Programación Lineal Entera

Luisa Carpente e Ignacio García Jurado

Departamento de Matemáticas
Universidade da Coruña

Preliminares

- En algunos problemas de programación lineal sólo tienen sentido aquellas soluciones de la región factible en las que todas o algunas de las variables de decisión son números enteros. Se llaman genéricamente problemas de programación lineal entera.
- Si todas las variables de decisión deben ser enteras tenemos un problema de programación lineal entera puro.
- Si todas las variables de decisión deben tomar los valores 0 o 1 tenemos un problema de programación lineal entera binario.
- Si algunas variables de decisión (no todas) deben ser enteras o binarias tenemos un problema de programación lineal entera mixto.

Un problema de programación lineal entera

Todo problema de programación lineal entera admite una formulación del tipo siguiente.

$$\begin{aligned} max \quad & c^t x \\ s.a: \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

donde A es una matriz $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$, con $b \geq 0$, $c \in \mathbb{R}^n$. Además, para el vector de variables $x \in \mathbb{R}^n$ se pide una de las tres condiciones siguientes:

- $x \in \mathbb{Z}^n$.
- $x \in \{0, 1\}^n$.
- $x_i \in \mathbb{Z}$ y/o $x_j \in \{0, 1\}$ para algunos $i, j \in \{1, \dots n\}$.

Ejemplo: planificación de una plantilla

Una empresa necesita cada día de la semana el número de trabajadores a tiempo completo que se indica en la tabla adjunta. Según estipula el correspondiente convenio, cada trabajador debe trabajar cinco días seguidos y descansar dos. Se trata de determinar el número mínimo de trabajadores que debe contratar y cómo deben organizarse los turnos para que se satisfagan las necesidades de la empresa indicadas en la tabla.

Día	1.L	2.Ma	3.Mi	4.J	5.V	6.S	7.D
Trabajadores	15	13	15	18	14	16	10

El modelo

- $x_i =$ número de trabajadores que se contratan para que empiecen a trabajar el día i ($i \in \{1, \ldots, 7\}$).

$$
\begin{aligned}
min \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
s.a: \quad & x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 15 \\
& x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 15 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 18 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 14 \\
& x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 16 \\
& x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 10 \\
& x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}, i \in \{1, \ldots, 7\}
\end{aligned}
$$

Ejemplo: un problema de producción

Una empresa debe decidir si pone en marcha la producción y, en tal caso, la cantidad de unidades que produce de cada uno de los artículos A_1, A_2 y A_3, de modo que se maximicen sus beneficios. La siguiente tabla muestra las horas y los gramos de materia prima que se precisan para la producción de una unidad de cada uno de los artículos, así como los costes unitarios de producción y los precios de venta unitarios (ambos en euros). La puesta en marcha de la producción de los artículos A_1, A_2 y A_3 supone unos costes fijos de 2000, 1500 y 1000 euros, respectivamente. La tabla también indica las disponibilidades de horas y de gramos de materia prima.

	horas	gramos	C.U.P	P.V.U.
A_1	30	40	60	120
A_2	20	30	40	80
A_3	60	40	80	150
Disp.	4500	5500		

El modelo

- $x_i =$ número de unidades que se producen del artículo A_i, $i \in \{1,2,3\}$.
- $y_i =$ indicador de si se pone en marcha la producción del artículo A_i, $i \in \{1,2,3\}$.

$$\max \quad 60x_1 + 40x_2 + 70x_3 - 2000y_1 - 1500y_2 - 1000y_3$$

$$\begin{aligned}
s.a: \quad & 30x_1 + 20x_2 + 60x_3 \leq 4500 \\
& 40x_1 + 30x_2 + 40x_3 \leq 5500 \\
& x_1 \leq M_1 y_1 \\
& x_2 \leq M_2 y_2 \\
& x_3 \leq M_3 y_3 \\
\\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\
& y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

Ejemplo y modelización de un problema de inversión

Se están considerando cuatro posibles inversiones. Los beneficios netos en miles de euros que generan cada una de ellas son 16, 22, 12 y 8, respectivamente. El capital en miles de euros que requiere cada una de las inversiones es de 5, 7, 4 y 3, respectivamente. Si solamente se dispone de 14000 euros para invertir. ¿Qué combinación de inversiones proporcionará los máximos beneficios?

- $x_i =$ indicador de si se elige la inversión i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

$$
\begin{array}{rl}
max & 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 \\
s.a: & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

Algunas consideraciones iniciales

- En general, resolver un problema de programación lineal entera es mucho más complejo que resolver un problema de programación lineal.
- La pérdida de la convexidad de la región factible hace que no sean válidos los resultados en los que se basa el algoritmo del símplex.
- La enumeración exhaustiva (evaluar la función objetivo en todas las soluciones factibles) no es viable en la práctica. Por ejemplo, en un problema de 10 variables con 8 valores posibles tendríamos $8^{10} = 1073741824$ soluciones factibles.

Relajación de un problema entero

El problema relajado asociado a un problema de programación lineal entera es el problema resultante de omitir todas las restricciones de integridad.

$$
\begin{array}{lcl}
max & 80x_1 + 45x_2 & ORIGINAL \\
s.a: & x_1 + x_2 \leq 7 & \\
 & 12x_1 + 5x_2 \leq 60 & \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
max & 80x_1 + 45x_2 & RELAJADO \\
s.a: & x_1 + x_2 \leq 7 & \\
 & 12x_1 + 5x_2 \leq 60 & \\
 & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Relación entre un problema de programación entera y su problema relajado

- La región factible del problema original está contenida en la del problema relajado.
- Por tanto, si el problema relajado es infactible entonces el problema original también lo es.
- En otro caso, el valor óptimo del problema relajado (si es acotado) proporciona una cota superior para el valor óptimo del problema original (en caso de que sea factible).
- Si al resolver el problema relajado todas los valores de la solución óptima son enteros, entonces esa solución es también la óptima del problema original.

Esquema del algoritmo de ramificación y acotación

Partimos de un problema de programación lineal entera P cuyo problema relajado PR es acotado.

Paso 1. INICIO. Resolvemos el problema relajado PR.

- Si PR es infactible, P también lo es. FIN.
- Si la solución óptima de PR es entera, entonces es la solución óptima de P. FIN.
- Si PR tiene solución óptima no entera con objetivo A, agregamos PR a la lista de problemas resueltos $\mathcal{LR}$ y le asociamos la cota $C(PR) = A$. Además, definimos $C_I = -\infty$. C_I nos da una cota inferior del valor de la función objetivo en la solución óptima de P y se irá actualizando a lo largo del algoritmo. También definimos $C_S = C(PR)$. C_S nos da una cota superior del valor de la función objetivo en la solución óptima de P y se irá actualizando a lo largo del algoritmo. Vamos al paso 2.

Esquema del algoritmo de ramificación y acotación

Paso 2. RAMIFICACIÓN. Elegimos un problema Q de $\mathcal{LR}$ y una componente no entera de su solución óptima, por ejemplo $x_i = z + d$, donde $z \in \mathbb{Z}$ y $d \in (0, 1)$. A partir de Q creamos dos nuevos problemas $Q1$ y $Q2$ idénticos a Q salvo que $Q1$ contiene la nueva restricción $x_i \leq z$ y que $Q2$ contiene la nueva restricción $x_i \geq z + 1$. Agregamos $Q1$ y $Q2$ a la lista de problemas pendientes $\mathcal{LP}$ y sacamos a Q de $\mathcal{LR}$. Vamos al paso 3.

Esquema del algoritmo de ramificación y acotación

Paso 3. ACOTACIÓN. Elegimos un problema R de $\mathcal{LP}$ y lo resolvemos (sacándolo de $\mathcal{LP}$).

- Si R tiene solución óptima entera con objetivo A y $A > C_I$ entonces hacemos $C_I = A$ y nos quedamos con tal solución óptima entera como solución óptima provisional de P (desechando la solución óptima provisional anterior). Vamos al paso 4.
- Si R tiene solución óptima entera con objetivo A y $A \leq C_I$, si tiene óptima no entera con objetivo A y $A \leq C_I$, o si es no factible, entonces desechamos R. Vamos al paso 4.
- Si R tiene solución óptima no entera con objetivo A y $A > C_I$, entonces agregamos R a $\mathcal{LR}$ y le asociamos la cota $C(R) = A$. Vamos al paso 4.

Esquema del algoritmo de ramificación y acotación

Paso 4. ITERACIÓN.

- Si $\mathcal{LP} \neq \emptyset$ vamos al paso 3.
- Si $\mathcal{LP} = \emptyset$ y $\mathcal{LR} \neq \emptyset$ hacemos $C_S = \max_{Q \in \mathcal{LR}} C(Q)$.
  - Si $C_S = C_I$ entonces podemos concluir que la solución óptima provisional de P es realmente su solución óptima. FIN.
  - Si $C_S > C_I$ entonces vamos al paso 2.
- Si $\mathcal{LP} = \emptyset$ y $\mathcal{LR} = \emptyset$, podemos concluir que la solución óptima provisional de P es realmente su solución óptima. FIN.

Comentarios al algoritmo de ramificación y acotación

- Tal como lo hemos descrito está pensado para problemas puros. Para problemas binarios o mixtos debería adaptarse.
- Tal como lo hemos descrito está pensado para encontrar una solución óptima. Para encontrarlas todas, debería adaptarse.
- Es posible que concluyamos el algoritmo con la tercera opción del paso 4 sin ninguna solución óptima provisional de P. En tal caso, P es infactible.
- Existen muchas variantes del algoritmo básico. Las grandes cuestiones que diferencian las distintas variantes son:
  - ¿Cómo se elige el problema de $\mathcal{LR}$ en el paso 2 (una posibilidad es elegir el que tenga cota asociada más alta)?
  - ¿Qué componente no entera se elige en el paso 2 para ramificar?
  - ¿Es conveniente ramificar en varias variables a la vez?

Comentarios al algoritmo de ramificación y acotación

- Podemos fijar un número máximo de iteraciones. Si se alcanza tal máximo sin que el algoritmo haya terminado, nos quedaremos con la solución óptima provisional de P; el valor de C_S nos da una cota superior del valor de la función objetivo en la solución óptima de P.
- Cada problema de programación lineal se suele resolver utilizando el algoritmo del símplex ya que esto puede hacerse de manera muy eficiente a partir de las soluciones óptimas de los problemas anteriores. Esta propiedad no la comparten los métodos de punto interior.

Un ejemplo

Resuelve el siguiente problema de programación lineal entera P.

$$\begin{aligned} max \quad & 80x_1 + 45x_2 \\ s.a: \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & 12x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Su problema relajado PR es el siguiente.

$$\begin{aligned} max \quad & 80x_1 + 45x_2 \\ s.a: \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & 12x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Un ejemplo

Paso 1. La solución óptima de PR es $x =$(3.6,3.4). $\mathcal{LR} = \{PR\}$, $C(PR) = 441$, $C_I = -\infty$, $C_S = 441$.
Paso 2. Creamos los dos problemas $PR1$ y $PR2$ siguientes.

PR1

$$\begin{array}{ll} max & 80x_1 + 45x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & 12x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

PR2

$$\begin{array}{ll} max & 80x_1 + 45x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & 12x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$\mathcal{LP} = \{PR1, PR2\}$, $\mathcal{LR} = \emptyset$.

Un ejemplo

Paso 3. La solución óptima de $PR1$ es $x = (3, 4)$ con objetivo 420. Hacemos $C_I = 420$ y nos quedamos con $x = (3, 4)$ como solución óptima provisional de P. $\mathcal{LP} = \{PR2\}$.
Paso 4. Como $\mathcal{LP} = \{PR2\}$ vamos al paso 3.
Paso 3. La solución óptima de $PR2$ es $x =$(4, 2.4) con objetivo 428. Como $428 > C_I = 420$ hacemos $\mathcal{LR} = PR2$ y asociamos $C(PR2) = 428$. $\mathcal{LP} = \emptyset$.
Paso 4. Como $\mathcal{LP} = \emptyset$ y $\mathcal{LR} = \{PR2\}$ hacemos $C_S = 428$. Como $428 > C_I = 420$ vamos al paso 2.

Un ejemplo

Paso 2. Creamos los dos problemas *PR*21 y *PR*22 siguientes.

PR21

$$\begin{aligned} max \quad & 80x_1 + 45x_2 \\ s.a: \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & 12x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

PR22

$$\begin{aligned} max \quad & 80x_1 + 45x_2 \\ s.a: \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & 12x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\mathcal{LP} = \{PR21, PR22\}$, $\mathcal{LR} = \emptyset$.

Un ejemplo

Paso 3. La solución óptima de $PR21$ es $x = (4.16{,}2)$ con objetivo 422.8. Como 422.8$>C_I = 420$ hacemos $\mathcal{LR} = PR21$ y asociamos $C(PR2) =$422.8. $\mathcal{LP} = PR22$.
Paso 4. Como $\mathcal{LP} = \{PR22\}$ vamos al paso 3.
Paso 3. El problema $PR22$ es infactible. $\mathcal{LP} = \emptyset$.
Paso 4. Como $\mathcal{LP} = \emptyset$ y $\mathcal{LR} = \{PR21\}$ hacemos $C_S =$422.8. Como 422.8$> C_I = 420$ vamos al paso 2.

Un ejemplo

Paso 2. Creamos los dos problemas $PR211$ y $PR212$ siguientes.

PR211

$$\begin{array}{ll} max & 80x_1 + 45x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & 12x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ & x_1 = 4 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

PR212

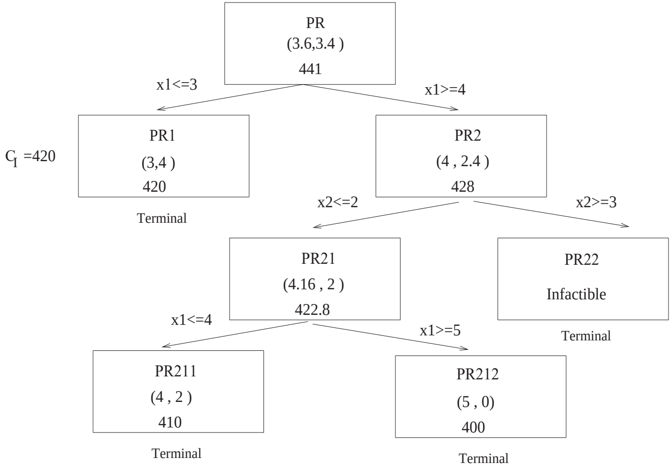
$$\begin{array}{ll} max & 80x_1 + 45x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & 12x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ & x_1 \geq 5 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$\mathcal{LP} = \{PR211, PR212\}$, $\mathcal{LR} = \emptyset$.

Un ejemplo

Paso 3. La solución óptima de $PR211$ es $x = (4, 2)$ con objetivo 410. Como $410 < C_I = 420$ hacemos $\mathcal{LP} = \{PR212\}$.
Paso 4. Como $\mathcal{LP} = \{PR212\}$ vamos al paso 3.
Paso 3. La solución óptima de $PR212$ es $x = (5, 0)$ con objetivo 400. Como $400 < C_I = 420$ hacemos $\mathcal{LR} = \emptyset$.
Paso 4. Como $\mathcal{LP} = \emptyset$ y $\mathcal{LR} = \emptyset$ podemos concluir que $x = (3, 4)$ es la solución óptima de P. FIN.

Esquema final del ejemplo



Bibliografía

1. Hillier, F.S., Lieberman, G.J. (2010). Introducción a la Investigación de Operaciones. McGraw-Hill.
2. Schrijver, A. (1998) Theory of Linear and Integer Programming. Wiley.