单元1.3 谓词逻辑预备知识

第一编 集合论 第一章 集合

1.1 预备知识（下）

北京大學

内容提要

一阶谓词逻辑中的

- 个体、谓词、量词等基本概念
- 几个重要的等值式
- 推理定律

个体

将可以独立存在的客体（具体事务或抽象概念）称为个体或个体词，并用a,b,c,...表示个体常元，用x,y,z,...表示个体变元。(个体的函数还是个体，例如，设a,b是数，f(a,b)可以表示a和b的运算结果，如a+b、a•b等。)

将个体变元的取值范围称为个体域，个体域可以是有穷或无穷集合。人们称由宇宙间一切事务组成的个体域为全总个体域。

谓词

将表示个体性质或彼此之间关系的词称为谓词,

常用F,G,H,...表示谓词常元或谓词变元，用F(x)表示"x具有性质F"，用F(x,y)表示"x和y具有关系F"。

例如，若F(x)表示"x是黑色的"，a表示黑板，

则F(a)表示"黑板是黑色的"；

若F(x,y)表示"x大于y"，则F(5,2)表示"5大于2"。

量词、全称量词

称表示数量的词为量词。

全称量词是自然语言中的“所有的”、“一切的”、“任意的”、“每一个”、“都”等的统称，

用符号“∀”表示。

用$\forall x$表示个体域里的所有x；

用$\forall xF(x)$表示个体域里所有x都有性质F。

存在量词

存在量词是自然语言中的“有一个”、“至少有一个”、“存在着”、“有的”等的统称，

用符号“∃”表示。

用∃x表示存在个体域里的x；

用∃xF(x)表示在个体域里存在x具有性质F。

命题符号化

一阶逻辑中命题符号化的两个基本公式:

个体域中所有有性质F的个体都有性质G，应符号化为

$\forall x\,(F(x) \rightarrow G(x))$，其中

F(x): x具有性质F，G(x): x具有性质G。

个体域中存在有性质F同时有性质G的个体，应符号化为

$\exists x\,(F(x) \wedge G(x))$，其中

F(x): x具有性质F，G(x): x具有性质G。

例

将下面命题符号化

① 人都吃饭；

② 有人喜欢吃糖；

③ 男人都比女人跑得快（这是假命题）；

使用全总个体域。

解①②

① 人都吃饭；

令F(x): x是人，G(x): x吃饭。

命题符号化为 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$。

② 有人喜欢吃糖；

令F(x): x是人，G(x): x喜欢吃糖。

命题符号化为 $\exists x(F(x)\wedge G(x))$ 。

$\exists x(F(x)\wedge G(x))$

解③

③ 男人都比女人跑得快（这是假命题）。

令 $F(x)$: x是男人，$G(y)$: y是女人，

$H(x,y)$: x比y跑得快。

$F(x)$: x是男人

命题符号化为

$$\forall x\,(\,F(x) \to \forall y\,(\,G(y) \to H(x,y)\,)\,)$$

等值形式为

$F(x) \to \forall$

$$\forall x\,\forall y\,(\,F(x) \land G(y) \to H(x,y)\,)$$

$\forall x\,\forall y$

一阶谓词逻辑公式及其分类

一阶谓词逻辑公式也简称为公式，它的形成规则类似于命题逻辑公式，只需加上一条，即若A是公式，则∀x A及∃x A也都是公式。

∀xA

在公式∀x A和∃x A中，称x为指导变元，称A为相应量词的辖域。

∃xA

在∀x和∃x的辖域中，x的所有出现都称为是约束出现，A中不是约束出现的变元称为自由出现。

A中不自由出现

例

$$\forall x\,(\,F(x) \rightarrow \exists y\,(\,G(y) \wedge H(x,y,z)\,)\,)$$

$\forall x$的辖域为$(\,F(x) \rightarrow \exists y\,(\,G(y) \wedge H(x,y,z)\,)\,)$,

与作用域中的变量很像

$\exists y$的辖域为$(\,G(y) \wedge H(x,y,z)\,)$,

除z是自由出现的变元外，其他变元都是约束出现的。

$$\forall x\,(\,F(x) \rightarrow \exists y\,(\,G(y) \wedge H(x,y,z)\,)\,)$$

$$\forall x\,(\,F(x) \rightarrow \exists y\,(\,G(y) \wedge H(x,y,z)\,)\,)$$

解释

对于给定的公式A，如果指定A的个体域为已知的D，并用特定的个体常元取代A中的个体常元，用特定函数取代A中的函数变元，用特定的谓词取代A中的谓词变元，则就构成了A的一个**解释**。

给定的一个公式A可以有多种解释。

谓词变元

例

给定公式A为∀x(F(x)→G(x))，有多种解释。

解释①：取个体域为实数集合，

F(x): x是有理数，G(x): x能表示成分数，

A解释为“有理数都能表示成分数”，这是真命题。

解释②：取个体域为全总个体域，

F(x): x是人，G(x): x长着黑头发，

A解释为“人都长着黑头发”，这是假命题。

永真、永假、可满足、等值式

若A在任何解释下都为真，则称A为永真式。

若A在任何解释下都为假，则称A为永假式。

若A至少存在一个成真的解释，则称A为可满足式。

若A↔B是永真式，则称A与B是等值的，记为A⇔B，并称A⇔B为等值式。

基本等值式①②

称表示数量的词为量词

① 在有限个体域$D=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$中消去量词等值式：

(1) $\forall x A(x) \Leftrightarrow \boxed{A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\ldots\wedge A(a_n)}$

(2) $\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\ldots\vee A(a_n)$

② 量词否定等值式：

(1) $\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x\neg A(x)$

(2) $\neg\exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x\neg A(x)$

$\neg\forall x A(x) \Rightarrow \exists x \neg A(x)$

基本等值式③

③量词辖域收缩与扩张等值式(B中不含x):

(1) $\forall x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B$， (2) $\forall x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge B$

(3) $\forall x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\rightarrow B$， (4) $\forall x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\forall xA(x)$

(5) $\exists x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee B$， (6) $\exists x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge B$

(7) $\exists x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow B$， (8) $\exists x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\exists xA(x)$

基本等值式④

④ 量词分配等值式

(1) $\forall x(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

说明：全称量词对“$\wedge$”有分配律，但

全称量词对“$\vee$”不适合分配律。

(2) $\exists x(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

说明：存在量词对“$\vee$”有分配律，但

存在量词对“$\wedge$”不适合分配律。

前束范式

若公式A具有形式$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_k B$，则称A为前束范式，其中$Q_i(1\le i\le k)$为$\forall$或$\exists$，B中不含量词。

求前束范式时用基本等值式和换名规则。

换名规则：将公式A中某量词辖域中出现的某个约束出现的个体变元及相应的指导变元x_i，都改成公式A中没有出现过的x_j，所得公式$A' \Leftrightarrow A$。

例

$\forall xF(x)\vee\neg\exists xG(x,y)$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\vee\forall x\neg G(x,y)$ (量词否定等值式)

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\vee\forall z\neg G(z,y)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\vee\forall z\neg G(z,y))$ (辖域扩张等值式)

$\Leftrightarrow\forall x\forall z(F(x)\vee\neg G(z,y))$ (辖域扩张等值式)

$\Leftrightarrow\forall x\forall z(G(z,y)\rightarrow F(x))$ (蕴涵等值式)

重要的推理定律

(1) $\forall xA(x) \lor \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \lor B(x))$

(2) $\exists x(A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \land \exists xB(x)$

(3) $\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \to \forall xB(x)$

(4) $\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \to \exists xB(x)$

说明：在使用以上4条推理定律时，千万注意，别将它们当成等值式用，这样会犯错误的。

小结

逻辑符号：个体词 a,b,c,…、谓词 F(x), G(x,y),H(x,y,z),…、

量词 ∀ ∃

逻辑概念： 公式、解释、永真式、永假式、可满足式、

等值式、等值演算、推理定律、前束范式

逻辑规则：换名规则