

Funcional y espacio dual

Recordatorios:

- Sea K un campo. Entonces K es un espacio vectorial sobre sí mismo.
- Sean V y W espacios vectoriales sobre K , entonces $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio vectorial sobre K .

En particular, si $W=K$, entonces $\mathcal{L}(V, K)$ es el espacio dual de V , denotado por V^* . A los elementos de $\mathcal{L}(V, K)$ se les conoce como funcionales o vectores duales.

Notación de Dirac / bra-ket

Según nuestra convención hasta ahora, el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es lineal en la 1ª entrada y antilineal en la 2ª.

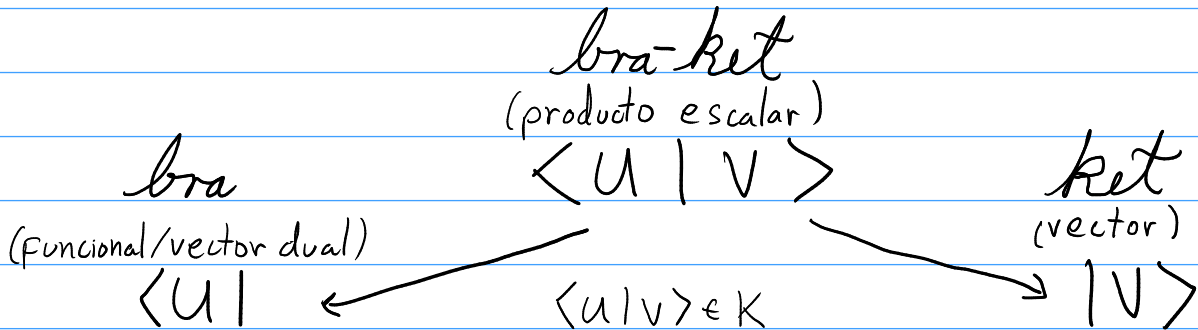
En la notación de bra-ket, el producto escalar se escribe como $\langle \cdot | \cdot \rangle$ y es lineal en la 2ª entrada y antilineal en la 1ª. Es decir,

$$\langle a | \beta b + c \rangle = \langle a | (\beta \langle b | + \langle c |) \rangle = \beta \langle a | b \rangle + \langle a | c \rangle \text{ linealidad}$$

$$\langle a + \beta b | c \rangle = (\langle a | + \langle \beta b |) \langle c \rangle = \langle a | c \rangle + \beta \langle b | c \rangle \text{ antilinealidad}$$

Anatomía de un bra-ket

Sea V un espacio vectorial con producto escalar y $|u\rangle, |v\rangle \in V$.



$$\langle u | : V \rightarrow K, \langle u | \in V^*$$

$$|v\rangle \in V$$

Anteriormente $\langle v, \alpha \rangle \in K, v \in V$ y $\langle \cdot, \alpha \rangle : V \rightarrow K$,
 $\langle \cdot, \alpha \rangle \in \mathcal{L}(V, K)$.

Obs. Si $|b\rangle \in V, \beta \in K$

$$\beta |b\rangle = |\beta b\rangle \Leftrightarrow \langle \beta b | = \bar{\beta} \langle b |$$

Correspondencia entre bras y Kets

Obs. Si $|v\rangle$ es un eigenvector de T con eigenvalor λ ,

$$|T(v)\rangle = |\lambda v\rangle = \lambda |v\rangle,$$

pero

$$\langle T(v) | = \langle \lambda v | = \bar{\lambda} \langle v |.$$