一阶语言

王捍贫

北京大学信息科学技术学院软件研究所

复习

一阶谓词演算的符号化:

- 个体变元: x, y, z, $\ldots$
- 个体常元: a, b, c, $\ldots$
- 谓词: F^n, G^n, H^n, $\ldots$
- 函数: f^n, g^n, h^n, $\ldots$
- 量词: 全称量词$\forall$, 存在量词$\exists$
- 联结词: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\leftarrow$, $\leftrightarrow$

用这些符号可以更深入描述命题的结构。

怎么对这些符号进行推理?

下面直接建立推理的形式系统。

§2 一阶语言

一阶语言是将要介绍的谓词演算系统形式语言。

- 符号库
  - 非逻辑符号
  - 逻辑符号
- 谓词公式
  - 项
  - 公式

非逻辑符号

可能包括下列符号:

- 个体常元符号:

  $c,\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n, \ldots$

- 谓词符号:

  $F^n,\ G^n,\ P^n,\ Q^n,\ R^n$ 等

  — $n(n \in \mathbb{N}, n > 0)$表示此谓词符号的元数

- 函数符号:

  $f^m,\ g^m,\ h^m$ 等

  — $m(m \in \mathbb{N}, n > 0)$表示此函数符号的元数

由一些非逻辑符号作为元素组成的集合常记为$\mathfrak{L}$.

逻辑符号

包括下列符号:

- 个体变元符号:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots$$

- 联结词符号:

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

- 量词符号:

$$\forall,\ \exists$$

- 辅助符号:

$$),\ \ ,\ \ ,\ \ ($$

逻辑符号与非逻辑符号

- 非逻辑符号更象是所描述的特定对象中的符号.
  而逻辑符号是逻辑系统中的符号.
  故此得名

- 在描述特定对象时，并不需要所有非逻辑符号.
  但可能用到所有逻辑符号.
  一阶语言与符号库指定的非逻辑符号集$\mathfrak{L}$有关，
  称为$\mathfrak{L}$生成的一阶语言

项

$\mathfrak{L}$生成的一阶语言的" 项" 归纳定义如下:

1. 个体变元符号和$\mathfrak{L}$中的个体常元符号都是项;
2. 若f^m是$\mathfrak{L}$中一个m元函数符号, $t_1, t_2, \cdots, t_m$是$\mathfrak{L}$中项, 则$f^m(t_1, t_2, \cdots, t_m)$是$\mathfrak{L}$中项;
3. 每个项都是有限次应用(1)和(2)得到的.

" 项" 相当于" 复合个体" .

公式

$\mathfrak{L}$生成的一阶语言的"公式"归纳定义如下:

(1) 如果F^n是$\mathfrak{L}$中的一个n元谓词符号, $t_1, t_2, \cdots, t_n$是$\mathfrak{L}$中项, 则$F^n(t_1, t_2, \cdots, t_n)$是$\mathfrak{L}$中公式,

— 称为原子公式

(2) 若α是公式, 则$(\neg\alpha)$是公式;

(3) 若α, β是公式, 则$(\alpha\vee\beta)$, $(\alpha\wedge\beta)$, $(\alpha\rightarrow\beta)$, $(\alpha\leftrightarrow\beta)$是$\mathfrak{L}$中公式;

(4) 若α是公式, x是个体变元符号, 则$(\forall x)\alpha$, $(\exists x)\alpha$也是公式;

(5) 每个公式都是有限次使用(1)–(4)得到的.

一些注记

注1: 与命题演算的形式语言相比，一阶语言中没有命题符号，代之的是原子公式.

注2: 所有一阶语言中都含有相同的逻辑符号，但所含的非逻辑符号不一定相同.

注3: 在定义中没有要求个体变元x一定要在α中出现: $(\forall x_1)F^2(x_1, x_2)$和$(\forall x_3)F^2(x_1, x_2)$都是公式.

注4: 总假设: $\mathfrak{L}$中至少有一个谓词符号.
否则$\mathfrak{L}$生成的一阶语言中没有公式。

括号省略规则

(i) 省略公式最外层的括号;

(ii) 联结词符号"$\neg$"的优先级高于其它的四个联结词,
可以去掉$(\neg\alpha)$中的外层括号;

(iii) $\alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_{n-1} \to \alpha_n$表示
$(\alpha_1 \to (\alpha_2 \to \cdots \to (\alpha_{n-1} \to \alpha_n) \cdots))$;
对$\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$也类似规定.

(iv) $\forall x$, $\exists x$的优先级高于所有联结词.
将$(\forall x)\alpha$、$(\exists x)\alpha$分别记为 $\forall x\alpha$、$\exists x\alpha$.

(v) $(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)\alpha$简记为$\forall x_1 \cdots x_n\alpha$;
$(\exists x_1)\cdots(\exists x_n)\alpha$简记为$\exists x_1 \cdots x_n\alpha$.

其它约定

(i) 常将" $\mathfrak{L}$生成的一阶语言中的" 等字省略。

$\mathfrak{L}$生成的一阶语言中的公式、项、符号等分别称为 $\mathfrak{L}$的一阶公式、项、符号等.

(ii) 常省略函数符号和谓词符号右上角的元数标记。

项和公式

- 项的作用是描述"复合"个体,
  公式的作用是描述命题。

- "项"相当于"词组",它们不表达完整的判断;
  "公式"代表完整的句子,表达判断。

  $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示f作用到个体$x_1, \ldots, x_n$得到的个体

  $F^n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示$x_1, x_2, \cdots, x_n$是否具有关系$F^n$(或性质$F^n$).

例3

用一阶语言描述群的定义

解:

令$\mathfrak{L}=\{f^2,\ E^2,\ c\}$, 其中:

f^2代表群的乘法运算,是一个二元函数符号;

E^2描述元素的相等关系, 是一个二元谓词符号;

c代表群的单位元, 是一个常元符号.

则群公理可表示为由$\mathfrak{L}$中的如下三个公式:

(1) $\forall x_1 x_2 x_3 E\Big(f(f(x_1,\ x_2),\ x_3),\ f(x_1,\ f(x_2,\ x_3))\Big)$

(2) $\forall x_0(E(f(x_0,\ c),\ x_0)\wedge E(f(c,\ x_0),\ x_0))$

(3) $\forall x_1 \exists x_2(E(f(x_1,\ x_2),\ c)\wedge E(f(x_2,\ x_1),\ c))$

用一阶语言描述等价关系的定义

解:

令$\mathfrak{L}=\{E^2\}$，其中:

E^2描述元素的等价关系，是一个二元谓词符号;

则等价关系的定义可表示为由$\mathfrak{L}$中的如下三个公式:

(1) $(\forall x)E(x,x)$;

(2) $(\forall xy)\big(E(x,\ y)\to E(y,\ x)\big)$;

(3) $(\forall xyz)\big((E(x,\ y)\wedge E(y,\ z))\to E(x,\ z)\big)$.

辖域

定义3:

称公式$(\forall x)\alpha$中的α为量词$(\forall x)$的辖域;

称公式$(\exists x)\alpha$中的α为量词$(\exists x)$的辖域.

例:

在$\forall x_1 \forall x_2 (\forall x_3 F(x_1, x_2) \rightarrow F(x_2, x_3))$中,

$(\forall x_1)$的辖域为$\forall x_2 (\forall x_3 F(x_1, x_2) \rightarrow F(x_2, x_3))$,

$(\forall x_2)$的辖域为$(\forall x_3 F(x_1, x_2) \rightarrow F(x_2, x_3))$.

$(\forall x_3)$的辖域为$F(x_1, x_2)$.

约束出现与自由出现

定义4:

变元符号x在公式α中的某处出现称为是约束出现, 如果

- 此处出现是在$(\forall x)$或$(\exists x)$的辖域内, 或者
- 是$(\forall x)$中的x, 或者
- 是$(\exists x)$中的x.

若x在α中的某处出现不是约束出现, 则称x的此处出现为自由出现.

例4

在下列公式中，指出变元的各处出现是自由出现还是约束出现.

(1) $\forall x_1 \forall x_2 (F(x_1, x_2) \rightarrow F(x_1, x_3))$

(2) $\forall x_1 F(x_1) \rightarrow F(x_1)$

(3) $\forall x_1 F(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_1 F(x_2)$

例4的解

解:

(1) $$\underset{\text{约束}}{\underset{\uparrow}{\forall x_1}}\ \underset{\text{约束}}{\underset{\uparrow}{\forall x_2}}\ (F(\underset{\text{约束}}{\underset{\uparrow}{x_1}},\ \underset{\text{约束}}{\underset{\uparrow}{x_2}}) \to F(\underset{\text{约束}}{\underset{\uparrow}{x_1}},\ \underset{\text{自由}}{\underset{\uparrow}{x_3}}))$$

(2) $$\underbrace{\forall x_1 \quad F(x_1)}_{\text{约束}} \to F(\underset{\text{自由}}{\underset{\uparrow}{x_1}})$$

(3) $$\underset{\text{约束}}{\underset{\uparrow}{\forall x_1}}\ (F(\underset{\text{约束}}{\underset{\uparrow}{x_1}},\ \underset{\text{自由}}{\underset{\uparrow}{x_2}})) \to \underset{\text{约束}}{\underset{\uparrow}{\forall x_1}}\quad F(\underset{\text{自由}}{\underset{\uparrow}{x_2}})$$

注: 同一个变元在同一个公式中可能既有自由出现, 又有约束出现.

约束变元与自由变元

定义5:

设个体变元符号x在公式α中出现.

- 如果x在α中的所有出现都是约束出现，称x为α的约束变元;
- 如果x不是α的约束变元，则称x为α的自由变元。

易知:

x是α的自由变元$\Leftrightarrow$$x$在$\alpha$中有某处出现是自由出现.

约束变元与自由变元的例

例4中:

(1)中的x_1, x_2为约束变元，x_3是自由变元;

(2)中的x_1是自由变元;

(3)中的x_1是约束变元，x_2是自由变元.

约定:

以$\alpha(x_1, \ldots, x_n)$表示公式α的自由变元都在$x_1, \ldots, x_n$中.

约束变元与自由变元的差别

约束变元与自由变元的差别很大.

令$\mathfrak{L} = \{E^2, c\}$, 其中:

E代表二元谓词"$\cdots = \cdots$", c代表一个常量.

考虑$\mathfrak{L}$的公式: $\forall x_1 E(x_1, c)$与$\forall x_2 E(x_1, c)$.

$\forall x_1 E(x_1, c)$为真$\Leftrightarrow$个体域中只能有一个元素c.

故$\forall x_1 E(x_1, c)$的真假与x_1取值无关.

但$\forall x_2 E(x_1, c)$的真假与x_1取值有关.

约束变元与自由变元的关系类似于程序设计语言的局部变量与全局变量间的关系: *由内到外*。

t对x在α中可代入

考察将公式$\exists y(y > x)$中的x换为项y前后的真假值.

- 公式$\exists y(y > x)$是可为真的.
- 但将$\exists y(y > x)$中的x换为y后就不能为真了.
  即$\exists y(y > y)$不能为真.

问: 将x换为什么样的项t,α的真假值不会改变?

$$\exists y(y > x) \rightsquigarrow \exists y(y > t)$$

t对x在α中可代入的定义

定义6:

设α是$\mathfrak{L}$的公式，t是$\mathfrak{L}$的项，x是$\mathfrak{L}$的变元符号，如果对t中出现的每个变元符号y_i，α中每处自由出现的x不在$(\forall y_i)$或$(\exists y_i)$的辖域内，则称t对x在α中可代入,或称t对x在α中自由.

y对x在$\exists y(y > x)$中不可代入.

z对x在$\exists y(y > x)$中不可代入.

检查t对x在α中是否自由的步骤

1. 找出t中包含的所有变元$y_1, y_2, \cdots, y_n$;
2. 找出α中所有自由出现的x;
3. 对x在α中的每处自由出现,

   for $i = 1$ to n step 1 do
     检查x是否出现在$(\forall y_i)$或$(\exists y_i)$的辖域中,
     若是, 则t对x在α中不自由.
   endfor

4. t对x在α中自由

例5

设一阶公式α为 $\forall x_1 F_1^2(x_1,\ x_2) \to \forall x_2 F_2^2(x_3,\ x_1)$,

问:

(1) x_2及$f_1^2(x_4,\ x_5)$对x_1在α中是否自由?

(2) $f_2^2(x_1,\ x_4)$及$f_3^2(x_2,\ x_3)$对x_2在α中是否自由?

例5的解

α为 $\forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_2 F_2^2(x_3, x_1)$

答:

(1) x_2对x_1在α中不自由,

在α中，有自由出现的x_2出现在x_1的辖域内.

$f_1^2(x_4, x_5)$对x_1在α中自由.

(2) $f_2^2(x_1, x_4)$对x_2在α中不自由;

$f_3^2(x_2, x_3)$对x_2在α中自由.

$\boxed{\alpha(x/t)}$

$\alpha(x/t)$是将α中每个**自由出现**的x都换为项t后得到的公式 (不论t对x在α中是否自由).

$\alpha(x/t)$称为α的一个例式.

例5中:

$$\alpha(x_2/x_1) = \forall x_1 F_1^2(x_1,\ x_1) \to \forall x_2 F_2^2(x_3,\ x_1).$$

$$\alpha(x_1/f_1^2(x_4,\ x_5))$$
$$= \forall x_1 F_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 F_2^2(x_3, f_1^2(x_4,\ x_5)).$$

用$\alpha(x/t)$判断t对x在α中是否自由

要看t对x在公式α中是否自由，只要在$\alpha(x/t)$中看:

在新代入t的地方，t中的每个变元的各个出现是否有约束出现，

若有，则t的对x在α中不自由，否则自由.

这也是"t对x在α中可代入"这个名称的由来.

简单性质

(1) x对x在α中自由.

(2) 若x不在α中自由出现, 则t对x在α中自由.

闭公式

定义7

(1) 若$\mathfrak{L}$的项t中不含任何个体变元符号，则称t为$\mathfrak{L}$的一个闭项;

(2) 若$\mathfrak{L}$的公式α中不含任何自由变元符号，则称α为$\mathfrak{L}$的一个闭公式.

作业

p.558(p.183)

2

3 (2), (3)

4 (2), (4)

谢　谢