第二十六章 命题逻辑

第3节 命题形式和真值表

内容提要

- 命题形式
- 指派
- 真值表
- 重言式、可满足式、矛盾式

命题形式和真值表

- 上节介绍了将命题表示为符号串。
- 是否每个符号串都是命题呢？

$$p\ q \rightarrow$$

- 什么样的符号串才能表示命题呢？

  如下命题形式定义的符号串表示的才是命题。

命题形式的定义

命题形式是由命题变元和联结词按以下规则组成的符号串:

(1) 任何命题变元都是命题形式;

---此时称为原子命题形式

(2) 如果α是命题形式, 则$(\neg\alpha)$也是命题形式;

(3) 如果α、β是命题形式, 则$(\alpha\vee\beta)$、$(\alpha\wedge\beta)$、$(\alpha\rightarrow\beta)$和$(\alpha\leftrightarrow\beta)$都是命题形式;

(4) 只有有限次地应用(1)—(3)构成的符号串才是命题形式.

命题形式的例子

$(\neg p)$

$(p\wedge(\neg q))$

$(p \vee(\neg p))$

$(p \leftrightarrow(\neg p))$

$(p \wedge(\neg p))$

$((p \wedge p) \rightarrow(\neg(p \vee r)))$

下列符号串是否为命题形式?

（1） $pq \to$

（2） $(p\neg q)$

（3） $(p\wedge(\neg q))$

（4） $p\wedge(\neg q)$

（5） $((\neg q))$

（6） $\neg p$

一些注记

1. 定义6是归纳定义，而不是循环定义。

   (1)是奠基，(2)、(3)是归纳步骤。

2. 如果在(2)和(3)中将括号去掉，结果如何?

   $p \to q \to r$ 与 $\underline{P \to q} \to r$、 $P \to \underline{q \to r}$

3. 如仅去掉(2)和(3)中某类公式的括号呢？例如，仅去掉(2)中括号。

   $(p \wedge \neg q)$ —— $\neg$的优先级高于其它的。

4. 如果规定省略命题形式最外层括号，与2的差别。

约定

- ¬的优先级高于其它的
- 省略命题形式最外层括号

命题形式的简单性质

- 任一个命题形式必为下列形式之一：
  命题变元、$(\neg\alpha)$、$(\alpha\vee\beta)$、$(\alpha\wedge\beta)$、$(\alpha\to\beta)$或$(\alpha\leftrightarrow\beta)$
- 命题形式的BNF (Bacus Normal Form):
  $\alpha ::= p \mid (\neg\alpha) \mid (\alpha\vee\beta) \mid (\alpha\wedge\beta) \mid$
  $(\alpha\to\beta) \mid (\alpha\leftrightarrow\beta)$
- 每个命题形式都是有限符号串。

北京大學

指派

- 命题形式的值由它中命题变元的值完全确定.
- 设α为一个命题形式, α中出现的所有命题变元都在$p_1, p_2, \ldots, p_n$中, 对序列$p_1, p_2, \ldots, p_n$指定的的任一真假值序列$t_1, t_2, \ldots, t_n$称为α的关于$p_1, p_2, \ldots, p_n$的一个指派(asignment), 其中$t_i = 0$或1, $i \in N$, $1 \le i \le n$.

即指派是从$\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$到$\{0, 1\}$的一个函数。

北京大学

成真指派

- 若p_1，p_2，…，p_n的一个指派使α为真，则称此指派为α的一个成真指派
- 若p_1，p_2，…，p_n的一个指派使α为假，则称此指派为α的一个成假指派。
- 由定义可知：
  - $\neg p$关于p的成真指派为0, 成假指派为1.
  - $p\wedge q$关于p、q的成真派为<1, 1>, 成假指派为<1,0>, <0,1>, <0, 0>.
  - $p\vee q$关于p、q的成真指派为<1,1>, <0,1>, <1,0>, 成假指派为<0,0>.
  - 不难给出$p\rightarrow q$、$p\leftrightarrow q$的成真和成假指派.

例5

求$(p\wedge q)\rightarrow(\neg(q\vee r))$的成真和成假指派。

解： 令$(p\wedge q)\rightarrow(\neg(q\vee r))$为$\alpha$。

要使α为假，必须$p\wedge q$为真且$\neg(q\vee r)$为假。

从而$p\wedge q$必须为真，且$q\vee r$也必须为真。

故α的成假指派为(1，1，1)和(1，1，0).

α的成真指派为(0，0，0)、(1，0，0)、(0，1，0)、(0，0，1)、(0，1，1)、(1，0，1)。

定义8 命题形式在所有可能的指派下所取值列成的表称为真值表.

北京大学

$(p\wedge q)\rightarrow(\neg(q\vee r))$的真值表

P	q	r	$(p\wedge q)$	$\neg(q\vee r)$	α
0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0

$p\wedge(\neg p)$、$p\vee(\neg p)$的真值表

解：

P	$p \wedge (\neg p)$	$p \vee (\neg p)$
0	0	1
1	0	1

$(\neg p) \vee q$、$p \to q$的真值表

解：

p	q	$(\neg p) \vee q$	$p \to q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

p→(q→r)、(p→q)→r的真值表

p	q	r	p→(q→r)	(p→q)→r
0	0	0	1	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

命题形式的类型

- 命题形式α称为重言式 (或永真式)，如果α关于其中出现的命题变元的所有指派均为成真指派.
- 命题形式α称为矛盾式 (永假式)，如果α对于其中出现的命题变元的所有指派均为成假指派.
- 一个命题形式α称为可满足式, 如果α对于其中出现的命题变元的某个指派为成真指派.
- 例如： $p\wedge(\neg p)$为矛盾式，$p\vee(\neg p)$为重言式。

  $(\neg p)\vee q$为可满足式。

证明下列各式都是重言式

(1) $p \to (q \to (p \land q))$

证明：

p	q	$p \land q$	$q \to (p \land q)$	$p \to (q \to (p \land q))$
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	1	1	1	1

证明下列各式都是重言式

(2) $((p \leftrightarrow p_1) \wedge (q \leftrightarrow q_1)) \rightarrow ((p \wedge q) \leftrightarrow (p_1 \wedge q_1))$

p	p_1	q	q_1	α
0	1	*	*	1
1	0	*	*	1
*	*	0	1	1
*	*	1	0	1
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

与哑元的无关性

定理 设命题形式α中出现的命题变元都在

$p_1, p_2, \ldots, p_n$中, $p_{n+1}, \ldots, p_{n+m}$是另外m个不在α中出现的命题变元. 对于$p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots, p_{n+m}$的任意两个指派:

$$\langle u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+m}\rangle \text{和}$$

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+m}\rangle,$$

其中： $u_i, v_i = 0$或1 $(1 \le i, j \le n+m)$.

若$u_1 = v_1, \ldots, u_n = v_n$, 则α在这两个指派下的值相同.

作业

- p508 (P100)

  2（1）、（4）

  3（2）、（3）、（6）、（8）、（9）

谢 谢