Zusammenfassung für Analysis I

(Prof. Dr. Schnürer)

Wintersemester 2014/2015

von Dagmar Sorg

Grundlagen: Logik, Mengenlehre und reelle Zahlen — Kap. 1

Logische Grundlagen — Part 1.1

Definition (Aussage) — D. 1.1

(i) Eine ***Aussage*** ist etwas, dem der Wahrheitsgehalt „wahr“ oder „falsch“ zugeordnet ist.
(ii) Eine ***Aussageform*** ist eine Aussage, die eine noch unbestimmte oder freie Variable enthält.

Definition (Negation, Verneinung) — D. 1.3

Ist p eine Aussage, so bezeichnet $\neg p$ die Negation dieser Aussage.

Definition (Konjunktion) — D. 1.5

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \wedge q$ („p und q“) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

p	q	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Definition (Disjunktion) — D. 1.6

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \vee q$ („p oder q“) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Definition (Kontravalenz) — D. 1.7

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \dot\vee q$ („entweder p oder q“) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

p	q	$p \dot\vee q$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Definition (Implikation) — D. 1.8

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \Rightarrow q$ („p impliziert q“) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

p	q	$p \Rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

(i) p heißt *Voraussetzung, Prämisse* oder *hinreichende Bedingung* für q
(ii) q heißt *Behauptung, Konklusion* oder *notwendige Bedingung*

Definition **D. 1.10**

(i) Seien p, q Aussagen. Definiere $p \Leftrightarrow q$ („p und q sind äquivalent“, „genau dann, wenn p gilt, gilt auch q“) durch

p	q	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

(ii) $p_1, p_2, \ldots$ heißen äquivalent, falls für je zwei dieser Aussagen, p und q, $p \Leftrightarrow q$ gilt.

Proposition **P. 1.11**

Seien p, q, r Aussagen. Dann gelten

(i) $\neg\neg p \Leftrightarrow p$
(ii) $p \vee \neq p$
(iii) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ (Symmetrie)
(iv) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ (Symmetrie)
(v) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ (Symmetrie)
(vi) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ (Idempotenz)
(vii) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ (Idempotenz)
(viii) $(p \wedge q) \Rightarrow p$
(ix) $p \Rightarrow (p \vee q)$
(x) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r))$
(xi) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r))$
(xii) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r))$
(xiii) $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$ (Assoziativität)
(xiv) $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ (Assoziativität)
(xv) $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ (Distributivität)
(xvi) $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (Distributivität)
(xvii) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$ (De Morgan)
(xviii) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$ (De Morgan)
(xix) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$
(xx) $((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
(xxi) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
(xxii) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$
(xxiii) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$
(xxiv) $p \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r))$ (Fallunterscheidung)

Erste Mengenlehre **Part 1.2**

Definition (naive Definition einer Menge) **D. 1.12**

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten, Elemente genannt. Ist A eine Menge, x ein Objekt, so schreiben wir $x \in A$, falls x ein Element von A ist. $x \notin A :\Leftrightarrow \neg(x \in A)$
Für eine Menge A, die genau die Elemente a, b und c enthält, schreiben wir $A = \{a, b, c\}$.
Es ist irrelevant, ob a mehrfach auftaucht oder wie die Elemente angeordnet werden.

Definition **D. 1.13**

Seien A, B Mengen.

(i) Dann ist A eine Teilmenge von B ($A \subset B$ oder $A \subseteq B$), falls aus $x \in A$ auch $x \in B$ folgt.
(ii) A und B heißen gleich ($A = B$), falls $A \subset B$ und $B \subset A$ gelten.
$A \neq B :\Leftrightarrow \neg(A = B)$ (Extensionalitätsaxiom)
(iii) Schreibe $A \subsetneq B$ für $A \subset B$ und $A \neq B$.

Lemma — L. 1.14

Seien A, B, C Mengen. Dann gelten:

(i) $A \subset A$ (Reflexivität)

(ii) $x \in A$ und $A \subset B$ implizieren $x \in B$

(iii) $A \subset B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (Transitivität)

Axiom (Aussonderungsaxiom) — A. 1.15

Sei A eine Menge und $a(x)$ eine Aussageform. Dann gibt es eine Menge B, deren Elemente genau die $x \in A$ sind, die $a(x)$ erfüllen.
Schreibe $B = \{x \in A : a(x)\}$.

Bemerkung — Bem. 1.17

Zu jeder Menge A gibt es eine Menge B und eine Aussageform $a(x) : A = \{x \in B : a(x)\}$.
Nehme $B = A, a(x) = (x \in A)$.

Bemerkung (Russelsche Antinomie) — Bem. 1.18

Nimmt man im Aussonderungsaxiom statt A die „Allmenge“ (Menge aller Elemente), dann bekommt man Probleme:
Sei $A =$ Allmenge, $B = \{X \in A : X \notin X\}$. Es gilt $y \in B \Leftrightarrow (y \in A \wedge y \notin y) \Leftrightarrow y \notin y$.
Gilt $B \in B$? $\rightarrow$ Widerspruch.

Lemma (Existenz der leeren Menge) — L. 1.19

Es gibt eine Menge $\emptyset$, die leere Menge, die kein Element enthält. Sie erfüllt:

(i) $\emptyset \subset A$ für alle Mengen A

(ii) $\emptyset$ ist eindeutig bestimmt.

Quantoren — Part 1.3

Definition — D. 1.20

Sei A eine Menge, $a(x)$ eine Aussageform.

(i) **Existenzquantor:** Wir schreiben $\exists x \in A : a(x)$ oder $\underset{x\in A}{\exists} a(x)$ für „Es gibt ein x in der Menge A, sodass dieses x $a(x)$ erfüllt.“
Schreibe $\exists! x \in A : a(x)$ für es gibt genau ein $x \in A$ mit $a(x)$. Dies zeigt man, indem man $\exists x \in A : a(x)$ und für alle $x, y \in A$ mit $a(x), a(y) : x = y$ zeigt.

(ii) **Allquantor:** Schreibe $\forall x \in A : a(x)$ oder $\underset{x\in A}{\forall} a(x)$ manchmal auch $a(x) \forall x \in A$ für „Für alle $x \in A$ gilt $a(x)$.“

Lemma — L. 1.22

Seien A, B Mengen. $p(x), p(x,y)$ Aussageformen. Dann gelten

(1.1) $\underset{x\in A}{\forall}\,\underset{y\in B}{\forall} p(x,y) \iff \underset{y\in B}{\forall}\,\underset{x\in A}{\forall} p(x,y)$

(1.2) $\underset{x\in A}{\exists}\,\underset{y\in B}{\exists} p(x,y) \iff \underset{y\in B}{\exists}\,\underset{x\in A}{\exists} p(x,y)$

(1.3) $\underset{x\in A}{\exists}\,\underset{y\in B}{\forall} p(x,y) \implies \underset{y\in B}{\forall}\,\underset{x\in A}{\exists} p(x,y)$

(1.4) $\neg\left(\underset{x\in A}{\forall} p(x)\right) \iff \underset{x\in A}{\exists} \neg p(x)$

(1.5) $\neg\left(\underset{x\in A}{\exists} p(x)\right) \iff \underset{x\in A}{\forall} \neg p(x)$

Weitere Mengenlehre — Part 1.4

Axiom (Existenz einer Obermenge) — A. 1.24

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen. Dann gibt es eine Menge M (=Obermenge) mit $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A \subset M$.

Bemerkung: M ist eindeutig bestimmt.

Definition (Vereinigung und Durchschnitt) — D. 1.25

Seien A, B Mengen mit Obermenge X.

(i) Dann ist die ***Vereinigung*** von A und B ($A \cup B$) definiert durch
$A \cup B := \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$

(ii) der ***(Durch-) Schnitt*** von A und B ($A \cap B$) ist definiert durch
$A \cap B := \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen mit Obermenge X.

(i) Vereinigung: $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{M}} A := \{x \in X : (\exists A \in \mathcal{M} : x \in A)\}$

(ii) Schnitt: $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{M}} A := \{x \in X : (\forall A \in \mathcal{M} : x \in A)\}$

Bemerkung — Bem. 1.26

Enthält $\mathcal{M}$ keine Menge, so gelten $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{M}} A = \emptyset$ sowie $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{M}} A = X$

Definition (Disjunkte Mengen) — D. 1.27

Seien A, B Mengen.

(i) A und B heißen disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$. Schreibe in diesem Fall $A \dot{\cup} B$ statt $A \cup B$

(ii) Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen. Dann heißen die Mengen in $\mathcal{M}$ disjunkt, falls für $A, B \in \mathcal{M}, A \neq \emptyset$ stets $A \cap B = \emptyset$ gilt. Schreibe $\dot{\bigcup\limits_{A \in \mathcal{M}}} A$ statt $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{M}} A$.

Definition (Komplement) — D. 1.28

Seien A, B Mengen mit fester Obermenge X.

(i) Definiere das ***Komplement*** von A in B durch $B \setminus A := \{x \in B : x \notin A\}$

(ii) Definiere das Komplement von A durch $\complement A \equiv A^{\complement} := \{x \in X : x \notin A\}$

Proposition — P. 1.29

Seien A, B, C Mengen mit Obermenge X. Dann gelten:

(i) $A \cup B = B \cup A$ (Kommutativität)

(ii) $A \cap B = b \cap A$ (Kommutativität)

(iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Assoziativität)

(iv) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Assoziativität)

(v) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (Distributivität)

(vi) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (Distributivität)

(vii) $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ (De Morgansche Regel)

(viii) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ (De Morgansche Regel)

(ix) $\complement\complement A = A$

(x) $A \cup \complement A = X$

(xi) $A \setminus B = A \cap \complement B$

Axiom (Potenzmenge) — A. 1.30

Sei A eine beliebige Menge. Dann gibt es die Menge $\mathcal{P}(A)$ (oder 2^A), die Potenzmenge von A. Die Elemente von $\mathcal{P}(A)$ sind genau die Teilmengen von A.

Axiom (Kartesisches Produkt) — A. 1.32

Seien A, B Mengen. Dann gibt es eine Menge, das Kartesische Produkt von A und B ($A \times B$), die aus allen geordneten Paaren (a, b) mit $a \in A, b \in B$ besteht. a heißt erste, b heißt zweite Komponente des Paares (a, b).

$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$

Bemerkung
Bem. 1.33

$(a,b) \equiv \{a,\{a,b\}\} \in \mathcal{P}(A \cup \mathcal{P}(A \cup B))$

Definition (Funktion, Ableitung)
D. 1.34

Seien A, B Mengen.

(i) Eine Funktion (oder Abbildung) f von A nach B, $f : A \to B$, ist eine Teilmenge von $A \times B$, sodass es zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a,b) \in f$ gibt: $\forall a \in A \exists b \in B : (a,b) \in f$.
Schreibe $b = f(a), a \mapsto b$.
Definiere den Graphen von f:
$graph\ f := \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\} = f \subset A \times B$

(ii) A heißt ***Definitionsbereich*** von f, $D(f)$.
$f(A) := \{f(x) : x \in A\} \equiv \{y \in B : (\exists x \in A : \underbrace{f(x) = y}_{(x,y)\in f})\} = im\ f = R(f)$
heißt ***Bild*** oder ***Wertebereich*** von f.

(iii) Sei $M \subset A$ beliebig.
$f(M) := \{y \in B : (\exists x \in M : f(x) = y)\} \equiv \{f(x) : x \in M\}$
Somit induziert $f : A \to B$ eine Funktion $\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, die wir wieder mit f bezeichnen.

(iv) Zu einer beliebigen Funktion $f : A \to B$ definieren wir die ***Urbildabbildung*** $f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ mit $F^{-1}(M) := \{x \in A : f(x) \in M\}, M \subset B$ beliebig.
$f^{-1}(M)$ heißt ***Urbild*** von M unter f.

Bemerkung
Bem. 1.35

$f : A \to B$ und $g : C \to D$ sind gleich, falls sie als Teilmengen von $A \times B$ bzw. $C \times D$ gleich sind, insbesondere $B = D$.

Definition
D. 1.36

Sei $f : A \to B$.

(i) f heißt ***injektiv***, falls für alle $x, y \in A$ aus $f(x) = f(y)$ auch $x = y$ folgt.

(ii) f heißt ***surjektiv***, falls $f(A) = B$. Wir sagen, dass f die Menge A <u>auf</u> B abbildet. Bei nicht-surjektiven Abbildungen sagt man A wird nach oder in B abgebildet.

(iii) f heißt ***bijektiv***, falls f injektiv und surjektiv ist. f ist eine ***Bijektion***.

(iv) ist f injektiv, so definieren wir die ***Inverse*** von f durch
$f^{-1} : R(f) \to A$ mit $f(x) \mapsto x$.
Es gilt $f^{-1}(f(x)) = x$

Bemerkung
Bem. 1.37

(i) $\mathcal{I}(f(x))$ bezeichnet die ***Inverse*** von $f(x)$.

(ii) $U(\{f(x)\})$ bezeichnet die Umkehrabbildung der Menge $\{f(x)\}$, sie ist definiert durch
$U : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ mit $M \subset B \mapsto \{x \in A : f(x) \in M\}$

(iii) $f : A \to B$ induziert $g : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$
$\Rightarrow \{f(x)\} = g(\{x\})$

Definition (Komposition von Abbildungen)
D. 1.38

Seien $f : A \to B, g : B \to C$ Abbildungen. Dann heißt
$g \circ f : A \to C$ mit $x \mapsto g(f(x))$ ***Komposition*** von f und g.

Bemerkung
Bem. 1.40

Seien $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt
$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
Sowie für Inverse und Umkehrabbildungen:
$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Definition (Relationen) D. 1.41

Seien A, B Mengen.

(i) $R \subset A \times B$ heißt ***Relation***. Statt $(x, y) \in R$ sagen wir $R(x, y)$ gilt.

(ii) $R \subset A \times A$ heißt

(a) **reflexiv**, falls $R(x, x)$ für alle $x \in A$ gilt

(b) **symmetrisch**, falls $R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$ für alle $x, y \in A$

(c) **antisymmetrisch**, falls $R(x, y) \wedge R(y, x) \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in A$

(d) **transitiv**, falls $R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)$ für alle $x, y, z \in A$

(iii) $R \subset A \times A$ heißt ***Äquivalenzrelation***, falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Schreibweise bei Äquivalenzrelationen: $x \sim y$ statt $R(x, y)$

Definition D. 1.42

Sei $R \subset A \times A$ eine Äquivalenzrelation. Sei $x \in A$. dann heißt $[x] := \{y \in A : R(x, y)\}$ ***Äquivalenzklasse von*** x. Schreibe $y \equiv x \pmod R$ für $y \in [x]$.
$A/R := \{[x] : x \in A\}$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen von R.

Die reellen Zahlen Part 1.5

Definition D. 1.44

Die reellen Zahlen, $\mathbb{R}$, sind eine Menge mit den folgenden Eigenschaften:

(A) $\mathbb{R}$ ist ein Körper, d.h. es gibt die Abbildung

(i) $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die **Addition**, schreibe $x + y$ für $x(x, y)$

(ii) $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die **Multiplikation**, mit $(x, y) \mapsto x \cdot y \equiv xy$ bezeichnet und zwei ausgezeichneten Elementen: $0, 1$ mit $0 \neq 1$

Es gilt, soweit nicht anders angegeben, für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$:

(K1) $x + (y + z) = (x + y) + z$
(K2) $x + y = y + x$
(K3) $0 + x = x$
(K4) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$, Schreibe $-x$ für y: $x + (-x) = 0$
(K5) $(xy)z = x(yz)$
(K6) $xy = yx$
(K7) $1x = x$
(K8) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R} : xy = 1$, Schreibe x^{-1} für $y : xx^{-1} = 1$
(K9) $x(y + z) = xy + xz$

(B) $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper, d.h. es gibt eine Relation $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (schreibe $x \leq y$ für $R(x, y)$), die für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ folgendes erfüllt:

(O1) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität)
(O2) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)
(O3) es gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$
(O4) aus $x \leq y$ folgt $x + z \leq y + z$
(O5) aus $0 \leq x$ und $0 \leq y$ folgt $0 \leq xy$.

Schreibe $y \geq x$ statt $x \leq y$ und $x < y$ bzw. $y > x$ für $x \leq y$ und $x \neq y$

(C) $\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.

Definition (Ordnung) D. 1.45

Eine transitive, antisymmetrische Relation $\leq$, für die stets $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt, heißt ***(totale) Ordnung***.

Definition (Supremum, Infimum) D. 1.46

(i) $A \subset \mathbb{R}$ heißt ***nach oben beschränkt***, falls es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $y \leq x, \forall y \in A$ gibt.
(ii) $x_0 \in \mathbb{R}$ ist eine ***obere Schranke*** von $A \subset \mathbb{R}$, falls $y \leq x_0, \forall y \in A$.
(iii) $x_0 \in \mathbb{R}$ ist das ***Supremum*** von $A \subset \mathbb{R}, x_0 = \sup A$, falls für jede obere Schranke x von A stets $x \geq x_0$ gilt. x_0 heißt ***kleinste obere Schranke***.
(iv) Ist $\sup A \in A$, so heißt $\sup A$ ***Maximum*** von A.
(v) Ist $A \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, so gibt $\sup A = +\infty$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ vereinbaren wir $-\infty < x < +\infty$.
(vi) Entsprechend: ***nach unten beschränkt, untere Schranke, Infimum (=größte untere Schranke), Minimum***.
Ist A nach unten unbeschränkt, so gilt $\inf A = -\infty$. Alternativ: $-A = \{-a : a \in A\}, A \subset \mathbb{R}$.
A heißt nach ***unten beschränkt***, falls $-A$ nach oben beschränkt ist. $x = \inf A$, falls $-x = \sup -A$.
(vii) Ist $A \subset \mathbb{R}$ nach oben und unten beschränkt, so heißt A ***beschränkt***.

Bemerkung Bem. 1.47

$\sup \emptyset = -\infty$ und $\inf \emptyset = +\infty$

Definition D. 1.49

Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

(i) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (offenes Intervall)
(ii) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (halboffenes Intervall)
(iii) $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (halboffenes Intervall)
(iv) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)

a, b heißen ***Endpunkte*** der Intervalle.

Lemma L. 1.50

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x0 = 0x = 0$.

Lemma L. 1.51

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gelten

(i) $(-1)x = -x$
(ii) $-(-x) = x$
(iii) $(-1)(-1) = 1$

Lemma L. 1.52

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist die additive Inverser $-x$ eindeutig bestimmt.

Lemma L. 1.53

Es gelten $0 < 1$ und $-1 < 0$.

Lemma L. 1.54

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt genau ein der drei folgenden Aussagen:

$$x < y, \qquad x = y, \qquad x > y$$

Lemma L. 1.55

Gelte $0 < x < y$. Dann gelten:

(i) $0 < x^{-1}$
(ii) $0 < y^{-1} < x^{-1}$

Lemma L. 1.56

$x, y \in \mathbb{R}$. Gilt $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0$.

Lemma L. 1.57

Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Aus $0 \leq a \leq b$ folgt $a^2 \leq b^2$
(ii) Aus $a^2 \leq b^2$ und $b \geq 0$ folgt $a \leq b$.

Mit $a^2 = a \cdot a$.

Definition (Natürliche Zahlen) D. 1.58

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind die kleinste Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ mit

(N1) $=\in A$

(N2) $a + 1 \in A, \forall a \in A$

$\mathbb{N}$ ist die kleinste Menge mit (N1), (N2) in dem Sinn, dass für alle $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$ mit $\mathcal{N}$ erfüllt (N1) und (N2) auch $\mathbb{N} \subset \mathcal{N}$ gilt.

Lemma L. 1.59

Es gibt die natürlichen Zahlen. Sie sind eindeutig bestimmt.

Lemma (Peanoaxiome) L. 1.60

Es gelten:

(i) $0 \in \mathbb{N}$

(ii) jedes $a \in \mathbb{N}$ besitzt genau einen Nachfolger $a^+ \in \mathbb{N}$

(iii) 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl

(iv) $\forall n, m \in \mathbb{N} : m^+ = n^+ \Rightarrow n = m$

(v) Sei $X \subset \mathbb{R}$ beliebig mit $0 \in X$ und $n^+ \in X, \forall n \in X$. Es folgt $\mathbb{N} \subset X$

Der Nachfolger von $a \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $a^+ := a + 1 \in \mathbb{N}$.

Theorem T. 1.61

$\mathbb{R}$ ist **archimedisch**, d.h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $\mathbb{N} \ni n \geq n_0$ auch $n \geq x$ gilt.

Korollar K. 1.62

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und sei $a > 0$.

(i) Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $an \geq x$

(ii) Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} \leq a$

(iii) Ist $a \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (oder alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$), so ist $a \leq 0$.

Theorem (Vollständige Induktion) T. 1.63

Erfüllt $M \subset \mathbb{N}$ die Bedingungen

(i) $0 \in M$ (Induktionsanfang)

(ii) $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$ (Induktionsschritt)

so gilt $M = \mathbb{N}$.

Theorem T. 1.64

Sei p eine Aussageform auf $\mathbb{N}$. Gelten

(i) $p(0)$ und

(ii) $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

so gilt $p(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition (Familie, Folge) D. 1.67

(i) Seien $\mathcal{I}, X$ Mengen, $f : \mathcal{I} \to X$ eine Abbildung. Dann heißt f auch ***Familie***: $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ mit $x_i = f(i), \forall i \in \mathcal{I}$ ($\mathcal{I}$ bezeichnet die Indexmenge).

(ii) Ist $\mathcal{I} = \mathbb{N}$, so heißt $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ ***Folge***: $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset X$.

(iii) Ist $J \subset \mathcal{I}$, so heißt $(x_j)_{j\in J}$ ***Teilfamilie*** von $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$, falls die Werte auf J übereinstimmen.

(iv) Ist $\mathcal{I} = \mathbb{N}, J \subset \mathbb{N}$ unendlich, so heißt $(x_j)_{j\in J}$ ***Teilfolge*** von $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Ist $(j_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset J$ eine Folge mit $j_{k+1} > j_k, \forall k$ und $J = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{j_k\}$, so schreibe $(x_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ für die Teilfolge.

(v) Sei $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie. Ist $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ ($\to (x_i)_{1\leq i\leq n}$):

- (a) $n = 2$: Die Familie heißt ***Paar*** (x_1, x_2)
- (b) $n = 3$: Die Familie heißt ***Triple*** (x_1, x_2, x_2)
- (c) n beliebig: Die Familie heißt n-***Tupel*** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Definition — D. 1.68

Sei $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen mit Obermenge X.

(i) $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i := \{x \in X : (\exists i \in \mathcal{I} : x \in A_i)\}$

(ii) $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i := \{x \in X : (\forall i \in \mathcal{I} : x \in A_i)\}$

(iii) $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\} : \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i$, sowie $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i$

Definition — D. 1.69

Ist $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie reeller Zahlen, so gilt
$\sup_{i\in\mathcal{I}} x_i := \sup\{x_i : i \in \mathcal{I}\}$, sowie
$\inf_{i\in\mathcal{I}} x_i := \inf\{x_i : i \in \mathcal{I}\}$.

Proposition — P. 1.70

(i) Seien $A, B \subset \mathbb{R}, A \subset B$.
$\Rightarrow \sup A \leq \sup B, \inf A \geq \inf B$.

(ii) Sei $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen $A_i \subset \mathbb{R}, \forall i \in \mathcal{I}$. Dann definiere
$A := \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i$
$\Rightarrow \sup A = \sup_{i\in\mathcal{I}} \sup A_i$ und $\inf A = \inf_{i\in\mathcal{I}} \inf A_i$.

Definition — D. 1.71

(i) Sei A eine Menge, $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt ***nach oben (unten) beschränkt***, falls für $f(A)$ gilt:

(a) $\sup f(A) = \sup_{x\in A} f(x)$

(b) $\inf f(A) = \inf_{x\in A} f(x)$

(ii) Sei A eine Menge und $f_i : A \to \mathbb{R}$ eine Familie von Funktionen. Gilt für alle $x \in A$, dass $\sup_{i\in\mathcal{I}} f_i(x) < \infty$, so definieren wir die Funktion

$$\sup_{i\in\mathcal{I}} f_i : A \to \mathbb{R}$$
$$(\sup_{i\in\mathcal{I}} f_i)(x) := \sup_{i\in\mathcal{I}} f_i(x)$$

(iii) Ohne $\sup_{i\in\mathcal{I}} f_i(x) < \infty$ erhalten wir mit derselben Definition $\sup_{i\in\mathcal{I}} f_i : A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) Analog für $\inf_{i\in\mathcal{I}} f_i$.

(v) Ist $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$ gilt
$\sup_{i\in\mathcal{I}} f_i = \sup(f_1, \ldots, f_n) = \max(f_1, \ldots, f_n)$.
Entsprechend für Infimum/Minimum.

Definition (Kartesisches Produkt) — D. 1.72

(i) Sei $\mathcal{I} \neq \emptyset$ und $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen. Definiere das ***kartesische Produkt*** wie folgt:
$\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i := \{(x_i)_{i\in\mathcal{I}} : (\forall i \in \mathcal{I} : x_i \in A_i)\}$

(ii) Zu $j \in \mathcal{I}$ definieren wir die j-te Projektionsabbildung
$\pi_j : \prod_{i\in\mathcal{I}} A_i \to A_j$ mit $\pi_j((x_i)_{i\in\mathcal{I}}) := x_j$

Axiom — A. 1.74

Sei $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen $A_i \neq \emptyset, \forall i \in \mathcal{I}$. Dann gilt $\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i \neq \emptyset$, d.h. es gibt eine Familie $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ mit $x_i \in A_i, \forall i \in \mathcal{I}$.

Proposition
P. 1.75

Sei $\mathcal{I} \neq \emptyset$ und $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen. Dann gilt $\prod\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i = \emptyset \iff \exists i \in \mathcal{I} : A_i \neq \emptyset$.

Lemma (Zornsches Lemma)
L. 1.76

Sei $M \neq \emptyset$ mit einer Teilordnung (= partielle Ordnung) $\leq$. Nehme an, jede total geordnete Teilmenge $\Lambda \subset M$ (= Kette) besitzt eine obere Schranke $b \in M$, d.h. $x \leq b, \forall x \in \Lambda$. Dann enthält M ein maximales Element x_0, d.h. $\exists x_0 \in M : x \geq x_0 \Rightarrow x = x_0$.

Definition (Ausschöpfung, Partition, Überdeckung)
D. 1.77

Sei A eine Menge.

(i) Eine ***Überdeckung*** von A ist eine Familie $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ mit $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} \supset A$.

(ii) Eine ***Partition*** von A ist eine Überdeckung $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ mit $A_i \subset A$ und $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \in \mathcal{I}$, $A = \dot{\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}}} A_i$.

(iii) Eine ***Ausschöpfung*** von A ist eine aufsteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen von A, die $A_m \subset A_n, \forall m \leq n$ und $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$ erfüllt.

Proposition
P. 1.78

(i) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Dann bilden die **Restklassen** von $\sim$ eine Partition von A.

(ii) Sei $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Partition von A. Dann ist $\sim$ mit $x \sim y :\Leftrightarrow \exists i \in \mathcal{I} : x, y \in A_i$ eine Äquivalenzrelation auf A.

Lemma
L. 1.79

Seien A, B Mengen. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von A. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Abbildungen $f_n : A_n \to B$ mit $f_n|_{A_m} = f_m$ für alle $m \leq n$. Dann gibt es genau eine Funktion $f : A \to B$ mit $f(x) = f_n(x), \forall x \in A_n$ oder $f|_{A_n} = f_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposition (Rekursive Definition)
P. 1.80

Sei $B \neq \emptyset$ eine Menge, $x_0 \in B$ und $F : \mathbb{N} \times B \to B$ eine Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion $f : \mathbb{N} \to B$ mit den Ergebnissen:

(i) $f(0) = x_0$ und

(ii) $f(n+1) = F(n, f(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

f ist eine rekursiv definierte Funktion.

Kardinalität
Part 1.6

Definition (Mächtigkeit)
D. 1.84

Seien A, B Mengen.

(i) A, B heißen ***gleich mächtig*** ($A \sim B$), falls es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt.

(ii) B heißt ***mächtiger*** als A ($B \succ A$) oder A ***weniger mächtig*** als B ($A \prec B$), falls es eine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.

(iii) A heißt ***abzählbar***, falls $A \sim \mathbb{N}$.

(iv) A heißt ***höchstens abzählbar***, falls $A \prec \mathbb{N}$.

(v) A heißt ***überabzählbar***, falls A nicht höchstens abzählbar ist.

(vi) Sei A abzählbar, so heißt die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine ***Abzählung*** von A, falls $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ und $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \{x_i\} = A$.

Bemerkung

Bem. 1.85

(i) $\sim$ ist Äquivalenzrelation
(ii) $A \prec B \prec C \Rightarrow A \prec C$
(iii) $A \prec A$
(iv) $G := \{2n : n \in \mathbb{N}\}, G \prec \mathbb{N} : 2n \mapsto 2n$ und $\mathbb{N} \prec G : n \mapsto 2n$. Bijektiv: $\mathbb{N} \sim G$

Theorem (Schröder-Bernstein)

T. 1.86

Aus $A \prec B$ und $B \prec A$ folgt $A \sim B$.

Proposition

P. 1.87

A, B, C sind Mengen. Seien $\varphi : A \to B, \psi : B \to C$ Abbildungen. Sei $f : A \to B$ Abbildung. Dann gelten:

(i) Ist $\psi \circ \varphi$ injektiv, so ist φ injektiv
(ii) Ist $\psi \circ \varphi$ surjektiv, so ist ψ surjektiv
(iii) f surjektiv $\Leftrightarrow \exists g : B \to A, f \circ g = id_B$
(iv) f injektiv $\Leftrightarrow \exists g : B \to A, g \circ f = id_A$

Korollar

K. 1.88

$A \prec B \Leftrightarrow \exists f : B \to A,\ f$ ist surjektiv.

Definition

D. 1.89

Sei A eine Menge.

(i) A heißt ***endlich***, falls es eine injektive Abbildung $f : A \to \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $f(a)ym, \forall a \in A$ gibt.
(ii) A heißt ***unendlich***, falls A nicht endlich ist.
(iii) Gibt es eine bijektive Abbildung $f : A \to \{0, 1, \ldots, m-1\} \subset \mathbb{N}$, so hat A die ***Kardinalität*** $m(|A| = m)$. Gibt es keine solche Abbildung, so gilt $|A| = \infty$.
(iv) Sei P eine Aussageform auf A. Dann gilt P für ***fast alle*** $i \in A$, falls $\{i \in A : \neg P(i)\}$ endlich ist.

Lemma

L. 1.91

(i) Für jede endliche Menge A gilt $|A| < \infty$, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : A \to \{0, \ldots, m-1\}$.
(ii) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f : \{0, \ldots, m\} \to \{0, \ldots, n\}$ eine Bijektion. Dann gilt $n = m$. ($\Rightarrow$ Kardinalität ist wohldefiniert).

Lemma

L. 1.92

Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $(a_i)_{1 \leq i \leq m}$ eine endliche Familie natürlicher Zahlen (oder reeller). Dann gibt es ein $i \in \{a, \ldots, m\} : a_i \leq a_j, \forall 1 \leq j \leq m$.
Schreibe $a_i = \min\{a_1, \ldots, a_m\} \equiv \min(a_1, \ldots, a_n)$.
Entsprechend $\max\{a_1, \ldots, a_m\} \equiv \max(a_1, \ldots, a_n)$.

Lemma

L. 1.93

Die natürlichen Zahlen sind wohlgeordnet, d.h. jede Menge $M \subset \mathbb{N}, M \neq \emptyset$, besitzt ein kleinstes Element, d.h. $\exists a \in M : a \leq b, \forall b \in M$.

Lemma

L. 1.94

Sei A eine unendliche Menge. Dann besitzt A eine abzählbare Teilmenge.

Lemma

L. 1.95

Sei A eine Menge. Dann ist A genau dann höchstes abzählbar, wenn A endlich ist oder $A \sim \mathbb{N}$.

Lemma

L. 1.96

Sei A eine Menge. Dann ist A genau dann höchstens abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ gibt.

Proposition

P. 1.97

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

Proposition P. 1.98

Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Dann ist $\prod_{i=1}^{k} \mathbb{N} = \mathbb{N}^k$ abzählbar. Dies gilt auch, wenn wir $\mathbb{N}$ überall durch $A \sim \mathbb{N}$ ersetzen.

Lemma L. 1.99

Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge abzählbarer Mengen. Dann ist $A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ abzählbar.

Bemerkung Bem. 1.100

P. 1.98 und L. 1.99 gelten auch mit „höchstens abzählbar“ statt abzählbar.

Theorem (Cantor) T. 1.101

Sei A eine Menge $\Rightarrow \mathcal{P}(A) \succ A$ und $\mathcal{P}(A) \not\sim A$.

Betrag und Wurzel — Part 1.7

Definition D. 1.102

(i) Sei $x \in \mathbb{R}$. Definiere den ***Betrag*** von x wie folgt: $|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$

(ii) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten a und b, so heißt $|a-b|$ ***Länge von*** I.

Proposition P. 1.104

Seien $x, a \in \mathbb{R}$. Dann gelten

(i) $x \leq |x|$

(ii) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

(iii) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

Korollar K. 1.105

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Dann ist A genau dann beschränkt, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq a, \forall x \in A$ gibt.

Theorem (Dreiecksungleichung) T. 1.106

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(i) $|a+b| \leq |a| + |b|$

(ii) $|a-b| \geq |a| - |b|$

(iii) $|a-b| \geq \big|\, |a| - |b| \,\big|$

Proposition (Existenz der m-ten Wurzel) P. 1.107

Seien $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a \in \mathbb{R}_{geq0}$. Dann gibt es <u>genau</u> ein $x \in \mathbb{R}_{\geq 0} : x^m = a$.

Definition D. 1.108

(i) $\sqrt{a}$ ist die Zahl in $\mathbb{R}_+$ mit $(\sqrt{a})^2 = a$

(ii) $\sqrt[m]{a}$ oder $a^{\frac{1}{m}}$ ist die Zahl in $\mathbb{R}_+$ mit $(\sqrt[m]{a})^m = a$

(iii) $a^0 := 1, a^{\frac{n}{m}} := \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n$

Weitere Zahlen und Mächtigkeit — Part 1.8

Definition — D. 1.109

(i) Die Menge der $x \in \mathbb{R}$,sodass es $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m - n = x$ gibt, heißt die Menge der ***ganzen Zahlen***: $\mathbb{Z} := \{m - n : m, n \in \mathbb{N}\}$

(ii) Die ***rationalen Zahlen*** sind die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, sodass es $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$ und $x = \frac{m}{n}$ gibt: $\mathbb{Q} := \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$

(iii) $\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißt die Menge der ***irrationalen Zahlen***.

(iv) Die ***komplexen Zahlen*** sind Paare reeller Zahlen : $\mathbb{C} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Addition: $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$

Multiplikation: $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, bc + ad)$

Schreibe $(a, b) \equiv a + ib$. Es gilt $i^2 = -1$.
Sei $z = a + ib$. Dann heißt $a = Re\ z$ ***Realteil von*** z und $b = Im\ z$ ***Imaginärteil von*** z.
$\overline{a + ib} := a - ib$ heißt ***konjugiert komplexe Zahl zu*** $a + ib$.
$|a + ib| := \sqrt{a^2 + b^2}$ heißt ***Betrag von*** $a + ib$.
Für $a, b \in \mathbb{R}, \quad z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

- $|a + ib|^2 = (a + ib)\overline{(a + ib)}$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $|z|^2 = |Re\ z|^2 + |Im\ z|^2$
- $|z|^2 = |\overline{z}|$

Betrachte $\mathbb{R}$ mithilfe von $\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{C}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{x} = x$.

Bemerkung — Bem. 1.110

(i) Summen, Differenzen und Produkte ganzer Zahlen sind ganze Zahlen.

(ii) $\mathbb{Q}$ bildet einen angeordneten Körper, $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.

(iii) $\mathbb{C}$ ist ein Körper, $\mathbb{C}$ ist nicht angeordnet, $\mathbb{C}$ ist als metrischer Raum vollständig.
$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$. Für $(a, b) \neq 0$ ist daher $\frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2} = (a + ib)^{-1}$

(iv) Seien $z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow |z + w| \leq |z| + |w|$

(v) $|zw| = |z| \cdot |w|$

Theorem (Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$) — T. 1.111

Sei $I \subset (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $I \neq \emptyset$. Dann ist $I \cap \mathbb{Q}$ unendlich.

Proposition — P. 1.112

$\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

Proposition — P. 1.113

$\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Bemerkung (Cantorsches Diagonalverfahren ($\mathbb{R} \succ \mathbb{N}, \mathbb{R} \not\sim \mathbb{N}$)) — Bem. 1.114

Alle reellen Zahlen werden untereinander aufgelistet. Man nimmt die Diagonale und schreibt eine neue Zahl unter die Liste, die zur Diagonale verschieden ist $\rightarrow$ nicht in der Liste!

Bemerkung — Bem. 1.115

$\mathbb{R} \sim (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

Konvergenz — Kap. 2

Metrische Räume — Part 2.1

Definition (Metrische Räume) — D. 2.1

Sei E eine Menge.

(a) Eine Funktion $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ heißt ***Metrik***, falls

  (i) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)

  (ii) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ ((positive) Definitheit)

  (iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecksungleichung)

(b) Das Paar (E,d) heißt ***metrischer Raum***.

Lemma — L. 2.2

Sei E ein metrischer Raum. Dann gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$d(x,z) \geq |d(x,y) - d(y,z)|, \ \forall x,y,z \in E$$

Bemerkung — Bem. 2.3

$\mathbb{K}$ sein $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition (normierter Raum) — D. 2.4

Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Dann heißt $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ Norm, falls für alle $x,y,z \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ folgendes gilt:

  (i) $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$ ((positive) Definitheit)

  (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (Homogenität)

  (iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

(b) Das Paar $(E, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Lemma — L. 2.5

Sei E ein normierter Raum. Dann gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$\|x-y\| \geq |\|x\| - \|y\||, \ \forall x,y \in E$$

Definition (Skalarproduktraum) — D. 2.6

Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Dann heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ ***Skalarprodukt***, falls

  (i) $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ (Linearität im ersten Argument)

  (ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ($\mathbb{K}$: Symmetrie, $\mathbb{C}$: Hermizität)

  (iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $(\langle x, x \rangle = 0 \leftrightarrow x = 0)$ (positive Definitheit)

(b) $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt Skalarproduktraum.

Theorem (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) — T. 2.8

Sei E ein Skalarproduktraum. Dann gilt $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$, $\forall x, y \in E$ (bei Gleichheit gilt lineare Abhängigkeit von x und y).

Theorem — T. 2.9

Sei E ein Skalarproduktraum. Dann definiert $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für $x \in E$ eine Norm auf E.

Theorem — T. 2.10

Sei E normierter Raum. Dann definiert $d(x,y) := \|x\| - \|y\|$ für $x, y \in E$ eine Metrik auf E.

Beispiel — Bsp. 2.11

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n, x = (x^1, \ldots, x^n), y = (y^1, \ldots, y^n)$. Dann definiert $\langle x, y \rangle := \sum\limits_{i=1}^n x^i y^i$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, das ***euklidische Skalarprodukt***.

Dies induziert $\|x\| = |x| = \left(\sum\limits_{i=1}^n (x^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ und $d(x,y) = |x-y| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (x^i - y^i)^2}$

Proposition (Polarisationsformeln) P. 2.12

(i) Sei E ein Skalarproduktraum über $\mathbb{K}$. Dann gilt $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re\ \langle x,y\rangle$

(ii) ist E ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle x,y\rangle &= \tfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \end{aligned}$$

(iii) Ist E ein Skalarproduktraum über $\mathbb{C}$, so gilt

$4\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$

Proposition P. 2.13

Sei E ein normierter Raum über $\mathbb{R}$. Dann ist die Norm genau dann von einem Skalarprodukt induziert, falls die folgende Parallelogrammgleichung gilt:

$2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$

Theorem T. 2.14

Seien $1 \leq p,q \leq \infty$ konjungierte Exponenten. D.h. es gelte $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Sei $x,y \in \mathbb{R}^n$. Dann gelten

$$\sum_{i=1}^{n} x^i y^i \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q \qquad \text{(Höldersche Ungleichung)}$$

und

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \qquad \text{(Minkowskische Ungleichung)}$$

Folgen Part 2.2

Definition D. 2.16

Sei E ein metrischer Raum. Sei $x \in E, \varepsilon > 0$. Definiere $B_\varepsilon(x) := \{y \in E : d(y,x) < \varepsilon\}$ die ε-***Kugel***. $B_\varepsilon(x)$ heißt auch ε-***Umgebung von*** x (In $\mathbb{R} : B_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$).

Definition (Konvergenz) D. 2.17

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ eine Folge in einem metrischen Raum E.

(i) Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in E$, falls für beliebige $\varepsilon > 0$ fast alle (nur endlich viele liegen außerhalb) Folgeglieder in $B_\varepsilon(a)$ liegen

(ii) Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in E$, so heißt a ***Limes*** oder ***Grenzwert*** der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ oder $x_n \to a$ für $n \to \infty$ oder $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Bemerkung Bem. 2.18

Die Definition von Konvergenz ist äquivalent zu

(i) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ auch $x_n \in B_\varepsilon(a)$ gilt.

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ auch $d(x_n, a) < \varepsilon$ gilt.

Definition D. 2.19

(i) Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes E heißt ***beschränkt***, falls es ein $x \in E$ und $r > 0$ mit $A \subset B_r(x)$ gibt.

(ii) Eine Teilfolge A eines normierten Raumes E heißt ***beschränkt***, falls es ein $r > 0$ mit $\|x\| \leq r$ für alle $x \in A$ gibt.

Proposition P. 2.21

Sei E ein metrischer Raum.

(i) Der Grenzwert einer in E konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

(ii) Jede konvergente Folge in E ist beschränkt.

Proposition P. 2.22

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in E.

(i) Ist E ein normierter Raum, so konvergiert auch $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

(ii) Ist $E = \mathbb{R}$, so konvergiert $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

Bemerkung Bem. 2.23

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, $a \in E, c > 0$. Dann sind äquivalent:

(i) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : d(x_n, a) < \varepsilon$

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : d(x_n, a) < c \cdot \varepsilon$

Proposition P. 2.24

Sei $x_n \to a$ in E.

(i) Ist E ein normierter Raum $\Rightarrow \|x_n\| \to \|a\|$.

(ii) Ist $E = \mathbb{R}$ oder $E = \mathbb{C}$, $x_n \neq 0 \forall n, a \neq 0 \Rightarrow x_n^{-1} \to a^{-1}$.

Definition D. 2.25

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann heißt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(i) ***monoton wachsend*** ***($x_n \nearrow$)***, falls $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) ***streng monoton wachsend***, falls $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ gilt.

(iii) ***monoton fallend*** ***($x_n \searrow$)***, falls $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ gilt.

(iv) ***streng monoton fallend***, falls $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ gilt.

(v) $x_n \nearrow a \Leftrightarrow x_n \to a$ und $x_n \nearrow$.

(vi) $x_n \searrow a \Leftrightarrow x_n \to a$ und $x_n \searrow$.

Proposition P. 2.26

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel Bsp. 2.27

(i) $\frac{1}{n} \searrow 0$

(ii) $0 < a < 1 \Rightarrow a^n \searrow 0$

Definition D. 2.28

Sei E ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$. Dann heißt $a \in E$ ***Häufungspunkt (HP)*** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls in jeder ε-Umgebung von A unendlich viele Folgeglieder liegen.

Proposition P. 2.30

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ eine Folge in einem metrischen Raum. Dann ist a genau dann HP von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Teilfolge (TF) besitzt.

Theorem (Bolzano-Weierstraß) T. 2.31

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Dann besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt.

Definition D. 2.32

Sei E ein metrischer Raum, $A, B \subset E$ nicht leer.

(i) $diam(A) := \sup_{x,y\in A} d(x,y)$ heißt ***Durchmesser von A***

(ii) Definiere die Distanz zwischen A und B, $dist(A,B)$, durch
$dist(A,B) := \inf\{d(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$
$dist(x,B) := dist(\{x\}, B), \quad x \in E$ (ACHTUNG: keine Metrik!)

Korollar (Bolzano-Weierstraß) K. 2.33

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Folge, d.h. $\exists r > 0 : x_k \in B_r(0), \forall k \in \mathbb{N}$. Dann besitzt $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert a und $|a| \leq r$.

Bemerkung Bem. 2.34

In $\mathbb{R}^n$ gilt: $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\Leftrightarrow (x_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert für alle i.

Lemma L. 2.35

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Gilt $x_n \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$, so folgt $a \leq c$.

Proposition P. 2.36

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte Folge. Sei M die Menge aller ihrer HP. Sei $M \neq \emptyset$. Dann ist $\sup M$ ein HP.

Definition D. 2.37

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Sei M die Menge der HP von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n := \sup M$$

heißt ***Limes superior***.

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n := \inf M$$

heißt ***Limes inferior***.
Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, so gilt $\varlimsup_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt, so gilt $\varliminf_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Bemerkung Bem. 2.38

Nach Proposition 2.36, $\{HP\} \neq \emptyset, x_n \leq c : \varlimsup_{n\to\infty} x_n$ ist größter Limes einer konvergenten Teilfolge.

Proposition P. 2.39

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Dann gilt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\iff \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n$.

Theorem T. 2.40

Sei E ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$. Angenommen, jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge und die Grenzwerte aller konvergenten Teilfolgen sind gleich. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition (Cauchyfolge, Vollständigkeit) D. 2.41

(i) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum E heißt ***Cauchyfolge (CF)***, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_k, x_l) < \varepsilon, \forall k, l \geq n_0$ gibt.

(ii) Ein metrischer Raum, in dem jede CF konvergiert, heißt ***vollständiger metrischer Raum***.

(iii) Ein normierter Raum, in dem jede CF konvergiert, heißt ***vollständiger normierter Raum*** oder ***Banachraum (BR)***.

(iv) Ein vollständiger Skalarproduktraum heißt ***Hilbertraum (HR)***.

Bemerkung Bem. 2.42

Cauchyfolgen: $\forall \varepsilon\ \exists n_0 : d(x_k, x_{k+\ell}) < \varepsilon, \quad \forall k \geq n_0, \forall \ell \in \mathbb{N}$.

Lemma L. 2.43

Sei E ein metrischer Raum. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ konvergent. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

Korollar K. 2.44

In einem vollständigen metrischen Raum konvergiert eine Folge genau dann, wenn sie eine CF ist.

Proposition P. 2.45

In einem metrischen Raum E gilt

(i) Jede CF ist beschränkt.

(ii) Jede CF bsitzt höchstens einen HP.

Korollar K. 2.46

$\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik ist ein vollständiger metrischer Raum (also auch Hilbertraum). Insbesondere: Folge konvergiert $\iff$ Folge ist CF.

Definition D. 2.47

Sei E ein Vektorraum. Dann heißen zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf E äquivalent, falls es $c > 0$ mit

$$\frac{1}{c}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c \cdot \|x\|_1, \quad \forall x \in E$$

Proposition P. 2.48

Sei E ein Vektorraum mit äquivalenten Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$. Dann ist $(E, \|\cdot\|_1)$ genau dann vollständig, wenn $(E, \|\cdot\|_2)$ vollständig ist.

Proposition P. 2.49

Seien $1 \leq p, q \leq \infty$. Dann sind $\|\cdot\|_{\ell^p}$ und $\|\cdot\|_{\ell^q}$ auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent.

Korollar K. 2.50

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $\ell^p(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum.

Reihen Part 2.3

Gleichmässige Konvergenz Part 2.4