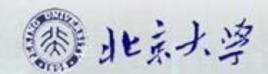
单元1.2 命题逻辑预备知识

第一编集合论 第一章集合

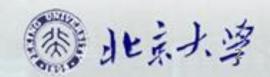
1.1 预备知识(上)



内容提要

命题逻辑中

- 最基本的逻辑符号、逻辑公式
- 基本的等值式
- 重要的推理定律(重言蕴涵式)

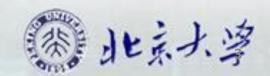


原子命题

用p,q,r,...表示原子命题(简单命题);

用"1"表示命题的真值为真;

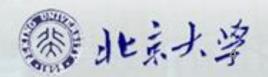
用"0"表示命题的真值为假。



联结词

用5种连接词给出最基本的复合命题。

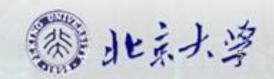
- ① ¬p 称为 p的否定式
- ② p/q 称为 p与q的合取式
- ③ pvq 称为 p与q的析取式
- ④ p→q 称为 p与q的蕴涵式
- ⑤ p↔q 称为 p与q的等价式



命题公式

用p,q,r...表示命题(命题常元)或命题变元

- ① 单个命题变元(或常元)是命题公式;
- ② 若A是命题公式,则(¬A)也是;
- ③ 若A,B是命题公式,则(A∧B),(A∨B), (A→B),(A↔B)也是;
- ④ 只有有限次应用(1)-(3)形成的符号串才是命题公式 (命题形式), 简称公式。



命题公式的赋值

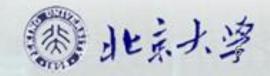
设命题公式A中有n个命题变元 $p_1, p_2, ..., p_n$,

给 p_i 指定一个值 α_i (α_i 为0或1, i=1,2,...,n),

所得字符串 $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ 称为A的一个赋值,

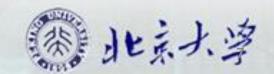
A共有2n个赋值。

如果在 $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ 下A的真值为1,则称它为A的成真赋值,否则,A的真值为0,则称它为A的成假赋值。



永真、永假、可满足、等值式

若公式A没有成假赋值,则称A为重言式(永真式)。 若公式A没有成真赋值,则称A为矛盾式(永假式)。 若公式A至少存在一个成真赋值,则称A为可满足式。 若A↔B是重言式,则称A与B是等值的,记为A⇔B, 并称A⇔B为等值式。



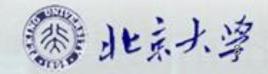
基本的等值式(①~④)

- ① 幂等律 A ⇔ A∨A, A ⇔ A∧A
- ② 交换律 A∨B⇔B∨A, A∧B⇔B∧A
- ③ 结合律 (A∨B)∨C⇔ A∨(B∨C)

 $(A \land B) \land C \Leftrightarrow A \land (B \land C)$

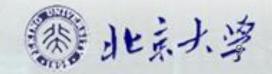
④ 分配律 A∨(B∧C)⇔(A∨B)∧(A∨C)

 $A \land (B \lor C) \Leftrightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$



基本的等值式(⑤~⑩)

- ⑤ 德●摩根律 ¬(A∨B)⇔¬A∧¬B, ¬(A∧B)⇔¬A∨¬B
- ⑥ 吸收律 A∨(A∧B)⇔A, A∧(A∨B)⇔A
- ⑦ 零律 A∨1⇔1, A∧0⇔0
- ⑧ 同一律 A∨0 ⇔ A, A∧1 ⇔ A
- ⑨排中律 A∨¬A⇔1
- ⑩ 矛盾律 A∧¬A⇔ 0



基本的等值式(11)~(16))

11) 双重否定律

 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

12 蕴涵等值式

 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \lor B$

13 等价等值式

 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$

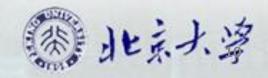
14)等价否定等值式

 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

15) 假言易位

 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

(16) 归谬论 (A→B)∧(A→¬B)⇔¬A



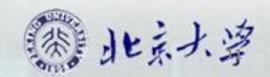
置换规则

置换规则:

设 $\Phi(A)$ 是含公式A的公式,

用公式B置换 $\Phi(A)$ 中的A,得公式 $\Phi(B)$,

如果 $A \Leftrightarrow B$,则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$ 。



等值演算

$$p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$\Leftrightarrow p \rightarrow (\neg q \lor r)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \lor (\neg q \lor r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \lor \neg q) \lor r$$

$$\Leftrightarrow \neg (p \land q) \lor r$$

$$\Leftrightarrow (p \land q) \rightarrow r$$

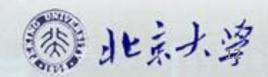
(蕴涵等值式, 置换规则)

(蕴涵等值式,置换规则)

(结合律, 置换规则)

(德●摩根律, 置换规则)

(蕴涵等值式,置换规则)

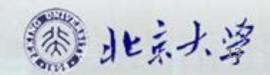


推理的形式结构

• 前提: A₁, A₂, ..., A_k 结论: B

推理的形式结构: $(A_1 \land A_2 \land ... \land A_k) \rightarrow B$

- 当推理的形式结构为重言式,则称推理正确,否则称推理不正确
- 用 "A⇒B"表示 "A→B"是永真式,当推理正确
 时,记为(A₁∧A₂∧…∧Aೖ)⇒B,称为推理定律



重要的推理定律(①~④)

①附加律

 $A \Rightarrow (A \lor B)$

② 化简律

$$(A \land B) \Rightarrow A$$

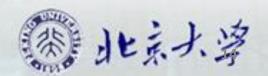
$$(A \land B) \Rightarrow B$$

③ 假言推理

$$(A \rightarrow B) \land A \Rightarrow B$$

④ 拒取式

$$(A \rightarrow B) \land \neg B \Rightarrow \neg A$$



重要的推理定律(⑤~⑧)

⑤析取三段论

$$(A \lor B) \land \neg A \Rightarrow B$$

$$(A \lor B) \land \neg B \Rightarrow A$$

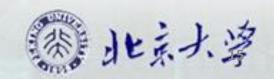
⑥ 假言三段论

$$(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$$

⑦等价三段论

$$(A \leftrightarrow B) \land (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$$

⑧ 构造性两难 (A→B)∧(C→D)∧(A∨C) ⇒ (B∨D)



判断推理正确的方法

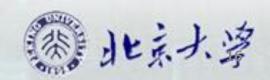
判断推理是否正确,就是判断推理的形式结构 $(A_1 \land A_2 \land ... \land A_k) \rightarrow B$ 是否为重言式

判断重言式的方法: 真值表法、等值演算法

方法一: $(A_1 \land A_2 \land ... \land A_k) \rightarrow B \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow 1$

方法二: $(A_1 \land A_2 \land ... \land A_k) \Rightarrow ... \Rightarrow B$

例: 前提: $p \rightarrow (q \rightarrow r)$, p, q 结论: r



方法一

$$(p\rightarrow (q\rightarrow r))\land p\land q\rightarrow r \Leftrightarrow (\neg p\lor (\neg q\lor r))\land p\land q\rightarrow r$$

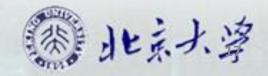
$$\Leftrightarrow ((\neg p \land p) \lor ((\neg q \lor r) \land p)) \land q \rightarrow r$$

$$\Leftrightarrow ((\neg q \lor r) \land q) \land p \rightarrow r$$

$$\Leftrightarrow ((\neg q \land q) \lor (r \land q)) \land p \rightarrow r \Leftrightarrow (r \land q \land p) \rightarrow r$$

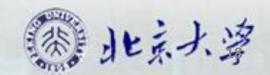
$$\Leftrightarrow \neg (r \land q \land p) \lor r \Leftrightarrow \neg r \lor \neg q \lor \neg p \lor r$$

$$\Leftrightarrow \neg q \lor \neg p \lor (\neg r \lor r) \Leftrightarrow \neg q \lor \neg p \lor 1 \Leftrightarrow 1$$



方法二

$$(p\rightarrow (q\rightarrow r)) \land p \land q$$



小结

逻辑符号: 原子命题 p,q,r,...、真值 0,1、

联结词¬∧∨→↔、等值⇔、推出⇒

逻辑概念: 公式、赋值、永真式、永假式、可满足式、

等值式、等值演算、推理的形式结构、

推理定律

逻辑规则: 置换规则

