第二十七章 一阶谓词演算

第7节 $N_{\mathfrak{L}}$的可靠性与和谐性

王捍贫

北京大学信息科学技术学院

软件研究所理论实验室

内容提要

- 语义推论
- 可靠性及其证明
- 和谐性及其证明
- 完全性

公式集的满足

设Σ是$\mathfrak{L}$的一个公式集，I是$\mathfrak{L}$一个解释．σ是$\mathfrak{L}$在I中的一个指派，若对任意$\alpha \in \Sigma$，都有$I \models_{\sigma} \alpha$，则称$\sigma$在$I$中满足$\Sigma$，记为$I \models_{\sigma} \Sigma$

语义推论

设Σ, α分别为$\mathfrak{L}$中的公式集与公式. 若对$\mathfrak{L}$的任一解释I及$\mathfrak{L}$在I中的任一 指派σ, 当$I \models_{\sigma} \Sigma$时, 就有$I \models_{\sigma} \alpha$, 则称$\alpha$为$\Sigma$的一个 语义推论, 记为$\Sigma \models \alpha$.

$\mathrm{N}_{\mathfrak{L}}$的可靠性

设Σ, α分别是$\mathfrak{L}$中的公式集与公式.

(1) 若$\Sigma \vdash_{\mathrm{N}_{\mathcal{L}}} \alpha$, 则$\Sigma \models \alpha$.

(2) 若$\vdash_{\mathrm{N}_{\mathcal{L}}} \alpha$, 则$\models \alpha$.

证: (2)可由(1)立证. 下面只证(1).

因$\Sigma \vdash_{\mathrm{N}_{\mathcal{L}}} \alpha$, 故在$\mathrm{N}_{\mathcal{L}}$中存在前提 Σ下推出α的证明序列:

$$\Sigma_1 \vdash \alpha_1, \Sigma_2 \vdash \alpha_2, \cdots, \Sigma_n \vdash \alpha_n \ (\Sigma_n = \Sigma, \alpha_n = \alpha)$$

下证: 对任意i: $1 \leq i \leq n$, $\Sigma_i \models \alpha_i$ $\qquad (*)$

(1) 当$i = 1$时, $\Sigma_1 \vdash \alpha_1$是由$(\in)$得到的, 即$\alpha_1 \in \Sigma_1$. 故$\Sigma_1 \models \alpha_1$.

(2) 设$(*)$对$< k$的所有i成立，下证当$i = k$时也成立.

(2.1) 若$\Sigma_k \vdash \alpha_k$是由$(\in)$得到的，则$\alpha_k \in \Sigma_k$. 从而$\Sigma_k \models \alpha_k$.

(2.2) 若$\Sigma_k \vdash \alpha_k$是由$(\neg-)$得到的. 由归纳假设知，$\Sigma_k, \neg\alpha_k \models \beta$且$\Sigma_k, \neg\alpha_k \models \neg\beta$.
设$I \models_{\sigma} \Sigma_k$. 若$I \not\models_{\sigma} \alpha_k$，则$I \models_{\sigma} \neg\alpha_k$. 故$I \models_{\sigma} \Sigma_k \cup \{\neg\alpha\}$. 从而$I \models_{\sigma} \beta$且$I \models_{\sigma} \neg\beta$，矛盾. 故$I \models_{\sigma} \alpha_k$.

$\vdots$

(2.3)若$\Sigma_k \vdash \alpha_k$是由$(\forall-)$得到的，则α_k具有形式$\beta(x/t)$，其中t对x在β中自由．由归纳假设知$\Sigma_k \models \forall x\beta$.

设$I \models_{\sigma} \Sigma_k$，则$I \models_{\sigma} \forall x\beta$．从而对任意$a \in D$，$I \models_{\sigma(x/a)} \beta$．特别地，$I \models_{\sigma(x/t^{\sigma})} \beta$．由定理3.15知：$I \models_{\sigma} \beta(x/t)$.

(2.4)若$\Sigma_k \vdash \alpha_k$是由$(\forall+)$得到的，则α_k具有形式$\forall x\beta$，其中x不在Σ_K的任何公式中自由出现．由归纳假设知$\Sigma_k \models \beta$.

设$I \models_{\sigma} \Sigma_k$．要证$I \models_{\sigma} \forall x\beta$，只要证：对任意$a \in D$，$I \models_{\overline{\sigma(x/a)}} \beta$．由于$x$不在$\Sigma_k$的任何公式中自由出现，由定理3.14知：$I \models_{\overline{\sigma(x/a)}} \Sigma_k$．又由于$\Sigma_k \models \beta$，故$I \models_{\overline{\sigma(x/a)}} \beta$.

(2.5)若$\Sigma_k \vdash \alpha_k$是由($\exists-$)得到的，则Σ_k 具有形式$\Gamma \cup \{\exists x\beta\}$，且$x$不在$\Gamma \cup \{\alpha_k\}$的任何公式中自由出现．由归纳假设知$\Gamma, \beta \models \alpha_k$.

设$I \models_{\sigma} \Sigma_k$．则$I \models_{\sigma} \Gamma$ 且$I \models_{\sigma} \exists x\beta$．从而存在$a \in D$使得 $I \models_{\sigma(x/a)} \beta$．由于$x$不在$\Gamma$的任何公式中自由出现，故$I \models_{\sigma(x/a)} \Gamma$．因此$I \models_{\sigma(x/a)} \alpha_k$．又由于且$x$不在$\alpha_k$中自由出现．故$I \models_{\sigma} \alpha_k$.

(2.6)若$\Sigma_k \vdash \alpha_k$是由$(\exists+)$得到的，则α_k具有形式$\exists x\beta$. 由归纳假设知$\Sigma_k \models \beta(x/t)$. 其中$t$对$x$在$\beta$中自由.

设$I \models_{\sigma} \Sigma_k$，则$I \models_{\sigma} \beta(x/t)$.

由替换定理知：$I \models_{\sigma(x/t^\sigma)} \beta$. 令$a = t^\sigma$，则$I \models_{\sigma(x/a)} \beta$.

故$I \models_{\sigma} \exists x\beta$

归纳证毕.

$\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}$的和谐性

对任何非逻辑符号集$\mathfrak{L}$，$\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}$是和谐的，即：$\mathfrak{L}$中不存在公式$\alpha$使得 $\vdash_{\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}} \alpha$且$\vdash_{\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}} \neg\alpha$.

证： 若不然，存在$\mathfrak{L}$中公式α使得$\vdash_{\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}} \alpha$ 且$\vdash_{\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}} \neg\alpha$，则: $\models \alpha$，且$\models \neg\alpha$. 任取定$\mathfrak{L}$的一个解释I及$\mathfrak{L}$在I中的一个指派α，则$I \models_{\sigma} \alpha$，且$I \models_{\sigma} \neg\alpha$，矛盾.

$\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}$的完全性

对任何非逻辑符号集$\mathfrak{L}$，$\mathbf{N}_{\mathfrak{L}}$是完全的，即:

(1) 若$\Sigma \models \alpha$，则$\Sigma \vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha$.

(2) 若$\models \alpha$，则$\vdash_{\mathbf{N}_{\mathcal{L}}} \alpha$.

该定理的证明有两种方法：哥德尔的经典方法和Hekin的常量构造法.

谢　谢