Álgebra Lineal
Grupo 3003, 2021-I
Examen parcial 1 (tarea examen)
Fecha de entrega: sábado 17 de octubre, 15:00 hrs.

Si no tienes disposición para aprender, nadie te puede ayudar —pero si realmente tienes la disposición, nada te puede detener.

—Anónim@.

1. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, K un campo y $M_{m\times n}(K)$ el conjunto de todas las matrices de m renglones y n columnas con entradas en K. Definiendo la suma de matrices y el producto de una matriz por un elemento del campo entrada por entrada, demuestren que:

a) $M_{m\times n}(K)$ forma un espacio vectorial sobre K;

b) la operación $\langle \cdot\ , \cdot \rangle : M_{m\times n}(K) \times M_{m\times n}(K) \to K$ dada por

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\overline{B_{ij}}$$

para toda $A, B \in M_{m\times n}(K)$ es un producto escalar en este espacio;

c) la operación $||\ \cdot\ || : M_{m\times n}(K) \to K$ dada por

$$||A|| = \text{máx.}|A_{ij}|$$

para toda $A \in M_{m\times n}(K)$ es una norma en este espacio.

Además, encuentren una base ortonormal para el espacio vectorial visto en a) con el producto escalar de b) y la norma del inciso c) y argumenten por qué dicha base es ortonormal.

2. Sea $(F, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las funciones reales de variable real y sea L^2 el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\ dx < \infty.$$

Demuestren que[1]:

a) $(L^2, \mathbb{R})$ es un subespacio vectorial de $(F, \mathbb{R})$;

b) la operación $\langle \cdot\ , \cdot \rangle : L^2 \times L^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\ dx$$

para toda $f, g \in L^2$ es un producto escalar en $(L^2, \mathbb{R})$.

Además, contesten la siguiente pregunta: si las funciones de L^2 tuvieran imágenes en $\mathbb{C}$ en vez de $\mathbb{R}$, ¿cómo modificarían la operación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para que siguiera teniendo todas las propiedades de producto escalar?

[1] Para los incisos a) y b) pueden asumir que si $f, g, h \in L^2$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) + g^2(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\ dx + \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x)\ dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x) + f(x)g(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x)\ dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\ dx$, además de las propiedades de la integral que hayan visto en sus cursos de cálculo.

3. Sea $\mathbf{c}$ un vector no nulo del espacio vectorial complejo $\mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ un escalar del campo. Muestren que[2]:

a) Si $\mathrm{Im}(\lambda) = 0$, entonces $\lambda\mathbf{c}$ corresponde a un reescalamiento de $\mathbf{c}$ por $|\lambda|$, con una inversión en el sentido si $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

b) Si $\lambda = i$, entonces $\lambda\mathbf{c}$ corresponde al vector resultante de rotar a $\mathbf{c}$ por $\frac{\pi}{2}$.

c) Si $|\lambda| = 1$, entonces $\lambda\mathbf{c}$ corresponde al vector resultante de rotar a $\mathbf{c}$ por $\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(\lambda)}{\mathrm{Re}(\lambda)}\right)$.

d) En general, $\lambda\mathbf{c}$ corresponde a un reescalamiento de $\mathbf{c}$ por $|\lambda|$ con una rotación por $\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(\lambda)}{\mathrm{Re}(\lambda)}\right)$ y una inversión en el sentido si $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

4. Sea (V, K) un espacio vectorial con producto escalar positivo definido. Decimos que una función $d(\cdot,\cdot) : V \times V \to K$ es una *función de distancia* o *métrica* en V si para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{v},$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

$$\text{y} \quad d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Demuestren que:

a) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = +\sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ es una métrica en V.

b) Todo conjunto ortogonal de V que no contenga al vector nulo es linealmente independiente.

5. Sea $P^3([-1, 1])$ el espacio vectorial real de todos los polinomios reales de grado 3 con dominio en $[-1, 1]$, dotado de un producto escalar dado por

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx.$$

Obten una base ortonormal para este espacio vectorial y expresa a un vector arbitrario $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in P^3([-1, 1])$ como combinación lineal de los elementos de la base que hayas obtenido.

[2] Para este ejercicio, les sugiero revisar el apéndice C del Poole.