第二十六章 命题逻辑

第4节 联结词的完全集

内容提要

- 真值函数
- 联结词与真值函数
- 联结词完全集
- 非联结词完全集的例子

联结词的完全集

- 为什么只考虑五个联结词？即
-     这五个联结词能否表示所有联结词？
-     这五个联结词是否有多余的？
- 要回答这两个问题，必须回答：
- 什么是联结词？
- 什么是一些联结词表示了一个联结词？
- 什么是联结词的“多余”？

什么是联结词？

- 联结词确定了复合命题构造方式。
- 复合命题建立了真假值对应方式。
- 例如：
- $\neg p$建立了如下对应：
  - $0 \longrightarrow 1$， $1 \longrightarrow 0$
- $p \vee q$建立了如下对应:
  - $(0, 0) \longrightarrow 0$, $(1, 0) \longrightarrow 1$,
  - $(0, 1) \longrightarrow 1$, $(1, 1) \longrightarrow 1$.
- ……

真值函数

- {0, 1}上的*n*元函数
  - f: $\{0, 1\}^n \longrightarrow \{0, 1\}$
- 就称为一个*n*元真值函数（布尔函数）。

- 因此，每个联结词c确定了一个真值函数f_c。
- 每个真值函数也确定了一个联结词(如下)。

真值函数确定联结词

- 设f为如下二元真值函数:
- $f(0, 0) = 0$, $f(1, 0) = 0$, $f(0, 1) = 0$, $f(1, 1) = 1$.
- 则f确定了联结词C_f，$p\,C_f\,q$的真假值为：
-

p	q	$p\,C_f\,q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

即C_f 为$\wedge$

- 即：$p\,C_f\,q$在指派$<t_1, t_2>$下的值为$f(t_1, t_2)$ 。

命题形式确定的真值函数

- 设命题形式α所含的命题变元都在$p_1, p_2, \dots p_n$中。如下定义的n元真值函数称为α确定真值函数，记为f_α:

  $f_\alpha(t_1, t_2, \dots t_n) =$

  α关于$p_1, p_2, \dots p_n$在指派$t_1, t_2, \dots t_n$下的值。

- 例如，若α 为$p\vee(\neg q)$，则f_α为：

  $f(0,0) = 1, f(0,1) = 0, f(1,0) = 1, f(1,1) = 1$

联结词的表示(I)

- 什么叫“用∧和→表示↔”？
- 直观上：p↔q“可写为”只含∧和→的命题形式(p→q)∧(q→p)
- “可写为”含义是两者真值表相同：

p	q	p↔q	(p→q)∧(q→p)
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

- 即：(p→q)∧(q→p)在指派< t_1, t_2>下的值为 $f_{\leftrightarrow}(t_1, t_2)$

联结词的表示(II)

用$c_1, c_2, \ldots c_k$表示c (或f)

仅用$c_1, c_2, \ldots\ c_k$可以构造一个命题α与由c (f)构造的命题等价。

存在α使α在任意指派$< (t_1, t_2, \ldots, t_n >$下的值恰为$f_c\,(t_1, t_2, \ldots t_n)$ $(f(t_1, t_2, \ldots t_n))$

联结词的完全集

- 直观地，说联结词集合A是完全的，指的是A中联结词能表示任意联结词。
- 设A一个联结词集合，称A为联结词的一个完全集，如果任一个真值函数f都可用A联结词来表示，即：对任真值函数f，都存在仅含A中联结词的命题α使得α在任意指派$\langle t_1, t_2, \ldots, t_k\rangle$下的值即为$f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$。

{¬， ∨， ∧， →}

- {¬，∨，∧，→}是联结词的一个完全集。
- **证：**只要证：

对任k元真值函数f，存在仅含{¬，∨，∧，→}中联结词的k元命题形式α使得α在任意指派$\langle t_1, t_2, \ldots t_k \rangle$下的值即为$f(t_1, t_2, \ldots t_k)$。

对k归纳证明。

{¬，∨，∧，→}（续1）

k=1时，一元真值函数有四个f_1、f_2、f_3、f_4：

$$f_1: \ 0 \longrightarrow 0, \ 1 \longrightarrow 0$$
$$f_2: \ 0 \longrightarrow 1, \ 1 \longrightarrow 1$$
$$f_3: \ 0 \longrightarrow 0, \ 1 \longrightarrow 1$$
$$f_4: \ 0 \longrightarrow 1, \ 1 \longrightarrow 0$$

分别可以用p∧(¬p)、 p∨(¬p)、p和¬p表示。

此时命题成立

$\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$（续2）

- 设 $k<n$ 时命题成立，下证 $k=n$ 时命题也成立.
- 设 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是一个n元真值函数，
- 定义如下两个n-1元真值函数f'、f'':
  - $f'(x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(0, x_2, x_3, \ldots, x_n)$
  - $f''(x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$
- 由归纳假设，f'和f''都可由仅含 $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$ 中联结词的n-1元命题形式 α_1、α_2 表示。设 α_1、α_2 中所含的命题变元设为 $p_2, p_3, \ldots, p_n$.
- 则f可由 $(\neg p_1 \rightarrow \alpha_1) \wedge (p_1 \rightarrow \alpha_2)$ 表示。

对任意指派< t1, t2, …, tn >

当t_1=0时，

$(\neg p_1 \to \alpha_1) \wedge (p_1 \to \alpha_2)$在< 0, t_2, …, t_n >下的值

= α_1在< 0, t_2, …, t_n >下的值

= α_1在<t_2, …, t_n >下的值

= $f'(t_2, t_3, \ldots, t_n)$

= $f(0, t_2, t_3, \ldots, t_n)$

= $f(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n)$

命题成立。

同理可证，当t_1=1时命题也成立。

推论

1. 任一个n元真函数都可由一个仅含{¬，∨，∧，→} 中联结词的n元命题形式表示.

2. {¬，∨，∧，→， ↔}是联结词的完全集。

3. ↔可由¬，∨，∧，→表示。

$\{\neg, \rightarrow\}$

证明：

$\alpha \vee \beta$可由（$\neg\alpha$）$\rightarrow \beta$表示。

$\alpha \wedge \beta$可由$\neg$（$\alpha \rightarrow$（$\neg\beta$））表示。

即这两对命题形式在任意指派下的值相同。

$\{\neg, \vee\}$

证明：

$\alpha\to\beta$可由（$\neg\alpha$）$\vee\beta$表示。

$\alpha\wedge\beta$可由$\neg$（（$\neg\alpha$）$\vee$（$\neg\beta$））表示。

$\{\neg, \wedge\}$

证明：

$\alpha \to \beta$可由$\neg(\alpha \wedge (\neg\beta))$表示。

$\alpha \vee \beta$可由$\neg((\neg\alpha) \wedge (\neg\beta))$表示。

{∨，∧，→ ，↔}

{∨，∧，→，↔}不是联结词的完全集

证明：

总取0值的真值函数不能由只含此集合中的联结词的命题形式来表示。

因为这样的命题形式在其中的命题变元都取1时也取值1, 而不为0.

{¬，∨，∧，→，↔}的子集

- {¬，∨，∧，→，↔}是联结词的完全集。
- 5个4元素子集中只有{∨，∧，→，↔}不是联结词的完全集。
- 3元素子集中，只要含¬就完全。

  10个3元素子集，4个不完全，6个完全。
- 2元素子集中，{¬，→}、{¬，∨}、{¬，∧}是完全的。
- {¬，↔}是否完全？
- {¬}是否完全？

作业与思考题

- 作业

p508. 5、6、7

思考题

- {¬， ↔}是否完全？
- {¬}是否完全？
- 二元真值函数中，哪个是完全集？

谢 谢