# El problema de la diagonalización

**Obs.** Una matriz cuadrada diagonal es más fácil de interpretar (geométricamente) y de aplicar (algebráicamente) que una no diagonal.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\text{Comparar } \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 19 & 48 & -48 \\ 28 & 29 & -42 \\ 32 & 48 & -61 \end{pmatrix} \text{ con } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [T]_\gamma .$$

Como sabemos, cualquier representación matricial $A \in M_{n\times n}(K)$ en una base ordenada $\beta$ específica representa a un operador $T: V \to V$ donde $\dim(V) = n$. Si existe una base ordenada $\gamma$ de $V$ tal que $[T]_\gamma$ sea una matriz diagonal, decimos que $T$ es un operador **diagonalizable.**

El problema que guiará este módulo será el de determinar **cuándo un operador es diagonalizable.**

Supongamos que $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $\gamma = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$ es una base ordenada de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recordando que $[\vec{g}_1]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[\vec{g}_2]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $[\vec{g}_3]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, y que $[T]_\gamma = \left( [T(\vec{g}_1)]_\gamma \; [T(\vec{g}_2)]_\gamma \; [T(\vec{g}_3)]_\gamma \right)$, entonces tenemos que

$$[T(\vec{g}_1)]_\gamma = -1\,[\vec{g}_1]_\gamma, \quad [T(\vec{g}_2)]_\gamma = -1\,[\vec{g}_2]_\gamma \quad \text{y} \quad [T(\vec{g}_3)]_\gamma = 1\,[\vec{g}_3]_\gamma .$$

Como sabemos, por isomorfismos, esto implica que

$$T(\vec{g}_1) = -1\,\vec{g}_1, \quad T(\vec{g}_2) = -1\,\vec{g}_2 \quad \text{y} \quad T(\vec{g}_3) = 1\,\vec{g}_3 .$$

Generalizando el ejemplo anterior, sea $V$ un espacio vectorial de dimensión $n$, $T: V \to V$ un operador lineal y supongamos que existe una base ordenada $\gamma = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n)$ de $V$ tal que

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K),$$

entonces $T(\vec{g}_i) = d_i \vec{g}_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Conversamente, si podemos encontrar una base ordenada $\gamma = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n)$ de $V$ tal que $T(\vec{g}_i) = \lambda_i \vec{g}_i$ con $\lambda_i \in K$ $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces tendremos que

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

es decir, habremos demostrado que $T$ es diagonalizable.

Claramente, los vectores $\vec{v}$ y escalares $\lambda$ tales que $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ son importantes para determinar si $T$ es diagonalizable. Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, decimos que $\vec{v}$ es un **eigenvector** (o **vector propio**) de $T$ y que $\lambda$ es el **eigenvalor** (o **valor propio**) de $T$ correspondiente al eigenvector $\vec{v}$.

P1

P2

Si $\beta$ es una base ordenada tal que $[T]_\beta [\vec{v}]_\beta = \lambda [\vec{v}]_\beta$ para alguna $\lambda \in K$ con $[\vec{v}]_\beta \neq [\vec{0}_V]_\beta$, decimos que $[\vec{v}]_\beta$ es un **eigenvector** de la matriz $[T]_\beta$ y que $\lambda$ es un **eigenvalor** de $[T]_\beta$ correspondiente al eigenvector $[\vec{v}]_\beta$.

P3

Naturalmente, ahora nos surge la pregunta, ¿cómo encontramos a los eigenvectores y eigenvalores de un operador $T$ arbitrario? Para esto, nos ayudan las representaciones (i.e., los isomorfismos). Partimos de la ecuación

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Representamos en una base ordenada $\beta$ de $V$

$$[T(\vec{v})]_\beta = \lambda [\vec{v}]_\beta.$$

Reescribimos ambos lados de la ecuación como el producto de un vector por una matriz

$$[T]_\beta [\vec{v}]_\beta = (\lambda I_{n\times n}) [\vec{v}]_\beta.$$

$$-\lambda I_{n\times n} [\vec{v}]_\beta$$

Despejamos para obtener

$$([T]_\beta - \lambda I_{n\times n}) [\vec{v}]_\beta = [\vec{0}_V]_\beta. \qquad (*)$$

Como $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $[\vec{v}]_\beta \neq [\vec{0}_V]_\beta$, y la ecuación anterior implica que la matriz $([T]_\beta - \lambda I_{n\times n}) : K^n \to K^n$ no es inyectiva; por ende, tampoco es biyectiva, de donde se sigue que

$$\det([T]_\beta - \lambda I_{n\times n}) = 0.$$

Como $\lambda$ es una incógnita en esta ecuación, por la naturaleza del determinante, $\det([T]_\beta - \lambda I_{n\times n})$ es un polinomio en $\lambda$ y sus raíces son los eigenvalores de $[T]_\beta$ y, por ende, de $T$. Dicho polinomio es independiente de la base ordenada $\beta$ de $V$ con la que representamos a $T$ (ejercicio) y es conocido como el **polinomio característico** de $T$.

$$\boxed{\text{P.D.} \quad \det([T]_\beta - \lambda I_{n\times n}) = \det([T]_\gamma - \lambda I_{n\times n}) \quad \forall \text{ b.o. } \beta, \gamma \text{ de } V}$$

El conjunto de eigenvalores $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K\}$ de un operador lineal $T$ se conoce como el **espectro** de $T$. Una vez que conocemos el espectro $\Lambda$ de $T$, podemos sustituir la variable $\lambda$ en $(*)$ con $\lambda_i \in \Lambda$ y solucionar el sistema de ecuaciones para $[\vec{v}]_\beta$ para encontrar los eigenvectores de $T$ con eigenvalor $\lambda_i$.

Obs. Si $T: V \to V$ es un operador lineal y $\vec{v} \in V$ es tal que $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ con $\lambda \in K$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $T(c\vec{v}) = cT(\vec{v}) = c(\lambda\vec{v}) = (c\lambda)\vec{v} = (\lambda c)\vec{v} = \lambda(c\vec{v})$ $\forall c \in K$. Por ende, cualquier reescalamiento no trivial de $\vec{v}$ también es un eigenvector de $T$ con el mismo eigenvalor que $\vec{v}$.

Similarmente, podemos dar una definición de eigenvector, eigenvalor y polinomio característico de una matriz $A \in M_{n\times n}(K)$, sin pensarla como la representación matricial de algún operador lineal en un espacio de dimensión $n$.

Ejemplo: Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1$ y $T(\vec{e}_2) = -15\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$.

$$T(c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2) = c_1(2\vec{e}_1) + c_2(-15\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2) = (2c_1 - 15c_2)\vec{e}_1 - 3c_2\vec{e}_2.$$

$\eta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$[T]_\eta = \left( [T(\vec{e}_1)]_\eta \; [T(\vec{e}_2)]_\eta \right) = \begin{pmatrix} 2 & -15 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. No es claro cómo actúa $T$ en $\mathbb{R}^2$.

Calculemos los eigenvalores de $T$: $\det([T]_\eta - \lambda I_{n\times n}) = 0 \Rightarrow$

$$\det\left( \begin{pmatrix} 2 & -15 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -15 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda) - \cancel{(-15)(0)}^{0} = (2-\lambda)(-3-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$$

$\Rightarrow \Lambda = \{2, -3\}$. Ahora, calculemos los eigenvectores $[\vec{g}_1]_\eta = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ y $[\vec{g}_2]_\eta = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

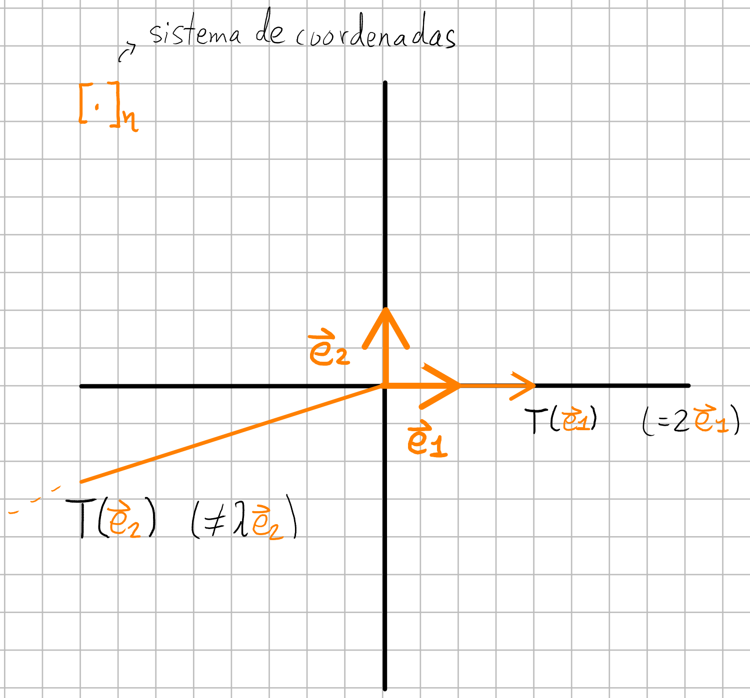
$\lambda_1 = 2$

$\begin{pmatrix} 0 & -15 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -15u_2 = 0 \\ -5u_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow u_2 = 0,\ u_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Sea $u_1 = 1 \Rightarrow [\vec{g}_1]_\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $(\Rightarrow \vec{g}_1 = \vec{e}_1)$

$\lambda_2 = -3$

$\begin{pmatrix} 5 & -15 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 5v_1 - 15v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = 3v_2$ $v_1, v_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Sea $v_2 = 1 \Rightarrow [\vec{g}_2]_\eta = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. $(\Rightarrow \vec{g}_2 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$

P.D. Si $\gamma = (\vec{g}_1, \vec{g}_2)$, entonces $[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.



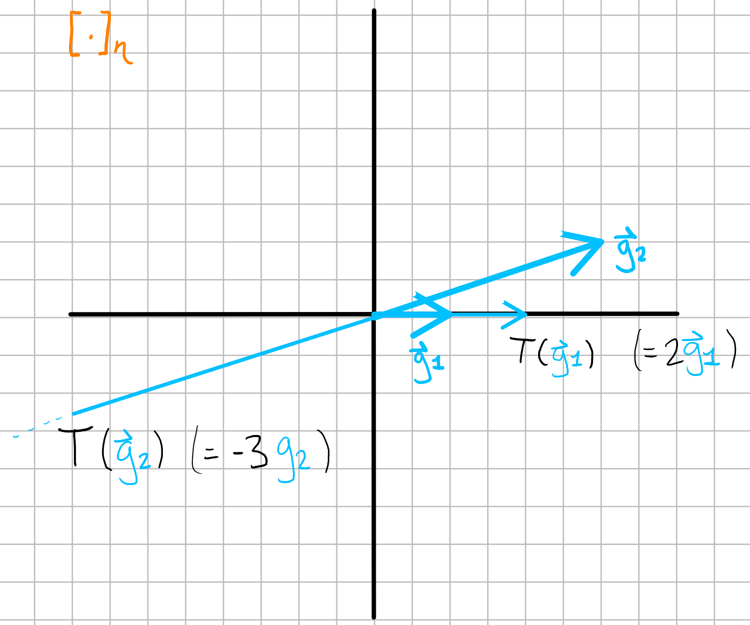

$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineal

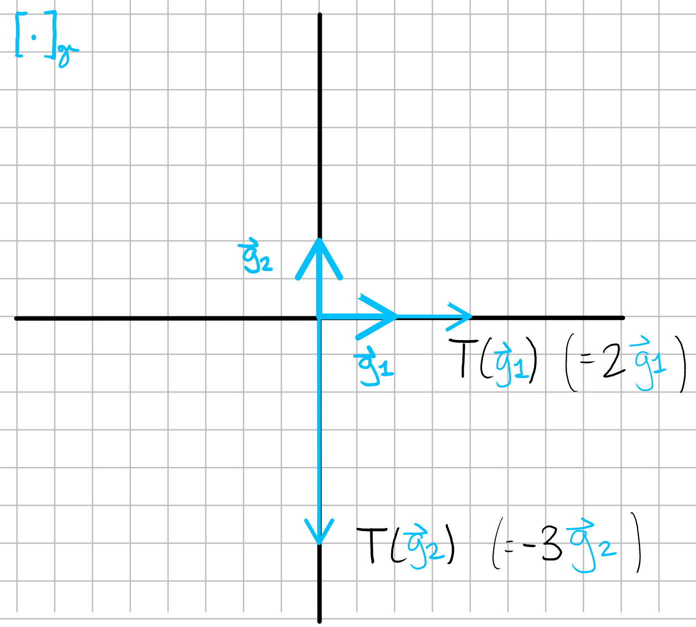
$T(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1$

$T(\vec{e}_2) = -15\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$

$\eta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$\gamma = (\vec{e}_1, 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$




¿Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ es un vector arbitrario (de tu elección), ¿cómo se verían $\vec{v}$ y $T(\vec{v})$ gráficamente en estos tres planos?