单元 5.1 集合的等势、有穷集与无穷集

第一编 集合论 第 5 章 基数

5.1 集合的等势

5.2 有穷集与无穷集

内容提要

- 集合的等势
- 有穷集合与无穷集合

自然数的两个基本性质

- 匹配 (matching): 多少，大小 (基数)---- 双射

$$\{a\} \rightarrow \{0\}=1$$

$$\{a,b\} \rightarrow \{0,1\}=2$$

$$\{a,b,c\} \rightarrow \{0,1,2\}=3\ldots$$

- 计数 (counting): 首尾，先后 (序数)---- 良序

$$0\rightarrow1\rightarrow2\rightarrow3\rightarrow\ldots$$

$$a\rightarrow b$$

$$a\rightarrow b\rightarrow c$$

……

等势

集合 A 与 B **等势** $\Leftrightarrow$ $\exists$双射 $f: A\to B$。记作 $A\approx B$

例子： $N \approx N_{偶} = \{ n \mid n \in N \wedge n 为偶数 \}$

$f: N\to N_{偶}$, $f(n)=2n$

$N \approx N_{奇} = \{ n \mid n \in N \wedge n 为奇数 \}$

$g: N\to N_{奇}$, $g(n)=2n+1$

$N \approx N_{2^n} = \{ x \mid x=2^n \wedge n\in N \}$

$h: N\to N_{2^n}$, $h(n)=2^n$

容易证明，f,g,h 都是双射

定理 5.1

(1) $Z \approx N$

(2) $N \times N \approx N$

(3) $N \approx Q$

(4) $(0,1) \approx R$

(5) $[0,1] \approx (0,1)$

定理 5.1 证明 (1)

- (1) Z ≈ N

- 证明：取 f: Z→N,

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n=0 \\ 2n, & n>0 \\ 2|n|-1, & n<0 \end{cases}$$

容易证明，f 是双射．　　∴ Z ≈ N

定理 5.1 证明 (2)

- (2) $N\times N \approx N$

- 证明：例 3.6, $f:N\times N\to N$,

  $f(<i,j>)=2^i(2j+1)-1$

定理 5.1 证明 (3)

- (3) N ≈ Q
- 证明 : f:N→Q, f(n)= 编号 [n] 的既约分数

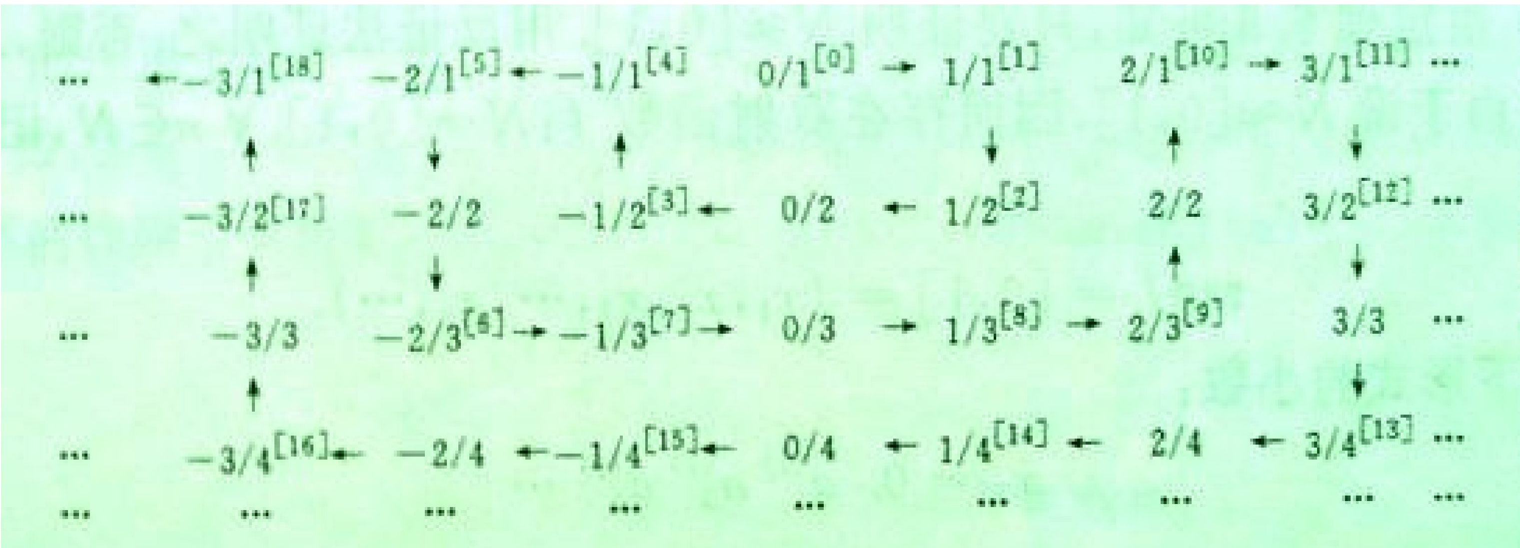
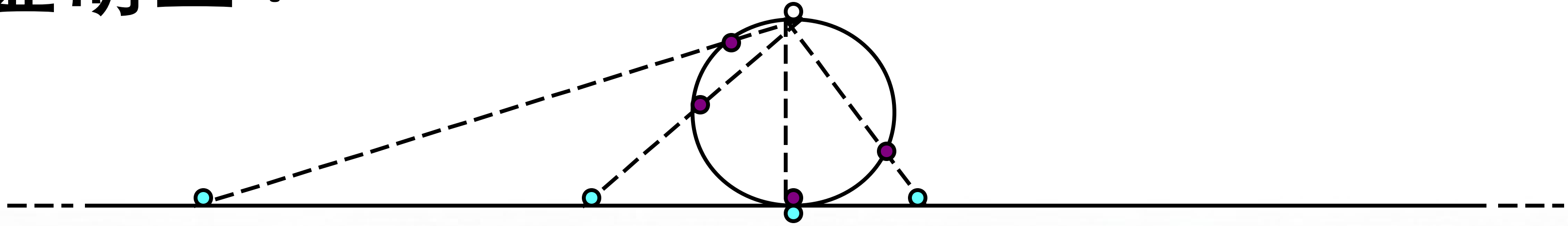


图 5.1

定理 5.1 证明 (4)

- (4) $(0,1) \approx R$
- 证明一：$f: (0,1) \to R,\ f(x) = \mathrm{tg}\,(x-1/2)\pi$
- 证明二：



定理 5.1 证明 (5)

- (5) $[0,1] \approx (0,1)$

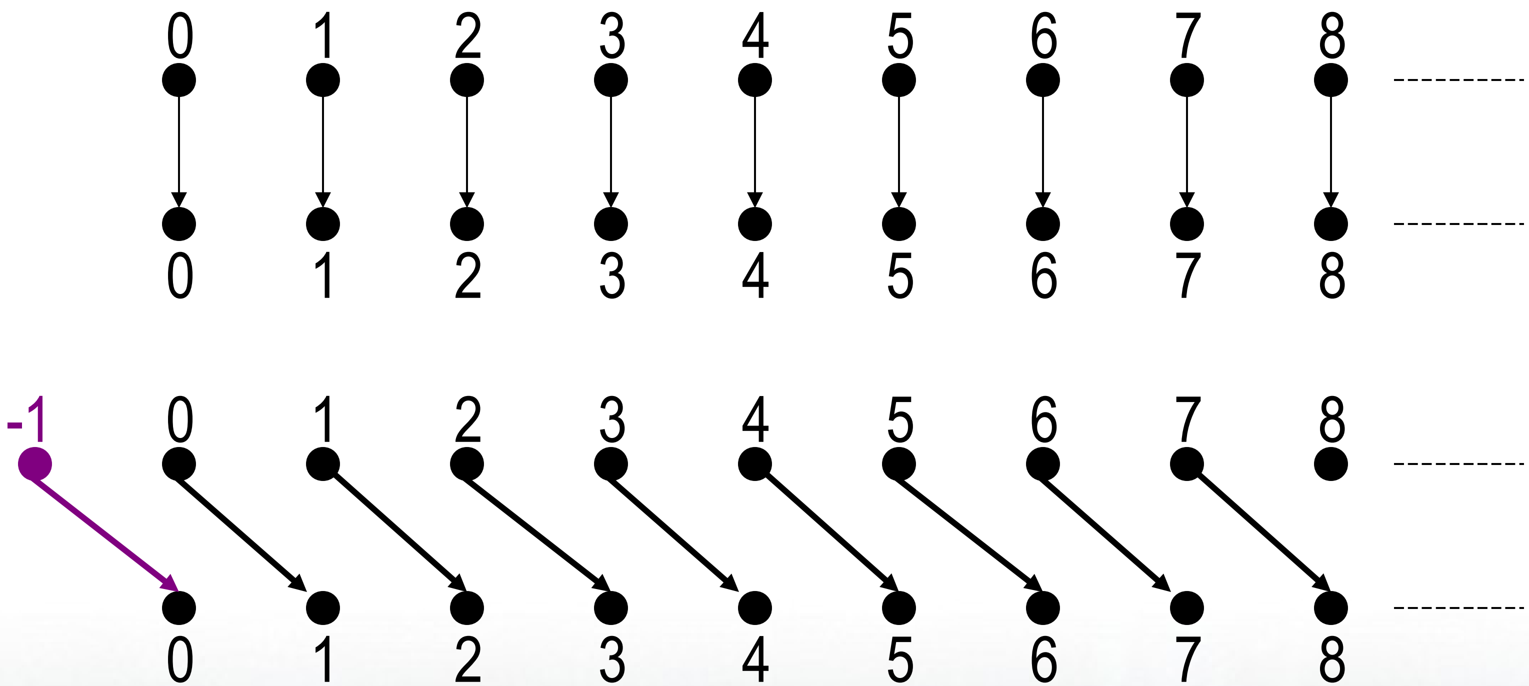
- 证明：$f: [0,1] \to (0,1)$,

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & x=0 \\ 1/(n+2), & x=1/n,\ n \in N-\{0\} \\ x, & \text{其他} \end{cases}$$

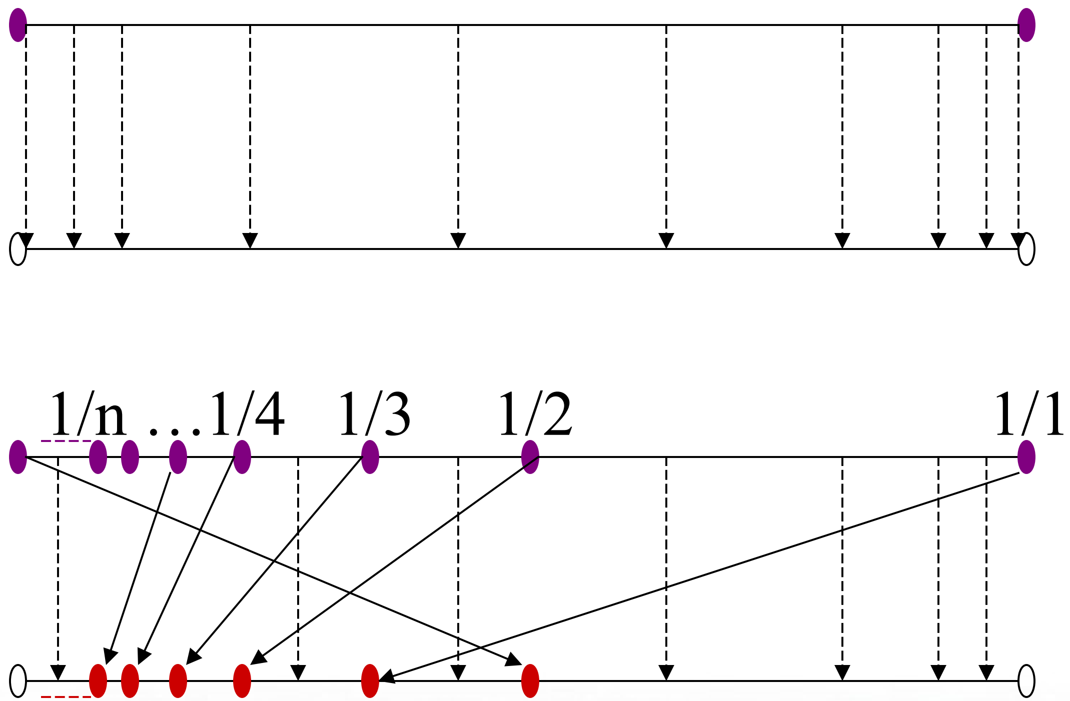
可以证明，f 是双射，$\therefore\ [0,1] \approx (0,1)$ #

Hilbert 旅馆

- 有自然数那么多间房子



[0,1]≈(0,1)



定理 5.2

定理 5. 2 $P(A) \approx 2^A = A \to 2$

（说明 $2^A=\{0,1\}^A=A\to\{0,1\}=\{f \mid f:A\to 2\}$ ）

证明： 取 $H: P(A)\to 2^A$, $H(B)=\chi_B:A\to\{0,1\}$,

χ_B 是 B 的特征函数，$\chi_B(x)=1 \Leftrightarrow x\in B$.

(1) H 是单射．设 $B_1,B_2\subseteq A$ 且 $B_1\neq B_2$, 则

$H(B_1)=\chi_{B1}\neq\chi_{B2}=H(B_2)$.

(2) H 是满射．任给 $f:A\to 2$, 令

$B=\{x\in A \mid f(x)=1\}\subseteq A$, 则 $H(B)=\chi_B=f$. #

定理 5.3

- 对任意集合 A,B,C,

  (1) $A \approx A$

  (2) $A \approx B \Rightarrow B \approx A$

  (3) $A \approx B \wedge B \approx C \Rightarrow A \approx C$

- 等势关系是等价关系

定理 5.3 证明要点

- 自反：$A \approx A$

  $I_A: A \to A$ 双射

- 对称：$A \approx B \Rightarrow B \approx A$

  $f: A \to B$ 双射 $\Rightarrow$ $f^{-1}: B \to A$ 双射

- 传递：$A \approx B \land B \approx C \Rightarrow A \approx C$

  $f: A \to B$, $g: B \to C$ 双射 $\Rightarrow$ $g \circ f: A \to C$ 双射

已知等势关系

- $N \approx Z \approx Q \approx N \times N$
- $(0,1) \approx [0,1] \approx R$
- $N \approx R$?

定理 5.4(康托定理)

(1) $N \not\approx R$

(2) 对任意集合 A,

$A \not\approx P(A)$

康托定理证明 (1)

- (1) $N \not\approx R$

- 证明：(反证) 假设 $N \approx R \approx [0,1]$,

  则存在 $f:N \to [0,1]$ 双射，

  $\forall n \in N$, 令 $f(n)=x_{n+1}$,

  于是 $\text{ran}\, f = [0,1] = \{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots\}$

  将 x_i 表示成如下小数：

康托定理证明 (1)

$$x_1=0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}a_3^{(1)}\ldots\ldots$$

$$x_2=0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}a_3^{(2)}\ldots\ldots$$

$$x_3=0.a_1^{(3)}a_2^{(3)}a_3^{(3)}\ldots\ldots$$

$$\vdots$$

$$x_n=0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}a_3^{(n)}\ldots\ldots$$

$$\vdots$$

其中 $0\le a_j^{(i)}\le 9,\ i,j=1,2,\ldots$

康托定理证明 (1)

为了使这种表示法惟一，

当第 r 位本身不是 9, 但第 r 位以后全为 9 时，

将这些 9 都改为 0, 在第 r 位上加 1.

例如，

0.9999… 记作 1.0000…

0.14999… 记作 0.15000…

康托定理证明 (1)

下面选一个 [0,1] 中的小数

$x=0.b_1b_2b_3......$

使得

(1) $0 \le b_j \le 9$, $i=1,2,...$

(2) $b_n \ne a_n^{(n)}$

(3) 对 x 也注意表示的惟一性

康托定理证明 (1)

由 x 的构造可知，

$x \in [0,1]$,

$x \notin \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$

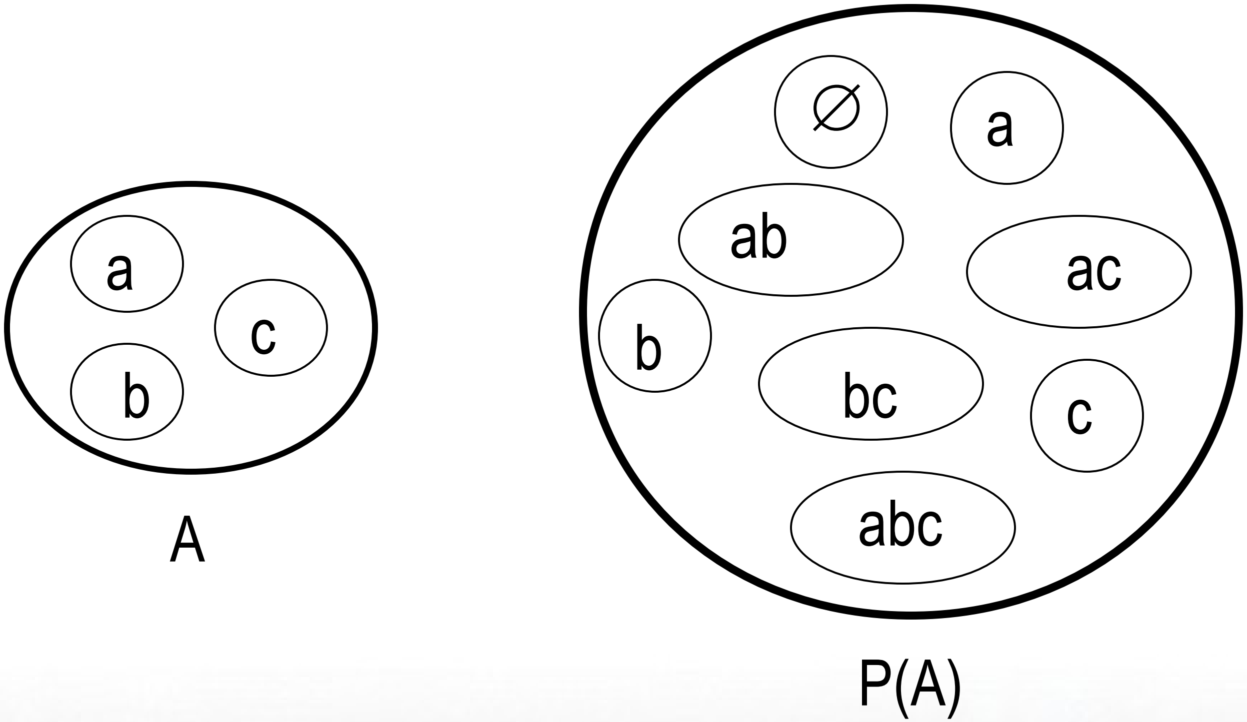
(x 与 x_n 在第 n 位上不同).

这与

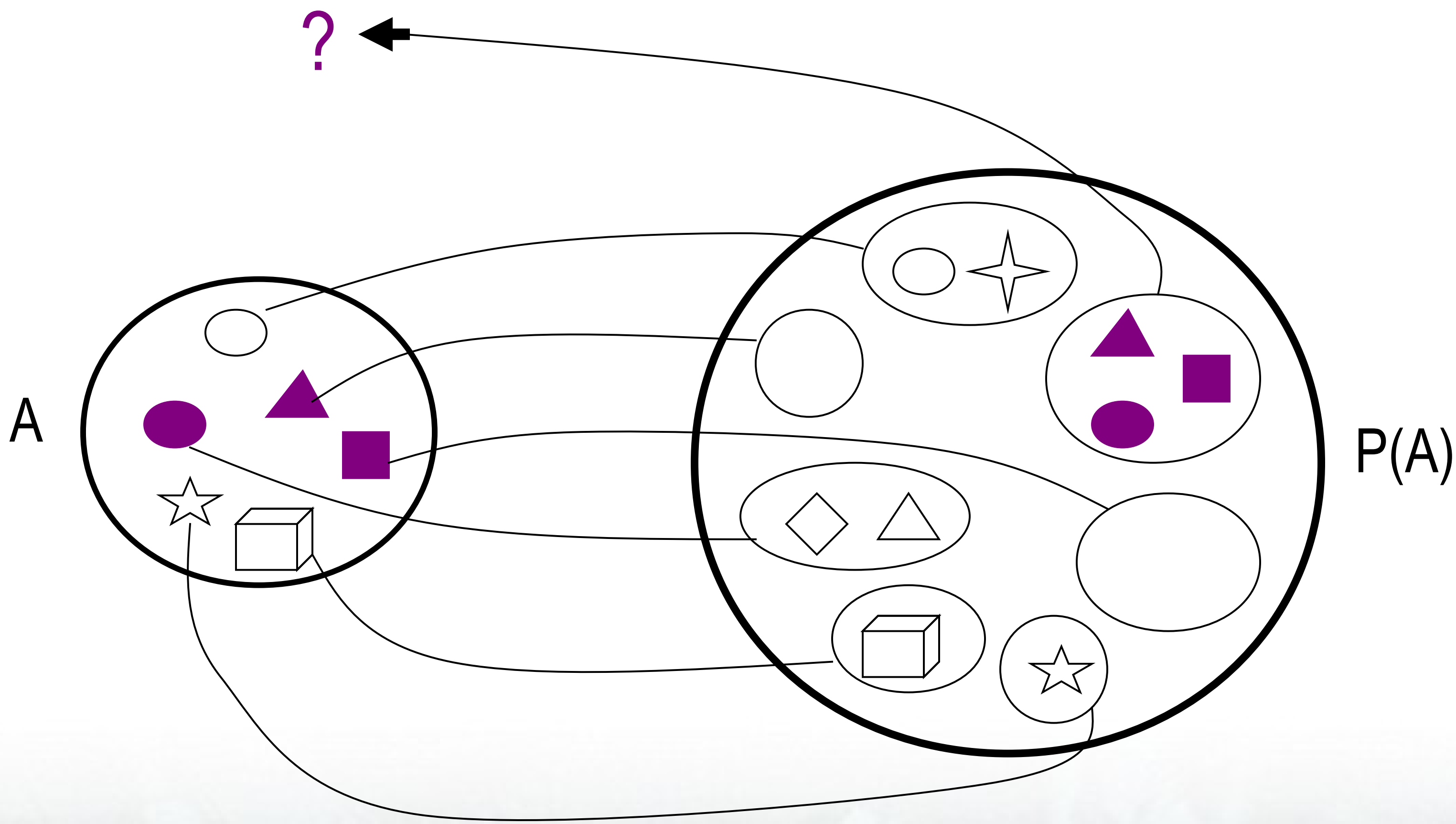
$[0,1]=\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$ 矛盾！

康托定理证明 (2)

- (2) $A \not\approx P(A)$



康托定理证明 (2)



康托定理证明 (2)

- (2) 对任意集合 A, $A \approx P(A)$.

- 证明：(反证) 假设存在双射 $f:A \to P(A)$, 令 $B = \{ x \in A \mid x \notin f(x) \} \in P(A)$

  由于 f 是双射，存在 x_0 使得 $f(x_0)=B$, 则

  $$x_0 \in B \Leftrightarrow x_0 \notin f(x_0) \Leftrightarrow x_0 \notin B,$$

  矛盾！ #

有穷集

- 有穷集 (finite set) $\Leftrightarrow$

  与某个自然数 n 等势的集合

  $\Leftrightarrow$ 不能与自身真子集建立双射的集合

无穷集

- 无穷集 (infinite set) ⇔

  不与某个自然数 n 等势的集合

  ⇔ 能与自身真子集建立双射的集合

Bernhard Bolzano

- **Bernhard Bolzano**(1781~1848),
  - Czech 人 , 1851, "Paradoxes of the Infinite"
  - 首次使用 " set" 一词
  - 给出无穷集的上述定义

定理 5.5

定理 5. 5　不存在与自己的真子集等势的自然数.

证明 令 $S=\{n\in N \mid \forall f(f\in(n\to n) \wedge f$ 单射 $\to f$ 满射 $)\}$.

(1) $0\in S$: $f\in(0\to 0) \Rightarrow f$ 是空函数 $\Rightarrow f$ 满射.

(2) $n\in S \Rightarrow n^+\in S$: 即 $f:n^+\to n^+$ 单射 $\Rightarrow f$ 满射:

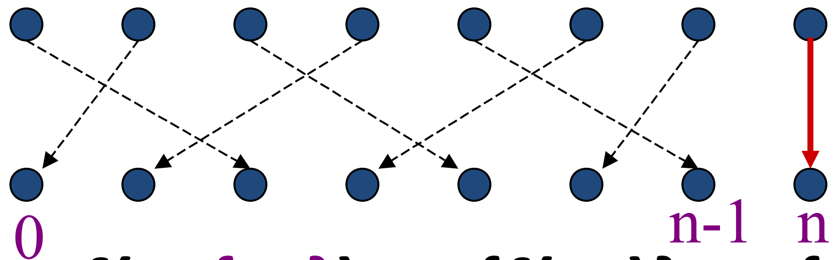
设 $g=f\upharpoonright n: n\to n^+$, 分两种情形:

(a) 假设 n 在 f 下封闭.

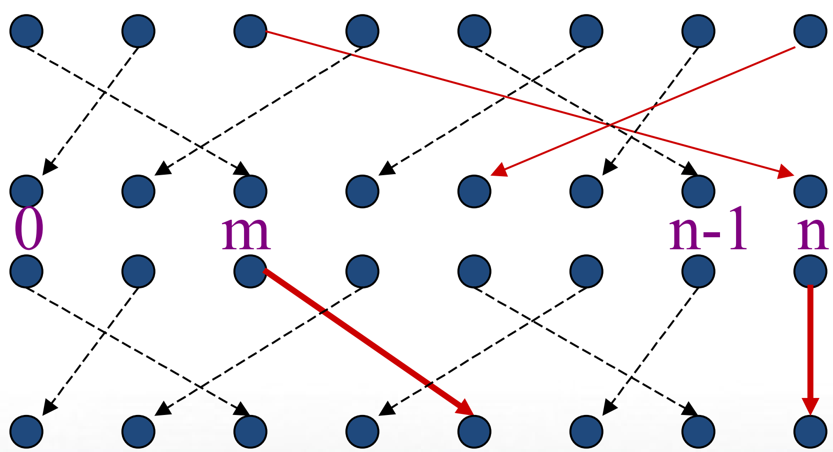
(b) 假设 n 在 f 下不封闭.

定理 5.5 示意图

- (a) ran f = ran $f\uparrow n \cup \{f(n)\}$



- (b) ran f = $f(n-\{m\}) \cup \{f(m)\} \cup \{f(n)\}$



定理 5.5(续)

(a) 假设 n 在 f 下封闭，则 $g:n\to n$ 单射，由归纳假设, ran $g=n$. 由于 f 是单射，必有 $f(n)=n$. 于是， ran f = ran $g \cup \{n\} = n \cup \{n\} = n^+$.

(b) 假设 n 在 f 下不封闭，设 $m\in n$, $f(m)=n$, 令 $h:n^+\to n^+$,

$$h(x) = \begin{cases} f(n), & x=m \\ n, & x=n \\ f(x), & x\neq m \wedge x\neq n \end{cases}$$

则 n 在 h 下封闭，化为 (a) 情况． ran f = ran $h = n^+$. ∴ $S=N$. #

推论 1、推论 2

推论 1 不存在与自己的真子集等势的有穷集.

证明 （反证法）假设存在有穷集 $A \supset B$ 和 $f:A \to B$ 双射，自然数 n 和 $g:A \to n$ 双射.

令 $h=(g\upharpoonright B) \circ f \circ g^{-1}: n \to g(B)$, h 双射,

但是 $g(B) \subset n$ （若 $g(B)=n$, 则 g 不是单射),

与定理 5.5 矛盾！ #

推论 2 (1) 与自己的真子集等势的集合都是无穷集； (2) N 是无穷集. #

推论 3

推论 3　任何有穷集都与唯一的自然数等势.

证明　如果有穷集 $A\approx n$, $A\approx m$, $m,n\in N$.

则 $n\approx m$.　又由 N 上三歧性,

$m\in n, m=n, n\in m$ 中恰有一个成立.

但是 $m\in n\Rightarrow m\subset n$, 与定理 5.5 矛盾,

$n\in m$ 与之类似, 故只有 $m=n$ 成立.　#

定理 5.6

引理　　$c \subset n \in N \Rightarrow \exists m (c \approx m \in n)$.

定理 5. 6　　有穷集的子集仍为有穷集 .

证明　　设有穷集 $A \supseteq B$.

若 $A=B$, 结论显然成立 .

设 $B \subset A$, 则$\exists ! n \in N$ 使 $A \approx n$. 故 $\exists f:A \to n$ 双射 .

因为 $f \upharpoonright B : B \to f(B)$ 双射 , $B \approx f(B) \subset n$.

由引理 , $\exists m \in n$, $B \approx m \in N$, B 是有穷集 .

#

小结

- 等势
  - 构造双射技巧：Hilbert 旅馆
  - 康托定理：对角化方法
- 有穷集，无穷集