



单元2.1 有序对与卡氏积

第一编 集合论 第2章二元关系

2.1 有序对与卡氏积



北京大学



内容提要

- 有序对(有序二元组)
- 有序三元组, 有序 n 元组
- 卡氏积
- 卡氏积性质





有序对

- 有序对

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

- a 是第一元素, b 是第二元素
- $\langle a, b \rangle$ 也记作 (a, b)





引理1

引理1 $\{x,a\}=\{x,b\} \Leftrightarrow a=b$

证明 (\Leftarrow) 显然.

(\Rightarrow) 分两种情况.

(1) $x=a$. $\{x,a\}=\{x,b\} \Rightarrow \{a,a\}=\{a,b\}$
 $\Rightarrow \{a\}=\{a,b\} \Rightarrow a=b$.

(2) $x \neq a$. $a \in \{x,a\}=\{x,b\} \Rightarrow a=b$. #



北京大学



引理2

引理2 若 $\mathcal{A}=\mathcal{B}\neq\emptyset$, 则

$$(1) \cup \mathcal{A} = \cup \mathcal{B}$$

$$(2) \cap \mathcal{A} = \cap \mathcal{B}$$

证明 (1) $\forall x, x \in \cup \mathcal{A} \Leftrightarrow \exists z(z \in \mathcal{A} \wedge x \in z)$

$$\Leftrightarrow \exists z(z \in \mathcal{B} \wedge x \in z) \Leftrightarrow x \in \cup \mathcal{B}.$$

(2) $\forall x, x \in \cap \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall z(z \in \mathcal{A} \rightarrow x \in z)$

$$\Leftrightarrow \forall z(z \in \mathcal{B} \rightarrow x \in z) \Leftrightarrow x \in \cap \mathcal{B}. \quad \#$$





定理2.1

定理2.1 $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

证明 (\Leftarrow) 显然.

(\Rightarrow) 由引理2, $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$

$\Rightarrow \cap \{\{a\}, \{a, b\}\} = \cap \{\{c\}, \{c, d\}\} \Rightarrow \{a\} = \{c\} \Leftrightarrow a = c.$

又 $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \Leftrightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$

$\Rightarrow \cup \{\{a\}, \{a, b\}\} = \cup \{\{c\}, \{c, d\}\} \Rightarrow \{a, b\} = \{c, d\}.$

再由引理1, 得 $b = d$. #



北京大学



推论

推论 $a \neq b \Rightarrow \langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$

证明 (反证)

$$\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle \Leftrightarrow a = b,$$

与 $a \neq b$ 矛盾. #



北京大学



有序三元组

- 有序三元组:

$$\langle a, b, c \rangle = \langle \langle a, b \rangle, c \rangle$$

- 有序 $n(n \geq 2)$ 元组:

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \langle \langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \rangle, a_n \rangle$$

- 定理2 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$

$$\Leftrightarrow a_i = b_i, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad \#$$





卡氏积

- 卡氏积:

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$$





例

设 $A = \{\emptyset, a\}$, $B = \{1, 2, 3\}$.

则 $A \times B = \{\langle \emptyset, 1 \rangle, \langle \emptyset, 2 \rangle, \langle \emptyset, 3 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle\}$.

$B \times A = \{\langle 1, \emptyset \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle 2, \emptyset \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, \emptyset \rangle, \langle 3, a \rangle\}$.

$A \times A = \{\langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, a \rangle, \langle a, \emptyset \rangle, \langle a, a \rangle\}$.

$B \times B = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$.





卡氏积的性质

- 非交换: $A \times B \neq B \times A$
(除非 $A=B \vee A=\emptyset \vee B=\emptyset$)
- 非结合: $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$
(除非 $A=\emptyset \vee B=\emptyset \vee C=\emptyset$)
- 分配律: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ 等
- 其他: $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$ 等





卡氏积非交换性

- 非交换: $A \times B \neq B \times A$

(除非 $A=B \vee A=\emptyset \vee B=\emptyset$)

- 反例: $A=\{1\}, B=\{2\}.$

$$A \times B = \{<1,2>\},$$

$$B \times A = \{<2,1>\}.$$





卡氏积非结合性

- 非结合: $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$
(除非 $A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee C = \emptyset$)
- 反例: $A = B = C = \{1\}$.
 $(A \times B) \times C = \{ \langle \langle 1, 1 \rangle, 1 \rangle \},$
 $A \times (B \times C) = \{ \langle 1, \langle 1, 1 \rangle \rangle \}.$



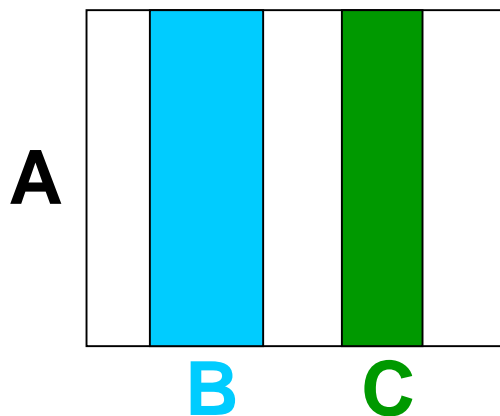


卡氏积分配律

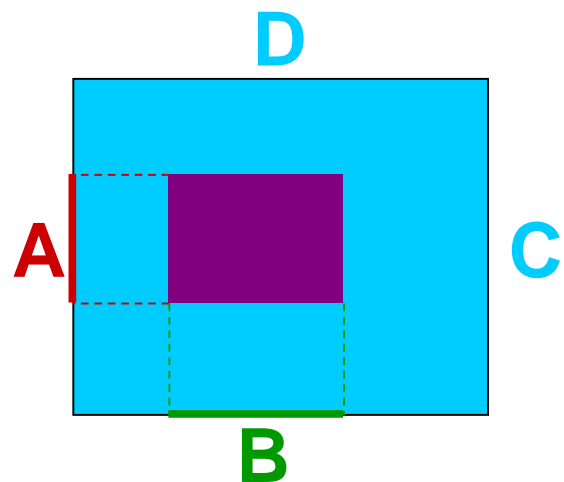
- 1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- 2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- 3. $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
- 4. $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$



卡氏积图示



$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$



$$A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$$





卡氏积分分配律的证明

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$

证明: $\forall \langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle \in A \times (B \cup C)$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (\langle x, y \rangle \in A \times B) \vee (\langle x, y \rangle \in A \times C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$\therefore A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C). \quad \#$$





例2.1

例2.1 设 A, B, C, D 是任意集合,

(1) $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$

(2) 若 $A \neq \emptyset$, 则 $A \times B \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \subseteq C$.

(3) $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$,

并且当 $(A = B = \emptyset) \vee (A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset)$ 时,

$$A \times B \subseteq C \times D \Rightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq D.$$



例2.1(2)证明

(2) 若 $A \neq \emptyset$, 则 $A \times B \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \subseteq C$.

证明 (\Rightarrow) 若 $B = \emptyset$, 则 $B \subseteq C$.

设 $B \neq \emptyset$, 由 $A \neq \emptyset$, 设 $x \in A$.

$$\forall y, y \in B \Rightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C \Rightarrow y \in C.$$

$$\therefore B \subseteq C.$$



例2.1(2)证明

(2) 若 $A \neq \emptyset$, 则 $A \times B \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \subseteq C$.

证明 (\Leftarrow) 若 $B = \emptyset$, 则 $A \times B = \emptyset \subseteq A \times C$.

设 $B \neq \emptyset$. $\forall \langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle \in A \times B$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$$

$$\Rightarrow x \in A \wedge y \in C \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C$$

$$\therefore A \times B \subseteq A \times C. \quad \#$$

讨论: 在(\Leftarrow)中不需要条件 $A \neq \emptyset$.



北京大学



n维卡氏积

- n维卡氏积:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid \\ x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n \}$$

- $A^n = A \times A \times \dots \times A$
- $|A_i| = n_i, i=1, 2, \dots, n \Rightarrow$

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_n.$$

- n维卡氏积性质与2维卡氏积类似.





n维卡氏积的性质

- 非交换: $A \times B \times C \neq B \times C \times A$

(要求A,B,C均非空,且互不相等)

- 非结合: (非2元运算)

- 分配律: 例如

$$A \times B \times (C \cup D) = (A \times B \times C) \cup (A \times B \times D)$$

- 其他: 如 $A \times B \times C = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee C = \emptyset$.





小结

- 有序对(有序二元组) $\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$
- 有序三元组, 有序n元组
- 卡氏积 $A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$
- 卡氏积性质: 非结合、非交换、分配律等

