Criterios de diagonalizabilidad

Como hemos visto, un operador T sobre un espacio vectorial de dimensión finita V es **diagonalizable** si y sólo si existe una base γ de V compuesta de eigenvectores de T. Es decir, debemos poder formar un conjunto linealmente independiente que genera a todo V compuesto por eigenvectores de T.

Dado que el proceso de calcular todos los eigenvalores y eigenvectores de un operador para intentar verificar lo anterior puede ser largo y no dar el resultado que buscamos, queremos encontrar criterios que nos digan si un operador es diagonalizable *antes* de hacer todos los cálculos.

P1

Ejemplo: (primer criterio)

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculemos sos eigenvalores. El polinomio característico de A es

$$\det(A - \lambda I_{2x2}) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda) - (1)(-1) = \lambda^2 + 1.$$

Por lo tanto, $\det(A - \lambda I_{2x2}) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$. Observemos que

¡diagonalizable!

si $A \in M_{2x2}(\mathbb{C}) \Rightarrow \lambda = \pm i \Rightarrow |\{i, -i\}| = \dim(\mathbb{C}^2) \Rightarrow A \simeq \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$; en cambio,

si $A \in M_{2x2}(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(A - \lambda I_{2x2})$ tiene 0 raíces en $\mathbb{R}$. Como $0 \neq 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$,

este criterio **no es suficiente** para determinar si A es diagonalizable.

Entonces, ¡busquemos otro criterio!

Def. Sea $T: V \to V$ un operador lineal con $\dim(V) = n$ finita. Si λ es un eigenvalor de T, definimos al **eigenespacio** de T correspondiente al eigenvalor λ como

$$E_\lambda := \{\vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}\}.$$

Dicho eigenespacio contiene a todos los eigenvectores de T con eigenvalor λ y al vector nulo de V.

Obs. Ya que $\forall \vec{v} \in V$, $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \iff (T - \lambda I_V)\vec{v} = \vec{0}$, entonces $E_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda I_V)$. En particular, E_λ es un subespacio de V, donde λ es eigenvalor de algún operador lineal $T: V \to V$.

Supongamos que T es diagonalizable. Entonces existe una base ordenada de V $\gamma = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n)$ de eigenvectores de T. En particular, para todo eigenvalor λ_i, los eigenvectores de γ correspondientes a λ_i deben generar a E_{λ_i} y, además, deben ser linealmente independientes (de lo contrario, γ no sería base), por lo que forman una **base de** E_{λ_i}.

Por ende, si T es diagonalizable, $V = E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_k}$. Es más, como $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow E_{\lambda_i} \cap E_{\lambda_j} = \{\vec{0}\}$, tenemos que

$$V = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}.$$

Además, la implicación contraria se cumple (¿por qué?).

Así vemos que T es diagonalizable si y sólo si

$$\dim(V) = \dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) + \dots + \dim(E_{\lambda_k})$$
$$\iff$$
$$n = \operatorname{nulidad}(T - \lambda_1 I) + \operatorname{nulidad}(T - \lambda_2 I) + \dots + \operatorname{nulidad}(T - \lambda_k I).$$

¿Cómo convertimos esta información en un criterio útil? Para eso, necesitaremos antes un par de definiciones nuevas.

<u>Def</u>. Sea K un campo y $P(K)$ el espacio vectorial de todos los polinomios con coeficientes en K. Decimos que $f \in P(K)$ es un polinomio *separable* si puede expresarse como un producto de polinomios de grado 1 (monomios) por una constante, i.e., si existen $a_1, a_2, \dots, a_n, c \in K$ tales que

$$f(t) = c\,(t-a_1)(t-a_2)\cdots(t-a_n).$$

Ejemplo: λ^2+1 es separable en $\mathbb{C}$, pero no en $\mathbb{R}$.

<u>Obs.</u> Si T es un operador lineal diagonalizable, entonces su polinomio característico es separable.

Sea $T: V \to V$ es un operador lineal diagonalizable con $\dim(V) = n$, entonces existe una base ordenada γ de V tal que

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K, \qquad \left(\text{¡Ojo! No tienen que ser todos distintos}\right)$$

por lo que $\det([T]_\gamma - \lambda I_{n\times n}) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n).$

En general, el polinomio característico de un operador que actúa sobre un espacio vectorial de dimensión n puede tener factores $(\lambda-\lambda_i)$ repetidos. Por ende, podemos suponer que es de la forma

$$(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k} \qquad \text{con } m_i \in \mathbb{N} \text{ y } k \in \{1,2,\dots,n\}.$$

El exponente m_i se conoce como la *multiplicidad* del eigenvalor λ_i.

Ejemplos:

Para $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$, $k=2$, $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$, $m_1=1$ y $m_2=1$.
Para $I_{n\times n}\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $k=1$, $\lambda_1=1$ y $m_1=n$.

Obs. Para un operador lineal T en un espacio vectorial de dimensión n, el polinomio característico de T es un polinomio de grado n. En particular, si es separable, i.e., de la forma $c(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$ se tiene que

$$m_1+m_2+\cdots+m_k=n.$$

Recordemos que T es diagonalizable si y sólo si:

$$\text{nulidad}(T-\lambda_1 I)+\text{nulidad}(T-\lambda_2 I)+\cdots+\text{nulidad}(T-\lambda_k I)=n.$$

Aplicando la fórmula de la dimensión a $T-\lambda_i I$, con $i\in\{1,2,\dots,k\}$,

$$\text{nulidad}(T-\lambda_i I)+\text{rango}(T-\lambda_i I)=n \Rightarrow \text{nulidad}(T-\lambda_i I)=n-\text{rango}(T-\lambda_i I).$$

De aquí podemos ver que T es diagonalizable si y sólo si su polinomio característico es **separable** y $m_i=n-\text{rango}(T-\lambda_i I)$ para todo eigenvalor λ_i de T. Este es nuestro **segundo criterio**.

Obs. Para calcular $\text{rango}(T-\lambda_i I)$, podemos hacer uso de los isomorfismos, representar al operador $T-\lambda_i I$ como una matriz y calcular el rango de dicha matriz.