Lezione Matematica 24 ottobre 2024

Argomenti: Gerarchia degli Infiniti, Operazioni sui limiti, Forme indeterminate inf su inf e zero su zero.

La gerarchia degli infiniti che si manifesta tra funzioni come rette, esponenziali, logaritmi e potenze è un modo per descrivere come queste crescono in relazione tra loro quando tendono all'infinito. Nonostante il concetto di infinito possa sembrare "uguale" per tutte le funzioni, alcune crescono molto più velocemente di altre, creando una vera e propria scala di infiniti.

Matematica 24 ottobre 2024

GERARCHIA degli INFINITI

$x \to +\infty$ $\qquad b^x >> x^{\alpha} >> \log_a x$

$\alpha > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

$b > 1$

Es. $\lim_{x \to +\infty} \frac{3^x + 4^x - 2x}{5^x + x^{10}} = \frac{\infty}{\infty}$ F.I. $\to$ usiamo la gerarchia degli infiniti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4^x \left(\frac{3^x}{4^x} + \frac{\cancel{4^x}}{\cancel{4^x}} - \frac{2x}{4^x} \right)}{5^x \left(\frac{\cancel{5^x}}{\cancel{5^x}} + \frac{x^{10}}{5^x} \right)} \Rightarrow // \frac{4^x \left(\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^x}_{0} + 1 - \underbrace{\frac{2x}{4^x}}_{0} \right)}{5^x \left(1 + \underbrace{\frac{x^{10}}{5^x}}_{0} \right)}$$

$$\Rightarrow // \frac{4^x(0+1+0)}{5^x(1+0)} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^x = 0 \qquad \boxed{\text{NB } \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x}$$

Sebbene una retta cresca all'infinito, lo fa in modo molto più "lento" rispetto ad altre funzioni.

Le funzioni logaritmiche crescono molto lentamente rispetto alle altre. Man mano che x aumenta, la funzione logaritmica aumenta, ma molto gradualmente. Ad esempio, per passare da 1 a 100 nel logaritmo, il valore della funzione cresce solo di una piccola quantità. Questo significa che, nel lungo termine, le funzioni logaritmiche sono tra le più lente in termini di crescita.

Le funzioni di potenza sono del tipo "x elevato a n", dove n è un numero intero positivo. Queste funzioni crescono molto più rapidamente rispetto alle rette. Ad esempio, se prendiamo x al quadrato o x al cubo, vediamo che i loro valori aumentano più velocemente rispetto a una funzione lineare. Più grande è l'esponente n, più velocemente cresce la funzione. Quindi, x al cubo cresce più velocemente di x al quadrato.

Le funzioni esponenziali sono del tipo "a elevato a x", dove "a" è una costante maggiore di 1. Queste funzioni hanno una crescita estremamente rapida, molto più veloce di qualsiasi altra funzione nella gerarchia. Ad esempio, una funzione come 2 elevato a x esplode in grandezza molto rapidamente, e per valori alti di x, diventa dominante rispetto alle altre funzioni.

Ecco come possiamo organizzare queste funzioni in base alla loro velocità di crescita, dal più lento al più veloce:

1. Logaritmi: crescono molto lentamente.
2. Rette: crescono più rapidamente dei logaritmi ma sono comunque tra le più lente.
3. Potenze: crescono più velocemente delle rette, e più alto è l'esponente, più rapidamente crescono.
4. Esponenziali: crescono molto più rapidamente di tutte le altre funzioni.

ES $\lim_{x \to +\infty} x^2 - \ln x = \infty - \infty$ F.I.

* Per la gerarchia degli infiniti:

$$\lim_{x \to \infty} 3x + 4^x - 2x = \lim_{x \to \infty} 4^x$$

$$\lim_{x \to \infty} 5^x + x^{10} = \lim_{x \to \infty} 5^x$$

* Per le operazioni sui limiti:

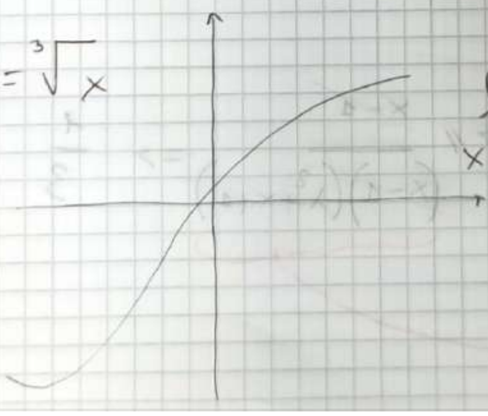
$$\lim_{x \to \infty} \frac{4^x}{5^x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{4}{5}\right)^x = 0$$

ES. $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x+1}\; e^x = ?$

* se abbiamo FI $\infty \cdot 0$, bisogna sempre ricondurre la FI a $\frac{\infty}{\infty}$. Un suggerimento è portare al denominatore la funzione che tende a 0.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[x]{x+1}}{e^{-x}} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = 0$$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$



$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x} = \infty$

La tecnica più comune per risolvere Infinito X zero, e' di è quella di **trasformare il prodotto in un rapporto** tra infiniti, e usare il **limite**. Per esempio:

- Se hai una forma come f(x) * g(x), dove f(x) tende a infinito e g(x) tende a zero, puoi riscriverla come un quoziente, ad esempio f(x) / (1 / g(x)), o viceversa.
- Una volta trasformato il prodotto in un rapporto, puoi cercare di risolvere il limite risultante.

Forme Indeterminate $\frac{0}{0}$ coi POLINOMI

Es.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^2-3x^5}{x+2x^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{scomposizione dei polinomi}$$

$$\Rightarrow \frac{x^{\cancel{2}}(2-3x^3)}{\cancel{x}(2x+1)} \Rightarrow \frac{\overset{0}{x}(2-3x^3)}{(2x+1)} \Rightarrow \frac{0(2-0)}{1+0}$$

Es

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \frac{0}{0} \quad \text{* scompongo i polinomi}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{(x-2)^2}{\cancel{(x-2)}(x+2)} \Rightarrow \frac{0}{4} \Rightarrow 0$$

Es.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^3-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \frac{\cancel{x-1}}{\underbrace{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}} \Rightarrow \frac{1}{3}$$

differenza di cubi

$(A-B)(A^2+AB+B^2)$

2. Forma Indeterminata "Zero su Zero"

Quando ottieni una frazione con numeratore e denominatore che tendono entrambi a zero, sei di fronte a una forma indeterminata di tipo zero su zero. Anche in questo caso, non puoi determinare il risultato senza ulteriori calcoli. E' consigliato procedere con la scomposizione dei polinomi e semplificare quanto possibile. Dopodiché sostituiamo il valore a cui tende il limite e otteniamo il risultato.

Es. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+1}{(x+1)^3} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \dfrac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{(x+1)^{\cancel{3}\,2}}$ $\boxed{A^3+B^3 = (A+B)(A^2-AB+B^2)}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\overset{3}{x^2-x+1}}{\underset{0}{(x+1)^2}} = +\infty$

$(x-2)^{1/2} \cdot (x-2)^{-2}$

Es. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-4x+4} = \dfrac{0}{0}$ // $\dfrac{(x-2)^{1/2}}{(x-2)^2} \Rightarrow$ // $\dfrac{1}{(x-2)^{3/2}}$

$\Rightarrow$ // $\dfrac{1}{(\sqrt{x-2})^3} = +\infty$