Ejercicios Tema 4. Relaciones y grafos

Objetivos: Al terminar el tema el alumno debe ser capaz de

1. Reconocer las relaciones en un conjunto y las relaciones de equivalencia.
2. Reconocer las relaciones de orden y sus elementos característicos.
3. Dibujar el diagrama de Hasse de conjuntos ordenados finitos.
4. Identificar los elementos distinguidos en un conjunto ordenado.
5. Reconocer los elementos característicos de un grafo.
6. Deducir propiedades de un grafo a partir de su matriz de adyacencia.
7. Reconocer si un grafo es conexo y detectar en él puntos corte y aristas de separación.
8. Reconocer si un grafo es euleriano o hamiltoniano.
9. Describir condiciones necesarias o suficientes para decidir si un grafo es euleriano o hamiltoniano.
10. Aplicar el algoritmo de Fleury para construir recorridos eulerianos.
11. Reconocer si un grafo es un árbol.
12. Aplicar el algoritmo de Prim para construir un árbol generador de peso mínimo de un grafo ponderado.

Ejercicios:

1. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y consideremos las relaciones siguientes definidas en A:

   - para $a, b \in A$, $\quad a\,\mathcal{R}\,b$ si y sólo si $a \cdot b = 6$;
   - para $a, b \in A$, $\quad a\,\mathcal{R}\,b$ si y sólo si $3a < 2b$.

   Para cada una de las relaciones anteriores se pide:

   (a) Escribe los pares que forman la relación $\mathcal{R}$ y estudia sus propiedades.

   (b) Calcula la relación recíproca $\mathcal{R}^{-1} = \{(a, b) \text{ tales que } (b, a) \in \mathcal{R}\}$.

   (c) Calcula la relación complementaria $\mathcal{R}^c = \{(a, b) \text{ tales que } (a, b) \notin \mathcal{R}\}$.

2. Prueba que la siguiente relación $\mathcal{R}$ definida en $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es de equivalencia y calcula las clases de equivalencia

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 4), (3, 2), (5, 5)\}.$$

3. Sea A un conjunto de cardinal n. ¿Cuántas relaciones binarias distintas se pueden definir en A? De ellas, ¿cuántas son reflexivas? ¿Cuántas son simétricas?

4. (a) Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. ¿Es posible definir una relación de equivalencia $\sim$ en A tal que $2 \sim 4$, $4 \sim 6$ y $6 \not\sim 2$? Razona la respuesta.

   (b) En el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ se define la relación de orden siguiente:

$$R = \{(x, x) \mid x \in X\} \cup \{(a, c), (c, d), (c, e), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$

   - Dibuja el diagrama de Hasse de (X, R).
   - Indica un conjunto $B \subseteq X$ tal que el mínimo de B sea c y B no tenga supremo.

5. Sea X el conjunto de todos los números naturales de dos cifras, es decir,

$$X = \{xy \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 9,\ 0 \leq y \leq 9\} = \{10, 11, 12, 13, \ldots, 98, 99\}.$$

   Se define en X la relación $\mathcal{R}$ siguiente: dados xy, $zt \in X$

$$xy \,\mathcal{R}\, zt \;\Leftrightarrow\; x - y = z - t$$

   (a) Prueba que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

   (b) ¿Cuántas clases de equivalencia hay? Razona tu respuesta.

   (c) Halla la partición que induce $\mathcal{R}$ en el conjunto

$$B = \{12, 52, 35, 61, 85, 24, 74, 83, 72\}$$

6. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3\} \subseteq A$. Se considera en $\mathcal{P}(A)$ la relación $\mathcal{R}$ definida por:

$$\text{dados } X, Y \in \mathcal{P}(A), \qquad X \,\mathcal{R}\, Y \;\Leftrightarrow\; X \cap B = Y \cap B$$

   Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y calcula el conjunto cociente $\mathcal{P}(A)/\mathcal{R}$.

7. Sea A un conjunto de proposiciones en el que no todas tienen el mismo valor de verdad. En A se define la relación $\mathbf{R}$ de la forma siguiente:

$$\forall p, q \in A, \quad p \,\mathbf{R}\, q \;\Leftrightarrow\; p \to \neg q \text{ es verdadero}$$

   Estudia si $\mathbf{R}$ es reflexiva, simétrica o transitiva.

8. **(a)** Sea $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los números enteros positivos. Demuestra que la relación $\mathbf{R_1}$ es una relación de equivalencia y que la relación $\mathbf{R_2}$ es una relación de orden:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^+ \;\; x\mathbf{R_1}y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = 2^k y$$

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^+ \;\; x\mathbf{R_2}y \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0, \text{ tal que } x = 2^n y$$

(b) Considera la relación $\mathbf{R_1}$ en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14\}$. Halla las clases de equivalencia y el cardinal del conjunto cociente $A/\mathbf{R_1}$.

(c) Considera la relación $\mathbf{R_2}$ en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$. Dibuja el diagrama de Hasse de $(A, \mathbf{R_2})$.

9. Sean A el conjunto de los enteros positivos divisores de 48 y $\mathcal{R}$ la relación en A:

$$a \, \mathcal{R} \, b \quad \Leftrightarrow \quad b \text{ es un múltiplo de } a.$$

   (a) Representa el diagrama de Hasse de $\mathcal{R}$ en A.

   (b) Halla los elementos destacados de B en los siguientes casos:
   $B_1 = \{4, 6, 24\}$ $\qquad\qquad$ $B_2 = \{3, 6, 12, 8, 16\}$

10. Se considera el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ordenado por la relación $\mathcal{R}$ cuyos pares son
$\mathcal{R} = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (6, 5), (7, 5), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (6, 1), (1, 7),$
$(6, 2), (6, 4), (6, 3), (6, 7), (2, 3), (4, 3), (4, 7)\} \cup \{(x, x) \mid x \in A\}$
Se pide:

   (a) Dibuja el diagrama de Hasse.

   (b) Calcula los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo de A.

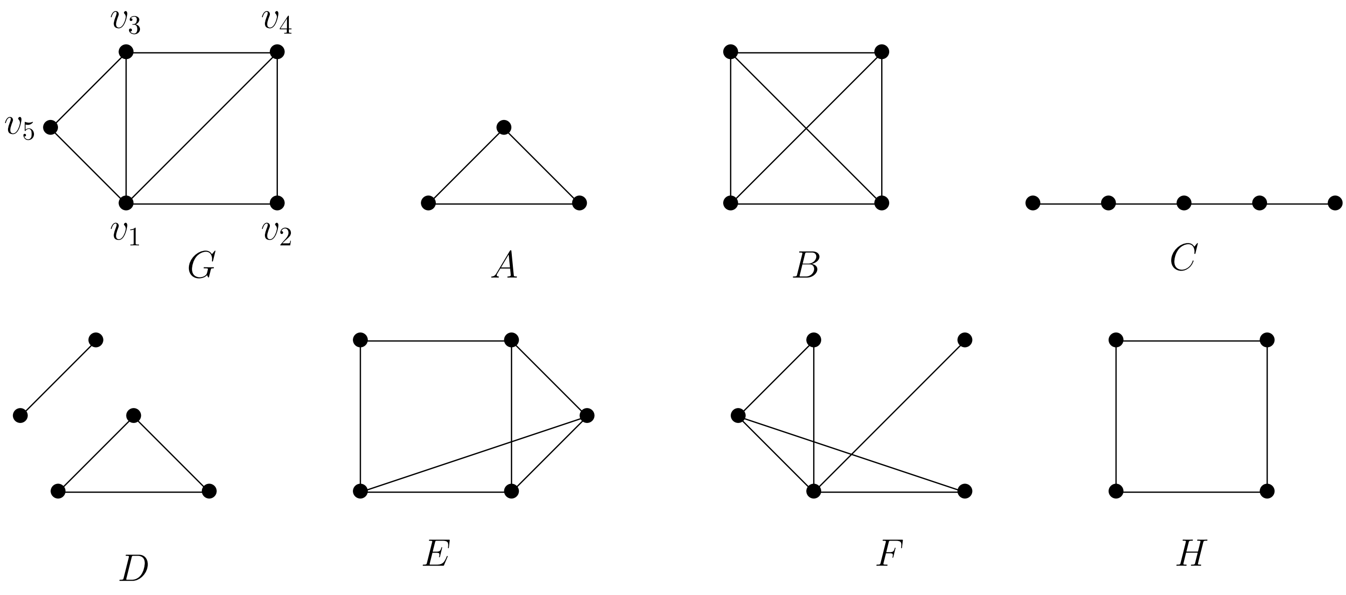
   (c) Calcula las cotas superiores, inferiores, supremo e ínfimo de $B = \{1, 3, 4, 7\}$ en A.

11. Sea $(B, +, \cdot, \overline{\ \ }, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ un álgebra de Boole. En el conjunto B se define la siguiente relación

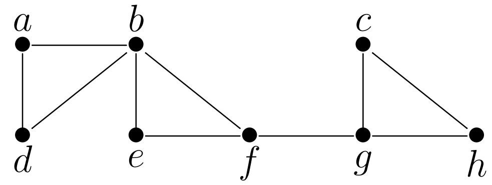
$$\forall a, b \in B \quad a \, \mathcal{R} \, b \; \Leftrightarrow \; a \cdot b = b$$

Aplicando propiedades del álgebra de Boole, comprueba que $\mathcal{R}$ es una relación de orden.

12. Indica cuáles de los grafos siguientes son subgrafos de G. Etiqueta sus vértices identificándolos con los correspondientes de G.



13. Consideremos el siguiente grafo:



(a) ¿Qué aristas inciden en f?

(b) ¿Qué vértices son adyacentes a b?

(c) Calcula el grado de cada uno de los vértices y la matriz de adyacencia.

(d) ¿Es un grafo conexo?

(e) ¿Posee alguna arista de separación?

(f) ¿Posee algún punto de corte?

(g) ¿Es euleriano? ¿Por qué? Busca un camino euleriano en el grafo.

14. Consideremos G el grafo con matriz de adyacencia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Calcula los caminos de longitud 3 desde v_1 a v_2.

(b) Justifica, a partir de A, si G es o no conexo.

15. Sea G un grafo con 41 vértices. Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones.

(a) Si G es conexo, ¿cuál sería el número mínimo de aristas de G?

(b) Si G tiene dos componentes conexas, ¿cuál sería el número mínimo de aristas de G?

(c) Si G es simple y conexo, ¿cuál sería el grado máximo de cada vértice de G?

(d) Si G es simple y conexo, ¿cuál sería el número máximo de aristas de G?

16. Calcula el número de aristas que tiene un grafo 4-regular de 12 vértices.

17. Sea G un grafo cualquiera con 7 vértices y 10 aristas. Se sabe que G tiene seis vértices de grado p y uno de grado q. Calcula p y q sabiendo que G es un grafo simple.

18. Teniendo en cuenta el número de aristas que tiene el grafo completo K_n, justifica si es posible construir un grafo simple con n vértices, $n \geq 1$, y $2n$ aristas.

19. Si G es un grafo simple de 66 aristas, ¿cuál es el número mínimo de vértices que ha de tener G?

20. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con 13 vértices. Halla el grado máximo que puede tener cualquier vértice de G. Razona la respuesta. ¿Puede existir un grafo $G = (V, E)$ simple con 13 vértices y 28 aristas de modo que, de los trece vértices, cuatro tengan grado 1 y siete grado 4? Razona la respuesta.

21. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple de 10 vértices donde el grado de cada vértice es al menos 5 y el número de aristas es múltiplo de 12. Demuestra que G es conexo y halla el número de aristas de G. Sabiendo que G es euleriano, halla el número de vértices de grado 6.

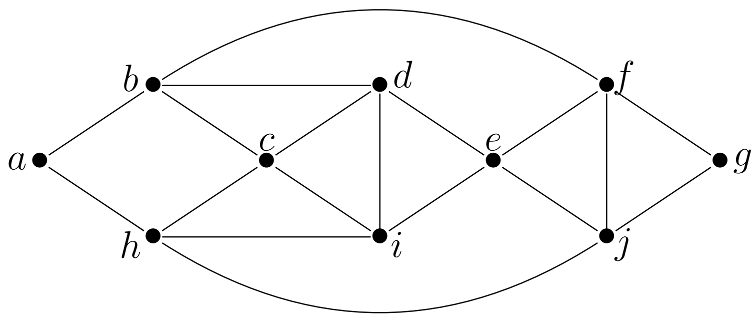
22. En un ayuntamiento hay que constituir siete comisiones que deben ajustarse a las reglas siguientes:

    (a) Todo concejal debe formar parte de dos comisiones (exactamente).

    (b) Dos comisiones cualesquiera tienen un único concejal en común.

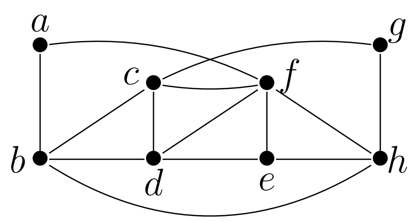
    ¿Cuántos concejales debe tener el ayuntamiento? ¿Cuántos miembros forman cada comisión?

23. Consideremos el grafo:



¿Es euleriano? Justifica la respuesta y en caso de ser afirmativa, obtén un circuito euleriano.

24. Consideremos el grafo:



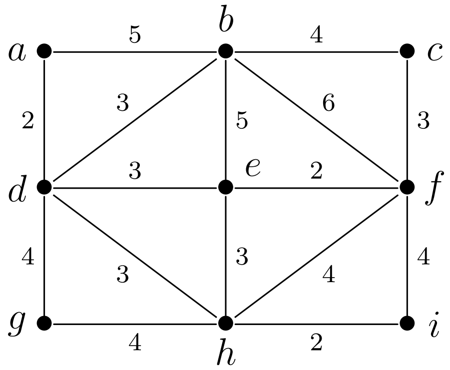
¿Es hamiltoniano? ¿Por qué? En caso afirmativo, calcula un camino hamiltoniano.

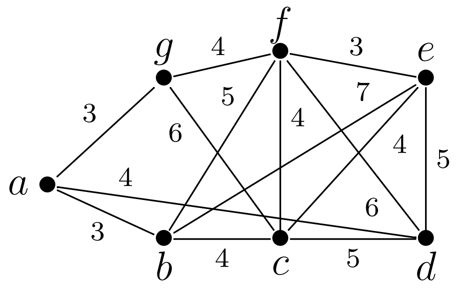
25. Sea $G = (V, E)$ un árbol que tiene 10 vértices de grado 5, 8 vértices de grado 4, 12 vértices de grado 3, 10 vértices de grado 2 y el resto de vértices de grado 1. Halla el número de vértices de grado 1 que tiene G.

26. Demuestra que si $G = (V, E)$ es un grafo simple de orden 10 tal que $|E| > 25$, entonces G no es bipartito.

27. Sea $G = (V, E)$ un grafo con 26 vértices y sea T un árbol recubridor de G. Sabiendo que T tiene p hojas y q vértices de grado 7, y ningún otro vértice, halla los valores de p y q.

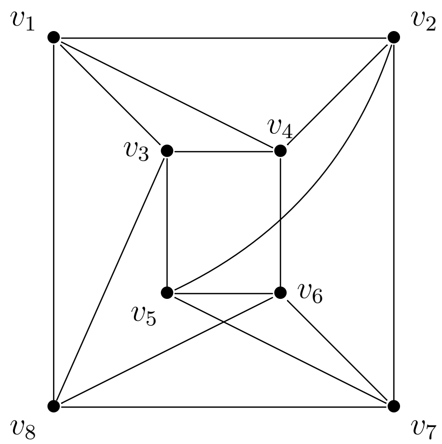
28. Halla un árbol generador mínimo para cada uno de los grafos siguientes:





29. Sea $G = (V, E)$ un árbol con p vértices de grado 1 y q vértices de grado 4 y ningún otro vértice. Halla la ecuación que indique la relación entre p y q.

30. Consideremos el grafo $G = (V, E)$ de la figura:



- El grafo G ¿es euleriano? Razona tu respuesta.
- Si definimos la función peso, $w : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, por

$$w(\{v_i, v_j\}) = 2\max\{i, j\} - \min\{i, j\}, \quad \forall \{v_i, v_j\} \in E.$$

  Escribe el peso que le corresponde a cada arista $\{v_i, v_j\} \in E$ de G.
- En el grafo ponderado obtenido en el punto anterior, determina un árbol generador mínimo para G y dibújalo a continuación. ¿Cuál es el peso del árbol obtenido?

31. Supongamos que el grafo bipartito $K_{m,n}$ tiene 196 aristas.

- Halla m y n de modo que $K_{m,n}$ sea euleriano pero no hamiltoniano.
- Halla m y n de modo que $K_{m,n}$ sea euleriano y hamiltoniano.