单元1.2 命题逻辑预备知识

第一编 集合论 第一章 集合

1.1 预备知识（上）

内容提要

命题逻辑中

- 最基本的逻辑符号、逻辑公式
- 基本的等值式
- 重要的推理定律（重言蕴涵式）

原子命题

用p,q,r,...表示原子命题(简单命题);

用“1”表示命题的真值为真;

用“0”表示命题的真值为假。

联结词

用5种连接词给出最基本的复合命题。

① $\neg p$　称为 p的否定式

② $p \wedge q$　称为 p与q的合取式

③ $p \vee q$　称为 p与q的析取式

④ $p \rightarrow q$　称为 p与q的蕴涵式

⑤ $p \leftrightarrow q$　称为 p与q的等价式

命题公式

用p,q,r...表示命题(命题常元)或命题变元

① 单个命题变元(或常元)是命题公式;

② 若A是命题公式,则$(\neg A)$也是;

③ 若A,B是命题公式,则$(A\wedge B)$,$(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$,$(A\leftrightarrow B)$也是;

④ 只有有限次应用(1)-(3)形成的符号串才是命题公式(命题形式),简称公式。

命题公式的赋值

设命题公式A中有n个命题变元$p_1, p_2,\dots, p_n$，

给p_i指定一个值α_i (α_i为0或1, i=1,2,..., n)，

所得字符串 $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ 称为A的一个**赋值**，

A共有2^n个赋值。

如果在$\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$下A的真值为1，则称它为A的**成真赋值**，否则，A的真值为0，则称它为A的**成假赋值**。

北京大学

永真、永假、可满足、等值式

若公式A没有成假赋值，则称A为重言式(永真式)。

若公式A没有成真赋值，则称A为矛盾式(永假式)。

若公式A至少存在一个成真赋值，则称A为可满足式。

若$A \leftrightarrow B$是重言式，则称A与B是等值的，记为$A \Leftrightarrow B$，并称$A \Leftrightarrow B$为等值式。

基本的等值式(①~④)

① 幂等律 $A \Leftrightarrow A \lor A$, $A \Leftrightarrow A \land A$

② 交换律 $A \lor B \Leftrightarrow B \lor A$, $A \land B \Leftrightarrow B \land A$

③ 结合律 $(A \lor B) \lor C \Leftrightarrow A \lor (B \lor C)$

$(A \land B) \land C \Leftrightarrow A \land (B \land C)$

④ 分配律 $A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$

$A \land (B \lor C) \Leftrightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$

基本的等值式(⑤~⑩)

⑤ 德•摩根律 $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$, $\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$

⑥ 吸收律 $A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$, $A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$

⑦ 零律 $A\vee 1\Leftrightarrow 1$, $A\wedge 0\Leftrightarrow 0$

⑧ 同一律 $A\vee 0\Leftrightarrow A$, $A\wedge 1\Leftrightarrow A$

⑨ 排中律 $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$

⑩ 矛盾律 $A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$

基本的等值式(⑪~⑯)

⑪ 双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

⑫ 蕴涵等值式 $A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg A\vee B$

⑬ 等价等值式 $A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$

⑭ 等价否定等值式 $A\leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A\leftrightarrow\neg B$

⑮ 假言易位 $A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg B\rightarrow\neg A$

⑯ 归谬论 $(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B) \Leftrightarrow \neg A$

置换规则

置换规则：

设$\Phi(A)$是含公式A的公式，

用公式B置换$\Phi(A)$中的A，得公式$\Phi(B)$，

如果$A \Leftrightarrow B$，则$\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$。

北京大學

等值演算

$p\rightarrow(q\rightarrow r)$

$\Leftrightarrow p\rightarrow(\neg q\vee r)$ (蕴涵等值式, 置换规则)

$\Leftrightarrow \neg p\vee(\neg q\vee r)$ (蕴涵等值式, 置换规则)

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee r$ (结合律, 置换规则)

$\Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\vee r$ (德•摩根律, 置换规则)

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\rightarrow r$ (蕴涵等值式, 置换规则)

推理的形式结构

- 前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$　结论: B

  推理的形式结构: $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow B$

- 当推理的形式结构为重言式，则称推理正确，否则称推理不正确

- 用"$A \Rightarrow B$"表示"$A \rightarrow B$"是永真式，当推理正确时，记为$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \Rightarrow B$，称为推理定律

重要的推理定律(①~④)

① 附加律 $A \Rightarrow (A \vee B)$

② 化简律 $(A \wedge B) \Rightarrow A$

$(A \wedge B) \Rightarrow B$

③ 假言推理 $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$

④ 拒取式 $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

重要的推理定律(⑤~⑧)

⑤ 析取三段论 $(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$

$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

⑥ 假言三段论 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$

⑦ 等价三段论 $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$

⑧ 构造性两难 $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$

判断推理正确的方法

判断推理是否正确，就是判断推理的形式结构

$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow B$ 是否为重言式

判断重言式的方法：真值表法、等值演算法

方法一：$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow B \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 1$

方法二：$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \Rightarrow \ldots \Rightarrow B$

例： 前提: $p \rightarrow (q \rightarrow r)$, p, q 结论: r

方法一

$$(p\rightarrow(q\rightarrow r))\wedge p\wedge q\rightarrow r \Leftrightarrow (\neg p\vee(\neg q\vee r))\wedge p\wedge q\rightarrow r$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge p)\vee((\neg q\vee r)\wedge p))\wedge q\rightarrow r$$

$$\Leftrightarrow ((\neg q\vee r)\wedge q)\wedge p\rightarrow r$$

$$\Leftrightarrow ((\neg q\wedge q)\vee(r\wedge q))\wedge p\rightarrow r \Leftrightarrow (r\wedge q\wedge p)\rightarrow r$$

$$\Leftrightarrow \neg(r\wedge q\wedge p)\vee r \Leftrightarrow \neg r\vee\neg q\vee\neg p\vee r$$

$$\Leftrightarrow \neg q\vee\neg p\vee(\neg r\vee r) \Leftrightarrow \neg q\vee\neg p\vee 1 \Leftrightarrow 1$$

方法二

$(p\rightarrow(q\rightarrow r))\wedge p\wedge q$

$\Leftrightarrow ((p\rightarrow(q\rightarrow r))\wedge p)\wedge q$ (结合律)

$\Rightarrow (q\rightarrow r)\wedge q$ (假言推理)

$\Rightarrow r$ (假言推理)

小结

逻辑符号：原子命题 p,q,r,…、真值 0, 1、

联结词 $\neg\ \wedge\ \vee\ \rightarrow\ \leftrightarrow$、等值 $\Leftrightarrow$、推出 $\Rightarrow$

逻辑概念：公式、赋值、永真式、永假式、可满足式、

等值式、等值演算、推理的形式结构、

推理定律

逻辑规则：置换规则