Transformaciones lineales y representaciones matriciales

Operaciones esenciales de los e.v. $+, \cdot$

Transf. lin. son funciones entre e.v. compatibles con $+, \cdot$.

(V,K), (W,K), $T: V \to W$. T es una transformación lineal si:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V,\ T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2) \\ \cdot\ \forall \vec{v} \in V, \forall c \in K,\ T(c\vec{v}) = cT(\vec{v}) \end{array}\right\} \text{propiedades lineales}$$

Ejemplo: $\boxed{\int_{-1}^{1} \cdot\, dx : P^2([-1,1]) \to \mathbb{R}}$

Las transformaciones lineales *preservan* la estructura de e.v.

(V,K), (W,K) $\quad \beta = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ base de V

$T: V \to W$ lineal

Si conocemos a $T(\vec{b}_1)$ y $T(\vec{b}_2)$, ¿podemos calcular $T(\vec{v})\ \forall \vec{v} \in V$?

R: sí, porque $T\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \vec{b}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} c\, T(\vec{b}_i)$.

Representaciones

Sea (V,K) un e.v. de dimensión k con base $\beta = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k\}$.
Entonces $\exists!\ c_1, \ldots c_k \in K$ tales que $\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} c_i \vec{b}_i \quad \forall \vec{v} \in V$.

$\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} c_i \vec{b}_i \longmapsto (c_1, \ldots, c_k)$.

Una <u>base ordenada</u> se escribe como $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k) = \beta'$

$(c_1, \ldots, c_k)$ *representa* a $\vec{v}$ bajo la base ordenada β' si

$\vec{v} = c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \ldots + c_k \vec{b}_k = \sum_{i=1}^{k} c_i \vec{b}_i$.

Sean (V, K) y (W, K) e.v. con bases <u>ordenadas</u> $\alpha = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ y $\beta = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_l)$, respectivamente, y $T: V \to W$ lineal.

Sabemos representar a los vectores de V y W como k-tuplas y l-tuplas, resp. ¿Cómo podemos representar a T?

Determinar los coeficientes del sistema de ecuaciones

$$T(\vec{a}_1) = C_{11}\vec{b}_1 + C_{21}\vec{b}_2 + \dots + C_{l1}\vec{b}_K$$
$$T(\vec{a}_2) = C_{12}\vec{b}_1 + C_{22}\vec{b}_2 + \dots + C_{l2}\vec{b}_K$$
$$\vdots$$
$$T(\vec{a}_k) = C_{1K}\vec{b}_K + C_{2K}\vec{b}_2 + \dots + C_{lK}\vec{b}_K$$

$$C_{11}\vec{b}_1 + C_{21}\vec{b}_2 + \dots + C_{l1}\vec{b}_K \quad \underset{\uparrow}{\begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ \vdots \\ C_{l1} \end{pmatrix}} = \underset{\uparrow}{\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{lK} \\ C_{21} & C_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{l1} & & & C_{lK} \end{pmatrix}} \underset{\uparrow}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$[T(\vec{a}_1)]_\beta = [T]_\alpha^\beta \quad [\vec{a}_1]_\alpha .$$

$[T]_\alpha^\beta$ es la representación de la transformación lineal T como una matriz de $l \times K$ que "toma" vectores de V representados en la base ordenada α y "devuelve" vectores de W representados en la b.o. β.