Álgebra Lineal
Grupo 3003, 2021-I
Examen parcial 2 (tarea examen)
Fecha de entrega: jueves 19 de noviembre, 14:00 hrs.

> "El auto-aprendizaje es una fuente continua de placer para mí; entré más conozco, más llenadora es mi vida y mejor aprecio mi propia existencia."
>
> —Isaac Asimov,
> escritor estadounidense

1. Decimos que una relación R en un conjunto E es una *relación de equivalencia* si cumple las siguientes tres propiedades:

- xRx para todo $x \in E$ (llamada "reflexividad");
- si xRy, entonces yRx ("simetría");
- si xRy y yRz, entonces xRz ("transitividad").

Además, decimos que dos matrices $A, B \in M_{n\times n}(K)$ son *similares* si existe una matriz invertible $Q \in M_{n\times n}(K)$ tal que $A = QBQ^{-1}$, donde K es un campo arbitrario. Demuestren que:

a) las relaciones de *isomorfismo entre espacios vectoriales* y *similitud entre matrices* son relaciones de equivalencia.

Sean V y W espacios vectoriales sobre K de dimensiones finitas n y m, respectivamente. Demuestren que:

b) $\dim(\mathcal{L}(V, W)) = mn$.

c) Las representaciones matriciales de un operador $T : V \to V$ en **una** base ordenada son matrices similares.

2. Sea V un espacio vectorial. Decimos que un operador lineal $P : V \to V$ es un *operador de proyección* si $P^2 = P$. Demuestren que si $\dim(V) = n$, entonces:

a) $\operatorname{Im}(P) \oplus \operatorname{Ker}(P) = V$.

b) Si β es una base ordenada arbitraria de V, entonces $[P]_\beta$ es similar a una matriz diagonal con entradas 0 y 1.

3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n con producto escalar. Demuestren que si $T : V \to V$ es un operador lineal, entonces

$$([T]_\gamma)_{ij} = \frac{\langle T(\mathbf{g}_i), \mathbf{g}_j\rangle}{\langle \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_j\rangle},$$

donde $\gamma = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n)$ es una base ordenada ortogonal de V[1].

4. Sea $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ un vector no nulo, $\eta = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canónica ordenada de $\mathbb{R}^3$ y $T : V \to V$ un operador lineal tal que

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2\frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a}\rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}\mathbf{a} \quad \forall\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Calculen a $[T]_\eta$.

b) Encuentren vectores $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ tales que $\gamma := \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subset \mathbb{R}^3$ sea un conjunto ortogonal. Luego, calculen a $[T]_\gamma$ y respondan: ¿cómo interpretan al operador T geométricamente a partir de esta representación matricial?

c) **Sin hacer cálculos**, respondan las siguientes preguntas: ¿cómo interpretarían geométricamente al operador T si tuviera regla de correspondencia $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} - 2\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{a}\rangle}{\langle \mathbf{a},\mathbf{a}\rangle}\mathbf{a} - 2\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{b}\rangle}{\langle \mathbf{b},\mathbf{b}\rangle}\mathbf{b}$? ¿Y si fuera $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} - 2\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{a}\rangle}{\langle \mathbf{a},\mathbf{a}\rangle}\mathbf{a} - 2\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{b}\rangle}{\langle \mathbf{b},\mathbf{b}\rangle}\mathbf{b} - 2\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{c}\rangle}{\langle \mathbf{c},\mathbf{c}\rangle}\mathbf{c}$?

[1] Observen cómo esta demostración nos muestra lo fácil que es calcular representaciones matriciales de operadores lineales en espacios con producto escalar; en particular, noten cómo este cálculo se simplifica aún más si supongemos que γ es una base ordenada ortonormal.