

Álgebra Lineal  
Grupo 3044, 2020-II  
Examen parcial 3 (tarea examen)  
Fecha de entrega: martes 21 de abril, 16:00 hrs.

*“Education is not the filling of a bucket, but the lighting of a fire.”*

—William Yeats,  
poeta irlandés

Número de cuenta:

Sea  $d_i$  el  $i$ -ésimo dígito de tu número de cuenta.

1. Sean

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & d_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d_2 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que  $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  es base de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ . Además, piensa en un espacio vectorial que sea isomorfo a  $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$  (el que tú quieras) y demuestra que lo es. (2 ptos.)

2. Sean las matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_4 & d_5 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} d_6 & d_7 \\ d_8 & d_9 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}),$$

representadas en la base canónica ordenada  $(\hat{i}, \hat{j})$  de  $\mathbb{R}^2$ . Da las reglas de correspondencia de las transformaciones lineales  $T_1$  y  $T_2$  representadas por estas matrices, así como de la transformación  $T_2 \circ T_1$ . Luego, da la representación matricial de  $T_2 \circ T_1$  en esta misma base canónica ordenada, ¿a qué producto de las matrices  $M_1$  y  $M_2$  es igual? (2 ptos.)

3. Modifica las matrices del ejercicio anterior mediante operaciones elementales y redefínelas como  $M'_1, M'_2$  de tal forma que  $\det(M'_1) = d_3$  y  $\det(M'_2) = -\frac{1}{d_3}$ . Dibuja al cuadrado unitario formado por los vectores  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ , así como el paralelogramo formado por los pares de vectores  $M'_1\hat{i}$  y  $M'_1\hat{j}$ ;  $M'_2\hat{i}$  y  $M'_2\hat{j}$ ;  $M'_1M'_2\hat{i}$  y  $M'_1M'_2\hat{j}$ ;  $M'_2M'_1\hat{i}$  y  $M'_2M'_1\hat{j}$ . ¿Cuáles de estas matrices (transformaciones lineales) son invertibles? Argumenta a partir de los dibujos. (2 ptos.)

4. Calcula las matrices inversas  $(M'_1)^{-1}$  y  $(M'_2)^{-1}$ . ¿Qué producto de estas matrices es la inversa (por ambos lados) de la matriz  $(M'_1M'_2)$ ? Arguméntalo algebraicamente y/o geoméricamente (con una de las dos es suficiente), y demuéstalo mediante cálculos. (2 ptos.)

5. Sea  $([d_2 \ d_1]^T, [d_9 \ -d_8]^T)$  un base ordenada de  $\mathbb{R}^2$ . Calcula la matriz de cambio de base  $P$  entre las bases  $(\hat{i}, \hat{j})$  y  $([d_2 \ d_1]^T, [d_9 \ -d_8]^T)$ , así como  $P^{-1}$ . Calcula  $\det(P^{-1}M_1P)$  y  $\det(P^{-1}M_2P)$  y compáralos con  $\det(M_1)$  y  $\det(M_2)$ , respectivamente. ¿Qué observas y cómo lo explicas? (2 ptos.)

**Extra:** Calcula el determinante, traza, inversa y determinante de la inversa de las siguientes matrices e interprétalas geoméricamente. Usa el método que se indica para uno de los valores y resuelve lo demás manualmente (i.e., sin calculadora) con el método de tu preferencia. (0.3 ptos. extra por inciso\*)

**A)** La siguiente matriz de  $3 \times 3$  usando el método de Sarrus para calcular su determinante (el de la inversa, calcúlalo como gustes).

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -0.5 & 0 \\ 10 & 0 & -7 \\ 0 & -0.5 & -7 \end{pmatrix}$$

**B)** La siguiente matriz de  $2 \times 2$  usando el método de Gauss para calcular la inversa.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-\pi}{4} & \frac{-4}{\pi} \\ \frac{-\pi}{4} & \frac{4}{\pi} \end{pmatrix}$$

**C)** La siguiente matriz de  $4 \times 4$  por método de Laplace - también referido como método de Leibniz - para su determinante (el de la inversa, calcúlalo como gustes). ¡Haz lo posible por interpretar la transformación en el híperespacio cuatridimensional!

$$C = \begin{pmatrix} 100 & 0.1 & 10 & -0.01 \\ 1 & 10 & -0.5 & 0 \\ -1 & 10 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -0.5 & -7 \end{pmatrix}$$