Invertibilidad e isomorfismos

En general, un *isomorfismo* entre dos sistemas algebráicos A y B es una *función invertible* $f: A \to B$ que *preserva la estructura algebráica de* A y B.

En el caso de espacios vectoriales V y W, las funciones que preservan esta estructura son las *transformaciones lineales*. Por lo tanto, cualquier transformación lineal *invertible*

$$T: V \to W, \quad T \text{ lineal}, \quad \exists\, T^{-1}: W \to V \text{ tal que } T^{-1} \circ T = I_V,\ T \circ T^{-1} = I_W$$

es un *isomorfismo* entre V y W. Si existe alguna transformación lineal invertible entre V y W, decimos que son espacios vectoriales *isomorfos* y escribimos esto como $V \simeq W$.

Ejemplos:

$$M_{2\times 2}(K) \simeq K^4$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+cb_{11} & a_{12}+cb_{12} \\ a_{21}+cb_{21} & a_{22}+cb_{22} \end{pmatrix}$$

$$(a_{11}\ a_{12}\ a_{21}\ a_{22}) + c\,(b_{11}\ b_{12}\ b_{21}\ b_{22}) = (a_{11}+cb_{11}\ \ a_{12}+cb_{12}\ \ a_{13}+cb_{21}\ \ a_{14}+cb_{22})$$

- $M_{m\times n}(K) \simeq K^{mn}$

$$T\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \\ a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal invertible (i.e., un *isomorfismo*).

- $V \simeq K^n$ donde $\dim(V) = n$.

$(X, \mathbb{R}),\ (Y, \mathbb{R}) \quad \dim(X) = n = \dim(Y)$

$X \simeq \mathbb{R}^n,\ Y \simeq \mathbb{R}^n \Rightarrow X \simeq Y$

Sea $\beta = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ *una base ordenada de* V, entonces $[\cdot]_\beta : V \to K^n$,

$$[\vec{v}]_\beta = \left[\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{b}_i\right] = (c_1, c_2, \dots, c_n) \text{ es un isomorfismo.}$$

(Recordatorio: T es invertible $\Leftrightarrow$ T es biyectiva)

Caso particular: $V = P^{\ell}$. (en este ejemplo $\beta = (1, x, x^2, \dots, x^{\ell})$)

$T(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{\ell} x^{\ell}) = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{\ell})$ es un isomorfismo entre P^{ℓ} y $K^{\ell+1}$.

P1

$\ell = 2$

$f(x) = 3 + 5x + 2x^2$, $g(x) = 4 + 2x + 6x^2$, $c = 4$

$f(x) + cg(x) = 19 + 13x + 26x^2$

$T(f(x)) + cT(g(x)) = T(3 + 5x + 2x^2) + cT(4 + 2x + 6x^2)$

$= (3\ 5\ 2) + 4(4\ 2\ 6) = (3\ 5\ 2) + (16\ 8\ 24)$

$T(19 + 13x + 26x^2) = (19\ 13\ 26)$

- $\mathcal{L}(V, W) \simeq M_{m \times n}$, donde $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$. (¡muy importante!)

Este último ejemplo nos lleva al siguiente punto: invertibilidad.

Recordemos que sólo las matrices cuadradas pueden tener inversa (por la izquierda y por la derecha) y que, para ello, deben tener determinante no nulo. P2

$$M = \begin{array}{c} \text{n columnas} \\ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

m renglones

$V \simeq V$

$V \simeq W \Rightarrow W \simeq V$, $V \simeq W, W \simeq X \Rightarrow V \simeq X$.