<u>Analyse</u> : Commençons par 1 cas simple. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et

$$g(u) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \phi(u_j).$$

On suppose $u_i^0 \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

1) Mq $\|\nabla g(u)\|^2 \sim \frac{1}{m} \mathbb{E}_{u^0}[\phi'(u^0)^2]$

2) Mq $\|D^2 g(u)\|_{op} \leq \frac{|\phi''|_\infty}{m}$

3) Soit $f(u) = \sqrt{m}\, g(u)$ montrer que

$$f(u^0+h) \underset{m\to\infty}{=} f(u^0) + \sqrt{\mathbb{E}[\phi'^2]}\, \langle v_u, h\rangle + O\left(\frac{\|h\|^2}{\sqrt{m}}\right)$$

$\|v_u\| = 1$

Considérons maintenant le cas où $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ et toujours $g(u) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \phi(u_j)$ où $u_j \in \mathbb{R}^d$

1) montrer que

$$\|Dg(u)\| = \|Dg(u)\, Dg(u)^T\|^{1/2} = \left\| \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^{m} D\phi(u_j)\, D\phi(u_j)^T \right\|^{1/2}$$

2) On suppose $u_j^0 \overset{iid}{\sim} \gamma^0$: montrer que

$$\|Dg(u^0)\| \underset{m\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{m}} \|\mathbb{E}[D\phi(u_j^0)\, D\phi(u_j^0)^T]\|^{1/2}$$

3)

$$\|D^2 g(u)\|_{op} = \frac{1}{m} \max_{j=1\dots m} \sup_{\|v\|\leq 1} v^T D^2\phi(u_j^0) v \leq \frac{1}{m} \sup_{u_j} \|D^2\phi(u_j)\|_{op}$$

4) que dire de $f(u) := \sqrt{m}\, g(u)$ autour de u^0 lorsque $m \to \infty$?

5) Application $f(u,x) = \frac{1}{\sqrt{m}} u_1^T \phi(u_2, x)$