Señales básicas

Constante $x(t) = A$

Escalón unidad $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$

Pulso rectangular $p_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

Señal signo $\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$

Señal rampa $r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$

Exponencial unilateral $x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-at} & t > 0 \end{cases}$

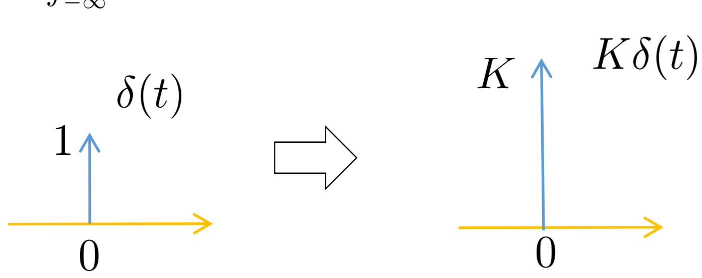
Sinc $x(t) = \operatorname{sinc}(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$

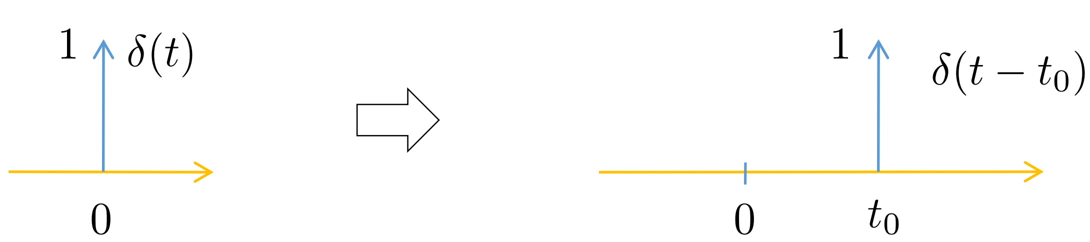
Delta de Dirac

$\delta(t) = 0 \quad \text{cuando} \quad t \neq 0$

$\delta(0) \to \infty$

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$



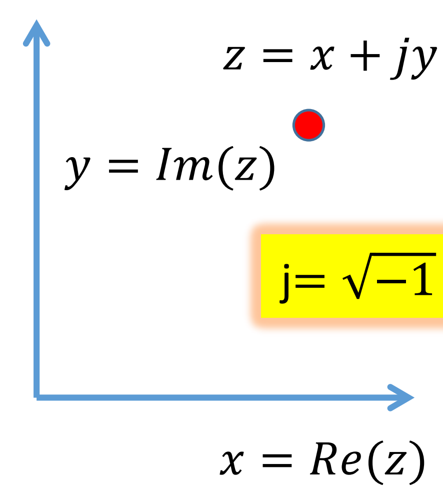


Coseno

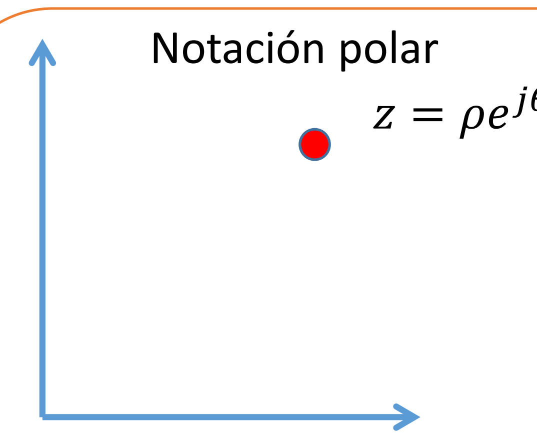
$$x(t) = A\cos(2\pi f t + \phi)$$

$$\begin{aligned} x(t - t_0) &= A\cos(\omega(t - t_0)) \\ &= A\cos(\omega t - \omega t_0) \\ &= A\cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \qquad \phi = -\omega t_0 = -2\pi \frac{t_0}{T_0}$$

Notación cartesiana



Notación polar



$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = atan\left(\frac{y}{x}\right)$

Relación de Euler

$e^{\pm j\theta} = \cos(\theta) \pm j\, sen(\theta)$

$cos(\theta) = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$

$sen(\theta) = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

Operaciones

Escalado en amplitud $y(t) = ax(t)$

Escalado en tiempo $y(t) = x(at)$

Inversión en tiempo $y(t) = x(-t)$

Desplazamiento en tiempo $y(t) = x(t - t_0)$

Integración en tiempo $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$

Derivación en tiempo $y(t) = dx(t)/dt$

Suma de señales $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$

Multiplicación de señales $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

Convolución de señales

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Propiedades de la convolución

Conmutativa:

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Asociativa:

$$y(t) = x(t) * \big(g(t) * h(t)\big) = (x(t) * g(t)) * h(t)$$

Distributiva:

$$y(t) = x(t) * \big(g(t) + h(t)\big) = x(t) * g(t) + x(t) * h(t)$$

Multiplicación por escalar:

$$y(t) = a\big(x(t) * h(t)\big) = ax(t) * h(t)$$

Energía y potencia

Energía de una señal en un intervalo $E_x^T = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$

Energía de una señal $E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt$

Potencia en un intervalo $P_x^T = \dfrac{E_x^T}{T} = \dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$

Potencia media de una señal $P_x = \lim_{T\to\infty} \dfrac{E_x^T}{T} = \lim_{T\to\infty} \dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$

Transformada de Fourier

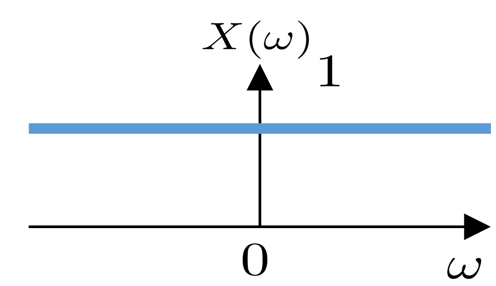
Ecuación de análisis $$X(\omega) = TF\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Ecuación de síntesis $$x(t) = TF^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

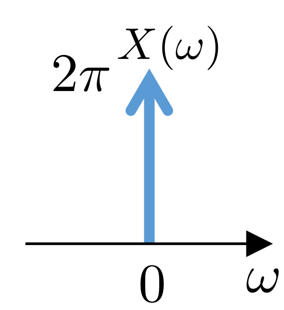
Dominio del tiempo $$x(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega)$$ **Dominio de la frecuencia**

Escalón unidad $$u(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Impulso unidad $$x(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega) = 1$$



Señal constante $$x(t) = 1 \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$



Pulso de duración T $$x(t) = \begin{cases} A & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega) = 2A\frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega}$$

Sinc $$x(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t} \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega) = \begin{cases} 1 & -W < \omega < W \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Exponencial unilateral

$$x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} \begin{aligned} |X(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \\ \angle X(\omega) &= -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

Señal coseno

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega) = \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$$

Algunas propiedades de la transformada de Fourier

Linealidad $$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$$

Escalado en tiempo $$x(at) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$ $Si\ a > 0$

Desplazamiento en tiempo $$x(t - t_0) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

Desplazamiento en frecuencia $$x(t) e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega - \omega_0)$$

$$x(t) e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega + \omega_0)$$

Inversión en tiempo $$x(-t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(-\omega)$$

Multiplicación $$x(t) y(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$

Convolución $$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega)\, Y(\omega)$$

Relación de Parseval $$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$ julios/Hz

Salida de un filtro real cuando la entrada es un coseno

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \emptyset) \longrightarrow y(t) = A|H(\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \phi + \angle H(\omega_0))$$

Digitalización y transmisión

Fuente

Frecuencia de muestreo: f_s
Nº de bits por muestra: b_c

$$R_b = b_c\, f_s \longrightarrow$$

Modulador

Asumimos $v_b = R_b$
Velocidad de símbolo: v_s
Nº de niveles: $M = 2^b$
Velocidad de bit: $v_b = b v_s$

$\longrightarrow$ *Ancho de banda mínimo* $B = \frac{v_s}{2}$