TEORÍA DE LA COMPUTACIÓN

Grado en Ingeniería Informática - 2017/18

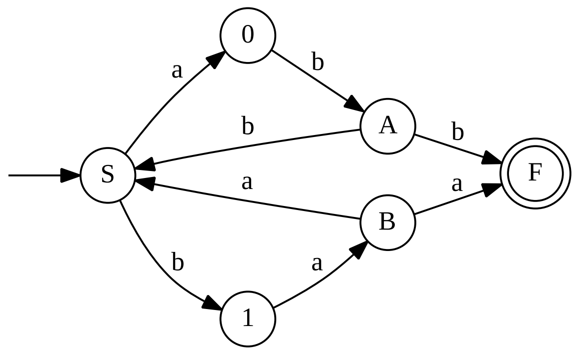
Control nº 2

Apellidos:	**Nombre**:	**DNI**:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	
Calificación:								

1. (1 punto) Construya un autómata finito que acepte el lenguaje generado por la siguiente gramática:

$$S \to abA \mid baB$$
$$A \to bS \mid b$$
$$B \to aS \mid a$$



2. (1 punto) Pase a forma normal de Chomsky la gramática del ejercicio anterior.

$$S \to C_aD_1 \mid C_bD_2$$
$$D_1 \to C_bA$$
$$D_2 \to C_aB$$
$$A \to C_bS \mid b$$
$$B \to C_aS \mid a$$
$$C_a \to a$$
$$C_b \to b$$

3. (1 punto) Demuestre que los lenguajes independientes del contexto son cerrados para la operación de unión.

Sean L_1 y L_2 dos lenguajes independientes del contexto generados por las gramáticas $G_1 = (N_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$ y $G_2 = (N_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$, respectivamente.

Siempre podemos construir una nueva gramática $G = (N, \Sigma, P, S)$, tal que $L(G) = L_1 \cup L_2$, como sigue:

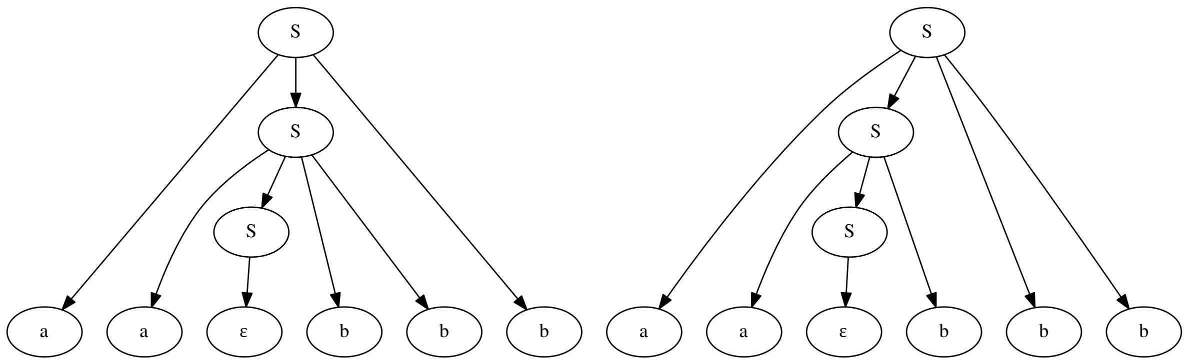
$$N = N_1 \cup N_2 \cup \{S\} \qquad \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \qquad P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\} \qquad S = S$$

4. (2 puntos) Escriba una gramática que genere el lenguaje $\{a^i b^j \mid i \leq j \leq 2i\}$. Dicha gramática, ¿es ambigua? Demuéstrelo.

Una posible gramática es la siguiente:

$$S \to aSb \mid aSbb \mid \epsilon$$

Esta gramática es ambigua. Se puede observar, por ejemplo, que la cadena *aabbb* tiene dos árboles de derivación:



5. (2 puntos) Demuestre mediante el lema del bombeo, o mediante cualquier otro método formal que conozca, que el siguiente lenguaje no es independiente del contexto:

$$L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^* \text{ y } \#a\text{es} = \#b\text{es} = \#c\text{es, sin importar el orden}\}$$

Supongamos que L es un LIC y sea k su constante asociada según el lema del bombeo. Tomemos entonces una cadena $z \in L$ tal que $|z| \geq k$, por ejemplo, $z = a^k b^k c^k$.

Si L es un LIC, z puede descomponerse en $uvwxy$, con las restricciones $|vwx| \leq k$ y $|v| + |x| > 0$, y cualquier bombeo uv^iwx^i debería estar en L, $\forall i \geq 0$.

Las posibles descomposiciones de z en $uvwxy$, tales que $|vwx| \leq k$, son:

- La porción vwx está compuesta sólo por $a$es. En este caso, cualquier bombeo $i \geq 2$, produce cadenas con más $a$es que $b$es y $c$es, y que por tanto no pertenecen a L.
- La porción vwx está compuesta sólo por $b$es. En este caso, cualquier bombeo $i \geq 2$, produce cadenas con más $b$es que $a$es y $c$es, y que por tanto no pertenecen a L.
- La porción vwx está compuesta sólo por $c$es. En este caso, cualquier bombeo $i \geq 2$, produce cadenas con más $c$es que $a$es y $b$es, y que por tanto no pertenecen a L.
- La porción vwx está compuesta por $a$es y por $b$es. La mezcla de símbolos estaría permitida, pero cualquier bombeo $i \geq 2$ aumentaría el número de $a$es y $b$es, podría ser incluso en el mismo número, aunque no estaría garantizado, pero, en todo caso, no el de $c$es, produciendo cadenas que no estarían en L.
- La porción vwx está compuesta por $b$es y por $c$es. Nuevamente, la mezcla de símbolos estaría permitida, pero cualquier bombeo $i \geq 2$ aumentaría el número de $b$es y $c$es, podría ser incluso en el mismo número, aunque no estaría garantizado, pero, en todo caso, no el de $a$es, produciendo cadenas que no estarían en L.
- Ninguna otra descomposición es posible.

Tras analizar todos los casos de descomposición de z y, en todos ellos, detectar al menos un bombeo que produce cadenas fuera de L, se puede concluir que L no es un LIC.

Otra forma de demostrar lo mismo es hacer uso de este teorema:

> Si L_1 es un LIC y L_2 es un lenguaje regular, entonces $L_1 \cap L_2$ es un LIC.

Si intersecamos nuestro lenguaje L del enunciado con el lenguaje regular $a^*b^*c^*$, obtenemos el lenguaje $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, el cual no es un LIC (lo hemos demostrado en clase mediante el lema del bombeo).

Es decir, si nuestro lenguaje L fuera un LIC, el resultado de la intersección debería serlo también y no lo es.

Por tanto, L no es un LIC.

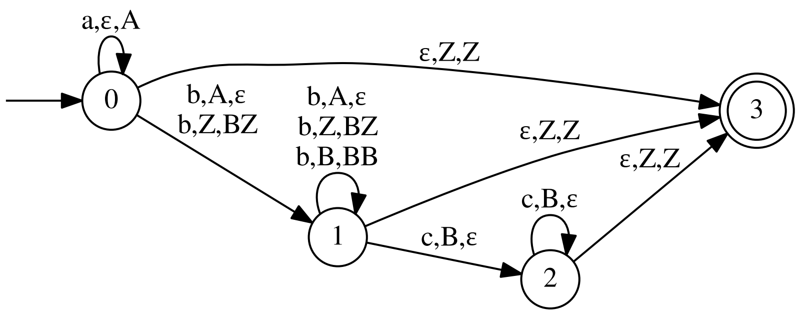
6. (1 punto) El lema del bombeo para lenguajes independientes del contexto (LIC,s) puede utilizarse para demostrar que un determinado lenguaje L no es un LIC. Uno de los pasos de la aplicación de dicho lema consiste en suponer que L sí es un LIC, y que por tanto existe una cierta constante k asociada a él. ¿Qué representa realmente esa constante k?

   La constante k de este lema del bombeo es 2^n, donde n es el número de símbolos no terminales de la gramática en forma normal de Chomsky que generaría L, en caso de que L fuera independiente del contexto.

7. (2 puntos) Construya un autómata de pila que acepte el siguiente lenguaje:

$$\{a^n b^{n+m} c^m \mid n, m \geq 0\}$$

   El autómata puede construirse directamente, o bien a partir de la gramática que genera dicho lenguaje.



   La otra forma de resolver el ejercicio es escribir una gramática que genere el lenguaje en cuestión, y construir el autómata de pila a partir de los símbolos y reglas de dicha gramática:

$$S \rightarrow AB$$
$$A \rightarrow aAb \mid \epsilon$$
$$B \rightarrow bBc \mid \epsilon$$