Lenguajes Formales

Teoría de la Computación

Grado en Ingeniería Informática

Contenidos

Contenidos

1 Alfabetos, palabras y lenguajes

Definición

Un conjunto no vacío y finito de símbolos se denomina **alfabeto**.

1 Alfabetos, palabras y lenguajes

Definición

Un conjunto no vacío y finito de símbolos se denomina **alfabeto**.

Ejemplos:

- El alfabeto del idioma español está formado por las 29 letras del abecedario.

Definición

Un conjunto no vacío y finito de símbolos se denomina **alfabeto**.

Ejemplos:

- El alfabeto del idioma español está formado por las 29 letras del abecedario.
- En el contexto de un lenguaje de programación, el alfabeto está formado por los símbolos que permiten construir las palabras reservadas, los identificadores, las expresiones aritméticas, las expresiones de asignación, etc.

1 Alfabetos, palabras y lenguajes

Definición

Una secuencia finita de símbolos de un determinado alfabeto se denomina **palabra** o **cadena** sobre dicho alfabeto.

Definición

Una secuencia finita de símbolos de un determinado alfabeto se denomina **palabra** o **cadena** sobre dicho alfabeto.

Ejemplos:

- Dado el alfabeto $\Sigma = \{a, b, 1, 2\}$, son palabras o cadenas sobre Σ las secuencias ab, ba, $b12a$, $1ba22b$, ...

Definición

Una secuencia finita de símbolos de un determinado alfabeto se denomina **palabra** o **cadena** sobre dicho alfabeto.

Ejemplos:

- Dado el alfabeto $\Sigma = \{a, b, 1, 2\}$, son palabras o cadenas sobre Σ las secuencias ab, ba, $b12a$, $1ba22b$, ...
- Cada símbolo individual $\sigma \in \Sigma$ es también una cadena sobre el alfabeto Σ.

Definición

Una secuencia finita de símbolos de un determinado alfabeto se denomina **palabra** o **cadena** sobre dicho alfabeto.

Ejemplos:

- Dado el alfabeto $\Sigma = \{a, b, 1, 2\}$, son palabras o cadenas sobre Σ las secuencias ab, ba, $b12a$, $1ba22b$, ...
- Cada símbolo individual $\sigma \in \Sigma$ es también una cadena sobre el alfabeto Σ.
- La **cadena vacía**, que se denota con el símbolo ϵ, es una palabra sobre cualquier alfabeto que no contiene ningún símbolo y que tiene ciertas propiedades especiales que veremos más adelante.

Definición

Un **lenguaje** es un conjunto de palabras.

Definición

Un **lenguaje** es un conjunto de palabras.

Ejemplos:

- Las palabras españolas correctas constituyen un lenguaje sobre el alfabeto de las letras del abecedario.

Definición

Un **lenguaje** es un conjunto de palabras.

Ejemplos:

- Las palabras españolas correctas constituyen un lenguaje sobre el alfabeto de las letras del abecedario.
- El conjunto $\{1, 12, 123, 1234, 12345, \dots\}$ es un lenguaje sobre el alfabeto compuesto por los dígitos del 1 al 9.

1 Alfabetos, palabras y lenguajes

Definición

Un **lenguaje** es un conjunto de palabras.

Ejemplos:

- Las palabras españolas correctas constituyen un lenguaje sobre el alfabeto de las letras del abecedario.
- El conjunto $\{1, 12, 123, 1234, 12345, \ldots\}$ es un lenguaje sobre el alfabeto compuesto por los dígitos del 1 al 9.
- Si Σ es un alfabeto, Σ constituye también un lenguaje: el formado por las cadenas que tienen un único símbolo del alfabeto.

1 Alfabetos, palabras y lenguajes

Los lenguajes pueden ser bastante grandes. Por ejemplo, el lenguaje de todas las palabras correctas del español es enorme.

1 Alfabetos, palabras y lenguajes

Los lenguajes pueden ser bastante grandes. Por ejemplo, el lenguaje de todas las palabras correctas del español es enorme.

Pero los lenguajes pueden ser también de **tamaño infinito**, a pesar de estar constituidos por cadenas de longitud finita, como es el caso, por ejemplo, del lenguaje formado por todas las cadenas finitas de unos: $\{1, 11, 111, 1111, 11111, \dots\}$.

Los lenguajes pueden ser bastante grandes. Por ejemplo, el lenguaje de todas las palabras correctas del español es enorme.

Pero los lenguajes pueden ser también de **tamaño infinito**, a pesar de estar constituidos por cadenas de longitud finita, como es el caso, por ejemplo, del lenguaje formado por todas las cadenas finitas de unos: $\{1, 11, 111, 1111, 11111, \ldots\}$.

La tarea de **especificar qué palabras pertenecen a un lenguaje** puede resultar compleja cuando dicho lenguaje es grande o de tamaño infinito. Por tanto, este aspecto constituye uno de los objetivos principales de la asignatura.

Dado que un lenguaje es un conjunto de cadenas, podemos considerar el **lenguaje vacío** como aquel que está compuesto por ninguna cadena y que se denota con $\emptyset$, al igual que el conjunto vacío.

Dado que un lenguaje es un conjunto de cadenas, podemos considerar el **lenguaje vacío** como aquel que está compuesto por ninguna cadena y que se denota con $\emptyset$, al igual que el conjunto vacío.

De igual manera, podemos considerar también el lenguaje compuesto por todas las posibles cadenas que se pueden construir sobre un alfabeto Σ. Este lenguaje se conoce como **cierre de $\boldsymbol{\Sigma}$** o **lenguaje universal sobre $\boldsymbol{\Sigma}$** y se denota con $\boldsymbol{\Sigma}^*$.

Dado que un lenguaje es un conjunto de cadenas, podemos considerar el **lenguaje vacío** como aquel que está compuesto por ninguna cadena y que se denota con $\emptyset$, al igual que el conjunto vacío.

De igual manera, podemos considerar también el lenguaje compuesto por todas las posibles cadenas que se pueden construir sobre un alfabeto Σ. Este lenguaje se conoce como **cierre de $\boldsymbol{\Sigma}$** o **lenguaje universal sobre $\boldsymbol{\Sigma}$** y se denota con $\boldsymbol{\Sigma}^*$.

Por ejemplo, si $\Sigma = \{0, 1\}$, entonces $\Sigma^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}$.

Dado que un lenguaje es un conjunto de cadenas, podemos considerar el **lenguaje vacío** como aquel que está compuesto por ninguna cadena y que se denota con $\emptyset$, al igual que el conjunto vacío.

De igual manera, podemos considerar también el lenguaje compuesto por todas las posibles cadenas que se pueden construir sobre un alfabeto Σ. Este lenguaje se conoce como **cierre de Σ** o **lenguaje universal sobre Σ** y se denota con $\boldsymbol{\Sigma}^*$.

Por ejemplo, si $\Sigma = \{0, 1\}$, entonces $\Sigma^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \ldots\}$.

Dado que los alfabetos no pueden ser vacíos, para cualquier alfabeto Σ, **$\boldsymbol{\Sigma}^*$ es siempre infinito**.

Ejercicio

El lenguaje vacío $\emptyset$ y el lenguaje $\{\epsilon\}$, ¿son el mismo lenguaje?

Ejercicio

El lenguaje vacío $\emptyset$ y el lenguaje $\{\epsilon\}$, ¿son el mismo lenguaje?

Solución:

- No son el mismo lenguaje.
- El lenguaje $\emptyset$ no tiene ninguna cadena.
- El lenguaje $\{\epsilon\}$ tiene una cadena: la cadena vacía.

Contenidos

2 Operaciones con palabras

Definición

Dada w, una cadena sobre cualquier alfabeto, la **longitud** de w es el número de símbolos que contiene y se denota mediante $|w|$.

Ejemplos:

- Dada $w = 101$ sobre $\Sigma = \{0, 1\}$, tenemos que $|w| = 3$.
- Así mismo, $|\epsilon| = 0$ ya que ϵ (la cadena vacía) no contiene símbolos.

2 Operaciones con palabras

Definición

Dada w, una cadena sobre cualquier alfabeto, la **longitud** de w es el número de símbolos que contiene y se denota mediante $|w|$.

Ejemplos:

- Dada $w = 101$ sobre $\Sigma = \{0, 1\}$, tenemos que $|w| = 3$.
- Así mismo, $|\epsilon| = 0$ ya que ϵ (la cadena vacía) no contiene símbolos.

Definición

Si w y z son cadenas, la **concatenación** de w con z es la cadena que se obtiene al añadir a w los símbolos de z y se denota mediante $w \cdot z$ o $w\,z$.

Ejemplo: si $w = \textit{guarda}$ y $z = \textit{meta}$, entonces $w \cdot z = \textit{guardameta}$.

Obsérvese que:

- La concatenación de cadenas es una operación asociativa, no conmutativa y cuyo elemento neutro es la cadena vacía, ya que $w \cdot \epsilon = \epsilon \cdot w = w$.

2 Operaciones con palabras

Obsérvese que:

- La concatenación de cadenas es una operación asociativa, no conmutativa y cuyo elemento neutro es la cadena vacía, ya que $w \cdot \epsilon = \epsilon \cdot w = w$.
- Y siempre se verifica que $|w \cdot z| = |w| + |z|$.

2 Operaciones con palabras

Obsérvese que:

- La concatenación de cadenas es una operación asociativa, no conmutativa y cuyo elemento neutro es la cadena vacía, ya que $w \cdot \epsilon = \epsilon \cdot w = w$.
- Y siempre se verifica que $|w \cdot z| = |w| + |z|$.

Definición

Dada una palabra w y un número $n \in \mathbb{N}$, la **potencia n-ésima de una palabra** se denota como w^n y se define como:

$$w^n = \begin{cases} \epsilon & \text{si } n = 0 \\ w\, w^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

2 Operaciones con palabras

Obsérvese que:

- La concatenación de cadenas es una operación asociativa, no conmutativa y cuyo elemento neutro es la cadena vacía, ya que $w \cdot \epsilon = \epsilon \cdot w = w$.
- Y siempre se verifica que $|w \cdot z| = |w| + |z|$.

Definición

Dada una palabra w y un número $n \in \mathbb{N}$, la **potencia n-ésima de una palabra** se denota como w^n y se define como:

$$w^n = \begin{cases} \epsilon & \text{si } n = 0 \\ w\, w^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, si $w = 101$, entonces:

$$w^0 = \epsilon, \quad w^1 = 101, \quad w^2 = 101101, \quad w^3 = 101101101, \quad \ldots$$

Definición

La **inversa** o **traspuesta** de una cadena w es una cadena formada por los mismos símbolos, pero en orden inverso, y se denota mediante w^I:

$$w^I = \begin{cases} w & \text{si } w = \epsilon \\ y^I\, a & \text{si } w = ay \text{ donde } a \in \Sigma, y \in \Sigma^* \end{cases}$$

Definición

La **inversa** o **traspuesta** de una cadena w es una cadena formada por los mismos símbolos, pero en orden inverso, y se denota mediante w^I:

$$w^I = \begin{cases} w & \text{si } w = \epsilon \\ y^I\, a & \text{si } w = ay \text{ donde } a \in \Sigma, y \in \Sigma^* \end{cases}$$

Por ejemplo, si $w = 1234$:
$w^I = (1234)^I = (234)^I 1 = (34)^I 21 = (4)^I 321 = (\epsilon)^I 4321 = \epsilon 4321 = 4321.$

Definición

La **inversa** o **traspuesta** de una cadena w es una cadena formada por los mismos símbolos, pero en orden inverso, y se denota mediante w^I:

$$w^I = \begin{cases} w & \text{si } w = \epsilon \\ y^I\, a & \text{si } w = ay \text{ donde } a \in \Sigma, y \in \Sigma^* \end{cases}$$

Por ejemplo, si $w = 1234$:
$w^I = (1234)^I = (234)^I 1 = (34)^I 21 = (4)^I 321 = (\epsilon)^I 4321 = \epsilon 4321 = 4321.$

Si $w = xy$, entonces $w^I = (xy)^I = y^I x^I$.
Por ejemplo, si $w = ab \cdot cd$, entonces $w^I = (ab \cdot cd)^I = (cd)^I (ab)^I = dcba$.

2 Operaciones con palabras

Definición

La **inversa** o **traspuesta** de una cadena w es una cadena formada por los mismos símbolos, pero en orden inverso, y se denota mediante w^I:

$$w^I = \begin{cases} w & \text{si } w = \epsilon \\ y^I\, a & \text{si } w = ay \text{ donde } a \in \Sigma, y \in \Sigma^* \end{cases}$$

Por ejemplo, si $w = 1234$:
$w^I = (1234)^I = (234)^I 1 = (34)^I 21 = (4)^I 321 = (\epsilon)^I 4321 = \epsilon 4321 = 4321.$

Si $w = xy$, entonces $w^I = (xy)^I = y^I x^I$.
Por ejemplo, si $w = ab \cdot cd$, entonces $w^I = (ab \cdot cd)^I = (cd)^I (ab)^I = dcba$.

Al aplicar la inversa dos veces, obtenemos la misma cadena: $(w^I)^I = w$.
Ejemplo: $((1234)^I)^I = (4321)^I = 1234$.

Definición

Dadas dos cadenas w y x, se dice que x es **prefijo** de w si para alguna cadena y se cumple que $w = x\,y$.

Ejemplo: si $w = 101$, $x = 10$ es un prefijo de w (en este caso, $y = 1$).

2 Operaciones con palabras

Definición

Dadas dos cadenas w y x, se dice que x es **prefijo** de w si para alguna cadena y se cumple que $w = x\,y$.

Ejemplo: si $w = 101$, $x = 10$ es un prefijo de w (en este caso, $y = 1$).

En esta definición, podemos considerar $y = \epsilon$, con lo que $x = w$. Es decir, toda palabra puede considerarse prefijo de sí misma.

2 Operaciones con palabras

Definición

Dadas dos cadenas w y x, se dice que x es **prefijo** de w si para alguna cadena y se cumple que $w = x\,y$.

Ejemplo: si $w = 101$, $x = 10$ es un prefijo de w (en este caso, $y = 1$).

En esta definición, podemos considerar $y = \epsilon$, con lo que $x = w$. Es decir, toda palabra puede considerarse prefijo de sí misma.

Por tanto, utilizaremos el concepto de **prefijo propio** para denotar a las cadenas que son prefijos de una cadena dada, pero no iguales a ella.

Definición

Dadas dos cadenas w y x, se dice que x es **prefijo** de w si para alguna cadena y se cumple que $w = x\,y$.

Ejemplo: si $w = 101$, $x = 10$ es un prefijo de w (en este caso, $y = 1$).

En esta definición, podemos considerar $y = \epsilon$, con lo que $x = w$. Es decir, toda palabra puede considerarse prefijo de sí misma.

Por tanto, utilizaremos el concepto de **prefijo propio** para denotar a las cadenas que son prefijos de una cadena dada, pero no iguales a ella.

Por último, destacamos que la cadena vacía ϵ es siempre prefijo de cualquier otra cadena.

2 Operaciones con palabras

Definición

Dadas dos cadenas w y x, se dice que x es **prefijo** de w si para alguna cadena y se cumple que $w = x\,y$.

Ejemplo: si $w = 101$, $x = 10$ es un prefijo de w (en este caso, $y = 1$).

En esta definición, podemos considerar $y = \epsilon$, con lo que $x = w$. Es decir, toda palabra puede considerarse prefijo de sí misma.

Por tanto, utilizaremos el concepto de **prefijo propio** para denotar a las cadenas que son prefijos de una cadena dada, pero no iguales a ella.

Por último, destacamos que la cadena vacía ϵ es siempre prefijo de cualquier otra cadena.

Las mismas ideas son aplicables para definir el concepto de **sufijo**.

Definición

Una cadena w es **subcadena** de otra cadena z cuando existen cadenas x e y tales que $z = xwy$.

Ejemplo: si $z = 10111$, $w = 01$ es una de las posibles subcadenas de z (en este caso, $x = 1$ e $y = 11$).

Definición

Una cadena w es **subcadena** de otra cadena z cuando existen cadenas x e y tales que $z = xwy$.

Ejemplo: si $z = 10111$, $w = 01$ es una de las posibles subcadenas de z (en este caso, $x = 1$ e $y = 11$).

Ejercicio

Encuentre los sufijos, prefijos y subcadenas de la palabra española *bar*.

Definición

Una cadena w es **subcadena** de otra cadena z cuando existen cadenas x e y tales que $z = xwy$.

Ejemplo: si $z = 10111$, $w = 01$ es una de las posibles subcadenas de z (en este caso, $x = 1$ e $y = 11$).

Ejercicio

Encuentre los sufijos, prefijos y subcadenas de la palabra española *bar*.

Solución:

- Prefijos: ϵ, b, ba, bar.
- Sufijos: ϵ, r, ar, bar.
- Subcadenas: ϵ, b, ba, bar, ar, r, a.

Ejercicio

Sea $\Sigma = \{1\}$. ¿Se puede decir que $\forall n \in \mathbb{N}$ existe al menos una cadena $w \in \Sigma^*$, tal que $|w| = n$? En caso afirmativo, ¿es única? ¿Y qué ocurriría si $\Sigma = \{0, 1\}$?

Ejercicio

Sea $\Sigma = \{1\}$. ¿Se puede decir que $\forall n \in \mathbb{N}$ existe al menos una cadena $w \in \Sigma^*$, tal que $|w| = n$? En caso afirmativo, ¿es única? ¿Y qué ocurriría si $\Sigma = \{0, 1\}$?

Solución:

- Si $\Sigma = \{1\}$, $|1^n| = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y es la única cadena de longitud n.

Ejercicio

Sea $\Sigma = \{1\}$. ¿Se puede decir que $\forall n \in \mathbb{N}$ existe al menos una cadena $w \in \Sigma^*$, tal que $|w| = n$? En caso afirmativo, ¿es única? ¿Y qué ocurriría si $\Sigma = \{0, 1\}$?

<u>Solución</u>:

- Si $\Sigma = \{1\}$, $|1^n| = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y es la única cadena de longitud n.
- Si $\Sigma = \{0, 1\}$, entonces hay 2^n cadenas distintas de longitud n.

Ejercicio

Sea $\Sigma = \{1\}$. ¿Se puede decir que $\forall n \in \mathbb{N}$ existe al menos una cadena $w \in \Sigma^*$, tal que $|w| = n$? En caso afirmativo, ¿es única? ¿Y qué ocurriría si $\Sigma = \{0, 1\}$?

Solución:

- Si $\Sigma = \{1\}$, $|1^n| = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y es la única cadena de longitud n.
- Si $\Sigma = \{0, 1\}$, entonces hay 2^n cadenas distintas de longitud n.

Ejercicio

Para una cadena w, ¿se puede afirmar que $|w^{i+j}| = |w^i| + |w^j|$? Encuentre una expresión para $|w^{i+j}|$ en función de i, j y $|w|$.

2 Operaciones con palabras

Ejercicio

Sea $\Sigma = \{1\}$. ¿Se puede decir que $\forall n \in \mathbb{N}$ existe al menos una cadena $w \in \Sigma^*$, tal que $|w| = n$? En caso afirmativo, ¿es única? ¿Y qué ocurriría si $\Sigma = \{0, 1\}$?

Solución:

- Si $\Sigma = \{1\}$, $|1^n| = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y es la única cadena de longitud n.
- Si $\Sigma = \{0, 1\}$, entonces hay 2^n cadenas distintas de longitud n.

Ejercicio

Para una cadena w, ¿se puede afirmar que $|w^{i+j}| = |w^i| + |w^j|$? Encuentre una expresión para $|w^{i+j}|$ en función de i, j y $|w|$.

Solución:

Es correcto, y además $|w^{i+j}| = i|w| + j|w| = (i + j)|w|$.

Ejercicio

Demuestre formalmente que $(wy)^I = y^I w^I$.

Ejercicio

Demuestre formalmente que $(wy)^I = y^I w^I$.

<u>Solución</u>:
Lo haremos por inducción en $|y|$.

Ejercicio

Demuestre formalmente que $(wy)^I = y^I w^I$.

Solución:
Lo haremos por inducción en $|y|$.
Cuando $|y| = 0$, tenemos que $(wy)^I = w^I = y^I w^I$, ya que $y = \epsilon$.

Ejercicio

Demuestre formalmente que $(wy)^I = y^I w^I$.

Solución:
Lo haremos por inducción en $|y|$.
Cuando $|y| = 0$, tenemos que $(wy)^I = w^I = y^I w^I$, ya que $y = \epsilon$.
Lo suponemos cierto para $|y| \leq n$.

2 Operaciones con palabras

Ejercicio

Demuestre formalmente que $(wy)^I = y^I w^I$.

Solución:
Lo haremos por inducción en $|y|$.
Cuando $|y| = 0$, tenemos que $(wy)^I = w^I = y^I w^I$, ya que $y = \epsilon$.
Lo suponemos cierto para $|y| \leq n$.
Ahora consideramos $|y| = n + 1$.

Ejercicio

Demuestre formalmente que $(wy)^I = y^I w^I$.

Solución:
Lo haremos por inducción en $|y|$.
Cuando $|y| = 0$, tenemos que $(wy)^I = w^I = y^I w^I$, ya que $y = \epsilon$.
Lo suponemos cierto para $|y| \leq n$.
Ahora consideramos $|y| = n + 1$.
Entonces $y = xa$ para algún $a \in \Sigma$ y $x \in \Sigma^*$, donde $|x| = n$.

2 Operaciones con palabras

Ejercicio

Demuestre formalmente que $(wy)^I = y^I w^I$.

<u>Solución</u>:
Lo haremos por inducción en $|y|$.
Cuando $|y| = 0$, tenemos que $(wy)^I = w^I = y^I w^I$, ya que $y = \epsilon$.
Lo suponemos cierto para $|y| \leq n$.
Ahora consideramos $|y| = n + 1$.
Entonces $y = xa$ para algún $a \in \Sigma$ y $x \in \Sigma^*$, donde $|x| = n$.
Por tanto, $(wy)^I = (wxa)^I = a(wx)^I = ax^I w^I = y^I w^I$.

Contenidos

Definición

Si A y B son dos lenguajes, el lenguaje **concatenación** de A y B se define como:

$$A \cdot B = \{w \cdot y \mid w \in A, y \in B\}$$

Definición

Si A y B son dos lenguajes, el lenguaje **concatenación** de A y B se define como:

$$A \cdot B = \{w \cdot y \mid w \in A, y \in B\}$$

No es necesario que A y B estén definidos sobre el mismo alfabeto.
Si A es un lenguaje sobre Σ_1 y B es un lenguaje sobre Σ_2,
$A \cdot B$ será igualmente un lenguaje sobre $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Definición

Si A y B son dos lenguajes, el lenguaje **concatenación** de A y B se define como:

$$A \cdot B = \{w \cdot y \mid w \in A, y \in B\}$$

No es necesario que A y B estén definidos sobre el mismo alfabeto.
Si A es un lenguaje sobre Σ_1 y B es un lenguaje sobre Σ_2,
$A \cdot B$ será igualmente un lenguaje sobre $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Para cualquier lenguaje A, se cumple que $A \cdot \{\epsilon\} = \{\epsilon\} \cdot A = A$.
Es decir, $\{\epsilon\}$ es el elemento neutro de la concatenación de lenguajes.

3 Operaciones con lenguajes

Definición

Si A y B son dos lenguajes, el lenguaje **concatenación** de A y B se define como:

$$A \cdot B = \{w \cdot y \mid w \in A, y \in B\}$$

No es necesario que A y B estén definidos sobre el mismo alfabeto.
Si A es un lenguaje sobre Σ_1 y B es un lenguaje sobre Σ_2,
$A \cdot B$ será igualmente un lenguaje sobre $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Para cualquier lenguaje A, se cumple que $A \cdot \{\epsilon\} = \{\epsilon\} \cdot A = A$.
Es decir, $\{\epsilon\}$ es el elemento neutro de la concatenación de lenguajes.

Cuestión importante

¿Quién es $A \cdot \emptyset$?

3 Operaciones con lenguajes

Definición

Si A y B son dos lenguajes, el lenguaje **concatenación** de A y B se define como:

$$A \cdot B = \{w \cdot y \mid w \in A, y \in B\}$$

No es necesario que A y B estén definidos sobre el mismo alfabeto.
Si A es un lenguaje sobre Σ_1 y B es un lenguaje sobre Σ_2,
$A \cdot B$ será igualmente un lenguaje sobre $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Para cualquier lenguaje A, se cumple que $A \cdot \{\epsilon\} = \{\epsilon\} \cdot A = A$.
Es decir, $\{\epsilon\}$ es el elemento neutro de la concatenación de lenguajes.

Cuestión importante

¿Quién es $A \cdot \emptyset$? Respuesta: $A \cdot \emptyset = \emptyset \cdot A = \emptyset$.

Definición

La **potencia** ***n*****-ésima de un lenguaje** A se denota como A^n y se define como:

$$A^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ A \cdot A^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Definición

La **potencia** n**-ésima de un lenguaje** A se denota como A^n y se define como:

$$A^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ A \cdot A^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, si $A = \{ab, c\}$, entonces:

$$A^0 = \{\epsilon\}, \quad A^1 = \{ab, c\}, \quad A^2 = \{abab, abc, cab, cc\},$$

$$A^3 = \{ababab, ababc, abcab, abcc, cabab, cabc, ccab, ccc, \}, \quad \ldots$$

3 Operaciones con lenguajes

Definición

La **potencia** ***n*****-ésima de un lenguaje** A se denota como A^n y se define como:

$$A^n = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{si } n = 0 \\ A \cdot A^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, si $A = \{ab, c\}$, entonces:

$$A^0 = \{\epsilon\}, \quad A^1 = \{ab, c\}, \quad A^2 = \{abab, abc, cab, cc\},$$

$$A^3 = \{ababab, ababc, abcab, abcc, cabab, cabc, ccab, ccc, \}, \quad \ldots$$

Cuestión importante

Es interesante tener en cuenta que de esta definición se deduce que:

$$\emptyset^0 = \{\epsilon\}, \quad \emptyset^1 = \emptyset, \quad \emptyset^2 = \emptyset, \quad \emptyset^3 = \emptyset, \quad \ldots$$

3 Operaciones con lenguajes

Definición

Dado que un lenguaje es un conjunto de cadenas, las definiciones de **unión** e **intersección** de lenguajes y del concepto de **sublenguaje** son análogas a las de la teoría general de conjuntos:

- $A \cup B = \{w \mid w \in A \text{ o } w \in B\}$.
- $A \cap B = \{w \mid w \in A \text{ y } w \in B\}$.
- $A \subseteq B$ si todas las cadenas de A son también cadenas de B.

3 Operaciones con lenguajes

Definición

Dado que un lenguaje es un conjunto de cadenas, las definiciones de **unión** e **intersección** de lenguajes y del concepto de **sublenguaje** son análogas a las de la teoría general de conjuntos:

- $A \cup B = \{w \mid w \in A \text{ o } w \in B\}$.
- $A \cap B = \{w \mid w \in A \text{ y } w \in B\}$.
- $A \subseteq B$ si todas las cadenas de A son también cadenas de B.

Ejemplos:

- Para $A = \{a, aa, aaa\}$ y $B = \{a^n \mid n \geq 0\}$ tenemos que $A \subseteq B$.

3 Operaciones con lenguajes

Definición

Dado que un lenguaje es un conjunto de cadenas, las definiciones de **unión** e **intersección** de lenguajes y del concepto de **sublenguaje** son análogas a las de la teoría general de conjuntos:

- $A \cup B = \{w \mid w \in A \text{ o } w \in B\}$.
- $A \cap B = \{w \mid w \in A \text{ y } w \in B\}$.
- $A \subseteq B$ si todas las cadenas de A son también cadenas de B.

Ejemplos:

- Para $A = \{a, aa, aaa\}$ y $B = \{a^n \mid n \geq 0\}$ tenemos que $A \subseteq B$.
- Cualquier lenguaje L sobre un alfabeto Σ es un sublenguaje de Σ^*.

3 Operaciones con lenguajes

Definición

Dado que un lenguaje es un conjunto de cadenas, las definiciones de **unión** e **intersección** de lenguajes y del concepto de **sublenguaje** son análogas a las de la teoría general de conjuntos:

- $A \cup B = \{w \mid w \in A \text{ o } w \in B\}$.
- $A \cap B = \{w \mid w \in A \text{ y } w \in B\}$.
- $A \subseteq B$ si todas las cadenas de A son también cadenas de B.

Ejemplos:

- Para $A = \{a, aa, aaa\}$ y $B = \{a^n \mid n \geq 0\}$ tenemos que $A \subseteq B$.
- Cualquier lenguaje L sobre un alfabeto Σ es un sublenguaje de Σ^*.

Cuestión importante

Dado un alfabeto Σ, ¿cuántos lenguajes se pueden definir sobre él?

3 Operaciones con lenguajes

Definición

Dado que un lenguaje es un conjunto de cadenas, las definiciones de **unión** e **intersección** de lenguajes y del concepto de **sublenguaje** son análogas a las de la teoría general de conjuntos:

- $A \cup B = \{w \mid w \in A \text{ o } w \in B\}$.
- $A \cap B = \{w \mid w \in A \text{ y } w \in B\}$.
- $A \subseteq B$ si todas las cadenas de A son también cadenas de B.

Ejemplos:

- Para $A = \{a, aa, aaa\}$ y $B = \{a^n \mid n \geq 0\}$ tenemos que $A \subseteq B$.
- Cualquier lenguaje L sobre un alfabeto Σ es un sublenguaje de Σ^*.

Cuestión importante

Dado un alfabeto Σ, ¿cuántos lenguajes se pueden definir sobre él?
Respuesta: 2^{Σ^*} (partes de Σ^*) que, al igual que $2^{\mathbb{N}}$, no es numerable.

Teorema

La concatenación de lenguajes es distributiva con respecto a la unión. Por tanto, dados los lenguajes A, B y C, se cumple:

i) $A \cdot (B \cup C) = A \cdot B \, \cup \, A \cdot C$

ii) $(B \cup C) \cdot A = B \cdot A \, \cup \, C \cdot A$

Teorema

La concatenación de lenguajes es distributiva con respecto a la unión. Por tanto, dados los lenguajes A, B y C, se cumple:

i) $A \cdot (B \cup C) = A \cdot B \ \cup \ A \cdot C$

ii) $(B \cup C) \cdot A = B \cdot A \ \cup \ C \cdot A$

Nota: Se suele aplicar la distribución por ambos lados cuando se trata de una operación no conmutativa, como es el caso de la concatenación.

Teorema

La concatenación de lenguajes es distributiva con respecto a la unión. Por tanto, dados los lenguajes A, B y C, se cumple:

i) $A \cdot (B \cup C) = A \cdot B \,\cup\, A \cdot C$

ii) $(B \cup C) \cdot A = B \cdot A \,\cup\, C \cdot A$

Nota: Se suele aplicar la distribución por ambos lados cuando se trata de una operación no conmutativa, como es el caso de la concatenación.

Ideas para la demostración:

i) Primero probaríamos que $A \cdot (B \cup C) \subseteq A \cdot B \,\cup\, A \cdot C$
y después probaríamos que $A \cdot B \,\cup\, A \cdot C \subseteq A \cdot (B \cup C)$.

ii) Se demuestra de manera similar al apartado i). $\square$

Teorema

La concatenación de lenguajes no es distributiva con respecto a la intersección.

Teorema

La concatenación de lenguajes no es distributiva con respecto a la intersección.

Demostración:
Podemos probarlo mediante un contrajemplo.

Teorema

La concatenación de lenguajes no es distributiva con respecto a la intersección.

<u>Demostración</u>:
Podemos probarlo mediante un contrajemplo.
Para ello, tomamos $A = \{\epsilon, a\}$, $B = \{\epsilon\}$ y $C = \{a\}$.

Teorema

La concatenación de lenguajes no es distributiva con respecto a la intersección.

Demostración:
Podemos probarlo mediante un contrajemplo.
Para ello, tomamos $A = \{\epsilon, a\}$, $B = \{\epsilon\}$ y $C = \{a\}$.

Obsérvese que $A \cdot B = \{\epsilon, a\}$ y $A \cdot C = \{a, aa\}$.

Teorema

La concatenación de lenguajes no es distributiva con respecto a la intersección.

Demostración:
Podemos probarlo mediante un contrajemplo.
Para ello, tomamos $A = \{\epsilon, a\}$, $B = \{\epsilon\}$ y $C = \{a\}$.

Obsérvese que $A \cdot B = \{\epsilon, a\}$ y $A \cdot C = \{a, aa\}$.
Por tanto, $A \cdot B \cap A \cdot C = \{a\}$.

Teorema

La concatenación de lenguajes no es distributiva con respecto a la intersección.

Demostración:
Podemos probarlo mediante un contrajemplo.
Para ello, tomamos $A = \{\epsilon, a\}$, $B = \{\epsilon\}$ y $C = \{a\}$.

Obsérvese que $A \cdot B = \{\epsilon, a\}$ y $A \cdot C = \{a, aa\}$.
Por tanto, $A \cdot B \cap A \cdot C = \{a\}$.

Y por otro lado, $B \cap C = \emptyset$ con lo que $A \cdot (B \cap C) = \emptyset$.

Teorema

La concatenación de lenguajes no es distributiva con respecto a la intersección.

Demostración:
Podemos probarlo mediante un contrajemplo.
Para ello, tomamos $A = \{\epsilon, a\}$, $B = \{\epsilon\}$ y $C = \{a\}$.

Obsérvese que $A \cdot B = \{\epsilon, a\}$ y $A \cdot C = \{a, aa\}$.
Por tanto, $A \cdot B \cap A \cdot C = \{a\}$.

Y por otro lado, $B \cap C = \emptyset$ con lo que $A \cdot (B \cap C) = \emptyset$.

Así pues, en este caso, $A \cdot (B \cap C) \neq A \cdot B \cap A \cdot C$. $\square$

Definición

Dado un lenguaje A, se define su **cierre de Kleene** o **cierre estrella** como:

$$A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$$

y su **cierre positivo** como:

$$A^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$$

Definición

Dado un lenguaje A, se define su **cierre de Kleene** o **cierre estrella** como:

$$A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$$

y su **cierre positivo** como:

$$A^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$$

Es decir:

- Las cadenas de A^* se forman realizando 0 o más concatenaciones de las cadenas de A.
- Y las cadenas de A^+ se forman realizando 1 o más concatenaciones de las cadenas de A.

Ejemplo:
Si $A = \{a\}$, entonces $A^0 = \{\epsilon\}, A^1 = \{a\}, A^2 = \{aa\}, A^3 = \{aaa\}, \ldots,$
con lo que $A^* = \{\epsilon, a, aa, aaa, \ldots\}$ y $A^+ = \{a, aa, aaa, \ldots\}$.

Ejemplo:
Si $A = \{a\}$, entonces $A^0 = \{\epsilon\}, A^1 = \{a\}, A^2 = \{aa\}, A^3 = \{aaa\}, \dots,$
con lo que $A^* = \{\epsilon, a, aa, aaa, \dots\}$ y $A^+ = \{a, aa, aaa, \dots\}$.

Si A es un lenguaje sobre un alfabeto Σ, entonces $A^* \subseteq \Sigma^*$ y $A^+ \subseteq \Sigma^+$.

Ejemplo:
Si $A = \{a\}$, entonces $A^0 = \{\epsilon\}, A^1 = \{a\}, A^2 = \{aa\}, A^3 = \{aaa\}, \ldots$,
con lo que $A^* = \{\epsilon, a, aa, aaa, \ldots\}$ y $A^+ = \{a, aa, aaa, \ldots\}$.

Si A es un lenguaje sobre un alfabeto Σ, entonces $A^* \subseteq \Sigma^*$ y $A^+ \subseteq \Sigma^+$.

Y obsérvese también que:

- $A^+ \subseteq A^*$.

Ejemplo:
Si $A = \{a\}$, entonces $A^0 = \{\epsilon\}, A^1 = \{a\}, A^2 = \{aa\}, A^3 = \{aaa\}, \ldots,$
con lo que $A^* = \{\epsilon, a, aa, aaa, \ldots\}$ y $A^+ = \{a, aa, aaa, \ldots\}$.

Si A es un lenguaje sobre un alfabeto Σ, entonces $A^* \subseteq \Sigma^*$ y $A^+ \subseteq \Sigma^+$.

Y obsérvese también que:

- $A^+ \subseteq A^*$.
- $A^+ = A^*$ cuando $\epsilon \in A$.

Ejemplo:
Si $A = \{a\}$, entonces $A^0 = \{\epsilon\}, A^1 = \{a\}, A^2 = \{aa\}, A^3 = \{aaa\}, \dots,$ con lo que $A^* = \{\epsilon, a, aa, aaa, \dots\}$ y $A^+ = \{a, aa, aaa, \dots\}$.

Si A es un lenguaje sobre un alfabeto Σ, entonces $A^* \subseteq \Sigma^*$ y $A^+ \subseteq \Sigma^+$.

Y obsérvese también que:

- $A^+ \subseteq A^*$.
- $A^+ = A^*$ cuando $\epsilon \in A$.
- Si $\epsilon \notin A$, entonces $A^* = A^+ \cup \{\epsilon\}$.

Ejemplo:
Si $A = \{a\}$, entonces $A^0 = \{\epsilon\}, A^1 = \{a\}, A^2 = \{aa\}, A^3 = \{aaa\}, \ldots,$ con lo que $A^* = \{\epsilon, a, aa, aaa, \ldots\}$ y $A^+ = \{a, aa, aaa, \ldots\}$.

Si A es un lenguaje sobre un alfabeto Σ, entonces $A^* \subseteq \Sigma^*$ y $A^+ \subseteq \Sigma^+$.

Y obsérvese también que:

- $A^+ \subseteq A^*$.
- $A^+ = A^*$ cuando $\epsilon \in A$.
- Si $\epsilon \notin A$, entonces $A^* = A^+ \cup \{\epsilon\}$.
- Siempre se verifica que $A^+ = A \cdot A^* = A^* \cdot A$.

Ejemplo:
Si $A = \{a\}$, entonces $A^0 = \{\epsilon\}, A^1 = \{a\}, A^2 = \{aa\}, A^3 = \{aaa\}, \dots,$ con lo que $A^* = \{\epsilon, a, aa, aaa, \dots\}$ y $A^+ = \{a, aa, aaa, \dots\}$.

Si A es un lenguaje sobre un alfabeto Σ, entonces $A^* \subseteq \Sigma^*$ y $A^+ \subseteq \Sigma^+$.

Y obsérvese también que:

- $A^+ \subseteq A^*$.
- $A^+ = A^*$ cuando $\epsilon \in A$.
- Si $\epsilon \notin A$, entonces $A^* = A^+ \cup \{\epsilon\}$.
- Siempre se verifica que $A^+ = A \cdot A^* = A^* \cdot A$.
- Dado que $\emptyset^0 = \{\epsilon\}$, entonces $\emptyset^* = \{\epsilon\}$ y $\emptyset^+ = \emptyset$.

Ejercicio

Podemos preguntarnos cómo son los lenguajes que son cerraduras de cerraduras. Es decir, ¿quiénes son $(A^*)^*$ y $(A^+)^+$?

Ejercicio

Podemos preguntarnos cómo son los lenguajes que son cerraduras de cerraduras. Es decir, ¿quiénes son $(A^*)^*$ y $(A^+)^+$?

Solución:

La respuesta es sencilla: $(A^*)^* = A^*$ y $(A^+)^+ = A^+$.

Esto se puede interpretar como que a A^* y a A^+ no se añaden más palabras aunque se vuelva a aplicar sobre ellos la misma cerradura (lo cual desvela intuitivamente el significado real del término *cerradura*).

Ejercicio

Podemos preguntarnos cómo son los lenguajes que son cerraduras de cerraduras. Es decir, ¿quiénes son $(A^*)^*$ y $(A^+)^+$?

Solución:
La respuesta es sencilla: $(A^*)^* = A^*$ y $(A^+)^+ = A^+$.
Esto se puede interpretar como que a A^* y a A^+ no se añaden más palabras aunque se vuelva a aplicar sobre ellos la misma cerradura (lo cual desvela intuitivamente el significado real del término *cerradura*).

Ejercicio

¿Y quiénes son $(A^*)^+$ y $(A^+)^*$?

Ejercicio

Podemos preguntarnos cómo son los lenguajes que son cerraduras de cerraduras. Es decir, ¿quiénes son $(A^*)^*$ y $(A^+)^+$?

Solución:
La respuesta es sencilla: $(A^*)^* = A^*$ y $(A^+)^+ = A^+$.
Esto se puede interpretar como que a A^* y a A^+ no se añaden más palabras aunque se vuelva a aplicar sobre ellos la misma cerradura (lo cual desvela intuitivamente el significado real del término *cerradura*).

Ejercicio

¿Y quiénes son $(A^*)^+$ y $(A^+)^*$?

Respuesta: A^* en ambos casos.

Definición

La **diferencia de lenguajes** se define igual que la diferencia de conjuntos:

$$A - B = \{w \mid w \in A \text{ y } w \notin B\}$$

Definición

La **diferencia de lenguajes** se define igual que la diferencia de conjuntos:

$$A - B = \{w \mid w \in A \text{ y } w \notin B\}$$

La concatenación y la diferencia de lenguajes son incompatibles, de forma similar a como lo eran la concatenación y la intersección. Es decir, en general:

$$A \cdot (B - C) \neq A \cdot B - A \cdot C$$

3 Operaciones con lenguajes

Definición

La **diferencia de lenguajes** se define igual que la diferencia de conjuntos:

$$A - B = \{w \mid w \in A \text{ y } w \notin B\}$$

La concatenación y la diferencia de lenguajes son incompatibles, de forma similar a como lo eran la concatenación y la intersección. Es decir, en general:

$$A \cdot (B - C) \neq A \cdot B - A \cdot C$$

Definición

El **complementario de un lenguaje** se define como:

$$\overline{A} = \Sigma^* - A$$

Definición

La **diferencia de lenguajes** se define igual que la diferencia de conjuntos:

$$A - B = \{w \mid w \in A \text{ y } w \notin B\}$$

La concatenación y la diferencia de lenguajes son incompatibles, de forma similar a como lo eran la concatenación y la intersección. Es decir, en general:

$$A \cdot (B - C) \neq A \cdot B - A \cdot C$$

Definición

El **complementario de un lenguaje** se define como:

$$\overline{A} = \Sigma^* - A$$

Y como cabe esperar:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Definición

El **inverso** o **traspuesto de un lenguaje** A es:

$$A^I = \{w^I \mid w \in A\}$$

Definición

El **inverso** o **traspuesto de un lenguaje** A es:

$$A^I = \{w^I \mid w \in A\}$$

Una vez más, el inverso del inverso es el propio lenguaje: $(A^I)^I = A$.

Definición

El **inverso** o **traspuesto de un lenguaje** A es:

$$A^I = \{w^I \mid w \in A\}$$

Una vez más, el inverso del inverso es el propio lenguaje: $(A^I)^I = A$.

Y nuevamente ocurre también que: $(A \cdot B)^I = B^I \cdot A^I$.

Definición

El **inverso** o **traspuesto de un lenguaje** A es:

$$A^I = \{w^I \mid w \in A\}$$

Una vez más, el inverso del inverso es el propio lenguaje: $(A^I)^I = A$.

Y nuevamente ocurre también que: $(A \cdot B)^I = B^I \cdot A^I$.

Otras propiedades interesantes son:

- $(A \cup B)^I = A^I \cup B^I$

Definición

El **inverso** o **traspuesto de un lenguaje** A es:

$$A^I = \{w^I \mid w \in A\}$$

Una vez más, el inverso del inverso es el propio lenguaje: $(A^I)^I = A$.

Y nuevamente ocurre también que: $(A \cdot B)^I = B^I \cdot A^I$.

Otras propiedades interesantes son:

- $(A \cup B)^I = A^I \cup B^I$
- $(A \cap B)^I = A^I \cap B^I$

Definición

El **inverso** o **traspuesto de un lenguaje** A es:

$$A^I = \{w^I \mid w \in A\}$$

Una vez más, el inverso del inverso es el propio lenguaje: $(A^I)^I = A$.

Y nuevamente ocurre también que: $(A \cdot B)^I = B^I \cdot A^I$.

Otras propiedades interesantes son:

- $(A \cup B)^I = A^I \cup B^I$
- $(A \cap B)^I = A^I \cap B^I$
- $(A^+)^I = (A^I)^+$

Definición

El **inverso** o **traspuesto de un lenguaje** A es:

$$A^I = \{w^I \mid w \in A\}$$

Una vez más, el inverso del inverso es el propio lenguaje: $(A^I)^I = A$.

Y nuevamente ocurre también que: $(A \cdot B)^I = B^I \cdot A^I$.

Otras propiedades interesantes son:

- $(A \cup B)^I = A^I \cup B^I$
- $(A \cap B)^I = A^I \cap B^I$
- $(A^+)^I = (A^I)^+$
- $(A^*)^I = (A^I)^*$

Definición

El **inverso** o **traspuesto de un lenguaje** A es:

$$A^I = \{w^I \mid w \in A\}$$

Una vez más, el inverso del inverso es el propio lenguaje: $(A^I)^I = A$.

Y nuevamente ocurre también que: $(A \cdot B)^I = B^I \cdot A^I$.

Otras propiedades interesantes son:

- $(A \cup B)^I = A^I \cup B^I$
- $(A \cap B)^I = A^I \cap B^I$
- $(A^+)^I = (A^I)^+$
- $(A^*)^I = (A^I)^*$
- $(\overline{A})^I = \overline{A^I}$

Ejercicio

Dado el lenguaje $A = \{\epsilon, a\}$, obtenga A^n para $n = 0, 1, 2, 3$.
¿Cuántos elementos tiene A^n para un n arbitrario?

Ejercicio

Dado el lenguaje $A = \{\epsilon, a\}$, obtenga A^n para $n = 0, 1, 2, 3$.
¿Cuántos elementos tiene A^n para un n arbitrario?

Solución:

- $A^0 = \{\epsilon\}$, $A^1 = \{\epsilon, a\}$, $A^2 = \{\epsilon, a, aa\}$, $A^3 = \{\epsilon, a, aa, aaa\}$.

Ejercicio

Dado el lenguaje $A = \{\epsilon, a\}$, obtenga A^n para $n = 0, 1, 2, 3$.
¿Cuántos elementos tiene A^n para un n arbitrario?

Solución:

- $A^0 = \{\epsilon\}$, $A^1 = \{\epsilon, a\}$, $A^2 = \{\epsilon, a, aa\}$, $A^3 = \{\epsilon, a, aa, aaa\}$.
- $A^n = \{\epsilon, a, aa, aaa, \ldots, a^n\}$, por tanto $|A^n| = n + 1$.

Ejercicio

Dado el lenguaje $A = \{\epsilon, a\}$, obtenga A^n para $n = 0, 1, 2, 3$.
¿Cuántos elementos tiene A^n para un n arbitrario?

Solución:

- $A^0 = \{\epsilon\}$, $A^1 = \{\epsilon, a\}$, $A^2 = \{\epsilon, a, aa\}$, $A^3 = \{\epsilon, a, aa, aaa\}$.
- $A^n = \{\epsilon, a, aa, aaa, \ldots, a^n\}$, por tanto $|A^n| = n + 1$.

Ejercicio

¿Quiénes son $\{\epsilon\}^*$ y $\{\epsilon\}^+$?

Ejercicio

Dado el lenguaje $A = \{\epsilon, a\}$, obtenga A^n para $n = 0, 1, 2, 3$.
¿Cuántos elementos tiene A^n para un n arbitrario?

Solución:

- $A^0 = \{\epsilon\}$, $A^1 = \{\epsilon, a\}$, $A^2 = \{\epsilon, a, aa\}$, $A^3 = \{\epsilon, a, aa, aaa\}$.
- $A^n = \{\epsilon, a, aa, aaa, \ldots, a^n\}$, por tanto $|A^n| = n + 1$.

Ejercicio

¿Quiénes son $\{\epsilon\}^*$ y $\{\epsilon\}^+$?

Respuesta: $\{\epsilon\}$ en ambos casos.

Fin del capítulo

Fin del capítulo

"Lenguajes Formales"