$, vemos que está formado por todas las maneras de repartir los abrigos y los paraguas de modo que las personas $i_1, i_2, \ldots, i_k$ reciban sus dos prendas, por lo que, se trata de contar las formas de repartir los $5-k$ abrigos y los $5-k$ paraguas. Por lo tanto, el cardinal pedido es

$$\bigcap_{i=1}^{5} \overline{S_i} = \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \cdot \binom{5}{k} \cdot (5-k)! \cdot (5-k)! =$$

$$= 5! \cdot 5! - 5 \cdot 4! \cdot 4! + \binom{5}{2} \cdot 3! \cdot 3! - \binom{5}{3} \cdot 2! \cdot 2! + \binom{5}{4} \cdot 1! \cdot 1! - 1 = 11844.$$