Gestión de Infraestructuras
Tema 1: Representación en el dominio temporal
Ejercicios

1. **Resumen:**

Constante $x(t) = A$

Escalón unidad $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$

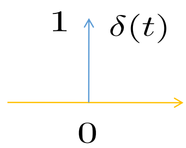
Pulso rectangular $p_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

Señal signo $\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$

Señal rampa $r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$

Exponencial unilateral $x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-at} & t > 0 \end{cases}$

Delta de Dirac



Cosenos $x(t) = A\cos(2\pi f t + \phi)$

$$\begin{aligned} x(t - t_0) &= A\cos(\omega(t - t_0)) \\ &= A\cos(\omega t - \omega t_0) \\ &= A\cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

$$\phi = -\omega t_0 = -2\pi \frac{t_0}{T_0}$$

Sinc $x(t) = \mathrm{sinc}(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$

2. **Ejercicio de clase:**

   Demuestre que la señal senoidal $x(t) = A\cos(2\pi ft + \phi)$ es periódica de periodo $T = 1/f$.

   Resultados:

   Una señal es periódica con periodo T cuando $x(t) = x(t - T)$.

   Determinamos $x(t - T) = A\cos(2\pi f(t - T) + \phi) = A\cos(2\pi ft - 2\pi fT + \phi)$.

   Como $f = 1/T$, obtenemos $x(t - T) = A\cos(2\pi ft - 2\pi + \phi)$.

   Utilizando $cos(\alpha \pm 2\pi) = cos(\alpha)$, permite transformar la expresión anterior en $x(t - T) = A\cos(2\pi ft + \phi)$, que es igual a $x(t)$.

3. **Ejercicio de clase:**

   Determine el desfase de $x(t) = A\cos(2\pi ft)$ para los retardos $t_0 = T/4$, $t_0 = -T/4$, $t_0 = T/2$ y $t_0 = -T/2$.

   Resultados: $\phi = -90°$, $\phi = 90°$, $\phi = -180°$ y $\phi = 180°$.

   Desarrollo:

   Partimos de la expresión de una señal coseno con retardo t_0:

$$x(t - t_0) = A\cos(\omega(t - t_0)) = Acos(\omega t - \omega t_0) = A\cos(\omega t + \phi)$$

   Es decir, un desplazamiento en el tiempo t_0 se traduce en una fase $\phi = -\omega t_0 = -2\pi f t_0 = -2\pi\frac{t_0}{T}$.
   Para $t_0 = T/4$, obtenemos $\phi = -2\pi\frac{t_0}{T} = -2\pi\frac{T}{4T} = -\frac{\pi}{2}$ rad. Lo que equivale a $\phi = \frac{-\pi 180°}{2\pi} = -90°$.
   Para $t_0 = -T/4$, obtenemos $\phi = -2\pi\frac{t_0}{T} = 2\pi\frac{T}{4T} = \frac{\pi}{2}$ rad. Lo que equivale a $\phi = \frac{\pi 180°}{2\pi} = 90°$.
   Para $t_0 = T/2$, obtenemos $\phi = -2\pi\frac{t_0}{T} = -2\pi\frac{T}{2T} = -\pi$ rad. Lo que equivale a $\phi = \frac{-\pi 180°}{\pi} = -180°$.
   Para $t_0 = -T/2$, obtenemos $\phi = -2\pi\frac{t_0}{T} = 2\pi\frac{T}{2T} = \pi$ rad. Lo que equivale a $\phi = \frac{\pi 180°}{\pi} = 180°$.

4. **Ejercicio de clase:**

   Considere la señal senoidal $x(t) = 170\cos(120\pi t - 60°)$

   a) Determine la amplitud de $x(t)$.

   b) Determine la frecuencia en Hz y en rad/s.

   c) Determine el periodo en ms.

   d) Determine la fase en grados y en radianes.

   e) Determine el desplazamiento de la señal en tiempo.

   f) Dibuje $x(t)$ entre $t = 0$ ms y $t = 50$ ms.

   <u>Resultados:</u>

   a) $A = 170$;

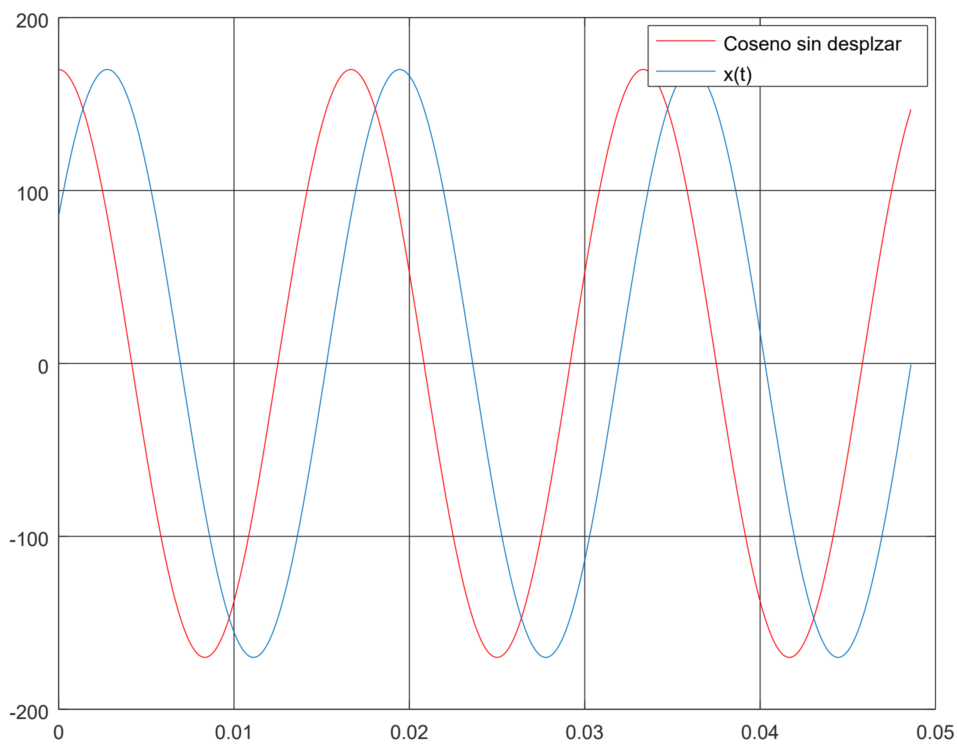
   b) $f = 60$ Hz y $\omega = 120\pi$ rad/s

   c) $T = 16,66$ ms;

   d) $\phi = -60^o$ y $\phi = -\pi/3$;

   e) $t_0 = 2.77$ ms.

   f)



Desarrollo:

Partimos de la ecuación general de una señal senoidal,

$$x(t) = A\cos(2\pi f t + \phi)$$

a) *Como sabemos que la señal coseno tiene amplitud 1, la señal $x(t)$ tendrá amplitud $A = 170$.*

b) *Comparando la expresión general con la que nos dan en el problema, es inmediato obtener que $f = 60$ Hz. Además, $\omega = 2\pi f = 2\pi 60 = 120\pi$ rad/s. Realmente, el valor de ω se podría haber deducido directamente de la expresión general.*

c) *El periodo es la inversa de la frecuencia, $T = 1/f = 1/60 = 0.016667 = 16.667$ ms.*

d) *La fase, expresada en grados, se obtiene directamente de la expresión: $\phi = -60^o$.*

La fase en rad se obtiene como $\phi = \frac{\pi}{180^o}\phi = \frac{\pi}{180^o}(-60^o) = -\frac{\pi}{3}$ rad.

e) *Para determinar el desplazamiento hay que recordar que un desplazamiento en tiempo equivale a un cambio de fase. La expresión es $\phi = -2\pi f t_0$ donde la fase está expresada en rad. En nuestro caso, $t_0 = \frac{\frac{\pi}{3}}{120\pi} = \frac{1}{360} = 0.0027778 = 2.77$ ms. Observemos que una fase negativa da como resultado $t_0 > 0$, por lo que el desplazamiento es hacia la derecha, $t_0 = 2.77$ ms.*

f) *Para dibujar la señal, podemos dibujar primero el coseno sin desplazar y después desplazarlo a la derecha.*

5. **Ejercicio:**

Una señal senoidal tiene una amplitud de 20 y un periodo de 1 ms. Su valor en el instante $t = 0$ es de 10.

a) Determine la frecuencia en Hz y en rad/s.

b) Determine la representación trigonométrica. Exprese la fase ϕ en grados.

<u>Resultados:</u>

a) $f = 1$ kHz y $\omega = 2000\pi$ rad/s

b) $x(t) = 20\cos(2000\pi t \pm 60°)$

<u>Desarrollo:</u>

La expresión general de una señal senoidal es $x(t) = A\cos(2\pi f t + \phi)$

a*) Dado que el periodo es* $T = 1$ *ms, la frecuencia será* $f = 1/T = 1000$ *Hz y* $\omega = 2\pi f = 2000\pi$ *rad/s.*

b*) Del enunciado sabemos que* $A = 20$ *y antes hemos calculado* $f = 2000$ *Hz. Para calcularla, evaluamos la expresión general en* $t = 0$ *y resulta*

$$x(0) = 20\cos(\phi)$$

Por otro lado, el enunciado indica que $t = 0$ *vale* $x(0) = 10$*. Igualando, tenemos*

$$10 = 20\cos(\phi)$$

Despejando, obtenemos $\cos(\phi) = 1/2$ *que equivale a* $\phi = \pm 60^o$*. Dado que la señal coseno es simétrica, podemos tomar desplazamiento hacia la izquierda o hacia la derecha. Por ejemplo, si tomamos un desplazamiento hacia la izquieda (es decir,* $t_0 < 0$*), la fase sería positiva. Esto quiere decir que* $\phi = 60^0$*.*

Sustituyendo todos los valores en la expresión general, obtenemos

$$x(t) = 20\cos(120\pi f t + 60^o)$$

.

6. **Ejercicio:**

   Considere la señal senoidal $x(t) = 300\cos(120\pi t + 30°)$.

   a) Determine la frecuencia en Hz.

   b) Determine el periodo.

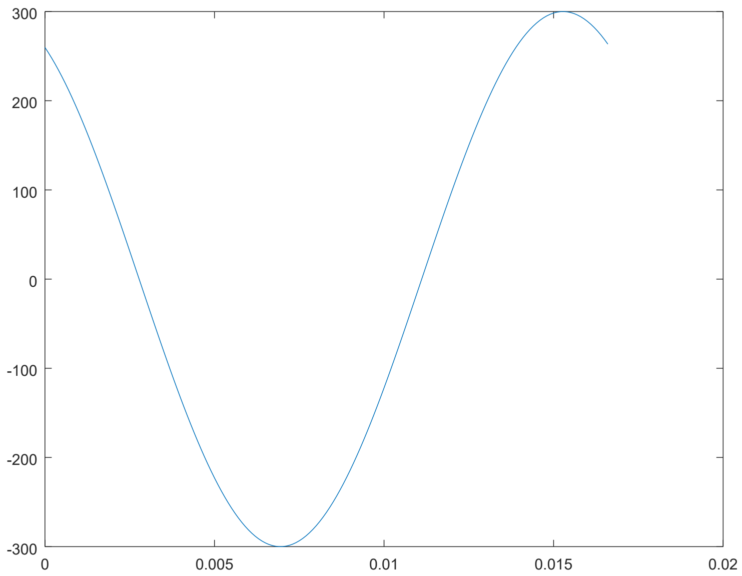
   c) Dibuje un ciclo de la señal senoidal.

   d) Exprese la señal $x(t)$ en función de la señal seno.

   Resultados:

   a) $f = 60$ Hz;

   b) $T = \frac{1}{60}$ s;

   c) 

   d) $x(t) = 300\,\text{sen}(120\pi t + 120°)$.

   Desarrollo:

   La expresión general de una señal senoidal es $x(t) = A\cos(2\pi f t + \phi)$

   a) *Comparando la expresión de $x(t)$ con la general, obtemos $A = 300$.*

   b) *El periodo es $T = 1/f = 1/60$ s.*

   c) *Para dibujar la señal, primero podemos dibujar el coseno sin desplazar y después desplazarlo $t_0 = -\frac{\phi}{2\pi f} = -\frac{\pi/6}{-120\pi} = -1.399$ ms.*

   d) *Dado que $cos(\alpha) = sen(\alpha + \pi/2)$, obtenemos $x(t) = 300\cos(120\pi t + 30^o + 90^o) = 300 sen(120\pi t + 120^o)$.*

7. **Ejercicio con ordenador:**

Utilizando Octave, represente las siguientes señales superponiendo la señal en tiempo continuo (rojo) y la señal en tiempo discreto (azul). Para definir señales en tiempo discreto, considere un paso de tamaño 1 (por ejemplo, $n = -10 : 10$) y para señales "en tiempo continuo" utilice un paso más pequeño (por ejemplo, $t = -10 : 0.01 : 10$).

a) Escalón: $x(t) = 2u(t)$ y $x(n) = 2u(n)$.

b) Pulso:

$$p(t) = \begin{cases} A & 0 < t < T \\ 0 & resto \end{cases} \quad p(n) = \begin{cases} A & 0 \leq n < N \\ 0 & N \leq n \end{cases} \quad \text{con } T = N = 4; A = 3.$$

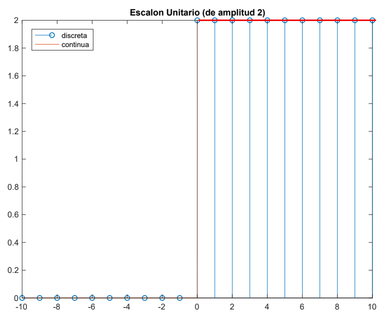
c) Señal rampa: $r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases} \quad r(n) = \begin{cases} 0 & n \leq 0 \\ n & n > 0 \end{cases}$

d) Exponencial unilateral: $x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-at} & t > 0 \end{cases} \quad x(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ e^{-an} & n \geq 0 \end{cases}$

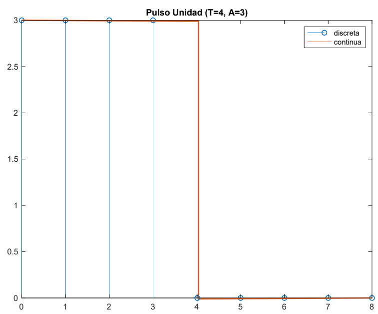
con $a = 1$ y $a = -1$.

<u>Resultados:</u>

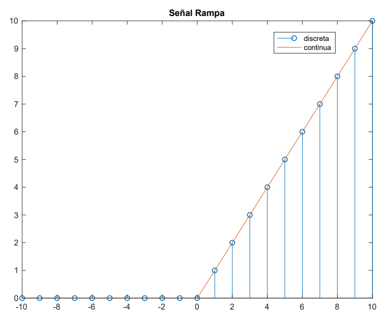
(a)



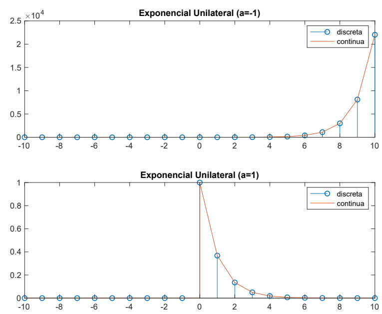
(b)



(c)



(d)



8. **Ejercicio con ordenador:**

   Utilizando Octave, represente las siguientes señales superponiendo la señal en tiempo continuo (rojo) y la señal en tiempo discreto (azul).

   a) $x(t) = \cos(2\pi ft)$ y $x(n) = \cos(2\pi fn)$ con $f = 20$ Hz con

   $$t = 0 : 0.001 : 0.1; n = 0 : 0.001 : 0.1$$

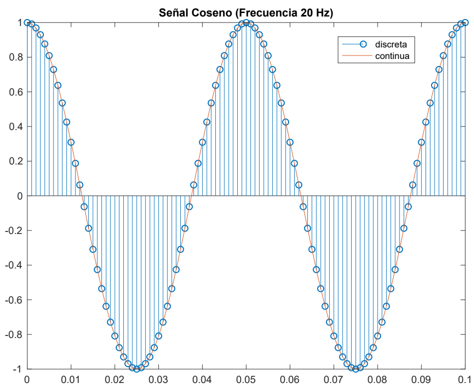
   b) $x(t) = sinc(t) = \frac{sen(\pi t)}{\pi t}$ y $x(n) = sinc(n) = \frac{sen(\pi n)}{\pi n}$ con

   $$t = -10 : 0.1 : 10; n = -10 : 0.1 : 10.$$

   Recuerde que debe calcular y asignar en valor $x(0) = sinc(0)$.

   <u>Resultados:</u>

(a)



(b)