Preliminares Matemáticos

Teoría de la Computación

Grado en Ingeniería Informática

Contenidos

Contenidos

1 Lógica elemental

Definición

Una **proposición lógica** es una frase de la cual se puede determinar si es verdadera o falsa.

Ejemplos: "dos más dos es cuatro", "está lloviendo", etc.

1 Lógica elemental

Definición

Una **proposición lógica** es una frase de la cual se puede determinar si es verdadera o falsa.

Ejemplos: "dos más dos es cuatro", "está lloviendo", etc.

Para formular razonamientos, las proposiciones se pueden ligar mediante una serie de **conectivas lógicas**, cuyas **tablas de verdad** son:

P	Q	$\overline{P}$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \to Q$	$P \Leftrightarrow Q$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

Un ejemplo de implicación es “si hace sol (P), Juan juega al fútbol (Q)”:

- Si P es cierto, el valor global de la proposición es el valor de Q.
- Si P es falso, el valor global de la proposición es siempre $\mathcal{V}$ independientemente del valor de Q, porque la proposición no nos indica realmente qué hace Juan cuando no hace sol.
- En resumen, $P \to Q$ es equivalente a $\overline{P} \vee Q$.

1 Lógica elemental

Un ejemplo de implicación es "si hace sol (P), Juan juega al fútbol (Q)":

- Si P es cierto, el valor global de la proposición es el valor de Q.
- Si P es falso, el valor global de la proposición es siempre $\mathcal{V}$ independientemente del valor de Q, porque la proposición no nos indica realmente qué hace Juan cuando no hace sol.
- En resumen, $P \rightarrow Q$ es equivalente a $\overline{P} \vee Q$.

También es interesante recordar que:

- $\overline{P}$ puede escribirse alternativamente como $\neg P$.
- $P \Leftrightarrow Q$ es equivalente a $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$.
- Leyes de De Morgan:
  - $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$.
  - $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

Definición

Una **tautología** es una proposición lógica que siempre es verdadera en todos los casos de su tabla de verdad, mientras que una **contradicción** es una proposición lógica que siempre es falsa.

Ejemplo de tautología: las leyes de De Morgan vistas como proposiciones.
Ejemplo de contradicción: la negación de una tautología.

Definición

Una **tautología** es una proposición lógica que siempre es verdadera en todos los casos de su tabla de verdad, mientras que una **contradicción** es una proposición lógica que siempre es falsa.

Ejemplo de tautología: las leyes de De Morgan vistas como proposiciones.
Ejemplo de contradicción: la negación de una tautología.

Otras propiedades interesantes:

- $P \Leftrightarrow \overline{\overline{P}}$.
- $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
- $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

1 Lógica elemental

Definición

Una **frase abierta** o **función proposicional** o **predicado** es una proposición lógica que contiene una variable.

Ejemplo: "x es impar".

Definición

Una **frase abierta** o **función proposicional** o **predicado** es una proposición lógica que contiene una variable.

Ejemplo: "x es impar".
El **conjunto de significados** para la variable de esta frase es $\mathbb{N}$, mientras que el **conjunto de verdad** para la frase está formado por los elementos que la hacen cierta: $1, 3, 5, 7, \ldots$

1 Lógica elemental

Definición

Una **frase abierta** o **función proposicional** o **predicado** es una proposición lógica que contiene una variable.

Ejemplo: "x es impar".
El **conjunto de significados** para la variable de esta frase es $\mathbb{N}$, mientras que el **conjunto de verdad** para la frase está formado por los elementos que la hacen cierta: $1, 3, 5, 7, \ldots$

Los elementos del conjunto de significados se pueden seleccionar también mediante los **cuantificadores universal y existencial**: $\forall x\ P(x)$ y $\exists x\ P(x)$.

Definición

Una **frase abierta** o **función proposicional** o **predicado** es una proposición lógica que contiene una variable.

Ejemplo: "x es impar".
El **conjunto de significados** para la variable de esta frase es $\mathbb{N}$, mientras que el **conjunto de verdad** para la frase está formado por los elementos que la hacen cierta: 1, 3, 5, 7, ...

Los elementos del conjunto de significados se pueden seleccionar también mediante los **cuantificadores universal y existencial**: $\forall x\ P(x)$ y $\exists x\ P(x)$.

Teorema

$$\overline{\forall x\ P(x)} \Leftrightarrow \exists x\ \overline{P(x)}$$

El elemento x se denomina un **contraejemplo** de $\forall x\ P(x)$.

Contenidos

Definición

Definimos **conjunto potencia de** A o **partes de** A como:

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

2 Definiciones básicas sobre teoría de conjuntos

Definición

Definimos **conjunto potencia de** A o **partes de** A como:

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

Por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$ entonces:

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

2 Definiciones básicas sobre teoría de conjuntos

Definición

Definimos **conjunto potencia de** A o **partes de** A como:

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

Por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$ entonces:

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Obsérvese que $\emptyset \in 2^A$ y también que $A \in 2^A$.

Contenidos

3 Operaciones con conjuntos

Las operaciones básicas sobre conjuntos son la **unión**, la **intersección**, el **complementario** y el **producto cartesiano**.

3 Operaciones con conjuntos

Las operaciones básicas sobre conjuntos son la **unión**, la **intersección**, el **complementario** y el **producto cartesiano**.

Se cumplen las siguientes propiedades:

$$\emptyset \cup A = A$$
$$\emptyset \cap A = \emptyset$$

$$\text{Si } A \subseteq B, \text{ entonces } A \cup B = B$$
$$\text{Si } A \subseteq B, \text{ entonces } A \cap B = A$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

3 Operaciones con conjuntos

Definición

Dados A y B dos conjuntos cualesquiera, el **complementario de** B **con respecto a** A es el conjunto:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Definición

Dados A y B dos conjuntos cualesquiera, el **complementario de** B **con respecto a** A es el conjunto:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Se cumplen las siguientes propiedades:

$$A - B = A \cap \overline{B} \qquad \overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Las dos últimas son conocidas también como las leyes de De Morgan para conjuntos.

Definición

Dados A y B dos conjuntos cualesquiera, el **producto cartesiano de A y B** es el conjunto:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

3 Operaciones con conjuntos

Definición

Dados A y B dos conjuntos cualesquiera, el **producto cartesiano de A y B** es el conjunto:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Se cumplen las siguientes propiedades:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$
$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

Contenidos

4 Relaciones y funciones

Definición

Una **relación** del conjunto A con el conjunto B es un subconjunto de $A \times B$.

Por tanto, si $R \subseteq A \times B$ y $(a, b) \in R$ se dice que a está relacionado con b bajo la relación R.

Definición

Una **relación** del conjunto A con el conjunto B es un subconjunto de $A \times B$.

Por tanto, si $R \subseteq A \times B$ y $(a, b) \in R$ se dice que a está relacionado con b bajo la relación R.

La relación $R \subseteq A \times B$ define dos subconjuntos, uno de A y otro de B, que son los siguientes:

$$\begin{aligned} \textbf{Dominio}\,(R) &= \{a \mid a \in A \text{ y } (a, x) \in R \text{ para algún } x \in B\} \\ \textbf{Imagen}\,(R) &= \{b \mid b \in B \text{ y } (y, b) \in R \text{ para algún } y \in A\} \end{aligned}$$

Definición

Una relación $f \subseteq A \times B$ es una **función**, y se escribe $f : A \to B$, si:

1. $\text{Dominio}(f) = A$.
2. Para cualquier par (x, y) y (x, z) pertenecientes a f, $y = z$.
   Es decir, $\forall x \in A$ existe un único elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$ y se escribe $f(x) = y$.

Definición

Una relación $f \subseteq A \times B$ es una **función**, y se escribe $f : A \to B$, si:

1. $\text{Dominio}(f) = A$.
2. Para cualquier par (x, y) y (x, z) pertenecientes a f, $y = z$.
   Es decir, $\forall x \in A$ existe un único elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$ y se escribe $f(x) = y$.

La condición 1 podría ser demasiado restrictiva para nuestros objetivos. Así pues, llamaremos **función total** a este tipo de funciones, pero definiremos también el concepto de **función parcial** como la relación $f \subseteq A \times B$ que satisface las condiciones:

1. $\text{Dominio}(f) \subseteq A$.
2. La misma que antes.

4 Relaciones y funciones

Definición

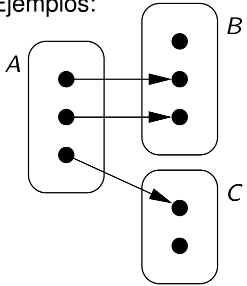
- Una función f es "1 a 1" o **inyectiva** cuando, si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$.
- Una función $f : A \to B$ es **sobreyectiva** cuando $\forall y \in B$, $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$.

4 Relaciones y funciones

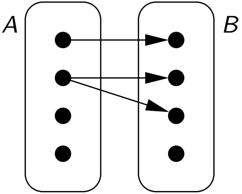
Definición

- Una función f es "1 a 1" o **inyectiva** cuando, si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$.
- Una función $f : A \to B$ es **sobreyectiva** cuando $\forall y \in B$, $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$.

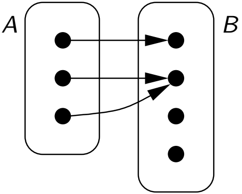
Ejemplos:



no función

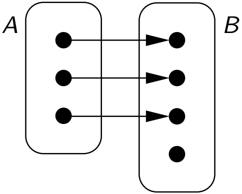


no función



sí función

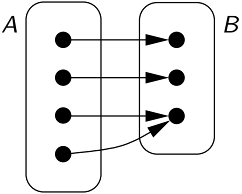
no inyectiva



sí función

sí inyectiva

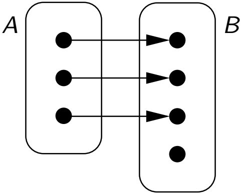
no sobreyectiva



sí función

no inyectiva

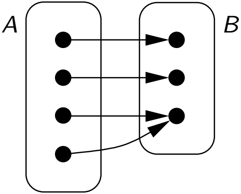
sí sobreyectiva



sí función

sí inyectiva

no sobreyectiva



sí función

no inyectiva

sí sobreyectiva

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$x \rightsquigarrow x$$

sí función

sí inyectiva

sí sobreyectiva

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$x \rightsquigarrow x + 1$$

sí función

sí inyectiva

no sobreyectiva

$$(\nexists x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0)$$

4 Relaciones y funciones

Es interesante recordar también que:

- Si una función es inyectiva y sobreyectiva a la vez, se dice que es una función **biyectiva**.

4 Relaciones y funciones

Es interesante recordar también que:

- Si una función es inyectiva y sobreyectiva a la vez, se dice que es una función **biyectiva**.
- Si f es una función biyectiva, entonces f^{-1} (la relación **inversa**) es una función. En cualquier otro caso, esto no está garantizado.

4 Relaciones y funciones

Es interesante recordar también que:

- Si una función es inyectiva y sobreyectiva a la vez, se dice que es una función **biyectiva**.
- Si f es una función biyectiva, entonces f^{-1} (la relación **inversa**) es una función. En cualquier otro caso, esto no está garantizado.
- Las funciones se pueden asociar a través de la operación de **composición**.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f(x)"] \arrow[rr, bend left, "(g \circ f)(x) = g[f(x)]"] & B \arrow[r, "g(x)"] & C
\end{tikzcd}
$$

Es interesante recordar también que:

- Si una función es inyectiva y sobreyectiva a la vez, se dice que es una función **biyectiva**.
- Si f es una función biyectiva, entonces f^{-1} (la relación **inversa**) es una función. En cualquier otro caso, esto no está garantizado.
- Las funciones se pueden asociar a través de la operación de **composición**.

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f(x)"] \arrow[rr, bend left] & B \arrow[r, "g(x)"] & C \end{tikzcd}$$

La composición de funciones es una operación asociativa, no es conmutativa y su elemento neutro es la función identidad.

Contenidos

Definición

Se dice que un subconjunto A de $\mathbb{N}$ es un **conjunto inductivo** si $\forall a \in A, a + 1 \in A$.

Ejemplo: el conjunto $\{5, 6, 7, \dots\}$. Obviamente, para que un conjunto sea inductivo no puede tener un número finito de elementos.

5 Inducción matemática

Definición

Se dice que un subconjunto A de $\mathbb{N}$ es un **conjunto inductivo** si $\forall a \in A, a + 1 \in A$.

Ejemplo: el conjunto $\{5, 6, 7, \dots\}$. Obviamente, para que un conjunto sea inductivo no puede tener un número finito de elementos.

El único conjunto inductivo que contiene al 0 es el propio $\mathbb{N}$, es decir:

Si $0 \in A$ y si $n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$, entonces $A = \mathbb{N}$.

Definición

Se dice que un subconjunto A de $\mathbb{N}$ es un **conjunto inductivo** si $\forall a \in A, a + 1 \in A$.

Ejemplo: el conjunto $\{5, 6, 7, \ldots\}$. Obviamente, para que un conjunto sea inductivo no puede tener un número finito de elementos.

El único conjunto inductivo que contiene al 0 es el propio $\mathbb{N}$, es decir:

Si $0 \in A$ *y si* $n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$, *entonces* $A = \mathbb{N}$.

Este hecho se conoce como el **principio de inducción matemática**, el cual se utiliza para realizar:

- <u>Definiciones recursivas inductivas</u>, como por ejemplo el factorial:
  - $0! = 1$
  - $(n + 1)! = (n + 1) \times n!, \forall n > 0$

5 Inducción matemática

- Demostraciones formales de planteamientos cuyas proposiones se pueden indexar mediante los elementos de $\mathbb{N}$.

5 Inducción matemática

- Demostraciones formales de planteamientos cuyas proposiones se pueden indexar mediante los elementos de $\mathbb{N}$.

  Por ejemplo, la proposición "$n + 3 < 5\,(n+1), \forall n \in \mathbb{N}$" se puede demostrar como sigue:

- <u>Demostraciones formales</u> de planteamientos cuyas proposiones se pueden indexar mediante los elementos de $\mathbb{N}$.

  Por ejemplo, la proposición "$n+3<5\,(n+1), \forall n \in \mathbb{N}$" se puede demostrar como sigue:

  Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n+3 < 5\,(n+1)\}$.
  Debemos demostrar que $A = \mathbb{N}$.

5 Inducción matemática

- Demostraciones formales de planteamientos cuyas proposiones se pueden indexar mediante los elementos de $\mathbb{N}$.

  Por ejemplo, la proposición "$n + 3 < 5\,(n + 1), \forall n \in \mathbb{N}$" se puede demostrar como sigue:

  Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n + 3 < 5\,(n + 1)\}$.
  Debemos demostrar que $A = \mathbb{N}$.

  Si $n = 0$, $n + 3 = 3$ y $5\,(n + 1) = 5$.
  Dado que $3 < 5$, la proposición es cierta.

5 Inducción matemática

- Demostraciones formales de planteamientos cuyas proposiones se pueden indexar mediante los elementos de $\mathbb{N}$.

  Por ejemplo, la proposición "$n + 3 < 5\,(n+1), \forall n \in \mathbb{N}$" se puede demostrar como sigue:

  Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n + 3 < 5\,(n+1)\}$.
  Debemos demostrar que $A = \mathbb{N}$.

  Si $n = 0$, $n + 3 = 3$ y $5\,(n+1) = 5$.
  Dado que $3 < 5$, la proposición es cierta.

  Suponemos que $n \in A$ y probamos que $(n+1)$ también pertenece a A:
  $\boxed{5\ ((\mathrm{n}{+}1){+}1)} = 5n + 10 = 5\,(n+1) + 5 \boxed{>} (n+3) + 5 > (n+3) + 1 = \boxed{(\mathrm{n}{+}1){+}3}$.

- Demostraciones formales de planteamientos cuyas proposiones se pueden indexar mediante los elementos de $\mathbb{N}$.

  Por ejemplo, la proposición "$n+3<5\,(n+1), \forall n \in \mathbb{N}$" se puede demostrar como sigue:

  Sea $A=\{n \in \mathbb{N} \mid n+3<5\,(n+1)\}$.
  Debemos demostrar que $A=\mathbb{N}$.

  Si $n=0$, $n+3=3$ y $5\,(n+1)=5$.
  Dado que $3<5$, la proposición es cierta.

  Suponemos que $n \in A$ y probamos que $(n+1)$ también pertenece a A:
  $\boxed{5\ ((\mathrm{n}{+}1){+}1)}=5n+10=5\,(n+1)+5 \boxed{>} (n+3)+5>(n+3)+1= \boxed{(\mathrm{n}{+}1){+}3}$.

  Dado que $n+1 \in A$ cuando $n \in A$, entonces $A=\mathbb{N}$ y la proposición es cierta para todos los números naturales.

5 Inducción matemática

En resumen, los **pasos de una demostración por inducción** son los siguientes:

- **Paso inicial**:
  Probar que la proposición se cumple para 0.
- **Hipótesis de inducción**:
  Suponer que la proposición es cierta para n.
- **Paso de inducción**:
  Probar que la proposición se cumple para $n + 1$.

5 Inducción matemática

En resumen, los **pasos de una demostración por inducción** son los siguientes:

- **Paso inicial**:
  Probar que la proposición se cumple para 0.
- **Hipótesis de inducción**:
  Suponer que la proposición es cierta para n.
- **Paso de inducción**:
  Probar que la proposición se cumple para $n + 1$.

En la práctica, este método se puede utilizar también para demostrar planteamientos que afectan a elementos que son mayores o iguales que un cierto valor k, con tan solo substituir 0 por ese valor k en el paso inicial.

Contenidos

6 Cardinalidad

Definición

Diremos que dos conjuntos cualesquiera A y B tienen la misma **cardinalidad** cuando se puede establecer entre ellos una aplicación $f : A \to B$ biyectiva.

6 Cardinalidad

Definición

Diremos que dos conjuntos cualesquiera A y B tienen la misma **cardinalidad** cuando se puede establecer entre ellos una aplicación $f : A \to B$ biyectiva.

Ejemplos:

- $\mathbb{N}$ (los naturales) y $\mathbb{P}$ (los pares) tienen la misma cardinalidad, ya que podemos construir:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{P} \\ n &\rightsquigarrow 2n \end{aligned}$$

6 Cardinalidad

Definición

Diremos que dos conjuntos cualesquiera A y B tienen la misma **cardinalidad** cuando se puede establecer entre ellos una aplicación $f : A \to B$ biyectiva.

Ejemplos:

- $\mathbb{N}$ (los naturales) y $\mathbb{P}$ (los pares) tienen la misma cardinalidad, ya que podemos construir:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{P} \\ n &\rightsquigarrow 2n \end{aligned}$$

- Lo mismo ocurre con $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ (los enteros), a través de la función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{Z} \\ n &\rightsquigarrow \tfrac{n}{2} \text{ si } n \text{ es par, o bien } \tfrac{-(n+1)}{2} \text{ si } n \text{ es impar} \end{aligned}$$

6 Cardinalidad

Definición

Diremos que dos conjuntos cualesquiera A y B tienen la misma **cardinalidad** cuando se puede establecer entre ellos una aplicación $f : A \to B$ biyectiva.

Ejemplos:

- $\mathbb{N}$ (los naturales) y $\mathbb{P}$ (los pares) tienen la misma cardinalidad, ya que podemos construir:
$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{P} \\ n &\rightsquigarrow 2n \end{aligned}$$
- Lo mismo ocurre con $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ (los enteros), a través de la función:
$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{Z} \\ n &\rightsquigarrow \tfrac{n}{2} \text{ si } n \text{ es par, o bien } \tfrac{-(n+1)}{2} \text{ si } n \text{ es impar} \end{aligned}$$
- Lo mismo ocurre con $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$ (los racionales).

6 Cardinalidad

El cardinal de $\mathbb{N}$ se denota como $\aleph_0$.

6 Cardinalidad

El cardinal de $\mathbb{N}$ se denota como $\aleph_0$.

Otros conjuntos con distinta cardinalidad son, por ejemplo, $\mathbb{R}$ (los reales) o $2^{\mathbb{N}}$ (partes de $\mathbb{N}$):

$$|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}| = \aleph_1$$

6 Cardinalidad

El cardinal de $\mathbb{N}$ se denota como $\aleph_0$.

Otros conjuntos con distinta cardinalidad son, por ejemplo, $\mathbb{R}$ (los reales) o $2^{\mathbb{N}}$ (partes de $\mathbb{N}$):

$$|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}| = \aleph_1$$

Existen más variedades y, de hecho, no está probado que entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$ no haya más cardinalidades diferentes.

6 Cardinalidad

El cardinal de $\mathbb{N}$ se denota como $\aleph_0$.

Otros conjuntos con distinta cardinalidad son, por ejemplo, $\mathbb{R}$ (los reales) o $2^{\mathbb{N}}$ (partes de $\mathbb{N}$):

$$|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}| = \aleph_1$$

Existen más variedades y, de hecho, no está probado que entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$ no haya más cardinalidades diferentes.

Definición

Un conjunto A es **enumerable** si $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.
Un conjunto es **numerable** si es finito o enumerable.

6 Cardinalidad

Finalizamos mostrando algunos ejemplos de conjuntos no numerables y lo probamos mediante la **técnica de la diagonal** (Cantor):

Finalizamos mostrando algunos ejemplos de conjuntos no numerables y lo probamos mediante la **técnica de la diagonal** (Cantor):

- <u>$2^{\mathbb{N}}$ no es numerable</u>:

6 Cardinalidad

Finalizamos mostrando algunos ejemplos de conjuntos no numerables y lo probamos mediante la **técnica de la diagonal** (Cantor):

- $2^{\mathbb{N}}$ no es numerable:
  Suponemos que lo es, entonces $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$.

6 Cardinalidad

Finalizamos mostrando algunos ejemplos de conjuntos no numerables y lo probamos mediante la **técnica de la diagonal** (Cantor):

- $2^{\mathbb{N}}$ no es numerable:
  Suponemos que lo es, entonces $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, A_2, \dots\}$.
  Ahora construimos la siguiente retícula:

	A_0	A_1	A_2	A_3	$\dots$
0	$\times$		$\times$	$\times$	$\dots$
1	$\times$		$\times$		$\dots$
2		$\times$	$\times$		$\dots$
3				$\times$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

6 Cardinalidad

Finalizamos mostrando algunos ejemplos de conjuntos no numerables y lo probamos mediante la **técnica de la diagonal** (Cantor):

- $2^{\mathbb{N}}$ no es numerable:
  Suponemos que lo es, entonces $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, A_2, \dots\}$.
  Ahora construimos la siguiente retícula:

	A_0	A_1	A_2	A_3	$\dots$
0	$\times$		$\times$	$\times$	$\dots$
1	$\times$		$\times$		$\dots$
2		$\times$	$\times$		$\dots$
3				$\times$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

  Consideramos la diagonal y construimos el conjunto $D = \{n \mid n \notin A_n\}$.

Finalizamos mostrando algunos ejemplos de conjuntos no numerables y lo probamos mediante la **técnica de la diagonal** (Cantor):

- $2^{\mathbb{N}}$ no es numerable:
  Suponemos que lo es, entonces $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$.
  Ahora construimos la siguiente retícula:

	A_0	A_1	A_2	A_3	$\ldots$
0	$\times$		$\times$	$\times$	$\ldots$
1	$\times$		$\times$		$\ldots$
2		$\times$	$\times$		$\ldots$
3				$\times$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

  Consideramos la diagonal y construimos el conjunto $D = \{n \mid n \notin A_n\}$.
  Suponemos que D es igual a un cierto A_k, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} -\text{ o bien } k \in A_k \Rightarrow k \notin D \\ -\text{ o bien } k \notin A_k \Rightarrow k \in D \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ absurdo, ya que } D = A_k.$$

6 Cardinalidad

Finalizamos mostrando algunos ejemplos de conjuntos no numerables y lo probamos mediante la **técnica de la diagonal** (Cantor):

- $2^{\mathbb{N}}$ no es numerable:
  Suponemos que lo es, entonces $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$.
  Ahora construimos la siguiente retícula:

	A_0	A_1	A_2	A_3	$\ldots$
0	$\times$		$\times$	$\times$	$\ldots$
1	$\times$		$\times$		$\ldots$
2		$\times$	$\times$		$\ldots$
3				$\times$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

  Consideramos la diagonal y construimos el conjunto $D = \{n \mid n \notin A_n\}$.
  Suponemos que D es igual a un cierto A_k, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} -\text{ o bien } k \in A_k \Rightarrow k \notin D \\ -\text{ o bien } k \notin A_k \Rightarrow k \in D \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ absurdo, ya que } D = A_k.$$

  Por tanto, el conjunto D es distinto de cualquier A_i.

Finalizamos mostrando algunos ejemplos de conjuntos no numerables y lo probamos mediante la **técnica de la diagonal** (Cantor):

- $2^{\mathbb{N}}$ no es numerable:
  Suponemos que lo es, entonces $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, A_2, \dots\}$.
  Ahora construimos la siguiente retícula:

	A_0	A_1	A_2	A_3	$\dots$
0	$\times$		$\times$	$\times$	$\dots$
1	$\times$		$\times$		$\dots$
2		$\times$	$\times$		$\dots$
3				$\times$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

  Consideramos la diagonal y construimos el conjunto $D = \{n \mid n \notin A_n\}$.
  Suponemos que D es igual a un cierto A_k, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} -\text{ o bien } k \in A_k \Rightarrow k \notin D \\ -\text{ o bien } k \notin A_k \Rightarrow k \in D \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ absurdo, ya que } D = A_k.$$

  Por tanto, el conjunto D es distinto de cualquier A_i.
  Por tanto, en $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, A_2, \dots\}$ no están todos los posibles subconjuntos de $\mathbb{N}$.

6 Cardinalidad

Finalizamos mostrando algunos ejemplos de conjuntos no numerables y lo probamos mediante la **técnica de la diagonal** (Cantor):

- $2^{\mathbb{N}}$ no es numerable:
  Suponemos que lo es, entonces $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$.
  Ahora construimos la siguiente retícula:

	A_0	A_1	A_2	A_3	$\ldots$
0	$\times$		$\times$	$\times$	$\ldots$
1	$\times$		$\times$		$\ldots$
2		$\times$	$\times$		$\ldots$
3				$\times$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

  Consideramos la diagonal y construimos el conjunto $D = \{n \mid n \notin A_n\}$.
  Suponemos que D es igual a un cierto A_k, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} -\text{ o bien } k \in A_k \Rightarrow k \notin D \\ -\text{ o bien } k \notin A_k \Rightarrow k \in D \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ absurdo, ya que } D = A_k.$$

  Por tanto, el conjunto D es distinto de cualquier A_i.
  Por tanto, en $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$ no están todos los posibles subconjuntos de $\mathbb{N}$.
  Por tanto, $2^{\mathbb{N}}$ no es numerable.

6 Cardinalidad

- $\mathbb{R}$ no es numerable:

6 Cardinalidad

- $\mathbb{R}$ no es numerable:
  Basta con ver que el intervalo $(0, 1)$ no es numerable.

6 Cardinalidad

- $\mathbb{R}$ no es numerable:

  Basta con ver que el intervalo $(0, 1)$ no es numerable.

  Suponemos que lo es, entonces cada número del intervalo $(0, 1)$ se puede representar con los elementos del conjunto $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ construidos como sigue:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0.\, d_{00}\, d_{01}\, d_{02}\, d_{03}\, \ldots \\
a_1 &= 0.\, d_{10}\, d_{11}\, d_{12}\, d_{13}\, \ldots \\
a_2 &= 0.\, d_{20}\, d_{21}\, d_{22}\, d_{23}\, \ldots \\
a_3 &= 0.\, d_{30}\, d_{31}\, d_{32}\, d_{33}\, \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

6 Cardinalidad

- $\mathbb{R}$ no es numerable:

  Basta con ver que el intervalo $(0,1)$ no es numerable.

  Suponemos que lo es, entonces cada número del intervalo $(0,1)$ se puede representar con los elementos del conjunto $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ construidos como sigue:

$$\begin{array}{lcl} a_0 & = & 0.\, d_{00}\; d_{01}\; d_{02}\; d_{03}\; \ldots \\ a_1 & = & 0.\, d_{10}\; d_{11}\; d_{12}\; d_{13}\; \ldots \\ a_2 & = & 0.\, d_{20}\; d_{21}\; d_{22}\; d_{23}\; \ldots \\ a_3 & = & 0.\, d_{30}\; d_{31}\; d_{32}\; d_{33}\; \ldots \\ \vdots & & \end{array}$$

  Pero se puede construir también el número $z = 0.\, z_0\, z_1\, z_2\, z_3\, \ldots$, donde:

$$z_k = \begin{cases} 5 & \text{si } d_{kk} \neq 5, \\ 3 & \text{si } d_{kk} = 5. \end{cases}$$

6 Cardinalidad

- $\mathbb{R}$ no es numerable:

  Basta con ver que el intervalo $(0, 1)$ no es numerable.

  Suponemos que lo es, entonces cada número del intervalo $(0, 1)$ se puede representar con los elementos del conjunto $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ construidos como sigue:

$$\begin{array}{lcl} a_0 & = & 0.\, d_{00}\ d_{01}\ d_{02}\ d_{03}\ \ldots \\ a_1 & = & 0.\, d_{10}\ d_{11}\ d_{12}\ d_{13}\ \ldots \\ a_2 & = & 0.\, d_{20}\ d_{21}\ d_{22}\ d_{23}\ \ldots \\ a_3 & = & 0.\, d_{30}\ d_{31}\ d_{32}\ d_{33}\ \ldots \\ \vdots & & \end{array}$$

  Pero se puede construir también el número $z = 0.\, z_0\ z_1\ z_2\ z_3\ \ldots$, donde:

$$z_k = \begin{cases} 5 & \text{si } d_{kk} \neq 5, \\ 3 & \text{si } d_{kk} = 5. \end{cases}$$

  Es decir, todos los decimales de z son distintos de los de la diagonal de los a_i.

6 Cardinalidad

- <u>$\mathbb{R}$ no es numerable</u>:

  Basta con ver que el intervalo $(0,1)$ no es numerable.

  Supongamos que lo es, entonces cada número del intervalo $(0,1)$ se puede representar con los elementos del conjunto $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ construidos como sigue:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0.\, d_{00}\ d_{01}\ d_{02}\ d_{03}\ \ldots \\
a_1 &= 0.\, d_{10}\ d_{11}\ d_{12}\ d_{13}\ \ldots \\
a_2 &= 0.\, d_{20}\ d_{21}\ d_{22}\ d_{23}\ \ldots \\
a_3 &= 0.\, d_{30}\ d_{31}\ d_{32}\ d_{33}\ \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

  Pero se puede construir también el número $z = 0.\, z_0\ z_1\ z_2\ z_3\ \ldots$, donde:

$$z_k = \begin{cases} 5 & \text{si } d_{kk} \neq 5, \\ 3 & \text{si } d_{kk} = 5. \end{cases}$$

  Es decir, todos los decimales de z son distintos de los de la diagonal de los a_i.

  Por tanto, z difiere de cada a_i al menos en el decimal de la diagonal.

- $\mathbb{R}$ no es numerable:

  Basta con ver que el intervalo $(0,1)$ no es numerable.

  Suponemos que lo es, entonces cada número del intervalo $(0,1)$ se puede representar con los elementos del conjunto $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ construidos como sigue:

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & 0.\, d_{00}\; d_{01}\; d_{02}\; d_{03}\; \ldots \\ a_1 & = & 0.\, d_{10}\; d_{11}\; d_{12}\; d_{13}\; \ldots \\ a_2 & = & 0.\, d_{20}\; d_{21}\; d_{22}\; d_{23}\; \ldots \\ a_3 & = & 0.\, d_{30}\; d_{31}\; d_{32}\; d_{33}\; \ldots \\ \vdots & & \end{array}$$

  Pero se puede construir también el número $z = 0.\, z_0\; z_1\; z_2\; z_3\; \ldots$, donde:

$$z_k = \begin{cases} 5 & \text{si } d_{kk} \neq 5, \\ 3 & \text{si } d_{kk} = 5. \end{cases}$$

  Es decir, todos los decimales de z son distintos de los de la diagonal de los a_i.

  Por tanto, z difiere de cada a_i al menos en el decimal de la diagonal.

  Por tanto, los a_i no cubren todo el intervalo $(0,1)$.

- $\mathbb{R}$ no es numerable:

  Basta con ver que el intervalo $(0, 1)$ no es numerable.

  Suponemos que lo es, entonces cada número del intervalo $(0, 1)$ se puede representar con los elementos del conjunto $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ construidos como sigue:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0.\, d_{00}\ d_{01}\ d_{02}\ d_{03}\ \dots \\
a_1 &= 0.\, d_{10}\ d_{11}\ d_{12}\ d_{13}\ \dots \\
a_2 &= 0.\, d_{20}\ d_{21}\ d_{22}\ d_{23}\ \dots \\
a_3 &= 0.\, d_{30}\ d_{31}\ d_{32}\ d_{33}\ \dots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

  Pero se puede construir también el número $z = 0.\, z_0\ z_1\ z_2\ z_3\ \dots$, donde:

$$
z_k = \begin{cases} 5 & \text{si } d_{kk} \neq 5, \\ 3 & \text{si } d_{kk} = 5. \end{cases}
$$

  Es decir, todos los decimales de z son distintos de los de la diagonal de los a_i.

  Por tanto, z difiere de cada a_i al menos en el decimal de la diagonal.

  Por tanto, los a_i no cubren todo el intervalo $(0, 1)$.

  Por tanto, $\mathbb{R}$ no es numerable.

6 Cardinalidad

- El conjunto de las funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ no es numerable:

- El conjunto de las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ no es numerable:
  Suponemos que lo es y construimos la siguiente retícula:

	f_0	f_1	f_2	f_3	$\dots$
0	$f_0(0)$	$f_1(0)$	$f_2(0)$	$f_3(0)$	$\dots$
1	$f_0(1)$	$f_1(1)$	$f_2(1)$	$f_3(1)$	$\dots$
2	$f_0(2)$	$f_1(2)$	$f_2(2)$	$f_3(2)$	$\dots$
3	$f_0(3)$	$f_1(3)$	$f_2(3)$	$f_3(3)$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

6 Cardinalidad

- El conjunto de las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ no es numerable:
  Suponemos que lo es y construimos la siguiente retícula:

	f_0	f_1	f_2	f_3	$\ldots$
0	$f_0(0)$	$f_1(0)$	$f_2(0)$	$f_3(0)$	$\ldots$
1	$f_0(1)$	$f_1(1)$	$f_2(1)$	$f_3(1)$	$\ldots$
2	$f_0(2)$	$f_1(2)$	$f_2(2)$	$f_3(2)$	$\ldots$
3	$f_0(3)$	$f_1(3)$	$f_2(3)$	$f_3(3)$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

  Pero también podemos construir la función $f(n) = f_n(n) + 1$.

- El conjunto de las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ no es numerable:

  Suponemos que lo es y construimos la siguiente retícula:

	f_0	f_1	f_2	f_3	$\dots$
0	$f_0(0)$	$f_1(0)$	$f_2(0)$	$f_3(0)$	$\dots$
1	$f_0(1)$	$f_1(1)$	$f_2(1)$	$f_3(1)$	$\dots$
2	$f_0(2)$	$f_1(2)$	$f_2(2)$	$f_3(2)$	$\dots$
3	$f_0(3)$	$f_1(3)$	$f_2(3)$	$f_3(3)$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

  Pero también podemos construir la función $f(n) = f_n(n) + 1$.

  Esta función difiere de todas las demás al menos en el valor de la diagonal:

$$\left.\begin{array}{l} - f_k(k) = f_k(k) \\ - f(k) = f_k(k) + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \neq f_k, \forall k.$$

6 Cardinalidad

- El conjunto de las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ no es numerable:
  Suponemos que lo es y construimos la siguiente retícula:

	f_0	f_1	f_2	f_3	$\dots$
0	$f_0(0)$	$f_1(0)$	$f_2(0)$	$f_3(0)$	$\dots$
1	$f_0(1)$	$f_1(1)$	$f_2(1)$	$f_3(1)$	$\dots$
2	$f_0(2)$	$f_1(2)$	$f_2(2)$	$f_3(2)$	$\dots$
3	$f_0(3)$	$f_1(3)$	$f_2(3)$	$f_3(3)$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

  Pero también podemos construir la función $f(n) = f_n(n) + 1$.
  Esta función difiere de todas las demás al menos en el valor de la diagonal:

$$\left.\begin{array}{l} - f_k(k) = f_k(k) \\ - f(k) = f_k(k) + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \neq f_k, \forall k.$$

  Por tanto, las f_i de la cuadrícula no cubren todo el conjunto de las posibles funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

6 Cardinalidad

- El conjunto de las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ no es numerable:

  Suponemos que lo es y construimos la siguiente retícula:

	f_0	f_1	f_2	f_3	$\ldots$
0	$f_0(0)$	$f_1(0)$	$f_2(0)$	$f_3(0)$	$\ldots$
1	$f_0(1)$	$f_1(1)$	$f_2(1)$	$f_3(1)$	$\ldots$
2	$f_0(2)$	$f_1(2)$	$f_2(2)$	$f_3(2)$	$\ldots$
3	$f_0(3)$	$f_1(3)$	$f_2(3)$	$f_3(3)$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

  Pero también podemos construir la función $f(n) = f_n(n) + 1$.

  Esta función difiere de todas las demás al menos en el valor de la diagonal:

$$\left.\begin{array}{l} - f_k(k) = f_k(k) \\ - f(k) = f_k(k) + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \neq f_k, \forall k.$$

  Por tanto, las f_i de la cuadrícula no cubren todo el conjunto de las posibles funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

  Por tanto, $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ no es numerable.

Fin del capítulo

“Preliminares Matemáticos”