Funcional y espacio dual

Recordatorios:

- Sea K un campo. Entonces K es un espacio vectorial sobre sí mismo.

- Sean V y W espacios vectoriales sobre K, entonces $\mathcal{L}(V,W)$ es un espacio vectorial sobre K.

En particular, si $W=K$, entonces $\mathcal{L}(V,K)$ es el *espacio dual* de V, denotado por V^*. A los elementos de $\mathcal{L}(V,K)$ se les conoce como *funcionales* o *vectores duales*.

Notación de Dirac / bra-Ket

Según nuestra convención hasta ahora, el producto escalar $\langle \cdot , \cdot \rangle$ es *lineal* en la 1ra entrada y *antilineal* en la 2da.

En la notación de bra-ket, el producto escalar se escribe como $\langle \cdot | \cdot \rangle$ y es *lineal* en la 2da entrada y *antilineal* en la 1ra. Es decir,

$$\langle a | \beta b + c \rangle = \langle a | \big(|\beta b\rangle + |c\rangle \big) = \beta \langle a | b \rangle + \langle a | c \rangle \quad \text{linealidad}$$

$$\langle a + \beta b | c \rangle = \big(\langle a | + \langle \beta b | \big) |c\rangle = \langle a | c \rangle + \overline{\beta} \langle b | c \rangle \quad \text{antilinealidad}$$

Anatomía de un bra-ket

Sea V un espacio vectorial con producto escalar y $|u\rangle, |v\rangle \in V$.

bra-ket

(producto escalar)

$$\langle u \mid v \rangle$$

bra

(funcional/vector dual)

$$\langle u |$$

ket

(vector)

$$| v \rangle$$

$$\langle u | v \rangle \in K$$

$\langle u | : V \to K$, $\langle u | \in V^*$

$| v \rangle \in V$

Anteriormente $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \in K$, $\vec{v} \in V$ y $\langle \cdot, \vec{u} \rangle : V \to K$,

$$\langle \cdot, \vec{u} \rangle \in \mathcal{L}(V, K).$$

<u>Obs.</u> Si $|b\rangle \in V$, $\beta \in K$

$$\beta |b\rangle = |\beta b\rangle \leftrightarrow \langle \beta b| = \bar{\beta} \langle b|$$

Correspondencia entre bras y kets

<u>Obs.</u> Si $|v\rangle$ es un eigenvector de T con eigenvalor λ,

$$|T(v)\rangle = |\lambda v\rangle = \lambda |v\rangle,$$

pero

$$\langle T(v)| = \langle \lambda v| = \bar{\lambda} \langle v|.$$