一阶谓词演算自然推演系统$\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$

王捍贫

北京大学信息科学技术学院软件研究所

复习 —— 一阶语言

$\mathscr{L}$生成的一阶语言:

- 符号库:
  - 个体变元
  - 个体常元
  - 谓词
  - 函数
  - 量词
  - 联结词
  - 辅助符号
- 公式:
  - 项
  - 公式
  - 自由与约束

复习 —— 推演系统N$_{\mathscr{L}}$的构成

给定非逻辑符号集$\mathscr{L}$, N$_{\mathscr{L}}$的构成如下:

- 形式语言:
  - $\mathscr{L}$生成的一阶语言
- 形式推理:
  - 形式公理: $\varnothing$
  - 形式规则: 15条

    (1)–(10) 如N

形式推演系统$\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$

如$\mathrm{N}_{\mathscr{L}}$与N相对应一样， $\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$与P相对应.

给定非逻辑符号集$\mathscr{L}$, $\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$的构成如下:

- 形式语言:
  - $\mathscr{L}$生成的一阶语言的一个子语言。
- 形式推理:
  - 形式公理: 7条(3+4)
  - 形式规则: 1条

$\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$的构成：符号库

任意给定非逻辑符号集$\mathscr{L}$. $\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$的符号库如下:

1. 非逻辑符号: $\mathscr{L}$中符号.

2. 逻辑符号:

   (2.1) 个体变元符号: x_0, x_1, x_2, $\cdots$.

   (2.2) 量词符号: $\forall$.

   (2.3) 联结词符号: $\neg$, $\rightarrow$.

   (2.4) 辅助符号:) , , , (.

$\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$的构成：项

任意给定非逻辑符号集$\mathscr{L}$. $\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$的项归纳定义如下:

(1.1) 个体变元与个体常元为$\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$的项.

(1.2) 若$t_1, t_2, \cdots, t_m$为$\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$的项,
f^m为$\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$的一个m元函数变元符号,
则$f^m(t_1, t_2, \cdots, t_m)$为$\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$的项.

K$_{\mathscr{L}}$的构成：公式

任给定非逻辑符号集$\mathscr{L}$，K$_{\mathscr{L}}$的公式归纳定义如下:

(2.1) 若$t_1, t_2, \cdots, t_n$为$\mathscr{L}$的项,

F^n为K$_{\mathscr{L}}$的一个n元谓词变元符号,

则$F^n(t_1, t_2, \cdots, t_n)$为K$_{\mathscr{L}}$的公式.

—— 原子公式

(2.2) 若α_1，α_2为K$_{\mathscr{L}}$的公式,

则$(\neg\alpha_1)$，$(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2)$为 K$_{\mathscr{L}}$的公式.

(2.3) 若α为K$_{\mathscr{L}}$的公式, x为K$_{\mathscr{L}}$的个体变元符号,

则$(\forall x)\alpha$为K$_{\mathscr{L}}$的一个公式.

关于$K_{\mathscr{L}}$公式的注记

$K_{\mathscr{L}}$的形式语言是$N_{\mathscr{L}}$的形式语言的一个子语言，因而它们使用很多相同概念和约定，如：

- 自由与约束;
- 括号省略规则;
- P中公式在$\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$中的代入实例

$K_{\mathscr{L}}$公式的简写

$(\alpha \vee \beta)$为 $(\neg\, \alpha \rightarrow \beta)$的简写;

$(\alpha \wedge \beta)$为 $\Big(\neg\, (\alpha \;\rightarrow\; \neg\, \beta)\Big)$的简写;

$(\alpha \leftrightarrow \beta)$为 $\Big(\neg((\alpha \rightarrow \beta) \;\rightarrow\; \neg(\beta \rightarrow \alpha))\Big)$ 的简写;

$(\exists x)\alpha$为$(\neg\, (\forall x)\neg\, \alpha)$ 的简写.

$K_{\mathscr{L}}$的构成：形式公理

(K1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

(K2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

(K3) $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$

(K4) $\forall x\alpha \to \alpha(x/t)$，若$t$对$x$在$\alpha$中自由.

(K5) $\alpha \to \forall x\alpha$，若$x$不在$\alpha$中自由出现.

(K6) $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$

(K7) 若α是$K_{\mathscr{L}}$的一个公理，
则$(\forall x)\alpha$也为$K_{\mathscr{L}}$的一个公理.

注：$K_{\mathscr{L}}$的公理也是归纳定义的。

$\mathsf{K}_{\mathscr{L}}$的构成：形式规则

分离规则(M)： 由α及$\alpha \rightarrow \beta$可得到β. (M)

$\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$的证明序列

$\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$中公式的一个有限序列

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$$

称为$\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$的一个证明序列，如果每个$\alpha_i (1 \le i \le n)$都满足下列条件之一:

(1) α_i是$\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$的一个公理；或

(2) α_i是由某两个α_j, α_k $(1 \le j, k < i)$应用(M)得到的.

此时，称α_n为$\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$的一个内定理，记为 $\vdash_{\mathrm{K}_{\mathscr{L}}} \alpha_n$，或简写为$\vdash \alpha_n$.

代如实例

定理5

设α为P的一个内定理，α'是α在$\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$中的 一个代入实例，则$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha'$

定理6

(1) 若$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha \rightarrow \beta$，且$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha$，则$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \beta$.

(2) 若$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} (\alpha \rightarrow \beta)$，且$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} (\beta \rightarrow \gamma)$，
则$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} (\alpha \rightarrow \gamma)$.

此命题中的(1)仍记为(M)，(2)仍记为(Tr).

例14

若t对x在α中自由，则: $\vdash \alpha(x/t) \to \exists x\alpha$.

证: 因为$(\neg\alpha)(x/t) = \neg(\alpha(x/t))$，从而

$$(1)\ \vdash\ \forall x(\neg\alpha) \to (\neg\alpha)(x/t) \qquad (K4)$$

$$(2)\ \vdash\ \forall x(\neg\alpha) \to \neg(\alpha(x/t))$$

$$(3)\ \vdash\ \big(\forall x(\neg\alpha) \to \neg(\alpha(x/t))\big) \to \big(\alpha(x/t) \to \neg\forall x(\neg\alpha)\big)$$

(命题内定理)

$$(4)\ \vdash \alpha(x/t) \to \neg\forall x(\neg\alpha) \qquad (M)$$

即: $\vdash \alpha(x/t) \to \exists x\alpha$

定理7

若$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha$，则$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x\alpha$.

证：因$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha$，故存在$\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$中公式序列:

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \ (= \alpha)$$

为α的一个证明序列.

下对i $(1 \leq i \leq n)$归纳证明：$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x\alpha_i$ $\qquad (*)$

(1) 当$i = 1$时，α_1为一个公理，从而$\forall x\alpha_1$也为一个公理，故$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x\alpha_1$.

(2) 设$i < k$时，(*)成立，下证$i = k$时(*)也成立.

(2.1) 若α_k仍为公理，仿(1)可证.

(2.2) 若α_k是由α_l，α_j （$1 \leq l$，$j < k$）用(M)得到的，不妨设$\alpha_j = \alpha_l \to \alpha_k$. 则：

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha_l$ (归纳假设)

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha_j$ (归纳假设)

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x (\alpha_l \to \alpha_k)$ (归纳假设)

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x(\alpha_l \to \alpha_k) \to (\forall x\alpha_l \to \forall x\alpha_k)$ (K6).

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x\alpha_l \to \forall x\alpha_k$ (定理6)

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x\alpha_k.$ (定理6)

归纳证毕，$(*)$成立，从而$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x\alpha_n$，即$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x\alpha$.

思考题：$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha \to \forall x\alpha$成立否？

例15(1)

若x不在α中自由出现，
则$\vdash \forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x\beta)$.

证:

因$\vdash_P (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow \Big((s \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (s \rightarrow r))\Big)$.

$\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightsquigarrow p$, $\forall x\alpha \rightsquigarrow q$, $\forall x\beta \rightsquigarrow r$, $\alpha \rightsquigarrow s$得:

$$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} (\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta))$$

$$\rightarrow \Big((\alpha \rightarrow \forall x\alpha) \rightarrow (\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x\beta))\Big).$$

$$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta), \qquad \text{(K6)}$$

$$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} (\alpha \to \forall x\alpha) \to \big(\forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x\beta)\big).$$

$$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha \to \forall x\alpha. \qquad \text{(K5)}x\text{不在}\alpha\text{中自由出现}$$

$$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x\beta).$$

例15(2)

若x不在α中自由出现，

则$\vdash (\alpha \to \forall x\beta) \to \forall x(\alpha \to \beta)$

证:

因$\vdash_P (p \to q) \to ((r \to p) \to (r \to q))$,

分别以$\forall x\beta$，β，α代换其中的p，q，r得:

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} (\forall x\beta \to \beta) \to ((\alpha \to \forall x\beta) \to (\alpha \to \beta))$.

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x\beta \to \beta$,

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} (\alpha \to \forall x\beta) \to (\alpha \to \beta)$.

$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} A \to B$. A记$\alpha \to \forall x\beta$，$B$记$\alpha \to \beta$

$$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x(A \to B). \qquad (\text{定理}7)$$

$$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B). \qquad (1)$$

x不在A中自由出现

$$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} A \to \forall x B,$$

$$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} (\alpha \to \forall x \beta) \to \forall x(\alpha \to \beta) \ .$$

例16(1)

若$\vdash \alpha \rightarrow \beta$,

则$\vdash \forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta$。

证:

(1) $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ (题设)

(2) $\vdash \forall x(\alpha \rightarrow \beta)$ (定理7)

(3) $\vdash \forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$ $(K6)$

(4) $\vdash \forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta$ (M)

例16(2)

若$\vdash \alpha \to \beta$,

则$\vdash \exists x\alpha \to \exists x\beta$.

证:

(1) $\vdash \alpha \to \beta$

(2) $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ (命题内定理)

(3) $\vdash \neg\beta \to \neg\alpha$ (M)

(4) $\vdash \forall x\neg\beta \to \forall x\neg\alpha$ (1)

(5) $\vdash (\forall x\neg\beta \to \forall x\neg\alpha) \to (\neg\forall x\neg\alpha \to \neg\forall x\neg\beta)$

(6) $\vdash \neg\forall x\neg\alpha \to \neg\forall x\neg\beta$ (M)

即: $\vdash \exists x\alpha \to \exists x\beta$

$\mathsf{K}_{\mathscr{L}}$中有前提的推演

定义

设Γ是$\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$的一个公式集(不一定有限). $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$中公式的一个有限序列$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$称为$\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 中由前提Γ推出α_n的一个证明序列，如果每个$\alpha_i (1 \leq i \leq n)$ 都满足下列条件之一:

(i) $\alpha_i \in \Gamma$.

(ii) α_i是一个公理.

(iii) α_i是由α_j，α_k $(1 \leq j,\ k \leq i)$ 用(M)得到.

此时也称在$\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$中由前提Γ可推出α_n，记为$\Gamma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_n$，或$\Gamma \vdash \alpha_n$.

$\mathsf{K}_{\mathscr{L}}$中有前提推演的简单性质

(1) $\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha$的充要条件是：对$\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$的任一个公式集$\Gamma$, $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha$.

(2) 设Σ，α分别是$\mathbf{P}$ 中公式集与公式, $\Sigma \cup \{\alpha\}$的公式中出现的命题变元符号都在 $p_0, p_1, \cdots, p_n$之中，将Σ与α中的p_0，p_1，$\cdots$，p_n分别替换为$\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$中公式α_0，α_1，$\cdots$，α_n，得到$\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$的公式集Σ'与α'. 若$\Sigma \vdash_P \alpha$, 则$\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha'$.

(3) 若$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha$，$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha \to \beta$，则$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \beta$.

(4) 若$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha \to \beta$，$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \beta \to \gamma$，
则$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha \to \gamma$.

(5) 若$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha$，而$x$是一个不在$\Sigma$的 任何公式中自由出现的一个个体变元符号，则$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha$.

性质(5)的证明

证: 只要对定理7的证明作些修改即可。

因$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha$, 则存在$\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$中 公式序列:

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \ (= \alpha)$$

为在前题Σ下推出α的一个证明.

下对i $(1 \le i \le n)$归纳证明: $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha_i \qquad (*)$

(1) 当$i=1$时，α_1为一个公理或$\alpha_1 \in \Sigma$.

(1.1) 若α_1为一个公理，则$\forall x\alpha_1$也为一个公理，
故$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x\alpha_1$，从而$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x\alpha_1$.

(1.2) 若$\alpha_1 \in \Sigma$，则x不在α_1中自由出现.
由(K5)知$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}}\alpha_1 \rightarrow \forall x\alpha_1$，从而$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_1 \rightarrow \forall x\alpha_1$.
又$\Sigma\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}}\alpha_1$，故：$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x\alpha_1$.

(2) 设$i < k$时，(*)成立，下证$i = k$时(*)也成立.

(2.1) 若α_k仍为公理或$\alpha_k \in \Sigma$，仿(1)可证.

(2.2) 若α_k是由$\alpha_l, \alpha_j (1 \leq l, j < k)$ 用(M)得到的，
不妨设$\alpha_j = \alpha_l \to \alpha_k$.
由归纳假设得$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha_l$， $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha_j$，即:
$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x (\alpha_l \to \alpha_k)$.
又由于$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x (\alpha_l \to \alpha_k) \to (\forall x \alpha_l \to \forall x \alpha_k)$ (K6).
故: $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x (\alpha_l \to \alpha_k) \to (\forall x \alpha_l \to \forall x \alpha_k)$
由性质(2)知$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha_l \to \forall x \alpha_k$，$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha_k$.

归纳证毕，从而$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha_n$，即: $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x \alpha$.

例17

若x不在β中自由出现，

则 $\{\forall x(\alpha \to \beta), \neg \beta\} \vdash \forall x \neg \alpha$

证：

(1)	$\forall x(\alpha \to \beta)$	(前提)
(2)	$\forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$	$(K4)$
(3)	$\alpha \to \beta$	(M)
(4)	$(\alpha \to \beta) \to (\neg \beta \to \neg \alpha)$	(命题重言式)
(5)	$\neg \beta \to \neg \alpha$	(M)
(6)	$\neg \beta$	(前提)
(7)	$\neg \alpha$	(M)
(8)	$\forall x \neg \alpha$	(性质(4))

$\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$的演绎定理

$\Sigma, \alpha \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \beta$ 当且仅当 $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha \to \beta$.

证明与P中演绎定理的证明非常类似，只须将其中的"P的公式" 改为"$\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$的公式"即可.

例15的重新证明

证明：$\{\alpha \to \forall x\beta,\ \alpha\} \vdash \beta$

证：

(1) $\alpha \to \forall x\beta$ (前提)

(2) α (前提)

(3) $\forall x\beta$ (M)

(4) $\forall x\beta \to \beta$ $(K4)$

(5) β (M)

由演绎定理得：$\{\alpha \to \forall x\beta\} \vdash \alpha \to \beta$.

由性质(4)得：$\{\alpha \to \forall x\beta) \vdash \forall x(\alpha \to \beta)$

(注意：x不在$\alpha \to \forall x\beta$中自由出现)

再由演绎定理得：$\vdash (\alpha \to \forall x\beta) \to \forall x(\alpha \to \beta)$.

例19

若x不在β中自由出现,

证明$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x(\alpha \to \beta) \to (\exists x\alpha \to \beta)$

证:

由例17得 $\{\forall x(\alpha \to \beta), \ \neg\beta\} \vdash \forall x \neg\alpha$.

从而$\{\forall x(\alpha \to \beta)\} \vdash \neg\beta \to \forall x \neg\alpha$.

而$\vdash (\neg\beta \to \forall x \neg\alpha) \to (\neg\forall x \neg\alpha \to \beta)$

故$\{\forall x(\alpha \to \beta)\} \vdash (\neg\beta \to \forall x \neg\alpha) \to (\neg\forall x \neg\alpha \to \beta)$

由性质(1)知$\{\forall x(\alpha \to \beta)\} \vdash \neg\forall x \neg\alpha \to \beta$.

即$\{\forall x(\alpha \to \beta)\} \vdash \exists x\alpha \to \beta$.

故$\vdash \forall x(\alpha \to \beta) \to (\exists x\alpha \to \beta)$

作业

p.560(p.185)

20. (1), (3), (5)

21. (2), (4)

谢　谢