Zusammenfassung für Zeichnen von Graphen

Sommersemester 2014

von Dagmar Sorg

Divide and Conquer

1 Binärbäume

Die Tiefe eines Knotens ($depth(v)$) ist der Abstand von der Wurzel bis v.
Der *Divide and Conquer*-Ansatz wird verwendet, um ein geradliniges Gitterlayout für geradlinige Repräsentationen zu finden. Dies funktioniert für Binärbäume wie folgt:

1. Bestimmung des Teillayouts für $T_l(v)$
2. Bestimmung des Teillayouts für $T_r(v)$
3. Zusammenfügen zu Gesamtlayouts

1.1 Baumdurchläufe

Es gibt drei Arten von Baumduchläufen:

1. Preorder
2. Inorder
3. Postorder

Ein Gitterlayout hat ausschließlich ganzzahlige Koordinaten

Geradlinige Repräsentationen sind Standardrepräsentationen mit geraden Kanten

Ein Layout ist vollatändig bestimmt, wenn für jeden Konten $v \in V$ eine x-Koordinate ($x(v)$) und eine y-Koordinate ($y(v)$) gegeben sind.

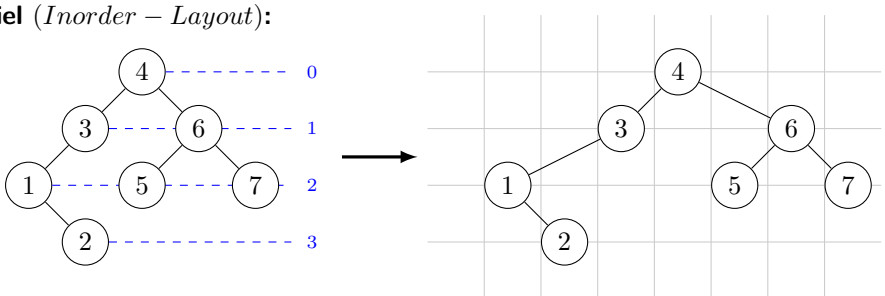
1.2 Definition eines Gitterlayouts

Für jeden Knoten ist der Punkt im Layout folgendermaßen definiert:

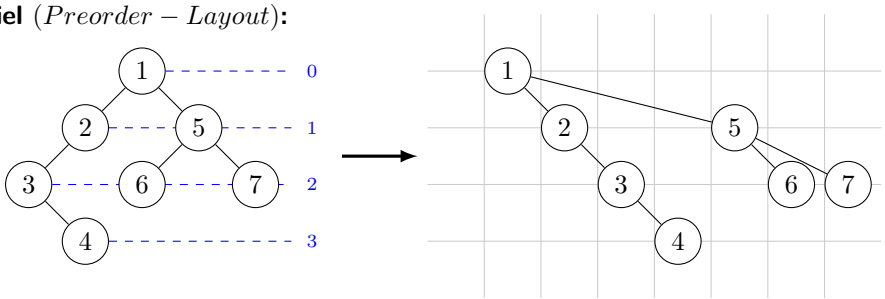
$$\begin{aligned} x(v_i) &= i \\ y(v_i) &= -depth(v_i) \end{aligned}$$

Dieses Layout ist *abwärts*, *kreuzungsfrei* und kann in Linearzeit bestimmt werden.

Beispiel $(Inorder - Layout)$**:**



Beispiel $(Preorder - Layout)$**:**



Nachteile:

1. Breite $= n - 1$
2. Kantenlänge $\mathcal{O}(n)$
3. Knoten sind nicht zentriert über Nachfolgern

Problem 1 und 2 können durch Berechnung relativer Koordinaten behoben werden:

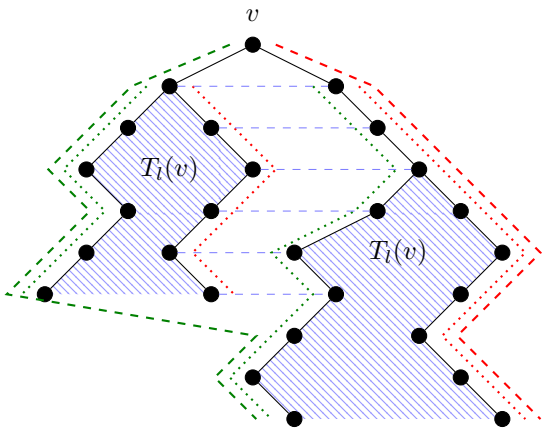
- Berechnung der Koordinaten der Teilbäume getrennt
- Zusammenlegen der Layouts, sodass die *umgebenden Rechtecke* Abstand 2 oder 3 haben
- Elterknoten wird zentriert über den Nachfolgern platziert (bzw. eins weiter nach rechts/links, wenn es wichtig ist, um welchen Nachfolger es sich handelt)

$\Rightarrow$ immer noch in Linearzeit bestimmbar, aber immer noch **zu breit**

$\Rightarrow$ verwenden von **Konturen** statt Rechtecken:
Platzieren der Teilbäume so, dass der minimale horizontale Abstand zweier Knoten de gleichen TIefe 2 (bzw. 3) ist

1.2.1 Bestimmung eines Layouts mithilfe von Konturen

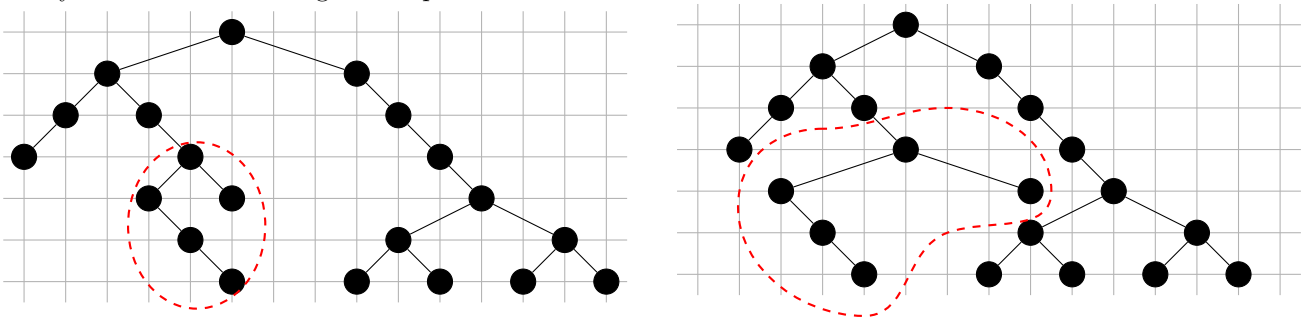
- Abstand zwischen zwei Knoten mit gleicher Tiefe ist zwei (drei, falls Teilbaumwurzeln sonst ungeraden Abstand haben)
- zur Bestimmung in Linearzeit (Bestimmung pro Knoten):
  1. Berechnung des x-Offsets (relative Position zum Vorgänger)
  2. Speichern der linken und rechten Kontur seines Teilbaumes als eine einfach verkettete Liste
- Algorithmus von *Reingold und Tilford* arbeitet in zwei Schritten:
  1. *postorder*: zur Bestimmung von Konturen und x-Offsets



     - Abarbeiten von $T_l(v)$ und $T_r(v)$
     - Absteigen in den Konturen beider Teilbäume parallel, bis die Konturen des niedrigeren Teilbaums endet
     - linke (rechte) Kontur von $T(v)$ besteht aus v, der linken (rechten) Kontur von $T_l(v)$ ($T_r(v)$) und dem (falls vorhanden) linken (rechten) Kontur von $T_r(v)$ ($T_l(v)$)
     - Bestimmen des Mindestabstandes $d \geq 2$ der Nachfolger von v aus den x-Offsets der rechten Kontur von $T_l(v)$ und der linken Kontur von $T_r(v)$
     - Erhöhen von d_v um 1, falls ungerade
     - Setzten des x-Offsets der Nachfolger von v (wenn vorhanden) auf $-\frac{d_v}{2}$ bzw. $+\frac{d_v}{2}$
  2. *preorder*: Kalkulation der x-Koordinaten mithilfe des Zusammennehmens der x-Offsets
     - Bearbeitung von $T(v)$: x ist die Koordinate des Vorgängers (oder $x = 0$, falls v die Wurzel ist)
     - $x(v) = x + x - Offset(v)$
     - Algorithmus von Reingold/Tilford (in Linearzeit) berechnet:
       * geradliniges Gitterlayout, das tiefengeschichtet und kreuzungsfrei ist
       * Knoten mit selber Tiefe haben Abstand ≥ 2
       * Knoten sind über Nachfolgern zentriert
       * linke/rechte Nachfolger liegen strikt links/rechts von ihrem Vorgänger
       * identische Teilbäume sind gleich ausgelegt

     $\Rightarrow$ Binärbaumlayout*

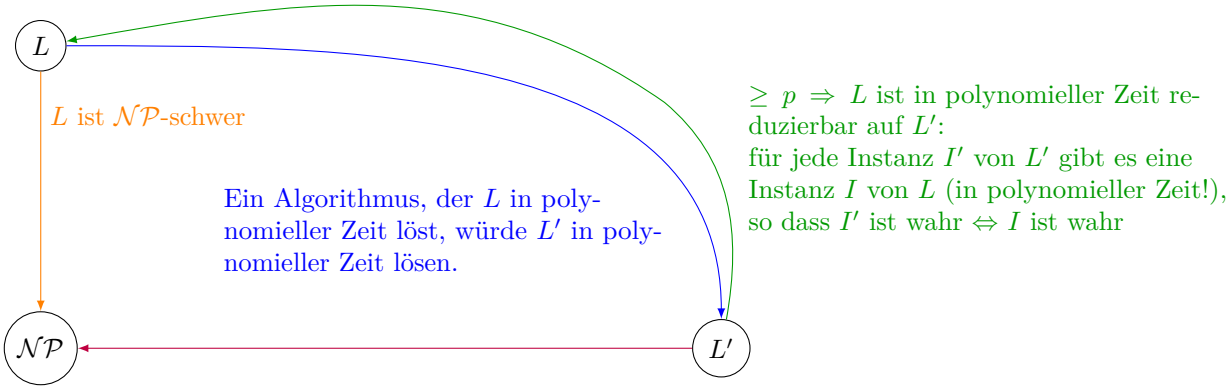
* Das Layout ist nicht unbedingt Platzoptimal:



1.2.2 Die Breitenminimierung von Binärbäumen ist $\mathcal{NP}$-schwer.

Beweisidee:

Bemerkung: Das Problem ist in $\mathcal{P}$, falls keine ganzzahligen Koordinaten (Gitterlayout) erforderlich sind.
Allgemeine Idee:

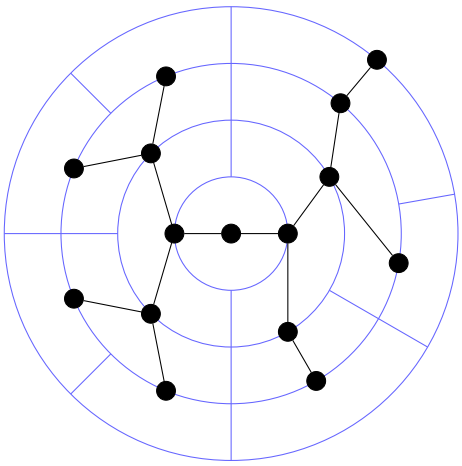


bekannt: gibt es einen Polynomial-Zeit-Algorithmus, der L' löst, können alle Probleme in $\mathcal{NP}$ in Polynomial-Zeit gelöst werden

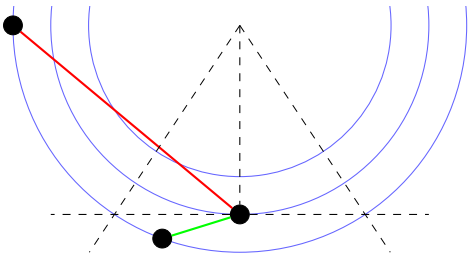
Hier wird gezeigt, dass sogar für feste Werte ($\mathcal{W} = 24$) das Problem in $\mathcal{NP}$ liegt. Das Problem ist sicher in $\mathcal{NP}$, da sich jedes gegebene Layout auf die Eigenschaften eines Binärbaumes und die Breite prüfen lässt.
Ablauf des Beweises:

- Reduzierung von 3-SAT auf Binärbaum mit minimaler Breite mithilfe von $F = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ als 3-SAT-Formel mit
  - Klauseln $C_i = y_{i,1} \vee y_{i,2} \vee y_{i,3}$
  - Literalen $y_{i,j} \in \{x_1, \ldots, x_n, \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\}$
- Konstruktion der Instanz $T(F)$ für das Layoutproblem, die genau dann ein Layout mit Breite $\mathcal{W} \leq 24$ hat, falls F erfüllbar ist
- Erzeugung von Teilbäumen für Variablen, Literale und Klauseln
- Teilbäume der drei in der Klausel C_i auftretenden Literale werden zu $T(C_i)$ zusammengefügt (mithilfe von einer ausreichend langen Kette von Knoten, die beim mittleren Literal eingefügt wird und an der Wurzel des nächsten Baumes endet)
- Beweis, dass falls F gilt auch $T(F)$ gilt und falls F nicht gilt auch $T(F)$ nicht gilt

1.3 Radiales Layout



- der Radius entspricht der Tiefe des Knotens
- rekursive Zuweisung der Position jeden Knotens, mit dem ihm noch verbleibenden Kreisteil
- für ein kreuzungsfreies Layout wird der für die Rekursion verfügbare Platz durch die Tangente der Teilbaumwurzel beschränkt
- Vergleich Algorithmus 1. (berechnet in linearer Zeit ein kreuzungsfreies Layout)



2 Serien-parallele (SP) Graphen

Ein *SP*-Graph ist:

- gerichtet
- besteht entweder aus zwei Knoten s, t und der Kante $\{s, t\}$ oder
- aus zwei *SP*-Graphen G_1, G_2 mit s_1, s_2, t_1, t_2, entstanden aus

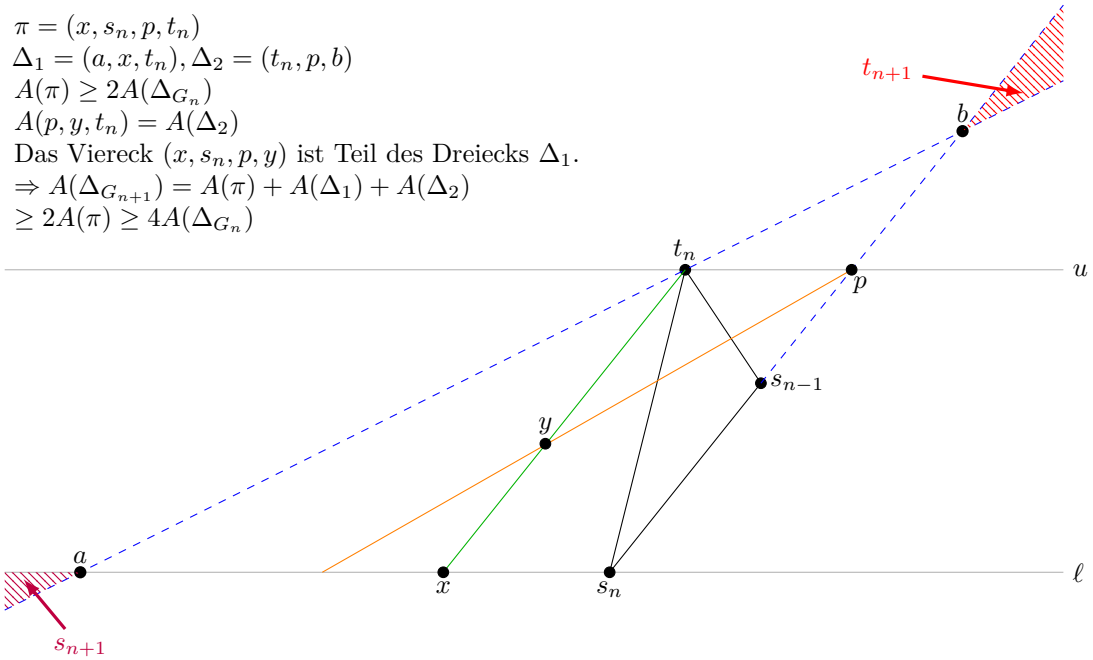
  serielle Komposition: t_1, s_2 werden verschmolzen, $s_1 \to s, t_2 \to t$

  parallele Komposition: jeweils s_1, s_2 und t_1, t_2 werden zu s, t verschmolzen

Fakten:

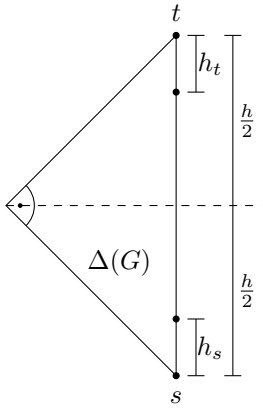
- Jeder *SP*-Graph ist *azyklisch* und *planar*.
- Jedes kreuzungsfreie Aufwärtslayout für geordnete *SP*-Graphen benötigt im schlechtesten Fall eine Gitter, das exponentiell groß in der Anzahl der Knoten des Graphen ist.
  Beweis:

$\pi = (x, s_n, p, t_n)$
$\Delta_1 = (a, x, t_n), \Delta_2 = (t_n, p, b)$
$A(\pi) \geq 2A(\Delta_{G_n})$
$A(p, y, t_n) = A(\Delta_2)$
Das Viereck (x, s_n, p, y) ist Teil des Dreiecks Δ_1.
$\Rightarrow A(\Delta_{G_{n+1}}) = A(\pi) + A(\Delta_1) + A(\Delta_2)$
$\geq 2A(\pi) \geq 4A(\Delta_{G_n})$



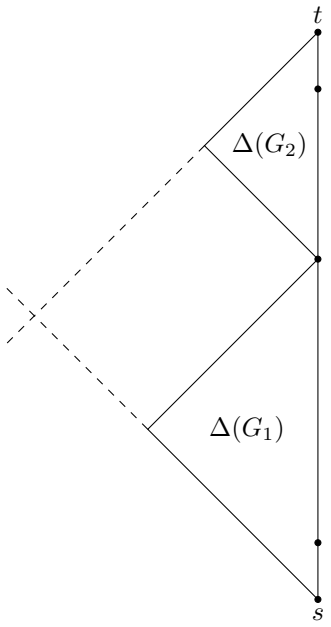
2.1 Divide-and-Conquer Ansatz zur Erstellung von *SP*-Graphen auf einem Gitter der Größe $\mathcal{O}(n^2)$

- im Dekompositionsbaum stehen Q-Knoten nur rechts von einem P-Knoten (***linkslastig***)
- Algorithmus:



1. Layout von G liegt in einem rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreieck Δ_G, mit vertikaler Basis und linksliegenden Scheitel
2. auf der unteren / oberen Ecke von $\Delta(G)$ liegt die Quelle / Senke von G aber kein Knoten liegt auf den linken Ecken von $\Delta(G)$
3. falls v Nachbar der Quelle / Senke von G ist, dann liegt kein anderer Knoten rechts der Senkrechten durch v und unterhalb der fallenden / oberhalb der steigenden Diagonalen durch v

Serielle Komposition:



Parallele Komposition:

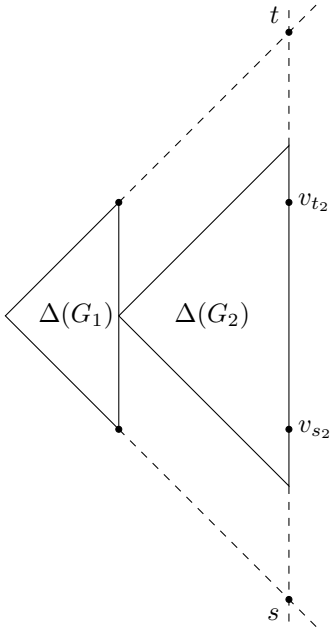
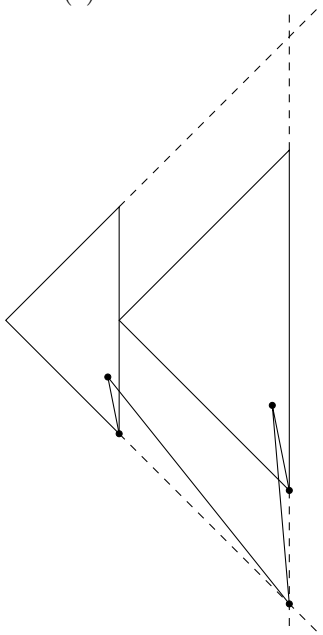


Bild (1):



Aus den Höhenunterschieden und Höhen zu den Komponenten können mittels eines *preorder* Durchlaufes durch den Dekompositionsbaum die absoluten Koordinaten ermittelt werden (ähnlich wie bei x-Offsets der Binärbäume).
Der Algorithmus erstellt in Linearzeit aus einem linkslastig geordneten Dekompositionsbaum eines einfachen *SP*-Graphes ein Gitterlayout, das

- kreuzungsfrei ist (Kreuzungen können nur bei paralleler Komposition entstehen): aus (3.) folgt das Bild (1)
- höchstens quadratische Fläche benötigt: per Induktion beweisbar (alle Teile des Graphen G liegen in seinem Dreieck → bleibt zu zeigen, dass die Höhe von $\Delta(G)$ linear in der Anzahl der Knoten ist).

- Schönere Darstellung mit *Sichtbarkeitsrepräsentation*
- Erweiterung auf die Darstellung mit *orthogonalen Buskanten*

Inkrementelle Konstruktion

Bei dieser Art der Konstruktion entsteht der Graph nach und nach, d.h. ein Anfangslayout wird Stück für Stück erweitert und nicht zum Schluss als ein Ganzes berechnet.
Jeder der Layoutalgorithmen besteht zusätzlich aus einem Vorverarbeitungsschritt, zum Festlegen einer Reihenfolge mit bestimmten Eigenschaften, die für den eigentlichen Algorithmus wichtig sind.

1 Orthogonale Gitterlayouts

- jeder Knoten hat höchstens Grad 4
- Algorithmus von Biedl und Kant (vier Schritte):
  1. Zerlegung des Graphen in Komponenten
  2. Bestimmung der Reihenfolge für die Knoten jeder Komponente
  3. inkrementelle Bestimmung des Layouts für jede Komponente: die Knoten werden in ihrer Reihenfolge in das Layout eingefügt
  4. Kombinierung der Layouts der einzelnen Komponenten
- der Graph wird zuerst in hinreichend zusammenhängende Teilgraphen zerlegt

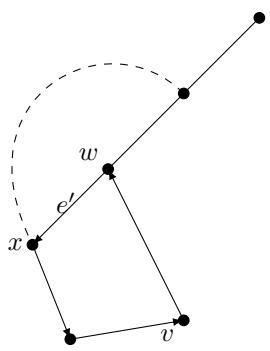
1.1 Zweifache Zusammenhangskomponenten

- Zwei Kanten in einem ungerichteten Graphen heißen *biconnected*, wenn sie auf einem einfachen Kreis liegen.
- eine zweifache Zusammenhangskomponente wird auch als *Block* bezeichnet
- aus einem zweifach zusammenhängenden Graphen müssen mindestens zwei Knoten entfernt werden, damit der Graph nicht mehr zusammenhängend ist
- die zweifachen Zusammenhangskomponenten können in Linearzeit berechnet werden, Vergleich Algorithmus 2.

  Beweisidee:
  per Induktion über die Anzahl der Kantendurchläufe:
  - eine Kante heißt *offen*, wenn noch kein Backtracking erfolgt ist
  - eine Kante heißt *fertig*, falls Backtracking erfolgt ist
  - eine Komponente heißt offen / fertig, falls ihre erste Kante offen / fertig ist
  - G_t ist der durch die nummerierten Kanten induzierte Teilgraph nach t Kantendurchläufen
  - offene Zusammenhangskomponenten werden als $G_t^{(i)}$, seine ersten Kanten als $E_t^{(i)}$ mit $e_i^{(i)}, 1 \leq i \leq k_t$ in der Reihenfolge, wie sie markiert wurden
  - zu Zeigen sind die folgenden Invarianten:
    1. alle Kanten einer fertigen Zusammenhangskomponenten zeigen auf die erste Kante der Komponente
    2. auf dem Stack C liegen (von unten nach oben) $e_t^{(1)}, \ldots, e_t^{(k_t)}$
    3. auf dem Stack S bilden die Kanten aus $E_t^{(1)}, \ldots, E_t^{(k_t)}$ Intervalle (in dieser Reihenfolge)

– alle Aussagen sind am Anfang richtig, bleibt zu zeigen dass sie auch für $t > 0$, nach $t-1$ Durchläufen gelten (zwei Fälle):

1. Vorwärtsdurchlauf:

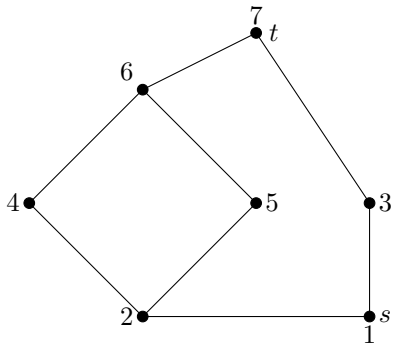


- ▶ e ist Baumkante
  $\Rightarrow w$ ist Knoten vom Grad 1 in G_t
  $\Rightarrow e$ ist einzige Kante einer neuen offenen Komponente
  $\Rightarrow$ alle Invarianten gelten
- ▶ e ist Rückwärtskante zum Knoten w
  $\Rightarrow e$ bildet zusammen mit dem letzten (bei w beginnenden) Teilstück des Weges der offenen Kanten einen einfachen Kreis
  $\Rightarrow$ alle Kanten auf diesem Kreis gehören zur gleichen Zusammenhangskomponente von G_t
  $\Rightarrow$ alle nach e durchlaufenen Kanten werden aus C entfernt
  $\Rightarrow$ alle Invarianten gelten

2. Backtracking:
   - ▶ e wird fertig
     $\Rightarrow$ durch 2. Invariante: e erste Kante der offenen Komponente $\Leftrightarrow$ sie liegt oben auf C
   - ▶ es gibt keine Quer- oder Vorwärtskanten in der ungerichteten Tiefensuche
     $\Rightarrow$ die Zusammenhangskomponente kann nicht mehr größer werden
     $\Rightarrow$ Zusammenhangskomponente ist fertig
   - ▶ durch 3. Invariante werden durch die **repeat**-Schleife die richtigen Kanten von S entfernt
     $\Rightarrow$ die Invarianten gelten

– Linearzeit: jede Kante wird höchstens einmal auf C und S gelegt

1.2 Knotenreihenfolge bestimmen (2. Schritt)



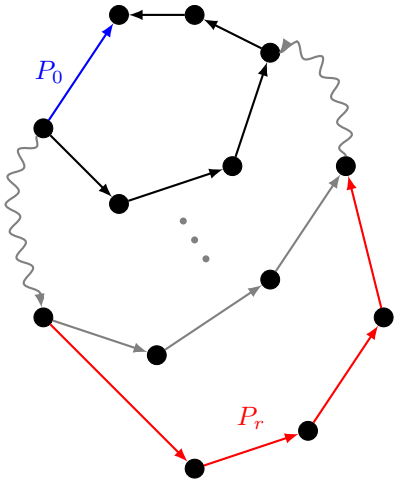
- der Algorithmus nutzt die *st-Ordnung* als Reihenfolge der einzufügenden Knoten
- eine *st-Ordnung* ist wie folgt definiert:

$$\exists\ 1 \leq i < j < k \leq n \text{ mit } \{v_i, v_j\}, \{v_j, v_k\} \in E$$

- $G = (V, E)$, zweifach zusammenhängender Graph $\Leftrightarrow \exists$ zu jeweils zwei Knoten $s \neq t \in V$ eine st-Ordnung

- durch eine *Orientierung* erhält jede Kante in einem Graphen eine Richtung
- eine st-Orientierung ist azyklisch mit s, t als einzige Quelle/Senke
- eine st-Ordnung kann mithilfe von *topologischer Sortierung* aus einer $st-$Orientierung in Linearzeit berechnet werden

1.2.1 Ohrendekomposition

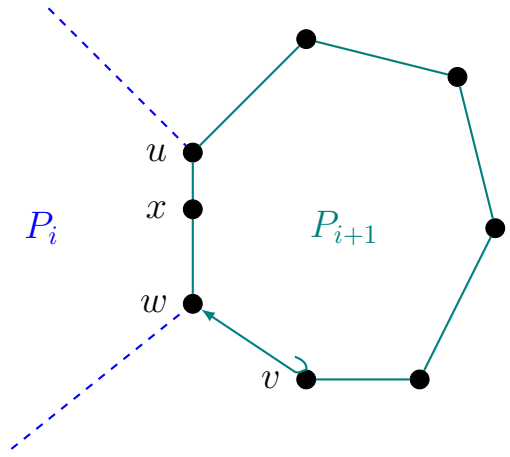


- die Folge $D = (P_0, \dots, P_r)$ von (offenen) Pfaden heißt *(offene) Ohrendekomposition*, falls
  - für $G_i = (V_i, E_i)$ gilt $V_i = \bigcup_{j=0}^{i} V(P_j)$
    und $E_i = \bigcup_{j=0}^{i} E(P_j)$, $0 \leq 1 \leq r$
  - $E(P_0), \dots, E(P_r)$ ist eine Partition von E
  - für alle $P_i = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k), 1 \leq i \leq r$ gilt
    - $\{v_0, v_k\} \subseteq V_{i-1}$
    - $\{v_1, \dots, v_{k-1}\} \cap V_{i-1} = \emptyset$
- eine Ohrendekomposition beginnt mit der Kante $\{s,t\} \in E$, wenn $P_0 = (s, \{s,t\}, t)$

- für jeden zweifach zusammenhängenden Graphen gibt es für jede Kante $e = \{s,t\}$ eine Ohrendekomposition, die mit e beginnt
- es kann in Linearzeit eine st-Orientierung aus einer offenen Ohrendekomposition konstruiert werden, die mit $\{s,t\}$ beginnt
  Beweis:
  Durch Konstruktion:
  - aus $P_0, \dots, P_r$, beginnend mit $\{s,t\}$, wird eine st-Orientierung konstruiert, indem
    - P_0 von s nach t orientiert wird
    - $P_i = (u, \dots, w), 1 \leq i, \leq r$ von u nach w orientiert wird, falls u in der von $P_0, \dots, P_{i-1}$ induzierten partiellen Ordnung vor w liegt, sonst umgekehrt
-] Weg von der Ohrendekomposition zu einer st-Ordnung:

$$\text{offene Ohrenkomposition} \xrightarrow[\text{Orientierung}]{\substack{\text{Erweiterung der Knoten} \\ \text{(ear by ear)}}} st\text{-Orientierung} \xrightarrow[\text{topologische Sortierung}]{} st\text{-Ordnung}$$

- Bestimmung einer Ohrendekomposition durch einen *Tiefensuchbaum*:
  - Baumkanten $\{v,w\}$ werden als $v \to w$ bezeichnet
  - Rückwärtskanten $\{v,w\}$ werden als $v \hookrightarrow w$ bezeichnet
  - ein uv-Pfad mit höchstens Baumkanten wird als $u \overset{*}{\to} v$ bezeichnet
  - Konstruktion der Ohrendekomposition:
    1. P_0 ist das Anfangsohr
    2. $\exists v \hookrightarrow w \notin E_i$ nach Konstruktion von $P_0, \dots, P_i, i \geq 0$
       $\Rightarrow P_{i+1}$ ist wie folgt definiert $(v, w, x \in V)$:



- $w, x \in V_i$
- $v \hookrightarrow w \notin E$
- $w \to x$
- $x \overset{*}{\to} v$
- ist u der letzte Knoten auf $x \overset{*}{\to} v$ mit $u \in V_i$ ($u = v$ ist möglich)
  $\Rightarrow P_{i+1} = u \overset{*}{\to} v \hookrightarrow w$
- aus $w \to x \overset{*}{\to} u$ folgt, dass P_{i+1} offen ist (P_{i+1} ist *das Ohr zu* $v \hookrightarrow w$, *trivial*, falls $u = v$)

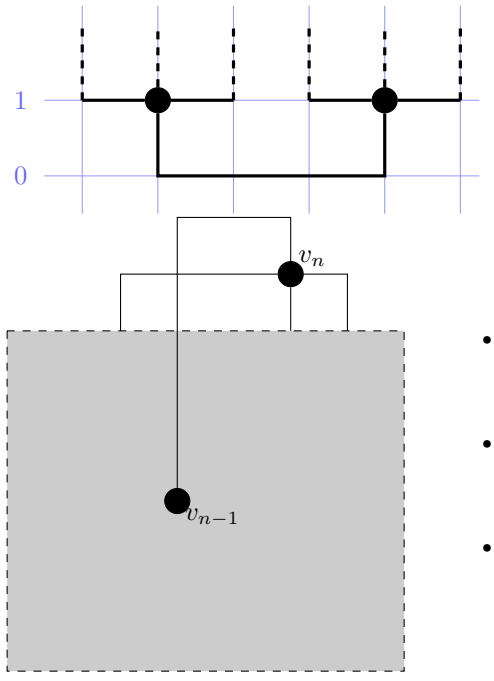
- eine offene Ohrendekomposition $D(T) = (P_0, \ldots, P_r)$ überdeckt $G = (V, E)$ vollständig
  $\Rightarrow V = V_r, E = E_r$:
  Beweisidee:
  Mit der zweifach Verbundenheit des Graphen kann man durch Konstruktion mithilfe eines Knotens $u \notin V_r$ einen Widerspruch herbei führen.
- die Ohren werden aufgrund der Orientierung der zugehörigen Baumkante orientiert, in der Reihenfolge von $D(T)$
- die Dekomposition definiert für jedes $i = 0, \ldots, r$ eine partielle Ordnung (reflexiv, transitiv, antisymmetrisch, nicht für alle Paare definiert - sonst total)

$$\prec_i: \{v, w\} \in E_i \text{ von } v \text{ nach } w \text{ orientiert } \Rightarrow v \prec_i w$$

- die Orientierung von $D(T)$ liefert eine st-Orientierung von G
- die erhaltene Ordnung von V_i ist eine lineare Erweiterung von $\prec_j$ für alle $0 \leq j \leq i$ ($\prec_j \subseteq \prec_i$)
  $\Rightarrow$ die Ordnung ist eine st-Ordnung von G
- Vergleich Algorithmus 3.

1.3 Layout einer Komponente (3. Schritt)

- gegeben sind der zweifach zusammenhängende Graph G und die st-Ordnung von G
- für jeden Knoten gilt $d_g^{\leftarrow}(v) = \#$ adjazenter Vorgänger
- für jeden Knoten gilt $d_g^{\rightarrow}(v) = \#$ adjazenter Nachfolger



- $d(v) = d_g^{\leftarrow}(v) + d_g^{\rightarrow}(v)$
- $1 \leq d_g^{\leftarrow}(v)$
- $3 \leq d_g^{\rightarrow}(v)$
- Plazierung der ersten beiden Knoten (**links**)

- für alle adjazenten Nachfolger werden jeweils die Gittervertikalen durch v sowie, falls nötig, zwei neue links und rechts vom Layout reserviert
- alle anderen Knoten werden auf der Gitterhorizontalen mit $y(v_i) = i$ entsprechend der Anzahl der adjazenten Vorgänger plaziert
- v_n kommt auf die Gitterhorizontale $y(t) = n$ (siehe links)

- die benötigte Gittergröße ist höchstens $(m - n + 1) \times n$
  - erste beiden Knoten brauchen Höhe 1
  - die weiteren Knoten erhöhen die Hähe um 1
  - der letzte Knoten erhöht die Höhe höchstens um 2

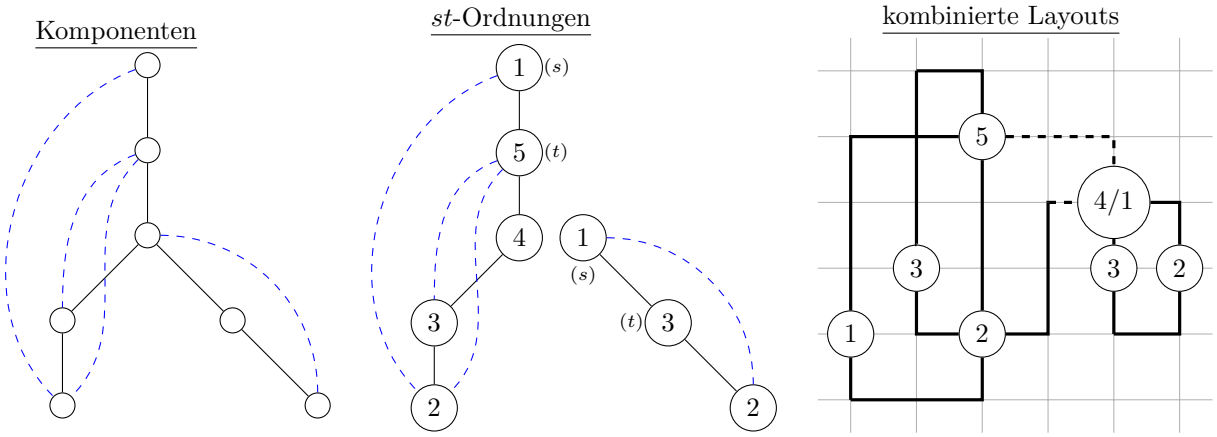
  $\Rightarrow$ Höhe n
  - erste beiden Knoten brauchen Breite $d_g^{\rightarrow}(v_1) + d_g^{\rightarrow}(v_2) - 2$
  - die weiteren Knoten vergrößern die Breite um $d_g^{\rightarrow}(v_i) - 1$
  - der letzte Knoten erhöht die Breite nicht

  $\Rightarrow$ Breite$= \sum_{v \in V} (d_g^{\rightarrow}(v) - 1) + 1 = m - n + 1$

- die Gesamtzahl der Knicke ist höchstens $2m - 2n + 4$ und keine Kante hat mehr als 2 Knicke
  - für v_1, v_2 werden $d_g^{\rightarrow}(v_1) + d_g^{\rightarrow}(v_2) - 1$ Knicke erzeugt
  - für jeden Knoten $v \neq v_1, v_2, v_n$ werden $d_g^{\leftarrow}(v) - 1 + d_g^{\rightarrow}(v) - 1 = 2d_G(v) - 2$ Knicke erzeugt
  - für v_n werden 4 Knicke benötigt, falls $d_G(v_n) = 4$, sonst nur $d_G(v_n) - 1$

  $\Rightarrow$ maximal: $\sum_{v \in V} d_G(v) - 2) + 4 = 2m - 2n + 4$
  - erste und letzte Kante $\{v_1, v_2\}, \{v_{n-1}, v_n\}$ haben maximal 2 Knicke (Konstruktion)
  - jede andere Kante hat höchstens einen Knick auf der Gitterhorizontalen durch beide Endknoten
- ist G planar und liegen s, t auf der äußeren Facette
  $\Rightarrow$ für jede st-Ordnung $v_1, \ldots, v_n$ liegt v_i auf der äußeren Facette des von $v_1, \ldots, v_{i-1}$ induzierten Teilgraphen, sowie die Vorgänger von v_i bilden auf der äußeren Facette ein Intervall
- durch Einfügen von neuen Spalten direkt neben dem gerade zu platzierenden Knoten, berechnet der Algorithmus kreuzungsfreie, orthogonale Gitterlayouts
- gibt einen Graph, der 3 Knicke an einer Kante braucht!

1.4 Kombination der Komponentenlayouts (4. Schritt)

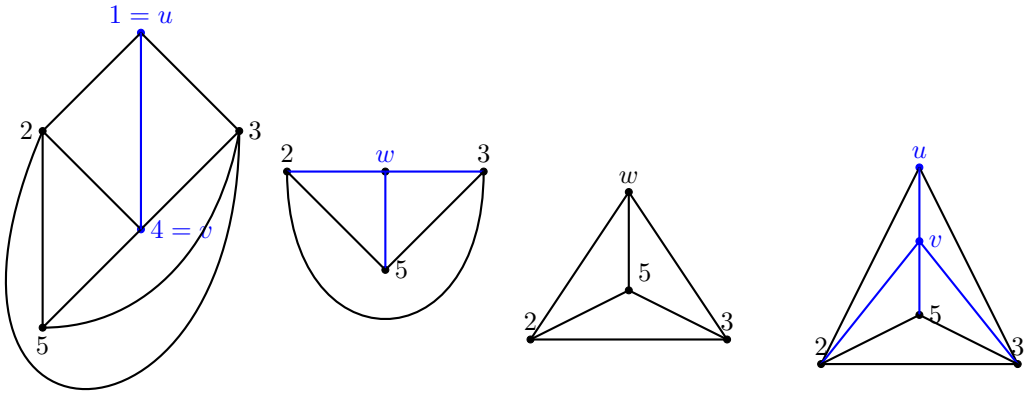


2 Kreuzungsfreie geradlinige Gitterlayouts

Jeder planare Graph hat eine kreuzungsfreie, geradlinige Standardrepräsentation. (Nachteil der Konstruktion: hohe Auflösung nötig, weil die Kantenlängen stark variieren können)

Beweisidee:

Durch Konstruktion (Funktioniert nicht mit allen Nachbarn, nur bei Knoten mit **genau** zwei Nachbarn!):



2.1 Shift-Methode (Gittergröße $\mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(n)$)

2.1.1 Definitionen:

connectivity: $\kappa(G)$ ist die kleinste Anzahl von Knoten, die entfernt werden müssen, damit G nicht mehr zusammenhängend ist

maximal planar/trianguliert: durch Hinzufügen einer Kante, wäre der Graph nicht mehr planar

kombinatorische Einbettung: z.B. die kreisförmige Anordnung der Kanten um jeden Knoten des Graphen

chord: eine Kante zwischen zwei Knoten v, w auf einem Kreis C, wobei v und w auf C nicht nebeneinander liegen

kanonische Ordnung: eine Ordnung $\pi = (v_1, \ldots, v_n)$, für die für jedes $3 \leq k \leq n$ gilt:

- **co1** Knoten $\{v_1, \ldots, v_k\}$ induzieren einen zweifach verbundenen und innen triangulierten Graphen
- **co2** (v_1, v_2) ist eine Außenkante von G_k
- **co3** $k < n \Rightarrow v_{k+1}$ liegt auf der Außenfläche von G_k und alle Nachbarn von v_{k+1} in G_k erscheinen nacheinander auf $C_0(G_k)$

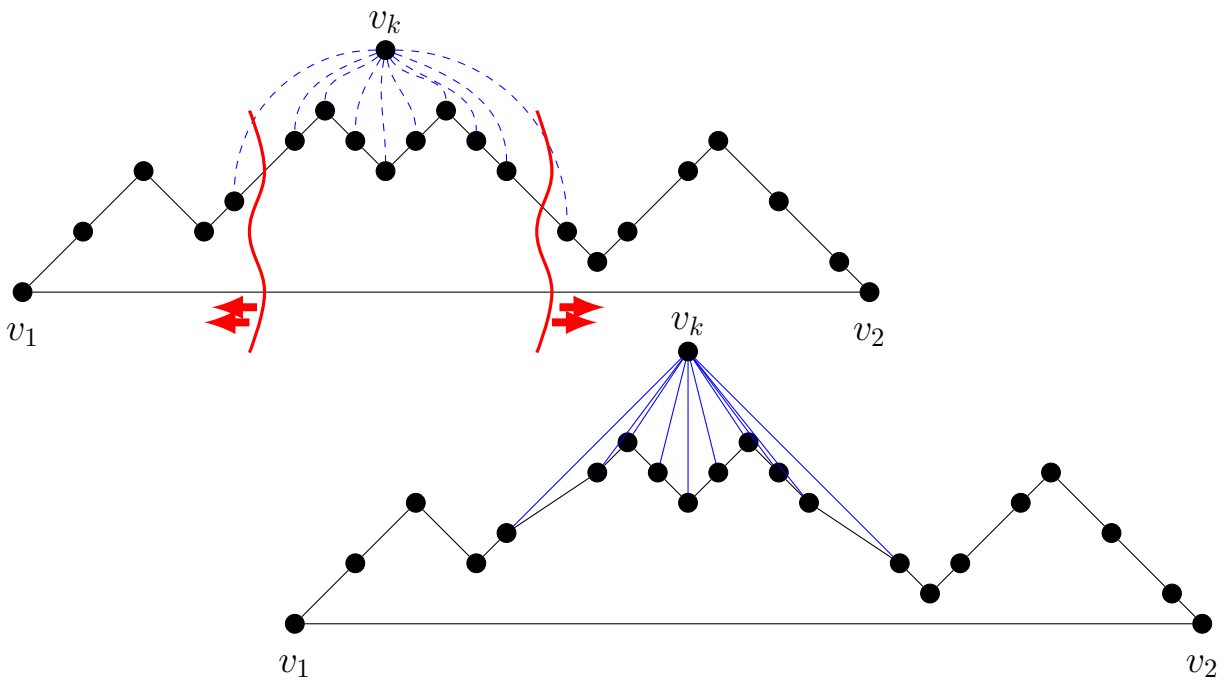
Jeder triangulierte, planare Graph besitzt eine kanonische Ordnung (durch Konstruktion mit **co1-3** klar)

2.1.2 Ablauf

1. Hinzufügen von Kanten bis der Graph zweifach zusammenhängend ist
2. Triangulation durch Hinzufügen weiterer Kanten
3. Bestimmung einer kanonischen Ordnung der Knoten (Vergleich Algorithmus 4. , in Linearzeit)
4. inkrementelle Bestimmung relativer Koordinaten der Knoten
5. Bestimmung absoluter Koordinaten
6. Herausnehmen aller Kanten, die nicht zum Ausgangsgraphen gehören

2.1.3 Algorithmus

- Einfügungsreihenfolge der Knoten entspricht der kanonischen Ordnung
- Anfangsknoten v_1, v_2, v_3
- Einfügen von v_k in das Layout von G_{k-1}
- zum Sicherstellen der Planarität werden die Knoten zum Teil horizontal verschoben
- jeder Knoten hat eine Liste $L(v)$ mit Knoten, die zusammen mit v verschoben werden müssen



2.1.4 Anmerkungen

- für zwei Gitterpunkte mit *Manhatten distance* ($L_1(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$) wird der Gitterpunkt für v_k durch den Schnittpunkt der Geraden mit Steigung -1 durch P_2 und Steigung 1 durch P_1 berechnet (Vergleich Algorithmus 5.)
- gestartet wird mit den Punkten $P(v_1) = (0, 0), P(v_2) = (2, 0), P(v_3) = (1, 1)$ (entspricht G_3)
- Anfangslisten $L(v_i) = \{v_i\}, i = 1, 2, 3$
- zum Zeichnen von G_k müssen folgende 3 Invarianten gelten:
  1. $P(v_1) = (0, 0)$ und $P(v_2) = (2k - 4, 0)$
  2. $x(w_1) < x(w_2) < \cdots < x(w_t)$ für $C_0(G_k) = (v_1 = w_1, \ldots, w_t = v_2)$
  3. alle Kanten (w_i, w_{i+1}) auf $C_0(G_k)$ sind geradlinig mit Steigung 1, bzw. -1
- Nachteil: sehr kleine Winkel möglich $\Rightarrow$ unleserliche Graphen können entstehen

Kombinatorische Optimierung (Flussmethoden)

Layoutprobleme für planare Graphen

- geradlinige Layouts mit „guter“Winkelauflösung
- orthogonale Layouts mit einer minimalen Anzahl an Knicken
- aufwärtsgerichtete Layouts gerichteter, azyklischer Graphen

⇒ Lösung mit Flussmethoden

1 Grundlagen

1.1 planare Einbettung

- alle Kanten (Jordan-Kurven) schneiden sich nur in ihren Endpunkten
- feste Lage (Knoten haben feste Positionen mit kombinatorischer Einbettung)
- zerlegt die Ebene in Flächen (Gebiete/Facetten)

Für zusammenhängende, planare Graphen gilt $n - m + f = 2$.

1.2 klassisches st-Flussmodell

- Netzwerk $(D = (V, A), s, t, c)$ mit
  $D = (V, A)$ gerichteter Graph
  s Quelle
  t Senke
  c Kapazitäten $c : A \to \mathbb{R}_0^+$
- $x : A \to \mathbb{R}_0^+$ heißt Fluss, wenn
  1. **Kapazitätsbedingung:** $\forall (i,j) \in A : 0 \leq x(i,j) \leq c(i,j)$
  2. **Flusserhaltungsbedingung:** $\forall i \in V \setminus \{s,t\} : \sum\limits_{j \,:\, (i,j)\in A} x(i,j) - \sum\limits_{j \,:\, (j,i)\in A} x(j,i) = 0$
- **Wert eines Flusses** x:
$$w(x) = \sum_{j \,:\, (s,j)\in A} x(s,j) = \sum_{j \,:\, (j,t)\in A} x(j,t)$$
- **klassisches Dualitätsresultat**: $w(x)$ entspricht der Kapazität eines s-t-Schnittes mit
  - $S \subset V$
  - $s \in S,\ t \in V \setminus S$
  - $C(S, V \setminus S) = \sum\limits_{\substack{(i,j)\in A \\ i\in S,\ j\in V\setminus S}} c(i,j)$

1.3 Allgemeines Flussmodell

- wie klassisches Flussmodell mit zusätzlich
  - untere und obere Kapazitäten statt einfachen Kapazitäten $(l : A \to \mathbb{R}_0^+,\ \ u : A \to \mathbb{R}_0^+)$
  - Knotenbewertung $b : v \to \mathbb{R}$ mit $\sum\limits_{i\in V} b(i) = 0$ (Knoten mit $b(i) > 0$ sind Quellen, mit $b(i) < 0$ sind Senken)
- $x : A \to \mathbb{R}_0^+$ heißt Fluss, wenn
  1. **Kapazitätsbedingung:** $\forall (i,j) \in A : l(i,j) \leq x(i,j) \leq u(i,j)$
  2. **Flusserhaltungsbedingung:** $\forall i \in V : \sum\limits_{j \,:\, (i,j)\in A} x(i,j) - \sum\limits_{j \,:\, (j,i)\in A} x(j,i) = b(i)$

1.4 Fluss mit minimalen Kosten

Zusätzlich zum Flussmodell ist noch die Funktion $cost : A \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben.
Gesucht ist somit die Minimierung von

$$cost(x) = \sum_{(i,j)\in A} cost(i,j) \cdot x(i,j)$$

2 Schranken für die Winkelauflösung in geradlinigen Layouts

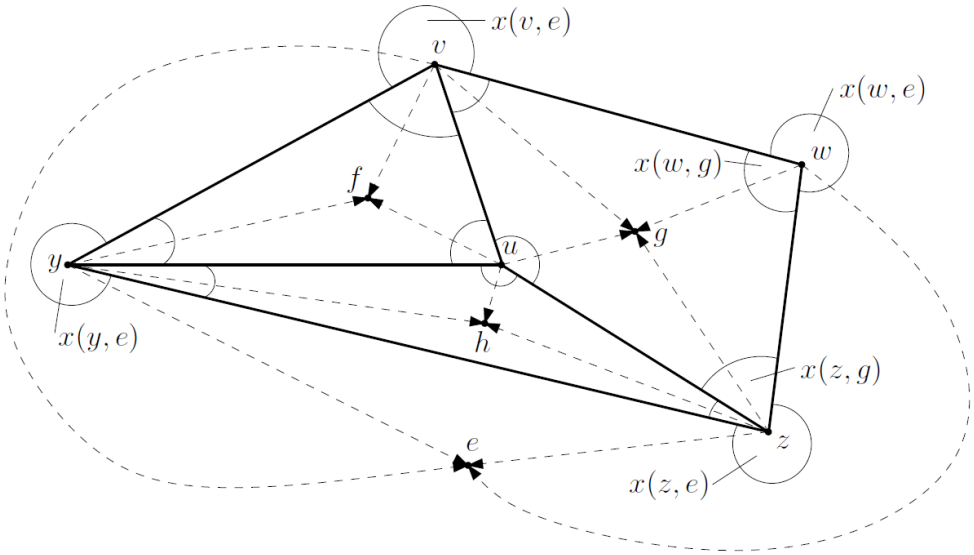
- gesucht ist eine geradlinige Einbettung von einem planaren Graphen G mit maximalem

$$x_{min} = \min_{\substack{v\in V,\ f\in\mathcal{F} \\ v \text{ inzident zu } f}} \{x(v,f)\}$$

- $\mathcal{NP}$-schwer

Einschränkung: planare kombinatorische Einbettung ist gegeben
Modell: Formulierung des Problems als Flussmodell (liefert untere Schranke für x_min)

2.1 Grundidee der Konstruktion



Es gilt:

1. **Knotenbedingung:** $\forall v \in V \ : \ \sum_{f\in\mathcal{F} \text{ inzident zu } v} x(v,f) = 2 \cdot \pi$
2. **Facettenbedingung:**

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\} \ : \ \sum_{v\in \text{ inzident zu } f} x(v,f) &= (d_G(f) - 2) \cdot \pi \\ f_0 \ : \ \sum_{v\in \text{ inzident zu } f_0} x(v,f_0) &= d_G(f_0) \cdot \pi - (d_G(f_0) - 2) \cdot \pi \\ &= (d_G(f_0) + 2) \cdot \pi \end{aligned}$$

2.2 Definition des Flussnetzwerks $N(G) = (D = (W, A), b, l, u)$

$$
\begin{aligned}
W &= V \cup \mathcal{F} \\
A &= \{(v, f) \in V \times \mathcal{F}, v \text{ inzident zu } f\} \\
b(v) &= 2\pi, \ \forall v \in V \\
b(f) &= -(d_G(f) - 2)\pi, \ \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\} \\
b(f_0) &= -(d_G(f) + 2)\pi \\
l(a) &= 0, \ \forall a \in A \\
u(a) &= 2\pi, \ \forall a \in A
\end{aligned}
$$

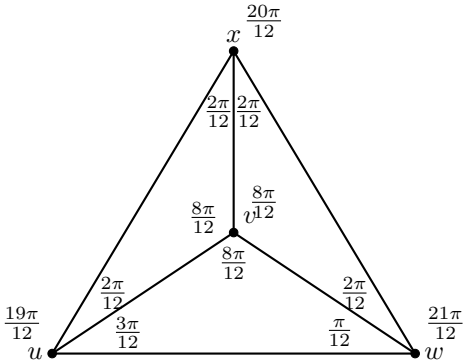
2.3 Definition des Flussnetzwerks $N_{s,t}(G) = (D = (W_{s,t}, A_{s,t}), l, u)$

$$
\begin{aligned}
W_{s,t} &= W \cup \{s, t\} \\
A_{s,t} &= A \cup \{(s, v) | v \in V\} \cup \{(f, t) | f \in \mathcal{F}\} \\
l(s, v) &= l(f, t) = 0, \quad \forall v \in V, \ f \in \mathcal{F} \\
u(s, v) &= 2\pi, \ \forall v \in V \\
u(f, t) &= -(d_G(f) - 2)\pi, \quad \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\} \\
u(f_0, t) &= -(d_G(f) + 2)\pi
\end{aligned}
$$

2.4 untere Schranke von x_{min}

α ist genau dann eine untere Schranke von x_min für einen maximalen Fluss x, falls $\max w(x_{s,t})$ von $N_{s,t}(G)$ gleich $\max w(x'_{s,t})$ von $N'_{s,t}(G) = ((W_{s,t}, A_{s,t}), l', u)$ mit $l'(a) = \alpha, \ \forall a \in A$
$\Rightarrow$ Beweis mit Ford und Fulkerson (Kapazität jedes s-t-Schnittes in $N'_{s,t}(G)$ ist nicht kleiner als due Kapazität eines minimalen s-t-Schnittes in $N_{s,t}(G)$).

2.5 Konstruktion eines Flusses

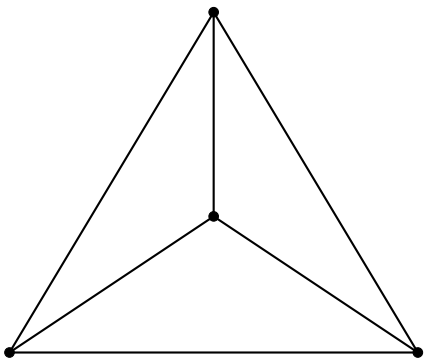


2.5.1 Definition

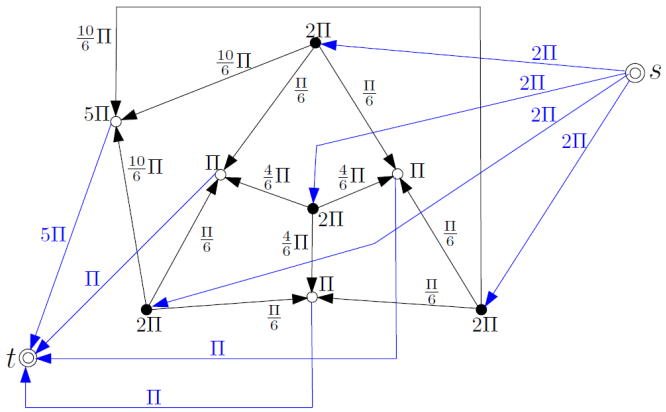
lokal konstistent: Zuweisung von Winkelwerten, die Knoten- und Facettenbedingungen erfüllen

! nicht zu jeder lokal konsistenten Zuweisung gibt es auch eine Einbettung, die diese realisiert

Beispiel $(Konstruktion)$**:**



$\Longrightarrow$



Fluss x in $N'_{s,t}(G)$ mit $w(x) = 8\pi$ (maximal)
$x_{min} = \frac{\pi}{6}$

- es gibt für jeden triangulierten, planar eingebetteten Graphen eine lokal konsistente Winkelzuweisung mit $x_{min} \in \Omega(\frac{1}{\Delta_G})$
- oberes liefert nur eine obere Schranke für die untere Schranke, da nicht jede lokal konsistente Zuweisung realisierbar ist
- ein **Dreiecksgraph** ist bis auf die äußere Facette trianguliert (z.B. der Wheel-Graph (W_d))
- für jeden planaren Dreiecksgraphen mit kombinatorischer Einbettung, beschrieben durch $\mathcal{F}$, und einer vorgegebenen Winkelzuweisung $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i,\ \forall 1 \leq i \leq d)$ gibt es eine geradlinige Realisierung der Einbettung mit dieser Winkelzuweisung, gdw.
  1. $\sum_{i=0}^{d} \gamma_i = 2\pi,\ \forall 1 \leq i \leq d$
  2. $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = \pi,\ \forall 1 \leq i \leq d$
  3. $\prod_{i=0}^{d} \frac{\sin \alpha_i}{\sin \beta_i} = 1$

  (⇒) Beweis:

  1./2. gilt durch Definition

  3. L_i ist die Länge bei Kante e_i zwischen den Winkeln β_i und $\alpha_{(i \mod d)+1}$
     $\Rightarrow \prod_{i=0}^{d} \frac{L_{(i \mod d)+1}}{L_i} = \frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{L_3}{L_2} \cdot \ldots \cdot \frac{L_1}{L_d} = 1$
     $\Rightarrow \frac{L_{(i \mod d)+1}}{L_i} = \frac{\sin \alpha_{(i \mod d)+1}}{\sin \beta_{(i \mod d)+1}}$
     $\Rightarrow$ Bedingung 2 ist wahr

  (⇐ (Konstruktion der Zeichnung mit den Winkeln)) Beweis:

  - beliebiges L_1 wählen, Zeichnen der Kante $\{v, v_2\}$
  - Berechnen von L_{i+1} mit L_i $(i = 1, \ldots, d-1)$ durch $L_{i+1} = L_i \cdot \frac{\sin \alpha_{i+1}}{\sin \beta_{i+1}}$,
    Zeichnen der Kante $\{v, v_{(i-2 \mod d)}\}$ mit γ_{i+1} am Knoten v

  $\Rightarrow$ (Bedingung 1/2)

  - Konstruktion eines neuen Dreiecks mit vorgeschriebenen Winkeln, die $\{v, v_{i+1}\}$ gemeinsam haben mit dem vorherigen Dreieck, ist gültig
  - Dreiecke überlappen sich nicht

  $\Rightarrow$ durch Konstruktion erhalten wir $L_d = L_1 \cdot \prod_{i=2}^{d} \frac{\sin \alpha_i}{\sin \beta_i}$

  $\Rightarrow$ (Bedingung 3)

  - $\frac{L_1}{L_d} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1}$
  - somit erfüllen L_1 und L_d das Dreieck

  $\Rightarrow$ dadurch, dass alle Winkel positiv sind, ist die Zeichnung planar

3 Knickminimierung in orthogonalen Layouts

Das Knickminimierungsproblem (allgemein) ist $\mathcal{NP}$-schwer.

orthogonale Beschreibung (H) keine Kantenlängen, keine Positionen für Knoten
eine Folge von Facettenbeschreibungen $H(f),\ f \in \mathcal{F}$ mit Elementen (e, δ, x) definiert durch

- $e \in E$
- δ eine Folge aus $\{0,1\}$, 0 kodiert einen $\frac{\pi}{2}$ Knick, 1 einen $\frac{3\pi}{2}$
- x ein Winkel aus $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$

H ist korrekt, falls

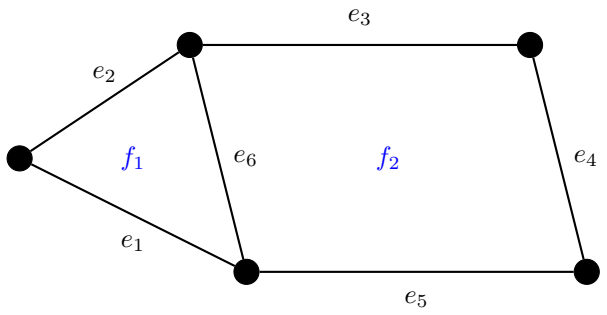
O1 Es gibt eine planare Einbettung, die H entspricht

O2 $(e, \delta_1, x_1), (e, \delta_2, x_2)$
$\Rightarrow \delta_2$ entsteht aus δ_1 durch kippen jedes einzelnen Bits von δ_1 und umkehren der Folge δ_1

O3 $|\delta|_0$, $|\delta|_1$ sind die Anzahl der 0/1 in δ
für $r = (e, \delta, x)$ gilt $\mathcal{C}(r) = |\delta|_0 - |\delta|_1 + (2 - \frac{2x}{\pi})$
$$\Rightarrow \sum_{r \in H(f)} \mathcal{C}(r) = \begin{cases} 4 & f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\} \\ -4 & f = f_0 \end{cases}$$

O4 $\forall v \in V$ ist die Summe der Winkel bei v gleich 2π

Beispiel (**orthogonale Beschreibung**):



f_0 : $(e_1, 11, \frac{\pi}{2}), (e_5, 111, \frac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2})$

f_1 : $(e_1, 00, \frac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \frac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi)$

f_2 : $(e_5, 000, \frac{\pi}{2}), (e_6, 11, \frac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \frac{\pi}{2})$

orthogonales Layout feste Positionen und somit auch Kantenlängen für alle Teile des Graphen

3.1 Knickminimierung mit vorgegebener Einbettung

$G = (V, E), \mathcal{F}, f_0$

↓ *Minimierung der Knickzahl (1.Schritt)*

orhtogonale Beschreibung

↓ *Kompaktierung (2.Schritt)*

orhtogonales Layout

3.1.1 Schritt 1: orthogonale Beschreibung

Definition des Flussnetzwerks $N(G) = ((W, A), l, u, b, cost)$

$$\begin{aligned}
W &= V \cup \mathcal{F} \\
A &= \{(v, f) \in V \times \mathcal{F}, v \text{ inzident zu } f\} \\
&\quad \cup \{(f, g) \in \mathcal{F},\ f \text{ und } g \text{ haben gemeinsame Kante}\} \\
b(v) &= 4\frac{\pi}{2} \Rightarrow 4,\ \forall v \in V \\
b(f) &= -2(d_G(f) - 2)\frac{\pi}{2} \Rightarrow -2(d_G(f) - 2),\ \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\} \\
b(f_0) &= -2(d_G(f) + 2)\frac{\pi}{2} \Rightarrow -2(d_G(f) + 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l(v,f) &= 1,\ l(f,g) = 0 \\ u(v,f) &= 4,\ u(f,g) = \infty \\ cost(v,f) &= 0, cost(f,g) = 1 \end{aligned}$$

Eine Flusseinheit entspricht einem $\frac{\pi}{2}$-Winkel/-Knick

- $N(G) = ((W, A), l, u, b, cost)$ ist ein Flussnetzwerk (Beweis durch Satz von Euler)
- zu jedem planaren Graph mit $\Delta(G) \leq 4$ und kombinatorischer Einbettung existiert genau eine orthogonale Beschreibung mit k Knicken, wenn es einen Fluss x in $N(G)$ mit k Kosten gibt

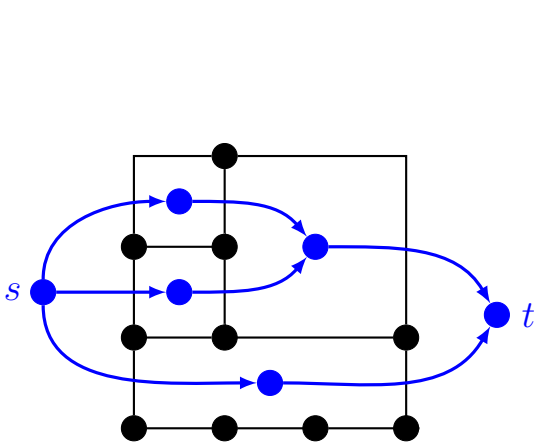
  Beweis:

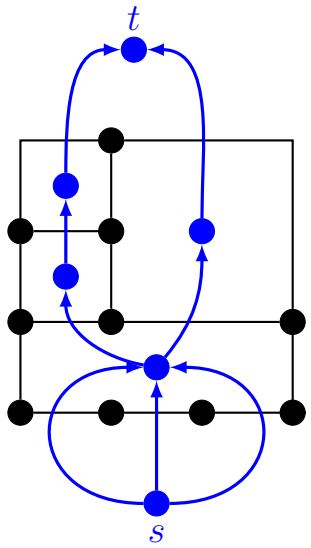
  TODO

3.1.2 Schritt 2: Kompaktierung

- betrachten den Spezialfall mit der Eigenschaft, dass alls Facetten in $H(G)$ Rechtecke sind
- zur Konstruktion wird ein Flussnetzwerk verwendet
- für den Spezialfall kann garantiert werden: das konstruierten Layout hat:
  1. minimale Gesamtkantenlänge
  2. minimale Fläche
- Konstruktion von zwei Flussnetzwerken (N_{ver}, N_{hor}) mit $cost(a) = 1, l(a) = 1, u(a) = \infty$

$N_{ver} = ((W_{ver}, A_{ver}), s, t \in W_{ver}, l, u, cost)$ $\quad$ $N_{hor} = ((W_{hor}, A_{hor}), s, t \in W_{hor}, l, u, cost)$





- **Beobachtungen:**
  - alle Knicke liegen auf f_0
  - wenn gegenüberliegende Seiten die Gleiche Länge zugewiesen bekommen, kann ein korrektes Layout konstruiert werden
- für ganzzahlige Kantenbewertung x_{ver}, x_{hor} mit minimalen Kosten im entsprechenden Flussnetzwerk und orthogonaler Beschreibung, die nur aus Rechtecken besteht, gilt:
  1. x_{ver}, x_{hor} ist ein Fluss gdw. die Kantenlängen ein korrektes Layout induzieren
     Begründung: Äquivalenz der Flusserhaltungsbedingung und Layouteigenschaft (gegenüberliegende Seiten haben gleiche Länge)
  2. der Wert von x_{ver} entspricht der Höhe des Layouts, x_{hor} entspricht der Breite des Layouts
     Begründung: durch Konstruktion
  3. $x_{hor} + xver$ entspricht der Gesamtkantenlänge des Layouts
     Begründung: durch Konstruktion

$\Rightarrow$ Flüsse mit minimalen ganzzahligen Kosten induzieren ein planares, orthogonales Gitterlayout mit minimaler Fläche und Gesamtkantenlänge

3.1.3 Erweiterung auf den allgemeinen Fall

rectangular refinement von $H(G)$ ist eine orthogonale Beschreibung $H'(G')$ von G mit

- G' ist entstanden aus einer Sequenz der folgenden Operationen:
  - Hinzufügen eines isolierten Knotens
  - Hinzufügen von Knoten auf Kanten
  - Hinzufügen von Kanten
- die „Teilbeschreibung“durch H' von G ist die gleiche wie $H(G)$
- die Facetten von $H'(G')$ sind Rechtecke

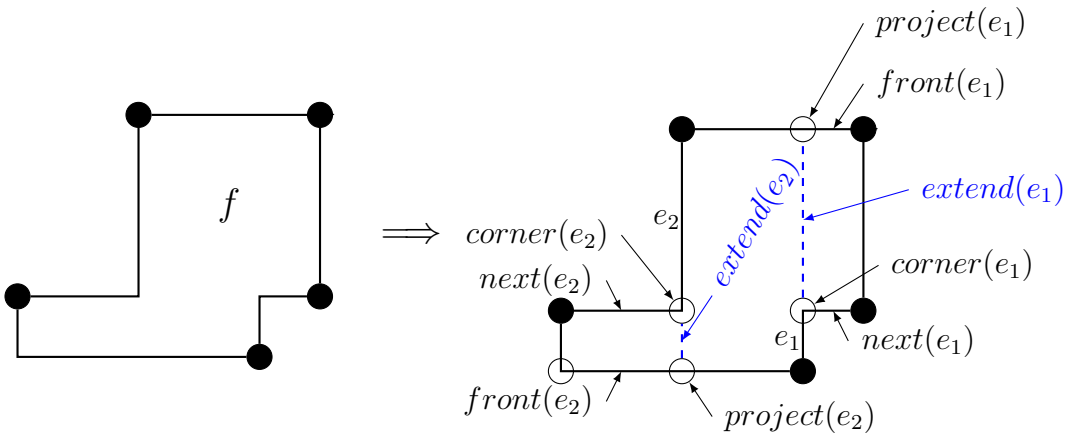
$\Rightarrow$ man erhält eine Zeichnung von G mithilfe einer Zeichnung von G' (ohne hinzugefügte Elemente)

1. Realisierung: $G' = G, H'(G') = H(G)$

- Einfügen eines Knotens auf jedem Knick von $H(G)$
- Aktualisieren von $H'(G')$

2. Facetten haben beliebige orthogonale Form:

1. **innere Facetten:**



Ablauf:

a) Realisierung für jede Facette $f \in \mathcal{F}$

b) für jede Kante e in $H'(f)$ wird folgendes definiert:

$next(e)$: nächste Kante in $H'(f)$ (counterclockwise)

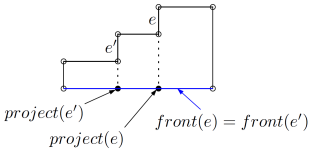
$corner(e)$: gemeinsamer Knoten von e und $next(e)$

$turn(e)$: $\begin{cases} 1 & : \ next(e) \text{ knickt nach links ab} \\ 0 & : \ next(e) \text{ knickt nicht ab} \\ -1 & : \ next(e) \text{ knickt nach recht ab} \end{cases}$

$front(e)$: erste Kante e' in $H'(f)$ nach e, für die gilt: Summe der $turn$-Werte aller Kanten von ***inklusiv*** e bis ***exklusiv*** e' gleich 1 ist

c) für e mit $turn(e) = -1$ wird ein neuer Knoten $project(e)$ auf $front(e)$ sowie eine neue geradlinige Kante $estend(e) = (corner(e), project(e))$ eingefügt, Erweiterung von $H'(G')$ entsprechend

d) falls $front(e) = front(e') \Rightarrow project(e)$ nach $project(e')$ eingefügt



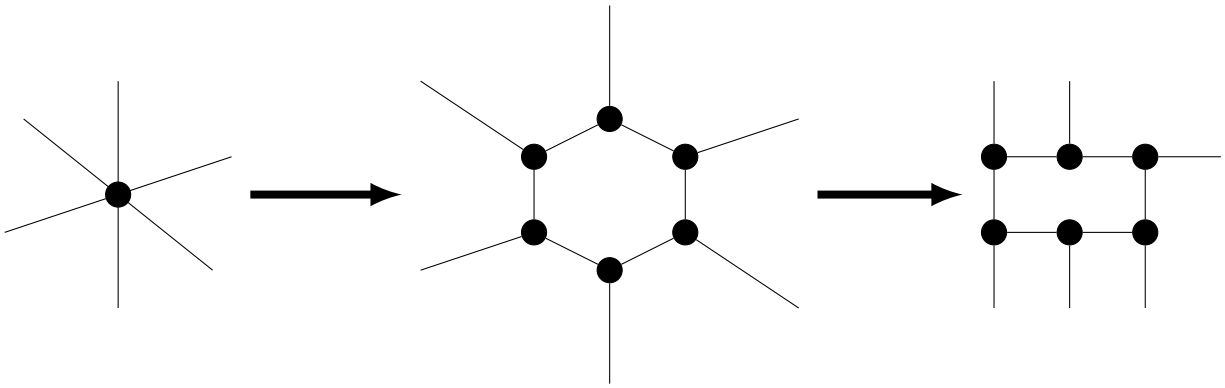
2. **äußere Facette:** um G wird ein minimales Rechteck gelegt, auf das die Knicke der äußeren Facette projiziert werden

Bemerkungen:

- k ist die Anzahl der Knicke in $H(G)$
  $\Rightarrow H'(G')$ hat $\mathcal{O}(n+k)$ Knoten
  $\Rightarrow H'(G')$ kann in $\mathcal{O}(n+k)$ konstruiert werden
- die Flussnetzwerke zu $H'(G')$ garantieren **nicht** mehr minimale Gesamtkantenlänge und minimale Fläche
- mit einem geeigneten Algorithmus für die Flussberechnung (minimale Kosten) kann zu planaren Graphen mit kombinatorischer Einbettung ein orthogonales Layout mit minimaler Knickzahl in $\mathcal{O}(n^{\frac{7}{4}} \cdot \log n)$ berechnet werden

Erweiterung auf allgemeine Graphen:

ohne Gradbeschränkung (als Beispiel):



Lagen-Layouts (Layered Layout)

Es sollen gerichtete hierarchische Graphen so dargestellt werden, dass die Knoten auf unterschiedlichen Lagen liegen. Es sollen im End-Layout folgende Bedingungen gelten:

1. möglichst alle Kanten sind aufwärts gerichtet
2. möglichst wenig Kanten erzeugen Kreuzungen
3. alle Kanten sind möglichst vertikal und geradlinig dargestellt
4. alle Knoten sind gleichmäßig verteilt und lange Kanten werden vermieden

Algorithmus zur Konstruktion eines Lagen-Layouts:

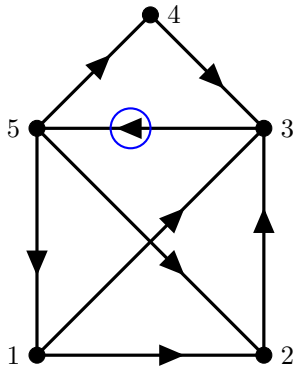
Schritt 1: Kreise entfernen Finden einer minimalen Anzahl an Kanten, durch deren Entfernung der Graph azyklisch ist, und drehe ihre Richtung um

Schritt 2: Lagenzuordnung Berechnung einer guten Zuordnung der Knoten auf Lagen (y-Koordinaten), sodass alle Kanten aufwärts gerichtet sind. Alle Kanten, die mindestens eine Lage überqueren werden ersetzt durch einen Pfad mit Dummy-Knoten auf jeder kreuzenden Lage.

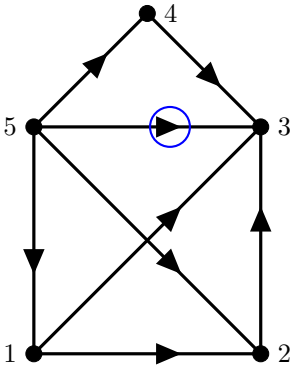
Schritt 3: Kreuzungsreduktion Berechnung einer Anordnung für jede Lage, für welche die Anzahl der entstehenden Kreuzungen minimal ist

Schritt 4: Knoten-/Kantenpositionierung (horizontale Koordinatenzuweisung) Berechnung der x-Koordinaten der Knoten (& Dummy-Knoten), so dass keine Überlappungen entstehen. Einfügen der Kanten geradlinig und Entfernen der Dummy-Knoten. Wiederherstellen der ursprünglichen Kantenrichtungen

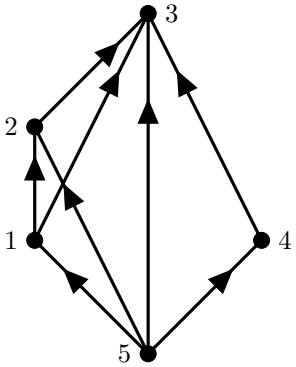
Beispiel (Sugiyma Framework):

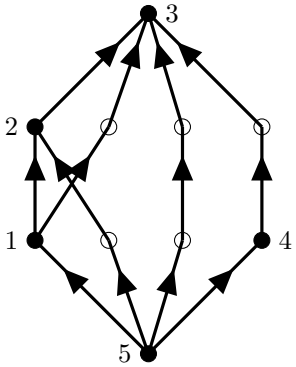


Input

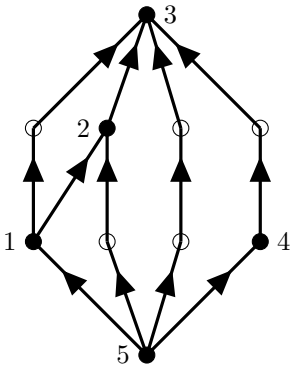


Schritt 1

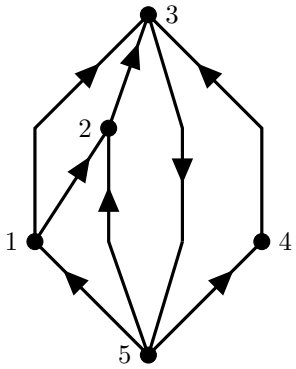




Schritt 2



Schritt 3



Schritt 4

1 Entfernen von Kreisen

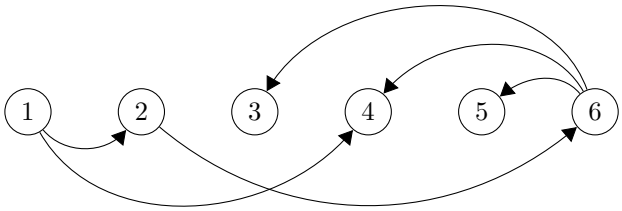
maximal azyklischer Teilgraph

- ist $\mathcal{NP}$-schwer
- äquivalente Formulierungen:

  Minumum Feedback Arc Set gesucht ist eine Teilmenge $A_f \subseteq A$ mit $|A_f|$ ist minimal, sodass $D_f = (V, A \setminus A_f)$ azyklisch ist

  Lineare Anordnung gesucht ist eine Anordnung der Knoten, sodass für $\sigma : V \to \{1, \ldots, |V|\}$ für jede Kante $(u, v) \in A \sigma(u) > \sigma(v)$ minimiert wird

  die oberen Kanten sollen minimiert werden



- Bezeichnungen:

$$
\begin{array}{rcll}
\delta^+(v) & = & \{(v,u) : (v,u) \in A\} & \\
\delta^-(v) & = & \{(u,v) : (u,v) \in A\} & \\
\delta(v) & = & \delta^-(v) \cup \delta^+(v) & \text{(Nachbarschaft von } v\text{)} \\
|\delta^+(v)| & = & deg^+(v) & \text{(Ausgangsgrad von } v\text{)} \\
|\delta^-(v)| & = & deg^-(v) & \text{(Eingangsgrad von } v\text{)}
\end{array}
$$

- ein naiver Ansatz zur Konstruktion eines kreisfreien Graphen ist der Greedy-Algorithmus (Vergleich Algorithmus 6. mit Laufzeit $\mathcal{O}(n+m)$ mit $|A'| \geq \frac{1}{2}|A|$)
- bessere Lösung ist der verbesserter Greedy-Algorithmus (Vergleich Algorithmus 7. mit Laufzeit $\mathcal{O}(n+m)$ (mit $2n-3$ Buckets für $deg^+ - deg^-$ und der maximalen Anzahl an behaltenen Kanten ($|A'| \geq \frac{1}{2}|A| + \frac{1}{6}|V|$))

2 Lagenzuordnung

Für einen DAG (gerichteter azyklischer Graph) soll eine zulässige Partition der Knotenmenge auf Lagen L_y gefunden werden (alle positiven ganzzahligen y-Koordinaten für alle $v \in V$) mit $y(u) < y(v), \forall (u,v) \in A$.
Bemerkung (Optimierungskriterium):

- kompaktes layering
  - Höhe = # Lagen h
  - Breite = $\max |L_i|,\ 0 \leq i \leq h$
- „richtig“: Kanten gehen nur über eine Lage, falls nicht werden Dummy-Knoten eingefügt
- Minimierung der Anzahl an Dummy-Knoten

Minimierung der Höhe: hierfür wird ein *longest-path-layering* verwendet:
weise v der Ebene L_p zu, falls p die Länge des längsten Pfades von einer Quelle ist (in Linearzeit für DAGs, Vergleich Algorithmus 8.)

Minimierung der Höhe bei vorgegebener Breite: ist $\mathcal{NP}$-schwer (auch mit Einheitsbearbeitungsdauern), äquivalent zu $PRE - SCHED_B\{<\}$

2.1 Scheduling mit Vorgängerbedingung

Aus n Jobs $J_1, \ldots, J_n$ mit Bearbeitungsdauern $p_1, \ldots, p_n$ und der Bedingung $J_i < J_k$ (J_i muss vor J_k abgeschlossen werden) mit B gleichen Maschinen, soll ein Schedule der Jobs auf den Maschinen gefunden werden, der die Vorgängerbedingungen erfüllt und minimale Bearbeitungsdauer hat.
Es gilt $PRE - SCHED_2\{<\} \in \mathcal{P}$
Zu entscheiden, ob es zu n Jobs und $T \in \mathbb{N}$ ein Scheduling auf B Maschinen gibt mit $T_i \leq T, \forall 1 \leq i \leq n$ ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis:
Es wird gezeigt, dass $QLIQUE \propto PRE - SCHED_B\{< 3\}$

$CLIQUE$ Gibt es für einen Graphen $G = (V, E)$ und $K \in \mathbb{N},\ K \leq |V|$ einen vollständigen Teilgraphen mit mindestens K Knoten?

Definitionen für das Bilden einer Instanz von $CLIQUE$ für $PRE - SCHED_B\{< T\}$ mit gegebenen G, K:

- $K' = |V| - K$
- $L = K\dfrac{K-1}{2}$
- $L' = |E| - L$
- $B = \max\{K, L + K', L'\} + 1$
- Dummy-Jobs mit $X_j < Y_r < Z_s$:
  - $X_j,\ j = 1, \ldots, B - K$
  - $Y_r,\ r = 1, \ldots, B - L - K'$
  - $Z_s,\ s = 1, \ldots, B - L'$

Für jeden Knoten v wird ein Job J_v eingeführt, sowie für jede Kante e ein Job J_e.
$\Rightarrow$ Gesamtzahl der Jobs $n = 3B$.
$\Rightarrow PRE - SCHED_B\{< 3\}$ muss alle Slots füllen, bei 3 Maschinen gilt (falls es ein Clique der Größe K gibt):

- im ersten Zeitslot (von oben nach unten) stehen alle $CLIQUE$-Knoten, aufgefüllt mit Dummy-Jobs ($K + (B - K) = B$)
- im zweiten Zeitslot stehen (von oben nach unten) alle $CLIQUE$-Kanten, dann alle übrigen Knoten, aufgefüllt mit Dummy-Jobs ($L + (B - L - K') + K' = B$)
- im dritten Zeitslot stehen (von oben nach unten) alle übrigen Kanten, aufgefüllt mit Dummy-Jobs ($L' + B - L' = B$)

Wenn keine Clique der Größe K existiert, gilt:

- in jedem Schedule müssen B Jobs in der ersten Zeiteinheit ausgeführt werden
- K davon müssen Knoten-Jobs sein

$\Rightarrow$ die existieren aber nicht

Bemerkung: mit der minimalen Anzahl der Dummy-Knoten kann es effizient durchgeführt werden, aber die Kombination von minimale Höhe und minimaler Anzahl an Dummy Knoten ist auch in $\mathcal{NP}$

Ist h_{OPT} minimale Höhe h eines Layerings mit Breite B, dann erfüllt die resultierende Höhe aus $LIST - SCHEDULING$ (Jobs stehen in einer Liste, wenn eine Maschine frei ist, wird der erste Job aus der Liste abgearbeitet)

$$h \leq (2 - \frac{1}{B})h_{OPT}$$

$\Rightarrow$ „$(2 - \frac{1}{B})$“-Approximation

3 Kreuzungsminimierung

Beobachtung: Die Anzahl an Kreuzungen ist nicht abhängig von den genauen x-Koordinaten, sondern von der Permutation (Ordnung) der Knoten. Es ist einfach Ordnungen zu spezifizieren für L_1, L_2 durch Koordinaten-Vektoren X_1 und X_2.

- betrachtet wird ein eingeschränktes Kreuzungsminimierungsproblem
- ist schon $\mathcal{NP}$-schwer
- Zur Optimierung gibt es den Ansatz des „layer-by-layer sweep“(Vergleich Algorithmus 9.)

3.1 Zwei-Lagen-Kreuzungsminimierung

- Graph ist gegeben durch eine Partition von V auf zwei Lagen L_1, L_2
- gesucht sind Anordnungen X_1, X_2 von L_1, L_2 sodass die Anzahl der Kantenpaare, die sich kreuzen möglichst gering ist
- X_1 sei fest, gesucht ist also nur noch die Anordnung X_2 von L_1, dass die Anzahl der Kreuzungen minimal ist
- für X_1, X_2 definieren wir
  - $cross(G, X_1, X_2) = \#((u, w), (v, z))$ mit $X_1(u) < X_1(v) \wedge X_2(w) > X_2(z)$ oder umgekehrt (Anzahl der Kreuzungen für die Ordnungen X_1, X_2)
  - $opt(G, X_1) = \min_{X_2}\{cross(G, X_1, X_2)\}$
  - für $u, v \in L_1,\ X_1(u) < X_1(v)$ definieren wir die **Kreuzungszahl** c_{uv}:

    $$c_{uv} = |\{(u, w), (v, z) \in E\ :\ X_2(z) < X_2(w)\}|$$

    für $u = v$ gilt $c_{uv} = 0,\ \forall u \in L_2$
- für einen 2-Layer-Graph gilt:
  1. $cross(G, X_1, X_2) = \sum_{\substack{u,v \in L_2 \\ X_2(u) < X_2(v)}} c_{uv}$
  2. $opt(G, X_1) \geq \sum_{\substack{u,v \in L_2 \\ u \neq v}} \min\{c_{uv}, c_{v,u}\}$

  2. gilt, da für jede Ordnung (auch die optimale) entweder $X_2(u) < X_2(v)$ oder andersherum gilt
- es gibt verschiedene ***Heuristiken*** zur Reduktion von Kreuzungen, zum Beispiel die *Greedy-switch-Heuristik* (Vergleich Algorithmus 10.)

Bemerkungen:

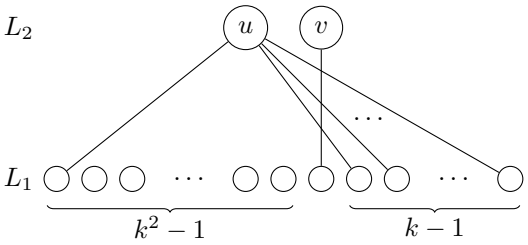
- Berechnung der Kreuzungszahlen benötigt im naiven Ansatz $\mathcal{O}(|E|^2)$, beim verbesserten $\mathcal{O}(|L_1| + |L_2| + |E| + \sum_{u,v} c_{uv})$
- Komplexität von Greedy switch ist $\mathcal{O}(|L_2|^2)$ (jeder Scan benötigt $\mathcal{O}(|L_2|)$ Zeit; es gibt höchstens $\mathcal{O}(|L_2|)$ Scans)
- kein komplettes Neuberechnen von X_2, nur Verbesserung der aktuellen Berechnung (nicht alle Aufrufe des Algorithmus verbessern die Darstellung des Graphen)

3.1.1 Schwerpunkts-Zentrum-Heuristik (barycenter heuristic)

Hier wird der Schwerpunkt eines Knotens auf L_2 berechnet und so die Reihenfolge der Knoten in X_2 festgelegt, Vergleich Algorithmus 11.

Bemerkungen:

- Komplexität: $\mathcal{O}(|L_2| + |E| + |L_2| \log |L_2|)$
- $\mathcal{O}(\sqrt{n})$-Annäherung
- **Beispiel** (**Schlechter Fall**):



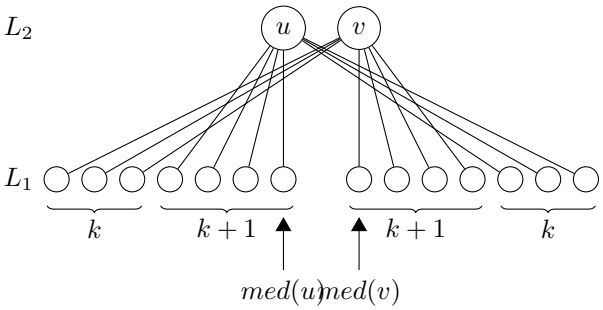
$bary(u) = k^2 - \frac{k}{2} - \frac{1}{2}$
$bary(v) = k^2$
$\Rightarrow X_2(u) < X_2(v)$
$\Rightarrow k - 1$ Kreuzungen
Optimal wäre aber $X_2(v) < X_2(u)$
$\Rightarrow 1$ Kreuzung

3.1.2 Median-Heuristik

Berechnung der Position auf L_2 mittels des Medians (Vergleich Algorithmus 12.)

Bemerkungen:

- Komplexität: gleich wie bei *barycenter Heuristik*
- 3-Annäherung
- **Beispiel** (**Schlechter Fall**):



$k(k+1) + k^2 + k(k+1)$ Kreuzungen
Optimal wäre aber $X_2(v) < X_2(u)$
$\Rightarrow (k+1)^2$ Kreuzungen

3.2 Allgemeine Bemerkungen

- optimale Lösung kann mit Hilfe von *Integer Linear Programmin* berechnet werden, aber es kann keine polynomielle Zeit gewährleistet werden
- in der Praxis gibt es keinen klaren Sieger (der Heuristiken)
  $\Rightarrow$ am häufigsten wird die *hybrid*-Methode verwendet:
  1. Median
  2. Bindungen brechen mit der barycenter Heuristik
  3. verbessern mit Greedy switch

Generelle Graphen und Iteration

- geradlinige Repräsentation für verbundene Graphen (generelle)
- Ziel: Darstellung eines Graphen auf eine ungetrübte Art (falls Kantenlängen wichtig waren, sollten sie noch erkennbar sein)
- Kriterien:
  1. adjazente Knoten sollten nah bei einander liegen
  2. Knoten sollten gleichmäßg verteilt sein
- Kriterium (1) kann realisiert werden durch „Bestrafung“ von Entfernungen in der Zielfunktion: für $p = (p_v) = \binom{x_v}{y_v}$ soll $B(p) = \sum_{\{u,v\} \in E} \|p(u) - p(v)\|^2$ minimiert werden

  $\Rightarrow$ ergibt kurze Kanten $\rightarrow$ adjazente Knoten nah beieinander
  - Es folgt, dass das optimale Layout zu $B(p)$ das ist, mit $p_u = p_v,\ \forall u, v \in V$ und in der gleichen Komponente.
  - Eine notwendige Bedingung für ein lokales Minimum der Zielfunktion ist somit, dass alle partiellen Ableitungen verschwinden ($\frac{\partial}{\partial_{x_v}} B(p) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial_{y_v}} B(p) = 0,\ \forall v \in V$).
  - für ein beliebiges $v \in V$ gilt (mit $a = x$ bzw. $= y$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial_a} B(p) &= \frac{\partial}{\partial_{a_v}} \sum_{\{u,v\} \in E} \|p(u) - p(v)\|^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial_{a_v}} \sum_{\{u,v\} \in E} \sqrt{(x_v - x_u)^2 - (y_v - y_u)^2}^2 \\ &= \sum_{u \in N(v)} 2(a_v - a_u) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

  - aus den notwendigen Bedingungen folgt, dass in jedem lokalen Minimum für alle Knoten $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} x_v &= \frac{1}{d_G(v)} \sum_{u \in N(v)} x_u \\ y_v &= \frac{1}{d_G(v)} \sum_{u \in N(v)} y_u \end{aligned}$$

    Somit liegt jeder Knoten im Schwerpunkt seiner Nachbarn
  - durch Umformen der obigen Gleichungen (Grade auf die linke Seite) erhält man
    - ein lineares Gleichungssystem, beschrieben durch die Diagonalmatrix $D(G)$ mit Einträgen $d_G(v)$
    - Adjazenzmatrix $A(G)$
  - mit der *Laplace'schen Matrix* ($L(G) = D(G) - A(G)$) erhält man die *Optimalitätsbedingung* $L(G) \cdot x = 0,\ \ L(G) \cdot y = 0$

    Es gilt $L_{uv} = \begin{cases} d_G(v) & u = v \\ -A_{uv} & U \neq v \end{cases}$
- Kriterium (2):
  - Einschränken von $p/B(p)$
  - modifizieren von $B(p)$ zur Bewahrung der gewünschten Abstände

1 Schwerpunktlayout

- um zu verhindern, dass alle Knoten auf einem Punkt liegen, kann eine Menge von Knoten $V_0 \subseteq V$ als Nebenbedingung schon feste Positionen $\hat{p}_v = \binom{\hat{x}_v}{\hat{y}_v},\ v \in V_0$ erhalten (*Boundary-Knoten*)
- Umschreibung der Optimalitätsbedingungen (mit $L(G)^{V_0}$ bezeichnet die Laplace'sche Matrix ohne Zeilen und Spalten mit $v \in V_0$):

$$L(G)^{V_0} \cdot x_{V \setminus V_0} = \left(\sum_{u \in N(v) \cap V_0} \hat{x}_u \right)_{v \in V \setminus V_0}$$

  (entsprechend für y-Koordinaten)
- ein Layout heißt Schwerpunktlayout, falls

$$p_v = \begin{cases} \hat{p}_v & v \in V_0 \\ \dfrac{1}{d_G(v)} \displaystyle\sum_{u \in N(v)} p_u & v \notin V_0 \end{cases}$$

- es gibt ein eindeutiges Schwerpunktlayout, falls V_0 aus mindestens einem Knoten aus jeder Komponente besteht
  Beweisidee:
  - die Lösung ist eindeutig, falls $|L(G)^{v_t}|$ positiv ist
  - das gilt, falls man aus jeder Komponente mindestens einen Knoten herausnimmt und auf die *Boundary* legt (Matrix-tree-theorem, $|L(G)^{v_t}| = \#$ Spannbäume von G)
- Vergleich Algorithmus 13.
- jeder Knoten $v \in V \setminus V_0$ wird in den Schwerpunkt seiner Nachbarn gesetzt, durch die besondere Struktur von $L(G)$ konvergiert das Näherungsverfahren sehr schnell

2 Spektrallayout

- es wird ausgenutzt, dass die Optimalitätsbedingung auch als *Eigengleichung* von $L(G)$ gelesen werden kann
- eindimensionale Version von $B(p)$ entspricht der quadratischen $L(G)$:

$$\begin{aligned} x^T L(G) x &= x^T \left(d_G(v) x_v - \sum_{\{u,v\} \in E} \right) \\ &= \sum_{u \in V} \left(d_G(v) x_v^2 - \sum_{\{u,v\} \in E} x_u x_v \right) \\ &= \sum_{\{u,v\} \in E} \left(x_u^2 - 2 x_u x_v + x_v^2 \right) \\ &= \sum_{\{u,v\} \in E} (x_u - x_v)^2 \end{aligned}$$

- aus $L(G) \cdot x = \lambda \cdot x$ folgt

$$B(x) = x^T L(G) x = \lambda x^T x \Rightarrow \frac{x^T L(G) x}{x^T x} = \lambda = \frac{B(x)}{x^T x}$$

  $\Rightarrow$ Teilmengen der Lösung sind Invarianten zur Skalierung von x

$\Rightarrow$ 0 ist Eigenwert von $L(G)$

$\Rightarrow$ die Skalierung spielt keine Rolle, somit gilt $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} \dfrac{x^T L(G) x}{x^T x} = \min\limits_{x \in \mathbb{R}} \dfrac{B(x)}{x^T x} = 0$ (optimale Lösung ist enthalten)

- Eigenvektoren, die den kleinen positiven Eigenwerten entsprechen, enthalten eine kleine Energie

- wenn A eine reelle symmetrische Matrix ist und $x_1 \neq x_2$ Eigenvektoren von A mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann sind sie orthogonal ($x_1 \perp x_2 \iff x_1^T x_2 = 0$)
- alle Eigenwerte einer reellen Matrix sind reell
- $L(G)$ ist positiv semidefinit (alle Eigenwerte sind nicht negativ)
- wenn G verbunden ist, dann ist $(0, 1)$ das einzige Eigenpaar mit $\lambda = 0$
- $A^k x \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_n$, mit x_n ist der Eigenvektor mit größtem Eigenwert λ_n von A
- $\lambda_n(L(G)) \leq 2\Delta(G)$
- für alle $i = 0, \ldots, n-1$ gilt

$$\lambda_{n-i}(2\Delta(G) \cdot I - L(G)) = 2\Delta(G) - \lambda_{1+i}(L(G))$$

  mit I der Identitätsmatrix, λ_k Eigenwerte
  - *power iteration* mit umgekehrtem Spektrum, orthogonalisiert und normalisiert
  - Berechnung des Spektrallayouts durch zweimaliges Aufrufen der *power iteration* (Vergleich Algorithmus 14.)
- Ein Layout p mit $p_v = \binom{x_v}{y_v}$, für einen ungerichteten verbundenen Graphen, heißt Spektrallayout (mit $L(G)$), falls x, y normalisierte, orthogonale Eigenvektoren sind, die den kleinsten positiven Eigenwerten von $L(G)$ zugeordnet sind

Bemerkungen:

- für Eigenpaare $((0 = \lambda_1, 1 = x_1), (\lambda_2, x_2), \ldots, (\lambda_n, x_n))$ mit $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ benutzt das Spektrallayout x_2, x_3
- bestmögliche Wahl für die Optimierung von $B(p)$ unterliegen „Layout ist am unterschiedlichsten zu trivialen Lösungen“
- einfach auf mehr Dimensionen erweiterbar
- keine Begrenzungswahl notwendig

Nachteile:

- Fehler von $B(p)$ in den Regionen nah am *outer face*
- immer noch mögliche schlechte (Winkel-) Auflösung

Berechnung: Eigenpaare können direkt berechnet werden (aber $\mathcal{O}(n^3)$ Laufzeit)
$\Rightarrow$ iterativer Annäherungsansatz wird *pomer iteration* genannt

2.1 Entfernungen erhalten

Hierfür wird Kriterium (1) modifiziert zu
Kriterium (1’): Knoten sollen keine Nulldistanzen haben.
Es gibt zwei Hauptideen:

- Spring Ebedders / Kraft-gerichtete Modelle
- Multidimensionales Scaling (MDS)

3 Spring Embedder

- Realisierung von (1’) und (2)
- $B(p)$ entspricht einem physikalisches Modell des Graphen, mit Kanten als Federn mit Ideallänge
- Potenzialenergie einer Feder der Ideallänge l zwischen p und q beträgt $c \cdot (\|p - q\| - l)^2$ mit c als Dehnbarkeitskonstante
- möglich: Einheitslänge festlegen
- zwischen jedes Paar an Knoten werden Federn gespannt:

  Fall 1: $\{u, v\} \in E$: Kraft f_{spring} wirkt (anziehend)

  Fall 2: $\{u, v\} \notin E$: Kraft f_{rep} wirkt (anstoßend)

- gestartet wird von einem Initial-Layout
- „Let go“ und iteratives Anwenden der Kräfte
- bis das System in einem energieminimalen Zustand ist Vergleich Algorithmus 15.
- Berechnungsmöglichkeiten:

  Eades:
  - $f_{rep}(p_u, p_v) = \frac{c_{rep}}{\|p_v - p_u\|^2} \cdot \overrightarrow{p_u p_v}$
  - $f_{spring}(p_u, p_v) = c_{spring} \cdot \log \frac{\|p_v - p_u\|}{l} \cdot \overrightarrow{p_v p_u}$
  - c_{spring} ist die „Verschiebungskonstante“

  Fruchtermann/Reingold: Zur besseren Annäherung an physikalisches Gesetz wird eine dritte Kraft eingeführt
  - $f_{rep}(p_u, p_v) = \frac{l^2}{\|p_v - p_u\|} \cdot \overrightarrow{p_u p_v}$
  - $f_{attr}(p_u, p_v) = \frac{\|p_v - p_u\|^2}{l} \cdot \overrightarrow{p_v p_u}$
  - $f_{spring}(p_u, p_v) = f_{rep}(p_u, p_v) + f_{attr}(p_u, p_v)$
  - f_{spring} ähnlich wie Hooke's Gesetz (lineare Federn)
  - Kraft verschwindet, falls $\|p_u - p_v\| = l$
  - Kraft ist immer proportional zur Distanz

Bemerkungen:

Laufzeit: pro Iteration
- $\mathcal{O}(m)$ für f_{spring}
- $\mathcal{O}(n^2)$ für f_{rep}

Vorteile:
- intuitives Konzept (einfach zu verstehen)
- einfach zu implementieren
- gute Layouts für kleine / spärliche Graphen (zeigt Strukturen/Symmetrien)
- sehr flexible

Nachteile:
- endet nicht unbedingt in einem stabilen System / kann in schlechten lokalen Minima enden
- abhängig vom Initial-Layout

4 Multidimensional Scaling (MDS)

Grundidee:
- Kriterien (1) und (2) zusammen ausdrücken
- zwei Knoten sollen möglichst ähnlichen Abstand haben, wie der kürzeste Weg lang ist ($D = (d_{ij})_{i,j \in V}$)
- genaue Repräsentation für die meisten Graphen nicht möglich (z.B. Kreis der Länge 4)

Problemformulierung:
- für Objekte $V = \{1, \ldots, n\}$ und eine *Unähnlichkeitsmatrix* $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ soll ein Layout mit $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^2$ gefunden werden, sodass $\|p_i - p_j\| \approx d_{ij}$
- für GD wird für D als kürzeste Wege interpretiert

4.1 Klassisches Scaling

Analytischer Ansatz ist das Verwenden einer *spektralen Zerlegung*.

4.1.1 Ablauf

- Berechnung der Matrix $B = PP^T = X\Lambda X^T$ von inneren Produkten mit *double-centering*:

$$b_{ij} = -\frac{1}{2}\left(d_{ij}^2 - \frac{1}{n}\sum_k d_{kj}^2 - \frac{1}{n}\sum_l d_{il}^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{k,l} d_{kl}^2\right)$$

Vorteile:

- eindeutiges Ergebnis
- minimiert die Energiefunktion $strain(P) = \|B - PP^T\|$
- schnelle Annäherung möglich (PivotMDS)

Nachteile:

- Umweg über die inneren Produkte
- lange Distanzen sind so wichtig wie kurze Distanzen

4.2 Distanz Scaling (stress Minimierung)

- löst das MDS-Problem direkt mit Distanzen

$\Rightarrow$ Energiefunktion mit Gewichtsfunktion w_{ij}:

$$stress(P) = \sum_{i<j} w_{ij}(d_{ij} - \|p_i - p_j\|)^2$$

- im MDS gewöhnlich $w_{ij} = d_{ij}^q$
- im GD $w_{ij} = d_{ij}^{-2}$

Vorteile:

- robust gegenüber iterativer Annäherung $\Rightarrow$ *stress majorization*
- klassisches Scaling ist gutes Initial-Layout
- Qualität der Layouts ist gut vergleichbar mit „modernen“ Spring Embedders

Nachteile:

- resultierendes Gleichungssystem ist nicht linear (Optimierung ist $\mathcal{NP}$-vollständig)

Algorithmen

Algorithmus 1: Radiales Baumlayout

Input: Binärbaum $T = (V, E)$ mit Wurzel $R \in V$
Data: Anzahl n_v der Knoten in Teilbaum $T(v), v \in V$
Output: Polarkoordinaten $p_v = (d_v, \alpha_v), v \in V$

Function `postorder(`*vertex* v`)`
- $n_v \leftarrow 1$;
- **foreach** *Nachfolger* w *von* v **do**
  - Postorder(w);
  - $n_v \leftarrow n_v + n_w$;

Function `preorder(`*vertex* v, *double* t,α_{min},α_{max}`)`
- $d_v \leftarrow t$;
- $\alpha_v \leftarrow \frac{\alpha_{min}+\alpha_{max}}{2}$;
- **if** $t > 0$ **then**
  - $\alpha_{min} \leftarrow \max\{\alpha_{min}, \alpha_v - \arccos\frac{t}{t+1}\}$;
  - $\alpha_{max} \leftarrow \min\{\alpha_{max}, \alpha_v + \arccos\frac{t}{t+1}\}$;
- $left \leftarrow \alpha_{min}$;
- **foreach** *Nachfolger* w *von* v **do**
  - $right \leftarrow left + \frac{n_w}{n_v - 1} \cdot (\alpha_{max} - \alpha_{min})$;
  - Preorder(w,$t+1$,$left$,$right$);
  - $left \leftarrow right$;

begin
- Postorder(r);
- Preorder($r, 0, 0, 2\pi$);

Algorithmus 2: BICOMP

Input: ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Data: Zähler i für DFS-Nummerierung der Knoten
Stack S für nicht klassifizierte Kanten
Stack C der Repräsentaten auf aktuellem DFS-Weg
Output: DFS-Nummern (Knoten, Kanten), Blockrepräsentant $BICOMP$ zu jeder Kante

```
Function dfs(vertex v)
    i ← i + 1
    DFS[v] ← i
    while ∃ unnumerierte Kante e = {v, w} do
        DFS[e] ← DFS[v];
        PUSH(e, S);
        if w unnummeriert then
            PUSH(e, C);
            DFS(w);
            [Backtracking]
            if e = top(C) then
                repeat
                    e' = e;
                until e' ← POP(S);
                POP(C);
        else
            while DFS[top(C)] > DFS[w] do
                POP(C);
begin
    i ← 0;
    foreach s ∈ V do
        if s unnumeriert then
            DFS(s);
```

Algorithmus 3: *st*-Ordnung

Input: ungerichteter Grpah $G = (V, E)$, Kante $\{s, t\} \in E$
Data: ausgehende Baumkanten $CHILDEDGE$ für Knoten
Vorgängerknoten $PARENT$ für Knoten
Pfad P (aktuelles Ohr)
abhängige Nichtbaumkanten D von Baumkanten
Output: Liste L der Knoten in Bicomp. von $\{s, t\}$ (in der *st*-Ordnung)

Function `process_ears(`*Baumkante* $w \to x$`)`
- **foreach** $v \hookrightarrow w \in D[w \to x]$ **do**
  - $u \leftarrow v$; **while** $u \notin L$ **do**
    - $u \leftarrow PARENT[u]$; `// Pfad zurückgehen, bis zu altem Ohr, // das schon in` L`(orientiert) ist`
  - $P \leftarrow (u \overset{*}{\to} v \hookrightarrow w)$;
  - **if** *$w \to x$ von w nach x (oder x nach w) orientiert ist* **then**
    - orientiere P von w nach x (oder x nach w);
    - füge inneren Knoten von P unmittelbar vor (oder hinter) u in L ein;
  - **foreach** *Baumkante $w' \to x'$ von P* **do**
    - PROCESS_EARS$(w' \to x')$
- $D[\{w, x\}] \leftarrow \emptyset$;

Function `dfs(`*vertex* v`)`
- $i \leftarrow i + 1$
- $DFS[v] \leftarrow i$
- **while** $\exists$ *unnumerierte Kante* $e = \{v, w\}$ **do**
  - $DFS[e] \leftarrow DFS[v]$;
  - **if** *w unnummeriert* **then**
    - $CHILDEDGE[v] \leftarrow e$;
    - $PARENT[w] \leftarrow v$;
    - DFS(w);
  - **else**
    - $\{w, x\} \leftarrow CHILDEDGE[w]$;
    - $D[\{w, x\}] \leftarrow D[\{w, x\}] \cup \{e\}$;
    - **if** $x \in L$ **then**
      - PROCESS_EARS$(w \to x)$;

begin
- Initialisieren von L mit $s \to t$;
- $DFS[s] \leftarrow 1$;
- $i \leftarrow 1$;
- $DFS[\{s, t\}] \leftarrow 1$;
- $CHILDEDGE[s] \leftarrow \{s, t\}$;
- DFS(t);

Algorithmus 4: kanonische Ordnung

Input: triangulierter planarer Graph $G = (V, E)$ mit $C_0(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$
Data: mark(v)= true, falls v zu π hinzugefügt wurde
out(v)= true, falls $v \in C_0(G_k)$
chords(v)= # der *chords* von $C_0(G_k)$, dessen Endknoten v ist
Output: kanonische Ordnung $\pi = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

begin
- **forall the** $v \in V$ **do**
  - $chords(v) \leftarrow 0$;
  - $out(v) \leftarrow$ false;
  - $mark(v) \leftarrow$ false;
- $out(v_1), out(v_2), out(v_3) \leftarrow$ true; **for** $k = 3, \ldots, 3$ **do**
  - wähle $v \neq v_1, v_2$ mit $mark(v) =$ false, $out(v) =$ false, $chords(v) = 0$;
  - $v_k \leftarrow v$;
  - $mark(v) \leftarrow$ true;
  - $(w_1 = v_1, w_2, \ldots, w_{t-1}, w_t = v_2) \leftarrow C_0(G_{k-1})$;
  - $(w_p, \ldots, w_q) \leftarrow$ unmarkierte Nachbarn von v_k;
  - **for** $i = p, \ldots, q$ **do**
    - $out(w_i) \leftarrow$ true;
    - Update der chord-Zähler für w_i und alle seine Nachbarn;

Algorithmus 5: shift-Methode

Input: triangulierter palanerer Graph $G = (V, E)$, kanonische Ordnung $\pi = (v_1, \ldots, v_n)$
Data: Liste $L(v)$ mit allen Knoten, die mit dem Knoten v verschoben werden müssen
Output: planare, geradlinige Gitterzeichnung induziert durch die Koordinaten $P(v) = (x(v), y(v))$ für alle $v \in V$

begin
- $P(v_1) = (0, 0)$;
- $P(v_2) = (2, 0)$;
- $P(v_3) = (1, 1)$;
- $L(v_1) = \{v_i\}$ für $i = 1, 2, 3$;
- **for** $k = 4, \ldots, n$ **do**
  - $(w_1 = v_1, w_2, \ldots, w_{t-1}, w_t = v_2) \leftarrow C_0(G_{k-1})$;
  - $(w_p, \ldots, w_q) \leftarrow$ Nachbarn von v_k auf $C_0(G_{k-1})$;
  - **forall the** $v \in \bigcup_{i=p+1}^{q-1} L(w_i)$ **do**
    - $x(v) \leftarrow x(v) + 1$; `// Verschiebung um 1 nach rechts`
  - **forall the** $v \in \bigcup_{i=q}^{t} L(w_i)$ **do**
    - $x(v) \leftarrow x(v) + 2$; `// Verschiebung um 2 nach rechts`
  - $P(v_k) \leftarrow \mu(P(w_p), P(w_q))$; `//` $\mu(P_1, P_2) = (\frac{1}{2}(x_1 - y_1 + x_2 + y_2), \frac{1}{2}(-x_1 + y_1 + x_2 + y_2))$
  - $L(v_k) \leftarrow \{v_k\} \cup \bigcup_{i=p+1}^{q-1} L(w_i)$;

Algorithmus 6: Greedy-Algorithmus

Input: gerichteter Graph $D = (V, A)$
Data: A' neue Kantenmenge
Output: kreisfreier gerichteter Graph

```
begin
    A' ← ∅;
    foreach v ∈ V do
        if deg⁺(v) ≥ deg⁻(v) then
            A' ← A' ∪ δ⁺(v);
        else
            A' ← A' ∪ δ⁻(v);
        löschen von v und δ(v) aus D;
```

Algorithmus 7: verbesserter Greedy-Algorithmus

Input: gerichteter Graph $D = (V, A)$
Data: A' neue Kantenmenge
Output: kreisfreier gerichteter Graph

```
begin
    while V ≠ ∅ do
        while ∃ source v ∈ V do
            A' ← A' ∪ δ⁺(v);
            löschen von v und δ(v) aus D;
        while ∃ target v ∈ V do
            A' ← A' ∪ δ⁻(v);
            löschen von v und δ(v) aus D;
        Löschen aller isolierten Knoten aus V;
        if V ≠ ∅ then
            Let v ∈ V mit deg⁺(v) − deg⁻(v) maximal;
            A' ← A' ∪ δ⁺(v);
            löschen von v und δ(v) aus D;
```

Algorithmus 8: Longest Path Layering

Input: kreisfreier gerichteter Graph $D = (V, A)$
Output: Longest path layering von D
Data: V_{source}: die Menge aller aktuellen *source*-Knoten ($d(v) = 0$)
$d(v) = deg^-(v)$ für alle $v \in V$
L_i: Liste aller Knoten auf dem Layer i

```
begin
    i ← 0;
    while V ≠ ∅ do
        foreach v ∈ V_source do
            Zuweisung von v zu L_i;
            foreach (v, w) ∈ A do
                d(w) ← d(w) − 1;
            löschen von v;
        i ← i + 1;
```

Algorithmus 9: layer-by-layer sweep

Input: Lagen-Graph $G = (L_0 \cup \cdots \cup L_h, E)$

1. wähle eine zufällige Permutation für L_0
2. wiederhole für die angrenzenden Layer L_i, L_{i+1}:
   minimiere die Anzahl an Kreuzungen durch umsortieren von L_{i+1} (L_i bleibt fixiert)
3. wiederhole Schritt 2 in umgekehrter Reihenfolge (von L_h nach L_0)
4. wiederhole Schritt 2 und 3 bis die Anzahl an Kreuzungen sich nicht mehr verringert
5. wiederhole Schritt 1-4 mit anderer Start-Permutation

Algorithmus 10: Greedy switch Heuristik

Input: zweichichtiger Graph (two Layer) $G = (L_1 \cup L_2, E)$ mit Kreuzungszahlen c_{uv}

begin
  repeat
    for $v = 1, \ldots, |L_2| - 1$ **do**
      if $c_{v(v+1)} > c_{(v+1)v}$ **then**
        tausche die Positionen von v und $v + 1$
  until *cross*(G, X_1, X_2) *sich nicht mehr verändert*;

Algorithmus 11: Barycenter Heuristik

Input: zweichichtiger Graph (two Layer) $G = (L_1 \cup L_2, E)$ mit Kreuzungszahlen c_{uv}
Output: G mit weniger Kreuzungen, mit 0 Kreuzungen, falls G kreuzungsfrei

begin
  for $v = 1, \ldots, |L_2|$ **do**
    $bary(v) = \frac{1}{deg(v)} \sum_{u \in N(v)} X_1(u)$
    if $bary(v) = bary(w), w \neq v$ **then**
      trenne die Knoten durch einen kleinen Abstand
  sortiere L_2 nach den bary-Werten und setze X_2 entsprechend

Algorithmus 12: Median-Heuristik

Input: zweichichtiger Graph (two Layer) $G = (L_1 \cup L_2, E)$ mit Kreuzungszahlen c_{uv}
Output: G mit weniger Kreuzungen, mit 0 Kreuzungen, falls G kreuzungsfrei

begin
  for $v = 1, \ldots, |L_2|$ **do**
    $v_1, \ldots, v_k \leftarrow N(v)$ mit $X_1(v_1) < \cdots < X_1(v_k)$
    $m(v) \leftarrow \begin{cases} 0 & N(v) = \emptyset \\ X_1(v_{\lceil \frac{k}{2} \rceil}) & \text{sonst} \end{cases}$
    if $m(v)_m(w), v \neq w$ **then**
      trenne $m(v)$ und $m(w)$ durch einen kleinen Abstand
  sortiere L_2 nach den m-Werten und setze X_2 entsprechend

Algorithmus 13: Schwerpunktlayout (Gauss-Seidel-Iteration)

Input: ungerichteter Graph, fixierte Knotenpositionen $\hat{p}_v,\ v \in V_0$
Output: Knotenpositionen $p_v,\ v \in V\ (p_v ? \hat{p}_v,\ \forall v \in V_0)$

begin
  $p \leftarrow 0$
  foreach $v \in V_0$ **do**
    $p_v \leftarrow \hat{p}_v$
  while *p ändert sich nicht mehr nennenswert* **do**
    foreach $v \in V \setminus V_0$ **do**
      $p_v \leftarrow \frac{1}{d_G(v)} \left(\sum_{u \in N(v)} p_u \right)$

Algorithmus 14: Power Iteration

Input: ungerichteter verbundener Graph, Menge an i kleinsten Eigenvektoren $\{v_1, \ldots, v_i\}$
Output: Eigenvektor $i+1$

begin
  $x \leftarrow random(span(v_1, \ldots, v_i)^{\perp})$
  while *x ist keine gute Annäherung an Eigenvektor* **do**
    $x' \leftarrow 0$
    foreach $v \in V$ **do**
      $x'_v \leftarrow (2\Delta(G) - d_G(v)) \cdot x_v + \sum_{\{u,v\} \in E}$; `// Matrix-Vektor-Multiplikation`
    $x \leftarrow x' - \sum_{k=1}^{i} \frac{x'^T v_i}{v_i^T v_i} v_i$; `// Orthogonalisierung`
    $x \leftarrow \frac{x}{\|x\|}$; `// Normalisierung`

Algorithmus 15: Spring Embedder

Input: ungerichteter Graph, initial layout $p = (p_v)_{v \in V}$, Terminierungskriterium $\epsilon > 0$, $K \in \mathbb{N}$
Data: Kräfte $F_v(t)$ auf dem Knoten v in Iteration t, Kühlfaktor $\delta(t)$ für Iteration t
Output: Positionen p mit geringer Spannung („low tension“)

begin
  $t \leftarrow 1$
  while $t < K$ *und* $\max_{v \in V} \|F_v(t)\| > \epsilon$ **do**
    foreach $v \in V$ **do**
      $F_v(t) \leftarrow \sum_{u\ :\ \{u,v\} \notin E} f_{rep}(p_u, p_v) + \sum_{u\ :\ \{u,v\} \in E} f_{spring}(p_u, p_v)$
    foreach $v \in V$ **do**
      $p_v \leftarrow p_v + \delta(t) \cdot F_v(t)$
    $t \leftarrow t + 1$