Álgebra Lineal
Grupo 3058, 2020-IV
Reposición del examen parcial 2 (tarea examen)
Fecha de entrega: jueves 17 de septiembre, 12:00 hrs.

"*Taking responsibility for education* is *education.*
Taking responsibility for learning is *learning.*"

—Salman Khan,
fundador de Khan Academy

Número de cuenta:

Sea d_i el i-ésimo dígito de tu número de cuenta. Sean los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ representados como $\mathbf{u} \doteq \begin{bmatrix} d_9 & d_6 & d_3 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v} \doteq \begin{bmatrix} -d_7 & -d_4 & d_1 \end{bmatrix}^T$ en la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^3$.

1. Modifica a uno de los dos vectores de tal forma que el conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ sea ortogonal. Demuestra que $\langle\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}\rangle$ es isomorfo a $\mathbb{R}^2$ dando la transformación lineal apropiada, así como su inversa, demostrando que ambas son lineales y que son inversas entre sí. (2 ptos.)

2. Encuentra una base ordenada β de $\mathbb{R}^3$ en la cual las representaciones de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son 3-tuplas con sólo dos entradas no nulas. Conviértela en una base ortonormal ordenada β'. Luego, encuentra las matrices de cambio de base entre β y β'. (2 ptos.)

3. Modifica las transformaciones lineales que obtuviste en el primer ejercicio de tal forma que tanto el dominio de la primera como el contradominio de la segunda sea $\mathbb{R}^3$, pero que sigan estableciendo un isomorfismo entre $\langle\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}\rangle$ y $\mathbb{R}^2$. Representa ambas transformaciones en forma matricial de dos formas diferentes: primero, utilizando la base ordenada β que obtuviste al principio del segundo ejercicio y, después, la base ortonormal ordenada β' que obtuviste al final del mismo ejercicio. (2 ptos.)

4. Sean A_1 y A_1' las representaciones matriciales de la transformación lineal de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que obtuviste en el tercer ejercicio en las bases β y β', respectivamente. Además, sea A_2 la representación matricial en la base β de la transformación inversa que obtuviste en el mismo ejercicio. Calcula la matriz resultante de los productos A_1A_2, A_2A_1, $A_1'A_2$ y A_2A_1'. ¿Cómo interpretas el resultado? (2 ptos.)

5. Sea $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ el conjunto ortogonal que obtuviste al principio del primer ejercicio. Demuestra que $\mathcal{L}(\langle\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}\rangle, \langle\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}\rangle)$ es isomorfo a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. ¿Se cumple lo mismo para cualesquiera dos vectores arbitrarios $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$? Argumenta tu respuesta. (2 ptos.)