Producto escalar, norma
proyecciones y ortogonalidad

Algunos espacios vectoriales (V,K) tienen una operación **adicional** llamada *producto escalar* $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$ que cumple lo siguiente:

(1) $\langle \vec{u}+\vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$,
(2) $\langle a\vec{u}, \vec{v} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$,
$\Big\}$ $\langle a\vec{u}+\vec{w}, \vec{v} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ (*linealidad* en la primera entrada)

(3) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}$, (*simetría conjugada*)

para todos $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$, $a \in K$. Si además se cumple que

(4) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0 \ \forall \vec{v} \in V$, $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$,

decimos que el producto escalar es *positivo definido.*

El ejemplo más común de producto escalar es el "producto punto" en $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i, \qquad \vec{u} = (u_1, \dots, u_n), \vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Este producto escalar es positivo definido porque $r^2 \geq 0 \ \forall r \in \mathbb{R}$, y verifica la propiedad de simetría conjugada trivialmente, pues $\bar{r} = r \ \forall r \in \mathbb{R}$. Si quisiéramos generalizar el "producto punto" a un producto escalar en $\mathbb{C}^n$:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}, \qquad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n.$$

E1

$$\overline{\vec{y} \cdot \vec{x}} = \overline{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \overline{x_i}\right)} = \sum_{i=1}^{n} \overline{(y_i \overline{x_i})} = \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i}\,\overline{(\overline{x_i})} = \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

$$\left.\begin{aligned} \int f+g \, dx &= \int f \, dx + \int g \, dx \\ \int af \, dx &= a \int f \, dx \end{aligned}\right\} \text{propiedades lineales}$$

Otra operación posible es la *norma* $\|\cdot\|: V \to K$, la cual cumple

(1) $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ *(desigualdad del triángulo)*

(2) $\|a\vec{u}\| = |a|\,\|\vec{u}\|$ *(escalabilidad absoluta)*

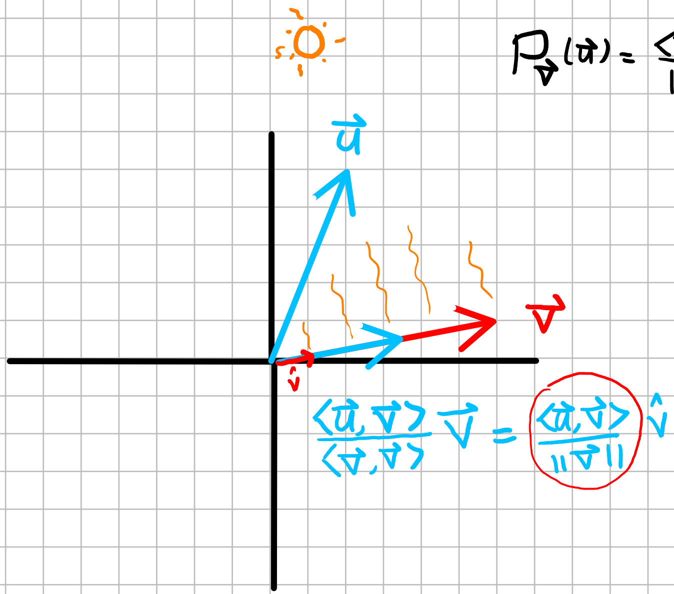
(3) $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ *(distingue al vector nulo)*

Obs. Si $\langle\cdot,\cdot\rangle: V\times V \to K$ es positivo definido, entonces

$$\|\vec{v}\| = \sqrt[+]{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}$$

es una norma *inducida por el producto escalar positivo definido.*

$$P_{\vec v}(\vec u) = \frac{\langle \vec u, \vec v\rangle}{\|\vec v\|}\,\hat v$$



normalización

vector unitario
vector normal

$$\hat u := \frac{\vec u}{\|\vec u\|} := \frac{1}{\|\vec u\|}\vec u$$