Álgebra Lineal
Grupo 3044, 2020-II
Examen parcial 5 (tarea examen)
Fecha de entrega: lunes 1 de junio, 16:00 hrs.

"Todos sabemos algo,
todos ignoramos algo,
por eso siempre aprendemos."

—Paulo Freire,
pedagogo brasileño

Número de cuenta:

En los ejercicios siguientes, asume que V es un espacio vectorial de dimensión finita n con producto escalar.

1. Sea $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, \ldots, |a_n\rangle\}$ una base ortonormal cualquiera de V. Supongamos que definimos un operador $\iota : V \to V$ como

$$\iota = \sum_{1=1}^{n} |a_i\rangle \langle a_i| \,.$$

¿Quién es el operador ι[1]? (1.25 ptos.)

2. Sea $P : V \to V$ un operador lineal tal que $P^2 = P$. Demuestra que

$$V = \mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{Ker}(P).$$

En este caso, decimos que P es un **operador de proyección**. (1.25 ptos.)

3. Demuestra que los únicos eigenvalores que puede tener un operador de proyección son 1 y 0. ¿Cómo puedes interpretar esto geométricamente? ¿Qué significa esto para los eigenvectores con eigenvalor 0 y 1, respectivamente? (1.25 ptos.)

4. Siguiendo de la primera pregunta, sea W_{jk} un subespacio vectorial de V con $\{|a_j\rangle, |a_{j+1}\rangle, \ldots, |a_k\rangle\}$ como base, con $1 \leq j, k \leq n$. Demuestra que el operador $P_{jk} : V \to V$ dado por

$$P_{jk} = \sum_{i=j}^{k} |a_i\rangle \langle a_i|$$

es una **proyección ortogonal** sobre el subespacio W_{jk}. ¿Quiénes son la $\mathrm{Im}(P_{jk})$ y el $\mathrm{Ker}(P_{jk})$? (1.25 ptos.)

5. Demuestra que todos los eigenvalores de operadores lineales hermitianos son reales. (1.25 ptos.)

6. Demuestra que los eigenvectores de un operador autoadjunto correspondientes a eigenvalores distintos son ortogonales entre sí. (1.25 ptos.)

7. Supongamos que $T : V \to V$ es un operador lineal tal que

$$\langle v_1| \Big(T\,|v_2\rangle \Big) = \Big(\langle v_1|\, T \Big) |v_2\rangle = \langle v_1|\, T\, |v_2\rangle$$

[1] Piensa en cómo actúa ι sobre un vector arbitrario $|v\rangle \in V$.

para todo $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in V$. Sea $\beta = \{|b_1\rangle, |b_2\rangle, \dots, |b_n\rangle\}$ una base ortonormal de V y $A = [T]_\beta$ la representación matricial del operador T en la base ortonormal β. Demuestra que las entradas de la matriz A están dadas por la ecuación

$$A_{ij} = \langle b_i| T |b_j\rangle .$$

(1.25 ptos.)

8. Supongamos, para fines de este ejercicio sólamente, que $n = 9$. Sea $\delta = \{|x_1\rangle, |x_2\rangle, \dots, |x_9\rangle\}$ una base ortonormal de V y $X : V \to V$ un operador hermitiano tal que

$$X|x_i\rangle = d_i |x_i\rangle, \quad 1 \le i \le 9,$$

donde d_i corresponde a el i-ésimo dígito de tu número de cuenta. Calcula la representación matricial del operador X en la base δ y realiza una descomposición espectral de la matriz resultante. (1.25 ptos.)

Extra: Siguiendo de la pregunta antepasada, supongamos que $\gamma = \{|c_1\rangle, |c_2\rangle, \dots, |c_n\rangle\}$ es otra base ortonormal de V. Sea $B = [T]_\beta^\gamma$, es decir, la representación matricial del operador T que toma vectores representados en la base β y los devuelve en su representación en la base γ. Demuestra que las entradas de B están dadas por

$$B_{ij} = \langle c_i| T |b_j\rangle .$$

(1 pto. extra*)