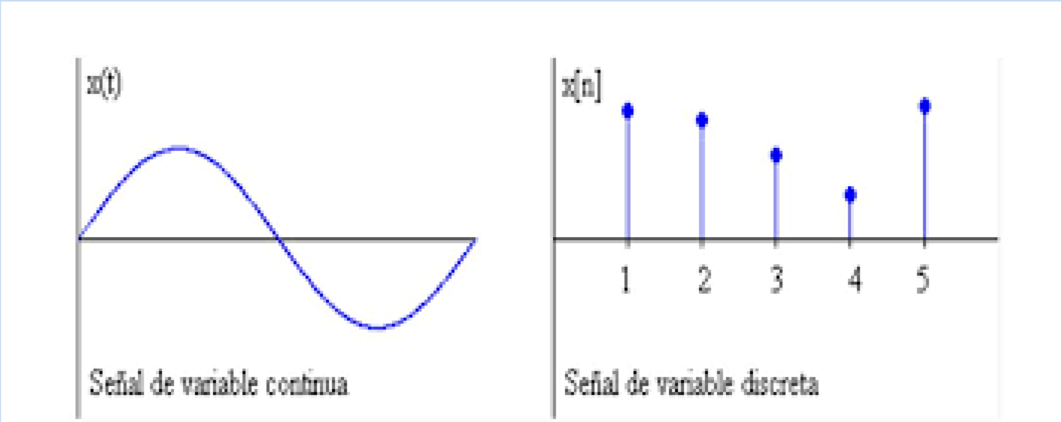
TEMA 1 – PARTE 5:

Representación de señales en el dominio del tiempo



¿Qué veremos?

12. Convolución de señales continuas (cont.)

13. Sistemas

14. Sistemas LTI

12

Convolución de señales continuas (cont.)

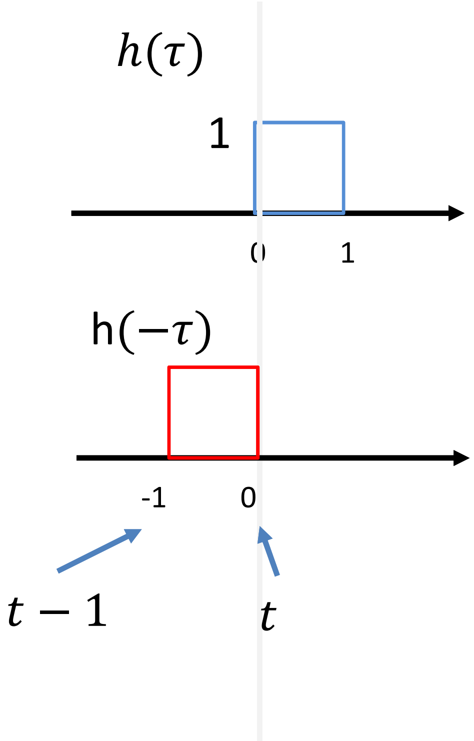
Convolución entre señales continuas

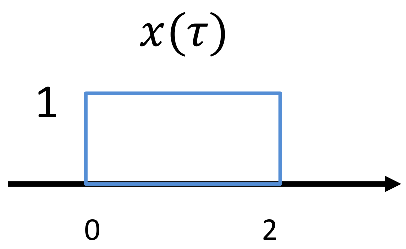
- Notación: $y(t) = x(t) * h(t)$
- Expresión: $$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
- Es necesario invertir la señal $h(t)$ para crear $h(-\tau)$ y desplazarla.
- En cada desplazamiento, se calculará la multiplicación con la señal $x(t)$ y el área (integral). Es decir, para cada valor de t se obtiene un único valor de $y(t)$.
- Es una operación conmutativa $y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

Ejemplo 5

Convolución:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



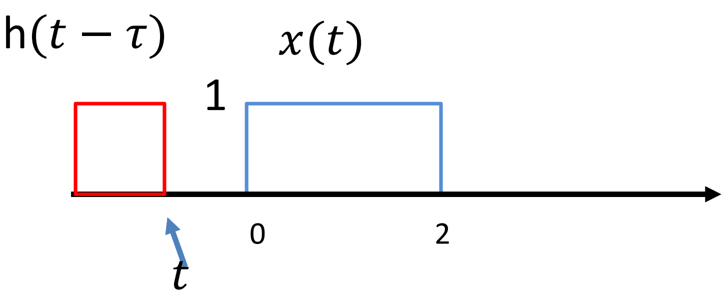


Reescribimos $h(t)$ como $h(\tau)$ y la invertimos para crear $h(-\tau)$

El punto que antes estaba en 0 es el punto que ahora está en t.

Ejemplo 5 (cont.)

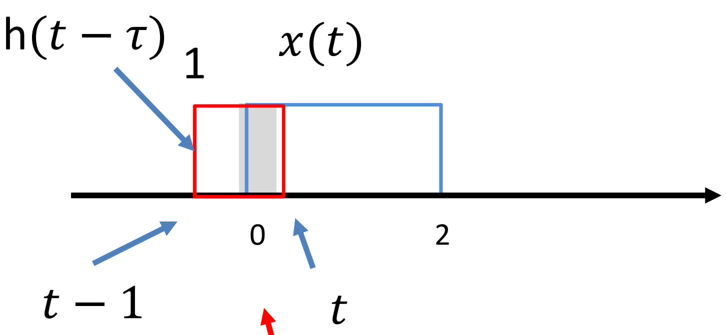
$\boldsymbol{t < 0}$



No hay solapamiento para $t < 0$.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$$

$\boldsymbol{0 < t <???}$



Para $t = 0$ empieza a haber solapamiento "creciente" hasta que $t - 1 = 0$, es decir $t = 1$.

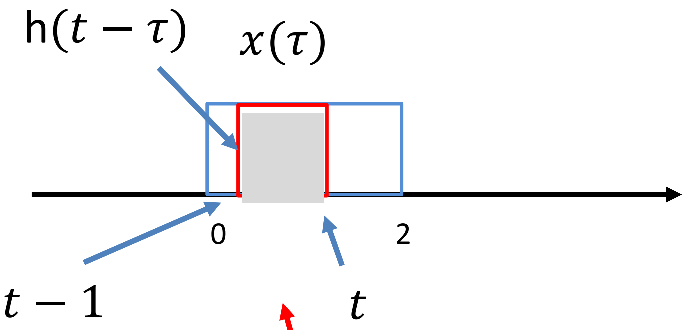
Observamos que en $0 < t < 1$, tenemos

$$y(t) = t$$

La parte solapada empieza en 0 hasta t

Ejemplo 5 (cont.)

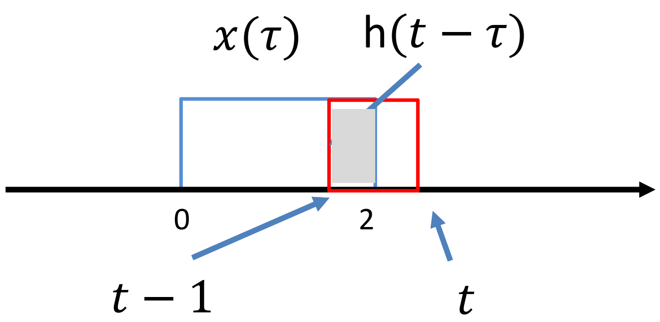
$\mathbf{1} < \boldsymbol{t} < ???$



Observamos que en $1 < t < 2$, tenemos
$y(t) = 1$

Siempre se solapa un rectángulo de base 1 y altura 1.

$\mathbf{2} < \boldsymbol{t} < ???$



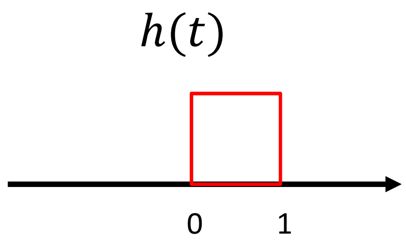
Observamos que el solapamiento es decreciente desde $t = 2$ hasta $t - 1 = 2$ $(i.e., t = 3)$.

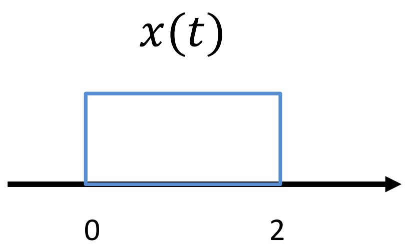
Para $2 < t < 3$, tenemos

$$y(t) = 2 - (t-1) = 3 - t$$

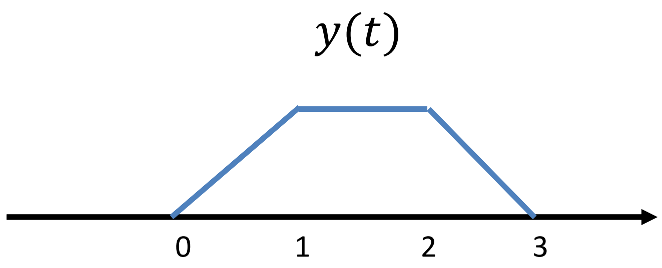
Ejemplo 5 (resultado)

Señales originales:



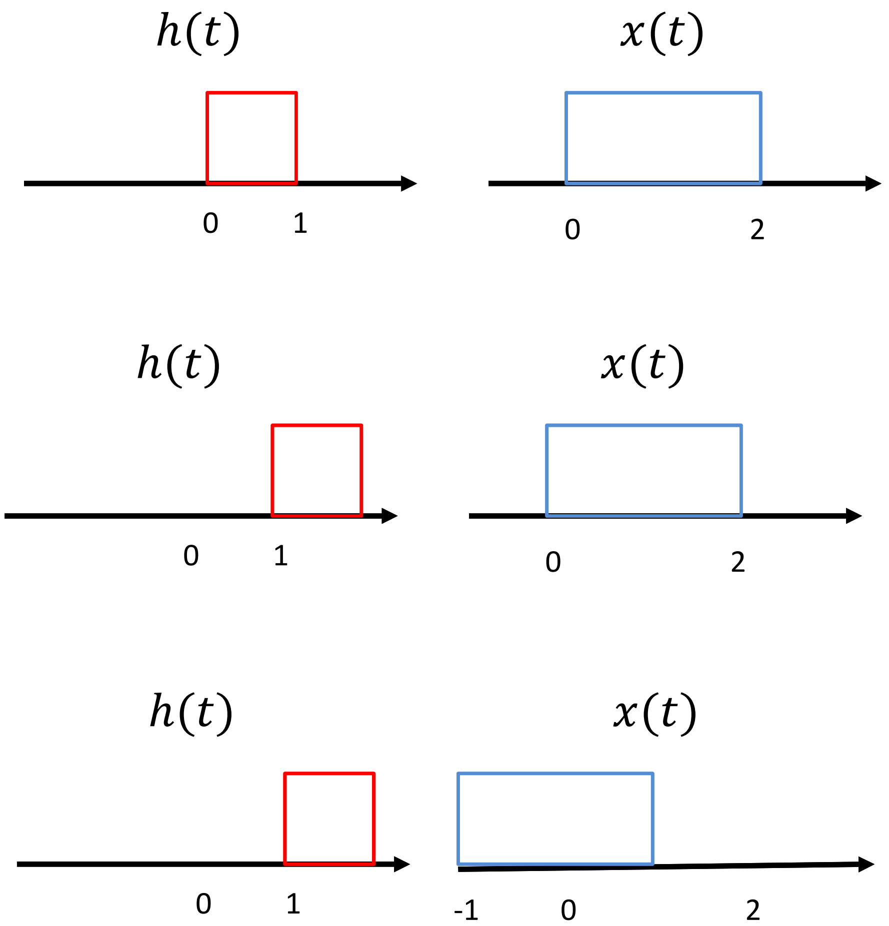


Resultado de la integral de convolución:

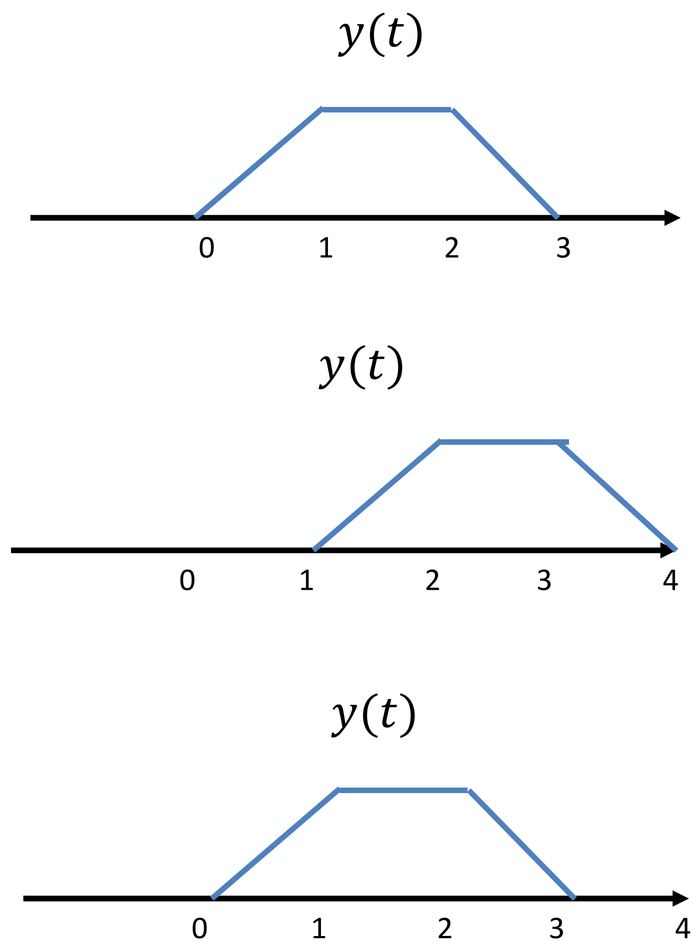


Ejemplo 6

Señales originales

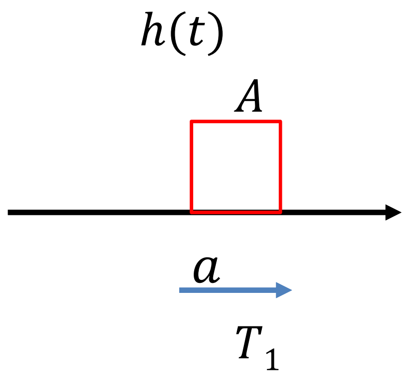


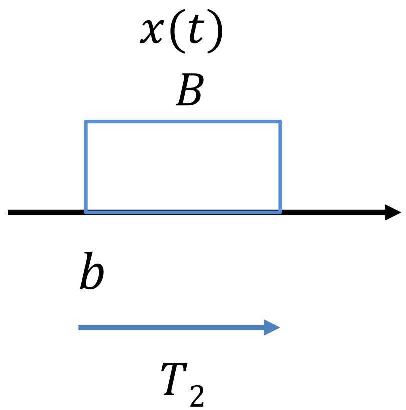
Convolución:



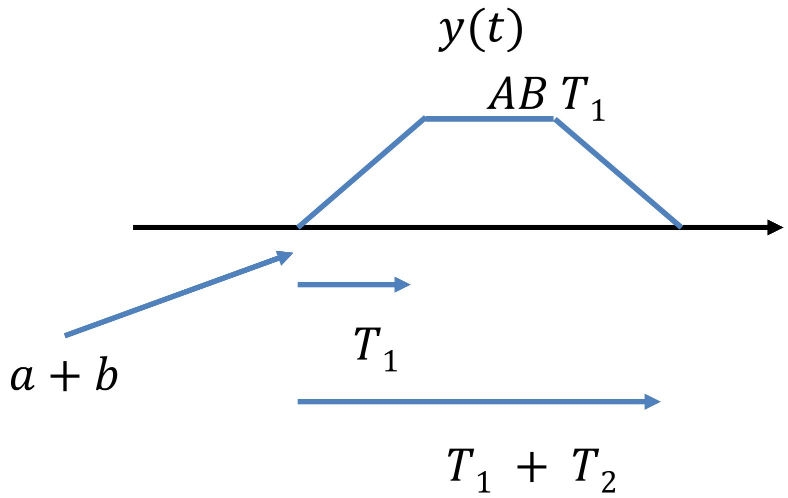
Trucos

Veamos algunos "trucos" para hacer la convolución de señales rectangulares con $T_1 < T_2$.

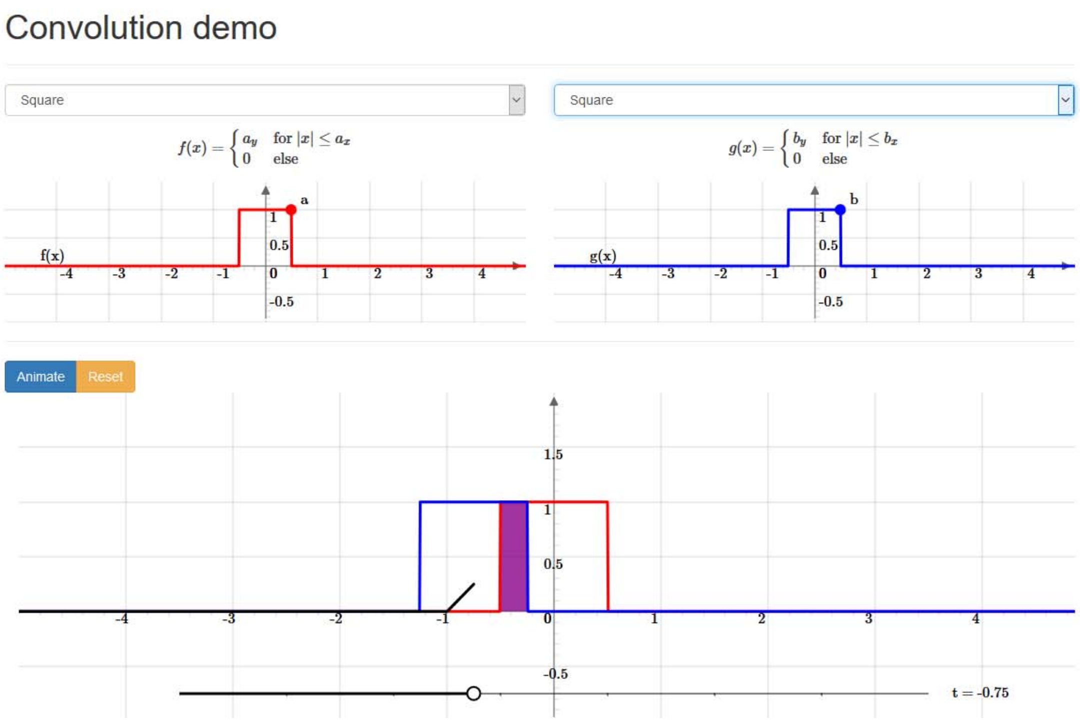




Resultado de la integral de convolución:

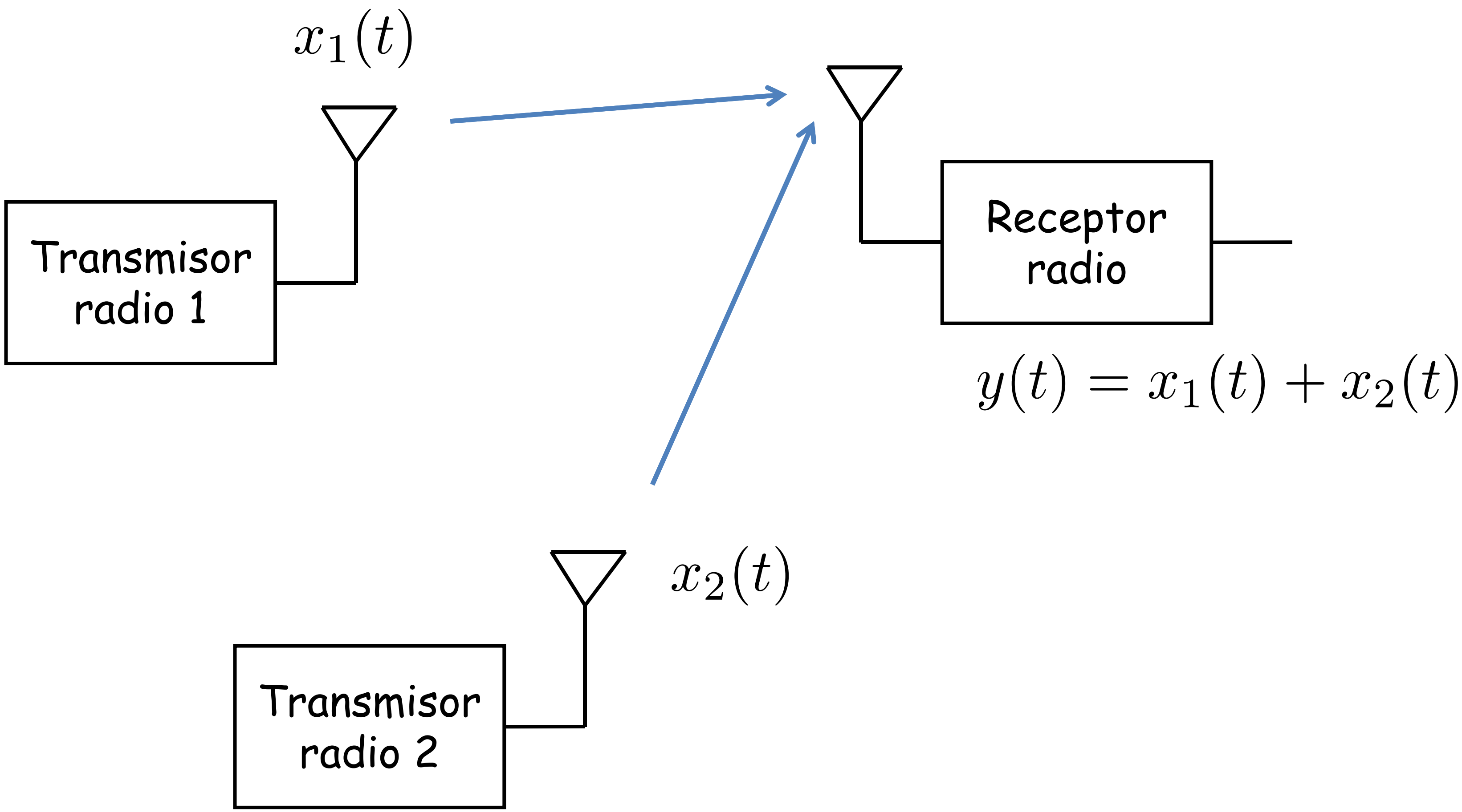


Demo de convolución continua

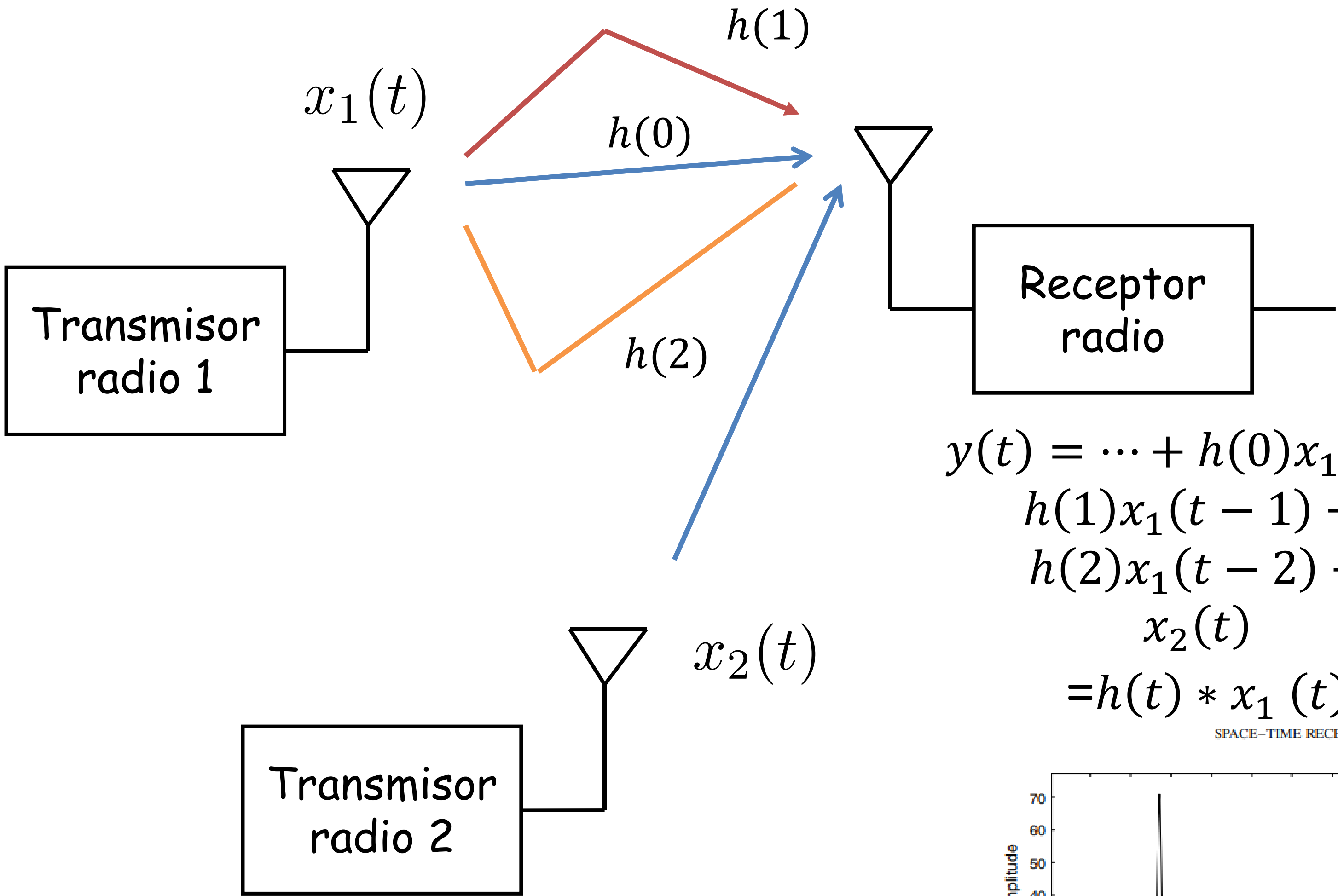


https://phiresky.github.io/convolution-demo/

Vista directa (suma de señales)

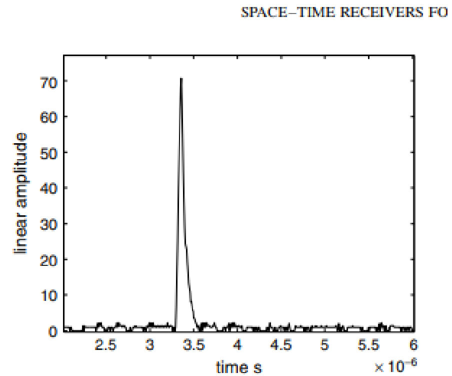


Multitrayecto (convolución)



$$y(t) = \cdots + h(0)x_1(t) + h(1)x_1(t-1) + h(2)x_1(t-2) + x_2(t)$$

$$= h(t) * x_1(t) + x_2(t)$$

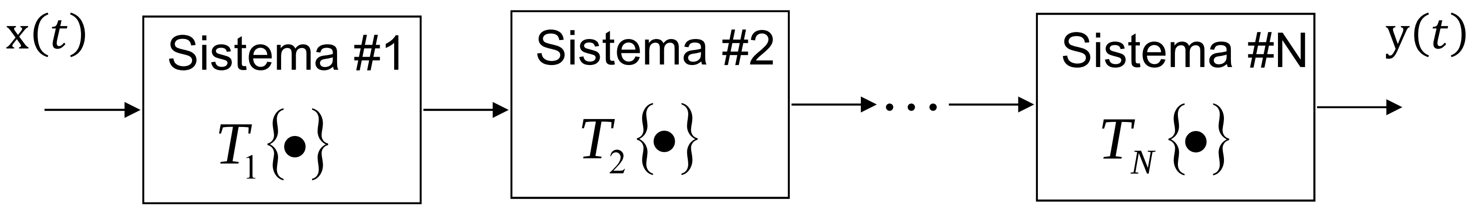


13

Sistemas

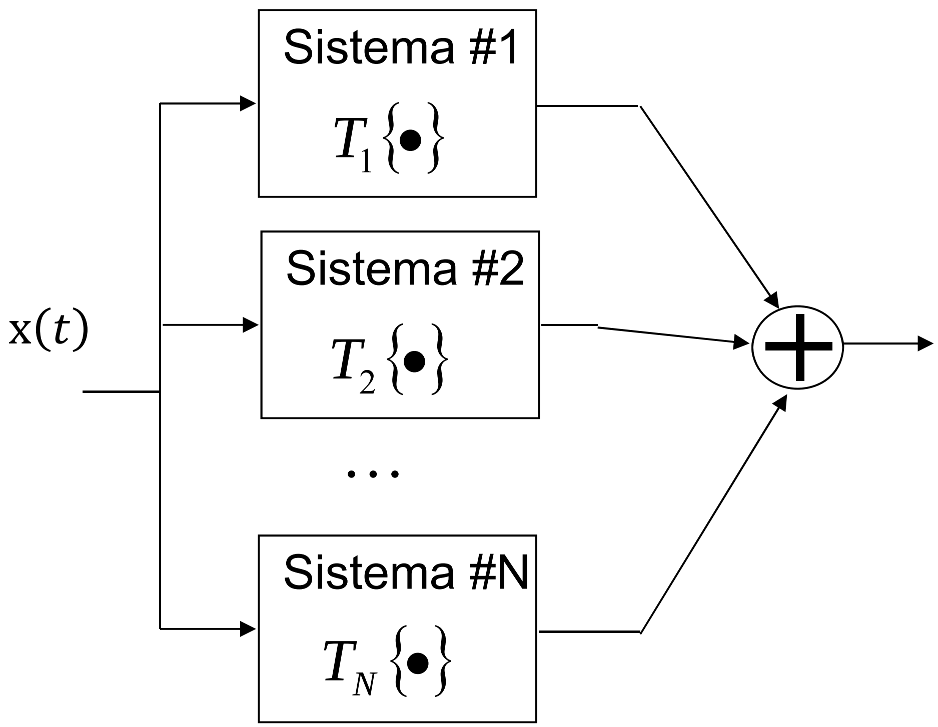
Sistemas

Serie



$$y(t) = T_N[\ldots T_2[T_1[x(t)]]]$$

Paralelo

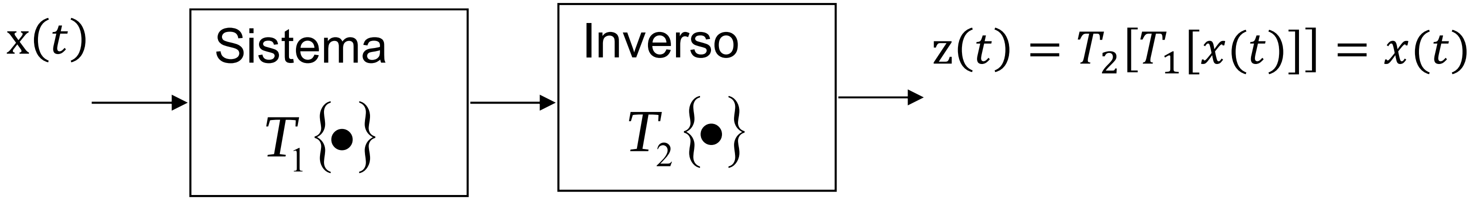


$$y(t) = T_N[x(t)] + \cdots + T_1[x(t)]$$

Sistema invertible

- Diversas definiciones:
  - “Un sistema es invertible si al observar la salida se puede determinar entrada”
  - “… cuando distintas entradas conducen a distintas salidas”

- Si un sistema es invertible, existe un sistema – que denominaremos inverso- tal que conectado en serie produce el sistema identidad.

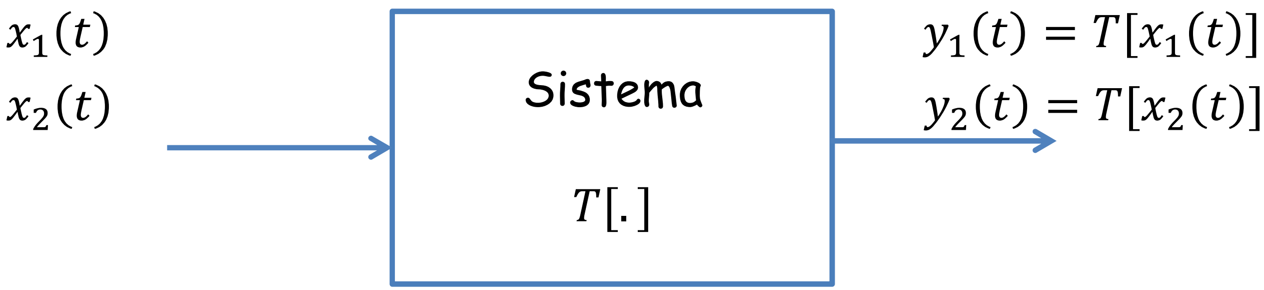


Ejemplos

- Ejemplo 1: $y(t) = x(t-1)$ $\longrightarrow$ $z(t) = y(t+1)$
- Ejemplo 2: $y(t) = x(t)^2$ $\longrightarrow$ No hay inverso porque la salida es la misma para $x(t)$ y para $-x(t)$
- Ejemplo 3: $y(t) = \cos(x(t))$ $\longrightarrow$ No hay inverso porque la salida es la misma para $x(t)$ y para $x(t) + 2\pi$

Linealidad

- Un sistema es lineal si ante una combinación lineal de señales a su entrada, produce una combinación lineal de las salidas de cada señal (con los mismos pesos).



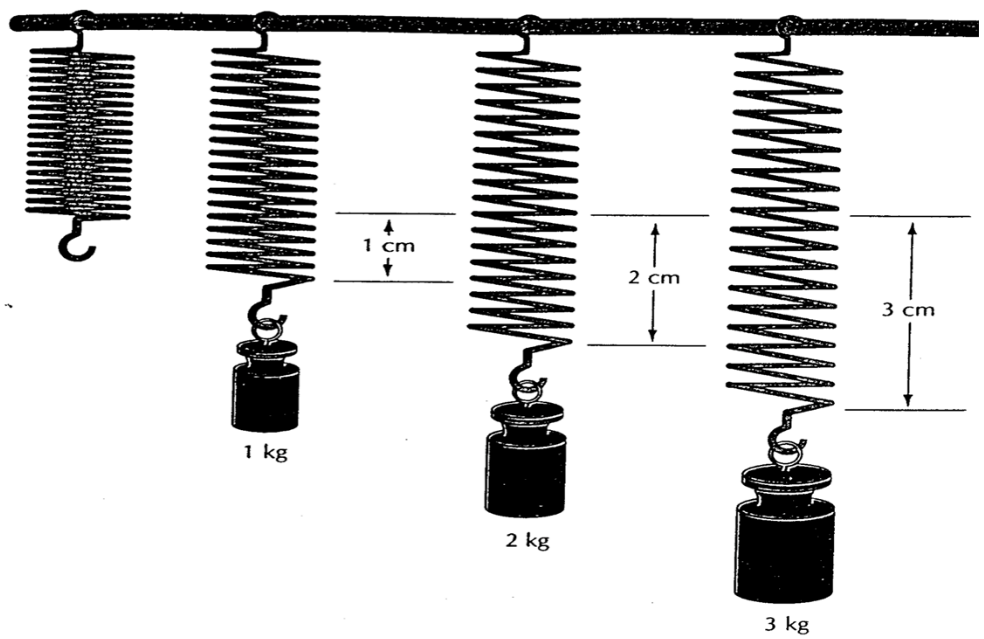
$$x(t) = \sum_k a_k \, x_k(t)$$

$$y(n) = T\left[\sum_k a_k \, x_k(t)\right] = \sum_k a_k \, y_k(t)$$

Ejemplo de sistema lineal

- Ley de Hooke: el alargamiento de un muelle es directamente proporcional a la fuerza aplicada
- $x(\mathrm{t})$ es la fuerza aplicada
- $y(\mathrm{t})$ es el alargamiento del muelle.

$$y(t) = k\,x(t)$$



Ejemplo de sistema lineal (cont.)

$$y(t) = k\,x(t)$$

1 Determinamos la salida para cada señal y la combinación lineal de las salidas

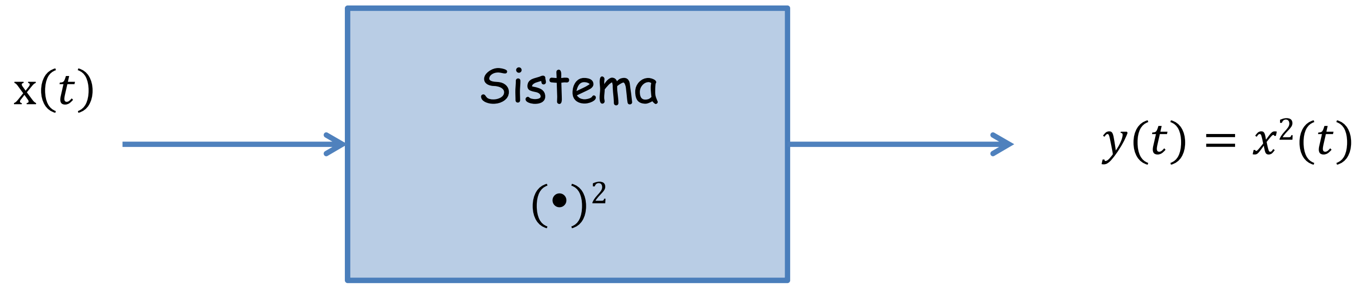
$$y_l(t) = kx_l(t) \quad \longrightarrow \quad y(t) = \sum_l a_l y_l(t) = \sum_l a_l k x_l(t)$$

2 Determinamos la salida para una combinación lineal de la entrada.

$$x(t) = \sum_l a_l\, x_l(t) \quad \longrightarrow \quad y(n) = T\left[\sum_l a_l\, x_l(t)\right] = k \sum_l a_l\, x_l(t)$$

Como son iguales, el sistema es lineal.

Ejemplo de sistema no lineal



1 Determinamos la salida para cada señal y la combinación lineal de las salidas

$$y_l(t) = \left(x_l(t)\right)^2 \longrightarrow y(t) = \sum_l a_l y_l(t) = \sum_l a_l \left(x_l(t)\right)^2$$

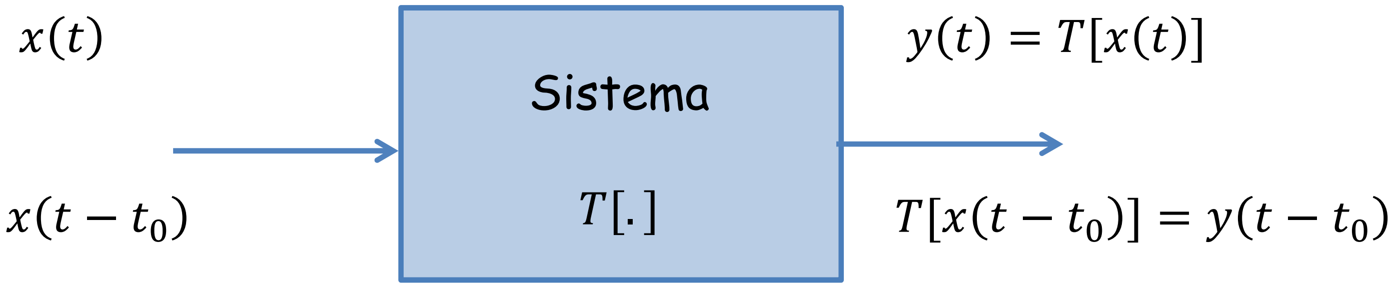
2 Determinamos la salida para una combinación lineal de la entrada.

$$x(t) = \sum_l a_l\, x_l(t) \longrightarrow y(n) = T\left[\sum_l a_l\, x_l(t)\right] = \left(\sum_l a_l\, x_l(t)\right)^2$$

Como no son iguales, el sistema no es lineal.

Invarianza en tiempo

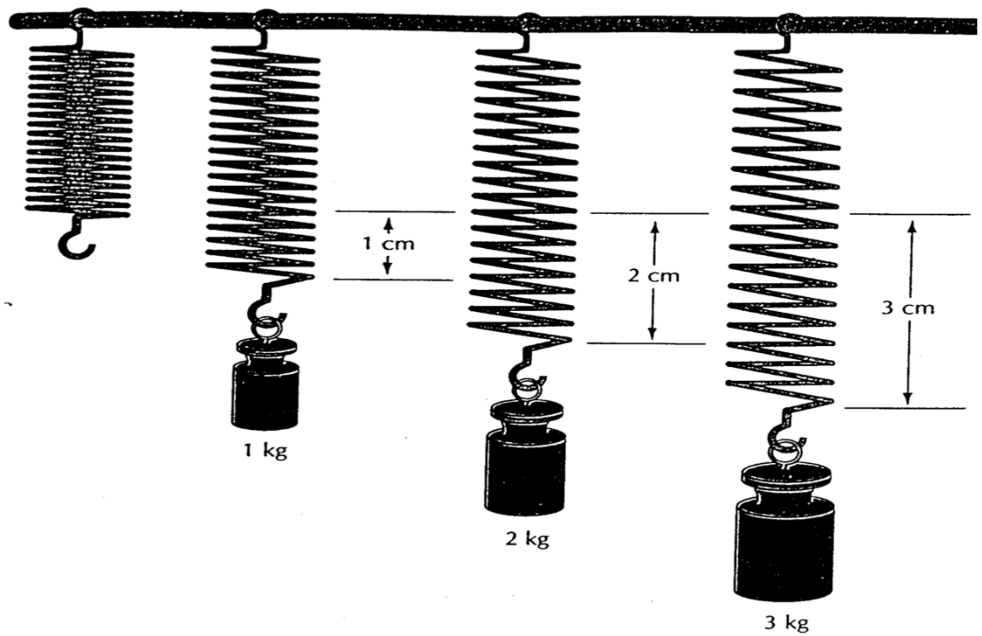
- Un sistema es invariante en tiempo si un desplazamiento en la entrada produce el mismo desplazamiento en la salida.



Ejemplo de sistema invariante en tiempo

- Ley de Hooke: el alargamiento de un muelle es directamente proporcional a la fuerza aplicada
- $x(t)$ es la fuerza aplicada
- $y(t)$ es el alargamiento del muelle

$$y(t) = k\, x(t)$$



1 Determinamos la salida para una señal y la desplazamos en tiempo

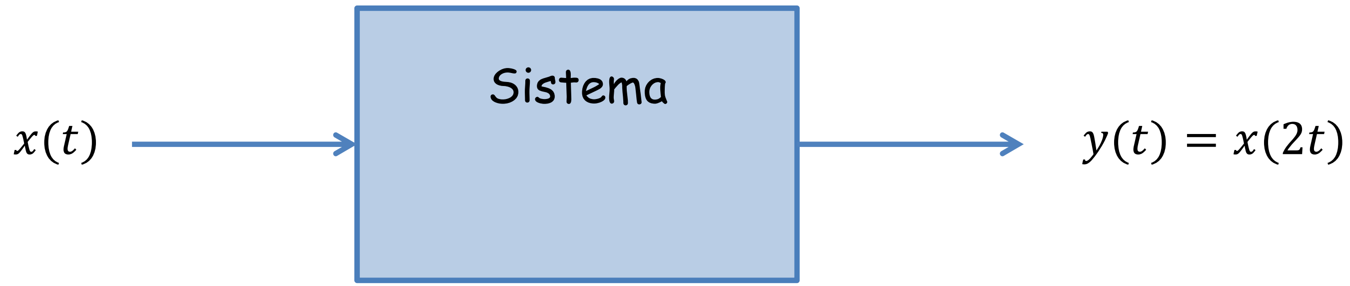
$$x(t) \rightarrow y(t) = k\, x(t) \rightarrow y(t - t_o) = k\, x(t - t_o)$$

2 Determinamos la salida para una señal desplazada en tiempo

$$x(t - t_o) \rightarrow T[x(t - t_o)] = k\, x(t - t_o)$$

Como son iguales, el sistema es invariante en tiempo.

Ejemplo de sistema no invariante en tiempo



1 Determinamos la salida para una señal y la desplazamos en tiempo

$$x(t) \;\rightarrow\; y(t) = x(2t) \rightarrow y(t - t_o) = x(2t - t_o)$$

2 Determinamos la salida para una señal desplazada en tiempo

$$x(t - t_o) \;\rightarrow T[x(t - t_o)] = x(2(t - t_o))$$

Como no son iguales, el sistema no es invariante en tiempo.

Causalidad

- Un sistema es causal o "físicamente realizable" cuando la salida en un instante de tiempo depende ÚNICAMENTE de valores de la entrada en instantes anteriores.

- Ejemplo 1: $y(t) = x(t-1)$ Causal

- Ejemplo 2: $y(t) = x(t+1)$ No causal

Causalidad

- **Los sistemas no causales son anticipativos porque requieren conocer el futuro.**

1.2 Classification of Systems 79

Noncausal systems are realizable with time delay!

B.P. Lathi, “Linear Systems and Signals”, Berkeley-Cambridge Press, 1992

Estabilidad

- Un sistema es estable si ante una entrada acotada en amplitud, produce una salida acotada en amplitud.

- Ejemplo: $y(\mathrm{t}) = e^{x(\mathrm{t})}$

  Es estable porque si $x(\mathrm{t}) < \infty$ obtenemos $\mathrm{y}(\mathrm{t}) < \infty$

- Ejemplo: $y(n) = \int_{-\infty}^{t} x(\mathrm{t})\, dt$

  No es estable. Por ejemplo, si $x(t) = u(t)$ obtenemos $y(t) = r(t)$

14

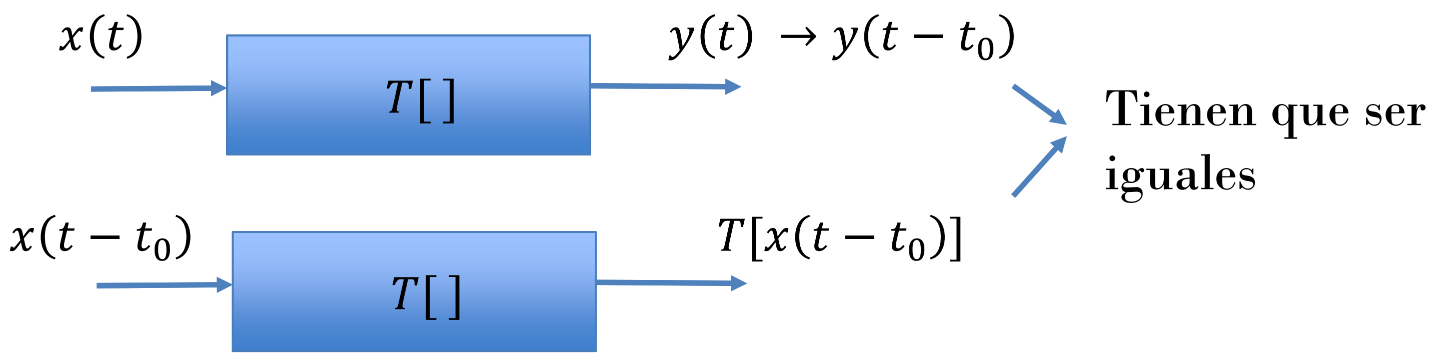
Sistemas LTI

Sistemas LTI

- Muchos sistemas son Lineales e Invariantes al Tiempo (LTI).

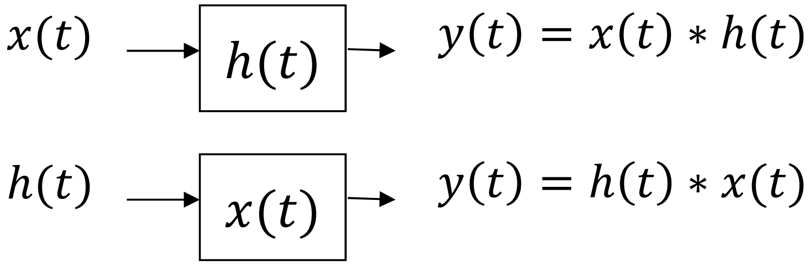
- Lineal:

- Invariante en tiempo:

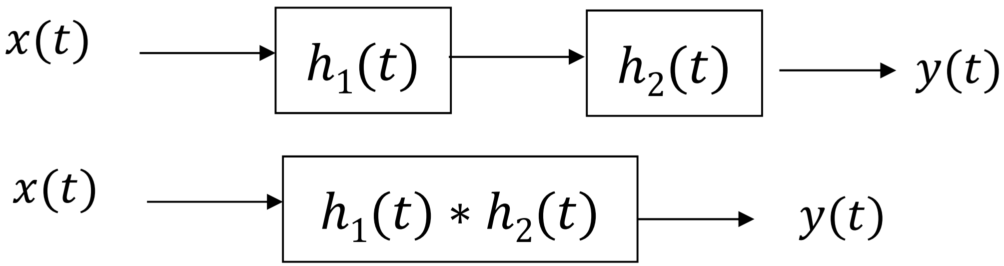


Conexiones de sistemas LTI

- **Conmutativa:** $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$



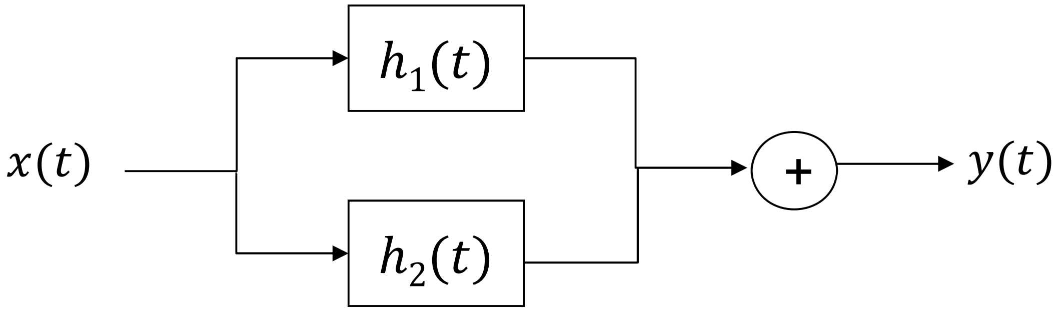
- **Asociativa:** $(x(t) * h_1(t)) * h_2(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$

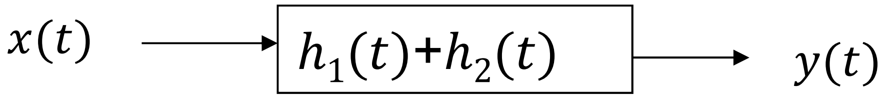


Conexiones de sistemas LTI

- **Distributiva respecto a la suma:**

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$





Respuesta al impulso de una habitación

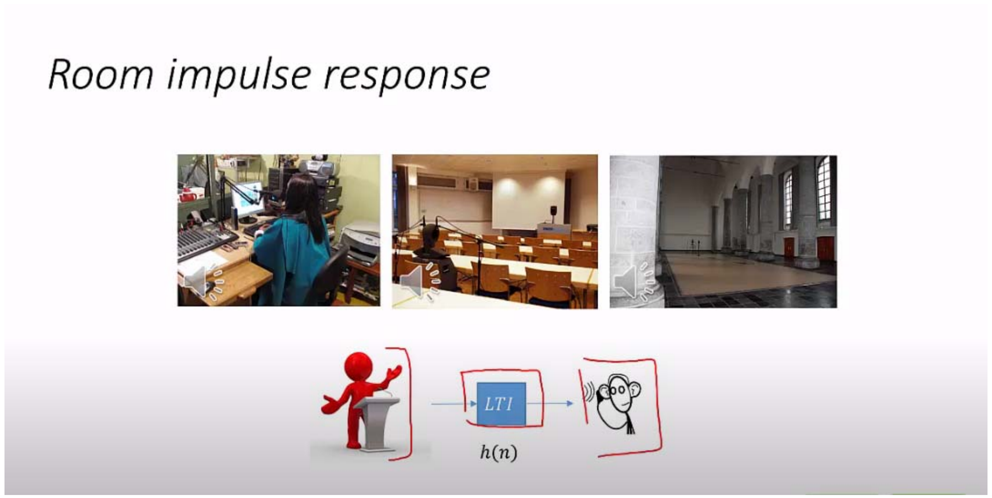
- Para saber cómo se comportan, se pone a la entrada $\delta(t)$ y se "mide" la salida $h(t)$.

- $h(t)$ es la respuesta al impulso.

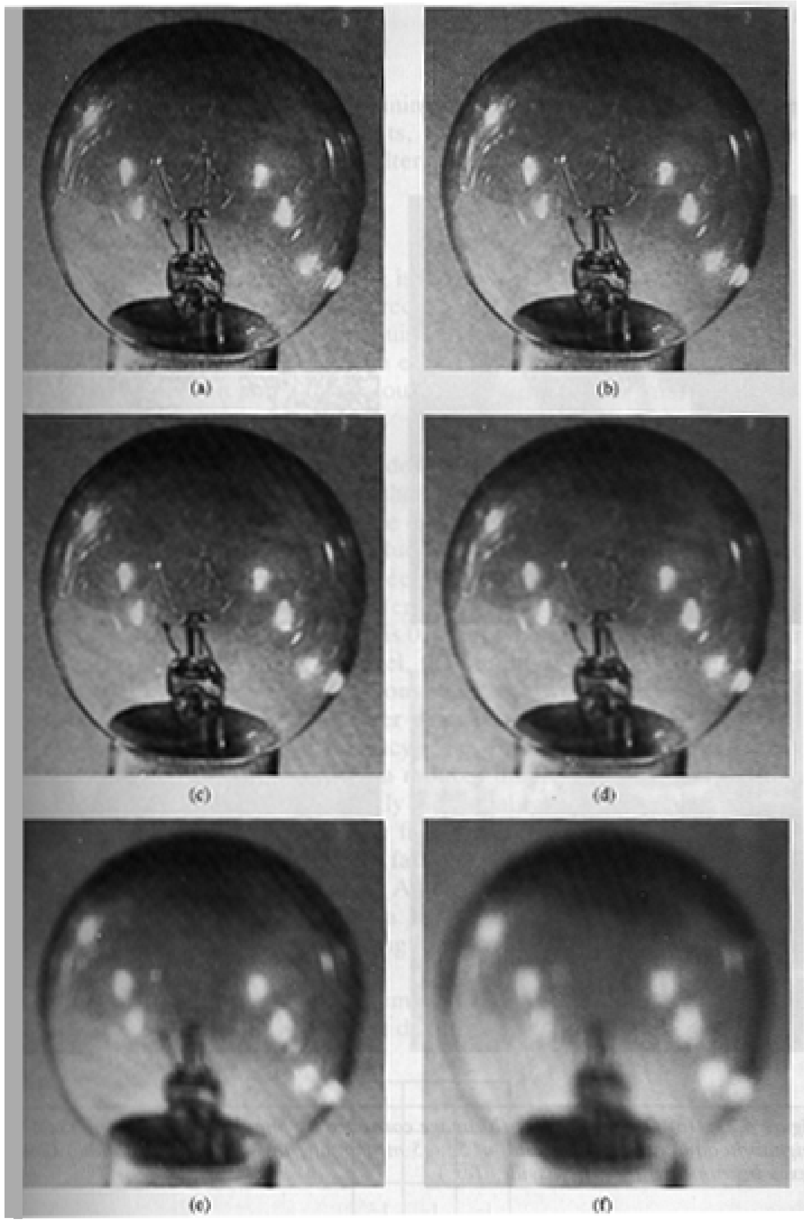
$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

- Para cualquier entrada $x(t)$ la salida es $y(t) = x(t) * h(t)$

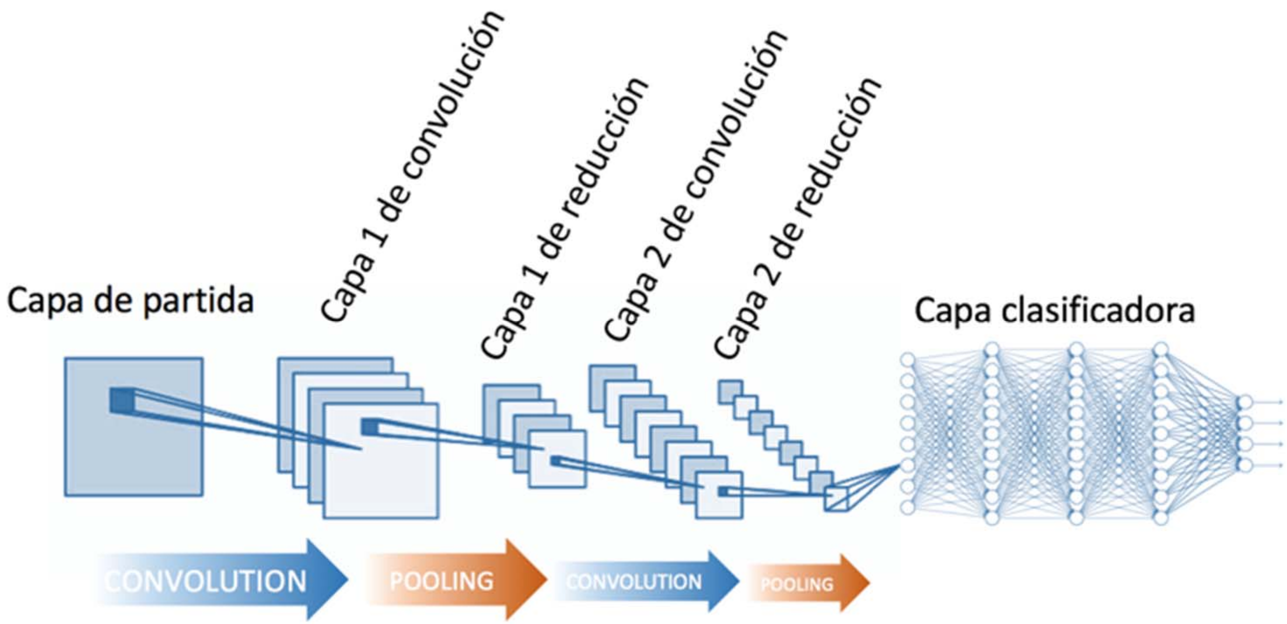
https://www.youtube.com/watch?v=9gTYDJpiBzo

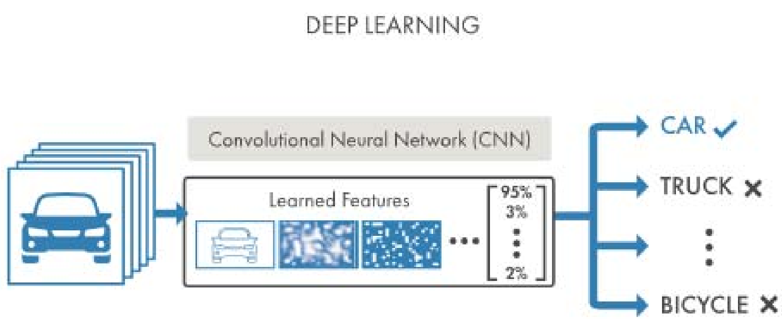


Retoque de imágenes



Redes neuronales convolucionales





TEMA 1

Representación de señales en el dominio del tiempo