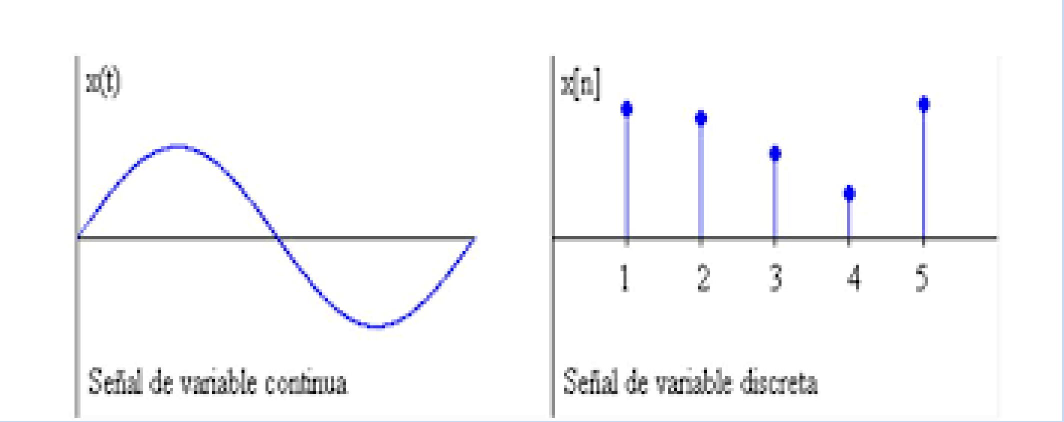
TEMA 1:

Representación en el dominio temporal



¿Qué veremos?

Contenido:

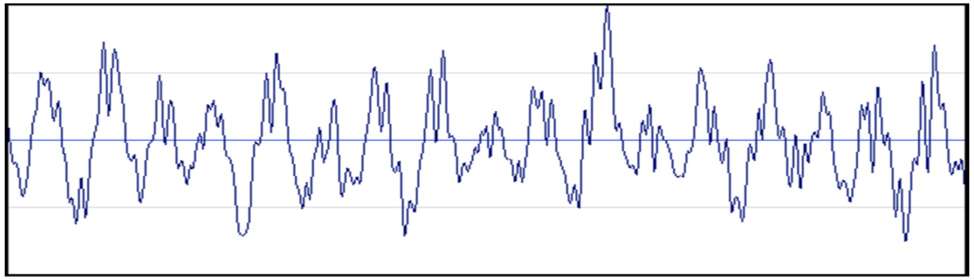
1. Concepto de señal.
2. Señales básicas.
3. Señal Delta.
4. Señales senoidales.
5. Señal sinc.
6. Energía y potencia media de una señal.

1

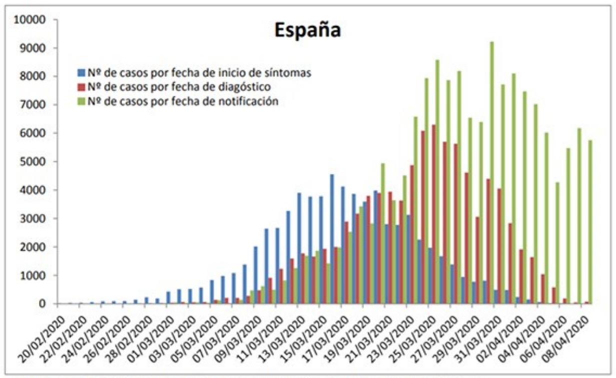
Concepto de señal

Concepto de señal

- **Señal**: cualquier magnitud física que varía con el tiempo, espacio o cualquier variable independiente y que contiene **información** acerca de un fenómeno físico.
- **Ejemplo**: evolución de la temperatura con el tiempo en un punto geográfico.



- **Ejemplo**: evolución de casos de covid-19



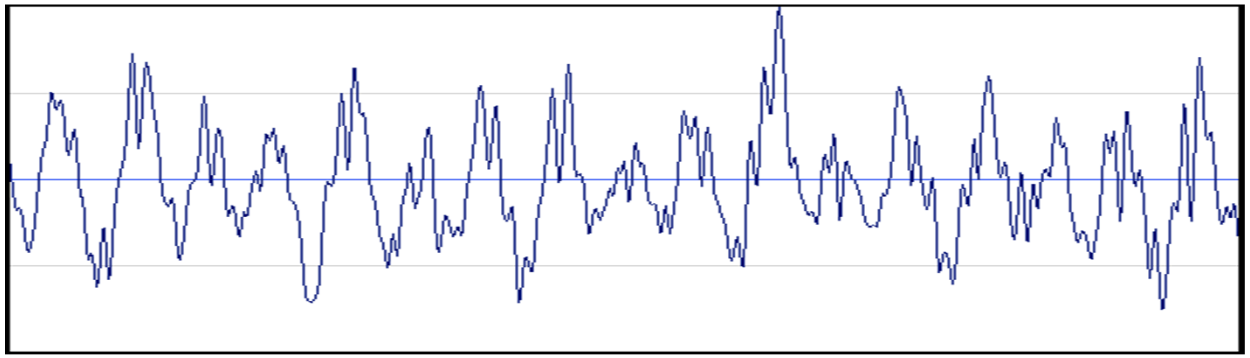
* Se dispone de fecha de inicio de síntomas en 69.802 casos y de diagnóstico en 87.199 casos

Señal en tiempo real

- Se puede representar matemáticamente como una función real de una variable independiente continua que toma valores sobre la recta real.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & x(t) \end{array}$$

- Ejemplo:
  - El **dominio** de x(t) tiene una dimensión: tiempo
  - El **rango** de x(t) tiene una dimensión: temperatura

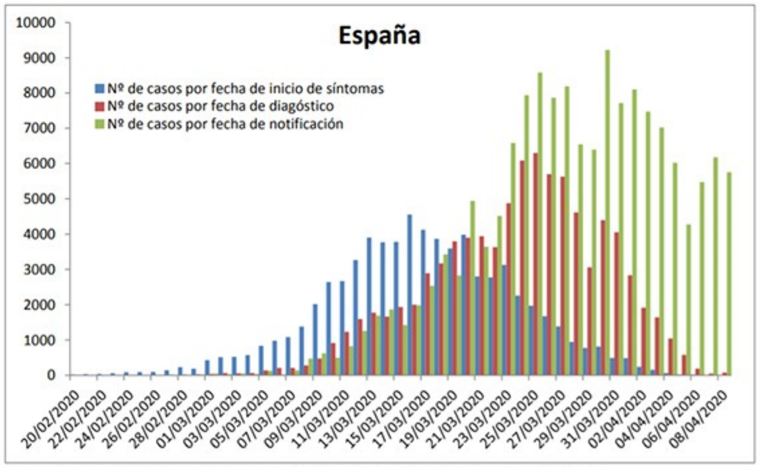


Señal en tiempo discreto

- Se puede representar matemáticamente como una función real de una variable independiente discreta que toma valores enteros.

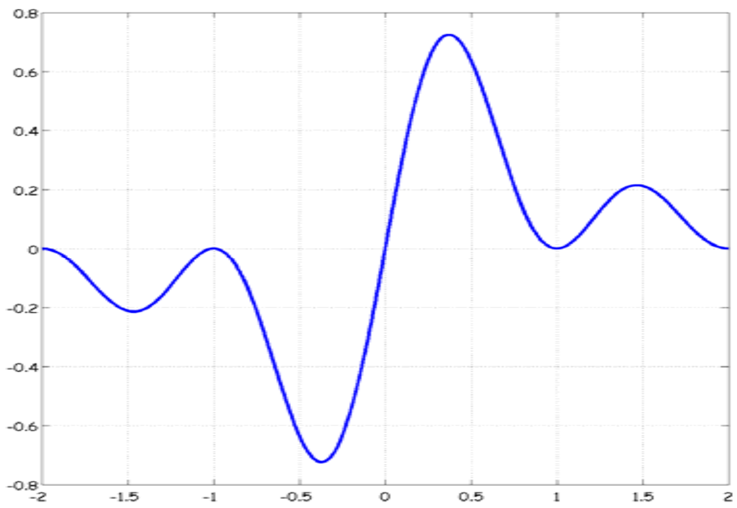
$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow x(n)$$

- Ejemplo:
  - El **dominio** de x(n) tiene una dimensión: tiempo
  - El **rango** de x(n) tiene una dimensión: número de casos

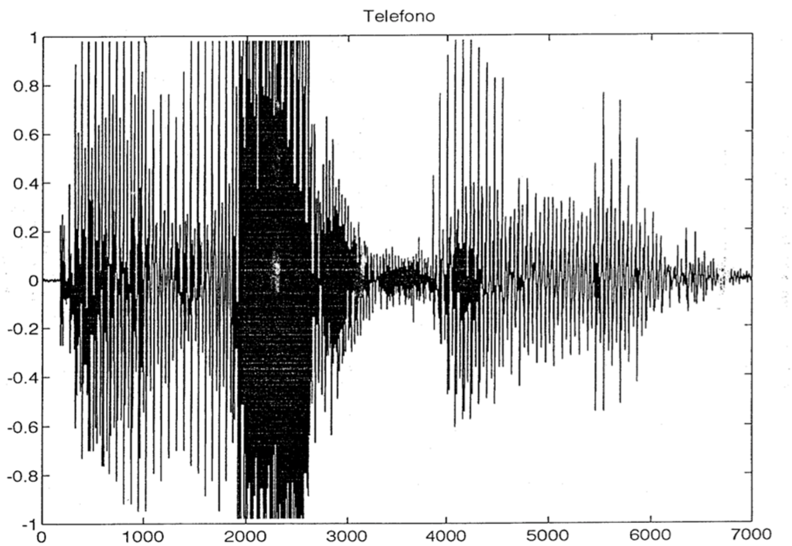


* Se dispone de fecha de inicio de síntomas en 69.802 casos y de diagnóstico en 87.199 casos

Ejemplo de señal de una variable independiente



$$x(t) = \frac{\sin^2 \pi t}{\pi t}$$



Señal acústica

Señales de dos variables independientes

- Señales en tiempo continuo

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow z(x, y)$$

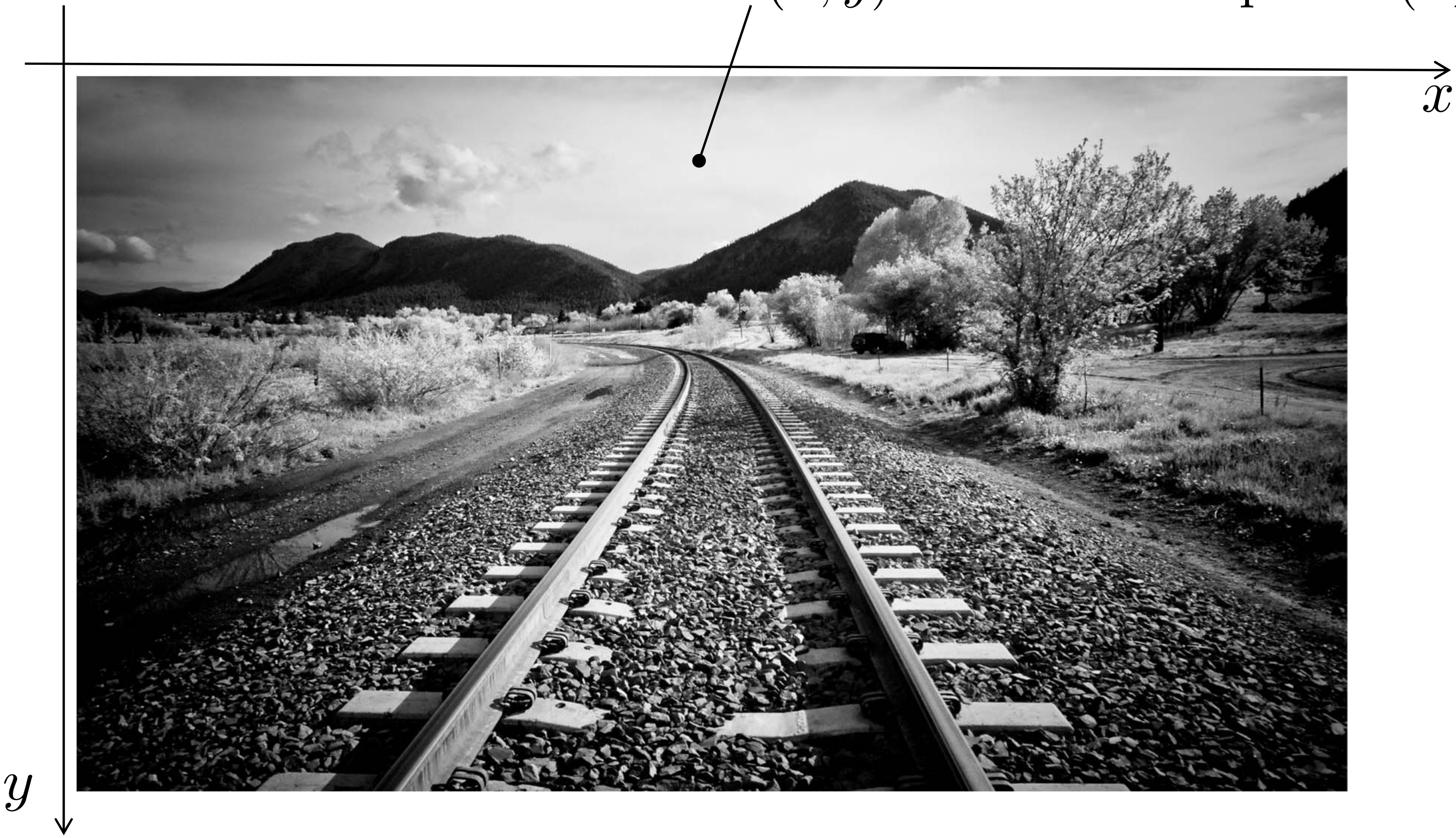
- Señales en tiempo discreto

$$\mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

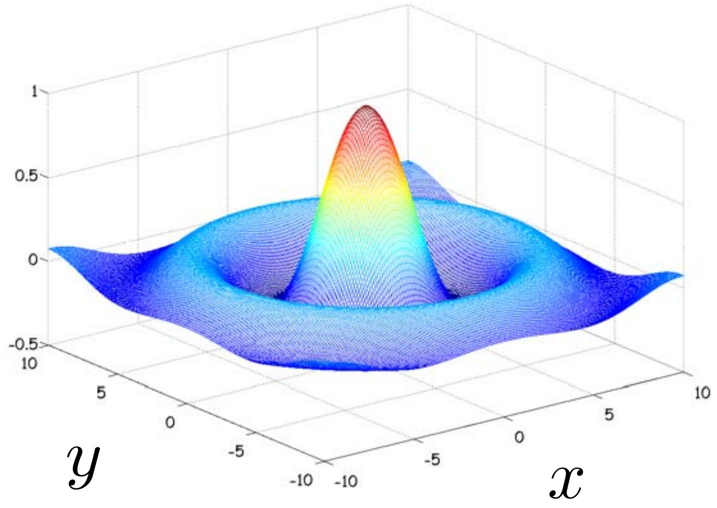
$$(x, y) \longrightarrow z(x, y)$$

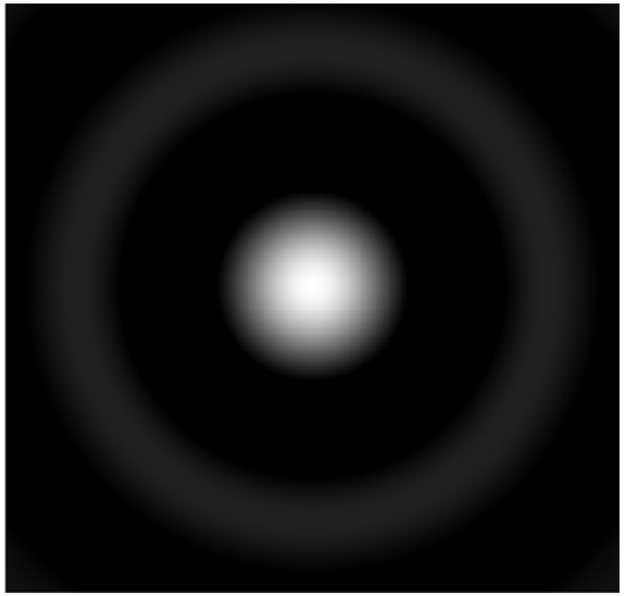
Ejemplo de señales de dos variables independientes

$z(x, y) = \text{brillo en el punto } (x, y)$



Ejemplo de señales de dos variables independientes

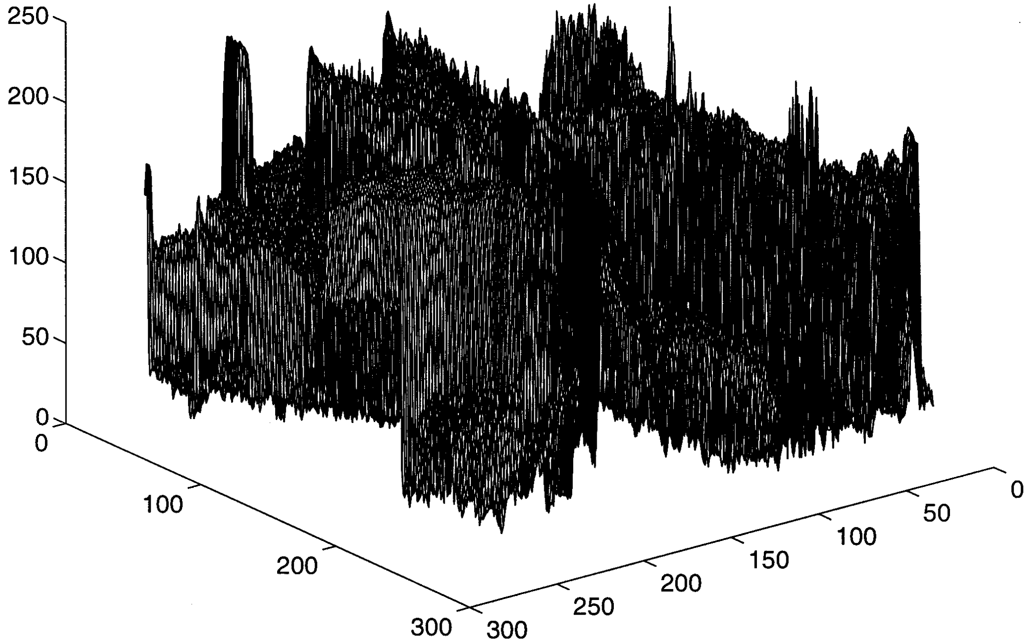




$$z(x,y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Misma señal representada de dos formas diferentes.

Ejemplo de señales de dos variables independientes



Misma señal representada de dos formas diferentes.

¿Tiempo negativo?

- Es muy habitual que el tiempo sea una de las variables independientes de una señal.
- Al representar el tiempo por medio del número real t (o entero n), puede tomar valores tanto positivos como negativos.
- Si situamos la referencia del tiempo en $t = 0$ ($n = 0$), los valores positivos representan el futuro y los negativos el pasado.

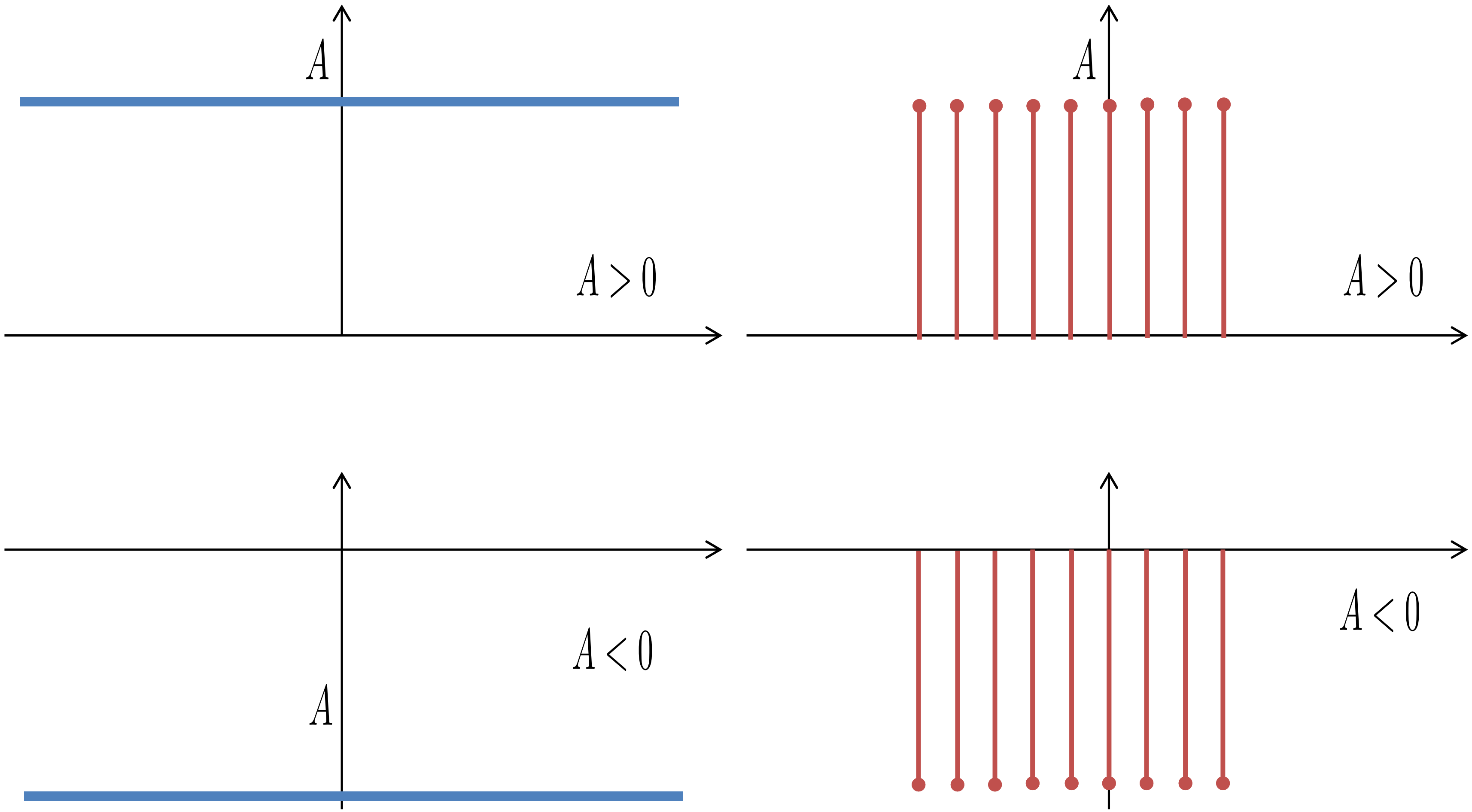
pasado	presente	futuro
$t < 0$	$t = 0$	$t > 0$

2

Señales básicas

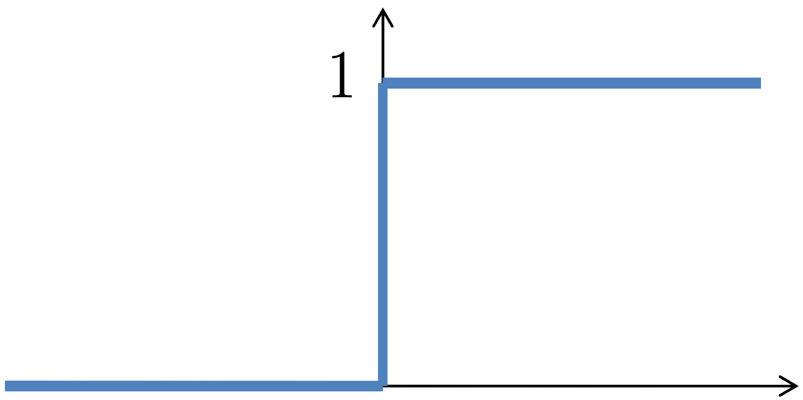
Señal constante

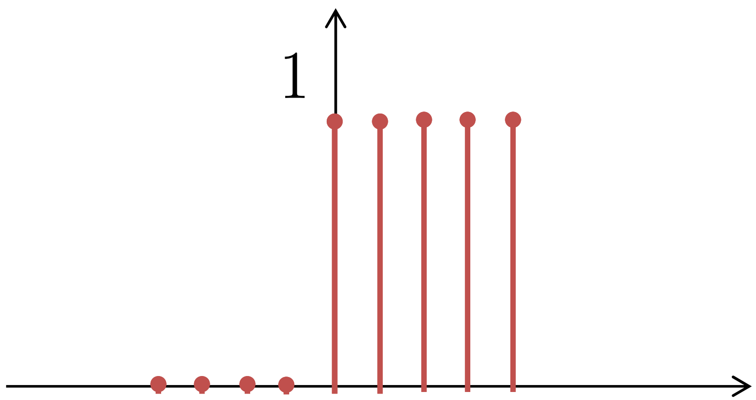
$x(t) = A$ $\qquad$ $x(n) = A$



Escalón unidad

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \qquad u(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$



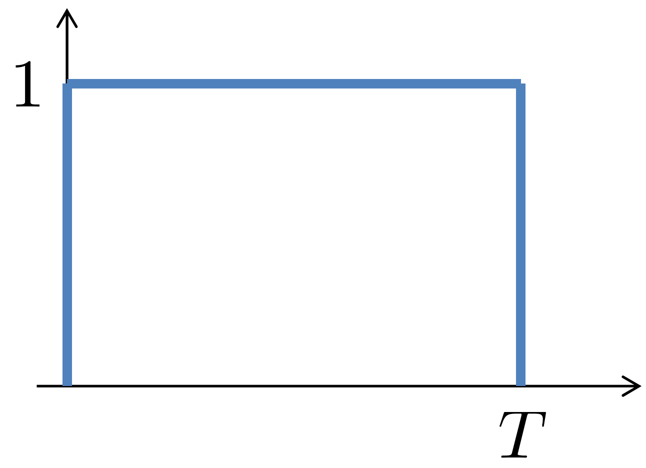


- Ejemplo: corriente en un circuito tras cerrar un interruptor en $t = 0$.

Pulso rectangular

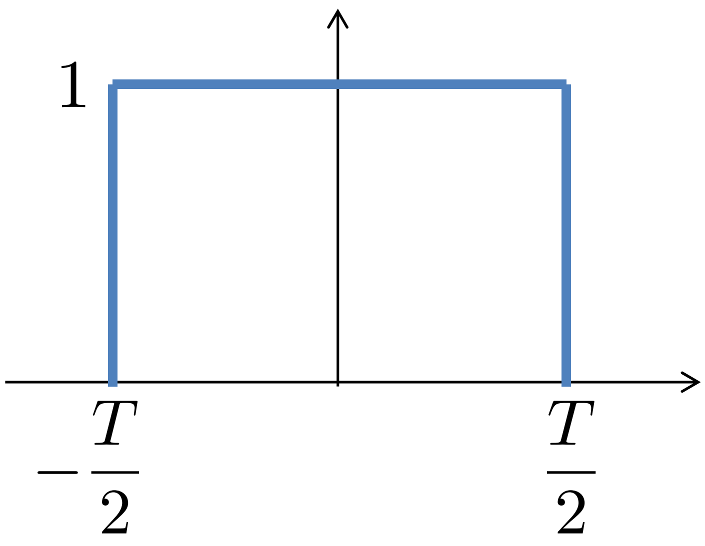
- **Pulso de duración T**

$$p_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



- **Pulso centrado de duración T**

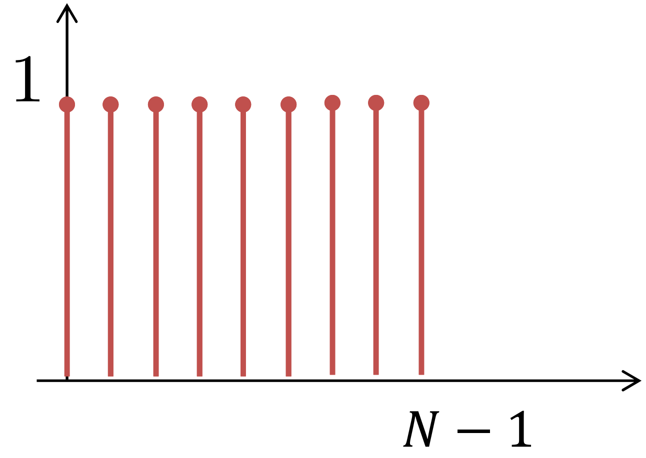
$$p_2(t) = \begin{cases} 1 & -T/2 < t < T/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



Pulso rectangular

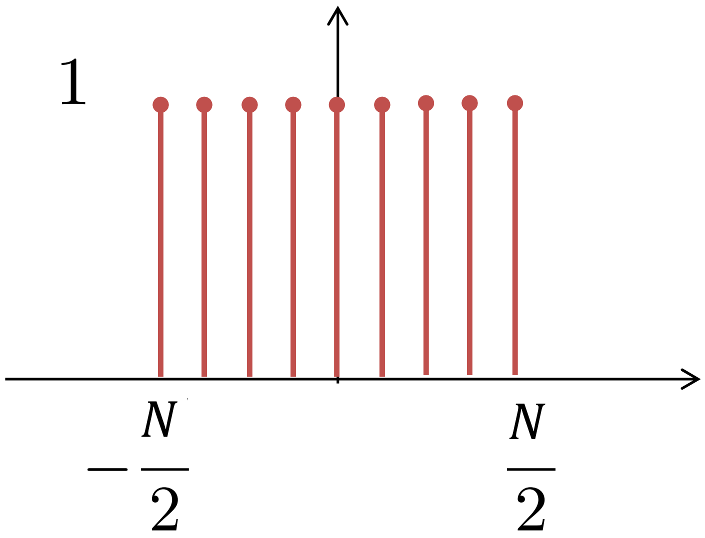
- **Pulso de N puntos**

$$p_1(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



- **Pulso centrado de N+1 puntos**

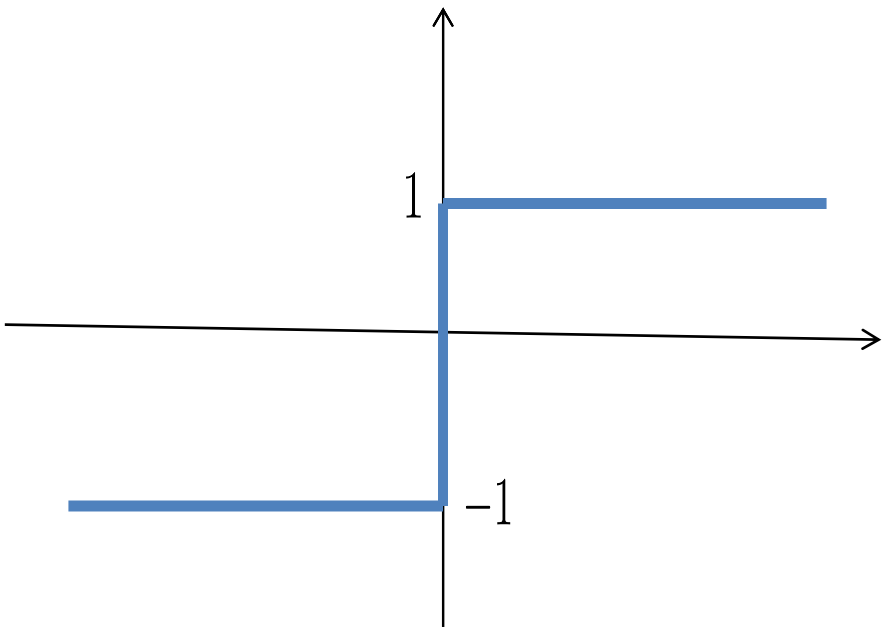
$$p_2(n) = \begin{cases} 1 & -N/2 \leq n \leq N/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

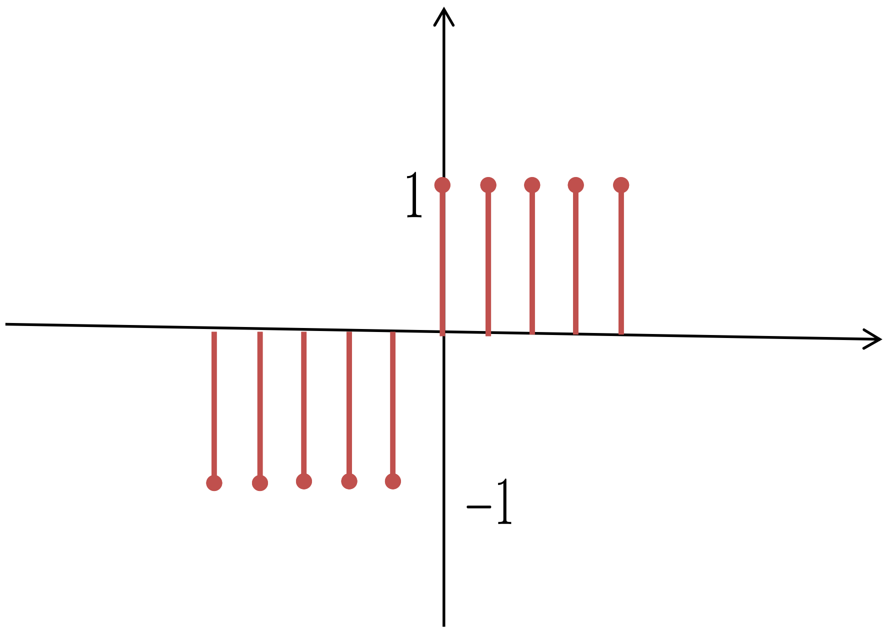


Señal signo

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{sgn}(n) = \begin{cases} -1 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

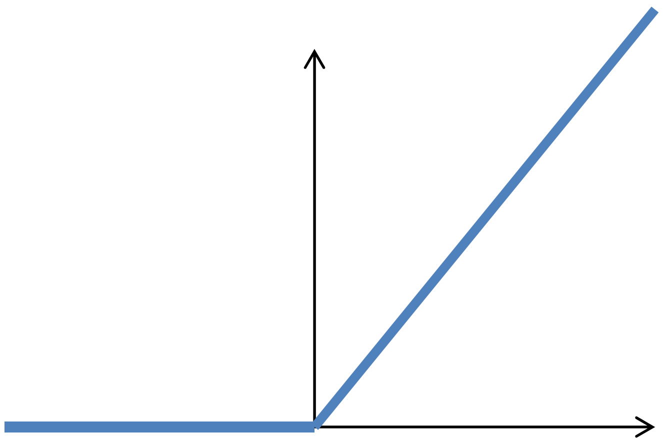


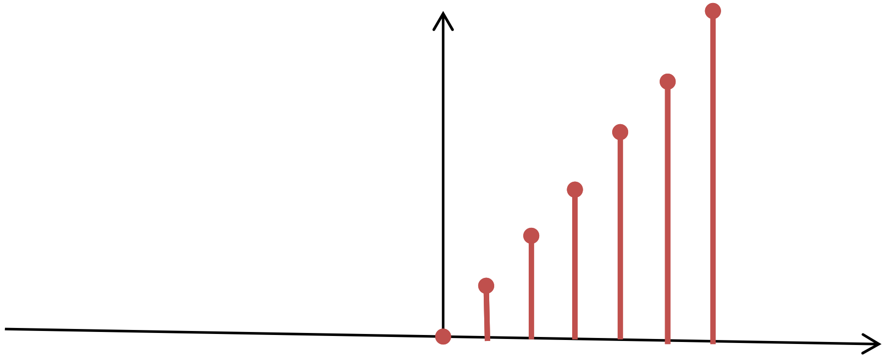


Rampa

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$$

$$r(n) = \begin{cases} 0 & n \leq 0 \\ n & n > 0 \end{cases}$$



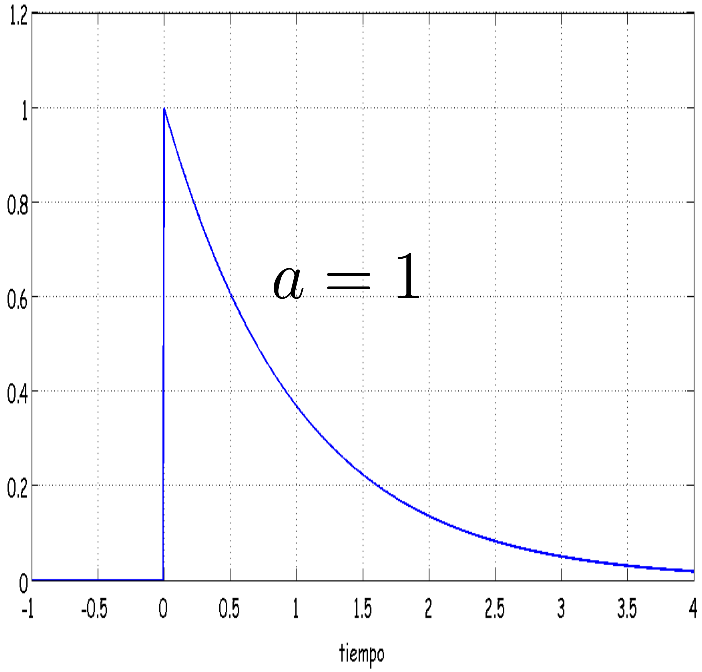


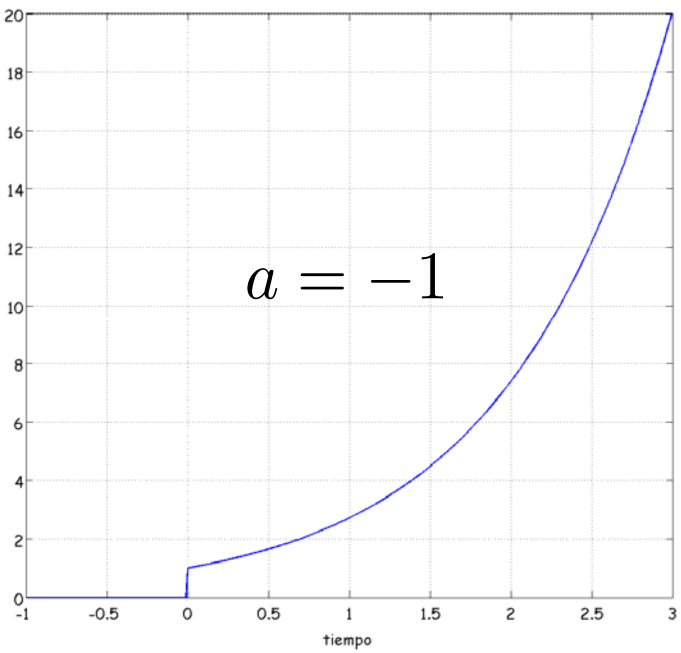
- Ejemplo: distancia recorrida por un vehículo que comienza a circular a velocidad constante en $t = 0$.

Exponencial real unilateral continua

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-at} & t > 0 \end{cases}$$

Decreciente ($a > 0$) **Creciente ($a < 0$)**





Propiedades exponencial real

- La señal toma el valor 1 en $t = 0$

$$x(t=0) = e^{-a0} = e^{0} = 1$$

- La exponencial decreciente ($a > 0$) tiende a valer cero cuando $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-at} = e^{-\infty} = 0$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-at}dt = \left.\frac{e^{-at}}{-a}\right|_{0}^{\infty}$$

- El área de una exponencial decreciente es $1/a$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}dt = \left.\frac{e^{-at}}{-a}\right|_{0}^{\infty} = \frac{e^{-\infty} - e^{0}}{-a} = \frac{0-1}{-a} = \frac{1}{a}$$

3

Señal delta

Delta de Dirac

- Todas las señales de los apartados anterior se representan por funciones matemáticas convencionales que se definen como correspondencias entre dos conjuntos de números.

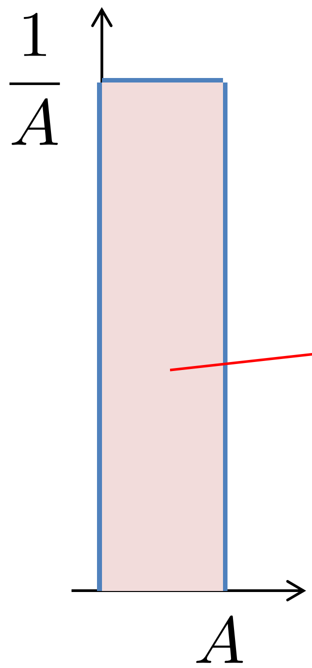
- A continuación vamos a presentar la señal impulso unidad, $\delta(t)$ en tiempo continuo, que no es una función convencional sino el límite de una función. Es un ejemplo de función generalizada.

- El impulso unidad también se conoce con el nombre de delta de Dirac en honor a Paul Dirac (1902-1984), el científico británico que la introdujo.

Delta de Dirac

- Consideremos un pulso rectangular de duración A y amplitud 1/A

$$\delta_A(t) = \begin{cases} \frac{1}{A} & 0 < t < A \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



- Si A disminuye, la duración del rectángulo disminuye y su amplitud aumenta.
- El área es siempre igual a uno, i.e.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta_A(t)dt \\ &= \int_0^A \frac{1}{A}dt \\ &= \frac{1}{A} \times A = 1 \end{aligned}$$

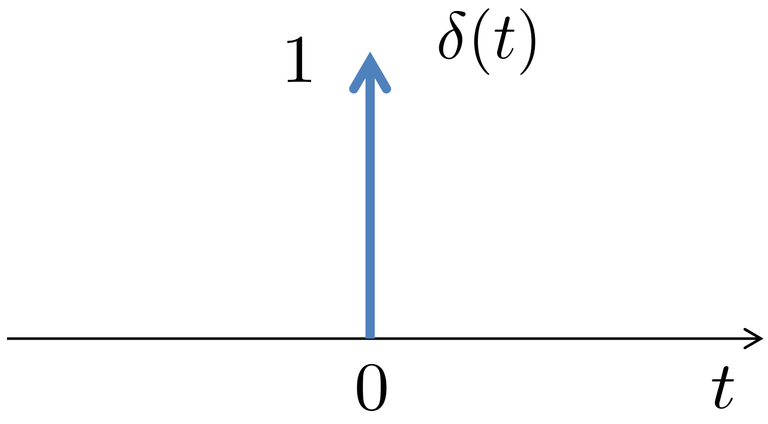
Delta de Dirac

- Cuando $A \rightarrow 0$, el pulso rectangular $\delta_A(t)$ se convierte en el impulso unidad $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \lim_{A \to 0} \delta_A(t)$$

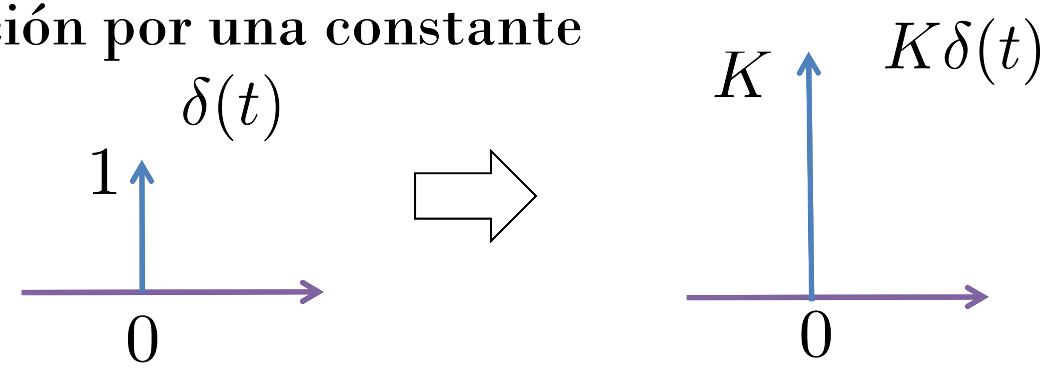
- El impulso unidad $\delta(t)$ se puede interpretar como un pulso rectangular de duración arbitrariamente pequeña y amplitud arbitrariamente grande.

- Gráficamente se representa por una flecha vertical de amplitud 1 en $t = 0$



Delta de Dirac

- **Propiedad 1**: $\delta(t) = 0 \quad \text{cuando} \quad t \neq 0$
- **Propiedad 2**: $\delta(0) \rightarrow \infty$
- **Propiedad 3**: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$
- **Multiplicación por una constante**



- **Desplazamiento en tiempo**

Delta de Kronecker

- En matemática, la delta de Kronecker es una función de dos variables, que vale 1 si son iguales, y 0 si son diferentes.

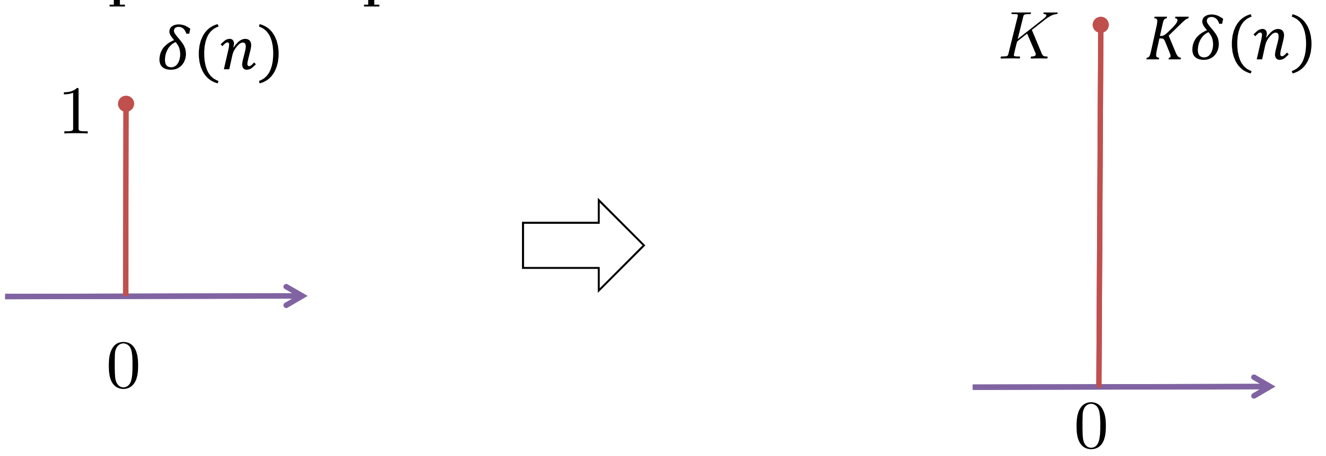
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \;\; i = j \\ 0 & si \;\; i \neq j \end{cases}$$

- Se la nombra así por el matemático Leopold Kronecker (1823-1891).

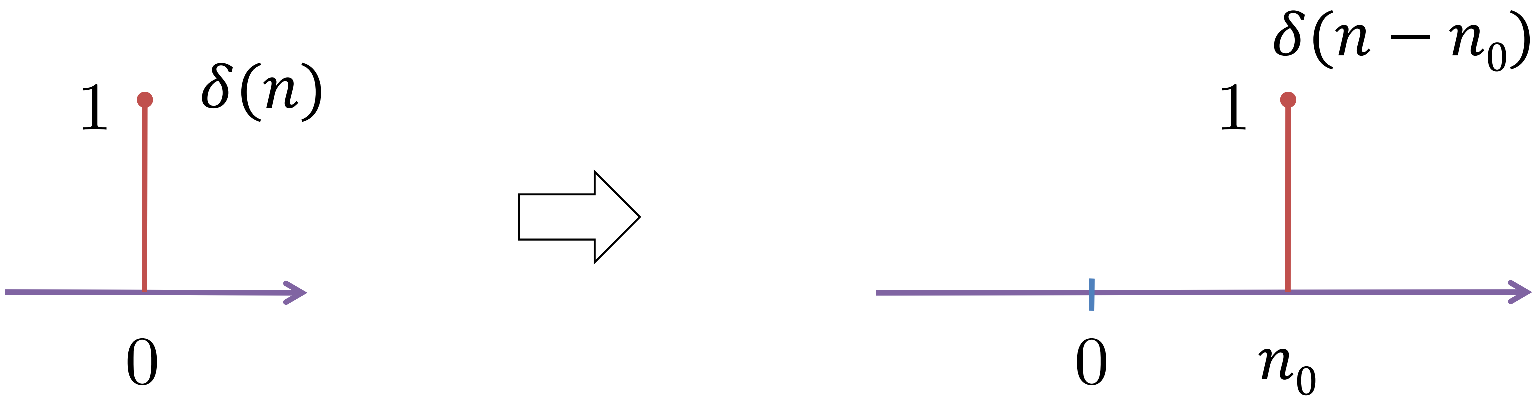
- Se utiliza en muchas áreas de la matemática. Por ejemplo, en álgebra lineal.

Delta de Kronecker

- Multiplicación por una constante



- Desplazamiento en tiempo



4

Señales senoidales

Representación trigonométrica de una señal senoidal

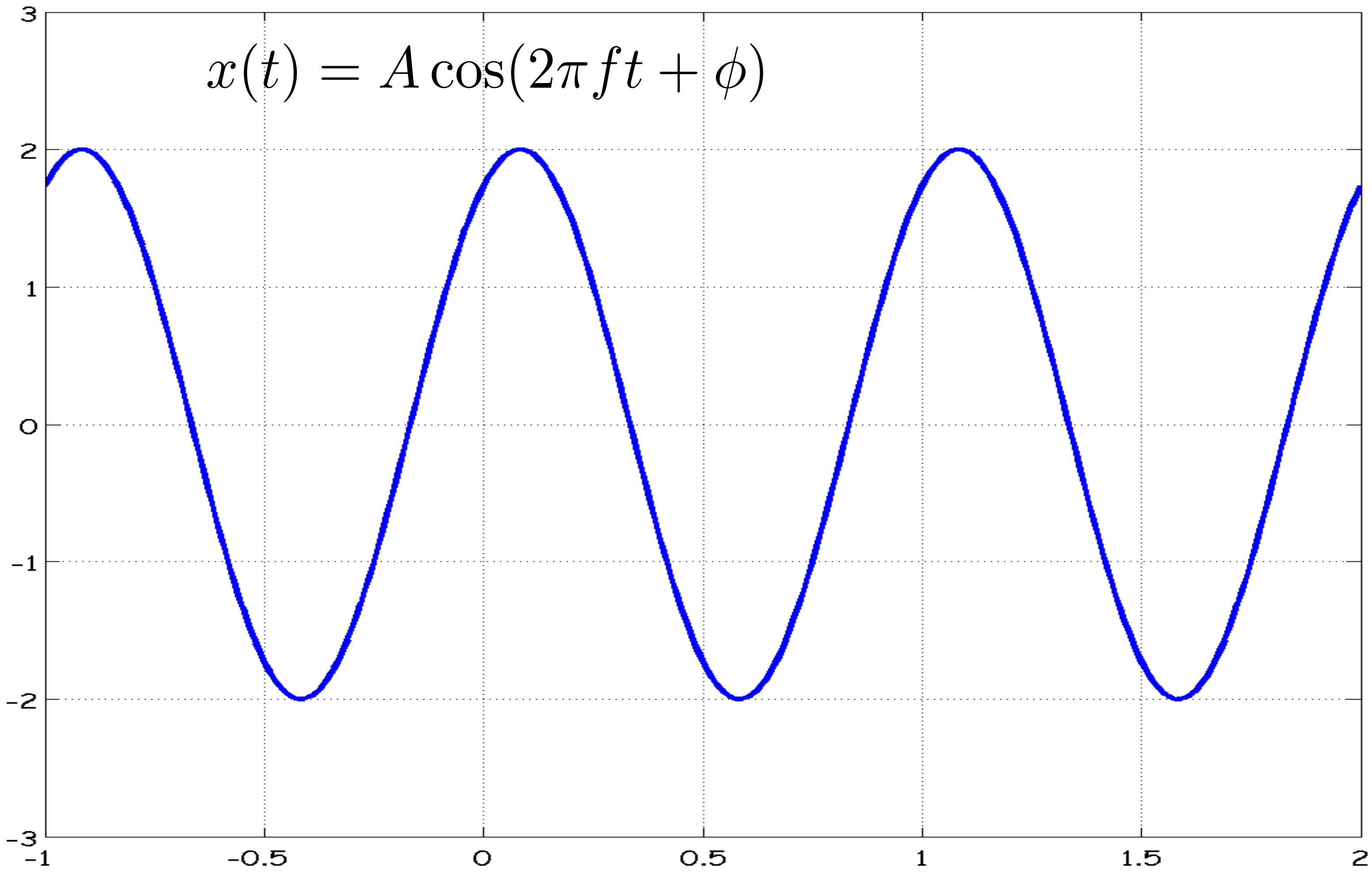
- Una señal senoidal continua se puede representar utilizando la función trigonométrica coseno

$$x(t) = A\cos(2\pi f t + \phi)$$

- Una señal senoidal tiene tres parámetros
  - Amplitud: A
  - Frecuencia: f
  - Fase: ϕ
- Alternativamente, una señal senoidal también se puede representar utilizando la función trigonométrica seno

$$x(t) = A\sin(2\pi f t + \varphi)$$

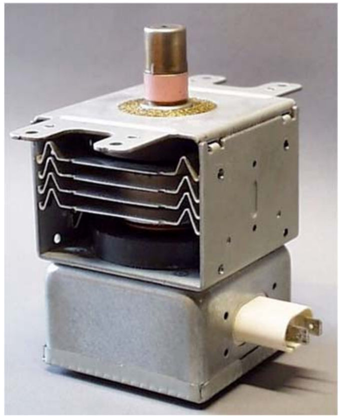
Señal senoidal



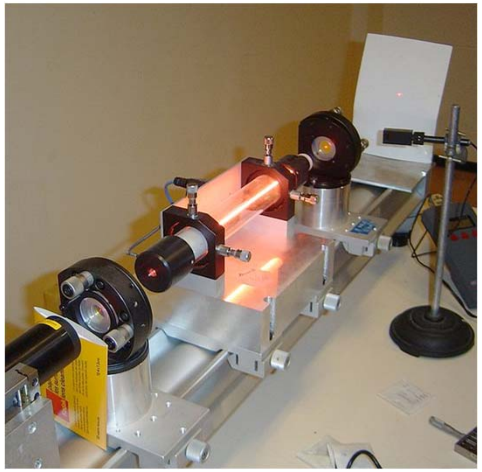
Ejemplos

- Circuitos electrónicos osciladores

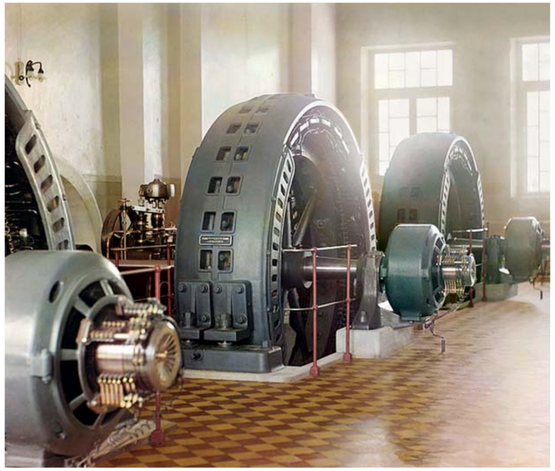
- Magnetrón horno microondas



- Generadores láser



- Alternador



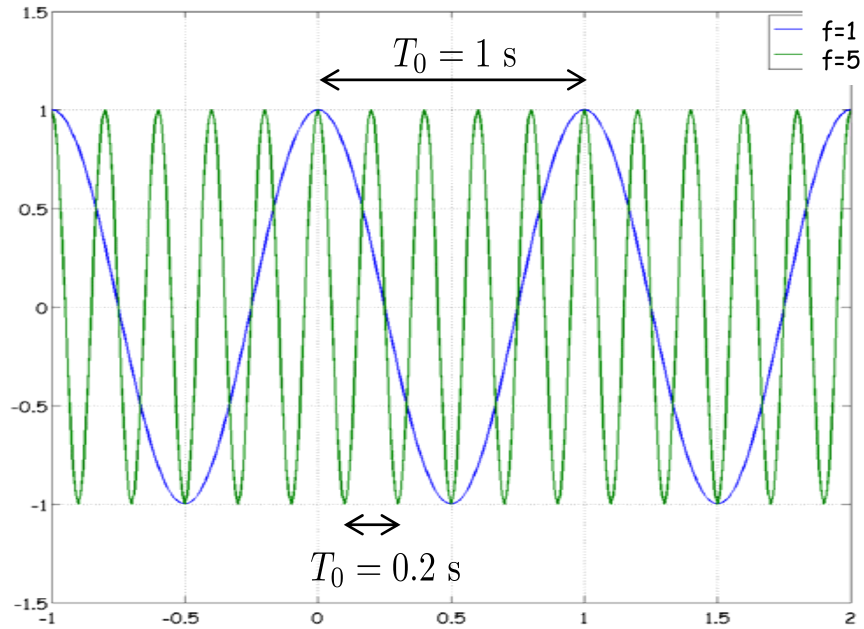
Frecuencia de una señal senoidal

- <u>Periodo fundamental</u>: duración de un ciclo. Separación entre dos mínimos (máximos). Se mide en segundos.

$$T_0 = \frac{1}{f}$$

- <u>Frecuencia</u>: inverso del periodo fundamental. Número de ciclos por unidad de tiempo. Se mide en ciclos por segundo o Hertz (Hz)

$$f = \frac{1}{T_0}$$



Frecuencia angular

- Frecuencia angular: $\omega = 2\pi f$. Se mide en rad/seg.
- Permite simplificar la representación trigonométrica de una señal senoidal

$$x(t) = A\cos(2\pi f t + \phi) \qquad x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

- El periodo fundamental deja de ser el inverso de la frecuencia. Hay que introducir un factor 2π para relacionar frecuencia y periodo

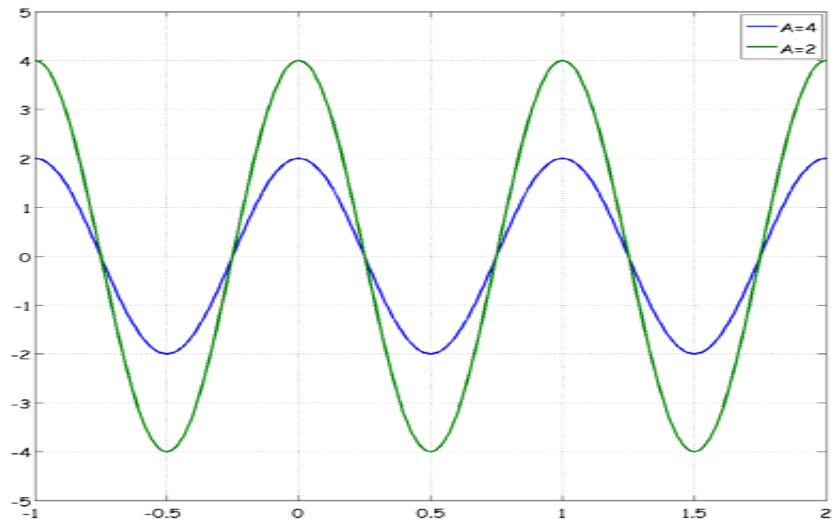
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$$

- De aquí en adelante utilizaremos ω en lugar de f para representar las señales senoidales.

Amplitud de una señal senoidal

- El parámetro A modifica la amplitud de la señal senoidal haciendo que oscile entre el valor mínimo –A y el valor máximo +A

- Las unidades de A son las mismas que las de x(t).



Fase de una señal senoidal

- La fase de una señal senoidal se mide en radianes. Puede interpretarse como un desplazamiento en tiempo.
- En efecto, sea x(t) = A cos (wt) una onda senoidal de amplitud A, frecuencia w y fase cero.
- Si desplazamos en tiempo t_0 dicha onda senoidal obtenemos

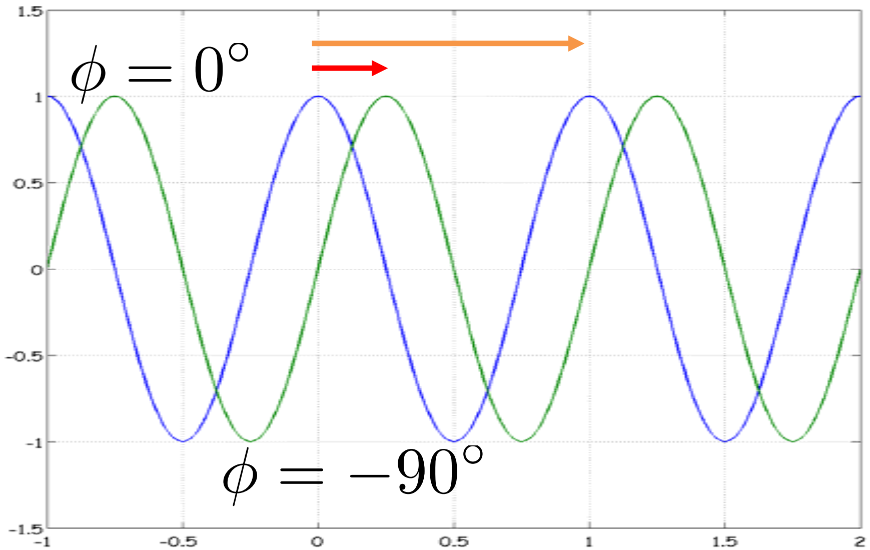
$$\begin{aligned} x(t-t_0) &= A\cos(\omega(t-t_0)) \\ &= A\cos(\omega t - \omega t_0) \\ &= A\cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

- Es decir, un desplazamiento en tiempo t_0 se traduce en una fase

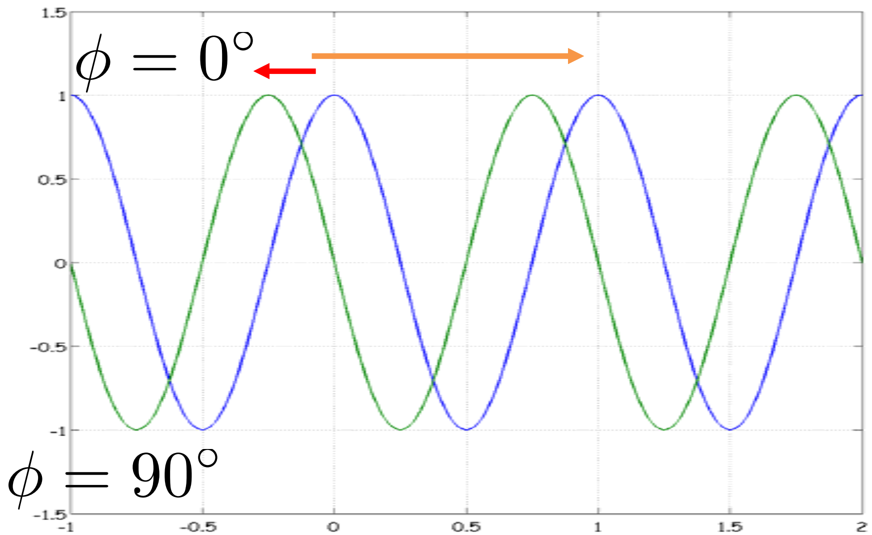
$$\phi = -\omega t_0 = -2\pi \frac{t_0}{T_0}$$

- **!Ojo con los signos!** Un retardo ($t_0 > 0$) da lugar a una fase negativa y un adelanto ($t_0 < 0$) a una fase positiva.

Cambio de fase

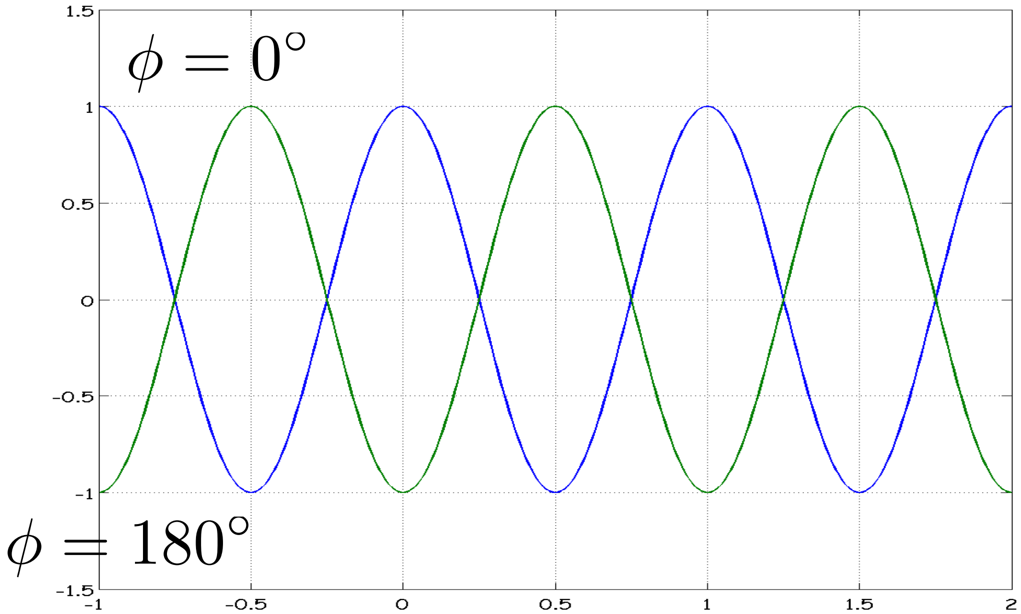


Desfase de -90º (retardo $T_0/4$)



Desfase de 90º (retardo $-T_0/4$)

Cambio de fase



Desfase de 180º (retardo $T_0/2$)

- Sumar (restar) 180º = π radianes a la fase de una señal senoidal es equivalente a cambiar de signo su amplitud

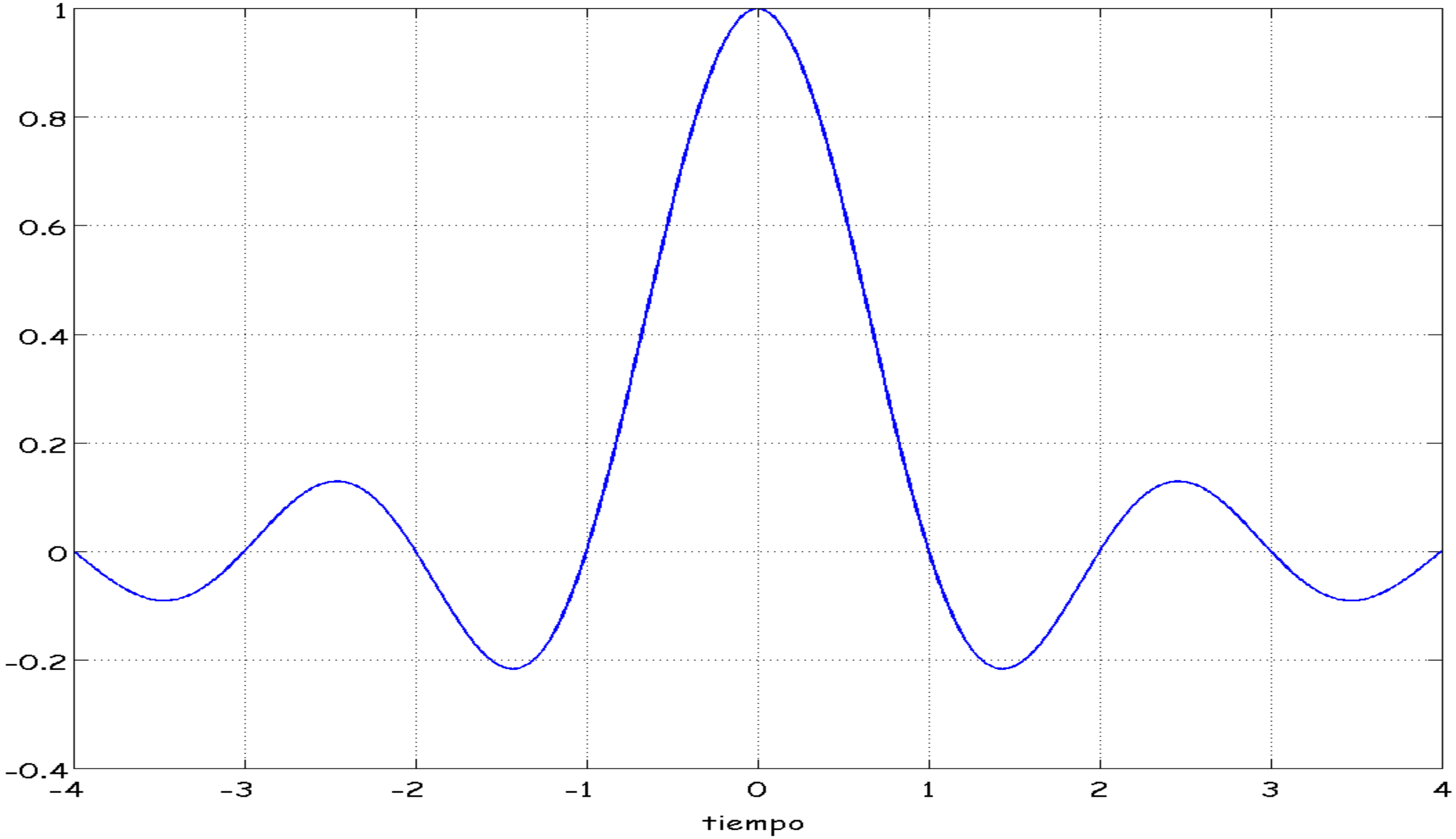
$$A\cos(\omega t + \phi \pm \pi) = -A\cos(\omega t + \phi)$$

4

Señales sinc

Pulso sinc en tiempo continuo

$$x(t) = \mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$



Valor de $sinc(t)$ en $t = 0$

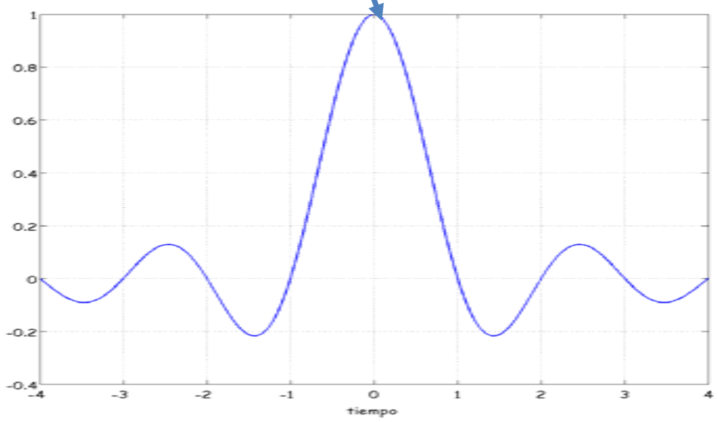
$$x(t) = \text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

- Observemos que en $t = 0$, existe una indeterminación 0/0
- El límite se puede resolver de manera inmediata

$$lim_{t\to 0}\frac{d \sin \pi t}{d\, \pi t} = lim_{t\to 0}\frac{\pi \cos \pi t}{\pi} = 1$$

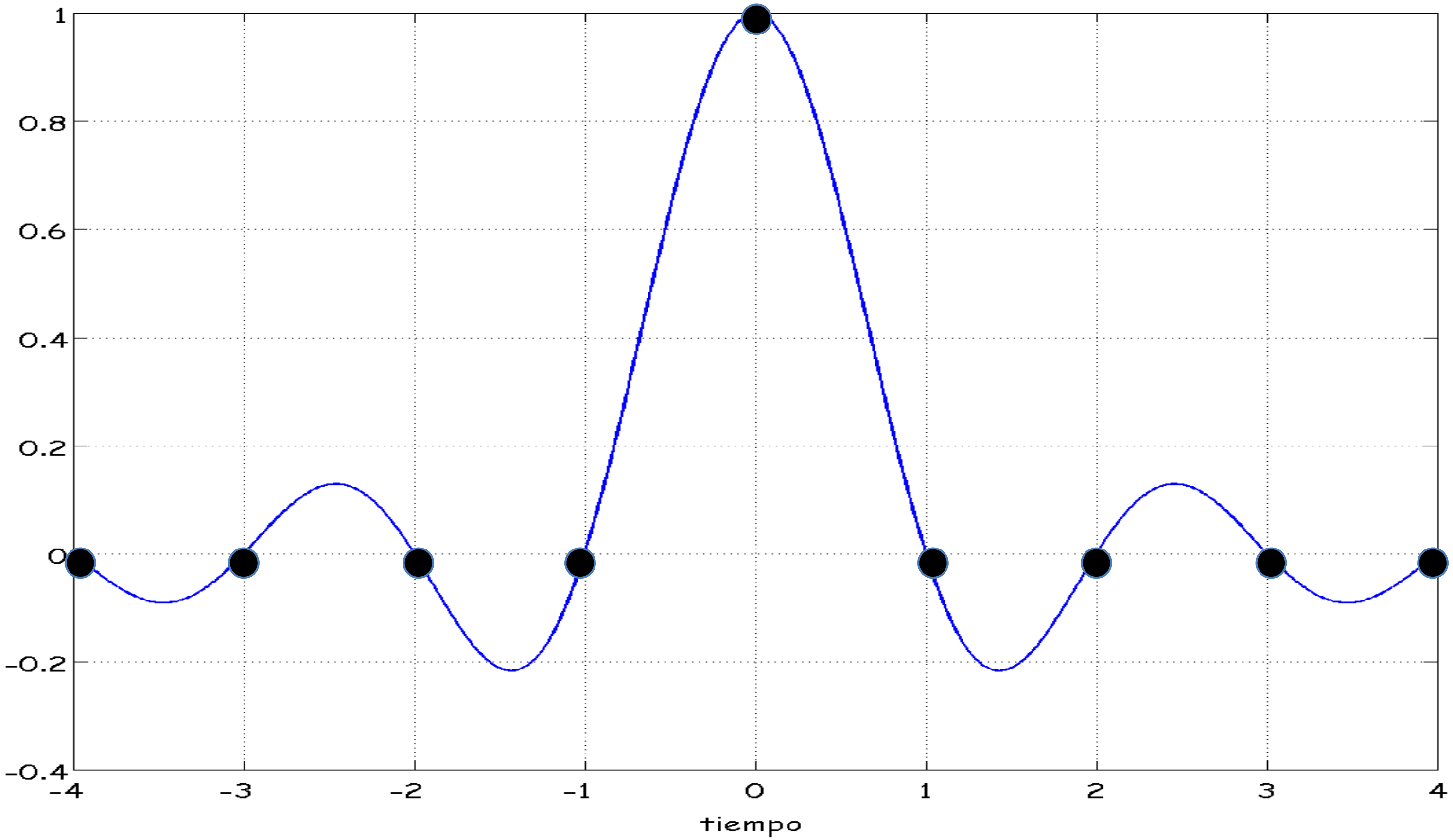
- Es decir,

$$\text{sinc}(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\sin \pi t}{\pi t} = 1$$



Valor de $sinc(t)$ en t = t = ±1, ±2, ±3, …

- El pulso sinc vale cero cuando t es un valor entero distinto de cero.



TEMA 1:

Representación en el dominio temporal