Invertibilidad e isomorfismos

Def. Sea $f: A \to B$ una funcion. Decimos que $g: B \to A$ es su inversa si $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$.

Obs. Si $g, g': B \to A$ son inversas de f, entonces

$$f \circ g = I_B = f \circ g' \Rightarrow g \circ (f \circ g) = g \circ (f \circ g') \Rightarrow (g \circ f) \circ g = (g \circ f) \circ g'$$

$$\Rightarrow I_A \circ g = I_A \circ g' \Rightarrow g = g'.$$

Por lo tanto, si la inversa existe, es unica y la denotamos por $f^{-1}: B \to A$. Recordamos que una funcion es invertible (biyectiva) si es inyectiva y suprayectiva y que $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ si las inversas existen.

Obs. Sean $T: V \to W$ una transformación lineal con función inversa $T^{-1}: W \to V$, $a \in K$, $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$. Como T tiene inversa es biyectiva y, en particular, es suprayectiva. Entonces $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ tales que $T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$ y $T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$. Luego,

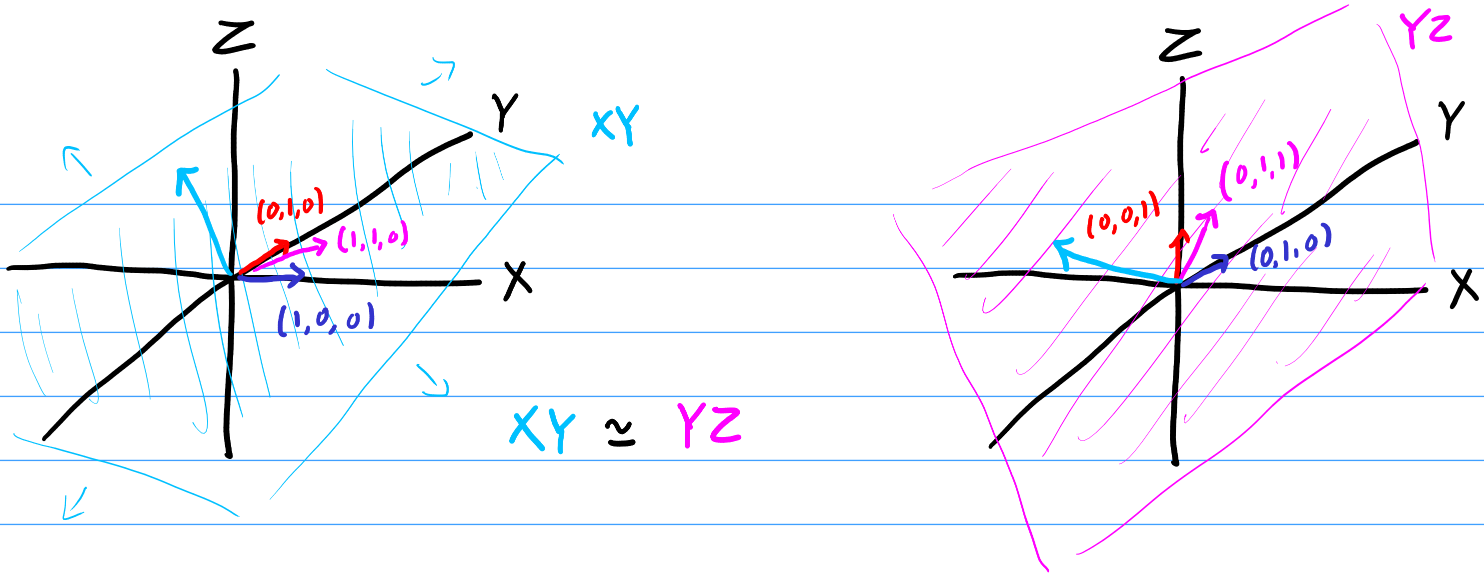
$$T^{-1}(a\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = T^{-1}(aT(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2)) = T^{-1}(T(a\vec{v}_1 + \vec{v}_2)) = (T^{-1} \circ T)(a\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

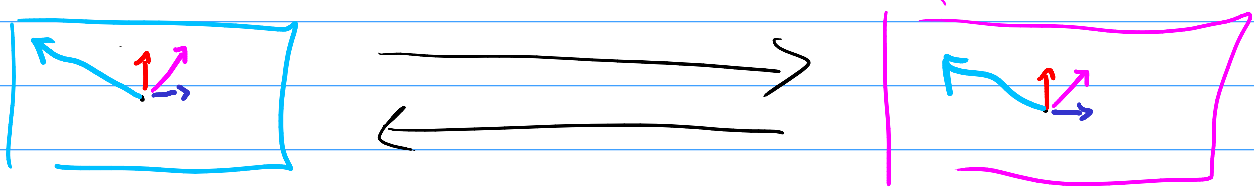
$$= I_V(a\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = a\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = aT^{-1}(\vec{w}_1) + T^{-1}(\vec{w}_2).$$

Por lo tanto, $T^{-1}: W \to V$ es una transformación lineal.

Sea $T: V \to W$ una transformacion lineal con $\dim(V), \dim(W) < \infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } T \text{ es inyectiva} \Rightarrow \dim(V) \le \dim(W) \\ \text{Si } T \text{ es suprayectiva} \Rightarrow \dim(W) \le \dim(V) \end{array}\right\} T \text{ es biyectiva si } \dim(V) = \dim(W).$$





$$T(\vec{b}_i) = \vec{g}_i$$

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{b}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{g}_i$$