Gestión de Infraestructuras
Tema 1: Representación de señales en el dominio del tiempo
Ejercicios Parte 3

1. **Resumen:**

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Propiedades de la convolución

Conmutativa:

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Asociativa:

$$y(t) = x(t) * \big(g(t) * h(t)\big) = (x(t) * g(t)) * h(t)$$

Distributiva:

$$y(t) = x(t) * \big(g(t) + h(t)\big) = x(t) * g(t) + x(t) * h(t)$$

Multiplicación por escalar:

$$y(t) = a\big(x(t) * h(t)\big) = ax(t) * h(t)$$

2. **Ejercicio de clase:**

Calcule la convolución $y(t) = x(t) * h(t)$ de las siguientes señales:

a) $x(t) = 2u(t)$ y $h(t) = u(t)$.

b) $x(t) = u(t) - u(t - t_1)$ y $h(t) = u(t) - u(t - t_2)$ donde $t_2 > t_1 > 0$.

c) $x(t) = u(t + 2) - u(t - 3)$ y $h(t) = \delta(t + 2) + \delta(t - 1)$.

Solución:

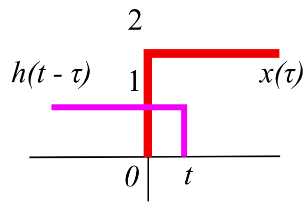
a) $y(t) = 2t\,u(t)$

b) $y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t < t_1 \\ t_1 & t_1 < t < t_2 \\ t_1 + t_2 - t & t_2 < t < t_1 + t_2 \\ 0 & t > t_1 + t_2 \end{cases}$

c) $y(t) = x(t + 2) + x(t - 1)$

Desarrollo:

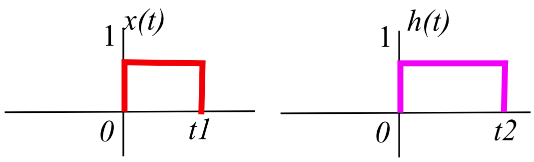
a)

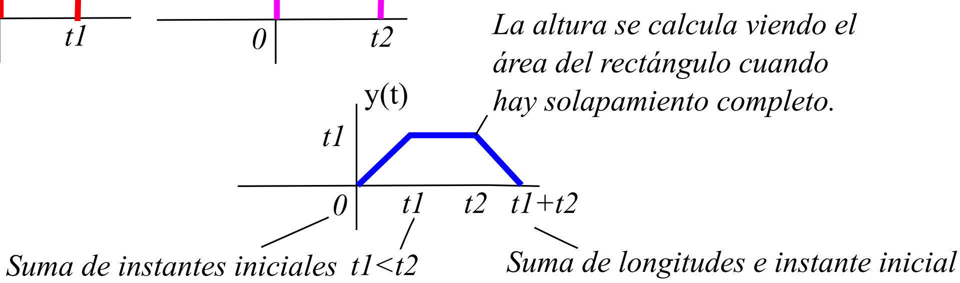


Para t < 0, y(t) = 0 porque no hay solapamiento.
Para t > 0, el área que se solapa tiene base t y altura 2. Por tanto, y(t) = 2 t.
Podemos escribir y(t) = 2 t u (t)

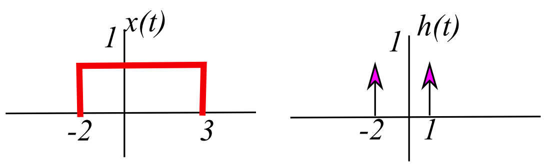
b) *En primer lugar, dibujaremos las dos señales*

En la presentación de la clase de teoría, se muestra el proceso paso a paso.

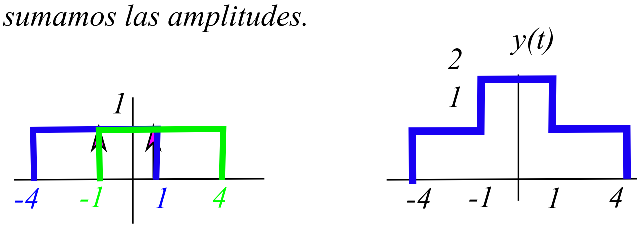




c) *En primer lugar, dibujaremos las dos señales*



Desplazamos la señal x(t) hasta donde está cada delta.
Finalmente, sumamos las amplitudes.



3. **Ejercicio:**

Calcule la convolución $y(t) = x(t) * h(t)$ de las siguientes señales:

a) $x(t) = u(t) - u(t-1)$ y $h(t) = u(t) - u(t-2)$.

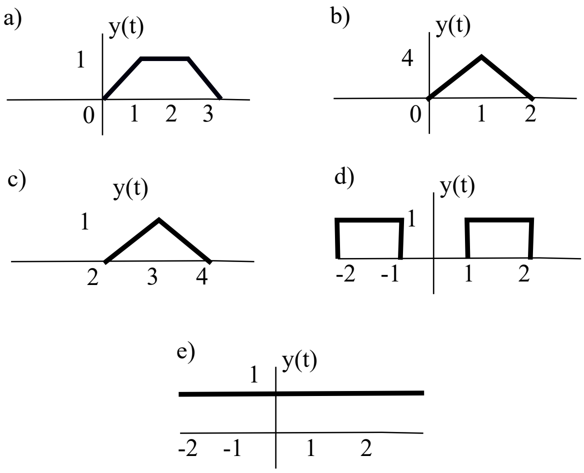
b) $x(t) = 2(u(t) - u(t-1))$ y $h(t) = x(t)$.

c) $x(t) = u(t) - u(t-1)$ y $h(t) = x(t-2)$.

d) $x(t) = u(t) - u(t-1)$ y $h(t) = \delta(t+2) + \delta(t-1)$.

e) $x(t) = u(t) - u(t-1)$ y $h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k)$.

Solución:



Desarrollo:

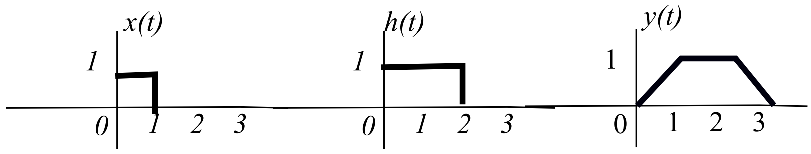
Los apartados a) b) y c) se realizan igual que el apartado b) del ejercicio 1.

El apartado d) se realiza igual que el apatado c) del ejercicio 1.

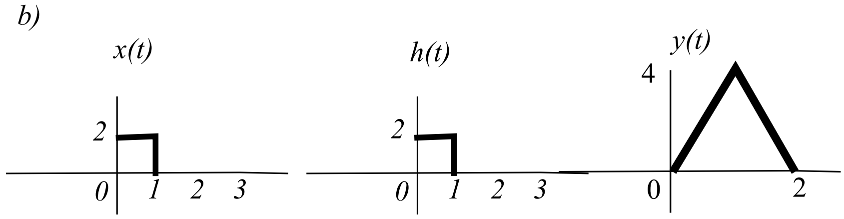
El apartado e) se realiza igual que el apartado c) del ejercicio 1 teniendo en cuenta que las deltas están separadas una unidad y van desde $-\infty$ *hasta* ∞. *Así resulta que* $y(t) = 1$.

La siguiente figura muestra las señales originales y el resultado de la convolución.

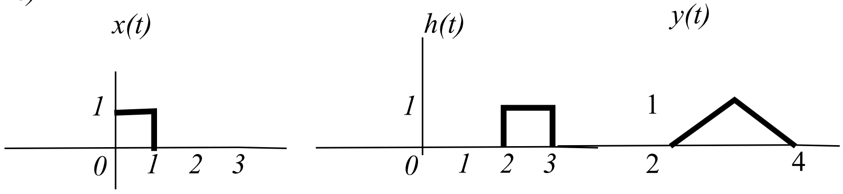
a)


x(t)
h(t)
y(t)
1
0 1 2 3
1
0 1 2 3
1
0 1 2 3

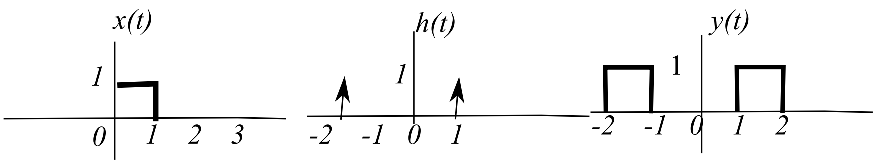
b)


x(t)
h(t)
y(t)
2
0 1 2 3
2
0 1 2 3
4
0
2

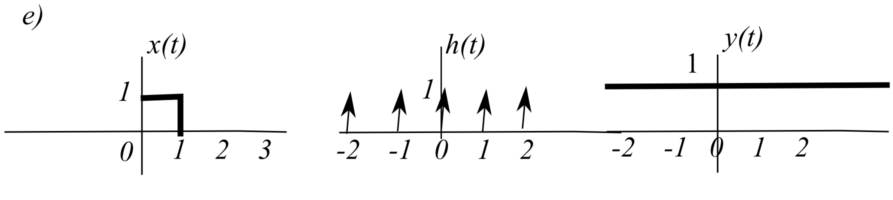
c)


x(t)
h(t)
y(t)
1
0 1 2 3
1
0 1 2 3
1
2
4

d)


x(t)
h(t)
y(t)
1
0 1 2 3
1
-2 -1 0 1
1
-2 -1 0 1 2

e)


x(t)
h(t)
y(t)
1
0 1 2 3
1
-2 -1 0 1 2
1
-2 -1 0 1 2

4. **Ejercicio de clase:**

Calcule la convolución entre las siguientes señales: $x(t) = e^{-at}u(t)$ con $a > 0$ y $h(t) = u(t)$.

Solución:

$$y(t) = \frac{1 - e^{-at}}{a}u(t)$$

Desarrollo:

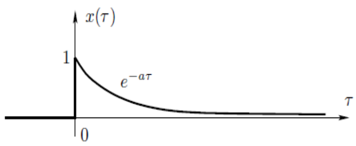
Observamos que para $t < 0$ no existe solapamiento, por lo que $y(t) = 0$. Para $t > 0$, tenemos

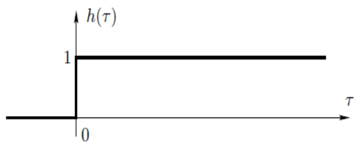
$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau}d\tau = \frac{1 - e^{-at}}{a}$$

Dado que solamente toma valores distintos de cero para $t > 0$, podemos escribirlo como sigue:

$$y(t) = \frac{1 - e^{-at}}{a}u(t)$$

Es decir, multiplicamos la expresión que nos dio anteriormente por una función $u(t)$ que toma valor 1 para $t > 0$ y es 0 para $t < 0$.





5. **Ejercicio de clase:**

Determine la respuesta al impulso de un sistema LTI para los siguientes casos:

a) $y(t) = 2x(t) - 2x(t-4) + x(t-8)$

b) $x(t) = u(t) - u(t-2)$ es $y(t) = 2(u(t) - u(t-4))$. Determine la energía y la potencia media de $y(t)$.

Solución:

a) $h(t) = 2\delta(t) - 2\delta(t-4) + \delta(t-8)$

b) $h(t) = 2\delta(t) + 2\delta(t-2)$, $Ey = 16 \ \ J$, $Py = 0 \ \ W$

Desarrollo:

a) *La respuesta al impulso de un sistema LTI se calcula para $x(t) = \delta(t)$. Sustituyendo directamente en la expresión de $y(t)$ se obtiene*

$$h(t) = 2\delta(t) - 2\delta(t-4) + \delta(t-8)$$

b) *La salida al impulso de un sistema LTI es una convolución. Se puede comprobar que*

$$y(t) = x(t) + x(t-2) = 2x(t) * \delta(t) + 2x(t) * \delta(t-2) = 2x(t) * (\delta(t) + \delta(t-2))$$

De lo que deducimos que la respuesta al impulso es

$$h(t) = 2\delta(t) + 2\delta(t-2)$$

La energía se puede calcular como el área de un rectángulo de base 4 y altura $2^2 = 4$, es decir

$$Ey = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2 dt = 4 \times 4 = 16 \ \ J$$

Dado que es una señal de energía finita, la potencia media será 0 W.

6. **Ejercicio:**

Determine la respuesta al impulso de un sistema LTI para los siguientes casos

a) $y(t) = x(t) - x(t+2)$

b) $y(t) = x(t) - 2x(t+2) + x(t-1)$

c) Se sabe que para $x(t) = u(t) - u(t-2)$, la salida es $y(t) = u(t) - u(t-6)$

Solución:

a) $h(t) = \delta(t) - \delta(t+2)$

b) $h(t) = \delta(t) - 2\delta(t+2) + \delta(t-1)$

c) $h(t) = \delta(t) + \delta(t-2) + \delta(t-4)$

Desarrollo:

a) *La respuesta al impulso de un sistema LTI se calcula para $x(t) = \delta(t)$. Sustituyendo directamente en la expresión de $y(t)$ se obtiene $h(t) = \delta(t) - \delta(t+2)$*

b) *Utilizando el mismo razonamiento se obtiene que $h(t) = \delta(t) - 2\delta(t+2) + \delta(t-1)$*

c) *En este caso, podemos deducir que*

$$y(t) = x(t) + x(t-2) + x(t-4)$$

Por lo que, la respuesta al impulso es $h(t) = \delta(t) + \delta(t-2) + \delta(t-4)$.

7. **Ejercicio de clase:**

Para la señal $x(t) = u(t) - u(t-1)$, determine la salida de un sistema formado por dos sistemas LTI conectados en paralelos siendo $h_1(t) = \delta(t) + \delta(t-1)$ y $h_2(t) = \delta(t-2)$

Solución:

$$y(t) = u(t) - u(t-3)$$

Desarrollo:

Lo realizaremos por dos métodos.

En el primer método, utilizaremos que la salida de un sistema con interconexión en paralelo es $y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$. Realizaremos cada convolución por separado y después sumaremos:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= x(t) * h_1(t) = x(t)(\delta(t) + \delta(t-1)) = x(t) + x(t-1) = u(t) - u(t-2) \\
y_2(t) &= x(t) * h_2(t) = x(t)\delta(t-2) = x(t-2) = u(t-2) - u(t-3) \\
y(t) &= y_1(t) + y_2(t) = u(t) - u(t-3)
\end{aligned}$$

Para el segundo método, utilizaremos la propiedad distrubutiva respecto a la suma

$$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t))$$

Vamos a calcular primero la respuesta al impulso del sistema equivalente

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) = \delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t-2)$$

La salida del sistema será

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) + x(t-1) + x(t-2) = u(t-2) - u(t-3)$$

8. **Ejercicio:**

Para la señal $x(t) = u(t+1) - u(t-1)$, determine la salida de un sistema formado por dos sistemas LTI conectados en serie con $h_1(t) = \delta(t-2)$ y $h_2(t) = \delta(t+2) + \delta(t)$.

Solución:

$$y(t) = u(t) - u(t-3)$$

Desarrollo: Calculamos la respuesta al impulso del sistema LTI equivalente

$$h(t) = \delta(t-2) * (\delta(t+2) + \delta(t)) = \delta(t) + \delta(t-2)$$

La salida del sistema será

$$y(t) = x(t) * (\delta(t) + \delta(t-2)) = x(t) + x(t-2) = u(t+1) - u(t-3)$$

9. **Ejercicio de clase:**

Calcule la convolución $y(n) = x(n) * h(n)$ de los siguientes pares de señales:

a) $x(n) = h(n) = u(n)$

b) $x(n) = u(n-3) - u(n-6), h(n) = u(n-4) - u(n-8)$

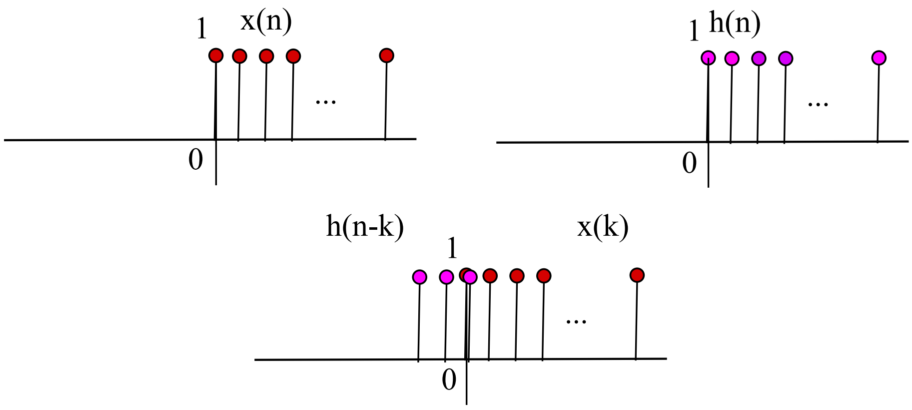
Solución:

a) $y(n) = (n+1)u(n)$

b) $y(n) = \begin{cases} 0 & n < 7 \\ n-6 & 7 \leq n \leq 8 \\ 3 & 9 \leq n \leq 10 \\ 13-n & 11 \leq n \leq 12 \\ 0 & n \geq 13 \end{cases}$

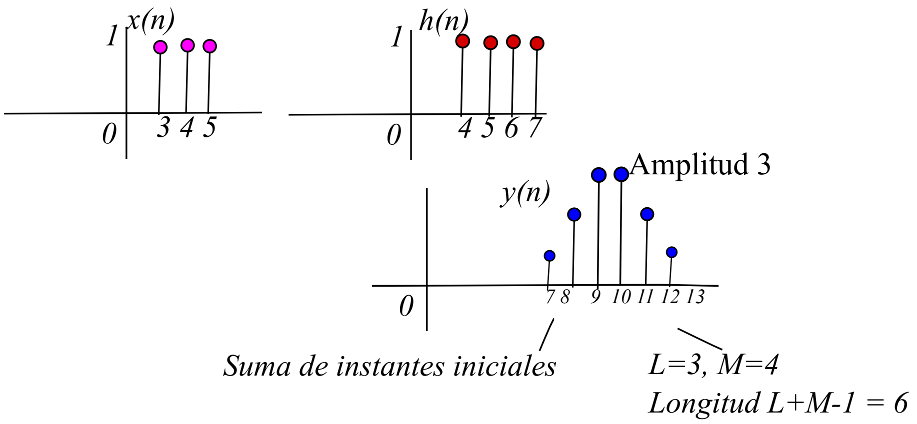
Desarrollo:

a)



Cuando n<0, no hay solapamiento
Para el instante 0, se solapa solamente 1 punto, y(0)=1.
Para el instante 1, se solapan 2 puntos, y(1) = 1 + 1 =2.
Para el instante n, se solapan n+1 puntos, y(n) = n+1.

b)



10. **Ejercicio con Ordenador:**

Utilizando la demo disponible en https://phiresky.github.io/convolution-demo/ realice la convolución entre las siguientes señales para ver el proceso paso a paso:

a) $x(t) = h(t) = u(t+1) - u(t-1)$

b) $x(t) = h(t) = 0{,}5(u(t+1) - u(t-1))$. Compare la amplitud con la obtenida en el apartado anterior.

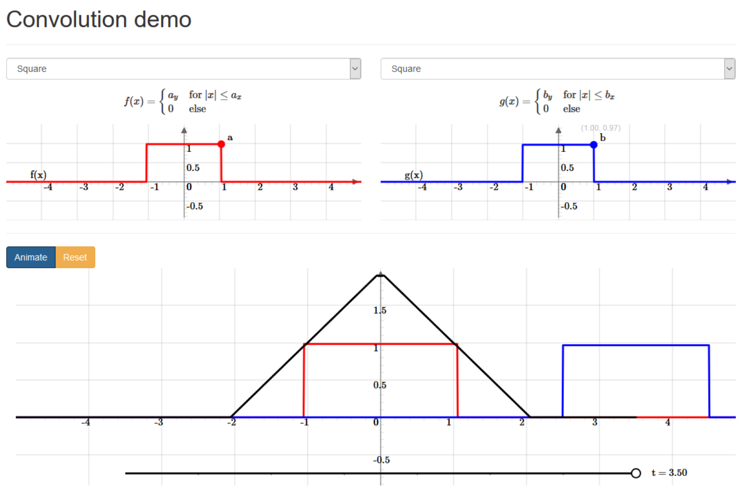
c) $x(t) = 0{,}5(u(t+1) - u(t-1))$ y $h(t) = 0{,}5(u(t+2) - u(t-2))$

d) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k)$ y $h(t) = 0{,}5(u(t+1/2) - u(t-1/2))$.

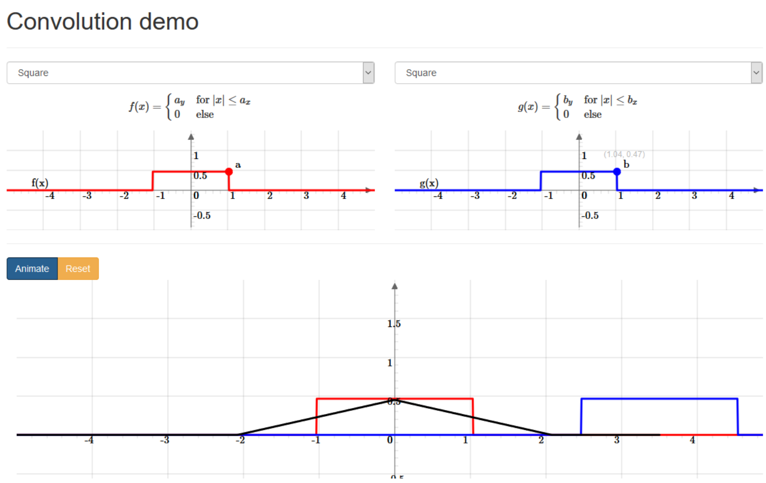
e) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k)$ y $h(t) = 0{,}5(u(t+2) - u(t-2))$.

Solución:

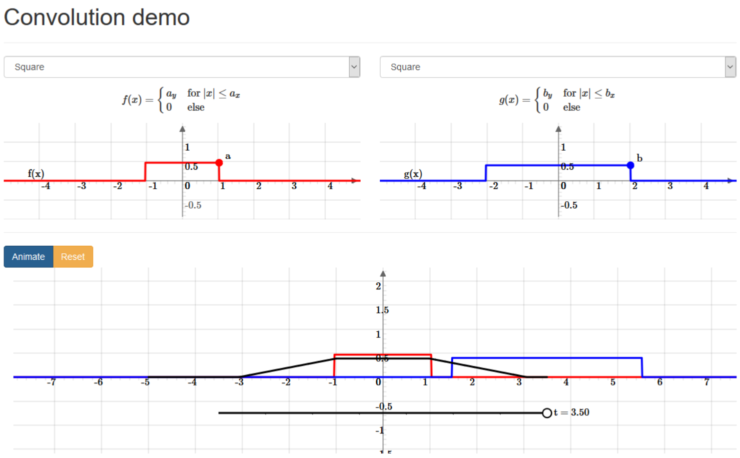
a) $x(t) = h(t) = u(t+1) - u(t-1)$. Como las dos señales tienen duración 2, la duración de la señal es 4. Por otro lado, como las dos señales tienen amplitud 1 y duración 2, la amplitud será $1 \times 1 \times 2 = 2$.



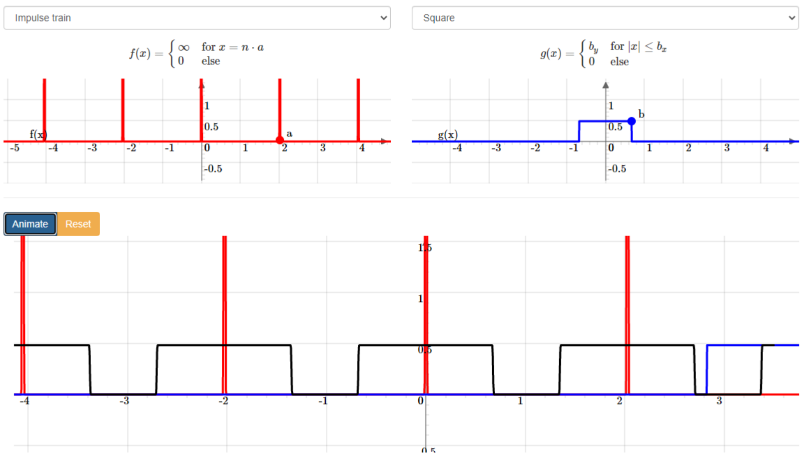
b) $x(t) = h(t) = 0{,}5(u(t+1) - u(t-1))$. Como las dos señales tienen duración 2, la duración de la señal es 4. Por otro lado, como las dos señales tienen amplitud 0,5 y duración 2, la amplitud será $0{,}5 \times 0{,}5 \times 2 = 0{,}5$.



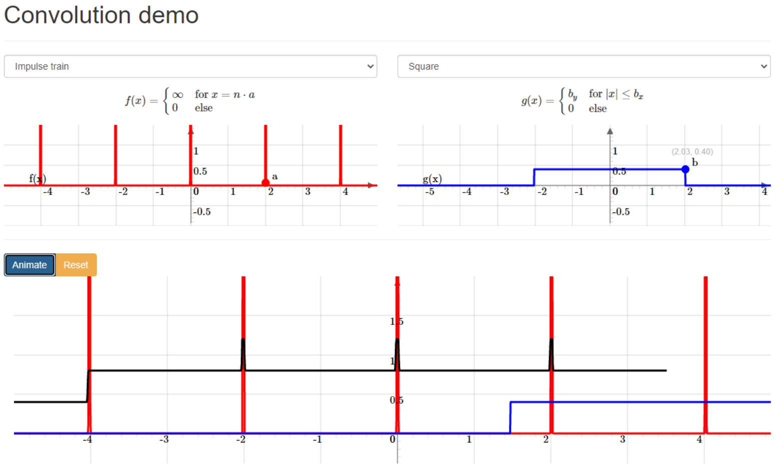
c) $x(t) = u(t+1) - u(t-1)$ y $h(t) = u(t+2) - u(t-2)$. Se obtiene la "gráfica" típica de convolución entre dos pulsos de distinta duración: 1) la duración es la suma de las duraciones de cada señal; 2) la parte creciente y la decreciente tienen la duración de la señal más corta $T = 2$; 3) la amplitud es $a \times b \times T = 0{,}5 \times 0{,}5 \times 2 = 0{,}5$.



d) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k)$ y $h(t) = 0{,}5(u(t+1/2) - u(t-1/2))$. Dado que $h(t)$ es un pulso centrado en cero, la convolución son varios pulsos centrados en la posición de cada delta. No existe solapamiento entre esas réplicas.



e) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k)$ y $h(t) = 0{,}5(u(t+2) - u(t-2))$. Sucede lo mismo que en el apartado anterior, pero hay que sumar las amplitudes de las réplicar porque existe solapamiento.



11. **Ejercicio con Ordenador:**

El siguiente código lee un fichero de audio, crea una respuesta al impulso y obtiene la señal "captada" por un micrófono. Dado que se trata de un sistema LTI, la señal "captada" (salida del sistema) es la suma de convolución entre la emitida y la respuesta al impulso del sistema.

```
clear all;
close all;

[x,fs] = audioread('hola_22050.wav');
x = x';    lx = length(x);
n = 0:1/fs:(lx/fs)-1/fs;

h = (n==0.1) + 0.5* (n==0.2);  % Respuesta al impulso
fsh = fs;
lh = length(h);
nh = 0:1/fsh:(lh/fsh)-1/fsh;

y = conv(x,h);                % Senal captada
ly = length(y);  ny  = 0:1/fs:(ly/fs)-1/fs;

figure(1);
subplot(311);
plot(n,x); title('x(n)');
subplot(312);
stem(nh,h); title('respuesta al impulso h(n)');
subplot(313);
plot(ny,y); title('y(n)');

y = y./max(abs(y));
sound(y,fs)
```

Ejecute el código y vea las señales. Si puede, escuche la entrada y la salida.

Cambie ahora la respuesta al impulso por los ficheros de audio grabados en situaciones reales. Para leerlos, utilice el siguiente código:

```
[h,fsh] = audioread('nombrefichero.wav');
```

Pruebe con los ficheros que se le han proporcionado:

- *golpe_eco.wav*
- *IslaMujeresCave.wav*. Utilice solo una de las respuestas del registro $h = h(:,1)$;
- *LoveLibrary.wav*. Utilice solo una de las respuestas del registro $h = h(:,1)$;

- $CarpenterCenter.wav$, Utilice solo una de las respuestas del registro $h = h(:,1)$;

Tiene más registros en $http://www.echothief.com/$

<u>Solución:</u>

Como ejemplo, se muestra la salida para el código anterior.