

Curso de Álgebra Lineal (2022-I)

Diego Alberto Barceló Nieves
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Notación

| | |
|---|---|
| $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$ | vectores (elementos de un conjunto vectorial V) |
| a, b, c, \dots | escalares (elementos de un campo K que define un espacio vectorial) |
| ab | producto entre los escalares a y b |
| $a\mathbf{u}$ | producto del vector \mathbf{u} por el escalar a^a |
| (x_1, \dots, x_n) | coordenada como n-tupla |
| $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ | vector como n-tupla |
| $V + W$ | suma de los espacios vectoriales V y W |
| $V \oplus W$ | suma directa de los espacios vectoriales V y W |
| $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ | producto escalar entre los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} |
| \bar{a} | complejo conjugado de a |
| $u_i v_i \equiv \sum_{i=1}^n u_i v_i$ | <i>notación de Einstein</i> para la suma sobre un índice i |
| $\ \mathbf{u}\ $ | norma del vector \mathbf{u} |
| $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ | proyección del vector \mathbf{v} sobre el vector \mathbf{u} |
| $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ | ortogonalidad de los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} |
| $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ | producto vectorial (cruz) de dos vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ |
| $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ | triple producto escalar entre tres vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. |
| $\langle G \rangle$ | Espacio vectorial generado por G |
| <i>l.i.</i> | Conjunto linealmente independiente |
| <i>l.d.</i> | Conjunto linealmente dependiente |
| $\dim(V)$ | Dimensión del espacio vectorial V |

^aAlgunos textos se refieren a esta operación —realizada entre un vector y un escalar, y que da como resultado un vector— como *multiplicación escalar* (o *scalar multiplication*, en inglés); sin embargo, es fácil que esta operación se confunda con la de *producto escalar*, que da como resultado un escalar. Debemos tener esto en mente cuando leamos otros textos de álgebra lineal, tanto en español como en inglés.

1. Estructuras algebraicas, campos y espacios vectoriales

El álgebra lineal se puede definir como el estudio de los espacios vectoriales. En esta sección definiremos qué son, así como algunas nociones básicas que guiarán nuestro estudio de este tipo de estructuras algebraicas durante el curso. Antes, discutiremos brevemente qué constituye una estructura algebraica y repasaremos la definición de la estructura de campo —necesaria para definir la de espacio vectorial.

Estructuras algebraicas

¿Qué es el álgebra, y qué es lo que estudia? A menudo en los primeros cursos de álgebra esta cuestión no queda clara. El hecho de que esta área de las matemáticas tenga una historia de evolución que comenzó hace miles de años y continúa hasta hoy en día complica aún más la situación. A pesar de no ser la visión más general que existe, en este curso tomaremos por respuesta que el álgebra es el estudio de estructuras algebraicas.

Definición de estructura algebraica y propiedades de sus operaciones

Antes de definir una estructura algebraica, recordaremos una definición importante.

Def. Un *par ordenado* de elementos de dos conjuntos A y B es un par de elementos (a, b) , con $a \in A$ y $b \in B$, en donde el orden de los elementos importa. Dos pares ordenados $(a, b), (a', b')$ son iguales si, y sólo si, tienen los mismos elementos en el mismo orden; matemáticamente

$$(a, b) = (a', b') \iff a = a' \wedge b = b'.$$

El conjunto de pares ordenados de elementos de dos conjuntos A y B es el producto cartesiano

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

En particular, el conjunto $A \times A$ de pares ordenados de elementos de A se denota por A^2 . Inductivamente, para todo $n \geq 2$ podemos definir el conjunto de n -tuplas de elementos de A como $A^n := A^{n-1} \times A$, el cual identificamos con el conjunto

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in A\}$$

para simplificar la notación.

Def. Una *estructura algebraica* es un conjunto no vacío A con (al menos) una operación en A y una colección (posiblemente vacía) de relaciones en A . Denotamos a una estructura algebraica formada por un conjunto A , operaciones \star, \circ y una relación \sim , como (A, \star, \circ, \sim) . Decimos que \star es una operación *binaria* si toma pares ordenados de elementos de A y devuelve elementos de A , i.e., si su dominio es $A \times A$ y su contradominio es A , lo que denotamos como $\star : A \times A \rightarrow A$. Si \star es una operación binaria, decimos que:

- \star es *asociativa* si, para cualesquiera $a, b, c \in A$, se tiene que

$$(a \star b) \star c = a \star (b \star c);$$

- \star es *conmutativa* si, para cualesquiera $a, b \in A$, se tiene que

$$a \star b = b \star a;$$

- \star tiene un elemento *identidad* (o *neutro*) si existe $e \in A$ tal que, para todo $a \in A$,

$$e \star a = a = a \star e;$$

- $b \in A$ es el elemento *inverso* de $a \in A$ (bajo \star) si \star tiene un elemento identidad $e \in A$ y

$$a \star b = e = b \star a;$$

- $B \subseteq A$ es *cerrado bajo la operación binaria* \star si la restricción de \star a $B \times B$ es binaria, i.e., si para cualesquiera $x, y \in B$,

$$x \star y \in B;$$

- \star se *distribuye con respecto a* $*$ si $*$ también es binaria y, para cualesquiera $a, b, c \in A$,

$$a \star (b * c) = (a \star b) * (a \star c) \quad \& \quad (b * c) \star a = (b \star a) * (c \star a).$$

Observación 1.1 Por definición, la relación de “ser inverso bajo una operación” es simétrica. Es decir, a es inverso de b bajo la operación \star si, y sólo si, b es inverso de a bajo \star . Más aún, por definición, el elemento identidad de una operación, si existe, siempre es su propio inverso bajo esa operación. Frecuentemente diremos simplemente *identidad* o *neutro* para referirnos al elemento identidad de una operación; así mismo, utilizaremos sólo la palabra *estructura* para referirnos a una estructura algebraica.

Ejemplos de estructuras algebraicas

Para cualquier conjunto arbitrario A , su conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$ junto con las operaciones de unión e intersección de conjuntos (\cup y \cap , respectivamente) y la relación “contención” (\subseteq) forma una estructura algebraica, que podemos escribir explícitamente como $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \subseteq)$. Observemos que ambas operaciones son binarias, asociativas y conmutativas, como seguramente viste en tu curso de Álgebra.

Ejercicio 1. Consideremos la estructura algebraica $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \subseteq)$, donde A es un conjunto arbitrario. ¿Quiénes son los elementos neutros de \cup y \cap ? Demuéstralo.

El conjunto de los números naturales (\mathbb{N}) junto con la operación de suma ($+$) y la relación “menor o igual que” (\leq) forma una estructura algebraica $(\mathbb{N}, +, \leq)$. Observemos que, en este caso, $+$ es una operación binaria, asociativa y conmutativa. Si incluimos al número 0 en el conjunto \mathbb{N} , entonces 0 es el elemento identidad de la suma, y es el único elemento de \mathbb{N} que tiene inverso (¿Por qué?).

Ejercicio 2. Consideremos la estructura algebraica $(\mathbb{N}, +, \leq)$. Demuestra que ningún subconjunto finito F de \mathbb{N} es cerrado bajo la suma.

El conjunto de los números enteros junto con las operaciones de suma y multiplicación forma una estructura algebraica $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Similarmente, los conjuntos de los números racionales y los reales con las mismas operaciones —entre números racionales y reales, respectivamente— forman las estructuras $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Claramente, estas tres estructuras son distintas, pues los conjuntos que los forman son distintos. Sin embargo, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ forman el mismo *tipo* de estructura algebraica puesto que, como veremos más adelante, sus operaciones cumplen las mismas propiedades. Estudiaremos este tipo de estructura, conocida como *campo*, en la sección 1 como un primer paso hacia la definición de otro tipo de estructura conocida como *espacio vectorial*, que definiremos en 1. Además, veremos que no se necesitan relaciones para definir a estos tipos de estructuras. Por lo tanto, de ahora en adelante asumiremos que nuestras estructuras algebraicas no tienen relaciones.

Antes de definir estos tipos de estructuras algebraicas, veremos algunas nociones generales de estructuras que usaremos tanto en campos como en espacios vectoriales.

Proposición 1.2 Sean (A, \star) una estructura algebraica con una operación binaria y $e \in A$ un elemento identidad de \star . Entonces

- (a) e es único;
- (b) si la operación \star es asociativa y $a \in A$ tiene un inverso b bajo \star , entonces b es único.
- (c) si la operación \star es asociativa y todos los elementos de A tienen inversos bajo \star entonces, para cualesquiera $a, b, c \in A$, se tiene que $a \star c = b \star c$ si, y sólo si, $a = b$. (Ley de Cancelación)

Demostración.

- (a) Supongamos que $e' \in A$ es un elemento identidad de \star . Entonces $e = e \star e' = e'$. Por lo tanto, el elemento identidad e de \star es único.
- (b) Supongamos que \star es asociativa, $a \in A$ y que existe $b \in A$ tal que b es inverso de a bajo \star . Adicionalmente, supongamos que $b' \in A$ es un inverso de a bajo \star . Entonces

$$\begin{aligned}
 b &= b \star e && (e \text{ es neutro}) \\
 &= b \star (a \star b') && (b' \text{ es inverso de } a) \\
 &= (b \star a) \star b' && (\star \text{ es asociativa}) \\
 &= e \star b' && (b \text{ es inverso de } a) \\
 &= b'.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los elementos inversos bajo \star , si existen, son únicos.

- (c) Supongamos que \star es asociativa y que todos los elementos de A tienen inversos bajo \star . Sean $a, b, c \in A$ tales que $a \star c = b \star c$ y sea $c' \in A$ el elemento inverso de c bajo \star . Entonces,

$$\begin{aligned}
 a \star c = b \star c &\iff (a \star c) \star c' = (b \star c) \star c' \\
 &\iff a \star (c \star c') = b \star (c \star c') \\
 &\iff a \star e = b \star e \\
 &\iff a = b.
 \end{aligned}$$

Más aún, haciendo un procedimiento análogo, podemos demostrar que $c \star a = c \star b$ si, y sólo si, $a = b$.

□

Campos

Un campo es un tipo de estructura algebraica que formaliza varias de las nociones intuitivas que adquirimos durante nuestra educación básica sobre la aritmética en los números reales; esto es, que la suma y la multiplicación son operaciones binarias, asociativas y conmutativas, que la multiplicación se distribuye con respecto a la suma, y que el 0 y el 1 son números “especiales” en cierto sentido, el cual precisaremos más adelante.

Es probable que hayas visto este tipo de estructura explícitamente en tu curso de Álgebra y/o implícitamente en tu curso de Cálculo I (a través de los *axiomas de campo* —o *de cuerpo*¹— para los números reales); sin embargo, a continuación mencionaremos su definición y estudiaremos los dos ejemplos de campos que más utilizaremos durante este curso (el campo real y el complejo).

Definición de campo

Def. Un *campo* es un conjunto, que suele denotarse por K , con dos operaciones binarias llamadas *suma* y *multiplicación*, denotadas por $+$ y \cdot , respectivamente, tales que cumplen las siguientes propiedades, conocidas como los *axiomas de campo* o *de cuerpo*:

$$\forall a, b, c \in K \quad a + (b + c) = (a + b) + c \quad \& \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \text{Asociatividad}$$

$$\forall a, b \in K \quad a + b = b + a \quad \& \quad a \cdot b = b \cdot a \quad \text{Conmutatividad}$$

$$\exists 0, 1 \in K \text{ t.q.}, \forall a \in K, \quad a + 0 = a \quad \& \quad 1 \cdot a = a \quad \text{Identidades (neutros)}^a$$

$$\forall a \in K \quad \exists -a \in K \quad \text{t.q.} \quad a + (-a) = 0 \quad \text{Inversos aditivos}^b$$

$$\forall a \neq 0 \in K \quad \exists a^{-1} \in K \quad \text{t.q.} \quad a \cdot a^{-1} = 1 \quad \text{Inversos multiplicativos}^c$$

$$\forall a, b, c \in K \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{Distributividad}^d.$$

^aPor el inciso (a) de la Proposición 1.2, sabemos que los elementos identidad de operaciones binarias en estructuras algebraicas son únicos. Por convención, se suele denotar al neutro aditivo de un campo como 0 y al neutro multiplicativo, como 1. Además, como en este caso las operaciones son conmutativas, podemos escribir esta propiedad de manera más sucinta.

^bPor el inciso (c) de la Proposición 1.2, sabemos que los inversos, si existen, son únicos. Por convención, si a es elemento de un campo, su inverso aditivo suele denotarse por $-a$.

^cPor convención, si a es un elemento de un campo distinto del neutro aditivo, su inverso multiplicativo suele denotarse por a^{-1} o $\frac{1}{a}$.

^dObservemos que podemos escribir esta propiedad de forma resumida, pues $+$ y \cdot son operaciones conmutativas.

Observación 1.3 En otras palabras, una estructura algebraica $(K, +, \cdot)$ es un campo si:

- (a) $+$ es una operación binaria, asociativa, conmutativa, con un elemento identidad y con inversos aditivos para **todos sus elementos**;
- (b) \cdot es una operación binaria, asociativa, conmutativa, con un elemento identidad y con inversos multiplicativos para **todos sus elementos excepto el neutro aditivo**;

¹En francés, este tipo de estructura es llamado *corps*, cuya traducción directa al español es “cuerpo”.

(c) \cdot se distribuye con respecto a $+$.

Nótese la asimetría en la propiedad de existencia de inversos aditivos en ambas operaciones: el neutro aditivo **no** requiere tener inverso multiplicativo, mientras que **todos** los elementos deben tener inversos aditivos. Frecuentemente escribiremos sólo K para referirnos al campo $(K, +, \cdot)$ y escribiremos la multiplicación implícitamente, omitiendo el símbolo “ \cdot ”.

Ejemplos de campos

El campo real

El conjunto de los números reales \mathbb{R} junto con las operaciones de suma y multiplicación (que aprendimos desde la educación básica) cumplen todas las propiedades enlistadas en la sección 1, por lo que forman un campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, conocido como el *campo real*. Este campo puede ser representado geométricamente con la recta real, como en la Figura 1.

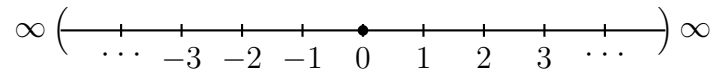


Figura 1: Representación del campo real con la recta real.

El campo complejo

Def. El conjunto de los números complejos se define como

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad i := +\sqrt{-1}.$$

Sea $z = a + ib$ un número complejo. Decimos que a es su *parte real* y que b es su *parte imaginaria*. A los números complejos con parte real nula, i.e., aquellos de la forma $0 + ib, b \in \mathbb{R}$, se les conoce como números *imaginarios*^a. El *complejo conjugado* de un número complejo de $z = a + ib$ es

$$\bar{z} = a - ib,$$

y el valor absoluto o *módulo* de un número complejo de z es

$$|z| = +\sqrt{z\bar{z}}.$$

^aGauss prefería llamarles números *laterales*, ya que creía que era un nombre más intuitivo, y que llamarles *imaginarios* les dotaba de una opacidad misteriosa e innecesaria. Sugiero ver este video introductorio (o la serie completa, llamada *Imaginary Numbers Are Real*) para perderles el miedo a los números imaginarios: <https://www.youtube.com/watch?v=T647CGsu0VU>.

Apoyándonos en las operaciones del campo real, podemos definir la suma y multiplicación entre números complejos como².

$$\begin{aligned}(a + ib) + (q + ir) &:= (a + q) + i(b + r), \\ (a + ib)(q + ir) &:= (aq - br) + i(ar + bq).\end{aligned}$$

Así mismo, apoyándonos en el campo real, podemos comprobar que el conjunto \mathbb{C} junto con estas dos operaciones forma un campo.

²Nótese que la definición de multiplicación es igual al desarrollo de $(a + ib)(c + id)$ como producto de binomios.

Ejercicio 3. Prueba que \mathbb{C} , con las operaciones de suma y multiplicación definidas anteriormente, forma un campo.

Subcampos

Def. Sea $(K, +, \cdot)$ un campo. Si $S \subseteq K$ es tal que las operaciones de suma y multiplicación en K restringidas al dominio $S \times S$ forman un campo, decimos que $(S, +, \cdot)$ es un *subcampo* de $(K, +, \cdot)$.

Observación 1.4 Si hacemos una identificación entre el conjunto de los números reales y los números complejos de la forma $a + i0 \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}$, entonces podemos considerar a $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ como un subcampo de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. En efecto, si restringimos las operaciones de suma y multiplicación en el campo complejo al conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid z = a + i0, a \in \mathbb{R}\}$, entonces estas operaciones son idénticas a las operaciones de suma y multiplicación en el campo real.

Prácticamente todas las operaciones que realizamos cotidianamente como calcular fechas, dar cambio, aproximar áreas, repartir comida, etc., toman lugar en un campo. Es decir, las ideas intuitivas que nos formamos durante la educación básica de que la suma siempre debe ser conmutativa y asociativa —al igual que la multiplicación—, que existe la resta y la división, que el 0 y el 1 son números *especiales* en cierto sentido y que siempre se cumple la propiedad de distributividad, son un *hecho* para cualquier estructura de campo. Sin embargo, estas mismas ideas intuitivas *no siempre se cumplen en otros tipos de estructuras algebraicas* —algunas de las cuales veremos más adelante—, ¡así que no te confíes!

Espacios vectoriales

El conjunto de soluciones de ciertos tipos de problemas que aparecen frecuentemente en varias áreas de las matemáticas, la física, la computación y la biomedicina tienen estructura de espacio vectorial, por lo que el conocimiento de la teoría de los espacios vectoriales —es decir, del álgebra lineal— se puede traducir en aplicaciones directas en dichas áreas.

Definición de espacio vectorial

Def. Un *espacio vectorial* sobre un **campo** K es un conjunto V con dos operaciones (llamadas *adición* o *suma vectorial* y *producto de un vector por un escalar*) que satisfacen las siguientes propiedades, conocidas como los *axiomas de los espacios vectoriales*:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \quad \exists \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V \quad \text{Cerradura de la adición}$$

$$\forall \mathbf{v} \in V, a \in K \quad \exists a\mathbf{v} \in V \quad \text{Cerradura del producto de un vector por un escalar}$$

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \quad \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \quad \text{Asociatividad de la adición}$$

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad \text{Conmutatividad de la adición}$$

$$\exists \mathbf{0} \in V \text{ t.q. } \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad \text{Elemento identidad de la adición (neutro aditivo)}$$

$$\forall \mathbf{v} \in V \quad \exists -\mathbf{v} \in V \text{ t.q. } \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \text{Elemento inverso de la adición (inverso aditivo)}$$

$$a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v} \quad \forall a, b \in K, \mathbf{v} \in V \quad \text{Compatibilidad del producto de un vector por un escalar con el producto entre escalares}$$

$$\exists 1 \in K \text{ t.q. } 1\mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad \text{Elemento identidad del producto de un vector por un escalar}$$

$$a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w} \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, a \in K \quad \text{Distributividad del producto de un vector por un escalar con respecto a la adición vectorial}$$

$$(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v} \quad \forall a, b \in K, \mathbf{v} \in V \quad \text{Distributividad del producto de un vector por un escalar con respecto a la suma escalar.}$$

A los elementos $a, b \in K$ del campo utilizado para definir el espacio vectorial se les llama *escalares* y los elementos $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ que cumplen todas las propiedades anteriores son llamados *vectores*.

Observación 1.5

- (a) La definición matemática de *vectores* como *elementos cualesquiera de un conjunto V que, junto con un campo K y las operaciones $+: V \times V \rightarrow V$ (suma vectorial) y $\cdot: K \times V \rightarrow V$ (producto de un vector por un escalar), cumplen las propiedades de un espacio vectorial* es muy distinta a la definición de vector como *elemento con magnitud, dirección y sentido* (y, más precisamente, que además es invariante bajo rotaciones propias e impropias) utilizada en algunas áreas de la física, siendo la primera definición más general.

- (b) La definición de *espacio vectorial* incluye dos operaciones *nuevas* (con respecto a las operaciones de campo) con una importante diferencia entre ellas: una es solamente entre los elementos del conjunto V (suma vectorial) y, la otra, entre los elementos del conjunto V y el campo K (producto de un vector por un escalar). Sin embargo, *ambas dan como resultado un vector en V* .
- (c) Así como la definición de *campo* incluye un conjunto K con dos operaciones (suma y producto) entre sus elementos que cumplen propiedades específicas, la definición de *espacio vectorial* incluye un conjunto V y un campo K con dos operaciones (suma vectorial y producto de un vector por un escalar) entre sus elementos que cumplen propiedades específicas.

Denotaremos a un espacio vectorial formado por un conjunto de vectores V y un campo K como (V, K) , o simplemente V cuando sea claro sobre qué campo está definido. Más adelante veremos otras operaciones en espacios vectoriales que se pueden definir entre vectores y escalares; sin embargo, la suma vectorial y el producto de un vector por un escalar son las únicas necesarias para *definir* a los espacios vectoriales, por lo que nos referiremos a ellas como las operaciones *esenciales* de los espacios vectoriales.

Corolario 1.6 (Ley de Cancelación para espacios vectoriales) Sean V un espacio vectorial y $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ tales que $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$. Entonces, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Demostración. Se sigue la Ley de Cancelación (inciso (c) de la Proposición 1.2) ya que, por definición de espacio vectorial, la suma vectorial es asociativa y todos los elementos de V tienen elementos inversos bajo esta operación. Más aún, dado que la suma vectorial es conmutativa, se sigue que $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{z} + \mathbf{y}$ implica que $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. \square

Para complementar la discusión al respecto de qué es un vector y apreciar cómo funcionan las operaciones de los espacios vectoriales (suma vectorial y producto de un vector por un escalar) de manera visual, sugiero ver el siguiente video: https://www.youtube.com/watch?v=fNk_zzaMoSs.

Ejemplos de espacios vectoriales

Los ejemplos de espacios vectoriales más sencillos —y, a menudo, más útiles— se siguen de una muy importante relación existente entre las definiciones de campo y espacio vectorial.

Ejercicio 4. Sea $(K, +, \cdot)$ un campo. Demuestra que (K, K) forma un espacio vectorial, con las operaciones de suma vectorial y producto de un vector por un escalar dadas por la suma y la multiplicación en el campo, respectivamente.

Por el Ejercicio 4 tenemos que cualquier campo forma un espacio vectorial sobre sí mismo. En particular, (\mathbb{R}, \mathbb{R}) y (\mathbb{C}, \mathbb{C}) son espacios vectoriales.

Consideremos el conjunto \mathbb{R}^2 . Aprovechando las operaciones de suma y multiplicación en el campo real, podemos definir una operación $+$: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

y una operación \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como

$$a(x_1, x_2) := (ax_1, ax_2).$$

Se puede verificar que, con estas operaciones, \mathbb{R}^2 forma un espacio vectorial sobre el campo real, en el cual el neutro aditivo es $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ y el inverso aditivo de $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ es $(-x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2$. Esto se debe a que definimos las nuevas operaciones “entrada por entrada”, por lo que la demostración de que $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial es análoga a la del Ejercicio 4. Más aún, para cualquier entero positivo n podemos definir operaciones $+$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de manera análoga a las anteriores, obteniendo así un espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Por ende, tenemos el siguiente corolario del Ejercicio 4.

Corolario 1.7 Sean K un campo y n un entero positivo. Entonces (K^n, K) es un espacio vectorial, definiendo las operaciones de suma vectorial y producto de un vector por un escalar entrada por entrada. Por el Corolario 1.7, se sigue que $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial para cualquier entero positivo n . Ahora, veamos otros ejemplos de espacios vectoriales.

El conjunto de todas las funciones polinomiales de una variable real de grado n (i.e., con regla de correspondencia de la forma $f(x) = c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$) y con un mismo dominio \mathcal{D} forma un espacio vectorial sobre el campo real. Aquí, las definiciones de suma vectorial y de producto de un vector por un escalar se siguen naturalmente de la definición de la suma de funciones $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ y del producto de una función arbitraria $f(x)$ por una función constante a , respectivamente, vistas en cálculo —las cuales aplican para las intersecciones de los dominios. El elemento identidad de la suma vectorial (neutro aditivo) es la función constante cero $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathcal{D}$ y el inverso aditivo de una función $g(x)$ es $-g(x)$. Observemos que, en este caso, los *vectores* de nuestro espacio vectorial *son funciones* (en particular, en este ejemplo, son funciones polinomiales).

El conjunto de todas las funciones de una variable real derivables y con derivada continua (i.e., funciones de clase C^1) sobre el campo \mathbb{R} forma un espacio vectorial³. Esto probablemente lo viste de manera implícita en tu curso de cálculo diferencial de una variable, cuando viste los teoremas de derivadas de una suma/multiplicación/división de funciones (también conocido como *álgebra de derivadas*) para funciones de este tipo. Las operaciones en este espacio vectorial, así como los elementos identidad (neutros) e inversos, se definen de la misma forma que en el ejemplo de las funciones polinomiales.

Para futura referencia, dejamos la siguiente definición.

Def. Un *espacio vectorial real (complejo)* es aquel definido sobre el campo real (complejo) o, equivalentemente, aquel donde los escalares son números reales (complejos).

Para ver más ejemplos de espacios vectoriales pueden consultar, por ejemplo, *Linear Algebra* de Friedberg (págs. 8-11.) o *Linear Algebra: A Modern Introduction* de Poole (págs. 430-432), entre otros.

Teorema 1.8 Sea (V, K) un espacio vectorial arbitrario con $\mathbf{v} \in V$ y $a \in K$. Entonces, tenemos que:

- (a) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$;
- (b) $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$;
- (c) $(-a)\mathbf{v} = -(a\mathbf{v}) = a(-\mathbf{v})$.

Demostración.

- (a) Por la propiedad de cerradura del producto de un vector por un escalar, sabemos que $0\mathbf{v} \in V$. Ahora, observemos que

$$\begin{aligned} 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v} &= (0 + 0)\mathbf{v} && \text{(distributividad)} \\ &= 0\mathbf{v} \\ &= 0\mathbf{v} + \mathbf{0}, && \text{(neutro aditivo)} \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se sigue de la distributividad de la suma de escalares con respecto al producto de un vector por un escalar. Por ende, tenemos que $0\mathbf{v} + 0\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + \mathbf{0}$. Luego, de la Ley de Cancelación para espacios vectoriales (Corolario 1.6) se sigue que $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

³En general, el conjunto de funciones de clase C^n sobre el campo \mathbb{R} forma un espacio vectorial.

(b) Observemos que

$$\begin{aligned} a\mathbf{0} + a\mathbf{0} &= a(\mathbf{0} + \mathbf{0}) \\ &= a\mathbf{0} \\ &= a\mathbf{0} + \mathbf{0}, \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se sigue de la distributividad de la suma vectorial con respecto al producto de un vector por un escalar. Por ende, tenemos que $a\mathbf{0} + a\mathbf{0} = a\mathbf{0} + \mathbf{0}$. Luego, de la Ley de Cancelación para espacios vectoriales (Corolario 1.6) se sigue que $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(c) Observemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= 0\mathbf{v} \\ &= (a + (-a))\mathbf{v} \\ &= a\mathbf{v} + (-a)\mathbf{v}, \end{aligned}$$

donde se utilizó el inciso (a), la propiedad de existencia de inversos aditivos en un campo y la distributividad de la suma de escalares con respecto al producto de un vector por un escalar. De la ecuación $a\mathbf{v} + (-a)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ y la conmutatividad de la suma vectorial se sigue que $(-a)\mathbf{v} = -(a\mathbf{v})$. Análogamente, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= a\mathbf{0} \\ &= a(\mathbf{v} + (-\mathbf{v})) \\ &= a\mathbf{v} + a(-\mathbf{v}), \end{aligned}$$

donde se utilizó el inciso (b), la propiedad de existencia de inversos aditivos en un espacio vectorial y la distributividad de el producto de un vector por un escalar con respecto a la suma vectorial. De la ecuación $a\mathbf{v} + a(-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ y la conmutatividad de la suma vectorial se sigue que $a(-\mathbf{v}) = -(a\mathbf{v})$. Por ende, $(-a)\mathbf{v} = -(a\mathbf{v}) = a(-\mathbf{v})$.

□

Interpretación geométrica de las operaciones esenciales de los espacios vectoriales

Como se mencionó en una nota al final de la sección 1 —de la cual retomaremos muchas ideas a continuación—, podemos desarrollar nuestra intuición sobre muchos temas del álgebra lineal trabajando en espacios vectoriales *visualizables*, para luego extenderla a espacios vectoriales más generales. Por ende, ahora haremos hincapié en la interpretación geométrica de las operaciones de suma vectorial y producto de un vector por un escalar en el espacio vectorial real \mathbb{R}^2 , así como en el espacio vectorial complejo \mathbb{C} .

El espacio vectorial real \mathbb{R}^2

En geometría analítica aprendimos que, con la ayuda de un sistema de coordenadas, podemos formar una correspondencia uno a uno (o *biunívoca*) entre pares ordenados (a, b) con entradas reales⁴ y puntos del plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En particular, si tomamos el sistema de coordenadas cartesianas, entonces a cualquier par ordenado de entradas reales (a, b) le corresponde un punto en el plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con coordenadas cartesianas (a, b) , y vice versa. En álgebra lineal, es preferible considerar a cada vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ en una correspondencia biunívoca con la flecha en el plano cartesiano que tiene cola en el origen y punta en la coordenada cartesiana correspondiente al punto (a, b) , como se muestra en la Figura 2.

⁴Es decir, con $a, b \in \mathbb{R}$.

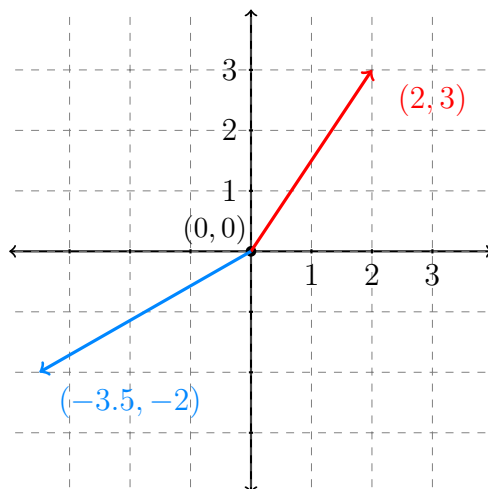


Figura 2: Ejemplo de representación de vectores en el plano cartesiano. Los vectores $(-3.5, -2)$ y $(2, 3)$ son representados por flechas que tienen su cola en el origen del plano cartesiano y su punta en las coordenadas correspondientes.

Suma vectorial

Recordemos que, en este espacio, la suma vectorial se define como $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, i.e., entrada por entrada. Podemos calcular, por ejemplo, la suma $(2, 1) + (1, 3) = (3, 4)$. Los tres vectores mencionados se muestran en la Figura 3.

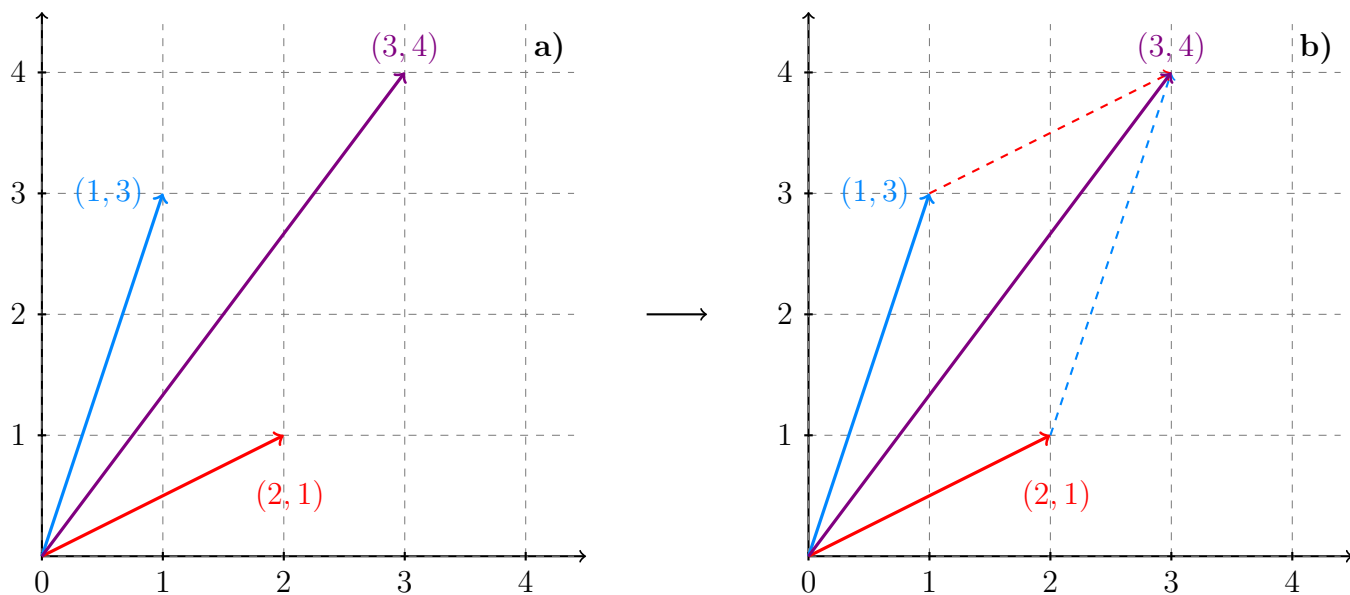


Figura 3: Interpretación geométrica de la suma vectorial en el espacio vectorial real \mathbb{R}^2 . En la subfigura **a)** se observan los vectores $(1, 3)$ y $(2, 1)$, así como el vector resultante de la suma de los dos anteriores, $(3, 4)$. En la subfigura **b)** observamos la llamada *Ley del paralelogramo* para la suma de dos vectores.

Observemos que, visualmente, esto corresponde a trazar uno de los vectores en el plano cartesiano y luego trazar el otro colocando la cola en la punta del vector anterior, como si ése fuese su origen. Nótese que no importa cuál vector trazamos primero y cuál después, lo cual concuerda con la conmutatividad de la suma vectorial (esta misma interpretación geométrica es válida para la suma de tres o más vectores de \mathbb{R}^2 : basta irlos sumando de dos en dos vectores); a esto se le conoce como la *Ley del paralelogramo*.

Es decir, la suma de dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ es igual a la diagonal principal del paralelogramo formado por las flechas que los representan.

Ejercicio 5. Muestra intuitivamente que si transportamos a la *otra* diagonal del paralelogramo hasta el origen (lo cual se puede hacer de dos maneras distintas), obtenemos a las representaciones de los vectores $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} - \mathbf{u}$.

Producto de un vector por un escalar

Ahora, recordemos que en este espacio el producto de un vector por un escalar se define como $c(a, b) = (ca, cb)$ (entrada por entrada). Podemos calcular, por ejemplo, los productos $\left(\frac{1}{2}\right)(2, 2) = (1, 1)$ y $(-1.2)(1, 3) = (-1.2, -3.6)$. La representación gráfica de estas operaciones se muestra en la Figura 4.

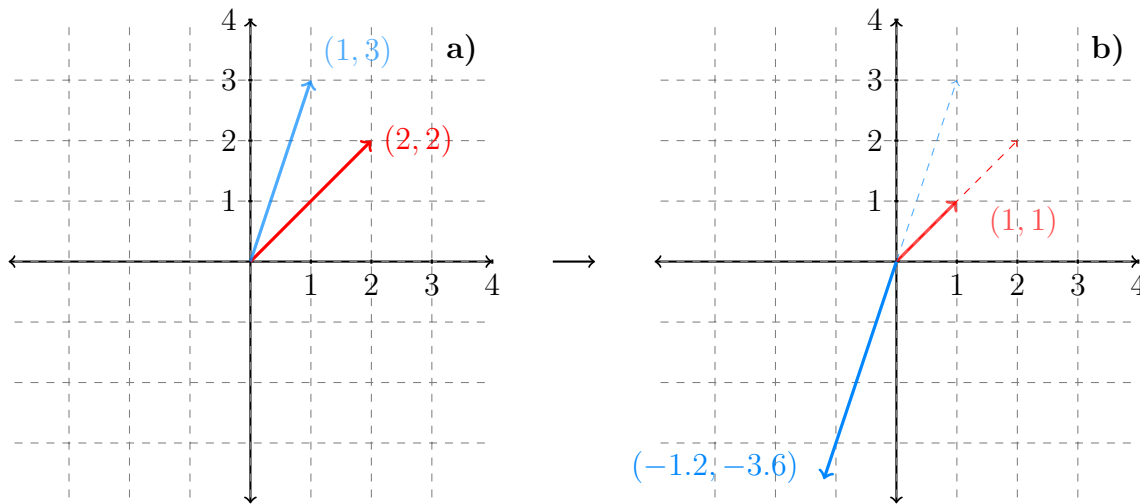


Figura 4: Interpretación geométrica del producto de un vector por un escalar en el espacio vectorial real \mathbb{R}^2 . Comparando las subfiguras **a)** y **b)** observamos que, en caso de que se multiplique a un vector de \mathbb{R}^2 por un escalar de \mathbb{R} , es posible que la longitud del vector cambie y que su sentido se invierta, pero su dirección no cambia.

Como podemos observar, el primer producto redujo la longitud del vector sin cambiar su sentido, mientras que el segundo producto aumentó la longitud del vector, a la vez que invirtió su sentido; sin embargo, en ambos casos, el producto de un vector por un escalar no cambió la *dirección* de los vectores—es decir, los mantuvo en la misma *línea*. En general, si el escalar $c \in \mathbb{R}$ que multiplica al vector tiene $|c| > 1$, lo *alarga*; si tiene $|c| < 1$, lo *acorta*; finalmente, si tiene $|c| = 1$, no cambia su longitud. Por este cambio de longitud es que al producto de un vector por un escalar también se le conoce por el nombre *reescalamiento*. Además, si $c > 0$, el vector mantiene su misma dirección y sentido (sigue en la misma línea y apunta hacia el mismo lado) mientras que, si $c < 0$, el vector conserva su dirección pero se invierte su sentido (sigue en la misma línea pero apunta hacia el lado opuesto); si $c = 0$ entonces el vector automáticamente se convierte en el vector nulo $(0, 0)$, como se demostró algebraicamente en el inciso (a) del Teorema 1.8. Para visualizar las operaciones de adición vectorial y producto de un vector por un escalar de forma interactiva, recomiendo la sección **Vector Algebra and Geometry** de <https://textbooks.math.gatech.edu/ila/vectors.html>, así como la ilustración interactiva http://immersivemath.com/ila/ch02_vectors/ch02.html#fig_vec_scaling.

Así, en general, si combinamos las operaciones de suma vectorial y producto de un vector por un escalar, visualmente lo que estaremos haciendo será *combinar líneas* con diferentes longitudes, direcciones

y sentidos en el plano cartesiano.

Nota: El vector nulo $\mathbf{0} = (0, 0)$ (también llamado *vector origen*) no tiene longitud, ya que es el único donde la cola y la punta de su flecha coinciden. Además, tampoco tiene dirección ni sentido⁵. Si asumimos que este vector no tiene longitud, dirección ni sentido, entonces queda claro por qué cualquier reescalamiento de este vector no lo modifica, como se demostró en el inciso (b) del Teorema 1.8.

Ejercicio 6. Interpreta geoméricamente las operaciones esenciales del espacio vectorial \mathbb{R}^3 .

En el espacio vectorial complejo \mathbb{C}

Como hemos visto, el plano cartesiano nos sirve para representar vectores con dos entradas reales. De manera similar, el *plano complejo* —con un eje de números *reales* (por convención, el horizontal) y otro eje perpendicular a él de números *imaginarios*⁶— nos sirve para representar vectores con una entrada compleja. Así, cada vector de una entrada compleja $(a + ib)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ tiene una correspondencia uno a uno con una flecha con cola en el origen del plano y flecha en la coordenada (a, b) del plano complejo, la cual corresponde a, desde el origen, moverse a unidades sobre el eje real y b unidades sobre el eje imaginario.

Suma vectorial

De la definición de suma vectorial $(a + ib) + (c + id) := ((a + c) + (b + d)i)$ se deduce que la suma vectorial entre vectores de \mathbb{C} tiene la misma interpretación geométrica que aquella entre vectores de \mathbb{R}^2 . Por ejemplo, si calculamos $(1 + 2i) + (3 + 2i) = (4 + 4i)$, podemos representarlo visualmente en la Figura 5.

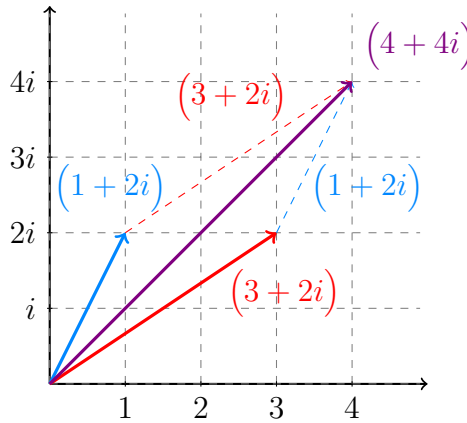


Figura 5: Interpretación geométrica de la suma vectorial en el espacio vectorial complejo \mathbb{C} . Observamos que, al igual que en el caso del espacio vectorial real \mathbb{R}^2 , se cumple la *Ley del paralelogramo*.

Producto de un vector por un escalar

Por definición, el producto de un vector por un escalar es $(q + ir)(s + it) := ((qs - rt) + i(qt + rs))$. Notemos que, en particular, si la parte imaginaria del escalar es nula (i.e., si $r = 0$), entonces el escalar

⁵Alternativamente, se dice que tiene *todas las direcciones y todos los sentidos simultáneamente*: en la práctica, ambas interpretaciones son equivalentes, pero la primera puede ser más fácil de asimilar.

⁶Los números imaginarios son aquellos números complejos con la parte real igual a cero, i.e. $0 + ib = ib \in \mathbb{C}$, donde b es un número real. En otras palabras, son el resultado de multiplicar el número imaginario i por cualquier número real.

es un número real y el producto resultante es $(q)(s + it) := ((qs) + (qt)i)$, por lo cual geoméricamente sólo se produce un reescalamiento totalmente análogo al discutido en el caso de \mathbb{R}^2 . En cambio, ahora observemos qué sucede si la parte real del escalar es nula y la parte imaginaria es igual a 1 (i.e., si multiplicamos por el escalar i). Tomemos, por ejemplo, al vector $(2 + 2i)$. Al hacer el producto de este vector por i obtenemos $(-2 + 2i)$. Si, en cambio, hacemos el producto de este mismo vector por el escalar $-i$, obtenemos como resultado $(-i)(2 + 2i) = (2 - 2i)$. Ambas operaciones se muestran de manera visual en la Figura 6.

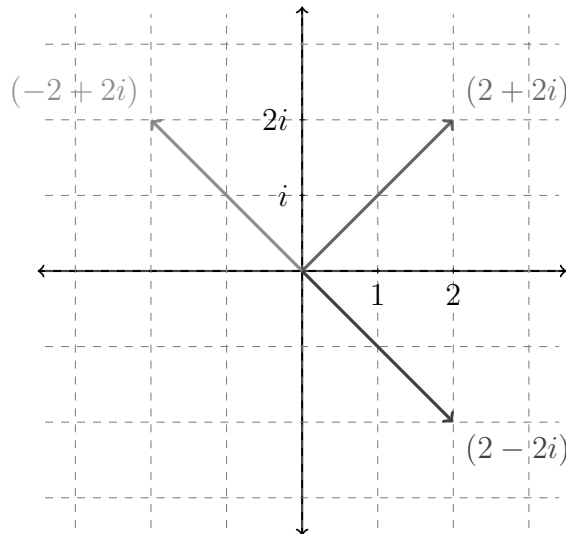


Figura 6: Interpretación geométrica del producto de un vector complejo por los números imaginarios i y $-i$. En este caso, nuestro vector base es $(2 + 2i)$. El producto de este vector por el escalar i resulta en el vector $(-2 + 2i)$, lo cual puede ser interpretado geoméricamente como una rotación discreta de $\frac{\pi}{2}$ radianes. Así observamos que, en cambio, el producto de nuestro vector base $(2 + 2i)$ por $-i$ se puede interpretar geoméricamente como una rotación discreta de $-\frac{\pi}{2}$ radianes.

Aquí vemos que hacer el producto de un vector por el escalar i equivale a hacer una rotación de 90° ó $\frac{\pi}{2}$ radianes. Análogamente, el producto de un vector por el escalar $-i$ equivale a hacer una rotación de -90° ó $-\frac{\pi}{2}$ radianes. Esto tiene sentido ya que $-i = -1(i) = i(-1)$ lo cual implica que, debido a la compatibilidad del producto de un vector por un escalar con el producto entre escalares, es lo mismo multiplicar un vector por $(-i)$ a multiplicarlo por i y después por -1 , o vice versa: el razonamiento geométrico correspondiente es que da lo mismo rotar un vector $-\frac{\pi}{2}$ radianes a rotarlo $\frac{\pi}{2}$ radianes y después invertir su sentido, o primero invertir su sentido y después rotarlo $\frac{\pi}{2}$ radianes.

¿Y si multiplicamos un vector de \mathbb{C} por un escalar ai con $a \neq 0, 1$? Ya que $ai(b + ic) = (-ac + i(ab)) = a(-c + ib) = a(i(b + ic))$ —es decir, por la compatibilidad entre productos— podemos deducir que hacer el producto de un vector complejo por un número imaginario arbitrario ai tendrá dos consecuencias: rotarlo de acuerdo a i ($\frac{\pi}{2}$ radianes a contrarreloj) y reescalarlo de acuerdo al valor de a (invirtiendo el sentido si $a < 0$). En este último caso, ya que $ai = |a|(-i) = (-i)|a| \quad \forall a < 0$, también podríamos pensar que se rota al vector complejo de acuerdo a $-i$ ($\frac{\pi}{2}$ radianes en el sentido de las manecillas) y se reescala de acuerdo al valor absoluto de a : ¡ambas interpretaciones son equivalentes!

Dicho lo anterior, estamos listos para el caso más general, el cual es fácil de entender de forma precisa recordando la representación polar de los números complejos. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Entonces sus

coordenadas cartesianas en el plano complejo son (x, y) , mientras que sus coordenadas polares son (r, θ) , donde $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$. Observemos que $r = +\sqrt{x^2 + y^2} = +\sqrt{(x + iy)(x - iy)} = +\sqrt{z\bar{z}} = |z|$, por lo que el *módulo* de z es igual a la longitud de la flecha que representa a z en el plano complejo. Por otro lado, θ es el ángulo que va de la parte positiva del eje real a la flecha que representa a z en el plano y se conoce como el *argumento* de z . Por ende, tenemos que

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= |z| \cos \theta + i|z| \sin \theta \\ &= |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ con argumentos θ_1 y θ_2 , respectivamente. Entonces, por lo anterior,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)|z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= |z_1||z_2|(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= |z_1||z_2|(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1)). \end{aligned}$$

Luego, aplicando las identidades trigonométricas para el coseno y seno de una suma de ángulos

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta), \\ \sin(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \sin \alpha, \end{aligned}$$

tenemos que

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Por lo tanto, el producto de dos números complejos se obtiene *multiplicando sus módulos y sumando sus argumentos*.

Ya que el producto de un vector por un escalar en (\mathbb{C}, \mathbb{C}) es igual al producto entre escalares complejos, concluimos que multiplicar un vector complejo $(s + it)$ por un escalar complejo $q + ir$ con $q, r \neq 0$ reescalará el vector $(s + it)$ en el plano complejo por el módulo de $q + ir$ y lo rotará de acuerdo al argumento de $q + ir$. En general, en los espacios vectoriales complejos los escalares no sólo pueden *reescalar* vectores, sino que también los pueden *rotar*.