Tema 2

Conjuntos y Aplicaciones

Recuerda que estas notas son, únicamente, parte del material de trabajo de los profesores de esta asignatura. Los contenidos de este tema se pueden ver en los siguientes libros:

- F. Aguado, F. Gago, M. Ladra, G. Vega, C. Vidal, A. Vieites *Problemas Resueltos de Combinatoria. Laboratorio con SageMath*: capítulo 1. Paraninfo 2018.
- K.H. Rosen, *Matemática Discreta y sus aplicaciones*: capítulo 1 (secciones 1.6, 1.7 y 1.8).
- R.P. Grimaldi, *Matemática Discreta y combinatoria*: capítulos 3 y 5.
- S.S. Epp, *Matemáticas Discretas con aplicaciones*: capítulos 6 y 7.

2.1 Conjuntos

Consideraremos como punto de partida la noción intuitiva de *conjunto*, un objeto matemático que nos proporcionará el lenguaje adecuado para la definición de conceptos que introduciremos en los capítulos posteriores. Esta explicación intuitiva es deficiente: la teoría de conjuntos se formalizó definitivamente a principios del siglo XX cuando se demostró que algunas colecciones no podían denominarse conjuntos. Pero esto no nos hace falta para nuestros propósitos.

Diremos que un ***conjunto*** *es una colección bien definida de objetos distinguibles entre sí. A los objetos que constituyen un conjunto se les denomina* ***elementos*** *del mismo.* Si la colección carece de objetos, el conjunto se denota por $\emptyset$ o por $\{\ \}$ y se denomina **conjunto vacío**.

Dado un conjunto y un objeto debemos ser capaces de decidir (a veces no es fácil) si el objeto pertenece o no al conjunto.

Los conjuntos se designan, habitualmente, por letras latinas mayúsculas: $A, B, \ldots$ y los elementos por letras latinas minúsculas: $a, b, \ldots$ Si a es un elemento del conjunto A, se dirá que a

pertenece al conjunto A, y se escribirá $a \in A$; en caso contrario, se dirá que el elemento **no pertenece** al conjunto y se denotará $a \notin A$.

Un conjunto A está *bien definido* cuando, dado un objeto cualquiera x, se cumple que $x \in A$ o $x \notin A$, pero no ambas proposiciones a la vez.

Ejemplos de conjuntos de números usados en matemáticas son $\mathbb{N}$, los números naturales, $\mathbb{Z}$, los números enteros, $\mathbb{Q}$, los números racionales, $\mathbb{R}$, los números reales, y $\mathbb{C}$, los números complejos.

Los conjuntos se representan encerrando entre llaves "{" y "}" bien sus elementos, bien la ley que los determina. Por ejemplo

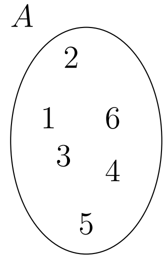
$$\{0, 2, 4, 6, 8\} \quad \text{y} \quad \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es un número par no negativo menor que } 10\}$$

representan el mismo conjunto.

Ejemplo 1.

i) $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid\ 1 \leq n \leq 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A



Se verifica:
$2 \in A$,
$6 \in A$,
$13 \notin A$,
$casa \notin A$

A representado por un diagrama de Venn

ii) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 16\} = \{0, 1, 2, 3, 4, -1, -2, -3, -4\}$;

iii) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divide a } 20\} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$;

iv) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 3\} = \{\ \}$.

Si consideramos el conjunto formado por *"Los diez mejores jugadores de fútbol de todos los tiempos"* no tenemos un conjunto bien definido puesto que la condición de *"ser mejor jugador"* no es objetiva.

Nota: Es importante no confundir conjuntos con *listas*. Las listas se representan utilizando corchetes "[" y "]", y mientras que en un conjunto no se repiten los elementos ni tampoco influye el orden en que aparecen, en las listas sí importa el lugar que ocupa un elemento así como el número de veces que aparece cada elemento. Así pues:

$$[1, 3, 5] \neq [1, 5, 3]; \quad [1, 3, 5] \neq [1, 1, 3, 5] \neq [1, 3, 3, 5]$$

Un conjunto A es **finito** si tiene un número $n \in \mathbb{N}$ de elementos; este número se llama **cardinal** de A y se denota o bien por $|A|$ o bien por $\#A$. En caso contrario, se dice que A es no finito.

Ejemplo 2.

i) Son conjuntos finitos:

- $A = \{1, 2, a, c\}$, $|A| = 4$;
- $B = \{\emptyset, \{a, b\}\}$, $|B| = 2$;
- $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{3, 2\}\}$, $|C| = 3$;
- *el conjunto formado por los números enteros cuyo producto por 3 es mayor que -5 y menor o igual que 15,* $D = \{n \in \mathbb{Z} \mid -5 < 3n \leq 15\}$, $|D| = 7$.

ii) Son conjuntos no finitos:

- *el conjunto formado por los números naturales pares,* $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es par}\}$;
- *el conjunto formado por los números enteros cuyo producto por 2 es menor que 100,* $\{n \in \mathbb{Z} \mid 2n < 100\}$.

2.1.1 Inclusión

Definición 1. *Dados dos conjuntos A y B, se dice que A es un* ***subconjunto*** *de B, y se denota por $A \subseteq B$, si cada elemento de A es también elemento de B, es decir:*

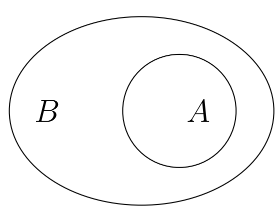
$$\forall x \, [x \in A \to x \in B] \quad \textit{es verdadera.}$$

Si $A \subseteq B$ diremos que A está *incluido* o *contenido* en B.

- Cuando A *no está contenido* en B, se escribirá $A \nsubseteq B$ (lo cual quiere decir que existe $a \in A$ tal que $a \notin B$), es decir, se verifica que

$$\exists a \, [a \in A \wedge a \notin B].$$

- Cualquier conjunto B, siempre admite como subconjuntos al conjunto vacío $\emptyset$ y al propio conjunto B. Estos se denominan *subconjuntos impropios o triviales*. En otro caso, se habla de **subconjunto propio** de B.
- Si $A \subseteq B$ y $A \neq B$, se dice que A está contenido estrictamente en B y se denota $A \subset B$.



Inclusión de conjuntos mediante diagramas de Venn: $A \subseteq B$

Ejemplo 3.

i) $\emptyset \subseteq \emptyset$;

ii) $\emptyset \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$;

iii) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$;

iv) $\{a, \{b\}\} \nsubseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$;

v) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$;

vi) $\{a, b, c\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$;

vii) $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$ *porque* $a, b, c \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$.

Un conjunto está totalmente determinado por sus elementos. Por ello, dos conjuntos A y B son **iguales** si ambos tienen los mismos elementos, es decir, se verifica $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$

$$A = B \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B \;\wedge\; B \subseteq A.$$

Definición 2. *El conjunto formado por todos los subconjuntos de uno dado X se denomina **conjunto partes de** X y se denota $\mathcal{P}(X)$.*

Si A y X son dos conjuntos cualesquiera, se verifica que

$$A \in \mathcal{P}(X) \;\Leftrightarrow\; A \subseteq X.$$

Si X es finito y tiene cardinal n entonces $\mathcal{P}(X)$ es finito y tiene cardinal $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

Ejemplo 4.

i) *Si* $X = \{a, b\}$, *entonces* $\mathcal{P}(X) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\big\}$;

ii) $\{2\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$;

iii) $A = \{a, b, c\}$ *es un conjunto finito con* $|A| = 3$ *y también es finito el conjunto* $\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\big\}$ *y el cardinal de este es* $2^3 = 8$.

Cuando, en un contexto determinado, consideremos varios conjuntos, estos se considerarán subconjuntos de uno dado U. Dicho conjunto de referencia U se denomina **conjunto universal** o **universo**.

2.2 Operaciones con conjuntos. Propiedades

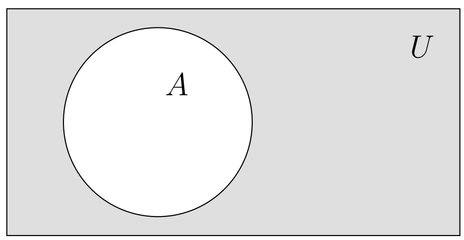
Sea X un conjunto arbitrario. En esta sección vamos a dar estructura de álgebra de Boole al conjunto $\mathcal{P}(X)$. Para ello vamos a definir tres operaciones sobre $\mathcal{P}(X)$ cuyas propiedades se corresponderán con las vistas en el tema anterior para las operaciones complemento, suma y producto, como se indica en la tabla siguiente:

Lógica	**Boole**	**Conjuntos**
$\neg$ negación	$\overline{}$ complemento	$\overline{}$ complementario
$\vee$ disyunción	$+$ suma	$\bigcup$ unión
$\wedge$ conjunción	$\cdot$ producto	$\bigcap$ intersección

Definición 3. *Dado un conjunto U y un subconjunto $A \subseteq U$ se llama* ***complementario*** *(respecto a U) del conjunto A, y se denota por $\overline{A}$, al subconjunto de U formado por todos los elementos que no pertenecen a A, es decir:*

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Obsérvese que la propiedad que determina al complementario de A es la negación de la propiedad que determina a los elementos de A.



Complementario de A respecto a U.

Propiedades 1. *Dado un conjunto U y $A, B \subseteq U$, se verifican las siguientes propiedades:*

i) $\overline{\emptyset} = U$;

ii) $\overline{U} = \emptyset$;

iii) $\overline{\overline{A}} = A$;

iv) $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; \overline{B} \subseteq \overline{A}$.

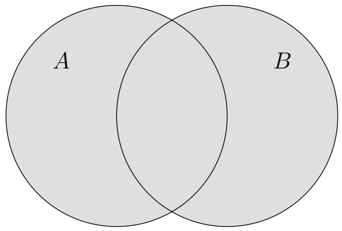
Definición 4. *Dados dos conjuntos A y B se llama*

- ***unión*** *de A y B, y se representa por $A \cup B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B:*
$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \;\vee\; x \in B\},$$

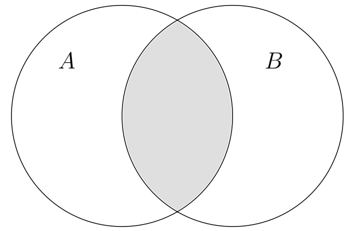
- ***intersección*** *de A y B, y se representa por $A \cap B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B:*
$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \;\wedge\; x \in B\}.$$

Dos conjuntos que no tienen ningún elemento en común, se dice que son **disjuntos**, es decir:

$$A \text{ y } B \text{ son disjuntos} \;\Leftrightarrow\; A \cap B = \emptyset.$$



Unión de conjuntos: $A \cup B$



Intersección de conjuntos: $A \cap B$

Ejemplo 5.

i) *Si* $A = \{a, b, c\}$ *y* $B = \{b, s\}$, $A \cup B = \{a, b, c, s\}$ *y* $A \cap B = \{b\}$.

ii) *Si* $A = \{a, x\}$ *y* $B = \{b, x\}$, *entonces* $A \cup B = \{a, b, x\}$ *y* $A \cap B = \{x\}$.

iii) *Si* $A = \{a, y\}$ *y* $B = \{b, x\}$, *entonces* $A \cup B = \{a, b, x, y\}$ *y* $A \cap B = \emptyset$.

iv) *Si* $A = \{a, b, c\}$ *y* $B = \{a, b, c, m\}$, *entonces* $A \cup B = \{a, b, c, m\} = B$ *y* $A \cap B = \{a, b, c\} = A$, *(nótese que* $A \subseteq B$*).*

v) *Si* $A = \{x, y\}$ *y* $B = \{x, \{y\}, \{x, z\}\}$, *entonces* $A \cup B = \{x, y, \{y\}, \{x, z\}\}$ *y* $A \cap B = \{x\}$.

Propiedades 2. *Para cualesquiera conjuntos A, B y C, subconjuntos de U, se verifica:*

i) $A \cup \emptyset = A$ *y* $A \cap U = A$.

ii) $A \cup \overline{A} = U$ *y* $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

iii) *La unión y la intersección son conmutativas:*
$A \cup B = B \cup A$ *y* $A \cap B = B \cap A$.

iv) *La unión y la intersección son asociativas:*
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *y* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

v) *La unión es distributiva respecto a la intersección, y viceversa:*
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *y* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Estas propiedades se corresponden con los axiomas de la **Definición 9.** del tema anterior, por lo que se concluye que $(\mathcal{P}(U), \emptyset, U, ^{-}, \cup, \cap)$ es un **álgebra de Boole**. Se deducen, entonces, las siguientes propiedades:

Propiedades 3. *Dados los conjuntos A, B y C, subconjuntos de U, se verifica:*

i) *Leyes de idempotencia:* $A \cup A = A$ *y* $A \cap A = A$.

ii) *Leyes de acotación:* $A \cup U = U$ *y* $A \cap \emptyset = \emptyset$.

iii) *Leyes de absorción:* $A \cup (A \cap B) = A$ *y* $A \cap (A \cup B) = A$.

iv) *Leyes de DeMorgan:* $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *y* $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Otras propiedades. Para cualesquiera $A, B, C \subseteq U$, se verifica:

i) $A \subseteq (A \cup B)\,, \quad B \subseteq (A \cup B)$.

ii) $(A \cap B) \subseteq A, \quad (A \cap B) \subseteq B$.

iii) $A \subseteq C \ \wedge \ B \subseteq C \ \Leftrightarrow \ (A \cup B) \subseteq C$.

iv) $C \subseteq A \ \wedge \ C \subseteq B \ \Leftrightarrow \ C \subseteq (A \cap B)$.

v) $A \subseteq B \ \Leftrightarrow \ A \cup B = B \ \Leftrightarrow \ A \cap B = A$.

Definición 5. *Se extiende la definición de unión y de intersección para una colección finita $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de subconjuntos de U:*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in U \mid x \textit{ pertenece al menos a un conjunto } A_i, \ \textit{con } i = 1, 2, \ldots, n\};$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in U \mid x \textit{ pertenece a todos los conjuntos } A_i, \ \textit{con } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Si los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son finitos y disjuntos dos a dos (es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall i \neq j$), entonces

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Esta propiedad es una de las técnicas básicas de conteo, se denomina Principio de la adición y se estudiará en el tema 3.

Sin embargo, esta igualdad no se cumple cuando los conjuntos no son disjuntos dos a dos. Por ejemplo, para dos conjuntos finitos A y B, se verifica $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. El Principio de inclusión-exclusión es una generalización de esta fórmula y también se verá en el tema 3.

Además se verifica que : $\overline{\cup_{i=1}^{n} A_i} = \cap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ *y* $\overline{\cap_{i=1}^{n} A_i} = \cup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

Ejemplo 6. *Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Z}$:*

$$A_1 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \textit{ es múltiplo de } 5\},$$
$$A_2 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \textit{ es múltiplo de } 2\},$$
$$A_3 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \textit{ es múltiplo de } 3\};$$

se verifica que

$$4 \in A_1 \cup A_2 \cup A_3; \quad 30 \in A_1 \cap A_2 \cap A_3; \quad 8 \in \overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}; \quad 10 \in A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3};$$

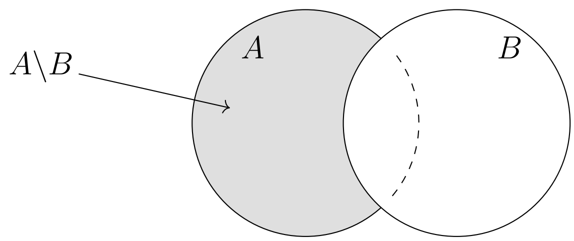
de hecho,

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \textit{ es múltiplo de 30}\},$$
$$\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \textit{ es par y no es múltiplo de 3 ni de 5}\},$$
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \textit{ es múltiplo de 2 o de 3 o de 5}\}.$$

Además de las operaciones anteriores, que dan estructura de álgebra de Boole a $\mathcal{P}(U)$, se pueden definir otras como, por ejemplo, la *diferencia* de conjuntos:

Definición 6. *Dados dos conjuntos A y B se llama* ***diferencia*** *entre A y B, y se representa por $A \backslash B$ o por $A - B$, al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B:*

$$A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$



Diferencia de conjuntos $A \backslash B$

Observemos que $A \backslash B = A \cap \overline{B}$. Además, se verifica que

$$A \backslash B = A \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq \overline{A} \Leftrightarrow B \backslash A = B$$

Ejemplo 7.

i) *Para $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, s\}$, $A \backslash B = \{a, c\}$.*

ii) *Si $A = \{a, y\}$, $B = \{b, x\}$, $A \backslash B = A = \{a, y\}$ (obsérvese que $A \cap B = \emptyset$).*

iii) *Si $A = \{x, y\}$ y $B = \{x, \{y\}, \{x, z\}\}$, $A \backslash B = \{y\}$.*

Definición 7. *Una* ***partición*** *de A es una colección $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de subconjuntos no vacíos de A que verifica las dos propiedades siguientes:*

i) $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$,

ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$, *para todo* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

Ejemplo 8.

i) *Sea $B = \{a, b, c, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$. Una partición de B es $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ donde:*

$$A_1 = \{a, 2, 8\}, \qquad A_2 = \{b, c\}, \qquad A_3 = \{3, 4, 6\}, \qquad A_4 = \{7\}.$$

ii) *Una partición de $\mathbb{Z}$ es $\{A_1, A_2, A_3\}$ donde:*

$$A_1 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}, \qquad A_2 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 0\}, \qquad A_3 = \{0\}.$$

iii) Otra partición de $\mathbb{Z}$ *es* $\{A_1, A_2\}$ *donde:*

$$A_1 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ es par}\}, \qquad A_2 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ es impar}\}.$$

iv) La familia $\{A_1, A_2\}$ *donde:*

$$A_1 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 0\}, \qquad A_2 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$$

no es una partición de $\mathbb{Z}$*, pues* $A_1 \cap A_2 = \{0\} \neq \emptyset$*.*

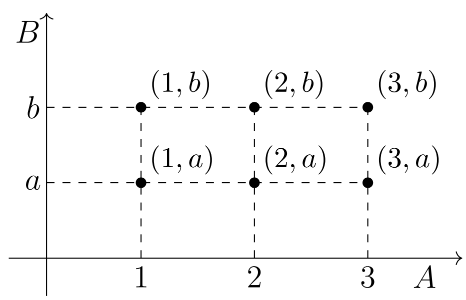
2.3 Producto Cartesiano

Definición 8. *Dados dos conjuntos* A *y* B*, se llama* ***producto cartesiano*** *de* A *por* B*, y se denota* $A \times B$*, al conjunto constituido por* pares ordenados *de elementos, el primero perteneciente al conjunto* A *y el segundo a* B*. Esto es:*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}$$

Ejemplo 9. *El producto cartesiano* $A \times B$ *de los conjuntos* $A = \{1, 2, 3\}$ *y* $B = \{a, b\}$ *es el conjunto:*

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$



Representación gráfica de $A \times B$

Cuando sea posible, es útil representar gráficamente el producto cartesiano por medio de *diagramas de coordenadas cartesianas.* Para ello se toman dos rectas OX y OY, perpendiculares, de forma que el punto O es la intersección de ambas. Este punto recibe el nombre de *origen*, la recta OX es el eje de *abscisas* y la OY es el eje de *ordenadas*. El conjunto A se representa linealmente en OX, y el B en OY. Los elementos (a, b) de $A \times B$ se representan por puntos resultantes de la intersección de la paralela a OY por a con la paralela a OX por b. En la figura anterior se muestra la representación en coordenadas cartesianas del ejemplo dado.

Dos pares ordenados (a, b) y (c, d), elementos del producto cartesiano $A \times B$, son iguales si $a = c$ y $b = d$. Es claro que, en general, $A \times B \neq B \times A$.

Se puede extender la definición de producto cartesiano a n conjuntos.

Definición 9. *Dados n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se define su producto cartesiano como:*

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i,\ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Finalmente, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos, también lo es $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ y se tiene que:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$$

Cuando $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ se suele usar la notación $A^n = A \times A \times \cdots \times A$.

2.4 Aplicaciones. Tipos de aplicaciones

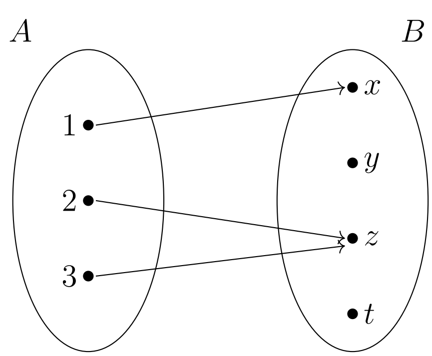
El concepto de aplicación (función) es de gran importancia en Informática. Una función es el modo más natural de implementar la correspondencia entre los datos y el resultado de un proceso de cálculo en un ordenador. Los llamados *lenguajes funcionales* como HASKELL, se fundamentan en este concepto y suelen identificar programa y función.

Definición 10. *Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Una* ***aplicación*** *f de A en B es una regla que asocia a* cada *elemento a de A un* único *elemento de B que se denomina* imagen *por f de a y se denota $f(a)$.*

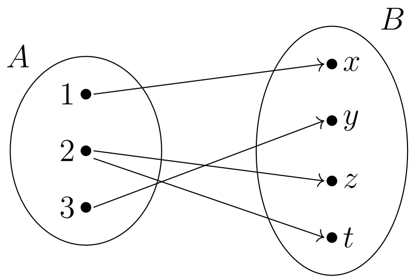
El conjunto A se llama *conjunto inicial*, y el B *conjunto final*. La relación entre a y su *imagen*, $f(a)$, se suele representar de la forma:

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ a & \rightsquigarrow & f(a) = b \end{array}$$

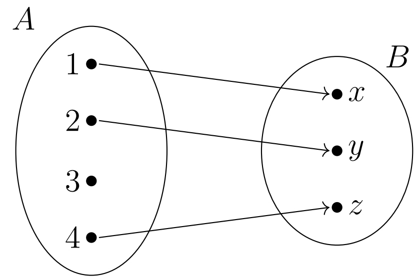
Ejemplo 10.



Aplicación entre conjuntos



No es aplicación porque al 2 se le asignan dos elementos de B



No es aplicación porque 3 no tiene asignado ningún elemento de B

Se suele denominar *función* a la correspondencia $f : A \to B$ si A y B son conjuntos de números. Con frecuencia, se utiliza la letra x para denotar los elementos del conjunto inicial de f, y la letra y para los elementos del conjunto final.

Dos aplicaciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$ son *iguales* si $A = C$, $B = D$ y $f(a) = g(a)$, para cualquier elemento a de A.

Definición 11. *Sea $f : A \to B$ una aplicación y sean $A_1 \subseteq A$ y $B_1 \subseteq B$, dos subconjuntos de A y B respectivamente. Se define la* ***imagen por f del conjunto*** *A_1 como:*

$$f(A_1) := \{f(a)\,;\, a \in A_1\} \subseteq B$$

y la ***imagen recíproca por f del conjunto*** *B_1 como:*

$$f^{-1}(B_1) := \{a \in A\,;\, f(a) \in B_1\} \subseteq A$$

Si tomamos como $A_1 = A$, el conjunto $f(A) = Im(f)$ se denomina *conjunto imagen.*

Ejemplo 11. *Sea $f : A = \{1, 2, 3\} \to B = \{x, y, z, t\}$ la aplicación representada en el ejemplo 10, es decir, por $f(1) = x, f(2) = z, f(3) = z$. Es claro que*

$$f(\{1\}) = \{x\},\ f(\{2\}) = \{z\},\ f(\{2, 3\}) = \{z\},\ f(\{1, 2\}) = \{x, z\},$$

y, por otro lado,

$$f^{-1}(\{x, y\}) = \{1\},\ f^{-1}(\{x, z\}) = A,\ f^{-1}(\{t, y\}) = \emptyset,\ f^{-1}(\{z\}) = \{2, 3\}.$$

Definición 12. *Se dice que una aplicación $f : A \to B$ es:*

i) ***inyectiva*** *si elementos distintos de A tienen imágenes diferentes en B, esto es:*

$$\forall\, a_1, a_2 \in A \quad [a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2)] \quad \textit{es verdadera}$$

o, equivalentemente,

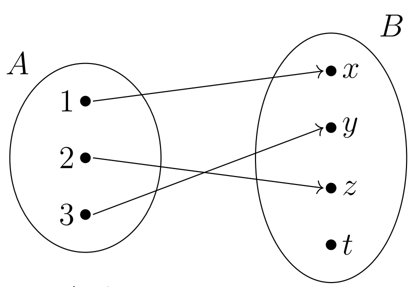
$$\forall\, a_1, a_2 \in A \quad [f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2] \quad \textit{es verdadera}$$

ii) ***sobreyectiva*** *si todo elemento de B es imagen de, al menos, un elemento de A, es decir:*

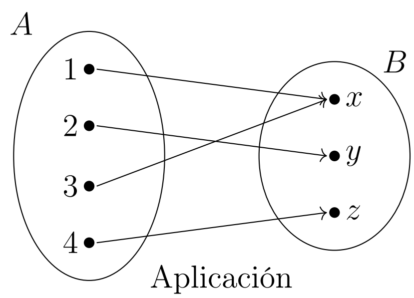
$$\forall b \in B\ \exists a \in A \quad [b = f\,(a)] \quad \textit{es verdadera}$$

o, equivalentemente, $Im(f) = B$.

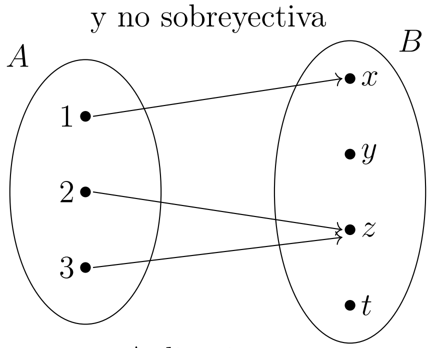
iii) ***biyectiva*** *o* ***biunívoca*** *si es inyectiva y sobreyectiva.*



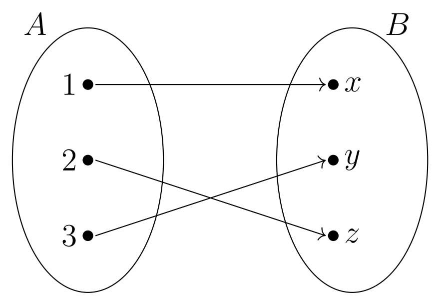
Aplicación inyectiva
y no sobreyectiva



Aplicación
sobreyectiva
y no inyectiva



Aplicación no
inyectiva y no
sobreyectiva



Aplicación biyectiva

Ejemplo 12.

i) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definida por* $f(n, m) = n \cdot m$*, para cada* $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$*, no es una función inyectiva pues* $f(0, 3) = f(5, 0) = 0$*. La función* f *es sobreyectiva ya que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *el elemento* $(1, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *verifica que* $f(1, n) = 1 \cdot n = n$*. Además:*

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{5\}) &= \{(1,5),(5,1)\}, \\ f^{-1}(\{6\}) &= \{(1,6),(6,1),(3,2),(2,3)\}, \\ f^{-1}(\{2,4\}) &= \{(1,2),(2,1),(2,2),(4,1),(1,4)\}. \end{aligned}$$

ii) Sea $A = \{a, b, c, d\}$*, la función* $f : \mathcal{P}(A) \to \mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$ *definida por* $f(X) = |X|$*, para cada* $X \in \mathcal{P}(A)$*, no es inyectiva (*$f(\{a, b\}) = f(\{c, d\}) = 2$*) ni sobreyectiva (*$f^{-1}(\{5\}) = \emptyset$*).*

iii) La función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_2 x$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$ es biyectiva.

Proposición 1. *Si los conjuntos A y B son finitos y $f : A \to B$ es una aplicación entre ellos, se verifica que:*

- *Si f es inyectiva entonces $|A| \leq |B|$ (equivalentemente, si $|A| > |B|$, entonces f no es inyectiva).*
- *Si f es sobreyectiva, entonces $|A| \geq |B|$ (equivalentemente, si $|A| < |B|$, entonces f no es sobreyectiva).*
- *Si f es biyectiva entonces $|A| = |B|$ (equivalentemente, si $|A| \neq |B|$, entonces f no es biyectiva).*

Conviene destacar que, si bien no todas las aplicaciones que se pueden definir entre conjuntos con el mismo cardinal son biyectivas, siempre es posible encontrar una aplicación biyectiva entre ellos.

Además, se verifica el siguiente resultado que será de utilidad en la práctica:

Proposición 2. *Si A y B son dos conjuntos finitos con el mismo cardinal y $f : A \to B$ es una aplicación entre ellos, son equivalentes:*

i) f es inyectiva *ii) f es sobreyectiva* *iii) f es biyectiva*

Demostración. Si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, entonces $f(A) = \{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$ y, al ser f inyectiva, $|f(A)| = |A| = |B|$. Puesto que $f(A) \subseteq B$ y tienen el mismo cardinal[1], es obvio que $f(A) = B$, es decir f es sobreyectiva. Recíprocamente, si f es sobreyectiva y $f(a_1) = f(a_2)$ con $a_1 \neq a_2$, entonces $|f(A)| < |A| = |B|$, lo que contradice la sobreyectividad de f. $\square$

2.5 Composición de aplicaciones. Aplicación inversa

Definición 13. *Dados tres conjuntos A, B y C, y dos aplicaciones f y g tales que*

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ a & \longrightarrow & f(a) = b \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : B & \longrightarrow & C \\ b & \longrightarrow & g(b) = c \end{array}$$

se llama ***composición de** f **con*** *g a la aplicación:*

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : A & \longrightarrow & C \\ a & \longrightarrow & (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c \end{array}$$

es decir:

[1] Si A es un conjunto finito y $B \subseteq A$, se cumple que $A = B \Leftrightarrow |A| = |B|$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & B \arrow[r, "g"] & C \\ a \arrow[r] & f(a) \arrow[r] & g(f(a)) = (g \circ f)(a) \end{tikzcd}$$

Ejemplo 13. *Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sean $f, g : A \to A$ las aplicaciones definidas por*

$$f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = 1$$
$$g(1) = 5,\ g(2) = 4,\ g(3) = 3,\ g(4) = 2 \text{ y } g(5) = 1.$$

Es evidente que

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = 5 \text{ y } (f \circ g)(a) = f(g(a)) = 1, \text{ para todo } a \in A.$$

Por lo tanto, $g \circ f \neq f \circ g$.

La composición de aplicaciones tiene la propiedad *asociativa*, es decir, dadas tres aplicaciones $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Proposición 3. *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos aplicaciones cualesquiera. Se verifica que:*

- *Si f y g son inyectivas, también lo es $g \circ f$*
- *Si f y g son sobreyectivas, también lo es $g \circ f$*
- *Si f y g son biyectivas, también lo es $g \circ f$*

Demostración. Si f y g son inyectivas y a_1, a_2 son dos elementos de A tales que $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$, entonces $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ (por definición de composición). Puesto que g es inyectiva, se verifica que $f(a_1) = f(a_2)$ y, la inyectividad de f permite concluir que $a_1 = a_2$.

La demostración de las otras dos afirmaciones es un sencillo ejercicio. □

Definición 14. *Se llama aplicación **identidad** a una aplicación I_A de A a A de la forma:*

$$\begin{aligned} I_A : A &\longrightarrow A \\ a &\longrightarrow I_A(a) = a \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que dada cualquier aplicación $f : A \to B$ se verifica que

$$f \circ I_A = f = I_B \circ f$$

Definición 15. *Sea $f : A \to B$ una aplicación. Se llama **aplicación inversa** de f, y se denota por f^{-1}, a una aplicación $f^{-1} : B \to A$ tal que, si b es un elemento de B,*

$$f^{-1}(b) = a \Longleftrightarrow b = f(a)$$

Puede que no exista una aplicación inversa de f.

Proposición 4. *Dada una aplicación $f : A \to B$, f admite inversa si, y solo si, f es biyectiva. Además, si f tiene inversa entonces*

- *su inversa f^{-1} es la única aplicación que verifica $f \circ f^{-1} = I_B$ y $f^{-1} \circ f = I_A$*
- *f^{-1} también tiene inversa y $(f^{-1})^{-1} = f$*
- *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son dos aplicaciones invertibles (es decir, tienen inversa), entonces $g \circ f$ también lo es y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$*

Ejemplo 14.

i) *$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = n + 2$, para cada $n \in \mathbb{Z}$, es biyectiva, su inversa es $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $g(m) = m - 2$ para cada $m \in \mathbb{Z}$.*

ii) *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = 2^x$, para cada $x \in \mathbb{R}$ es biyectiva, su inversa es la función $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $g(y) = \log_2 y$.*