Gestión de Infraestructuras
Tema 3: Sistemas de Comunicaciones - Parte 1
Ejercicios

1. **Ejercicio de clase:**

   El proceso de muestrear una señal $x(t)$ a un periodo T_s puede expresarse como sigue

   $$x(n) = x(t)p(t)$$

   donde

   $$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

   Sabiendo que el tren de impulsos satisface el par transformado

   $$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \longrightarrow P_T(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

   Para la señal $x(t) = \frac{\mathrm{sen}(\pi t)}{\pi t}$, represente $TF[x(t)p(t)]$ y determine el valor de ω_s para que no exista solapamiento entre las réplicas.

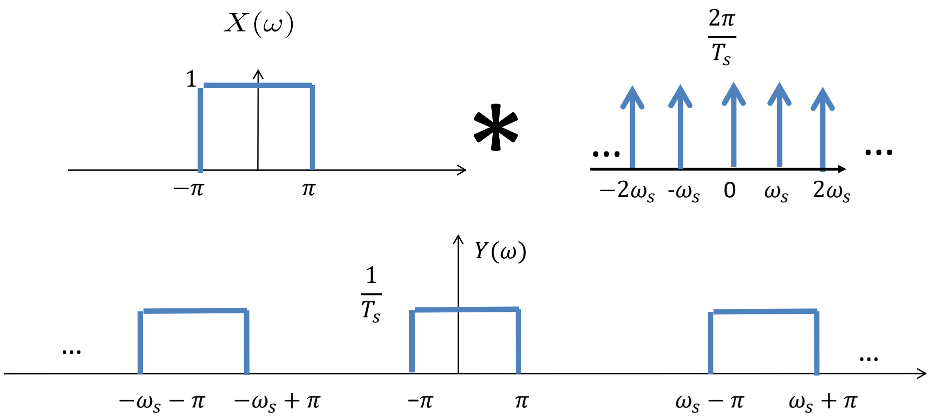
   Solución:

   Comenzaremos determinando la transformada de Fourier de $x(t)$,

   $$x(t) = \frac{\mathrm{sen}(\pi t)}{\pi t} \longrightarrow X(\omega) = \begin{cases} 1 & -\pi < \omega < \pi \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

   Por la propiedad de multiplicación, sabemos

   $$\begin{aligned} TF[x(t)p(t)] &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \\ &= \frac{1}{T_s} X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \end{aligned}$$



En la figura podemos observar que para evitar el solapamiento debe cumplirse $\omega_s - \pi > \pi$, es decir $\omega_s > 2\pi$ (teorema de muestreo).

2. **Ejercicio de clase:**

Se muestrea la señal $x(t) = 10\cos(2000\pi t) + 20\cos(4000\pi t)$ para su posterior transmisión en forma digital.

a) ¿Cuál es el periodo de muestreo máximo que asegura la posterior reconstrucción de la señal a partir de sus muestras?

b) Si se quiere reproducir 1 hora de esta señal, ¿cuántas muestras necesitan ser almacenadas?

Solución:

a) $T_s = 250\ \mu$s

b) $14,4 \times 10^6$ muestras.

Desarrollo:

a) *La frecuencia más alta de la señal es $f_x = 2000\ Hz$, por lo que trendríamos que utilizar una frecuencia de muestreo $f_s > 2f_x = 2 \times 2000 = 4000\ Hz$. Como $f_s = 1/T_s$, obtenemos*

$$\frac{1}{Ts} > 4000\ Hz$$

Es decir,

$$Ts < \frac{1}{4000} = 250\mu s$$

b) *Para reproducir 1 hora muestreándo a $f_s = 4000\ Hz$, tenemos*

$$N_s = \frac{4000\ muestras}{s} \times 3600\ s = 14400000 = 14,4 \times 10^6\ muestras$$

3. **Ejercicio:**

Se desea muestrear una señal de electrocardiograma (ECG),

a) ¿Cuál es la frecuencia de Nyquist para muestrear la señal si se considera que la señal tiene frecuencias útiles hasta 100 Hz?

b) Si se muestrea a una frecuencia de 250 Hz ¿Cuál es la frecuencia más alta que debería tener la señal?

Solución:

a) $f_s = 200$ Hz

b) $f_x = 125$ Hz

Desarrollo:

a) *Para $f_x = 100$ Hz, la frecuencia de Nyquist es $f_s = 2f_x = 200$ Hz.*

b) *Si utilizamos una frecuencia de muestreo de $fs = 200$ Hz, la señal debería tener una frecuencia máxima $f_x = 125$ Hz.*

4. **Ejercicio de clase:**

Una señal coseno $x(t) = \cos(2\pi f t)$ se muestrea a una frecuencia $f_s = 1000$ Hz. Determine la señal discreta y la señal reconstuida para las siguietnes frecuencias:

a) $f = 200$ Hz

b) $f = -200$ Hz

c) $f = 1000$ Hz.

Solución:

a) $x_d(n) = \cos(2\pi n/5)$, $y(t) = x(t)$

b) $x_d(n) = \cos(-2\pi n/5)$, $y(t) = x(t)$

c) $x_d(n) = 1$, $y(t) = 1$

Desarrollo:

a*) La señal digital se obtiene como $x_d(n) = x(nT_s) = x(n/f_s)$,*

$$x_d(n) = x(nT_s) = x(n/f_s) = \cos\left(2\pi 200 \frac{n}{1000}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5} n\right)$$

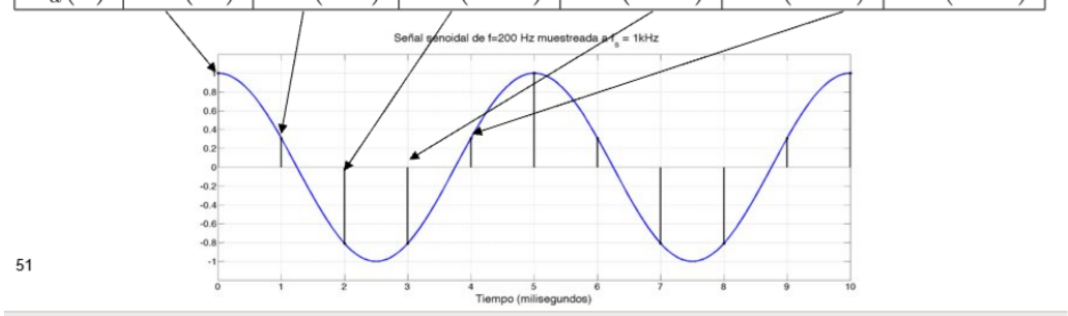
La señal reconstruida es

$$y(t) = x[f_s t] = \cos\left(\frac{2\pi 1000}{5} t\right) = \cos(2\pi 200 t) = x(t)$$

Es el resultado esperado porque se cumple el teorema de Nyquist, $fs > 2f$.

Las siguiente figura muestra la señal continua y discreta. El eje x representa el tiempo en ms. Dado que la frecuencia de muestreo es $f_s = 1000$ Hz, las muestras se toman en los instantes $n/T_s = n/1000$ y el valor de cada muestra será $\cos\left(\frac{2\pi}{5} n\right) = \cos(72° n)$. Dado que se cumple el teorema de muestreo, la señal reconstruida es igual a la original y se obtiene interpolando las muestras con un filtro paso bajo.

n	0	1	2	3	4	5
$x_d(n)$	$\cos(0°)$	$\cos(72°)$	$\cos(144°)$	$\cos(216°)$	$\cos(288°)$	$\cos(360°)$

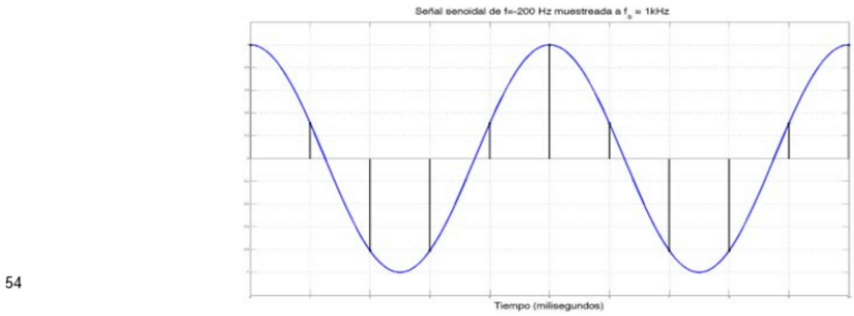


b) *La señal digital se obtiene como* $x_d(n) = x(nT_s) = x(n/f_s)$,

$$x_d(n) \quad = \quad x(nT_s) = x(n/f_s) = \cos\left(-2\pi 200 \frac{n}{1000}\right) = \cos\left(\frac{-2\pi}{5} n\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5} n\right)$$

Por tanto, se obtiene la misma señal discreta y reconstruida que en el apartado anterior.

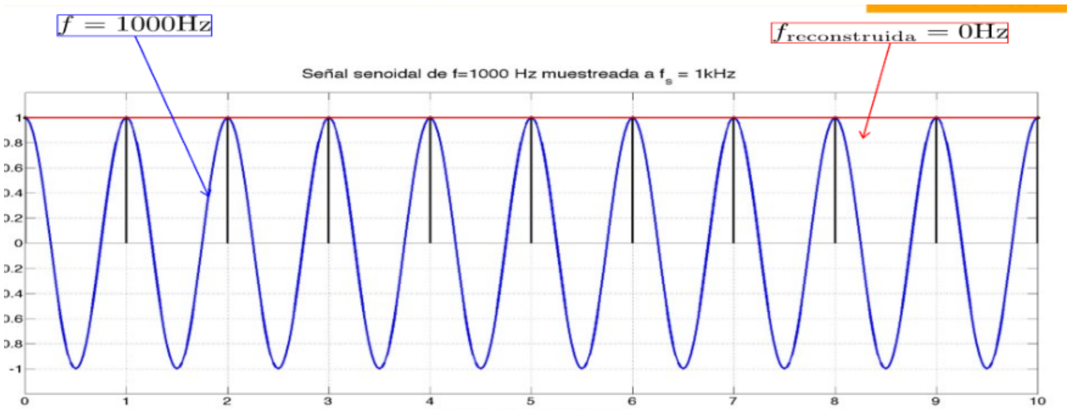
n	0	1	2	3	4	5
$x_d(n)$	$\cos(0°)$	$\cos(-72°)$	$\cos(-144°)$	$\cos(-216°)$	$\cos(-288°)$	$\cos(-360°)$



c) *Realizando el mismo desarrollo que en los apartados anteriores obtenemos:*

$$x_d(n) \quad = \quad x(nT_s) = x(n/f_s) = \cos\left(2\pi 1000 \frac{n}{1000}\right) = \cos(2\pi n) = \cos(0) = 1$$

La señal reconstruida será $y(t) = 1$. *La figura muestra la señal original (azul), los instantes donde se toman las muestras (negro) y las reconstruida (rojo).*



5. **Ejercicio:**

Sea una señal analógica $x(t) = \sin(480\pi t) + 3\sin(720\pi t)$ se muestrea 600 veces por segundo.

a) Determine la frecuencia de muestreo de $x(t)$.

b) Si se muestrea a $f_s = 600$ Hz, ¿Cuál es la señal en discreto? Utilice $\sin(\alpha) = -\sin(1-\alpha)$.

c) Determine la expresión de la señal reconstruida a partir de las muestras.

Solución:

a) $f_s > 720$ muestras/s

b) $x_d(n) = -2\sin(4\pi n/5)$

c) $y(t) = -2\sin(480\pi t)$.

Desarrollo:

a) *La frecuencia máxima de la señal senoidal es* $f = 360$ *Hz, por lo que la señal debe ser muestreada a* $f_s > 720$ *muestras/s para garantizar su correcta reconstrucción.*

b) *Para* $f_s = 600$

$$
\begin{aligned}
x_d(n) &= x(nT_s) = x\left(\frac{n}{f_s}\right) = \sin\left(2\pi\frac{240}{600}n\right) + 3\sin\left(2\pi\frac{360}{600}n\right) \\
&= \sin\left(2\pi\frac{2}{5}n\right) + 3\sin\left(2\pi\frac{6}{5}n\right) \\
&= \sin\left(2\pi\frac{2}{5}n\right) + 3\sin\left(2\pi\left(1-\frac{2}{5}\right)n\right)
\end{aligned}
$$

Utilizando $\sin(\alpha) = -\sin(1-\alpha)$, *obtenemos*

$$
x_d(n) = \sin\left(2\pi\frac{2}{5}n\right) - 3\sin\left(2\pi\frac{2}{5}n\right) = -2\sin\left(2\pi n\frac{2}{5}\right)
$$

c) *La señal reconstruida se obtiene multiplicando el índice temporal por la frecuencia de muestreo* $f_s = 600$ *Hz,*

$$
y(t) = x_d(f_s t) = -2\sin\left(2\pi\frac{2}{5}600t\right) = -2\sin(480\pi t)
$$

6. **<u>Ejercicio de clase:</u>**

Se muestrea una señal analógica y se obtienen los siguientes valores para las cinco primeras muestras: {-2,3 0,7 -3,4 1,9 2,6}. Estas muestras se cuantifican con un cuantificador uniforme de 8 niveles y rango { -4, 4}.

a) Determine los valores a la salida del cuantificador correspondiente a las cinco muestras y el error absoluto de cuantificación para cada una.

b) Determine la secuencia binaria que se obtendría codificando las muestras cuantificadas utilizando PCM.

<u>Solución</u>:

a) Salida del cuantificador: {-2,5 0,5 -3,5 1,5 2,5} Error: {0,2 0,2 0,1 0,4 0,1};

b) {001 100 000 101 110}

<u>Desarrollo:</u>

a) *Dado que el cuantificador tiene 8 niveles en { -4, 4}, podemos calcular el paso del cuantificador como*

$$\Delta = \frac{4-(-4)}{8} = 1$$

Haremos una tabla indicando para cada intervalo del cuantificador, cuál es la salida y el código que se le asigna:

Intervalo	*Salida cuantificador*	*Código*
$[-4 \quad -3)$	*-3,5*	*000*
$[-3 \quad -2)$	*-2,5*	*001*
$[-2 \quad -1)$	*-1,5*	*010*
$[-1 \quad 0)$	*-0,5*	*011*
$[0 \quad 1)$	*0,5*	*100*
$[1 \quad 2)$	*1,5*	*101*
$[2 \quad 3)$	*2,5*	*110*
$[3 \quad 4)$	*3,5*	*111*

La siguiente tabla muestra la salida del cuanticador y el error absoluto para las muestras que nos indican en el enunciado

Muestra (x)	*Salida cuantificador (q)*	$E = \lvert x - q \rvert$
-2.3	*-2.5*	*0.2*
0.7	*0.5*	*0.2*
-3.4	*-3.5*	*0.1*
1.9	*1.5*	*0.4*
2.6	*2.5*	*0.1*

b) *El código para cada muestra se determina buscando en la tabla de códigos que calculamos anteriormente:*

Muestra cuantificada	*Código*
-2.5	*001*
0.5	*100*
-3.5	*000*
1.5	*101*
2.5	*110*

7. **Ejercicio:**

Repita el ejercicio anterior suponiendo un cuantificador uniforme de 16 niveles y rango { -4, 4}.

Solución:

Salida del cuantificador: {-2,25 0,75 -3,25 1,75 2,75}

Error de cuantificador: {-0,05 -0,05 -0.15 0.15 -0.15}

Código: {0011 1001 0001 1011 1101}

Desarrollo:

En este caso, el paso del cuantificador es

$$\Delta = \frac{4-(-4)}{16} = 0{,}5$$

A partir de esto, se puede calcular la tabla con los intervalos, la salida del cuantificador y el código. Recuerde que para 16 *niveles, se necesita un código de 4 bits.*

El error de cuantificador se calcula como $E = |x - q|$*. Si comparamos los resultados con los obtenidos en el ejercicio anterior, podemos deducir que el error se reduce al aumentar el número de niveles del cuantificador. Sin embargo, el número de bits que se asigna a cada muestra aumenta.*

8. **Ejercicio de clase:**

Una señal analógica de ancho de banda 4 kHz se digitaliza muestreándola a la frecuencia de Nyquist, cuantificándola con 1024 niveles y codificándola usando PCM.

a) Determine la tasa binaria que resulta al digitalizar la señal analógica.

b) Determine el tamaño del fichero que se necesita para almacenar 1 minuto de la señal analógica.

Solución:

a) $R_b = 80$ kbps

b) 600 kB

Desarrollo:

a) *En primer lugar determinaremos la frecuencia de muestreo*

$$f_s = 2f_x = 2 \times 4000 = 8000 \; Hz$$

Dado que el cuantificador tiene 1024 niveles, el código trendrá $b_c = log_2(1024) = 10 \; bits/muestra$*.*
Por último, la tasa binaria se calcula utilizando

$$R_b = f_s \times b_c = 8000 \times 10 = 80000 = 80 \; kbps$$

b) *Si se digitaliza 1 minuto (60 s) de esta señal, tenemos*

$$N_b = 80000 \times 60 = 4800000 \; bits$$

Considerando las unidesdes del Sistema Internacional (SI), $1 \; Byte = 8 \; bits$ *y que* $1 \; KB = 10^3 \; B$*, obtenemos*

$$N_b = 600 \; KB$$

9. **Ejercicio de ordenador:**

   Observe el vídeo de la siguiente página web: `https://www.lanacion.com.ar/sociedad/el-efecto-fotografico-que-hace-levitar-a-un-helicoptero-nid1990740/`. ¿Qué sucede?

   Vamos a realizar el mismo experimento con señales senoidales. Consideraremos una señal continua

   $$x(t) = \cos(2\pi f_1 t)$$

   En Octave/Matlab, la variable temporal se genera con $t = 1/fs : 1/fs : T$; es decir, se consideran las muestras separadas $1/fs$.

   El siguiente código genera y representa las muestras utilizando el comando *stem*. Posteriormente, representa con *plot* la señal que resulta de unir con un trazo continuo esas muestras.

```
clear all; close all;
T=0.1;    %Duracion de la senal en segundos
fs=5000; %fs: frecuencia de muestreo
f1=100;

t= 1/fs:1/fs:T;
Ls=length(t);
f=-fs/2+fs/Ls:fs/Ls:fs/2;     %Declaración del eje de frecuencias

x1= cos(2*pi*f1*t);
subplot(211);
stem(t,x1,'or'); hold on; plot(t,x1);
axis([0 0.1 -1 1]);
xlabel('tiempo'); ylabel('Amplitud');
title('Senal x(t)');
```

   Ahora cambie f_s para que la señal reconstruida sea constante. ¿Qué relación existe entre f_s y f_1?

   ¿Qué relación existe entre esta simulación y el vídeo?

10. **Ejercicio de ordenador:**

Una vez entendida la importancia de la relación entre la frecuencia de la señal y la del muestreo, vamos a hacer una prueba con señales senoidales. El siguiente código genera señales coseno con distintas frecuencias y las representa tanto en tiempo como en frecuencia.

La frecuencia de muestreo está fijada a $fs = 5000$ Hz y usted puede cambiar la frecuencia inicial del coseno f_1.

```
pkg load signal %Necesario en octave (borrar para matlab)
clear all; close all;
% Parametros
T=0.1;    %Duracion de la senal en segundos
fs=5000; %fs: frecuencia de muestreo
f1=100;  %Frecuencia inicial (Hz) [entre 100 y 150] ;

t= 1/fs:1/fs:T;
Ls=length(t);
f=-fs/2+fs/Ls:fs/Ls:fs/2;     %Declaración del eje de frecuencias

x1= cos(2*pi*f1*t);
Xf1=fftshift(fft(x1));          % Transformada de Fourier de x
figure(1)
for k=0:0.20:2
  f2=f1+k*fs;
  x2=cos(2*pi*f2*t);
  Xf2=fftshift(fft(x2));          % Transformada de Fourier de x

  clf;
  subplot(211);
  plot(t,x1); hold on; plot(t,x2,'r');
  axis([0 0.1 -1 1]);
  xlabel('tiempo'); ylabel('Amplitud');
  title('Senal x(t)');

  subplot(212);
  plot(f,abs(Xf1)/max(abs(Xf1)));
  hold on;
  plot(f,abs(Xf2)/max(abs(Xf2)),'r');
  axis([-2*fs 2*fs 0 1.1]);
  xlabel('frecuencia (Hz)'); ylabel('Módulo');
  title('Senal X(f)');

  pause(1)
end;
```

Se pide:

a) Pruebe con distintas frecuencias iniciales y observe qué sucede con la representación en tiempo y en frecuencia.

b) Sabiendo que el bucle incrementa las frecuencias (no las repite), ¿por qué algunas señales tienen la misma representación?

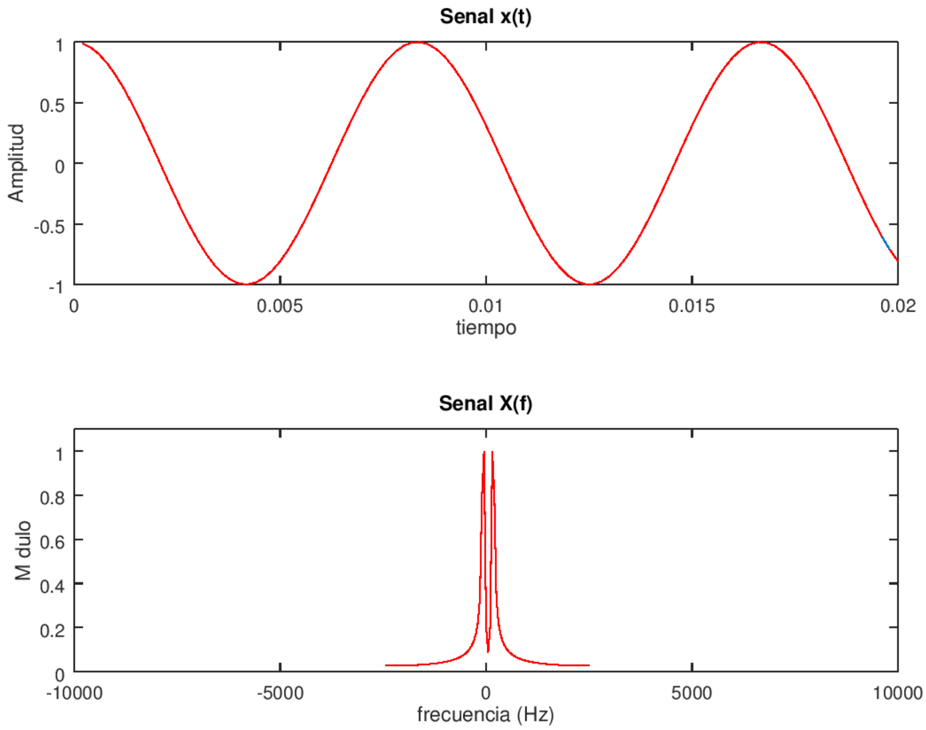
c) Haga un código que genere la señales

$$x_1(t) = cos(2\pi f_1 t)$$

$$x_2(t) = cos(2\pi(f_1 + fs)t)$$

Represéntelas en tiempo y en frecuencia. ¿Qué relación existe entre ellas? ¿Por qué?

Solución:



c)

11. **Ejercicio de ordenador:**

Una forma sencilla de implementar un cuantificador uniforme (empleado en JPEG) con paso de cuantificación Q y con $M+1$ niveles es

```
y = round(x./Q)
```

donde x es la muestra a cuantificar e y es la muestra cuantificada. El paso del cuantificador se puede adaptar al valor máximo y mínimo de la señal de entrada utilizando

```
Q = (max(x) - min(x))/M
```

Para reconstruir la señal, se utiliza

```
r = y.*Q
```

El error de cuantificación y el de reconstrucción vienen dado por

```
Ec = mean(abs(x-y))
Er = mean(abs(x-r))
```

Se pide:

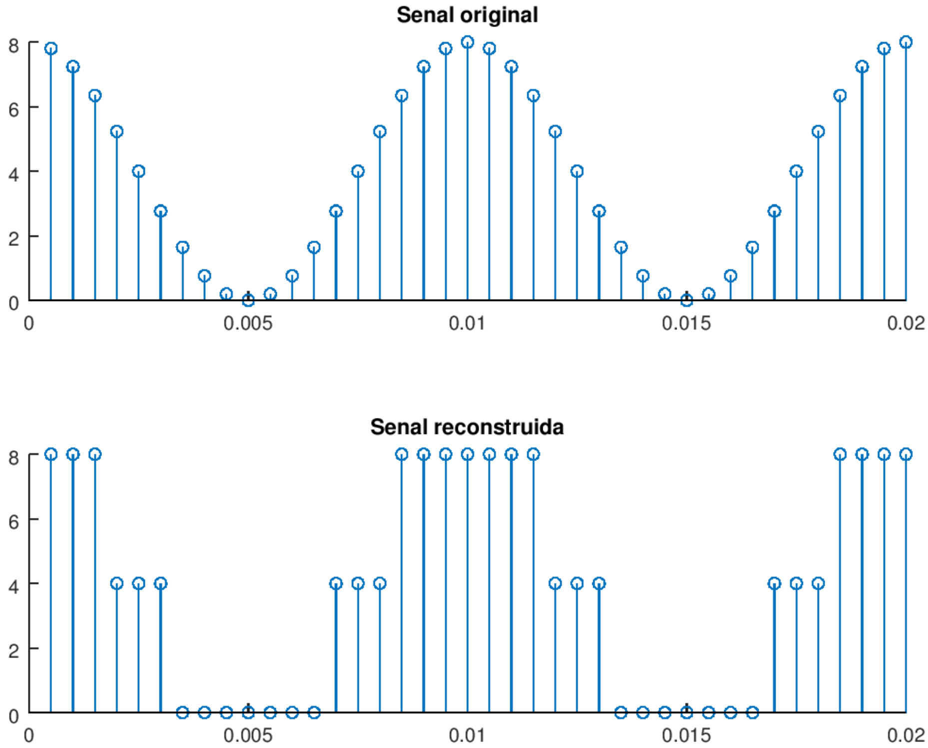
a) Genere una señal $x(t) = A_1 \cos(2\pi f t) + A_1$, cuantifíquela con distintos valores de M y reconstrúyala.

b) En una única figura (dos subfiguras), represente, con el comando stem, la señal original y la reconstruída para un valor de M. Observe que cada mustra está separda $Ts = 1/fs$ y que el número e niveles es $M + 1$. Pruebe con distintos valores de M.

c) En otra figura, represente los errores Ec y Er en función de distintos valores de M.

Solución:

La siguiente figura muestra la señal original y la reconstruida para $A = 4$, $f = 100$ Hz, $fs = 2000$ muestras/s, $T = 0{,}02$ s y $M = 2$.



La siguiente figura muestra el error para M de 2 a 6.