TEORÍA DE LA COMPUTACIÓN

Grado en Ingeniería Informática

Soluciones del Boletín de Ejercicios nº 1

Preliminares matemáticos

Esta sección propone una serie de ejercicios de repaso sobre lógica elemental, teoría de conjuntos, relaciones y funciones, inducción matemática y cardinalidad.

1. Demuestre que la siguiente proposición no es una tautología: $(P \to Q) \leftrightarrow (Q \to P)$.

   Solución:

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \leftrightarrow (Q \to P)$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

2. Dados dos conjuntos A y B, ¿es cierto que $2^A \cup 2^B = 2^{A\cup B}$?

   Solución:

$$\begin{array}{rl}
A = \{a,b\} & 2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\} \\
B = \{c\} & 2^B = \{\emptyset, \{c\}\} \\
 & 2^A \cup 2^B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{c\}\} \\
 & \\
A \cup B = \{a,b,c\} & 2^{A\cup B} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} \\
 & \\
 & 2^A \cup 2^B \neq 2^{A\cup B}
\end{array}$$

3. Demuestre por inducción la siguiente proposición: $n + 3 < 5 \times (n + 1), \forall n \in \mathbb{N}$.

   Solución:

   Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n + 3 < 5\ (n + 1)\}$.
   Debemos demostrar que $A = \mathbb{N}$.

   Si $n = 0$, $n + 3 = 3$ y $5\ (n + 1) = 5$.
   Dado que $3 < 5$, la proposición es cierta.

   Suponemos que $n \in A$ y probamos que $(n + 1)$ también pertenece a A:
   $\boxed{\text{5 ((n+1)+1)}} = 5n + 10 = 5\ (n + 1) + 5 \boxed{>} (n + 3) + 5 > (n + 3) + 1 = \boxed{\text{(n+1)+3}}$.

   Dado que $n + 1 \in A$ cuando $n \in A$, entonces $A = \mathbb{N}$ y la proposición es cierta para todos los números naturales.

4. Dados los conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{-1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$, indique cuáles de las siguientes relaciones son funciones totales, cuáles son funciones parciales y cuáles no son funciones:

   a) $f = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

b) $f = \{(0,1),(1,\frac{1}{2}),(2,1),(3,\frac{3}{2})\}$

c) $f = \{(0,0),(1,1),(1,3),(2,4)\}$

d) $f = \{(0,0),(1,-1),(3,2)\}$

e) $f = \{(0,0)\}$

Solución:

a) Función total. Inyectiva (porque todos los elementos del dominio tienen imágenes diferentes). No sobreyectiva (porque no cubre todo el codominio).

b) Función total. No inyectiva. No sobreyectiva.

c) No función (porque el elemento 1 tendría dos imágenes).

d) Función parcial.

e) Función parcial.

5. ¿Un conjunto puede tener la misma cardinalidad que alguno de sus subconjuntos propios? Razone la respuesta.

Solución:

Sí. Por ejemplo, $\mathbb{N}$ (los naturales) y $\mathbb{P}$ (los pares). Aunque $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$, ambos tienen la misma cardinalidad, ya que podemos establecer entre ellos la siguiente función biyectiva :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{P} \\ n &\rightsquigarrow 2n \end{aligned}$$

Alfabetos, palabras y lenguajes

Esta sección propone una serie de ejercicios de repaso sobre las definiciones de alfabeto, palabra y lenguaje, y sobre las operaciones que se pueden realizar con las palabras y con los lenguajes.

6. Sea Σ un alfabeto. ¿Es cierto que Σ^* es infinito numerable? Razone la respuesta.

Solución:

Dado un alfabeto $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, Σ^* es infinito numerable ya que se puede establecer la siguiente correspondencia entre todas las posibles cadenas sobre Σ y los números de $\mathbb{N}$:

Longitud 0:	$\epsilon \to 0$			
Longitud 1:	$a_1 \to 1$	$a_2 \to 2$	$\ldots$	$a_n \to n$
Longitud 2:	$a_1a_1 \to n+1$	$a_2a_1 \to 2n+1$	$\ldots$	$a_na_1 \to n^2+1$
	$a_1a_2 \to n+2$	$a_2a_2 \to 2n+2$	$\ldots$	$a_na_2 \to n^2+2$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$a_1a_n \to 2n$	$a_2a_n \to 3n$	$\ldots$	$a_na_n \to n^2+n$
Longitud 3:	$a_1a_1a_1 \to n^2+n+1$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

7. ¿Quién es $\{\epsilon\}^*$? ¿Quién es $\{\epsilon\}^+$?

   Solución:

   Es $\{\epsilon\}$ en ambos casos.

8. Sean u, v y z cadenas de símbolos sobre un determinado alfabeto. Indique cuál de las siguientes relaciones es falsa:

   a) $(uv)z = u(vz)$
   b) $x\epsilon = \epsilon x$
   c) $|xy| < |x| + |y|$

   Solución:

   La relación c) es falsa. Siempre se cumple que $|xy| = |x| + |y|$.

9. Sea A un lenguaje sobre un alfabeto Σ. ¿Bajo qué condiciones $A^* = A^+$?

   Solución:

   $A^* = A^+$ cuando $\epsilon \in A$.

10. Sea $\Sigma = \{a, b\}$. Considere ahora la siguiente definición recursiva del lenguaje A sobre el alfabeto Σ:

    i. $\epsilon \in A$.
    ii. Si $x \in A$, entonces axb y bxa pertenecen a A.
    iii. Si x e y pertenecen a A, entonces xy pertenece a A.
    iv. Ninguna otra cadena pertenece a A.

    Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

    a) Todas las cadenas de A tienen longitud par.
    b) $aabab \in A$.
    c) $A = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ tiene el mismo número de } a\text{es que de } b\text{es}\}$.
    d) Si $x \in A$, $x^* \in A$.

    Solución:

    La afirmación b) es falsa. No se pueden construir cadenas de longitud impar.

11. Un *palíndromo* es una cadena que se lee igual hacia adelante que hacia atrás. Por ejemplo, la cadena a es un palíndromo, al igual que la cadena $radar$. Escriba una definición recursiva del lenguaje de los palíndromos sobre cualquier alfabeto Σ (obsérvese que ϵ es un palíndromo).

    Solución:

    El lenguaje P de todos los palíndromos sobre un alfabeto Σ puede definirse recursivamente como sigue:

    i. $\epsilon \in P$.

ii. $\sigma \in P$, $\forall \sigma \in \Sigma$.

iii. Si $x \in P$, entonces $\sigma x \sigma \in P$, $\forall \sigma \in \Sigma$.

iv. Ninguna otra cadena pertenece a P.

12. Sean $A = \{\epsilon, ab\}$ y $B = \{cd, e\}$. ¿Cuántas cadenas hay en $A^n B$ para cualquier n arbitrario?

    Solución:

    $A^0 = \{\epsilon\}$, $A^1 = \{\epsilon, ab\}$, $A^2 = \{\epsilon, ab, abab\}$, ...
    Es decir, en general, $|A^n| = n + 1$.
    Y dado que B tiene dos elementos, $|A^n B| = 2 \times (n + 1)$.

Lenguajes regulares

Esta sección propone una serie de ejercicios de repaso sobre las definiciones de lenguaje regular y de expresión regular, y sobre la construcción y manejo de autómatas finitos.

13. Escriba la expresión regular que describe el lenguaje sobre $\{a, b\}$ formado por todas las cadenas que terminan en b.

    Solución:

    $(a \cup b)^* b$

14. Simplifique la expresión regular $(\epsilon \cup aa)(\epsilon \cup aa)^*(ab \cup b) \cup (ab \cup b)$.

    Solución:

$$
\begin{array}{l}
(\epsilon \cup aa)(\epsilon \cup aa)^*(ab \cup b) \cup (ab \cup b) = \\
(\epsilon \cup aa)^+(ab \cup b) \cup (ab \cup b) = \\
(aa)^*(ab \cup b) \cup (ab \cup b) = \\
(aa)^*(ab \cup b) = \\
(aa)^* ab \cup (aa)^* b = \\
a^* b
\end{array}
$$

15. Indique cuáles de las siguientes expresiones son ciertas y por qué:

    a) $baa \in a^*b^*a^*b^*$

    b) $b^*a^* \cap a^*b^* = a^* \cup b^*$

    c) $a^*b^* \cap c^*d^* = \emptyset$

    d) $abcd \in (a(cd)^*b)^*$

    Solución:

    a) Cierta.

    b) Cierta.

    c) Falsa, porque la cadena ϵ está en la intersección.

    d) Falsa, porque cada iteración produce una a al principio y una b al final.

16. Existen dos lenguajes cuyo cierre de Kleene no es infinito. Indique cuáles son.

    Solución:

    $\emptyset^* = \{\epsilon\}$ y $\{\epsilon\}^* = \{\epsilon\}$.

17. Sea M un autómata finito determinista. ¿Cuándo se cumple que $\epsilon \in L(M)$?

    Solución:

    Cuando el estado inicial es también un estado final.

18. Sea M un autómata finito cuyo único estado de aceptación es el estado inicial. ¿Puede $L(M)$ contener exactamente tres cadenas? Razone la respuesta.

    Solución:

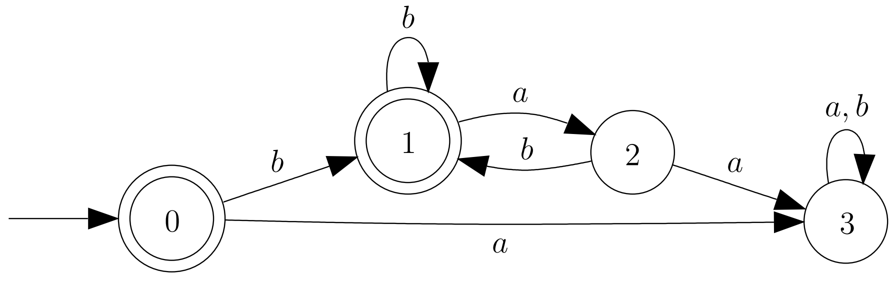
    No. O bien acepta sólo $\{\epsilon\}$, o bien habrá un lazo que implica que el lenguaje aceptado sea infinito.

19. Construya los autómatas finitos deterministas que aceptan cada uno de estos lenguajes sobre $\{a, b\}$:

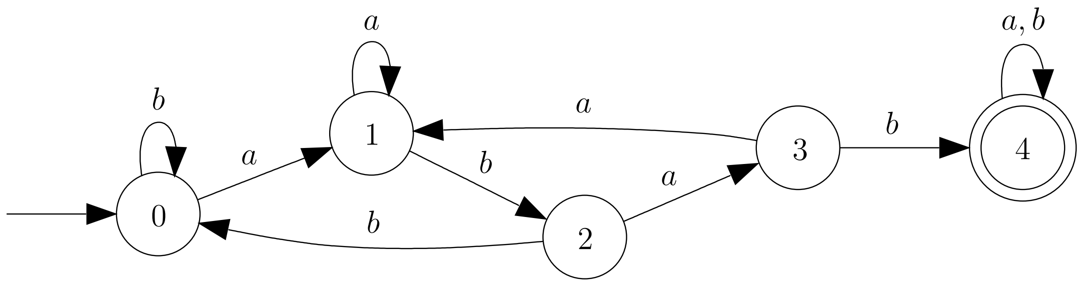
    a) $\{w \mid \text{toda } a \text{ de } w \text{ está entre dos } b\text{es}\}$
    b) $\{w \mid w \text{ contiene la subcadena } abab\}$
    c) $\{w \mid w \text{ no contiene la subcadena } abab\}$
    d) $\{w \mid w \text{ tiene un número impar de } a\text{es y un número par de } b\text{es}\}$
    e) $\{w \mid w \text{ tiene } ab \text{ y } ba \text{ como subcadenas}\}$

    Solución:

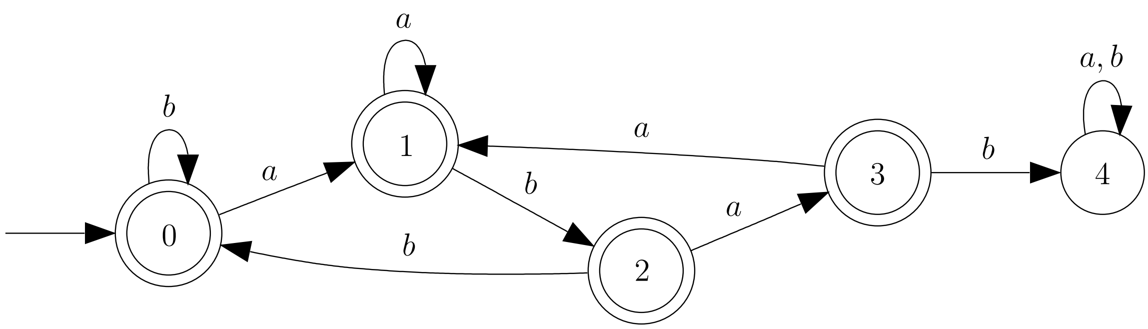
    a) $\{w \mid \text{toda } a \text{ de } w \text{ está entre dos } b\text{es}\}$



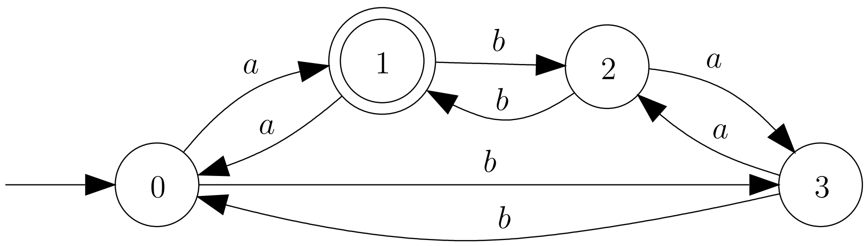
    b) $\{w \mid w \text{ contiene la subcadena } abab\}$



c) $\{w \mid w \text{ no contiene la subcadena } abab\}$



d) $\{w \mid w \text{ tiene un número impar de } a\text{es y un número par de } b\text{es}\}$

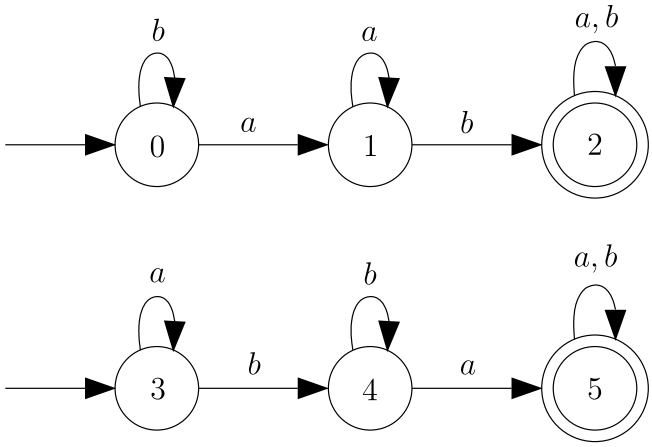


Los estados controlan la paridad de los símbolos procesados de la siguiente forma:

* En el estado 0, el número de $a$es es par y el de $b$es también es par.
* En el estado 1, el número de $a$es es impar y el de $b$es es par.
* En el estado 2, el número de $a$es es impar y el de $b$es también es impar.
* En el estado 3, el número de $a$es es par y el de $b$es es impar.

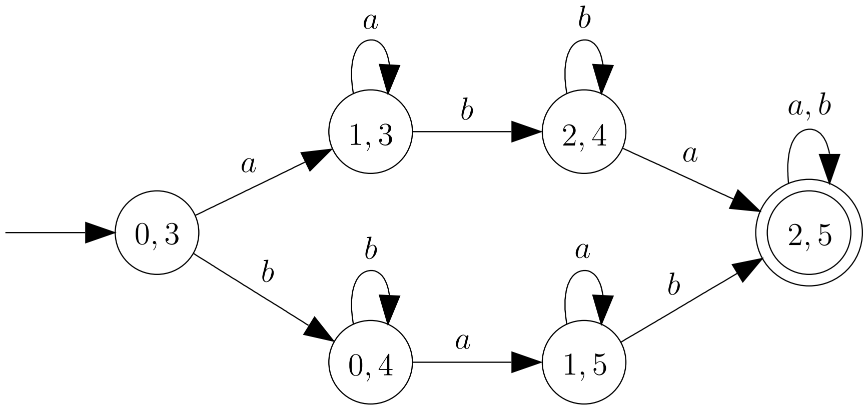
e) $\{w \mid w \text{ tiene } ab \text{ y } ba \text{ como subcadenas}\}$

Primeramente, construimos dos autómatas iniciales: uno que acepte cadenas que tienen ab como subcadena, y otro que acepte cadenas que tienen ba como subcadena:

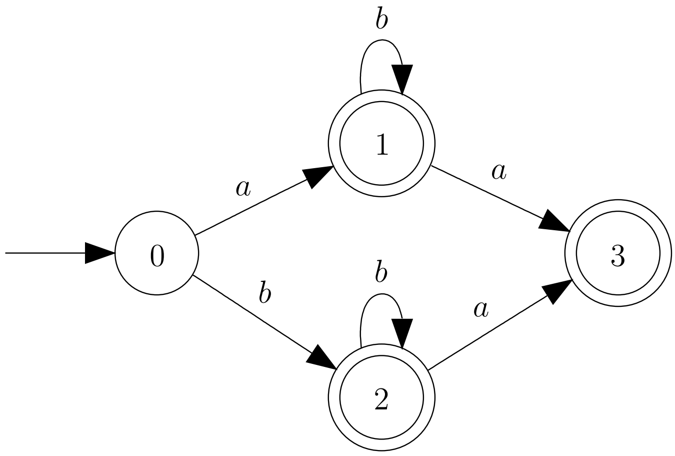


Y seguidamente, utilizamos el concepto de producto cartesiano para construir un nuevo autómata que acepte las cadenas que cumplen ambas propiedades a la vez. Obsérvese que no todos los estados del nuevo "autómata producto cartesiano" son alcanzables desde el estado inicial, por lo que dicho autómata tendrá realmente menos estados y menos arcos que los que aparecen en la tabla de transiciones.

δ	a	b
$\rightarrow$ 0,3	1,3	0,4
0,4	1,5	0,4
0,5	1,5	0,5
1,3	1,3	2,4
1,4	1,5	2,4
1,5	1,5	2,5
2,3	2,3	2,4
2,4	2,5	2,4
* 2,5	2,5	2,5



20. Indique cuál es la expresión regular que representa al lenguaje aceptado por el siguiente autómata:



a) $ab^*a \cup bb^*a$

b) $ab^*a \cup bb^*a \cup a \cup b$

c) $(a \cup b)b^*(a \cup \epsilon)$

<u>Solución</u>:

La respuesta correcta es la c).

21. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$ un alfabeto. El lenguaje $\{a^i b^i \mid 0 \leq i \leq 1000\}$ definido sobre Σ, ¿es regular?

a) Sí es regular.
b) No es regular
c) Sería regular si el símbolo c no perteneciera a Σ.

Solución:

La respuesta correcta es la a).

22. Indique cuál de las siguientes relaciones es verdadera:

a) $100 \notin 0^*(10)^*1^*$
b) $1001 \in 0^*(1 \cup 01)^*0^*$
c) $0101 \in (0^* \cup 1^*)(0^* \cup 1^*)(0^* \cup 1^*)$

Solución:

La respuesta correcta es la a).

23. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

a) Los autómatas finitos tienen un número finito de estados.
b) Los autómatas finitos sólo pueden aceptar lenguajes finitos.
c) El número de lenguajes aceptados por los autómatas finitos es finito.

Solución:

La respuesta correcta es la a).