Álgebra Lineal
Grupo 3070, 2021-II
Examen parcial 1
(tarea examen)

"*Sorprenderse, extrañarse, es comenzar a entender.*"

—José Ortega y Gasset,
filósofo español

1. Sea $\vec{v}$ un vector no nulo del espacio vectorial complejo $\mathbb{C}$. ¿Cómo puedes interpretar geométricamente en el plano complejo el producto del vector $\vec{v}$ por el escalar $\frac{1}{i}$? Argumenta y da un ejemplo concreto.

2. Sea V un espacio vectorial con subespacios W_1 y W_2. Recordemos que V es una *suma directa* de W_1 y W_2 (denotado como $V = W_1 \oplus W_2$) si $V = W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$. Demuestra que $V = W_1 \oplus W_2$ si, y sólo si, todo vector $\vec{v} \in V$ puede ser expresado de manera única como $\vec{v} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$, con $\vec{w}_i \in W_i$ para $i \in \{1, 2\}$. ¿Cómo generalizarías este resultado para un número finito n de subespacios (i.e., $V = \oplus_{i=1}^{n} W_i$)? Escribe el enunciado general sin demostrarlo.

3. Demuestra o da un contraejemplo de la siguiente afirmación: un conjunto de vectores L es linealmente independiente si, y sólo si, cualquier subconjunto finito de L es linealmente independiente.

4. Sea (V, K) un espacio vectorial con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$. Demuestra que todo subconjunto ortogonal finito de V es linealmente independiente si, y sólo si, no contiene al vector nulo.

5. Sea $P^2([-1, 1])$ el espacio vectorial real de todos los polinomios reales de grado 2 con dominio en $[-1, 1]$. Demuestra que $\langle \cdot, \cdot \rangle : P^2([-1, 1]) \times P^2([-1, 1]) \to \mathbb{R}$, dado por

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x) \; dx$$

es un producto escalar positivo definido. Luego, obten una base para este espacio vectorial. Finalmente, expresa a un vector arbitrario $v \in P^2([-1, 1])$ con regla de correspondencia $v(x) = ax^2 + bx + c$ como combinación lineal de los vectores que hayas obtenido (i.e., encuentra los coeficientes).

6. Sea

$$I := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \; dx \text{ existe} \right\}.$$

Demuestra que I es un espacio vectorial real[1].

7. Sea

$$R^1(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \; dx < \infty \right\}.$$

Demuestra que $R^1(\mathbb{R})$ es un subespacio vectorial *normado* de I, con norma[2] $|| \cdot ||_1$ dada por

$$||f||_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \; dx \quad \text{para toda } f \in R^1(\mathbb{R}).$$

[1] Recuerda las propiedades lineales de la integral vistas en tu curso de cálculo integral de una variable.
[2] Recuerda las propiedades del valor absoluto vistas en tu curso de cálculo integral de una variable.

8. Sean

$$R^2(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

y

$$||f||_2 := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{para toda} \quad f \in R^2(\mathbb{R}).$$

Utilizando la desigualdad[3]

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

válida para todo $a, b \geq 0$, demuestra que para toda $f, g \in R^2(\mathbb{R})$ tenemos que[4]

$$||fg||_1 \leq ||f||_2 \; ||g||_2 \tag{1}$$

y que, en particular, $fg \in R^1(\mathbb{R})$. Luego, utiliza la desigualdad (1) para demostrar que, para toda $f, g \in R^2(\mathbb{R})$,

$$||f + g||_2 \leq ||f||_2 + ||g||_2. \tag{2}$$

Finalmente, utiliza la desigualdad (2)[5] para demostrar que $R^2(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial normado con norma $|| \cdot ||_2$, la cual es inducida por el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $R^2(\mathbb{R})$, dado por

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) \, dx \quad \text{para toda } f, g \in R^2(\mathbb{R}).$$

Nota: Es posible generalizar los últimos tres ejercicios para funciones *complejas* de varias variables reales para demostrar que, para toda $n \in \mathbb{Z}^+$, el conjunto

$$L^2(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \;\middle|\; \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 \, d\vec{x} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

—donde $\int_{\mathbb{R}^n} f \; d\vec{x}$ denota un tipo de integral en $\mathbb{R}^n$ más general que la de Riemann llamada *integral de Lebesgue*— forma un espacio vectorial complejo *normado* con norma $|| \cdot ||_2$, dada por

$$||f||_2 := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 \, d\vec{x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{para toda} \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Adicionalmente, se puede demostrar que la norma $|| \cdot ||_2$ es inducida por el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f\bar{g} \, d\vec{x} \quad \text{para toda} \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

y, en particular, que $L^2(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial con producto escalar.

Más aún, es posible demostrar que estos espacios vectoriales $L^2(\mathbb{R}^n)$ pertenecen a un tipo de espacios de dimensión infinita para los cuales existen bases ortogonales y ortonormales. Esto rebasa los contenidos de nuestro curso, pero verán cosas relacionadas en su curso de Matemáticas Avanzadas. Este tipo de espacios vectoriales con producto escalar **son de suma importancia en Mecánica Cuántica**.

[3]Este es un caso particular de la llamada *Desigualdad de Young*, y se sigue de que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Pueden utilizarla sin demostrarla; aquí pueden encontrar una demostración sencilla para este caso. Una versión un poco más general nos dice que, si $p, q > 1$ son tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ para todo $a, b \geq 0$. Con esta desigualdad, definiendo a $R^p(\mathbb{R})$ y $R^q(\mathbb{R})$ de la manera obvia, se puede demostrar que, si $f \in R^p(\mathbb{R})$ y $g \in R^q(\mathbb{R})$, entonces $||fg||_1 \leq ||f||_p \; ||g||_q$; en particular, se sigue que $fg \in R^1(\mathbb{R})$.

[4]Este es un caso particular de la Desigualdad de Hölder.

[5]Esta desigualdad es un caso particular de la Desigualdad de Minkowsky.