Cambios de base

Sea (V,K) un espacio vectorial de dimensión n. Hemos visto que para cualquier base ordenada δ de V, el *mapeo de representación en la base ordenada* δ, $[\cdot]_\delta : V \to K^n$, establece un isomorfismo entre V y K^n. Dicho isomorfismo puede facilitar operaciones en V, permitiéndonos hacer operaciones "análogas" en K^n y luego devolver el resultado a V.

Sean $\alpha = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$ y $\beta = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n)$ bases ordenadas de V. Entonces $\forall \vec{v} \in V$, podemos representar a $\vec{v}$ como una n-tupla en K^n mediante los mapeos $[\cdot]_\alpha$ y $[\cdot]_\beta$. En particular, si

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} d_i \vec{b}_i, \text{ entonces } [\vec{v}]_\alpha = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \text{ y } [\vec{v}]_\beta = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

A pesar de que tanto $[\vec{v}]_\alpha$ como $[\vec{v}]_\beta$ son elementos de K^n, algunas operaciones son más fáciles de hacer cuando representamos a los vectores de V en una base ordenada particular.

Ejemplo:

Sea V un espacio vectorial real con bases ordenadas $\alpha=(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ y $\beta=(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$.

Sea $T:V\to V$ un operador lineal tal que $T(\vec{a}_1)=\vec{a}_2$ y $T(\vec{a}_2)=\vec{a}_1$.

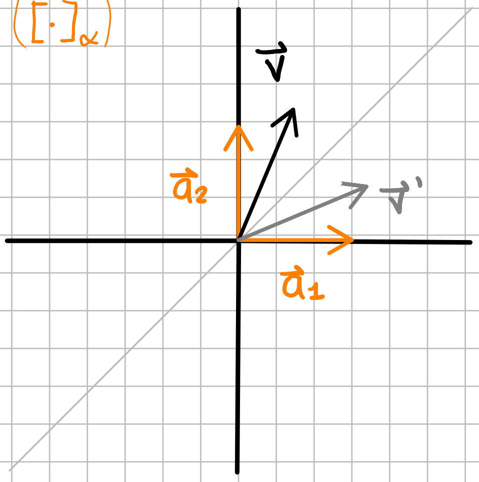
Sea $\vec{v}\in V$ tal que $\vec{v}=1.1\vec{a}_1+0.5\vec{a}_2 \Rightarrow \vec{v}':=T(\vec{v})=1.1\,T(\vec{a}_1)+0.5\,T(\vec{a}_2)=1.1\vec{a}_2+0.5\vec{a}_1$.

Podemos representar esto geométricamente como sigue:

Sean $\alpha=(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ y $\beta=(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$.

$\vec{v}'=1\vec{b}_1-0.5\vec{b}_2$

$([\cdot]_\alpha)$



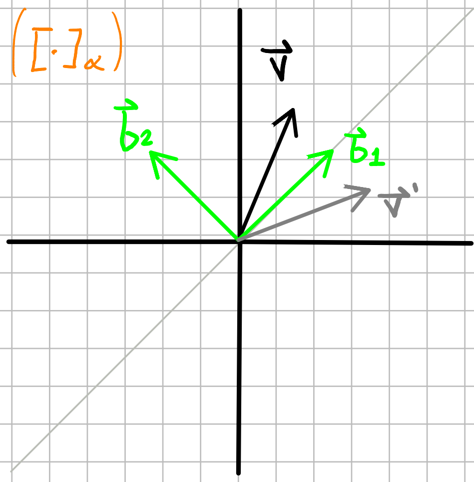
Observemos que

$$[\vec{v}']_\alpha=\begin{pmatrix}1.1\\0.5\end{pmatrix} \text{ y } [\vec{v}]_\alpha=\begin{pmatrix}0.5\\1.1\end{pmatrix}$$

mientras que

$$[\vec{v}']_\beta=\begin{pmatrix}1\\-0.5\end{pmatrix} \text{ y } [\vec{v}]_\beta=\begin{pmatrix}1\\0.5\end{pmatrix}.$$

$([\cdot]_\alpha)$



P1

Por lo tanto, el operador lineal $T:V\to V$ que manda $T(\vec{a}_1)=\vec{a}_2$ y $T(\vec{a}_2)=\vec{a}_1$ es tal que

$$[T]_\alpha=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [T]_\beta=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Es decir, si representamos a los vectores $\vec{v}\in V$ en α, entonces aplicar T a $\vec{v}$ será análogo a intercambiar las entradas de $[\vec{v}]_\alpha$ para obtener a $[T(\vec{v})]_\alpha$. En cambio, si los representamos en β, aplicar T a $\vec{v}$ es análogo a cambiarle el signo a la segunda entrada de $[\vec{v}]_\beta$ para obtener $[T(\vec{v})]_\beta$.

(Observemos que estamos utilizando que para cualquier base ordenada δ de V, $[\cdot]_\delta^\delta:\mathcal{L}(V,V)\to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ es un isomorfismo tal que $[T(\vec{v})]_\delta=[T]_\delta^\delta[\vec{v}]_\delta$ $\forall\vec{v}\in V$.)

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{a}_i \leftarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in K^n \qquad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \in K^n \rightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i \vec{b}_i = \vec{v}$$

El cambio $[\vec{v}]_\alpha \to [\vec{v}]_\beta$ entre bases ordenadas de un mismo espacio vectorial se conoce como *cambio de base* o *cambio de representación*. Observemos que esta operación **no cambia al vector** $\vec{v}$, sino que sólamente cambia su representación como una n-tupla de K^n.

P_2

La matriz que hace esta operación se conoce como *matriz de cambio de base* y es igual a $[I]_\alpha^\beta$ ya que, de esta manera, se tiene que

$$[I]_\alpha^\beta [\vec{v}]_\alpha = [I(\vec{v})]_\beta = [\vec{v}]_\beta \quad \forall \vec{v} \in V,$$

como queríamos. Observemos que

$$[I]_\alpha^\beta = \Big[[I(\vec{a}_1)]_\beta \; [I(\vec{a}_2)]_\beta \cdots [I(\vec{a}_n)]_\beta \Big] = \Big[[\vec{a}_1]_\beta \; [\vec{a}_2]_\beta \cdots [\vec{a}_n]_\beta \Big],$$

por lo que, para calcular a $[I]_\alpha^\beta$ hay que encontrar coeficientes $c_{ij} \in K$ tales que

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= c_{11} \vec{b}_1 + c_{21} \vec{b}_2 + \ldots + c_{n1} \vec{b}_n, \\ \vec{a}_2 &= c_{12} \vec{b}_1 + c_{22} \vec{b}_2 + \ldots + c_{n2} \vec{b}_n, \\ &\vdots \\ \vec{a}_n &= c_{1n} \vec{b}_1 + c_{2n} \vec{b}_2 + \ldots + c_{nn} \vec{b}_n. \end{aligned}$$

Luego, $[I]_{\alpha\, ij}^\beta = c_{ij}$.

Ahora, sea $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Sabemos que $[\cdot]_\alpha^\alpha =: [\cdot]_\alpha$ y $[\cdot]_\beta^\beta =: [\cdot]_\beta$ establecen **isomorfismos entre** $\mathcal{L}(V,V)$ y $M_{n\times n}(K)$.

¿Cómo cambiamos $[T]_\alpha$ a $[T]_\beta$?

P_3

Para lograrlo, debemos multiplicar a $[T]_\alpha$ por **dos matrices**: una del lado **derecho** que le permita tomar vectores de **entrada** representados en β y cambiarlos a α (para luego poder aplicarles $[T]_\alpha$) y otra del lado **izquierdo** que cambie sus vectores de **salida** de α a β. Por ende,

$$[T]_\beta = [I]_\alpha^\beta [T]_\alpha [I]_\beta^\alpha.$$

Obs: ya que $\left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} = [I^{-1}]_\beta^\alpha = [I]_\beta^\alpha$, entonces $\det([T]_\beta) = \det([T]_\alpha)$ para cualesquiera bases ordenadas α y β de V. (Ejercicio)

Más generalmente, si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita n y m, respectivamente, entonces $\forall\, T \in \mathcal{L}(V,W)$, $\forall\, \alpha$ y β bases ordenadas de V, y $\forall\, \gamma$ y δ bases ordenadas de W, se tiene que

$$\underbrace{[T]_\beta^\delta = [I_W]_\gamma^\delta \underbrace{[T]_\alpha^\gamma \underbrace{[I_V]_\beta^\alpha\, [\vec{v}]_\beta}_{[\vec{v}]_\alpha}}_{[T(\vec{v})]_\gamma}}_{[T(\vec{v})]_\delta}$$

$$[T]_\beta^\delta [\vec{v}]_\beta = [T(\vec{v})]_\delta$$

cambio de bases

$$[T]_\alpha^\gamma \to [T]_\beta^\delta$$