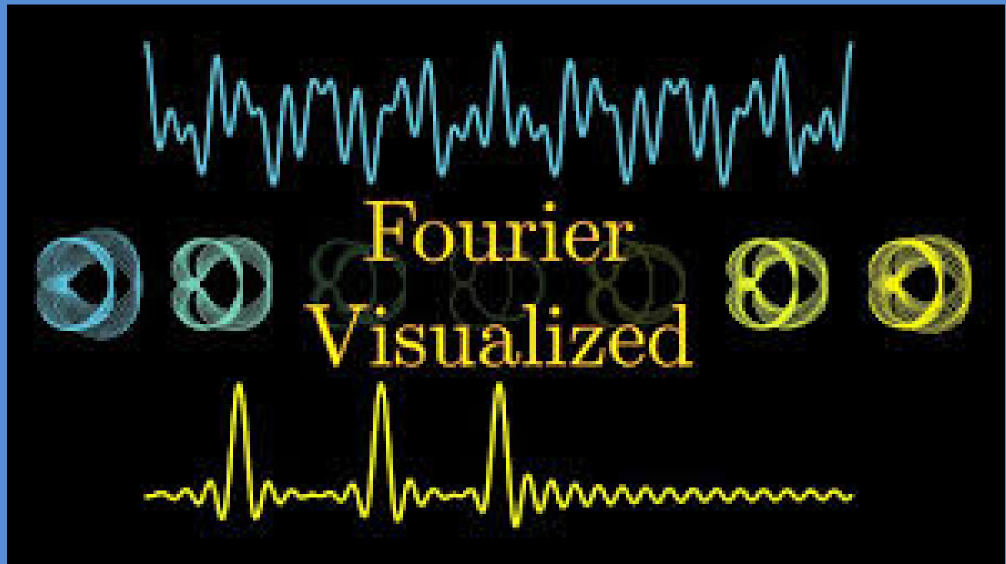
TEMA 2: Representación en frecuencia



Índice

Contenido:

3

Propiedad de escalado en tiempo

Propiedad de escalado en tiempo

- Sea $x(t)$ una señal cuya Transformada de Fourier (TF) es $X(\omega)$. La propiedad de escalado en tiempo de la TF dice lo siguiente:

$$x(at) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- Cuando $a > 1 \quad 1/a < 1$ ➔ la señal se comprime en tiempo y se expande en frecuencia
- Cuando $a < 1 \quad 1/a > 1$ ➔ la señal se expande en tiempo y se comprime en frecuencia

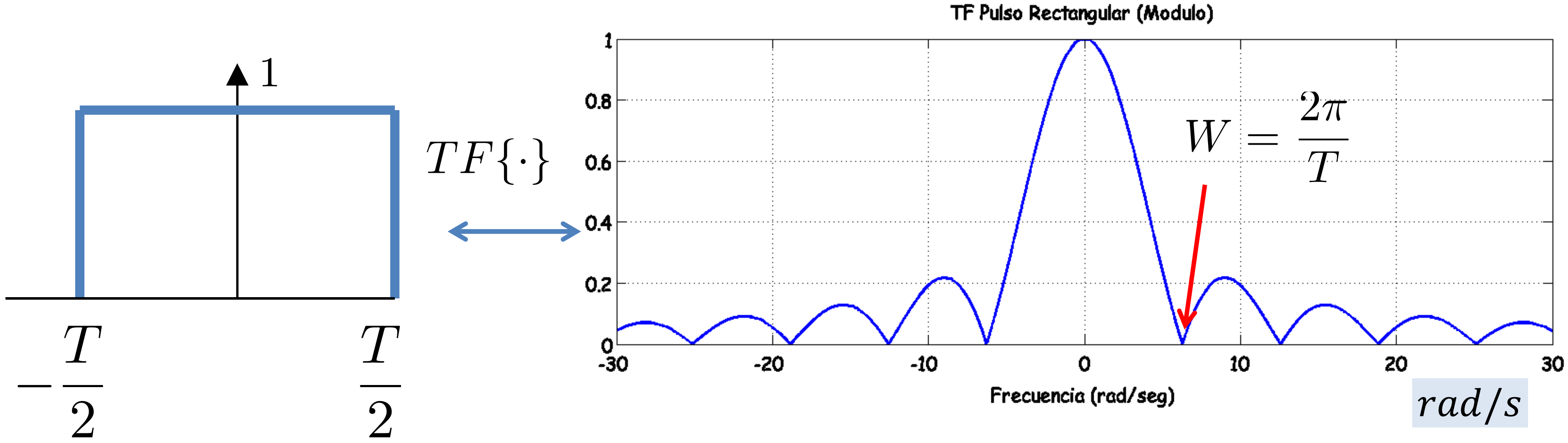
Concepto de ancho de banda

- El **ancho de banda** de una señal (W) es el rango de frecuencias en la que $X(\omega)$ concentra mayor energía.

- Técnicamente, el ancho de banda de $X(\omega)$ es infinito pero en la práctica podemos asumir que $\boldsymbol{X(\omega) \approx 0}$ **cuando** $\boldsymbol{\omega > W}$. En este caso, W es el ancho de banda.

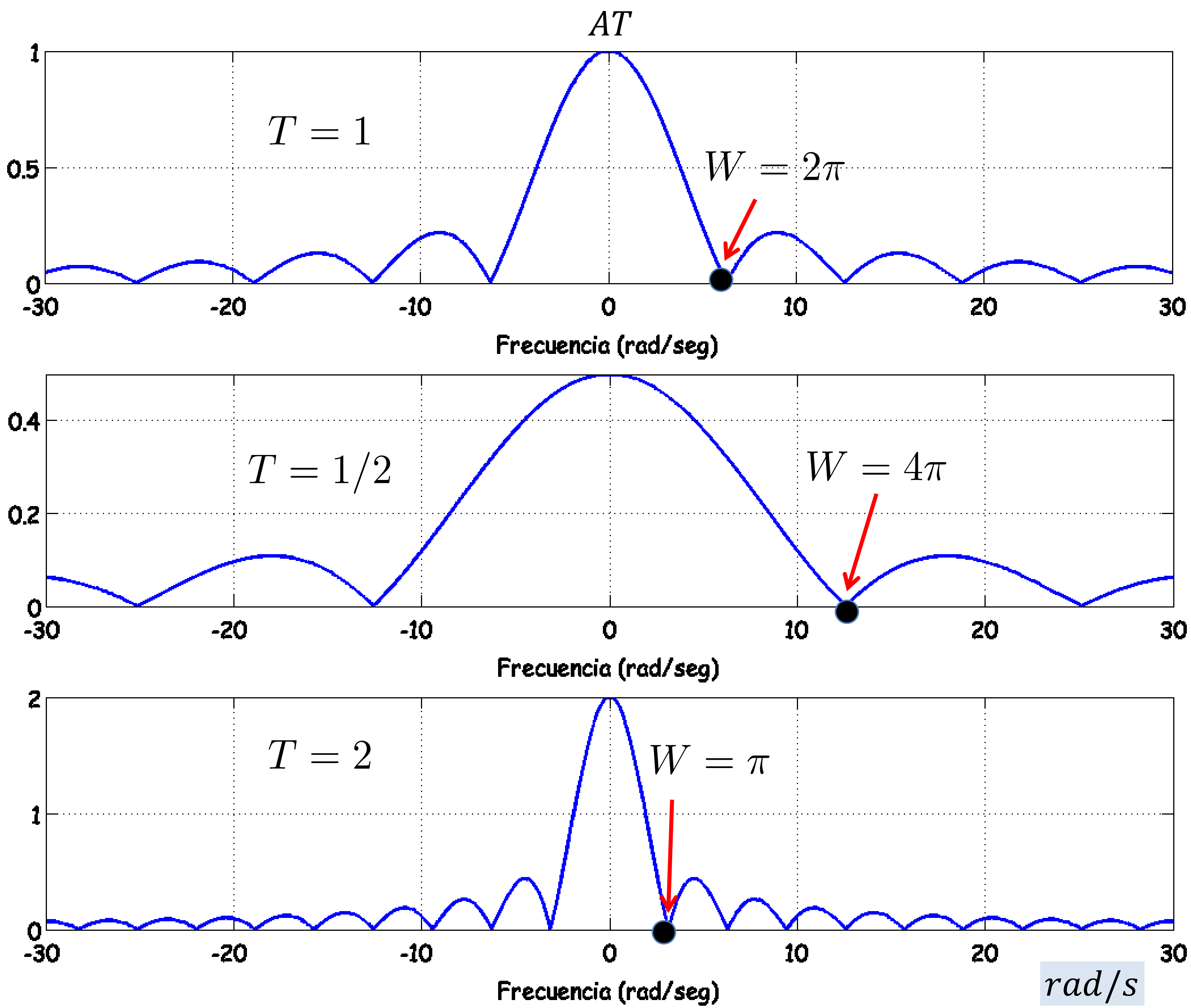
- Observar que W es un límite de las **frecuencias positivas.** Debido a la simetría en el dominio de la frecuencia, existe un límite simétrico en las frecuencias negativas.

Ancho de banda de un pulso rectangular

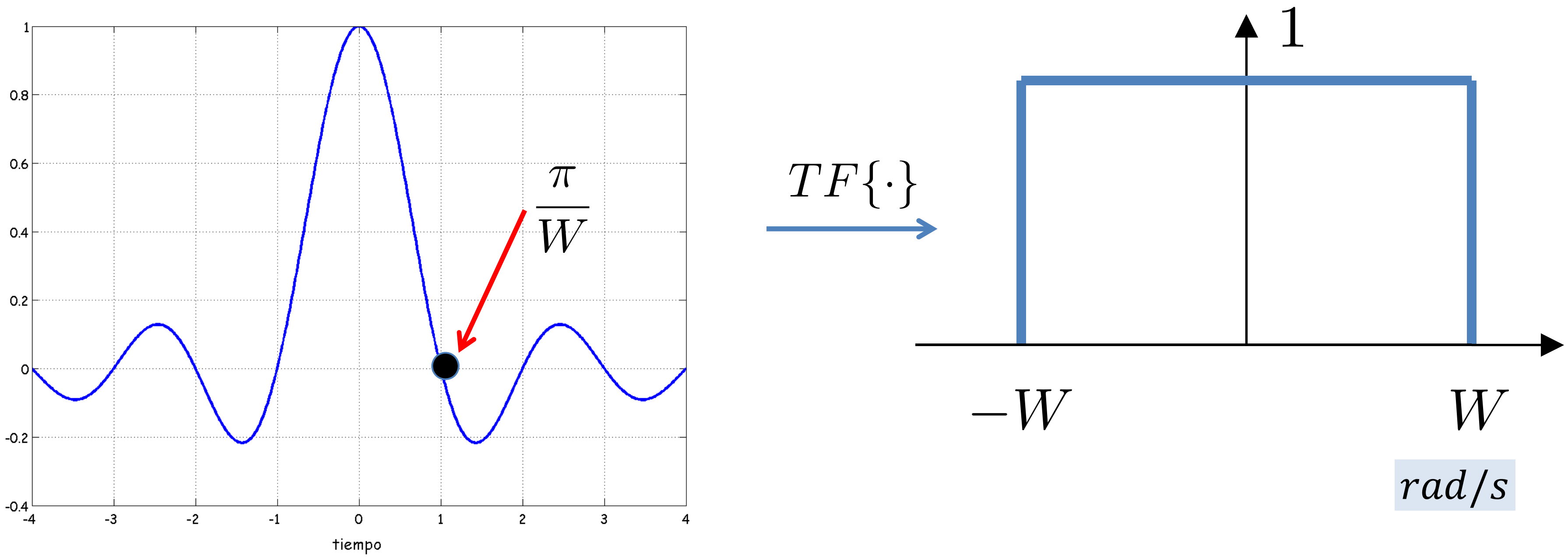


- Técnicamente, el ancho de banda es infinito pero podemos aproximarlo por la frecuencia $W = 2\pi/T$ rad/s que es la primera frecuencia en la que $X(\omega) = 0$

- Es una aproximación razonable ya que el lóbulo principal del pulso sinc en frecuencia ocupa el intervalo $\left[-\frac{2\pi}{T} \quad \frac{2\pi}{T}\right]$


AT
T = 1
W = 2π
Frecuencia (rad/seg)
T = 1/2
W = 4π
Frecuencia (rad/seg)
T = 2
W = π
Frecuencia (rad/seg)
rad/s

Ancho de banda de una señal sinc

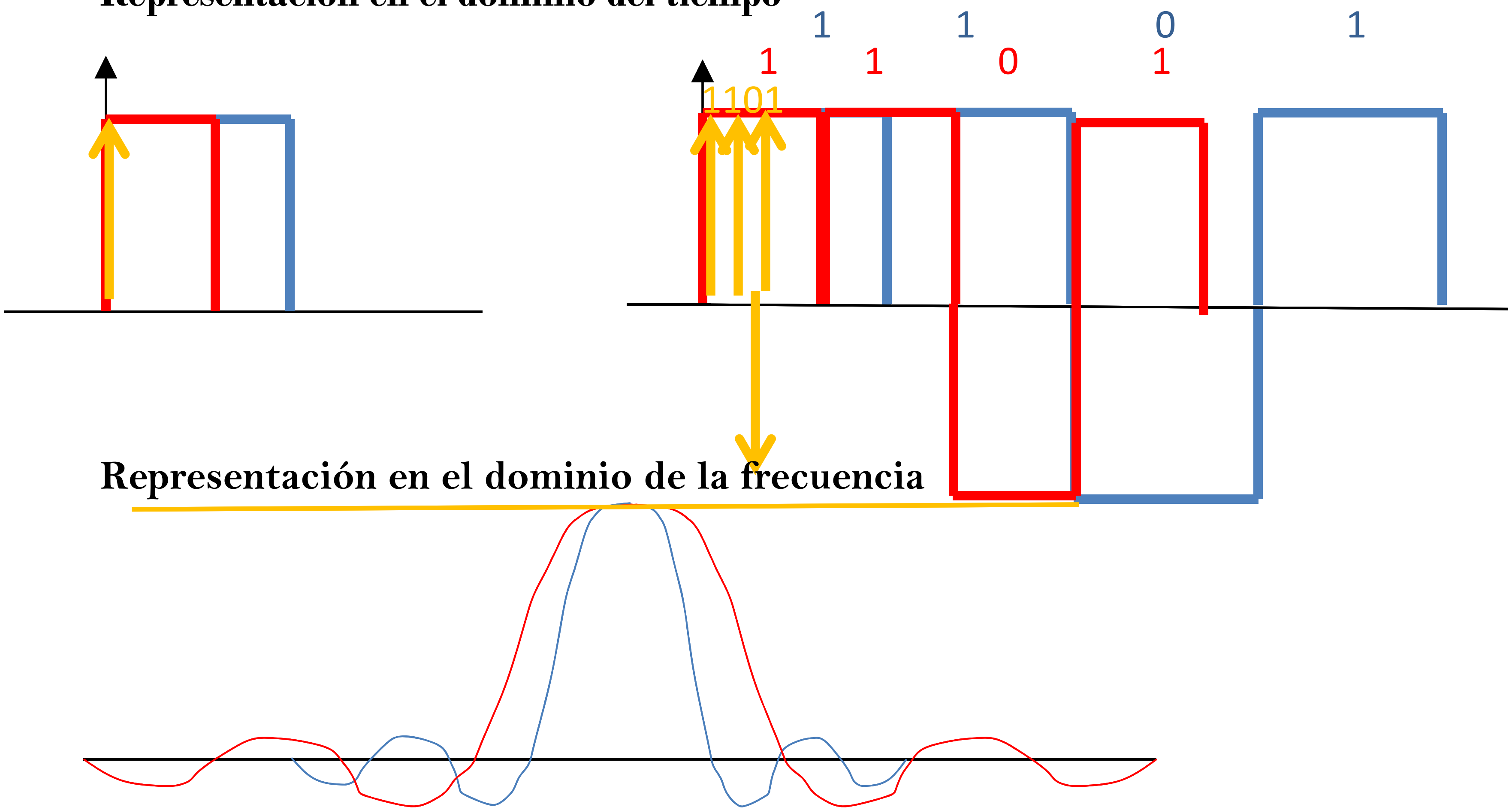


- W define de forma clara y precisa el ancho de banda del pulso rectangular en frecuencia.
- El primer paso por cero de $x(t)$ tiene lugar en π/W, i.e. el valor π/W segundos da una idea de la anchura en tiempo (duración) de $x(t)$.

Comunicaciones

Representación en el dominio del tiempo

Representación en el dominio de la frecuencia



4

Propiedad de linealidad

Propiedad de linealidad

- Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales cuya Transformada de Fourier (TF) es $X_1(\omega)$ y $X_2(\omega)$, respectivamente:

$$x_1(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X_1(\omega)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X_2(\omega)$$

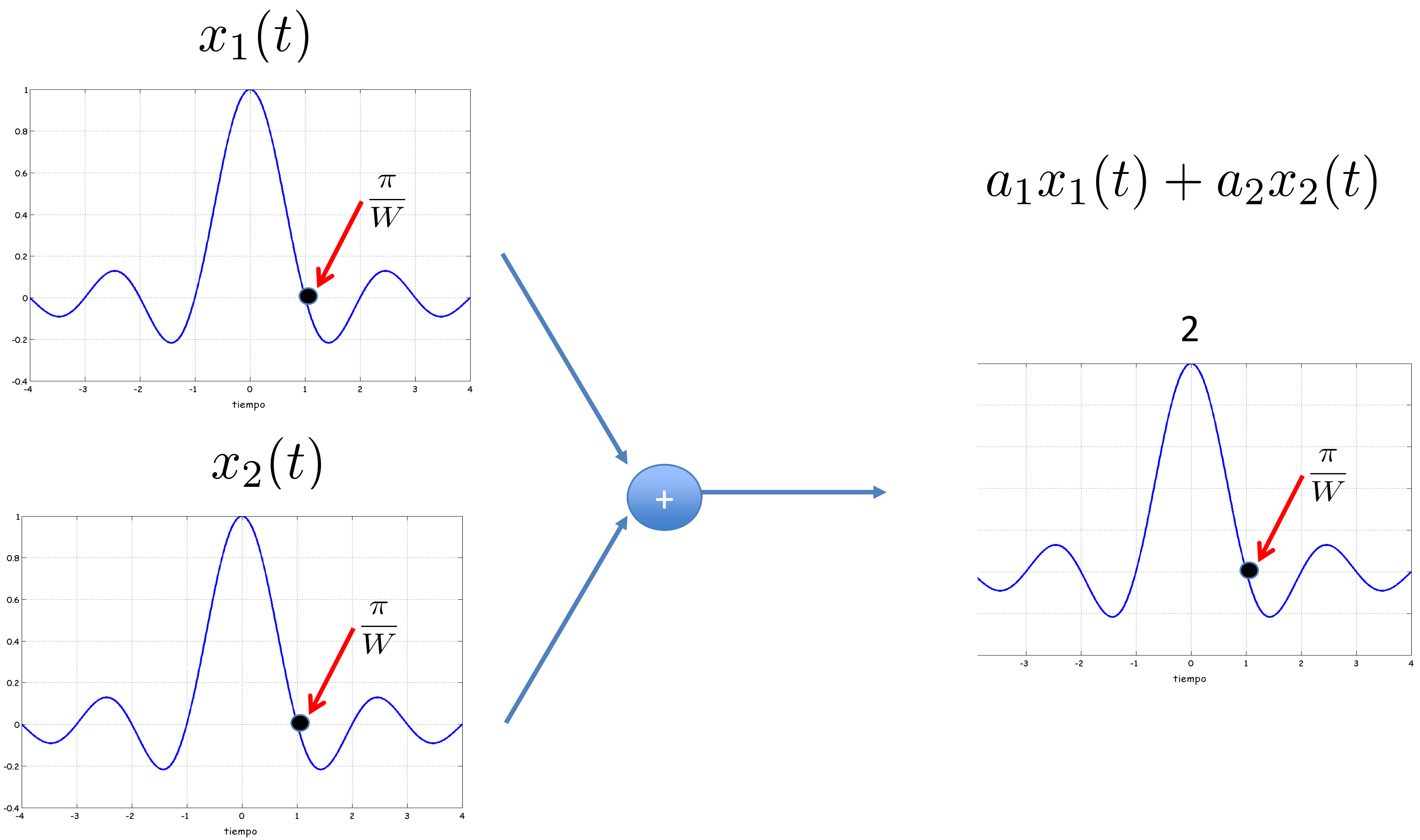
- La propiedad de linealidad de la TF dice lo siguiente:

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$$

donde a_1 y a_2 son dos constantes cualesquiera.

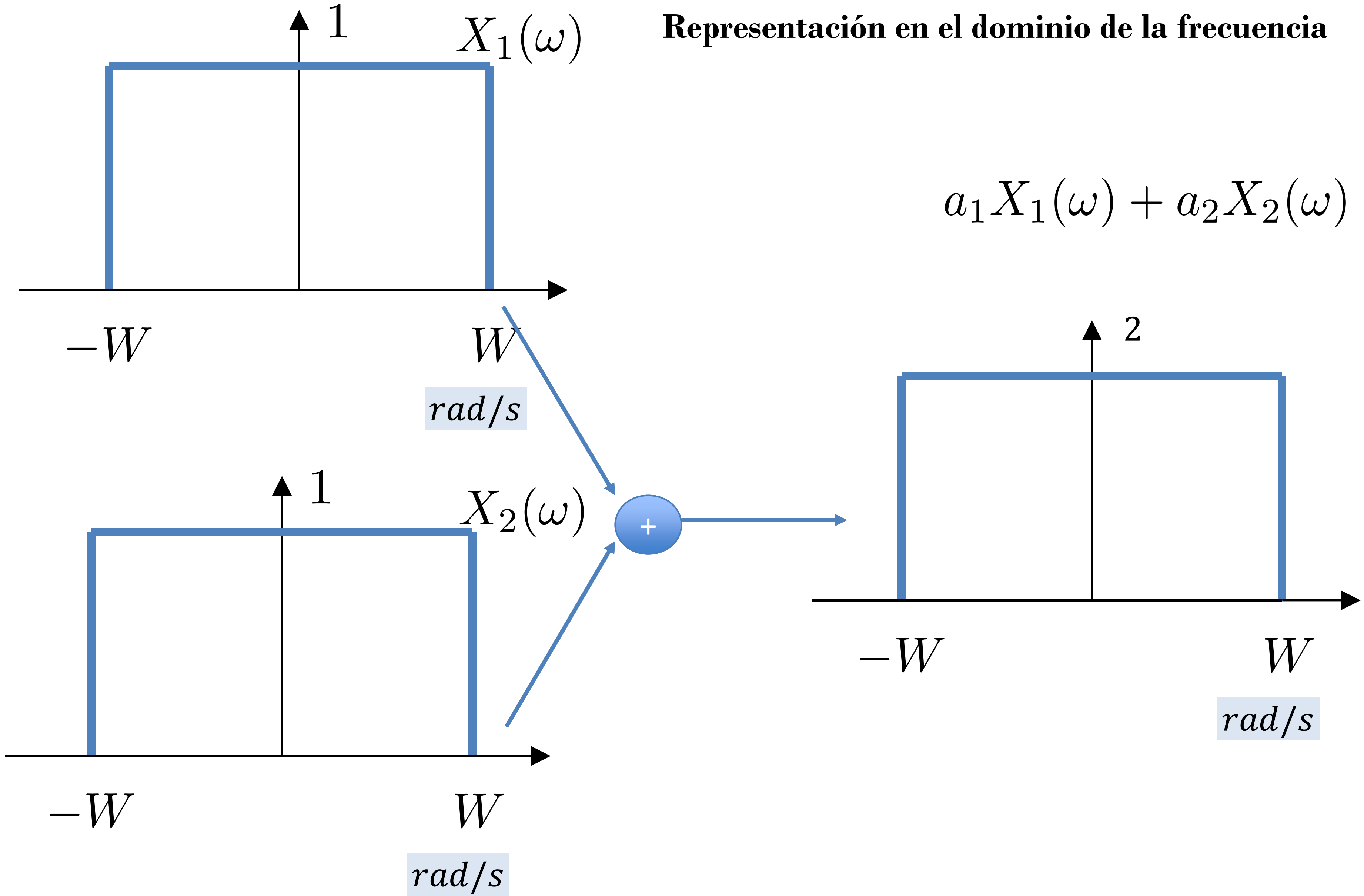
Comunicaciones

Representación en el dominio del tiempo



Comunicaciones (cont.)

Representación en el dominio de la frecuencia



5

Propiedad de desplazamiento en tiempo

Propiedad de desplazamiento en tiempo

$$x(t) \overset{TF\{\cdot\}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$$

$$x(t-t_0) \overset{TF\{\cdot\}}{\longleftrightarrow} X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

- **Un desplazamiento en tiempo cambia la fase de X(ω) pero no su módulo**

$$X(\omega)e^{-j\omega t_0} = |X(\omega)|e^{j\angle X(\omega)}e^{-j\omega t_0} = |X(\omega)|e^{j(\angle X(\omega)-\omega t_0)}$$

Impulso unidad desplazado

Impulso unidad desplazado $\delta(t - t_0)$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} 1$$ TF básica

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$ Propiedad

$$\delta(t - t_0) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} e^{-j\omega t_0}$$

Tren de deltas

Tren de deltas

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} 1$$

TF básica

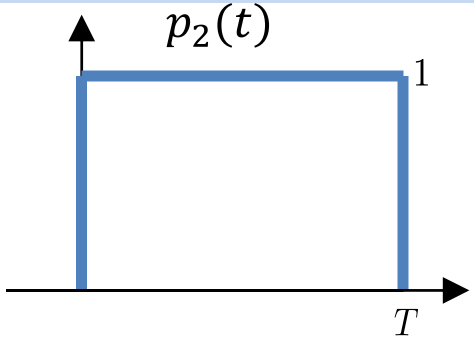
$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

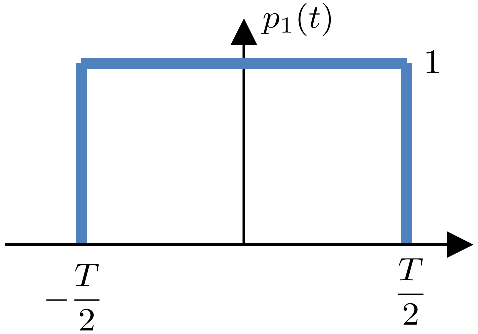
Propiedad

$$a_1x_1(t)+a_2x_2(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega)$$

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT}}$$

Pulsos

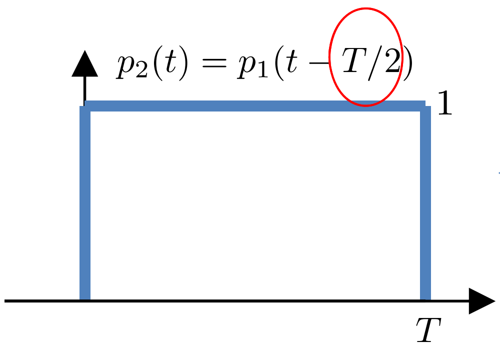




$$\overset{TF\{\cdot\}}{\longleftrightarrow} \quad P_1(\omega) = 2\frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega}$$

$$x(t-t_0) \overset{TF\{\cdot\}}{\longleftrightarrow} X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Propiedad

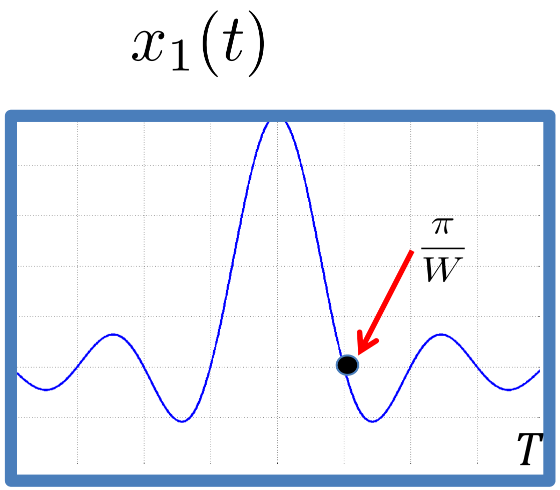


$$\overset{TF\{\cdot\}}{\longleftrightarrow} \quad P_2(\omega) = P_1(\omega)e^{-j\omega\frac{T}{2}}$$

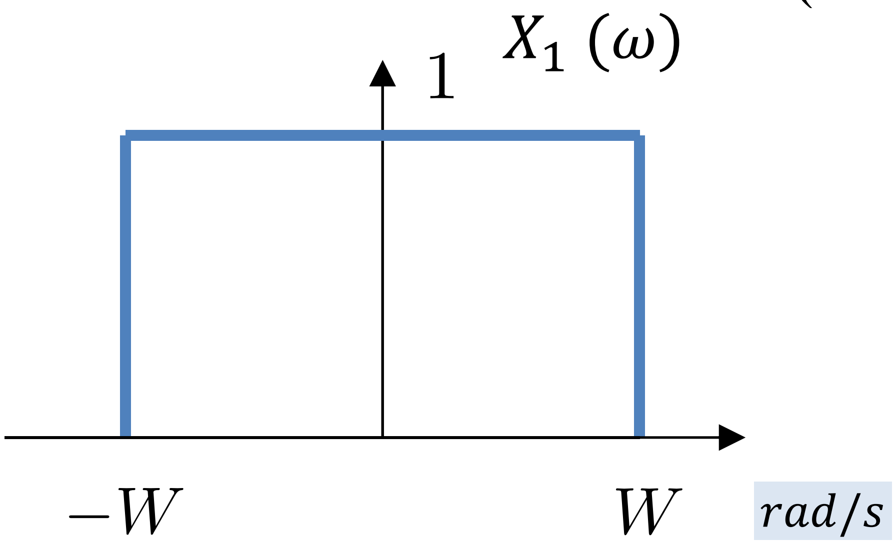
$$= 2\frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega}e^{-j\omega\frac{T}{2}}$$

Comunicaciones

Representación en el dominio del tiempo

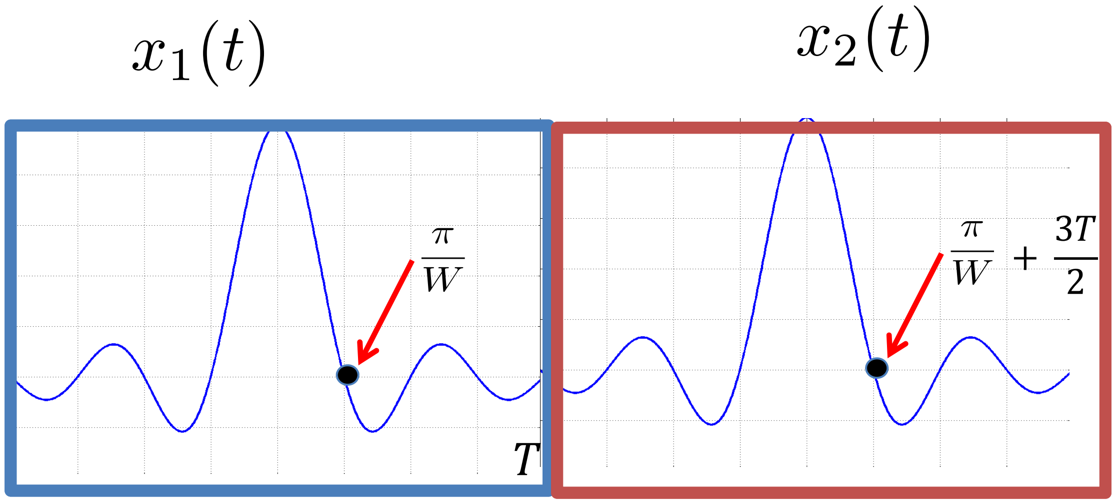


Representación en el dominio de la frecuencia (módulo)



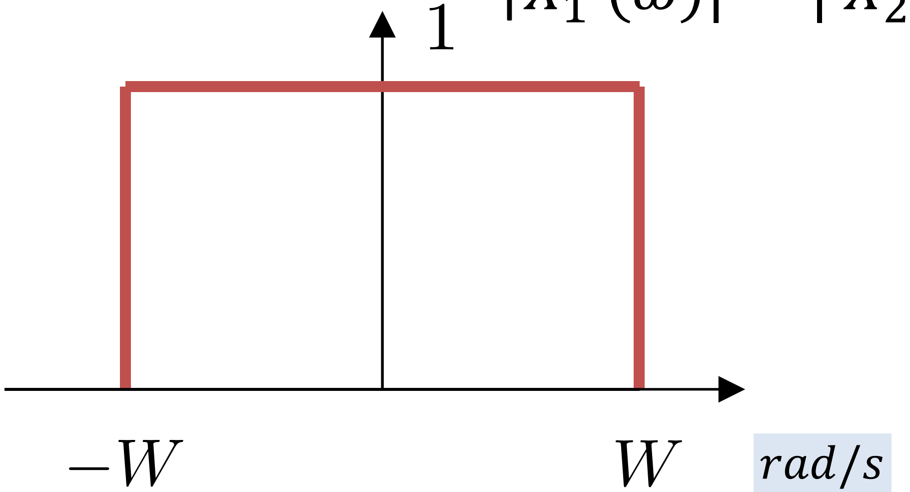
Comunicaciones (cont.)

Representación en el dominio del tiempo



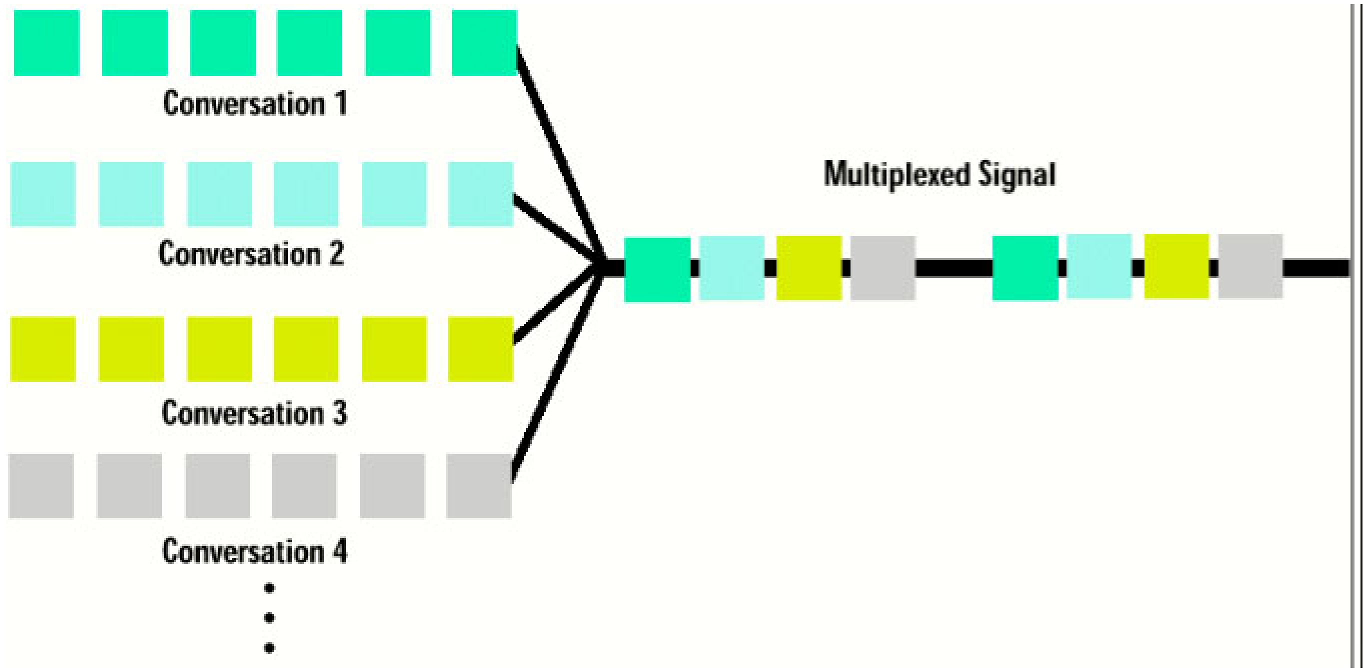
Representación en el dominio de la frecuencia (módulo)

$$|X_1(\omega)| = |X_2(\omega)|$$



Comunicaciones (cont.)

Multiplexación por división en tiempo



GSM *(Global System for Mobile Communication,* en el que se emplea junto con saltos en frecuencia o *frequency hopping).*

6

Propiedad de desplazamiento en frecuencia

Propiedad de desplazamiento en frecuencia

$$x(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega)$$

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega - \omega_0)$$

$$x(t)e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega + \omega_0)$$

- **Multiplicar por una exponencial compleja de frecuencia ω_0 equivale a desplazar en frecuencia $X(\omega)$.**

- **Es la propiedad dual a la de desplazamiento en tiempo.**

Coseno

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$$ Relación de Euler

$$1 \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} 2\pi\delta(\omega)$$ Transformada básica

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$ Desplazamiento en frecuencia

$$e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

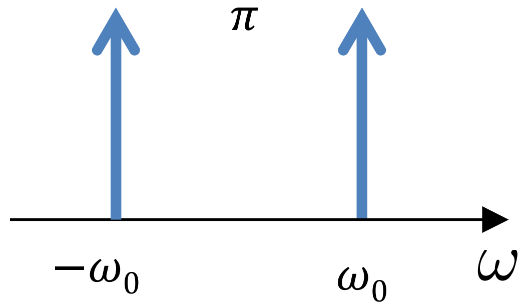
$$e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$ Linealidad

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} \longleftrightarrow \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

Coseno (cont.)

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} \longleftrightarrow \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

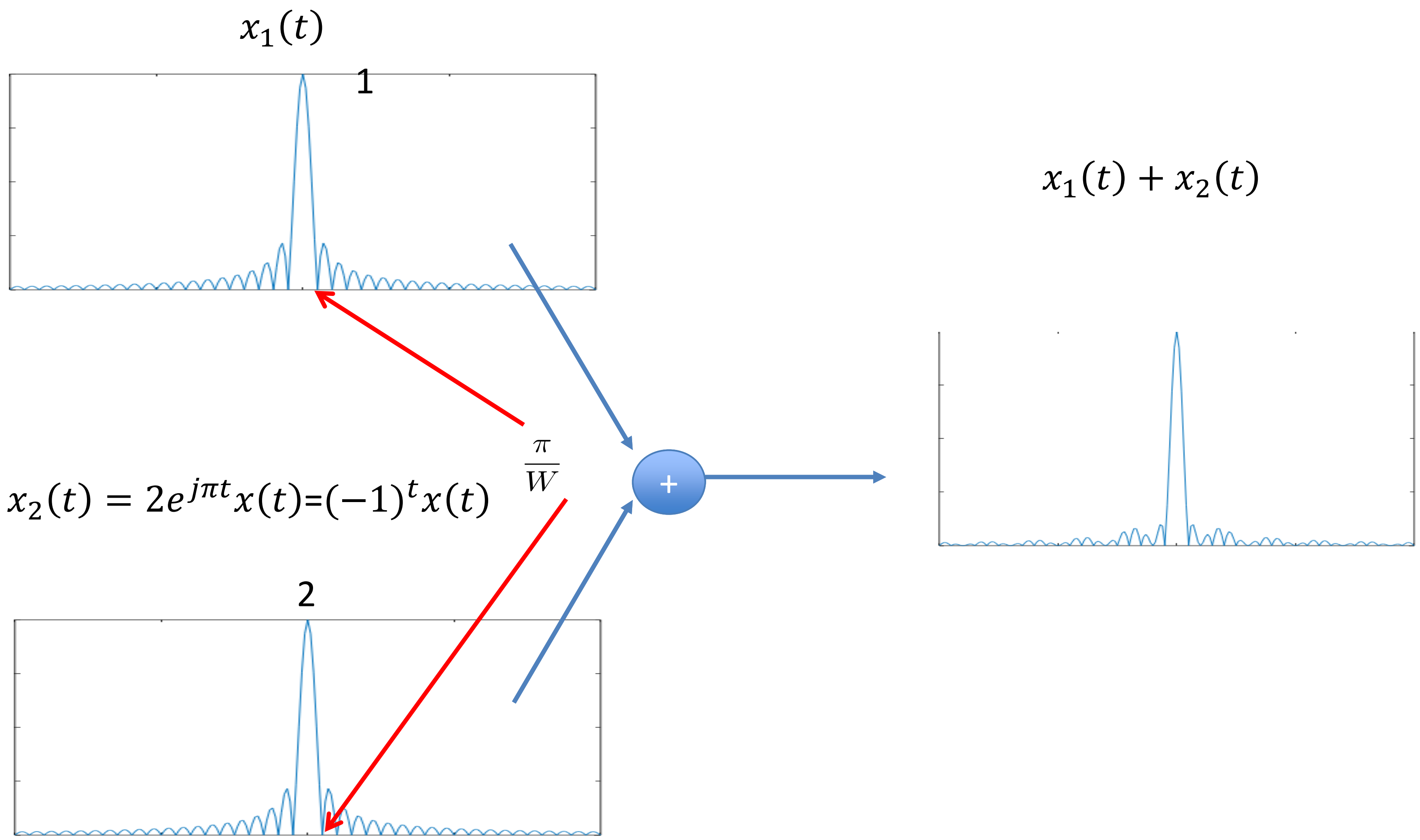
$$\overset{TF\{\cdot\}}{\longleftrightarrow}$$



Es importante observar que la fase es cero.

Comunicaciones

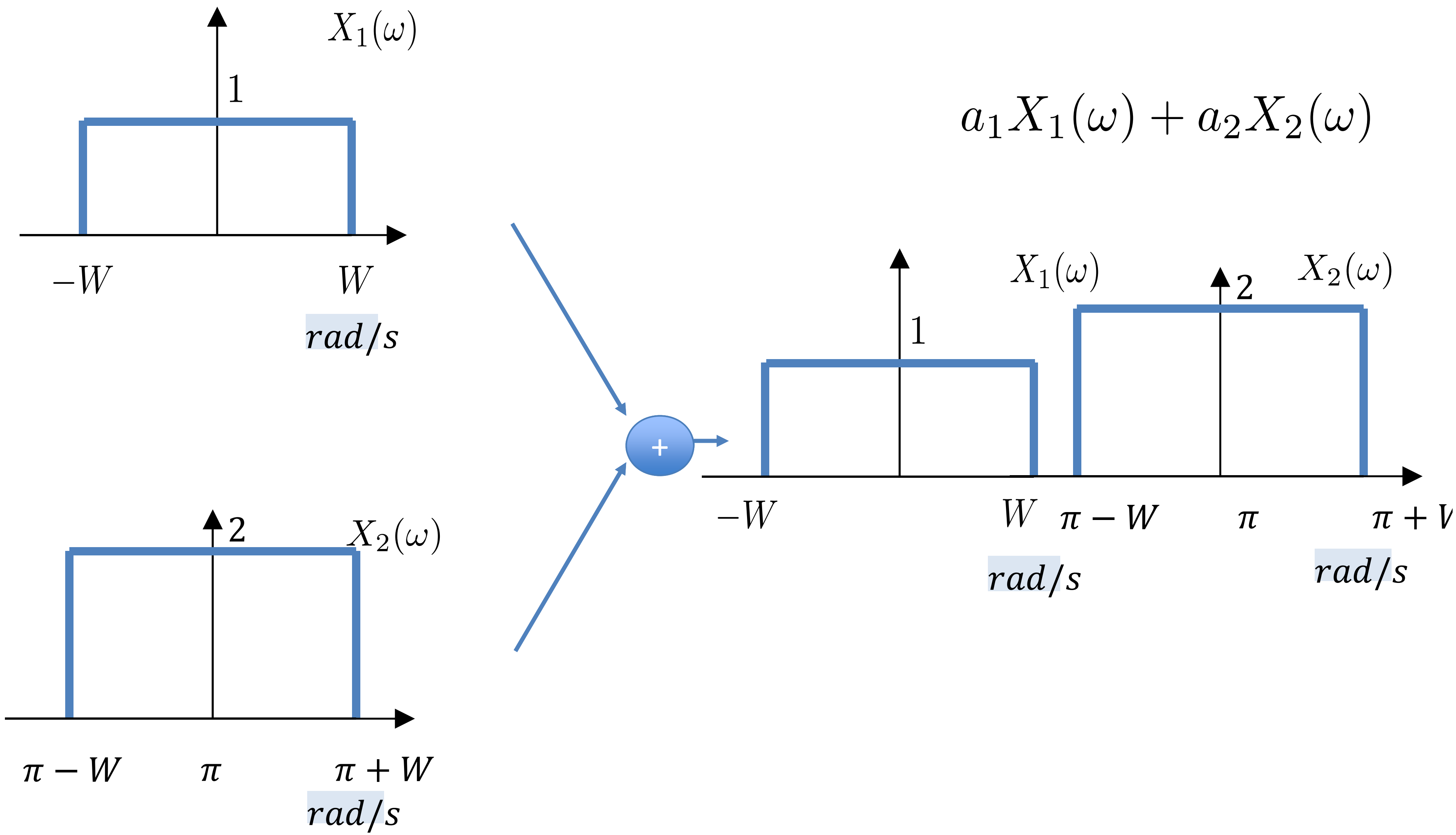
Representación en el dominio del tiempo



Comunicaciones (cont.)

Representación en el dominio de la frecuencia

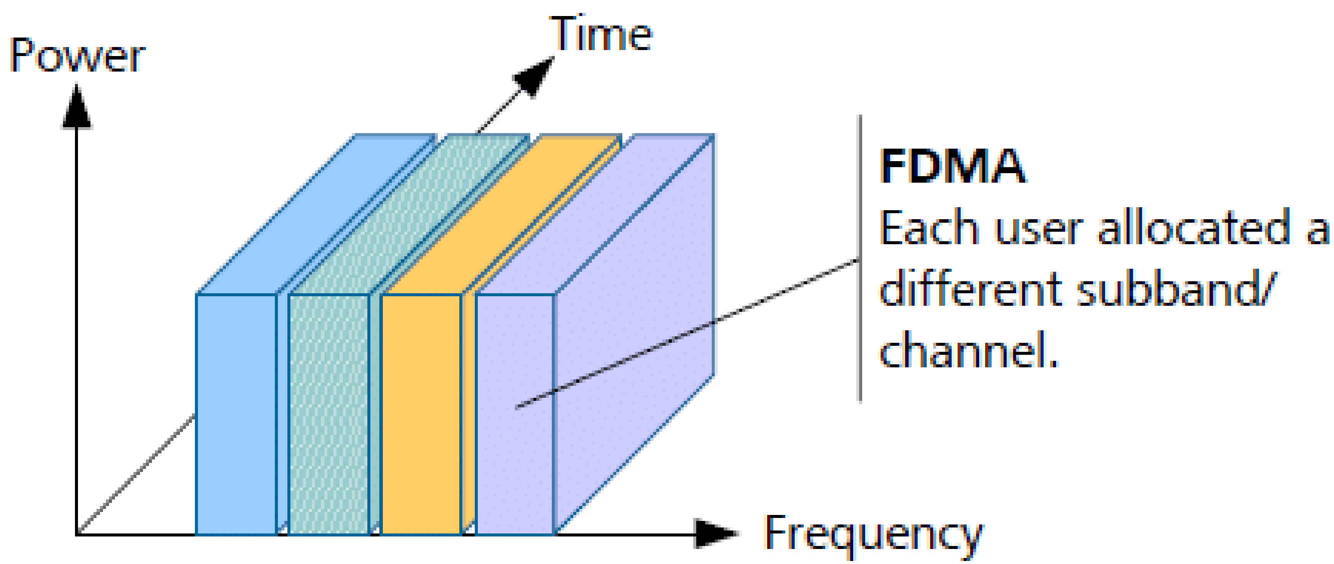
$$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$$



Comunicaciones (cont.)

Multiplexación por división en frecuencia

Frequency Division Multiple Access



7

Relación de Parseval

Relación de Parseval

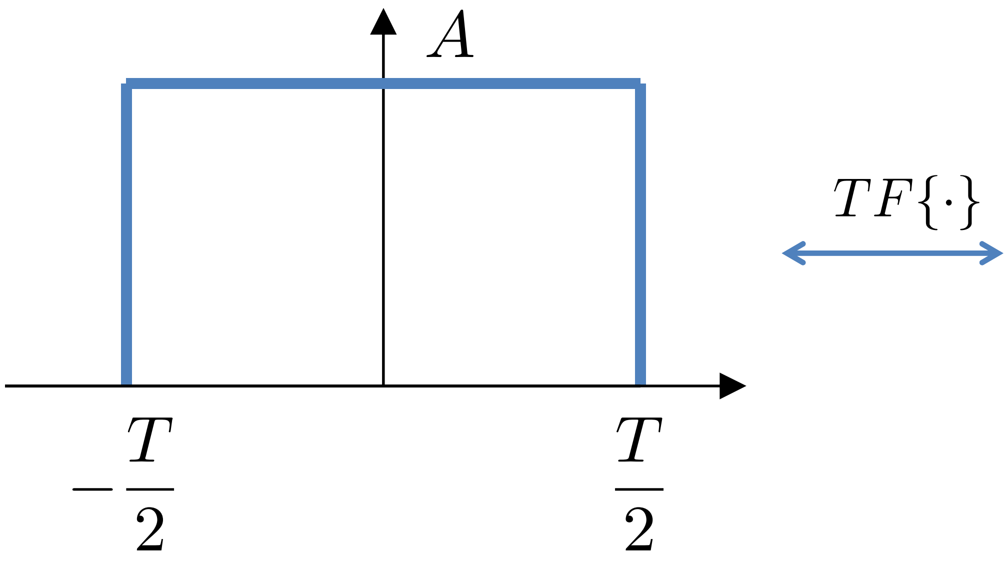
- La energía de una señal real $x(t)$ se puede calcular de la siguiente manera

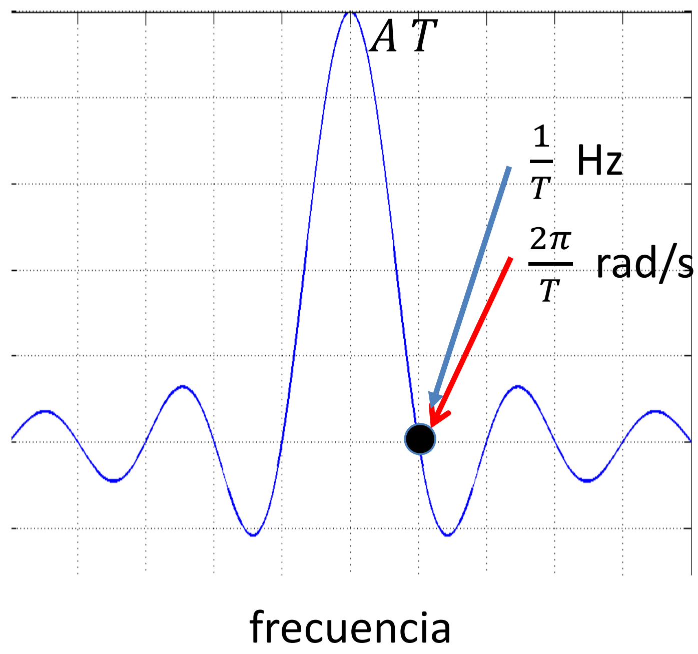
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

- $|X(\omega)|^2$ se conoce con el nombre de **densidad espectral de energía.**

$$\boxed{\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \\ E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad \text{julios/Hz} \end{aligned}}$$

Energía de un pulso rectangular



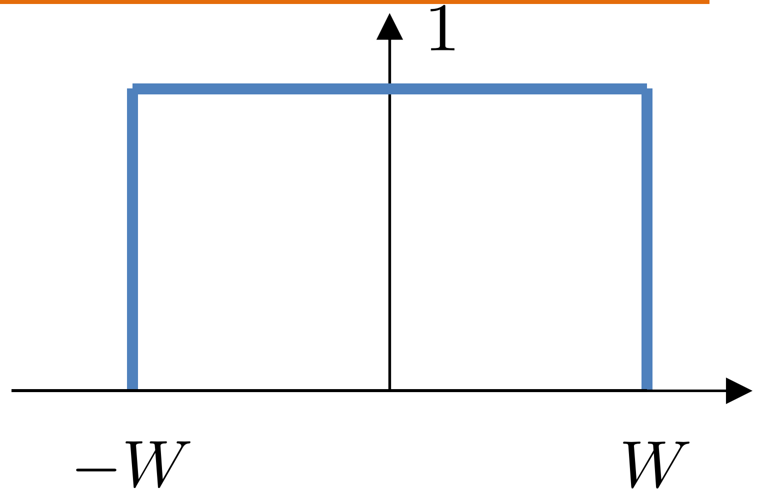


$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = A^2T$$

Energía de una sinc

Calcular la energía de un pulso sinc

$$x(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t} \quad \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}}$$



$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin Wt}{\pi t}\right)^2 dt$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} 1^2 d\omega = \frac{2W}{2\pi} = \frac{W}{\pi}$$

8

Propiedad de convolución

Propiedades de convolución

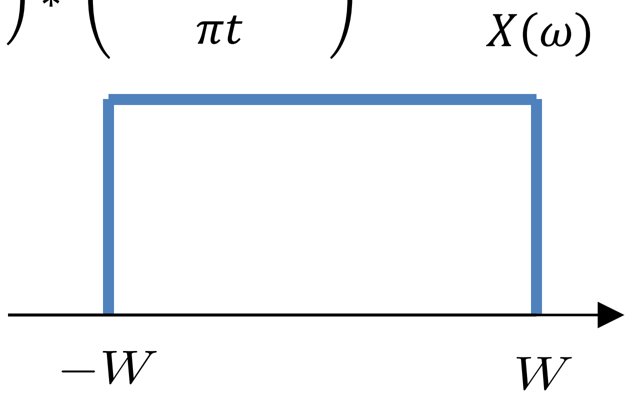
Sean $x(t)$ y $h(t)$ dos señales cuya Transformada de Fourier (TF) es $X(\omega)$ y $H(\omega)$, respectivamente:

$$x(t) * h(t) \quad \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} \quad X(\omega) \,.\, H(\omega)$$

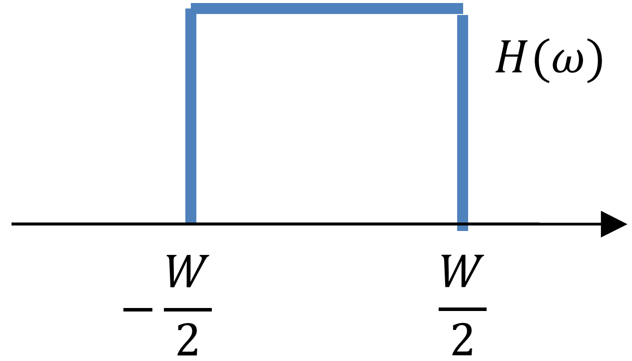
Convolución de dos sinc

$$y(t) = x(t) * h(t) = \left(\frac{\sin Wt}{\pi t}\right) * \left(\frac{\sin(Wt/2)}{\pi t}\right)$$

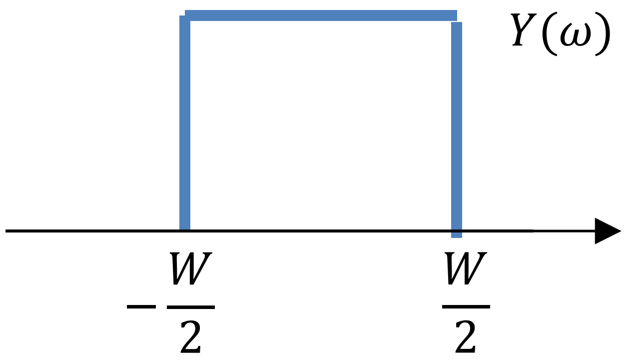
$$x(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t} \quad \overset{TF\{\cdot\}}{\longleftrightarrow}$$



$$h(t) = \frac{\sin(Wt/2)}{\pi t} \quad \overset{TF\{\cdot\}}{\longleftrightarrow}$$



$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \overset{TF\{\cdot\}}{\longleftrightarrow}$$



TEMA 2: Representación en frecuencia