第二十七章 一阶谓词演算

第6节 $K_{\mathcal{L}}$的解释与赋值(I)

王捍贫

北京大学信息科学技术学院

软件研究所理论实验室

内容提要

- 解释和指派
- 项和公式的值
- 公式值与约束变元的无关性
- 替换定理
- 公式在给定解释下成真
- 永真式

解释和赋值

- 赋值是对一阶公式赋真假值；
- 为此，先要给出公式中每个符号的含义；
- 下列符号具有固定的含义：
  - 联结词；
  - 量词。
- 下列符号需要指定含义：
  - 个体变元； ——指派
  - 个体常元、谓词符号、函数符号。 ——解释

解释（I）

设非逻辑符号集$\mathfrak{L} = \{F_i\}_{i\in I} \cup \{f_j\}_{j\in J} \cup \{c_k\}_{k\in K}$，$\mathfrak{L}$的解释$\mathcal{I}$是如下的四元组:

$$\left\langle D,\ \{\overline{F_i}\}_{i\in I},\ \{\overline{f_j}\}_{j\in J},\ \{\overline{c_k}\}_{k\in K} \right\rangle$$

- D是一个非空集合，称为$\mathcal{I}$的论域或个体域.
- 对$\mathfrak{L}$中每个谓词符号F_i，设其为n元的$(i \in I)$，$\overline{F_i}$是D上的一个n元关系，即

$$\overline{F_i} \subseteq D^n,$$

称$\overline{F_i}$为F_i在$\mathcal{I}$中的解释;

解释（II）

- 对$\mathfrak{L}$中的每个函数符号f_j，设其为m元的$(j \in J)$，$\overline{f_j}$是D上的一个m元函数，即

$$\overline{f_j}: \ D^m \longrightarrow D$$

是一个映射，称$\overline{f_j}$为f_j在$\mathcal{I}$中的解释;

- 对$\mathfrak{L}$中的每个个体常元符号C_k $(k \in K)$，$\overline{c_k}$是D中一个元素，即

$$\overline{c_k} \in D,$$

称$\overline{c_k}$为c_k在$\mathcal{I}$中的解释.

指派

设$\mathcal{I}$是$\mathfrak{L}$的一个解释，D为$\mathcal{I}$的论域.

- $\mathfrak{L}$在$\mathcal{I}$中的一个指派是指如下的函数

$$\sigma : \{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\} \to D$$

- 此时,$\sigma(x_i) \in D$称为x_i在指派σ下的值$(i \in \mathbb{N})$.

指派$\sigma(x_i/a)$

- 设σ是$\mathfrak{L}$在解释$\mathcal{I}$中的一个指派，x_i是一个体变元，$a \in D$，定义$\mathfrak{L}$在解释$\mathcal{I}$中的一个新指派τ如下：

$$\tau(x_j) = \begin{cases} a & j = i \\ \sigma(x_j) & j \neq i \end{cases}$$

- τ只是将σ对x_i指派的值改为a（无论x_i在σ下原来是何值），对其余x_j（$j \neq i$，$j \in \mathbb{N}$）的值未作改变.

- τ称为σ的一个x_i–指派，记为$\sigma(x_i/a)$.

解释的例(例27.20)(I)

设$\mathfrak{L} = \{F^2,\ f_1^1,\ f_2^2, f_3^2,\ c\}$. $\mathfrak{L}$可以有如下解释:

$$I_1 = \langle \mathbb{N},\ \{\overline{F^2}\},\ \{\overline{f_1^1},\ \overline{f_2^2},\ \overline{f_3^2}\},\ \{\overline{c}\}\rangle,$$

其中:

- $\mathbb{N}$为自然数集;
- $\overline{F^2}$为$\mathbb{N}$上的相等关系, 即:

$$\overline{F^2} = \{< n, n > \ \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- $\overline{f_1^1}$为$\mathbb{N}$上的后继函数, 即: $\overline{f_1^1}:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\overline{f_1^1}(n) = n + 1 \quad (\text{任}n \in \mathbb{N})$$

解释的例(例27.20)(II)

- $\overline{f_2^2}$为$\mathbb{N}$上的加法函数，即：$\overline{f_2^2}:\ \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,
$$\overline{f_2^2}(<m,n>) = m+n \quad (\text{任}m,\ n \in \mathbb{N})$$

- $\overline{f_3^2}$为$\mathbb{N}$上的乘法函数，即：$\overline{f_3^2}:\ \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,
$$\overline{f_3^2}(<m,n>) = m \cdot n \quad (\text{任}m,\ n \in \mathbb{N})$$

- $\overline{c}$为$\mathbb{N}$中的元素0.

解释的例(III)

$\mathfrak{L} = \{F^2,\ f_1^1,\ f_2^2, f_3^2,\ c\}$ 还可以有如下解释:

$$I_2 = \langle \mathbb{Q},\ \{\overline{F^2}\},\ \{\overline{f_1^1},\ \overline{f_2^2},\ \overline{f_3^2}\},\ \{\overline{c}\}\rangle,$$

其中:

- $\mathbb{Q}$为有理数集;
- $\overline{F^2}$为$\mathbb{Q}$上的相等关系;
- $\overline{f_1^1}$为$\mathbb{Q}$上的后继函数; 即: $\overline{f_1^1} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$
$$\overline{f_1^1}(n) = n + 1 \quad (\text{任}n \in \mathbb{Q})$$
- $\overline{f_2^2}$与$\overline{f_3^2}$分别为$\mathbb{Q}$上的加法与乘法函数;
- $\overline{c}$仍为$\mathbb{Q}$中的元素0.

项的值

设σ是$\mathfrak{L}$在I中的一个指派. 如下归纳定义$\mathfrak{L}$的项t在I中σ下的值t_I^σ (简记为t^σ):

- 当t为个体变元符号x_i $(i \in \mathbb{N})$时, $(x_i)_I^\sigma = \sigma(x_i)$.
- 当t为个体常元符号c_k时,$(c_k)_I^\sigma = \overline{c}$.
- 当t为$f^m(t_1, t_2, \cdots, t_m)$时,

$$t_I^\sigma = \overline{f^m}((t_1)_I^\sigma, (t_2)_I^\sigma, \ldots, (t_m)_I^\sigma).$$

求项的值的例子

σ是$\mathfrak{L}$在I_1中的如下指派：$\sigma(x_i) = i$ （任$i \in \mathbb{N}$)，则：

$$x_i^\sigma = \sigma(x_i) = i(i \in \mathbb{N})$$

$$c^\sigma = \overline{c} = 0$$

$$(f_1^1(x_1))^\sigma = \overline{f_1^1}(x_1^\sigma) = \overline{f_1^1}(1) = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{N}$$

$$(f_2^2(x_1,\ x_2))^\sigma = \overline{f_2^2}(x_1^\sigma,\ x_1^\sigma) = x_1^\sigma + x_2^\sigma = 3$$

$$(f_3^2(x_1,\ x_2))^\sigma = \overline{f_2^3}(x_1^\sigma,\ x_1^\sigma) = x_1^\sigma \cdot x_2^\sigma = 2$$

$$(f_1^1(f_2^2(x_1,\ x_4)))^\sigma = \overline{f_1^1}\Big((f_2^2(x_1,\ x_4))^\sigma\Big)$$

$$= \overline{f_1^1}(\overline{f_2^2}(x_1^\sigma,\ x_4^\sigma)) = (x_1^\sigma + x_4^\sigma) + 1$$

$$= 1 + 4 + 1 = 6$$

项的值的一个简单性质

设σ是$\mathfrak{L}$在I中的一个指派， 则对任意项t，$t^\sigma \in D$ (其中D是I的论域).

证明：对t归纳证明.

公式的值(I)

设σ是$N_{\mathcal{L}}$在解释I中的一个指派，如下归纳定义"$\mathfrak{L}$的公式α在I中被σ满足"：

- 当α是原子公式$F^n(t_1, t_2, \cdots, t_n)$时，$\alpha$在$\mathcal{I}$中被$\sigma$满足当且仅当 $\overline{F^n}(t_1^\sigma, t_2^\sigma, \cdots, t_n^\sigma)$成立，即当且仅当 $< t_1^\sigma, t_2^\sigma, \cdots, t_n^\sigma > \in \overline{F^n}$.
- 当α为$(\neg \beta)$时，α在$\mathcal{I}$中被σ满足当且仅当β在$\mathcal{I}$中不被σ满足.
- 当α为$(\alpha_1 \to \alpha_2)$时，α在$\mathcal{I}$中被σ满足当且仅当α_1在$\mathcal{I}$中不被σ满足或者α_2在$\mathcal{I}$中 被σ满足.

公式的值(II)

- $\cdots$
- 当α为$(\exists x_i)\beta$时, α在$\mathcal{I}$中被σ满足当且仅当 存在$a \in D_{\mathcal{I}}$, β在$\mathcal{I}$中都能被$\sigma(x_i/a)$满足.
- 当α为$(\forall x_i)\beta$时, α在$\mathcal{I}$中被σ满足当且仅当 对每个$a \in D_{\mathcal{I}}$, β在$\mathcal{I}$中都能被$\sigma(x_i/a)$满足.

$I \models_{\sigma} \alpha$

将α在I中被σ满足记为$I \models_{\sigma} \alpha$，否则记为$I \not\models_{\sigma} \alpha$. 则

(1) $I \models_{\sigma} F^n(t_1, ..., t_n) \Longleftrightarrow < t_1^{\sigma}, ..., t_n^{\sigma} > \in \overline{F^n}$;

(2) $I \models_{\sigma} \neg\beta \Longleftrightarrow I \not\models_{\sigma} \beta$;

(3) $I \models_{\sigma} \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \Longleftrightarrow$若$I \models_{\sigma} \alpha_1$，则$I \models_{\sigma} \alpha_2$;

(4) $I \models_{\sigma} (\forall x_i)\beta \Longleftrightarrow$对任意$a \in D$，$I \models_{\sigma(x_i/a)} \beta$;

(5) $I \models_{\sigma} \alpha \vee \beta \Longleftrightarrow I \models_{\sigma} \alpha$或$I \models_{\sigma} \beta$;

(6) $I \models_{\sigma} \alpha \vee \beta \Longleftrightarrow I \models_{\sigma} \alpha$而且$I \models_{\sigma} \beta$;

(7) $I \models_{\sigma} \alpha \leftrightarrow \beta \Longleftrightarrow I \models_{\sigma} \alpha$的充要条件为$I \models_{\sigma} \beta$;

(8) $I \models_{\sigma} (\exists x_i)\beta \Longleftrightarrow$ 存在$a \in D$, 使得$I \models_{\sigma(x_i/a)} \beta$.

满足的例子(I)

设$\mathfrak{L} = \{F^2\}$. $I =< \mathbb{N}, \{R\}, \emptyset, \emptyset >$是$\mathfrak{L}$的一个解释，其中$R = \{< a, a > | a \in \mathbb{N}\}$. a_1, a_2, $\cdots$, a_n, $\cdots$为D中元素的序列，满足:$a_0 = a_1 = a_2 \neq a_3$.

σ是$\mathfrak{L}$在I中的如下指派：$\sigma(x_i) = a_i$ （任$i \in \mathbb{N}$).

当α为$\mathfrak{L}$中下列公式时，$I \models_{\sigma} \alpha$成立与否？

(1) $F^2(x_1, x_2)$;

(2) $F^2(x_2, x_3)$;

(3) $F^2(x_1, x_2) \rightarrow F^2(x_2, x_3)$;

(4) $\forall x_1 F^2(x_1, x_2)$;

(5) $\forall x_1 \exists x_2 F(x_1, x_2)$.

满足的例子(II)

答:

(1)

$I \models_{\overline{\sigma}} F^2(x_1, x_2)$

当且仅当$< x_1^\sigma, x_2^\sigma > \in \overline{F^2}$

当且仅当$< a_1, a_2 > \in R$.

由于$a_1 = a_2$, 故$< a_1, a_2 > \in R$,

从而$I \models_{\overline{\sigma}} F^2(x_1, x_2)$.

(2)

$I \models_{\sigma} F^2(x_2, x_3)$

当且仅当$< x_2^{\sigma}, x_3^{\sigma} > \in \overline{F^2}$,

当且仅当$< a_2, a_3 > \in R$.

由于$a_2 \neq a_3$，故$< a_2, a_3 > \notin R$,

从而$I \not\models_{\sigma} F^2(x_2, x_3)$.

(3)

$I \models_{\sigma} F^2(x_1, x_2) \to F^2(x_2, x_3)$

当且仅当$I \not\models_{\sigma} F^2(x_1, x_2)$或$I \models_{\sigma} F^2(x_2, x_3)$.

由(1)(2)知：$I \not\models_{\sigma} F^2(x_1, x_2) \to F^2(x_2, x_3)$.

(4)

$I \models_{\sigma} \forall x_1 F^2(x_1, x_2)$

当且仅当对任意$a \in D$, $I \models_{\sigma(x_1/a)} F^2(x_1, x_2)$.

当且仅当对任意$a \in D$, $< x_1^{\sigma(x_1/a)}, x_2^{\sigma(x_1/a)} > \in \overline{F^2}$.

当且仅当对任意$a \in D$, $< a, a_2 > \in R$.

但$a_3 \in D$, $< a_3, a_2 > \notin R$.

从而$I \not\models_{\sigma} \forall x_1 F^2(x_1, x_2)$.

(5)

$I \models_{\sigma} \forall x_1 \exists x_2 F^2(x_1, x_2)$.

当且仅当对任意$a \in D$，$I \models_{\sigma(x_1/a)} \exists x_2 F^2(x_1, x_2)$

当且仅当对任意$a \in D$，存在$b \in D$，使得

$$I \models_{\sigma(x_1/a)(x_2/b)} F^2(x_1, x_2).$$

当且仅当对任意$a \in D$，存在$b \in D$，使得$<a,b> \in R$.

最后一个条件是成立的，因为只要取$b = a$即可.

故$I \models_{\sigma} \forall x_1 \exists x_2 F^2(x_1, x_2)$.

例27.22

设$\mathcal{L}$与I_1如例27.20, σ为$\mathcal{L}$在I_1中的任一个指派. 问σ在I_1中是否满足下面的公式β?

$$\forall x_1 \forall x_2 \Big(\big(\exists x_3 F^2(f_3^2(x_1, x_3),\ x_2) \wedge \exists x_4 F^2(f_3^2(x_2, x_4),\ x_1) \big) \rightarrow F^2(x_1,\ x_2) \Big)$$

答:

$I_1 \models_{\sigma} \beta$

$\Leftrightarrow$ 对任意$m_1 \in \mathbb{N}$,

$$I_1 \models_{\sigma(x_1/m_1)} \forall x_2\left(\left(\begin{array}{l}\exists x_3 F^2(f_3^2(x_1,x_3),\ x_2)\wedge\\ \exists x_4 F^2(f_3^2(x_2,x_4),\ x_1)\end{array}\right) \\ \to F^2(x_1,\ x_2)\right)$$

$\Leftrightarrow$ 对任意的$m_1 \in \mathbb{N}$, $m_2 \in \mathbb{N}$,

$$I_1 \models_{\sigma(x_1/m_1)(x_2/m_2)} \left(\left(\begin{array}{l}\exists x_3 F^2(f_3^2(x_1,x_3),\ x_2)\wedge\\ \exists x_4 F^2(f_3^2(x_2,x_4),\ x_1)\end{array}\right) \\ \to F^2(x_1,\ x_2)\right)$$

$\Leftrightarrow$ 对任意$m_1, m_2 \in \mathbb{N}$,

若$I_1 \models_{\sigma(x_1/m_1)(x_2/m_2)}$
$\exists x_3 F^2(f_3^2(x_1,x_3),\ x_2)\wedge\exists x_4 F^2(f_3^2(x_2,x_4),\ x_1)$,

则$I_1 \models_{\sigma(x_1/m_1)(x_2/m_2)} F^2(x_1,\ x_2)$.

$\Leftrightarrow$ 对任意$m_1, m_2 \in \mathbb{N}$,

若$I_1 \models_{\overline{\sigma(x_1/m_1)(x_2/m_2)}} \exists x_3 F^2(f_3^2(x_1, x_3),\ x_2)$,

且$I_1 \models_{\overline{\sigma(x_1/m_1)(x_2/m_2)}} \exists x_4 F^2(f_3^2(x_2, x_4),\ x_1)$,

则$I_1 \models_{\overline{\sigma(x_1/m_1)(x_2/m_2)}} F^2(x_1,\ x_2)$.

$\Leftrightarrow$ 对任意$m_1, m_2 \in \mathbb{N}$,

若存在$m_3 \in \mathbb{N}$使得

$I_1 \models_{\overline{\sigma(x_1/m_1)(x_2/m_2)(x_3/m_3)}} F^2(f_3^2(x_1, x_3),\ x_2)$,

且存在$m_4 \in \mathbb{N}$使得

$I_1 \models_{\overline{\sigma(x_1/m_1)(x_2/m_2)(x_4/m_4)}} F^2(f_3^2(x_2, x_4),\ x_1)$,

则$I_1 \models_{\overline{\sigma(x_1/m_1)(x_2/m_2)}} F^2(x_1,\ x_2)$.

$\Leftrightarrow$ 对任意$m_1, m_2 \in \mathbb{N}$,
若存在$m_3 \in \mathbb{N}$使得$m_1 \cdot m_3 = m_2$,
且存在$m_4 \in \mathbb{N}$使得$m_2 \cdot m_4 = m_1$,
则$m_1 = m_2$.

$\Leftrightarrow$ 对任意$m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, 若$m_1|m_2$, 且$m_2|m_1$,
则$m_1 = m_2$.

从而$I_1 \models_{\overline{\sigma}} \beta$.

类似地，对$\mathcal{L}$在I_2中的任一个指派σ，

$$
\begin{aligned}
I_2 \models_{\sigma} \beta \Leftrightarrow \quad & \text{对任意} m_1,\ m_2 \in \mathbb{Q}, \\
& \text{若存在} m_3 \in \mathbb{Q} \text{使得} m_1 \cdot m_3 = m_2, \\
& \text{且存在} m_4 \in \mathbb{Q} \text{使得} m_2 \cdot m_4 = m_1, \\
& \text{则} m_1 = m_2.
\end{aligned}
$$

从而$I_2 \not\models_{\sigma} \beta$

项的哑元无关性（定理27.13）

设σ_1, σ_2是$\mathfrak{L}$在其某个解释I中的两个指派，$t(v_1, ..., v_n)$是$\mathfrak{L}$的一个项，其中：v_1，v_2，$\cdots$，v_n是 $\mathfrak{L}$的个体变元符号，$t(v_1$，v_2，$\cdots$，$v_n)$中出现的个体变元符号都在 v_1，v_2，$\cdots$，v_n中．若对任意i： $1 \le i \le n$，$\sigma_1(v_i) = \sigma_2(v_i)$，则$t^{\sigma_1} = t^{\sigma_2}$.

证： 对t的复杂性归纳证明，即对t中所含的函数变元符号的个数d进行归纳证明.

(1) 当$d = 0$时，t为个体变元符号或个体常元符号.

(1.1) 若t为个体变元符号，则t必为v_1，v_2，$\cdots$，v_n中的某一个，不妨设 $t = v_i$ （某i： $1 \le i \le n$)，则:

$$t^{\sigma_1} = v_i^{\sigma_1} = \sigma_1(v_i) = \sigma_2(v_i) = v_i^{\sigma_2} = t^{\sigma_2}$$

(1.2) 若t为个体变元符号c时，则:

$$t^{\sigma_1} = c^{\sigma_1} = \overline{c} = c^{\sigma_2} = t^{\sigma_2}.$$

(2) 假设$d<l$时命题成立，考察$d=l$时情形$(l>0)$.

设t中含有l个函数变元符号, $t = f^m(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_m)$, 其中: f^m是 $\mathfrak{L}$中的一个m元函数变元符号, $t_1, ..., t_m$是$\mathfrak{L}$的项. 由归纳假设得:

$$t_1^{\sigma_1} = t_1^{\sigma_2},\ \ t_2^{\sigma_1} = t_2^{\sigma_2},\ \ \cdots,\ \ t_m^{\sigma_1} = t_m^{\sigma_2},$$

从而
$$\begin{aligned} t^{\sigma_1} &= \overline{f^m}(t_1^{\sigma_1},\ t_2^{\sigma_1},\ \cdots,\ t_m^{\sigma_1}) \\ &= \overline{f^m}(t_1^{\sigma_2},\ t_2^{\sigma_2},\ \cdots,\ t_m^{\sigma_2}) \\ &= t^{\sigma_2}. \end{aligned}$$

归纳证完，命题成立.

公式与约束变元的无关性(定理27.14)

设σ_1, σ_2是$\mathfrak{L}$在其某个解释I中的两个指派, $v_1, ..., v_n$是$\mathfrak{L}$的个体变元符号, $\alpha(v_1, v_2, \cdots, v_n)$是$\mathfrak{L}$的一个公式, 其自由变元符号都在$v_1, v_2, \cdots, v_n$中, 若对任意$i$: $1 \le i \le n$, $\sigma_1(v_i) = \sigma_2(v_i)$, 则

$$I \models_{\sigma_1} \alpha \text{当且仅当} I \models_{\sigma_2} \alpha$$

证: 对α的构造复杂性进行归纳证明, 即对公式α中所含的联结词与量词的个数d进行归纳证明.

(1) 当$d = 0$时, α为原子公式, 设α为$F^n(t_1, ..., t_n)$, 由于α中没有量词, 则在t_i中出现的每个个体变元符号都是α的自由变元$(1 \le i \le n)$, 从而在t_i中出现的每个个体变元符号在σ_1与σ_2下的指派的值相等, 由

项的哑元无关性知:

$$\text{对任意} i: 1 \le i \le n,\ \ t_i^{\sigma_1} = t_i^{\sigma_2}.$$

从而

$$\begin{aligned}
I \models_{\sigma_1} \alpha \quad & \text{当且仅当}\ I \models_{\sigma_1} F^n(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n), \\
& \text{当且仅当}\ < t_1^{\sigma_1},\ t_2^{\sigma_1},\ \cdots,\ t_n^{\sigma_1} > \in \overline{F^n}, \\
& \text{当且仅当}\ < t_1^{\sigma_2},\ t_2^{\sigma_2},\ \cdots,\ t_n^{\sigma_2} > \in \overline{F^n}, \\
& \text{当且仅当}\ I \models_{\sigma_2} F^n(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n), \\
& \text{当且仅当}\ I \models_{\sigma_1} \alpha.
\end{aligned}$$

(2) 假设$d<l$时命题成立, 考察$d=l$时情形$(l \ge 1)$.

(2.1) 当α为$(\neg \beta)$时, 由归纳假设知:

$$I \models_{\sigma_1} \beta \text{当且仅当} I \models_{\sigma_2} \beta.$$

从而

$$I \models_{\sigma_1} \alpha \quad \text{当且仅当} I \models_{\sigma_1} \neg\beta \quad \text{当且仅当} I \not\models_{\sigma_1} \beta$$
$$\text{当且仅当} I \not\models_{\sigma_2} \beta \quad \text{当且仅当} I \models_{\sigma_2} \neg\beta$$
$$\text{当且仅当} I \models_{\sigma_2} \alpha.$$

(2.2) 当α为$(\alpha_1 \to \alpha_2)$时，由归纳假设知：

$$I \models_{\sigma_1} \alpha_i \text{当且仅当} I \models_{\sigma_2} \alpha_i,\ i = 1, 2$$

从而

$$I \models_{\sigma_1} \alpha \quad \text{当且仅当} I \models_{\sigma_1} \alpha_1 \to \alpha_2$$
$$\text{当且仅当} I \not\models_{\sigma_1} \alpha_1 \text{或} I \models_{\sigma_1} \alpha_2$$
$$\text{当且仅当} I \not\models_{\sigma_2} \alpha_1 \text{或} I \models_{\sigma_2} \alpha_2$$
$$\text{当且仅当} I \models_{\sigma_2} \alpha_1 \to \alpha_2$$
$$\text{当且仅当} I \models_{\sigma_2} \alpha.$$

(2.3) 当α为$(\forall v_0)\beta$时，其中v_0为$\mathcal{L}$的一个个体变元符号. 由于α的自由变元符号都在v_1，v_2，$\cdots$，v_n中，故β的自由变元符号都在v_0, v_1，v_2，$\cdots$，v_n中.

因为对任意的$i(0 \leq i \leq n)$, $\sigma_1(v_0/a)(v_i) = \sigma_2(v_0/a)(v_i)$.

由归纳假设得:

$$I \models_{\sigma_1(v_0/a)} \beta \text{当且仅当} I \models_{\sigma_2(v_0/a)} \beta,$$

从而$I \models_{\sigma_1} \alpha$ 当且仅当$I \models_{\sigma_1} \forall v_0\beta$,

当且仅当对任意$a \in D$，$I \models_{\sigma_1(v_0/a)} \beta$,

当且仅当对任意$a \in D$，$I \models_{\sigma_2(v_0/a)} \beta$,

当且仅当$I \models_{\sigma_2} \forall v_0\beta$，即$I \models_{\sigma_2} \alpha$.

归纳证完，命题成立.

定理27.14的直观含义

定理27.14是说：对公式$\alpha(v_1, v_2, \cdots, v_n)$来说，$I \models_{\sigma} \alpha$成立与否只与$\sigma$对$\alpha$的自由变元 $v_1, ..., v_n$指派的值有关，与σ对其它个体变元指派的值无关，即与σ对其自由变元指派的值无关，故称公式与约束变元的无关性.

项的替换定理

设s，x_i和t分别是$\mathfrak{L}$中的项、个体变元符号和项．s'是将s中所有x_i换为t所得的项．σ为$\mathfrak{L}$在其某个解释I中的一个指派，$\sigma' = \sigma(x_i/t^\sigma)$．则$s^{\sigma'} = (s')^\sigma$．

$$
\begin{array}{lccccccc}
s^{\sigma'}: & & \cdots & \sigma'(x_i) & \cdots & \cdots & \sigma'(x_i) & \cdots & \\
 & & & \downarrow & & & \downarrow & & \\
s: & (& \cdots & x_i & \cdots & \cdots & x_i & \cdots &) \\
s': & (& \cdots & t & \cdots & \cdots & t & \cdots &) \\
 & & & \uparrow & & & \uparrow & & \\
(s')^\sigma: & & \cdots & t^\sigma & \cdots & \cdots & t^\sigma & \cdots &
\end{array}
$$

证： 对s的复杂性归纳证明.

(1) 当s为个体变元符号时.

(1.1) 若s为x_i, 则s'为t, 从而

$$s^{\sigma'} = \sigma'(x_i) = t^{\sigma} = (s')^{\sigma}.$$

(1.2) 若s为个体变元符号x_j $(j \neq i)$, 则s'也为x_j, 从而 $s^{\sigma'} = \sigma'(x_j) = \sigma(x_j) = (s')^{\sigma}$.

(1.3) 若s为个体变常元符号c, 则s'也为c, 从而

(2) 若s是形如$f^m(s_1, s_2, \cdots, s_m)$的项，以$s'_j$记将$s_j$中所有$x_i$换为$t$得到的项（任$j: 1 \leq j \leq m$）. 则: $s' = f^m(s'_1, s'_2, \cdots, s'_m)$. 由归纳假设知:

$$s_j^{\sigma'} = (s'_j)^\sigma \ (1 \leq j \leq m).$$

从而:

$$\begin{aligned} s^{\sigma'} &= \overline{f^m}(s_1^{\sigma'}, s_2^{\sigma'}, \cdots, s_m^{\sigma'}) \\ &= \overline{f^m}\big((s'_1)^\sigma, (s'_2)^\sigma, \cdots, (s'_m)^\sigma\big) \\ &= (s'_1)^\sigma. \end{aligned}$$

归纳证毕, (*)成立.

公式的替换定理

设α，x_i和t分别是$\mathfrak{L}$中的公式、个体变元符号和项，t对x_i在α中自由．σ为$\mathfrak{L}$在其某个解释I中的一个指派，$\sigma' = \sigma(x_i/t^\sigma)$，$\alpha' = \alpha(x_i/t)$．则

$$I \models_{\sigma} \alpha' \text{当且仅当} I \models_{\sigma'} \alpha.$$

$$\begin{array}{lcccccccc}
I \models_{\sigma'} \alpha : \cdots & \sigma'(x_i) & \cdots & (\text{无关}) & \cdots & \sigma'(x_i) & \cdots \\
 & \downarrow (\text{自由}) & & \downarrow (\text{约束}) & & \downarrow (\text{自由}) & \\
\alpha : \quad (\cdots & x_i & \cdots & x_i & \cdots & x_i & \cdots) \\
\alpha' : \quad (\cdots & t & \cdots & x_i & \cdots & t & \cdots) \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
I \models_{\sigma} \alpha' : \cdots & t^\sigma & \cdots & (\text{无关}) & \cdots & t^\sigma & \cdots
\end{array}$$

证： 下对α归纳证明：对$\mathcal{L}$在I中的任意指派σ，

$$I \models_{\sigma} \alpha' \text{当且仅当 } I \models_{\sigma'} \alpha. \tag{$*$}$$

(1) 当α是原子公式$F^n(s_1, s_2, \cdots, s_n)$时，以$s'_j$记将$s_j$中所有$x_i$换为$t$得到的项(任$j: 1 \leq j \leq n$). 则$\alpha(x_i/t) = F^n(s'_1, s'_2, \cdots, s'_n)$. 由项的哑元无关性知：

$$s_j^{\sigma'} = (s'_j)^{\sigma} \ (\text{任}j: 1 \leq j \leq n).$$

从而

$$\begin{aligned}
I \models_{\sigma'} \alpha &\Leftrightarrow < s_1^{\sigma'}, s_2^{\sigma'}, \cdots, s_n^{\sigma'} > \in \overline{F^n} \\
&\Leftrightarrow < (s'_1)^{\sigma}, (s'_2)^{\sigma}, \cdots, (s'_n)^{\sigma} > \in \overline{F^n} \\
&\Leftrightarrow I \models_{\sigma} F^n(s'_1, s'_2, \cdots, s'_n) \\
&\Leftrightarrow I \models_{\sigma} \alpha(x_i/t).
\end{aligned}$$

(2) 当α为$\neg\beta$时, $\alpha(x_i/t)$为$(\neg\beta)(x_i/t)$, 即$\neg(\beta(x_i/t))$.
由归纳假设知: $I \models_{\sigma'} \beta$当且仅当$I \models_{\sigma} \beta(x_i/t)$.

故$I \models_{\sigma'} \neg\beta$当且仅当$I \models_{\sigma} \neg\beta(x_i/t)$,

即$I \models_{\sigma'} \alpha$当且仅当$I \models_{\sigma} \alpha(x_i/t)$.
(3) 当α为$\alpha_1 \to \alpha_2$时, $\alpha(x_i/t)$为 $\alpha_1(x_i/t) \to \alpha_2(x_i/t)$.
对α_1和α_2使用归纳假设易证(*)成立.
(4) 当α为$(\forall x_j)\beta$时.
(4.1) 若$i = j$,则α中所有x_i都是约束出现, 故$\alpha' = \alpha$.
由于σ与σ'对不是x_i的个体变元指派的值相同, 由公式的约束变元无关性知:

$$I \models_{\sigma} \alpha(x_i/t) \Leftrightarrow I \models_{\sigma} \alpha \Leftrightarrow I \models_{\sigma'} \alpha.$$

(4.2) 若$i \neq j$，则：$\alpha(x_i/t)$为$(\forall x_j)\beta(x_i/t)$. 由于$t$对$x_i$在$\alpha$中自由，故$x_i$不在$\alpha$中自由出现或者$x_j$不在 t中出现.

(4.2.1) 若x_i不在α中自由出现，仿(4.1)可证(*)成立.

(4.2.2) 若x_j不在t中出现，由项与哑元的无关性知：对任意$a \in D$，$t^{\sigma(x_j/a)} = t^{\sigma}$.

从而

$I \models_{\sigma} \alpha(x_i/t) \Leftrightarrow I \models_{\sigma} (\forall x_j)\beta(x_i/t)$,

$\Leftrightarrow$对任意$a \in D$，$I \models_{\sigma(x_j/a)} \beta(x_i/t)$.

$\Leftrightarrow$对任意$a \in D$，$I \models_{\sigma''} \beta(x_i/t)$, $\quad \sigma'' = \sigma(x_j/a)$,

$\Leftrightarrow$对任意$a \in D$，$I \models_{\sigma''(x_i/t^{\sigma''})} \beta$，（归纳假设）

$\Leftrightarrow$对任意$a \in D$，$I \models_{\sigma''(x_i/t^{\sigma})} \beta$，

$\Leftrightarrow$对任意$a \in D$，$I \models_{\sigma(x_j/a)(x_i/t^{\sigma})} \beta$.

$\Leftrightarrow$：对任意$a \in D$，$I \models_{\sigma(x_i/t^{\sigma})(x_j/a)} \beta$，
$(\sigma(x_j/a)(x_i/t^{\sigma}) = \sigma(x_i/t^{\sigma})(x_j/a))$

$\Leftrightarrow I \models_{\sigma(x_i/t^{\sigma})} (\forall x_j)\beta$，

$\Leftrightarrow I \models_{\sigma(x_i/t^{\sigma})} \alpha$.

归纳证完，(*)成立.

相对模型的真假

- $I \models_{\sigma} \alpha$定义了$\alpha$相对$I$和$\sigma$的真假;
- $I \models_{\sigma} \alpha$只表示$\alpha$在某种程度上为真.
- 怎么定义永真式?
- 先定义α相对I为真(假)

公式在解释中为真(I)

设α为$\mathfrak{L}$的一个公式，I为$\mathfrak{L}$的一个解释，

- 若对$\mathfrak{L}$在I中的每个指派σ都有 $I \models_{\sigma} \alpha$，则称$\alpha$在$I$中真，记为$I \models \alpha$，此时也称$I$为$\alpha$的一个模型.

- 若对$\mathfrak{L}$在I中的每个指派σ都有 $I \not\models_{\sigma} \alpha$，则称$\alpha$在$I$中假.

公式在解释中为真(II)

- "α在I中假"并无记号
- $I \not\models \alpha$表示"α在I中真"不成立，此时称α在I中不真.
- 注意$I \not\models \alpha$与α在I中假的区别. （不满足al的指派个数不同）
- $\mathfrak{L}$中可能有公式α的某个解释中既不真也不假.

简单性质(I)

设α,β是$\mathfrak{L}$的公式，I是$\mathfrak{L}$ 的一个解释，则

(1) α在I中真$\Leftrightarrow \neg\alpha$在$I$中假 $\Leftrightarrow \neg\neg\alpha$在$I$中真.

(2) α在I中假$\Leftrightarrow \neg\alpha$在$I$中真 $\Leftrightarrow \neg\neg\alpha$在$I$中假.

(3) $\alpha\to\beta$在I中假 $\Leftrightarrow$ α在I中真且β在I中假.

思考题:

"$\alpha\to\beta$在I中真$\Leftrightarrow$ α在I中假或β在I中真"是否成立?

简单性质(II)

(1) 若$I \models \alpha$, 且$I \models \alpha \to \beta$, 则$I \models \beta$.

(2) $I \models \alpha$当且仅当$I \models (\forall x)\alpha$.

证: (1) 易证, 略.

(2)($\Rightarrow$) 设$I \models \alpha$. 要证$I \models (\forall x)\alpha$, 只要证: 对$\mathfrak{L}$在$I$中的任一个指派$\sigma$, $I \models_{\sigma} (\forall x)\alpha$. 只要证: 对$\mathfrak{L}$在$I$中的任一个指派$\sigma$, 任意$a \in D$, $I \models_{\sigma(x/a)} \alpha$. 注意$I \models \alpha$即可.

(2)($\Leftarrow$) 设$I \models \forall x\alpha$, 下证$I \models \alpha$. 对$\mathfrak{L}$在$I$中的任一个指派$\sigma$, 因$I \models_{\sigma} (\forall x)\alpha$, 故对任意$a \in D$, $I \models_{\sigma(x/a)} \alpha$. 特别地, 取$a_0 = \sigma(x) \in D$, 则 $I \models_{\sigma(x/a_0)} \alpha$. 而$\sigma(x/a_0) = \sigma$, 故$I \models_{\sigma} \alpha$.

永真(假)式

设α为$\mathfrak{L}$的一个公式.

(1) 称α是永真式，若α在$\mathfrak{L}$的任一个解释中都为真，记为$\models \alpha$;

(2) 称α为矛盾式或永假式，若α在$\mathfrak{L}$的任一解释中都为假.

注： 永假式仍然没有记号。

简单性质(I)

(1) $\models \alpha$ 当且仅当：对任一解释I及任一 指派σ, $I \models_{\sigma} \alpha$.

(2) α是永假式 当且仅当：对任一解释I中及任一指派σ, $I \not\models_{\sigma} \alpha$.

简单性质(II)

(1) α永真 $\iff \neg\alpha$永假;

(1') α永假 $\iff \neg\alpha$永真);

(2) $\alpha\rightarrow\beta$永假 $\iff \alpha$永真且β永假;

(3) 若$\models\alpha$且$\models\alpha\rightarrow\beta$, 则$\models\beta$;

(4) $\models\alpha \iff \models(\forall x_i)\alpha$.

简单性质(III)

- 设α为**N**中公式，将在α中出现的所有命题变元p_0，p_1，$\cdots$，p_n同时分别换为$\mathfrak{L}$的公式$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$，得到的$\mathfrak{L}$中公式$\beta$称为$\alpha$在$\mathfrak{L}$中的一个代入实例.

- 若α'是**P**中的一个重言式，则α'在$\mathrm{N}_{\mathcal{L}}$中的任一个代入实例α是永真式.

简单性质(III)的证明

证： 设α'中出现的命题变元都在$p_0, p_1, p_2, \cdots, p_k$中，$\alpha$是将$\alpha'$中所有$p_i$都替换为$\mathrm{N}_{\mathcal{L}}$中公式$\alpha_i$得到的公式$(0 \le i \le k)$. 要证$\alpha$是永真式，只要证：对$\mathfrak{L}$的任一个解释$I$及$\mathfrak{L}$在$I$中的任一个指派$\sigma$，$I \models_{\sigma} \alpha$. 对于任给定的$I$和$\sigma$,构造$\mathbf{P}$的一个指派 v如下：

$$v: \{p_0, p_1, \cdots, p_n, \cdots\} \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$v(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{若} 0 \le i \le k \text{且} I \models_{\sigma} \alpha_i \\ 0 & \text{若} 0 \le i \le k \text{且} I \not\models_{\sigma} \alpha_i \\ 0 & i > k \end{cases}$$

以下对α'的复杂性归纳证明:

$$I \models_{\sigma} \alpha \text{当且仅当} v(\alpha') = 1 \qquad (*)$$

(1) 当α'为命题变元符号p_i (某i : $0 \le i \le k$)时, 则α为α_i, 从而

$$v(\alpha') = 1 \Leftrightarrow v(p_i) = 1 \Leftrightarrow I \models_{\sigma} \alpha_i \Leftrightarrow I \models_{\sigma} \alpha.$$

(2) 当α'是$\neg\beta'$时, 设β为将β'中 p_0, p_1, p_2, $\cdots$, p_k分别替换为α_0, α_1, α_2, $\cdots$, α_k得到的$\mathrm{N}_{\mathcal{L}}$中的公式, 则α为$\neg\beta$. 由归纳假设知:

$$I \models_{\sigma} \beta \text{当且仅当} v(\beta') = 1.$$

从而

$$I \models_{\sigma} \alpha \Longleftrightarrow I \models_{\sigma} \neg\beta \Longleftrightarrow I \not\models_{\sigma} \beta \Longleftrightarrow v(\beta') = 0$$
$$\Longleftrightarrow v(\neg\beta') = 1 \Longleftrightarrow v(\alpha') = 1.$$

(3) 当α'为$\alpha'_1 \to \alpha'_2$时，仿(2)可证.

归纳证完，$(*)$成立.

从而，由于α'为$\mathbf{P}$的重言式，故$v(\alpha') = 1$，所以，$I \models_{\sigma} \alpha$.

由I和σ的任意性知：$\models \alpha$.

闭公式的真假值

设α是闭公式. 若α不是永真式，则α定为永假式；反之亦然.

证明：利用公式与自由变元的无关性可证.

谢　谢