单元-4.1-自然数的定义

第一编 集合论 第4章 自然数

4.1 自然数的定义

内容提要

- 皮亚诺系统
- 用集合构造皮亚诺系统
- 后继、归纳集
- 数学归纳法原理

封闭

- F是函数，$A \subseteq \mathrm{dom}\ F$
- A在函数F下封闭(closed) $\Leftrightarrow$

$$F(A) \subseteq A$$

$$\Leftrightarrow F: A \to A$$

$\Leftrightarrow$ F是A上一元运算

- 例： $f:N \to N,\ f(x)=x+1$,

  $A=\{0,2,4,6,\ldots\}$ 在 f 下不封闭

  $B=\{2,3,4,\ldots\}$ 在 f 下封闭

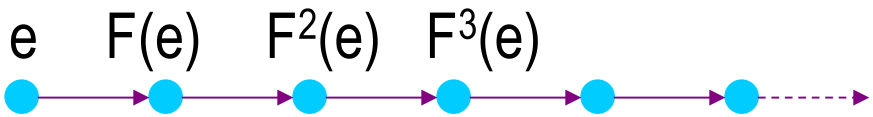
Peano系统

- 三元组$\langle M,F,e\rangle$，$F:M\to M$

(1) $e\in M$

(2) M在F下封闭

(3) $e\notin \mathrm{ran}F$

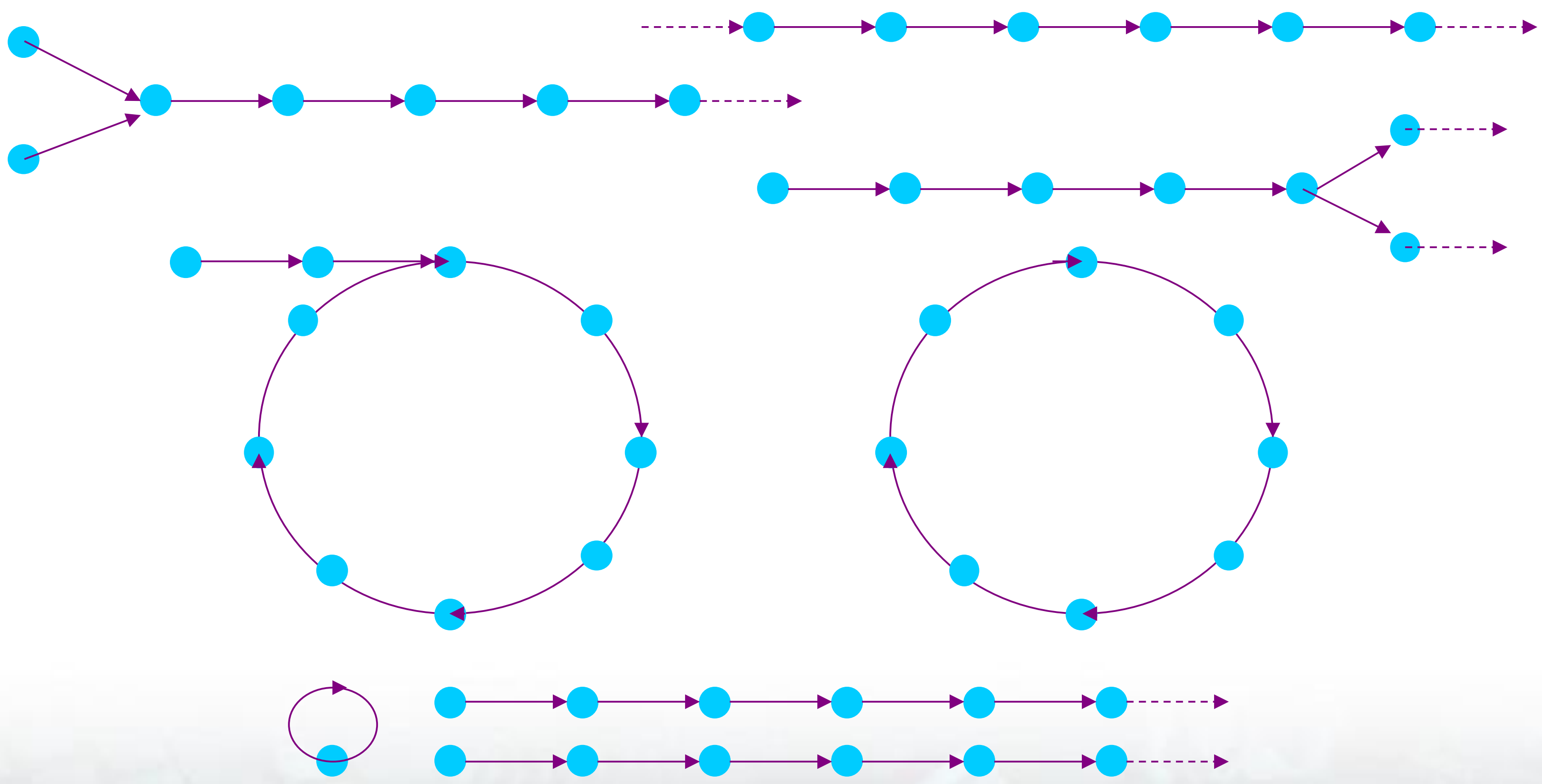


(4) F是单射

(5) $A\subseteq M \wedge e\in A \wedge A$在$F$下封闭 $\Rightarrow A=M$

(极小性公理)

为何如此定义?



Giuseppe Peano

- **Giuseppe Peano**
  - **1858-1932,** 意大利数学家
  - 数理逻辑集合论奠基人之一
    - 引入∈和⊂记号
      (他最初用的是ε和⊃)
    - 皮亚诺公理 **(最初是9条)**
  - 皮亚诺曲线
    - 一条充满平面的连续曲线

如何实现?

- 如何利用集合来构造Peano系统?
- 借助于下面两个概念
  - 后继
  - 归纳集

冯•诺依曼

- John von Neumann
  - 1903-1957, 匈牙利裔美国科学家
    - 数学(以集合论为例)
      - 基础公理,类(1925博士论文)
      - 后继,归纳集(自然数构造)
    - 量子力学 (奠基人之一)
    - 博弈论(奠基人)
    - 计算机(冯•诺依曼体系结构)

后继

- A是集合

- A的后继(successor):

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

- 特征: $A \subseteq A^+ \wedge A \in A^+$

后继举例

- $\varnothing^{+} = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$

  $\varnothing^{++} = \{\varnothing\}^{+} = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

  $\varnothing^{+++} = \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

- $\{a\}^{+} = \{a\} \cup \{\{a\}\} = \{a,\{a\}\}$

  $\{a\}^{++} = \{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\}$

  $\{a\}^{+++} = \{a,\{a\},\{a,\{a\}\}, \{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\}\}$

- $\{\varnothing,a\}^{+} = \{\varnothing,a, \{\varnothing,a\}\}$

  $\{\varnothing,a\}^{++} = \{\varnothing,a, \{\varnothing,a\},\{\varnothing,a, \{\varnothing,a\}\}\}$

北京大学

归纳集

- A是归纳集 $\Leftrightarrow$

  (1) $\varnothing \in A$

  (2) $\forall x(x \in A \rightarrow x^{+} \in A)$

- A是归纳集 $\Leftrightarrow$ A含有$\varnothing$且对后继封闭

归纳集举例

- **$A=\{\varnothing,\varnothing^{+},\varnothing^{++},\varnothing^{+++},\ldots\}$**
- **$A=\{\varnothing,\varnothing^{+},\varnothing^{++},\varnothing^{+++},\ldots,a,a^{+},a^{++},a^{+++},\ldots\}$**

- **$A=\{\varnothing^{+},\varnothing^{++},\varnothing^{+++}\}$**
  – 不是归纳集, 少$\varnothing$
- **$A=\{\varnothing,\varnothing^{+},\varnothing^{++},\varnothing^{+++},\ldots,a\}$**
  – 不是归纳集, 少$a^{+},a^{++},a^{+++},\ldots$

自然数

- 自然数是属于每个归纳集的集合
- $\varnothing$
- $\varnothing^{+} = \{\varnothing\}$
- $\varnothing^{++} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\varnothing^{+++} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$
- $\varnothing^{++++} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}, \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\}$
- ……

自然数的记号

- $0 = \varnothing$
- $1 = \varnothing^{+} = \{\varnothing\} = \{0\}$
- $2 = \varnothing^{++} = \{\varnothing,\{\varnothing\}\} = \{0,1\}$
- $3 = \varnothing^{+++} = \{0,1,2\}$
- ……
- $n = (n-1)^{+} = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$

自然数作为集合

$2\cap 3=\{0,1\}\cap\{0,1,2\}=\{0,1\}=2=\min(2,3)$

$2\cup 3=\{0,1\}\cup\{0,1,2\}=\{0,1,2\}=3=\max(2,3)$

$3-2=\{0,1,2\}-\{0,1\}=\{2\}$ ($-$是集合运算)

$2-3=\{0,1\}-\{0,1,2\}=\varnothing=0$

$\cup n=\cup\{0,1,\ldots,n-1\}=n-1=\max(0,1,\ldots,n-1)$

$\cap n=\cap\{0,1,\ldots,n-1\}=0 \quad =\min(0,1,\ldots,n-1)$

- $0\in 1\in 2\in 3\in\ldots$ $0\subseteq 1\subseteq 2\subseteq 3\subseteq\ldots$

自然数集

- D = { v | v是归纳集 }
  - D不是集合,否则导致悖论!
  - D是“类”

- 自然数集 $N=\cap D$

- ⇒ 自然数集是包含于每个归纳集的集合

对比

- 自然数　是　属于每个归纳集的集合
- 自然数集是包含于每个归纳集的集合

定理4.1

定理4.1 N是归纳集

证明　$N = \cap D = \cap\{ v \mid v\text{是归纳集} \}$

$= \{ x \mid \forall v(v\text{是归纳集}\rightarrow x\in v) \}.$

(1) $\forall v$, v是归纳集 $\Rightarrow \varnothing\in v$.　$\therefore\ \varnothing\in N$.

(2) $\forall a$, $a\in N \Rightarrow \forall v(v\text{是归纳集}\rightarrow a\in v)$　(N定义)

$\Rightarrow \forall v(v\text{是归纳集}\rightarrow a^+\in v)$　(归纳集定义)

$\Rightarrow a^+\in N$.　　$\therefore$ N对后继封闭.

由(1)(2), N是归纳集.　　#

N是最小的归纳集

- **N是最小的归纳集:**

  $$\forall v(\ v\text{是归纳集} \rightarrow N \subseteq v\ )$$

- **N = { 0, 1, 2, 3, … }**

后继函数

- 后继函数: $\sigma:N\to N, \forall n\in N, \sigma(n)=n^+$

- 例: $\sigma(0) = 0^+ = 1$,

  $\sigma(1) = 1^+ = 2 = 0^{++}$,

  $\sigma(2) = 2^+ = 3 = 1^{++} = 0^{+++}$,

  ……

定理4.2

- <N,σ,0>是Peano系统

定理4.2

定理4. 2　$\langle N,\sigma,0\rangle$是Peano系统

证明　(1) $\varnothing\in N$: 定理4.1.

(2) $\forall n(n\in N\to\sigma(n)=n^+\in N)$: 定理4.1.

(3) $\varnothing\notin \mathrm{ran}\sigma$: $\forall n\in N$, $\sigma(n)=n^+=n\cup\{n\}\neq\varnothing$

(4) σ是单射的:　定理4.3(后面)

(5) $S\subseteq N\wedge\varnothing\in S\wedge\forall n\in S(n^+\in S)\Rightarrow S=N$:

$\varnothing\in S\wedge\forall n\in S(n^+\in S)\Rightarrow S$是归纳集$\Rightarrow N\subseteq S$.　　#

- 注意: 不用(4)证明(5)，用(5)证明(4)

数学归纳法原理

- 目标：证明 $\forall n \in N, P(n)$为真

- 步骤：(一) 构造 $S=\{n|n \in N \wedge P(n)\}$

  (二) 证明 S 是归纳集

  (1) $\varnothing \in S$

  (2) $\forall n(n \in S \rightarrow n^+ \in S)$

  $\therefore$ $S=N$

定理4.3

定理4. 3 任何自然数的元素均为它的子集

证明 令 $S=\{n \mid n\in N \wedge \forall x(x\in n \rightarrow x\subseteq n)\}$

(1) $\varnothing\in S$: $\varnothing\in N \wedge \forall x(x\in\varnothing \rightarrow x\subseteq\varnothing)$

(2) $n\in S \Rightarrow n^+\in S$, 即$\forall x, x\in n^+ \Rightarrow x\subseteq n^+$:

$\forall x,\ x\in n^+=n\cup\{n\} \Rightarrow x\in n \vee x\in\{n\}$

$\Rightarrow x\in n \vee x=n \Rightarrow x\subseteq n \vee x=n$ (归纳假设)

$\Rightarrow x\subseteq n^+$ $(n\subseteq n^+)$ $\therefore$ $S=N$. #

定理4.2证明(4)

- σ是单射, 即 $\sigma(m)=\sigma(n) \Rightarrow m=n$ 或

$$m^+=n^+ \Rightarrow m=n$$

- 证明: $m^+=n^+ \Rightarrow n\in n^+=m^+=m\cup\{m\}$

$\Rightarrow n\in m\vee n=m \Rightarrow n\subseteq m\vee n=m$ (定理4.3)

同理, $m^+=n^+ \Rightarrow m\subseteq n\vee m=n$.

但是 $n\subseteq m \wedge m\subseteq n \Rightarrow m=n$. #

定理4.4

- $\forall m,n\in N,\ m^+\in n^+ \Leftrightarrow m\in n.$
- 证明: ($\Rightarrow$)

$$m^+\in n^+=n\cup\{n\}$$

$$\Rightarrow m^+\in n \vee m^+=n$$

$$\Rightarrow m^+\subseteq n \qquad \text{(定理4.3)}$$

$$\Rightarrow m\in m^+\subseteq n$$

定理4.4证明($\Leftarrow$)

- $\forall m,n\in N,\ m^+\in n^+ \Leftarrow\ m\in n.$
- 证明: 令$S=\{n|n\in N\wedge\forall m(m\in n\rightarrow m^+\in n^+)\}$

  (1) $\varnothing\in S$: $\varnothing\in N\wedge\forall m(m\in\varnothing\rightarrow m^+\in\varnothing^+)$.

  (2) $n\in S\Rightarrow n^+\in S$, 即$\forall m(m\in n^+\Rightarrow m^+\in n^{++})$:

  $m\in n^+=n\cup\{n\}\Rightarrow m\in n \vee m=n$

  $\Rightarrow m^+\in n^+\vee m^+=n^+$ (归纳假设) $\Rightarrow m^+\in n^{++}$

  $(n^+\subseteq n^{++}\wedge n^+\in n^{++})$. $\quad\therefore\ S=N.\quad$ #

定理4.5

定理4. 5 任何自然数都不是自己的元素.

证明 令 $S = \{ n \mid n \in N \wedge n \notin n \}$.

(1) $\varnothing \in S$: $\varnothing \in N \wedge \varnothing \notin \varnothing$.

(2) $n \in S \Rightarrow n^+ \in S$:

$n \notin n \Rightarrow n^+ \notin n^+$ (定理4.4)

$\therefore$ $S=N$. #

定理4.6

定理4. 6 $\varnothing$属于除0外的任何自然数.

证明 令 $S = \{n \mid n\in N \land n\neq 0 \land \varnothing\in n\} \cup \{0\}$

(1) $\varnothing\in S$: 显然

(2) $n\in S \Rightarrow n^+\in S$:

$n\in S \Rightarrow n=0 \lor \varnothing\in n \Rightarrow \varnothing\in n^+ \Rightarrow n^+\in S$.

$\therefore$ $S=N$. #

定理4.7 (三歧性)

- $\forall m,n\in N$, $m\in n$, $m=n$, $n\in m$中恰有一式成立

证明概要:

- 至多成立一式:
  - $m\in n\wedge n\in m \Rightarrow m\in n\subseteq m$ (定理4.3)$\Rightarrow m\in m$
  - $m\in n\wedge m=n \Rightarrow m\in m$, 与定理4.5矛盾!
- 至少成立一式:
  - $S=\{n\,|\,n\in N\wedge\forall m(m\in N\rightarrow m\in n\vee m=n\vee n\in m)\}$

小结

- .Peano系统
- 后继, 归纳集, 自然数, 自然数集
- 数学归纳法原理
- 自然数性质的证明