

Zusammenfassung für Analysis I

(Prof. Dr. Schnürer)

Wintersemester 2014/2015

von Dagmar Sorg

GRUNDLAGEN: LOGIK, MENGENLEHRE

UND REELLE ZAHLEN

KAP. 1

LOGISCHE GRUNDLAGEN

PART 1.1

Definition (Aussage)

- (i) Eine **Aussage** ist etwas, dem der Wahrheitsgehalt „wahr“ oder „falsch“ zugeordnet ist.
- (ii) Eine **Aussageform** ist eine Aussage, die eine noch unbestimmte oder freie Variable enthält.

D. 1.1

Definition (Negation, Verneinung)

Ist p eine Aussage, so bezeichnet $\neg p$ die Negation dieser Aussage.

D. 1.3

Definition (Konjunktion)

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \wedge q$ („ p und q “) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

D. 1.5

p	q	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Definition (Disjunktion)

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \vee q$ („ p oder q “) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

D. 1.6

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Definition (Kontravalenz)

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \dot{\vee} q$ („entweder p oder q “) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

D. 1.7

p	q	$p \dot{\vee} q$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Definition (Implikation)

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \Rightarrow q$ („ p impliziert q “) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

D. 1.8

p	q	$p \Rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

- (i) p heißt *Voraussetzung*, *Prämisse* oder *hinreichende Bedingung* für q
- (ii) q heißt *Behauptung*, *Konklusion* oder *notwendige Bedingung*

Definition

D. 1.10

- (i) Seien p, q Aussagen. Definiere $p \Leftrightarrow q$ („ p und q sind äquivalent“, „genau dann, wenn p gilt, gilt auch q “) durch

p	q	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

- (ii) p_1, p_2, \dots heißen äquivalent, falls für je zwei dieser Aussagen, p und q , $p \Leftrightarrow q$ gilt.

Proposition

P. 1.11

Seien p, q, r Aussagen. Dann gelten

- (i) $\neg\neg p \Leftrightarrow p$
- (ii) $p \vee \neg p$
- (iii) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ (Symmetrie)
- (iv) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ (Symmetrie)
- (v) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ (Symmetrie)
- (vi) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ (Idempotenz)
- (vii) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ (Idempotenz)
- (viii) $(p \wedge q) \Rightarrow p$
- (ix) $p \Rightarrow (p \vee q)$
- (x) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r))$
- (xi) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r))$
- (xii) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r))$
- (xiii) $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$ (Assoziativität)
- (xiv) $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ (Assoziativität)
- (xv) $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ (Distributivität)
- (xvi) $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (Distributivität)
- (xvii) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$ (De Morgan)
- (xviii) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$ (De Morgan)
- (xix) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$
- (xx) $((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
- (xxi) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- (xxii) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$
- (xxiii) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$
- (xxiv) $p \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r))$ (Fallunterscheidung)

ERSTE MENGENLEHRE

PART 1.2

Definition (naive Definition einer Menge)

D. 1.12

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten, Elemente genannt. Ist A eine Menge, x ein Objekt, so schreiben wir $x \in A$, falls x ein Element von A ist. $x \notin A \Leftrightarrow \neg(x \in A)$
Für eine Menge A , die genau die Elemente a, b und c enthält, schreiben wir $A = \{a, b, c\}$.
Es ist irrelevant, ob a mehrfach auftaucht oder wie die Elemente angeordnet werden.

Definition

D. 1.13

Seien A, B Mengen.

- (i) Dann ist A eine Teilmenge von B ($A \subset B$ oder $A \subseteq B$), falls aus $x \in A$ auch $x \in B$ folgt.
- (ii) A und B heißen gleich ($A = B$), falls $A \subset B$ und $B \subset A$ gelten.
 $A \neq B \Leftrightarrow \neg(A = B)$ (Extensionalitätsaxiom)
- (iii) Schreibe $A \subsetneq B$ für $A \subset B$ und $A \neq B$.

Lemma

Seien A, B, C Mengen. Dann gelten:

- (i) $A \subset A$ (Reflexivität)
- (ii) $x \in A$ und $A \subset B$ implizieren $x \in B$
- (iii) $A \subset B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (Transitivität)

Axiom (Aussonderungssaxiom)

Sei A eine Menge und $a(x)$ eine Aussageform. Dann gibt es eine Menge B , deren Elemente genau die $x \in A$ sind, die $a(x)$ erfüllen.

Schreibe $B = \{x \in A : a(x)\}$.

Bemerkung

Zu jeder Menge A gibt es eine Menge B und eine Aussageform $a(x) : A = \{x \in B : a(x)\}$.

Nehme $B = A, a(x) = (x \in A)$.

Bemerkung (Russelsche Antinomie)

Nimmt man im Aussonderungssaxiom statt A die „Allmenge“ (Menge aller Elemente), dann bekommt man Probleme:

Sei $A = \text{Allmenge}$, $B = \{x \in A : x \notin x\}$. Es gilt $y \in B \Leftrightarrow (y \in A \wedge y \notin y) \Leftrightarrow y \notin y$.

Gilt $B \in B$? \rightarrow Widerspruch.

Lemma (Existenz der leeren Menge)

Es gibt eine Menge \emptyset , die leere Menge, die kein Element enthält. Sie erfüllt:

- (i) $\emptyset \subset A$ für alle Mengen A
- (ii) \emptyset ist eindeutig bestimmt.

QUANTOREN

Definition

Sei A eine Menge, $a(x)$ eine Aussageform.

- (i) **Existenzquantor:** Wir schreiben $\exists x \in A : a(x)$ oder $\exists_{x \in A} a(x)$ für „Es gibt ein x in der Menge A , sodass dieses x $a(x)$ erfüllt.“
Schreibe $\exists! x \in A : a(x)$ für es gibt genau ein $x \in A$ mit $a(x)$. Dies zeigt man, indem man $\exists x \in A : a(x)$ und für alle $x, y \in A$ mit $a(x), a(y) : x = y$ zeigt.
- (ii) **Allquantor:** Schreibe $\forall x \in A : a(x)$ oder $\forall_{x \in A} a(x)$ manchmal auch $a(x) \forall x \in A$ für „Für alle $x \in A$ gilt $a(x)$.“

Lemma

Seien A, B Mengen. $p(x), p(x, y)$ Aussageformen. Dann gelten

$$(1.1) \quad \forall_{x \in A} \forall_{y \in B} p(x, y) \iff \forall_{y \in B} \forall_{x \in A} p(x, y)$$

$$(1.2) \quad \exists_{x \in A} \exists_{y \in B} p(x, y) \iff \exists_{y \in B} \exists_{x \in A} p(x, y)$$

$$(1.3) \quad \exists_{x \in A} \forall_{y \in B} p(x, y) \implies \forall_{y \in B} \exists_{x \in A} p(x, y)$$

$$(1.4) \quad \neg \left(\forall_{x \in A} p(x) \right) \iff \exists_{x \in A} \neg p(x)$$

$$(1.5) \quad \neg \left(\exists_{x \in A} p(x) \right) \iff \forall_{x \in A} \neg p(x)$$

L. 1.14

A. 1.15

Bem. 1.17

Bem. 1.18

L. 1.19

PART 1.3

D. 1.20

L. 1.22

Axiom (Existenz einer Obermenge)

A. 1.24

Sei \mathcal{M} eine Menge von Mengen. Dann gibt es eine Menge M (=Obermenge) mit $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A \subset M$.

Bemerkung: M ist eindeutig bestimmt.

Definition (Vereinigung und Durchschnitt)

D. 1.25

Seien A, B Mengen mit Obermenge X .

- (i) Dann ist die **Vereinigung** von A und B ($A \cup B$) definiert durch

$$A \cup B := \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$$
- (ii) der **(Durch-) Schnitt** von A und B ($A \cap B$) ist definiert durch

$$A \cap B := \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$$

Sei \mathcal{M} eine Menge von Mengen mit Obermenge X .

- (i) Vereinigung: $\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A := \{x \in X : (\exists A \in \mathcal{M} : x \in A)\}$
- (ii) Schnitt: $\bigcap_{A \in \mathcal{M}} A := \{x \in X : (\forall A \in \mathcal{M} : x \in A)\}$

Bemerkung

Bem. 1.26

Enthält \mathcal{M} keine Menge, so gelten $\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A = \emptyset$ sowie $\bigcap_{A \in \mathcal{M}} A = X$

Definition (Disjunkte Mengen)

D. 1.27

Seien A, B Mengen.

- (i) A und B heißen disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$. Schreibe in diesem Fall $A \dot{\cup} B$ statt $A \cup B$
- (ii) Sei \mathcal{M} eine Menge von Mengen. Dann heißen die Mengen in \mathcal{M} disjunkt, falls für $A, B \in \mathcal{M}, A \neq \emptyset$ stets $A \cap B = \emptyset$ gilt. Schreibe $\dot{\bigcup}_{A \in \mathcal{M}} A$ statt $\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A$.

Definition (Komplement)

D. 1.28

Seien A, B Mengen mit fester Obermenge X .

- (i) Definiere das **Komplement** von A in B durch $B \setminus A := \{x \in B : x \notin A\}$
- (ii) Definiere das Komplement von A durch $\complement A \equiv A^c := \{x \in X : x \notin A\}$

Proposition

P. 1.29

Seien A, B, C Mengen mit Obermenge X . Dann gelten:

- (i) $A \cup B = B \cup A$ (Kommutativität)
- (ii) $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativität)
- (iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Assoziativität)
- (iv) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Assoziativität)
- (v) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (Distributivität)
- (vi) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (Distributivität)
- (vii) $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ (De Morgansche Regel)
- (viii) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ (De Morgansche Regel)
- (ix) $\complement \complement A = A$
- (x) $A \cup \complement A = X$
- (xi) $A \setminus B = A \cap \complement B$

Axiom (Potenzmenge)

A. 1.30

Sei A eine beliebige Menge. Dann gibt es die Menge $\mathcal{P}(A)$ (oder 2^A), die Potenzmenge von A . Die Elemente von $\mathcal{P}(A)$ sind genau die Teilmengen von A .

Axiom (Kartesisches Produkt)

A. 1.32

Seien A, B Mengen. Dann gibt es eine Menge, das Kartesische Produkt von A und B ($A \times B$), die aus allen geordneten Paaren (a, b) mit $a \in A, b \in B$ besteht. a heißt erste, b heißt zweite Komponente des Paares (a, b) .

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Bemerkung

Bem. 1.33

$$(a, b) \equiv \{a, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(A \cup \mathcal{P}(A \cup B))$$

Definition (Funktion, Ableitung)

D. 1.34

Seien A, B Mengen.

- (i) Eine Funktion (oder Abbildung) f von A nach B , $f : A \rightarrow B$, ist eine Teilmenge von $A \times B$, sodass es zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in f$ gibt: $\forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in f$.

Schreibe $b = f(a)$, $a \mapsto b$.

Definiere den Graphen von f :

$$\text{graph } f := \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\} = f \subset A \times B$$

- (ii) A heißt **Definitionsbereich** von f , $D(f)$.

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} \equiv \{y \in B : (\exists x \in A : \underbrace{f(x) = y}_{(x,y) \in f})\} = \text{im } f = R(f)$$

heißt **Bild** oder **Wertebereich** von f .

- (iii) Sei $M \subset A$ beliebig.

$$f(M) := \{y \in B : (\exists x \in M : f(x) = y)\} \equiv \{f(x) : x \in M\}$$

Somit induziert $f : A \rightarrow B$ eine Funktion $\mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$, die wir wieder mit f bezeichnen.

- (iv) Zu einer beliebigen Funktion $f : A \rightarrow B$ definieren wir die **Urbildabbildung**

$$f^{-1} : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A) \text{ mit } f^{-1}(M) := \{x \in A : f(x) \in M\}, M \subset B \text{ beliebig.}$$

$f^{-1}(M)$ heißt **Urbild** von M unter f .

Bemerkung

Bem. 1.35

$f : A \rightarrow B$ und $g : C \rightarrow D$ sind gleich, falls sie als Teilmengen von $A \times B$ bzw. $C \times D$ gleich sind, insbesondere $B = D$.

Definition

D. 1.36

Sei $f : A \rightarrow B$.

- (i) f heißt **injektiv**, falls für alle $x, y \in A$ aus $f(x) = f(y)$ auch $x = y$ folgt.
- (ii) f heißt **surjektiv**, falls $f(A) = B$. Wir sagen, dass f die Menge A auf B abbildet. Bei nicht-surjektiven Abbildungen sagt man A wird nach oder in B abgebildet.
- (iii) f heißt **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist. f ist eine **Bijektion**.
- (iv) Ist f injektiv, so definieren wir die **Inverse** von f durch $f^{-1} : R(f) \rightarrow A$ mit $f(x) \mapsto x$. Es gilt $f^{-1}(f(x)) = x$.

Bemerkung

Bem. 1.37

- (i) $\mathcal{I}(f(x))$ bezeichnet die **Inverse** von $f(x)$.
- (ii) $U(\{f(x)\})$ bezeichnet die Umkehrabbildung der Menge $\{f(x)\}$, sie ist definiert durch $U : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ mit $M \subset B \mapsto \{x \in A : f(x) \in M\}$.
- (iii) $f : A \rightarrow B$ induziert $g : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$
 $\Rightarrow \{f(x)\} = g(\{x\})$

Definition (Komposition von Abbildungen)

D. 1.38

Seien $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ Abbildungen. Dann heißt $g \circ f : A \rightarrow C$ mit $x \mapsto g(f(x))$ **Komposition** von f und g .

Bemerkung

Bem. 1.40

Seien $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$ Abbildungen. Dann gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Sowie für Inverse und Umkehrabbildungen:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Definition (Relationen)

D. 1.41

Seien A, B Mengen.

- (i) $R \subset A \times B$ heißt **Relation**. Statt $(x, y) \in R$ sagen wir $R(x, y)$ gilt.
- (ii) $R \subset A \times A$ heißt
 - (a) **reflexiv**, falls $R(x, x)$ für alle $x \in A$ gilt
 - (b) **symmetrisch**, falls $R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$ für alle $x, y \in A$
 - (c) **antisymmetrisch**, falls $R(x, y) \wedge R(y, x) \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in A$
 - (d) **transitiv**, falls $R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)$ für alle $x, y, z \in A$
- (iii) $R \subset A \times A$ heißt **Äquivalenzrelation**, falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Schreibweise bei Äquivalenzrelationen: $x \sim y$ statt $R(x, y)$

Definition

D. 1.42

Sei $R \subset A \times A$ eine Äquivalenzrelation. Sei $x \in A$. dann heißt $[x] := \{y \in A : R(x, y)\}$ **Äquivalenzklasse von x** . Schreibe $y \equiv x \pmod{R}$ für $y \in [x]$.
 $A/R := \{[x] : x \in A\}$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen von R .

DIE REELLEN ZAHLEN

PART 1.5

Definition

D. 1.44

Die reellen Zahlen, \mathbb{R} , sind eine Menge mit den folgenden Eigenschaften:

- (A) \mathbb{R} ist ein Körper, d.h. es gibt die Abbildung
 - (i) $+$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die **Addition**, schreibe $x + y$ für $x(x, y)$
 - (ii) \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die **Multiplikation**, mit $(x, y) \mapsto x \cdot y \equiv xy$ bezeichnet und zwei ausgezeichneten Elementen: $0, 1$ mit $0 \neq 1$

Es gilt, soweit nicht anders angegeben, für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$:

- (K1) $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (K2) $x + y = y + x$
- (K3) $0 + x = x$
- (K4) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$, Schreibe $-x$ für y : $x + (-x) = 0$
- (K5) $(xy)z = x(yz)$
- (K6) $xy = yx$
- (K7) $1x = x$
- (K8) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{R} : xy = 1$, Schreibe x^{-1} für y : $xx^{-1} = 1$
- (K9) $x(y + z) = xy + xz$
- (B) \mathbb{R} ist ein angeordneter Körper, d.h. es gibt eine Relation $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (schreibe $x \leq y$ für $R(x, y)$), die für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ folgendes erfüllt:
 - (O1) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität)
 - (O2) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)
 - (O3) es gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$
 - (O4) aus $x \leq y$ folgt $x + z \leq y + z$
 - (O5) aus $0 \leq x$ und $0 \leq y$ folgt $0 \leq xy$.

Schreibe $y \geq x$ statt $x \leq y$ und $x < y$ bzw. $y > x$ für $x \leq y$ und $x \neq y$

- (C) \mathbb{R} ist vollständig, d.h. jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} besitzt ein Supremum in \mathbb{R} .

Definition (Ordnung)

D. 1.45

Eine transitive, antisymmetrische Relation \leq , für die stets $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt, heißt (**totale**) **Ordnung**.

Definition (Supremum, Infimum)

D. 1.46

- (i) $A \subset \mathbb{R}$ heißt **nach oben beschränkt**, falls es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $y \leq x, \forall y \in A$ gibt.
- (ii) $x_0 \in \mathbb{R}$ ist eine **obere Schranke** von $A \subset \mathbb{R}$, falls $y \leq x_0, \forall y \in A$.
- (iii) $x_0 \in \mathbb{R}$ ist das **Supremum** von $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 = \sup A$, falls für jede obere Schranke x von A stets $x \geq x_0$ gilt. x_0 heißt **kleinste obere Schranke**.
- (iv) Ist $\sup A \in A$, so heißt $\sup A$ **Maximum** von A .
- (v) Ist $A \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, so gibt $\sup A = +\infty$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ vereinbaren wir $-\infty < x < +\infty$.
- (vi) Entsprechend: **nach unten beschränkt, untere Schranke, Infimum (=größte untere Schranke), Minimum**.
Ist A nach unten unbeschränkt, so gilt $\inf A = -\infty$. Alternativ: $-A = \{-a : a \in A\}, A \subset \mathbb{R}$.
 A heißt nach **unten beschränkt**, falls $-A$ nach oben beschränkt ist. $x = \inf A$, falls $-x = \sup -A$.
- (vii) Ist $A \subset \mathbb{R}$ nach oben und unten beschränkt, so heißt A **beschränkt**.

Bemerkung

Bem. 1.47

$\sup \emptyset = -\infty$ und $\inf \emptyset = +\infty$

Definition

D. 1.49

Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

- (i) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (offenes Intervall)
- (ii) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (halboffenes Intervall)
- (iii) $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (halboffenes Intervall)
- (iv) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)

a, b heißen **Endpunkte** der Intervalle.

Lemma

L. 1.50

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

Lemma

L. 1.51

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gelten

- (i) $(-1)x = -x$
- (ii) $-(-x) = x$
- (iii) $(-1)(-1) = 1$

Lemma

L. 1.52

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist die additive Inverser $-x$ eindeutig bestimmt.

Lemma

L. 1.53

Es gelten $0 < 1$ und $-1 < 0$.

Lemma

L. 1.54

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt genau ein der drei folgenden Aussagen:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y$$

Lemma

L. 1.55

Gelte $0 < x < y$. Dann gelten:

- (i) $0 < x^{-1}$
- (ii) $0 < y^{-1} < x^{-1}$

Lemma

L. 1.56

$x, y \in \mathbb{R}$. Gilt $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0$.

Lemma

L. 1.57

Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

- (i) Aus $0 \leq a \leq b$ folgt $a^2 \leq b^2$
- (ii) Aus $a^2 \leq b^2$ und $b \geq 0$ folgt $a \leq b$.

Mit $a^2 = a \cdot a$.

Definition (Natürliche Zahlen)

Die natürlichen Zahlen \mathbb{N} sind die kleinste Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ mit

(N1) $0 \in A$

(N2) $a + 1 \in A, \forall a \in A$

\mathbb{N} ist die kleinste Menge mit (N1), (N2) in dem Sinn, dass für alle $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$ mit \mathcal{N} erfüllt (N1) und (N2) auch $\mathbb{N} \subset \mathcal{N}$ gilt.

Lemma

Es gibt die natürlichen Zahlen. Sie sind eindeutig bestimmt.

Lemma (Peanoaxiome)

Es gelten:

(i) $0 \in \mathbb{N}$

(ii) jedes $a \in \mathbb{N}$ besitzt genau einen Nachfolger $a^+ \in \mathbb{N}$

(iii) 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl

(iv) $\forall n, m \in \mathbb{N} : m^+ = n^+ \Rightarrow n = m$

(v) Sei $X \subset \mathbb{R}$ beliebig mit $0 \in X$ und $n^+ \in X, \forall n \in X$. Es folgt $\mathbb{N} \subset X$

Der Nachfolger von $a \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $a^+ := a + 1 \in \mathbb{N}$.

Theorem

\mathbb{R} ist **archimedisch**, d.h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $\mathbb{N} \ni n \geq n_0$ auch $n \geq x$ gilt.

Korollar

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und sei $a > 0$.

(i) Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $an \geq x$

(ii) Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{m} \leq a$

(iii) Ist $a \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (oder alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$), so ist $a \leq 0$.

Theorem (Vollständige Induktion)

Erfüllt $M \subset \mathbb{N}$ die Bedingungen

(i) $0 \in M$

(Induktionsanfang)

(ii) $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$

(Induktionsschritt)

so gilt $M = \mathbb{N}$.

Theorem

Sei p eine Aussageform auf \mathbb{N} . Gelten

(i) $p(0)$ und

(ii) $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

so gilt $p(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition (Familie, Folge)

(i) Seien \mathcal{I}, X Mengen, $f : \mathcal{I} \rightarrow X$ eine Abbildung. Dann heißt f auch **Familie**: $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ mit $x_i = f(i), \forall i \in \mathcal{I}$ (\mathcal{I} bezeichnet die Indexmenge).

(ii) Ist $\mathcal{I} = \mathbb{N}$, so heißt $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ **Folge**: $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset X$.

(iii) Ist $J \subset \mathcal{I}$, so heißt $(x_j)_{j \in J}$ **Teilfamilie** von $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$, falls die Werte auf J übereinstimmen.

(iv) Ist $\mathcal{I} = \mathbb{N}$, $J \subset \mathbb{N}$ unendlich, so heißt $(x_j)_{j \in J}$ **Teilfolge** von $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Ist $(j_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset J$ eine Folge mit $j_{k+1} > j_k, \forall k$ und $J = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{j_k\}$, so schreibe $(x_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$ für die Teilfolge.

(v) Sei $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie. Ist $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\} (\rightarrow (x_i)_{1 \leq i \leq n})$:

(a) $n = 2$: Die Familie heißt **Paar** (x_1, x_2)

(b) $n = 3$: Die Familie heißt **Triple** (x_1, x_2, x_3)

(c) n beliebig: Die Familie heißt **n -Tupel** (x_1, x_2, \dots, x_n)

D. 1.58

L. 1.59

L. 1.60

T. 1.61

K. 1.62

T. 1.63

T. 1.64

D. 1.67

Definition

D. 1.68

Sei $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen mit Obermenge X .

$$(i) \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i := \{x \in X : (\exists i \in \mathcal{I} : x \in A_i)\}$$

$$(ii) \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i := \{x \in X : (\forall i \in \mathcal{I} : x \in A_i)\}$$

$$(iii) \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\} : \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i, \text{ sowie } \bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i$$

Definition

D. 1.69

Ist $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie reeller Zahlen, so gilt

$$\sup_{i \in \mathcal{I}} x_i := \sup\{x_i : i \in \mathcal{I}\}, \text{ sowie}$$

$$\inf_{i \in \mathcal{I}} x_i := \inf\{x_i : i \in \mathcal{I}\}.$$

Proposition

P. 1.70

(i) Seien $A, B \subset \mathbb{R}, A \subset B$.

$$\Rightarrow \sup A \leq \sup B, \inf A \geq \inf B.$$

(ii) Sei $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen $A_i \subset \mathbb{R}, \forall i \in \mathcal{I}$. Dann definiere

$$A := \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$$

$$\Rightarrow \sup A = \sup_{i \in \mathcal{I}} \sup A_i \text{ und } \inf A = \inf_{i \in \mathcal{I}} \inf A_i.$$

Definition

D. 1.71

(i) Sei A eine Menge, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt **nach oben (unten) beschränkt**, falls für $f(A)$ gilt:

$$(a) \sup f(A) = \sup_{x \in A} f(x)$$

$$(b) \inf f(A) = \inf_{x \in A} f(x)$$

(ii) Sei A eine Menge und $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Familie von Funktionen. Gilt für alle $x \in A$, dass $\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i(x) < \infty$, so definieren wir die Funktion

$$\begin{aligned} \sup_{i \in \mathcal{I}} f_i : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i)(x) &:= \sup_{i \in \mathcal{I}} f_i(x) \end{aligned}$$

(iii) Ohne $\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i(x) < \infty$ erhalten wir mit derselben Definition $\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) Analog für $\inf_{i \in \mathcal{I}} f_i$.

(v) Ist $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i = \sup(f_1, \dots, f_n) = \max(f_1, \dots, f_n).$$

Entsprechend für Infimum/Minimum.

Definition (Kartesisches Produkt)

D. 1.72

(i) Sei $\mathcal{I} \neq \emptyset$ und $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen. Definiere das **kartesische Produkt** wie folgt:

$$\prod_{i \in \mathcal{I}} A_i := \{(x_i)_{i \in \mathcal{I}} : (\forall i \in \mathcal{I} : x_i \in A_i)\}$$

(ii) Zu $j \in \mathcal{I}$ definieren wir die j -te Projektionsabbildung

$$\pi_j : \prod_{i \in \mathcal{I}} A_i \rightarrow A_j \text{ mit } \pi_j((x_i)_{i \in \mathcal{I}}) := x_j$$

Axiom

A. 1.74

Sei $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen $A_i \neq \emptyset, \forall i \in \mathcal{I}$. Dann gilt $\prod_{i \in \mathcal{I}} A_i \neq \emptyset$, d.h. es gibt eine Familie $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ mit $x_i \in A_i, \forall i \in \mathcal{I}$.

Proposition

Sei $\mathcal{I} \neq \emptyset$ und $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen. Dann gilt $\prod_{i \in \mathcal{I}} A_i = \emptyset \iff \exists i \in \mathcal{I} : A_i \neq \emptyset$.

P. 1.75

Lemma (Zornsches Lemma)

Sei $M \neq \emptyset$ mit einer Teilordnung (= partielle Ordnung) \leq . Nehme an, jede total geordnete Teilmenge $\Lambda \subset M$ (= Kette) besitzt eine obere Schranke $b \in M$, d.h. $x \leq b, \forall x \in \Lambda$. Dann enthält M ein maximales Element x_0 , d.h. $\exists x_0 \in M : x \geq x_0 \Rightarrow x = x_0$.

L. 1.76

Definition (Ausschöpfung, Partition, Überdeckung)

Sei A eine Menge.

- (i) Eine **Überdeckung** von A ist eine Familie $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ mit $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \supset A$.
- (ii) Eine **Partition** von A ist eine Überdeckung $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ mit $A_i \subset A$ und $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \in \mathcal{I}, A = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$.
- (iii) Eine **Ausschöpfung** von A ist eine aufsteigende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen von A , die $A_m \subset A_n, \forall m \leq n$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$ erfüllt.

D. 1.77

Proposition

- (i) Sei \sim eine Äquivalenzrelation auf A . Dann bilden die **Restklassen** von \sim eine Partition von A .
- (ii) Sei $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Partition von A . Dann ist \sim mit $x \sim y :\Leftrightarrow \exists i \in \mathcal{I} : x, y \in A_i$ eine Äquivalenzrelation auf A .

P. 1.78

Lemma

Seien A, B Mengen. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von A . Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Abbildungen $f_n : A_n \rightarrow B$ mit $f_n|_{A_m} = f_m$ für alle $m \leq n$. Dann gibt es genau eine Funktion $f : A \rightarrow B$ mit $f(x) = f_n(x), \forall x \in A_n$ oder $f|_{A_n} = f_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

L. 1.79

Proposition (Rekursive Definition)

Sei $B \neq \emptyset$ eine Menge, $x_0 \in B$ und $F : \mathbb{N} \times B \rightarrow B$ eine Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow B$ mit den Ergebnissen:

- (i) $f(0) = x_0$ und
- (ii) $f(n+1) = F(n, f(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

f ist eine rekursiv definierte Funktion.

P. 1.80

KARDINALITÄT

PART 1.6

Definition (Mächtigkeit)

Seien A, B Mengen.

- (i) A, B heißen **gleich mächtig** ($A \sim B$), falls es eine Bijektion $f : A \rightarrow B$ gibt.
- (ii) B heißt **mächtiger** als A ($B \succ A$) oder A **weniger mächtig** als B ($A \prec B$), falls es eine injektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ gibt.
- (iii) A heißt **abzählbar**, falls $A \sim \mathbb{N}$.
- (iv) A heißt **höchstens abzählbar**, falls $A \prec \mathbb{N}$.
- (v) A heißt **überabzählbar**, falls A nicht höchstens abzählbar ist.
- (vi) Sei A abzählbar, so heißt die Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine **Abzählung** von A , falls $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\} = A$.

D. 1.84

Bemerkung

Bem. 1.85

- (i) \sim ist Äquivalenzrelation
- (ii) $A \prec B \prec C \Rightarrow A \prec C$
- (iii) $A \prec A$
- (iv) $G := \{2n : n \in \mathbb{N}\}, G \prec \mathbb{N} : 2n \mapsto 2n$ und $\mathbb{N} \prec G : n \mapsto 2n$. Bijektiv: $\mathbb{N} \sim G$

Theorem (Schröder-Bernstein)

Aus $A \prec B$ und $B \prec A$ folgt $A \sim B$.

T. 1.86

Proposition

A, B, C sind Mengen. Seien $\varphi : A \rightarrow B, \psi : B \rightarrow C$ Abbildungen. Sei $f : A \rightarrow B$ Abbildung. Dann gelten:

- (i) Ist $\psi \circ \varphi$ injektiv, so ist φ injektiv
- (ii) Ist $\psi \circ \varphi$ surjektiv, so ist ψ surjektiv
- (iii) f surjektiv $\Leftrightarrow \exists g : B \rightarrow A, f \circ g = id_B$
- (iv) f injektiv $\Leftrightarrow \exists g : B \rightarrow A, g \circ f = id_A$

P. 1.87

Korollar

$A \prec B \Leftrightarrow \exists f : B \rightarrow A, f$ ist surjektiv.

K. 1.88

Definition

Sei A eine Menge.

- (i) A heißt **endlich**, falls es eine injektive Abbildung $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $f(a) \leq m, \forall a \in A$ gibt.
- (ii) A heißt **unendlich**, falls A nicht endlich ist.
- (iii) Gibt es eine bijektive Abbildung $f : A \rightarrow \{0, 1, \dots, m-1\} \subset \mathbb{N}$, so hat A die **Kardinalität** m ($|A| = m$). Gibt es keine solche Abbildung, so gilt $|A| = \infty$.
- (iv) Sei P eine Aussageform auf A . Dann gilt P für **fast alle** $i \in A$, falls $\{i \in A : \neg P(i)\}$ endlich ist.

D. 1.89

Lemma

- (i) Für jede endliche Menge A gilt $|A| < \infty$, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : A \rightarrow \{0, \dots, m-1\}$.
- (ii) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f : \{0, \dots, m\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$ eine Bijektion. Dann gilt $n = m$. (\Rightarrow Kardinalität ist wohldefiniert).

L. 1.91

Lemma

Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $(a_i)_{1 \leq i \leq m}$ eine endliche Familie natürlicher Zahlen (oder reeller). Dann gibt es ein $i \in \{1, \dots, m\} : a_i \leq a_j, \forall 1 \leq j \leq m$.
Schreibe $a_i = \min\{a_1, \dots, a_m\} \equiv \min(a_1, \dots, a_m)$.
Entsprechend $\max\{a_1, \dots, a_m\} \equiv \max(a_1, \dots, a_m)$.

L. 1.92

Lemma

Die natürlichen Zahlen sind wohlgeordnet, d.h. jede Menge $M \subset \mathbb{N}, M \neq \emptyset$, besitzt ein kleinstes Element, d.h. $\exists a \in M : a \leq b, \forall b \in M$.

L. 1.93

Lemma

Sei A eine unendliche Menge. Dann besitzt A eine abzählbare Teilmenge.

L. 1.94

Lemma

Sei A eine Menge. Dann ist A genau dann höchstens abzählbar, wenn A endlich ist oder $A \sim \mathbb{N}$.

L. 1.95

Lemma

Sei A eine Menge. Dann ist A genau dann höchstens abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ gibt.

L. 1.96

Proposition

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

P. 1.97

Proposition

P. 1.98

Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Dann ist $\prod_{i=1}^k \mathbb{N} = \mathbb{N}^k$ abzählbar. Dies gilt auch, wenn wir \mathbb{N} überall durch $A \sim \mathbb{N}$ ersetzen.

Lemma

L. 1.99

Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge abzählbarer Mengen. Dann ist $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ abzählbar.

Bemerkung

Bem. 1.100

P. 1.98 und L. 1.99 gelten auch mit „höchstens abzählbar“ statt abzählbar.

Theorem (Cantor)

T. 1.101

Sei A eine Menge $\Rightarrow \mathcal{P}(A) \succ A$ und $\mathcal{P}(A) \not\sim A$.

BETRAG UND WURZEL

PART 1.7

Definition

D. 1.102

- (i) Sei $x \in \mathbb{R}$. Definiere den **Betrag** von x wie folgt: $|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$
- (ii) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten a und b , so heißt $|a - b|$ **Länge** von I .

Proposition

P. 1.104

Seien $x, a \in \mathbb{R}$. Dann gelten

- (i) $x \leq |x|$
- (ii) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- (iii) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

Korollar

K. 1.105

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Dann ist A genau dann beschränkt, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq a, \forall x \in A$ gibt.

Theorem (Dreiecksungleichung)

T. 1.106

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

- (i) $|a + b| \leq |a| + |b|$
- (ii) $|a - b| \geq |a| - |b|$
- (iii) $|a - b| \geq ||a| - |b||$

Proposition (Existenz der m -ten Wurzel)

P. 1.107

Seien $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}_{\geq 0} : x^m = a$.

Definition

D. 1.108

- (i) \sqrt{a} ist die Zahl in \mathbb{R}_+ mit $(\sqrt{a})^2 = a$
- (ii) $\sqrt[m]{a}$ oder $a^{\frac{1}{m}}$ ist die Zahl in \mathbb{R}_+ mit $(\sqrt[m]{a})^m = a$
- (iii) $a^0 := 1, a^{\frac{n}{m}} := \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n$

Definition

- (i) Die Menge der $x \in \mathbb{R}$, sodass es $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m - n = x$ gibt, heißt die Menge der **ganzen Zahlen**: $\mathbb{Z} := \{m - n : m, n \in \mathbb{N}\}$
- (ii) Die **rationalen Zahlen** sind die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, sodass es $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$ und $x = \frac{m}{n}$ gibt: $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- (iii) $\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißt die Menge der **irrationalen Zahlen**.
- (iv) Die **komplexen Zahlen** sind Paare reeller Zahlen: $\mathbb{C} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Addition: $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$

Multiplikation: $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, bc + ad)$

Schreibe $(a, b) \equiv a + ib$. Es gilt $i^2 = -1$.

Sei $z = a + ib$. Dann heißt $a = \text{Re } z$ **Realteil von z** und $b = \text{Im } z$ **Imaginärteil von z** .

$a + ib := a - ib$ heißt **konjugiert komplexe Zahl zu $a + ib$** .

$|a + ib| := \sqrt{a^2 + b^2}$ heißt **Betrag von $a + ib$** .

Für $a, b \in \mathbb{R}$, $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

- $|a + ib|^2 = (a + ib)(\overline{a + ib})$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $|z|^2 = |\text{Re } z|^2 + |\text{Im } z|^2$
- $|z|^2 = |\overline{z}|^2$

Betrachte \mathbb{R} mithilfe von $\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{C}$ als Teilmenge von \mathbb{C} . $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{x} = x$.

Bemerkung

Bem. 1.110

- (i) Summen, Differenzen und Produkte ganzer Zahlen sind ganze Zahlen.
- (ii) \mathbb{Q} bildet einen angeordneten Körper, \mathbb{Q} ist nicht vollständig.
- (iii) \mathbb{C} ist ein Körper, \mathbb{C} ist nicht angeordnet, \mathbb{C} ist als metrischer Raum vollständig.
 $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$. Für $(a, b) \neq 0$ ist daher $\frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2} = (a + ib)^{-1}$
- (iv) Seien $z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow |z + w| \leq |z| + |w|$
- (v) $|zw| = |z| \cdot |w|$

Theorem (Dichtheit von \mathbb{Q} in \mathbb{R})

Sei $I \subset (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $I \neq \emptyset$. Dann ist $I \cap \mathbb{Q}$ unendlich.

Proposition

$$\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$$

Proposition

$$\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

Bemerkung (Cantorsches Diagonalverfahren ($\mathbb{R} \succ \mathbb{N}, \mathbb{R} \not\sim \mathbb{N}$))

Alle reellen Zahlen werden untereinander aufgelistet. Man nimmt die Diagonale und schreibt eine neue Zahl unter die Liste, die zur Diagonale verschieden ist \rightarrow nicht in der Liste!

Bemerkung

$$\mathbb{R} \sim (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

Bem. 1.114

Bem. 1.115

KONVERGENZ

KAP. 2

METRISCHE RÄUME

PART 2.1

Definition (Metrische Räume)

D. 2.1

Sei E eine Menge.

(a) Eine Funktion $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ heißt **Metrik**, falls

$$(i) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

(Symmetrie)

$$(ii) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

((positive) Definitheit)

$$(iii) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

(Dreiecksungleichung)

(b) Das Paar (E, d) heißt **metrischer Raum**.

Lemma

L. 2.2

Sei E ein metrischer Raum. Dann gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$d(x, z) \geq |d(x, y) - d(y, z)|, \quad \forall x, y, z \in E$$

Bemerkung

Bem. 2.3

\mathbb{K} sein \mathbb{R} oder \mathbb{C} .

Definition (normierter Raum)

D. 2.4

Sei E ein \mathbb{K} -Vektorraum.

(a) Dann heißt $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ Norm, falls für alle $x, y, z \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ folgendes gilt:

$$(i) \quad \|x\| = 0 \implies x = 0$$

((positive) Definitheit)

$$(ii) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

(Homogenität)

$$(iii) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(Dreiecksungleichung)

(b) Das Paar $(E, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Lemma

L. 2.5

Sei E ein normierter Raum. Dann gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||, \quad \forall x, y \in E$$

Definition (Skalarproduktraum)

D. 2.6

Sei E ein \mathbb{K} -Vektorraum.

(a) Dann heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ **Skalarprodukt**, falls

$$(i) \quad \langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

(Linearität im ersten Argument)

$$(ii) \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

(\mathbb{K} : Symmetrie, \mathbb{C} : Hermizität)

$$(iii) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ und } (\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0)$$

(positive Definitheit)

(b) $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt Skalarproduktraum.

Theorem (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

T. 2.8

Sei E ein Skalarproduktraum. Dann gilt $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$, $\forall x, y \in E$ (bei Gleichheit gilt lineare Abhängigkeit von x und y).

Theorem

T. 2.9

Sei E ein Skalarproduktraum. Dann definiert $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für $x \in E$ eine Norm auf E .

Theorem

T. 2.10

Sei E normierter Raum. Dann definiert $d(x, y) := \|x\| - \|y\|$ für $x, y \in E$ eine Metrik auf E .

Beispiel

Bsp. 2.11

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$. Dann definiert $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x^i y^i$ ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n , das **euklidische Skalarprodukt**.

Dies induziert $\|x\| = |x| = \left(\sum_{i=1}^n (x^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ und $d(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2}$

Proposition (Polarisationsformeln)

P. 2.12

- (i) Sei E ein Skalarproduktraum über \mathbb{K} . Dann gilt $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle$
(ii) ist E ein \mathbb{R} -Vektorraum mit Skalarprodukt
- $$\begin{aligned}\Rightarrow \langle x, y \rangle &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)\end{aligned}$$
- (iii) Ist E ein Skalarproduktraum über \mathbb{C} , so gilt
- $$4 \langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i \|x + iy\|^2 - i \|x - iy\|^2$$

Proposition

P. 2.13

Sei E ein normierter Raum über \mathbb{R} . Dann ist die Norm genau dann von einem Skalarprodukt induziert, falls die folgende Parallelogrammgleichung gilt:

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

Theorem

T. 2.14

Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ konjugierte Exponenten. D.h. es gelte $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Dann gelten

$$\sum_{i=1}^n x^i y^i \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q \quad (\text{Höldersche Ungleichung})$$

und

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad (\text{Minkowskische Ungleichung})$$

FOLGEN

PART 2.2

Definition

D. 2.16

Sei E ein metrischer Raum. Sei $x \in E, \varepsilon > 0$. Definiere $B_\varepsilon(x) := \{y \in E : d(y, x) < \varepsilon\}$ die ε -**Kugel**. $B_\varepsilon(x)$ heißt auch ε -**Umgebung von x** (In $\mathbb{R} : B_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$).

Definition (Konvergenz)

D. 2.17

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ eine Folge in einem metrischen Raum E .

- (i) Dann konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $a \in E$, falls für beliebige $\varepsilon > 0$ fast alle (nur endlich viele liegen außerhalb) Folgenglieder in $B_\varepsilon(a)$ liegen
(ii) Konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $a \in E$, so heißt a **Limes** oder **Grenzwert** der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ oder } x_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ oder } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a.$$

Bemerkung

Bem. 2.18

Die Definition von Konvergenz ist äquivalent zu

- (i) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ auch $x_n \in B_\varepsilon(a)$ gilt.
(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ auch $d(x_n, a) < \varepsilon$ gilt.

Definition

D. 2.19

- (i) Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes E heißt **beschränkt**, falls es ein $x \in E$ und $r > 0$ mit $A \subset B_r(x)$ gibt.
(ii) Eine Teilfolge A eines normierten Raumes E heißt **beschränkt**, falls es ein $r > 0$ mit $\|x\| \leq r$ für alle $x \in A$ gibt.

Proposition

P. 2.21

Sei E ein metrischer Raum.

- (i) Der Grenzwert einer in E konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.
(ii) Jede konvergente Folge in E ist beschränkt.

Proposition

P. 2.22

Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in E .

(i) Ist E ein normierter Raum, so konvergiert auch $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

(ii) Ist $E = \mathbb{R}$, so konvergiert $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right)$$

Bemerkung

Bem. 2.23

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, $a \in E, c > 0$. Dann sind äquivalent:

(i) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : d(x_n, a) < \varepsilon$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : d(x_n, a) < c \cdot \varepsilon$

Proposition

P. 2.24

Sei $x_n \rightarrow a$ in E .

(i) Ist E ein normierter Raum $\Rightarrow \|x_n\| \rightarrow \|a\|$.

(ii) Ist $E = \mathbb{R}$ oder $E = \mathbb{C}$, $x_n \neq 0 \forall n, a \neq 0 \Rightarrow x_n^{-1} \rightarrow a^{-1}$.

Definition

D. 2.25

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann heißt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(i) **monoton wachsend** ($x_n \nearrow$), falls $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) **streng monoton wachsend**, falls $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ gilt.

(iii) **monoton fallend** ($x_n \searrow$), falls $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ gilt.

(iv) **streng monoton fallend**, falls $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ gilt.

(v) $x_n \nearrow a \Leftrightarrow x_n \rightarrow a$ und $x_n \nearrow$.

(vi) $x_n \searrow a \Leftrightarrow x_n \rightarrow a$ und $x_n \searrow$.

Proposition

P. 2.26

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton beschränkte Folge in \mathbb{R} . Dann konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beispiel

Bsp. 2.27

(i) $\frac{1}{n} \searrow 0$

(ii) $0 < a < 1 \Rightarrow a^n \searrow 0$

Definition

D. 2.28

Sei E ein metrischer Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$. Dann heißt $a \in E$ **Häufungspunkt (HP)** von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls in jeder ε -Umgebung von A unendlich viele Folgenglieder liegen.

Proposition

P. 2.30

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ eine Folge in einem metrischen Raum. Dann ist a genau dann HP von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Teilfolge (TF) besitzt.

Theorem (Bolzano-Weierstraß)

T. 2.31

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Dann besitzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt.

Definition

D. 2.32

Sei E ein metrischer Raum, $A, B \subset E$ nicht leer.

(i) $\text{diam}(A) := \sup_{x, y \in A} d(x, y)$ heißt **Durchmesser von A**

(ii) Definiere die Distanz zwischen A und B , $\text{dist}(A, B)$, durch

$$\text{dist}(A, B) := \inf \{ d(x, y) : x \in A \wedge y \in B \}$$

$$\text{dist}(x, B) := \text{dist}(\{x\}, B), \quad x \in E \quad (\text{ACHTUNG: keine Metrik!})$$

Korollar (Bolzano-Weierstraß)

K. 2.33

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Folge, d.h. $\exists r > 0 : x_k \in B_r(0), \forall k \in \mathbb{N}$. Dann besitzt $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert a und $|a| \leq r$.

Bemerkung

Bem. 2.34

In \mathbb{R}^n gilt: $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\Leftrightarrow (x_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert für alle i .

Lemma

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$. Gilt $x_n \leq c, \forall n \in \mathbb{N}$, so folgt $a \leq c$.

L. 2.35

Proposition

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte Folge. Sei M die Menge aller ihrer HP. Sei $M \neq \emptyset$. Dann ist $\sup M$ ein HP.

P. 2.36

Definition

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Sei M die Menge der HP von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup M$$

heißt **Limes superior**.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf M$$

heißt **Limes inferior**.

Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, so gilt $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach unten beschränkt, so gilt $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

D. 2.37

Bemerkung

Nach Proposition 2.36, $\{HP\} \neq \emptyset, x_n \leq c : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ ist größter Limes einer konvergenten Teilfolge.

Bem. 2.38

Proposition

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Dann gilt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\iff \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

P. 2.39

Theorem

Sei E ein metrischer Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$. Angenommen, jede Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge und die Grenzwerte aller konvergenten Teilfolgen sind gleich. Dann konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

T. 2.40

Definition (Cauchyfolge, Vollständigkeit)

- (i) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum E heißt **Cauchyfolge (CF)**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_k, x_l) < \varepsilon, \forall k, l \geq n_0$ gibt.
- (ii) Ein metrischer Raum, in dem jede CF konvergiert, heißt **vollständiger metrischer Raum**.
- (iii) Ein normierter Raum, in dem jede CF konvergiert, heißt **vollständiger normierter Raum** oder **Banachraum (BR)**.
- (iv) Ein vollständiger Skalarproduktraum heißt **Hilbertraum (HR)**.

D. 2.41

Bemerkung

Cauchyfolgen: $\forall \varepsilon \exists n_0 : d(x_k, x_{k+\ell}) < \varepsilon, \forall k \geq n_0, \forall \ell \in \mathbb{N}$.

Bem. 2.42

Lemma

Sei E ein metrischer Raum. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ konvergent. Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

L. 2.43

Korollar

In einem vollständigen metrischen Raum konvergiert eine Folge genau dann, wenn sie eine CF ist.

K. 2.44

Proposition

In einem metrischen Raum E gilt

- (i) Jede CF ist beschränkt.
- (ii) Jede CF besitzt höchstens einen HP.

P. 2.45

Korollar

\mathbb{R}^n mit der euklidischen Metrik ist ein vollständiger metrischer Raum (also auch Hilbertraum). Insbesondere: Folge konvergiert \iff Folge ist CF.

K. 2.46

Definition

Sei E ein Vektorraum. Dann heißen zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf E äquivalent, falls es $c > 0$ mit

$$\frac{1}{c} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c \cdot \|x\|_1, \quad \forall x \in E$$

Proposition

Sei E ein Vektorraum mit äquivalenten Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$. Dann ist $(E, \|\cdot\|_1)$ genau dann vollständig, wenn $(E, \|\cdot\|_2)$ vollständig ist.

Proposition

Seien $1 \leq p, q \leq \infty$. Dann sind $\|\cdot\|_{\ell^p}$ und $\|\cdot\|_{\ell^q}$ auf \mathbb{R}^n äquivalent.

Korollar

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $\ell^p(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum.

D. 2.47

P. 2.48

P. 2.49

K. 2.50

REIHEN

PART 2.3

Definition

Sei E ein normierter Raum, sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ eine Folge. Definiere $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ wie folgt:

$$s_n := \sum_{i=0}^n a_i$$

Beide Folgen zusammen heißen **Reihen**, wobei a_n die **Glieder der Reihe** und s_n die **Partialsummen der Reihe** sind. Schreibe $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

$((a_n))_{n \geq n_0}$ heißt **Reihe** oder **Endstück der Reihe** $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ in E , so heißt dies **Wert** oder **Summe der Reihe**.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Existiert $\sum a_n$ so heißt $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergent**, sonst **divergent**.

Proposition (Cauchykriterium)

Eine Reihe in einem Banachraum $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$\|s_{n+m} - s_n\| = \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right\| \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ und für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.

Korollar

Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Definition

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ (E ist ein normierter Raum) mit $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Dann heißt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **Nullfolge**.

Bemerkung

- (i) konvergente Reihe bilden einen Vektorraum
- (ii) Eine Reihe konvergiert genau dann, wenn ein beliebiges Endstück konvergiert.

Proposition

Sei $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Reihe in \mathbb{R} mit $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe genau dann, wenn sämtliche Partialsummen nach oben beschränkt sind.

D. 2.52

P. 2.53

K. 2.54

D. 2.55

Bem. 2.57

P. 2.58

Proposition (Dezimaldarstellung reeller Zahlen)

P. 2.59

Sei $x \in [0, 1) \subset \mathbb{R}$. Dann existiert $d_i \in \{0, 1, \dots, 9\} \subset \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$, mit

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} d_i \cdot 10^{-i-1}$$

Schreibweise: $x = 0, d_1 d_2 d_3 \dots$

$y \geq 0$. $n \in \mathbb{N}$ maximal: $n \leq y$. $x := y - n \in [0, 1)$

$$\Rightarrow y = n + \sum_{i=0}^{\infty} d_i \cdot 10^{-i-1}$$

Proposition (Majorantenkriterium)

P. 2.60

Seien $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}, ((b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ Reihen in \mathbb{R} . Angenommen $((b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und es gilt $|a_n| \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (für fast alle n reicht), so konvergiert auch $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}$. $((b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **Majorante** für $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition (Quotientenkriterium)

P. 2.62

Sei $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Reihe in $\mathbb{R} - +$. Es gelte $\gamma := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Dann konvergiert die Reihe.

Lemma

L. 2.64

Sei $I = [a, b]$ ein beschränktes Intervall, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ „stetige“ Funktionen auf I . Dann gelten:

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Ist f eine Konstante, so definieren wir $c := f$.

$$\Rightarrow \int_a^b f = c(b - a), \quad a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f = \int_a^b f$$

Proposition (Integralkriterium)

P. 2.65

Sei $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ (stetig,) monoton fallend. Dann konvergiert $((f(n)))_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann, wenn

$$\int_0^{\infty} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f < \infty$$

Proposition (Wurzelkriterium)

P. 2.67

Sei $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Reihe in \mathbb{R}_+ . Ist $\gamma := \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} < 1$, so konvergiert die Reihe.

Definition

D. 2.69

Sei $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Reihe in einem Banachraum. Dann heißt die Reihe **absolut konvergent**, falls $((\|a_n\|))_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} konvergiert.

Eine konvergente, nicht absolut konvergente Reihe heißt **bedingt konvergent**.

Proposition

P. 2.70

Sei $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine absolut konvergente Reihe in einem Banachraum. Dann konvergiert die Reihe und

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$$

Definition

- (i) $((a_n x^n))_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **Potenzreihe**
- (ii) $\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$ heißt **Konvergenzradius**
- (iii) a_n sind **Koeffizienten**

Definition

Eine Reihe $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **alternierend**, falls $a_n \cdot a_{n+1} \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Proposition (Leibnizkriterium $(((-1)^n \frac{1}{n}))_{n > 1}))$

Sei $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine alternierende Reihe in \mathbb{R} . Gelte $|a_n| \searrow 0$. Dann konvergiert die Reihe und es gilt

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq |a_0|$$

Korollar

Sei $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine alternierende Reihe in \mathbb{R} . Gelte $|a_n| \searrow 0$. Dann gilt

$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} a_n \right| \leq |a_k|, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Definition

Definiere $\ell^2(\mathbb{N})$ als den Raum aller reellen Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ (Raum aller quadratsummierbaren Folgen).

Seien $a, b \in \ell^2(\mathbb{N})$. Definiere

$$\langle a, b \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

Sei $1 \leq p < \infty$. Definiere $\ell^p(\mathbb{N})$ als den Raum aller reellen Folgen $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p < \infty$$

und wir definieren

$$\|a\|_{\ell^p(\mathbb{N})} := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Für \mathbb{C} gilt $\ell^p(\mathbb{N}; \mathbb{C}) : a_n b_n \rightarrow a_n \overline{b_n}$. Für $p = \infty$ gilt $\|a\|_{\ell^\infty(\mathbb{N}; \mathbb{C})} := \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$

Theorem

$\ell^2(\mathbb{N})$ ist ein Hilbertraum, für $a \leq p < \infty$ ist $\ell^p(\mathbb{N})$ ein Banachraum. Die Dimension von $\ell^p(\mathbb{N}) = \infty$.

Definition

Seien $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}, ((b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ Reihen in einem normierten Raum E . Dann ist $((b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine **Umordnung** von $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}$, falls es eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $b_n = a_{\varphi(n)}$ gibt.

Theorem (Umordnungssatz)

Sei $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine absolut konvergente Reihe in einem Banachraum E . Sei $((b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Umordnung von $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Dann konvergiert auch $((b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ absolut und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

$((a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert **kommutativ**.

D. 2.72

D. 2.73

P. 2.74

K. 2.75

D. 2.76

T. 2.77

D. 2.78

T. 2.79

Definition

D. 2.80

- (i) Sei \mathcal{I} eine abzählbare Menge. Eine Familie $(a_i)_{i \in \mathcal{I}}$ in einem Banachraum E heißt **absolut summierbar**, falls es eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{I}$ gibt, sodass $((a_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ absolut konvergiert.
- (ii) $((a_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert unabhängig von der Wahl der Bijektion gegen den selben Wert (Umordnungssatz).

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} := \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$$

für eine Bijektion φ .

Proposition

P. 2.81

- (i) Eine abzählbare Familie $(a_i)_{i \in \mathcal{I}}$ in einem Banachraum E ist genau dann absolut summierbar, falls für alle endlichen Teilmengen $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ die Summen $\sum_{j \in \mathcal{J}} \|a_j\|$ gleichmäßig in \mathcal{J} beschränkt sind.
- (ii) Ist $(a_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine absolut summierbare Familie in einem Banachraum E , so gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $H \subset \mathcal{I}$, sodass für alle endlichen Teilmengen $K \subset \mathcal{I} \setminus H$ und für alle endlichen Teilmengen $L \subset \mathcal{I}$ mit $H \subset L$

$$\sum_{i \in K} \|a_i\| < \varepsilon$$

und

$$\left\| \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i - \sum_{i \in L} a_i \right\| \leq 2\varepsilon$$

gelten.

Proposition

P. 2.83

Sei $(a_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie mit $\sum_{i \in \mathcal{I}} \|a_i\| := \sup\{\sum_{i \in J} \|a_i\| : J \subset \mathcal{I} \text{ endlich}\}$. Sei nun $(a_i)_{i \in \mathcal{I}}$ absolut summierbar im Banachraum E . Sei $J \subset \mathcal{I}$ abzählbar. Dann ist $(a_i)_{i \in J}$ absolut summierbar und $\sum_{i \in J} \|a_i\| \leq \sum_{i \in \mathcal{I}} \|a_i\|$.

Theorem (Assoziativitätstheorem)

T. 2.84

Sei $(a_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine absolut summierbare Familie in einem Banachraum E . Sei $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare disjunkte Zerteilung von \mathcal{I} in Teilmengen I_n und $b_n := \sum_{i \in I_n} a_i$. Dann ist $((b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ absolut summierbar/konvergent und es gilt

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} a_i = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Theorem (Cauchysche Produktformel)

T. 2.85

Seien $((a_n))_{n \in \mathbb{N}}, ((b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ absolut konvergente Reihen in \mathbb{R} . Dann ist $(a_i b_k)_{(i,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ eine absolut summierbare Familie und

$$\sum_{(i,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_i b_k = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \right) \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^i a_k b_{i-k}$$

GLEICHMÄSSIGE KONVERGENZ

PART 2.4

Bemerkung

Sei E eine Menge, F ein vollständiger metrischer Raum, $f_n : E \rightarrow F$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge (Familie) von Funktionen. Dann konvergiert die Folge in jedem $x \in E$, falls alle $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolgen sind, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in E \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0 \quad d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise.

Definition

- (i) Sei E eine Menge und F ein vollständiger metrischer Raum. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen, $f_n : E \rightarrow F$. Dann konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E **gleichmäßig**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \quad \forall n, m \geq n_0 \quad d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$$

gilt.

Definiere $f : E \rightarrow F$: $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $\forall x \in E$.

Sprechweise: f_n konvergiert gleichmäßig gegen f : $f_n \rightrightarrows f$.

- (ii) Ist E ein metrischer Raum, so heißt $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : E \rightarrow F$, **lokal gleichmäßig konvergent**, falls es zu jedem $x \in E$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $f_n|_{B_\delta(x)} : B_\delta(x) \rightarrow F$ gleichmäßig konvergiert.
- (iii) Ist F zusätzlich ein Banachraum, so heißt $((f_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : E \rightarrow F$, **gleichmäßig konvergent**, **lokal gleichmäßig konvergent** oder **absolut konvergent**, falls dies für die Folge der Partialsummen

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x), \quad s_n : E \rightarrow F$$

gilt.

Lemma

Sei E eine Menge, F ein Banachraum, $f_n : E \rightarrow F$, $n \in \mathbb{N}$. $((f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig absolut, wenn es eine „von x unabhängige“ konvergente Majorante gibt:

$$\exists ((a_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergent, } a_n \geq 0 : \|f_n(x)\| \leq a_n, \quad \forall x \in E \forall n \in \mathbb{N}$$

Definition

Eine **Doppelfolge** $(a_{nm})_{n,m \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum E ist eine Funktionsfolge $f_n : \mathbb{N} \rightarrow E : a_{nm} = f_n(m)$.

Theorem

Sei $(a_{nm})_{n,m \in \mathbb{N}}$ eine Doppelfolge in einem vollständigen metrischen Raum E . Angenommen, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{nm}$ existieren $\forall n, m$.

Sei eine dieser konvergent gleichmäßig, ohne Einschränkung konvergiere $(a_{nm})_{n,m \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig in m .

Dann existieren

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{nm}$$

und sind gleich.

Lemma

Sei E ein metrischer Raum. $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ in E für $n \rightarrow \infty$.

Dann gilt $d(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d(x, y)$.

Bem. 2.87

D. 2.88

L. 2.91

D. 2.92

T. 2.93

L. 2.95

Lemma

Sei E ein metrischer Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolgen in E . Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$.

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0 \Rightarrow (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind Cauchyfolgen
- (ii) Gilt zusätzlich zu oben auch $x_n \rightarrow x$, so folgt $y_n \rightarrow x$.

Theorem

Sei E ein Banachraum. Konvergiere $((a_{nm}))_n$ gleichmäßig in m . Existiert $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{nm}$ für alle n , so existieren auch

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{nm}$$

und stimmen überein.

Korollar

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$$

L. 2.96

T. 2.97

K. 2.98

TOPOLOGISCHE GRUNDLAGEN

PART 3.1

Definition (Topologie)

D. 3.1

Sei E eine Menge. Dann heißt $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ **Topologie auf E** , falls

- (i) $\emptyset, E \in \mathcal{O}$
- (ii) $A_i \in \mathcal{O}, i \in \mathcal{I} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \in \mathcal{O}$
- (iii) $A_i \in \mathcal{O}, i = 1, \dots, m \Rightarrow \bigcap_{i=1}^m A_i \in \mathcal{O}$

(E, \mathcal{O}) heißt **topologischer Raum**. $A \subset E$ heißt **offen**, falls $A \in \mathcal{O}$.

Definition

D. 3.2

Sei (E, \mathcal{O}) ein topologischer Raum.

- (i) $U \subset E$ heißt **Umgebung von $x \in E$** , falls es ein $A \in \mathcal{O} : x \in A \subset U$.
 \mathcal{U} bezeichnet die Menge **aller Umgebungen von $x \in E$** .
- (ii) E heißt **Hausdorffraum**, wenn $x \neq y \in E$ disjunkte Umgebungen besitzen (T_2 -Raum).

Beispiel

Bsp. 3.3

- (i) Sei (E, d) ein metrischer Raum. Dann heißt $A \subset E$ **offen**, falls für alle $x \in A$ ein $r > 0$ mit $B_x(r) \subset A$ existiert.
Diese offenen Mengen bilden eine Topologie auf E , diese ist hausdorffsch.
- (ii) $(E, \{\emptyset, E\})$. Für $|E| \geq 2$ ist diese Topologie nicht hausdorffsch.
- (iii) $(E, \mathcal{P}(E))$

Definition

D. 3.4

Sei (E, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in E, r > 0$. Definiere

- (i) die **offene Kugel** mit Mittelpunkt x_0 und Radius r :

$$B_{x_0}(r) := \{x \in E : d(x, x_0) < r\}$$

Sei E nun normiert:

- (ii) Die **abgeschlossene Kugel** mit Radius r und Mittelpunkt x_0 :

$$\overline{B}_r(x_0) := \{x \in E : d(x, x_0) \leq r\}$$

- (i) Die **Sphäre** mit Radius r und Mittelpunkt x_0 :

$$\mathbb{S}_r(x_0) := \{x \in E : d(x, x_0) = r\}$$

Definition

D. 3.5

Sei E ein metrischer Raum.

- (i) $A \subset E$ heißt **offen**, falls $\forall x \in A \exists r > 0 B_x(r) \subset A$.
Offene Mengen bilden eine Topologie.
- (ii) $A \subset E$ heißt **abgeschlossen**, falls $\complement A$ offen ist.
Die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen heißt \mathcal{F} .
- (iii) $U \subset E$ heißt **Umgebung von $x \in E$** , falls es ein $A \in \mathcal{O} : x \in A \subset U$.
- (iv) Eine Familie $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$ von Umgebungen von $x \in E$ heißt **Umgebungsbasis** von x , falls zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $i \in \mathcal{I}$ mit $U_i \subset U$ existiert.

Bemerkung

Bem. 3.6

Sei E ein metrischer Raum.

- (i) \emptyset, E sind offen und abgeschlossen.
- (ii) Eine offene Kugel $B_x(r)$ ist eine offene Menge. Eine abgeschlossene Kugel $\overline{B_r}(x)$ ist eine abgeschlossene Menge.
- (iii) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist weder offen noch abgeschlossen
- (iv) Sei $A \subset E$ endlich. Dann ist A abgeschlossen.
- (v) Die diskrete Metrik liefert die Topologie $(E, \mathcal{P}(E))$.
- (vi) $\mathbb{S}_r(x) \subset E$ ist abgeschlossen.
- (vii) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, $a_n > 0$. Dann ist $\{B_{a_n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ Umgebungsbasis von x .

Proposition

P. 3.7

Sei E ein metrischer Raum.

- (i) Sei $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von offenen Mengen. Dann gilt $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \in \mathcal{O}$
- (ii) Seien $A_i \in \mathcal{O}, 1 \leq i \leq n$. Dann gilt $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{O}$
- (iii) $(A_i)_{i \in \mathcal{I}} : A_i \in \mathcal{F}, A_i$ ist abgeschlossen $\forall i \in \mathcal{I}$. Dann gilt $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i \in \mathcal{F}$
- (iv) $A_i \in \mathcal{F}, 1 \leq i \leq n$. Dann gilt $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$

Definition

D. 3.8

Sei E ein metrischer Raum, $A \subset E$.

- (i) $x \in A$ heißt **innerer Punkt von** A , falls $A \subset \mathcal{U}(x)$,

$$\text{int } A \equiv \mathring{A} := \{x \in A : x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$$

- (ii) $x \in E$ heißt **Berührungspunkt** von A , falls $U \cap A \neq \emptyset, \forall U \in \mathcal{U}(x)$.
Die Menge aller Berührungspunkte von A heißt **Abschluss** oder **abgeschlossene Hülle von** A : \overline{A} , oder auch $\text{cl}(A)$.
Ist E normiert folgt $\overline{B_r}(x) = \overline{B_r(x)}$.
- (iii) $x \in E$ heißt **Randpunkt von** A , falls in jeder Umgebung von x jeweils mindestens ein Punkt aus A und $\mathbb{C}A$ liegen.
Die Menge aller Randpunkte von A heißt **Rand von** A : ∂A .

Proposition

P. 3.9

Sei E ein metrischer Raum, $A \subset E$. Dann gelten

$$\text{int } A = \{x \in A : \exists r > 0 : B_r(x) \subset A\}$$

und

$$\text{int } A = \bigcup \{G \in \mathcal{O} : G \subset A\}$$

Proposition

P. 3.10

Sei E ein metrischer Raum, $A, B \subset E$. Dann gelten

$$A \subset B \Rightarrow \begin{cases} \text{int } (A) \subset \text{int } (B) \\ \text{int } (A \cap B) = \text{int } (A) \cap \text{int } (B) \end{cases}$$

Proposition

P. 3.11

Sei E ein metrischer Raum. $A, B \subset E$. Dann gilt

$$A \subset B \Rightarrow \begin{cases} \overline{A} \subset \overline{B} \\ \overline{A} = \bigcap \{F \in \mathcal{F} : A \subset F\} \end{cases}$$

Somit ist \overline{A} die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält.

Lemma

Sei $A \subset E$ ein metrischer Raum. Dann ist \overline{A} abgeschlossen.

Proposition

Sei E ein metrischer Raum. $A, B \subset E$. Dann gilt

$$\mathbb{C}\bar{A} = \text{int}(\mathbb{C}A) \quad \text{und} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

P. 3.12

Beispiel

Bsp. 3.13

(i) E ist ein metrischer Raum, $A \subset E$. Dann gilt

(a) $\partial A = \partial \mathbb{C}A$

(b) $\bar{A} = \text{int}(A) \dot{\cup} \partial A$

(c) $E = \text{int}(A) \dot{\cup} \text{int}(\mathbb{C}A) \dot{\cup} \partial A$

(ii) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ endlich. Dann gilt $A = \bar{A} = \partial A$ sowie $\text{int}(A) = \emptyset$.

Definition

D. 3.14

Sei E ein metrischer Raum, $A \subset E$. Dann heißt $x \in E$ **Häufungspunkt von A** , falls $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, $\forall U \in \mathcal{U}(x)$.

Bemerkung

Bem. 3.15

(i) Jeder Häufungspunkt ist ein Berührungspunkt, aber im Allgemeinen nicht umgekehrt.

(ii) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist jeder Häufungspunkt von A auch ein Häufungspunkt der Folge, die Umkehrung gilt aber in der Regel nicht.

Definition

D. 3.17

Sei E ein metrischer Raum. Dann heißt $A \subset E$ **dicht in E** , falls $\bar{A} = E$.

Proposition

P. 3.19

Sei E ein metrischer Raum, $A \subset E$. Sei d_A die von (E, d) induzierte Metrik auf A . Dann sind die offenen Mengen O_A in (A, d_A) genau die Mengen der Form $O \cap A$, wobei O in (E, d) offen ist.

STETIGKEIT

PART 3.2

KOMPAKTHEIT

PART 3.3