一阶谓词演算

王捍贫

北京大学信息科学技术学院软件研究所

复习——命题演算

命题演算形式系统:

- 语法: 命题公式、形式公理、形式规则、形式推理
- 语义: 指派、公式的值、永真式

可靠性: 凡是推出来的都是正确的.

完全性: 凡是正确的都可以推出来.

问题的提出

命题演算不能表达所有正确的推理. 例:

$$\begin{array}{l}\text{所有实数的平方都是非负的.}\\ \pi\text{是一个实数.}\\ \hline \pi\text{的平方是非负的.}\end{array}$$

如用命题演算推理形式来表示: 由p, q推出r.

— 非有效推理形式

§1 一阶谓词演算的符号化

- 需要进一步分析推理结构.

  上述推理中, 各命题之间的关系在于简单命题的成分之间.

- 需要进一步分解简单命题.
- 简单命题的符号化.

简单命题的结构

主语	谓语	宾语
↑	↑	↑
讨论对象	对象的性质或关系	讨论对象
↓	↓	↓
个体词(组)	谓词	个体词(组)

个体词，谓词

例1

分析下列各命题中的个体和谓词

(1) π是无理数.

(2) 张三与李四同在计算机系.

(3) x与y的和等于z （x，y，z是确定的数).

(4) π的平方是非负的.

(5) 所有实数的平方都是非负的.

(6) 有一个比2^{1000}大的素数.

例1(1)

(1) π是无理数.

解:

个体: π(代表园周率)

谓词: $\cdots$是无理数, 表示“π”的性质.

例1(2)

(2) 张三与李四同在计算机系.

解:

个体: 张三, 李四

谓词: …与…同在计算机系,

表示"张三"与"李四"之间的关系.

例1(2)

(2) 张三与李四同在计算机系.

解:

个体: 张三, 李四

谓词: …与…同在计算机系,

表示"张三"与"李四"之间的关系.

个体: 张三

谓词: …与李四同在计算机系,

表示"张三"的性质.

例1(2)

(2) 张三与李四同在计算机系.

解:

个体: 张三, 李四

谓词: …与…同在计算机系,

表示"张三"与"李四"之间的关系.

个体: 张三

谓词: …与李四同在计算机系,

表示"张三"的性质.

个体: 李四

谓词: 张三与…同在计算机系,

表示"李四"的性质.

例1(3)

(3) x与y的和等于z （x，y，z是确定的数）.

解:

个体: x、y、z

谓词: …与…和等于…

个体: x、z

谓词: …与y和等于…， 等

个体: y

谓词: x与…和等于z， 等

谓词可以单个个体的性质，也可以表示二个个体词之间的关系或性质，分别称为一元谓词和二元谓词.

表示n个个体间的关系或性质的谓词称为n元谓词.

例1(4)

(4) π的平方是非负的.

解:

个体: π

谓词: …的平方是非负的

个体: π的平方

谓词: …是非负的

"π的平方"是一个"复合"个体，需要再分解。

个体: π

函词: …的平方 一元函词

谓词: …是非负的

例1(5)

(5) 所有实数的平方都是非负的.

解:

个体: 每一个实数

函词: …的平方

谓词: …是非负的

"所有" 是什么?

量词: 所有

例1(6)

(6) 有一个比2^{1000}大的素数.

解:

个体: 一个素数

谓词: $\cdots$比2^{1000}大

"有一个" 是什么?

量词: 有一个

表示简单命题的新符号

- 个体: $x,\ y,\ z,\ a,\ b,\ c,\ \ldots$
- 谓词: $F^n,\ G^n,\ H^n,\ \ldots$ n表示元数
- 函词: $f^n,\ g^n,\ h^n,\ \ldots$ n表示元数
- 量词:
  - 所有: $\forall$ 全称量词
  - 有一个: $\exists$ 存在量词

例1(1)的符号化

(1) π是无理数.

解:

个体: π (代表园周率)

谓词: $\cdots$是无理数, 以F表示

则此命题可表示为$F(\pi)$.

例1(2)的符号化

(2) 张三与李四同在计算机系.

解:

个体: 张三, 李四: 分别以a, b表示

谓词: $\cdots$与$\cdots$同在计算机系: 以G表示

则此命题可表示为: $G(a, b)$

个体: 张三: 以a表示

谓词: $\cdots$与李四同在计算机系: 以G'表示

此命题可表示为: $G'(a)$

个体: 李四: 以b表示

谓词: 张三与$\cdots$同在计算机系: 以G''表示

此命题可表示为: $G''(b)$

例1(3)的符号化

(3) x与y的和等于z （x，y，z是确定的数）.

解:

个体: x、y、z

谓词: $\cdots$与$\cdots$和等于$\cdots$: 以R表示

符号化: $R(x,y,z)$

个体: x、z

谓词: $\cdots$与y和等于$\cdots$: 以R'表示

符号化: $R'(x,z)$

$\cdots$

个体: x、y、z

函词: $\cdots$与$\cdots$的和: 以f^2表示

谓词: $\cdots$等于$\cdots$: 以R''表示

符号化: $R''(f^2(x,y),z)$

例1(4)的符号化

(4) π的平方是非负的.

解:

个体: π的平方：以a表示

谓词: $\cdots$是非负的：以R表示

符号化: $R(a)$

个体: π

函词: $\cdots$的平方: 以f表示

谓词: $\cdots$是非负的: 以R表示

符号化: $R(f(\pi))$

例1(5)的符号化

(5) 所有实数的平方都是非负的.

解:

个体: 每一个实数: 以x代表

函词: $\cdots$的平方: 以f表示

谓词: $\cdots$是非负的: 以R表示

量词：所有: 以$\forall$表示

符号化：$\forall x R(f(x))$

x可以代表不同的个体, 称为个体变元

相对地π等称为个体常元

例1(5)的符号化(续)

(5) 所有实数的平方都是非负的.

另解:

个体: 每一个数: 以z代表

谓词: $\cdots$是一个实数, 以R'表示

函词: $\cdots$的平方: 以f表示

谓词: $\cdots$是非负的: 以R表示

量词：所有: 以$\forall$表示

符号化：$(\forall z)\big(R'(z) \to R(f(z))\big)$. 最清晰

个体变元x和z的取值范围不同。

个体边元的取值范围称为它的论域

例1(6)的符号化

(6) 有一个比2^{1000}大的素数.

解:

个体: 一个素数：以y代表

谓词: $\cdots$比2^{1000}大：以P_1表示

量词：有一个: 以$\exists$表示

符号化：$(\exists y)P_1(y)$

还可以表示为：$(\exists x)\big(P_2(x) \wedge P_1(x)\big)$，其中:

x代表某个数,

P_2表示“$\cdots$是一个素数”,

P_1同上.

表示命题的符号

- 个体变元: x, y, z, $\ldots$
- 个体常元: a, b, c, $\ldots$
- 谓词: F^n, G^n, H^n, $\ldots$
- 函数: f^n, g^n, h^n, $\ldots$
- 量词: 全称量词$\forall$, 存在量词$\exists$
- 联结词: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\leftarrow$, $\leftrightarrow$

例2

将下列命题符号化.

(1) 凡是有理数皆可写成分数.

(2) 教室里有同学在说话.

(3) 对于任意x，y，都存在唯一的z，使$x + y = z$.

(4) 在我们班中，并非所有同学都能取得优秀成绩.

(5) 有一个整数大于其它每个整数.

(6) 任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，如果$|x - a| < \delta$，则$|F(x) - b| < \varepsilon$.

(7) 恰有三个互不相同的素数小于7.

例2(1)的符号化

(1) 凡是有理数皆可写成分数.

解:

$(\forall x)\big(Q^1(x) \to F^1(x)\big)$

x: 数

Q^1: $\cdots$是有理数

F^1: $\cdots$可写成分数

注: 不能写成$(\forall x)(Q_1(x) \wedge F_1(x))$
也不能写成$(\forall x \in Q)F^1(x)$.

例2(2)的符号化

(2) 教室里有同学在说话.

解:

$(\exists x)(C^1(x) \wedge T^1(x))$

x: 同学

C^1: $\cdots$在教室里

T^1: $\cdots$在说话

注: 不能写成$(\exists x)(C^1(x) \to T^1(x))$
也不能写成$(\exists x \in C)T^1(x)$.

例2(3)的符号化

(3) 对于任意x, y, 都存在唯一的z, 使$x+y=z$.

解:

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)\big((x+y=z)\wedge \\ (\forall u)(u=x+y\rightarrow u=z)\big).$$

注: 量词的嵌套

"存在唯一"的表示.

例2(4)的符号化

(4) 在我们班中，并非所有同学都能取得优秀成绩.

解:

$\neg(\forall x)\big(C(x) \to E(x)\big)$

x: 同学

C: $\cdots$在班级里

E: $\cdots$能取得优秀成绩

注: $C(x)\to E(x) \iff \neg C(x)\vee E(x) \iff \neg\big(C(x)\wedge\neg E(x)\big)$,

从而此命题可表示为: $\neg(\forall x)\neg\big(C(x)\wedge\neg E(x)\big)$.

另一方面，此命题也可表为$(\exists x)\big(C(x)\wedge\neg E(x)\big)$,

即: “$\neg(\forall x)\neg$” 与 “$\exists x$” 有相同的意义

例2(5)的符号化

(5) 有一个整数大于其它每个整数.

解:

$(\exists x)\big(Z(x) \wedge (\forall y)(((Z(y) \wedge \neg(y = x)) \to x > y)\big)$

x, y: 数

Z: $\cdots$是整数

注: 此符号串中, "$=$"和"$>$"是什么类型的符号?

例2(6)的符号化

(6) 任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，如果$|x-a| < \delta$，
则$|F(x)-b| < \varepsilon$.

解:

$$\forall\varepsilon\Big(\varepsilon > 0 \to (\exists\delta)\big(\delta > 0 \wedge (|x-a| < \delta \to |f(x)-b| < \varepsilon)\big)\Big)$$

注: 此符号串中有哪些谓词符号?

例2(7)的符号化

(7) 恰有三个互不相同的素数小于7.

解:

$$
\begin{aligned}
&(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\Big(\\
&\quad (x_1 < 7 \wedge x_2 < 7 \wedge x_3 < 7) \wedge \\
&\quad (P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3)) \wedge \\
&\quad (\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \neg(x_2 = x_3)) \wedge \\
&\quad (\forall y)\Big((y < 7 \wedge P(y)) \rightarrow \\
&\qquad\qquad (y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3)\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

注: 两个量词可以表示任意确定个数的个体。

应注意的问题

- 谓词(函数)的元数是固定的.
- 谓词(函数)中的变元是有顺序性的.
  例如: $F(x,\ y)$与$F(y,\ x)$不具有相同的含义.
- 量词也有顺序性.
  例如: $(\forall x)(\exists y)(x < y)$与$(\exists y)(\forall x)(x < y)$
  并不表示同一含义.
- 谓词公式真假值判别的困难性,

本章开头推理的正确表示

$$
\begin{array}{ll}
\text{因为} & (\forall x)(G_2^1(x) \rightarrow G_1^1(f(x))) \\
 & G_2^1(\pi) \\
\hline
\text{所以} & G_1^1(f(\pi))
\end{array}
$$

其中:

x代表 “数” .

f代表” $\cdots$ 的平方” .

G_1^1代表 “$\cdots$ 是非负实数” .

G_2^1代表 “$\cdots$ 是实数” .

下次课

谓词演算的形式系统

1. 一阶语言

2. 自由变元与约束变元

作业

p.558(p.183)

1 (1), (2), (4), (6)–(9)

思考题

1. 一阶谓词演算中“一阶”的含义是什么？

2. (表达能力的讨论)
有没有一阶谓词演算不能表达的推理？

谢 谢