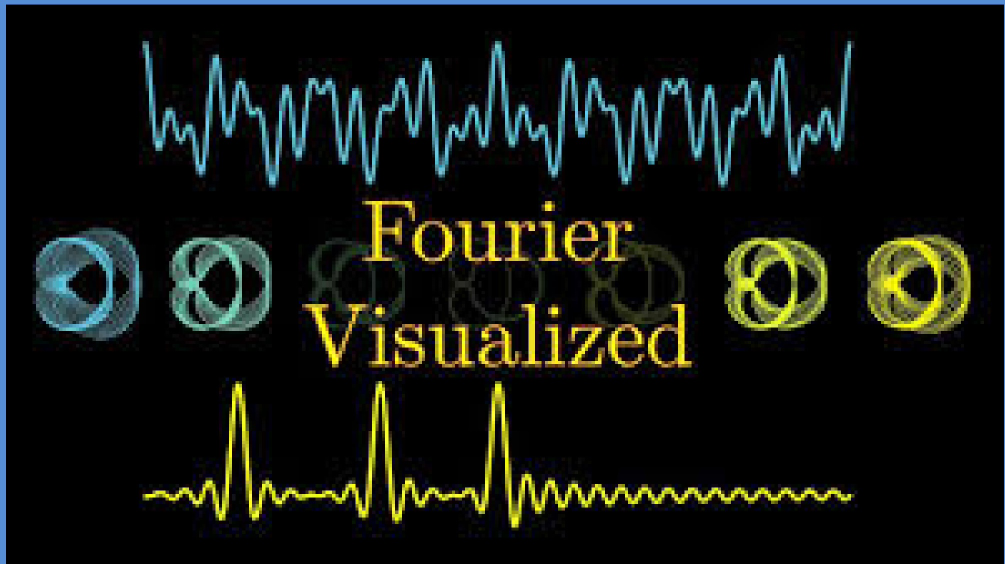
TEMA 2: Representación en frecuencia



Índice

Contenido:

1. Concepto de Transformada de Fourier (TF)
2. TF de algunas señales básicas

1

Concepto de Transformada de Fourier (señales continuas)

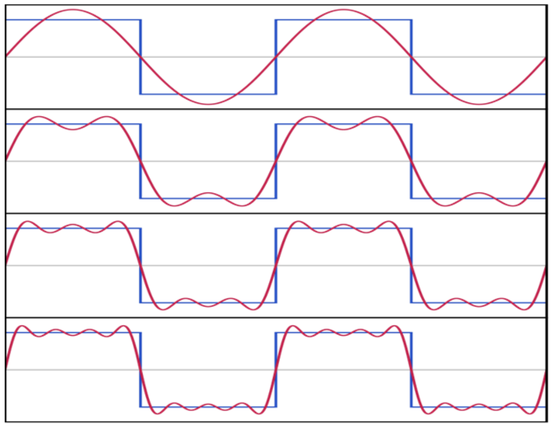
Jean-Baptiste Joseph Fourier

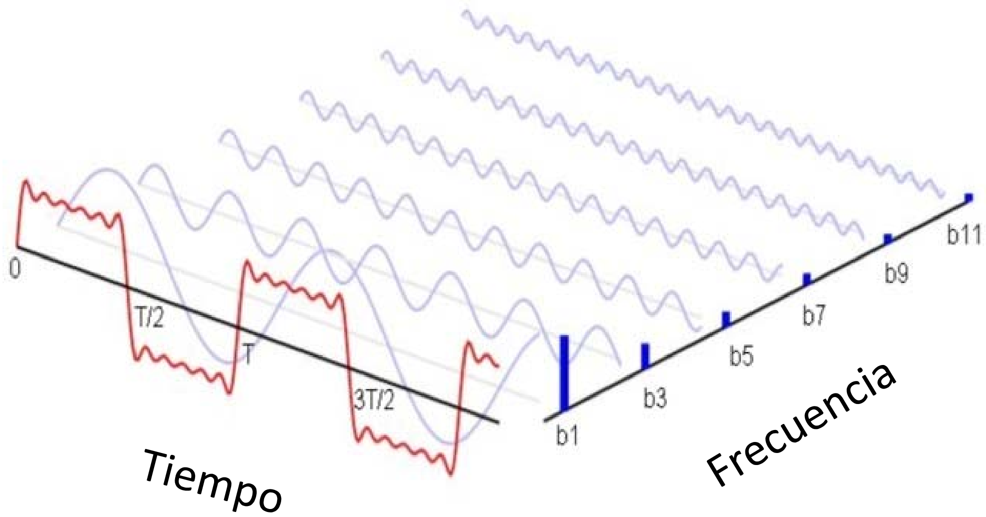
1768: nace el 21 de marzo de 1768 en Auxerre, Francia.
1780: ingresa en la Ecole Royale Militaire de Auxerre.
1787: toma el hábito de novicio en la abadía de Saint Benoit-sur-Loire.
1789: abandona St. Benoit. Participa en el Comité Revolucionario de Auxerre.
1795: consigue un puesto como profesor en la Ecole Polytechnique de París.
1798: se alista en las tropas napoleónicas de Egipto como asesor científico.
1801: regresa a Francia y es nombrado prefecto de Isere.
1807: escribe su trabajo Sobre la propagación del calor en cuerpos sólidos.
1814: Napoleón es exiliado a la isla de Elba. Fourier dimite de su puesto de prefecto y se une a los Borbones.
1815: Napoleón regresa de su exilio y nombra a Fourier prefecto de Rhone.
1815: Napoleón es finalmente derrotado el 1 de julio en Waterloo. Fourier es cesado de todos sus cargos políticos y académicos y regresa a París.
1816: es elegido miembro de la Academia de Ciencias.
1822: es elegido Secretario de la Academia.
Se publica su trabajo Sobre la propagación del calor.
1830: fallece en París el 16 de mayo.

Series de Fourier

$$x(t) \approx \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right]$$

Relación entre el pulso cuadrado periódico y su transformada



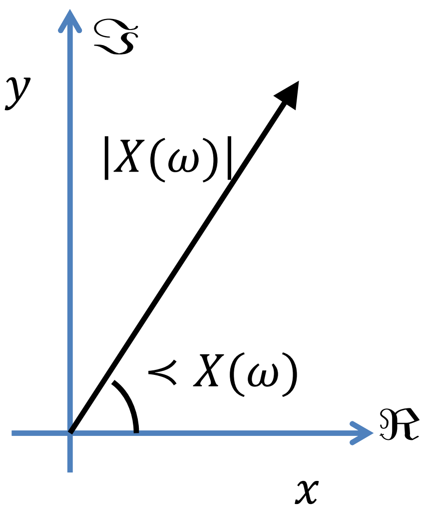


Transformada de Fourier

- La **Ecuación de análisis** o transformada de Fourier directa permite representar la señal en el dominio de la frecuencia:

$$X(\omega) = TF\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

- $X(\omega)$ también se conoce con el nombre de **espectro** de $x(t)$.
- Se suele representar en coordenadas polares



$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\angle H(\omega)}$$

$$|X(\omega)| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\prec X(\omega) = \ atan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Transformada de Fourier

- **La ecuación de síntesis** de la Transformada de Fourier o **Transformada de Fourier inversa** permite obtener $x(t)$ a partir de su espectro $X(\omega)$.

$$x(t) = TF^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Factor de normalización

Signo positivo

Transformada de Fourier

- **Ecuación de análisis**

$$X(\omega) = TF\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$ Frecuencia en rad/s

$$X(f) = TF\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt$$ Frecuencia en Hz

- **Ecuación de síntesis**

$$x(t) = TF^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Dominio del tiempo $\quad x(t) \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} X(\omega) \quad$ **Dominio de la frecuencia**

2

Transformada de Fourier de señales básicas

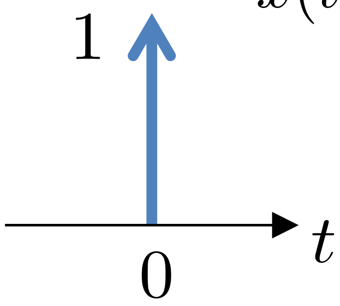
Escalón unidad

Escalón unidad

$$u(t) \quad \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} \quad \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

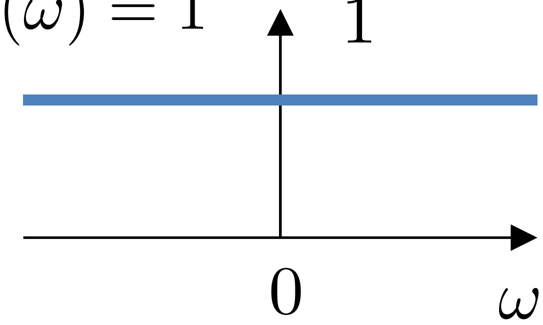
Impulso unidad

$$x(t) = \delta(t)$$



$$\xleftrightarrow{TF\{\cdot\}}$$

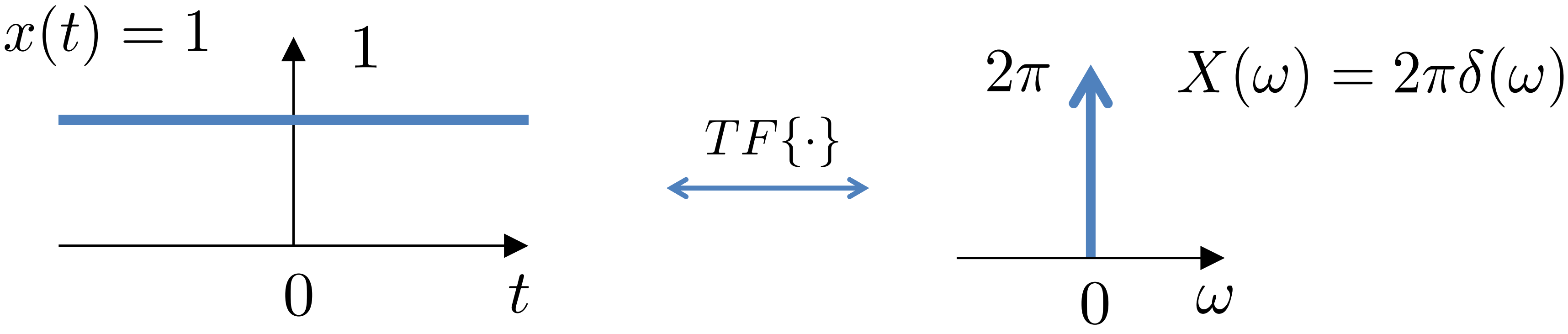
$$X(\omega) = 1$$



Demostración:

$$\begin{aligned} X(\omega) = TF\{\delta(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega 0} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{aligned}$$

Señal constante



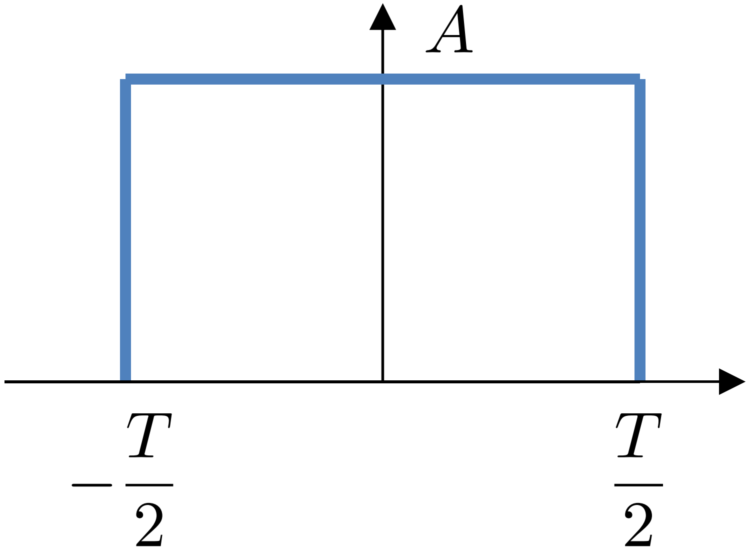
Demostración:

$$x(t) = TF^{-1}\{2\pi\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$
$$= \frac{2\pi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{j0t}d\omega$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)d\omega = 1$$

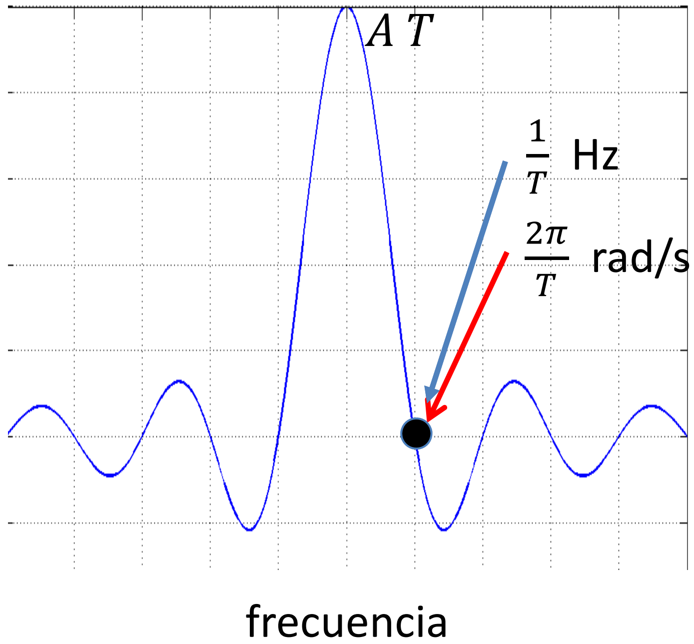
Esta TF es la dual de la anterior

Pulso rectangular

$$x(t) = \begin{cases} A & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} \quad X(\omega) = 2A\frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega}$$

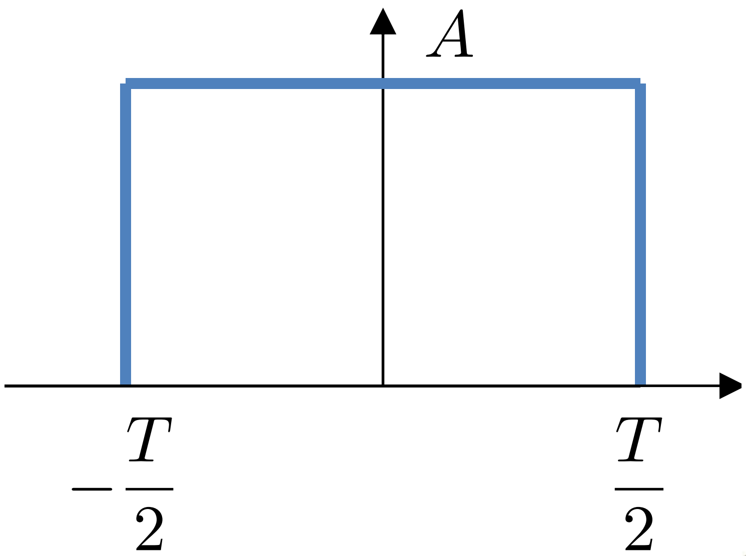


$$\xleftrightarrow{TF\{\cdot\}}$$



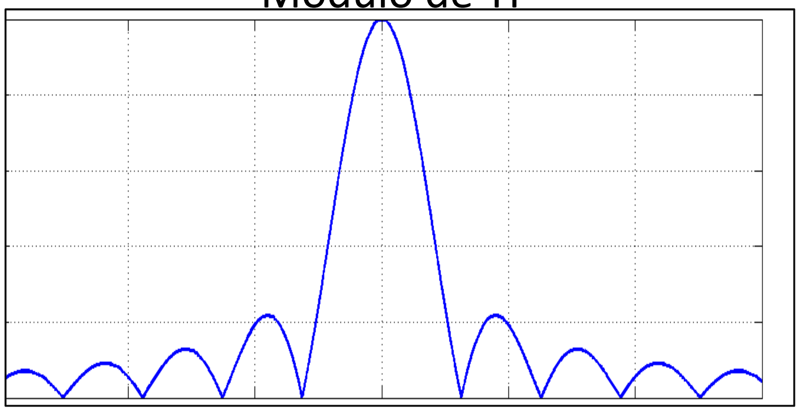
Pulso rectangular (cont.)

$$x(t) = \begin{cases} A & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} \quad X(\omega) = 2A\frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega}$$

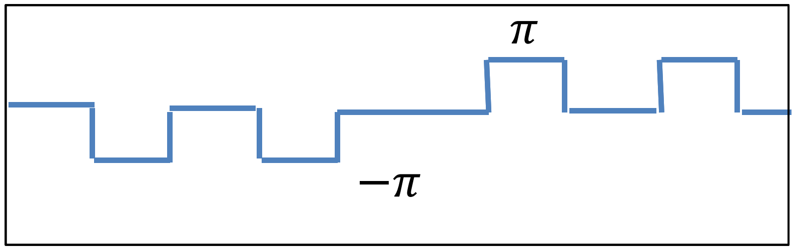


$$\xleftrightarrow{TF\{\cdot\}}$$

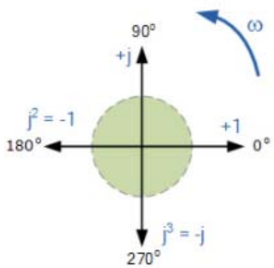
Módulo de TF



Fase de TF

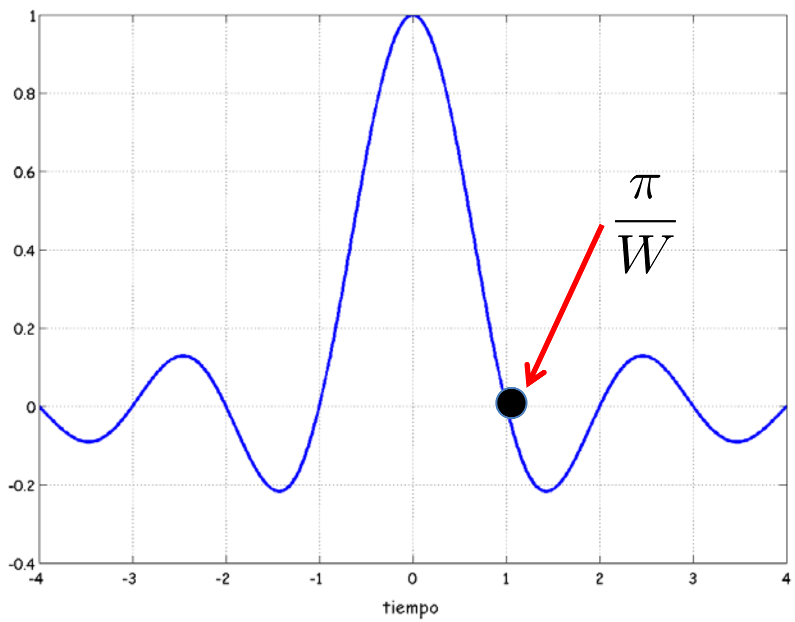


frecuencia

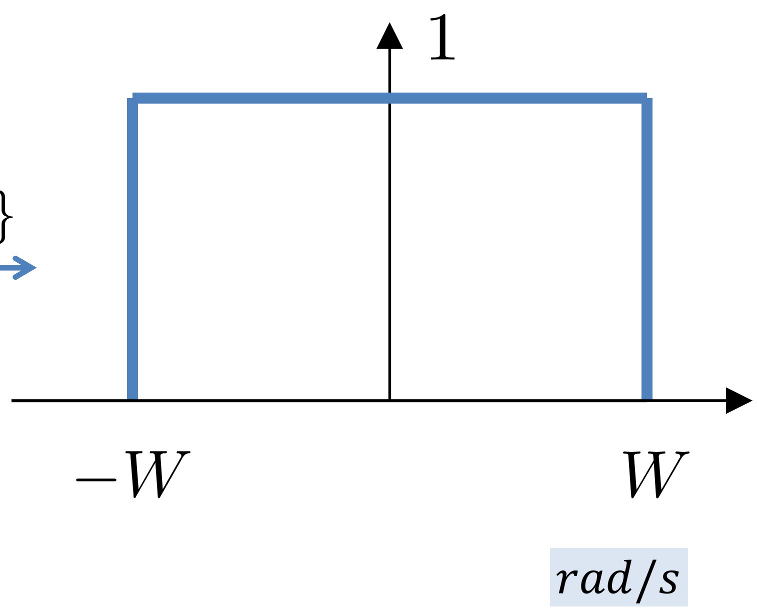


Pulso sinc

$$x(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t} \quad \xleftrightarrow{TF\{\cdot\}} \quad X(\omega) = \begin{cases} 1 & -W < \omega < W \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$TF\{\cdot\}$



Exponencial real unilateral decreciente (a>0)

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad \overset{TF\{\cdot\}}{\longleftrightarrow} \quad X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

- **Demostración:**

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = \left.\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right|_{0}^{\infty}$$

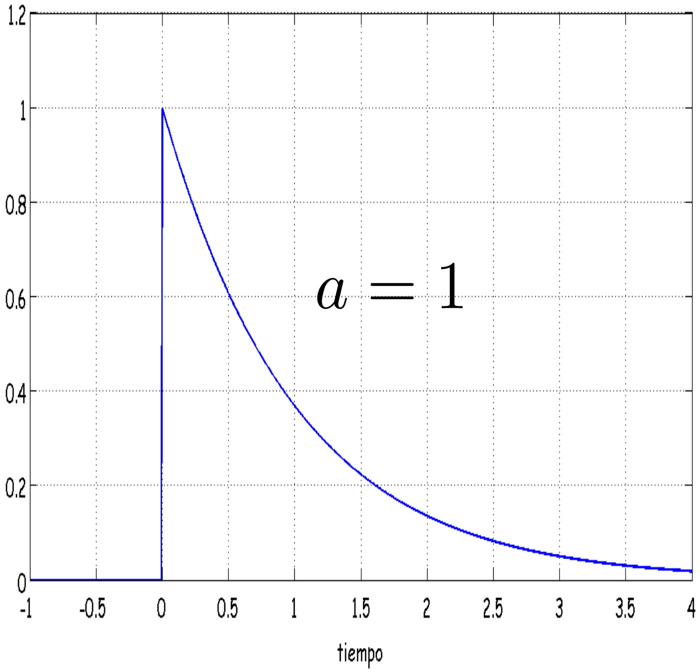
$$= \frac{e^{-\infty} - e^{0}}{-(a+j\omega)} = \frac{0-1}{-(a+j\omega)}$$

$$= \frac{1}{a+j\omega}$$

Exponencial real unilateral decreciente (cont.)

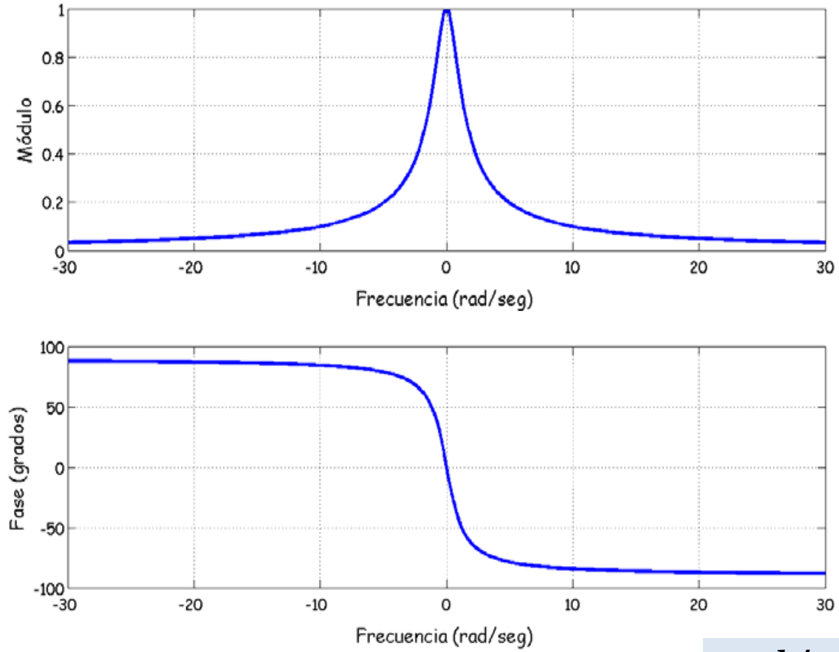
$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad \overset{TF\{\cdot\}}{\longleftrightarrow} \quad |X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

$$\angle X(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



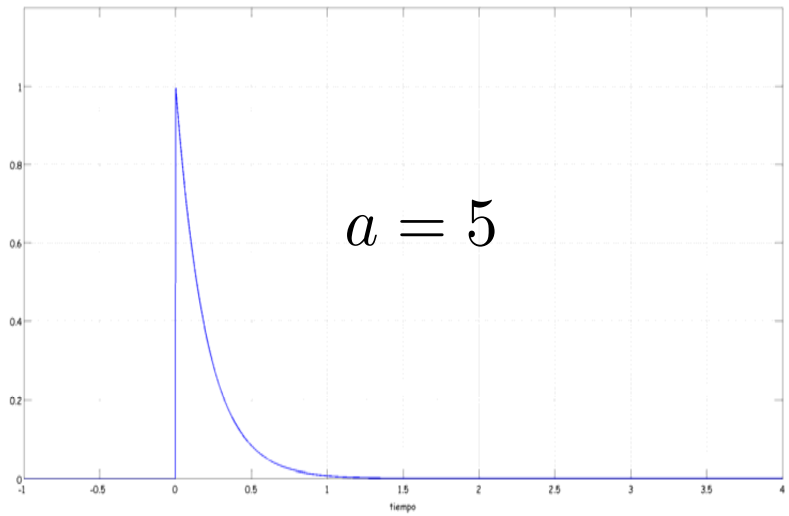
$a = 1$

$$\overset{TF\{\cdot\}}{\longleftrightarrow}$$



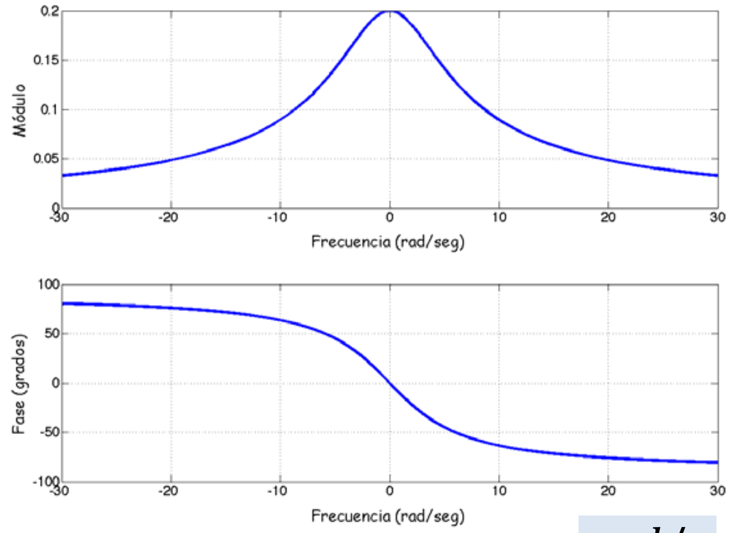
rad/s

Exponencial real unilateral decreciente (cont.)

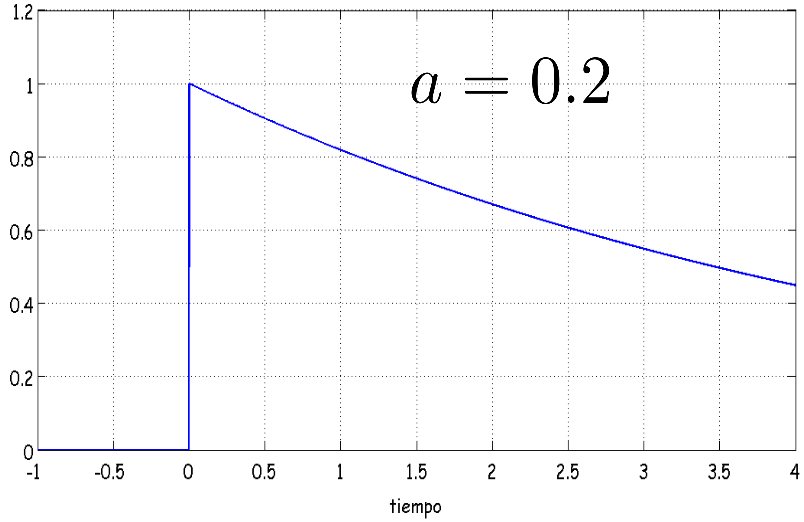


$TF\{\cdot\}$

$\longleftrightarrow$

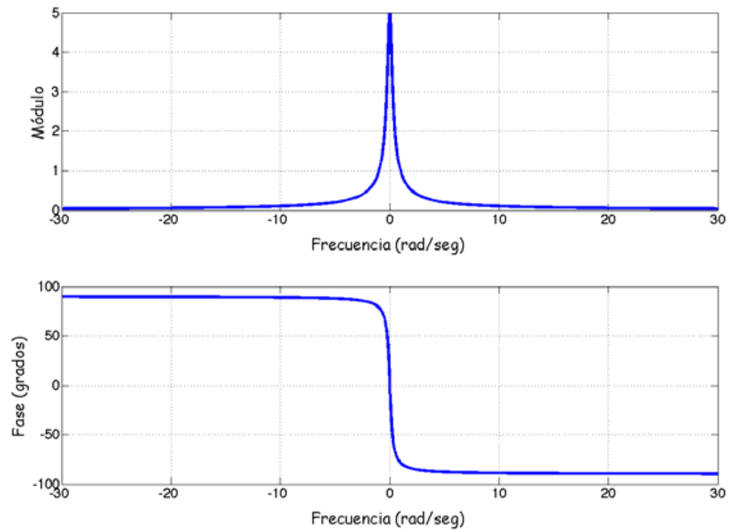


rad/s



$TF\{\cdot\}$

$\longleftrightarrow$



rad/s

TEMA 2: Representación en frecuencia