Álgebra Lineal
Grupo 3044, 2020-II
Reposición del examen parcial 1 (tarea examen)
Fecha de entrega: viernes 12 de junio, 20:00 hrs.

"Nunca he permitido que la escuela interfiera con mi educación."

—Mark Twain,
escritor estadounidense

1. Sea L^2 el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, dx < \infty.$$

Demuestra que $(L^2, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial. (2 ptos.)

2. Siguiendo del ejercicio anterior, define una operación $(\cdot,\cdot) : L^2 \times L^2 \to \mathbb{R}$ como

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\, dx.$$

Demuestra que es un producto escalar en L^2, y que a partir de él se puede definir una norma que cumple todas las propiedades necesarias. Si las funciones de L^2 tuvieran imágenes en $\mathbb{C}$ en vez de $\mathbb{R}$, ¿cómo podrías modificar la operación $(\cdot,\cdot)$ para que siga teniendo todas las propiedades del producto escalar? (2 ptos.)

3. Demuestra que un conjunto de vectores L es linealmente independiente si y sólo si cualquier subconjunto finito de L es linealmente independiente. (2 ptos.)

4. Sea R_α el conjunto de todas las matrices de $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ con traza igual a α, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$. ¿Cuánto debe valer α para que R_α sea un subespacio vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{C})$? Demuéstralo. (2 ptos.)

5. Sea V un espacio vectorial con producto interior. Demuestra que cualquier conjunto finito de vectores de V ortogonales entre sí es linealmente independiente. (2 ptos.)