第二十六章 命题逻辑

第5节 推理形式

内容提要

- 推理形式
- 有效推理形式
- 推理形式是有效的充要条件
- 一些有效推理形式

推理形式

- 前两节介绍了命题的“形式”。
- 本节介绍推理的“形式”。
- 推理是逻辑的研究对象。

什么是推理形式？

- 一组前提，一个结论
- 前提、结论都是命题。
- 若前提为α_1，α_2，…，α_n，结论为β，

  则将这样的推理形式称为

$$\alpha_1，\alpha_2，\ldots，\alpha_n 推出 \beta。$$

北京大学

什么是正确的推理形式?

- 直观上，正确的推理应该保证：如果前提正确，则结论也应该正确。
- 设α_1，α_2，…，α_n, β都是命题形式,称推理“α_1，α_2，…，α_n推出β”是有效的，如果对α_1，α_2，…，α_n, β中出现的命题变元的任一指派, 若α_1，α_2，…，α_n都真, 则β亦
- 否则，称“α_1，α_2，…，α_n推出β”是无效的或不合理的.

北京大學

例8

- $\alpha \to \beta$、 α推出β是有效的。
- $\alpha \vee \beta$、 $\neg\alpha$推出β是有效的

注记

- 推理形式是否有效与前提中命题形式的排列次序无关。即：
- 若“α_1，α_2，…，α_n推出β”是有效的，则对1，2，…，n的任一个排列$i_1, i_2, \ldots, i_n$，“$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_n}$推出β”也是有效的。
- 所以前提是一个集合Γ，而不是一个序列。
- 若“α_1，α_2，…，α_n推出β”是有效的，则记为$\Gamma \models \beta$。

下列推理形式是否有效?

(1) $p \vee q$、$\neg q$、$(p \rightarrow q) \rightarrow r$推出$r$是无效的

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$	r
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1

北京大学

下列推理形式是否有效？

(2) $(\neg p_1)\vee p_2$， $p_1\to(p_3 \wedge p_4)$， $p_4\to p_2$， $p_3\to p_4$推出$p_2 \vee p_4$。

解：目的是看能否找到使前提为真、且结论为假的指派。

- 使$p_2 \vee p_4$为假的指派有（*，0，*，0），
  其中使 $(\neg p_1)\vee p_2$为真的指派有(0，0，*，0)，
  其中使$p_3\to p_4$为真的指派有（0，0，0，0），
- 而（0，0，0，0）使$p_1\to(p_3\wedge p_4)$和$p_4\to p_2$都为真。

从而这个推理是无效的。

下列推理形式是否有效?

(3) $p1\to(p2\to p3)$，$p2$推出$p1\to p3$

解:

- 使$p_1\to p_3$为假的指派有（1，*，0），
  - 其中使p_2为真的指派只有（1，1，0），

而（1，1，0）使$p_1\to(p_2\to p_3)$为假。

故没有使前提为真而结论为假的指派，从而此推理有效。

充要条件

推理形式“α_1，α_2，…，α_n推出β” 有效的充要条件是命题形式$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to \beta$是重言式。

意义：

- 推理形式的有效性与命题形式的永真性可以互相化约。
- 今后将建立带前提的证明系统和重言式证明系统，并证明它们的等价性。

一些有效推理

- 若$\Gamma\cup\{\alpha\}\models\gamma$，且$\Gamma\cup\{\beta\}\models\gamma$，
  则$\Gamma\cup\{\alpha\vee\beta\}\models\gamma$
- 若$\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\models\beta$，且$\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\models\neg\beta$，
  则$\Gamma\models\alpha$。
- …

谢 谢