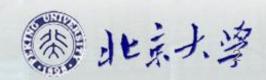
#### 第二十六章 命题逻辑

#### 第3节 命题形式和真值表

#### 内容提要

- 命题形式
- 指派
- 真值表
- 重言式、可满足式、矛盾式

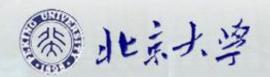


#### 命题形式和真值表

- ■上节介绍了将命题表示为符号串。
- 是否每个符号串都是命题呢?

#### $p q \rightarrow$

■ 什么样的符号串才能表示命题呢? 如下命题形式定义的符号串表示的才 是命题。



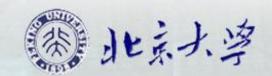
#### 命题形式的定义

命题形式是由命题变元和联结词按以下规则组成的符号串:

(1) 任何命题变元都是命题形式;

---此时称为原子命题形式

- (2) 如果 $\alpha$ 是命题形式,则 $(\neg \alpha)$ 也是命题形式;
- (3) 如果α、β是命题形式,则(α  $\vee$   $\beta$ )、(α  $\wedge$   $\beta$ )、(α  $\wedge$   $\beta$ ) 和(α  $\leftrightarrow$   $\beta$ )都是命题形式;
- (4) 只有有限次地应用(1)—(3)构成的符号串才是命题形式.



#### 命题形式的例子

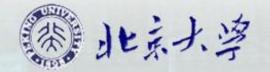
$$(p \land (\neg q))$$

$$(p \lor (\neg p))$$

$$(p \leftrightarrow (\neg p))$$

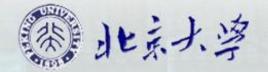
$$(p \wedge (\neg p))$$

$$((p \land p) \rightarrow (\neg(p \lor r)))$$



#### 下列符号串是否为命题形式?

- $(1) pq \rightarrow$
- (2) (p-q)
- $(3) (p \land (\neg q))$
- $(4) p \land (\neg q)$
- $(5) ((\neg q))$
- $(6) \neg p$

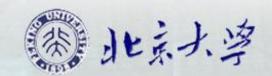


#### 一些注记

- 定义6是归纳定义,而不是循环定义。
   (1)是奠基,(2)、(3)是归纳步骤。
- 2. 如果在(2)和(3)中将括号去掉,结果如何?

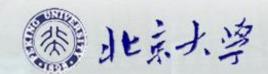
$$p \rightarrow q \rightarrow r = p \rightarrow q \rightarrow r \cdot P \rightarrow q \rightarrow r$$

- 3. 如仅去掉(2)和(3)中某类公式的括号呢?例如,仅 去掉(2)中括号。
  - (p/¬q)——¬的优先级高于其它的。
- 4. 如果规定省略命题形式最外层括号,与2的差别。



#### 约定

- ¬的优先级高于其它的
- 省略命题形式最外层括号



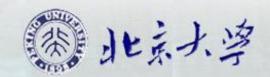
#### 命题形式的简单性质

- 任一个命题形式必为下列形式之一: 命题变元、 $(\neg \alpha)$ 、 $(\alpha \lor \beta)$ 、 $(\alpha \land \beta)$ 、 $(\alpha \to \beta)$ 或  $(\alpha \leftrightarrow \beta)$
- 命题形式的BNF (Bacus Normal Form):

$$\alpha ::= p \mid (\neg \alpha) \mid (\alpha \lor \beta) \mid (\alpha \land \beta) \mid$$

$$(\alpha \to \beta) \mid (\alpha \leftrightarrow \beta)$$

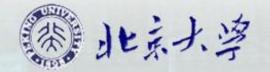
• 每个命题形式都是有限符号串。



#### 指派

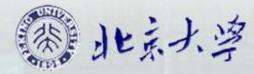
- 命题形式的值由它中命题变元的值完全确定.
- 设 $\alpha$ 为一个命题形式, $\alpha$ 中出现的所有命题变元都在 $p_1, p_2, ..., p_n$ 中,对序列 $p_1, p_2, ..., p_n$ 指定的的任一真假值序列 $t_1, t_2, ..., t_n$ 称为 $\alpha$ 的关于 $p_1, p_2, ..., p_n$ 的一个指派 (asignment),其中 $t_i$  = 0或1,  $i \in N$ ,  $1 \le i \le n$ .

即指派是从 $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ 到 $\{0, 1\}$ 的一个函数。



#### 成真指派

- 若 $p_1$ ,  $p_2$ , ...,  $p_n$ 的一个指派使 $\alpha$ 为真,则称此指派为 $\alpha$ 的一个成真指派
- 若 $p_1$ ,  $p_2$ , ...,  $p_n$ 的一个指派使 $\alpha$ 为假,则称此指派为 $\alpha$ 的一个成假指派。
- 由定义可知:
  - ▶¬p关于p的成真指派为0,成假指派为1.
  - ▶p∧q关于p、q的成真派为<1,1>,成假指派为<1,0>,<0,1>,<0.0>.
  - ▶p∨q关于p、q的成真指派为<1,1>,<0,1>,<1,0>,成假指派为<0,0>.
  - ▶不难给出p→q、p ↔ q的成真和成假指派.



#### 例5

求 $(p \land q) \rightarrow (\neg(q \lor r))$ 的成真和成假指派。

解:  $\diamondsuit(p \land q) \rightarrow (\neg(q \lor r))$ 为 $\alpha$ 。

要使 $\alpha$ 为假,必须 $p \wedge q$ 为真且 $\neg (q \vee r)$ 为假。

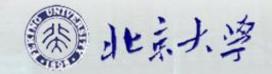
从而p/q必须为真,且q/r也必须为真。

故α的成假指派为(1, 1, 1)和(1, 1, 0).

 $\alpha$ 的成真指派为(0,0,0)、(1,0,0)、(0,1

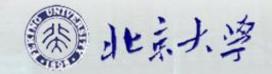
, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)

定义8命题形式在所有可能的指派下所取值列成的表称为真值表.



## (p∧q)→(¬(q∨r))的真值表

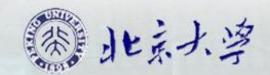
Р	q	r	(p∧q)	¬(q∨r)	α
0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0



## p^(¬p)、p>(¬p)的真值表

解:

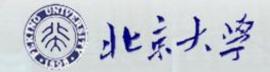
Р	p ∧ (¬ p)	p ∨ (¬ p)
0	0	1
1	0	1



#### (¬p)∨q、p→q的真值表

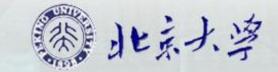
解:

р	q	(¬ p) ∨q	p→q
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1



### $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 、 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ 的真值表

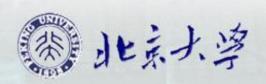
р	q	r	p→(q→r)	(p→q)→r
0	0	0	1	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1



#### 命题形式的类型

- 命题形式α称为重言式 (或永真式), 如果α关于其中出现的命题变元的所有指派均为成真指派.
- 命题形式α称为矛盾式 (永假式),如果α对于其中 出现的命题变元的所有指派均为成假指派.
- 一个命题形式α称为可满足式,如果α对于其中出现的命题变元的某个指派为成真指派.
- 例如: p ^ (¬ p)为矛盾式, p ∨ (¬ p)为重言式。

(¬p) ∨q为可满足式。

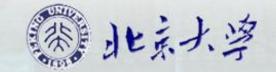


#### 证明下列各式都是重言式

 $(1) p \rightarrow (q \rightarrow (p \land q))$ 

证明:

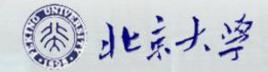
р	q	p \land q	<b>q</b> →( <b>p</b> ∧ <b>q</b> )	$p \rightarrow (q \rightarrow (p \land q))$
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	1	1	1	1



#### 证明下列各式都是重言式

(2) 
$$((p \leftrightarrow p_1) \land (q \leftrightarrow q_1)) \rightarrow ((p \land q) \leftrightarrow (p_1 \land q_1))$$

р	p <sub>1</sub>	q	q <sub>1</sub>	α
0	1	*	*	1
1	0	*	*	1
*	*	0	1	1
*	*	1	0	1
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1



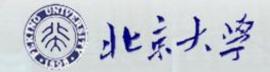
#### 与哑元的无关性

**定理** 设命题形式 $\alpha$ 中出现的命题变元都在  $p_1, p_2, ..., p_n$ 中,  $p_{n+1}, ..., p_{n+m}$ 是另外m个不在 $\alpha$ 中出现的命题变元. 对于 $p_1, p_2, ..., p_n, p_{n+1}, ..., p_{n+m}$ 的任意两个指派:

$$\langle u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1}, ..., u_{n+m} \rangle \pi$$
  
 $\langle v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}, ..., v_{n+m} \rangle,$ 

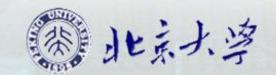
其中:  $u_i$ ,  $v_i$  = 0或1 (1 ≤ i, j ≤ n+m).

若 $u_1 = v_1, ..., u_n = v_n$ ,则α在这两个指派下的值相同.



# 作业

• p508 (P100)



# 谢谢

