למידת מכונה - תרגיל 1

אורי דאבוש

2 בנובמבר 2021

שאלה 1:

יהי $X \subseteq S$ סט דוגמאות ונסמן ב-$R = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ מלבן שחוסם אותו (ידוע שקיים כזה). תהיי $f : X \to \{0,1\}$ פונקציית המטרה,
נסמן $S_i = \{(x, y) \in S | f(x, y) = i\}$ לכל $i \in \{0,1\}$.
נסמן ב-$R' = [a'_1, a'_2] \times [b'_1, b'_2]$ את המלבן שהאלגוריתם A מחזיר. כיוון שזהו מלבן מיושר לצירים והוא הקטן ביותר שחוסם את S, חייב להתקיים:

$$a'_1 = \min_{(x,y)\in S_1} x, a'_2 \max_{(x,y)\in S_1} x, b'_1 = \min_{(x,y)\in S_1} y, b'_2 = \max_{(x,y)\in S_1} y$$

נוכיח עבור a'_1, השאר דומה. ראשית, ברור שמתקיים $a'_1 \leq x$ לכל $(x, y) \in S_1$ (ולכן $a'_1 \leq \min_{(x,y)\in S_1} x$), אחרת היה קיים $(x, y) \in S_1$ שלא במלבן R' בסתירה לכך שהוא חוסם את S. כעת נניח בשלילה ש-$a'_1 < \min_{(x,y)\in S_1} x$, אזי המלבן $\left[\min_{(x,y)\in S_1} x, a'_2\right] \times [b'_1, b'_2]$ חוסם את S (כי הוא מוכל ב-R' שחוסם את S) והוא קטן יותר מ-R' בסתירה לנכונות האלגוריתם A.
לכן $a'_1 = \min_{(x,y)\in S_1} x$.
כעת, כיוון ש-R חוסם את S, מתקיים $a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2$ לכל $(x, y) \in S_1$, ובפרט מתקיים:

$$a_1 \leq a'_1 \leq a'_2 \leq a_2, b_1 \leq b'_1 \leq b'_2 \leq b_2$$

כלומר $R' \subseteq R$. כיוון שכל הנקודות ב-S_0 נמצאות מחוץ ל-R, ניתן להסיק שאין נקודות $(x, y) \in S_0$ ב-R', וידוע ש-R' מכיל את S_1 ולכן הוא נכון לכל S, כלומר הוא אכן ERM.

שאלה 2:

נשים לב שמתקיים

$$\mathop{\mathbb{E}}_{S\sim\mathcal{D}}[L_S(h)] = \mathop{\mathbb{E}}_{S\sim\mathcal{D}}\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} 1_{[h(x_i)=f(x_i)]}\right] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathop{\mathbb{E}}_{S\sim\mathcal{D}}\left[1_{[h(x)=f(x)]}\right]$$

לפי לינאריות התוחלת. כעת כיוון ש-$S \sim \mathcal{D}$ האיברים בה הם מהתפלגות $\mathcal{D}$, ולכן מתקיים $\mathop{\mathbb{E}}_{S\sim\mathcal{D}}\left[1_{[h(x)=f(x)]}\right] = \mathop{\mathbb{P}}_{x\sim\mathcal{D}}[h(x) = f(x)]$, ולכן

$$\mathop{\mathbb{E}}_{S\sim\mathcal{D}}[L_S(h)] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathop{\mathbb{P}}_{x\sim\mathcal{D}}[h(x) = f(x)] = \mathop{\mathbb{P}}_{x\sim\mathcal{D}}[h(x) = f(x)] = L_{\mathcal{D}}(h)$$

כנדרש.