Descomposición espectral y operador adjunto

Sean (V,K) un e.v. de dimensión n con producto escalar y $\{|u_1\rangle, \dots, |u_n\rangle\}$ una base ortonormal de V.

<u>Obs</u>. $T := \sum_{i=1}^{n} |u_i\rangle\langle u_i| : V \to V$ es el operador identidad.

Sea $|v\rangle \in V$. Entonces, $|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i|v\rangle |u_i\rangle$. Luego, $T(|v\rangle) =$

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i\rangle\langle u_i| \left(\sum_{j=1}^{n} \langle u_j|v\rangle |u_j\rangle\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle u_j|v\rangle \overbrace{\langle u_i|u_j\rangle}^{\delta_{ij}} |u_i\rangle =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \langle u_i|v\rangle |u_i\rangle = |v\rangle. \quad \therefore T(|v\rangle) = |v\rangle \ \forall\, |v\rangle \in V, \text{ i.e., } T = I_V.$$