单元9.1 图的矩阵表示

第二编 图论　第十章 图的矩阵表示

10.1 关联矩阵、10.2 邻接矩阵与相邻矩阵

内容提要

第十章　图的矩阵表示

10.1 关联矩阵

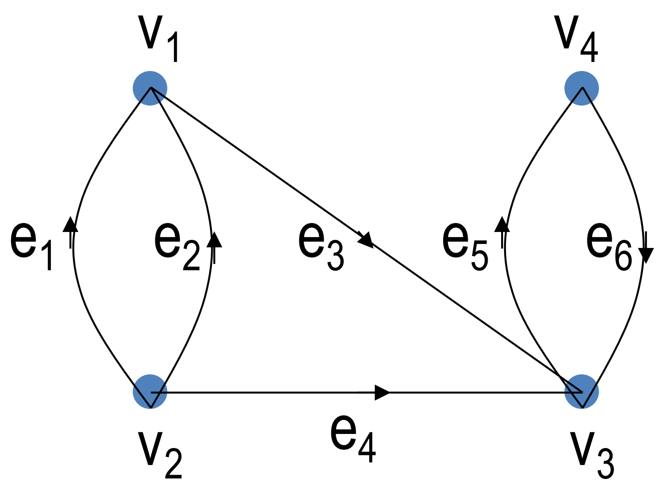
10.2 邻接矩阵表示与相邻矩阵

有向图关联矩阵

- 设D=<V,E>是无环有向图, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$
- 关联矩阵(incidence matrix): $M(D)=[m_{ij}]_{n\times m}$,

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i\text{是}e_j\text{的起点} \\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联} \\ -1, & v_i\text{是}e_j\text{的终点} \end{cases}$$

有向图关联矩阵举例



$$
M(D)=\begin{array}{c}
 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
-1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

有向图关联矩阵性质

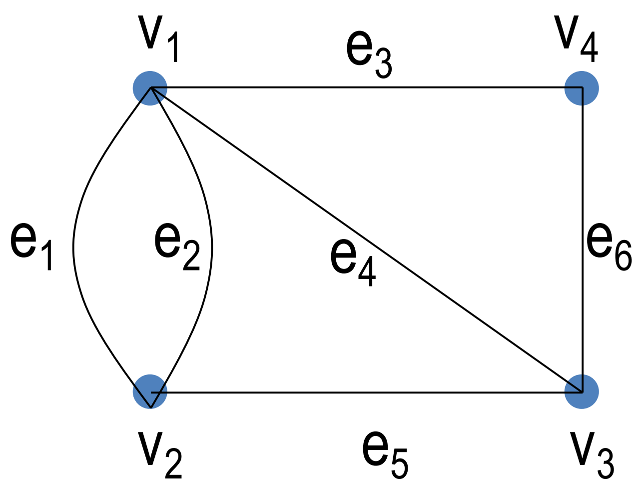
- 每列和为零: $\Sigma^{n}_{i=1}m_{ij}=0$
- 每行绝对值和为d(v): $d(v_i)=\Sigma^{m}_{j=1}m_{ij}$,
  其中 1的个数为$d^+(v)$,
  -1的个数为$d^-(v)$
- 握手定理: $\Sigma^{n}_{i=1}\Sigma^{m}_{j=1}m_{ij}=0$
- 平行边: 相同两列

无向图关联矩阵

- 设$G=<V,E>$是无环无向图, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$
- 关联矩阵(incidence matrix): $M(G)=[m_{ij}]_{n\times m}$,

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{与}e_j\text{关联}\\ 0, & v_i\text{不与}e_j\text{关联}\end{cases}$$

无向图关联矩阵举例



$$
M(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

无向图关联矩阵性质

- 每列和为2: $\Sigma^n_{i=1}m_{ij}=2$ ($\Sigma^n_{i=1}\Sigma^m_{j=1}m_{ij}=2m$)
- 每行和为d(v): $d(v_i)=\Sigma^m_{j=1}m_{ij}$
- 每行所有1对应的边构成断集: $[\{v_i\}, \{\overline{v_i}\}]$
- 平行边: 相同两列
- 伪对角阵: 对角块是连通分支

$$M(G)=\begin{bmatrix} M(G_1) & & & \\ & M(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & M(G_k) \end{bmatrix}$$

无向图关联矩阵的秩

- **定理10.1:**

$$G\text{连通} \Rightarrow r(M(G))=n-1$$

$(F=\{0,1\})$ #

无向图基本关联矩阵

- 设G=<V,E>是无环无向图, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$
- 参考点: 任意1个顶点
- 基本关联矩阵(fundamental incidence matrix): 从M(G)删除参考点对应的行, 记作$M_f(G)$

北京大学

无向图基本关联矩阵的秩

- 定理10.2: G连通$\Rightarrow$r(M_f(G))=n-1.　#
- 推论1:

  G有p个连通分支$\Rightarrow$ r(M_f(G))=n-p,

  其中M_f(G)是从M(G)的每个对角块中删除任意1行而得到的.　#
- 推论2: G连通$\Leftrightarrow$r(M(G))=r(M_f(G))=n-1. #

基本关联矩阵与生成树

- 定理10.3: G连通,

  M'_f是$M_f(G)$中任意n-1列组成的方阵,

M'_f中各列对应的边集是$\{e_{i1},e_{i2},\ldots, e_{i(n-1)}\}$,

T是导出子图$G[\{e_{i1},e_{i2},\ldots,e_{i(n-1)}\}]$, 则

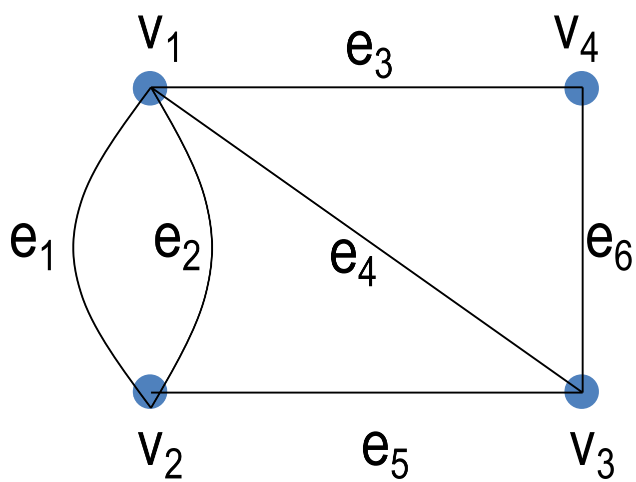
  T是G的生成树$\Leftrightarrow$ M'_f的行列式$|M'_f|\neq 0$.

  #

用关联矩阵求所有生成树

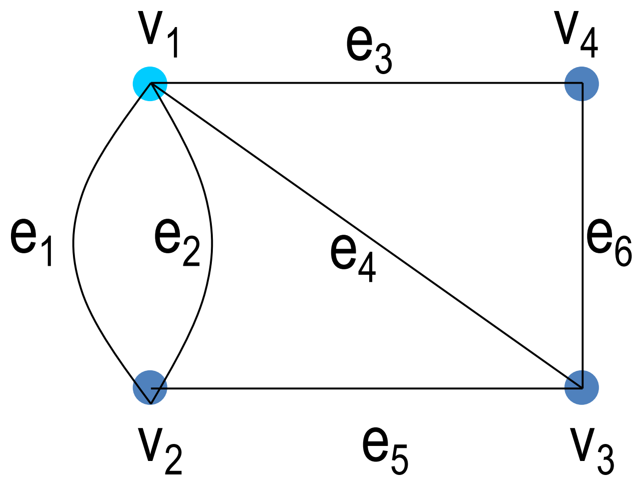
- 忽略环, 求关联矩阵
- 任选参考点, 求基本关联矩阵
- 求所有n-1阶子方阵,计算行列式,行列式非0的是生成树

求所有生成树(例)



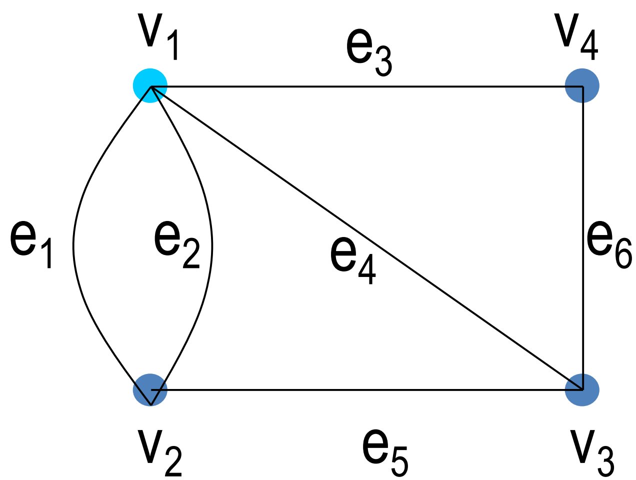
$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
M(G)= \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

求所有生成树(例,续)



$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
M_f(G) = \begin{array}{c} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

求所有生成树(例,续)

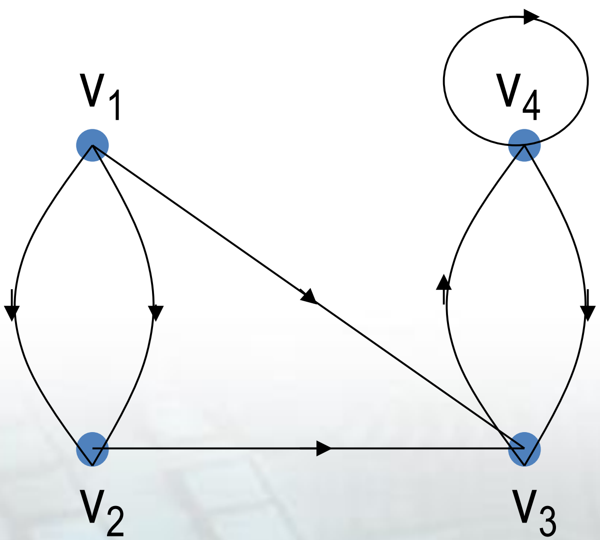


$$M_f(G) = \begin{array}{c} \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

1,2,3	0	2,3,4	1
1,2,4	0	2,3,5	1
1,2,5	0	2,3,6	1
1,2,6	0	2,4,5	0
1,3,4	1	2,4,6	1
1,3,5	1	2,5,6	1
1,3,6	1	3,4,5	1
1,4,5	0	3,4,6	0
1,4,6	1	3,5,6	1
1,5,6	1	4,5,6	1

有向图邻接矩阵

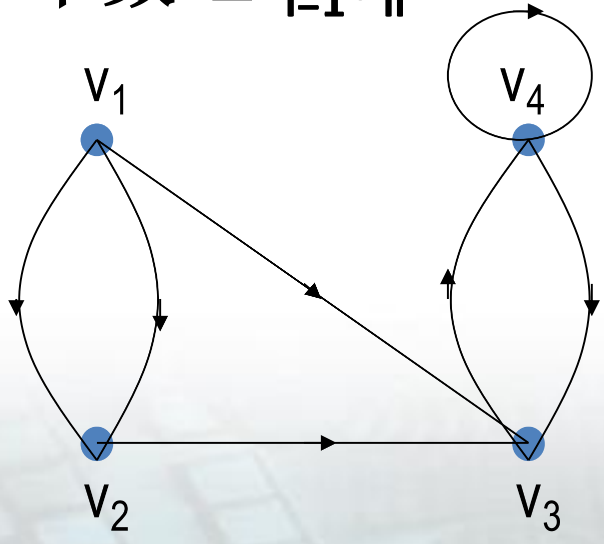
- 设$D=<V,E>$是有向图,$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$
- 邻接矩阵(adjacence matrix): $A(D)=[a_{ij}]_{n\times n}$, a_{ij} = 从v_i到v_j的边数



$$A(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

有向图邻接矩阵(性质)

- 每行和为出度: $\Sigma^n_{j=1}a_{ij}=d^+(v_i)$
- 每列和为入度: $\Sigma^n_{i=1}a_{ij}=d^-(v_j)$
- 握手定理: $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^n_{j=1}a_{ij}=\Sigma^n_{i=1}d^-(v_j)=m$
- 环个数: $\Sigma^n_{i=1}a_{ii}$



$$A(D)=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

邻接矩阵与通路数

- 设$A(D)=A=[a_{ij}]_{n\times n}$, $A^r=A^{r-1}\bullet A,(r\geq 2)$, $A^r=[a^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$, $B_r=A+A^2+\ldots+A^r=[b^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$
- **定理4**: $a^{(r)}_{ij}$=从v_i到v_j长度为r的通路总数且 $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^n_{j=1}a^{(r)}_{ij}$=长度为r的通路总数

  且 $\Sigma^n_{i=1}a^{(r)}_{ii}$=长度为r的回路总数
- **推论**: $b^{(r)}_{ij}$=从v_i到v_j长度≤r的通路总数

  且 $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^n_{j=1}b^{(r)}_{ij}$=长度≤r的通路总数

  且 $\Sigma^n_{i=1}b^{(r)}_{ii}$=长度≤r的回路总数. #

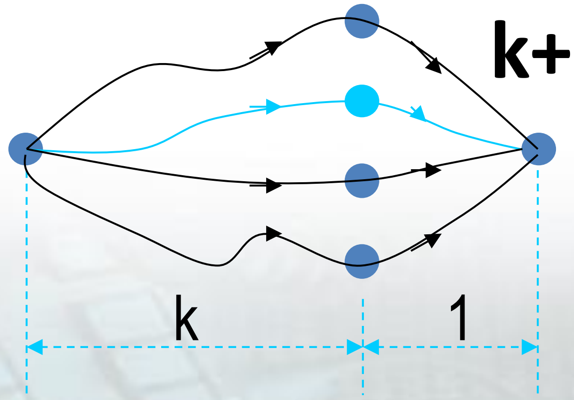
定理10.4证明

- 证明: (归纳法) (1)$r=1$: $a^{(1)}_{ij}=a_{ij}$, 结论显然.

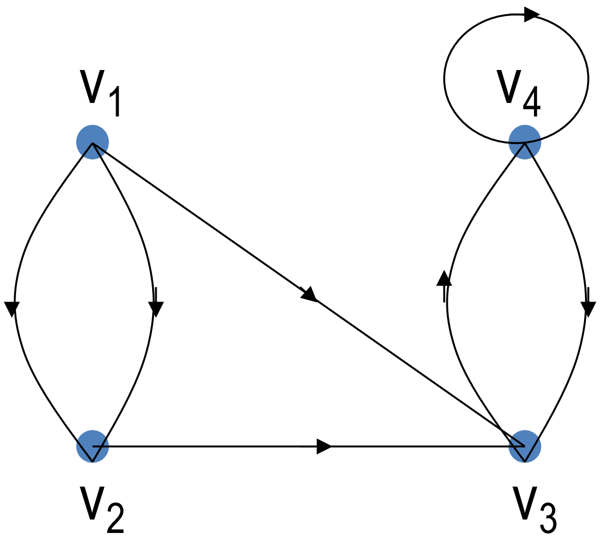
  (2) 设$r\le k$时结论成立, 当$r=k+1$时,

  $a^{(k)}_{it}\bullet a^{(1)}_{tj}$=从$v_i$到$v_j$最后经过$v_t$的长度为 k+1的通路总数,

  $a^{(k+1)}_{ij}=\sum^{n}_{t=1}a^{(k)}_{it}\bullet a^{(1)}_{tj}$=从$v_i$到$v_j$的长度为 k+1的通路总数. #



用邻接矩阵求通路数举例



$$A(D)=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\qquad A^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\qquad B^3=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 4 & 6\end{bmatrix}\qquad B^4=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 8\\ 0 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 7 & 11\end{bmatrix}$$

用邻接矩阵求通路数举例

- v_2到v_4长度为3和4的通路数: 1, 2
- v_2到v_4长度≤4的通路数: 4
- v_4到v_4长度为4的回路数: 5
- v_4到v_4长度≤4的回路数: 11

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&1&3\\0&0&1&\boxed{1}\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}0&0&3&4\\0&0&1&\boxed{2}\\0&0&2&3\\0&0&3&\boxed{5}\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}0&2&3&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad B^3=\begin{bmatrix}0&2&4&4\\0&0&2&2\\0&0&2&4\\0&0&4&6\end{bmatrix}\quad B^4=\begin{bmatrix}0&2&7&8\\0&0&3&\boxed{4}\\0&0&4&7\\0&0&7&\boxed{11}\end{bmatrix}$$

用邻接矩阵求通路数举例

- 长度=4的通路(不含回路)数: 16
- 长度≤4的通路和回路数: 53, 15

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&1&3\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}0&\boxed{0}&\boxed{3}&\boxed{4}\\\boxed{0}&0&\boxed{1}&\boxed{2}\\\boxed{0}&\boxed{0}&2&\boxed{3}\\\boxed{0}&\boxed{0}&\boxed{3}&5\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}0&2&3&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad B^3=\begin{bmatrix}0&2&4&4\\0&0&2&2\\0&0&2&4\\0&0&4&6\end{bmatrix}\quad B^4=\boxed{\begin{bmatrix}\boxed{0}&2&7&8\\0&\boxed{0}&3&4\\0&0&\boxed{4}&7\\0&0&7&\boxed{11}\end{bmatrix}}$$

可达矩阵

- 设$D=\langle V,E\rangle$是有向图,$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$,
- 可达矩阵：$P(D)=[p_{ij}]_{n\times n}$,

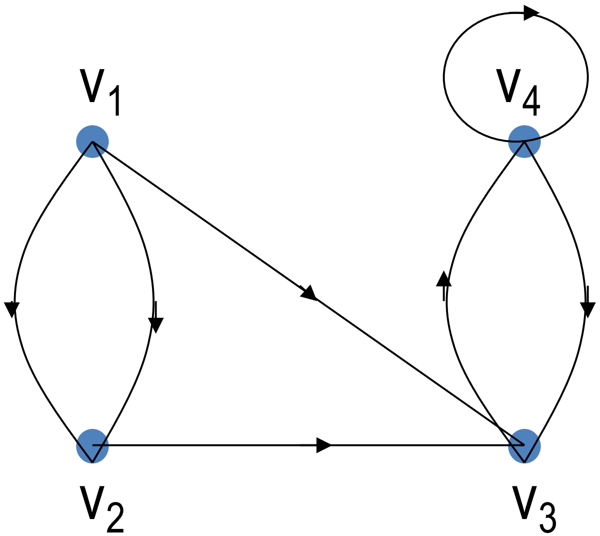
$$p_{ij}=\begin{cases}1, & \text{从}v_i\text{可达}v_j\\ 0, & \text{从}v_i\text{不可达}v_j\end{cases}$$

可达矩阵性质

- 主对角线元素都是1: $\forall v_i \in V$, 从v_i可达v_i
- 强连通图: 所有元素都是1
- 伪对角阵: 对角块是连通分支的可达矩阵
- $\forall i \neq j$, $p_{ij}=1 \Leftrightarrow b^{(n-1)}_{ij} > 0$

$$P(D) = \begin{bmatrix} P(D_1) & & & \\ & P(D_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(D_k) \end{bmatrix}$$

可达矩阵举例



$$A(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^4=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

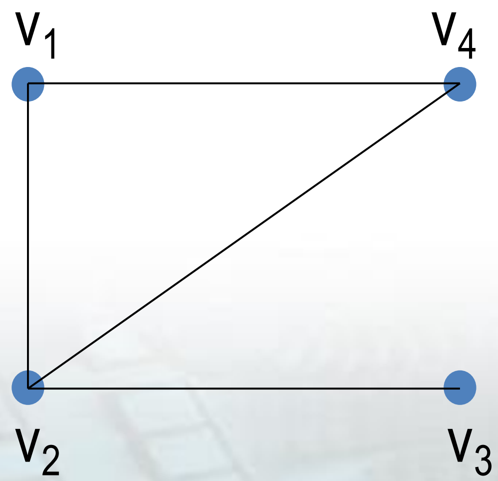
$$B^2=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B^3=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B^4=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

无向图相邻矩阵

- 设G=<V,E>是无向简单图,$V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$
- 相邻矩阵(adjacence matrix): $A(G)=[a_{ij}]_{n\times n}$,

$a_{ii}=0$,

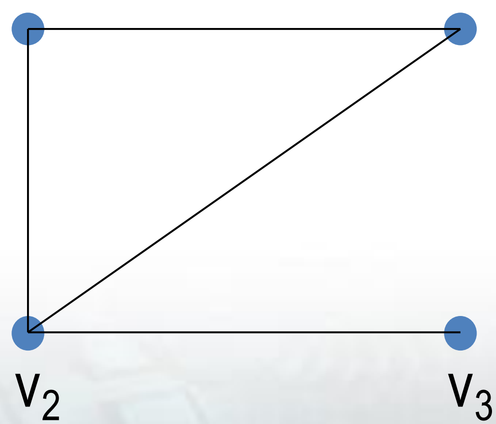
$$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{与}v_j\text{相邻}, i\neq j\\ 0, & v_i\text{与}v_j\text{不相邻}\end{cases}$$



$$A(G)=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

无向图相邻矩阵性质

- A(G)对称: $a_{ij}=a_{ji}$
- 每行(列)和为顶点度: $\Sigma^{n}_{i=1}a_{ij}=d(v_j)$
- 握手定理: $\Sigma^{n}_{i=1}\Sigma^{n}_{j=1}a_{ij}=\Sigma^{n}_{i=1}d(v_j)=2m$

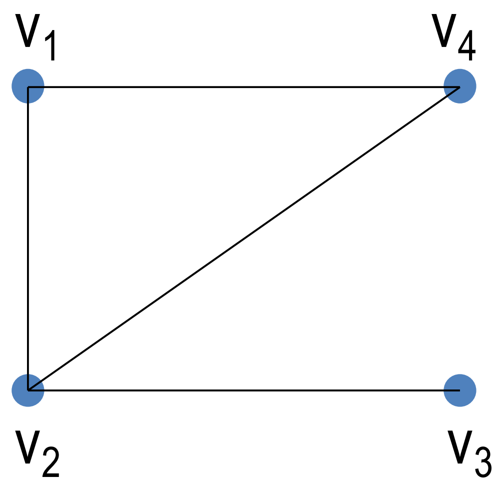


$$A(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

相邻矩阵与通路数

- 设$A^r=A^{r-1}\bullet A,(r\geq 2)$, $A^r=[a^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$, $B_r=A+A^2+\ldots+A^r=[b^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$
- 定理10.5: $a^{(r)}_{ij}$=从v_i到v_j长度为r的通路总数且 $\Sigma^n_{i=1}a^{(r)}_{ii}$=长度为r的回路总数. #
- 推论1: $a^{(2)}_{ii}=d(v_i)$. #
- 推论2: G连通⇒距离$d(v_i,v_j)=\min\{r\,|\,a^{(r)}_{ij}\neq 0\}$. #

用相邻矩阵求通路数举例



$$
A(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
A^2=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}
\quad
A^3=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}
\quad
A^4=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 & 6 \\ 6 & 11 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}
$$

用相邻矩阵求通路数举例

- v_1到v_2长度为4的通路数: 6

14142,14242,14232,12412,14212,12142

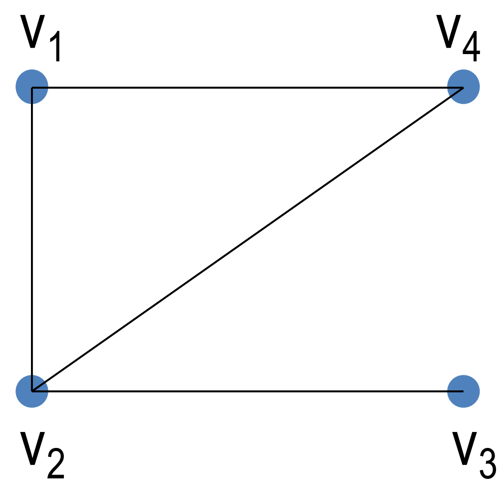
- v_1到v_3长度为4的通路数: 4

12423,12323,14123,12123

- v_1到v_1长度为4的回路数: 7

14141,14241,14121,12121,

12421,12321,12141,



$$A^2=\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&3&0&1\\1&0&1&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}2&4&1&3\\4&2&3&4\\1&3&0&1\\2&4&1&2\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}\boxed{7}&6&4&6\\\boxed{6}&11&2&6\\\boxed{4}&2&3&4\\6&6&4&7\end{bmatrix}$$

连通矩阵

- 设$G=\langle V,E\rangle$是无向简单图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，
- 连通矩阵：$P(G)=[p_{ij}]_{n\times n}$，

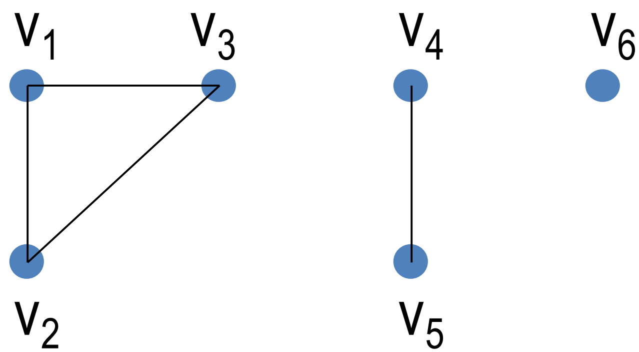
$$p_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若}v_i\text{与}v_j\text{连通}\\ 0, & \text{若}v_i\text{与}v_j\text{不连通}\end{cases}$$

连通矩阵性质

- 主对角线元素都是1: $\forall v_i \in V$, v_i与v_i连通
- 连通图: 所有元素都是1
- 伪对角阵: 对角块是连通分支的连通矩阵
- 设$B_r=A+A^2+\ldots+A^r=[b^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$, 则$\forall i\neq j$, $p_{ij}=1 \Leftrightarrow b^{(n-1)}_{ij}>0$

$$P(G)=\begin{bmatrix} P(G_1) & & & \\ & P(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(G_k) \end{bmatrix}$$

连通矩阵举例



$$P=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

小结

- 1. 关联矩阵M(D), M(G)
- 2. 用基本联矩阵M_f(G)求所有生成树
- 3. 邻接矩阵A(D), 相邻矩阵A(G)
- 4. 用A的幂求不同长度通路(回路)总数
- 5. 可达矩阵P(D), 连通矩阵P(G)