单元-2.2 二元关系

第一编 集合论 第2章二元关系
2.2 二元关系

内容提要

- n元关系
- 二元关系
- A到B的二元关系
- A上的二元关系
- 一些特殊关系

n元关系

- n元关系: 其元素全是有序n元组的集合.
- 例1: F_1={<a,b,c,d>,<1,2,3,4>,
  <物理,化学,生物,数学>},
  F_1是4元关系. #
- 例2: F_2={<a,b,c>,<α,β,γ>,
  <大李,小李,老李>}
  F_2是3元关系. #

二元关系

- **2元关系(关系)**: 元素全是有序对的集合.
- 例3: $R_1=\{<1,2>,<\alpha,\beta>,<a,b>\}$

  R_1是2元关系. #
- 例4: $R_2=\{<1,2>,<3,4>,<$白菜,小猫$>\}$

  R_2是2元关系. #
- 例5: $A=\{<a,b>,<1,2,3>,a,\alpha,1\}$

  当$a,\alpha,1$ 不是有序对时, A不是关系. #

二元关系的记号

- 设F是二元关系, 则

  $\langle x,y\rangle\in F \Leftrightarrow$ x与y具有F关系 $\Leftrightarrow xFy$

- 对比: xFy (中缀(infix)记号)

  F(x,y), Fxy (前缀(prefix)记号)

  $\langle x,y\rangle\in F$, xyF (后缀(suffix)记号)

- 例如: $2<15 \Leftrightarrow <(2,15) \Leftrightarrow \langle 2,15\rangle\in <$.

A到B的二元关系

- A到B的二元关系：是A×B的任意子集.

  R是A到B的二元关系

  $\Leftrightarrow R\subseteq A\times B \Leftrightarrow R\in P(A\times B)$

- 若$|A|=m$, $|B|=n$, 则$|A\times B|=mn$, 故

  $|P(A\times B)|=2^{mn}$

即A到B不同的二元关系共有2^{mn}个

A到B的二元关系举例

- 设 $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b\}$,

  则A到B的二元关系共有4个:

  $R_1=\varnothing$, $R_2=\{<a_1,b>\}$, $R_3=\{<a_2,b>\}$,
  $R_4=\{<a_1,b>,<a_2,b>\}$.

  B到A的二元关系也有4个:

  $R_5=\varnothing$, $R_6=\{<b,a_1>\}$, $R_7=\{<b,a_2>\}$,
  $R_8=\{<b,a_1>,<b,a_2>\}$. #

A上的二元关系

- A上的二元关系: 是A×A的任意子集

  R是A上的二元关系

  $\Leftrightarrow$ <u>R⊆A×A</u> $\Leftrightarrow$ R∈P(A×A)

- 若|A|=m, 则|A×A|=m², 故

  $|P(A\times A)| = 2^{m^2}$

即A上不同的二元关系共有 2^{m^2} 个

- m=3?

A上的二元关系(例1)

- 例1: 设 $A=\{a_1,a_2\}$,

  则A上的二元关系共有16个:

  $R_1 = \emptyset$,

  $R_2 = \{<a_1,a_1>\}$,

  $R_3 = \{<a_1,a_2>\}$,

  $R_4 = \{<a_2,a_1>\}$,

  $R_5 = \{<a_2,a_2>\}$,

A上的二元关系(例1)

$R_6 = \{ <a_1,a_1>, <a_1,a_2> \}$,

$R_7 = \{ <a_1,a_1>, <a_2,a_1> \}$,

$R_8 = \{ <a_1,a_1>, <a_2,a_2> \}$,

$R_9 = \{ <a_1,a_2>, <a_2,a_1> \}$,

$R_{10} = \{ <a_1,a_2>, <a_2,a_2> \}$,

$R_{11} = \{ <a_2,a_1>, <a_2,a_2> \}$,

A上的二元关系(例1)

$R_{12} = \{ <a_1,a_1>,<a_1,a_2>,<a_2,a_1> \qquad\qquad \}$

$R_{13} = \{ <a_1,a_1>,<a_1,a_2>, \qquad\qquad <a_2,a_2> \}$

$R_{14} = \{ <a_1,a_1>, \qquad\qquad <a_2,a_1>,<a_2,a_2> \}$

$R_{15} = \{ \qquad\qquad <a_1,a_2>,<a_2,a_1>,<a_2,a_2> \}$

$R_{16} = \{<a_1,a_1>,<a_1,a_2>,<a_2,a_1>,<a_2,a_2>\}$. #

A上的二元关系(例2)

- 例2: 设 B={b},

  则B上的二元关系共有2个:

  $R_1=\varnothing$,　　$R_2=\{<b,b>\}$.　　#

一些特殊关系

- 空关系
- 恒等关系
- 全域关系
- 整除关系
- 小于等于关系,…
- 包含关系,
- 真包含关系

特殊关系

设A是任意集合,则可以定义A上的:

- 空关系: $\varnothing$
- 恒等关系: $I_A=\{<x,x>|x\in A\}$
- 全域关系:

$$E_A=A\times A=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\}$$

特殊关系

设$A \subseteq Z$, 则可以定义A上的:

- 整除关系:

$$D_A = \{ \langle x,y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x|y \}$$

- 例: A={1,2,3,4,5,6}, 则

D_A={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,
<1,5>,<1,6>,<2,2>,<2,4>,<2,6>,
<3,3>,<3,6>,<4,4>,<5,5>,<6,6>}.#

特殊关系

设$A\subseteq R$, 则可以定义A上的:

- 小于等于(less than or equal to)关系:

$$LE_A = \{ \langle x,y\rangle \mid x\in A \land y\in A \land x\le y \}$$

- 小于(less than)关系,

$$L_A = \{ \langle x,y\rangle \mid x\in A \land y\in A \land x< y \}$$

- 大于等于(greater than or equal to)关系
- 大于(great than)关系,...

特殊关系

设A为任意集合,则可以定义P(A)上的:

- 包含关系:

$$\subseteq_A = \{ <x,y> \mid x\subseteq A \wedge y\subseteq A \wedge x\subseteq y \}$$

- 真包含关系:

$$\subset_A = \{ <x,y> \mid x\subseteq A \wedge y\subseteq A \wedge x\subset y \}$$

北京大学

与二元关系有关的概念

- 定义域, 值域, 域
- 逆, 合成(复合)
- 限制, 象
- 单根, 单值

定义域,值域,域

对任意集合R, 可以定义:

- 定义域(domain) :

$$\text{dom } R = \{ x \mid \exists y(xRy) \}$$

- 值域(range):

$$\text{ran } R = \{ y \mid \exists x(xRy) \}$$

- 域(field):

$$\text{fld } R = \text{dom } R \cup \text{ran } R$$

北京大学

例

- $R_1=\{a,b\}$, $R_2=\{a,b,<c,d>,<e,f>\}$,
  $R_3=\{<1,2>,<3,4>,<5,6>\}$.
  当a,b不是有序对时, R_1和R_2不是关系.

dom $R_1=\varnothing$, ran $R_1=\varnothing$, fld $R_1=\varnothing$

dom $R_2=\{c,e\}$, ran $R_2=\{d,f\}$, fld $R_2=\{c,d,e,f\}$

dom $R_3=\{1,3,5\}$, ran $R_3=\{2,4,6\}$,

fld $R_3=\{1,2,3,4,5,6\}$. #

逆, 合成(复合)

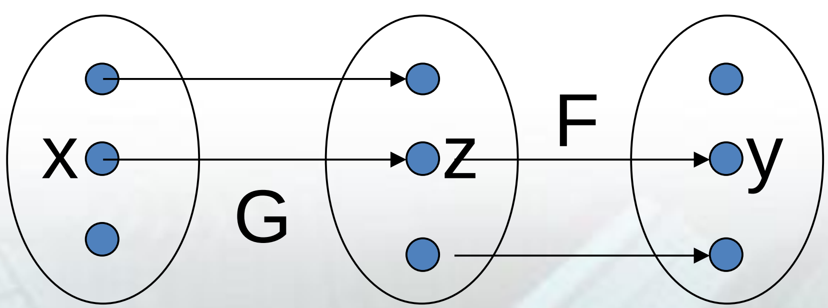
对任意集合F,G, 可以定义:

- 逆(inverse) :

$$F^{-1} = \{ \langle x,y \rangle \mid yFx \}$$

- 合成(复合)(composite):

$$F \circ G = \{ \langle x,y \rangle \mid \exists z(\, xGz \land zFy \,) \}$$



关于合成

- 顺序合成(右合成):

$$F \circ G = \{ \langle x,y \rangle \mid \exists z(xFz \wedge zGy) \}$$

- 逆序合成(左合成):

$$F \circ G = \{ \langle x,y \rangle \mid \exists z(xGz \wedge zFy) \}$$

限制、象

对任意集合F,A, 可以定义:

- 限制(restriction):

$$F\uparrow A = \{ \langle x,y\rangle \mid xFy \land x\in A \}$$

- 象(image):

$$F[A] = \mathrm{ran}(F\uparrow A)$$

$$F[A] = \{ y \mid \exists x(x\in A \land xFy) \}$$

单根

对任意集合F, 可以定义:

- 单根(single rooted): F是单根的⇔

$$\forall y(\ y \in \mathrm{ran}\ F \rightarrow \exists! x(\ x \in \mathrm{dom}\ F \wedge xFy\ )\ )$$

$$\Leftrightarrow (\forall y \in \mathrm{ran}\ F)(\exists! x \in \mathrm{dom}\ F)(xFy)$$

- $\exists!$表示“存在唯一的”
- $\forall x(x \in A \rightarrow B(x))$缩写为$(\forall x \in A)B(x)$
- $\exists x(x \in A \wedge B(x))$缩写为$(\exists x \in A)B(x)$

单值

对任意集合F, 可以定义:

- 单值(single valued): F是单值的$\Leftrightarrow$

$$\forall x(\ x \in \mathrm{dom}\ F \rightarrow \exists ! y(\ y \in \mathrm{ran}\ F \wedge xFy\ )\ )$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathrm{dom}\ F)(\exists ! y \in \mathrm{ran}\ F)(xFy)$$

例2.2

- 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,b,\langle c,d\rangle\}$,

  $R=\{\ \langle a,b\rangle,\ \langle c,d\rangle\ \}$,

  $F=\{\ \langle a,b\rangle,\ \langle a,\{a\}\rangle,\ \langle \{a\},\{a,\{a\}\}\rangle\ \}$,

  $G=\{\ \langle b,e\rangle,\langle d,c\rangle\ \}$.

求: (1) A^{-1}, B^{-1}, R^{-1}.

(2) $B\circ R^{-1}$, $G\circ B$, $G\circ R$, $R\circ G$.

(3) $F\uparrow\{a\}$, $F\uparrow\{\{a\}\}$, $F\uparrow\{a,\{a\}\}$, $F^{-1}\uparrow\{\{a\}\}$.

(4) $F[\{a\}]$, $F[\{a,\{a\}\}]$, $F^{-1}[\{a\}]$, $F^{-1}[\{\{a\}\}]$.

例2.2(1)

- $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,b,<c,d>\}$,

  $R=\{ <a,b>, <c,d> \}$,

求: (1) A^{-1}, B^{-1},R^{-1}.

解: (1) $A^{-1} = \varnothing$,

$B^{-1} = \{<d,c>\}$,

$R^{-1} = \{<b,a>,<d,c>\}$.

例2.2(2)

- $B=\{a,b,\langle c,d\rangle\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\}$, $G=\{\langle b,e\rangle,\langle d,c\rangle\}$.

求: (2) $B\circ R^{-1}$, $G\circ B$, $G\circ R$, $R\circ G$.

解: (2) $B\circ R^{-1}=\{\langle d,d\rangle\}$,

$G\circ B=\{\langle c,c\rangle\}$,

$G\circ R=\{\langle a,e\rangle,\langle c,c\rangle\}$,

$R\circ G=\{\langle d,d\rangle\}$.

例2.2(3)

- $F=\{<a,b>,<a,\{a\}>,<\{a\},\{a,\{a\}\}>\}$,

求: (3) $F\upharpoonright\{a\}$, $F\upharpoonright\{\{a\}\}$, $F\upharpoonright\{a,\{a\}\}$, $F^{-1}\upharpoonright\{\{a\}\}$.

解: (3) $F\upharpoonright\{a\}=\{<a,b>,<a,\{a\}>\}$,

$F\upharpoonright\{\{a\}\}=\{<\{a\},\{a,\{a\}\}>\}$,

$F\upharpoonright\{a,\{a\}\} = F$,

$F^{-1}\upharpoonright\{\{a\}\}=\{<\{a\},a>\}$.

例2.2(4)

- $F=\{<a,b>,<a,\{a\}>,<\{a\},\{a,\{a\}\}>\ \}$,

求: (4) $F[\{a\}]$, $F[\{a,\{a\}\}]$, $F^{-1}[\{a\}]$,

$F^{-1}[\{\{a\}\}]$.

解: (4) $F[\{a\}] = \{\ b, \{a\}\ \}$,

$F[\{a,\{a\}\}] = \{\ b, \{a\}, \{a,\{a\}\}\ \}$,

$F^{-1}[\{a\}] = \varnothing$,

$F^{-1}[\{\{a\}\}] = \{\ a\ \}$. #

例2.3

- 设 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in Z\wedge y=|x|\}$,

  $A=\{0,1,2\}$, $B=\{0,-1,-2\}$

求: (1) $R[A\cap B]$ 和 $R[A]\cap R[B]$;

(2) $R[A]-R[B]$ 和 $R[A-B]$.

解: (1) $R[A\cap B]=R[\{0\}]=\{0\}$,

$R[A]\cap R[B]=\{0,1,2\}\cap\{0,1,2\}=\{0,1,2\}$;

(2) $R[A]-R[B]=\{0,1,2\}-\{0,1,2\}=\varnothing$,

$R[A-B]=R[\{1,2\}]=\{1,2\}$. #

定理2.5(合成运算结合律)

- 设R_1,R_2,R_3为集合, 则

$$(R_1 o R_2) o R_3 = R_1 o (R_2 o R_3)$$

证明: $\forall$<x,y>, <x,y>$\in (R_1 o R_2) o R_3$

$\Leftrightarrow \exists z(\ xR_3z \wedge z(R_1 o R_2)y\ )$

$\Leftrightarrow \exists z(\ xR_3z \wedge \exists t(\ zR_2t \wedge tR_1y\ )\ )$

$\Leftrightarrow \exists z \exists t(\ xR_3z \wedge (\ zR_2t \wedge tR_1y\ )\ )$

$\Leftrightarrow \exists t \exists z(\ xR_3z \wedge\ zR_2t \wedge tR_1y\ \ )$

定理2.5证明

$\Leftrightarrow \exists t \exists z(xR_3z \wedge zR_2t \wedge tR_1y)$

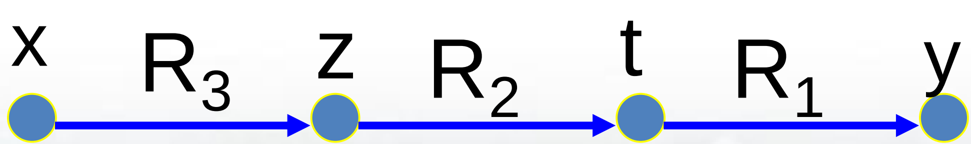
$\Leftrightarrow \exists t(\exists z(xR_3z \wedge zR_2t) \wedge tR_1y)$

$\Leftrightarrow \exists t(x(R_2 o R_3)t \wedge tR_1y)$

$\Leftrightarrow xR_1 o(R_2 o R_3)y$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R_1 o(R_2 o R_3)$

$\therefore (R_1 o R_2) o R_3 = R_1 o(R_2 o R_3)$.   #



定理2.7

定理2. 7　设F,G为二集合, 则 $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

证明　$\forall\langle x,y\rangle$,

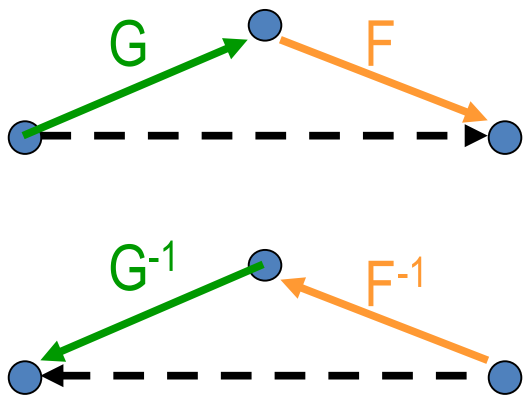
$\langle x,y\rangle\in(F\circ G)^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle y,x\rangle\in(F\circ G)$

$\Leftrightarrow \exists z(yGz\wedge zFx)$

$\Leftrightarrow \exists z(zG^{-1}y\wedge xF^{-1}z)$

$\Leftrightarrow \exists z(xF^{-1}z\wedge zG^{-1}y) \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in G^{-1}\circ F^{-1}$.　#



小结

- $R \subseteq A \times B$, $R \subseteq A \times A$; xRy
- $\varnothing$, I_A, E_A;
- dom(R), ran(R), fld(R);

  $R \upharpoonright A$, $R[A]$;

  R^{-1}, $R \circ S$