

Álgebra Lineal  
Grupo 3044, 2020-II  
Examen parcial 2 (tarea examen)  
Fecha de entrega: miércoles 24 de marzo, 16:00 hrs.

*“Taking responsibility for education is education.  
Taking responsibility for learning is learning.”*

—Salman Khan,  
fundador de Khan Academy

Número de cuenta:

Sea  $d_i$  el  $i$ -ésimo dígito de tu número de cuenta. Sean los vectores  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  representados como  $\mathbf{u} \doteq [d_9 \ d_6 \ d_3]^T$ ,  $\mathbf{v} \doteq [-d_7 \ -d_4 \ d_1]^T$  en la base ordenada canónica de  $\mathbb{R}^3$ .

**1.** Modifica a uno de los dos vectores de tal forma que el conjunto  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  sea ortogonal. Demuestra que  $\langle \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \rangle$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^2$  dando la transformación lineal apropiada, así como su inversa, demostrando que ambas son lineales y que son inversas entre sí. (2.5 pts.)

**2.** Ahora, demuestra que la transformación lineal que diste en el ejercicio 1 es biyectiva —y que, por tanto, ambos espacios vectoriales mencionados son isomorfos— *sin* utilizar explícitamente a su transformación lineal inversa. (2.5 pts.)

**3.** Encuentra una base ordenada de  $\mathbb{R}^3$  en la cual las representaciones de los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son 3-tuplas con sólo dos entradas no nulas. Conviértela en una base ortonormal ordenada (el orden puede ser el que tú quieras). (2.5 pts.)

**4.** Representa las dos transformaciones lineales que obtuviste en el ejercicio 1 en forma matricial. Para la transformación lineal de  $\langle \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ , represéntala primero utilizando la base ordenada que obtuviste al principio del ejercicio 3 y, después, la base ortonormal ordenada que obtuviste al final del mismo ejercicio. (2.5 pts.)

**Extra:** Sean  $A_1$  y  $A'_1$  las representaciones matriciales de la transformación lineal de  $\langle \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \rangle$  que obtuviste al inicio del ejercicio 4, y  $A_2$  la representación matricial de la transformación inversa que obtuviste en el mismo ejercicio. Calcula la matriz resultante de los productos  $A_1 A_2$ ,  $A_2 A_1$ ,  $A'_1 A_2$  y  $A_2 A'_1$ . ¿Cómo interpretas el resultado? (0.5 pts. extra)\*