Álgebra Lineal
Grupo 3058, 2020-IV
Examen parcial 3 (tarea examen)
Fecha de entrega: sábado 5 de septiembre, 12:00 hrs.

> "El estudio no se mide por el número de páginas leídas en una noche, ni por la cantidad de libros leídos en un semestre. Estudiar no es un acto de consumir ideas, sino de crearlas y recrearlas."
>
> —Paulo Freire,
> pedagogo brasileño

1. Diagonalizabilidad

Sea (V, K) un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ un operador lineal con espectro[1] $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$. Demuestra que T es diagonalizable si y sólo si su polinomio característico es separable en K y se cumple que

$$n - \text{rango}(T - \lambda_i I) = m_i$$

para todo $1 \leq i \leq k$, donde m_i es la multiplicidad del eigenvalor λ_i correspondiente. Por otro lado, demuestra que T es diagonalizable si y sólo si se puede formar una base de V compuesta de eigenvectores de T.

Luego, sea d_i el i-ésimo dígito del número resultante de sumar todos los números de cuenta de l@s integrantes de tu equipo. Supongamos que $\dim(V) = 3$ y que un operador lineal $T : V \to V$ actúa sobre una base $\beta = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ de V como sigue:

$$T(\mathbf{b}_j) = \sum_{k=1}^{3} d_{j+3(k-1)} \mathbf{b}_k, \quad 1 \leq j \leq 3.$$

Calcula el espectro de T, así como un conjunto de eigenvectores normales de T. Finalmente, a partir de la demostración anterior, determina si T es diagonalizable y, en caso de que lo sea, diagonalízalo. (2 ptos.)

2. Operadores de proyección

Sea V un espacio vectorial. Decimos que un operador lineal $P : V \to V$ tal que $P^2 = P$ es un *operador de proyección*. Demuestra que si V es de dimensión finita entonces para todo operador de proyección se verifica que

$$\text{Im}(P) \oplus \text{Ker}(P) = V.$$

Además, demuestra que para todo operador lineal $T : V \to V$, T es un operador diagonalizable con eigenvalores 1 y 0 si y sólo si es un operador de proyección. (2 ptos.)

3. Proyecciones ortogonales

Sea (V, K) un espacio vectorial de dimensión finita con producto escalar. Si W es un subespacio de V, entonces definimos a su *complemento ortogonal* como

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{w} \in W\}.$$

Demuestra que $P : V \to V$ es un operador de proyección con una base de eigenvectores ortogonales si y sólo si

$$\text{Im}(P) \oplus \text{Im}(P)^\perp = V = \text{Ker}(P)^\perp \oplus \text{Ker}(P).$$

Después, generaliza el resultado para cualquier operador lineal $T : V \to V$ con una base ortogonal de eigenvectores. ¿Cómo cambia la interpretación geométrica de este hecho entre operadores de proyección P con base ortogonal de eigenvectores y operadores lineales más generales T con base ortogonal de eigenvectores[2]. (2 ptos.)

[1] El conjunto de eigenvalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ de un operador lineal T se conoce como el *espectro* de T.

[2] Pista: ¿cómo se relacionan $\text{Ker}(P)$ y $\text{Im}(P)$ con los eigenespacios de P? ¿Sucede lo mismo para T?

4. Descomposición espectral

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto escalar. Sea $T : V \to V$ un operador lineal con eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ y eigenespacios $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_k}$. Demuestra que T tiene una base de eigenvectores ortonormales si y sólo si podemos descomponer a T como

$$T = \lambda_1 P_{E_{\lambda_1}} + \lambda_2 P_{E_{\lambda_2}} + \ldots + \lambda_k P_{E_{\lambda_k}},$$

donde $P_{E_{\lambda_i}}$ es un operador de proyeción ortogonal sobre el eigenespacio E_{λ_i}. ¿Por qué es indispensable que un operador T sobre un espacio vectorial de dimensión finita V con producto escalar tenga una base *ortogonal* de eigenvectores para que podamos hacer la descomposición espectral de la demostración anterior? Argumenta geométricamente. ¿Se podría hacer una descomposición espectral de un operador que actúe sobre un espacio vectorial *sin* producto escalar? (2 ptos.)

5. Diagonalizabilidad simultánea

Sean T y T' dos operadores lineales con espectros $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ y $\{\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_k\}$, respectivamente, que actúan sobre un espacio vectorial V de dimensión finita. Supongamos que para todo E_{λ_i} se cumple que

$$E_{\lambda_i} = E_{\lambda'_j}$$

para algún eigenespacio $E_{\lambda'_j}$ de T'. Demuestra que T y T' son simultáneamente diagonalizables[3]. (2 ptos.)

[3] Nótese que no es necesario que $\lambda_i = \lambda'_j$ para que $E_{\lambda_i} = E_{\lambda'_j}$.