Gestión de Infraestructuras
Tema 2: Representación de Señales en el Dominio de la Frecuencia - Parte 1 Ejercicios

1. Resumen

Transformada de Fourier

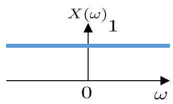
Ecuación de análisis $X(\omega) = TF\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$

Ecuación de síntesis $x(t) = TF^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

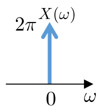
Dominio del tiempo $x(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega)$ **Dominio de la frecuencia**

Escalón unidad $u(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

Impulso unidad $x(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega) = 1$



Señal constante $x(t) = 1 \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$



Pulso de duración T $x(t) = \begin{cases} A & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega) = 2A\frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega}$

Sinc $x(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t} \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega) = \begin{cases} 1 & -W < \omega < W \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

Exponencial unilateral

$$x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} \begin{array}{l} |X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \\ \angle X(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{array}$$

Señal coseno

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

Algunas propiedades de la transformada de Fourier

Linealidad $\quad a_1x_1(t)+a_2x_2(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega)$

Escalado en tiempo $\quad x(at) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} \frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad Si\ a>0$

Desplazamiento en tiempo $\quad x(t-t_0) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega)e^{-j\omega t_0}$

Desplazamiento en frecuencia $\quad x(t)e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega-\omega_0)$

$$x(t)e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega+\omega_0)$$

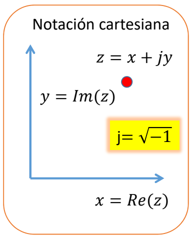
Inversión en tiempo $\quad x(-t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(-\omega)$

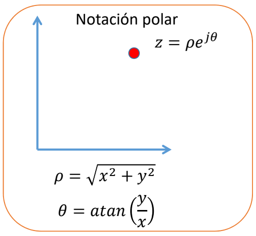
Multiplicación $\quad x(t)y(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} \frac{1}{2\pi}\ X(\omega)*Y(\omega)$

Convolución $\quad x(t)*y(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega)\ Y(\omega)$

Relación de Parseval $\quad E_x=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2d\omega$

$$E_x=\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2df \quad \text{julios/Hz}$$





Relación de Euler

$$e^{\pm j\theta}=\cos(\theta)\pm j\ sen(\theta)$$

$$cos(\theta)=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$$

$$sen(\theta)=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$

Recuerde: Números complejos en notación polar

Dado que la transformada de Fourier, $X(\omega)$, es una señal que toma valores complejos, vamos a ver la forma de multiplicar y dividir números complejos en notación polar. Consideraremos dos números complejos:

$$z_1=|z_1|e^{j\theta_1}$$

$$z_2=|z_2|e^{j\theta_2}$$

La multiplicación viene dada por la siguiente expresión:

$$z_1z_2=|z_1|e^{j\theta_1}|z_2|e^{j\theta_2}=|z_1z_2|e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

La división viene dada por la siguiente expresión:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|e^{j\theta_1}}{|z_2|e^{j\theta_2}}=\frac{|z_1|}{|z_2|}e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

2. **Ejercicio de clase:**

   Considere la señal $x(t) = e^{-at}u(t)$ con $a > 0$,

   a) Determine la expresión de la transformada de Fourier.

   b) Determine el módulo y la fase de $X(\omega)$.

   c) Determine $X(\omega)$ en $\omega = 0$.

   d) Determine $X(\omega)$ en $\omega = a$ y $\omega = -a$. ¿Qué relación hay entre ellos?

   Solución:

   a) $X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$

   b) $|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+w^2}}$ y $\angle X(\omega) = -arctan(\omega/a)$

   c) $X(0) = \frac{1}{a}$

   d) $X(a) = \frac{1}{a\sqrt{2}}e^{-j45^\circ}$ $X(-a) = \frac{1}{a\sqrt{2}}e^{j45^\circ}$. Tiene el mismo módulo y están desfasadas 90°.

   Desarrollo:

   a) *Partimos de la definición de la ecuación de análisis,*

   $$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

   Sustituimos $x(t) = e^{-at}u(t)$ y, como $u(t)$ es una señal que toma valores desde 0 a ∞, cambiamos los límites

   $$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t(a+j\omega)}dt = \frac{-1}{a+j\omega}e^{-t(a+j\omega)}|_0^\infty \\ &= \frac{-1}{a+j\omega}(0-1) = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

   b) *Dado que $X(\omega)$ es una división de números complejos, debemos calcular el módulo y la fase tanto del numerador como del denominador.*

   El numerador es el número real 1, por lo que el módulo es 1. Por otro lado, el denominador es un número complejo y su módulo es $\sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} = \sqrt{a^2+\omega^2}$. Esto quiere decir que el módulo es

   $$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+w^2}}$$

   En cuanto a la fase, el numerador tiene fase 0 porque es un número real positivo. Por otro lado, para calcular la fase del denominador tenemos que considerar la expresión $\angle X(z) = arctan(\Im(z)/\Re(z)) = arctan(\omega/a)$. Restando ambas fase obtenemos que

   $$\angle X(\omega) = 0 - arctan(\omega/a) = -arctan(\omega/a)$$

c) *Al evaluar las expresiones anteriores en $\omega = 0$ obtenemos*

$$|X(0)| = \frac{1}{\sqrt{a^2}} = \frac{1}{a}$$

$$\angle X(0) = -arctan(0/a) = 0$$

Esto quiere decir que $X(0) = \frac{1}{a}$.

d) *Evaluando las expresiones que obtuvimos anteriormente en $\omega = a$, obtenemos*

$$|X(a)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}a}$$

$$\angle X(a) = -arctan(a/a) = -arctan(1) = -0{,}78540$$

Para pasarlo a grados, utilizamos $\frac{-0{,}78540 \quad 180^\circ}{\pi} = -45^\circ$. Esto quiere decir,

$$X(a) = \frac{1}{\sqrt{2}a} e^{-j45^\circ}$$

Para $\omega = -a$, obtenemos

$$|X(-a)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}a}$$

$$\angle X(-a) = -arctan(-a/a) = -arctan(-1) = 0{,}78540$$

Para pasarlo a grados, utilizamos $\frac{-0{,}78540 \quad 180^\circ}{\pi} = 45^\circ$. En resumen,

$$X(-a) = \frac{1}{\sqrt{2}a} e^{j45^\circ}$$

3. **Ejercicio:**

Considere la señal $x(t) = e^{-at}u(t)$ cuya transformada de Fourier es

$$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

Determine $X(\omega)$ en $\omega = 2a$ y $\omega = -2a$.

Solución:

$X(2a) = \frac{1}{a\sqrt{5}}e^{-j63^\circ}$

$X(-2a) = \frac{1}{a\sqrt{5}}e^{j63^\circ}$

Desarrollo:

Realizando el mismo razonamiento que en el ejercicio anterior, para $\omega = 2a$*, obtenemos* $|X(2a)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+(2a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5a^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}a}$.

En cuanto a la fase, obtenemos $\angle X(a) = -arctan(2a/a) = -arctan(2) = -1{,}1071$ *rad, es decir* $\angle X(a) = -63^\circ$*. En resumen,*

$$X(2a) = \frac{1}{\sqrt{5}a}e^{-j63^o}$$

Para $\omega = -2a$*, tenemos* $|X(-2a)| = |X(2a)| = \frac{1}{\sqrt{5}a}$

En cuanto, a la fase $\angle X(-2a) = -\angle X(2a) = 63^\circ$*. En resumen,*

$$X(-2a) = \frac{1}{\sqrt{5}a}e^{j63^o}$$

4. **Ejercicio de clase:**

Considere la señal

$$x(t) = \begin{cases} A & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

a) Determine la expresión de la transformada de Fourier.

b) Determine la frecuencia positiva más pequeña para la que $X(\omega) = 0$.

c) Considere que la frecuencia del apartado anterior es el ancho de banda de $x(t)$. Determine el ancho de banda de $x(t)$ en Hz cuando $T = 1$ ms, $T = 1$ μs, y $T = 1$ ηs.

Soluciones:

a) $X(\omega) = 2A\frac{\text{sen}(\frac{\omega T}{2})}{\omega}$

b) $W = \frac{2\pi}{T}$ rad/s

c) $B = 1$ kHz, $B = 1$ MHz, $B = 1$ GHz.

Desarrollo:

a*)*

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-T/2}^{T/2} Ae^{-j\omega t}dt = \frac{Ae^{-j\omega t}|_{-T/2}^{T/2}}{-j\omega} = \frac{A(e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2})}{-j\omega}$$

Recordemos que sen$(\theta) = \frac{1}{j2}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$*. Por tanto, transformaremos la expresión de* $X(\omega)$ *que determinamos anteriormente en la siguiente (se marcan en rojo los cambios más importantes realizados en cada paso):*

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{2A(e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2})}{-2j\omega}$$

Utilizando la relación de Euler, obtenemos

$$X(\omega) = \frac{2A(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{2j\omega} = \frac{2A sen(\omega T/2)}{\omega}$$

b*) Para determinar la primera frecuencia por la que* $X(\omega)$ *pasa por cero llega con ver cuándo* $\text{sen}(\omega T/2) = 0$*. Sabemos que esto ocurre cuando* $\omega T/2 = \pi$*, es decir cuando*

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

c*) Si consideramos que* $W = \frac{2\pi}{T}$ *es el ancho de banda expresado en rad/s, sabemos también que* $B = \frac{W}{2\pi} = \frac{1}{T}$ *es el ancho de banda en Hz. Evaluando, llegamos a los siguientes resultados:*

- *Para* $T = 1$ *ms,* $B = 1$ *kHz*
- *Para* $T = 1$ μs*,* $B = 1$ *MHz*
- *Para* $T = 1$ ηs*,* $B = 1$ *GHz*

5. **Ejercicio:**

Determine la tranformada de Fourier de $x(t) = \delta(t)$ y de $y(t) = \delta(t - t_0)$.

Para hacer este ejercicio es importante recordar las siguientes propiedades de la señal delta de Dirac:

$$\textbf{Propiedad 1} \quad x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$\textbf{Propiedad 2} \quad x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

$$\textbf{Propiedad 3} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = 1$$

Soluciones:

$TF\{\delta(t)\} = 1$

$TF\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0}$

Desarrollo:

Comencemos calculando la transformada de Fourier de $\delta(t)$,

$$X(\omega) = TF\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt$$

Utilizando la **Propiedad 1**, *obtenemos $\delta(t)e^{-j\omega t} = \delta(t)e^{-j\omega 0}$ y podemos escribir la integral anterior como sigue*

$$X(\omega) = TF\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega 0}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

Para realizar el último paso, hemos utilizado la **Propiedad 3**.

De forma muy parecida se puede calcular la transformada de Fourier de $y(t) = \delta(t - t_0)$ tenemos

$$Y(\omega) = TF\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-j\omega t}dt$$

Utilizando la **Propiedad 2**, *obtenemos $\delta(t - t_0)e^{-j\omega t} = \delta(t - t_0)e^{-j\omega t_0}$, lo que nos permite escribir*

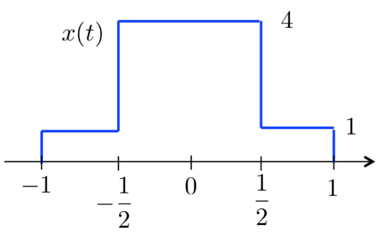
$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-j\omega t_0}dt = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = e^{-j\omega t_0}$$

6. **Ejercicio de clase:**

Dada la siguiente transformada básica:

$$p(t) = \begin{cases} A & -T < t < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \longrightarrow 2A\frac{\text{sen}(\omega T)}{\omega}$$

a) Determine la transformada de Fourier de la señal de la figura.



b) Determine la transformada de $z(t) = -x(t-1)$. ¿Qué propiedad utilizó?

Solución:

a) $X(\omega) = 2\frac{\text{sen}(\omega)}{\omega} + 6\frac{\text{sen}(\frac{\omega}{2})}{\omega}$

b) $Z(\omega) = -X(\omega)e^{-j\omega}$

Desarrollo:

a) *En este caso tenemos la suma de dos pulsos*

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & -1 < t < 1 \\ 0 & \textit{resto} \end{cases} \longrightarrow X_1(\omega) = 2\frac{\text{sen}(\omega)}{\omega}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 3 & -1/2 < t < 1/2 \\ 0 & \textit{resto} \end{cases} \longrightarrow X_2(\omega) = 6\frac{\text{sen}(\omega/2)}{\omega}$$

Sumando estas transformadas, obtenemos

$$X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) = 2\frac{\text{sen}(\omega)}{\omega} + 6\frac{\text{sen}(\frac{\omega}{2})}{\omega}$$

b) *Utilizaremos la propiedad de desplazamiento en tiempo que nos indica lo siguiente*

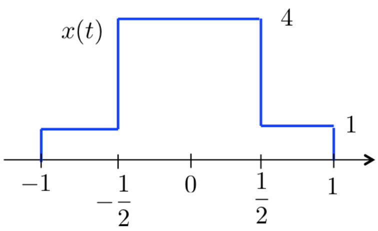
$$TF\{x(t-t_0)\} = TF\{x(t)\}e^{-j\omega t_0}$$

Y la de linealiad (para el cambio de signo). Así llegamos a la siguiente expresión,

$$Z(\omega) = -X(\omega)e^{-j\omega}$$

7. **Ejercicio:**

Utilizando la tabla de las propiedades que aparecen en el apartado 1 de este boletín, determine la transformada de $y(t) = x(-t)$ para la siguiente señal:



Obtenga que $X(\omega) = Y(\omega)$ para esa señal. ¿Qué propiedad utilizó?

Solución:

$Y(\omega) = 2\frac{\text{sen}(\omega)}{\omega} + 6\frac{\text{sen}(\frac{\omega}{2})}{\omega}$

Desarrollo:

Utilizaremos la propiedad de inversión en el tiempo. Dado que $y(t) = x(-t)$*, sabemos que*

$$\begin{aligned} Y(\omega) = X(-\omega) &= 2\frac{\text{sen}(-\omega)}{-\omega} + 6\frac{\text{sen}(\frac{-\omega}{2})}{-\omega} \\ &= -2\frac{\text{sen}(-\omega)}{\omega} - 6\frac{\text{sen}(\frac{-\omega}{2})}{\omega} \end{aligned}$$

Si además utilizamos $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$*, llegamos a la expresión*

$$Y(\omega) = 2\frac{\text{sen}(\omega)}{\omega} + 6\frac{\text{sen}(\frac{\omega}{2})}{\omega}$$

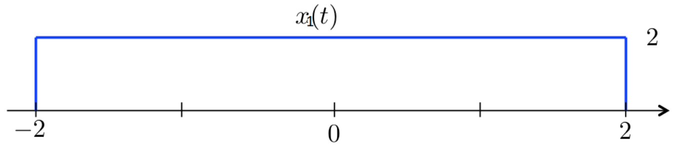
8. **Ejercicio:**

A partir de la siguiente transformada básica,

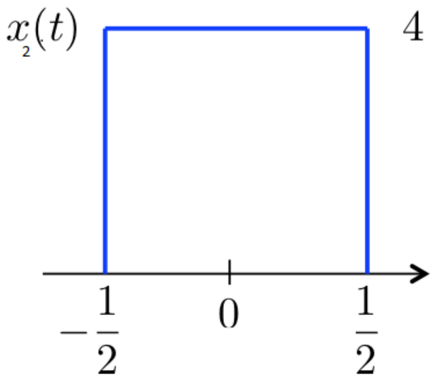
$$p(t) = \begin{cases} A & -T < t < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \longrightarrow 2A\frac{\sin(\omega T)}{\omega}$$

determine la transformada de Fourier de los tres pulsos:

a) La señal $x_1(t)$ dada en la siguiente figura.



b) La señal $x_2(t)$ dada en la siguiente figura.



c) Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier, determine $X_2(\omega)$ a partir de $X_1(\omega)$. ¿Qué propiedad utilizó?

d) $y_1(t) = 2[u(t) - u(t-4)]$. ¿Qué propiedad utilizó?

e) $y_2(t) = 4[u(t+1) - u(t)]$. ¿Qué propiedad utilizó?

<u>Soluciones</u>:

a) $X_1(\omega) = 4\frac{\text{sen}(2\omega)}{\omega}$

b) $X_2(\omega) = 8\frac{\text{sen}(\frac{\omega}{2})}{\omega}$

c) $X_2(\omega) = 2X_1(\omega/4)$

d) $Y_1(\omega) = 4\frac{\text{sen}(2\omega)}{\omega}e^{-j2\omega}$

e) $Y_2(\omega) = 8\frac{\text{sen}(\frac{\omega}{2})}{\omega}e^{j\omega/2}$

<u>Desarrollo</u>:

a) *Se puede observar que $T = 2$ y $A = 2$, por lo que*

$$X_1(\omega) = 2A\frac{\text{sen}(\omega T)}{\omega} = 4\frac{\text{sen}(2\omega)}{\omega}$$

b) *Se puede observar que $T = 1/2$ y $A = 4$, por lo que*

$$X_1(\omega) = 2A\frac{\text{sen}(\omega T)}{\omega} = 8\frac{\text{sen}(\frac{\omega}{2})}{\omega}$$

c) *Utilizaremos la propiedad de escalado en tiempo con $a = 4$ y la propiedad de linealidad porque no coincide la amplitud. Podemos escribir,*

$$x_2(t) = 2x_1(at) \quad con \quad a = 4$$

Por tanto,

$$X_2(\omega) = 2\frac{1}{a}X_1(\frac{\omega}{a}) = 2\frac{1}{4}X_1(\frac{\omega}{4}) = \frac{1}{2}X_1(\frac{\omega}{4})$$

Vamos a comprobarlo utilizando el resultado del apartado a)

$$\frac{1}{2}X_1(\frac{\omega}{4}) = \frac{4}{2}\frac{\text{sen}(2\frac{\omega}{4})}{\frac{\omega}{4}} = 8\frac{\text{sen}(\omega/2)}{\omega}$$

d) *Utilizaremos la señal $x_1(t)$ del apartado a) porque tiene la misma duración que $y_1(t)$. Podemos ver que $y_1(t) = x_1(t-2)$. Utilizando la propiedad de desplazamiento en tiempo, obtenemos*

$$Y_1(\omega) = X_1(\omega)e^{-j2\omega} = 4\frac{\sin(2\omega)}{\omega}e^{-j2\omega}$$

e) *Utilizaremos la señal $x_2(t)$ del apartado b) porque tiene la misma duración que $y_2(t)$. Podemos ver que $y_2(t) = x_2(t + 1/2)$. Utilizando la propiedad de desplazamiento en tiempo, obtenemos*

$$Y_2(\omega) = X_2(\omega)e^{j\omega/2} = 8\frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega}e^{j\omega/2}$$

9. **<u>Ejercicio de clase</u>**

Considere la siguiente transformada básica

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \longrightarrow X(\omega) = \pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Utilizando la relación de Euler y propiedad de desplazamiento en frecuencia, determine la transformada de Fourier de las siguientes señales

a) $x_1(t) = \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

b) $x_2(t) = \sin(2\pi t)$. Dibuje el módulo y fase de $x(t)$ y $x_2(t)$.

<u>Soluciones</u>:

a) $X_1(\omega) = \pi e^{j\pi/4}\delta(\omega - 2\pi) + \pi e^{-j\pi/4}\delta(\omega + 2\pi)$

b) $X_2(\omega) = \pi e^{-j\pi/2}\delta(\omega - 2\pi) + \pi e^{j\pi/2}\delta(\omega + 2\pi)$

<u>Desarrollo</u>:

a*) De la relación de Euler se obtiene:*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{e^{j(2\pi t + \frac{\pi}{4})} + e^{-j(2\pi t + \frac{\pi}{4})}}{2} \\ &= \frac{e^{j2\pi t}e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{-j2\pi t}e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2} \end{aligned}$$

Utilizando la transformada de la señal constante

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow 2\pi\delta(\omega) \\ \frac{1}{2} &\longrightarrow \pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

Por otro lado, utilizando la propiedad de desplazamiento en frecuencia, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}e^{j2\pi t} &\longrightarrow \pi\delta(\omega - 2\pi) \\ \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} &\longrightarrow \pi\delta(\omega + 2\pi) \end{aligned}$$

De esta forma, obtenemos

$$x_1(t) = \frac{e^{j2\pi t}e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{-j2\pi t}e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2} \longrightarrow \pi\delta(\omega - 2\pi)e^{j\frac{\pi}{4}} + \pi\delta(\omega + 2\pi)e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

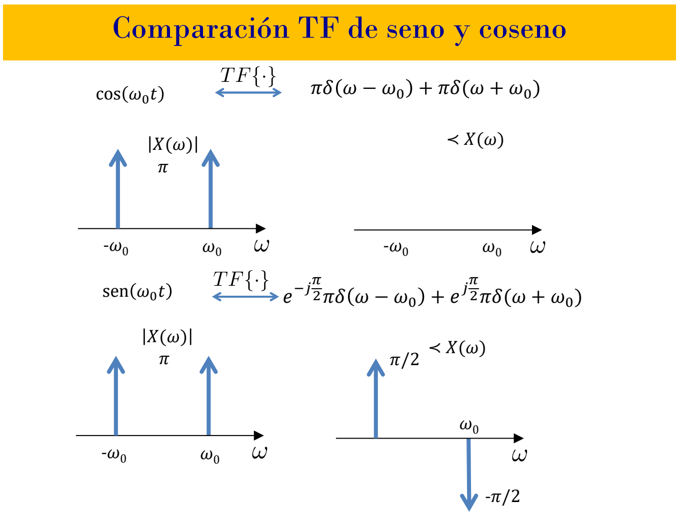
b) *De las igualdades trigonométicas, sabemos que*

$$x_2(t) = \sin(2\pi t) = \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Utilizando el mismo razonamiento que en el apartado anterior obtenemos,

$$X_2(\omega) \quad = \quad \pi\delta(\omega - 2\pi)e^{-j\frac{\pi}{2}} + \pi\delta(\omega + 2\pi)e^{j\frac{\pi}{2}}$$

La siguiente figura representa las Transformadas de Fourier de $\sin(\omega_0 t)$ *y* $\cos(\omega_0 t)$



10. **Ejercicio**

Considere la siguiente transformada básica

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \longrightarrow X(\omega) = \pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Utilizando la propiedad de desplazamiento en tiempo, determine la transformada de Fourier de la siguiente señal:

$$x_1(t) = \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Soluciones:

$X_1(\omega) = \pi e^{j\pi/4}\delta(\omega - 2\pi) + \pi e^{-j\pi/4}\delta(\omega + 2\pi)$

Desarrollo:

Sabemos que un desplazamiento $x(t - t_0)$ equivale a un cambio de fase $\phi = -\omega_1 t_0$ (llamaremos ω_1 a la frecuencia del coseno para no confundirla con ω empleada en la transformada de Fourier). De la expesión de $x_1(t)$, sabemos que $\omega_1 = 2\pi$ y que $\phi = \frac{\pi}{4}$. Por lo que obtenemos que $t_0 = -\frac{\phi}{\omega_1} = -\frac{\pi}{8\pi} = -\frac{1}{8}$.

De esta forma, obtenemos

$$x_1(t) = x(t - (-\frac{1}{8})) = \longrightarrow X_1(\omega) = X(\omega)e^{-j\omega(-\frac{1}{8})} = X(\omega)e^{j\frac{\omega}{8}}$$

Sustituyendo la expresión de $X(\omega)$ dada en el enunciado, obtenemos

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= (\pi\delta(\omega - 2\pi) + \pi\delta(\omega + 2\pi))e^{j\frac{\omega}{8}} \\ &= \pi\delta(\omega - 2\pi)e^{j\frac{\omega}{8}} + \pi\delta(\omega + 2\pi)e^{j\frac{\omega}{8}} \end{aligned}$$

Finalmente, recordemos la propiedad de la multiplicación por una delta desplazada nos da el valor de la señal en el desplazamiento multiplicado por la delta desplazada, es decir

$$y(\omega)\delta(\omega - \omega_0) = y(\omega_0)\delta(\omega - \omega_0)$$

Si la aplicamos a la expresión de $X_1(\omega)$, podemos observar lo siguiente

$$\delta(\omega - 2\pi)e^{j\frac{\omega}{8}} = \delta(\omega - 2\pi)e^{j\frac{2\pi}{8}} = \delta(\omega - 2\pi)e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\delta(\omega + 2\pi)e^{j\frac{\omega}{8}} = \delta(\omega + 2\pi)e^{j\frac{-2\pi}{8}} = \delta(\omega + 2\pi)e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

De lo que obtenemos,

$$X_1(\omega) = \pi\delta(\omega - 2\pi)e^{j\frac{\pi}{4}} + \pi\delta(\omega + 2\pi)e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

11. **Ejercicio:**

Determine la transformada de Fourier de las siguiente señales

a) $x(t) = \cos(2\pi t) + \cos(4\pi t)$

b) $x(t) = \cos(2\pi t) + \sin(4\pi t)$

Soluciones:

a) $X(\omega) = \pi\delta(\omega - 2\pi) + \pi\delta(\omega + 2\pi) + \pi\delta(\omega - 4\pi) + \pi\delta(\omega + 4\pi)$

b) $X(\omega) = \pi\delta(\omega - 2\pi) + \pi\delta(\omega + 2\pi) + \pi e^{-j\pi/2}\delta(\omega - 4\pi) + \pi e^{j\pi/2}\delta(\omega + 4\pi)$

Desarrollo:

a) Siguiendo el mismo razonamiento del ejercicio anterior se obtiene

$$x_1(t) = \cos(2\pi t) \longrightarrow X_1(\omega) = \pi\delta(\omega - 2\pi) + \pi\delta(\omega + 2\pi)$$
$$x_2(t) = \cos(4\pi t) \longrightarrow X_1(\omega) = \pi\delta(\omega - 4\pi) + \pi\delta(\omega + 4\pi)$$

Finalmente, por la propiedad de linealidad obtenemos

$$X(\omega) = \pi\delta(\omega - 2\pi) + \pi\delta(\omega + 2\pi) + \pi\delta(\omega - 4\pi) + \pi\delta(\omega + 4\pi)$$

b) Antes de realizar la transformada de Fourier, pasaremos la función seno a coseno:

$$x(t) = \cos(2\pi t) + \sin(4\pi t) = \cos(2\pi t) + \cos(4\pi t - \pi/2)$$

El cálculo de la transformada de Fourier de la primera señal es inmediato,

$$x_1(t) = \cos(2\pi t) \longrightarrow X_1(\omega) = \pi\delta(\omega - 2\pi) + \pi\delta(\omega + 2\pi)$$

Para la segunda señal, tenemos

$$\begin{aligned} x_2(t) = \cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(e^{j(4\pi t - \frac{\pi}{2})} + e^{-j(4\pi t - \frac{\pi}{2})}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{j4\pi t}e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j4\pi t}e^{j\frac{\pi}{2}}\right) \end{aligned}$$

Partimos de la trasformada de la señal $\delta(t)$ y utilizamos la propiedad de desplazamiento en frecuencia:

$$\begin{aligned} \delta(t) &\longrightarrow 1 \\ e^{j4\pi t} &\longrightarrow 2\pi\delta(\omega - 4\pi) \\ e^{-j4\pi t} &\longrightarrow 2\pi\delta(\omega + 4\pi) \end{aligned}$$

Utilizando la propiedad de linealidad se obtiene

$$\begin{aligned} X_2(\omega) &= \frac{1}{2}\left(2\pi\delta(\omega - 4\pi)e^{-j\frac{\pi}{2}} + 2\pi\delta(\omega + 4\pi)e^{j\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \pi\delta(\omega - 4\pi)e^{-j\frac{\pi}{2}} + \pi\delta(\omega + 4\pi)e^{j\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Finalmente, por la propiedad de linealidad

$$X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) = \pi\delta(\omega - 2\pi) + \pi\delta(\omega + 2\pi) + \pi e^{-j\pi/2}\delta(\omega - 4\pi) + \pi e^{j\pi/2}\delta(\omega + 4\pi)$$

12. **Ejercicio por ordenador:**

En un fichero, escriba el código correspondiente a los siguientes pasos:

a) Crear tres cosenos $x_i(t) = A_i \cos(2\pi f_i t)$.

b) Sumar esos cosenos $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$.

c) Calcular la transformada de Fourier de los cosenos $x_i(t)$.

d) Calcular la transformada de Fourier de la señal $x(t)$.

e) Representar en una sola figura (cuatro subplots), las señales $x_i(t)$ y $x(t)$.

f) Representar en una sola figura (cuatro subplots), las transformadas de Fourier de las señales $x_i(t)$ y $x(t)$.

Para generar estos cosenos es importante que utilice un vector

```
t=1/fs:1/fs:T;
```

donde T es la duración en tiempo (por ejemplo, utilice T=0.1 y fs=48000). Represente estas señales.

Obtenga la transformada de Fourier de cada señal utilizando el siguiente código

```
Ls=length(t);
f=-fs/2+fs/Ls:fs/Ls:fs/2;  %Declaración del eje de frecuencias
Xf=fftshift(fft(x));       % Transformada de Fourier de x
```

Represente el módulo normalizado de la transformada utilizando

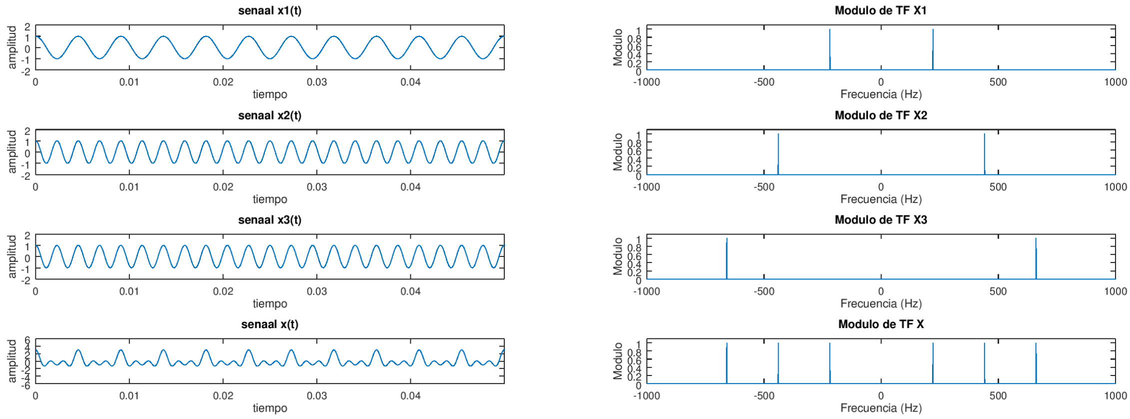
```
plot(f,abs(Xf)/max(abs(Xf))); %Dibujo del módulo de Xf
xlabel('Frecuencia (Hz)');
ylabel('Modulo');
title('Modulo de TF')
axis([-1000 1000 0 1.1]);   %Ajuste de los ejes de la figura
```

Pruebe los siguientes casos:

- $A_1 = A_2 = A_3 = 1$ y $f_1 = 220$ Hz, $f_2 = 2f_1$, $f_3 = 3f_1$.
- $A_1 = A_2 = 1$ $A_3 = 2$ y $f_1 = 220$ Hz, $f_2 = 440$, $f_3 = 550$.
- $A_1 = A_2 = 1$ $A_3 = -1$ y $f_1 = 100$ Hz, $f_2 = 2f_1$, $f_3 = 3f_1$.

Soluciones:

Las siguientes figuras muestran los resultados para el primer caso. Fíjese que pueden distinguirse las frecuencias de los cosenos en la gráfica de la transformada de Fourier.


senaal x1(t)
amplitud
tiempo
senaal x2(t)
senaal x3(t)
senaal x(t)
Modulo de TF X1
Modulo
Frecuencia (Hz)
Modulo de TF X2
Modulo de TF X3
Modulo de TF X

13. **Ejercicio por ordenador:**

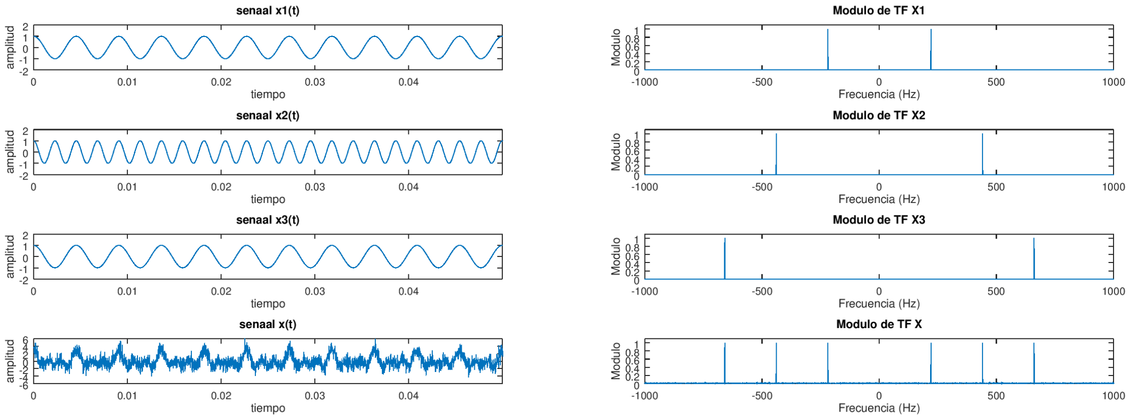
A la señal del ejercicio anterior, súmele un ruido blanco gaussiano utilizando el siguiente código

```
x = x + randn(1,Ls);
```

Represente otra vez las señales y sus transformadas de Fourier. Compárelas con las obtenidas en el ejercicio anterior. ¿Qué observa en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia?

Soluciones:

Las siguientes figuras muestran los resultados para el primer caso. Fíjese que pueden distinguirse las frecuencias de los cosenos en la gráfica de la transformada de Fourier aunque la señal esté distorsionada por el ruido.



14. **Ejercicio por ordenador:**

El fichero *ejemplo.wav* contiene una señal de audio con calidad Compact Disc con frecuencia de muestreo es fs $= 44100$ Hz y duración es $Ts = 8$ s. A partir de ese fichero de audio, utilice el mismo código que en los ejercicios anteriores para obtener y representar la transformada de Fourier. ¿Cuáles son las frecuencias más importante?

Soluciones: