

## El problema de la diagonalización

Obs. Una matriz diagonal es más fácil de interpretar (geométricamente) y de aplicar (algebráicamente) que una no diagonal.

Ejemplo:

$$\text{Comparar } \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 19 & 48 & -48 \\ 28 & 29 & -42 \\ 32 & 48 & -61 \end{pmatrix} \text{ con } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [T]_{\mathcal{B}}$$

Como sabemos, cualquier matriz  $A \in M_{n \times n}(K)$  representa a un operador  $T: V \rightarrow V$  donde  $\dim(V) = n$  utilizando una base ordenada  $\beta$  específica. Si existe una base ordenada  $\mathcal{B}$  de  $V$  tal que  $[T]_{\mathcal{B}}$  sea una matriz diagonal, decimos que  $T$  es un operador diagonalizable.

El problema que guiará este módulo será el de determinar cuándo un operador es diagonalizable.

Supongamos que  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\mathcal{B} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$  es una base ordenada de  $\mathbb{R}^3$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recordando que  $[T]_{\mathcal{B}} = \left( [T(\vec{g}_1)]_{\mathcal{B}}, [T(\vec{g}_2)]_{\mathcal{B}}, [T(\vec{g}_3)]_{\mathcal{B}} \right)$  y que  $[\vec{g}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $[\vec{g}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $[\vec{g}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , entonces tenemos que

$$[T(\vec{g}_1)]_{\mathcal{B}} = -1 [\vec{g}_1]_{\mathcal{B}}, \quad [T(\vec{g}_2)]_{\mathcal{B}} = -1 [\vec{g}_2]_{\mathcal{B}} \quad \text{y} \quad [T(\vec{g}_3)]_{\mathcal{B}} = 1 [\vec{g}_3]_{\mathcal{B}}.$$

Como sabemos, por isomorfismos, esto implica que

$$T(\vec{g}_1) = -1 \vec{g}_1, \quad T(\vec{g}_2) = -1 \vec{g}_2 \quad \text{y} \quad T(\vec{g}_3) = 1 \vec{g}_3.$$

Generalizando el ejemplo anterior, sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$ ,  $T: V \rightarrow V$  un operador lineal y supongamos que existe una base ordenada  $\mathcal{B} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n)$  de  $V$  tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(K),$$

entonces  $T(\vec{g}_i) = d_i \vec{g}_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Conversamente, si podemos encontrar una base ordenada  $\mathcal{B} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n)$  de  $V$  tal que  $T(\vec{g}_i) = \lambda_i \vec{g}_i$  con  $\lambda_i \in K \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces tendremos que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

es decir, habremos demostrado que  $T$  es diagonalizable.

Claramente, los vectores  $\vec{v}$  y escalares  $\lambda$  tales que  $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$  son importantes para determinar si  $T$  es diagonalizable. Si  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , decimos que  $\vec{v}$  es un **eigenvector** (o **vector propio**) de  $T$  y que  $\lambda$  es el **eigenvalor** (o **valor propio**) de  $T$  correspondiente al eigenvector  $\vec{v}$ .

(P1)

(P2)

Si  $\beta$  es una base ordenada tal que  $[T]_{\beta} [\vec{v}]_{\beta} = \lambda [\vec{v}]_{\beta}$  para alguna  $\lambda \in K$  con  $[\vec{v}]_{\beta} \neq [\vec{0}_V]_{\beta}$ , decimos que  $[\vec{v}]_{\beta}$  es un **eigenvector** de la matriz  $[T]_{\beta}$  y que  $\lambda$  es un **eigenvalor** de  $[T]_{\beta}$  correspondiente al eigenvector  $[\vec{v}]_{\beta}$ .

(P3)

Naturalmente, ahora nos surge la pregunta, ¿cómo encontramos a los eigenvectores y eigenvalores de un operador  $T$  arbitrario? Para esto, nos ayudan las **representaciones** (i.e., los isomorfismos). Partimos de la ecuación

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Representamos en una base ordenada  $\beta$  de  $V$

$$[T(\vec{v})]_{\beta} = \lambda [\vec{v}]_{\beta}.$$

Reescribimos ambos lados de la ecuación como el producto de un vector por una matriz

$$[T]_{\beta} [\vec{v}]_{\beta} = (\lambda I_{n \times n}) [\vec{v}]_{\beta}.$$

Despejamos para obtener

$$([T]_{\beta} - \lambda I_{n \times n}) [\vec{v}]_{\beta} = [\vec{0}]_{\beta}. \quad (*)$$

Como  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , entonces  $[\vec{v}]_{\beta} \neq [\vec{0}]_{\beta}$ , y la ecuación anterior implica que la matriz  $([T]_{\beta} - \lambda I_{n \times n}) : K^n \rightarrow K^n$  no es inyectiva; por ende, tampoco es biyectiva, de donde se sigue que

$$\det([T]_{\beta} - \lambda I_{n \times n}) = 0.$$

Como  $\lambda$  es una incógnita en esta ecuación, por la naturaleza del determinante,  $\det([T]_{\beta} - \lambda I_{n \times n})$  es un polinomio en  $\lambda$  y sus raíces son los eigenvalores de  $[T]_{\beta}$  y, por ende, de  $T$ . Dicho polinomio es independiente de la base ordenada  $\beta$  de  $V$  con la que representamos a  $T$  (ejercicio) y es conocido como el **polinomio característico** de  $T$ .

$$\text{p.p. } \det([T]_{\beta} - \lambda I_{n \times n}) = \det([T]_{\gamma} - \lambda I_{n \times n}) \quad \forall \text{ b.o. } \beta, \gamma \text{ de } V$$

El conjunto de eigenvalores  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$  de un operador lineal  $T$  se conoce como el **espectro** de  $T$ . A veces que conocemos el espectro  $\Lambda$  de  $T$ , podemos sustituir la variable  $\lambda$  en (\*) con  $\lambda_i \in \Lambda$  y solucionar el sistema de ecuaciones para  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$  para encontrar los eigenvectores de  $T$  con eigenvalor  $\lambda_i$ .

Obs. Si  $T: V \rightarrow V$  es un operador lineal y  $\vec{v} \in V$  es tal que  $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$  con  $\lambda \in K$  y  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , entonces  $T(c\vec{v}) = cT(\vec{v}) = c(\lambda \vec{v}) = (c\lambda)\vec{v} = (\lambda c)\vec{v} = \lambda(c\vec{v}) \quad \forall c \in K$ . Por ende, cualquier reescalamiento no trivial de  $\vec{v}$  también es un eigenvector de  $T$  con el mismo eigenvalor que  $\vec{v}$ .

Similarmente, podemos dar una definición de eigenvector, eigenvalor y polinomio característico de una matriz  $A \in M_{n \times n}(K)$ , sin pensarla como la representación matricial de algún operador lineal en un espacio de dimensión  $n$ .

Ejemplo: Sea  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1$  y  $T(\vec{e}_2) = -15\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ .

$$T(c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2) = c_1(2\vec{e}_1) + c_2(-15\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2) = (2c_1 - 15c_2)\vec{e}_1 - 3c_2\vec{e}_2.$$

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T(\vec{e}_1)]_{\mathcal{B}} & [T(\vec{e}_2)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -15 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}. \text{ No es claro cómo actúa } T \text{ en } \mathbb{R}^2.$$

Calculemos los eigenvalores de  $T$ :  $\det([T]_{\mathcal{B}} - \lambda I_{\text{can}}) = 0 \Rightarrow$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 2 & -15 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -15 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda) - (-15)(0) = (2-\lambda)(-3-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$$

$\Rightarrow \Lambda = \{2, -3\}$ . Ahora, calculemos los eigenvectores  $[\vec{g}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  y  $[\vec{g}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ .

$\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -15 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -15u_2 = 0 \\ -5u_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow u_2 = 0, u_1 \in \mathbb{R}. \text{ Sea } u_1 = 1 \Rightarrow [\vec{g}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\Rightarrow \vec{g}_1 = \vec{e}_1)$$

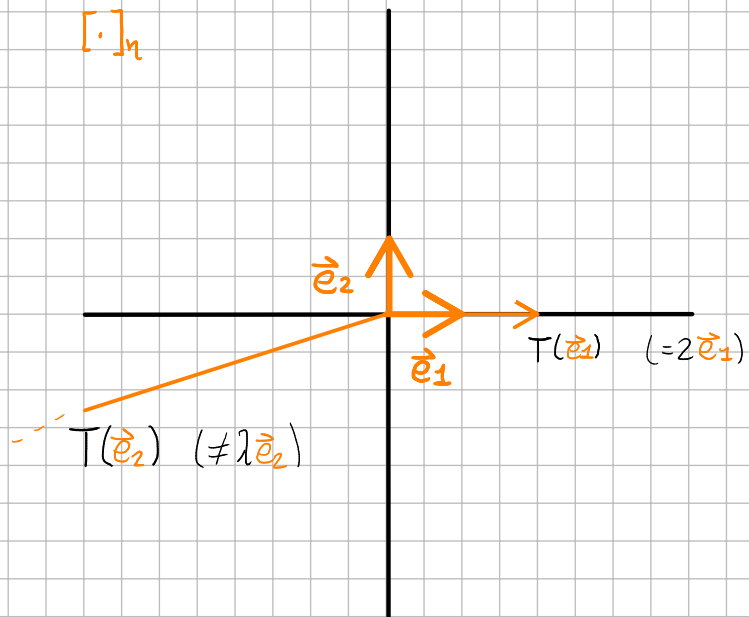
$\lambda_2 = -3$

$$\begin{pmatrix} 5 & -15 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 5v_1 - 15v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = 3v_2 \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}. \text{ Sea } v_2 = 1 \Rightarrow [\vec{g}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\Rightarrow \vec{g}_2 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

P.D. Si  $\mathcal{B} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2)$ , entonces  $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ .

→ sistema de coordenadas

$[\cdot]_{\eta}$



$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineal

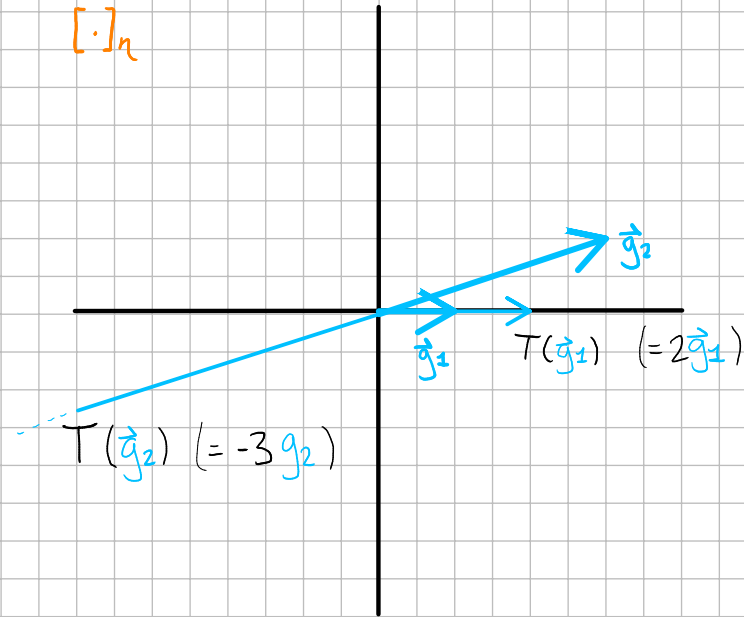
$$T(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1$$

$$T(\vec{e}_2) = -15\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$$

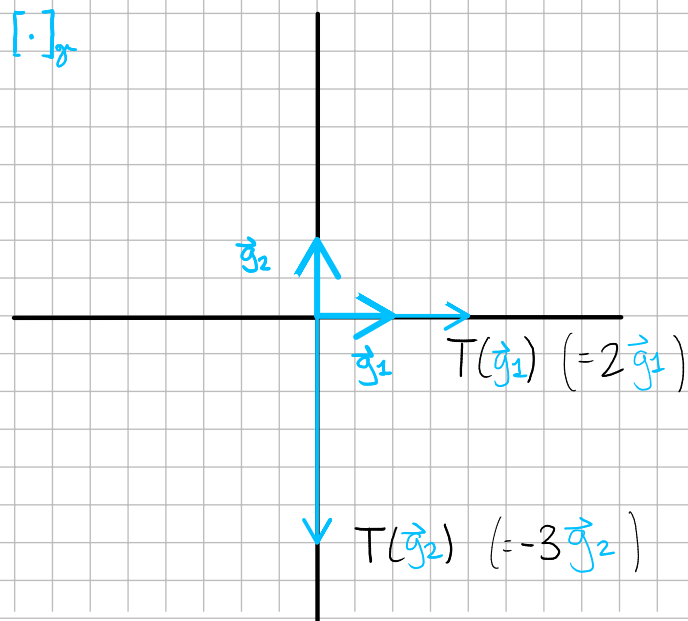
$$\eta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

$$\gamma = (\vec{e}_1, 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

$[\cdot]_{\eta}$



$[\cdot]_{\gamma}$



Si  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  es un vector arbitrario (de tu elección), ¿cómo se verían  $\vec{v}$  y  $T(\vec{v})$  gráficamente en estos tres planos?