¿Qué es un sistema lineal de ecuaciones diferenciales?

Sistema de ecuaciones

algebráicas | diferenciales
lineales | lineales

Sistemas lineales de ecuaciones algebráicas

Ej:
$$x_1 + x_2 = 0,$$
$$x_1 - x_2 = 5.$$

Obs. Definiendo $\vec{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, podemos reescribir el **sistema de ecuaciones** anterior como **una ecuación vectorial** de la siguiente forma:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

donde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es nuestro **vector incógnita.**

Así, en general, podemos reescribir **sistemas lineales de ecuaciones algebráicas** como ecuaciones vectoriales de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$, donde el vector $\vec{x}$ es nuestra incógnita.

En el caso particular cuando $\vec{b} = \vec{0}$, decimos que tenemos un sistema **homogéneo.** Observemos que, en ese caso, $A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} \in Ker(A)$. En particular, tenemos que *el conjunto de soluciones de un sistema lineal* ***homogéneo*** *de ecuaciones algebráicas forma un* ***espacio vectorial.***

En el caso general de la ecuación $A\vec{x} = \vec{b}$, si encontramos un vector $\vec{v}$ tal que $A\vec{v} = \vec{b}$, entonces $\forall \vec{k} \in Ker(A)$ tendremos que $A(c\vec{k} + \vec{v}) = \vec{b}$ (¿por qué?). Si $\{\vec{k_1}, \vec{k_2}, \dots, \vec{k_m}\}$ es una base de $Ker(A)$, entonces

$$A\left(\sum_{i=1}^{m} c_i \vec{k}_i + \vec{v}\right) = \vec{b} \quad \text{para todo escalar } c_i.$$

En este caso, decimos que $\vec{v}$ es una **solución particular** a la ecuación $A\vec{x} = \vec{b}$ y que $\sum_{i=1}^{m} c_i \vec{k}_i + \vec{v}$ es la **solución general** a $A\vec{x} = \vec{b}$.

Ecuaciones diferenciales

$\dot{x} + x = 0 \iff \frac{d}{dt} x(t) + x(t) = 0$, una solución es $x(t) = e^{-t}$.

$\frac{d}{dt}(e^{-t}) + e^{-t} = \frac{d}{d(-t)} e^{-t} \cdot \frac{d}{dt}(-t) + e^{-t} = e^{-t} \cdot (-1) + e^{-t} = -e^{-t} + e^{-t} = 0 \;\forall t \in \mathbb{R}$.

$y(t) = 5e^{-t}$ es otra solución:

$\frac{d}{dt}(5e^{-t}) + 5e^{-t} = 5\frac{d}{dt}(e^{-t}) + 5e^{-t} = 5(-e^{-t}) + 5e^{-t} = -5e^{-t} + 5e^{-t} = 0 \;\forall t \in \mathbb{R}$.

Ce^{-t}, $C \in \mathbb{R}$ es solución a $\dot{x} + x = 0 \;\forall t \in \mathbb{R}$.

¡Tenemos una infinidad de soluciones a una sola ecuación diferencial!

¿Qué hacemos para limitar la cantidad de soluciones?

¡Añadimos restricciones!

Condiciones iniciales.

$\dot{x} + x = 0$, $x(t_0) = C_0$ con $t_0, C_0 \in \mathbb{R}$.

La solución general es Ce^{-t}. Luego, de $Ce^{-t_0} = C_0$ determinamos a C.

Ej: si $t_0 = 0$ y $C_0 = 3$, la condición inicial nos dice que

$Ce^{-t_0} = C_0 \iff Ce^{-0} = 3 \Rightarrow C = 3$. $\therefore x(t) = 3e^{-t}$ es la sol. particular.

$X_1(t) = C_1 e^{2t} \quad X_1'(t) = 2(C e^{2t}) = 2X_1(t)$

$X_2(t) = C_2 e^{5t}$

$X_1' = 2X_1$

$X_2' = 5X_2$

sistema desacoplado

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$$\updownarrow$$

$$\vec{x}' = A\vec{x} \quad \Rightarrow \quad \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} \\ C_2 e^{5t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$$

Ejemplo: (Poole pág. 341)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 6 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4, -1$

$\Rightarrow A \simeq D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$X_1'(t) = X_1(t) + 2X_2(t)$

$X_2'(t) = 3X_1(t) + 2X_2(t)$

$\Rightarrow$

$X_1(t) = 2C_1 e^{4t} - C_2 e^{-t}$

$X_2(t) = 3C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t}$

$X_1'(t) = 4(2C_1 e^{4t}) + C_2 e^{-t}$

$X_1(t) + 2X_2(t) = 2C_1 e^{4t} - C_2 e^{-t} + 6C_1 e^{4t} + 2C_2 e^{-t} = 8C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t}$

$\vec{X} = \begin{pmatrix} 2C_1 e^{4t} - C_2 e^{-t} \\ 3C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t} \end{pmatrix}$ es la solución general a $\quad X_1' = X_1 + 2X_2$, $\quad X_2' = 3X_1 + 2X_2$

$X_1(0) = X_{1_0}$

$X_2(0) = X_{2_0}$