



单元6.3 无向图的连通性

第二编 图论 第七章 图

7.3 无向图的连通性

7.5 有向图的连通性



北京大學



内容提要

- 连通, 连通分支, 连通分支数
- 二部图 \Leftrightarrow 无奇圈
- 强连通(双向), 单向连通, 弱连通





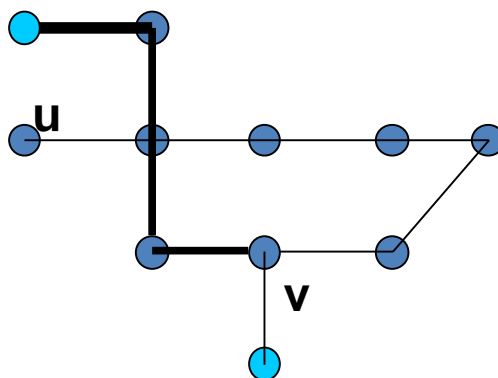
连通

- 无向图 $G = \langle V, E \rangle$, $u \sim v \Leftrightarrow u$ 与 v 之间有通路, 规定 $u \sim u$
- 连通关系 \sim 是等价关系
 - 自反: $u \sim u$
 - 对称: $u \sim v \Rightarrow v \sim u$
 - 传递: $u \sim v \wedge v \sim w \Rightarrow u \sim w$
- 连通分支: $G[V_i]$, $(i=1, \dots, k)$
 - 设 $V/\sim = \{V_i \mid i=1, \dots, k\}$
 - 连通分支数: $p(G) = |V/\sim| = k$
- 连通图: $p(G)=1$; 非连通图(分离图): $p(G)>1$



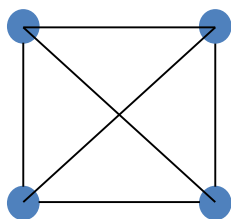
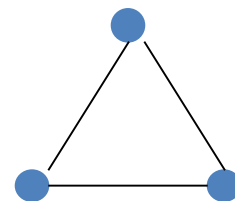
短程线(测地线)

u, v 之间长度最短的通路

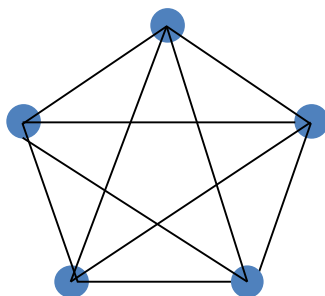


距离、直径

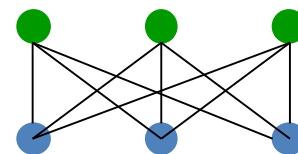
- 距离: $d_G(u,v)$ = u,v 之间短程线的长度(或 ∞)
- 直径: $d(G) = \max\{ d_G(u,v) \mid u,v \in V(G) \}$
- 例: $d(K_n)=1(n \geq 2)$, $d(C_n)=\lfloor n/2 \rfloor$, $d(N_1)=0$, $d(N_n)=\infty (n \geq 2)$



K_4



K_5



$K_{3,3}$





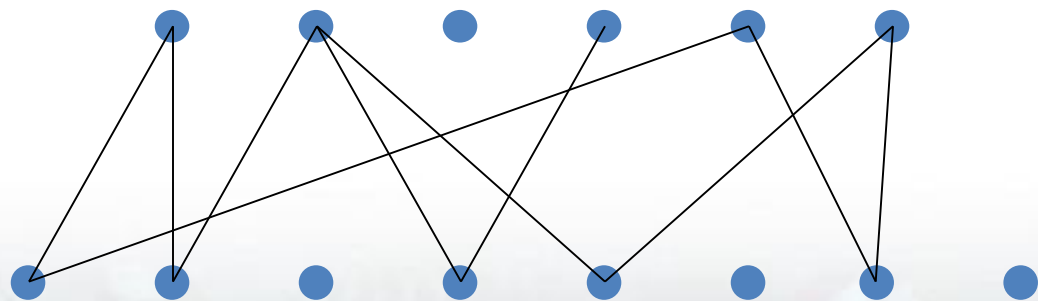
距离函数

- 非负性: $d(u,v) \geq 0$,
 $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
- 对称性: $d(u,v) = d(v,u)$
- Δ 不等式: $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$
- 任何函数只要满足上述三条性质, 就可以当作距离函数使用



定理7.8

- 定理7.8 G 是二部图 $\Leftrightarrow G$ 中无奇圈
- 证明: (\Rightarrow) 设 $G=(V_1, V_2; E)$,
设 $C=v_1v_2\cdots v_{l-1}v_lv_1$ 是 G 中的任意圈, 设 $v_1 \in V_1$, 则
 $v_3, v_5, \dots, v_{l-1} \in V_1$, $v_2, v_4, \dots, v_l \in V_2$,
于是 $l=|C|$ 是偶数, C 是偶圈.



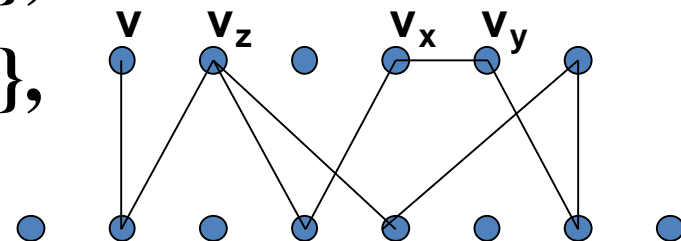
定理7.8

- 证: (\Leftarrow) 设 G 连通(否则对每个连通分支进行讨论), 设 $v \in V(G)$, 令

$$V_1 = \{ u \in V(G) \mid d(u, v) \text{ 为偶数} \},$$

$$V_2 = \{ u \in V(G) \mid d(u, v) \text{ 为奇数} \},$$

则 $V_1 \cup V_2 = V(G)$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.



下证 $E(G) \subseteq V_1 \times V_2$.

(反证)若存在 $e=(v_x, v_y)$, $v_x, v_y \in V_1$, 设 Γ_{vx} 和 Γ_{vy} 是 v 到 v_x 和 v_y 的短程线. $|\Gamma_{vx}|$ 和 $|\Gamma_{vy}|$ 都是偶数. 设 v_z 是 Γ_{vx} 与 Γ_{vy} 的最后一个公共点, 若 $v_z \in V_1$, 则 $|\Gamma_{zx}|$ 和 $|\Gamma_{zy}|$ 都是偶数; 若 $v_z \in V_2$, 则 $|\Gamma_{zx}|$ 和 $|\Gamma_{zy}|$ 都是奇数. 于是 $\Gamma_{zx} \cup (v_x, v_y) \cup \Gamma_{zy}$ 是 G 中奇圈, 矛盾!



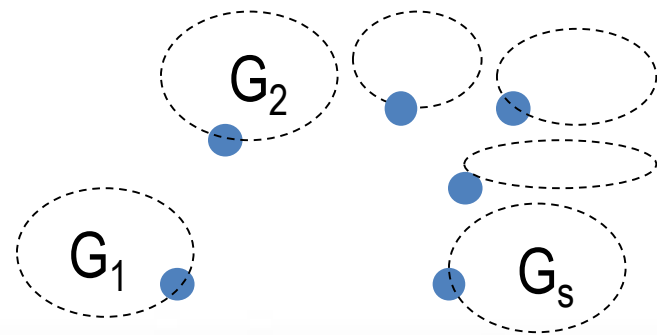
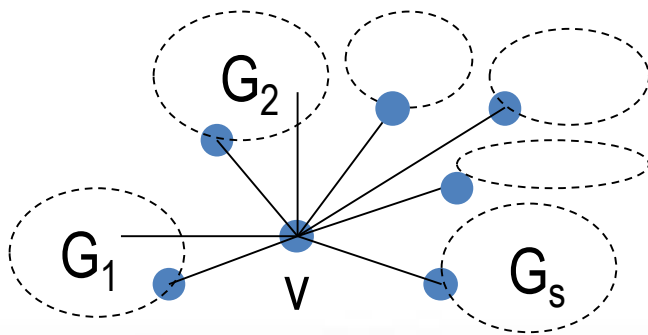
定理7.9

定理7.9 若无向图 G 是连通的, 则 G 的边数 $m \geq n-1$

证明: (对 n 归纳) 不妨设 G 是简单图.

(1) $G=N_1$: $n=1$, $m=0$. •

(2) 设 $n \leq k$ 时命题成立, 下证 $n=k+1$ 时也成立.





定理7.9证明

- $\forall v \in V(G)$, 设 $p(G-v)=s$, 则 $d_G(v) \geq s$.

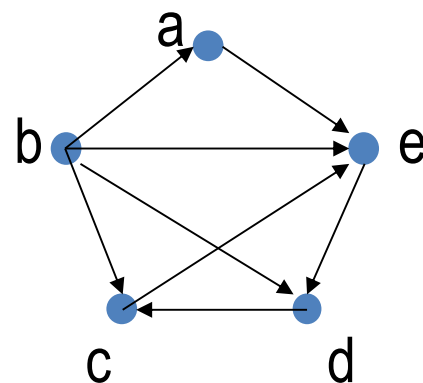
对 $G-v$ 的连通分支 G_1, G_2, \dots, G_s 使用归纳假设, 设 $|V(G_i)| = n_i$, $|E(G_i)| = m_i$, 则

$$\begin{aligned} m &= m_1 + m_2 + \dots + m_s + d_G(v) \\ &\geq (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_s - 1) + s \\ &= n_1 + n_2 + \dots + n_s = n - 1. \quad \# \end{aligned}$$

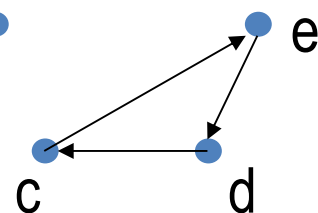


(双向)可达

- 有向图 $D=\langle V,E \rangle$, $u \rightarrow v \Leftrightarrow$ 从 u 到 v 有(有向)通路
 - 规定 $u \rightarrow u$, 可达关系是自反, 传递的
- 有向图 $D=\langle V,E \rangle$, $u \leftrightarrow v \Leftrightarrow u \rightarrow v \wedge v \rightarrow u$
 - 双向可达关系是等价关系
 - 其等价类的导出子图称为强连通分支
- 例: $b \rightarrow a \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow c$, $c \rightarrow e \rightarrow d$, $c \leftrightarrow e \leftrightarrow d$

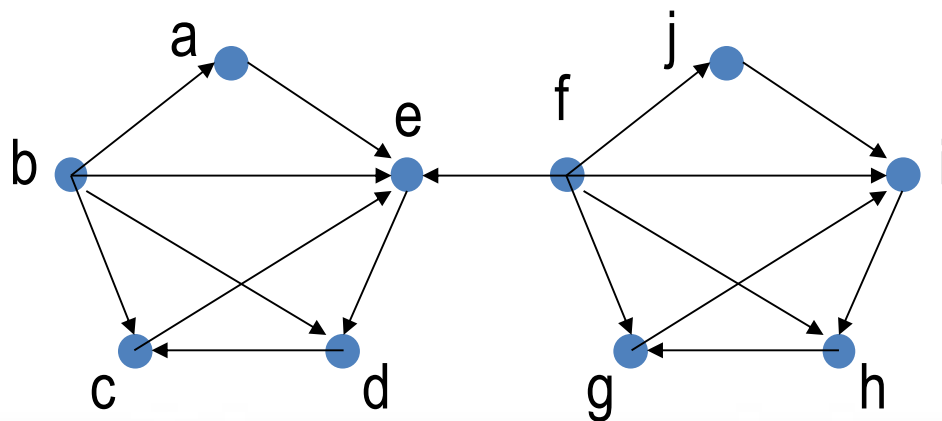


强连通分支: $G[\{a\}]$, $G[\{b\}]$, $G[\{c,e,d\}]$



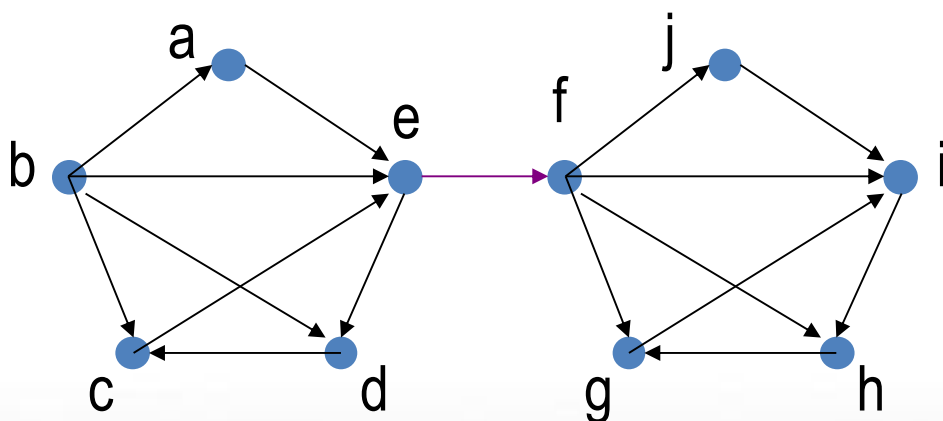
弱连通

- 有向图的基图是连通图



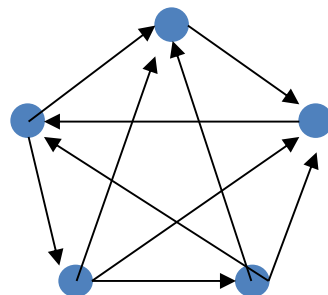
单向连通

- 有向图的任何一对顶点之间至少单向可达

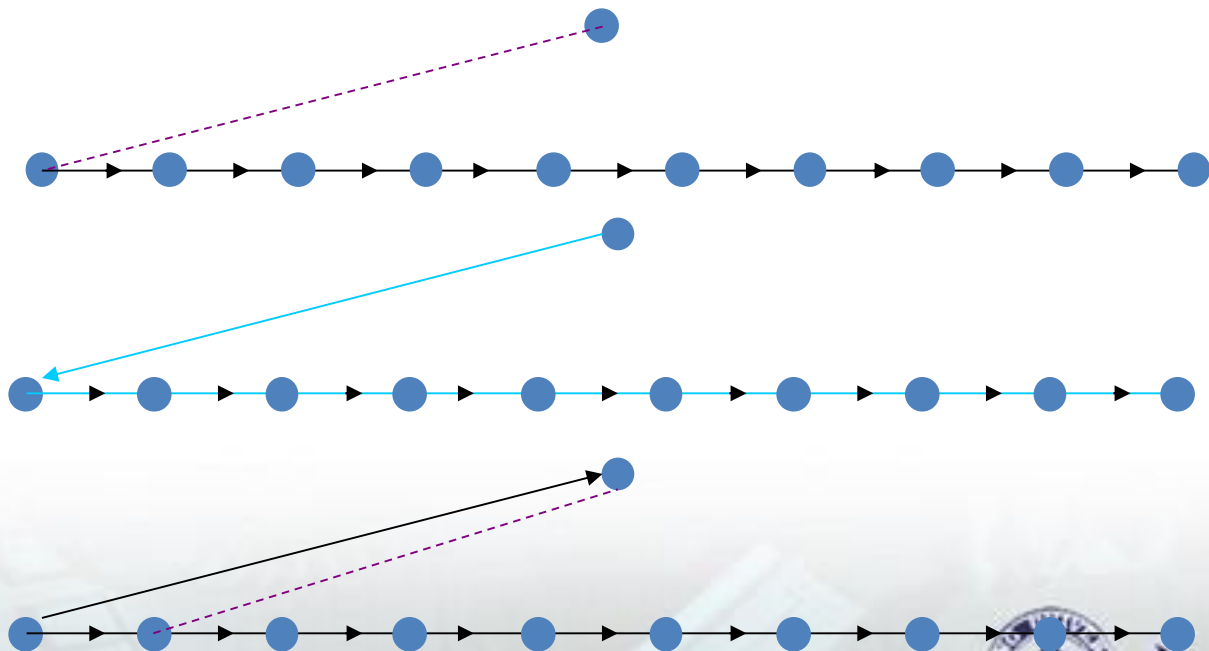




命题



- 竞赛图一定有**初级通路**(路径)过每个顶点恰好一次
- 证明:

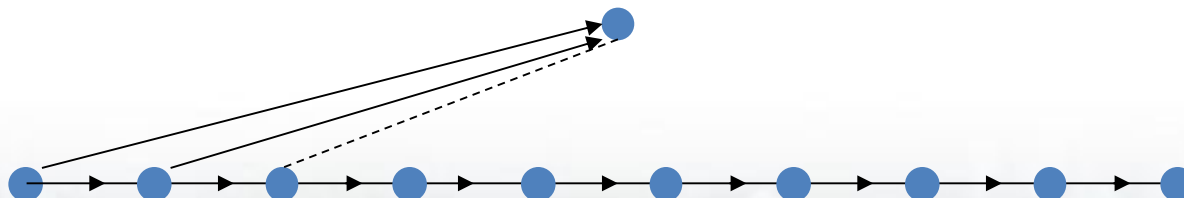
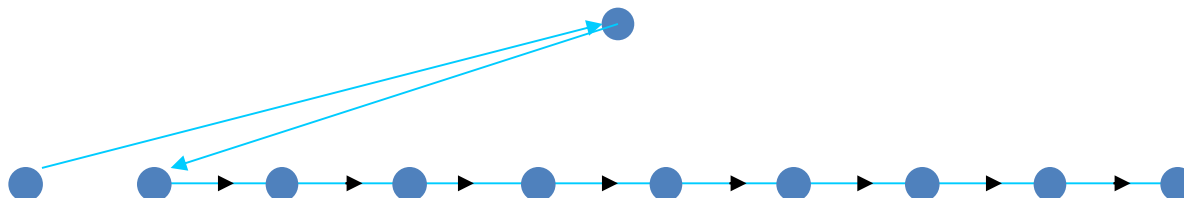
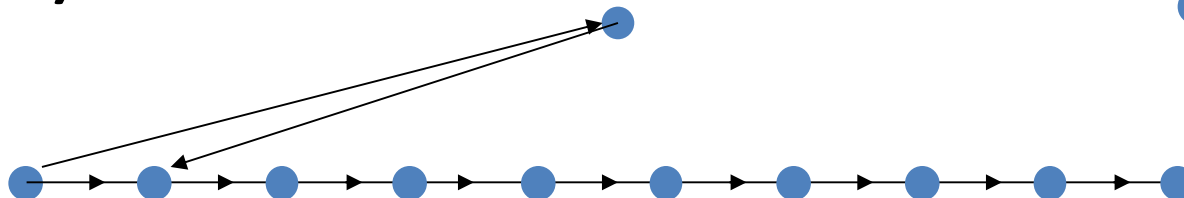
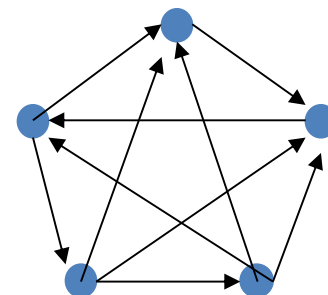


北京大学



命题证明

- 证明(续):

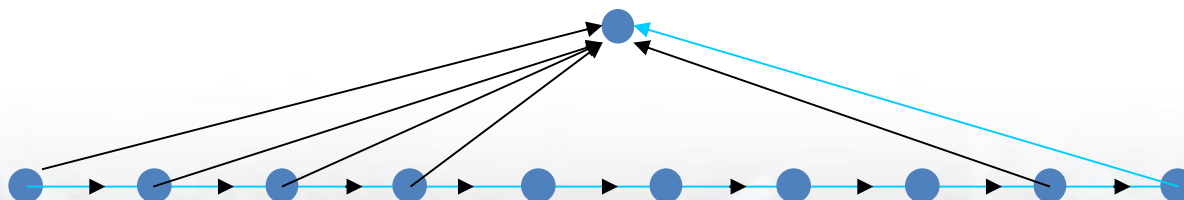
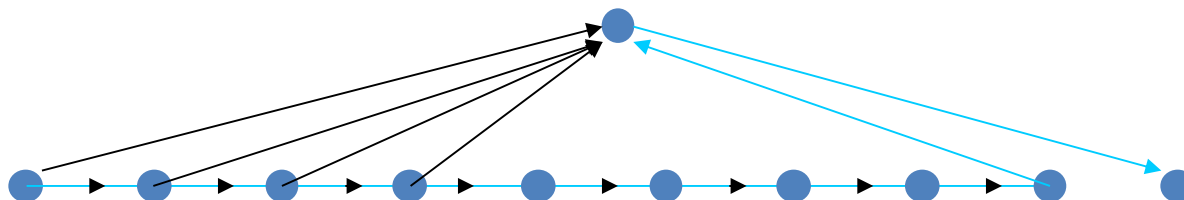
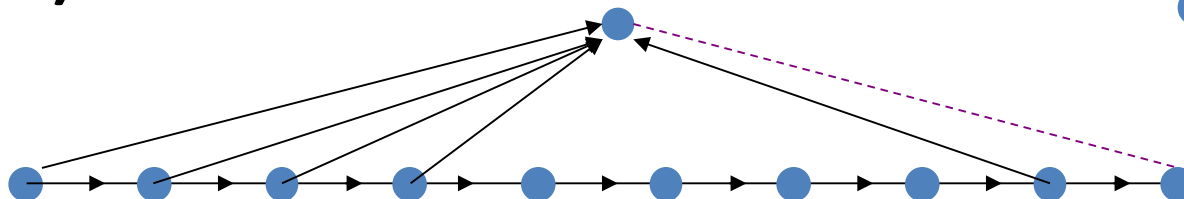
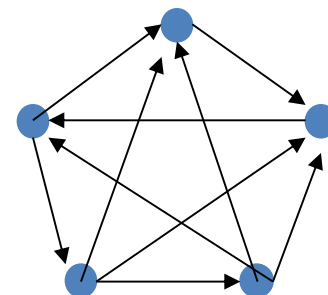


北京大学



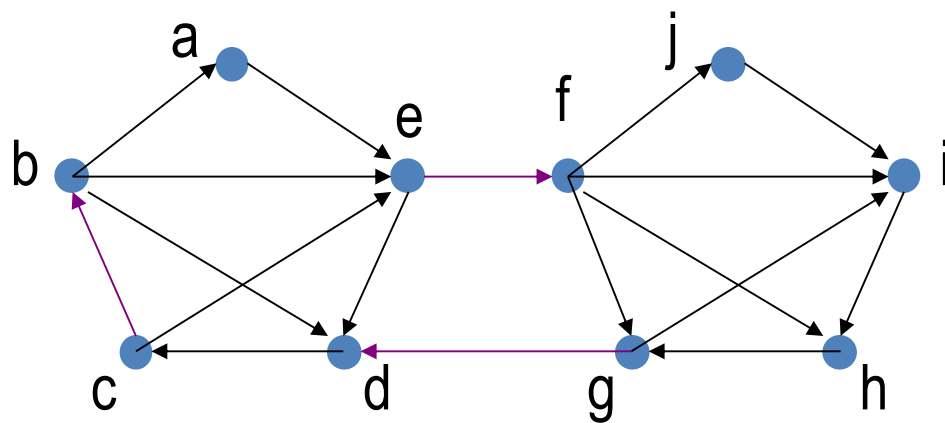
命题证明

- 证明(续):



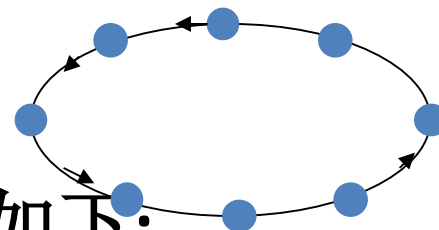
强连通

- 强连通(双向连通): 有向图的任何一对顶点之间都双向可达

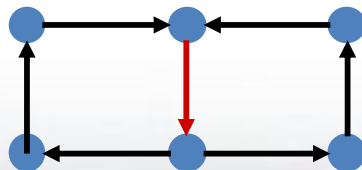


定理7.21

- 有向图 D 强连通 $\Leftrightarrow D$ 中有回路过每个顶点至少一次.



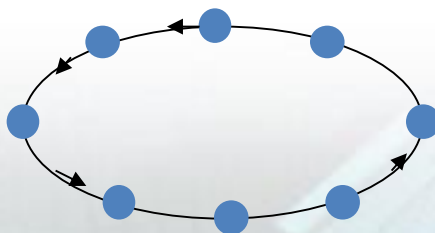
- 说明: 不一定有简单回路, 反例如下:



定理7.21证明

• 证明: (\Leftarrow) 显然

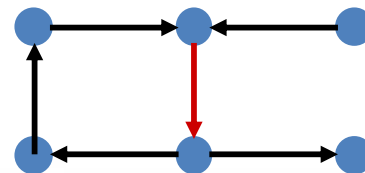
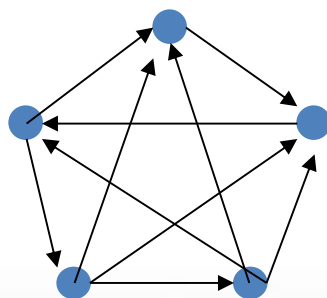
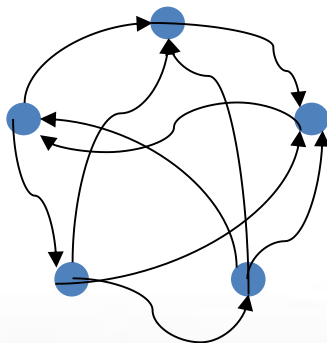
(\Rightarrow) 设 $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 设 $\Gamma_{i,j}$ 是从 v_i 到 v_j 的有向通路, 则 $\Gamma_{1,2} + \Gamma_{2,3} + \dots + \Gamma_{n-1,n} + \Gamma_{n,1}$ 是过每个顶点至少一次的回路. #



北京大学

定理7.22

- 有向图D单向连通 \Leftrightarrow D中有**通路**过每个顶点至少一次. #
- **说明**: 不一定有**简单通路**, 反例如下:





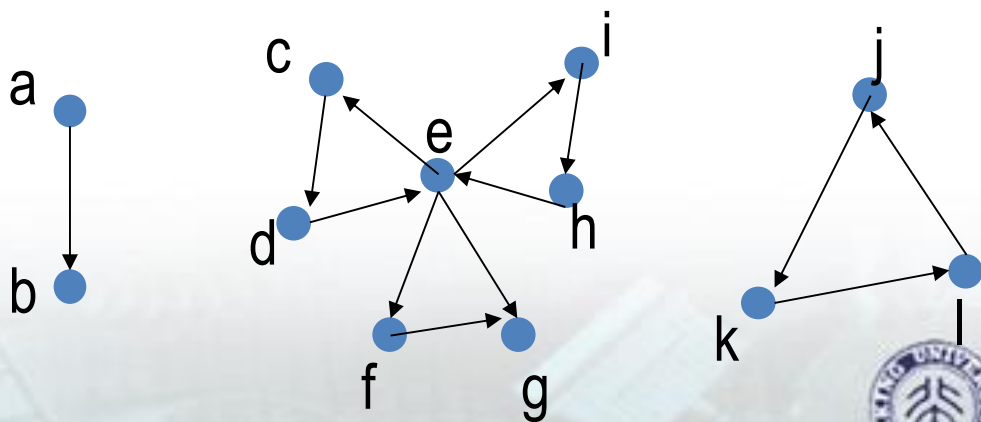
有向图的连通分支

- 强连通分支: 极大强连通子图
- 单向连通分支: 极大单向连通子图
- 弱连通分支: 极大弱连通子图



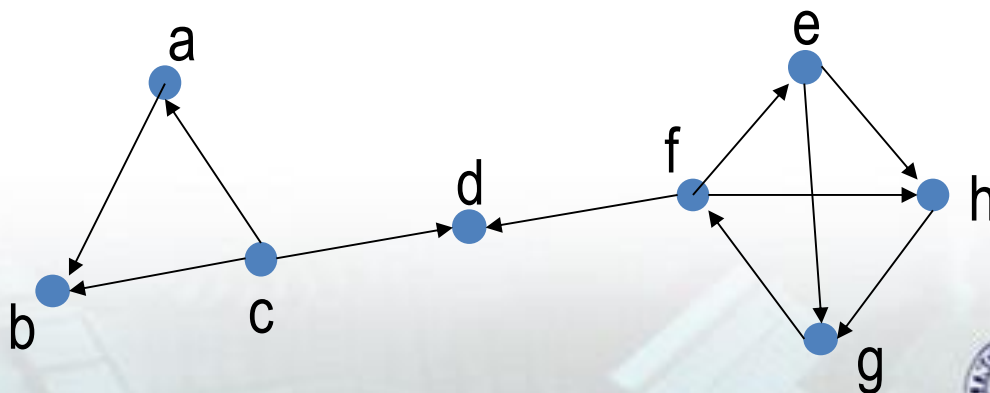
有向图的连通分支(例7.8(a))

- 强连通分支: $\{\{a\}\}, G[\{b\}], G[\{c,d,e,h,i\}], G[\{f\}], G[\{g\}], G[\{j,k,l\}]$
- 单向连通分支: $G[\{a,b\}], G[\{c,d,e,h,i,f,g\}], G[\{j,k,l\}]$
- (弱)连通分支: 与单向连通分支相同



有向图的连通分支(例7.8(b))

- 强连通分支: $G[\{a\}]$, $G[\{b\}]$, $G[\{c\}]$, $G[\{d\}]$, $G[\{e,f,g,h\}]$
- 单向连通分支: $G[\{a,b,c\}]$, $G[\{c,d\}]$, $G[\{d,e,f,g,h\}]$
- (弱)连通分支: G





小结

- 连通, 连通分支, 连通分支数
- 二部图 \Leftrightarrow 无奇圈
- 强连通(双向), 单向连通, 弱连通

