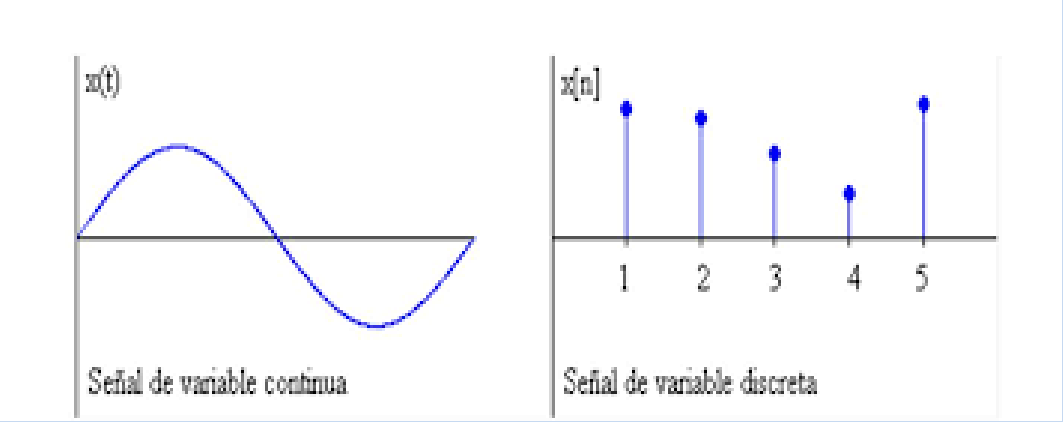
TEMA 1 – PARTE 4:

Representación de señales en el dominio del tiempo



¿Qué veremos?

11. Convolución de señales discretas

12. Convolución de señales continuas

11

Convolución de señales discretas (suma de convolución)

Convolución entre señales discretas

- Notación: $y(n) = x(n) * h(n)$

- Expresión: $$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- Es necesario invertir la señal $h(n)$ para crear $h(-k)$ y desplazarla.

- En cada desplazamiento, se calculará la multiplicación con la señal $x(n)$ y la suma. Es decir, para cada valor de n se obtiene un único valor de $y(n)$.

Propiedades de la suma de convolución

Conmutativa: $y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$

Asociativa: $y(n) = x(n) * \big(g(n) * h(n)\big) = (x(n) * g(n)) * h(n)$

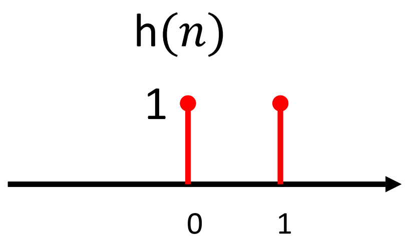
Distributiva: $y(n) = x(n) * \big(g(n) + h(n)\big) = x(n) * g(n) + x(n) * h(n)$

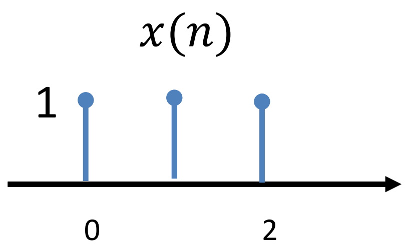
Multiplicación por escalar: $y(n) = a\big(x(n) * h(n)\big) = ax(n) * h(n)$

Ejemplo

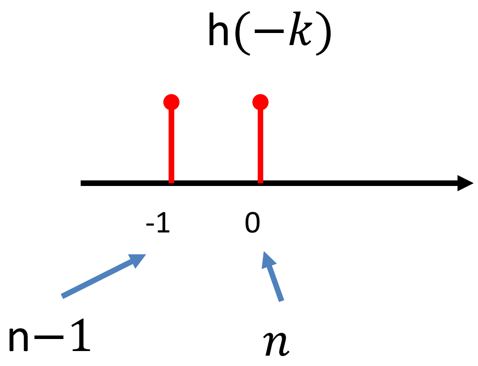
Señales originales:

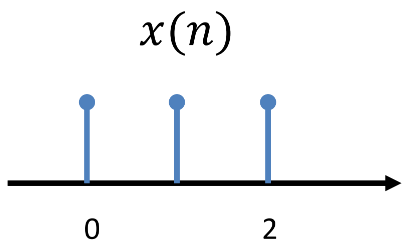
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$





Reescribimos $h(n)$ como $h(k)$ y la invertimos para crear $h(-k)$





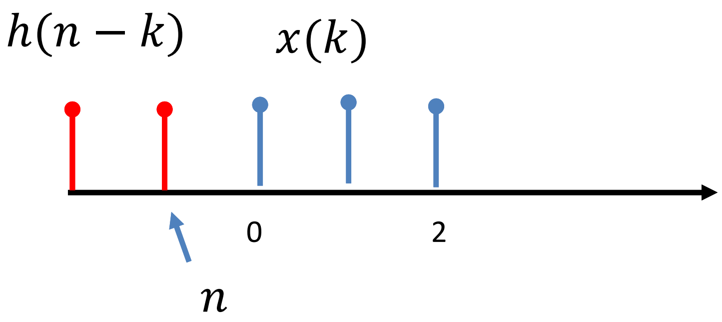
El punto que antes estaba en 0 es el punto que ahora está en n.

Ejemplo (cont.)

Desplazamos n unidades la señal $h(-k)$. Es decir, tenemos la señal $h(n-k)$.

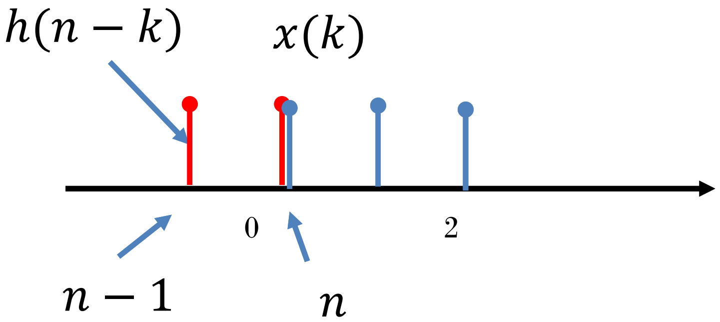
Si n < 0 el desplazamiento es hacia la izquierda

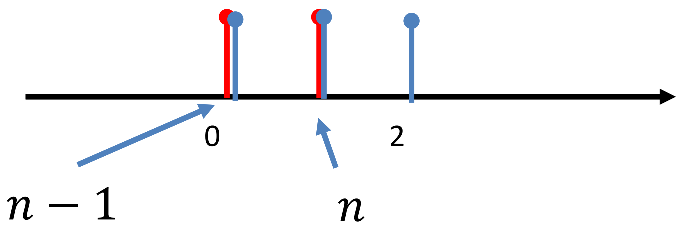
Si n>0 el desplazamiento es hacia la derecha



No hay solapamiento para n< 0.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = 0$$



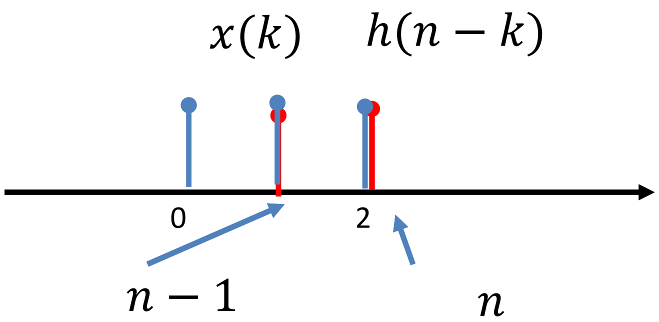


Para $n = 0$ empieza a haber solapamiento "creciente" hasta que $n - 1 \; = \; 0$, es decir $n = 1$.

$$y(0) = 1$$
$$y(1) = 2$$

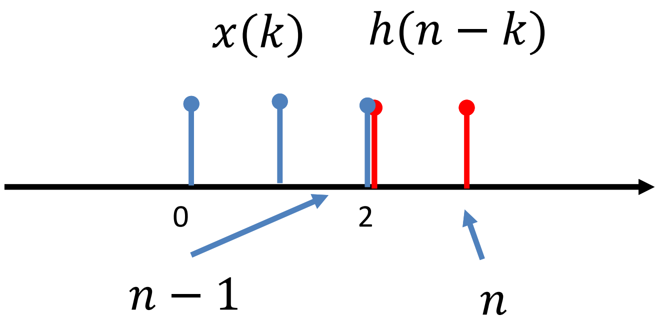
Ejemplo (cont.)

El solapamiento es decreciente desde $n = 2$, hasta $n - 1 = 2$ $(i.e., n = 3)$.



Para $n = 2$, tenemos

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k) = 2$$



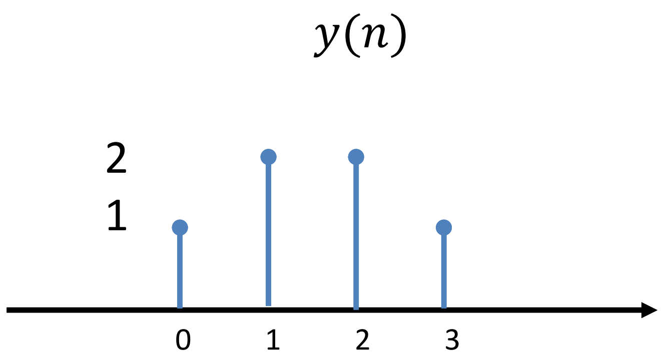
Para $n = 3$, tenemos

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k) = 1$$

Ejemplo (resultado)

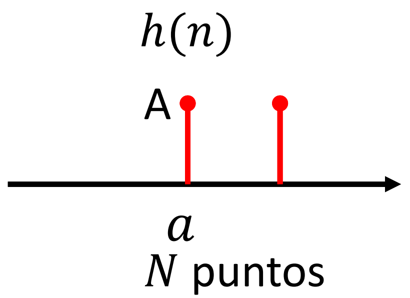
Señales originales:

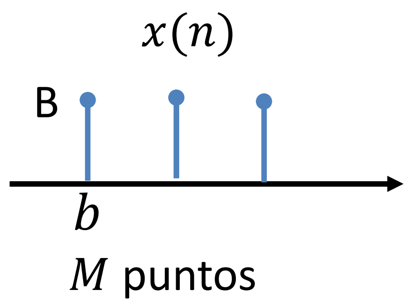
Resultado de la suma de convolución:



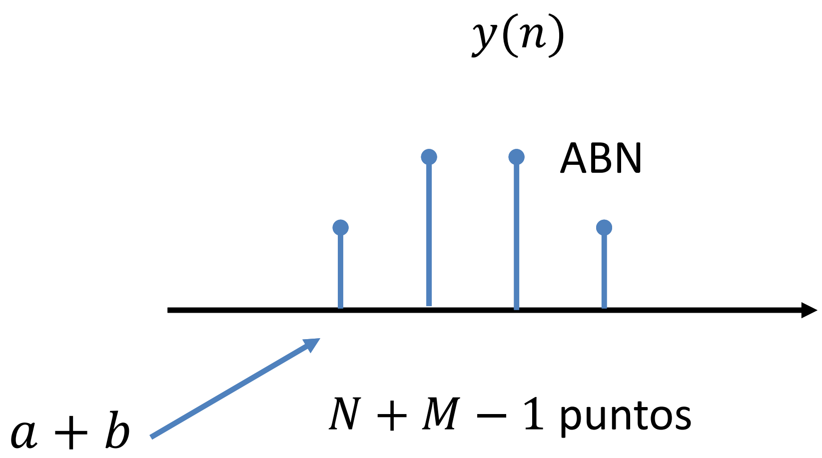
Trucos

Trucos para calcular la suma de convolución de señales rectangulares:.





Resultado de la suma de convolución:



11

Convolución de señales continuas

Convolución entre señales continuas

- Notación: $y(t) = x(t) * h(t)$

- Expresión: $$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Es necesario invertir la señal $h(t)$ para crear $h(-\tau)$ y desplazarla.

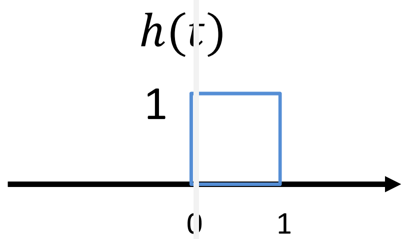
- En cada desplazamiento, se calculará la multiplicación con la señal $x(t)$ y el área (integral). Es decir, para cada valor de t se obtiene un único valor de $y(t)$.

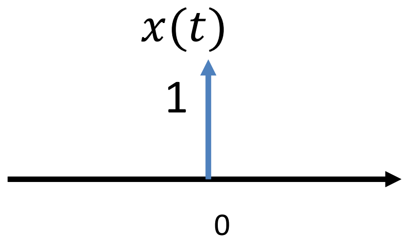
- Es una operación conmutativa $y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

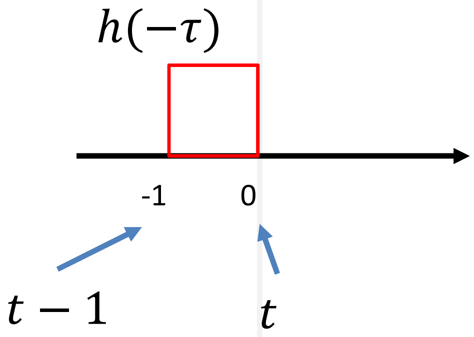
Ejemplo 1

Convolución:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$





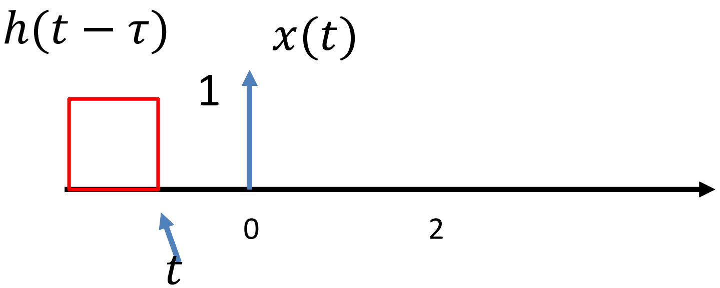


Reescribimos $h(t)$ como $h(\tau)$ y la invertimos para crear $h(-\tau)$

El punto que antes estaba en 0 es el punto que ahora está en t.

Ejemplo 1 (cont.)

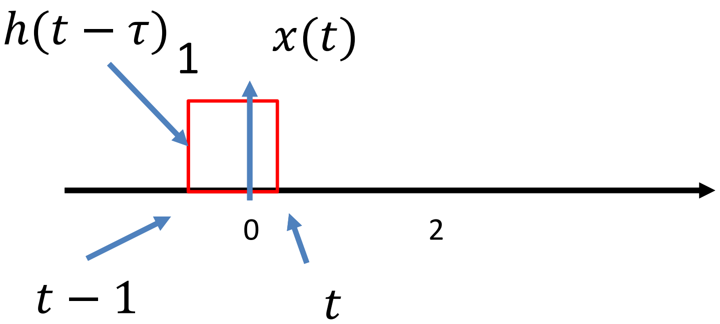
$\boldsymbol{t < 0}$



No hay solapamiento para $t < 0$.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$$

$\boldsymbol{0 < t <???}$



Para $t = 0$ empieza a haber solapamiento hasta que $t - 1 = 0$, es decir $t = 1$.

Observamos que en $0 < t < 1$, tenemos

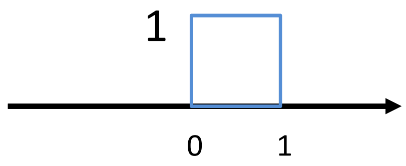
$$y(t) = x(t)$$

Ejemplo 1 (resultado)

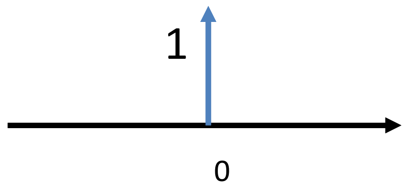
Convolución:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

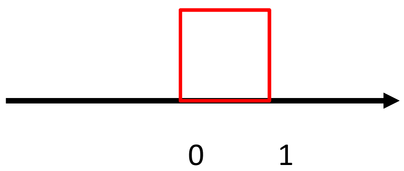
$h(t)$



$x(t)$



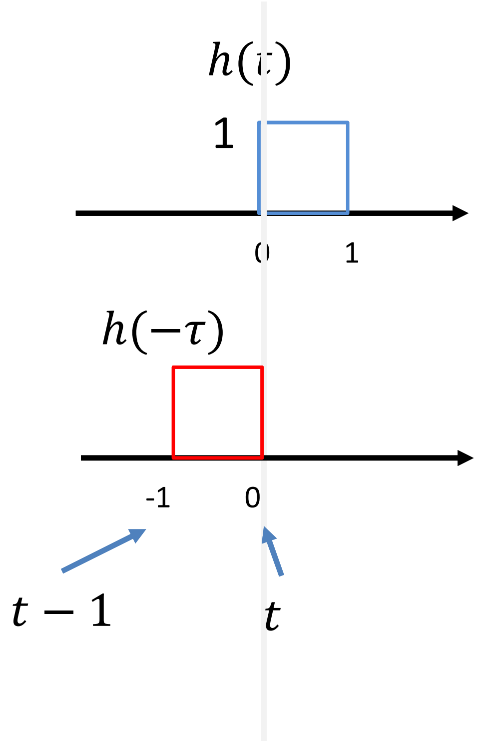
$y(t)$

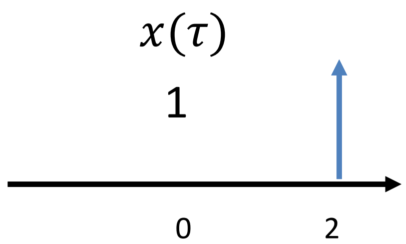


$$\boxed{y(t) = h(t) * \delta(t) = h(t)}$$

Ejemplo 2

Convolución: $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



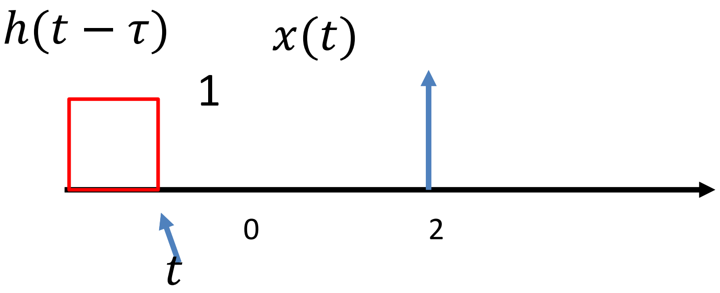


Reescribimos $h(t)$ como $h(\tau)$ y la invertimos para crear $h(-\tau)$

El punto que antes estaba en 0 es el punto que ahora está en t.

Ejemplo 2 (cont.)

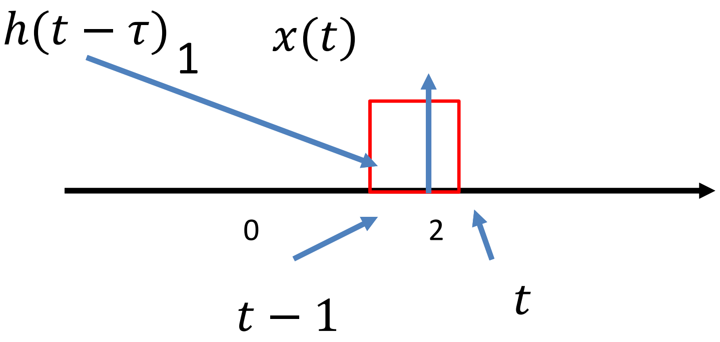
$\boldsymbol{t < 2}$



No hay solapamiento para $t < 2$.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$$

$\boldsymbol{2 < t <???}$



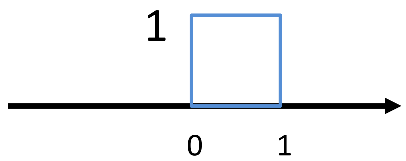
Para $t = 2$ empieza a haber solapamiento hasta que $t - 1 = 2$, es decir $t = 3$.

Ejemplo 2 (resultado)

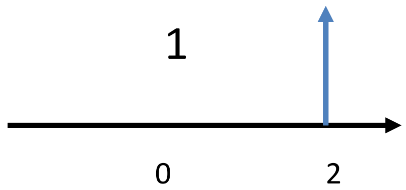
Convolución:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

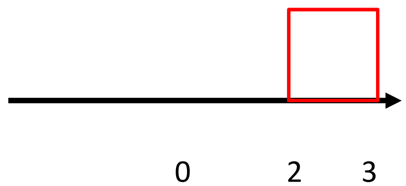
$h(t)$



$x(t)$



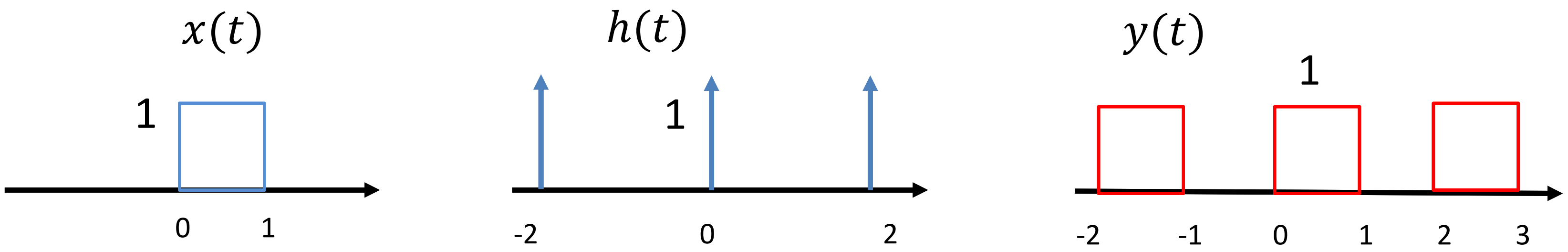
$y(t)$

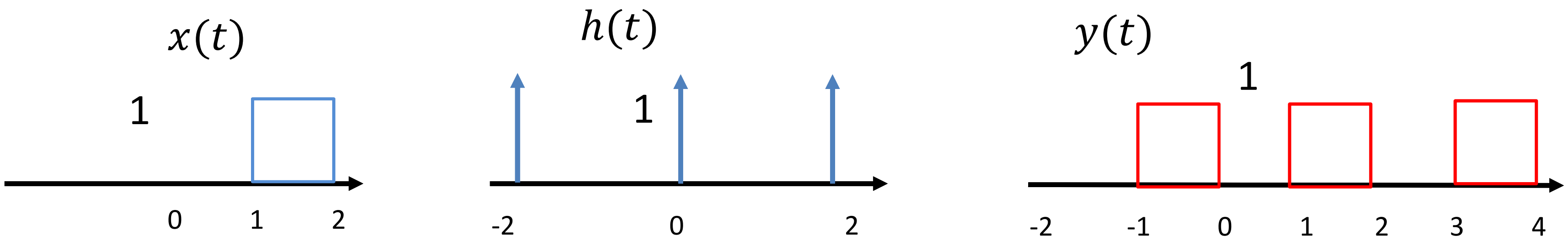


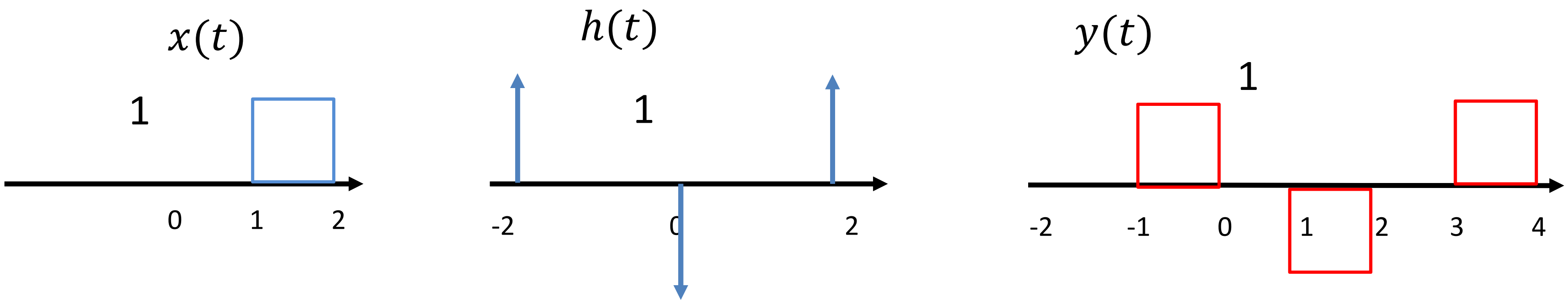
$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= h(t) * \delta(t-t_0) = h(t-t_0) \\ y(t) &= h(t-t_0) * \delta(t) = h(t-t_0) \end{aligned}}$$

Ejemplo 3 – Tren de pulsos

Convolución: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

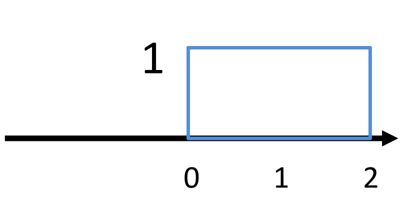


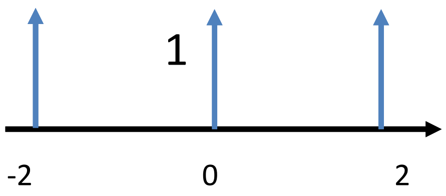


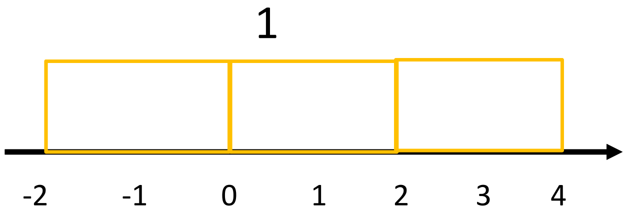


Ejemplo 3

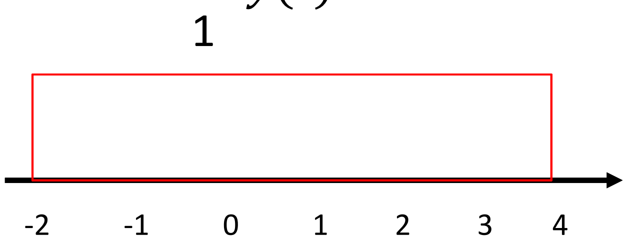
Convolución: $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$







Energía:

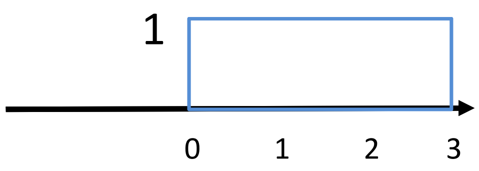


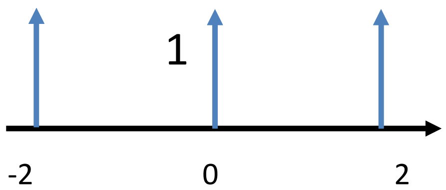
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2 dt = 6 \ J$$

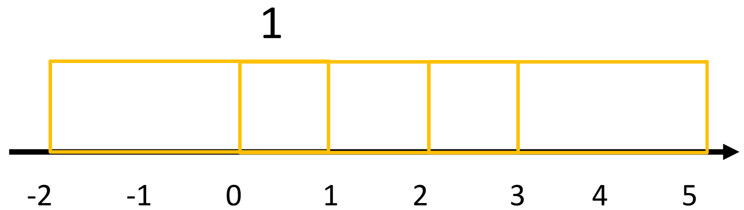
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2 dt = 3 \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = 3\ x\ 2 = 6\,J$$ No hay solapamiento

Ejemplo 4 (cont.)

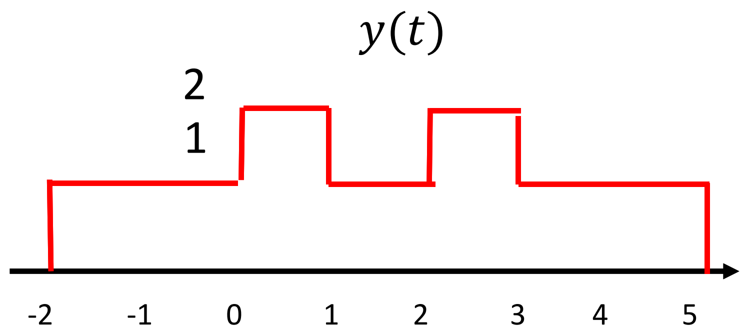
Convolución: $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$







Energía:

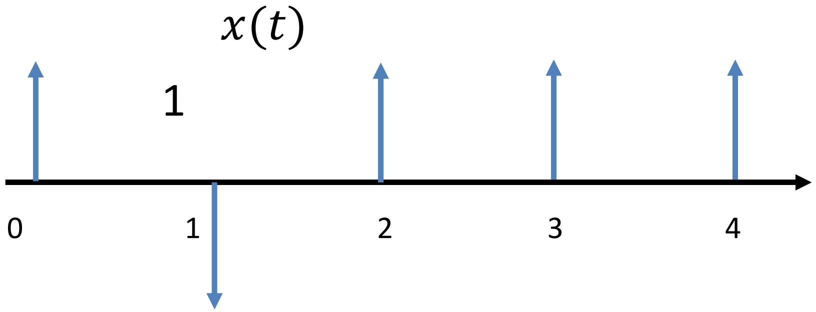


$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2 dt = 5 \text{ x } 1 + 2 \text{ x } 4 = 13 \;J$$

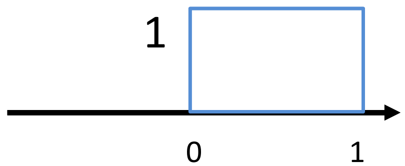
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2 dt = 3 \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = 3 \text{ x } 3 = 9\,J$$ No coincide porque hay solapamiento

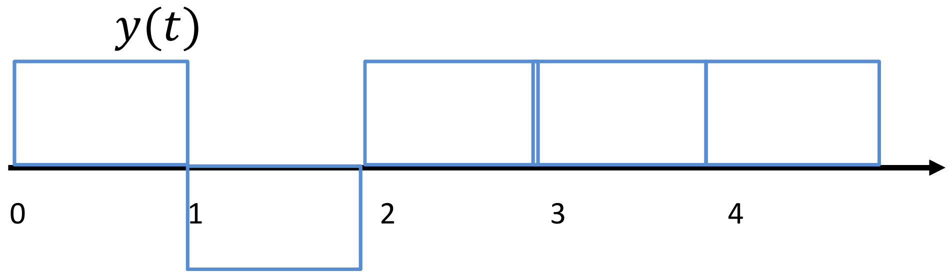
Aplicación: Pulse Amplitude Modulation

0 1 0 0 0



Pulso rectángular $h(t)$

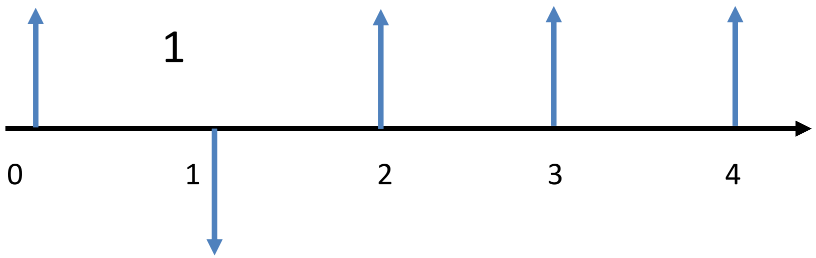




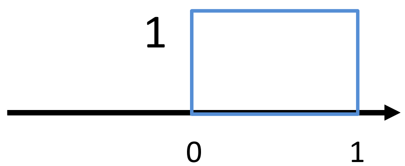
Aplicación: Pulse Amplitude Modulation

0 1 0 0 0

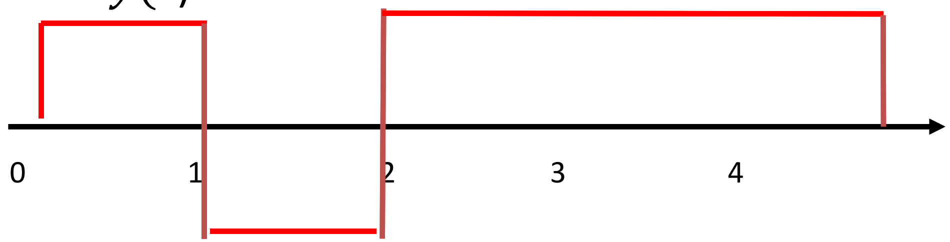
$x(t)$



Pulso rectangular $h(t)$

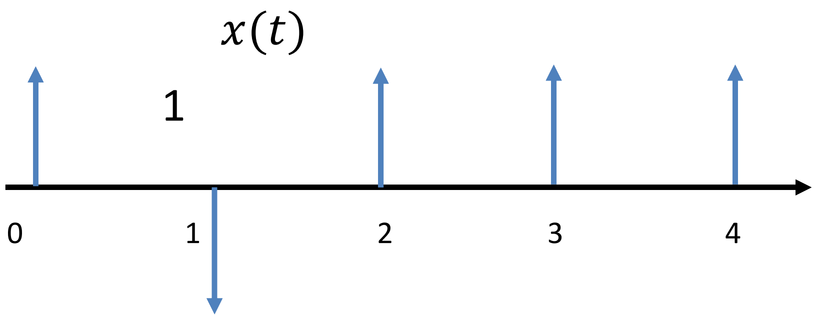


$y(t)$

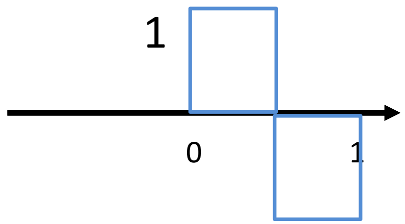


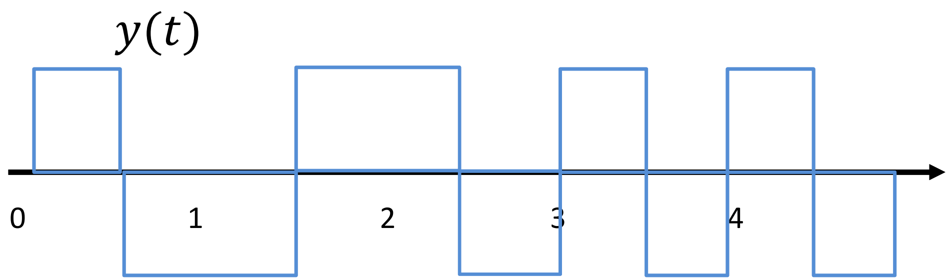
Aplicación: Pulse Amplitude Modulation

0 1 0 0 0



Pulso de Manchester $h(t)$





TEMA 1 – PARTE 4:

Representación de señales en el dominio del tiempo