命题演算推理形式系统P

王捍贫

北京大学信息科学技术学院软件研究所

复习——命题演算推理形式系统N

- N中推理的每个式子都由前提和结论组成，接近于实际推理，又称为自然推理形式系统。
- 第一个给出自然推理形式系统的是德国数学家甘岑(G. Gentzen, 1909–1945)，所以又 称N为甘岑系统.*
- N由符号库、公式、公理和规则四部分组成。
- N中形式推理：$\Gamma \vdash \alpha$.
- 形式化思想和方法正是计算机科学所需要的

——计算机逻辑时代。

*甘岑的另一个主要贡献是他用Hilbert的超限归纳法证明了 数论的一致性，使形式主义避免了彻底的失败。

§7 命题演算推理形式系统P

命题演算形式系统N的“缺点”：

- 符号太多：$\{\neg, \rightarrow\}$就已经是联结词的完全集.
- 公式复杂.
- 公理和规则太多：10条
- 推理麻烦：又是前提又是结论.

命题演算推理系统P是一个“简洁”的形式系统。

P的符号库

(1) p_1, p_2, $\cdots$ (可数个命题符号)

(2) $\neg$, $\rightarrow$ (2个联结词符号)

(3)), ((2个辅助符号)

P的公式

归纳定义如下：

(1) 命题符号都是公式;

(2) 若α是公式，则$(\neg\alpha)$也是公式;

(3) 若α、β是公式，则$(\alpha \to \beta)$也都是公式;

(4) 每个公式都是有限次使用(1)、(2)或(3)得到的.

P的公理

(A1) $(\alpha \longrightarrow (\beta \longrightarrow \alpha))$

(A2) $\Big((\alpha \longrightarrow (\beta \longrightarrow \gamma)) \longrightarrow ((\alpha \longrightarrow \beta) \longrightarrow (\alpha \longrightarrow \gamma))\Big)$

(A3) $(((\neg\, \alpha) \longrightarrow (\neg\, \beta)) \longrightarrow (\beta \longrightarrow \alpha))$

P的推理规则

分离规则：由α、$(\alpha \to \beta)$可得到β. (M).

分离规则(Modus Ponens)又记为(MP).

注记

- 形式系统P又称为希尔伯特型(D.Hilbert)系统 *
- 分清P的定义中的元语言与对象语言。
- P的形式语言是N的形式语言子语言。
- 关于N的注记同样适用于P，如括号省略规则。

*关于形式系统的多样性请参见:

1. 王宪钧，数理逻辑引论，北大出版社，1982
2. 沈百英，数理逻辑，国防工业出版社，1991

P的公理的简写

(A1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

(A2) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

(A3) $((\neg \alpha) \rightarrow (\neg \beta)) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

在形式系统P中可以做什么?

例20

(1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ $(A1)$

(2) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow$

$((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$ $(A2)$

(3) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ $(M)(1)(2)$

P的证明序列

定义15 由P中公式组成的一个序列:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \qquad (*)$$

若对每个i $(1 \le i \le n)$,下列两条件之一成立:

(1) α_i是公理;

(2) α_i是由序列(*)中α_i之前的某两个公式$\alpha_j, \alpha_k (1 \le j, k < i)$应用分离规则(M)得到的.

则α_n称为P的一个**内定理**, 记作$\vdash_{\mathbf{P}} \alpha_n$ 或$\vdash \alpha_n$, 称(*)为α_n的一个**证明序列**.

由例20知: $\vdash_{\mathbf{P}} (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \alpha)$

两个简单性质

(1) $\mathbf{P}$的每个公理α都是$\mathbf{P}$的一个内定理.

(2) 若α_1, α_2, $\cdots$, α_n 是$\mathbf{P}$中的一个证明序列, 则对每个α_i $(1 \leq i \leq n)$都有$\vdash \alpha_i$.

例21

证明：$\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

证:

(1) $\vdash \alpha \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$ $\quad (A1)$

(2) $\vdash (\alpha \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)) \rightarrow$
$\quad ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$ $\quad (A2)$

(3) $\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ $\quad M(1)(2)$

(4) $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ $\quad (A1)$

(5) $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$ $\quad (M)(3)(4)$

问：为什么可以在每个式的前面都可以加$\vdash$?

补充例

证明: $\vdash \alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$

证:

(1) $(\alpha \to \beta) \to \Big((\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)\Big)$

(2) $\bigg((\alpha \to \beta) \to \Big((\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)\Big)\bigg) \to$
$\bigg(\Big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \to \beta))\Big) \to \Big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)\Big)\bigg)$

(3) $\Big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \to \beta))\Big) \to \Big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)\Big)$

(4) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \to \beta))$

(5) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$

补充例(续)

(6) $$\Big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)\Big) \to \Big(((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)\Big)$$

(7) $$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$$

(8) $$\Big(((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)\Big) \to \Big(\alpha \to (((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta))\Big)$$

(9) $$\alpha \to (((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta))$$

(10) $$\Big(\alpha \to (((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta))\Big) \to \Big((\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \alpha)) \to (\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta))\Big)$$

(11) $$(\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \alpha)) \to (\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta))$$

(12) $$\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \alpha)$$

(13) $$\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$$

怎样简化推理？？？

- N的公理和规则多，推理当然方便；
  P的公理和规则相对少，所以造成推理复杂。
- N的公理和规则直观，所以使用方便；
  P的公理和规则直观性差，证明思路不好发现。
- 将来会证明，N和P是等价的。
- 程序设计语言也有类似现象：
  若语言复杂，则描述性好，但可靠性验证困难；
  若语言简单，则描述性差，但可靠性验证方便；
- 怎么发现和简化P中形式推理？

  —增加元定理

  —模仿N

定理9

1. 若$\vdash \alpha$, $\vdash \alpha \to \beta$, 则$\vdash \beta$

证:

$$\left.\begin{array}{l} \vdots \\ \vdash \alpha \end{array}\right\} \alpha\text{的一个证明序列}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vdots \\ \vdash \alpha \to \beta \end{array}\right\} \alpha \to \beta\text{的一个证明序列}$$

$$\vdash \beta \qquad\qquad (M)$$

仍记为(M)，但要注意与分离规则(M)的区别。

定理9(续)

2. 若$\vdash \alpha\to\beta$，且$\vdash \beta\to\gamma$，则$\vdash \alpha\to\gamma$.

证:

$$\vdash (\beta\to\gamma)\to(\alpha\to(\beta\to\gamma)) \qquad (A1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vdots \\ \vdash \beta\to\gamma\end{array}\right\} \quad \beta\to\gamma\text{的一个证明序列}$$

$$\vdash \alpha\to(\beta\to\gamma) \qquad (M)$$

$$\vdash ((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma)) \qquad (A2)$$

$$\vdash (\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma) \qquad (M)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vdots \\ \vdash \alpha\to\beta\end{array}\right\} \quad \alpha\to\beta\text{的一个证明序列}$$

$$\vdash \alpha\to\gamma \qquad (M)$$

记为*(Tr)*.

例22

证明：$\vdash \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

证:

(1)	$\vdash \neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$	$(A1)$
(2)	$\vdash (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	$(A3)$
(3)	$\vdash \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	(Tr)

例23

证明: 1. $\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$ 2. $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$

证1:

(1) $\vdash \neg\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha)$ (上例)

(2) $\vdash (\neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha) \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$ $(A3)$

(3) $\vdash \neg\neg\alpha \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$ (Tr)(1)(2)

(4) $\vdash (\neg\neg\alpha \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)) \to$

$(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$ $(A2)$

(5) $\vdash (\neg\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$ (M)(3)(4)

(6) $\vdash \neg\neg\alpha \to \neg\neg\alpha$ (例21)

(7) $\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$ (M)(5)(6)

例23(续)

证明： 1. $\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ 2. $\vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$

证2:

(1) $\vdash \neg\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$ (1.)

(2) $\vdash (\neg\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha)$ $(A3)$

(3) $\vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ (M)

进一步简化？？？

1. 能否象在N中一样进行推理?

2. 在P中怎么定义$\Gamma \vdash \alpha$?

P中有前提的推演

定义16 设Σ是**P**中的一个公式集，称**P**中公式序列

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \tag{$*$}$$

为在前提Σ下推出α_n的证明序列，如果对每个α_i $(1 \leq i \leq n)$，

(1) $\alpha_i \in \Sigma$，或者

(2) α_i是**P**中一个公理，或者

(3) α_i是由$(*)$中它前面的两个公式应用(M)得到.

此时，记为$\Sigma \vdash_{\mathbf{P}} \alpha$ 或 $\Sigma \vdash \alpha$.

注记

- P中在前提Σ下的证明序列实际上是把Σ中的公式看作 “ 临时公理 ”进行的一个证明。
- 在定义16中，Σ中公式不一定是**P**中公理，也不一定是内定理。
- 在定义16中，Σ也不一定是有限集合。

$\Sigma \vdash_{\mathbf{P}} \alpha$的简单性质

(1) 若$\alpha \in \Sigma$，则$\Sigma \vdash \alpha$.

(2) 若$\Sigma' \subseteq \Sigma$，$\Sigma' \vdash \beta$，则$\Sigma \vdash \beta$.

(3) 当$\Sigma = \emptyset$时，$\emptyset \vdash \beta$当且仅当$\vdash \beta$.

例25

证明： $\{\alpha,\ \beta\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma)\ \}\vdash\beta\rightarrow\gamma$

证:

(1)	α	前提
(2)	$\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$	$(A1)$
(3)	$\beta\rightarrow\alpha$	$(M)(1)(2)$
(4)	$\beta\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma)$	前提
(5)	$(\beta\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma))\rightarrow((\beta\rightarrow\alpha)\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))$	$(A2)$
(6)	$(\beta\rightarrow\alpha)\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)$	$(M)(4)(5)$
(7)	$\beta\rightarrow\gamma$	$(M)(6)(3)$

问：本例中，能否在每个公式前加上$\vdash$?

作业

p.508(p.101). 14(1), (3), (4)
15(1), (2)

谢　谢

复习

- 命题演算推理形式系统P　　　　　　　　　　　　　简洁
- 2个联结词。
- 3个公理。
- 1个规则。
- P中形式推理：$\vdash \alpha$?
- 问题：推理复杂，寻找证明思路困难。

  —增加元定理

  —模仿N：P中带前提的推演

演绎定理

定理10 若$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, 则$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

证:

设
$$\beta_1, \ \beta_2, \ \cdots, \ \beta_n(=\beta)$$

是在前提 $\Gamma \cup \{\alpha\}$下推出β的一个证明序列. 考虑以下公式序列:

$$\alpha \to \beta_1, \ \alpha \to \beta_2, \ \cdots, \ \alpha \to \beta_n(=\alpha \to \beta)$$

下证: 可对此公式序列进行适当填补, 使得在填补过后的序列中, 每个$\alpha \to \beta_i$ $(1 \le i \le n)$及其之前的公式组成的子序列能成为在前提Γ下推出$\alpha \to \beta_i$ 的一个证明序列.

演绎定理的归纳证明——奠基部分1

对i用数学归纳法.

(1) 当$i = 1$时，β_1或者是一个公理，或者$\beta_1 \in \Gamma \cup \{\alpha\}$.

(1.1) 当β_1是一个公理时，在$\alpha \to \beta_1$之前 填补如下公式:

$$\begin{array}{ll} \beta_1 \to (\alpha \to \beta_1) & (A1) \\ \beta_1 & (\text{公理}) \\ \alpha \to \beta_1 & (M) \end{array}$$

演绎定理的归纳证明——奠基部分2

(1.2) 当$\beta_1 \in \Gamma$时，可仿(1.1)填补.

(1.3) 当β_1为α时，则$\alpha \to \beta_1$为 $\alpha \to \alpha$.
因$\vdash \alpha \to \alpha$，故$\alpha \to \alpha$在**P**中有一个证明序列，
将此证明序列填补在$\alpha \to \beta_1$之前，则此序列
也是在前提Γ下推出$\alpha \to \beta_1$的一个证明序列.

演绎定理的归纳证明——归纳部分1

(2) 设在$\alpha \to \beta_{i-1}$之前已适当填补，现在$\alpha \to \beta_{i-1}$与$\alpha \to \beta_i$ 之间进行如下填补:

$$\left.\begin{array}{l} (2.1)\ (\text{当}\beta_i\text{为某公理时}) \\ (2.2)\ (\text{当}\beta_i \in \Gamma\text{时}) \\ (2.3)\ (\text{当}\beta_i\text{为}\alpha\text{时}) \end{array}\right\} \quad \text{可仿(1)填补.}$$

(2.4) 当β_i是由β_j和 $\beta_k(1 \leq j,\ k < i)$经(M)得到时，不妨设$\beta_k$为$\beta_j \to \beta_i$.

$\alpha \to \beta_j$和$\alpha \to \beta_k$ $\big($即$\alpha \to (\beta_j \to \beta_i)\big)$ 在$\alpha \to \beta_i$之前出现.

演绎定理的归纳证明——归纳部分2

由归纳假设,在$\alpha\to\beta_{i-1}$之前已适当填补.现如下填补:

$$\left.\begin{array}{l}\vdots\\ \alpha\to\beta_{i-1}\end{array}\right\}\quad \alpha\to\beta_{i-1}\text{ 之前公式组成的序列}$$

$\alpha\to\beta_i$

归纳证毕

演绎定理的归纳证明——归纳部分2

由归纳假设,在$\alpha \to \beta_{i-1}$之前已适当填补.现如下填补:

$\vdots$

$\alpha \to \beta_j$

$$\left.\begin{array}{l}\vdots \\ \alpha \to \beta_{i-1}\end{array}\right\} \quad \alpha \to \beta_{i-1} \text{ 之前公式组成的序列}$$

$\alpha \to (\beta_j \to \beta_i)$

$\alpha \to \beta_i$

归纳证毕

演绎定理的归纳证明——归纳部分2

由归纳假设,在$\alpha\rightarrow\beta_{i-1}$之前已适当填补.现如下填补:

$\vdots$

$\alpha\rightarrow\beta_j$

$$\left.\begin{array}{l}\vdots\\ \alpha\rightarrow\beta_{i-1}\end{array}\right\}\quad \alpha\rightarrow\beta_{i-1}\text{ 之前公式组成的序列}$$

$\alpha\rightarrow(\beta_j\rightarrow\beta_i)$

$(\alpha\rightarrow(\beta_j\rightarrow\beta_i))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta_j)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta_i))$ (A2)

$(\alpha\rightarrow\beta_j)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta_i)$ (M)

$\alpha\rightarrow\beta_i$ (M)

归纳证毕.

演绎定理的逆

定理11 若$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$，则$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

证:

$$\left.\begin{array}{l} \vdots \\ \alpha \to \beta \end{array}\right\} \text{由}\Gamma\text{推出}\alpha\to\beta\text{的一个证明}$$

α (前提)

β (M)

例26

证明：$\vdash \alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$

证: 只要证$\{\alpha,\ \alpha \to \beta\} \vdash \beta$

(1)	α	前提
(2)	$\alpha \to \beta$	前提
(3)	β	(M)

2次由应用演绎定理得：$\vdash \alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$。

例27

证明: $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

证: 只要证$\{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow \gamma,\ \alpha\} \vdash \gamma$

(1)	α	前提
(2)	$\alpha \rightarrow \beta$	前提
(3)	β	(M)(1)(2)
(4)	$\beta \rightarrow \gamma$	前提
(5)	γ	(M)(3)(4)

例28

证明： $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

证: 先证 $\{\alpha \rightarrow \beta, \ \neg\neg\alpha\} \vdash \neg\neg\beta$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \left.\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha \end{array}\right\} & \vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha \\
(2) & \neg\neg\alpha & \text{前提} \\
(3) & \alpha & (M)(1)(2) \\
(4) & \alpha \rightarrow \beta & \text{前提} \\
(5) & \beta & (M)(3)(4) \\
(6) & \left.\begin{array}{c} \vdots \\ \beta \rightarrow \neg\neg\beta \end{array}\right\} & \vdash \beta \rightarrow \neg\neg\beta \\
(7) & \neg\neg\beta & (M)(5)(6)
\end{array}
$$

例28(续)

证明： $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

续证:

由于$\{\alpha \to \beta,\ \neg\neg\alpha\} \vdash \neg\neg\beta$

故$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta)$

由于$\vdash (\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

故$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

例29

证明： $\vdash \alpha \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg (\alpha \rightarrow \beta))$

证:

(1) $\vdash \alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$ (例26)

(2) $\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$

$\rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg (\alpha \rightarrow \beta))$ (例28)

(3) $\vdash \alpha \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg (\alpha \rightarrow \beta))$ (Tr)

例30

证明: $\{\alpha \rightarrow \neg \beta,\ \alpha \rightarrow \beta,\ \alpha\} \vdash \gamma$

证:

(1)	α	前提
(2)	$\alpha \rightarrow \beta$	前提
(3)	β	$(M)(1)(2)$
(4)	$\alpha \rightarrow \neg \beta$	前提
(5)	$\neg \beta$	$(M)(1)(2)$
	$\vdots$	
(6)	$\neg \beta \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	例22
(7)	$\beta \rightarrow \gamma$	$(M)(5)(6)$
(8)	γ	$(M)(7)(3)$

由此可得: $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$.

$\vdash (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$.

例31

证明： $\{\alpha\rightarrow\beta,\ \neg\alpha\rightarrow\beta\}\vdash\beta$

证:

(1)	$(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)$	(例28)
(2)	$\alpha\rightarrow\beta$	前提
(3)	$\neg\beta\rightarrow\neg\alpha$	(M)(1)(2)
(4)	$(\neg\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\neg\beta\rightarrow\neg\neg\alpha)$	(例28)
(5)	$\neg\alpha\rightarrow\beta$	前提
(6)	$\neg\beta\rightarrow\neg\neg\alpha$	(M)(4)(5)

例31(续)

证明: $\{\alpha\to\beta,\ \neg\alpha\to\beta\}\vdash\beta$

$$(7)\ (\neg\beta\to\neg\alpha)\to\Big((\neg\beta\to\neg\neg\alpha)\to(\neg\beta\to\neg(\alpha\to\beta))\Big) \qquad (例30)$$

$$(8)\ (\neg\beta\to\neg\neg\alpha)\to(\neg\beta\to\neg(\alpha\to\beta)) \qquad (M)(3)(7)$$

$$(9)\ \neg\beta\to\neg(\alpha\to\beta) \qquad (M)(6)(8)$$

$$(10)\ (\neg\beta\to\neg(\alpha\to\beta))\to((\alpha\to\beta)\to\beta) \qquad (A3)$$

$$(11)\ (\alpha\to\beta)\to\beta \qquad (M)(9)(10)$$

$$(12)\ \beta \qquad (M)(2)(11)$$

故: $\vdash(\alpha\to\beta)\to((\neg\alpha\to\beta)\to\beta)$

例32

证明： $\vdash (\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$

证: 只要证$\{\neg\alpha \to \alpha\} \vdash \neg\alpha$

(1) $\neg\alpha \to (\alpha \to \neg(\neg\alpha \to \alpha))$ (例20)

(2) $(\neg\alpha \to (\alpha \to \neg(\neg\alpha \to \alpha))) \to$
$((\neg\alpha \to \alpha) \to (\neg\alpha \to \neg(\neg\alpha \to \alpha)))$ $(A2)$

(3) $((\neg\alpha \to \alpha) \to (\neg\alpha \to \neg(\neg\alpha \to \alpha)))$ (M)(1)(2)

(4) $\neg\alpha \to \alpha$ (前提)

(5) $\neg\alpha \to \neg(\neg\alpha \to \alpha)$ (M)(3)(4)

(6) $(\neg\alpha \to \neg(\neg\alpha \to \alpha)) \to ((\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha)$ $(A3)$

(7) $(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$ (M)(5)(6)

(8) α (M)(4)(7)

例32(另证)

证明： $\vdash (\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$

证:

$$(1) \quad \vdash (\alpha \to \alpha) \to ((\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha) \qquad (例31)$$

$$(2) \quad \vdash \alpha \to \alpha \qquad (例21)$$

$$(3) \quad \vdash (\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha \qquad (M)$$

例33

证明： $\{\neg\alpha\rightarrow\beta,\ \neg\alpha\rightarrow\neg\beta\}\vdash\alpha$

证:

(1) $(\neg\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow(\neg\alpha\rightarrow\alpha))$ (例30)

(2) $\neg\alpha\rightarrow\beta$ (前提)

(3) $(\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow(\neg\alpha\rightarrow\alpha)$ (M)(1)(2)

(4) $\neg\alpha\rightarrow\neg\beta$ (前提)

(5) $\neg\alpha\rightarrow\alpha$ (M)(3)(4)

(6) $(\neg\alpha\rightarrow\alpha)\rightarrow\alpha$ (例32)

(7) α (M)(5)(6)

例34(补)

证明：$\vdash \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$

证:

由例22知：$\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$.

由定理11知：$\{\neg\alpha, \alpha\} \vdash \beta$.

由演绎定理知：$\alpha \vdash \neg\alpha \to \beta$.

再由演绎定理知：$\vdash \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$.

定理12

若$\Sigma \vdash \alpha_1$，$\Sigma \vdash \alpha_2$，$\cdots$，$\Sigma \vdash \alpha_n$，
且 α_1，α_2，$\cdots$，$\alpha_n \vdash \alpha$，
则$\Sigma \vdash \alpha$.

证:

由于α_1，α_2，$\cdots, \alpha_n \vdash \alpha$，由演泽定理得:

$\vdash \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \alpha$.

如下构造$\Sigma \vdash \alpha$的证明序列:

定理12(续)

$\vdots$

$\vdash \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} \vdots \\ \alpha_1 \end{array}\right\} \Sigma \vdash \alpha_1$$

$\alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$

$\vdots$

$\alpha_n \to \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} \vdots \\ \alpha_n \end{array}\right\} \Sigma \vdash \alpha_n$$

α

故$\Sigma \vdash \alpha$.

作业

p.508(p.101). 14(2)

15(3), (4)

16(2), (3)

[补充] 在P中证明:

(1) $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$.

(2) $\{\alpha \to \beta,\ \alpha \to \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$

谢 谢