赋值

王捍贫

北京大学信息科学技术学院软件研究所

等值演算

例35 证明: $(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \Longleftrightarrow (p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2$.

证: 因$p_0 \rightarrow p_1 \Longleftrightarrow (\neg p_0) \vee p_1$, 故:

$$
\begin{array}{lr}
\quad\ \ p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2) & \\
\Longleftrightarrow (\neg p_0) \vee (p_1 \rightarrow p_2) & (\text{定理20}) \\
\Longleftrightarrow (\neg p_0) \vee ((\neg p_1) \vee p_2) & (\text{定理21}) \\
\Longleftrightarrow (\neg p_0 \vee \neg p_1) \vee p_2 & (\text{结合律}) \\
\Longleftrightarrow \neg (p_0 \wedge p_1) \vee p_2 & (\text{否定律}) \\
\Longleftrightarrow (p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2 & (\text{定理20})
\end{array}
$$

范式

公式在等值意义下的一种标准形式。

定义23 —— 简单合取式和简单析取式:

- 由命题符号或命题符号的否定利用合取词$\wedge$组成的公式称为简单合取式.
- 由命题符号或命题符号的否定利用析取词$\vee$组成的公式称为简单析取式.

单个命题符号或它们的否定 ——简单析(合)取式.

$p, \neg q, p \wedge (\neg q), (p \wedge (\neg q) \wedge (\neg p))$ ——简单合取式.

$\neg\neg p,\ \neg(p \wedge (\neg q))$ ——不是简单析(合)取式.

析取范式和合取范式

- 由简单合取式的析取构成的公式称为析取范式.
- 由简单析取式的合取构成的公式称为合取范式.

单个简单析(合)取式既是合取范式也是析取范式.

$p \vee (\neg\, q) \vee (p \wedge (\neg\, q))$是析取范式但不是合取范式.

$\neg\neg p$既不是析取范式也不是合取范式

简单析(合)取式的性质

定理24 $\left(\text{重言式(矛盾式)情形}\right)$

(1) 一个简单析取式是重言式当且仅当
它同时包含一个命题符号及其否定式.

(2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当
它同时包含一个命题符号及其否定式.

证: 只证(1)

简单析(合)取式的性质的证明

$(\Leftarrow)$

设α为一个简单析取式，且α中包含命题符号p及其否定式$\neg p$。

由交换律和结合律知：可假设α中含有$p \vee (\neg p)$。

把α中除$p \vee (\neg p)$之外的部分记为α'，则由交换律和结合律知：$\alpha \iff \alpha' \vee (p \vee (\neg p))$.

由排中律知：$(p \vee (\neg p)) \iff 1$。

故α是一个重言式.

简单析(合)取式的性质的证明(续)

($\Rightarrow$)

设α为永真的简单析取式.

若它不同时包含一个命题符号和它的否定，考虑α中命题变元符号的如下指派:

给α中不带$\neg$号的命题变元符号p指派值0.
给α中带$\neg$号的命题变元符号q指派值1.

则α在此指派下取值0，与α为重言式矛盾.
故α中同时包含一个命题变元符号及其否定.

非重言(矛盾)的简单析(合)取式

定理25 对于命题符号组q_1, q_2, $\cdots$, q_n,

(1) 所含命题符号仅为q_1, q_2, $\cdots$, q_n的任意非矛盾的简单合取式有且仅有一个关于它们的成真指派.

(2) 所含命题符号仅为q_1, q_2, $\cdots$, q_n的任意非永真的简单析取式有且仅有一个关于它们的成假指派.

例如:

$\neg q_1 \wedge q_2 \wedge q_3$关于$(q_1, q_2, q_3)$的唯一成真指派是$(0, 1, 1)$.

$\neg q_1 \vee q_2 \vee q_3$关于$(q_1, q_2, q_3)$的唯一成假指派是$(1, 0, 0)$.

非重言(矛盾)的简单析(合)取式(续)

定理26 对于命题变元符号组q_1，q_2，$\cdots$，q_n的任意指派σ,

(1) 一定有一个非永真的简单析取式α以σ为成假指派, 且α中所含的命题符号有且仅有q_1，q_2，$\cdots$，q_n.

(2) 也一定有一个非矛盾的简单合取式β以σ为成真指派. 且α中所含的命题符号有且仅有q_1，q_2，$\cdots$，q_n.

例如:

以$(1,0,1)$为唯一成假指派的简单析取式为

$\neg q_1 \vee q_2 \vee \neg q_3$,

以$(1,0,1)$为唯一成真指派的简单合取式为

$q_1 \wedge \neg q_2 \vee q_3$.

析(合)取式的性质

定理27 对P中公式α_1，α_2，$\cdots$，α_n,

(1) 合取式$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ 的成真指派集为各个α_1，α_2，$\cdots$，α_n的成真指派集的交集,
合取式$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ 的成假指派集为各个α_1，α_2，$\cdots$，α_n的成假指派集的并集.

(2) 析取式$\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n$ 的成假指派集为各个α_1，α_2，$\cdots$，α_n的成假指派集的交集,
析取式$\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n$ 的成真指派集为各个α_1，α_2，$\cdots$，α_n的成真指派集的并集.

析取范式定理

定理28　P的任一个公式α都等值于一个析取范式β.

证：设α中的命题符号为q_1，q_2，$\cdots$，q_n.

若α为矛盾式，则$\alpha \Longleftrightarrow q_1 \wedge \neg q_1 \wedge q_2 \wedge \cdots \wedge q_n$

若α不为矛盾式，设α关于q_1，q_2，$\cdots$，q_n的所有成真指派为 σ_1，σ_2，$\cdots$，σ_m　$(0 < m \leq 2^n)$.

对于每个σ_i，存在命题符含且仅含q_1，q_2，$\cdots$，q_n的一个简单合取式α_i,使α_i以σ_i为成真指派(定理26)

由定理25知:α_i关于q_1，q_2，$\cdots$，q_n的成真指派仅为σ_i一个$(i = 1，2，\cdots m)$.

析取范式定理(续)

令$\beta = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m$.

由定理27知: β的成真指派为所有α_1, α_2, $\cdots$, α_n的成真指派的并集, 即为σ_1, σ_2, $\cdots$, σ_m.
从而$\alpha \Longleftrightarrow \beta$.

合取范式定理

定理28　P的任一个公式α都等值于一个合取范式β.

证:

由定理28知: $\neg\alpha$与某个析取范式等值, 即

$$\neg\alpha \Leftrightarrow (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m)$$

其中α_1, α_2, $\cdots$, α_m都是简单合取式.

所以$\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \neg(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m)$.

因$\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha$, 故$\alpha \Leftrightarrow \neg(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m)$.

合取范式定理

$$\neg(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m) \Leftrightarrow (\neg\alpha_1) \wedge (\neg\alpha_2) \wedge \cdots \wedge (\neg\alpha_m).$$

由于每个$\neg\alpha_i$等值一个简单析取式,

故$(\neg\alpha_1) \wedge (\neg\alpha_2) \wedge \cdots \wedge (\neg\alpha_m)$ 等值于一些简单析取式的合取。

即: α等值于一些简单析取式的合取.

注: 当然也可仿定理2.28证明.

例36

求$((\neg p_1) \vee p_2) \to p_3$的合取范式和析取范式.

解:范式定理的证明还指出了求范式的步骤:

(1) 列求真值表, 找出所有成真指派

p_1	p_2	p_3	$(\neg p_1) \vee p_2$	α	$\neg\alpha$
0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0

例36(续1)

(2) 先求析取范式.

$((\neg p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3$关于$p_1, p_2, p_3$的成真指派为

$<1,0,0>$, $<0,0,1>$, $<1,0,1>$, $<0,1,1>$,

$<1,1,1>$,

相应的简单析取式分别为:

$p_1 \wedge (\neg p_2) \wedge (\neg p_3)$, $(\neg p_1) \wedge (\neg p_2) \wedge p_3$,

$p_1 \wedge (\neg p_2) \wedge p_3$, $(\neg p_1) \wedge p_2 \wedge p_3$, $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$.

故: $((\neg p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3$的一个析取范式为:

$$\big(p_1 \wedge (\neg p_2) \wedge (\neg p_3)\big) \vee \big((\neg p_1) \wedge (\neg p_2) \wedge p_3\big) \vee$$
$$\big(p_1 \wedge (\neg p_2) \wedge p_3\big) \vee \big((\neg p_1) \wedge p_2 \wedge p_3\big) \vee \big(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3\big)$$

例36(续2)

(3) 再求合取范式.

为求$((\neg p_1)\vee p_2)\rightarrow p_3$的合取范式，要先求它的否定式的析取范式.

$\neg(((\neg p_1)\vee p_2)\rightarrow p_3)$ 的成真指派为

$<0,0,0>$，$<0,1,0>$和$<1,1,0>$

(正好为$((\neg p_1)\vee p_2)\rightarrow p_3$的成假指派)

故$\neg(((\neg p_1)\vee p_2)\rightarrow p_3)$的析取范式为:

$((\neg p_1)\wedge(\neg p_2)\wedge(\neg p_3))\vee((\neg p_1)\wedge p_2\wedge(\neg p_3))\vee(p_1\wedge p_2\wedge(\neg p_3))$

例36(续3)

故 $\quad ((\neg p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3$

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \neg\Big(\big(((\neg p_1) \wedge (\neg p_2) \wedge (\neg p_3)\big) \vee \\
&\qquad \big((\neg p_1) \wedge p_2 \wedge (\neg p_3)\big) \vee \big(p_1 \wedge p_2 \wedge (\neg p_3)\big)\Big) \\
&\Longleftrightarrow \neg\big((\neg p_1) \wedge (\neg p_2) \wedge (\neg p_3)\big) \wedge \\
&\qquad \neg\big((\neg p_1) \wedge p_2 \wedge (\neg p_3)\big) \wedge \neg\big(p_1 \wedge p_2 \wedge (\neg p_3 \\
&\Longleftrightarrow (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge \big(p_1 \vee (\neg p_2) \vee p_3\big) \wedge \\
&\qquad \big((\neg p_1) \vee (\neg p_2) \vee p_3\big)
\end{aligned}
$$

此即为$((\neg p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3$的一个合取范式.

据此得到如下求范式的过程。

复习

(1) 公式的等值

(2) 等值演算：

- 基本等值式.
- 等值替换.

(3) 等值意义下的标准形：范式.

- 从范式可以很容易看出其成真和成假指派。
- 每个公式都等价一个析取(合取)范式。

求范式的过程

(1) 求α的析取范式的过程

- 求出α的所有成真指派σ_1，σ_2，$\cdots$，σ_m。
- 对于每个σ_i，写出以σ_i为成真指派的简单合取式α_i $(1 \leq i \leq m)$。
- 则$\beta = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m$即为所求。

(2) 求α的合取范式的过程 (对比(1)和例36)

- 求出α的所有成假指派σ_1，σ_2，$\cdots$，σ_m。
- 对于每个σ_i，写出以σ_i为成假指派的简单析取式α_i $(1 \leq i \leq m)$。
- 则$\beta = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_m$即为所求。

用等值演算求范式

例36 求$((\neg p_1)\vee p_2)\to p_3$的合取范式和析取范式.

解: $((\neg p_1)\vee p_2)\to p_3$

$$\Longleftrightarrow \neg\big((\neg p_1)\vee p_2\big)\vee p_3$$

$$\Longleftrightarrow \big((\neg\neg p_1)\wedge(\neg p_2)\big)\vee p_3$$

$$\Longleftrightarrow \big(p_1\wedge(\neg p_2)\big)\vee p_3 \qquad \text{析取范式}$$

$$\Longleftrightarrow (p_1\vee p_3)\wedge\big((\neg p_2)\vee p_3\big) \qquad \text{合取范式}$$

用等值演算求范式的步骤

(1) 去掉→;

(2) 内移¬;

(3) 去掉¬¬;

(4) 用分配律整理成析取范式(合取范式)

例37

求$((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$ 的合取范式和析取范式.

解:

$$
\begin{aligned}
& ((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p \\
\Longleftrightarrow\ & \neg\left((p \vee q) \rightarrow r\right) \vee p \\
\Longleftrightarrow\ & \neg\left(\neg (p \vee q) \vee r\right) \vee p \\
\Longleftrightarrow\ & \left(\neg\neg (p \vee q) \wedge (\neg r)\right) \vee p \\
\Longleftrightarrow\ & \left((p \vee q) \wedge (\neg r)\right) \vee p \\
\Longleftrightarrow\ & \left((p \vee q) \vee p\right) \wedge \left((\neg r) \vee p\right) && \text{(合取范式)} \\
\Longleftrightarrow\ & (p \vee q) \wedge \left((\neg r) \vee p\right) && \text{(合取范式)} \\
\Longleftrightarrow\ & \left(p \wedge (\neg r)\right) \vee \left(q \wedge (\neg r)\right) \vee p \vee \left(q \wedge p\right) && \text{(析取范式)} \\
\Longleftrightarrow\ & \left(p \wedge (\neg r)\right) \vee \left(q \wedge (\neg r)\right) \vee p && \text{(析取范式)}
\end{aligned}
$$

注

(1) 范式不是唯一的。

(2) "主范式" 的唯一性*。

(3) 卡诺图。

(4) $\vee$与$\wedge$的对偶。

*参见：耿素云,屈婉玲, **离散数学**,高等教育出版社，1998，p35

联结词完全集的另外证明

P中只含联结词$\neg, \vee, \wedge$ 的公式称为限制性公式.

每个n元真值函数都可由n元限制性命题表示.

证:

设f是一个n元真值函数,即$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.
p_1，p_2，$\cdots$，p_n是n个命题变元.

(1) 若f是恒为0的函数, 则f可由

$$p_1 \wedge \neg p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$$

表示.

联结词完全集的另外证明(续)

(2) 若f不恒为0，在f的定义域的2^n个元素中，列出所有使f 取值为1的那些元素:

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_m,\quad (1 \le i \le m)$$

对每个$\alpha_i(1 \le i \le m)$，令α_i是由$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$组成的一个简单合取式，使得α_i 关于$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$以σ_i为唯一的成真指派. 则f由限定性命题公式

$$\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m$$

表示.

作业

p.509(p.102). 23 (1)(5)(7)

25 (1)(2)(3)

26

谢 谢