$\mathrm{K}_{\mathscr{L}}$与$\mathrm{N}_{\mathscr{L}}$的等价性

王捍贫

北京大学信息科学技术学院软件研究所

证明思路

目标：证明: $\Sigma \vdash_{K_{\mathscr{L}}} \alpha$ iff $\Sigma \vdash_{N_{\mathscr{L}}} \alpha$.

证明思路与命题情形一样:

- $\Sigma \vdash_{K_{\mathscr{L}}} \alpha \Longrightarrow \Sigma \vdash_{N_{\mathscr{L}}} \alpha$.

  引理1：当α为公理的情形。

- 公$\Sigma \vdash_{N_{\mathscr{L}}} \alpha \Longrightarrow \Sigma \vdash_{K_{\mathscr{L}}} \alpha$.

引理

若γ为$\mathsf{K}_{\mathscr{L}}$的一个公理，则对$\mathsf{K}_{\mathscr{L}}$的任一有限公式集Σ，$\Sigma \vdash_{\mathsf{N}_{\mathscr{L}}} \gamma$.

证： 对γ的构造复杂性归纳证明.

(1)　若γ为(K1)–(K6)中的某一条.

(1.1) 若γ为(K1)–(K3)中某条，由定理3.1可证;

(1.2) 当γ为(K4)时:

由$(\forall -)$: $\forall x\alpha \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha(x/t)$　(其中t对x在α中自由).

由$(\rightarrow +)$: $\emptyset \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \forall x\alpha \rightarrow \alpha(x/t)$.

由于Σ是有限集，故$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \forall x\alpha \rightarrow \alpha(x/t)$.

引理(续)

(1.3) 当γ为(K5)时:
由($\forall+$): $\alpha \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \forall x\alpha$ (其中x不在α中自由出现).
从而 $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha \to \forall x\alpha$.

(1.4) 当γ为(K6)时:
由例6可证: $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$.

(2) 若γ为$\forall x\gamma'$时, 其中γ'为$\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$ 的一个公理.
由归纳假设得: $\emptyset \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \gamma'$.
从而由($\forall+$)知: $\emptyset \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \forall x\gamma'$.
故: $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \forall x\gamma'$.

$\mathsf{K}_{\mathscr{L}}$ "$\subseteq$" $\mathsf{N}_{\mathscr{L}}$

设Σ,α分别为有限公式集与公式. 若$\Sigma \vdash_{\mathsf{K}_{\mathscr{L}}} \alpha$, 则$\Sigma \vdash_{\mathsf{N}_{\mathscr{L}}} \alpha$.

证:

由于$\Sigma \vdash_{\mathsf{K}_{\mathscr{L}}} \alpha$, 在$\mathsf{K}_{\mathscr{L}}$中存在由$\Sigma$推出$\alpha$的证明序列

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \ (= \alpha)$$

下证：对任意i $(1 \leq i \leq n)$, $\Sigma \vdash_{\mathsf{N}_{\mathscr{L}}} \alpha_i$ (*)

对i进行归纳证明.

(1) 当$i = 1$时, α_1为$\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$的公理或 $\alpha_1 \in \Sigma$.

(1.1) 若α_1为$\mathsf{K}_{\mathscr{L}}$的公理, 由引理知: $\Sigma \vdash_{\mathsf{N}_{\mathscr{L}}} \alpha_1$.

(1.2) 若$\alpha_1 \in \Sigma$, 由($\in$)知: $\Sigma \vdash_{\mathsf{N}_{\mathscr{L}}} \alpha_1$.

$K_{\mathscr{L}}$"$\subseteq$"$N_{\mathscr{L}}$(续)

(2)　设$(*)$对满足$i < k$的所有自然数i成立$(k > 1)$，下证$i = k$时$(*)$也成立.

(2.1) 若$\alpha_k \in \Sigma$或α_k为$K_{\mathscr{L}}$的公理，仿(1)可证.

(2.2) 若α_k是由α_j，α_l $(1 \leq j, l < k)$用(M)得到，不妨设α_j为$\alpha_l \rightarrow \alpha_k$.

由归纳假设得：　$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha_j$，　$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha_l$.

即：$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha_l \rightarrow \alpha_k$，$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha_l$.

由$(\rightarrow -)$知：$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha_k$.

归纳证完，$(*)$成立.

从而$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha_n$. 即：$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha$.

$\mathsf{K}_{\mathscr{L}}$" $\supseteq$ "$\mathsf{N}_{\mathscr{L}}$

设Σ，α分别$\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$中的有限公式集与公式，若$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha$，则$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha$.

证:

由于$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha$，在$\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$中 存在证明序列:

$$\Sigma_1 \vdash \alpha_1,\ \Sigma_2 \vdash \alpha_2,\ \cdots,\ \Sigma_n \vdash \alpha_n$$

使得：$\Sigma_n = \Sigma$，$\alpha_n = \alpha$.

下证：对任意i $(1 \leq i \leq n)$，$\Sigma_i \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_i$ $\qquad (**)$

对i进行归纳证明.

(1) 当$i = 1$时, $\Sigma_1 \vdash \alpha_1$只能由$(\in)$得到, 从而$\alpha_1 \in \Sigma_1$，故$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_1$.

(2) 假设$(**)$对满足$i < k$的所有i成立, 考察$(**)$当$i = k$时情形.

(2.1) 若$\Sigma_k \vdash \alpha_k$是用$(\in)$、$(\neg -)$、$(\vee -)$、$(\vee +)$、$(\wedge -)$、$(\wedge +)$、$(\to -)$、$(\to +)$、$(\leftrightarrow -)$或$(\leftrightarrow +)$得到的, 仿上章定理2.15可证.

(2.2) 若$\Sigma_k \vdash \alpha_k$是对某个$\Sigma_i \vdash \alpha_i \quad (1 \leq i < k)$用$(+)$得到的, 即: $\Sigma_k = \Sigma_i \cup \{\gamma\}$，$\alpha_k = \alpha_i$.
由归纳假设得： $\Sigma_i \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_i$，从而$\Sigma_k \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_i$，即$\Sigma_k \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_k$.

(2.3) 若$\Sigma_k \vdash \alpha_k$是对$\Sigma_i \vdash \alpha_i$ 用$(\forall -)$得到的，即：$\Sigma_k = \Sigma_i$，$\alpha_i = \forall x\beta$，$\alpha_k = \beta(x/t)$，其中：$t$是$\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$中的项，$t$对$x$在$\beta$中自由．由归纳假设知：$\Sigma_i \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_i$，即：$\Sigma_k \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x\beta$． 由公理(K4)知：$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x\beta \to \beta(x/t)$，故$\Sigma_k \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x\beta \to \beta(x/t)$，从而$\Sigma_k \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \beta(x/t)$，即：$\Sigma_k \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_k$ ．

(2.4) 若$\Sigma_k \vdash \alpha_k$是对$\Sigma_i \vdash \alpha_i$ 用$(\forall +)$得到的，即：$\Sigma_k = \Sigma_i$，$\alpha_k = \forall x\alpha_i$，其中：个体变元符号$x$不在$\Sigma_i$的任何公式中 自由出现．由归纳假设得：$\Sigma_i \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_i$ ．由上节性质(4)知：$\Sigma_i \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x\alpha_i$，即：$\Sigma_k \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_k$ ．

(2.5) 若$\Sigma_k \vdash \alpha_k$是对$\Sigma_i \vdash \alpha_i$ 用$(\neg -)$得到的，即：$\Sigma_i = \Gamma \cup \{\gamma\}$， $\Sigma_k = \Gamma \cup \{\exists x\gamma\}$， $\alpha_k = \alpha_i$，其中：Γ是$\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$的一个有限公式集，x不在$\Gamma \cup \{\alpha_i\}$的任一个公式中自由出现. 由归纳假设知：$\Sigma_i \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_i$，即：$\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_i$. 由演泽定理知：$\Gamma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \gamma \to \alpha_i$. 由于$x$不在$\Gamma$的任何公式中自由出现，故$\Gamma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \gamma \to \alpha_i$. 因$x$不在$\alpha_i$中自由出现，由上节例3.19知：$\vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x(\gamma \to \alpha_i) \to (\exists x\gamma \to \alpha_i)$，故$\Gamma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \forall x(\gamma \to \alpha_i) \to (\exists x\gamma \to \alpha_i)$，从而 $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \exists x\gamma \to \alpha_i$. 再由演泽定理知：$\Gamma \cup \{\exists x\gamma\} \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_i$，即：$\Sigma_k \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_k$.

(2.6) 若$\Sigma_k \vdash \alpha_k$是对$\Sigma_i \vdash \alpha_i$ 用($\exists+$)得到的，即: $\Sigma_k = \Sigma_i$, $\alpha_i = \beta(x/t)$, $\alpha_k = \exists x\beta$，其中: $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$的个体变元符号x不在 β中自由. 由归纳假设知: $\Sigma_i \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \beta(x/t)$. 由上节例3.14知: $\Sigma_i \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \beta(x/t) \rightarrow \exists x\beta$，从而$\Sigma_i \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \exists x\beta$，即$\Sigma_k \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha_k$.

归纳证完，(**)成立.

$\mathsf{K}_{\mathscr{L}}$与NL的等价性

对$\mathbf{N}_{\mathcal{L}}$ ($\mathbf{K}_{\mathcal{L}}$)中的有限公式集$\mathbf{\Sigma}$与 公式α,

$$\mathbf{\Sigma} \vdash_{\mathbf{K}_{\mathcal{L}}} \alpha \text{ 当且仅当} \mathbf{\Sigma} \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha \ .$$

谢 谢