Representaciones matriciales de transformaciones lineales

Sean V y W espacios vectoriales sobre K de dimensión finita n y m, respectivamente, y sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Sean $\beta = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ y $\delta = (\vec{d}_1, \ldots, \vec{d}_m)$ bases ordenadas de V y W, respectivamente.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\cdot]_\beta}"', "\wr"] & W \arrow[d, "{[\cdot]_\delta}", "\wr"'] \\
K^n \arrow[r, dashed, "¿?"'] & K^m
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\vec{v} \arrow[r, mapsto, "T"] \arrow[d, mapsto] & T(\vec{v}) \arrow[d, mapsto] \\
{[\vec{v}]_\beta} \arrow[r, dashed, mapsto, "¿?"'] & {[T(\vec{v})]_\delta}
\end{tikzcd}
$$

$$
\text{m-renglones}\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}}^{\text{n-columnas}}\right.\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}\Big\}\text{n-tupla} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}\Big\}\text{m-tupla}
$$

Veremos que T puede ser representada por un elemento de $M_{m\times n}(K)$. A este elemento lo denotaremos por $[T]_\beta^\delta$. Si $W=V$ y $\delta=\beta$, escribiremos sólo $[T]_\beta$. ¿Cómo calculamos a $[T]_\beta^\delta$?

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}}_{[T]_\beta^\delta}
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{[\vec{v}]_\beta}
=
\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{pmatrix}}_{[T(\vec{v})]_\delta},
\quad \text{en gral.} \quad
\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}
\left[\vec{b}_j\right]_\beta
=
\begin{pmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}
$$

j-ésimo vector columna

$$
\begin{pmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} = [T(\vec{b}_j)]_\delta \mapsto \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\vec{d}_i
$$

$$
T(\vec{b}_1) = \sum_{i=1}^{m} A_{i1}\vec{d}_i
$$

$$\vdots$$

$$
T(\vec{b}_n) = \sum_{i=1}^{m} A_{in}\vec{d}_i
$$

$$
T(\vec{u}+a\vec{v}) = T(\vec{u}) + aT(\vec{v})
$$

$$
[T]_\beta^\delta\left([\vec{u}]_\beta + a[\vec{v}]_\beta\right) = [T]_\beta^\delta[\vec{u}]_\beta + a[T]_\beta^\delta[\vec{v}]_\beta
$$

Ejer. Sea $M \in M_{m\times n}(K)$. Demuestra que $M: K^n \to K^m$ es una transformación lineal.

Ejer. Demuestra que $[\cdot]_\beta^\delta : \mathcal{L}(V,W) \to M_{m\times n}(K)$ es un isomorfismo.

Ejemplo: Sean $V=P^3$, $W=P^2$, $T=\frac{d}{d\cdot}$.

Definimos $e_0(x)=1$, $e_1(x)=x$, $e_2(x)=x^2$ y $e_3(x)=x^3$. Sean $\beta=(e_0,e_1,e_2,e_3)$ y $\delta=(e_0,e_1,e_2)$.

Sabemos que $P^3 \xrightarrow[{[\cdot]_\beta}]{\sim} \mathbb{R}^4$, $P^2 \xrightarrow[{[\cdot]_\delta}]{\sim} \mathbb{R}^3$ y $\mathcal{L}(P^3,P^2) \xrightarrow[{[\cdot]_\beta^\delta}]{\sim} M_{3,4}(\mathbb{R})$.

Calculemos a $\left[\frac{d}{d\cdot}\right]_\beta^\delta$.

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}e_0 &= 0e_0+0e_1+0e_2 \\ \tfrac{d}{dx}e_1 &= 1e_0+0e_1+0e_2 \\ \tfrac{d}{dx}e_2 &= 0e_0+2e_1+0e_2 \\ \tfrac{d}{dx}e_3 &= 0e_0+0e_1+3e_2 \end{aligned} \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \left[\frac{d}{d\cdot}\right]_\beta^\delta$$