可靠性、和谐性与完备性

王捍贫

北京大学信息科学技术学院软件研究所

复习

构造逻辑的过程：

- 命题演算推理形式系统P(和N) — 语法.
- 语法的核心是推理: $\vdash \alpha$?
- P是符号演算。
- 公式的含义: 真、假、永真等 — 语义.
- 语义的核心是公式的永真性.
- 逻辑 = 语法 + 语义.

可靠性、和谐性与完全性

可靠性： P的内定理都是重言式.

完全性： 所有重言式都是P的内定理.

和谐性： P无矛盾,即无α能使$\vdash \alpha$和$\vdash \neg\alpha$ 同时成立

可靠性

定理29 若$\vdash_{\mathbf{P}} \alpha$，则$\alpha$是重言式.

证:

因$\vdash_{\mathbf{P}} \alpha$，故存在$\alpha$在**P**中的证明序列$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，下对$i$ $(1 \le i \le n)$归纳证明每个α_i都是重言式.

(1) 若$i = 1$，α_1必为公理，由定理17知α_1为重言式

(2) 假设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$都是重言式,下证$\alpha_i$也是.

(2.1) 若α_i是公理，则α_i为重言式.

(2.2) 若α_i是由α_j, α_k $(1 \le j, k < i)$ 用分离规则(M)得到的. 不妨设α_k为$\alpha_j \to \alpha_i$. 由归纳假设知α_j，α_k是重言式. 由定理18知α_i也是重言式.

和谐性

定理30 对P的任何公式α, $\vdash_{\mathbf{P}} \alpha$与 $\vdash_{\mathbf{P}} \neg\alpha$不能同时成立.

证:

若不然, 则α与$\neg\alpha$均为重言式.

从而对P的任一个指派σ, $\alpha^\sigma = (\neg\alpha)^\sigma = 1$.

但$(\neg\alpha)^\sigma = 1 - \alpha^\sigma = 0 \neq \alpha^\sigma$, 矛盾.

注意: P中可能存在某个公式α使得α与$\neg\alpha$ 均不是内定理.

推论10 P中至少有一个公式不是内定理.

一个记号

$\beta(v_1, v_2, \cdots, v_n)$表示P中具有如下条件的公式:

(1) $v_1, v_2, \cdots, v_n$是互异的命题符号,

(2) β中出现的命题符号都在$v_1, v_2, \cdots, v_n$中.

一个引理

设$\beta(v_1, v_2, \cdots, v_n)$为**P**中一个公式，$\sigma$为**P**的一个指派．若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是如下构造的公式序列:

$$\alpha_i = \begin{cases} v_i & \text{当 } \sigma(v_i) = 1\text{时} \\ \neg v_i & \text{当 } \sigma(v_i) = 0\text{时} \end{cases}$$

则 (1) 当$(\beta(v_1, v_2, \cdots, v_n))^\sigma = 1$时,

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta$$

(2) 当$(\beta(v_1, v_2, \cdots, v_n))^\sigma = 0$时,

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \neg\beta$$

引理的证明(I)

证: 对β中所含的联结词$\neg, \to$的个数d进行归纳证明.

(1) 当$d = 0$时, β为某个命题符号v_i, $\beta^\sigma = \sigma(v_i)$.

(1.1) 当$\beta^\sigma = 1$时, $\sigma(v_i) = 1$, 从而α_i为v_i.
即α_i就是β, 故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta$.

(1.2) 当$\beta^\sigma = 0$时, α_i为$\neg v_i$.
即α_i为$\neg\beta$, 故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \neg\beta$.

引理的证明(II)

(2) 假设定理对满足$d \le k$的所有d都成立, 下证定理在$d = k + 1$时也成立.

(2.1) 若β为$(\neg\beta_1)$, 则β_1中的联结词个$d_1 = k$.

(2.1.1) 当$\beta^\sigma = 1$时, $\beta_1^\sigma = 0$.
由归纳假设知: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \neg\beta_1$,
即$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta$.

(2.1.2) 当$\beta^\sigma = 0$时, $\beta_1^\sigma = 1$.
由归纳假设知: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta_1$,
由于$\beta_1 \vdash \neg\neg\beta_1$, 故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \neg\neg\beta_1$,
即$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \neg\beta$.

引理的证明(III)

(2.2) 若β为$\beta_1 \to \beta_2$，则β_1, β_2 中所含联结词的个数均$\leq k$.

(2.2.1) 当$\beta^\sigma = 0$时，$\beta_1^\sigma = 1$，且$\beta_2^\sigma = 0$.

由归纳假设知: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta_1$

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \neg \beta_2$

由例29知: $\vdash \beta_1 \to (\neg \beta_2 \to \neg (\beta_1 \to \beta_2))$,

故β_1, $\neg \beta_2 \vdash \neg (\beta_1 \to \beta_2)$,

从而$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \neg (\beta_1 \to \beta_2)$,

即$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \neg \beta$.

引理的证明(IV)

(2.2.2) 当$\beta^\sigma = 1$时，$\beta_1^\sigma = 0$或$\beta_2^\sigma = 1$.

(i) 若$\beta_2^\sigma = 1$，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta_2$.
由于$\beta_2 \vdash \beta_1 \to \beta_2$，故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta_1 \to \beta_2$,
即$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta$.

(ii) 若$\beta_1^\sigma = 0$则，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \neg\beta_1$.
由于$\neg\beta_1 \vdash \beta_1 \to \beta_2$,
故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta_1 \to \beta_2$,
即$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta$.

完全性

定理31 若β是P中重言式，则$\vdash_{\mathbf{P}} \beta$.

证:

设$v_1, v_2, \cdots, v_n$是β中出现的全部互异命题符号.

对P中任一组满足下列条件的公式$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$:

$$\text{每个}\alpha_i\text{为}v_i\text{或}\neg v_i \quad (1 \le i \le n)$$

由于β永真，由引理知:

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \beta$$

因为α_n可为v_n，也可为$\neg v_n$，故

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \quad v_n \vdash \beta$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \neg v_n \vdash \beta$$

完全性(续)

由演绎定理知:

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1} \vdash \quad v_n \to \beta$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1} \vdash \neg v_n \to \beta$$

但$\vdash (v_n \to \beta) \to ((\neg v_n \to \beta) \to \beta)$, 故

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1} \vdash \beta$$

仿上可得: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-2} \vdash \beta$

$$\vdots$$

$$\alpha_1, \ \alpha_2 \vdash \beta$$
$$\alpha_1 \vdash \beta$$

即$v_1 \vdash \beta$, $\neg v_1 \vdash \beta$, 故$\vdash v_1 \to \beta$, $\vdash \neg v_1 \to \beta$.

从而$\vdash \beta$.

注

- 命题演算内定理是可判定的，即问题:

  P的公式α是否为P的内定理?

  可在有限步内作出回答。

- 定理的机器证明与辅助证明。

- 可靠性与完全性能否推广到带前提的情形?

作业

p.509(p.102). 26

27

28

谢　谢