

Zusammenfassung für Analysis I

(Prof. Dr. Schnürer)

Wintersemester 2014/2015

von Dagmar Sorg

GRUNDLAGEN: LOGIK, MENGENLEHRE

UND REELLE ZAHLEN

KAP. 1

PART 1.1

LOGISCHE GRUNDLAGEN

Definition (Aussage)

- (i) Eine **Aussage** ist etwas, dem der Wahrheitsgehalt „wahr“ oder „falsch“ zugeordnet ist.
- (ii) Eine **Aussageform** ist eine Aussage, die eine noch unbestimmte oder freie Variable enthält.

Definition (Negation, Verneinung)

Ist p eine Aussage, so bezeichnet $\neg p$ die Negation dieser Aussage.

Definition (Konjunktion)

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \wedge q$ („ p und q “) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

p	q	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Definition (Disjunktion)

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \vee q$ („ p oder q “) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Definition (Kontravalenz)

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \dot{\vee} q$ („entweder p oder q “) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

p	q	$p \dot{\vee} q$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Definition (Implikation)

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \Rightarrow q$ („ p impliziert q “) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

p	q	$p \Rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

- (i) p heißt *Voraussetzung, Prämisse* oder *hinreichende Bedingung* für q
- (ii) q heißt *Behauptung, Konklusion* oder *notwendige Bedingung*

D. 1.1

D. 1.3

D. 1.5

D. 1.6

D. 1.7

D. 1.8

Definition

D. 1.10

- (i) Seien p, q Aussagen. Definiere $p \Leftrightarrow q$ („ p und q sind äquivalent“, „genau dann, wenn p gilt, gilt auch q “) durch

p	q	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

- (ii) p_1, p_2, \dots heißen äquivalent, falls für je zwei dieser Aussagen, p und q , $p \Leftrightarrow q$ gilt.

Proposition

P. 1.11

Seien p, q, r Aussagen. Dann gelten

- (i) $\neg\neg p \Leftrightarrow p$
- (ii) $p \vee \neg p$
- (iii) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ (Symmetrie)
- (iv) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ (Symmetrie)
- (v) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ (Symmetrie)
- (vi) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ (Idempotenz)
- (vii) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ (Idempotenz)
- (viii) $(p \wedge q) \Rightarrow p$
- (ix) $p \Rightarrow (p \vee q)$
- (x) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r))$
- (xi) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r))$
- (xii) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r))$
- (xiii) $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$ (Assoziativität)
- (xiv) $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ (Assoziativität)
- (xv) $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ (Distributivität)
- (xvi) $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (Distributivität)
- (xvii) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$ (De Morgan)
- (xviii) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$ (De Morgan)
- (xix) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$
- (xx) $((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
- (xxi) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- (xxii) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$
- (xxiii) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$
- (xxiv) $p \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r))$ (Fallunterscheidung)

ERSTE MENGENLEHRE

PART 1.2

Definition (naive Definition einer Menge)

D. 1.12

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten, Elemente genannt. Ist A eine Menge, x ein Objekt, so schreiben wir $x \in A$, falls x ein Element von A ist. $x \notin A \Leftrightarrow \neg(x \in A)$
Für eine Menge A , die genau die Elemente a, b und c enthält, schreiben wir $A = \{a, b, c\}$.
Es ist irrelevant, ob a mehrfach auftaucht oder wie die Elemente angeordnet werden.

Definition

D. 1.13

Seien A, B Mengen.

- (i) Dann ist A eine Teilmenge von B ($A \subset B$ oder $A \subseteq B$), falls aus $x \in A$ auch $x \in B$ folgt.
- (ii) A und B heißen gleich ($A = B$), falls $A \subset B$ und $B \subset A$ gelten.
 $A \neq B \Leftrightarrow \neg(A = B)$ (Extensionalitätsaxiom)
- (iii) Schreibe $A \subsetneq B$ für $A \subset B$ und $A \neq B$.

Lemma

Seien A, B, C Mengen. Dann gelten:

- (i) $A \subset A$ (Reflexivität)
- (ii) $x \in A$ und $A \subset B$ implizieren $x \in B$
- (iii) $A \subset B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (Transitivität)

Axiom (Aussonderungssaxiom)

Sei A eine Menge und $a(x)$ eine Aussageform. Dann gibt es eine Menge B , deren Elemente genau die $x \in A$ sind, die $a(x)$ erfüllen.

Schreibe $B = \{x \in A : a(x)\}$.

Bemerkung

Zu jeder Menge A gibt es eine Menge B und eine Aussageform $a(x) : A = \{x \in B : a(x)\}$.
Nehme $B = A, a(x) = (x \in A)$.

Bemerkung (Russelsche Antinomie)

Nimmt man im Aussonderungssaxiom statt A die „Allmenge“ (Menge aller Elemente), dann bekommt man Probleme:

Sei $A = \text{Allmenge}$, $B = \{x \in A : x \notin x\}$. Es gilt $y \in B \Leftrightarrow (y \in A \wedge y \notin y) \Leftrightarrow y \notin y$.

Gilt $B \in B$? \rightarrow Widerspruch.

Lemma (Existenz der leeren Menge)

Es gibt eine Menge \emptyset , die leere Menge, die kein Element enthält. Sie erfüllt:

- (i) $\emptyset \subset A$ für alle Mengen A
- (ii) \emptyset ist eindeutig bestimmt.

QUANTOREN

Definition

Sei A eine Menge, $a(x)$ eine Aussageform.

- (i) **Existenzquantor:** Wir schreiben $\exists x \in A : a(x)$ oder $\exists_{x \in A} a(x)$ für „Es gibt ein x in der Menge A , sodass dieses x $a(x)$ erfüllt.“
Schreibe $\exists! x \in A : a(x)$ für es gibt genau ein $x \in A$ mit $a(x)$. Dies zeigt man, indem man $\exists x \in A : a(x)$ und für alle $x, y \in A$ mit $a(x), a(y) : x = y$ zeigt.
- (ii) **Allquantor:** Schreibe $\forall x \in A : a(x)$ oder $\forall_{x \in A} a(x)$ manchmal auch $a(x) \forall x \in A$ für „Für alle $x \in A$ gilt $a(x)$.“

Lemma

Seien A, B Mengen. $p(x), p(x, y)$ Aussageformen. Dann gelten

- (1.1) $\forall_{x \in A} \forall_{y \in B} p(x, y) \iff \forall_{y \in B} \forall_{x \in A} p(x, y)$
- (1.2) $\exists_{x \in A} \exists_{y \in B} p(x, y) \iff \exists_{y \in B} \exists_{x \in A} p(x, y)$
- (1.3) $\exists_{x \in A} \forall_{y \in B} p(x, y) \implies \forall_{y \in B} \exists_{x \in A} p(x, y)$
- (1.4) $\neg \left(\forall_{x \in A} p(x) \right) \iff \exists_{x \in A} \neg p(x)$
- (1.5) $\neg \left(\exists_{x \in A} p(x) \right) \iff \forall_{x \in A} \neg p(x)$

L. 1.14

A. 1.15

Bem. 1.17

Bem. 1.18

L. 1.19

PART 1.3

D. 1.20

L. 1.22

Axiom (Existenz einer Obermenge)

A. 1.24

Sei \mathcal{M} eine Menge von Mengen. Dann gibt es eine Menge M (=Obermenge) mit $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A \subset M$.

Bemerkung: M ist eindeutig bestimmt.

Definition (Vereinigung und Durchschnitt)

D. 1.25

Seien A, B Mengen mit Obermenge X .

- (i) Dann ist die **Vereinigung** von A und B ($A \cup B$) definiert durch $A \cup B := \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$
- (ii) der (**Durch-**) **Schnitt** von A und B ($A \cap B$) ist definiert durch $A \cap B := \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$

Sei \mathcal{M} eine Menge von Mengen mit Obermenge X .

- (i) Vereinigung: $\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A := \{x \in X : (\exists A \in \mathcal{M} : x \in A)\}$
- (ii) Schnitt: $\bigcap_{A \in \mathcal{M}} A := \{x \in X : (\forall A \in \mathcal{M} : x \in A)\}$

Bemerkung

Bem. 1.26

Enthält \mathcal{M} keine Menge, so gelten $\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A = \emptyset$ sowie $\bigcap_{A \in \mathcal{M}} A = X$

Definition (Disjunkte Mengen)

D. 1.27

Seien A, B Mengen.

- (i) A und B heißen disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$. Schreibe in diesem Fall $A \dot{\cup} B$ statt $A \cup B$
- (ii) Sei \mathcal{M} eine Menge von Mengen. Dann heißen die Mengen in \mathcal{M} disjunkt, falls für $A, B \in \mathcal{M}, A \neq \emptyset$ stets $A \cap B = \emptyset$ gilt. Schreibe $\dot{\bigcup}_{A \in \mathcal{M}} A$ statt $\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A$.

Definition (Komplement)

D. 1.28

Seien A, B Mengen mit fester Obermenge X .

- (i) Definiere das **Komplement** von A in B durch $B \setminus A := \{x \in B : x \notin A\}$
- (ii) Definiere das Komplement von A durch $\complement A \equiv A^c := \{x \in X : x \notin A\}$

Proposition

P. 1.29

Seien A, B, C Mengen mit Obermenge X . Dann gelten:

- (i) $A \cup B = B \cup A$ (Kommutativität)
- (ii) $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativität)
- (iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Assoziativität)
- (iv) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Assoziativität)
- (v) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (Distributivität)
- (vi) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (Distributivität)
- (vii) $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ (De Morgansche Regel)
- (viii) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ (De Morgansche Regel)
- (ix) $\complement \complement A = A$
- (x) $A \cup \complement A = X$
- (xi) $A \setminus B = A \cap \complement B$

Axiom (Potenzmenge)

A. 1.30

Sei A eine beliebige Menge. Dann gibt es die Menge $\mathcal{P}(A)$ (oder 2^A), die Potenzmenge von A . Die Elemente von $\mathcal{P}(A)$ sind genau die Teilmengen von A .

Axiom (Kartesisches Produkt)

A. 1.32

Seien A, B Mengen. Dann gibt es eine Menge, das Kartesische Produkt von A und B ($A \times B$), die aus allen geordneten Paaren (a, b) mit $a \in A, b \in B$ besteht. a heißt erste, b heißt zweite Komponente des Paares (a, b) .

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Bemerkung

Bem. 1.33

$$(a, b) \equiv \{a, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(A \cup \mathcal{P}(A \cup B))$$

Definition (Funktion, Ableitung)

D. 1.34

Seien A, B Mengen.

- (i) Eine Funktion (oder Abbildung) f von A nach B , $f : A \rightarrow B$, ist eine Teilmenge von $A \times B$, sodass es zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in f$ gibt: $\forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in f$.

Schreibe $b = f(a)$, $a \mapsto b$.

Definiere den Graphen von f :

$$\text{graph } f := \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\} = f \subset A \times B$$

- (ii) A heißt **Definitionsbereich** von f , $D(f)$.

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} \equiv \{y \in B : (\exists x \in A : \underbrace{f(x) = y}_{(x,y) \in f})\} = \text{im } f = R(f)$$

heißt **Bild** oder **Wertebereich** von f .

- (iii) Sei $M \subset A$ beliebig.

$$f(M) := \{y \in B : (\exists x \in M : f(x) = y)\} \equiv \{f(x) : x \in M\}$$

Somit induziert $f : A \rightarrow B$ eine Funktion $\mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$, die wir wieder mit f bezeichnen.

- (iv) Zu einer beliebigen Funktion $f : A \rightarrow B$ definieren wir die **Urbildabbildung**

$$f^{-1} : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A) \text{ mit } f^{-1}(M) := \{x \in A : f(x) \in M\}, M \subset B \text{ beliebig.}$$

$f^{-1}(M)$ heißt **Urbild** von M unter f .

Bemerkung

Bem. 1.35

$f : A \rightarrow B$ und $g : C \rightarrow D$ sind gleich, falls sie als Teilmengen von $A \times B$ bzw. $C \times D$ gleich sind, insbesondere $B = D$.

Definition

D. 1.36

Sei $f : A \rightarrow B$.

- (i) f heißt **injektiv**, falls für alle $x, y \in A$ aus $f(x) = f(y)$ auch $x = y$ folgt.
- (ii) f heißt **surjektiv**, falls $f(A) = B$. Wir sagen, dass f die Menge A auf B abbildet. Bei nicht-surjektiven Abbildungen sagt man A wird nach oder in B abgebildet.
- (iii) f heißt **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist. f ist eine **Bijektion**.
- (iv) Ist f injektiv, so definieren wir die **Inverse** von f durch $f^{-1} : R(f) \rightarrow A$ mit $f(x) \mapsto x$. Es gilt $f^{-1}(f(x)) = x$.

Bemerkung

Bem. 1.37

- (i) $\mathcal{I}(f(x))$ bezeichnet die **Inverse** von $f(x)$.
- (ii) $U(\{f(x)\})$ bezeichnet die Umkehrabbildung der Menge $\{f(x)\}$, sie ist definiert durch $U : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ mit $M \subset B \mapsto \{x \in A : f(x) \in M\}$.
- (iii) $f : A \rightarrow B$ induziert $g : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$
 $\Rightarrow \{f(x)\} = g(\{x\})$

Definition (Komposition von Abbildungen)

D. 1.38

Seien $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ Abbildungen. Dann heißt $g \circ f : A \rightarrow C$ mit $x \mapsto g(f(x))$ **Komposition** von f und g .

Bemerkung

Bem. 1.40

Seien $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$ Abbildungen. Dann gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Sowie für Inverse und Umkehrabbildungen:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Definition (Relationen)

D. 1.41

Seien A, B Mengen.

- (i) $R \subset A \times B$ heißt **Relation**. Statt $(x, y) \in R$ sagen wir $R(x, y)$ gilt.
- (ii) $R \subset A \times A$ heißt
 - (a) **reflexiv**, falls $R(x, x)$ für alle $x \in A$ gilt
 - (b) **symmetrisch**, falls $R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$ für alle $x, y \in A$
 - (c) **antisymmetrisch**, falls $R(x, y) \wedge R(y, x) \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in A$
 - (d) **transitiv**, falls $R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)$ für alle $x, y, z \in A$
- (iii) $R \subset A \times A$ heißt **Äquivalenzrelation**, falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Schreibweise bei Äquivalenzrelationen: $x \sim y$ statt $R(x, y)$

Definition

D. 1.42

Sei $R \subset A \times A$ eine Äquivalenzrelation. Sei $x \in A$. dann heißt $[x] := \{y \in A : R(x, y)\}$ **Äquivalenzklasse von x** . Schreibe $y \equiv x \pmod{R}$ für $y \in [x]$.
 $A/R := \{[x] : x \in A\}$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen von R .

DIE REELLEN ZAHLEN

PART 1.5

Definition

D. 1.44

Die reellen Zahlen, \mathbb{R} , sind eine Menge mit den folgenden Eigenschaften:

- (A) \mathbb{R} ist ein Körper, d.h. es gibt die Abbildung
 - (i) $+$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die **Addition**, schreibe $x + y$ für $x(x, y)$
 - (ii) \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die **Multiplikation**, mit $(x, y) \mapsto x \cdot y \equiv xy$ bezeichnet und zwei ausgezeichneten Elementen: $0, 1$ mit $0 \neq 1$

Es gilt, soweit nicht anders angegeben, für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$:

- (K1) $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (K2) $x + y = y + x$
- (K3) $0 + x = x$
- (K4) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$, Schreibe $-x$ für y : $x + (-x) = 0$
- (K5) $(xy)z = x(yz)$
- (K6) $xy = yx$
- (K7) $1x = x$
- (K8) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{R} : xy = 1$, Schreibe x^{-1} für y : $xx^{-1} = 1$
- (K9) $x(y + z) = xy + xz$
- (B) \mathbb{R} ist ein angeordneter Körper, d.h. es gibt eine Relation $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (schreibe $x \leq y$ für $R(x, y)$), die für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ folgendes erfüllt:
 - (O1) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität)
 - (O2) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)
 - (O3) es gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$
 - (O4) aus $x \leq y$ folgt $x + z \leq y + z$
 - (O5) aus $0 \leq x$ und $0 \leq y$ folgt $0 \leq xy$.

Schreibe $y \geq x$ statt $x \leq y$ und $x < y$ bzw. $y > x$ für $x \leq y$ und $x \neq y$

- (C) \mathbb{R} ist vollständig, d.h. jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} besitzt ein Supremum in \mathbb{R} .

Definition (Ordnung)

D. 1.45

Eine transitive, antisymmetrische Relation \leq , für die stets $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt, heißt (**totale**) **Ordnung**.

Definition (Supremum, Infimum)

D. 1.46

- (i) $A \subset \mathbb{R}$ heißt **nach oben beschränkt**, falls es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $y \leq x, \forall y \in A$ gibt.
- (ii) $x_0 \in \mathbb{R}$ ist eine **obere Schranke** von $A \subset \mathbb{R}$, falls $y \leq x_0, \forall y \in A$.
- (iii) $x_0 \in \mathbb{R}$ ist das **Supremum** von $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 = \sup A$, falls für jede obere Schranke x von A stets $x \geq x_0$ gilt. x_0 heißt **kleinste obere Schranke**.
- (iv) Ist $\sup A \in A$, so heißt $\sup A$ **Maximum** von A .
- (v) Ist $A \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, so gibt $\sup A = +\infty$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ vereinbaren wir $-\infty < x < +\infty$.
- (vi) Entsprechend: **nach unten beschränkt, untere Schranke, Infimum (=größte untere Schranke), Minimum**.
Ist A nach unten unbeschränkt, so gilt $\inf A = -\infty$. Alternativ: $-A = \{-a : a \in A\}, A \subset \mathbb{R}$.
 A heißt nach **unten beschränkt**, falls $-A$ nach oben beschränkt ist. $x = \inf A$, falls $-x = \sup -A$.
- (vii) Ist $A \subset \mathbb{R}$ nach oben und unten beschränkt, so heißt A **beschränkt**.

Bemerkung

Bem. 1.47

$\sup \emptyset = -\infty$ und $\inf \emptyset = +\infty$

Definition

D. 1.49

Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

- (i) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (offenes Intervall)
- (ii) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (halboffenes Intervall)
- (iii) $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (halboffenes Intervall)
- (iv) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)

a, b heißen **Endpunkte** der Intervalle.

Lemma

L. 1.50

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

Lemma

L. 1.51

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gelten

- (i) $(-1)x = -x$
- (ii) $-(-x) = x$
- (iii) $(-1)(-1) = 1$

Lemma

L. 1.52

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist die additive Inverser $-x$ eindeutig bestimmt.

Lemma

L. 1.53

Es gelten $0 < 1$ und $-1 < 0$.

Lemma

L. 1.54

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt genau ein der drei folgenden Aussagen:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y$$

Lemma

L. 1.55

Gelte $0 < x < y$. Dann gelten:

- (i) $0 < x^{-1}$
- (ii) $0 < y^{-1} < x^{-1}$

Lemma

L. 1.56

$x, y \in \mathbb{R}$. Gilt $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0$.

Lemma

L. 1.57

Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

- (i) Aus $0 \leq a \leq b$ folgt $a^2 \leq b^2$
- (ii) Aus $a^2 \leq b^2$ und $b \geq 0$ folgt $a \leq b$.

Mit $a^2 = a \cdot a$.

Definition (Natürliche Zahlen)

Die natürlichen Zahlen \mathbb{N} sind die kleinste Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ mit

(N1) $0 \in A$

(N2) $a + 1 \in A, \forall a \in A$

\mathbb{N} ist die kleinste Menge mit (N1), (N2) in dem Sinn, dass für alle $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$ mit \mathcal{N} erfüllt (N1) und (N2) auch $\mathbb{N} \subset \mathcal{N}$ gilt.

Lemma

Es gibt die natürlichen Zahlen. Sie sind eindeutig bestimmt.

Lemma (Peanoaxiome)

Es gelten:

(i) $0 \in \mathbb{N}$

(ii) jedes $a \in \mathbb{N}$ besitzt genau einen Nachfolger $a^+ \in \mathbb{N}$

(iii) 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl

(iv) $\forall n, m \in \mathbb{N} : m^+ = n^+ \Rightarrow n = m$

(v) Sei $X \subset \mathbb{R}$ beliebig mit $0 \in X$ und $n^+ \in X, \forall n \in X$. Es folgt $\mathbb{N} \subset X$

Der Nachfolger von $a \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $a^+ := a + 1 \in \mathbb{N}$.

Theorem

\mathbb{R} ist **archimedisch**, d.h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $\mathbb{N} \ni n \geq n_0$ auch $n \geq x$ gilt.

Korollar

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und sei $a > 0$.

(i) Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $an \geq x$

(ii) Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{m} \leq a$

(iii) Ist $a \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (oder alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$), so ist $a \leq 0$.

Theorem (Vollständige Induktion)

Erfüllt $M \subset \mathbb{N}$ die Bedingungen

(i) $0 \in M$

(Induktionsanfang)

(ii) $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$

(Induktionsschritt)

so gilt $M = \mathbb{N}$.

Theorem

Sei p eine Aussageform auf \mathbb{N} . Gelten

(i) $p(0)$ und

(ii) $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

so gilt $p(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition (Familie, Folge)

(i) Seien \mathcal{I}, X Mengen, $f : \mathcal{I} \rightarrow X$ eine Abbildung. Dann heißt f auch **Familie**: $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ mit $x_i = f(i), \forall i \in \mathcal{I}$ (\mathcal{I} bezeichnet die Indexmenge).

(ii) Ist $\mathcal{I} = \mathbb{N}$, so heißt $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ **Folge**: $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset X$.

(iii) Ist $J \subset \mathcal{I}$, so heißt $(x_j)_{j \in J}$ **Teilfamilie** von $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$, falls die Werte auf J übereinstimmen.

(iv) Ist $\mathcal{I} = \mathbb{N}$, $J \subset \mathbb{N}$ unendlich, so heißt $(x_j)_{j \in J}$ **Teilfolge** von $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Ist $(j_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset J$ eine Folge mit $j_{k+1} > j_k, \forall k$ und $J = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{j_k\}$, so schreibe $(x_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$ für die Teilfolge.

(v) Sei $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie. Ist $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\} (\rightarrow (x_i)_{1 \leq i \leq n})$:

(a) $n = 2$: Die Familie heißt **Paar** (x_1, x_2)

(b) $n = 3$: Die Familie heißt **Triple** (x_1, x_2, x_3)

(c) n beliebig: Die Familie heißt **n -Tupel** (x_1, x_2, \dots, x_n)

Definition

D. 1.68

Sei $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen mit Obermenge X .

(i) $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i := \{x \in X : (\exists i \in \mathcal{I} : x \in A_i)\}$

(ii) $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i := \{x \in X : (\forall i \in \mathcal{I} : x \in A_i)\}$

(iii) $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\} : \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$, sowie $\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i$

Definition

D. 1.69

Ist $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie reeller Zahlen, so gilt

$\sup_{i \in \mathcal{I}} x_i := \sup\{x_i : i \in \mathcal{I}\}$, sowie

$\inf_{i \in \mathcal{I}} x_i := \inf\{x_i : i \in \mathcal{I}\}$.

Proposition

P. 1.70

(i) Seien $A, B \subset \mathbb{R}, A \subset B$.

$\Rightarrow \sup A \leq \sup B, \inf A \geq \inf B$.

(ii) Sei $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen $A_i \subset \mathbb{R}, \forall i \in \mathcal{I}$. Dann definiere

$A := \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$

$\Rightarrow \sup A = \sup_{i \in \mathcal{I}} \sup A_i$ und $\inf A = \inf_{i \in \mathcal{I}} \inf A_i$.

Definition

D. 1.71

(i) Sei A eine Menge, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt **nach oben (unten) beschränkt**, falls für $f(A)$ gilt:

(a) $\sup f(A) = \sup_{x \in A} f(x)$

(b) $\inf f(A) = \inf_{x \in A} f(x)$

(ii) Sei A eine Menge und $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Familie von Funktionen. Gilt für alle $x \in A$, dass $\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i(x) < \infty$, so definieren wir die Funktion

$\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$
 $(\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i)(x) := \sup_{i \in \mathcal{I}} f_i(x)$

(iii) Ohne $\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i(x) < \infty$ erhalten wir mit derselben Definition $\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) Analog für $\inf_{i \in \mathcal{I}} f_i$.

(v) Ist $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ gilt

$\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i = \sup(f_1, \dots, f_n) = \max(f_1, \dots, f_n)$.

Entsprechend für Infimum/Minimum.

Definition (Kartesisches Produkt)

D. 1.72

(i) Sei $\mathcal{I} \neq \emptyset$ und $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen. Definiere das **kartesische Produkt** wie folgt:

$\prod_{i \in \mathcal{I}} A_i := \{(x_i)_{i \in \mathcal{I}} : (\forall i \in \mathcal{I} : x_i \in A_i)\}$

(ii) Zu $j \in \mathcal{I}$ definieren wir die j -te Projektionsabbildung

$\pi_j : \prod_{i \in \mathcal{I}} A_i \rightarrow A_j$ mit $\pi_j((x_i)_{i \in \mathcal{I}}) := x_j$

Axiom

A. 1.74

Sei $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen $A_i \neq \emptyset, \forall i \in \mathcal{I}$. Dann gilt $\prod_{i \in \mathcal{I}} A_i \neq \emptyset$, d.h. es gibt eine Familie $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ mit $x_i \in A_i, \forall i \in \mathcal{I}$.

Proposition

Sei $\mathcal{I} \neq \emptyset$ und $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen. Dann gilt $\prod_{i \in \mathcal{I}} A_i = \emptyset \iff \exists i \in \mathcal{I} : A_i \neq \emptyset$.

P. 1.75

Lemma (Zornsches Lemma)

Sei $M \neq \emptyset$ mit einer Teilordnung (= partielle Ordnung) \leq . Nehme an, jede total geordnete Teilmenge $\Lambda \subset M$ (= Kette) besitzt eine obere Schranke $b \in M$, d.h. $x \leq b, \forall x \in \Lambda$. Dann enthält M ein maximales Element x_0 , d.h. $\exists x_0 \in M : x \geq x_0 \Rightarrow x = x_0$.

L. 1.76

Definition (Ausschöpfung, Partition, Überdeckung)

Sei A eine Menge.

- (i) Eine **Überdeckung** von A ist eine Familie $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ mit $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \supset A$.
- (ii) Eine **Partition** von A ist eine Überdeckung $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ mit $A_i \subset A$ und $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \in \mathcal{I}, A = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$.
- (iii) Eine **Ausschöpfung** von A ist eine aufsteigende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen von A , die $A_m \subset A_n, \forall m \leq n$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$ erfüllt.

D. 1.77

Proposition

- (i) Sei \sim eine Äquivalenzrelation auf A . Dann bilden die **Restklassen** von \sim eine Partition von A .
- (ii) Sei $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Partition von A . Dann ist \sim mit $x \sim y :\Leftrightarrow \exists i \in \mathcal{I} : x, y \in A_i$ eine Äquivalenzrelation auf A .

P. 1.78

Lemma

Seien A, B Mengen. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von A . Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Abbildungen $f_n : A_n \rightarrow B$ mit $f_n|_{A_m} = f_m$ für alle $m \leq n$. Dann gibt es genau eine Funktion $f : A \rightarrow B$ mit $f(x) = f_n(x), \forall x \in A_n$ oder $f|_{A_n} = f_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

L. 1.79

Proposition (Rekursive Definition)

Sei $B \neq \emptyset$ eine Menge, $x_0 \in B$ und $F : \mathbb{N} \times B \rightarrow B$ eine Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow B$ mit den Ergebnissen:

- (i) $f(0) = x_0$ und
- (ii) $f(n+1) = F(n, f(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

f ist eine rekursiv definierte Funktion.

P. 1.80

KARDINALITÄT

PART 1.6

Definition (Mächtigkeit)

Seien A, B Mengen.

- (i) A, B heißen **gleich mächtig** ($A \sim B$), falls es eine Bijektion $f : A \rightarrow B$ gibt.
- (ii) B heißt **mächtiger** als A ($B \succ A$) oder A **weniger mächtig** als B ($A \prec B$), falls es eine injektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ gibt.
- (iii) A heißt **abzählbar**, falls $A \sim \mathbb{N}$.
- (iv) A heißt **höchstens abzählbar**, falls $A \prec \mathbb{N}$.
- (v) A heißt **überabzählbar**, falls A nicht höchstens abzählbar ist.
- (vi) Sei A abzählbar, so heißt die Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine **Abzählung** von A , falls $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\} = A$.

D. 1.84

Bemerkung

Bem. 1.85

- (i) \sim ist Äquivalenzrelation
- (ii) $A \prec B \prec C \Rightarrow A \prec C$
- (iii) $A \prec A$
- (iv) $G := \{2n : n \in \mathbb{N}\}, G \prec \mathbb{N} : 2n \mapsto 2n$ und $\mathbb{N} \prec G : n \mapsto 2n$. Bijektiv: $\mathbb{N} \sim G$

Theorem (Schröder-Bernstein)

T. 1.86

Aus $A \prec B$ und $B \prec A$ folgt $A \sim B$.

Proposition

P. 1.87

A, B, C sind Mengen. Seien $\varphi : A \rightarrow B, \psi : B \rightarrow C$ Abbildungen. Sei $f : A \rightarrow B$ Abbildung. Dann gelten:

- (i) Ist $\psi \circ \varphi$ injektiv, so ist φ injektiv
- (ii) Ist $\psi \circ \varphi$ surjektiv, so ist ψ surjektiv
- (iii) f surjektiv $\Leftrightarrow \exists g : B \rightarrow A, f \circ g = id_B$
- (iv) f injektiv $\Leftrightarrow \exists g : B \rightarrow A, g \circ f = id_A$

Korollar

K. 1.88

$A \prec B \Leftrightarrow \exists f : B \rightarrow A, f$ ist surjektiv.

Definition

D. 1.89

Sei A eine Menge.

- (i) A heißt **endlich**, falls es eine injektive Abbildung $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $f(a) \leq m, \forall a \in A$ gibt.
- (ii) A heißt **unendlich**, falls A nicht endlich ist.
- (iii) Gibt es eine bijektive Abbildung $f : A \rightarrow \{0, 1, \dots, m-1\} \subset \mathbb{N}$, so hat A die **Kardinalität** m ($|A| = m$). Gibt es keine solche Abbildung, so gilt $|A| = \infty$.
- (iv) Sei P eine Aussageform auf A . Dann gilt P für **fast alle** $i \in A$, falls $\{i \in A : \neg P(i)\}$ endlich ist.

Lemma

L. 1.91

- (i) Für jede endliche Menge A gilt $|A| < \infty$, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : A \rightarrow \{0, \dots, m-1\}$.
- (ii) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f : \{0, \dots, m\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$ eine Bijektion. Dann gilt $n = m$. (\Rightarrow Kardinalität ist wohldefiniert).

Lemma

L. 1.92

Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $(a_i)_{1 \leq i \leq m}$ eine endliche Familie natürlicher Zahlen (oder reeller). Dann gibt es ein $i \in \{1, \dots, m\} : a_i \leq a_j, \forall 1 \leq j \leq m$.
Schreibe $a_i = \min\{a_1, \dots, a_m\} \equiv \min(a_1, \dots, a_m)$.
Entsprechend $\max\{a_1, \dots, a_m\} \equiv \max(a_1, \dots, a_m)$.

Lemma

L. 1.93

Die natürlichen Zahlen sind wohlgeordnet, d.h. jede Menge $M \subset \mathbb{N}, M \neq \emptyset$, besitzt ein kleinstes Element, d.h. $\exists a \in M : a \leq b, \forall b \in M$.

Lemma

L. 1.94

Sei A eine unendliche Menge. Dann besitzt A eine abzählbare Teilmenge.

Lemma

L. 1.95

Sei A eine Menge. Dann ist A genau dann höchstens abzählbar, wenn A endlich ist oder $A \sim \mathbb{N}$.

Lemma

L. 1.96

Sei A eine Menge. Dann ist A genau dann höchstens abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ gibt.

Proposition

P. 1.97

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

Proposition

P. 1.98

Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Dann ist $\prod_{i=1}^k \mathbb{N} = \mathbb{N}^k$ abzählbar. Dies gilt auch, wenn wir \mathbb{N} überall durch $A \sim \mathbb{N}$ ersetzen.

Lemma

L. 1.99

Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge abzählbarer Mengen. Dann ist $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ abzählbar.

Bemerkung

Bem. 1.100

P. 1.98 und L. 1.99 gelten auch mit „höchstens abzählbar“ statt abzählbar.

Theorem (Cantor)

T. 1.101

Sei A eine Menge $\Rightarrow \mathcal{P}(A) \succ A$ und $\mathcal{P}(A) \not\sim A$.

BETRAG UND WURZEL

PART 1.7

Definition

D. 1.102

- (i) Sei $x \in \mathbb{R}$. Definiere den **Betrag** von x wie folgt: $|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$
- (ii) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten a und b , so heißt $|a - b|$ **Länge von I** .

Proposition

P. 1.104

Seien $x, a \in \mathbb{R}$. Dann gelten

- (i) $x \leq |x|$
- (ii) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- (iii) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

Korollar

K. 1.105

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Dann ist A genau dann beschränkt, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq a, \forall x \in A$ gibt.

Theorem (Dreiecksungleichung)

T. 1.106

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

- (i) $|a + b| \leq |a| + |b|$
- (ii) $|a - b| \geq |a| - |b|$
- (iii) $|a - b| \geq ||a| - |b||$

Proposition (Existenz der m -ten Wurzel)

P. 1.107

Seien $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}_{\geq 0} : x^m = a$.

Definition

D. 1.108

- (i) \sqrt{a} ist die Zahl in \mathbb{R}_+ mit $(\sqrt{a})^2 = a$
- (ii) $\sqrt[m]{a}$ oder $a^{\frac{1}{m}}$ ist die Zahl in \mathbb{R}_+ mit $(\sqrt[m]{a})^m = a$
- (iii) $a^0 := 1, a^{\frac{n}{m}} := \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n$

Definition

- (i) Die Menge der $x \in \mathbb{R}$, sodass es $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m - n = x$ gibt, heißt die Menge der **ganzen Zahlen**: $\mathbb{Z} := \{m - n : m, n \in \mathbb{N}\}$
- (ii) Die **rationalen Zahlen** sind die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, sodass es $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$ und $x = \frac{m}{n}$ gibt: $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- (iii) $\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißt die Menge der **irrationalen Zahlen**.
- (iv) Die **komplexen Zahlen** sind Paare reeller Zahlen: $\mathbb{C} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Addition: $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$

Multiplikation: $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, bc + ad)$

Schreibe $(a, b) \equiv a + ib$. Es gilt $i^2 = -1$.

Sei $z = a + ib$. Dann heißt $a = \operatorname{Re} z$ **Realteil von z** und $b = \operatorname{Im} z$ **Imaginärteil von z** .

$a + ib := a - ib$ heißt **konjugiert komplexe Zahl zu $a + ib$** .

$|a + ib| := \sqrt{a^2 + b^2}$ heißt **Betrag von $a + ib$** .

Für $a, b \in \mathbb{R}$, $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

- $|a + ib|^2 = (a + ib)\overline{(a + ib)}$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $|z|^2 = |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2$
- $|z|^2 = |\overline{z}|^2$

Betrachte \mathbb{R} mithilfe von $\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{C}$ als Teilmenge von \mathbb{C} . $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{x} = x$.

Bemerkung

Bem. 1.110

- (i) Summen, Differenzen und Produkte ganzer Zahlen sind ganze Zahlen.
- (ii) \mathbb{Q} bildet einen angeordneten Körper, \mathbb{Q} ist nicht vollständig.
- (iii) \mathbb{C} ist ein Körper, \mathbb{C} ist nicht angeordnet, \mathbb{C} ist als metrischer Raum vollständig.
 $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$. Für $(a, b) \neq 0$ ist daher $\frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2} = (a + ib)^{-1}$
- (iv) Seien $z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow |z + w| \leq |z| + |w|$
- (v) $|zw| = |z| \cdot |w|$

Theorem (Dichtheit von \mathbb{Q} in \mathbb{R})

T. 1.111

Sei $I \subset (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $I \neq \emptyset$. Dann ist $I \cap \mathbb{Q}$ unendlich.

Proposition

P. 1.112

$$\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$$

Proposition

P. 1.113

$$\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

Bemerkung (Cantorsches Diagonalverfahren ($\mathbb{R} \succ \mathbb{N}, \mathbb{R} \not\sim \mathbb{N}$))

Bem. 1.114

Alle reellen Zahlen werden untereinander aufgelistet. Man nimmt die Diagonale und schreibt eine neue Zahl unter die Liste, die zur Diagonale verschieden ist \rightarrow nicht in der Liste!

Bemerkung

Bem. 1.115

$$\mathbb{R} \sim (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

KONVERGENZ

METRISCHE RÄUME

Definition (Metrische Räume)

Sei E eine Menge.

(a) Eine Funktion $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ heißt **Metrik**, falls

$$(i) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

(Symmetrie)

$$(ii) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

((positive) Definitheit)

$$(iii) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

(Dreiecksungleichung)

(b) Das Paar (E, d) heißt **metrischer Raum**.

Lemma

Sei E ein metrischer Raum. Dann gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$d(x, z) \geq |d(x, y) - d(y, z)|, \quad \forall x, y, z \in E$$

Bemerkung

\mathbb{K} sein \mathbb{R} oder \mathbb{C} .

Definition (normierter Raum)

Sei E ein \mathbb{K} -Vektorraum.

(a) Dann heißt $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ Norm, falls für alle $x, y, z \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ folgendes gilt:

$$(i) \quad \|x\| = 0 \implies x = 0$$

((positive) Definitheit)

$$(ii) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

(Homogenität)

$$(iii) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(Dreiecksungleichung)

(b) Das Paar $(E, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Lemma

Sei E ein normierter Raum. Dann gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||, \quad \forall x, y \in E$$

Definition (Skalarproduktraum)

Sei E ein \mathbb{K} -Vektorraum.

(a) Dann heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ **Skalarprodukt**, falls

$$(i) \quad \langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

(Linearität im ersten Argument)

$$(ii) \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

(\mathbb{K} : Symmetrie, \mathbb{C} : Hermizität)

$$(iii) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ und } (\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0)$$

(positive Definitheit)

(b) $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt Skalarproduktraum.

Theorem (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Sei E ein Skalarproduktraum. Dann gilt $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$, $\forall x, y \in E$ (bei Gleichheit gilt lineare Abhängigkeit von x und y).

Theorem

Sei E ein Skalarproduktraum. Dann definiert $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für $x \in E$ eine Norm auf E .

Theorem

Sei E normierter Raum. Dann definiert $d(x, y) := \|x\| - \|y\|$ für $x, y \in E$ eine Metrik auf E .

Beispiel

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$. Dann definiert $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x^i y^i$ ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n , das **euklidische Skalarprodukt**.

Dies induziert $\|x\| = |x| = \left(\sum_{i=1}^n (x^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ und $d(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2}$

KAP. 2

PART 2.1

D. 2.1

L. 2.2

Bem. 2.3

D. 2.4

L. 2.5

D. 2.6

T. 2.8

T. 2.9

T. 2.10

Bsp. 2.11

Proposition (Polarisationsformeln)

P. 2.12

- (i) Sei E ein Skalarproduktraum über \mathbb{K} . Dann gilt $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle$
- (ii) Ist E ein \mathbb{R} -Vektorraum mit Skalarprodukt
$$\begin{aligned}\Rightarrow \langle x, y \rangle &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)\end{aligned}$$
- (iii) Ist E ein Skalarproduktraum über \mathbb{C} , so gilt
$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2$$

Proposition

P. 2.13

Sei E ein normierter Raum über \mathbb{R} . Dann ist die Norm genau dann von einem Skalarprodukt induziert, falls die folgende Parallelogrammgleichung gilt:

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

Theorem

T. 2.14

Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ konjugierte Exponenten. D.h. es gelte $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Dann gelten

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q \quad (\text{Höldersche Ungleichung})$$

und

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad (\text{Minkowskische Ungleichung})$$

FOLGEN

PART 2.2

Definition

D. 2.15

Sei E ein metrischer Raum. Sei $x \in E, \varepsilon > 0$. Definiere $B_\varepsilon(x) := \{y \in E : d(y, x) < \varepsilon\}$ die ε -Kugel. $B_\varepsilon(x)$ heißt auch ε -Umgebung von x

Definition (Konvergenz)

D. 2.16

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ eine Folge in einem metrischen Raum E .

- (i) Dann konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $a \in E$, falls für beliebige $\varepsilon > 0$ fast alle (nur endlich viele liegen außerhalb) Folgenglieder in $B_\varepsilon(a)$ liegen
- (ii) Konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $a \in E$, so heißt a **Limes** oder **Grenzwert** der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ oder } x_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ oder } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a.$$

Bemerkung

Bem. 2.17

Die Definition von Konvergenz ist äquivalent zu

- (i) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ auch $x_n \in B_\varepsilon(a)$ gilt.
- (ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ auch $d(x_n, a) < \varepsilon$ gilt.

Korollar (Bolzano-Weierstraß)

K. 2.18

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Folge, d.h. $\exists r > 0 : x_k \in B_r(0), \forall k \in \mathbb{N}$. Dann besitzt $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert a und $|a| \leq r$.

Bemerkung

Bem. 2.19

In \mathbb{R}^n gilt: $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\Leftrightarrow (x_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert für alle i .

Definition (Cauchyfolge, Vollständigkeit)

D. 2.20

- (i) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum E heißt **Cauchyfolge (CF)**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_k, x_l) < \varepsilon, \forall k, l \geq n_0$ gibt.
- (ii) Ein metrischer Raum, in dem jede CF konvergiert, heißt **vollständiger metrischer Raum**.
- (iii) Ein normierter Raum, in dem jede CF konvergiert, heißt **vollständiger normierter Raum** oder **Banachraum (BR)**.
- (iv) Ein vollständiger Skalarproduktraum heißt **Hilbertraum (HR)**.

Lemma

L. 2.21

Sei E ein metrischer Raum. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ konvergent. Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.