拓展资源 - 序数、集合论公理、集合论悖论、 3x+1 猜想

第一编 集合论 第 6 章 序数

内容提要

- 序数
- 集合论公理
- 集合论悖论
- 3x+1 猜想

良序

- 良序：任何非空子集都有最小元的偏序
- 良序集的计数过程：$<A,<>$

$$t_0 = \min(A),$$

$$t_1 = \min(A-\{t_0\}),$$

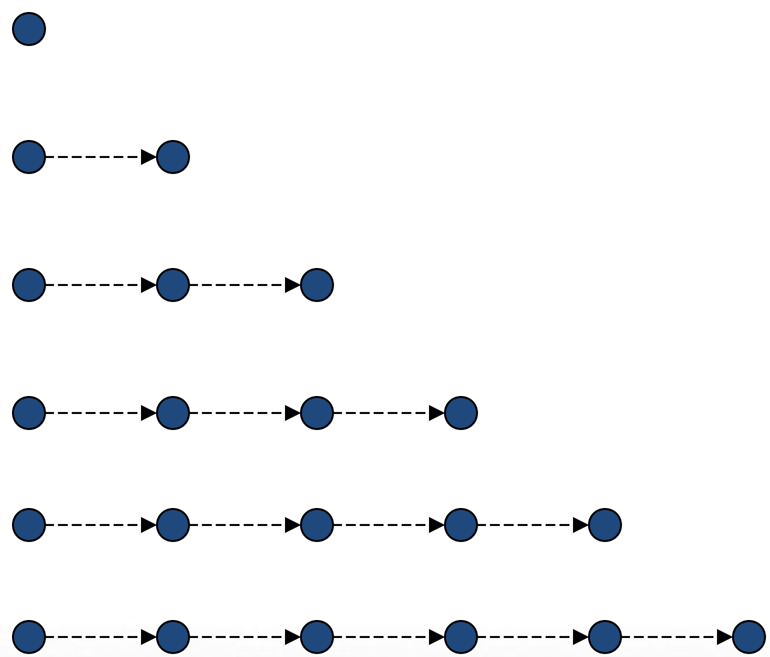
$$t_2 = \min(A-\{t_0,t_1\}),$$

$$\ldots\ldots$$

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < \ldots$$

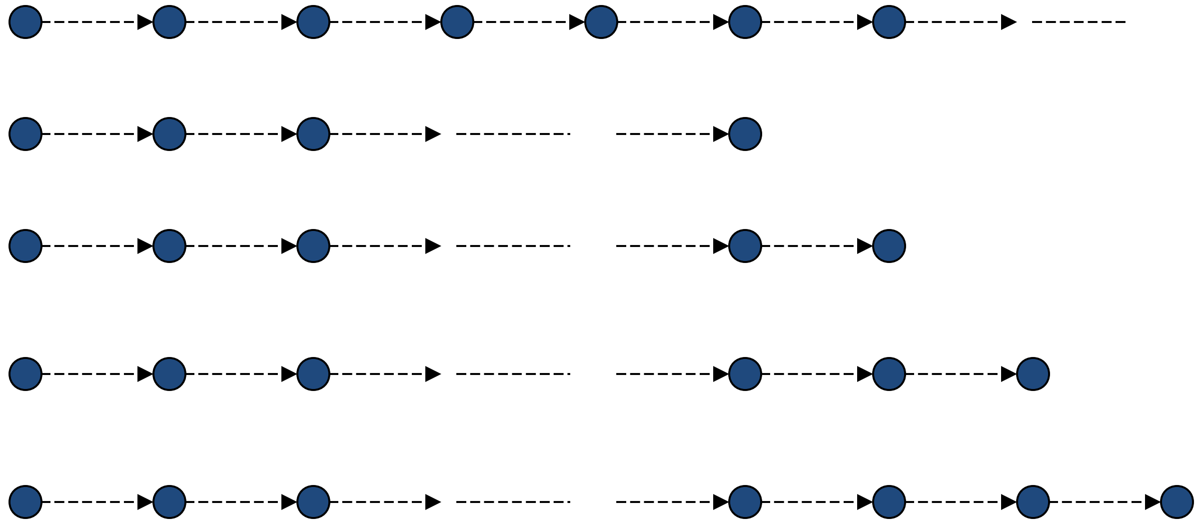
序数：0, 1, 2, …

- 0　　0=∅ 是良序集
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- …



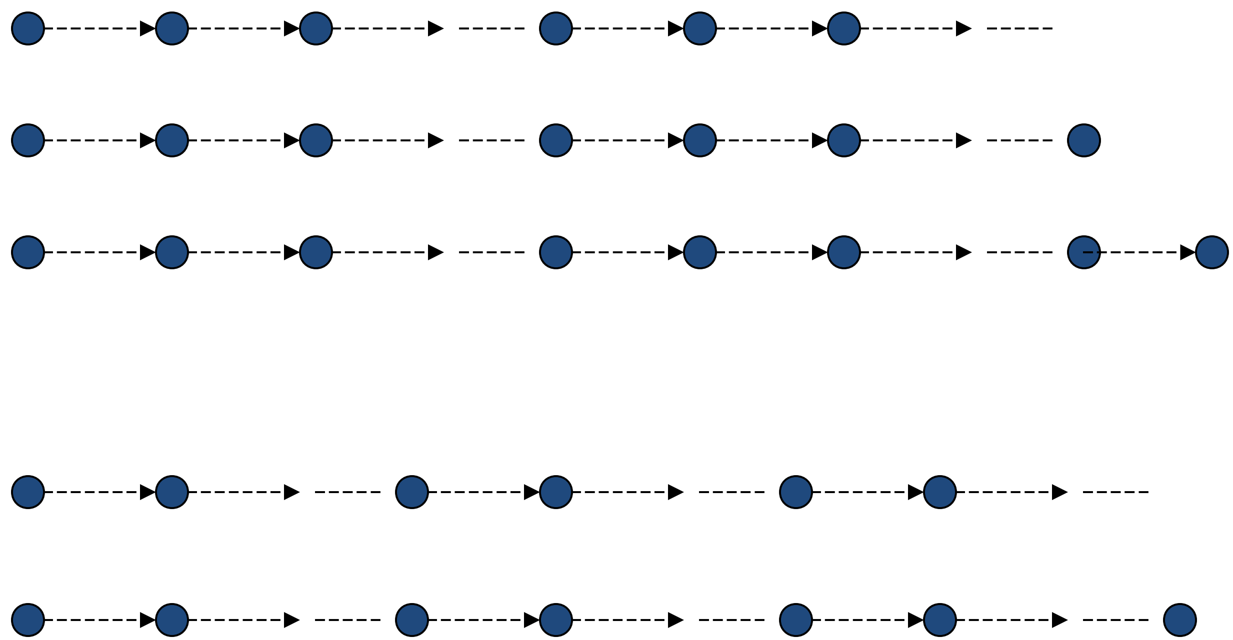
序数：ω, ω+1, ω+2, ...

- ω
- ω+1
- ω+2
- ω+3
- ω+4
- ……



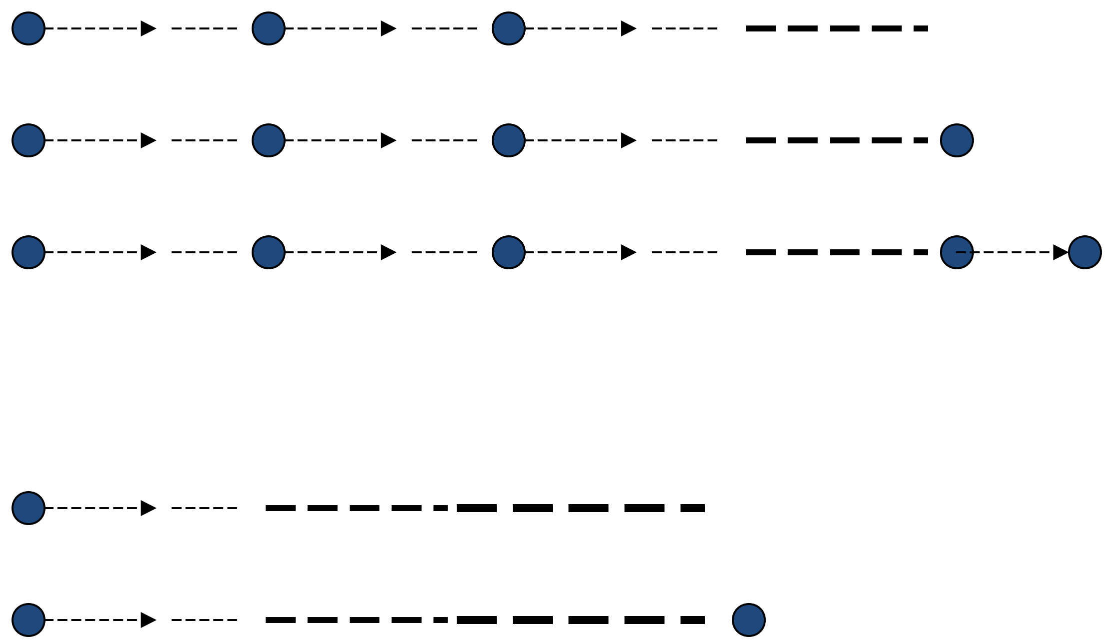
序数：2ω, …, 3ω, …

- $\omega+\omega=2\omega$
- $2\omega+1$
- $2\omega+2$
- …
- 3ω
- $3\omega+1$
- …



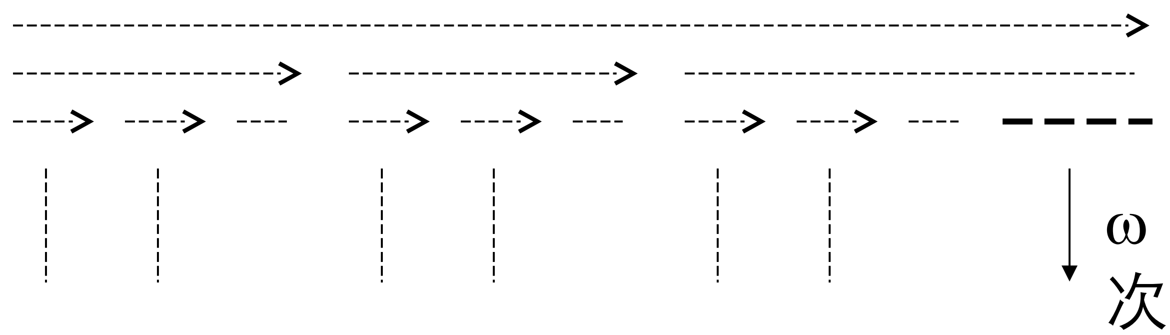
序数：$\omega^2, \omega^2+1, \ldots, \omega^3, \ldots$

- $\omega\omega=\omega^2$
- ω^2+1
- ω^2+2
- …
- ω^3
- ω^3+1
- …



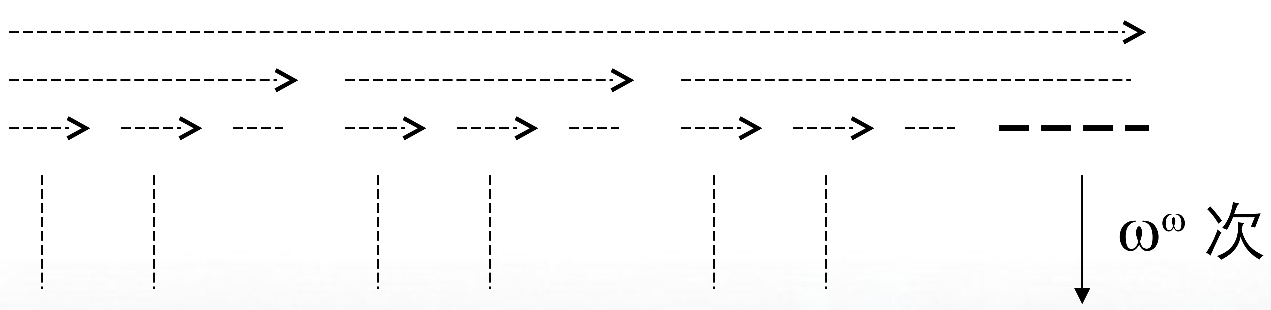
序数：$\omega^{\omega},\cdots,\omega^{\omega^{\omega}},\cdots$

- ω^{ω}



- ……

- $\omega^{\omega^{\omega}}$



- ……

三类序数

- 0
- 后继序数：$1, 2, \ldots, \omega+1, \omega+2, \ldots$（有头有尾）
- 极限序数：$\omega, 2\omega, \omega^2, \omega^\omega, \ldots$（有头无尾）

序数与基数

- 基数：

$$0,1,2,\cdots,\aleph_0,2^{\aleph_0},2^{2^{\aleph_0}},2^{2^{2^{\aleph_0}}},\cdots$$

- 序数：

$$0,1,2,\cdots,\omega,\omega+1,\cdots,2\omega,\cdots,\omega^2,\cdots,\omega^\omega,\cdots,\omega^{\omega^\omega},\cdots$$

- 初始序数：不与前面的序数等势的序数

$$0,1,2,\cdots,\omega,\omega^\omega,\omega^{\omega^\omega},\cdots$$

连续统假设 (CH)

- Georg Cantor(1845~1918)，最早提出

$$\neg\exists\kappa(\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0})$$

- David Hilbert(1862~1943),1900 年，著名的 23 个问题之一
- Kurt Gödel(1906~1978),1938 年，相容性
- Paul Cohen(1934~), 1963 年，独立性
- 集合论公理系统：ZF, ZFC, ZFC+CH

ZF 系统

- 外延公理 : $A=B \Leftrightarrow \forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B)$
- 无序对公理 : a,b 是集合 $\Rightarrow$ $\{a,b\}$ 是集合
- 子集公理 : A 是集合 $\Rightarrow$ $\{x\in A | P(x)\}$ 是集合

(定义 $A\cap B = \{ x\in A \mid x\in B \}$)

- 并集公理 : $\mathcal{A}$ 是集族 $\Rightarrow$ $\cup\mathcal{A}$ 是集合

(配合无序对公理，定义 $A\cup B = \cup\{A,B\}$)

ZF 系统 (续)

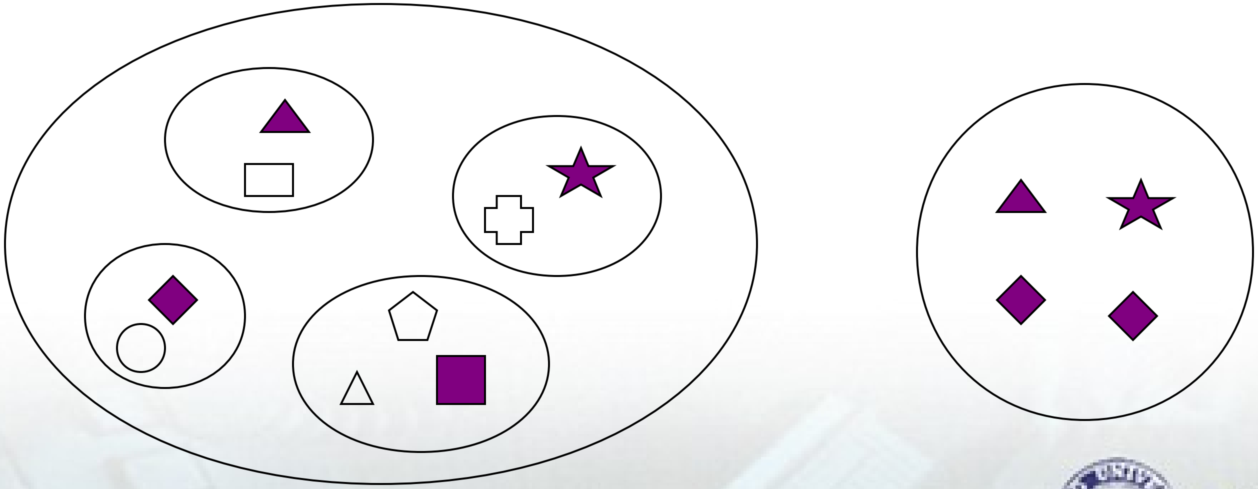
- 幂集公理 : A 是集合 $\Rightarrow$ P(A) 是集合
- 空集公理 : $\varnothing$ 是集合
- 正则公理 : A 是非空集合 $\Rightarrow$ A 有基础元素 (基础元素： 不属于 A 中其他元素的元素).

(用途： 防止 $A\in A$)

- 替换公理 : f 是 A 上函数 $\Rightarrow$ $\{ f(a) \mid a\in A \}$ 是集合
- 无穷公理： N 是集合

ZFC 系统

- ZF 系统 + 选择公理 (Choice axiom)
- 选择公理：$\mathcal{A}$ 是元素互不相交的非空集族，可以从 $\mathcal{A}$ 的每个元素中选择一个元素，组成一个集合



选择公理的等价形式（部分）

- 广义选择公理： 任何非空集族都有选择函数 ($f:\mathcal{A}\to\bigcup\mathcal{A}$, $f(X)\in X$)
- 良序原理： 任何集合都可良序化
- Zorn 引理：链总有上界的非空偏序集存在极大元
- Hausdorff 极大原理：任何链都包含于极大链
- 三歧性原理：

  A,B 是集合 $\Rightarrow$ $|A|\le|B| \vee |B|\le|A|$

ZFC+CH 系统

- ZF+C+CH
- ZF: Zermelo-Fraenkel 公理 (9 条)
- C: 选择公理
- CH: 连续统假设

罗素悖论

- $X=\{x \mid x \neq \varnothing\}$, $\{a\} \neq \varnothing$, $\{a\} \in X$, $X \neq \varnothing$, $X \in X$
- $\varnothing \notin \varnothing$, $\{a\} \notin \{a\}$, $\exists x (x \notin x)$
- $S = \{ x \mid x \notin x \}$

$$S \in S \ ?$$

$$S \in S \Rightarrow S \notin S$$

$$S \notin S \Rightarrow S \in S$$

集合论公理 (ZFC)

- 外延公理：所含元素相同的两个集合是相等的
- 空集存在公理：空集合存在
- 无序对公理：对任意的集合 a,b, {a,b} 存在
- 并集公理：对任意的集合 $\mathcal{A}$, $\cup\mathcal{A}$ 存在
- 幂集公理：对任意的集合 A, P(A) 存在

集合论公理（续）

- 子集公理： 对任意集合 A, $\{x\in A \mid P(x)\}$ 存在
- 正则公理：若 $S\neq\varnothing$, 则

$$\exists x(x\in S\wedge\forall y(y\in S\rightarrow x\notin y))$$

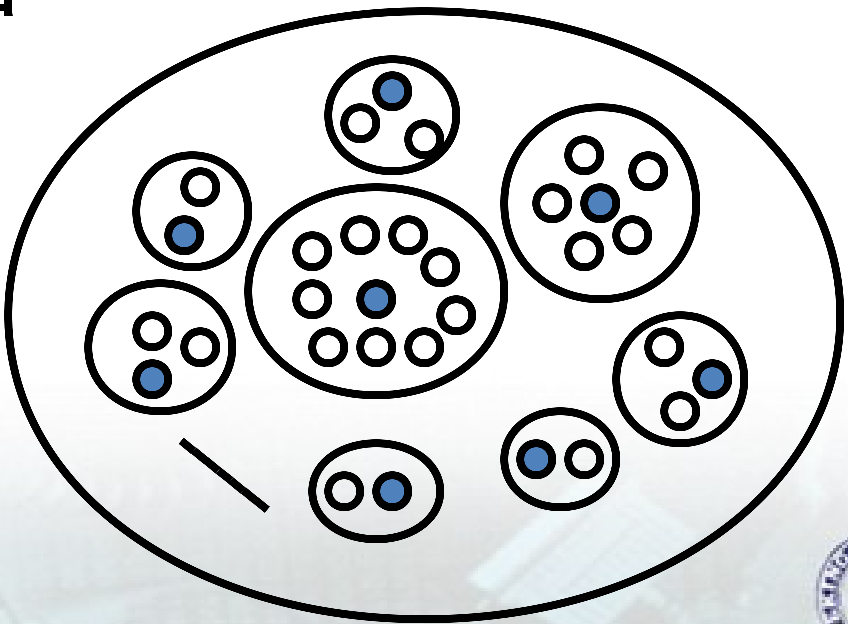
- 无穷公理：无穷集存在
- 替换公理：$\{ f(a) \mid a\in A \}$ 存在

（f 是定义域为 A 的函数）

北京大学

集合论公理（续）

- 选择公理 (Zorn 引理，良序原理): A 是元素互不相交的集合，则可以从 A 的每个非空元素中恰好选择一个元素，构成一个集合



Collatz 猜想 (3x+1 猜想)

- Collatz 猜想 (Collatz conjecture):

$$\forall m \in N_+, \exists k \in N_+, \ f^k(m)=1$$

其中 f^k 是 f 的 k 次复合 , $f: N_+ \to N_+$,

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n\text{是偶数} \\ 3n+1 & n\text{是奇数} \end{cases}$$

- 在 2011 年宣布被解决 !

Collatz 猜想举例

- m=100
- 50,25,76,38,19,58,29,88,44,22,11,34,17,52,26,13,40,20,10,5,16,8,4,2,1

- m=120
- 60,30,15,46,23,70,35,106,53,160,80,40