Ejercicios Tema 1. Lógica y Álgebras de Boole

Objetivos: Al terminar el tema el alumno debe ser capaz de:

1. Saber si un enunciado es o no una proposición.
2. Escribe en lenguaje proposicional un enunciado dado en lenguaje natural y, recíprocamente, pasar a lenguaje natural un enunciado dado en lenguaje de proposiciones.
3. Conocer los operadores lógicos ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) y sus propiedades.
4. Reconocer y aplicar las equivalencias e implicaciones lógicas en distintos contextos.
5. Construir nuevas expresiones bien formadas a partir otras expresiones bien formadas y, dadas dos expresiones bien formadas, saber demostrar si son o no equivalentes.
6. Comprobar si un conjunto de proposiciones es o no consistente (satisfacible).
7. Demostrar si un argumento es válido o no.
8. Formalizar frases del lenguaje natural en lógica de predicados y viceversa.
9. Demostrar si un argumento en lógica de predicados es válido.
10. Aplicar el principio de inducción para demostrar propiedades definidas sobre los números naturales.
11. Conocer el concepto de Álgebra de Boole y sus propiedades y aplicar dichas propiedades para simplificar expresiones booleanas.
12. Obtener una función booleana a partir de su tabla de valores y, recíprocamente, calcular la tabla de valores de una función booleana dada.
13. Obtener formas normales conjuntivas y formas normales disyuntivas de una función booleana.
14. Aplicar el método de tablas de Karnaugh a la minimización de funciones booleanas.

Ejercicios:

1. Sean h, f, c y d las proposiciones siguientes

h: Salgo hoy
c: Voy al concierto
f: Voy a la fiesta de Juan
d: Duermo en casa

Expresa los enunciados siguientes usando h, f, c y d y conectivas lógicas:

i) Salgo hoy, pero no voy al concierto.
ii) Si salgo hoy, voy al concierto pero no a la fiesta de Juan.
iii) Salgo hoy si, y sólo si, voy a la fiesta de Juan o al concierto.
iv) Salgo hoy sólo si voy a la fiesta de Juan.
v) Duermo en casa si no salgo hoy.
vi) Si no duermo en casa, entonces voy al concierto sólo si no voy a la fiesta de Juan.

2. Sean p, q y r las proposiciones siguientes:
p: Me quedo a trabajar en casa
q: Entrego las prácticas a tiempo
r: La web de la asignatura funciona
Expresa los enunciados siguientes usando p, q y r y conectivas lógicas:

i) La web de la asignatura funciona pero me quedo a trabajar en casa y no entrego las prácticas a tiempo.
ii) Si la web de la asignatura funciona y entrego las prácticas a tiempo, no me quedo a trabajar en casa.
iii) Si la web de la asignatura no funciona, entonces no me quedo a trabajar en casa pero entrego las prácticas a tiempo.
iv) Entrego las prácticas a tiempo sólo si me quedo a trabajar en casa.
v) Para que entregue las prácticas a tiempo no es suficiente con que la web de la asignatura funcione.
vi) Para que entregue las prácticas a tiempo es necesario, pero no suficiente, que la web de la asignatura funcione y me quede a trabajar en casa.

3. Sabiendo que el valor de la proposición $p \to q$ es falso, determina el valor de $(\neg p \vee \neg q) \to q$. Sabiendo que el valor de la proposición $p \to q$ es verdadero, ¿se puede determinar el valor de $\neg p \vee (p \leftrightarrow q)$? En caso afirmativo, determina dicho valor.

4. Construye la tabla de verdad para cada una de las proposiciones compuestas siguientes. Indica, para cada una de ellas, si es tautología, contradicción o contingencia.

i) $\neg p \vee q \to (r \to \neg p)$

ii) $(p \to q) \to (q \to p)$

iii) $(p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$

iv) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

5. Sean p, q y r proposiciones primitivas. Verifica las equivalencias lógicas:

i) $[p \to (q \vee r)] \equiv [\neg r \to (p \to q)]$

ii) $[(p \vee q) \to r] \equiv [(p \to r) \wedge (q \to r)]$

6. Halla una fómula equivalente a $p \to (q \vee \neg r)$ en la que sólo aparezcan las conectivas $\neg$ y $\wedge$.
Halla una fómula equivalente a $(\neg p \wedge q) \to r$ en la que sólo aparezcan las conectivas $\neg$ y $\vee$.

7. Utilizando tablas semánticas, determina si los siguientes conjuntos son satisfacibles o no. En los casos que exista, halla un modelo.

i) $\{r \wedge t \to \neg p,\ \neg p \to q,\ t \vee \neg q,\ r\}$

ii) $\{\neg p \wedge q,\ ((r \to p) \leftrightarrow \neg q) \vee \neg r,\ \neg(r \vee \neg p)\}$

iii) $\{\neg q \to \neg r,\ (\neg q \to p) \to q,\ \neg r \wedge p,\ s \to \neg q\}$

8. Sea $\mathcal{P}$ la fórmula $(r \to q \wedge \neg p) \to (q \to \neg r) \wedge p$. Razona si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: *Hay un contraejemplo para $\mathcal{P}$ en el que p es verdadera.*

9. Utilizando tablas semánticas (árboles) comprueba que el siguiente conjunto de afirmaciones es inconsistente.
Si Marta no arregla su portátil, no terminará las prácticas para el viernes.
Si Marta no termina las prácticas para el viernes, no aprobará la asignatura.
Si Marta estudia después de clase, terminará las prácticas para el viernes.
Marta no arregla su portátil pero sí estudia después de clase.

10. Sabiendo que el conjunto de proposiciones $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ es inconsistente, estudia si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones:

i) La proposición $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4$ tiene algún modelo.

ii) En la tabla de verdad de la proposición $p_1 \wedge p_2 \to \neg(p_3 \wedge p_4)$ sólo aparecen unos.

iii) El argumento $\{p_1, p_2, p_3\} \models \neg p_4$ es válido.

11. Demuestra, medianta una tabla semántica, que el conjunto S es consistente.

$$S = \{(q \vee \neg s) \to r,\ \neg q \to r,\ \neg p \to \neg s,\ r \to s\}$$

Utiliza el árbol del apartado anterior para decidir cuál de las conclusiones $C : p \to r$ o $C : q \to \neg r$ hace que el argumento $S \models C$ sea válido.

12. Utilizando tablas semánticas, demuestra si los argumentos siguientes son verdaderos.

i) $\{(p \to q) \wedge (r \to s),\ q \wedge s \to t,\ \neg t\} \models \neg p \vee \neg r$

ii) $\{p \to q,\ q \wedge s \to t,\ \neg t\} \models \neg p \vee \neg r$

13. Formaliza el argumento siguiente y comprueba su posible validez por medio de un árbol semántico.

Para que el coche marche suavemente es condición necesaria y suficiente que esté a punto. Si el coche está a punto, su precio de reventa es más alto que la media y su motor no está excesivamente deteriorado. Por lo tanto, si el coche marcha suavemente y su motor no está excesivamente deteriorado, entonces su precio de reventa es más alto que la media.

14. Considera los predicados:

$P(x) : (x-3)(x+5) = 0 \qquad Q(x) : x \text{ es impar} \qquad R(x) : x > 0.$

En el universo de los números enteros, determina la verdad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cuando sea falsa, da un contraejemplo.

i) $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$

ii) $\exists x\ (P(x) \to Q(x))$

iii) $\exists x\ (P(x) \to Q(x) \wedge R(x))$

iv) $\forall x\ (P(x) \vee Q(x) \to R(x))$

15. Se considera como dominio de las variables x e y el conjunto formado por todos los componentes de la coral *Los ruiseñores.* Se definen los siguientes predicados:

$S(x)$: "x es tenor" $\qquad E(x,y)$: "x ensaya con y"

$A(x)$: "x está afónico" $\qquad D(x)$: "x es director"

Sabiendo que Pepe, Juan y Paco forman parte de la coral, escribe en lenguaje formal cada uno de los enunciados siguientes:

- En la coral hay un componente que es tenor y no ensaya con Juan.
- Paco es director y ensaya con todos los tenores que no están afónicos.
- Pepe es tenor y está afónico, sin embargo ensaya con todos los componentes de la coral.

16. Para el universo de todas las personas de un país, se consideran los siguientes predicados:

$P(x)$: "x es policía" $\qquad L(x)$: "x es ladrón" $\qquad C(x,y)$: "x encarcela a y"

i) Escribe los siguientes enunciados en forma simbólica:

- Toda persona o es un ladrón o es un policía.
- Todos los policías encarcelan a algún ladrón.
- Hay un ladrón que encarcela a todas las personas.
- Hay un policía que no encarcela a ningún ladrón.

ii) Escribe la negación de las proposiciones anteriores en forma simbólica y en lenguaje natural.

17. Considera los predicados:
$E(x)$: "x padece una enfermedad", $P(x)$: "x se preocupa por su enfermedad", $A(x)$: "x se automedica" y $D(x)$: "x es deportista". Formaliza el argumento siguiente y demuéstralo mediante una tabla semántica.
Quien padece una enfermedad, no se preocupa por ella o se automedica. Luis es deportista, no se automedica pero padece una enfermedad. Por lo tanto, hay deportistas que no se preocupan por la enfermedad que padecen.

18. Consideremos el argumento "*Ninguna persona insegura es psicólogo. Todos los estudiosos de la conducta son psicólogos. Por lo tanto, ningún estudioso de la conducta es una persona insegura*". Definimos, sobre el universo de las personas, los predicados siguientes:
$I(x)$: "x es insegura" $C(x)$: "x es estudioso de la conducta"
$P(x)$: "x es psicólogo"
Formaliza el argumento anterior y estudia si el argumento es válido o no utilizando una tabla semántica.

19. Consideremos el argumento "*Algunos animales tienen plumas y tienen pico. Algunos animales tiene pico y no vuelan. Por lo tanto, algunos animales tienen plumas y no vuelan*". Definimos, sobre el universo de los animales, los predicados siguientes:
$P(x)$: "x tiene plumas" $C(x)$: "x tiene pico" $V(x)$: "x vuela"
Formaliza el argumento anterior. Estudia si el argumento es válido o no utilizando una tabla semántica.

20. Utilizando tablas semánticas, prueba que el siguiente argumento es válido:

$$\{\forall x\ (P(x) \to Q(x)),\ \forall y\ (Q(y) \to R(y))\} \models (\forall x\ P(x)) \to (\forall x\ R(x)).$$

21. Demuestra que

i) $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$, para cualquier natural n,

ii) $4^n - 3n - 1$ es múltiplo de 9, para cualquier natural n,

iii) $2^n \leq 2^{n+1} - 2^{n-1} - 2$, para cualquier natural $n \geq 2$.

22. Demuestra que si $\{a_n\}$ es la sucesión definida por

$$a_0 = 3,\ a_1 = 3 \ \text{ y } \ a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n,\ \text{ para } n \geq 0,$$

entonces se cumple que $a_n = (3-2n)3^n$ para todo natural.

23. Sea $(A, +, \cdot, \overline{\ }, 0, 1)$ un álgebra de Boole. Utilizando las propiedades del álgebra de Boole, prueba que $\forall a, b, c \in A$ se cumple:

i) $(a+b)\cdot\overline{a}\cdot\overline{b}=0$

ii) $a+[a\cdot(b+1)]=a$

iii) $(a+b)\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\left(a\cdot\overline{b}\right)+(\overline{a}\cdot b)$

iv) $(a+b+c)\cdot(a+b)=a+b$

24. Sea $(A,+,\cdot,\overline{\ },0,1)$ un álgebra de Boole y sean $x,y,z\in A$.

i) Utilizando las propiedades del álgebra de Boole, obtén una forma normal disyuntiva de la expresión $\overline{x\,\overline{y}+\overline{z}}$.

ii) A partir de su mapa de Karnaugh, calcula una forma normal conjuntiva de la expresión $\overline{(x+\overline{y})\,\overline{z}}$. Hállala también utilizando las propiedades del álgebra de Boole.

25. Halla una FND y una FNC de la función booleana definida por la tabla siguiente. Simplifícala como suma de productos y como producto de sumas.

a	b	c	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

26. Para cada una de las siguientes funciones booleanas: halla un mapa de Karnaugh, una FND y simplifícala.

i) $f_1(a,b)=\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot(\overline{a}+b)\cdot(a+b)$

ii) $f_2(x,y,z)=(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})\cdot z+\overline{(\overline{y}+z)}$.

27. Para el álgebra de Boole $A=\{0,1\}$ se considera la función booleana $f:A^4\to A$ dada por

$$f(x,y,z,t)=x\bar{z}t+(x+z)\bar{t}+yz(\bar{x}+xt),\quad \text{para cada } (x,y,z,t)\in A^4$$

Obtén su mapa de Karnaugh, una FND y simplifícala.

28. Un circuito eléctrico consta de tres interruptores x, y y z y de una lámpara $L(x,y,z)$ que se enciende únicamente si x y z están cerrados o si y y z están cerrados o si x e y están abiertos.

• Construye la tabla de verdad de $L(x,y,z)$ que toma el valor 1 cuando la lámpara se enciende (a cada variable se le asigna el valor 1 cuando está cerrada).

• Obtén una expresión booleana para la lámpara $L(x,y,z)$ en forma de suma de productos *mínima* que verifique las condiciones anteriores.