Ejercicios Tema 3. Combinatoria

Objetivos: Al acabar el tema el alumno debe ser capaz de:

1. Comprender el objeto de estudio de la combinatoria.
2. Operar con soltura con factoriales y números combinatorios.
3. Conocer y aplicar los principios básicos del conteo: Principio de la suma, principio del producto y principio de distribución.
4. Comprender los conceptos de variación, permutación y combinación, sin repetición y con repetición.
5. Conocer las diferencias fundamentales entre las distintas formas de seleccionar los elementos de un conjunto.
6. Deducir la fórmula para calcular el número de variaciones, permutaciones y combinaciones, sin repetición y con repetición, de cualquier orden.
7. Resolver problemas de conteo descomponiendo los problemas más complejos en partes más simples para aplicar los principios básicos y las diferentes selecciones definidas.
8. Conocer y asimilar las fórmulas para el desarrollo de binomios y multinomios.
9. Conocer el principio de inclusión-exclusión y su aplicación en contextos particulares de conteo: combinaciones con repetición con restricciones y desórdenes.
10. Conocer la relación entre las distintas selecciones definidas y los tipos de aplicaciones entre conjuntos finitos (aplicaciones inyectivas, sobreyectivas o biyectivas).

Ejercicios:

1. Los códigos de apertura para las cajas de seguridad en un banco constan de nueve cifras enteras $XYABCDEFG$. La primera cifra, X, es un 6 o un 7. La segunda cifra, Y, es un número distinto de 0 que debe ser par si X lo es. El resto de los dígitos toman valores del 0 al 9. ¿Cuántos códigos de apertura distintos pueden formarse con estas condiciones?
2. A una reunión asisten 40 personas. Justifica que al menos dos de ellas nacieron el mismo día del mes. ¿Cuántas podemos asegurar que nacieron el mismo mes del año? ¿Cuántas podemos asegurar que nacieron el mismo día de la semana?
3. En un saco hay bolas de color blanco, negro, rojo y verde. ¿Cuántas bolas se deben sacar para que (al menos) dos sean del mismo color? ¿Y (al menos) tres del mismo color? ¿Y (al menos) p del mismo color, para $p \geq 4$?

4. Un compartimento de tren tiene doce asientos, seis de cara a la locomotora y otros seis de espaldas a la misma, ¿de cuántas formas se pueden sentar 12 pasajeros?
   Si de esos doce pasajeros, cinco prefieren sentarse de cara a la locomotora, cuatro prefieren sentarse de espaldas y los otros tres no tienen preferencia, ¿de cuántas formas se pueden sentar respetando sus preferencias?

5. Calcula el número de palabras de seis letras distintas que se pueden formar con las veintisiete letras del alfabeto que contengan cuatro consonantes y dos vocales.

6. En un lote de 100 ordenadores se sabe que 10 de ellos están defectuosos. Se selecciona una muestra de 7 ordenadores de forma aleatoria para realizar un control. ¿De cuántas formas se pueden obtener:
   (a) tres ordenadores defectuosos?
   (b) a lo sumo un ordenador defectuoso?
   (c) al menos un ordenador defectuoso?

7. En un club de magia formado por 27 aprendices y 10 magos se quiere elegir una comisión formada por 4 personas (presidente, secretario, tesorero y vocal) con el fin de elaborar la previsión de gastos del club para el año próximo.
   (a) ¿De cuántas formas se puede elegir la comisión?
   (b) ¿De cuántas formas se puede elegir la comisión si se quiere que esté presidida por un mago?
   (c) ¿Y si se quiere que haya al menos un mago, aunque no sea el presidente?
   (d) ¿Cuántas comisiones puede haber si el mago Ojeda y el aprendiz Manuel no pueden estar en la misma comisión?

8. ¿De cuántas formas puede sacar un jugador cinco naipes de una baraja francesa (52 cartas repartidas en cuatro palos: corazones, picas, tréboles y diamantes) y obtener un full (trío más pareja)? ¿y dobles parejas?

9. ¿Cuántas permutaciones de las letras de la palabra MISSISSIPPI existen? ¿Cuántas de ellas no contienen dos (o más) letras I consecutivas?
   ¿Cuántas permutaciones de las letras de la palabra MASSESSIPPO no contienen dos (o más) vocales consecutivas?

10. Calcula el número de permutaciones que se pueden formar con las letras de la palabra POLIINSATURADO. ¿De cuántas formas se pueden colocar dichas letras de modo que se mantenga el orden en que aparecen las vocales en la palabra?

11. A cada alumno de una facultad se le entrega un código de longitud 10 formado con el alfabeto $\{0, 1, 2\}$. Calcula cuántos códigos distintos se pueden formar en cada uno de los siguientes casos:

    (a) si deben empezar con 0 y no puede haber símbolos iguales en posiciones consecutivas,

    (b) si cada código tiene exactamente 4 unos,

    (c) si el resultado de multiplicar los elementos del código es 16,

    (d) si cada código tiene dos 0, tres 1 y cinco 2.

12. Resuelve las cuestiones siguientes

    (a) ¿De cuántas formas se pueden repartir 5 dulces diferentes entre 12 personas si cualquiera de ellas puede recibir cualquier número de dulces?

    (b) ¿De cuántas formas pueden distribuirse 5 dulces diferentes entre 12 personas si ninguna de ellas puede recibir más de uno?

    (c) ¿De cuántas formas pueden distribuirse 5 dulces idénticos entre 12 personas si cualquiera de ellas puede recibir cualquier número de dulces?

    (d) ¿De cuántas formas pueden distribuirse 5 dulces idénticos entre 12 personas si ninguna de ellas puede recibir más de uno?

    (e) ¿De cuántas formas se pueden repartir 14 dulces idénticos entre 6 personas si cada uno de ellos debe recibir, al menos, un dulce?

13. A través de un canal de comunicación se va a transmitir un mensaje formado por once letras distintas. Además de estas once letras, el transmisor enviará un total de 48 espacios en blanco entre las letras, con cuatro espacios como mínimo entre cada par de letras consecutivas. ¿Cuántos posibles mensajes se pueden enviar si deben empezar y terminar con una letra y el orden de las letras es significativo?

14. Halla el número de cadenas de longitud 15 que pueden formarse con 11 letras "a", 2 letras "b" y 2 letras "c", sabiendo que cada "b" y cada "c" tienen que ir precedidas y seguidas de, al menos, una "a".

15. Desarrolla y simplifica
    (a) $(x + y)^7$ (b) $(2x + 3y^2)^5$ (c) $(2x - y)^4$ (d) $(2x - y^2)^5$

16. (a) Halla el coeficiente de xy en $(x - 2y + 3x^{-1})^4$.
    (b) Halla el coeficiente de $w^3x^2yz^2$ en $(2w - x + 3y - 2z)^8$. ¿Cuál es la suma de todos los coeficientes?

17. En una bolsa hay 14 bolas numeradas del 1 al 14, ocho son de color rojo y seis de color blanco.

    (a) Calcula de cuántas formas se pueden seleccionar cinco bolas de la bolsa.

(b) Calcula cuántas selecciones tienen tres bolas rojas y dos bolas blancas.

(c) Calcula cuántas selecciones con al menos una bola de cada color hay.

18. En una empresa trabajan 7 hombres y 10 mujeres. El gerente quiere establecer turnos de trabajo formados por un hombre y dos mujeres. Calcula cuántas posibilidades hay en cada uno de los siguientes casos:

    (a) Juan no puede trabajar ni con María ni con Ana

    (b) en cada turno debe estar Carlos o Carmen o Susana

19. ¿Cuántos números de la seguridad social (secuencias de nueves dígitos) se pueden formar? ¿Cuántos de ellos tienen al menos una vez cada uno de los dígitos 1, 3 y 7?

20. ¿Cuántos enteros entre 1 y 10000 inclusive son múltiplos de 4, de 5 o de 6?

21. Si se lanza un dado cinco veces, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las cinco tiradas sea veinte?

22. En un laboratorio con 20 ordenadores, 7 alumnos están practicando para un examen. El día del examen son llamados por lista y se les asigna un ordenador. ¿Qué probabilidad[1] hay de que a ninguno de ellos le toque el ordenador en que practicaba?

23. En un departamento se han de asignar siete asignaturas diferentes a cinco profesores, cada profesor puede impartir cualquier asignatura. ¿De cuántas formas se puede efectuar el reparto si cada profesor debe impartir al menos una asignatura?

24. Calcular el número de permutaciones de $\{1, 2, \ldots, 7, 8, 9\}$ en las cuales quedan fijos tres (exactamente tres) números.

25. ¿De cuántas formas pueden ordenarse 3 bolas rojas, 3 azules y 2 blancas de modo que no todas las bolas del mismo color queden consecutivas?

26. ¿Cuántos números de 5 dígitos (en base 10) empiezan por 4, terminan en 5 y la suma de sus cifras es 18? ¿Y si la suma de sus cifras es 22?

Ejercicios: Soluciones

1. Aplicando el principio de la suma y el del producto, $13 \cdot 10^7$.

2. Por el principio de distribución: al menos dos el mismo día del mes pues $40 > 31 \cdot 1$, al menos 4 el mismo mes del año pues $40 > 12 \cdot 3$ y al menos 6 el mismo día de la semana pues $40 > 7 \cdot 5$.

3. Por el P. de distribución: 5 o más, 9 o más y 4(p-1)+1 o más, respectivamente.

[1] La probabilidad viene dada por el cociente entre el número de casos favorables y el de casos posibles.

4. Primera cuestión: 12!
   Segunda: $V(6,5)\cdot V(6,4)\cdot P(3)=1555200$ o $C(3,2)\cdot P(6)\cdot P(6)=1555200$.
5. $C(22,4)\cdot C(5,2)\cdot P(6)=52668000$.
6. (a) $C(10,3)\cdot C(90,4)$, (b) $C(90,7)+C(90,6)\cdot C(10,1)$,
   (c) $C(100,7)-C(90,7)$.
7. (a) $37\cdot 36\cdot 35\cdot 34$, (b) $10\cdot 36\cdot 35\cdot 34$,
   (c) $V(37,4)-V(27,4)$, (d) $V(37,4)-V(4,2)\cdot V(35,2)$.
8. (a) $V(13,2)\cdot C(4,3)\cdot C(4,2)$, (b) $C(13,2)\cdot C(4,2)\cdot C(4,2)\cdot 44$.
9. $PR(11;4,4,2,1)$, $PR(7;1,4,2)\cdot C(8,4)$, $PR(7;1,4,2)\cdot V(8,4)$.
10. $PR(14;2,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1)$,
    $PR(14;7,1,1,1,1,1,1,1)=V(14,7)=C(14,7)\cdot 7!$
11. (a) 2^9, (b) $C(10,4)\cdot 2^6$, (c) $C(10,4)$, (d) $PR(10;2,3,5)$
12. (a) $VR(12,5)=12^5$, (b) $V(12,5)=12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8$,
    (c) $CR(12,5)$, (d) $C(12,5)$, (e) $CR(6,8)=C(13,8)$.
13. $P(11)\cdot CR(10,8)=11!\cdot C(17,8)=11!\cdot 24310$.
14. $PR(4;2,2)\cdot CR(5,6)=\dfrac{10!}{2!2!6!}=PR(10;2,2,6)$.
15.
16. (a) -72, (b) $161280, 256$.
17. (a) $C(14,5)$, (b) $C(8,3)\cdot C(6,2)$,
    (c) Por el princicipio de inclusión-exclusión: $C(14,5)-[C(6,5)+C(8,5)]+0$.
18. (a) $C(8,2)+6\cdot C(10,2)$,
    (b) Por el princicipio de inclusión-exclusión: $C(10,2)+2\cdot 7\cdot 9-2\cdot 9-7+1$.
19. Primera cuestión: 10^9.
    Aplicando el principio de inclusión-exclusión, $10^9-3\cdot 9^9+3\cdot 8^9-7^9$.
20. Aplicando el P. de inclusión-exclusión, 2500+2000+1666–500–833–333+166=4666.
21. Si x_i es el resultado obtenido al lanzar el $i-$ésimo dado, los casos favorables son las soluciones enteras de $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=20;\ 1\le x_i\le 6$. Los casos posibles son VR(6,5). Entonces la probabilidad es del 8,37%.
22.
$$\frac{\sum_{k=0}^{7}(-1)^k\binom{7}{k}\cdot V(20-k,7-k)}{V(20,7)}=\sum_{k=0}^{7}(-1)^k\binom{7}{k}\frac{(20-k)!}{20!}$$
23. Aplicaciones sobreyectivas del conjunto de asignaturas (de cardinal 7) en el conjunto de profesores del departamento (de cardinal 5). La solución es 16800.
24. $C(9,3)\cdot D(6)=84\cdot 265$.
25. $|\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap\overline{S_3}|=560-(60+60+140)+(12+20+20)-6=560-260+52-6=346$.
26. $CR(3,9)=C(11,9)$. Para el segundo apartado se aplica el principio de inclusión-exclusión: soluciones enteras de $x_1+x_2+x_3=13;\ 0\le x_i\le 9$.