Tema 4

Relaciones y grafos

Estas notas se refieren solo a la primera parte del tema, **Relaciones**, y son, únicamente, parte del material de trabajo de los profesores de esta asignatura. Contenidos de este tema se encuentran en los siguientes textos:

- K.H. Rosen, *Matemática Discreta y sus aplicaciones*: capítulos 7, 8 y 9.
- Diestel, R. Graph Theory. Fourth Edition 2010, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, Volume 173. Capítulos 1, 3, y 10.

  (libro online `http://diestel-graph-theory.com/basic.html`).
- A. Vieites, F. Aguado, F. Gago, M. Ladra, G. Vega, C. Vidal, *Teoría de Grafos. Ejercicios resueltos y propuestos. Laboratorio con SAGE*. Paraninfo 2014.

4.1 Relaciones

El concepto de relación está presente en distintas situaciones de nuestra vida cotidiana. Por ejemplo, existe una relación entre el nombre de un alumno, la titulación en la que está matriculado y la nota media de dicho alumno. También existe una relación entre una línea aérea, el número de vuelo, el punto de partida, el destino, la hora de salida y la hora de llegada de un vuelo. Estas relaciones involucran elementos de varios conjuntos y son muy utilizadas para representar bases de datos en informática.

Definición 1. *Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos. Una **relación** $\mathcal{R}$ sobre $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es cualquier subconjunto del producto cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_n$, es decir,*

$$\mathcal{R} \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$$

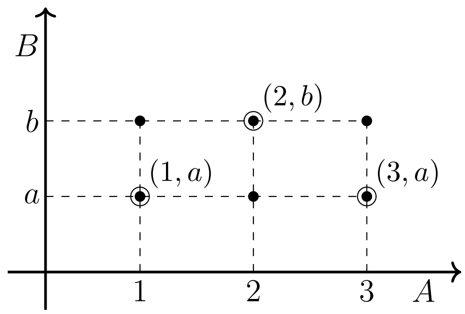


Figura 4.1: $\mathcal{R} \subset A \times B$

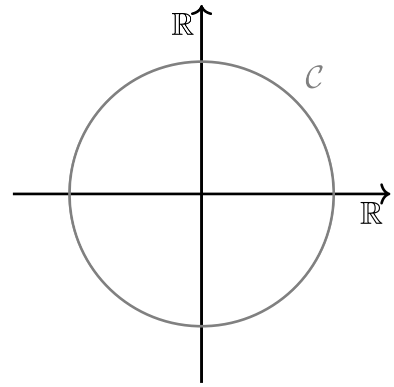


Figura 4.2: $\mathcal{C} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

*Nos centraremos en el caso $n = 2$. Dados dos conjuntos A y B, una **relación binaria** de A en B es un subconjunto cualquiera $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times B$. Si el par ordenado (a, b) pertenece a $\mathcal{R}$, se dice que a está **relacionado** con b, y se denota por $a\mathcal{R}b$. Dado un conjunto A, se llama **relación binaria** en A a cualquier subconjunto $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.*

Ejemplo 1.

i) *Para los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$ es una relación binaria de A en B*

$$\mathcal{R} \subseteq A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

En la Figura 4.1 se muestran mediante puntos los elementos de $A \times B$, y mediante círculos los de $\mathcal{R}$.

ii) *Un ejemplo de relación en $A = \mathbb{R}$ es $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = r^2\}$, siendo r un número real positivo. En la Figura 3.2 se representa el conjunto $\mathbb{R}$ en cada eje cartesiano y toda la superficie del papel en la que se encuentran los ejes constituye el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Los elementos de la relación $\mathcal{C}$ son los puntos de ese plano que verifican la ecuación que la caracteriza. En la figura, esos puntos se encuentran sobre la línea que forma una circunferencia de radio r.*

iii) *Sea A un conjunto de ciudades con aeropuerto. Una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es el conjunto formado por los pares $(a, b) \in A \times A$ definido por*

$$(a, b) \in \mathcal{R} \text{ si, y solo si, existe un vuelo directo entre } a \text{ y } b.$$

iv) *El estado de una partida de un juego de barcos se determina habitualmente en un tablero cuadrado de 100 casillas, ordenadas en 10 filas y 10 columnas numeradas respectivamente del 1 al 10 y de la A a la J, tal como se muestra en la Figura 4.3. Si llamamos X al conjunto*

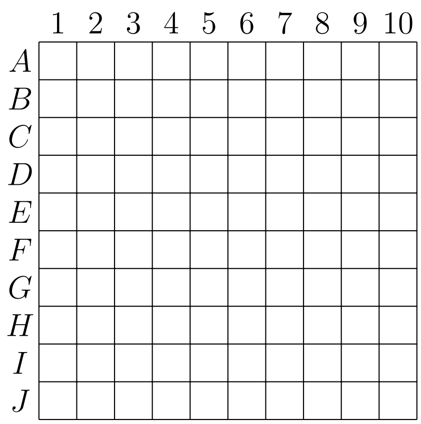


Figura 4.3: Tablero de una partida de barcos: $X \times Y$.

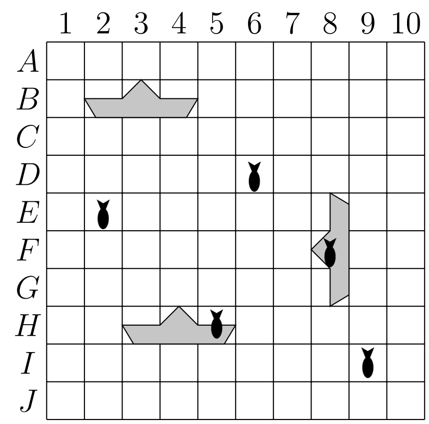


Figura 4.4: Flota de barcos ($\mathcal{F}$) y torpedos disparados ($\mathcal{T}$) en un tablero de barcos ($X \times Y$).

de las filas del tablero e Y al de las columnas, las casillas del tablero son pares ordenados de la forma $(x, y) \in X \times Y$.

La situación de la flota de barcos en el tablero puede considerarse como una relación $\mathcal{F} \subset X \times Y$. En concreto, los barcos que se muestran en el tablero de la Figura 4.4, constituyen la relación:

$$\mathcal{F} = \{(B,2), (B,3), (B,4), (E,8), (F,8), (G,8), (H,3), (H,4), (H,5)\}$$

Por otra parte, los sucesivos intentos de hundir la flota, indicados mediante torpedos, constituyen otra relación $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} = \{(D,6), (E,2), (F,8), (H,5), (I,9)\}$$

Los impactos que los torpedos han producido en los barcos, son la relación intersección entre ambas: $\mathcal{I} = \mathcal{F} \cap \mathcal{T} = \{(F,8), (H,5)\}$.

4.1.1 Propiedades de una relación binaria

Una relación binaria $\mathcal{R}$ en un conjunto A se dice que es:

i) **Reflexiva** si
$$\forall a \in A, \quad a\mathcal{R}a$$

ii) **Simétrica** si
$$\forall a_1, a_2 \in A \quad (a_1\mathcal{R}a_2 \Leftrightarrow a_2\mathcal{R}a_1)$$

iii) **Antisimétrica** si
$$\forall a_1, a_2 \in A \quad [(a_1\mathcal{R}a_2) \wedge (a_2\mathcal{R}a_1) \Longrightarrow a_1 = a_2]$$

iv) **Transitiva** si

$$\forall a_1, a_2, a_3 \in A \quad [(a_1 \mathcal{R} a_2) \wedge (a_2 \mathcal{R} a_3) \Longrightarrow a_1 \mathcal{R} a_3]$$

Ejemplo 2.

i) Para $A = \{1, 2, 3\}$

(a) $\mathcal{R}_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2)\}$ *no es reflexiva, pues* $(3,3) \notin \mathcal{R}_1$*, sí es simétrica y no es transitiva, pues* $(3,2) \in \mathcal{R}_1$ *y* $(2,3) \in \mathcal{R}_1$ *pero* $(3,3) \notin \mathcal{R}_1$*.*

(b) $\mathcal{R}_2 = \{(1,1), (2,2), (1,2), (3,3), (2,3)\}$ *es reflexiva, no es simétrica (porque* $(1,2) \in \mathcal{R}_2$ *pero* $(2,1) \notin \mathcal{R}_2$*), sí es antisimétrica y no es transitiva (porque* $(1,2) \in \mathcal{R}_2$ *y* $(2,3) \in \mathcal{R}_2$ *pero* $(1,3) \notin \mathcal{R}_2$*).*

(c) $\mathcal{R}_3 = \{(2,2), (1,2), (2,1), (2,3)\}$ *no es reflexiva (ya que* $(3,3) \notin \mathcal{R}_3$*), no es simétrica (porque* $(2,3) \in \mathcal{R}_3$ *pero* $(3,2) \notin \mathcal{R}_3$*), tampoco es antisimétrica (pues* $(1,2), (2,1) \in \mathcal{R}_3$ *pero* $1 \neq 2$*) y no es transitiva (porque* $(1,2), (2,3) \in \mathcal{R}_3$ *pero* $(1,3) \notin \mathcal{R}_3$*).*

(d) $\mathcal{R}_4 = \{(1,1), (2,2)\}$ *es simétrica, antisimétrica y transitiva, pero no reflexiva.*

ii) En el conjunto de los números naturales, la relación $\leq$ *"ser menor o igual que" es reflexiva, antisimétrica y transitiva. También lo es en los conjuntos* $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ *y* $\mathbb{R}$*,*

iii) Dado cualquier conjunto A*, la relación de inclusión en el conjunto* $\mathcal{P}(A)$

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A), \qquad (X, Y) \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow X \subseteq Y$$

es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

iv) Dados dos números enteros x *e* y*, se dice que* x ***divide a*** y *si existe un número entero* m *tal que* $y = x \cdot m$ *(se denota por* $x|y$*). Es fácil comprobar que la relación* $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\,;\ x|y\}$ *es reflexiva y transitiva. Cuando la restringimos a un subconjunto* A *de números enteros del mismo signo, es decir* $A \subseteq \mathbb{Z}^+$ *o* $A \subseteq \mathbb{Z}^-$*, verifica además la propiedad antisimétrica.*

v) En el conjunto de personas que asisten a una fiesta, se define la relación $A \mathcal{R} B$ *si, y solo si,* A *y* B *tienen la misma edad. La relación* $\mathcal{R}$ *es reflexiva, simétrica y transitiva.*

4.1.2 Representación de relaciones binarias

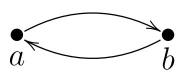
Hay varias formas de representar una relación entre conjuntos finitos. Una de ellas es enumerar sus pares ordenados como en Ejemplo 1 *i)* y Ejemplo 2 *i)*. Otra forma importante de representar relaciones binarias en conjuntos finitos es con grafos dirigidos[1]. Intuitivamente, un grafo dirigido de una relación binaria en A, consiste en dibujar tantos puntos (vértices) como elementos tenga A y, para $a, b \in A$, una flecha de a a b si $(a, b) \in \mathcal{R}$ o, lo que es lo mismo, si $a\mathcal{R}b$.

[1] La teoría de grafos será tratada en detalle en la Sección 3.2. Incluímos aquí los grafos dirigidos para poder hablar de los diagramas de Hasse.

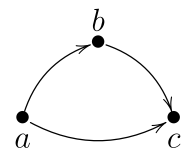
$a\,\mathcal{R}\,b$

En el grafo se visualizan las distintas propiedades de la relación. Por ejemplo, la relación es reflexiva si, y sólo si, existe un lazo (flecha que une un punto consigo mismo) en cada vértice; la relación es simétrica si entre cada dos vértices distintos existen dos flechas (en distinto sentido) o no existe ninguna, y es antisimétrica si entre cada dos vértices distintos existe una flecha o no existe ninguna.

$a\,\mathcal{R}\,a$



$a\,\mathcal{R}\,b \;\Leftrightarrow\; b\,\mathcal{R}\,a$

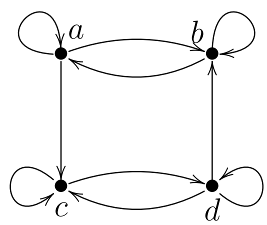


$[a\,\mathcal{R}\,b \;\wedge\; b\,\mathcal{R}\,c] \Rightarrow a\,\mathcal{R}\,c$

Ejemplo 3. *Se considera en el conjunto* $A = \{a, b, c, d\}$ *la relación binaria* $\mathcal{R}$ *dada por los pares*

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d)\};$$

podemos representar $\mathcal{R}$ *de la forma siguiente:*



4.1.3 Relaciones de equivalencia

Definición 2. *Una relación* $\mathcal{R}$ *en un conjunto* A *se dice que es una* ***relación de equivalencia*** *si satisface las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.*

A partir de ahora utilizaremos el símbolo $\sim$ para referirnos a una relación de equivalencia. Las relaciones de equivalencia son importantes porque nos permiten agrupar los elementos del conjunto A en *clases*.

Definición 3. *Sea* $\sim$ *una relación de equivalencia en un conjunto* A*. Se llama* ***clase de equivalencia*** *del elemento* $a \in A$*, y se denota por* $[a]$*, al conjunto de elementos relacionados con* a*:*

$$[a] = \{x \in A\,;\, x \sim a\}$$

Ejemplo 4.

i) En $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$*,* $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$ *es una relación de equivalencia cuyas clases de equivalencia son*

$$[1] = \{1, 2\} = [2], \quad [3] = \{3, 4\} = [4], \quad [5] = \{5\}$$

ii) *En $\mathbb{Z}$, la relación*

$$a \equiv_2 b \Longleftrightarrow a - b \text{ es un múltiplo de } 2$$

es una relación de equivalencia. La relación de equivalencia $\equiv_2$ divide a los elementos del conjunto $\mathbb{Z}$ en dos clases de equivalencia, $P = \{$los números pares$\}$ e $I = \{$los números impares$\}$.

iii) *La relación anterior se puede generalizar considerando cualquier entero positivo m y definiendo:*

$$a \equiv_m b \Longleftrightarrow a - b \text{ es un múltiplo de } m \Longleftrightarrow a - b = \lambda \cdot m;\ \lambda \in \mathbb{Z}$$

Veamos que también es una relación de equivalencia:
- Reflexiva: Para cada $a \in \mathbb{Z}$ se verifica que $a - a = 0 = 0 \cdot m;\ 0 \in \mathbb{Z}$
- Simétrica: Si a y b son enteros cualesquiera tales que $a \equiv_m b$, entonces $a-b = \lambda \cdot m;\ \lambda \in \mathbb{Z}$, de lo que se deduce que $b - a = (-\lambda) \cdot m;\ -\lambda \in \mathbb{Z}$ y, por lo tanto, $b \equiv_m a$.
- Transitiva: Si a, b y c son enteros cualesquiera tales que $a \equiv_m b$ y $b \equiv_m c$, entonces existen enteros λ, β tales que $a - b = \lambda \cdot m$ y $b - c = \beta \cdot m$. Si se suman miembro a miembro ambas ecuaciones, se obtiene que $a - c = (\lambda + \beta) \cdot m$ y, entonces, $a \equiv_m c$.

Un número entero x pertenece a la clase de equivalencia $[r]$ ($0 \leq r \leq m-1$) si r es el resto de la división de x entre m.

En esta relación hay m clases de equivalencia, $[0]$, $[1], \ldots, [m-1]$.

$$x \in [a] \Longleftrightarrow x \equiv_m a \Longleftrightarrow x - a = \lambda \cdot m;\ \lambda \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow x = a + \lambda \cdot m;\ \lambda \in \mathbb{Z}$$

Por ejemplo, para $m = 3$
$[0] = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6,\ 9, \ldots\} = [-3] = [3]$
$[1] = \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\} = [-2] = [4]$
$[2] = \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\} = [-1] = [5]$

iv) *En el ejemplo v) de la pág. 80, cada clase de equivalencia de la relación la forman las personas de la misma edad:*

$$[a] = \{b \mid b \text{ es una persona en la fiesta con la misma edad que } a\}.$$

En estos ejemplos puede observarse que dos elementos que están relacionados determinan la misma clase de equivalencia y, por tanto, una clase de equivalencia puede representarse por cualquiera de sus elementos. Además, las clases de equivalencia de dos elementos que no están relacionados son conjuntos disjuntos. Esto se verifica para cualquier relación de equivalencia:

Propiedades 1. *Sea $\sim$ una relación de equivalencia en un conjunto A y sean a_1, $a_2 \in A$. Entonces:*

i) $a_1 \sim a_2 \Longleftrightarrow [a_1] = [a_2]$

ii) $a_1 \not\sim a_2 \Longleftrightarrow [a_1] \cap [a_2] = \emptyset$.

Demostración.

i) Si $a_1 \sim a_2$ y $x \in [a_1]$, entonces $x \sim a_1$ y $a_1 \sim a_2$ y, por la propiedad transitiva, se deduce que $x \sim a_2$, es decir $x \in [a_2]$. Recíprocamente, si las clases de equivalencia coinciden, entonces $a_1 \in [a_1] = [a_2]$, es decir, $a_1 \sim a_2$.

ii) Si $a_1 \not\sim a_2$ y $x \in [a_1] \cap [a_2]$, entonces $a_1 \sim x$ y $x \sim a_2$, por tanto $a_1 \sim a_2$, lo que contradice la hipótesis de partida. El recíproco es análogo. □

De estas propiedades se deduce el siguiente teorema.

Teorema 1. *Sea $\sim$ una relación de equivalencia en un conjunto A, $A \neq \emptyset$. La familia de las distintas clases de equivalencia es una partición de A.*

Demostración. Puesto que $a \in [a]$ para cada elemento a de A, las clases de equivalencia son no vacías y la unión de todas ellas es A; así, la primera propiedad de partición se satisface. La segunda propiedad de una partición, que exige que los miembros de la familia sean disjuntos dos a dos, se deduce inmediatamente del apartado *ii)* de Propiedades 1. □

Definición 4. *Dada una relación de equivalencia $\sim$ definida en un conjunto A, se llama* ***conjunto cociente*** *de A respecto a la relación $\sim$, y se denota por $A/\sim$, al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia determinadas en A por $\sim$.*

Ejemplo 5. *Si consideramos la relación de equivalencia vista en el Ejemplo 4 i), el conjunto cociente $A/\mathcal{R}$ es*

$$A/\mathcal{R} = \{[1], [3], [5]\} = \{[2], [4], [5]\} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$$

Para la relación de equivalencia vista en el Ejemplo 4 ii) y iii), el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\equiv_m$ tiene m elementos. Este conjunto se denota por $\mathbb{Z}_m$ y recibe el nombre de conjunto de las clases de restos módulo m. Por ejemplo:

$$\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}, \quad \mathbb{Z}_3 = \{[0], [1], [2]\}, \quad \mathbb{Z}_7 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6]\}.$$

Se verifica también que:
Dada una partición de un conjunto A, puede definirse en él una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ tal que el conjunto cociente $A/\mathcal{R}$ coincida con la partición dada. Por ejemplo, en $A = \{a, b, c, d\}$ la partición $\{\{a, b, c\}, \{d\}\}$ determina la relación de equivalencia

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (d, d)\}$$

que cumple $A/\mathcal{R} = \{\{a, b, c\}, \{d\}\}$.

4.1.4 Relaciones de orden

Muchos conjuntos tienen un orden natural en sus elementos. Probablemente el ejemplo más familiar es el conjunto de los números reales ordenados por su “magnitud”: estamos acostumbrados a afirmaciones como $3 \leq \pi$, $x^2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ distinto de cero, etc.

Definición 5. *Una relación binaria $\preccurlyeq$ en A se dice* **relación de orden** *si verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. El par $(A, \preccurlyeq)$ recibe el nombre de* **poset***.*

Ejemplo 6. *El par $(\mathbb{Z}^+, |\ )$ es un poset ya que la relación de divisibilidad en el conjunto de enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ es de orden. Sin embargo, el par $(\mathbb{Z}^+, <)$ no es un poset ya que $<$ no es reflexiva.*

Una relación de orden $\preccurlyeq$ en un conjunto A es de **orden total** si dados dos elementos cualesquiera a, b de A, siempre se pueden comparar, es decir, o se cumple $a \preccurlyeq b$ o se cumple $b \preccurlyeq a$. Un ejemplo de orden total es la relación $\leq$ en $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, mientras que las relaciones de inclusión, $\subseteq$, y de divisibilidad, $|$, no son de orden total: $3 \nmid 2$ y $2 \nmid 3$ y $\{a\} \nsubseteq \{b\}$ y $\{b\} \nsubseteq \{a\}$.

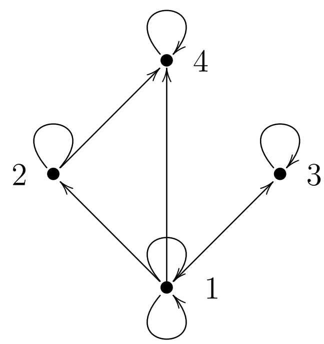
Ejemplo 7. Orden Lexicográfico. *Sea $(L, \preccurlyeq)$, donde L es un conjunto finito y $\preccurlyeq$ una relación de orden total en L, y sea L^* el conjunto de las palabras de longitud finita que se pueden formar con los elementos de L. El orden de L se extiende a un orden total en L^*, llamado orden lexicográfico (orden del diccionario), de la forma siguiente:*
Sean $l_1 l_2 \ldots l_p$ y $l'_1 l'_2 \ldots l'_q$ elementos de L^*, $l_1 l_2 \ldots l_p \preccurlyeq l'_1 l'_2 \ldots l'_q$ si se cumple:
a) para algún $k < p$, se tiene que $l_i = l'_i$ (con $i = 1, \ldots, k$), $l_{k+1} \preccurlyeq l'_{k+1}$, $l_{k+1} \neq l'_{k+1}$ (por ejemplo, lámina y lápiz), o
b) $p \leq q$ y $l_i = l'_i$, para $i = 1, \ldots, p$ (por ejemplo, orden y ordenar).

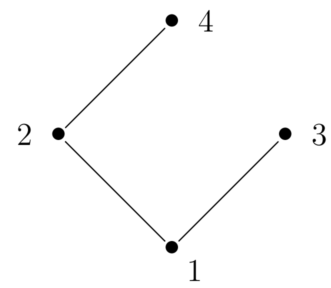
El diagrama de Hasse de un poset finito $(A, \preccurlyeq)$

Un diagrama de Hasse de una relación de orden sobre un conjunto A es una representación simplificada del grafo de la relación. Se representan los elementos del conjunto A por vértices y se tiene en cuenta que no es necesario dibujar las flechas que se deducen de las propiedades de la relación. En concreto:
- puesto que la relación es reflexiva, se sabe que cada elemento está relacionado consigo mismo y se simplifica el grafo no dibujando los lazos;
- transitiva: se sabe que si $x \preccurlyeq z$ y $z \preccurlyeq y$, entonces $x \preccurlyeq y$; por ello, en ese caso, se omite la flecha que va desde x hasta y (es decir, se dibuja una arista del vértice x al vértice y si $x \preccurlyeq y$ y no existe otro elemento $z \in A$ tal que $x \preccurlyeq z$ y $z \preccurlyeq y$).

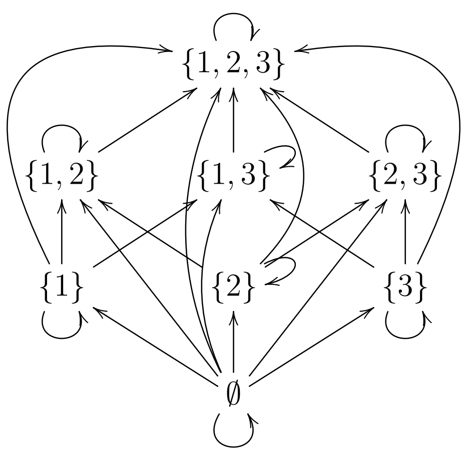
Además se adopta el convenio de leer el diagrama de abajo hacia arriba, con lo cual no es necesario dirigir las aristas. De esta forma, un par de elementos distintos de A están relacionados si, y solo si, existe un camino ascendente entre sus correspondientes vértices del diagrama de Hasse.

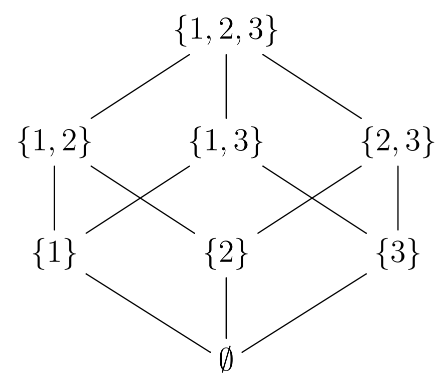
Ejemplo 8. *A continuación se muestra el grafo dirigido y el correspondiente diagrama de Hasse de la relación “ser divisor” en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$:*





Ejemplo 9. *Consideremos el poset* $(P(\{1,2,3\}),\subseteq)$. *Un grafo dirigido que representa esta relación de orden y su diagrama de Hasse son los siguientes:*





Elementos distinguidos en un poset

Hemos visto que el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales con el orden $\leq$ es un poset. Algunos subconjuntos de los números reales ordenados de este modo tienen un elemento "mayor" y otros no, de igual modo un elemento "menor" y otros no. Por ejemplo, el subconjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros no tiene ni mayor ni menor elemento; el conjunto de los enteros positivos $\mathbb{Z}^+ = \{1,2,3,4,\ldots\}$ tiene menor elemento, el 1, pero no mayor elemento.

Podemos comprobar que cualquier subconjunto finito de $\mathbb{R}$ tiene un menor elemento y un mayor elemento con respecto al orden $\leq$. Esto no siempre sucede en todo poset finito. Por ejemplo, consideremos el conjunto de todos los *subconjuntos* B de $\{a,b,c\}$ tales que $B \subset \{a,b,c\}$ ordenados por la inclusión $\subseteq$; el elemento menor es el $\emptyset$, sin embargo no existe un "mayor" elemento. Formalizamos esta idea con la siguiente definición.

Definición 6. *Sea* $(P,\preccurlyeq)$ *un poset.*

i) Un elemento $a \in P$ *es un elemento* ***maximal*** *de* P *si no existe* $x \in P$ *tal que* $a \preccurlyeq x$ *y* $a \neq x$ *(es decir, no hay elementos en* P *"estrictamente mayores" que* a*). Equivalentemente, para* *todo $x \in P$, si $a \preccurlyeq x$ entonces $a = x$.*

$$a \text{ maximal de } P \iff \neg\exists x \in P \;\; [a \preccurlyeq x \;\wedge\; a \neq x] \iff \forall x \in P \;\; [a \preccurlyeq x \;\Rightarrow\; a = x]$$

ii) *Un elemento $b \in P$ es un elemento **minimal** de P si no existe $x \in P$ tal que $x \preccurlyeq b$ y $x \neq b$ (es decir, no hay elementos en P "estrictamente menores" que b). Equivalentemente, para todo $x \in P$, si $x \preccurlyeq b$ entonces $x = b$.*

$$b \text{ minimal de } P \iff \neg\exists x \in P \;\; [x \preccurlyeq b \;\wedge\; x \neq b] \iff \forall x \in P \;\; [x \preccurlyeq b \;\Rightarrow\; x = b]$$

iii) *Un elemento $M \in P$ es **máximo** de P si $x \preccurlyeq M$, para todo $x \in P$*

$$M \text{ es máximo de } P \iff \forall x \in P \;\; [x \preccurlyeq M]$$

iv) *Un elemento $m \in P$ es **mínimo** de P si $m \preccurlyeq x$, para todo $x \in P$*

$$m \text{ es mínimo de } P \iff \forall x \in P \;\; [m \preccurlyeq x]$$

Proposición 1. *Se verifican los siguientes enunciados:*

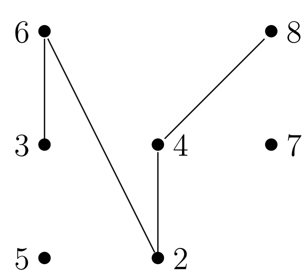
i) *El máximo, si existe, es único.*

ii) *El mínimo, si existe, es único.*

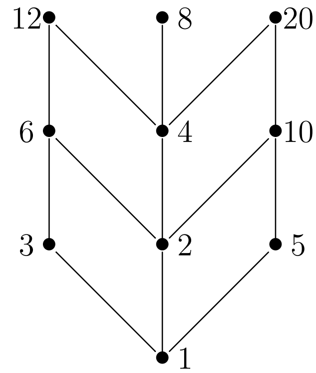
iii) *Si P es finito, P tiene máximo si, y solo si, tiene un único maximal.*

iv) *Si P es finito, P tiene mínimo si, y solo si, tiene un único minimal.*

Ejemplo 10. *Sea $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ordenado por la relación de divisibilidad: $x \preccurlyeq y$ si, y solo si, x divide a y. El conjunto A tiene cuatro elementos minimales, $2, 3, 5, 7$ (si $x \in A$ y x divide a 2 entonces $x = 2$; análogamente para 3, 5 y 7) y tiene cuatro elementos maximales, $5, 6, 7, 8$ (si 5 divide a x entonces $x = 5$; análogamente para $6, 7$ y 8). Sin embargo, A no tiene máximo ni mínimo.*



Ejemplo 11. *En el conjunto $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20\}$, se considera la relación de divisibilidad cuya representación en diagrama de Hasse es la siguiente*



El conjunto P tiene tres maximales, 8, 12 y 20, no tiene por lo tanto máximo; en cambio su mínimo es 1.

Definición 7. *Sea $(P, \preccurlyeq)$ un poset y sea Q un subconjunto de P.*

*i) Un elemento $s \in P$ es una **cota superior de Q en P** si $q \preccurlyeq s$, para cualquier $q \in Q$.*

*ii) Un elemento $f \in P$ es una **cota inferior de Q en P** si $f \preccurlyeq q$, para cualquier $q \in Q$.*

*iii) Un elemento $S \in P$ es **supremo de Q en P** si S es una cota superior de Q en P y, si S' es otra cota superior de Q en P, entonces $S \preccurlyeq S'$.*

*iv) Un elemento $I \in P$ es **ínfimo de Q en P** si I es una cota inferior de Q en P y, si I' es otra cota inferior de Q en P, entonces $I' \preccurlyeq I$.*

Se puede comprobar que, si el conjunto de cotas superiores de Q en P es no vacío, entonces el supremo es el mínimo de dicho conjunto. Igualmente, si el conjunto de cotas inferiores de Q en P es no vacío, entonces el ínfimo es el máximo de dicho conjunto.

Proposición 2. *Se verifican los siguientes enunciados:*

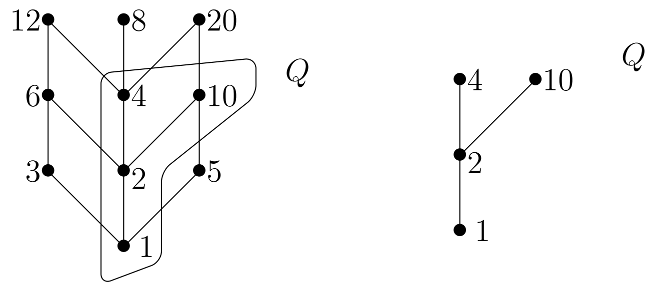
i) El supremo de Q, si existe, es único.

ii) El ínfimo de Q, si existe, es único.

iii) Existe el máximo de Q si, y sólo si, existe el supremo y este es un elemento de Q.

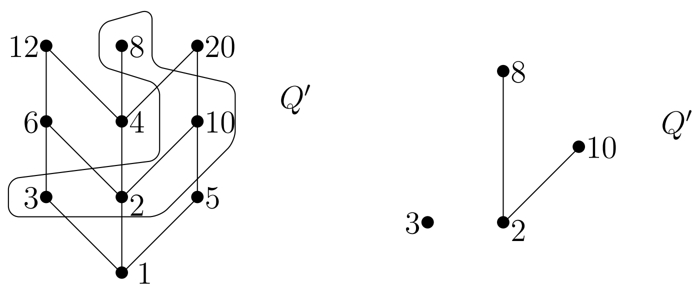
iv) Existe el mínimo de Q si, y sólo si, existe el ínfimo y este es un elemento de Q.

Ejemplo 12. *Tomenos el conjunto P del Ejemplo 11 y consideremos el subconjunto $Q = \{1, 2, 4, 10\}$ de P*



Es fácil ver que Q no tiene máximo porque tiene dos maximales, 4 y 10. La única cota superior de Q en P es 20, por lo tanto es el supremo de Q en P. Por otro lado, el único minimal de Q es 1, también es mínimo de Q e ínfimo de Q en P.

Consideremos, ahora el subconjunto Q' de P dado por $Q' = \{2, 3, 8, 10\}$.



Como vemos, Q' tiene a 3 por maximal y minimal a la vez; 2 es minimal, 8 y 10 son maximales de Q'. La única cota inferior de Q' en P es 1 y, por tanto, es ínfimo. Por otro lado, no hay cotas superiores de Q' en P.

4.2 Grafos

Para esta parte del tema, se seguirán las siguientes secciones del libro:

Teoría de Grafos. Ejercicios resueltos y propuestos. Laboratorio con SAGE
A. Vieites, F. Aguado, F. Gago, M. Ladra, G. Vega, C. Vidal

Sección 1. Primeros conceptos (todo),

Sección 2. Conectividad (todo),

Sección 3. Grafos eulerianos y grafos hamiltonianos (todo, excepto la proposición 3 de la página 38),

Sección 4. Grafos ponderados: solo las definiciones 16 y 17,

Sección 7. Árboles (todo, excepto la sección 7.1).