《第一次测验试题》解答

王捍贫

北京大学信息科学技术学院软件研究所

试题一

(12分）设p、q和r是命题变元，试求一个只含联结词$\neg$、$\rightarrow$ 的命题形式α使得 $\alpha \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \vee r$

解:

$$
\begin{aligned}
& (p \leftrightarrow q) \vee r \\
\Leftrightarrow & \big((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)\big) \vee r \\
\Leftrightarrow & \neg\big(\neg(p \rightarrow q) \vee \neg(q \rightarrow p)\big) \vee r \\
\Leftrightarrow & \neg\big((p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \rightarrow p)\big) \vee r \\
\Leftrightarrow & \big((p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \rightarrow p)\big) \rightarrow r
\end{aligned}
$$

则取α为$\big((p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \rightarrow p)\big) \rightarrow r$即可。

试题二

(16分）设p、q和r是命题变元，命题形式α为

$$p \to (\neg(q \vee r) \to r)$$

(1）写出α的真值表;

(2）求α的一个析取范式及一个合取范式;

解: (1）α的真值表为:

p	q	r	$\neg(q \vee r)$	$\neg(q \vee r) \to r$	α
0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

试题二(续1)

续解: (2) 如下求α的析取范式:

(2.1) α成真指派有:

$<0,0,0>, <0,1,0>, <0,0,1>,$
$<0,1,1>, <1,0,1>, <1,1,0>, <1,1,1>.$

(2.2) 对应的简单合取式分别为:

$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r, \quad \neg p \wedge q \wedge \neg r, \quad \neg p \wedge \neg q \wedge r,$
$\neg p \wedge q \wedge r, \quad p \wedge \neg q \wedge r, \quad p \wedge q \wedge \neg r, \quad p \wedge q \wedge r.$

(2.3) 所求的析取范式为:

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

试题二(续2)

续解: (3) 如下求α的合取范式

(3.1) α成假指派只有$< 1, 0, 0 >$.

(3.2) 对应的简单析取式为$\neg p \vee q \vee r$.

(3.3) 所求的析取范式为$\neg p \vee q \vee r$.

试题二(续3)

另解:

(1) 为求α的真值表，先“化简”α。

$$
\begin{aligned}
& p \rightarrow (\neg(q \vee r) \rightarrow r) \\
\Leftrightarrow\ & p \rightarrow ((q \vee r) \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & p \rightarrow (q \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & \neg p \vee q \vee r
\end{aligned}
$$

由此可以很容易写出α的真值表和范式。

(2) 先求得合取范式$\neg p \vee q \vee r$，这也是析取范式。

试题三

(12分) 设$\alpha(q,r)$和$\beta(q,r)$是两个二元命题形式，试证明：存在三元命题形式$\gamma(p,q,r)$，使得

$$\gamma(0,q,r) \Leftrightarrow \alpha(q,r) \text{且} \gamma(1,q,r) \Leftrightarrow \beta(q,r)$$

解：令$\gamma(p,q,r) = (\neg p \to \alpha) \wedge (p \to \beta)$，则：

$$\begin{aligned} \gamma(0,q,r) &= (1 \to \alpha) \wedge (0 \to \beta) \\ &\Leftrightarrow (1 \to \alpha) \wedge 1 \\ &\Leftrightarrow 1 \to \alpha \\ &\Leftrightarrow \alpha \end{aligned}$$

同理：$\gamma(1,q,r) \Leftrightarrow \beta$.

另解1：也可令$\gamma(p,q,r) = (p \vee \alpha) \wedge (\neg p \vee \beta)$.

另解2：也可令$\gamma(p,q,r) = (\neg p \wedge \alpha) \vee (p \wedge \beta)$.

试题四

(30分) 写出下列公式在**P**中的一个证明序列:

(1) $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

证:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha) & (A1) \\
(2) & (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta) & (A3) \\
(3) & \big((\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)\big) \to & \\
 & \big(\neg\alpha \to \big((\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)\big)\big) & (A1) \\
(4) & \neg\alpha \to \big((\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)\big) & (M)(2,3) \\
(5) & \big(\neg\alpha \to \big((\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)\big)\big) & \\
 & \big(\big(\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)\big) \to \big(\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)\big)\big) & (A2) \\
(6) & \big(\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)\big) \to \big(\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)\big) & (M)(4,5) \\
(7) & \neg\alpha \to (\alpha \to \beta) & (M)(6,1)
\end{array}
$$

试题四(续)

(30分) 写出下列公式在**P**中的一个证明序列:

(2) $\alpha \to (\beta \to \gamma) \vdash \beta \to (\alpha \to \gamma)$.

证:

(1)	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	(前提)
(2)	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	(A2)
(3)	$((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	(M)(1,2)
(4)	$((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \to$ $\Big(\beta \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))\Big)$	(A1)
(5)	$\Big(\beta \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))\Big)$	(M)(3,4)
(6)	$\Big(\beta \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))\Big) \to$ $\Big((\beta \to (\alpha \to \beta)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))\Big)$	(A2)
(7)	$(\beta \to (\alpha \to \beta)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$	(M)(5,6)
(8)	$(\beta \to (\alpha \to \beta))$	(A1)
(9)	$\beta \to (\alpha \to \gamma)$	(M)(7,8)

试题五

(15分) 在**N**证明 $(\alpha \to \beta) \to \gamma \vdash \alpha \vee \gamma$.

证:

(1)	$\neg\alpha, \alpha \vdash \beta$	(已证)
(2)	$\neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$	$(\to +)$
(3)	$(\alpha \to \beta) \to \gamma, \neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$	$(+)$
(4)	$(\alpha \to \beta) \to \gamma, \neg\alpha \vdash (\alpha \to \beta) \to \gamma$	$(\in)$
(5)	$(\alpha \to \beta) \to \gamma, \neg\alpha \vdash \gamma$	$(\to -)$(3,4)
(6)	$(\alpha \to \beta) \to \gamma \vdash \neg\alpha \to \gamma$	$(\to +)$(5)
(7)	$\neg\alpha \to \gamma \vdash \alpha \vee \gamma$	(已证)
(8)	$(\alpha \to \beta) \to \gamma \vdash \alpha \vee \gamma$	(Tr)(6,7)

试题六

(15分) 令$\mathbf{P}^+$是在命题演算形式系统$\mathbf{P}$中增加如下命题公式作为公理得到的新形式系统:

$$(\neg\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta)$$

证明: $\mathbf{P}^+$中存在公式γ使得$\vdash_{P+} \gamma$且 $\vdash_{P+} \neg\gamma$。

证: 令$\gamma = \alpha \to (\beta \to \alpha)$, 即取$\gamma$为$\mathbf{P}$的公理(A1), 则$\gamma$也为$\mathbf{P}^+$的公理. 从而$\vdash_{P+} \gamma$.

下面给出$\neg\gamma$在$\mathbf{P}^+$中的证明序列, 则$\vdash_{P+} \neg\gamma$。

从而$\alpha \to (\beta \to \alpha)$即为所求。

试题六(续1)

(1)	γ	(A1)
(2)	$(\neg\gamma \to \gamma) \to (\gamma \to \neg\gamma)$	(新公理)
(3)	$((\neg\gamma \to \gamma) \to (\gamma \to \neg\gamma)) \to$	
	$(\gamma \to ((\neg\gamma \to \gamma) \to (\gamma \to \neg\gamma)))$	(A1)
(4)	$\gamma \to ((\neg\gamma \to \gamma) \to (\gamma \to \neg\gamma))$	(M)(2,3)
(5)	$(\gamma \to ((\neg\gamma \to \gamma) \to (\gamma \to \neg\gamma))) \to$	
	$((\gamma \to (\neg\gamma \to \gamma)) \to (\gamma \to (\gamma \to \neg\gamma)))$	(A2)
(6)	$(\gamma \to (\neg\gamma \to \gamma)) \to (\gamma \to (\gamma \to \neg\gamma))$	(M)(4,5)
(7)	$\gamma \to (\neg\gamma \to \gamma)$	(A1)
(8)	$\gamma \to (\gamma \to \neg\gamma)$	(M)(6,7)
(9)	$\gamma \to \neg\gamma$	(M)(1,8)
(10)	$\neg\gamma$	(M)(1,9)

试题六(续2)

另证:

(1)	γ	(A1)
(2)	$\gamma \rightarrow (\neg\gamma \rightarrow \gamma)$	(A1)
(3)	$\neg\gamma \rightarrow \gamma$	(M)(1,2)
(4)	$(\neg\gamma \rightarrow \gamma) \rightarrow (\gamma \rightarrow \neg\gamma)$	(新公理)
(5)	$\gamma \rightarrow \neg\gamma$	(M)(3,4)
(6)	$\neg\gamma$	(M)(1,5)