Gestión de Infraestructuras
Tema 1: Representación en el dominio temporal
Ejercicios Parte 2

1. Resumen:

Operaciones	
Escalado en amplitud	$y(t) = ax(t)$
Escalado en tiempo	$y(t) = x(at)$
Inversión en tiempo	$y(t) = x(-t)$
Desplazamiento en tiempo	$y(t) = x(t - t_0)$
Integración en tiempo	$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
Derivación en tiempo	$y(t) = dx(t)/dt$
Suma de señales	$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$
Multiplicación de señales	$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$ $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$
Convolución de señales	$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$

Energía y potencia	
Energía de una señal en un intervalo	$E_x^T = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$
Energía de una señal	$E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt$
Potencia en un intervalo	$P_x^T = \frac{E_x^T}{T} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$
Potencia media de una señal	$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{E_x^T}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$

2. <u>**Ejercicio de clase:**</u>

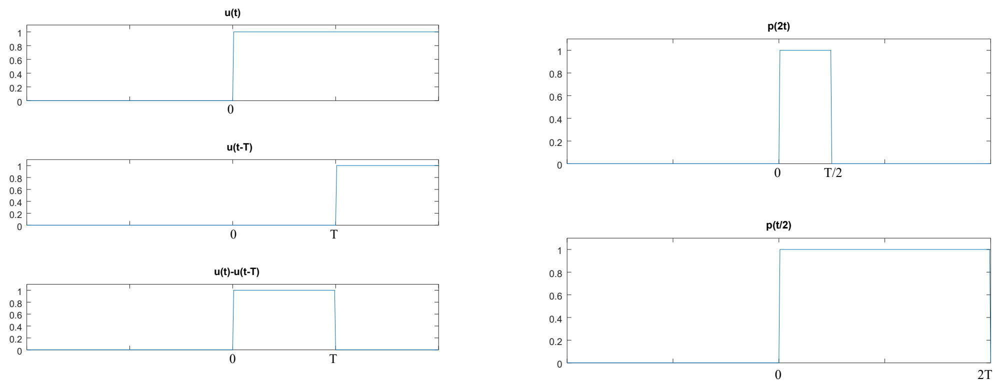
   Para la señal $p(t) = u(t) - u(t-T)$, dibuje el resultado de las siguientes operaciones:

   a) $p(2t)$ y $p(t/2)$

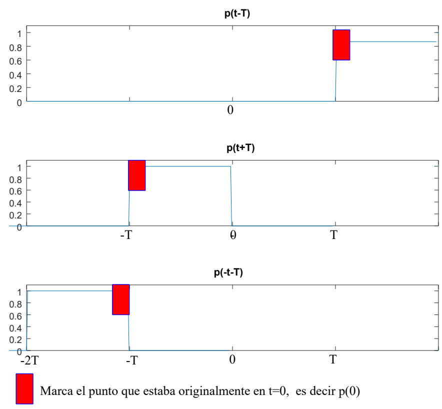
   b) $p(t-T)$, $p(t+T)$ y $p(-t-T)$ con $T > 0$.

   <u>Solución:</u>

   a) Señal $p(t)$, $p(2t)$ y $p(t/2)$



   b) Señal $p(t-T)$, $p(t+T)$ y $p(-t-T)$ con $T > 0$.



3. **Ejercicio de clase:**

Un sistema telegráfico utiliza las señales $p(t)$ y $r(t)$ para transmitir los puntos y las rayas del código Morse:

$$p(t) = \begin{cases} A & 0 < t < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad r(t) = \begin{cases} A & 0 < t < 3T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

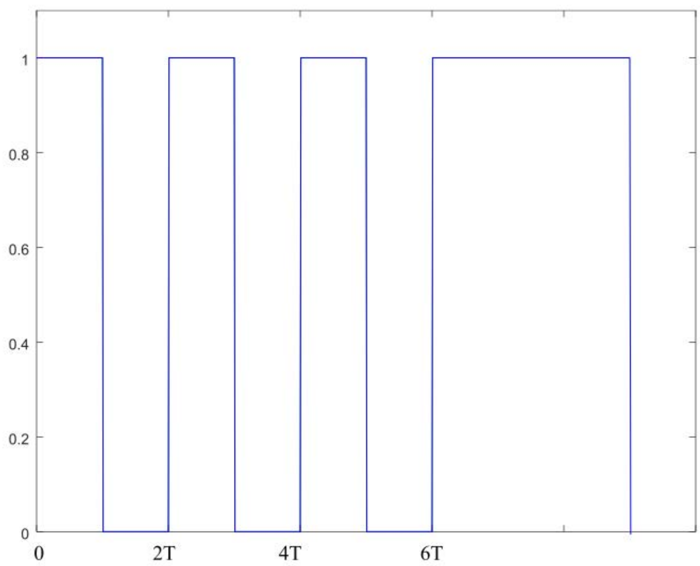
En el código Morse se establece que entre dos símbolos debe dejarse un silencio igual a la duración de un punto.

a) Dibuje la señal Morse que resulta al transmitir la letra V (...-).

b) Describa analíticamente la señal Morse anterior como versiones desplazadas en tiempo de las señales $p(t)$ y $r(t)$.

c) Repita el apartado anterior suponiendo que se transmite la letra L (.-..).

Solución:



a)

b) $v\left(t\right) = p\left(t\right) + p\left(t - 2T\right) + p\left(t - 4T\right) + r\left(t - 6T\right)$

c) $l\left(t\right) = p\left(t\right) + r\left(t - 2T\right) + p\left(t - 6T\right) + p\left(t - 8T\right)$.

4. **Ejercicio:**

Sea $p(t)$ la señal pulso rectangular

$$p(t) = \begin{cases} A & 0 < t < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Considere un sistema de transmisión digital binario que utiliza las señales:

$$s_0(t) = p(t); s_1(t) = -p(t)$$

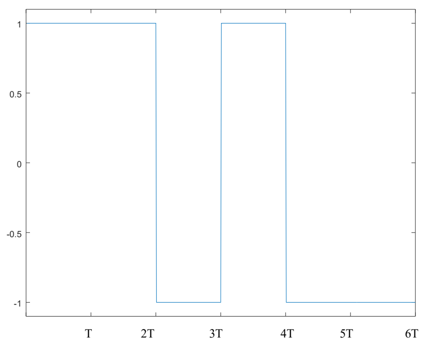
para transmitir un cero y un uno binario, respectivamente.

a) Dibuje la señal $x(t)$ que se transmite cuando se desea enviar el mensaje 001011.

b) Describa analíticamente la señal $x(t)$ del apartado anterior en términos de versiones desplazadas en tiempo de $p(t)$.

Solución:

a) Señal transmitida para 001011 considerando $A = 1$



b) $x(t) = p(t) + p(t - T) - p(t - 2T) + p(t - 3T) - p(t - 4T) - p(t - 5T)$.

5. **Ejercicio de clase:**

Considere las señales,

$$x_1(t) = 2u(t) - u(t-1).$$
$$x_2(t) = u(t+2) - 2u(t) + u(t-1).$$
$$x_3(t) = t[u(t+1) - u(t-2)].$$

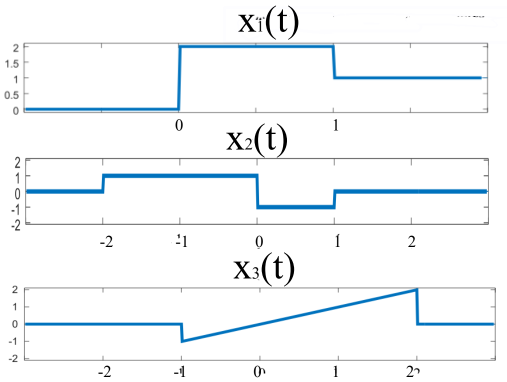
Se pide:

a) Dibuje las señales.

b) Determine la derivada $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

Solución:

a) Señales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$.



b)

$$y_1(t) = 2\delta(t) - \delta(t-1)$$
$$y_2(t) = \delta(t+2) - 2\delta(t) + \delta(t-1)$$
$$y_3(t) = p(t) - \delta(t+1) - 2\delta(t-2)$$

donde $p(t)$ es el siguiente pulso rectangular $p(t) = \begin{cases} 1 & -1 < t < 2 \\ 0 & resto \end{cases}$

Desarrollo:

a) *Para representar las señales, lo más sencillo es dibujar primero las señales individuales (con signo positivo o negativo) y después sumarlas o multuplicarlas. Si aparece una señal del tipo $u(t-T_1) - u(t-T_2)$ con $T_1 < T_2$, podemos utilizar directamente que su representación es un pulso que empieza en T_1 y termina en T_2.*

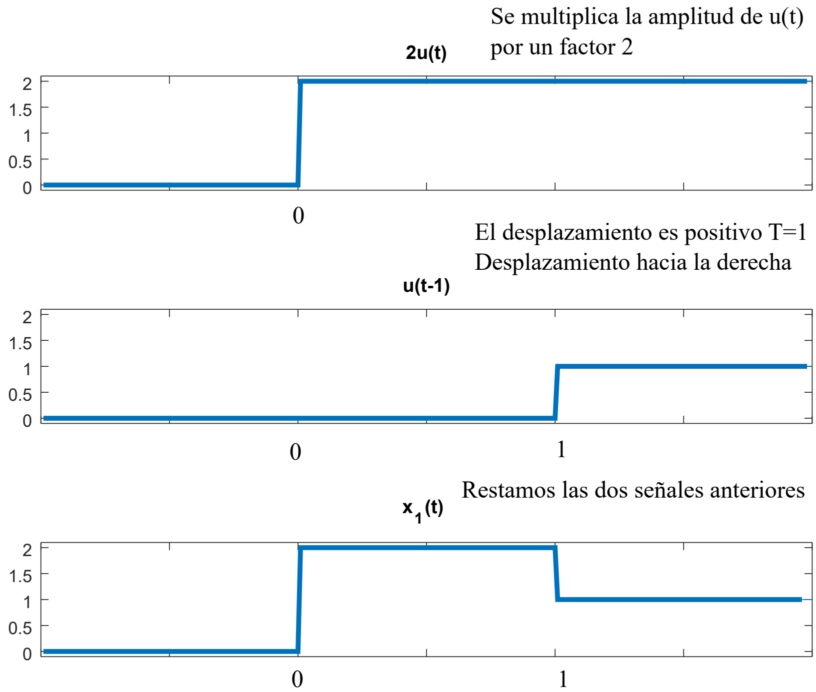


Figura 1: Desarrollo para $x_1(t)$.

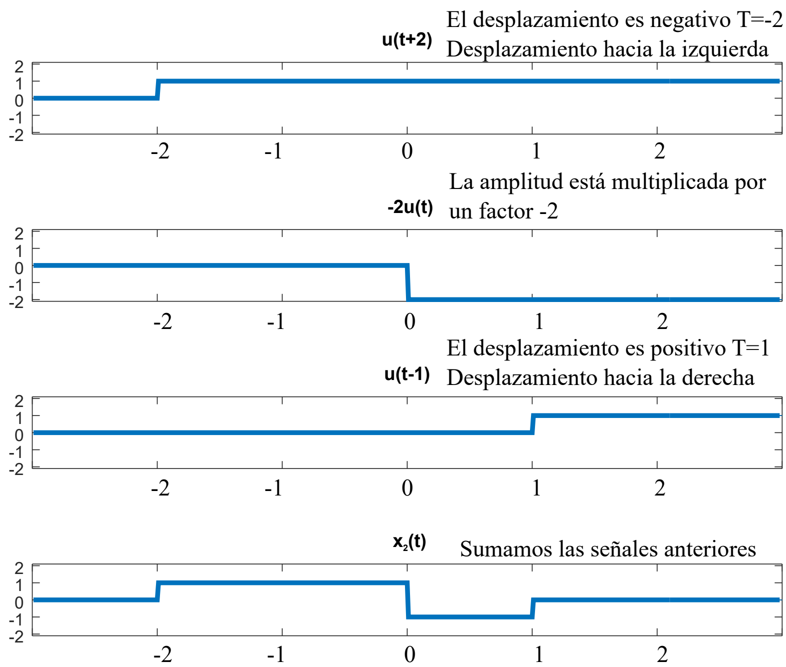


Figura 2: Desarrollo para $x_2(t)$.

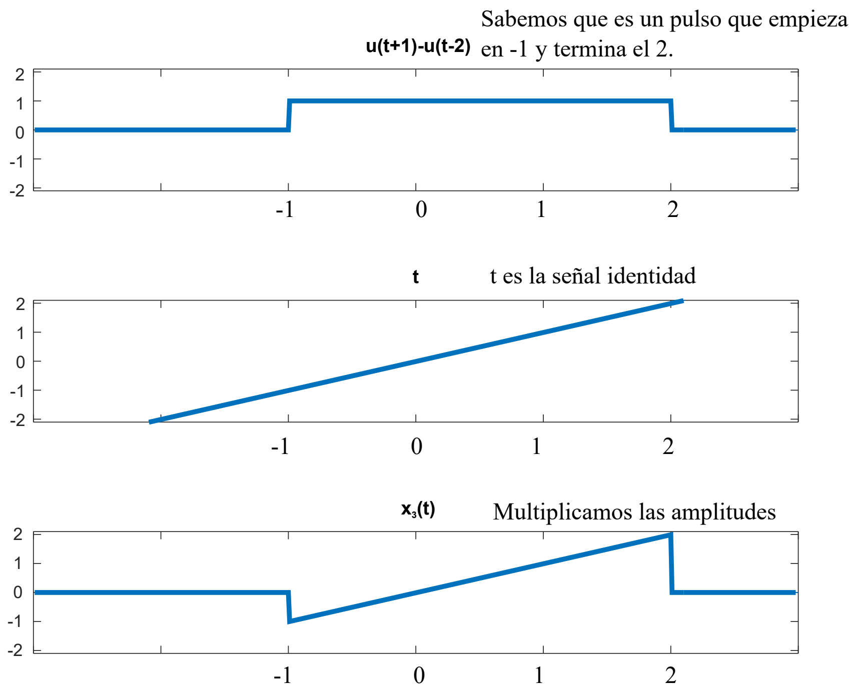


Figura 3: Desarrollo para $x_3(t)$.

b) *Este apartado puede realizarse gráficamente considerando lo siguiente: 1) si existe un escalón positivo, el resultado es una delta con amplitud positiva; 2) si existe un escalón negativo, el resultado es una delta con amplitud negativa; 3) en la zonas sin incremento, el resultado es 0; 4) en el resto, puede calcularse la derivada de la función (por ejemplo, la señal t en $x_3(t)$). A partir de la representación gráfica, podemos determinar la expresión analítica.*

Otra forma de encontrar la expresión analítica es empleando las expresiones de las derivadas que conocemos: $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$ y $\frac{dt}{dt} = 1$. Así, obtenemos las expresiones finales:

$$y_1(t) = 2\delta(t) - \delta(t-1)$$

$$y_2(t) = \delta(t+2) - 2\delta(t) + \delta(t-1)$$

$$y_3(t) = p(t) - \delta(t+1) - 2\delta(t-2)$$

donde $p(t)$ es un pulso rectángular que corresponde a $\frac{dt}{dt}$ en el intervalo $-1 < t < 2$, es decir,

$$p(t) = u(t+1) - u(t-2) = \begin{cases} 1 & -1 < t < 2 \\ 0 & resto \end{cases}$$

6. **Ejercicio de clase:**

   a) Sea $x(t)$ una señal de energía finita Ex. Demuestre que la energía de la versión desplazada t_0 de $x(t)$, i.e. $x(t-t_0)$, también es Ex.

   b) Considerando $x(t) = A(u(t+T) - u(t-T))$, dibuje la siguiente señal

$$y(t) = \sum_{k=-1}^{1} x(t-2kT)$$

   c) Calcule la energía y potencia media de $x(t)$ e $y(t)$.

Solución:

   a) Definimos $x_1(t) = x(t-t_0)$. Su energía viene dada por

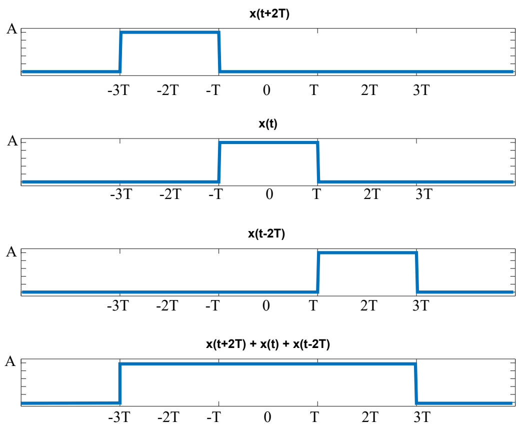
$$Ex_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)^2 dt$$

   Hacemos el cambio de variable $p = t-t_0$. Además, $dp = dt$, si $t = \pm\infty$ entonces $p = \pm\infty$. Haciendo los cambios, la expresión anterior se tranforma en

$$Ex_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x(p)^2 dp$$

   que es la expresión de la energía de $x(t)$. Esto quiere decir que los desplazamientos en tiempo, no cambian la energía de la señal.

   b) Señales individuales y resultado.



   c) $Ex = 2A^2T$ J, $Px = 0$ W; $Ey = 6A^2T$ J, $Py = 0$ W.

Desarrollo:

   a)

   b) *Para representar $y(t)$, primero observamos que se trata de la suma de tres señales separadas $2T$. Más concretamente, tenemos*

$$y(t) = \sum_{k=-1}^{1} x(t-2kT) = x(t+2T) + x(t) + x(t-2T)$$

   La figura anterior muestra las señales individuales y la suma.

c) *Podemos observar que* $x^2(t)$ *es un pulso rectangular de base* $2T$ *y amplitud* A^2*, por lo que podemos calcular directamente* $Ex = 2A^2T$*. Vamos a hacerlo también por la expresión matemática,*

$$Ex = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int_{-T}^{T} A^2 dt = A^2 t|_{-T}^{T} = 2A^2T$$

Dado que es una señal de energía finita, su potencia media será cero

$$Px = \lim_{T_1 \to \infty} \frac{Ex}{T_1} \lim_{T_1 \to \infty} \frac{2A^2T}{T_1} = 0$$

Es importante tener en cuenta que T *es un parámetros de la señal y* T_1 *es el parámetro utilizado en el límite.*

Para calcular la energía de $y(t)$ *podemos utilizar el resultado del apartado a). Esto quiere decir que* $Ey = 3Ex = 6A^2T$ *y* $Py = 0$*.*

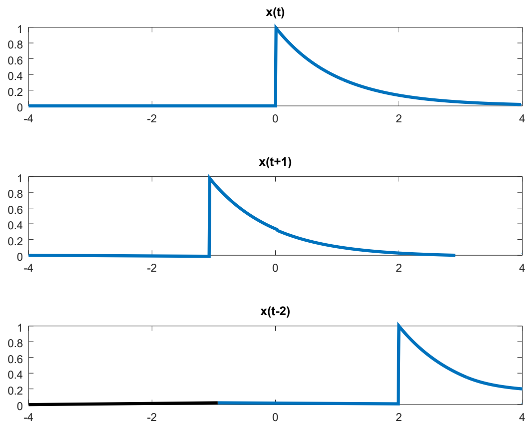
7. **Ejercicio**

Considere la señal $x(t) = e^{-t}u(t)$

a) Dibuje $x(t)$, $x_1(t) = x(t+1)$ y $x_2(t) = x(t-2)$.

b) Determine la energía y potencia media de las señales anteriores.

Solución:



a)

b) $Ex = 1/2$ J, $Px = 0$ W;

Desarrollo:

a) *La señal tiene la forma $x(t) = e^{-at}u(t)$ con $a > 0$. Por tanto, es una exponencial decreciente. Para representarla, primero obtenemos $x(0) = 1$ y, después, la dibujamos directamente.*

Por otro lado, $x_1(t) = x(t+1)$ es la misma señal desplazada 1 hacia la izquierda y $x_2(t) = x(t-2)$ es la señal desplazada 2 hacia la derecha.

b) *Para calcular la energía de $x(t)$, tenemos que fijarnos que la señal $u(t)$ indica que $x(t)$ toma valores entre 0 e ∞. Por tanto, los límites de la integral cambian a 0 e ∞,*

$$Ex = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int_{0}^{\infty} (e^{-t})^2 dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt = -\frac{1}{2}e^{-2t}|_0^\infty = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}J$$

Las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son versiones desplazadas de $x(t)$, por lo que ya sabemos que $Ex_1 = Ex_2 = Ex = \frac{1}{2}J$. De todas formas, podríamos calcularlo como sigue:

$$E_{x_1} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)^2 dt = \int_{-1}^{\infty} (e^{-(t+1)})^2 dt = \int_{-1}^{\infty} e^{-2(t+1)} dt$$
$$= \frac{e^{-2}}{2} \int_{-1}^{\infty} e^{-2t} dt = -\frac{e^{-2}}{2}(0 - e^2) = \frac{1}{2}J$$

$$E_{x_3} = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)^2 dt = \int_{2}^{\infty} (e^{-(t-2)})^2 dt = \int_{2}^{\infty} e^{-2(t-2)} dt$$
$$= \frac{e^4}{2} \int_{2}^{\infty} e^{-2t} dt = -\frac{e^4}{2}(0 - e^{-4}) = \frac{1}{2} J$$

Por otro lado, al tratarse de señales con energía finita, sabemos que su potencia media es 0. Vamos a comprobarlo, sustituyendo $Ex = \frac{1}{2}J$ *en la definición de potencia media*

$$Px = \lim_{T\to\infty} \frac{Ex}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} = 0$$

8. **Ejercicio:**

Considere la siguente señal

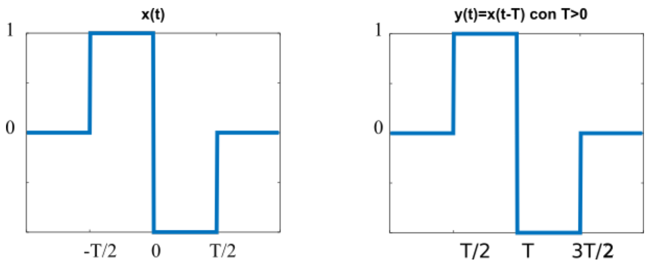
$$x(t) = \begin{cases} A & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ -A & 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

a) Dibuje $x(t)$ e $y(t) = x(t - T)$.

b) Exprese $x(t)$ en términos de versiones desplazadas en tiempo del escalón unidad $u(t)$.

c) Determine la energía y la potencia media de $x(t)$ e $y(t) = x(t - T)$.

Solución:

a) 

b) $x(t) = Au(t+\frac{T}{2}) - 2Au(t) + Au(t-\frac{T}{2})$; $y(t) = Au(t-\frac{T}{2}) - 2Au(t-T) + Au(t-\frac{3T}{2})$.

c) $E_y = Ex = A^2T$ J, $P_y = Px = 0$;

Desarrollo:

a) *Para representarla, nos fijamos en la definición de los dos tramos.*

b) *Como cada tramo tiene duración $T/2$, definimos un pulso de amplitud 1 entre 0 y $T/2$, es decir $p(t) = u(t) - u(t - T/2)$. A partir de él, es inmediato obtener*

$$x(t) = Ap(t + T/2) - Ap(t) = A(u(t + T/2) - u(t) - u(t) + u(t - T/2))$$

$$= A(u(t + T/2) - 2u(t) + u(t - T/2))$$

Por otro lado,

$$y(t) = x(t - T) = A(u(t + T/2 - T) - 2u(t - T) + u(t - T/2 - T))$$

$$= A(u(t - T/2) - 2u(t - T) + u(t - 3T/2))$$

c) *La energía puede calcularse considerando que $x(t)$ son dos pulsos de duración $T/2$ y amplitud A, obtenemos*

$$Ex = 2\frac{A^2T}{2} = A^2T$$

Al tratarse de una señal de energía finita, tenemos $Px = 0$. Por otro lado, dado que $y(t)$ es una señal obtenida desplazando $x(t)$, podemos deducir que tiene la misma energía y potencia media que $x(t)$.

9. **Ejercicio de clase:**

Considere la señal $x(t) = Acos(2\pi ft)$ con $f = 1/T_0$. Se pide:

a) Determine la expresión de la energía y de la potencia media en un periodo. **Apartado propuesto en la clase de teoría, no se desarrollará en la clase de problemas**.

b) Utilizando el apartado anterior, calcule la energía y la potencia de la señal.

Solución:

a) $Ex^{T_0} = \frac{A^2 T_0}{2}$, $Px^{T_0} = \frac{A^2}{2}$

b) $Ex = \rightarrow \infty$, $Px = \frac{A^2}{2}$

Desarrollo:

a*) Dado que el coseno es una señal periódica, calculamos la energía en un periodo:*

$$Ex^T = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t)dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2 cos^2(2\pi ft)dt$$

En la expresión anterior, se utilizará

$$cos^2(\theta) = \frac{1 + cos(2\theta)}{2}$$

$$\begin{aligned} Ex^T &= A^2 \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{1 + cos(4\pi ft)}{2} dt = \frac{A^2}{2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt + \frac{A^2}{2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} cos(4\pi ft)dt \\ &= \frac{A^2}{2} t|_{-T/2}^{T_0/2} + \frac{A^2}{8\pi f} sen(4\pi ft)|_{-T_0/2}^{T_0/2} \\ &= \frac{A^2}{2}(\frac{T_0}{2} + \frac{T_0}{2}) + \frac{A^2}{8\pi f}(sen(4\pi f\frac{T_0}{2}) - sen(4\pi f(-\frac{T_0}{2}))) \end{aligned}$$

Utilizando $f = 1/T_0$, se obtiene

$$\begin{aligned} Ex_0^T &= \frac{T_0 A^2}{2} + \frac{A^2}{8\pi f}(sen(4\pi\frac{T_0}{2T_0}) - sen(4\pi(-\frac{T_0}{2T_0}))) \\ &= \frac{T_0 A^2}{2} + \frac{A^2}{8\pi f}(sen(2\pi) - sen(-2\pi)) \end{aligned}$$

Finalmente, como $sen(2\pi) = sen(-2\pi) = 0$, obtenemos

$$Ex^{T_0} = \frac{T_0 A^2}{2}$$

$$Px^{T_0} = \frac{T_0 A^2}{2T_0} = \frac{A^2}{2}$$

b) *Para calcular la energía de la señal, debemos tener en cuenta que hay n periodos (infinitos). Por tanto, calcularemos*

$$Ex = \lim_{n\to\infty} nE_x^{T_0} = \lim_{n\to\infty} n\frac{T_0A^2}{2} \to \infty$$

De igual forma, la potencia media es

$$Px = \lim_{n\to\infty} \frac{nE_x^{T_0}}{nT_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{nT_0A^2}{2nT_0} = \frac{A^2}{2}$$

que coincide con la potencia de un intervalo.

Las señales periódicas tiene energía infinita y potencia media igual a la potencia en un período.

10. **Ejercicio con ordenador**

Utilice Octave para generar la siguiente señal:

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Para generarlo, realice la multiplicación $x(t) = x_1(t)u(t)$ donde

$$x_1(t) = cos(2\pi f t)$$

Utilice

```
f=20; %Frecuencia de la senal
fs = 1000; %Frecuencia de muestreo
t = -1:1/fs:1;  %Vector de tiempo
```

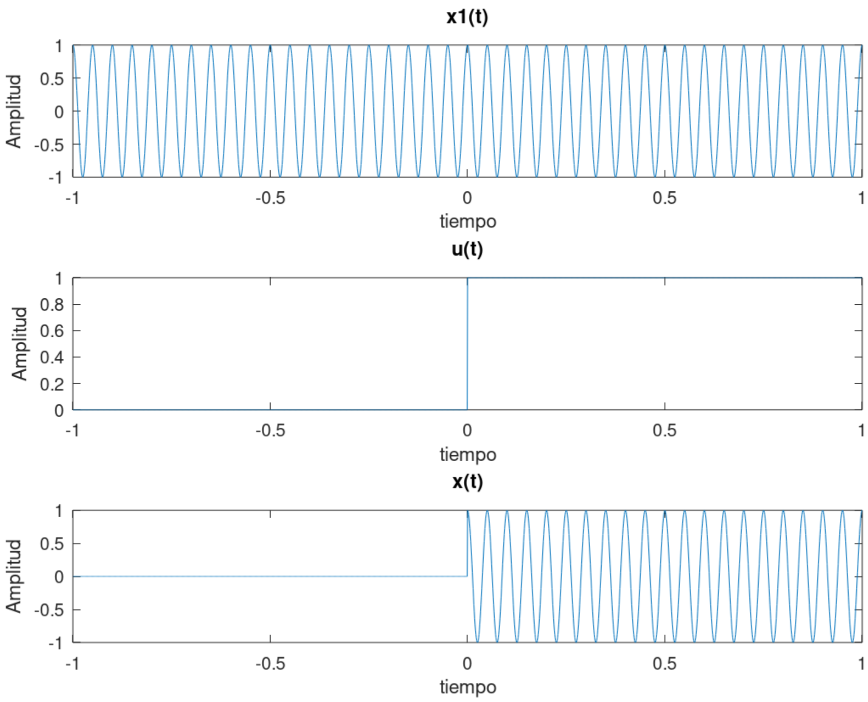
Represente en un única figura (tres subplots): $x_1(t)$, $u(t)$ y $x(t)$.

Obtenga también la señal $x(t)$ esa señal utilizando

```
x = cos(2*pi*f*t).*(t>=0);
```

Represente esta señal en otra figura y veridique que es igual a la que obtuvo anteriormente.

Resultado:



11. **Ejercicio con ordenador**

Utilizando Octave, genere tres señales senoidades $x_i(t) = A_i \cos(2\pi f_i t)$ y su suma $y(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$. Utilice

```
fs = 20000; %Frecuencia de muestreo
Ls = 1; %Duracion de la senal en segundos
t = 1/fs:1/fs:Ls;  %Vector de tiempo
```

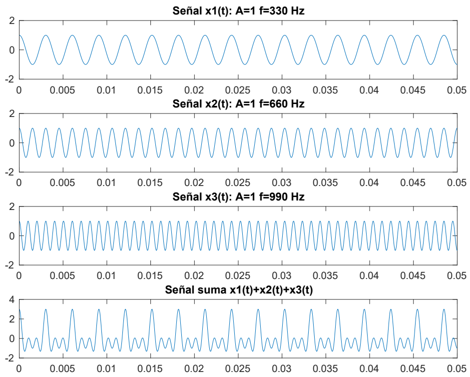
En una misma figura, dibuje cada una de las señales y la suma. Comandos: plot, subplot, title, xlabel, ylabel, axis. Ajuste los ejes para que se represente la señal de 0 a 0.05 s.

Pruebe los siguientes casos:

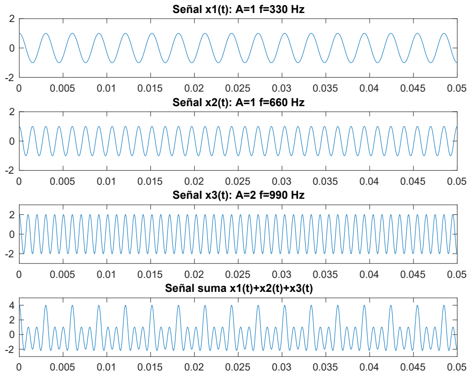
- $A_1 = A_2 = A_3 = 1$ y $f_1 = 330$ Hz, $f_2 = 2f_1$, $f_3 = 3f_1$.
- $A_1 = A_2 = 1$ $A_3 = 2$ y $f_1 = 330$ Hz, $f_2 = 2f_1$, $f_3 = 3f_1$.
- $A_1 = A_2 = 1$ $A_3 = -1$ y $f_1 = 330$ Hz, $f_2 = 2f_1$, $f_3 = 3f_1$.

Resultado:

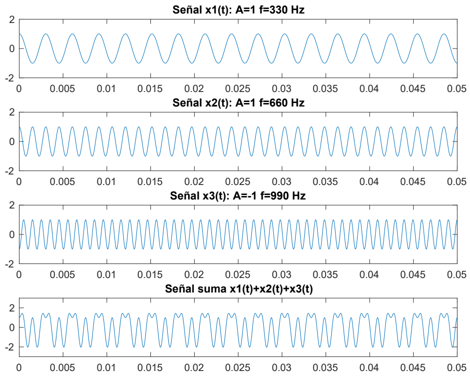
a) $A_1 = A_2 = A_3 = 1$ *y* $f_1 = 330$ *Hz,* $f_2 = 2f_1$, $f_3 = 3f_1$.



b) $A_1 = A_2 = 1$ $A_3 = 2$ *y* $f_1 = 330$ *Hz,* $f_2 = 2f_1$, $f_3 = 3f_1$.



c) $A_1 = A_2 = 1$ $A_3 = -1$ *y* $f_1 = 330$ *Hz*, $f_2 = 2f_1$, $f_3 = 3f_1$.



12. **Ejercicio con ordenador**

Se utilizará el fichero de audio para intepretar el significado de ciertas operaciones. Es posible que necesite instalar el paquete de audio:

pkg install –forge audio

pkg load audio

Octave dispone de la instrucción audioread que lee los datos de un fichero de audio y produce un vector con las muestras de audio correspondientes:

$$[xdet, fs] = audioread(`filename')$$

donde

- filename: nombre del fichero de audio con su extensión. El formato más popular es el .wav
- fs es la frecuencia de muestreo
- xdet es un vector columna con las muestras de audio.
- N = Length(xdet) es el número de muestras de audio
- T=N/fs es la duración de la señal de audio

El fichero *ejemplo.wav* contiene una señal de audio con calidad Compact Disc con frecuencia de muestreo es fs = 44100 Hz y duración es $T = 8$ segundos. Realice lo siguiente:

- Represente y escuche la señal *xdet*, es decir $x(n) = [x(1)x(2)...x(N)]$.
- Represente y escuche la señal con el doble de amplitud, $y(n) = 2x(n)$
- Represente y escuche la señal invertida en el dominio temporal,

$$= [x(N)x(N-1)...x(1)]$$

Resultado:

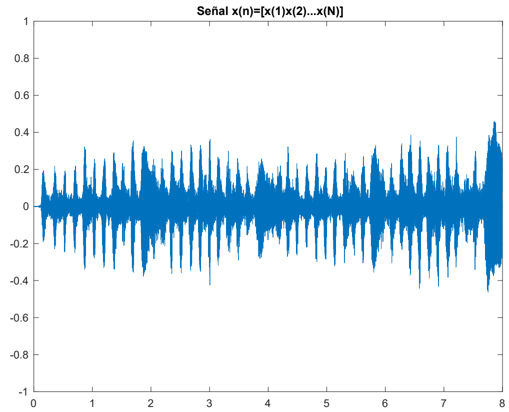


Figura 4: a) Señal original

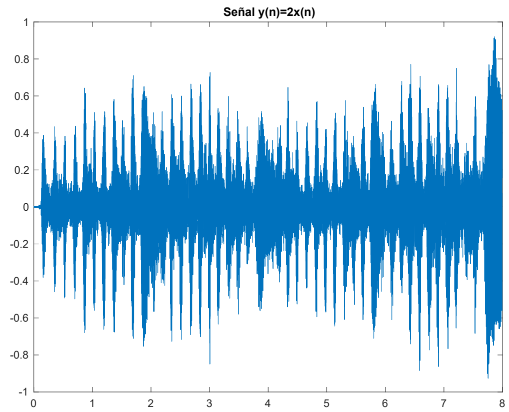


Figura 5: b) Señal con el doble de amplitud: $y = 2 * x;$

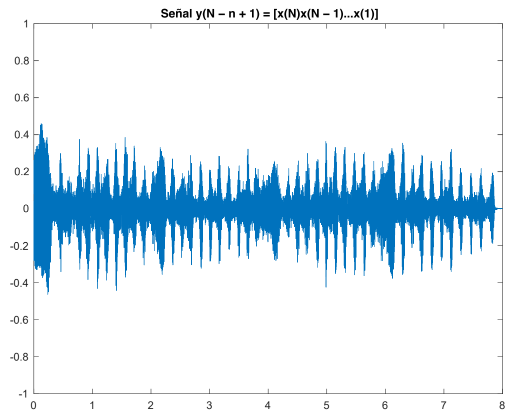


Figura 6: c) Señal invertida en tiempo: $y = x(length(x) : -1 : 1);$