Álgebra Lineal
Grupo 3044, 2020-II
Examen parcial 3 (tarea examen)
Fecha de entrega: martes 21 de abril, 16:00 hrs.

"*Education is not the filling of a bucket, but the lighting of a fire.*"

—William Yeats,
poeta irlandés

Número de cuenta:

Sea d_i el i-ésimo dígito de tu número de cuenta.

1. Sean

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & d_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d_2 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ es base de $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Además, piensa en un espacio vectorial que sea isomorfo a $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ (el que tú quieras) y demuestra que lo es. (2 ptos.)

2. Sean las matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_4 & d_5 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} d_6 & d_7 \\ d_8 & d_9 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}),$$

representadas en la base canónica ordenada $(\hat{\imath}, \hat{\jmath})$ de $\mathbb{R}^2$. Da las reglas de correspondencia de las transformaciones lineales T_1 y T_2 representadas por estas matrices, así como de la transformación $T_2 \circ T_1$. Luego, da la representación matricial de $T_2 \circ T_1$ en esta misma base canónica ordenada, ¿a qué producto de las matrices M_1 y M_2 es igual? (2 ptos.)

3. Modifica las matrices del ejercicio anterior mediante operaciones elementales y redefínelas como M_1', M_2' de tal forma que $\det(M_1') = d_3$ y $\det(M_2') = -\frac{1}{d_3}$. Dibuja al cuadrado unitario formado por los vectores $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$, así como el paralelogramo formado por los pares de vectores $M_1'\hat{\imath}$ y $M_1'\hat{\jmath}$; $M_2'\hat{\imath}$ y $M_2'\hat{\jmath}$; $M_1'M_2'\hat{\imath}$ y $M_1'M_2'\hat{\jmath}$; $M_2'M_1'\hat{\imath}$ y $M_2'M_1'\hat{\jmath}$. ¿Cuáles de estas matrices (transformaciones lineales) son invertibles? Argumenta a partir de los dibujos. (2 ptos.)

4. Calcula las matrices inversas $(M_1')^{-1}$ y $(M_2')^{-1}$. ¿Qué producto de estas matrices es la inversa (por ambos lados) de la matriz $(M_1'M_2')$? Arguméntalo algebráicamente y/o geométricamente (con una de las dos es suficiente), y demuéstralo mediante cálculos. (2 ptos.)

5. Sea $(\begin{bmatrix} d_2 & d_1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} d_9 & -d_8 \end{bmatrix}^T)$ un base ordenada de $\mathbb{R}^2$. Calcula la matriz de cambio de base P entre las bases $(\hat{\imath}, \hat{\jmath})$ y $(\begin{bmatrix} d_2 & d_1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} d_9 & -d_8 \end{bmatrix}^T)$, así como P^{-1}. Calcula $\det(P^{-1}M_1P)$ y $\det(P^{-1}M_2P)$ y compáralos con $\det(M_1)$ y $\det(M_2)$, respectivamente. ¿Qué observas y cómo lo explicas? (2 ptos.)

Extra: Calcula el determinante, traza, inversa y determinante de la inversa de las siguientes matrices e interprétalas geométricamente. Usa el método que se indica para uno de los valores y resuelve lo demás manualmente (i.e., sin calculadora) con el método de tu preferencia. (0.3 ptos. extra por inciso*)

A) La siguiente matriz de 3×3 usando el método de Sarrus para calcular su determinante (el de la inversa, calcúlalo como gustes).

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -0.5 & 0 \\ 10 & 0 & -7 \\ 0 & -0.5 & -7 \end{pmatrix}$$

B) La siguiente matriz de 2×2 usando el método de Gauss para calcular la inversa.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-\pi}{4} & \frac{-4}{\pi} \\ \\ \frac{-\pi}{4} & \frac{4}{\pi} \end{pmatrix}$$

C) La siguiente matriz de 4×4 por método de Laplace - también referido como método de Leibniz - para su determinante (el de la inversa, calcúlalo como gustes). ¡Haz lo posible por interpretar la transformación en el híperespacio cuatridimensional!

$$C = \begin{pmatrix} 100 & 0.1 & 10 & -0.01 \\ 1 & 10 & -0.5 & 0 \\ -1 & 10 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -0.5 & -7 \end{pmatrix}$$