单元3.1-函数

第一编 集合论　第3章 函数

3.1 函数的基本概念、3.2 函数的性质、

3.3 函数的合成、3.4 反函数

内容提要

- 函数的基本概念
- 函数性质：单射、满射、双射
- 函数合成
- 反函数

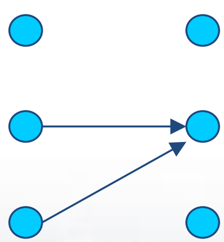
函数(映射)

- 函数(function), 映射(mapping):

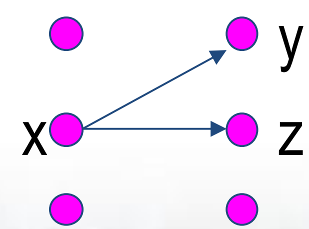
  单值的二元关系

- 单值: $\forall x \in \mathrm{dom}F$, $\forall y,z \in \mathrm{ran}F$,

  $$xFy \wedge xFz \rightarrow y=z$$



单值



非单值

函数的记号

- $F(x)=y \Leftrightarrow <x,y> \in F \Leftrightarrow xFy$
- $\varnothing$是空函数
- 常用$F,G,H,\ldots,f,g,h,\ldots$表示函数.

偏函数

- 设F是函数
- A到B的偏函数(partial function)

$$\mathrm{dom}F \subseteq A \wedge \mathrm{ran}F \subseteq B$$

- A称为F的前域

偏函数的记号

- 从A到B的偏函数F记作

$$F:A \nrightarrow B$$

- A到B的全体偏函数记为

$$A \nrightarrow B = \{ F \mid F:A \nrightarrow B \}$$

- 显然 $A \nrightarrow B \subseteq P(A \times B)$

例3.1

- $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2\}$.
- $|P(A\times B)|=2^4=16$. $f_0=\varnothing$,

$f_1=\{\langle a,1\rangle\}$, $f_2=\{\langle a,2\rangle\}$, $f_3=\{\langle b,1\rangle\}$, $f_4=\{\langle b,2\rangle\}$,

$f_5=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle\}$, $f_6=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$,

$f_7=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle\}$, $f_8=\{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle\}$.

$A\to B = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$. #

- 非函数: $\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle\}$, $\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle\}$

全函数

- 全函数(total function)：

$$\mathrm{dom}F=A$$

- 全函数记作 $F:A\to B$

- A到B的全体全函数记为

$$B^A = A\to B = \{ F \mid F:A\to B \}$$

关于B^A的说明

- $|B^A| = |B|^{|A|}$

- 当$A=\varnothing$时，$B^A=\{\varnothing\}$

- 当 $A\neq\varnothing \wedge B=\varnothing$ 时，

  $B^A=A\to B=\varnothing$， $A\to B=\{\varnothing\}$.

例3.1

- $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2\}$,
- $f_0=\varnothing$,

$f_1=\{<a,1>\}$, $f_2=\{<a,2>\}$, $f_3=\{<b,1>\}$, $f_4=\{<b,2>\}$,

$f_5=\{<a,1>,<b,1>\}$, $f_6=\{<a,1>,<b,2>\}$,
$f_7=\{<a,2>,<b,1>\}$, $f_8=\{<a,2>,<b,2>\}$.

$A \to B = \{f_5, f_6, f_7, f_8\}$

真偏函数

- 真偏函数(proper partial function) :

$$\mathrm{dom}F \subset A$$

- 真偏函数记作 $F:A \nrightarrow B$

- A到B的全体真偏函数记为

$$A \nrightarrow B = \{ F \mid F:A \nrightarrow B \}$$

例3.1

- $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2\}$

  $f_0=\varnothing$,

$f_1=\{<a,1>\}$, $f_2=\{<a,2>\}$, $f_3=\{<b,1>\}$, $f_4=\{<b,2>\}$,

$f_5=\{<a,1>,<b,1>\}$, $f_6=\{<a,1>,<b,2>\}$,

$f_7=\{<a,2>,<b,1>\}$,$f_8=\{<a,2>,<b,2>\}$.

A⇻B $=\{f_0 , f_1 , f_2 , f_3 , f_4\}$. #

讨论

- $A \nrightarrow B = A \to B \cup A$ ⇻ B

- $F: A \nrightarrow B \;\Rightarrow\; F: \mathrm{dom}\, F \to B$

- 以下只讨论全函数

全函数性质

- 设 F:A→B

- 单射(injection): F是单根的
- 满射(surjection, onto): ranF=B
- 双射(bijection), 一一对应(1-1 mapping) :

F既是单射又是满射

例3.2

- $A_1=\{a,b\}$, $B_1=\{1,2,3\}$
- $A_2=\{a,b,c\}$, $B_2=\{1,2\}$
- $A_3=\{a,b,c\}$, $B_3=\{1,2,3\}$

- 求$A_1 \to B_1$, $A_2 \to B_2$, $A_3 \to B_3$中的单射,满射,双射.

例3.2(1)

- $A_1=\{a,b\}$, $B_1=\{1,2,3\}$

- $A_1 \to B_1$中无满射, 无双射, 单射6个:
  $f_1=\{<a,1>,<b,2>\}$, $f_2=\{<a,1>,<b,3>\}$,
  $f_3=\{<a,2>,<b,1>\}$, $f_4=\{<a,2>,<b,3>\}$,
  $f_5=\{<a,3>,<b,1>\}$, $f_6=\{<a,3>,<b,2>\}$.

例3.2 (2)

- $A_2=\{a,b,c\}$, $B_2=\{1,2\}$
- $A_2 \to B_2$中无单射, 无双射, 满射6个:

$f_1=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$, $f_2=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle\}$,
$f_3=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$, $f_4=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,2\rangle\}$,
$f_5=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$, $f_6=\{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle\}$.

例3.2(3)

- A_3={a,b,c}, B_3={1,2,3},

- $A_2 \to B_2$中双射6个:

f_1={<a,1>,<b,2>,<c,3>}, f_2={<a,1>,<b,3>,<c,2>}

f_3={<a,2>,<b,1>,<c,3>}, f_4={<a,2>,<b,3>,<c,1>}

f_5={<a,3>,<b,1>,<c,2>}, f_6={<a,3>,<b,2>,<c,1>}

#

有多少个单射,满射,双射?

- 设|A|=n, |B|=m

- n<m时, A→B中无满射, 无双射, 单射个数为　　m(m-1)…(m-n+1)
- n>m时, A→B中无单射, 无双射, 满射个数为

$$m!\left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\}.$$

- n=m时, A→B中双射个数为 n!

例3.3

例3. 3 A,B是非空有穷集,讨论下列函数的性质

1. $f:A \to B$, $g:A \to A \times B$, $\forall a \in A$,

$$g(a)=\langle a,f(a)\rangle$$

2. $f:A \times B \to A$, $\forall \langle a,b\rangle \in A \times B$,

$$f(\langle a,b\rangle)=a$$

3. $f:A \times B \to B \times A$, $\forall \langle a,b\rangle \in A \times B$,

$$f(\langle a,b\rangle)=\langle b,a\rangle$$

例3.3(1)

- 1. $f:A\rightarrow B$, $g:A\rightarrow A\times B$, $\forall a\in A$,
  $g(a)=\langle a,f(a)\rangle$
- 当$|B|>1$时, g是单射, 非满射, 非双射
- 当$|B|=1$时, g是单射, 满射, 双射

例3.3(2)

- 2. $f:A\times B\to A$, $\forall \langle a,b\rangle\in A\times B$,

  $f(\langle a,b\rangle)=a$

- 当$|B|>1$时, f非单射, 是满射, 非双射

- 当$|B|=1$时, f是单射, 满射, 双射

例3.3(3)

- 3. $f: A\times B \to B\times A, \forall \langle a,b\rangle \in A\times B,$

  $f(\langle a,b\rangle)=\langle b,a\rangle$

- f是单射, 满射, 双射。 #

象, 原象

- 设 $f:A\to B$, $A'\subseteq A$, $B'\subseteq B$

- A'的**象(image)**是

  $$f(A') = \{\, y \mid \exists x(\, x\in A' \wedge f(x)=y \,)\,\} \subseteq B$$

- B'的**原象(preimage)**是

  $$f^{-1}(B') = \{x \mid \exists y(y\in B'\wedge f(x)=y)\} \subseteq A$$

象, 原象(举例)

- $f(A)=\mathrm{ran}\, f$, $f^{-1}(B)=\mathrm{dom}\, f=A$

- $f:R\rightarrow R$, $f(x)=x^2$.

  $A_1=[0,+\infty)$, $A_2=[1,3)$, $A_3=R$

  $f(A_1)=[0,+\infty)$, $f(A_2)=[1,9)$, $f(A_3)=[0,+\infty)$

  $B_1=(1,4)$, $B_2=[0,1]$, $B_3=R$

$f^{-1}(B_1)=(-2,-1)\cup(1,2)$, $f^{-1}(B_2)=[-1,1]$, $f^{-1}(B_3)=R$

特殊函数

- 常数函数:

  $f:A\to B,\ \exists b\in B,\ \forall x\in A,\ f(x)=b$

- 恒等函数:

  $I_A:A\to A,\ I_A(x)=x$

特征函数

- 特征函数:

$$\chi_A: E \to \{0,1\},\ \chi_A(x)=1 \Leftrightarrow x \in A$$

- 当 $\varnothing \subset A \subset E$时, χ_A是满射

单调函数

- 设$f:A \to B$, $\langle A,\leq_A\rangle$, $\langle B,\leq_B\rangle$是偏序集

- 单调增:

  $$\forall x,y \in A,\ x \leq_A y \Rightarrow f(x) \leq_B f(y)$$

- 单调减:

  $$\forall x,y \in A,\ x \leq_A y \Rightarrow f(y) \leq_B f(x)$$

- 严格单调: 把≤换成<, 是单射

自然映射

- 设R为A上等价关系
- 自然映射, 典型映射:

$$f:A\rightarrow A/R,\ \ f(x)=[x]_R$$

- 当$R=I_A$时, f是单射.

自然映射(举例)

- $A=\{a,b,c,d\}$, $A/R=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$
- $F:A\rightarrow A/R$, $F(x)=[x]$

$$F(a)=\{a,b\},$$
$$F(b)=\{a,b\},$$
$$F(c)=\{c\},$$
$$F(d)=\{d\}$$

定理3.3

定理3. 3 设 $g:A\to B$, $f:B\to C$, 则

$$f\circ g:A\to C,\quad f\circ g(x)=f(g(x))$$

证明思路

(1) $f\circ g$单值 (即$f\circ g$是函数)

(2) $\mathrm{dom}\, f\circ g = A$, $\mathrm{ran}\, f\circ g \subseteq C$

(3) $f\circ g(x)=f(g(x))$

定理3证明(1)

- fog是单值的, 即fog是函数.
- $\forall x \in dom(fog)$, 若$\exists z_1, z_2 \in ran(fog)$, 使得 $x(fog)z_1 \wedge x(fog)z_2$, 则

$x(fog)z_1 \wedge x(fog)z_2$

$\Leftrightarrow \exists y_1(y_1 \in B \wedge xgy_1 \wedge y_1fz_1) \wedge \exists y_2(y_2 \in B \wedge xgy_2 \wedge y_2fz_2)$

$\Leftrightarrow \exists y_1 \exists y_2(y_1 \in B \wedge y_2 \in B \wedge xgy_1 \wedge xgy_2 \wedge y_1fz_1 \wedge y_2fz_2)$

$\Rightarrow \exists y(y \in B \wedge yfz_1 \wedge yfz_2) \Rightarrow z_1 = z_2$

定理3证明(2)

- $\mathrm{dom}(f\circ g) = A$, $\mathrm{ran}(f\circ g)\subseteq C$.
- 显然$\mathrm{dom}(f\circ g)\subseteq A$, $\mathrm{ran}(f\circ g)\subseteq C$.

  下证$A\subseteq \mathrm{dom}(f\circ g)$, $\forall x$,

$$
\begin{aligned}
x\in A &\Rightarrow \exists! y(y\in B \wedge xgy) \\
&\Rightarrow \exists! y \exists! z(y\in B\wedge z\in C\wedge xgy\wedge yfz) \\
&\Rightarrow \exists! z(z\in C\wedge x(f\circ g)z) \\
&\Rightarrow x\in \mathrm{dom}(f\circ g).
\end{aligned}
$$

定理3证明(3)

- $f \circ g(x)=f(g(x))$.
- $\forall x$,

$$
\begin{aligned}
& x \in A \\
\Rightarrow\ & \exists! z(z \in C \land z = f \circ g(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists! z \exists! y(z \in C \land y \in B \land y = g(x) \land z = f(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists! z(z \in C \land z = f(g(x)))
\end{aligned}
$$

所以对任意$x \in A$，有$f \circ g(x)=f(g(x))$.　#

定理3.4、定理3.5

定理3. 4 设 g:A→B, f:B→C, fog:A→C,则

(1) 若 f,g 均为满射, 则 fog 也是满射.

(2) 若 f,g 均为单射, 则 fog 也是单射.

(3) 若 f,g 均为双射, 则 fog 也是双射. #

定理3. 5 设 g:A→B, f:B→C, 则

(1) 若 fog 为满射, 则 f 是满射.

(2) 若 fog 为单射, 则 g 是单射.

(3) 若 fog 为双射, 则 g 是单射, f 是满射. #

定理3.6、定理3.7

定理3. 6 设 f:A→B, 则 $f=f\circ I_A=I_B\circ f$. #

定理3. 7 设 f:R→R, g:R→R, 且f,g按≤都是单调增的, 则fog也是单调增的.

证明 $x\le y \Rightarrow g(x)\le g(y) \Rightarrow f(g(x))\le f(g(y))$. #

- 若f,g都是单调减的, 则fog也是单调增的

定理3.8

定理3. 8 设A为集合,则

$$A^{-1}\text{为函数} \Leftrightarrow A\text{为单根的}. \quad \#$$

推论 设R为二元关系, 则

$$R\text{为函数} \Leftrightarrow R^{-1}\text{为单根的}. \quad \#$$

反函数

定理3.9 设 $f:A\to B$，且f为双射，则

$f^{-1}:B\to A$，且f^{-1}也为双射.　#

定义3.10 若 $f: A\to B$ 为双射，则 $f^{-1}: B\to A$ 称为 f 的**反函数**。

单边逆

- 设$f:A \to B$, $g:B \to A$

- 左逆:

  g是f的左逆 $\Leftrightarrow$ $g \circ f = I_A$

- 右逆:

  g是f的右逆 $\Leftrightarrow$ $f \circ g = I_B$

定理3.10

定理3. 10 设 $f:A\to B$, 且 $A\neq\varnothing$, 则

(1) f 存在左逆 $\Leftrightarrow$ f 是单射;

(2) f 存在右逆 $\Leftrightarrow$ f 是满射;

(3) f 存在左逆, 右逆 $\Leftrightarrow$ f 是双射

$\Leftrightarrow$ f 的左逆和右逆相等. #

小结

- 函数,偏函数,全函数,真偏函数
- 单射, 满射, 双射, 计数
- 象, 原象
- 常值函数,恒等函数,特征函数,单调函数,自然映射
- 合成函数,构造双射
- 反函数, 单边逆