赋值

王捍贫

北京大学信息科学技术学院软件研究所

复习

- 命题演算推理形式系统N和P.
- N和P的核心是推理。
- 但在N或P中，符号、公式本身是没有含义的。

— 在推理过程中并不看公式的真假，而只看是否为公理或规则。

- 形式系统是否具有预计的性质?

— 内定理是否一定是正确的?

- 什么叫“公式是正确的”？

§9 赋值

- 对形式系统**P**(等价地，**N**)进行赋值，就是对**P**的每个公式分配一个值.
- 首先要对每个命题符号分配一个值.

指派

定义17: 形式系统**P**的一个指派是指如下的映射σ:

$$\sigma: \{p_0, p_1, p_2, \cdots\} \to \{0,\ 1\}$$

$\sigma(p_i)$ $(i \in \mathbb{N})$称为命题符号p_i在指派σ下的值.

赋值

定义18：设σ是形式系统**P**的一个指派，如下归纳定义**P**中公式α 在指派σ下的值α^σ:

- 若α是命题变元p_i，则$\alpha^\sigma = \sigma(p_i)$.
- 若α是$(\neg\beta)$，则$\alpha^\sigma = 1 - \beta^\sigma$.
- 若α是$(\beta\rightarrow\gamma)$，则$\alpha^\sigma = \max\{1 - \beta^\sigma,\ \gamma^\sigma\}$.

简单性质

(1) 对任意公式α和指派σ, $\alpha^\sigma \in \{0,1\}$.

(2) $(\neg\beta)^\sigma$和$(\beta\rightarrow\gamma)^\sigma$的值如下表:

α^σ	$(\neg\,\alpha)^\sigma$
0	1
1	0

α^σ	β^σ	$(\alpha\rightarrow\beta)^\sigma$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

与$\neg$、$\rightarrow$的真值表相同。

$\alpha \vee \beta$的值

(1) $\alpha \vee \beta$是$(\neg\,\alpha) \to \beta$的简写.

(2)

$$(\alpha \vee \beta)^\sigma$$

$$= ((\neg\,\alpha) \to \beta)^\sigma$$

$$= \max\{1 - (\neg\alpha)^\sigma,\ \beta^\sigma\}$$

$$= \max\{1 - (1 - \ \alpha^\sigma),\ \beta^\sigma\}$$

$$= \max\{\alpha^\sigma, \beta^\sigma\}$$

α^σ	β^σ	$(\alpha \vee \beta)^\sigma$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\alpha \wedge \beta$的值

(1) $\alpha \wedge \beta$是$\neg(\alpha \to \neg\beta)$的简写.

(2)

$$
\begin{aligned}
&(\alpha \wedge \beta)^\sigma \\
&= 1 - (\alpha \to \neg\beta)^\sigma \\
&= 1 - \max\{1 - \alpha^\sigma,\ (\neg\beta)^\sigma\} \\
&= 1 - \max\{1 - \alpha^\sigma,\ 1 - \beta^\sigma\} \\
&= 1 - (1 + \max\{-\alpha^\sigma,\ -\beta^\sigma\} \\
&= -(-\min\{\alpha^\sigma,\ \beta^\sigma\}) \\
&= \min\{\alpha^\sigma, \beta^\sigma\}
\end{aligned}
$$

α^σ	β^σ	$(\alpha \wedge \beta)^\sigma$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\alpha \leftrightarrow \beta$的值

(1) $\alpha \leftrightarrow \beta$是$\neg((\alpha \to \beta) \to \neg(\beta \to \alpha))$的简写.

(2) $(\alpha \leftrightarrow \beta)^\sigma$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - ((\alpha \to \beta) \to \neg(\beta \to \alpha))^\sigma \\
&= 1 - \max\{1 - (\alpha \to \beta)^\sigma, 1 - (\beta \to \alpha))^\sigma\} \\
&= \min\{(\alpha \to \beta)^\sigma, (\beta \to \alpha)^\sigma\} \\
&= \min\{\max\{1 - \alpha^\sigma, \beta^\sigma\}, \max\{1 - \beta^\sigma \alpha^\sigma\}\} \\
&= \min\{\max\{1, \alpha^\sigma + \beta^\sigma\} - \alpha^\sigma, \\
&\qquad\qquad \max\{1, \alpha^\sigma + \beta^\sigma\} - \beta^\sigma\} \\
&= \max\{1, \alpha^\sigma + \beta^\sigma\} + \min\{-\alpha^\sigma, -\beta^\sigma\} \\
&= \max\{1, \alpha^\sigma + \beta^\sigma\} - \max\{\alpha^\sigma, \beta^\sigma\}
\end{aligned}
$$

$\alpha \leftrightarrow \beta$的值表

α^σ	β^σ	$(\alpha \leftrightarrow \beta)^\sigma$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

结论

α在指派σ下的值α^σ

$=$

将α作为命题形式时，α关于p_0，p_1，p_2,$\cdots$的指派 $< \sigma(p_0)$，$\sigma(p_1)$，$\sigma(p_2)$，$\cdots >$的值.

例34

求**P**中下列公式在指派σ下的值:

(1) $(p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3$, σ定义为:

$$\sigma(p_i) = \begin{cases} 0 & i = 2k+1 \\ 1 & i = 2k \end{cases} \quad (k\text{为任意自然数}).$$

(2) $p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (p_1 \wedge p_2))$, σ是任意的指派.

例34(1)的解

(1) $(p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3$

解:

$$
\begin{aligned}
& (p_1 \vee p_2)^\sigma \\
= \ & \max\{1-(\neg p_1)^\sigma, p_2^\sigma\} \\
= \ & \max\{1-(1-p_1^\sigma), p_2^\sigma\} \\
= \ & \max\{p_1^\sigma, p_2^\sigma\} \\
= \ & \max\{\sigma(p_1), \sigma(p_2)\} \\
= \ & \max\{0, 1\} \\
= \ & 1
\end{aligned}
$$

例34(1)的解(续)

(1) $(p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3$

解: $((p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3)^\sigma$

$$= \max\{1 - (p_1 \vee p_2)^\sigma, p_3^\sigma\}$$

$$= \max\{1 - 1, \sigma(p_3)\}$$

$$= \max\{0, 0\}$$

$$= 0$$

例34(2)的解

(2) $p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (p_1 \wedge p_2))$, σ是任意的指派.

解: (2) 直接根据联结词的真值表来确定公式的值.

$\sigma(p_1)$	$\sigma(p_2)$	$(p_1 \wedge p_2)^\sigma$	$(p_2 \rightarrow (p_1 \wedge p_2))^\sigma$	α^σ
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

哑元无关性

定理16 设在**P**的公式α中出现的命题符号都在p_{i_1}, p_{i_2}, $\cdots$, p_{i_n}中, 若**P**的两个指派σ_1, σ_2满足: $\sigma_1(p_{i_k}) = \sigma_2(p_{i_k})$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, 则$\alpha^{\sigma_1} = \alpha^{\sigma_2}$.

公式的分类

定义20

- 若对**P**的任一指派σ，$\alpha^\sigma = 1$，则称α为一个重言式(或永真式).
- 若对**P**的任一指派σ，$\alpha^\sigma = 0$，则称α为一个矛盾式(或永假式).
- 若存在**P**的指派σ，使$\alpha^\sigma = 1$，则称α为一个可满足式.

永真式的例子

定理17　P的公理都是永真式

证:　下证(A3)是永真式。

$\sigma(\alpha)$	$\sigma(\beta)$	$(\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)^{\sigma}$	$(\beta\rightarrow\alpha)^{\sigma}$	$(A3)^{\sigma}$
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1

(M)的保真性

定理18　P的分离规则保持永真性，

即:若α和$\alpha \to \beta$都是永真式，则β也是永真式.

证:

若不然，则存在**P**的指派σ使$\beta^\sigma = 0$.

由于α为重言式，故$\alpha^\sigma = 1$，从而$(\alpha\to\beta)^\sigma = 0$,

与$\alpha\to\beta$为重言式矛盾.

替换定理

定理19　设α是**P**中公式，q_1，q_2，$\cdots$，q_n是**P**中命题变元符号，β_1，β_2，$\cdots$，β_n是**P**中另外n个公式，将α中每个q_i(若有)换为β_i $(1 \leq i \leq n)$所得的公式为β. 若α为重言式，则β也为重言式..

说明:

$$
\begin{array}{llllllll}
\alpha: & \cdots & q_1 & \cdots & q_2 & \cdots & \cdots & q_n & \cdots \\
\beta: & \cdots & \beta_1 & \cdots & \beta_2 & \cdots & \cdots & \beta_n & \cdots
\end{array}
$$

替换定理的证明

证:

若对**P**的任一个指派σ，　令$\beta_i^\sigma = t_i \ (1 \leq i \leq n)$.
作**P**的另一个指派τ如下:

$$\tau(p) = \begin{cases} t_i & 若 p = q_i (1 \leq i \leq n) \\ \sigma(p) & 若 p \notin \{q_1, q_2, \cdots, q_n\} \end{cases}$$

任意$p \in \{p_0, p_1, p_2, \cdots\}$

则$\beta^\sigma = \alpha^\tau$ (可对α归纳证之).

由于α为重言式，故$\beta^\sigma = \alpha^\tau = 1$，即$\beta$为重言式.

使用替换定理要注意的问题

作替换时要注意两个问题，否则不能保证永真性：

- 若将q_i替换为β_i，须将q_i的所有出现都换为β_i.
  反例: $p_1 \to p_1 \rightsquigarrow p_2 \to p_1$,
  前者是重言式，后者不是.

- 替换时只能替换命题变元，不能替换公式.
  反例: $p_1 \to (p_2 \to p_1) \rightsquigarrow p_1 \to p_2$,
  前者是重言式，后者不是.

作业

p.509(p.102). 21

谢 谢

复习

- 赋值就是(在给定的指派下)赋给每个公式一个真假值。
- 赋值的方式与命题形式相同。
- 公式可以分为三类:
  - 永真式
  - 永假式
  - 可满足式
- 永真式的性质，替换定理。

下面考虑一类特殊的永真式。

公式的等值

定义21

(1) 若$(\alpha \leftrightarrow \beta)$是一个重言式，则称$\alpha$等值于$\beta$，记为$\alpha \Leftrightarrow \beta$.

(2) 若$(\alpha \rightarrow \beta)$是一个重言式，则称$\alpha$逻辑蕴含$\beta$，记为$\alpha \Rightarrow \beta$.

注意$\leftrightarrow$和$\Leftrightarrow$、$\rightarrow$和$\Rightarrow$的不同用法。

常用等值公式(I)

交换律

$$(\alpha \vee \beta) \Longleftrightarrow (\beta \vee \alpha)$$

$$(\alpha \wedge \beta) \Longleftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \Longleftrightarrow (\beta \leftrightarrow \alpha).$$

常用等值公式(II)

结合律

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \Longleftrightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \Longleftrightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma \Longleftrightarrow \alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)$$

常用等值公式(III)

分配律

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \Longleftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \Longleftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

$$\alpha \to (\beta \to \gamma) \Longleftrightarrow (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma).$$

常用等值公式(IV)

否定律

$$\alpha \Longleftrightarrow \neg\neg\alpha$$ 双重否定率

$$\neg(\alpha \vee \beta) \Longleftrightarrow (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$$ 德·摩根率

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \Longleftrightarrow (\neg\alpha) \vee (\neg\beta).$$ 德·摩根率

常用等值公式(V)

幂等律

$$\alpha \vee \alpha \Longleftrightarrow \alpha$$

$$\alpha \wedge \alpha \Longleftrightarrow \alpha.$$

吸收率

$$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \alpha$$

$$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \alpha.$$

常用等值公式(VI)

蕴含等值式

$$\alpha \rightarrow \beta \Longleftrightarrow (\neg \alpha) \vee \beta$$

假言易位

$$\alpha \rightarrow \beta \Longleftrightarrow (\neg \beta) \rightarrow (\neg \alpha)$$

归谬律

$$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \neg \beta) \Longleftrightarrow \neg \alpha$$

常用等值公式(VII)

等价等值式

$$\alpha \leftrightarrow \beta \iff (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha).$$

等价否定等值式

$$\alpha \leftrightarrow \beta \iff \neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta.$$

常用等值公式(VIII)

零律

$\alpha \vee 1 \Longleftrightarrow 1, \qquad \alpha \wedge 0 \Longleftrightarrow 0.$

同一律

$\alpha \vee 0 \Longleftrightarrow \alpha, \qquad \alpha \wedge 1 \Longleftrightarrow \alpha.$

排中律

$\alpha \vee (\neg \alpha) \Longleftrightarrow 1.$

矛盾律

$\alpha \wedge (\neg \alpha) \Longleftrightarrow 0.$

注1：这里"0"、"1"都不是公式，分别代表了任意的矛盾式和重言式

注2：Bool代数。

第一替换定理

定理20 将α,β中命题符号q_1，q_2，$\cdots$，q_n(若有)全都分别换为公式γ_1，γ_2，$\cdots$，γ_n后分别得公式α',β'. 若$\alpha \Longleftrightarrow \beta$, 则$\alpha' \Longleftrightarrow \beta'$.

说明: $\alpha: \quad \cdots \quad q_1 \quad \cdots \quad q_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad q_n \quad \cdots$

$\beta: \quad \cdots \quad q_2 \quad \cdots \quad q_3 \quad \cdots \quad \cdots \quad q_n \quad \cdots$

第一替换定理

定理20 将α, β中命题符号q_1, q_2, $\cdots$, q_n(若有)全都分别换为公式γ_1, γ_2, $\cdots$, γ_n后分别得公式α', β'. 若$\alpha \Longleftrightarrow \beta$, 则$\alpha' \Longleftrightarrow \beta'$.

说明:

$$\begin{array}{lcccccccccc}
\alpha: & \cdots & q_1 & \cdots & q_2 & \cdots & \cdots & q_n & \cdots \\
\beta: & \cdots & q_2 & \cdots & q_3 & \cdots & \cdots & q_n & \cdots \\
\alpha': & \cdots & \gamma_1 & \cdots & \gamma_2 & \cdots & \cdots & \gamma_n & \cdots \\
\beta': & \cdots & \gamma_2 & \cdots & \gamma_3 & \cdots & \cdots & \gamma_n & \cdots
\end{array}$$

第一替换定理

定理20 将α,β中命题符号q_1，q_2，$\cdots$，q_n(若有)全都分别换为公式γ_1，γ_2，$\cdots$，γ_n后分别得公式α',β'. 若$\alpha \Longleftrightarrow \beta$，则$\alpha' \Longleftrightarrow \beta'$.

说明:
$$\begin{array}{lcccccc}
\alpha: & \cdots & q_1 & \cdots & q_2 & \cdots & \cdots & q_n & \cdots \\
\beta: & \cdots & q_2 & \cdots & q_3 & \cdots & \cdots & q_n & \cdots \\
\alpha': & \cdots & \gamma_1 & \cdots & \gamma_2 & \cdots & \cdots & \gamma_n & \cdots \\
\beta': & \cdots & \gamma_2 & \cdots & \gamma_3 & \cdots & \cdots & \gamma_n & \cdots
\end{array}$$

证: 由于$\alpha \Longleftrightarrow \beta$，故$\alpha \leftrightarrow \beta$为重言式。
由定理19知：$\alpha' \leftrightarrow \beta'$也为重言式，故$\alpha' \Longleftrightarrow \beta'$.

第二替换定理

定理21 设α, β, γ, δ为**P**中公式, 且δ是用β替换γ中的某些α得到的公式, 若$\alpha \Longleftrightarrow \beta$, 则$\gamma \Longleftrightarrow \delta$.

说明:
$$\begin{array}{lcccccccc} \gamma: & \cdots & \alpha & \cdots & \alpha & \cdots & \cdots & \alpha & \cdots \\ \delta: & \cdots & \beta & \cdots & \alpha & \cdots & \cdots & \beta & \cdots \end{array}$$

证: 对**P**的任一指派σ, 因$\alpha \Longleftrightarrow \beta$, 故$\alpha^\sigma = \beta^\sigma$, 从而$\gamma^\sigma = \delta^\sigma$, 故$\gamma \Longleftrightarrow \delta$.

注意:这两个定理的使用条件.

第二替换定理的应用

设$\alpha_1 \Longleftrightarrow \beta_1$， $\alpha_2 \Longleftrightarrow \beta_2$, 则:

(1) $(\neg\,\alpha_1) \Longleftrightarrow (\neg\,\beta_1)$.

(2) $(\alpha_1 \vee \alpha_2) \Longleftrightarrow (\beta_1 \vee \beta_2)$.

(3) $(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \Longleftrightarrow (\beta_1 \wedge \beta_2)$.

(4) $(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \Longleftrightarrow (\beta_1 \rightarrow \beta_2)$.

(5) $(\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2) \Longleftrightarrow (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2)$.

简单性质

等值关系定义了P的公式集F_P上的一个等价关系，即:

(1) 任意$\alpha \in F_P$, $\alpha \Longleftrightarrow \alpha$.

(2) 任意α, $\beta \in F_P$, 若$\alpha \Longleftrightarrow \beta$, 则$\beta \Longleftrightarrow \alpha$.

(3) 任意α, β, $\gamma \in F_P$, 若$\alpha \Longleftrightarrow \beta$, $\beta \Longleftrightarrow \gamma$, 则$\alpha \Longleftrightarrow \gamma$.

作业

p.509(p.102).   23 (1)(5)(7)

25 (1)(2)(3)

26

谢 谢