Álgebra Lineal
Grupo 3003, 2021-I
Examen parcial 5 (tarea examen)
Fecha de entrega: domingo 31 de enero, 23:59 hrs.

> "*Taking responsability for education <u>is</u> education. Taking responsability for learning <u>is</u> learning.*"
>
> —Salman Khan,
> fundador de Khan Academy

1. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita n con producto escalar y sean $\alpha = \{|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_n\rangle\}$ y $\beta = \{|b_1\rangle, |b_2\rangle, \dots, |b_n\rangle\}$ bases ortonormales de V. Supongamos que $T : V \to V$ es un operador lineal tal que

$$\langle u| \big(T|v\rangle\big) = \big(\langle u|T\big)|v\rangle = \langle u|T|v\rangle \quad \forall\ |u\rangle, |v\rangle \in V.$$

Demuestren que:

(a) $I_V = \sum_{i=1}^{n} |a_i\rangle\langle a_i| = \sum_{i=1}^{n} |b_i\rangle\langle b_i|$ [1]. (0.5 ptos.)

(b) Todos los eigenvalores de T son reales y los eigenvectores de T correspondientes a eigenvalores distintos son ortogonales entre sí; en particular, T tiene un espectro no vacío. (1 pto.)

(c) Las entradas de la matriz $A := [T]_\alpha$ están dadas por $A_{ij} = \langle a_i|T|a_j\rangle$ y, en particular, A es una matriz simétrica. (0.5 ptos.)

(d) Las entradas de la matriz $B := [T]_\alpha^\beta$ están dadas por $B_{ij} = \langle b_i|T|a_j\rangle$. (1 pto.)

2. Sea d_j el j-ésimo dígito del número resultante de sumar los números de cuenta de l@s integrantes del equipo. Consideren a las matrices $D_1, D_2 \in M_{n\times n}(K)$ dadas por

$$D_1 := \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ d_2 & d_4 & d_5 \\ d_3 & d_5 & d_6 \end{pmatrix}; \quad D_2 := D_1 + i\begin{pmatrix} 0 & d_7 & -d_8 \\ -d_7 & 0 & d_9 \\ d_8 & -d_9 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinen si D_1 y D_2 son diagonalizables y calculen sus espectros. ¿Cómo se verían las matrices diagonales asociadas a D_1 y D_2, en caso de que sean diagonalizables? (1 pto.)

(b) Determinen si D_1 y D_2 se pueden descomponer espectralmente para $K = \mathbb{R}$. (1 pto.)

(c) Determinen si D_1 y D_2 se pueden descomponer espectralmente para $K = \mathbb{C}$. (1 pto.)

3. Decimos que una matriz cuadrada A es *unitaria* si $AA^* = A^*A = I$, u *ortogonal* si $AA^T = A^TA = I$. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita n con producto escalar. Demuestren que:

(a) Un operador lineal T es unitario si y sólo si $[T]_\alpha$ es una matriz unitaria para alguna base ortonormal α de V. (1.5 ptos.)

(b) Un operador lineal T es ortogonal si y sólo si $[T]_\beta$ es una matriz ortogonal para alguna base ortonormal β de V. (1.5 ptos.)

[1] Si consideráramos que V fuese un espacio vectorial con producto escalar de dimensión *infinita*, con α y β bases ortonormales de V, ¿cómo crees que se vería el operador identidad en este espacio, intuitivamente?

4. Determinen si las siguientes matrices representan operadores diagonalizables, normales, autoadjuntos, unitarios, ortogonales, operadores que se pueden descomponer espectralmente, alguna combinación de las anteriores, o ninguna de las anteriores. Justifiquen su respuesta.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. (1 pto.)

(b) $\begin{pmatrix} cos(\theta) & 0 & sen(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(\theta) & 0 & cos(\theta) \end{pmatrix}$ para $\theta \in [0, 2\pi)$. (1 pto.)

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ para $a \in \mathbb{R}$. (1 pto.)