**VINS学习笔记**

**1.最小二乘问题的求解**

**1.1、最速下降法、牛顿法**

最小二乘问题的**基本定义**为找到一个维变量，使得损失函数取局部最小值：

其中是残差函数，比如测量值与预测值之间的差，且有。局部最小值对任意有。

假设损失函数是平滑且可导的，可以得到损失函数的二阶泰勒展开为：

其中和分别为损失函数对变量的一阶导和二阶导矩阵。

由上述的损失函数二阶泰勒展开的形式，忽略高阶项后可将该损失函数看作二次函数，因此可以得到损失函数以下性质

1. 如果在点处有导数为0，则称这个点为稳定点。
2. 在点处对应的Hessian为H：若H为正定矩阵，则它的特征值都大于0，则在处有为局部最小值；若H为负定矩阵，则它的特征值都小于0，则在处为局部最大值；若H为不定矩阵，则它的特征值大于0也有小于0的，则处为鞍点。

最小二乘问题在问题为线性问题时，可以直接通过一步矩阵运算求解变量；若问题为非线性问题时，需要将其使用泰勒展开展开为线性问题之后再进行求解，而泰勒展开的过程存在误差，因此需要经过反复迭代的过程求解变量。迭代法的初衷是寻找一个下降方向使得损失函数随的迭代逐渐减小，知道收敛到。我们通过两个步骤确定迭代的总体过程：

1. 寻找下降方向单位向量；
2. 确定下降步长；

假设足够小，我们可以对损失函数进行一阶泰勒展开只需要寻找下降方向满足，通过line Search方法找到下降的步长：。

以下，将分别讨论最速下降法和牛顿法，作为上述迭代法的展开。

**最速下降法**适用于迭代的开始阶段，从下降的条件可以知道：，表示下降方向和梯度方向的夹角。当时，有，即梯度的负方向为最速下降方向。该方法由于仅仅控制迭代方向而为控制下降步长，导致迭代会在最优质附近产生震荡现象（ZigZag），从而使得收敛变慢。

**牛顿法**适用于最优值附近的优化过程，在局部最优点附近，如果有是最优解，则损失函数对的导数为0，则对损失函数的二阶泰勒展开求导可得：

得到。但是这种方法需要计算损失函数的二阶导，计算较为复杂，效率较低。

* 1. **LM算法的具体实现**

LM方法在高斯牛顿法的基础上进行实现，因此，我们先对高斯牛顿法进行介绍：高斯牛顿法是对牛顿法的改进，牛顿法中由于需要计算损失函数对待优化量的二阶导，导致迭代的效率大大降低，高斯牛顿法通过使用一阶的雅可比矩阵去近似二阶导，提高了迭代的效率，其主要的公式如下，对于残差，其一阶泰勒展开可写为：

注意这里的与上面的定义不同，这里指的是残差函数的一阶导，将上式带入损失函数有：

这样，损失函数就近似成了一个二次函数，并且如果雅可比矩阵是满秩的，则正定，此时损失函数具有最小值，另外，也可以得到、。令损失函数一阶导为0，得到，这就是通常论文中得到迭代方程。

由于高斯牛顿法中，并不能保证是正定矩阵，事实上，该矩阵常常是半正定形式。因此，我们在中添加阻尼因子，使得必定满足正定形式。我们把添加了阻尼因子的高斯牛顿法叫做LM方法，得到。

总结以上内容，可以得到阻尼因子的作用如下：

1. 保证正定，迭代朝着下降方向进行；
2. 非常大，则，接近最速下降法；
3. 比较小，则，接近高斯牛顿法。

阻尼因子是LM方法中的关键，因此，在LM算法之初，我们应该设定一个较为合适的阻尼因子，并且选取一种较为合适的阻尼因子更新策略，保证LM算法较快收敛到变量最优解。阻尼因子是为添加到中的量，因此阻尼因子的大小应该是相对于而言。半正定的信息矩阵特征值和对应的特征向量为。对做特征值分解得到：可得：

所以，一个简单的，通常按需设定

阻尼因子如何随LM算法迭代，以下我们通过定性以及定量分析两种过程详细说明。**定性分析**：若使得损失函数增大，此时应该增大减小迭代步长，加快下降速度并且拒绝本次迭代过程；若使得损失函数减小，此时应该减小增大步长，加快收敛速度并且接受此次迭代。**定量分析：**阻尼因子的更新策略是通过比例因子来确定的：

=

首先比例因子的分母始终大于0，若此时，则上升，应该增大减小步长，以最快的速度使得损失函数下降；若且比较大，此时应该减小，让LM算法接近高斯牛顿法，使得系统更快收敛；反之如果是比较小的正数，依然需要增大阻尼，缩小迭代步长使得损失函数尽可能多地下降。

实际运用中，我们常常使用Niesen策略对阻尼因子进行更新，这种方法被运用于g2o和ceres中。具体如下：

1. 若，
2. 若，
   1. **鲁棒核函数的实现**

当最小二乘函数中遇到outlier时，若不对outlier进行处理，将导致较大偏差。常见outlier处理方法有RANSAC以及鲁棒核函数方法。由于RANSAC方法与非线性优化均需要采用迭代过程，效率不高，因此，此处我们介绍鲁棒核函数的方法对outlier进行处理。

鲁棒核函数直接作用于残差上，最小二乘函数变成了如下形式：

将平方项记作，则鲁棒核函数进行二阶泰勒展开有：

上述函数中的计算稍微复杂一些：

上述公式代入到鲁棒核函数泰勒展开式中有：

对上式求和后，对变量求导，令其为0，得到：

常用的鲁棒核函数有Cauchy函数和Huber函数，下面以Cauchy鲁棒核函数为例，该核函数形式为：

其中为控制参数。对的一阶导和二阶导为：

核函数控制参数的设定可参考论文“At all costs: A comparison of robust cost functions for camera correspondence outliers IEEE”

**2.VIO残差的构建**

* 1. **视觉重投影误差**

**2.2、IMU重投影误差**

**3.VIO残差雅可比的推导**

* 1. **视觉重投影误差的Jacobian**

**3.2、IMU预积分残差的Jacobian**