



# 单元1.6 基本的集合恒等式

第一编 集合论

第一章 集合

1.4 基本的集合恒等式



北京大学



# 内容提要

## (1) 集合恒等式

- 13组最基本的集合恒等式

## (2) 半形式化方法

- 推导集合等式和包含式





# 集合恒等式(①~④)

设 $E$ 是全集,  $A, B, C$ 为 $E$ 的任意子集。

① 幂等律  $A \cup A = A, A \cap A = A$

② 交换律  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

③ 结合律  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

④ 分配律  $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$





# 集合恒等式 (⑤~⑥)

## ⑤ 德•摩根律

绝对形式  $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$

$$\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$$

相对形式  $E - (A \cup B) = (E - A) \cap (E - B)$

$$E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B)$$

## ⑥ 吸收律

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$$





# 基本的等值式(⑦~⑬)

⑦ 零律  $A \cup E = E, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$

⑧ 同一律  $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap E = A$

⑨ 排中律  $A \cup \sim A = E$

⑩ 矛盾律  $A \cap \sim A = \emptyset$

⑪ 余补律  $\sim \emptyset = E, \quad \sim E = \emptyset$

⑫ 双重否定律  $\sim(\sim A) = A$

⑬ 补交转换律  $A - B = A \cap \sim B$



# 推广到集族的情况

设  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in S}$  为集族,  $B$  为一集合:

分配律

$$B \cup (\cap \{A_\alpha\}_{\alpha \in S}) = \cap (B \cup A_\alpha)$$
$$B \cap (\cup \{A_\alpha\}_{\alpha \in S}) = \bigcup_{\alpha \in S} (B \cap A_\alpha)$$

德•摩根律

$$\sim (\cup \{A_\alpha\}_{\alpha \in S}) = \cap (\sim A_\alpha)$$
$$\sim (\cap \{A_\alpha\}_{\alpha \in S}) = \bigcup_{\alpha \in S} (\sim A_\alpha)$$
$$B - (\cup \{A_\alpha\}_{\alpha \in S}) = \cap_{\alpha \in S} (B - A_\alpha)$$
$$B - (\cap \{A_\alpha\}_{\alpha \in S}) = \bigcup_{\alpha \in S} (B - A_\alpha)$$





## 例1.3

由定义证明下面的恒等式:

(1) 分配律:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(2) 零律:  $A \cap \emptyset = \emptyset$

(3) 排中律:  $A \cup \sim A = E$





# 分配律的证明

(1) 对于任意的 $x$ ,

$$x \in A \cup (B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \text{ (命题逻辑分配律)}$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

因而,  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。  $\square$





# 零律的证明

(2) 对于任意的 $x$ ,

$$x \in A \cap \emptyset$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \emptyset$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge 0$$

$$\Leftrightarrow 0$$

(命题逻辑零律)

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset,$$

因而,  $A \cap \emptyset = \emptyset$ 。□



北京大学



# 排中律的证明

(3) 对于任意的 $x$ ,

$$x \in A \cup \sim A$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in \sim A$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \notin A$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee \neg x \in A$$

$$\Leftrightarrow 1 \quad (\text{命题逻辑排中律})$$

$$\Leftrightarrow x \in E, \quad \text{因而, } A \cup \sim A = E. \quad \square$$





## 例1.8

设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为集族，试证明：

- (1) 若  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ ，则  $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ ；
- (2) 若  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ ，则  $\mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ ；
- (3) 若  $\mathcal{A} \neq \emptyset$  且  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ ，则  $\bigcap \mathcal{B} \subseteq \bigcap \mathcal{A}$ ；
- (4) 若  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ ，则  $\bigcap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ；
- (5) 若  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ，则  $\bigcap \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ 。





# 集族性质(1)(2)的证明

(1) 对于任意的 $x$ ,

$$x \in \bigcup \mathcal{A}$$

$$\Leftrightarrow \exists A(A \in \mathcal{A} \wedge x \in A)$$

$$\Rightarrow \exists A(A \in \mathcal{B} \wedge x \in A) \quad (\text{已知 } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B})$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup \mathcal{B}$$

所以,  $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ 。

(2) 若  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ , 由广义并集定义可知  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ 。



北京大学



## 集族性质(3)的证明

(3) 由 $\mathcal{A} \neq \emptyset$ , 知 $\mathcal{B} \neq \emptyset$ , 故 $\cap \mathcal{A}$ 与 $\cap \mathcal{B}$ 均有意义。

对于任意的 $x$ ,

$$x \in \cap \mathcal{B}$$

$$\Leftrightarrow \forall y (y \in \mathcal{B} \rightarrow x \in y)$$

$$\Rightarrow \forall y (y \in \mathcal{A} \rightarrow x \in y) \quad (\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B})$$

$$\Leftrightarrow x \in \cap \mathcal{A}$$

所以,  $\cap \mathcal{B} \subseteq \cap \mathcal{A}$ .  $\square$





## 例1.9

集合幂集运算具有下列性质：

(1)  $A \subseteq B$  当且仅当  $P(A) \subseteq P(B)$ ;

(2)  $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\emptyset\}$ 。



北京大学

# 幂集性质(1)的证明

(1) 先证必要性。

对于任意的 $x$ ,

$$x \in P(A)$$

$$\Leftrightarrow x \subseteq A$$

$$\Rightarrow x \subseteq B \quad (A \subseteq B)$$

$$\Leftrightarrow x \in P(B),$$

故有  $P(A) \subseteq P(B)$ 。

再证充分性。

对于任意的 $y$ ,

$$y \in A$$

$$\Leftrightarrow \{y\} \in P(A)$$

$$\Rightarrow \{y\} \in P(B) \quad (P(A) \subseteq P(B))$$

$$\Leftrightarrow y \in B$$

所以,  $A \subseteq B$ 。



# 幂集性质(2)的证明

对于任意的集合 $x$ ,

若 $x=\emptyset$ ,  $x \in P(A) \cup P(B)$  且  $x \in (P(A)-P(B)) \cup \{\emptyset\}$ 。若 $x \neq \emptyset$ ,  
 $x \in P(A-B)$

$$\Leftrightarrow x \subseteq A-B \Rightarrow x \subseteq A \wedge x \not\subseteq B$$

$$\Leftrightarrow x \in P(A) \wedge x \notin P(B)$$

$$\Leftrightarrow x \in (P(A)-P(B))$$

综上所述, 可知  $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\emptyset\}$ 。







# 小结

## (1) 集合恒等式

- 13组最基本的集合恒等式

## (2) 半形式化方法

- 推导集合等式和包含式

