N与P的等价性

王捍贫

北京大学信息科学技术学院软件研究所

复习

- 命题演算推理形式系统N和P
- 相同之处：
  - 都由四个组成部分
  - 公式的构成方式相同
  - 都是为了推理
  - ...
- 不同之处：
  - 符号库不同
  - 公理与规则不同
  - 推理形式不同：$\Gamma \vdash \alpha$与$\vdash \alpha$
  - ...

§8 N与P的等价性

$\Gamma \vdash_{\mathsf{P}} \alpha$当且仅当$\Gamma \vdash_{\mathsf{N}} \alpha$

$$\boxed{\Gamma \vdash_{\mathsf{P}} \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathsf{N}} \alpha}$$

问题： 当Γ为无限公式集时，

$\Gamma \vdash_{\mathsf{P}} \alpha$有可能成立(如当$\alpha \in \Gamma$时).

但$\Gamma \vdash_{\mathsf{N}} \alpha$不可能成立。

定理13

设Σ，α分别为$\mathbf{P}$中公式集与公式，若$\Sigma \vdash_{\mathbf{P}} \alpha$，则存在$\Sigma$的有限子集$\Sigma_0 \subseteq \Sigma$，使得 $\Sigma_0 \vdash_{\mathbf{P}} \alpha$.

证明思路: *尽管前提Σ可能有无限多个，但由于证明过程是有限的，故在证明过程中用到的前提必定是有限的.*

证: 设α_1，α_2，$\cdots$，$\alpha_n(= \alpha)$ 是在前提Σ下推出α的一个证明.

$$令\Sigma_0 = \Sigma \cap \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\},$$

则α_1，α_2，$\cdots$，α_n也是在前提Σ_0下 推出α的一个证明，故$\Sigma_0 \vdash_{\mathbf{P}} \alpha$. 从而$\Sigma_0$即为所求。

引理1

若α是**P**中公理，则对**P**中任何有限公式集Σ都有
$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}} \alpha$

证:

$$\alpha \vdash_N \beta \to \alpha \qquad \text{例13}$$

$$\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta \vdash_N \alpha \to \gamma \qquad \text{例13}$$

$$\emptyset \vdash_N \alpha \to (\beta \to \alpha) \qquad \to +$$

$$\emptyset \vdash_N (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \qquad \to +$$

$$\Sigma \vdash_N \alpha \to (\beta \to \alpha) \qquad +$$

$$\Sigma \vdash_N (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \qquad +$$

$$\neg\alpha \to \neg\beta \vdash_N \beta \to \alpha \qquad \text{例15}$$

$$\Sigma \vdash_N (\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$$

定理14

设Σ，α分别为**P**中有限公式集和公式.
若$\Sigma \vdash_{\mathbf{P}} \alpha$，则$\Sigma \vdash_N \alpha$.

证：设

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \cdots, \ \alpha_n$$

是**P**中在前提Σ下推出α的一个证明序列，(其中：$\alpha_n = \alpha$).

只要证:

$$\text{对每个} i \ (1 \leq i \leq n), \ \Sigma \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_i$$

下对i归纳证之.

定理14的归纳证明——奠基步骤

(1) 当$i = 1$时，α_1是**P**的一个公理，或$\alpha_1 \in \Sigma$.

(1.1) 若α_1是**P**的一个公理，由引理1知$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_1$.

(1.2) 若$\alpha_1 \in \Sigma$，由**N**的规则$(\in)$知 $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_1$.

定理14的归纳证明——归纳步骤

(2) 假设对满足$j < i$的每个自然数j都有$\Sigma \vdash_N \alpha_j$，下证$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_i$.

(2.1) 当$\alpha_i \in \Sigma$或者α_i是**P**的公理时，类似(1)可证$\Sigma \vdash_N \alpha_i$.

(2.2) 若α_i是由α_k, α_l经(M)得到的 $(1 \leq k, l < i)$，不妨设$\alpha_k = \beta$， $\alpha_l = \beta \to \alpha_i$.
由于k，$l < i$，由归纳假设知：$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_k$， $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_l$，
即：$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}} \beta$， $\Sigma \vdash_{\mathbf{N}} \beta \to \alpha_i$，
应用$(\to -)$规则得$\Sigma \vdash \alpha_i$.
归纳证毕。

$$\boxed{\Gamma \vdash_N \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash_P \alpha}$$

问题:

N的公式不一定是P的公式(如带联结词∨的公式)。

约定:

$\alpha \vee \beta$ 代表 $(\neg\alpha)\rightarrow\beta$

$\alpha \wedge \beta$ 代表 $\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$

$\alpha \leftrightarrow \beta$ 代表 $\neg((\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow \neg(\beta\rightarrow\alpha))$

定理15

设Σ和α分别为**N**中的有限公式集和公式，
若$\Sigma \vdash_{\mathrm{N}} \alpha$，则$\Sigma \vdash_{\mathrm{P}} \alpha$.

证：只要证：

对**N**的任何有限公式集Σ及公式α，若存在**N**中形式证明序列

$$\Sigma_1 \vdash_{\mathrm{N}} \alpha_1, \ \Sigma_2 \vdash_{\mathrm{N}} \alpha_2, \ \cdots, \ \Sigma_n \vdash_{\mathrm{N}} \alpha_n \qquad (*)$$

使得：$\Sigma_n = \Sigma$，$\alpha_n = \alpha$，则：$\Sigma_n \vdash_{\mathrm{P}} \alpha_n$.

对n用归纳法证之.

定理15的归纳证明(奠基步骤)

(1)　当$n = 1$时，$\Sigma_1 \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_1$必是应用($\in$)得到的，从而$\alpha_1 \in \Sigma_1$．故$\Sigma_1 \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_1$.

(2)　设($*$)对满足$k < n$的每个自然数k成立，下证($*$)对n也成立.

(2.1)　若$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_n$是应用($\in$)得到的，仿(1)可证.

定理15的归纳证明(¬−)

(2.2) 若$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_n$是应用$(\neg -)$得到的，
即存在i，j：$1 \leq i$，$j < n$，使得

$$\Sigma_i \vdash \alpha_i, \quad \Sigma_j \vdash \alpha_j$$

分别为

$$\Sigma_n, \neg\alpha_n \vdash \beta, \quad \Sigma_n, \neg\alpha_n \vdash \neg\beta$$

其中：β为**N**中某公式.

由归纳假设：$\Sigma_n, \neg\alpha_n \vdash_{\mathbf{P}} \beta$，$\Sigma_n, \neg\alpha_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg\beta$.

由演绎定理: $\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg\alpha_n \rightarrow \beta$, $\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg\alpha_n \rightarrow \neg\beta$.

由例33得：$\neg\alpha_n \rightarrow \beta$，$\neg\alpha_n \rightarrow \neg\beta \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$，

由定理12得：$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$.

(2.3) 若$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_n$是应用$(\rightarrow -)$,$(\rightarrow +)$ 得到的，
仿(2.2)可证.

定理15的归纳证明(¬−)

(2.4) 若$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_n$是应用($\vee-$)得到的,
即存在i, j: $1 \leq i$, $j < n$, 使

$$\Sigma_i \vdash \alpha_i,\ \Sigma_j \vdash \alpha_j.$$

分别为

$$\Sigma',\ \beta \vdash \alpha_n,\ \Sigma',\ \gamma \vdash \alpha_n.$$

其中: Σ'为**N**中有限公式集,β, γ为**N**中公式,

$$\Sigma_n = \Sigma' \cup \{\beta \vee \gamma\}.$$

注意: $\beta \vee \gamma$在**P**中代表$\neg\beta \to \gamma$.

由归纳假设: $\Sigma', \beta \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$, $\quad \Sigma', \gamma \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$.

由演绎定理: $\Sigma' \vdash_{\mathbf{P}} \beta \to \alpha_n$, $\quad \Sigma' \vdash_{\mathbf{P}} \gamma \to \alpha_n$.

定理15的归纳证明($\neg-$)(续)

由于$\Sigma' \subseteq \Sigma_n$，故 $\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \beta \to \alpha_n$，$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \gamma \to \alpha_n$.

又由于$\beta \vee \gamma \in \Sigma_n$，故$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg\beta \to \gamma$.

由例27：$\{\neg\beta \to \gamma, \gamma \to \alpha_n\} \vdash_{\mathbf{P}} (\neg\beta \to \alpha_n)$,

由定理12: $\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg\beta \to \alpha_n$.

又由例31知: $\{\beta \to \alpha_n, \neg\beta \to \alpha_n\} \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$.

由定理12得:$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$.

定理15的归纳证明($\vee$+)

(2.5) 若$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_n$是应用($\vee$+)得到的,

则α_n为$\beta \vee \gamma$ (其中: β, γ为**N**中公式),

即α_n代表**P**中公式$\neg\beta \to \gamma$.

由归纳假设: $\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \beta$和$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \gamma$ 至少有一个成立.

定理15的归纳证明($\vee+$)

(2.5.1) 假设$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \beta$成立。

由例34知：$\vdash_{\mathbf{P}} \beta \to (\neg \beta \to \gamma)$.

由定理11得：$\beta \vdash_{\mathbf{P}} \neg \beta \to \gamma$.

由定理12得：$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg \beta \to \gamma$.

即$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$.

(2.5.2) 假设$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \gamma$.

由于$\vdash_{\mathbf{P}} \gamma \to (\neg \beta \to \gamma)$

故$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$.

定理15的归纳证明($\wedge-$)

(2.6) 若$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_n$是应用($\wedge-$)得到的,

由归纳假设: $\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n \wedge \beta$或者 $\Sigma_n \vdash \beta \wedge \alpha_n$.

其中: β为**N**中某个公式.

注意: $\alpha_n \wedge \beta$代表$\neg(\alpha_n \rightarrow \neg\beta)$,

$\beta \wedge \alpha_n$代表$\neg(\beta \rightarrow \neg\alpha_n)$.

故$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg(\alpha_n \rightarrow \neg\beta)$或者 $\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg(\beta \rightarrow \neg\alpha_n)$

定理15的归纳证明($\wedge -$)(续1)

(2.6.1) 假设$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg(\alpha_n \to \neg\beta)$.

由例22知: $\vdash_{\mathbf{p}} \neg\alpha_n \to (\alpha_n \to \neg\beta)$,

由例28知:

$\vdash_{\mathbf{p}} (\neg\alpha_n \to (\alpha_n \to \neg\beta)) \to (\neg(\alpha_n \to \neg\beta) \to \neg\neg\alpha_n)$.

由定理9知: $\vdash_{\mathbf{p}} \neg(\alpha_n \to \neg\beta) \to \neg\neg\alpha_n$.

由例23知: $\vdash_{\mathbf{p}} \neg\neg\alpha \to \alpha$.

再由定理9知: $\vdash_{\mathbf{p}} \neg(\alpha_n \to \neg\beta) \to \alpha_n$.

从而$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$

定理15的归纳证明($\wedge-$)(续2)

(2.6.2) 假设$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \neg(\beta \to \neg\alpha_n)$.

由于$\vdash_{\mathbf{P}} \neg\alpha_n \to (\beta \to \neg\alpha_n)$.

类似可得： $\vdash_{\mathbf{P}} \neg(\beta \to \neg\alpha_n) \to \alpha_n$.

从而也有$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$

(2.7) 若$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{N}} \alpha_n$是应用($\wedge+$),($\leftrightarrow +$)或($\leftrightarrow -$)得到的，类似可证$\Sigma_n \vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$.

归纳证毕.

请自行补足其余情形的证明.

推论

对**P**(或**N**)中公式α，$\vdash_{\mathbf{N}} \alpha$当且仅当$\vdash_{\mathbf{P}} \alpha$.

$\boxed{\text{作业}}$

p.508(p.101). 17(1), (2), (3)

谢　谢