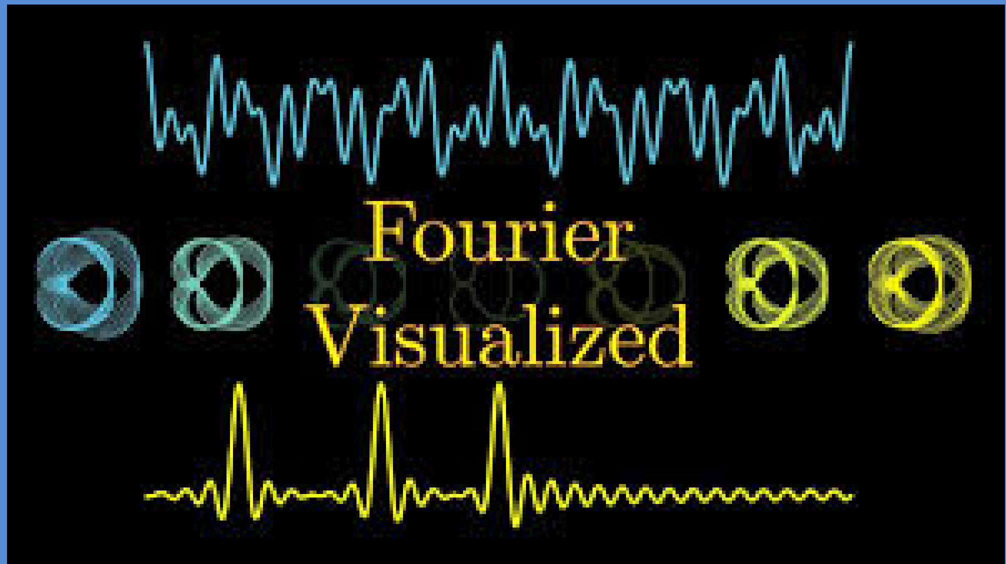
TEMA 2: Representación en frecuencia



Índice

Contenido:

8. Propiedad de convolución (cont.)

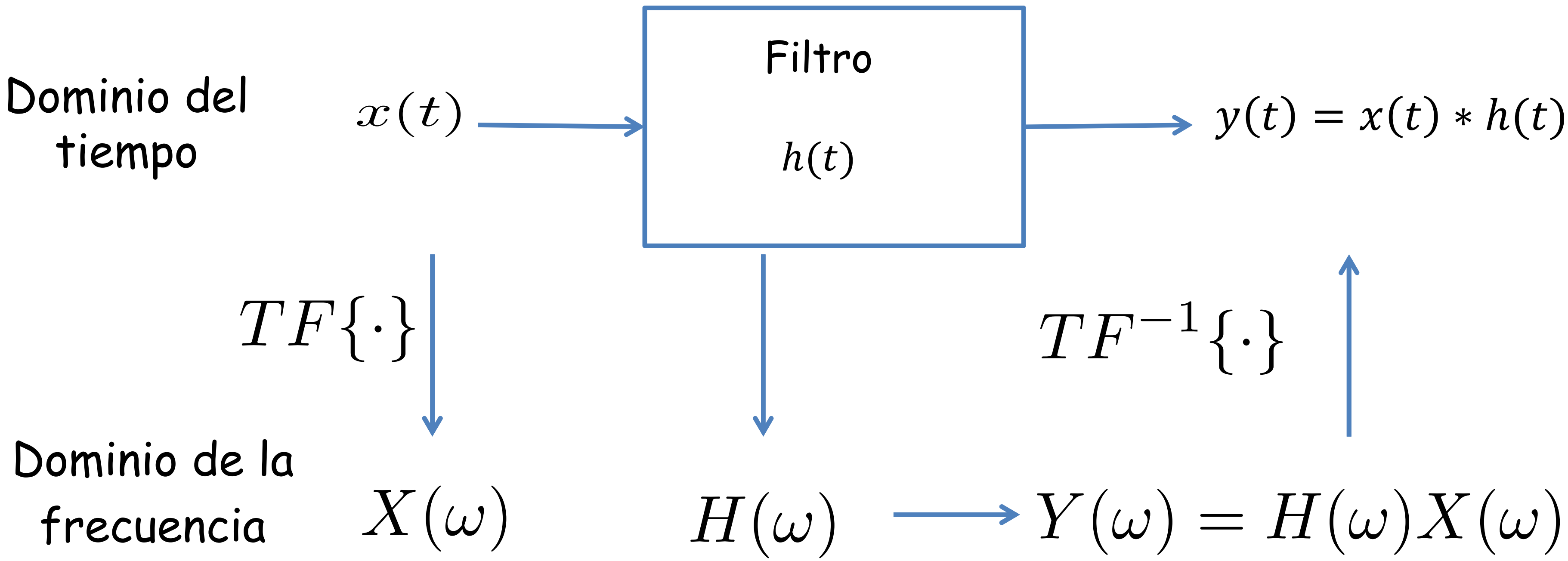
9. Propiedad de multiplicación o de modulación

8

Propiedad de convolución (cont.)

Filtrado

La propiedad de convolución es fundamental para entender el concepto de filtrado.



Respuesta de un sistema LTI

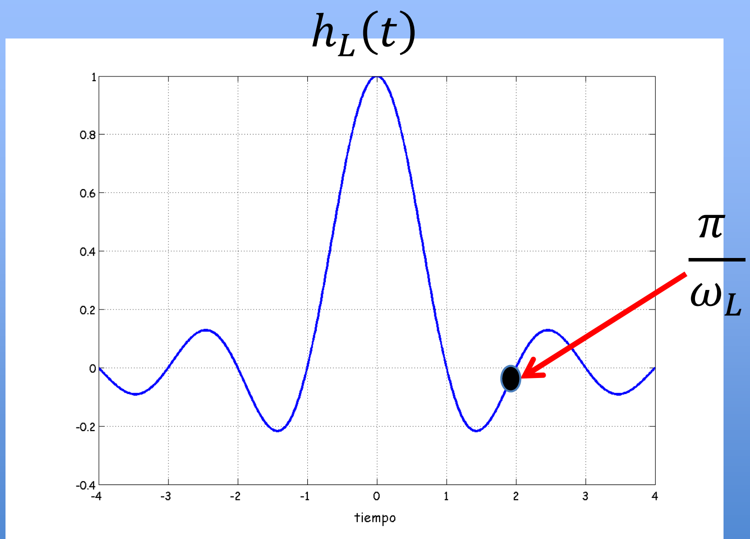
- La ventaja del dominio de la frecuencia es que la respuesta de un sistema se determina mediante un simple producto.
- Observar que aunque las entradas y los sistemas sean reales, $X(\omega)$ y $H(\omega)$ son en general complejos.
- La multiplicación de números complejos es particularmente sencilla cuando $X(\omega)$ y $H(\omega)$ se representan en coordenadas polares

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} |Y(\omega)| & = & |H(\omega)||X(\omega)| \\ \angle Y(\omega) & = & \angle H(\omega) + \angle X(\omega) \end{array} \right.$$

Filtro paso bajo ideal

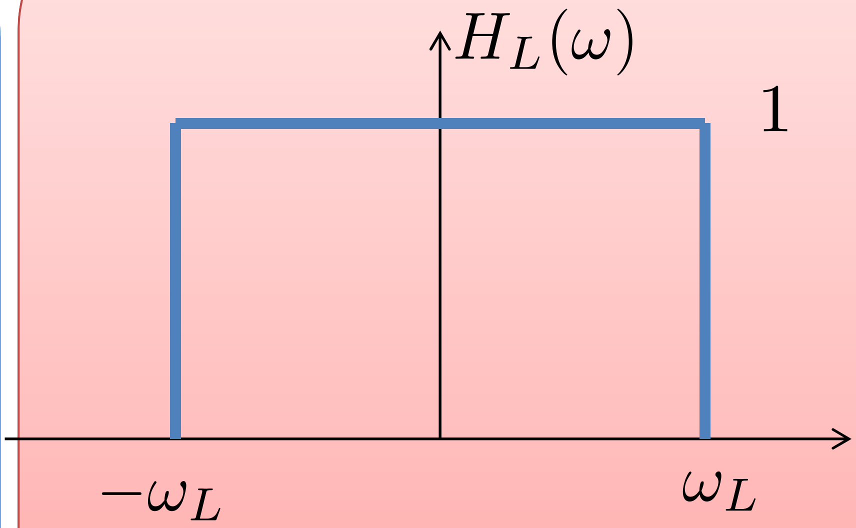
- Deja pasar sin alterar la amplitud ni la fase de las frecuencias bajas en el rango $-\omega_L < \omega < \omega_L$ y elimina completamente las restantes.
- ω_L es el **ancho de banda** del filtro en rad/s.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$



$$h_L(t) = \frac{\sin \omega_L t}{\pi t}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$



$$H_L(\omega) = \begin{cases} 1 & -\omega_L < \omega < \omega_L \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Filtro paso alto ideal

- Elimina completamente las frecuencias bajas en el rango $-\omega_H < \omega < \omega_H$ y deja pasar las restantes sin alterar su amplitud ni su fase.
- ω_H es el ancho de las frecuencias bajas eliminadas.

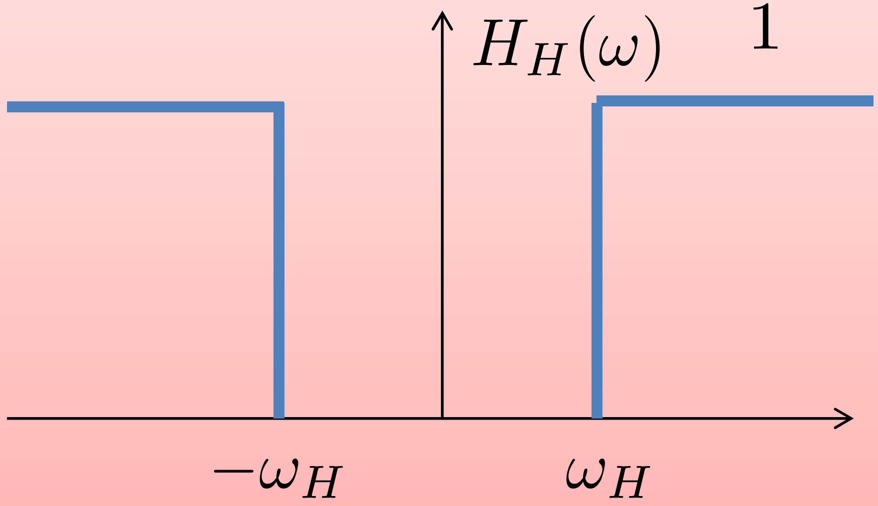
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$h_H(t) = \delta(t) - h_L(t)$$

$$TF^{-1}\{\cdot\}$$

$$H_H(\omega) = 1 - H_L(\omega)$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

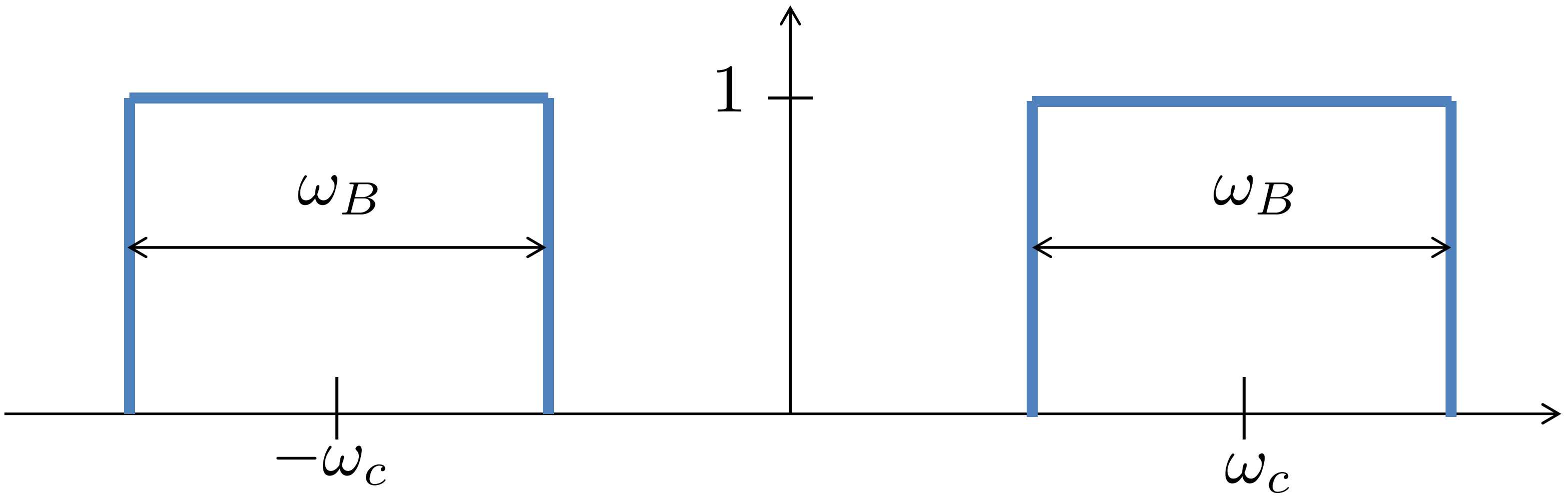


$$H_H(\omega) = \begin{cases} 0 & -\omega_H < \omega < \omega_H \\ 1 & \text{resto} \end{cases}$$

Filtro paso banda ideal

- Deja pasar sin alterar la amplitud ni la fase de las frecuencias en torno a una **frecuencia central** ω_c y elimina completamente las restantes.
- ω_B es el **ancho de de banda** del filtro.

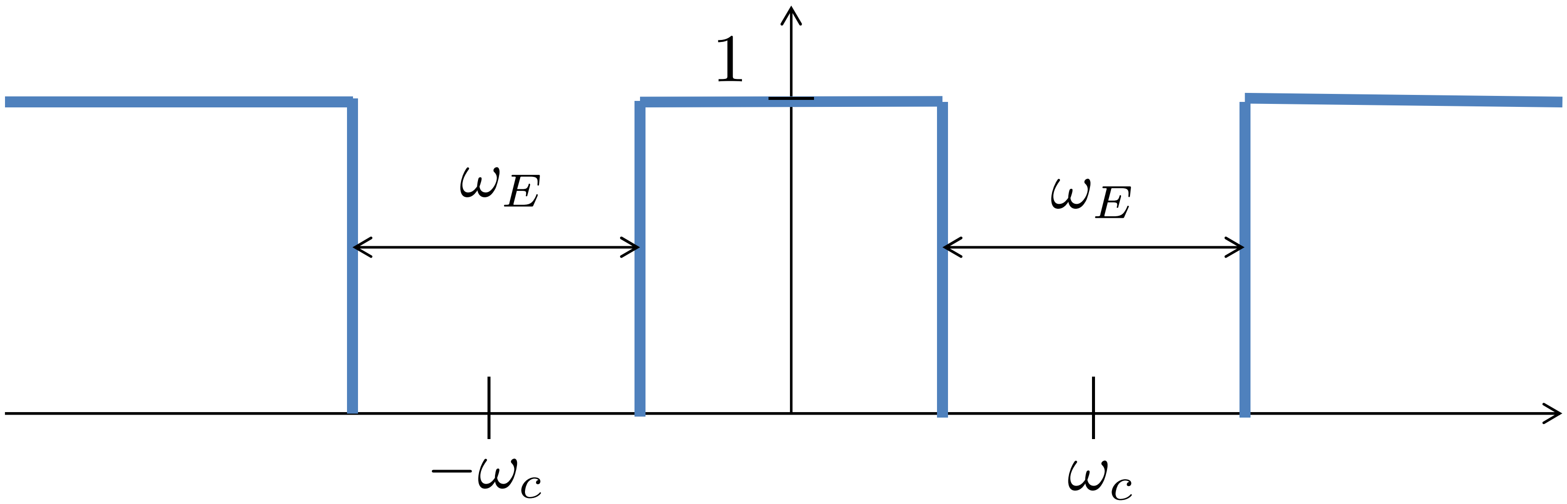
$$H_B(\omega) = \begin{cases} 1 & -\omega_c - \frac{\omega_B}{2} < \omega < -\omega_c + \frac{\omega_B}{2} \\ 1 & \omega_c - \frac{\omega_B}{2} < \omega < \omega_c + \frac{\omega_B}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



Filtro banda eliminada ideal

- Elimina las frecuencias en torno a una frecuencia central ω_c y deja pasar las restantes sin alterar su amplitud ni su fase
- ω_E es el **ancho de las frecuencias eliminadas.**

$$H_E(\omega) = \begin{cases} 0 & -\omega_c - \frac{\omega_E}{2} < \omega < -\omega_c + \frac{\omega_E}{2} \\ 0 & \omega_c - \frac{\omega_E}{2} < \omega < \omega_c + \frac{\omega_E}{2} \\ 1 & \text{resto} \end{cases}$$

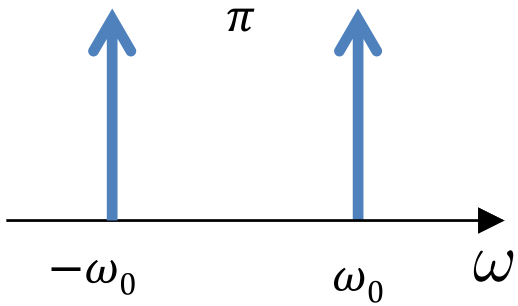


Ejemplo de filtros ideales

- Vamos a ver el efecto de los filtros ideales cuando su entrada es una suma de cosenos.
- Recordemos la transformada de Fourier de un coseno.

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} \longleftrightarrow \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\xleftrightarrow{TF\{\cdot\}}$$

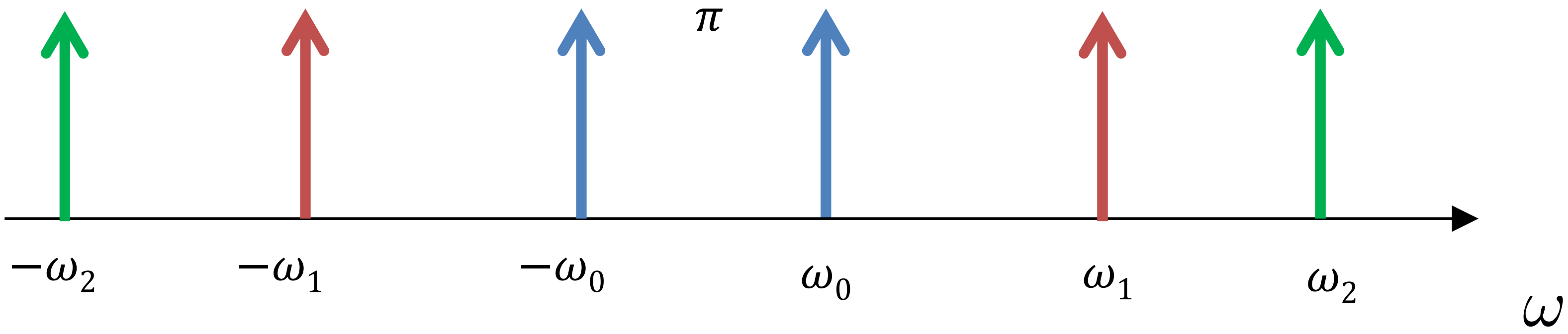


Ejemplo de filtro paso bajo ideal

Dominio del tiempo

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$$

Dominio de la frecuencia

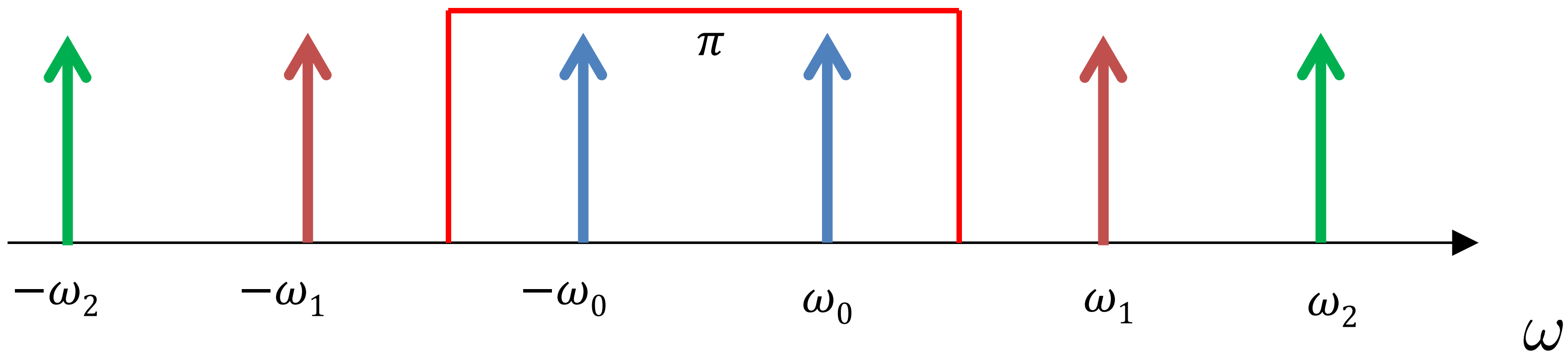


Ejemplo de filtro ideal

Dominio del tiempo

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$$

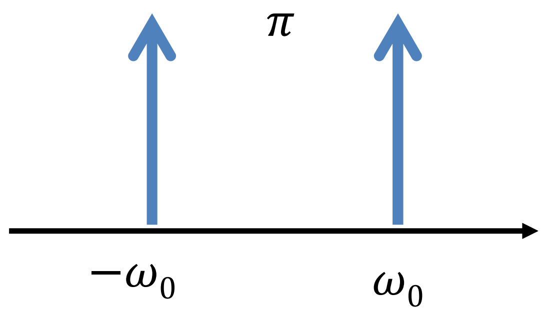
Dominio de la frecuencia



Dominio del tiempo

$$y(t) = \cos(\omega_0 t)$$

Dominio de la frecuencia

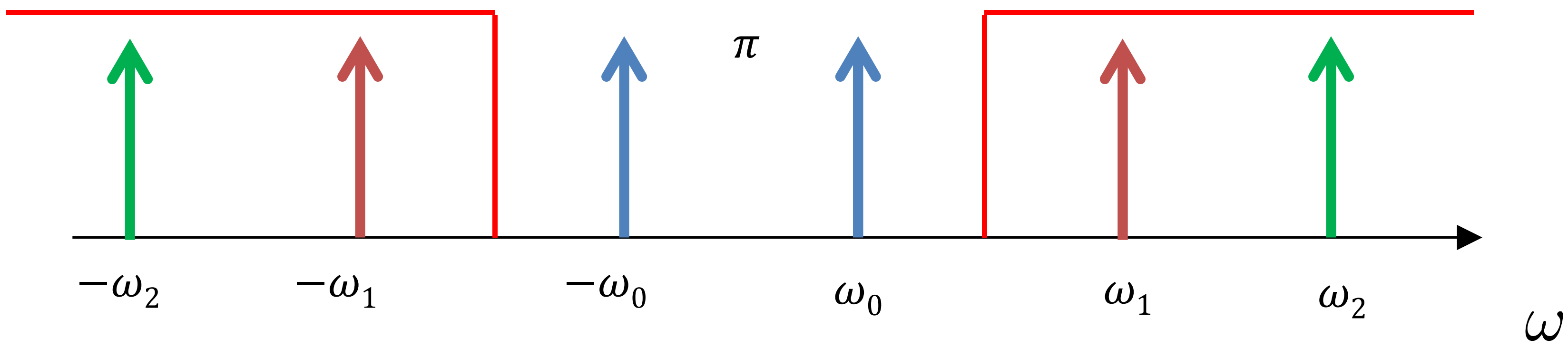


Ejemplo de filtro paso alto ideal

Dominio del tiempo

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$$

Dominio de la frecuencia



Señal recuperada

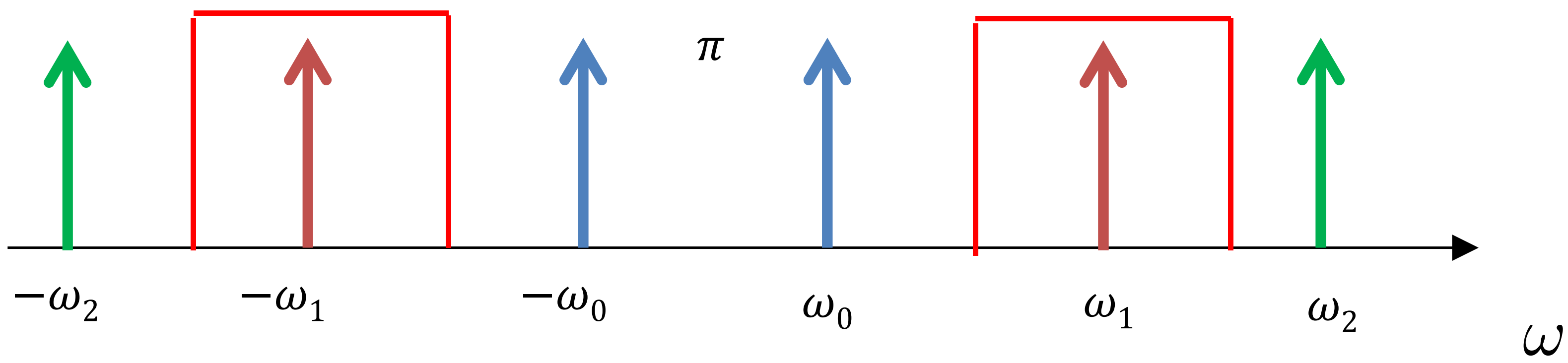
$$y(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$$

Ejemplo de filtro paso banda ideal

Dominio del tiempo

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$$

Dominio de la frecuencia



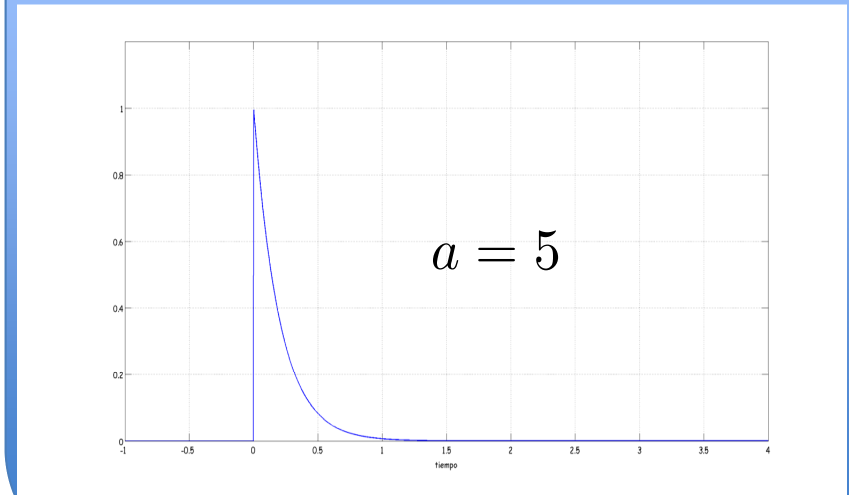
Señal recuperada

$$y(t) = \cos(\omega_1 t)$$

Filtros reales

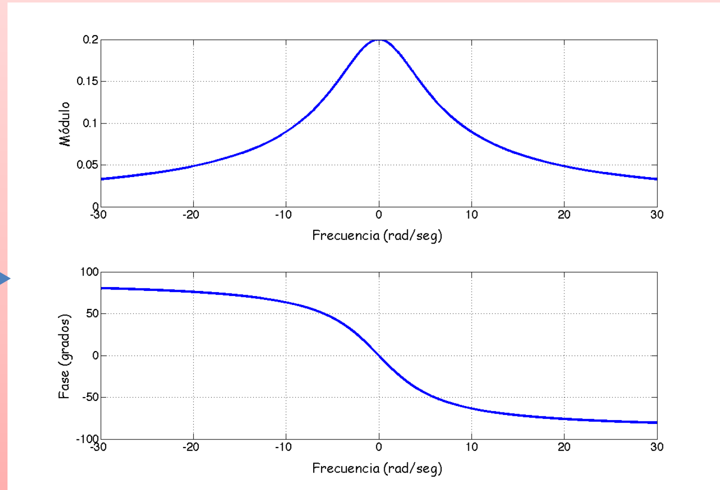
- La respuesta del filtro tiene módulo y fase.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$



$$TF\{\cdot\}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

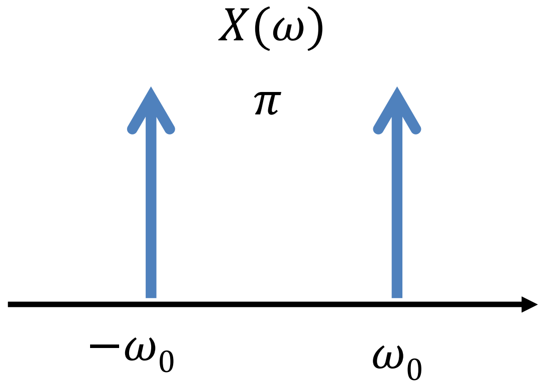


rad/s

Ejemplo de filtro paso bajo real

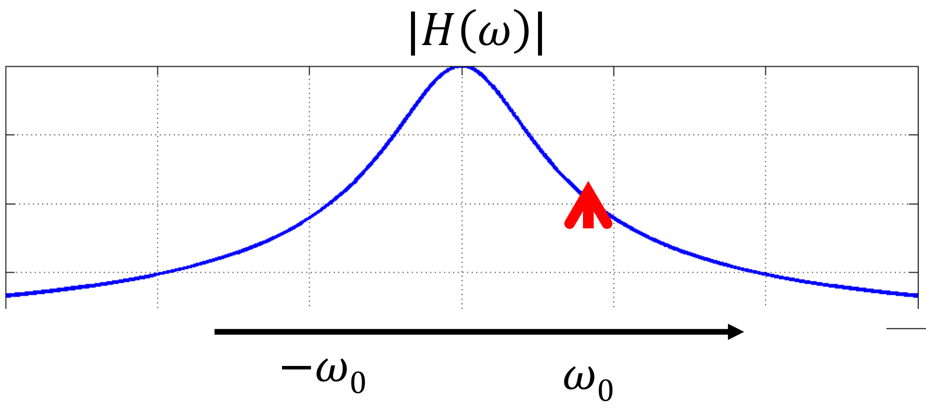
- Consideremos que la señal de entrada es un coseno:

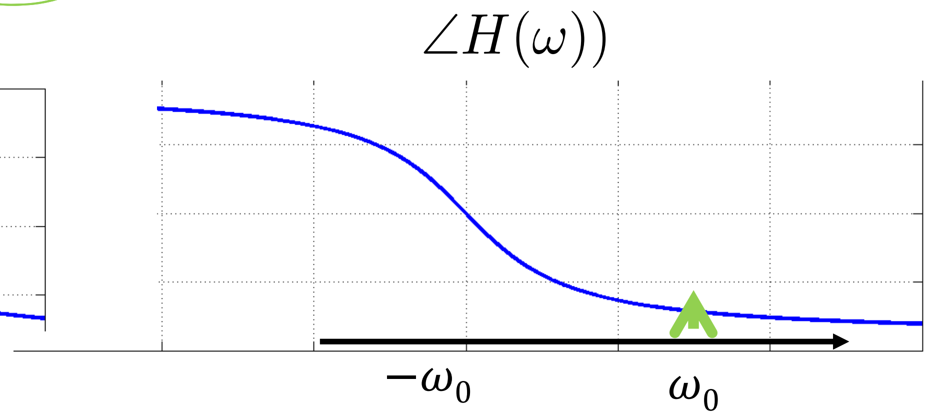
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \emptyset) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}}$$



- La señal de salida será

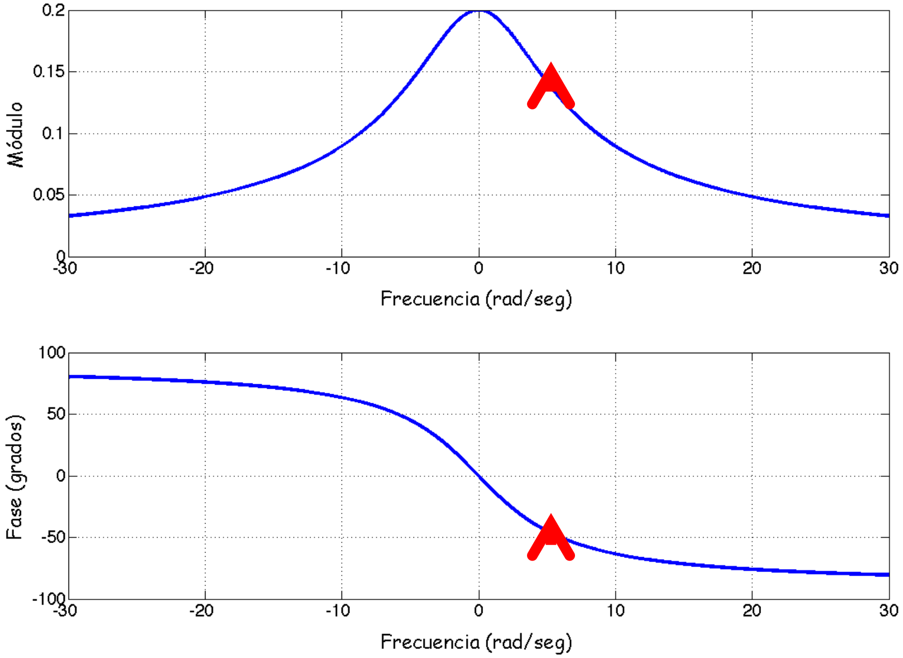
$$y(t) = A|H(\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \phi + \angle H(\omega_0))$$





Ejemplo de filtro paso bajo real

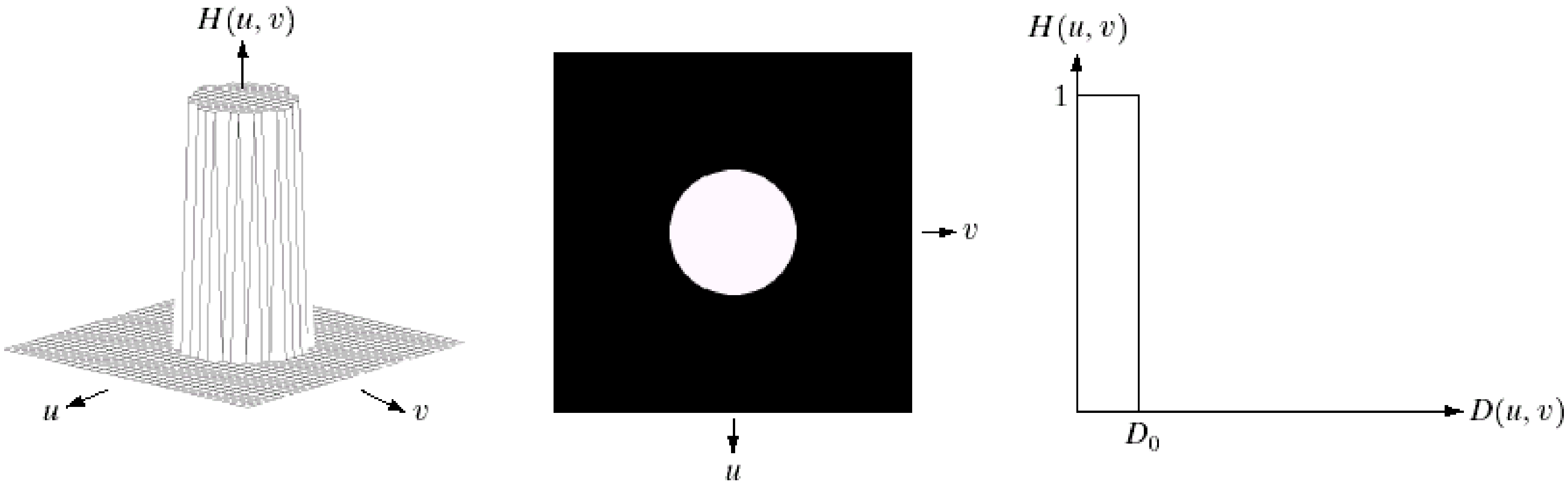
- Consideremos que la entrada es $x(t) = 10\cos(2\pi\, t) \longrightarrow \omega_0 = 2\pi$
- Y que el filtro tiene la siguiente respuesta en frecuencia



- La salida será $y(t) = 0.15\cos(2\pi\, t - \pi/4)$

Filtro paso bajo 2D ideal

$$H(u,v)=\begin{cases}0 & \text{si } D(u,v)>D_0\\ 1 & \text{si } D(u,v)\le D_0\end{cases}$$

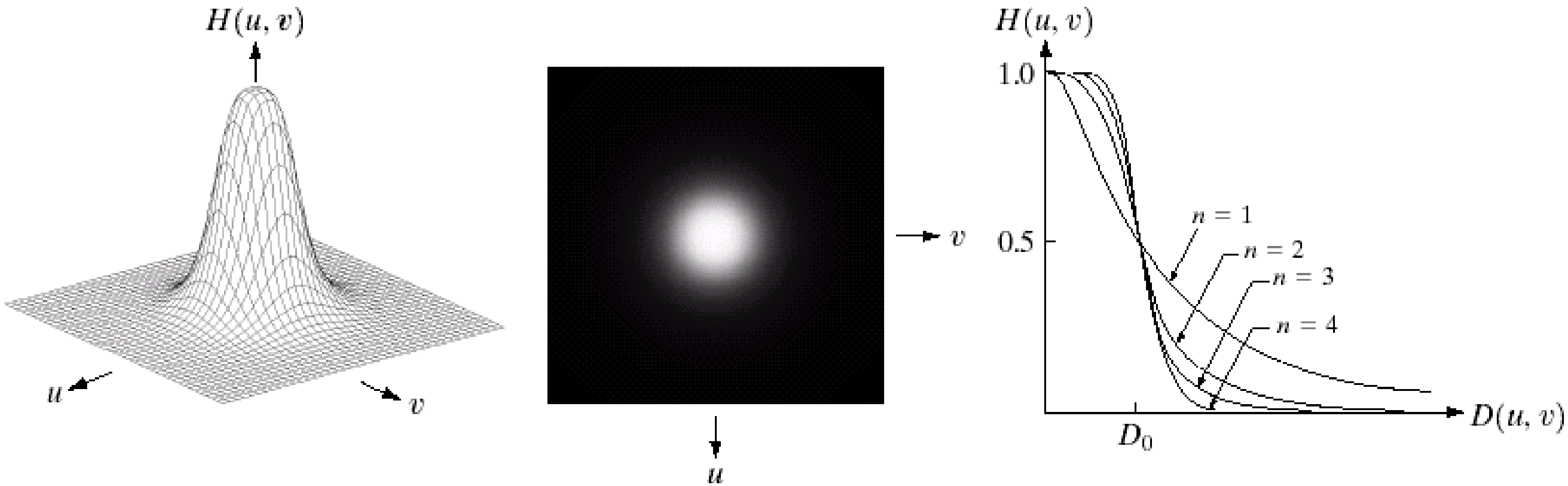


a b c

FIGURE 4.10 (a) Perspective plot of an ideal lowpass filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross section.

Filtro paso bajo 2D real

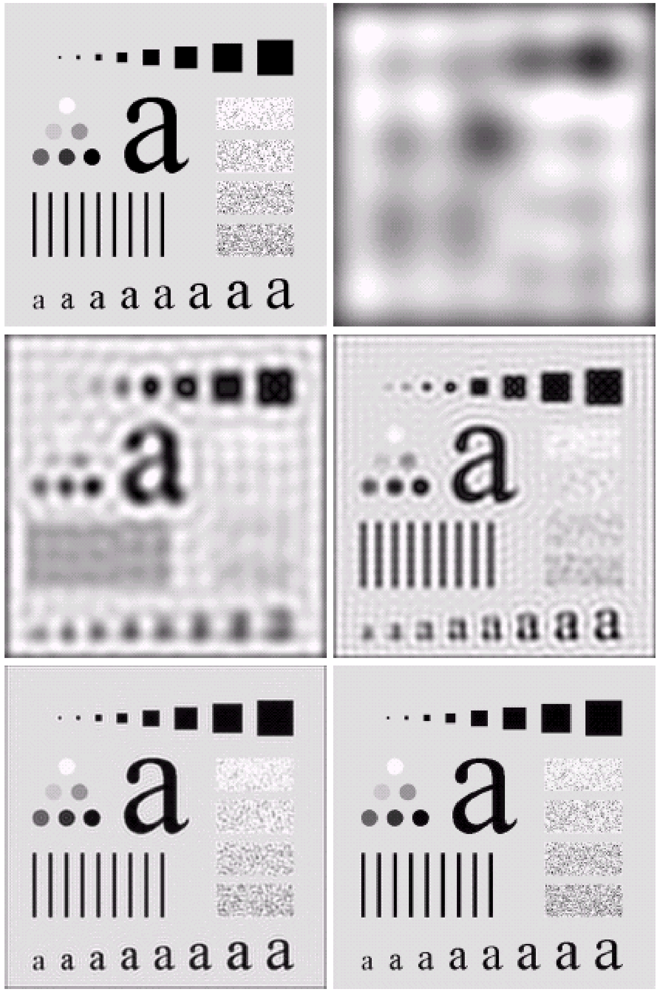
$$H(u,v) = \frac{1}{1+\left[D(u,v)/D_0\right]^{2n}}$$



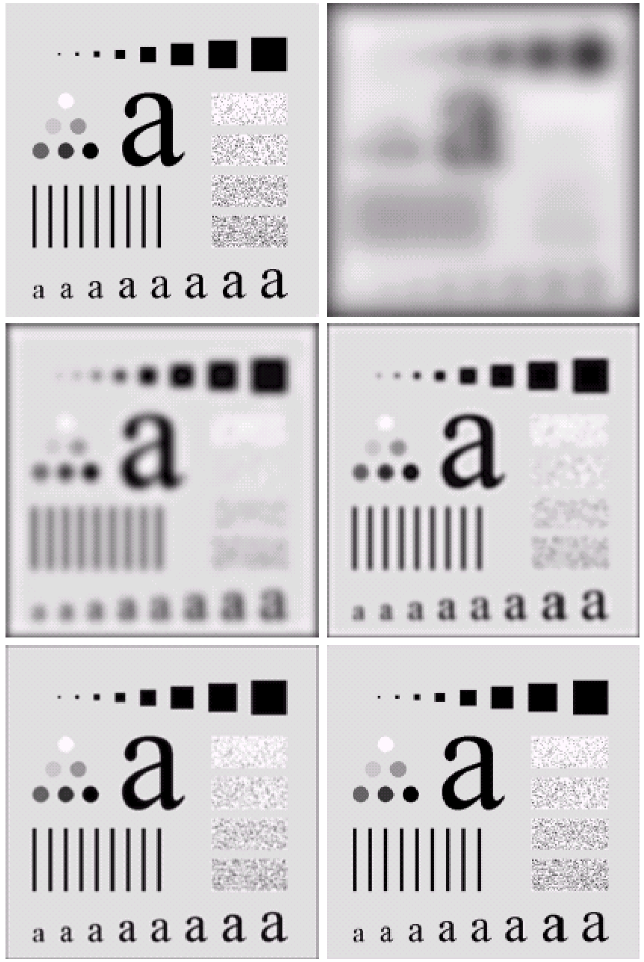
a b c

FIGURE 4.14 (a) Perspective plot of a Butterworth lowpass filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.

Comparación de filtros 2D



BLPF



a b
c d
e f

FIGURE 4.15 (a) Original image. (b)–(f) Results of filtering with BLPFs of order 2, with cutoff frequencies at radii of 5, 15, 30, 80, and 230, as shown in Fig. 4.11(b). Compare with Fig. 4.12.

9

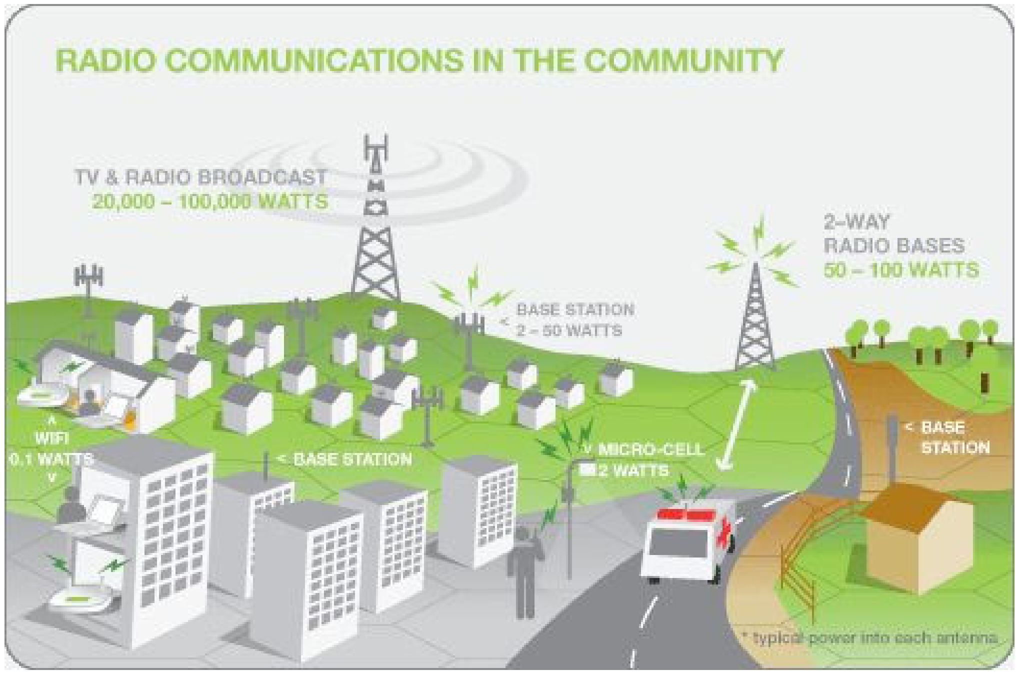
Propiedad de multiplicación o Propiedad de modulación

Propiedad de multiplicación

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$

Caso especial:

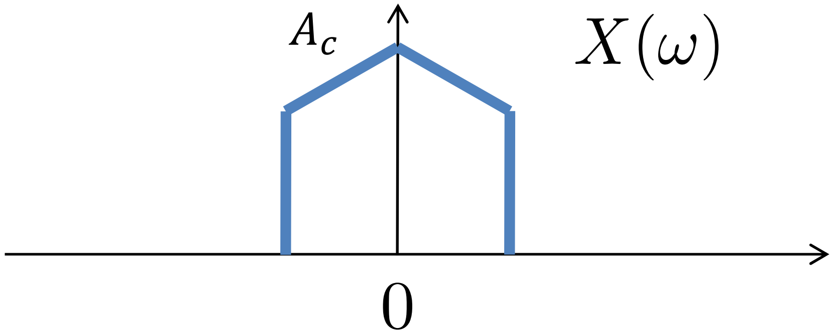
$$x(t)\cos(\omega_c t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} \frac{1}{2}\left(X(\omega + \omega_c) + X(\omega - \omega_c)\right)$$



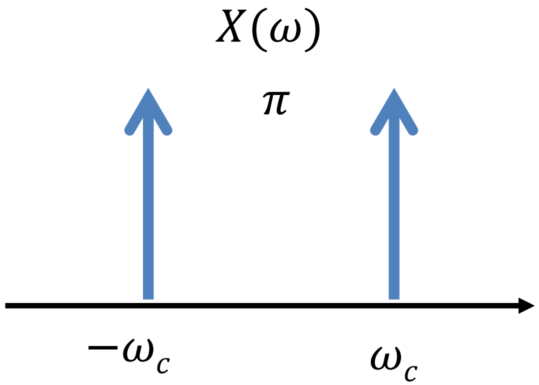
Ejemplo de propiedad de modulación

Dominio del tiempo: $x(t)\cos(\omega_c t)$

Dominio de la frecuencia:



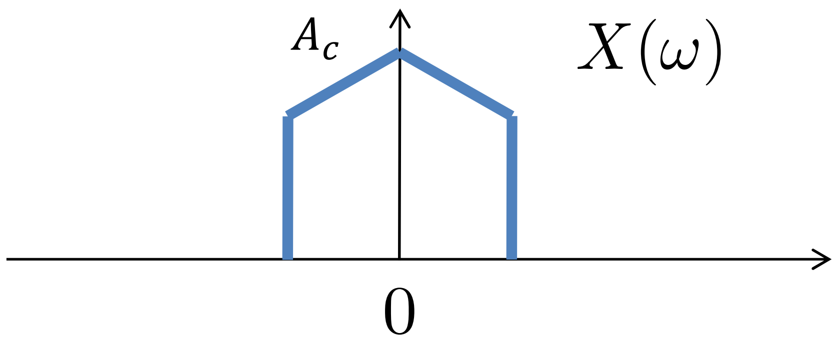
$*$



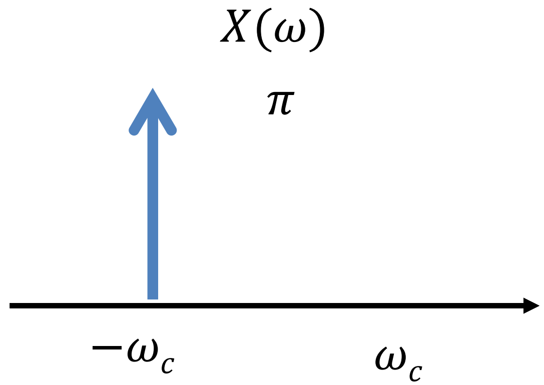
Ejemplo de propiedad de modulación

Dominio del tiempo: $x(t)\cos(\omega_c t)$

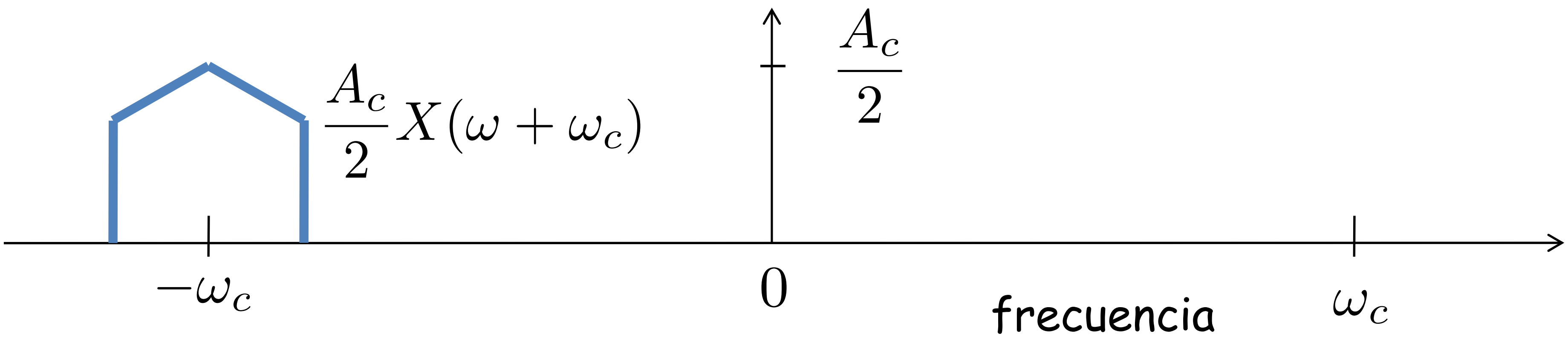
Dominio de la frecuencia:



$*$



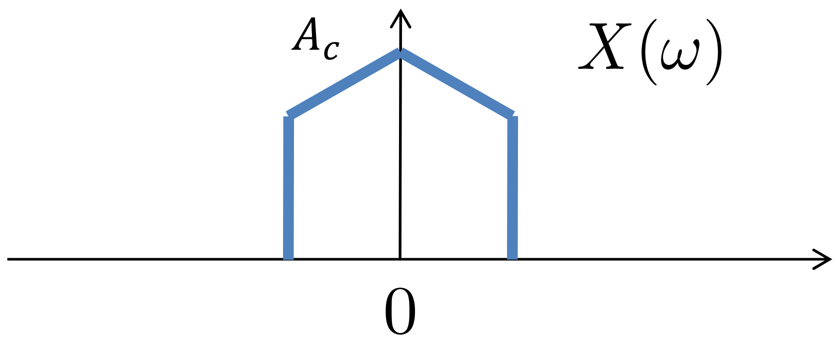
$$\frac{1}{2\pi}\ X(\omega) * \mathrm{Y}(\omega) = \frac{1}{2}\ \left(X(\omega+\omega_c) + X(\omega-\omega_c)\right)$$



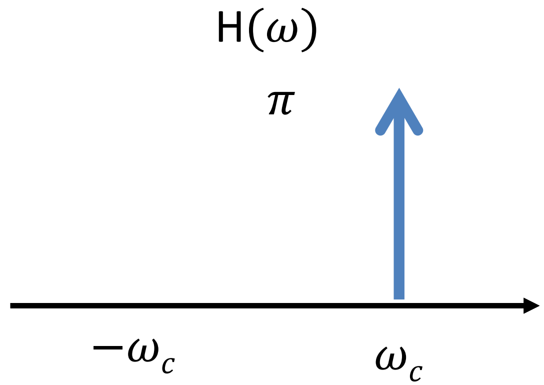
Ejemplo de propiedad de modulación

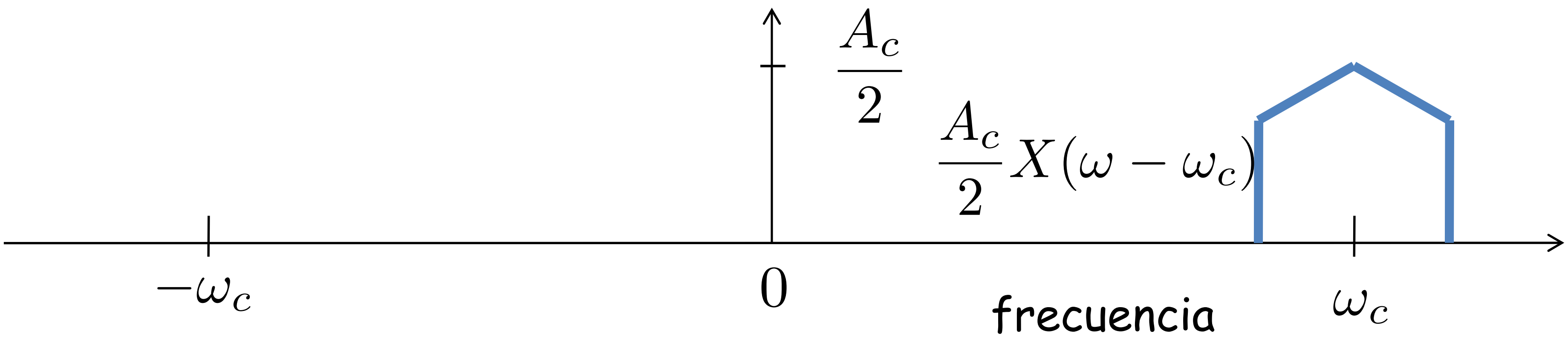
Dominio del tiempo: $x(t)\cos(\omega_c t)$

Dominio de la frecuencia:



$*$

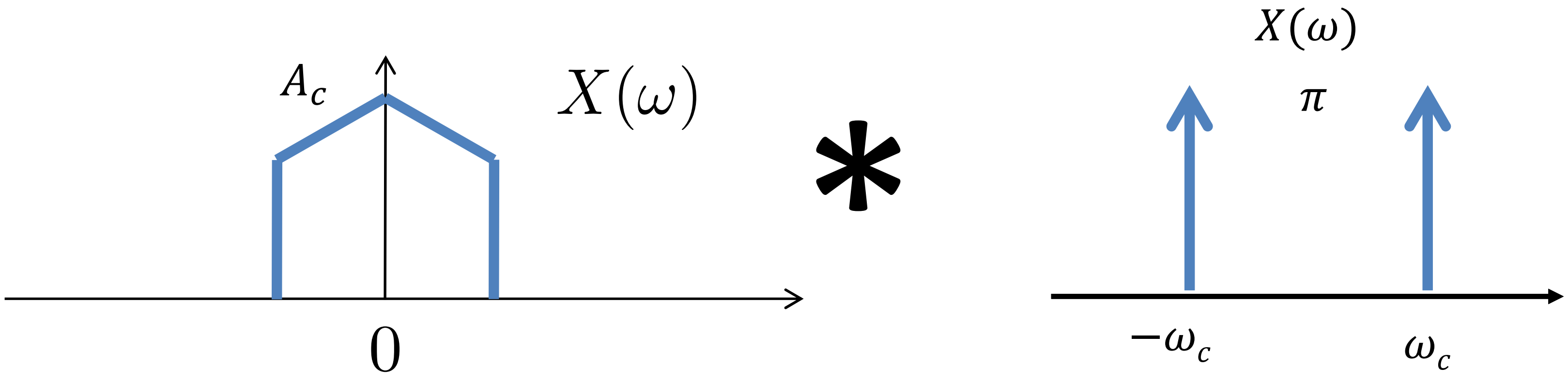




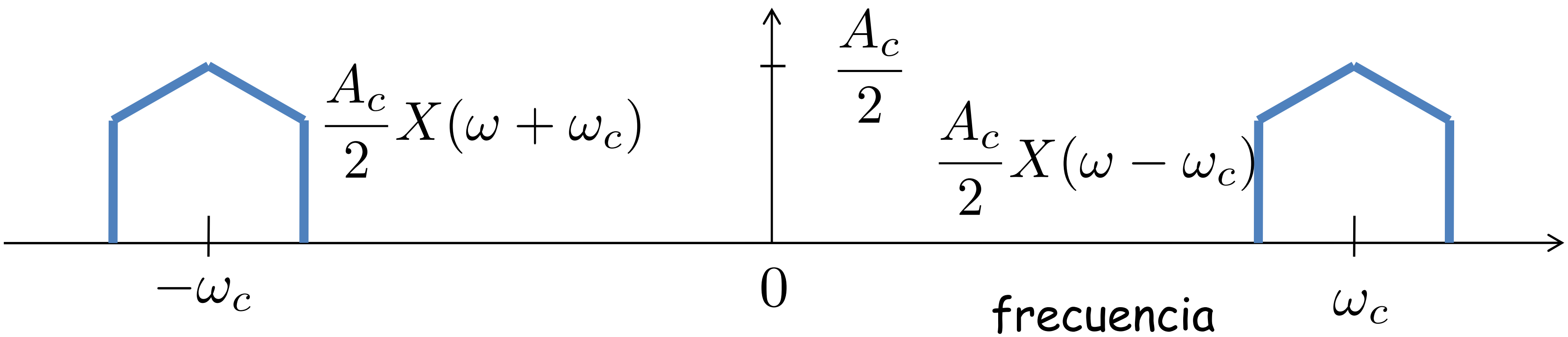
Ejemplo de propiedad de modulación

Dominio del tiempo: $x(t)\cos(\omega_c t)$

Dominio de la frecuencia:



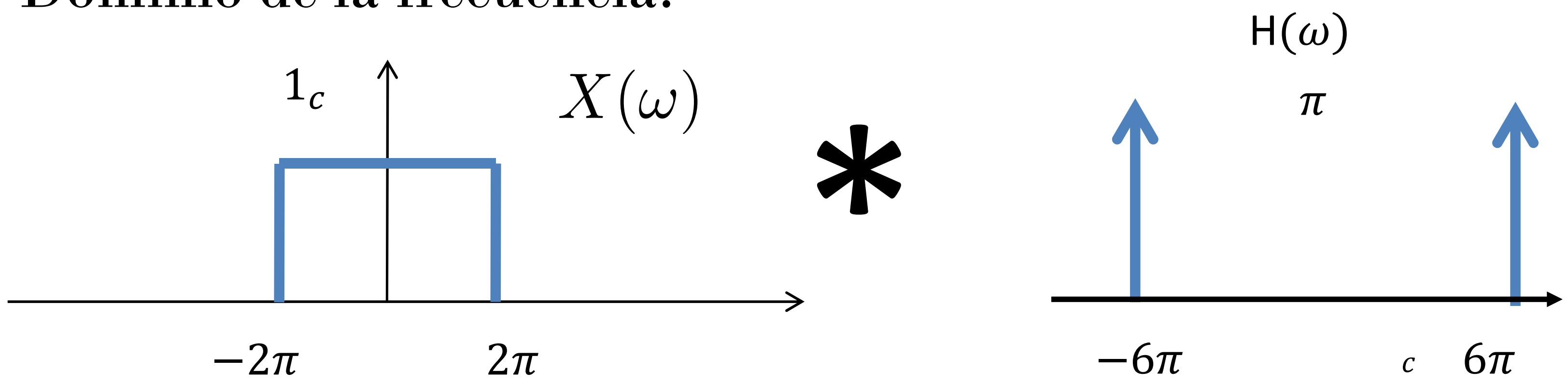
$$\frac{1}{2\pi}\, X(\omega) * \mathrm{Y}(\omega) = \frac{1}{2}\,\left(X(\omega+\omega_c) + X(\omega-\omega_c)\right)$$



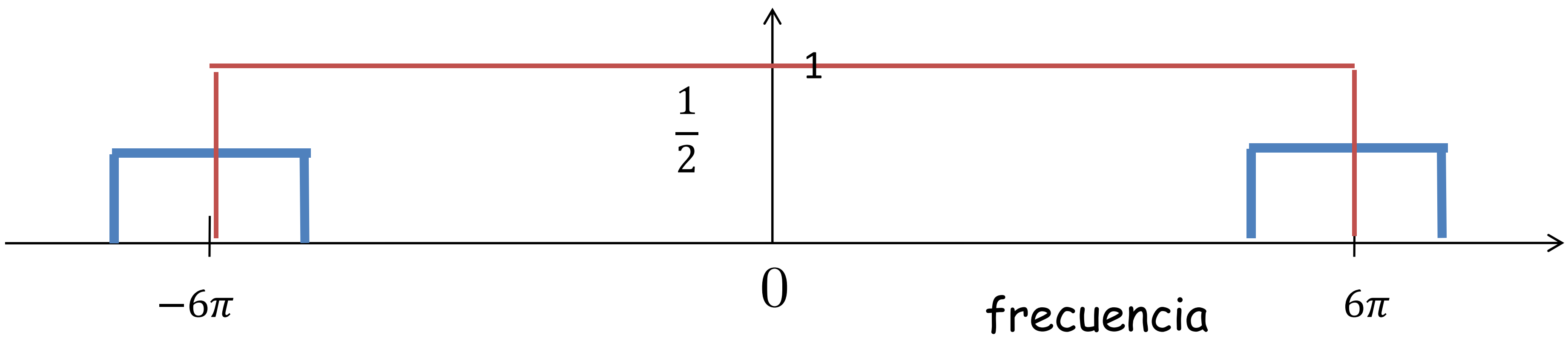
Ejemplo de propiedad de modulación

Dominio del tiempo: $x(t)\cos(6\pi\, t)$

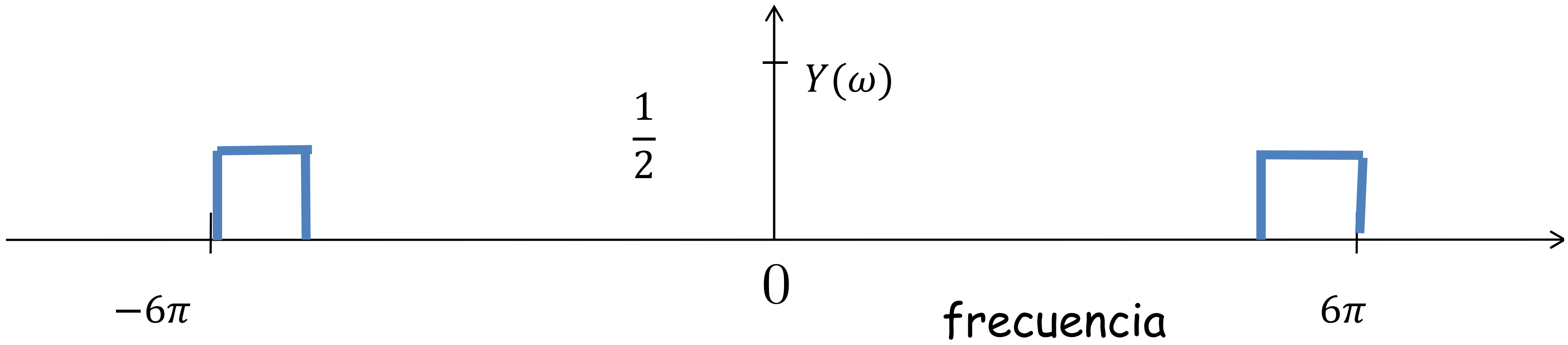
Dominio de la frecuencia:



$$\frac{1}{2\pi}\; X(\omega) * \mathrm{Y}(\omega) = \frac{1}{2}\;\left(X(\omega+6\pi) + X(\omega-6\pi)\right)$$



Clic para editar título



Tiempo recobrado

Pionera en la comunicación sin cables

La primera estación de telegrafía sin hilos de España se instaló en A Coruña en 1905 La antena, propiedad del 'Diario ferrolano', se adelantó al sistema radiotelegráfico oficial

Isabel Bugallal A Coruña | 24.10.2016 | 19:18

Galicia ocupa un lugar en la historia de la comunicación telegráfica española. La primera estación de telegrafía sin hilos se instaló en A Coruña en 1905. Hoy, el lugar lleva el nombre de Marconi, en honor al padre del invento, que fue galardonado con el Nobel. Gracias a su descubrimiento, el 'Diario ferrolano' pudo transmitir crónicas desde la ciudad a la redacción central en Ferrol, adelantándose al sistema radiotelegráfico español. Unos meses después del experimento coruñés, el Gobierno aprobó el ordenamiento legal

Guglielmo Marconi, considerado el padre de la telegrafía sin hilos. / la opinión

"Nos enteramos por (Eugenio) Carré Aldao que la calle de Marconi debe su nombre a un hecho curioso: la primera estación de telegrafía sin hilos que se instaló en España, y de iniciativa particular, tuvo en esta calle sus horas de brega", recuerda Jorge García Barros (Medio siglo de vida coruñesa). Lo que no cuenta, sin embargo, es que la primera línea inalámbrica establecía la conexión entre A Coruña y Ferrol y había sido fruto de la iniciativa de un periódico, el Diario ferrolano.

Se inauguró el 4 de mayo de 1905 en esa calle de Monte Alto, con la finalidad de que el citado periódico -que entre sus directores tuvo a un coruñés ilustre, el escritor Wenceslao Fernández Flórez- pudiese transmitir las crónicas de los acontecimientos ocurridos en A Coruña a la redacción central, en Ferrol.

Amplitude Modulation (AM)

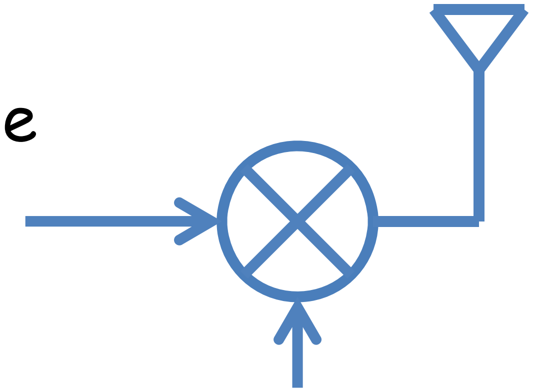
- La modulación de amplitud (AM, del inglés *Amplitude Modulation*) consiste en modificar la amplitud de una señal senoidal portadora (*carrier*) según una señal mensaje que se desea transmitir

señal AM

$$x_{AM}(t) = A_c x(t) \cos \omega_c t$$

mensaje

x(t)

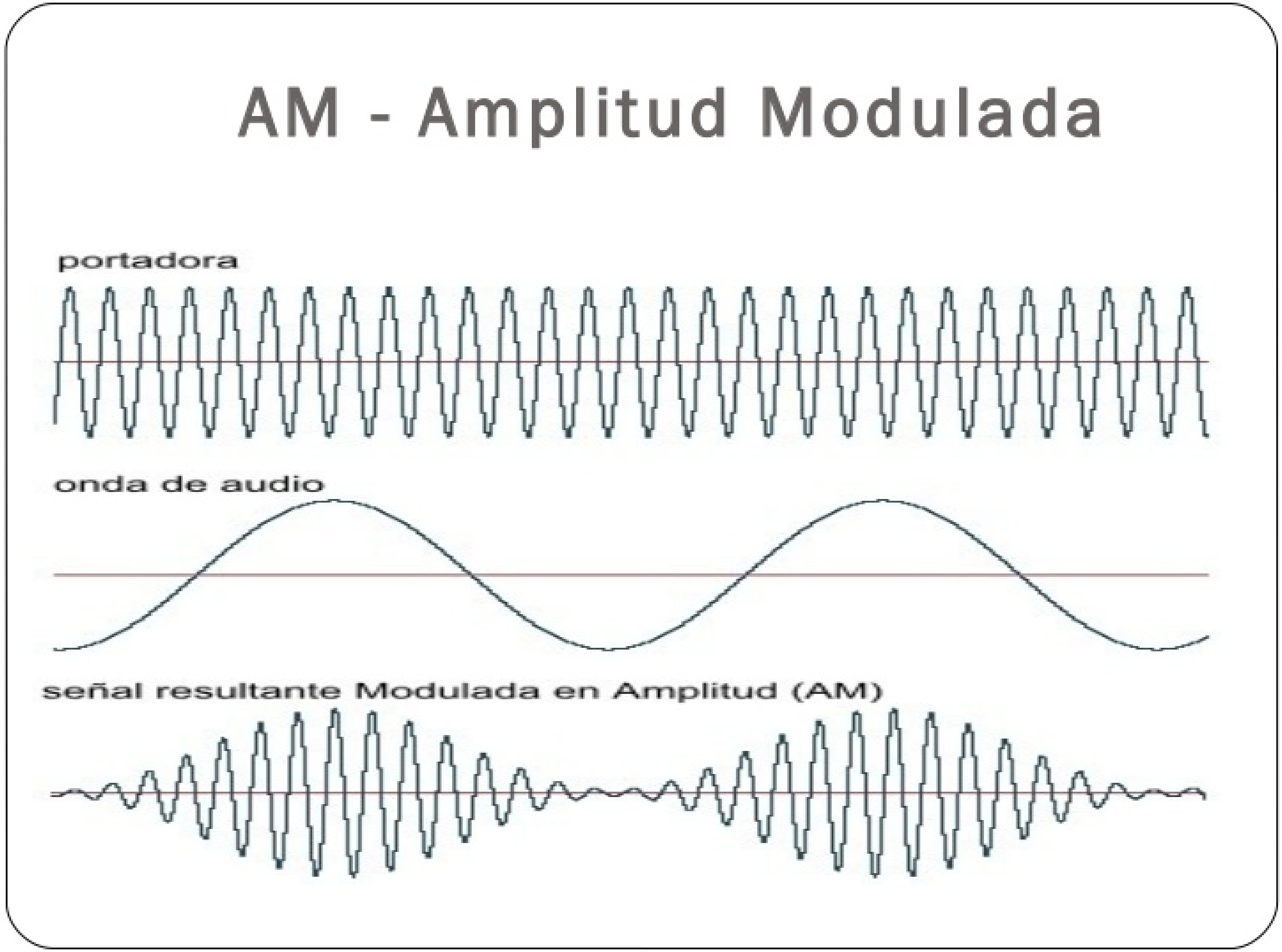


portadora

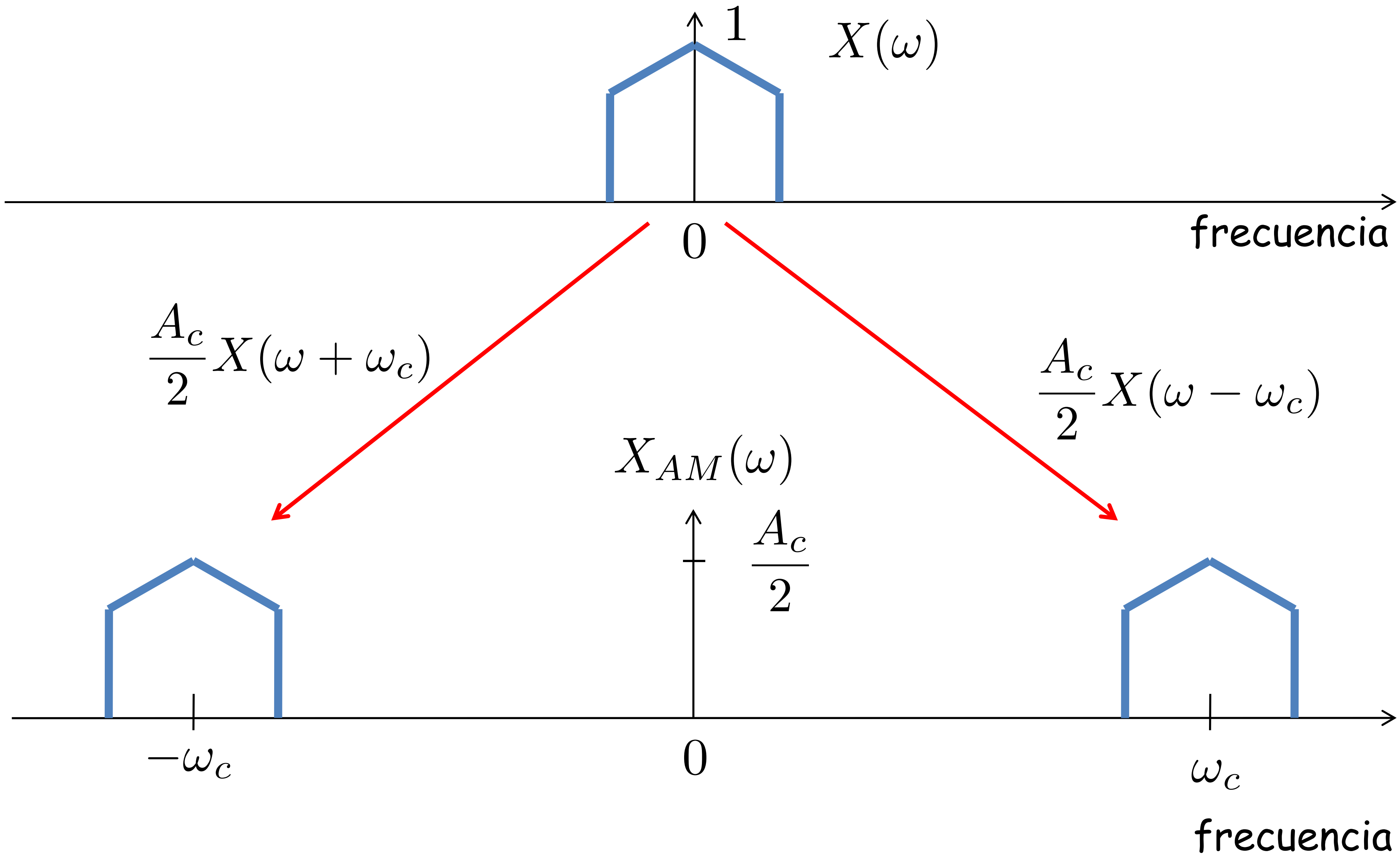
$$A_c \cos \omega_c t$$

- ω_c: frecuencia de portadora en rad/sg
- A_c: amplitud de portadora

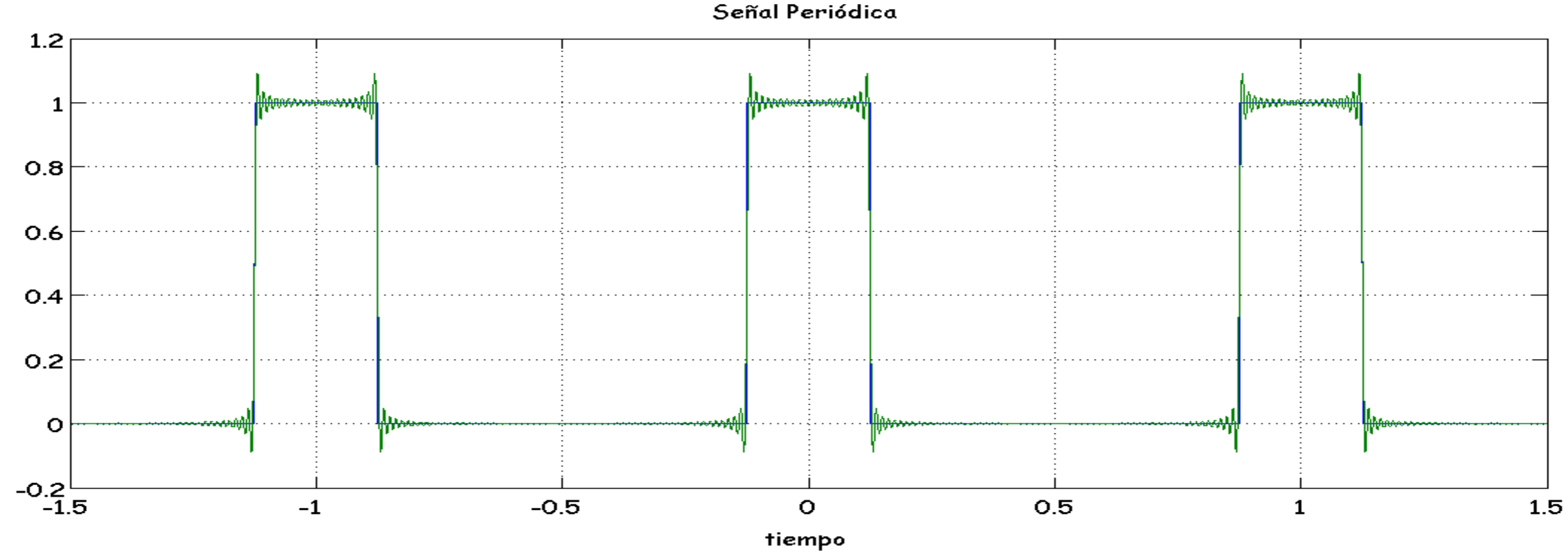
Ejemplo de Modulación AM- tiempo

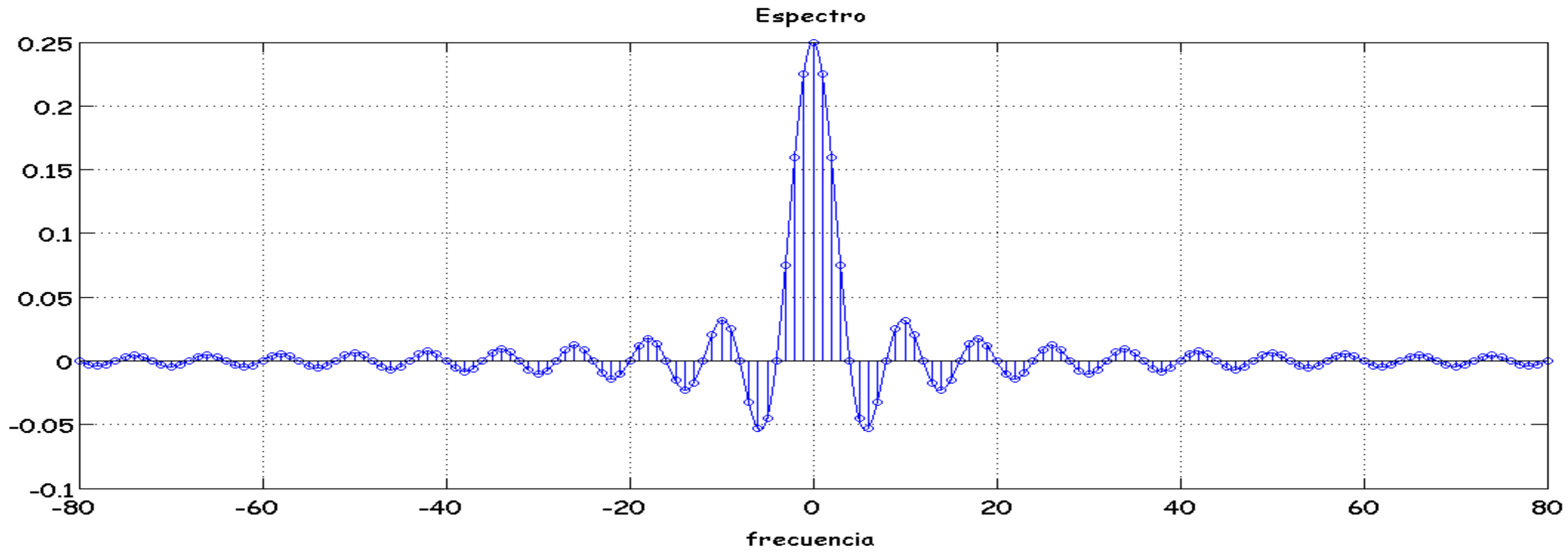


Ejemplo de Modulación AM -frecuencia

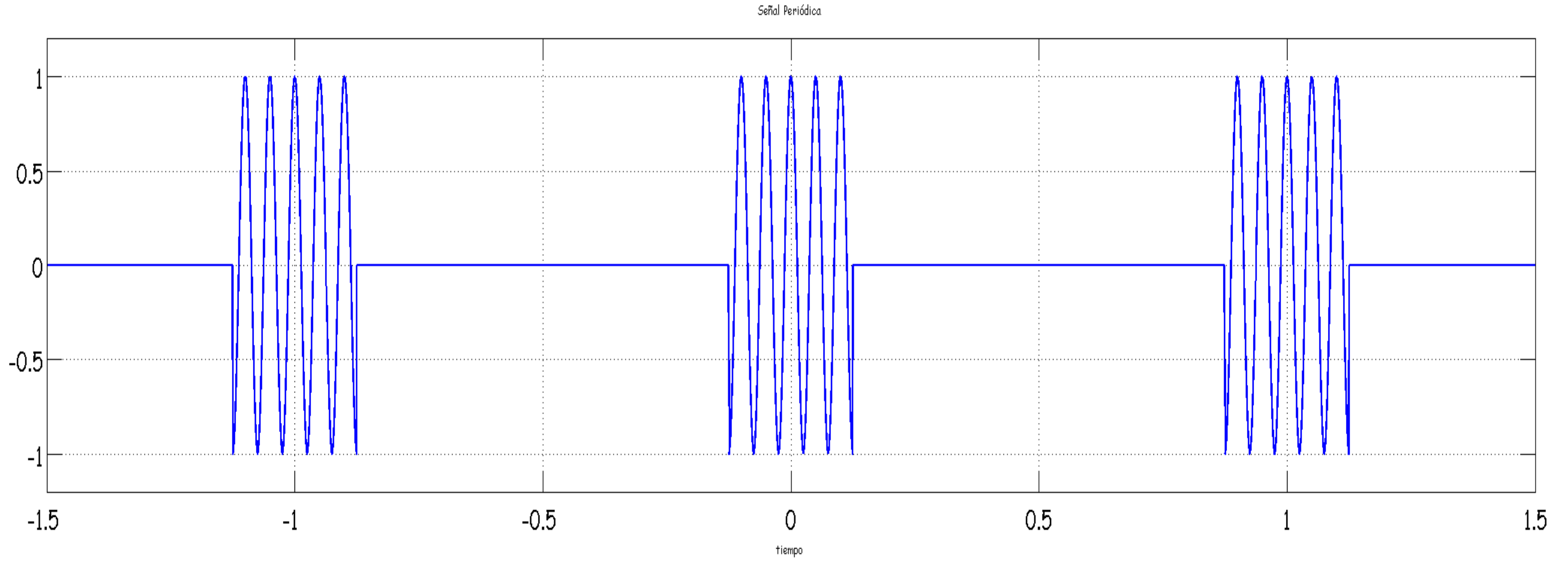


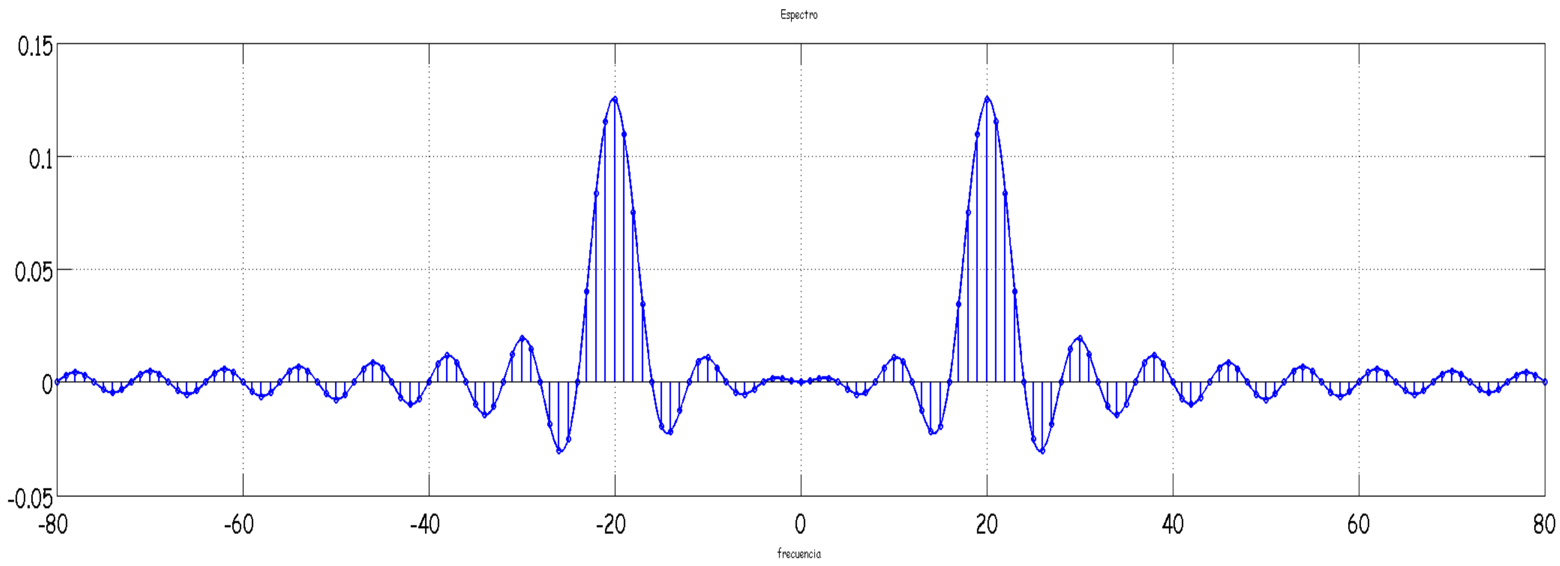
Mensaje onda cuadrada



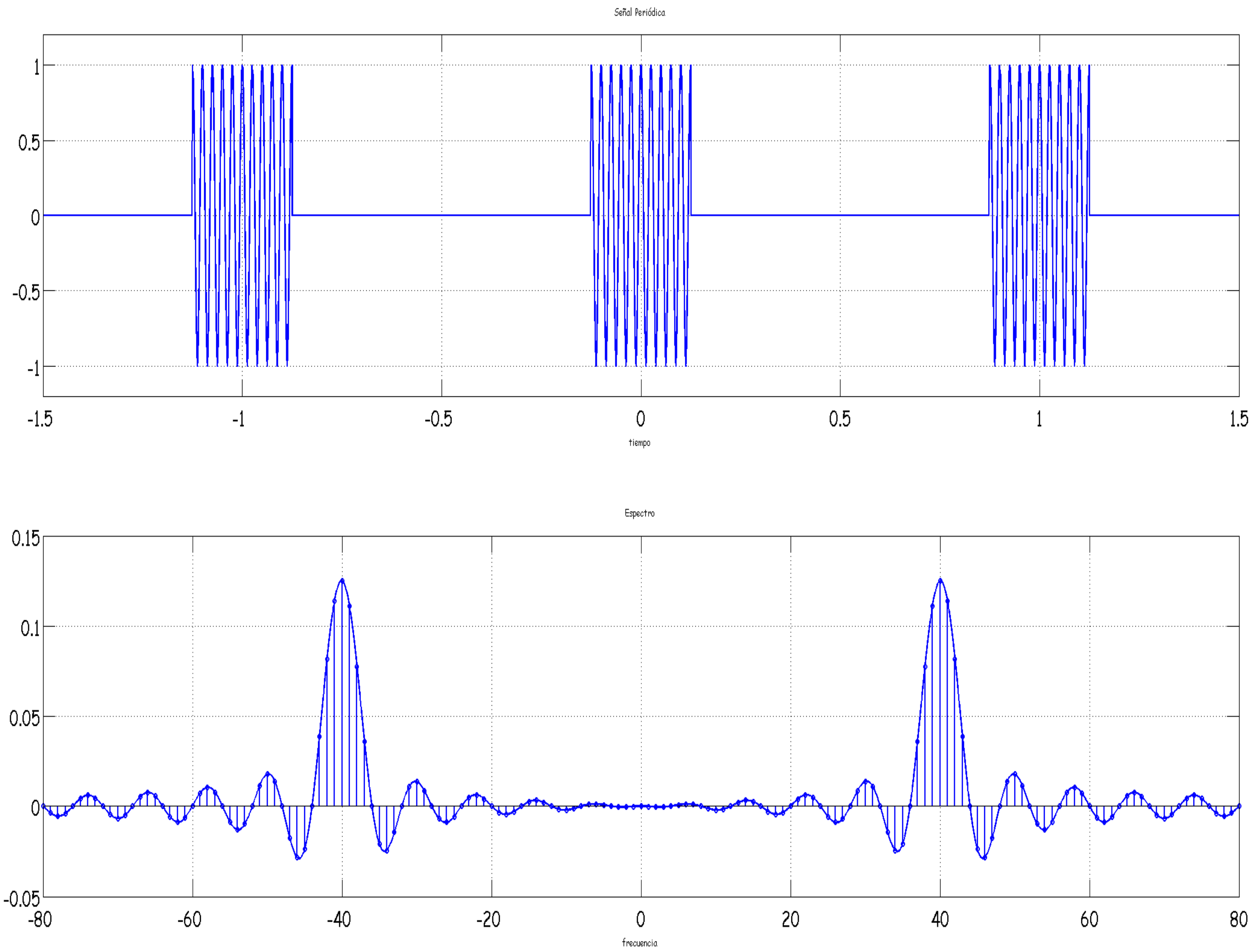


Señal AM (f_c=20 Hz)

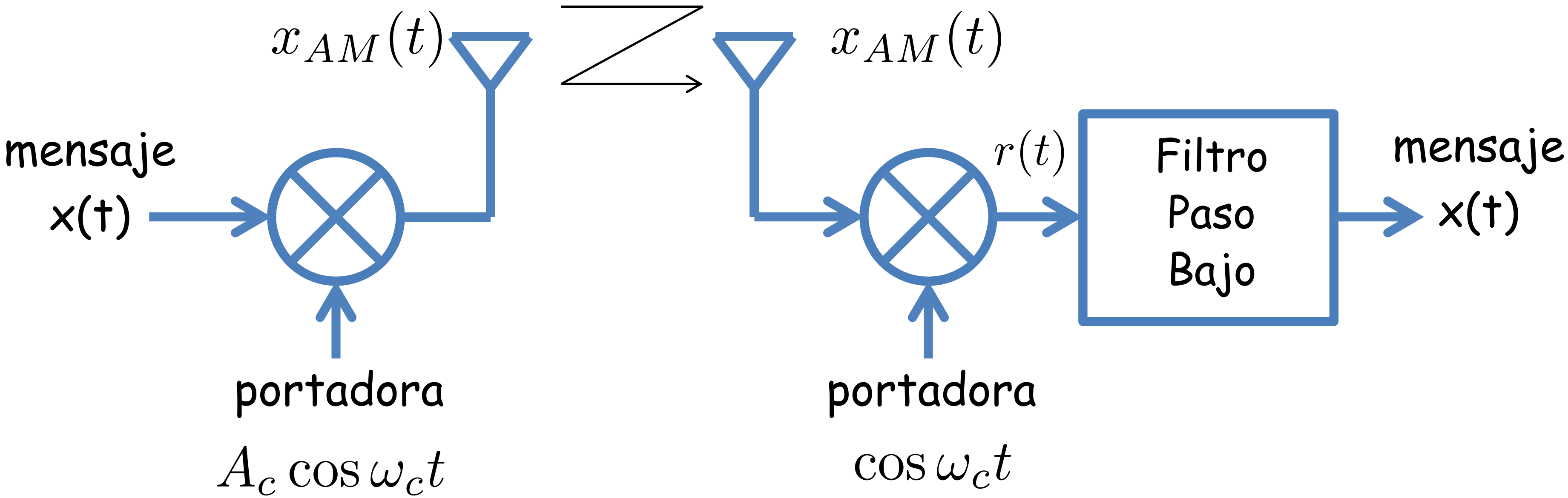




Señal AM (f_c=40 Hz)

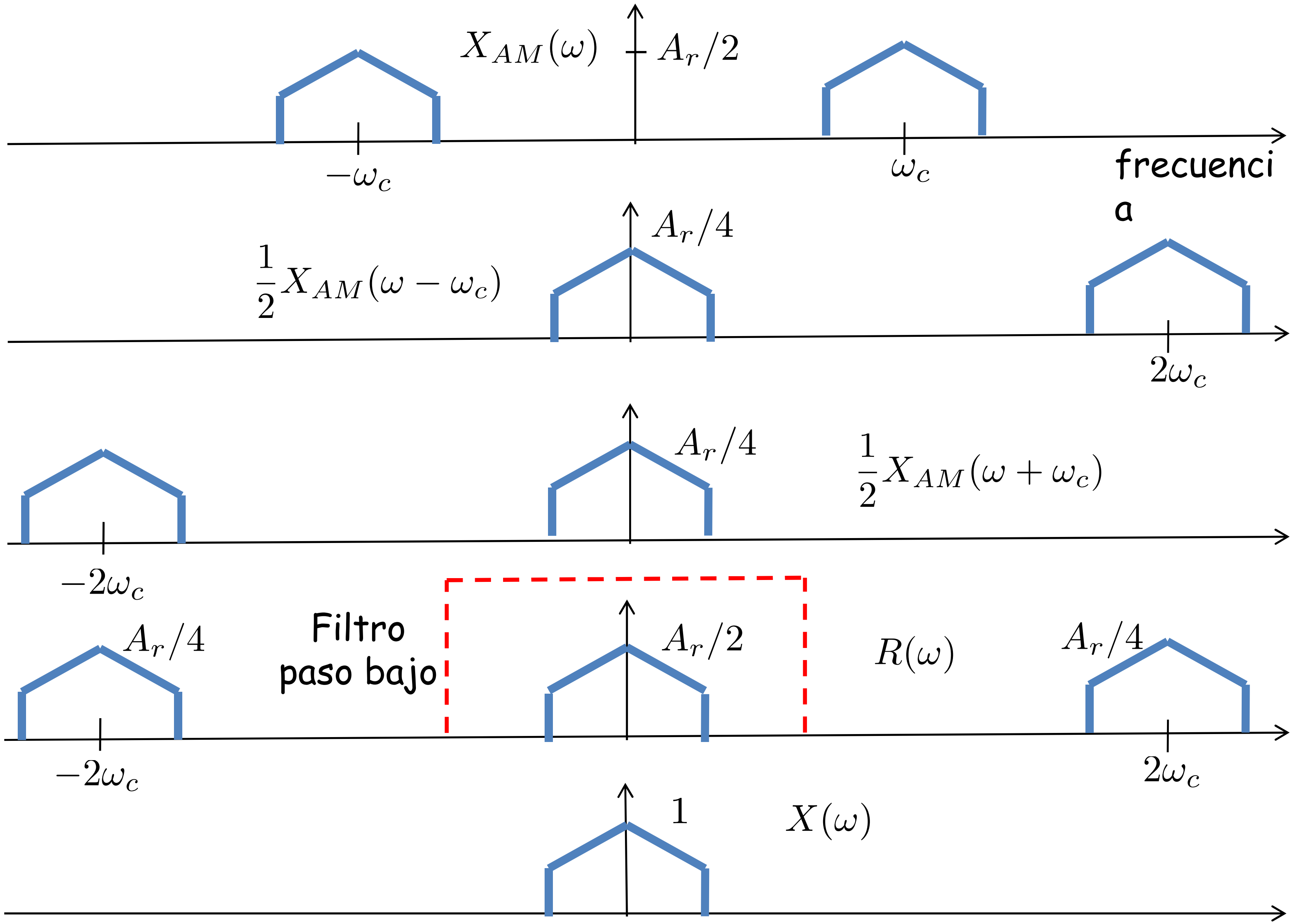


Sistema de transmisión AM

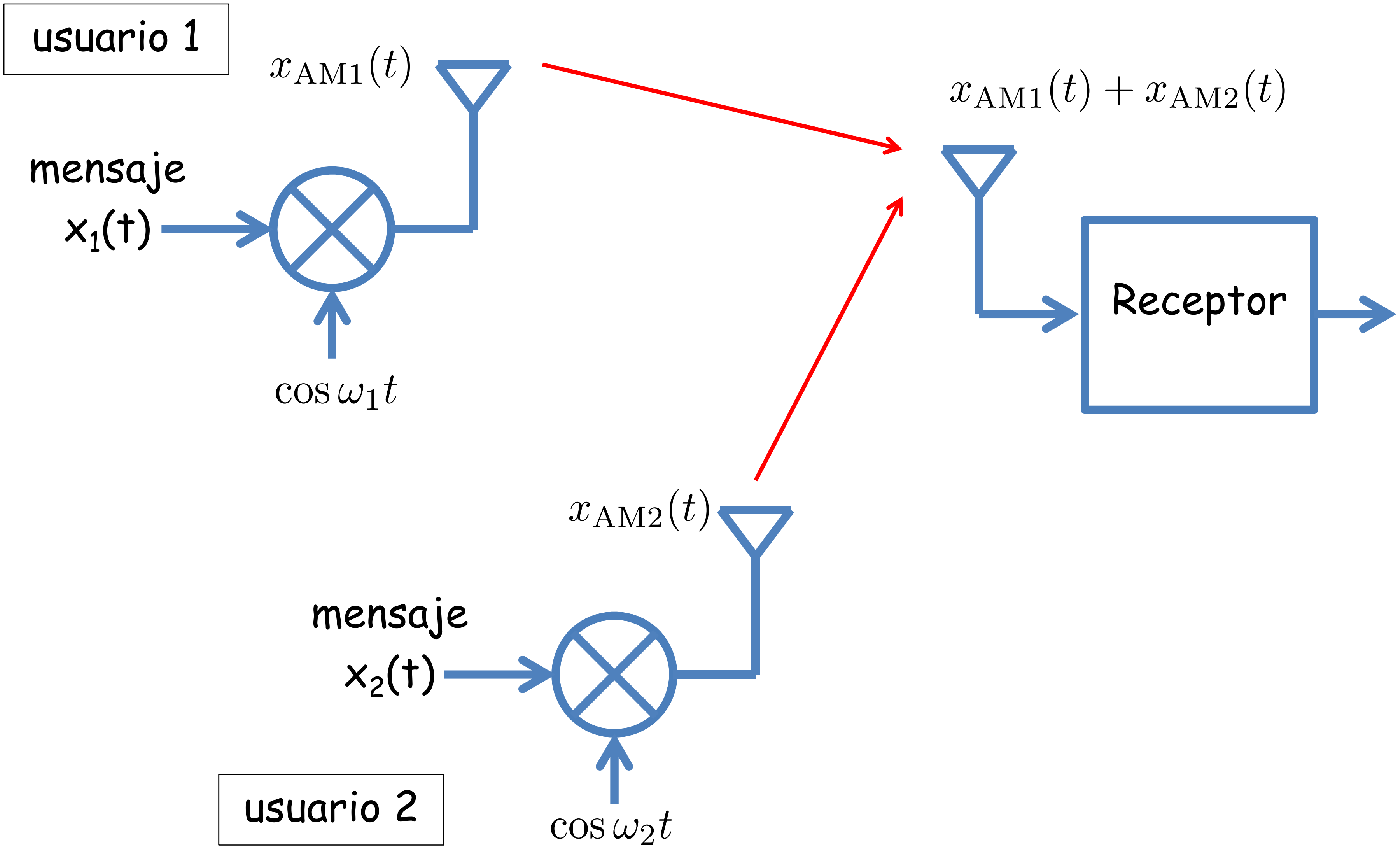


- Los receptores AM utilizan un circuito RC integrador como filtro paso bajo

Ejemplo de demodulador AM



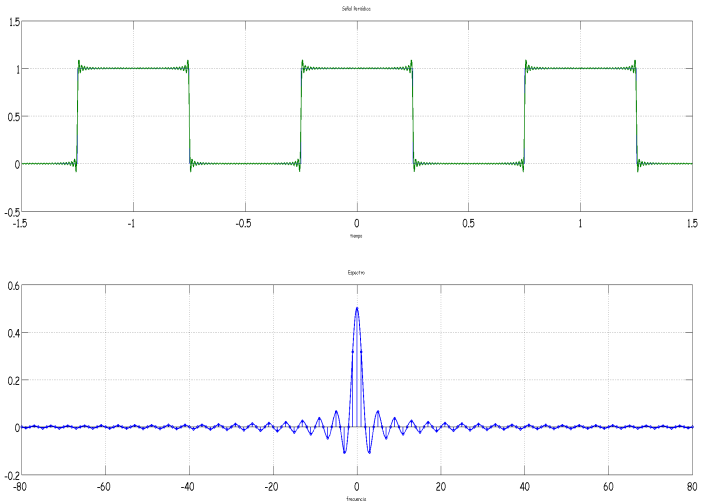
Multiplexación en frecuencia



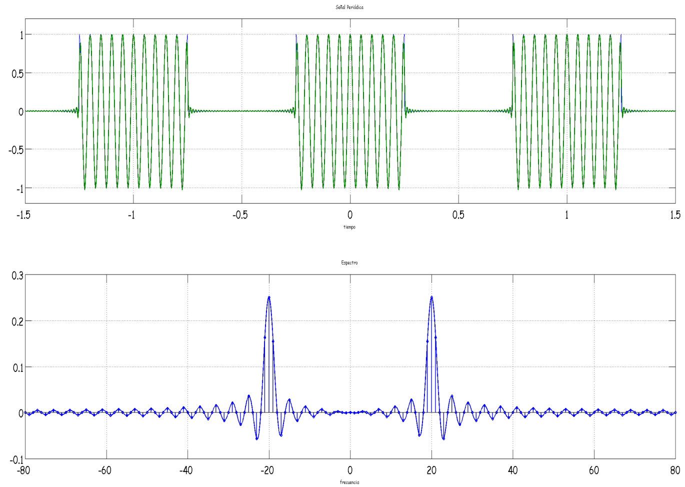
Ejemplo de multiplexación - transmisión

USUARIO 1

Señal paso bajo

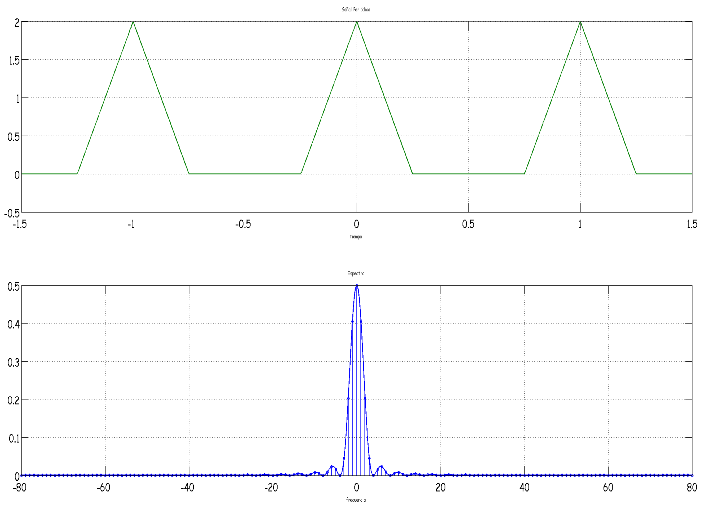


Señal AM   f = 20 Hz

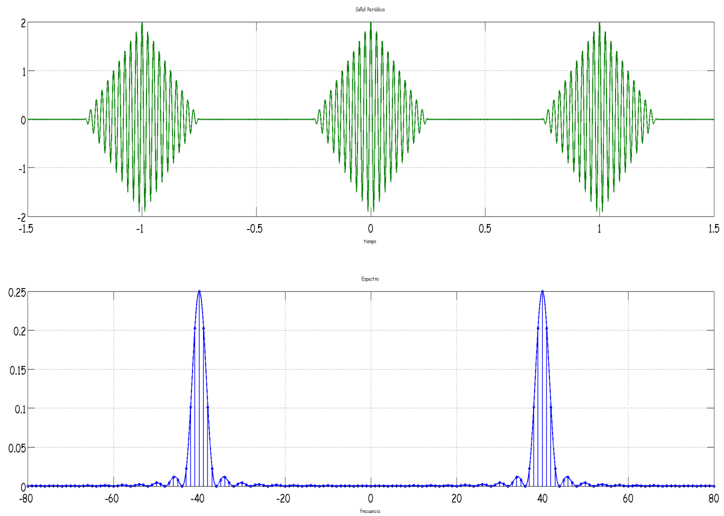


USUARIO 2

Señal paso bajo

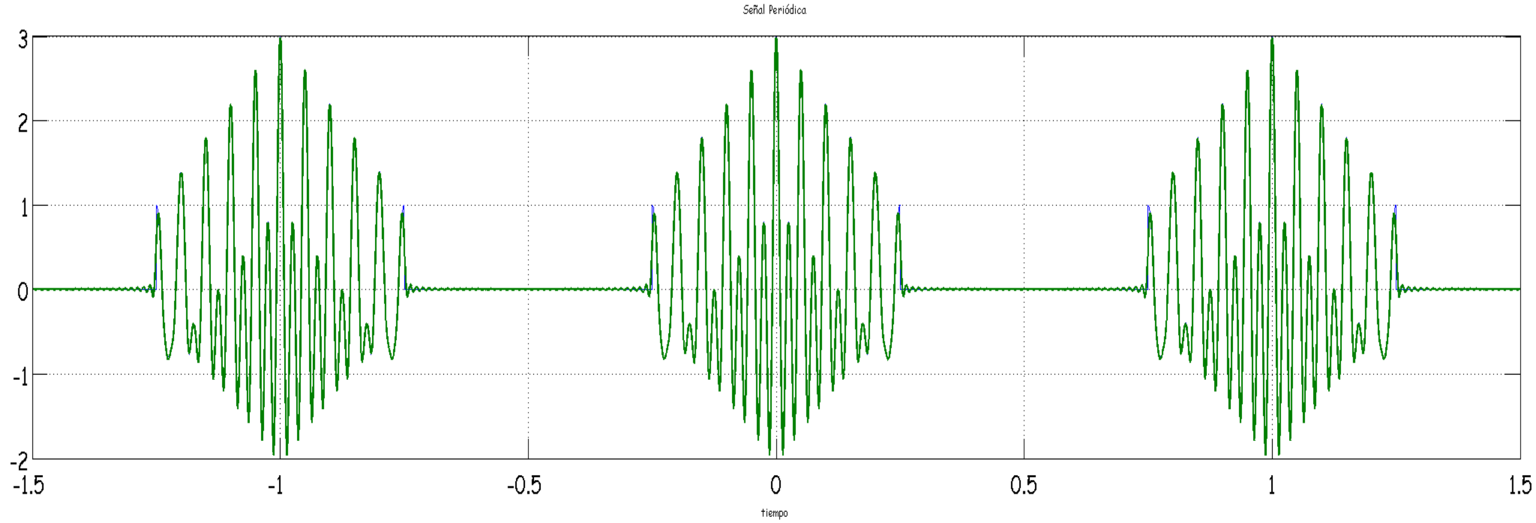


Señal AM   f = 40 Hz

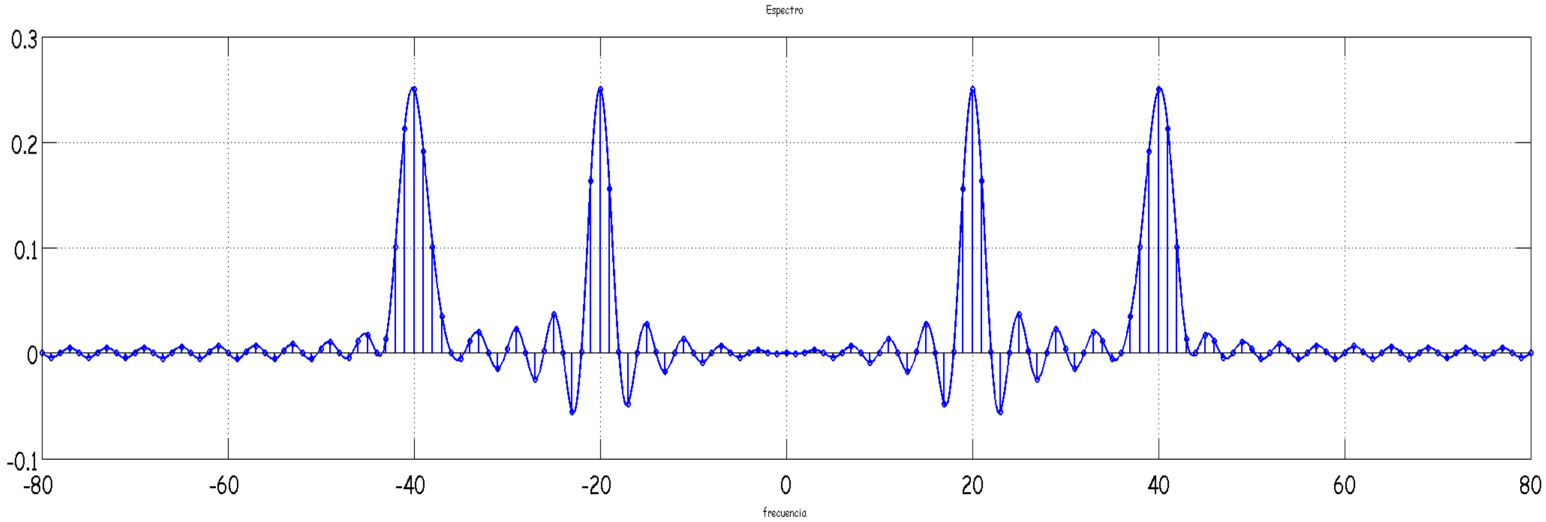


Ejemplo de multiplexación - recepción

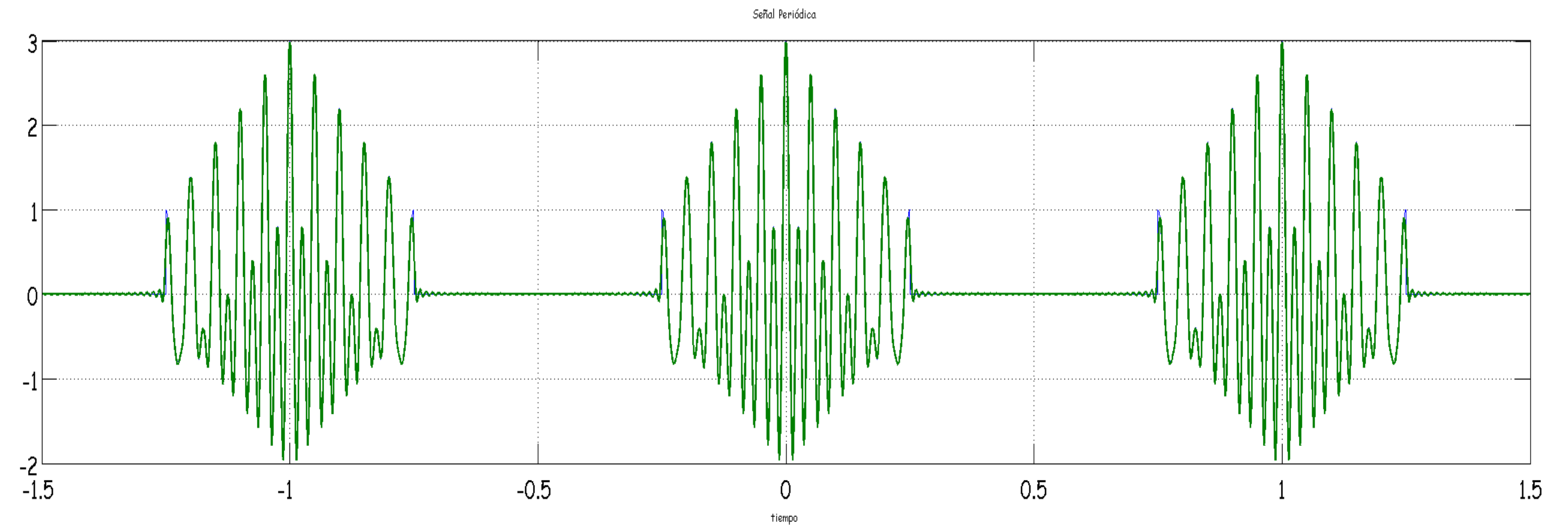
Señal recibida en el dominio temporal



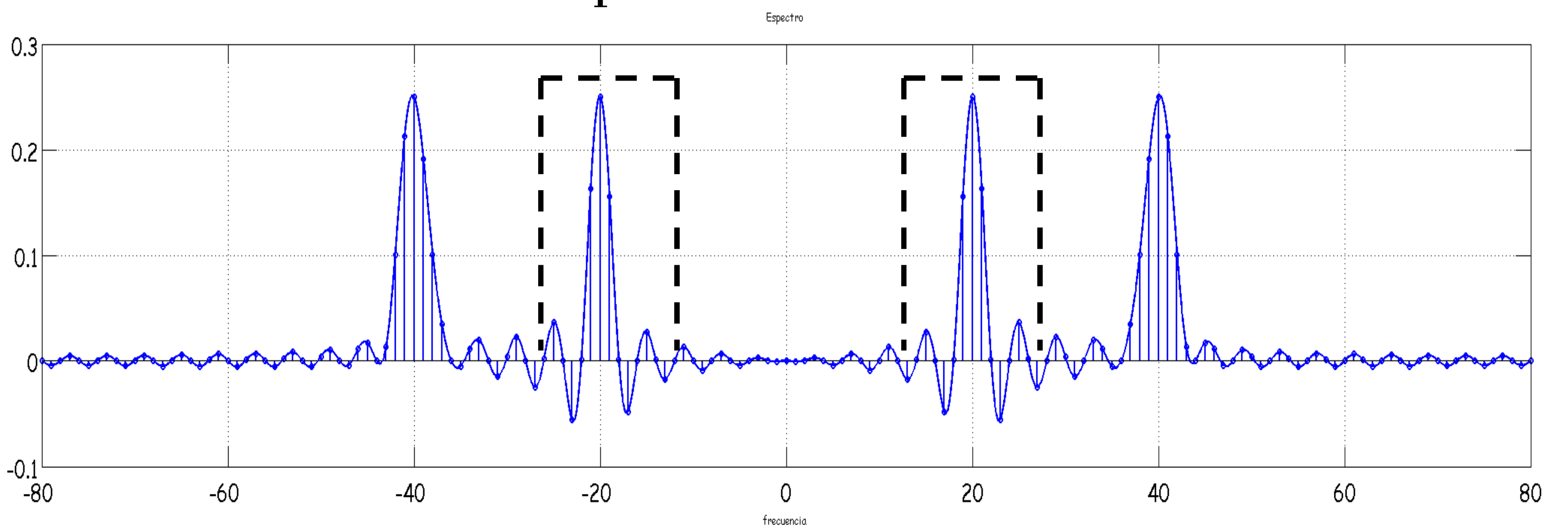
Señal recibida en el dominio de la frecuencia



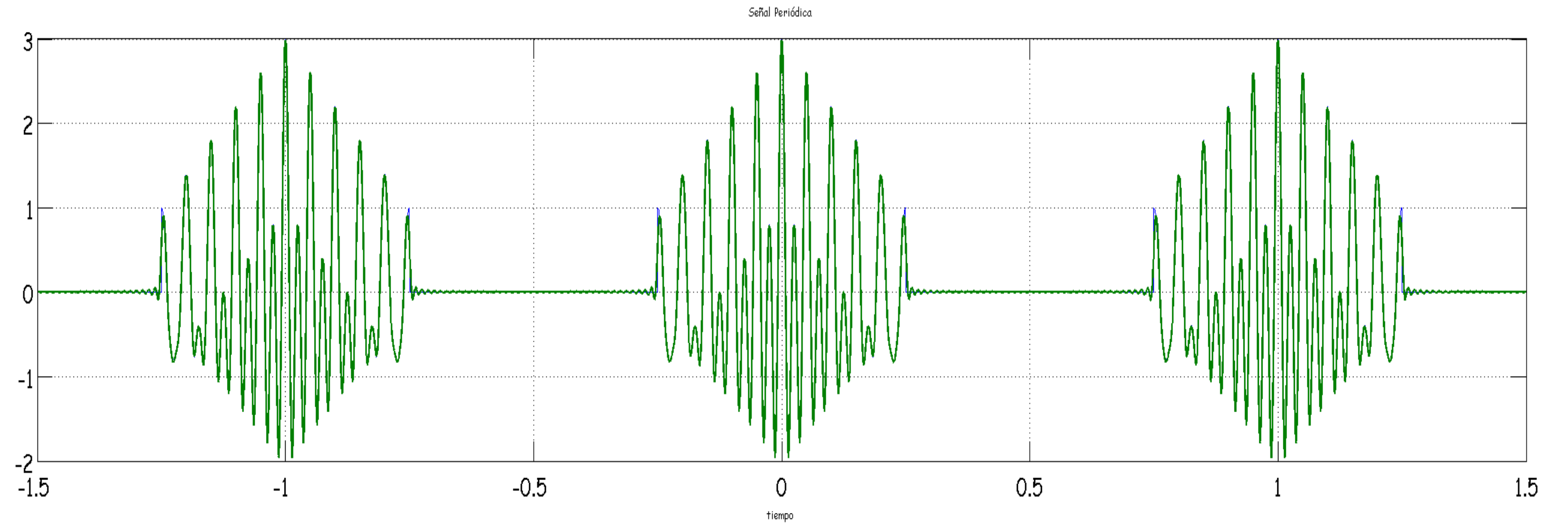
Ejemplo de multiplexación - recepción



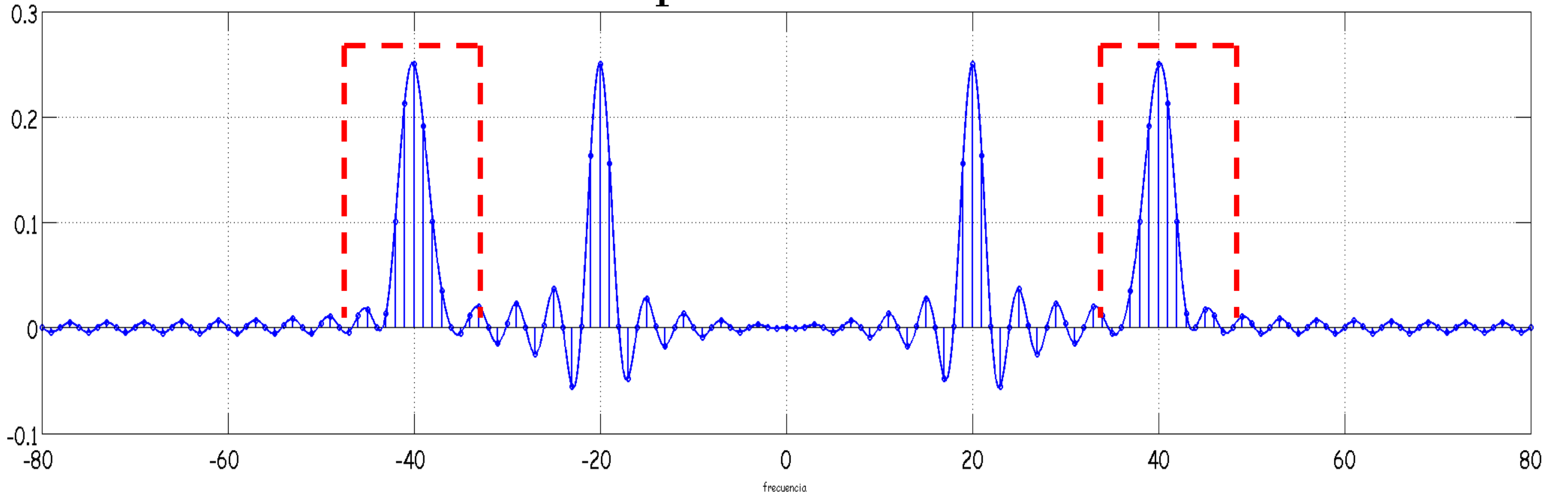
Filtro paso banda usuario 1



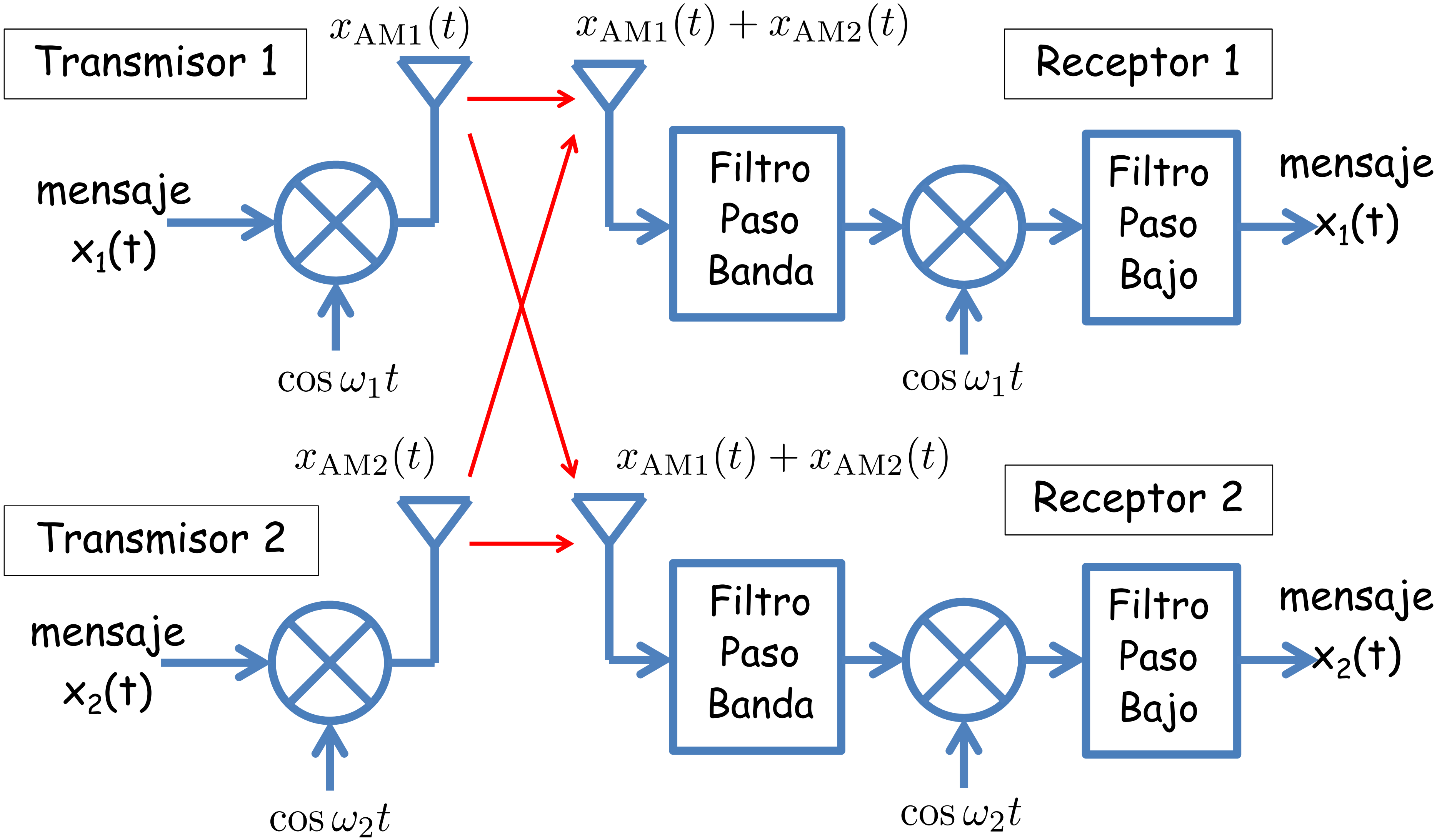
Ejemplo de multiplexación - recepción



Filtro paso banda usuario 2



Multiplexación en frecuencia



TEMA 2: Representación en frecuencia