单元1.4 集合的概念及集合之间的关系

第一编 集合论　第一章 集合

1.2 集合的概念及集合之间的关系

北京大学

内容提要

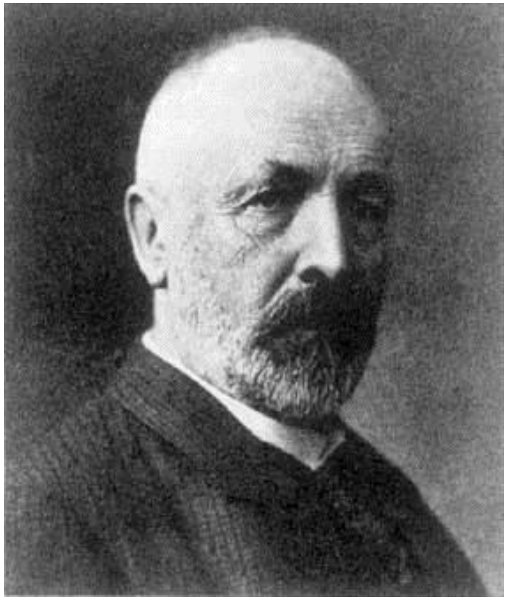
关于集合论

集合的基本概念

集合之间的关系

关于集合论

- 集合论是基本的数学描述工具
  - 集合是数学中的基本概念
  - 诞生于十九世纪
  - 创始人是康托
- 集合论体系
  - 朴素集合论（教材1-6章）
  - 公理集合论



康托（1845~1918）

集合

在朴素集合论中，不能精确地定义什么是集合。

（为什么？）

人们用大写英文字母A,B,C,...表示集合；

用小写英文字母a,b,c,...表示集合中的元素；

用$a \in A$ 表示a是A的元素，读作“a属于A”；

用$a \notin A$表示a不是A的元素，读作“a不属于A”。

集合的表示

(1) 列举法：列出集合中的全体元素，元素之间用逗号分开，然后用花括号括起来，例如，A={a,b,c,d}，B={2,4,6,…}。

(2) 描述法：用谓词P(x)表示x具有性质P，用{x|P(x)}表示具有性质 P 的集合。 例如，$P_1(x)$: x是英文字母，$P_2(x)$: x是十进制数字，C={x|$P_1(x)$}表示26个英文字母的集合，D={x|$P_2(x)$}表示10个十进制数字的集合。

北京大学

集合表示的注意事项

(1) 集合中的元素是各不相同的。

(2) 集合中的元素不规定顺序。

(3) 集合的两种表示法可以互相转化，

例如， B={2,4,6,…}可用描述法表示为

B={x|x>0且x是偶数} 或

B={x|x=2(k+1), k为非负整数}。

常用的数集合

N： 自然数集合 N = {0,1,2,3,…}

Z： 整数集合 Z = {0,±1,±2,…} = {…,-2,-1,0,1,2,…}

Q： 有理数集合

R： 实数集合

C： 复数集合

集合之间的关系

定义1.1 设A,B为二集合，若B中的元素都是A中的元素，则称B是A的子集，也称A包含B，或B包含于A，记作$B\subseteq A$，其符号化形式为 $B\subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x\in B \rightarrow x\in A)$。

若B不是A的子集，则记作$B\not\subseteq A$，其符号化形式为 $B\not\subseteq A \Leftrightarrow \exists x(x\in B \wedge x\notin A)$。

例：设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b,c,d\}$，$C=\{a,b\}$，则 $A\subseteq B$，$C\subseteq A$，$C\subseteq B$。

相等

定义1.2 设A,B为二集合，若A包含B且B包含A，则称A与B相等，记作A=B，即 $A=B \Leftrightarrow \forall x(x \in B \leftrightarrow x \in A)$。

例：设 $A=\{2\}$，$B=\{1,4\}$，$C=\{x|x^2-5x+4=0\}$，

$D=\{x|x$为偶素数$\}$，则A=D，且B=C。

集合之间包含关系的性质

设A,B,C为三个集合，则以下三命题为真

(1) $A \subseteq A$；

(2) 若$A \subseteq B$且$A \neq B$，则 $B \not\subseteq A$；

(3) 若$A \subseteq B$且$B \subseteq C$，则$A \subseteq C$。

真子集

定义1.3 设A,B为二集合，若A为B的子集且$A\neq B$，则称A为B的真子集，或称B真包含A，记作$A\subset B$，即$A\subset B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge A\neq B$。若$A$不是$B$的真子集，则记作$A\not\subset B$，其符号化形式为$A\not\subset B \Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge x\notin B)\vee A=B$。

设 A,B,C为三个集合，下面三命题为真：(1) $A\not\subset A$；(2) 若 $A\subset B$，则 $B\not\subset A$；(3) 若 $A\subset B$，且$B\subset C$，则$A\subset C$。

空集

定义1.4 不拥有任何元素的集合称为空集合，简称为空集，记作$\varnothing$。(读ugh)

$\boxed{\{x \mid x^2+1=0 \wedge x \in R\} \text{ 和 } \{(x,y) \mid x^2+y^2<0 \wedge x,y \in R\}}$ 都是空集。

定理1.1 空集是一切集合的子集。

证明 对于任意集合A，均有$\varnothing \subseteq A$成立，这是因为

$$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in \varnothing \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow 1. \qquad \square$$

$\forall x(x \in \varnothing \rightarrow x \in A) \Longleftrightarrow 1$

空集的惟一性

推论 空集是惟一的。

证明 设$\varnothing_1$与$\varnothing_2$都是空集，由定理1.1可知$\varnothing_1\subseteq\varnothing_2\wedge$ $\varnothing_2\subseteq\varnothing_1$，所以$\varnothing_1=\varnothing_2$。 □

由推论可知，无论空集以什么形式出现，它们都是相等的，所以 $\{x \mid x\neq x\}=\{x \mid x^2+1=0\wedge x\in R\}=\varnothing$。

空集是“最小”的集合，有没有最大的集合呢？

北京大学

全集

定义1. 5 如果限定所讨论的集合都是某个集合的子集，则称该集合为全集，记作E。

从定义可以看出，全集是相对的，视具体情况而定，因此不唯一。例如，讨论区间(a,b)上的实数性质时，可以取(a,b)为全集，也可以取[a,b)、(a,b]、(a,+∞)、R等为全集。

给定若干个集合之后，都可以找到包含它们的全集。在今后讨论中，所涉及的集合都可以看成是某个全集E的子集。

幂集

定义1.6 设A为一个集合，称由A的全体子集组成的集合为A的幂集，记作P(A)。

用描述法表示为 $P(A)=\{x \mid x \subseteq A\}$。

说明：

(1) 在概率论中，用P(A)表示事件A的概率。

(2) 有的书上用2^A表示A的幂集。(为什么?)

集合的元素个数

规定：∅为0元集，含1个元素的集合为单元集或1元集，含2个元素的集合为2元集，……，含n个元素的集合为n元集($n\geq1$)。

用|A|表示集合A中的元素个数，当A中的元素个数为有限数时，A为有穷集或有限集。

定理1.2 设集合A的元素个数$|A|=n$，则$|P(A)|=2^n$。

$|A|=n$

求P(A)的步骤

为了求出给定集合A的幂集，先求A的由低到高元的所有子集，再将它们组成集合。

设$A=\{a,b,c\}$，求$P(A)$的步骤如下：

0元子集为$\varnothing$；1元子集为$\{a\}$、$\{b\}$、$\{c\}$；

2元子集为$\{a,b\}$、$\{a,c\}$、$\{b,c\}$；3元子集为$\{a,b,c\}=A$；

所以，A的幂集为 A的全体子集组成的集合

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}。$$

北京大学

集族

除了P(A)以外，还有其他形式的由集合构成的集合，统称为集族。若集族中的集合都赋予记号，则可得带指标集的集族。

定义1.7 设$\mathcal{A}$为一个集族，S为一个集合，若对于任意的$\alpha \in S$，存在惟一的$A_\alpha \in \mathcal{A}$与之对应，而且$\mathcal{A}$中的任何集合都对应S中的某一元素，则称$\mathcal{A}$是以S为指标集的集族，S称为$\mathcal{A}$的指标集。记为$\mathcal{A}=\{A_\alpha \mid \alpha \in S\}$，或$\mathcal{A}=\{A_\alpha\}_{\alpha \in S}$。

如果把$\varnothing$看成集族，则称$\varnothing$为空集族。

集族的例子(1)(2)

(1) 设$A_1=\{x\in N|x为奇数\}$，$A_2=\{x\in N|x为偶数\}$，

则 $\{A_1,A_2\}$是以$\boxed{\{1,2\}为指标集的集族}$。

(2) 设p为一素数，$A_k=\{x|x=k(\mathrm{mod}\ p)\}$，$k=0, 1,\ldots, p-1$。

则$\mathcal{A}=\{A_0,A_1,\ldots,A_{p-1}\}$是以$\{0,1,2,\ldots,p-1\}$为指标集的集族，

记为$\mathcal{A}=\{A_k|k\in\{0,1,\ldots,p-1\}\}$，或$\mathcal{A}=\{A_k\}_{k\in\{0,1,2,\ldots,p-1\}}$。

集族的例子(3)(4)

(3) 设$A_n=\{x\in N \mid x=n\}$，

则$\mathcal{A}=\{A_n \mid n\in N\}$是以N为指标集的集族，

其元素为以各自然数为元素的单元集。

(4) 设$N_+=N-\{0\}$，$A_n=\{x \mid 0\le x<1/n \land n\in N_+\}$，

则$\mathcal{A}=\{A_n \mid n\in N_+\}$是以$N_+$为指标集的集族，

其元素为半开半闭区间$[0,1/n)$，$n=1,2,\ldots$。

多重集

设全集为E，E中元素可以不止一次在A中出现的集合A称为**多重集**。若E中元素a在A中出现k次(k≥0)，则称a在A中**重复度**为k。

例子：设全集E={a,b,c,d,e}，A={a,a,b,b,c}为多重集，其中a、b的重复度为2，c的重复度为1，而d、e的重复度为0。

集合可看作重复度均小于等于1的多重集。

小结

- 集合的基本概念
  - 集合、集合的表示、文氏图、多重集
  - 集合的元素个数
- 集合之间的关系
  - 子集、相等、真子集、空集、全集
  - 幂集、集族、带指标集的集族
  - 容斥原理