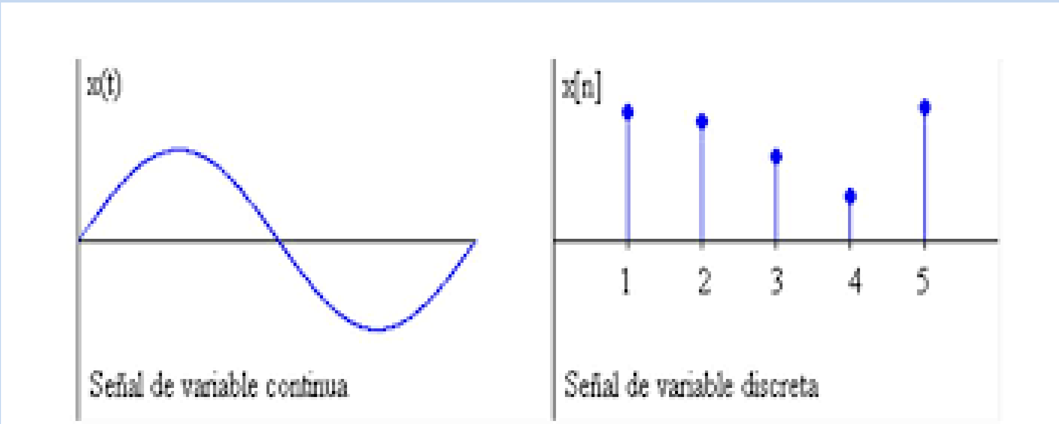
TEMA 1 – PARTE 2:

Representación de señales en el dominio del tiempo



¿Qué veremos?

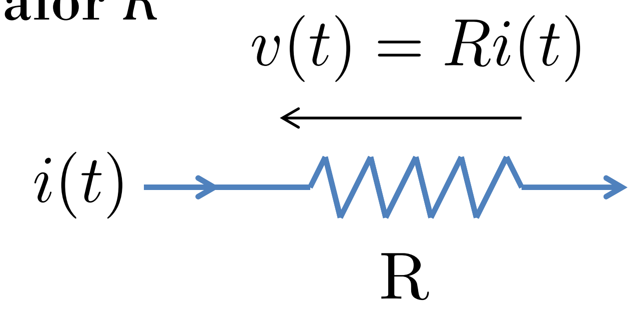
6. Potencia y energía

6

Energía y potencia media de una señal

Potencia instantánea

- Considere una corriente eléctrica $i(t)$ que atraviesa una resistencia de valor R



- El voltaje en la resistencia es $v(t) = R\,i(t)$ (Ley de Ohm)
- La potencia instantánea disipada en la resistencia es

$$p(t) = Ri^2(t) = R\left(\frac{v(t)}{R}\right)^2 = \frac{v^2(t)}{R}$$

- Potencia instantánea cuando R = 1 Ω

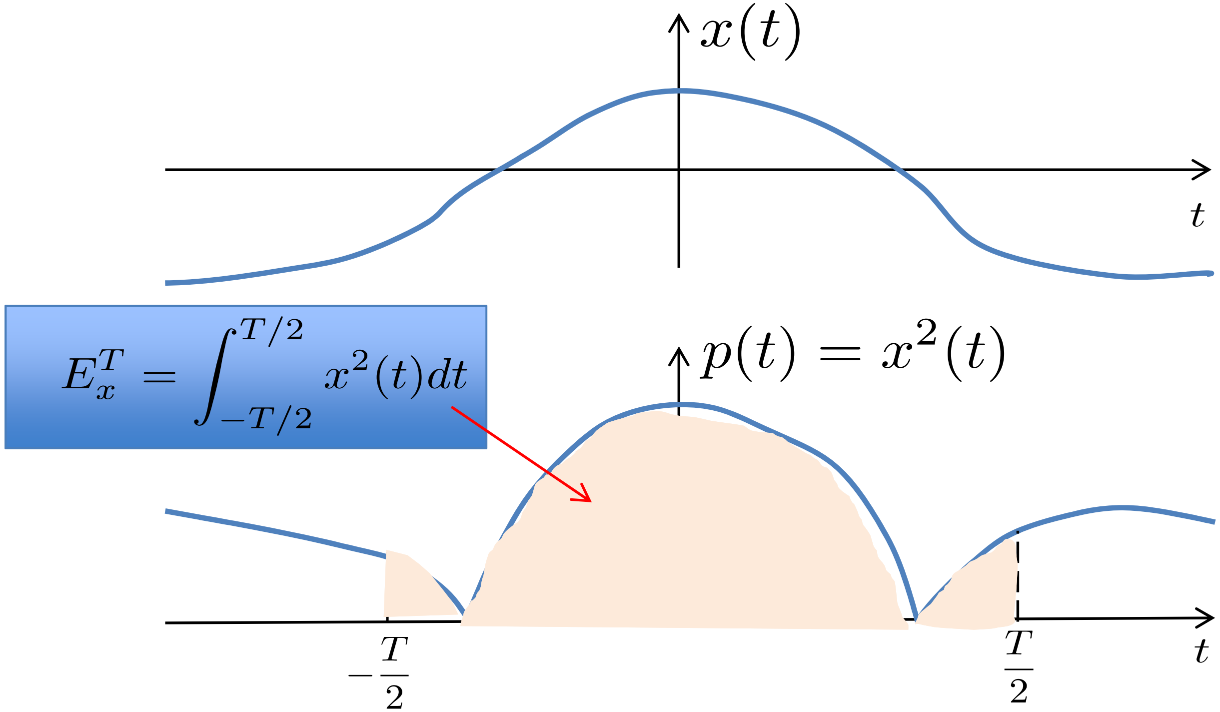
$$p(t) = i^2(t) = v^2(t)$$

Energía disipada en un intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

- Potencia instantánea de una señal $x(t)$ $\qquad p(t) = x^2(t)$

- Energía disipada por x(t) en el intervalo $[-T/2, T/2]$

$$E_x^T = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$$

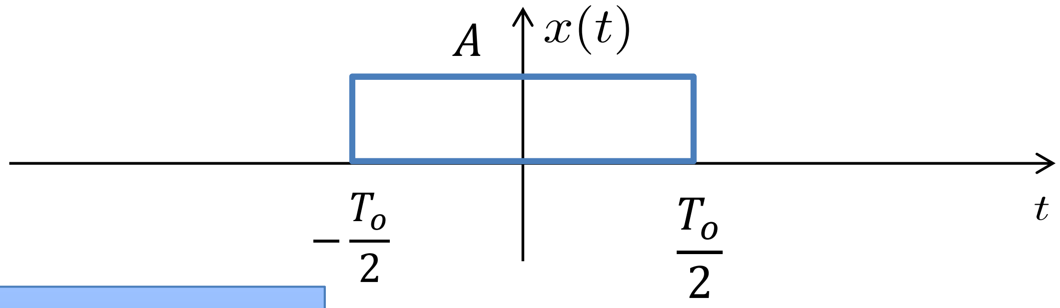


Ejemplo: pulso rectangular

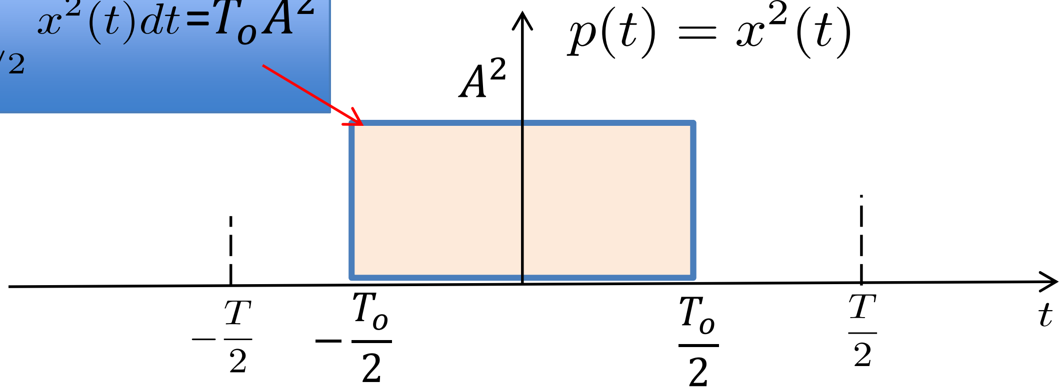
- Potencia instantánea de una señal $x(t)$ $\qquad p(t) = x^2(t)$

- Energía disipada por $x(t)$ en el intervalo $[-T/2, T/2]$

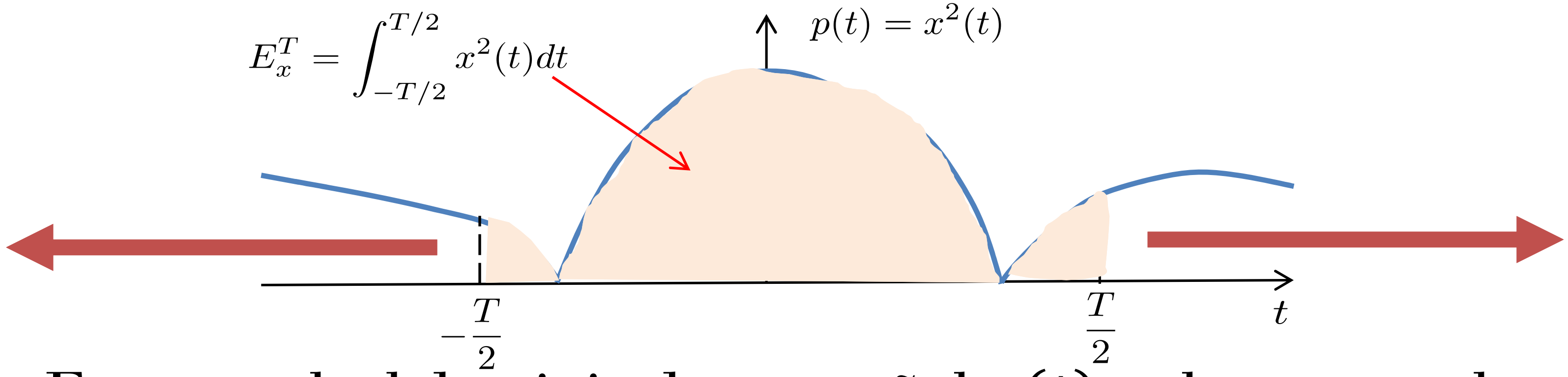
$$E_x^T = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$$



$$E_x^T = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = T_o A^2$$



Energía de una señal



- En general, el dominio de una señal $x(t)$ es la recta real completa $-\infty < t < \infty$. La energía de $x(t)$ se define

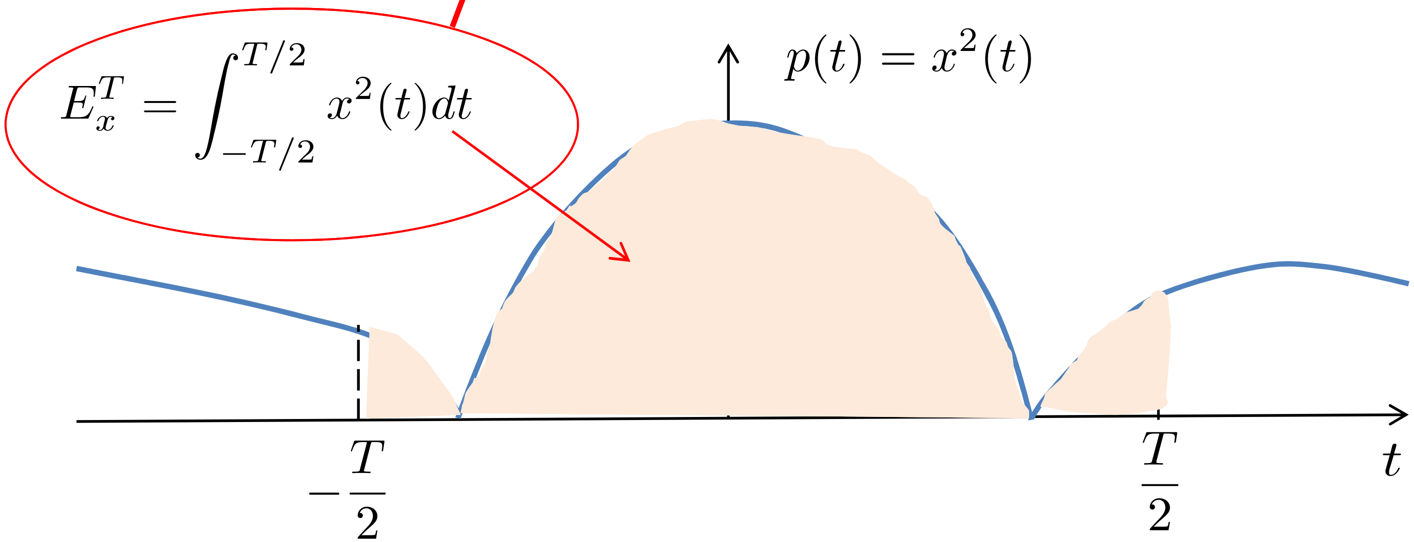
$$E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt$$

- Observar que siempre $E_x \geq 0$ porque $x^2(t) \geq 0$.
- El único caso en que $E_x = 0$ es cuando $x(t) = 0$.
- Cuando $E_x < \infty$ se dice que $x(t)$ es una señal de energía finita. En caso contrario, se dice que es de energía infinita.

Potencia en un intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

- La potencia de $x(t)$ en el intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ se define

$$P_x^T = \frac{E_x^T}{T} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$$



Potencia media de una señal

- La potencia media de una señal

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{E_x^T}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$$

- Observar que siempre $E_x \geq 0 \; y \; Px \geq 0.$
- Si la señal tiene energía finita, también tiene potencia media cero.
- Cuando $0 < P_x < \infty$ se dice que $x(t)$ es una señal de potencia media finita. En este caso, E_x es infinita.
- Existen señales con energía y potencia media infinita.

Resumen

- Energía de una señal en un intervalo

$$E_x^T = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$$

- Energía de una señal

$$E_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt$$

- Potencia en un intervalo

$$P_x^T = \frac{E_x^T}{T} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$$

- Potencia media de una señal

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{E_x^T}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$$

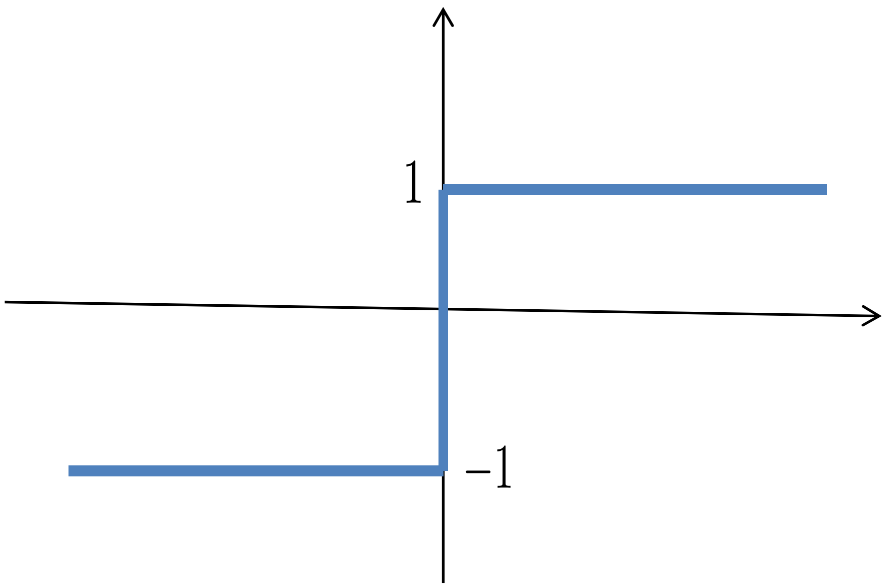
Resumen

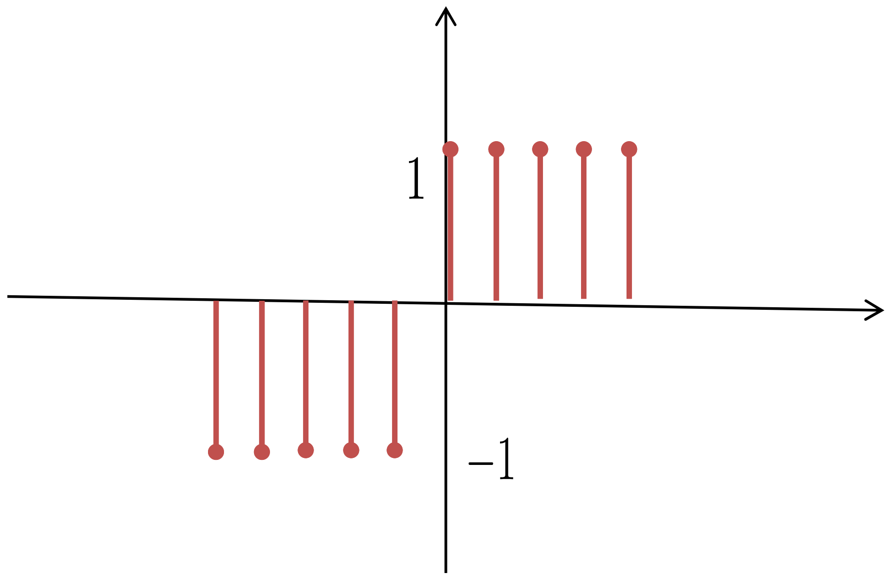
- Energía

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt \qquad\qquad E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

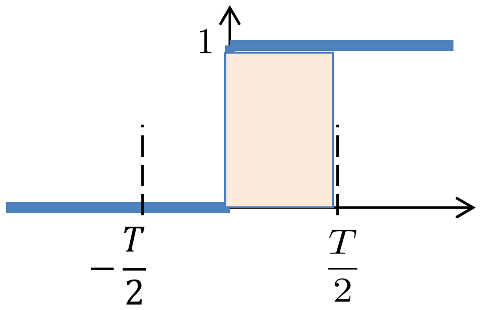
- Potencia media

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \qquad\qquad P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$





Ejemplo 1: escalón unidad



- **La energía en el intervalo $[-T/2, T/2]$ es**

$$E_x^T = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = \int_0^{T/2} 1^2 \cdot dt = t\Big|_0^{T/2} = \frac{T}{2} - 0 = \frac{T}{2}$$

- **La potencia en el intervalo $[-T/2, T/2]$ es**

$$P_x^T = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 1^2 \cdot dt = \frac{1}{T}\, t\Big|_0^{T/2} = \frac{1}{T}\frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 1: escalón unidad (cont.)

La energía de $x(t) = u(t)$ es infinita

$E_x^T = \frac{T}{2}$

$$E_x = \lim_{T\to\infty} E_x^T = \lim_{T\to\infty} \frac{T}{2} = \infty$$

La potencia media de $x(t) = u(t)$ es

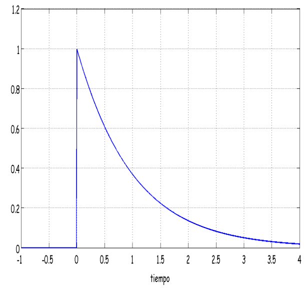
$P_x^T = \frac{1}{2}$

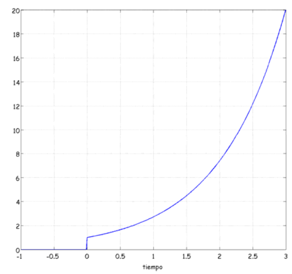
$$P_x = \lim_{T\to\infty} P_x^T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Así pues, el escalón unidad es una señal de potencia media finita.

Ejemplo 2: exponencial unilateral

$x(t) = e^{-at}u(t)$ donde $a \neq 0$.





La energía en el intervalo $[-T/2, T/2]$ es

$$E_x^T = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = \int_0^{T/2} e^{-2at}dt =$$

$$= \left.\frac{e^{-2at}}{-2a}\right|_0^{T/2} = \frac{e^{-aT} - e^0}{-2a} = \frac{1 - e^{-aT}}{2a}$$

$(e^{-at})^2 \; = e^{-2at}$

$$\int_a^b e^{\alpha t}\,dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}$$

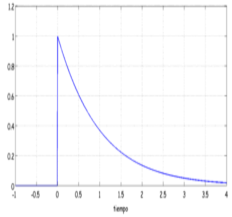
La potencia media en el intervalo $[-T/2, T/2]$ es

$$P_x^T = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} e^{-2at}dt =$$

$$= \left.\frac{e^{-2at}}{-2aT}\right|_0^{T/2} = \frac{e^{-aT} - e^0}{-2aT} = \frac{1 - e^{-aT}}{2aT}$$

Ejemplo 2: exponencial unilateral (cont.)

$$E_x^T = \frac{1 - e^{-aT}}{2a} \qquad P_x^T = \frac{1 - e^{-aT}}{2aT}$$



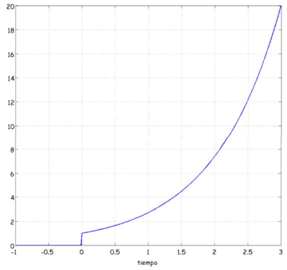
Si $a > 0$ (exponencial decreciente) la energía de $x(t)$ es

$$E_x = \lim_{T \to \infty} E_x^T = \lim_{T \to \infty} \frac{1 - e^{-aT}}{2a} = \frac{1 - e^{-\infty}}{2a} = \frac{1 - 0}{2a} = \frac{1}{2a}$$

La señal exponencial real unilateral decreciente tiene una energía finita. En consecuencia, su potencia media es cero. En efecto,

$$P_x = \lim_{T \to \infty} P_x^T = \lim_{T \to \infty} \frac{1 - e^{-aT}}{2aT} = \frac{1 - e^{-\infty}}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Ejemplo 2: exponencial



Si $a < 0$ (exponencial creciente) la energía de $x(t)$ es infinita. En efecto,

$$E_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1-e^{-aT}}{2a} = \frac{1-e^{+\infty}}{2a} = \frac{1-\infty}{2a} = \frac{-\infty}{2a} = \infty$$

Si $a < 0$ la potencia media es

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1-e^{-aT}}{2aT} = \frac{1-e^{\infty}}{-\infty} = \frac{\infty}{\infty} = ?$$

$$\frac{d\,e^{\alpha t}}{dt} = \alpha e^{\alpha t}$$

Aplicando la regla de L'Hopital para resolver el límite

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{ae^{-aT}}{2a} = \lim_{T\to\infty} \frac{e^{-aT}}{2} = \frac{e^{\infty}}{2} = \infty$$

$a < 0$

La potencia media también es infinita.

Ejemplo 3: señal senoidal

- Consideremos una señal senoidal de amplitud A, frecuencia $\omega=2\pi/T_0$, y fase 0, i.e., $x(t) = Acos(\omega t)$
- La energía en un periodo es

$$E_x^{T_0} = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^2(t)dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2 \cos^2(\omega t)dt$$

- Podemos resolver la integral fácilmente utilizando la siguiente relación trigonométrica

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

Ejemplo 3: señal senoidal (cont.)

- La energía en un periodo es

$$
\begin{aligned}
E_x^{T_0} &= \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2 \frac{1+\cos(2\omega t)}{2} dt \\
&= \frac{A^2}{2} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} dt + \frac{A^2}{2} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos(2\omega t) dt \\
&= \frac{A^2}{2} \left. t \right|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} + \frac{A^2}{2} \left. \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \\
&= \frac{A^2}{2} T_0 + A^2 \frac{\sin(\omega T_0) - \sin(-\omega T_0)}{4\,\omega}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3: señal senoidal (cont.)

- Ahora nos damos cuenta de que

$$\omega = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \omega T_0 = 2\pi \Rightarrow \sin(\omega T_0) = \sin(2\pi) = 0$$

- La energía en un periodo se reduce a

$$E_x^{T_0} = \frac{A^2}{2} T_0$$

- Finalmente, la potencia media es

$$P_x = P_x^{T_0} = \frac{1}{T_0} E_x^{T_0} = \frac{1}{T_0} \frac{A^2}{2} T_0 = \frac{A^2}{2}$$

Ejemplo 3: señal senoidal (cont.)

- Las señales periódicas son todas de energía infinita

- La energía en un periodo (T_0) es $E_x^{T_0} = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^2(t)dt$

- La energía en n periodos es $E_x^{nT_0} = nE_x^{T_0}$

- Por tanto, la energía de una senoidal (y de cualquier señal periódica) es infinita:

$$E_x = \lim_{n\to\infty} nE_x^{T_0} = \infty$$

Ejemplo 3: señal senoidal (cont.)

- La potencia media en un periodo (T_0) es

$$P_x^{T_0} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^2(t)dt = \frac{E_x^{T_0}}{T_0}$$

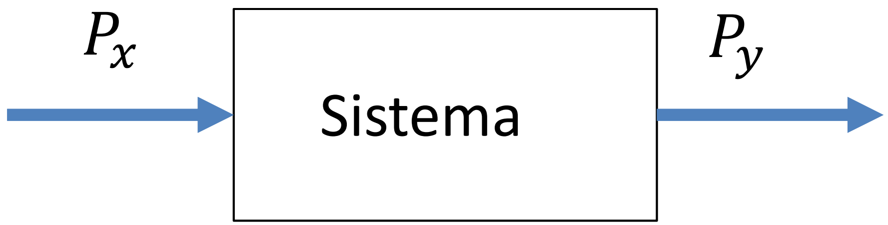
- La potencia media en n periodos es independiente de n

$$P_x^{nT_0} = \frac{nE_x^{T_0}}{nT_0} = \frac{E_x^{T_0}}{T_0} = P_x^{T_0}$$

- Por tanto, la potencia media de una señal periódica es la potencia media en un periodo.

Unidades de SI

- La energía se expresa en Julio (J).
- La potencia se expresa en Vatio o Watt (W = J/s)
- Ganancia:



$$G = \frac{P_y}{P_x}$$

El decibelio (dB) es la unidad más utilizada en el campo de las comunicaciones:

$$G_{dB} = 10\ log_{10}\left(\frac{P_y}{P_x}\right) = 10\ log_{10}(P_y) - 10\ log_{10}(P_x)$$

El decibelio-miliVatio (dBm) toma como referencia 1mW

$$G_{dBm} = 10\ log_{10}\left(\frac{P_y}{1\ mW}\right)$$

Valores típicos

Potencia (dBm)	Potencia (W)	Aplicación
70 dBm	10 kW = 10000 W	Potencia de transmisión típica de una estación de radio FM con un alcance de 50 kilómetros.
60 dBm	1 kW = 1000 W	Máxima potencia de salida de RF permitida sin autorización en emisoras de radio-aficionados.
20 dBm	100 mW = 0.1 W	Potencia típica de un router inalámbrico WiFi 2.4GHz.
15 dBm	32 mW = 0.032 W	Potencia típica de transmisión de WiFi en portátiles.

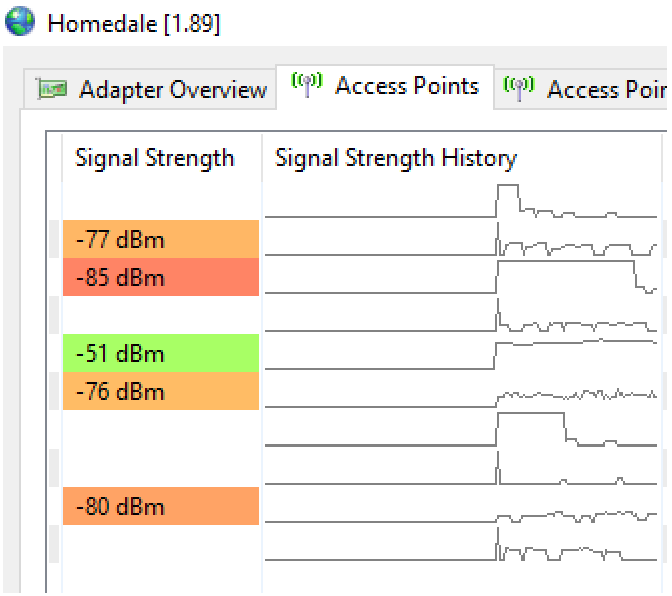
dB vs dBm

- La potencia máxima a la puede emitir un punto de acceso (AP) Wi-Fi en la banda más común (2.4 GHz) es de $Px = 100$ mW.

- Si nuestro dispositivo recibe a $Py = 0{,}00001$ mW, tenemos

$$G_{dB} = 10\ log_{10}\left(\frac{P_y}{P_x}\right) = 10\ log_{10}\left(\frac{0{,}00001}{100}\right) = -70\ dB$$

$$G_{dBm} = 10\ log_{10}\left(\frac{P_y}{1}\right) = 10\ log_{10}(0{,}00001) = -50\ dBm$$



- **-40 a -60**: señal idónea con tasas de transferencia estables.
- **-60**: señal buena, se puede lograr una conexión estable al 80%.
- **-70**: enlace normal -bajo; es una señal medianamente buena, aunque se pueden sufrir problemas.
- **-80**: es la señal mínima aceptable para establecer la conexión; puede ocurrir caídas, que se traducen en corte de comunicación.

TEMA 1 – PARTE 2:

Representación de señales en el dominio del tiempo