Cambio de base ordenada

Sean V y W espacios vectoriales sobre K con bases ordenadas $\beta=(\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n)$ y $\delta=(\vec{d}_1,\dots,\vec{d}_m)$, respectivamente, y $T\in\mathcal{L}(V,W)$.

$[\cdot]_\beta : V \xrightarrow{\sim} K^n$ Sea $\beta'\neq\beta$ b.o. de V

$$[\overset{\in\mathcal{L}(V,V)}{U}]_\beta^{\beta'}[\vec{v}]_\beta=[U(\vec{v})]_{\beta'}=[\vec{v}]_{\beta'}\quad\forall\vec{v}\in V$$

$U(\vec{v})=\vec{v}\quad\forall\vec{v}\in V$
$\Rightarrow \exists! \, U=I_V\,!$

Conclusion: la matriz de cambio de base ordenada de β a β' es $[I_V]_\beta^{\beta'}$.

$I_V(\vec{b}_1)=\vec{b}_1=\sum_{i=1}^{n}A_{1i}\,\vec{b}_i'$

$\vdots \qquad \vdots$

$I_V(\vec{b}_n)=\vec{b}_n=\sum_{i=1}^{n}A_{mi}\,\vec{b}_i'$.

$[\cdot]_\beta^\delta : \mathcal{L}(V,W)\xrightarrow{\sim} M_{m\times n}(K)$ Sea $\delta'\neq\delta$ b.o. de W.

Sea $T\in\mathcal{L}(V,W)$. $[T]_\beta^\delta$ $[\vec{v}]_\beta$

$$\underbrace{[T]_\beta^\delta\underbrace{[I_V]_{\beta'}^{\beta}[\vec{v}]_{\beta'}}_{[I_V(\vec{v})]_\beta}}_{[T(I_V(\vec{v}))]_\delta}=\underbrace{[T]_{\beta'}^{\delta}[\vec{v}]_{\beta'}}_{[T(\vec{v})]_\delta}\quad\forall\vec{v}\in V$$

Conclusion: para cambiar la base ordenada de "entrada" de una matriz, debemos multiplicarla por la derecha por una matriz de cambio de base apropiada.

Análogamente: $[I_W]_\delta^{\delta'}[T]_\beta^\delta=[T]_\beta^{\delta'}$

$I_W \circ T = T$ $\qquad$ $T \circ I_V = T$

$$[I_W]_{\delta}^{\delta'}[T]_{\beta}^{\delta}[I_V]_{\beta'}^{\beta} = [T]_{\beta'}^{\delta'}$$

Recordatorio: Sea $U \in \mathcal{L}(V,V)$. $\quad [U]_{\beta}^{\beta} = [U]_{\beta}$

$$[I_V]_{\beta}^{\beta'}[U]_{\beta}[I_V]_{\beta'}^{\beta} = [U]_{\beta'}.$$

Observacion: Dado que los mapeos $[\cdot]_{\beta}^{\delta} : \mathcal{L}(V,W) \to M_{m\times n}(K)$ no sólo preservan combinaciones lineales sino también composición, tenemos que

$$[I_V]_{\beta}^{\beta'}[I_V]_{\beta'}^{\beta} = [I_V]_{\beta'} \quad \text{y} \quad [I_V]_{\beta'}^{\beta}[I_V]_{\beta}^{\beta'} = [I_V]_{\beta}.$$

Luego, como $[I_V]_{\beta} = [I_V]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K) \Rightarrow \left([I_V]_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1} = [I_V]_{\beta'}^{\beta}$

y

$$\left([I_V]_{\beta'}^{\beta}\right)^{-1} = [I_V]_{\beta}^{\beta'}$$

$$\vec{b}_1 = I_V(\vec{b}_1) = \sum_{i=1}^{n} A_{1i}\,\vec{b}_i = 1\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + \dots + 0\vec{b}_n$$

$$\vdots$$

$$\vec{b}_n = I_V(\vec{b}_n) = \sum_{i=1}^{n} A_{ni}\,\vec{b}_i = 0\vec{b}_1 + 0\vec{b}_{n-1} \dots + 1\vec{b}_n$$

$$[I_W]_{\delta} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in M_{m\times m}(K)$$

$$\vec{d}_1 = 1\vec{d}_1$$

$$\vdots$$

$$\vec{d}_m = 1\vec{d}_m$$

Observacion: Para cualquier base ordenada ρ de (Z,K), con $\dim(Z) = \ell$, tenemos que

$$[I_Z]_{\rho} = I_{\ell\times\ell} \in M_{\ell\times\ell}(K).$$