Lezione Matematica 7 ottobre 2024

Argomenti: Assioma di Dedekind, Insiemi Limitati, L'infinito, Somma degli Inversi dei numeri naturali, Somma di Gauss, Somma geometrica, Introduzione al concetto di funzione.

Significato e Implicazioni dell'Assioma di Dedeking

1. **Costruzione dei Numeri Reali**: L'assioma di Dedekind è spesso utilizzato per costruire i numeri reali tramite i numeri razionali. I numeri reali possono essere visti come classi di equivalenza di insiemi di numeri razionali, dove ogni insieme rappresenta un intervallo limitato dei numeri razionali.
2. **Completezza**: L'assioma di Dedekind implica la completezza dei numeri reali, un'importante proprietà che afferma che non ci sono "lacune" nei numeri reali. Ciò significa che ogni insieme di numeri reali limitato superiormente ha un massimo o un minimo superiore.
3. **Analisi Matematica**: Questo assioma è cruciale per molte aree dell'analisi matematica, in particolare per definire concetti come continuità, limiti e integrabilità. Ad esempio, l'integrale di Riemann si basa sulla proprietà del supremum e infimum di insiemi di numeri.

Insieme Limitato
Un insieme è considerato **limitato** se esistono dei limiti sia superiori che inferiori per i suoi elementi.

Questo significa che:
- Esiste un valore massimo, oltre il quale nessun elemento dell'insieme può andare.
- Esiste un valore minimo, al di sotto del quale nessun elemento dell'insieme può scendere.

In altre parole, tutti gli elementi dell'insieme si trovano all'interno di un intervallo finito di numeri.

Insieme Illimitato
Un insieme è considerato **illimitato** se non ha né un limite superiore né un limite inferiore.

Ciò significa che:
- Gli elementi dell'insieme possono continuare indefinitamente verso

l'alto senza un massimo.
- Gli elementi possono anche estendersi indefinitamente verso il basso senza un minimo.

In sostanza, un insieme illimitato può contenere valori che vanno all'infinito in entrambe le direzioni.

Lunedì 7 ottobre 2024

Assioma di DEDEKING: per ogni sezione A, B di $\mathbb{R}$

$\exists!\ c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq c \leq b$ $\quad \forall a \in A$, $\forall b \in B$

$\exists!$ vuol dire unico, indica unicità

Sezione A e B: sono suddivisioni di $\mathbb{R}$
- la loro intersezione è nulla $A \cap B = \emptyset$
- $A \cup B = \mathbb{Q}$ insieme danno tutto l'insieme dei relativi
- tutti gli elementi di $A <$ elementi di B

Es. inf sup max min di $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2 \wedge x > 0\}$

$\wedge$ congiunzione logica "e"

$$\begin{cases} x^2 \leq 2 & -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ x > 0 \end{cases} \quad 0 < x \leq \sqrt{2}$$

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \sqrt{2}\}$
$= [0, \sqrt{2}]$

$\inf A = 0$
$\sup A = \sqrt{2}$

$\inf A \nexists 0 \in A$
$\nexists$ MIN A

$\sup A = \sqrt{2} \in A$
$\exists$ MAX A

$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2 \wedge x > 0\}$
$= \mid 0 < x \leq \sqrt{2}\}$

$\inf B = 0 \notin B$ $\quad \nexists$ MIN B

$\sup B = ?\ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\Rightarrow B$ non ammette ESTREMO SUPERIORE fino ad ora --> INSIEMI LIMITATI, cioè ammette sia MAGGIORANTI che MINORANTI

* Un insieme è limitato superior. se ammette <u>MAGGIORANTI</u>.

* -- è limitato inferiormente se ammette <u>MINORANTI</u>

* è <u>illimitato</u> superiormente se <u>NON</u> ammette MAGGIOR.

  $\sup A = +\infty$

* è illimitato inferiormente se <u>NON</u> ammette minoranti

  $\inf A = -\infty$

$+\infty$ e $-\infty$ non sono <u>NUMERI</u>: non si fanno operazioni su di essi.

<u>L'infinito</u>

- Cantor (?)
- Il metodo nei problemi meccanici (Archimede)
- "il finito fosse appannaggio degli uomini e l'infinito di Dio."
- Paradiso, XXXIII, 133-138
  "Qual è il geometra che tutto s'affige."

La somma degli inversi dei numeri naturali è una serie matematica molto interessante, nota come la **serie armonica**.
Una delle proprietà più importanti della serie armonica è che diverge all'infinito. Ciò significa che, se si continua a sommare gli inversi dei numeri naturali, il risultato cresce senza limiti.

SOMMA degli INVERSI dei NUMERI NATURALI

Nicola loresme (1300)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{16}\dots$$

analizziamo:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{16} \Rightarrow \frac{1}{16}\cdot 8 = 8\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots \Rightarrow$ infiniti $\frac{1}{2}$: la somma degli inversi dei numeri naturali è sempre più grande di un numero finito.

"definizione di ∞"

SOMMATORIA : $\sum_{k=1}^{n} a_k \quad a_k\in\mathbb{R} \quad k\in\mathbb{N}$

somma di $a_1, a_2 \dots a_{n-1}, a_n$

Es. somma inversi n. reali

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k}$$

Es. $$\sum_{k=2}^{7}\frac{k+1}{k} = \frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}+\frac{7}{6}+\frac{8}{7}$$

Es. $\sum_{k=1}^{20} k$ somma di GAUSS : calcolare la somma dei primi n numeri naturali

$\sum_{k=1}^{n} k \to S = 1+2\dots+n-1+n$ cambio l'ordine

$$= n+n-1+\dots 1$$

La **somma di Gauss** è un concetto noto in matematica che si riferisce a una formula per calcolare rapidamente la somma dei primi n numeri naturali. La storia racconta che il giovane Carl Friedrich Gauss scoprì questa formula mentre era ancora a scuola.

La **somma geometrica** è una serie di numeri in cui ciascun termine dopo il primo si ottiene moltiplicando il termine precedente per una costante chiamata **ragione**.

$$S+S=2S \qquad 1+2+\dots\ n-1+n$$

$$n+n-1+\dots\ 2+1$$

$$n+1 \;\big|\; 2n-1 \;\big| \qquad 2+n-1 \;\big|\; n+1$$

$$\Downarrow$$

$$2S=(n+1)\,n$$

$$S=\frac{(n+1)\,n}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$S=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{(n+1)\,n}{2}$$

SOMMA di GAUSS

somma dei primi n numeri naturali

Somma geometrica

$q\in\mathbb{R}$

$k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

$n\in\mathbb{N}$

$q\neq 0$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = q^0+q+q^2+q^3\dots+q^n$$

$$\frac{q}{1}=q \qquad \frac{q^2}{q}=q \qquad \frac{q^n}{q^{n-1}}=q$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k=?$$

$$S = 1 + q + q^2 + q^{n-1} + q^n$$

$$S - 1 = q + q^2 + \dots q^{n-1} + q^n$$

$$S - 1 = q\left(1 + q \dots + q^{n-2} + q^{n-1}\right)$$

siccome $q \neq 0$

$$\frac{S-1}{q} = 1 + q \dots + q^{n-2} + q^{n-1}$$

$$\frac{S-1}{q} + \cancel{q^n} = \underbrace{1 + q \dots + q^{n-2} + q^{n-1} + \cancel{q^n}}_{S}$$

$$\frac{S-1}{q} + q^n = S$$

$$q\,\frac{S-1}{q} + q \cdot q^n = S \cdot q$$

$$S - 1 + q^{n+1} = Sq$$

$$S - S \cdot q = 1 - q^{n+1}$$

$$S(1-q) = 1 - q^{n+1} \Rightarrow S = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

SOMMA GEOMETRICA

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n-1}}{1-q} & \text{se } q \neq 0 \\ 1+n & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

queste formule vale se $q \neq 1$

Cosa Sono le Funzioni?

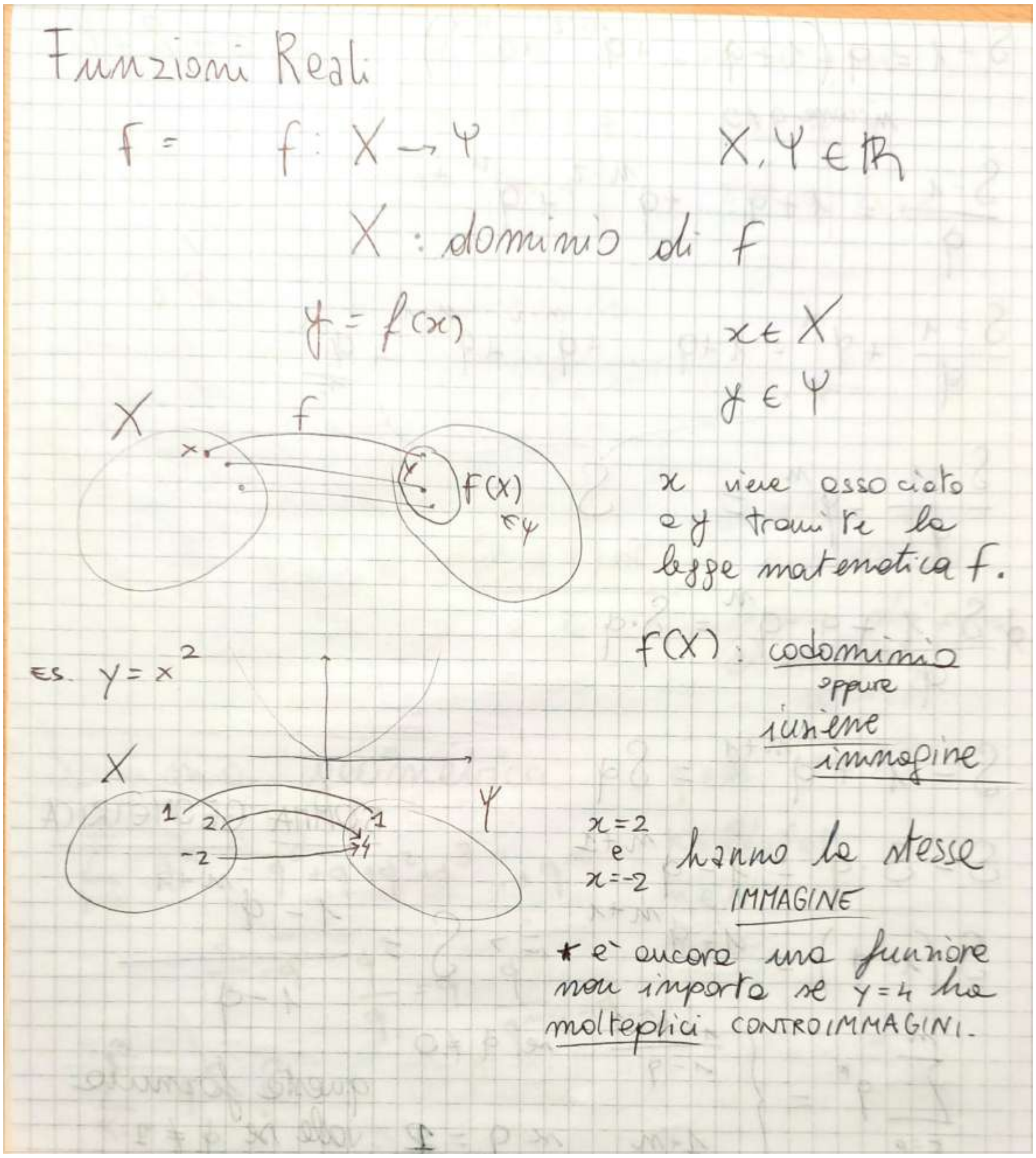
1. **Definizione di Funzione**: Una funzione è una regola che associa ogni elemento di un insieme chiamato dominio a un unico elemento di un altro insieme chiamato codominio. Ogni input ha un solo output.
2. **Notazione**: Una funzione viene generalmente indicata con una lettera, come "f". Se "x" è un elemento del dominio, l'output corrispondente sarà indicato come "f(x)". Questo significa che "f" è la funzione e "x" è l'input.

Dominio
Il **dominio** di una funzione è l'insieme di tutti i valori di input (o argomenti) per i quali la funzione è definita. In altre parole, è l'insieme di tutti i numeri o gli elementi che possiamo inserire nella funzione senza che si verifichino errori.

Codominio
Il **codominio** di una funzione è l'insieme di tutti i valori di output che la funzione può potenzialmente restituire. Non è necessariamente l'insieme di tutti i valori che la funzione restituirà, ma piuttosto l'insieme in cui stiamo cercando questi output.

Immagine
L'**immagine** di una funzione è l'insieme di tutti i valori di output effettivamente ottenuti quando si applicano tutti i valori del dominio alla funzione. In altre parole, è l'insieme di tutti i risultati che possiamo ottenere dalla funzione.

Controimmagine
La **controimmagine** di un elemento nel codominio è l'insieme di tutti gli elementi del dominio che, applicando la funzione, producono quel particolare output. In altre parole, se conosciamo il risultato, la controimmagine è l'insieme di tutti gli input che potrebbero generare quel risultato.



Prodotto Cartesiano di Due Insiemi

1. **Definizione**:
   - Il prodotto cartesiano di due insiemi A e B, denotato come A x B, è l'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b) dove "a" è un elemento dell'insieme A e "b" è un elemento dell'insieme B.
   - Matematicamente, A x B = {(a, b) | a ∈ A e b ∈ B}.
2. **Esempio**:
   - Consideriamo gli insiemi A = {1, 2} e B = {3, 4}.
   - Il prodotto cartesiano A x B sarà:
     - A x B = {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)}.
   - Ogni coppia (a, b) rappresenta una combinazione di un elemento di A con un elemento di B.

GRAFICO → prodotto CARTESIANO tra INSIEMI

$A = \{1,2\}$ $B = \{3,4,5\}$ $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

$A \times B = \{(1,3)\ (1,4)\ (1,5)\ \wedge\ (2,3)\ (2,4)\ (2,5)\}$

= prodotto cartesiano di A, B

$\neq B \times A$ (non è commutativo)

ES.

$B \times A = \{(3,1)\ (3,2)\ (4,1)\ (4,2)\ (5,1)\ (5,2)\}$

$A \times B \neq B \times A$