

Zusammenfassung für Analysis I

(Prof. Dr. Schnürer)

Wintersemester 2014/2015

von Dagmar Sorg

GRUNDLAGEN: LOGIK, MENGENLEHRE

UND REELLE ZAHLEN

KAP. 1

PART 1.1

LOGISCHE GRUNDLAGEN

Definition (Aussage)

- (i) Eine **Aussage** ist etwas, dem der Wahrheitsgehalt „wahr“ oder „falsch“ zugeordnet ist.
- (ii) Eine **Aussageform** ist eine Aussage, die eine noch unbestimmte oder freie Variable enthält.

Definition (Negation, Verneinung)

Ist p eine Aussage, so bezeichnet $\neg p$ die Negation dieser Aussage.

Definition (Konjunktion)

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \wedge q$ („ p und q “) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

p	q	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Definition (Disjunktion)

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \vee q$ („ p oder q “) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Definition (Kontravalenz)

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \dot{\vee} q$ („entweder p oder q “) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

p	q	$p \dot{\vee} q$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Definition (Implikation)

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \Rightarrow q$ („ p impliziert q “) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

p	q	$p \Rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

- (i) p heißt *Voraussetzung*, *Prämisse* oder *hinreichende Bedingung* für q
- (ii) q heißt *Behauptung*, *Konklusion* oder *notwendige Bedingung*

D. 1.1

D. 1.3

D. 1.5

D. 1.6

D. 1.7

D. 1.8

Definition

D. 1.10

- (i) Seien p, q Aussagen. Definiere $p \Leftrightarrow q$ („ p und q sind äquivalent“, „genau dann, wenn p gilt, gilt auch q “) durch

p	q	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

- (ii) p_1, p_2, \dots heißen äquivalent, falls für je zwei dieser Aussagen, p und q , $p \Leftrightarrow q$ gilt.

Proposition

P. 1.11

Seien p, q, r Aussagen. Dann gelten

- (i) $\neg\neg p \Leftrightarrow p$
- (ii) $p \vee \neg p$
- (iii) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ (Symmetrie)
- (iv) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ (Symmetrie)
- (v) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ (Symmetrie)
- (vi) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ (Idempotenz)
- (vii) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ (Idempotenz)
- (viii) $(p \wedge q) \Rightarrow p$
- (ix) $p \Rightarrow (p \vee q)$
- (x) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r))$
- (xi) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r))$
- (xii) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r))$
- (xiii) $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$ (Assoziativität)
- (xiv) $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ (Assoziativität)
- (xv) $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ (Distributivität)
- (xvi) $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (Distributivität)
- (xvii) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$ (De Morgan)
- (xviii) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$ (De Morgan)
- (xix) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$
- (xx) $((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
- (xxi) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- (xxii) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$
- (xxiii) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$
- (xxiv) $p \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r))$ (Fallunterscheidung)

ERSTE MENGENLEHRE

PART 1.2

Definition (naive Definition einer Menge)

D. 1.12

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten, Elemente genannt. Ist A eine Menge, x ein Objekt, so schreiben wir $x \in A$, falls x ein Element von A ist. $x \notin A \Leftrightarrow \neg(x \in A)$
Für eine Menge A , die genau die Elemente a, b und c enthält, schreiben wir $A = \{a, b, c\}$.
Es ist irrelevant, ob a mehrfach auftaucht oder wie die Elemente angeordnet werden.

Definition

D. 1.13

Seien A, B Mengen.

- (i) Dann ist A eine Teilmenge von B ($A \subset B$ oder $A \subseteq B$), falls aus $x \in A$ auch $x \in B$ folgt.
- (ii) A und B heißen gleich ($A = B$), falls $A \subset B$ und $B \subset A$ gelten.
 $A \neq B \Leftrightarrow \neg(A = B)$ (Extensionalitätsaxiom)
- (iii) Schreibe $A \subsetneq B$ für $A \subset B$ und $A \neq B$.

Lemma

Seien A, B, C Mengen. Dann gelten:

- (i) $A \subset A$ (Reflexivität)
- (ii) $x \in A$ und $A \subset B$ implizieren $x \in B$
- (iii) $A \subset B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (Transitivität)

Axiom (Aussonderungssaxiom)

Sei A eine Menge und $a(x)$ eine Aussageform. Dann gibt es eine Menge B , deren Elemente genau die $x \in A$ sind, die $a(x)$ erfüllen.

Schreibe $B = \{x \in A : a(x)\}$.

Bemerkung

Zu jeder Menge A gibt es eine Menge B und eine Aussageform $a(x) : A = \{x \in B : a(x)\}$.

Nehme $B = A, a(x) = (x \in A)$.

Bemerkung (Russelsche Antinomie)

Nimmt man im Aussonderungssaxiom statt A die „Allmenge“ (Menge aller Elemente), dann bekommt man Probleme:

Sei $A = \text{Allmenge}$, $B = \{x \in A : x \notin x\}$. Es gilt $y \in B \Leftrightarrow (y \in A \wedge y \notin y) \Leftrightarrow y \notin y$.

Gilt $B \in B$? \rightarrow Widerspruch.

Lemma (Existenz der leeren Menge)

Es gibt eine Menge \emptyset , die leere Menge, die kein Element enthält. Sie erfüllt:

- (i) $\emptyset \subset A$ für alle Mengen A
- (ii) \emptyset ist eindeutig bestimmt.

QUANTOREN

Definition

Sei A eine Menge, $a(x)$ eine Aussageform.

- (i) **Existenzquantor:** Wir schreiben $\exists x \in A : a(x)$ oder $\exists_{x \in A} a(x)$ für „Es gibt ein x in der Menge A , sodass dieses x $a(x)$ erfüllt.“
Schreibe $\exists! x \in A : a(x)$ für es gibt genau ein $x \in A$ mit $a(x)$. Dies zeigt man, indem man $\exists x \in A : a(x)$ und für alle $x, y \in A$ mit $a(x), a(y) : x = y$ zeigt.
- (ii) **Allquantor:** Schreibe $\forall x \in A : a(x)$ oder $\forall_{x \in A} a(x)$ manchmal auch $a(x) \forall x \in A$ für „Für alle $x \in A$ gilt $a(x)$.“

Lemma

Seien A, B Mengen. $p(x), p(x, y)$ Aussageformen. Dann gelten

$$(1.1) \quad \forall_{x \in A} \forall_{y \in B} p(x, y) \iff \forall_{y \in B} \forall_{x \in A} p(x, y)$$

$$(1.2) \quad \exists_{x \in A} \exists_{y \in B} p(x, y) \iff \exists_{y \in B} \exists_{x \in A} p(x, y)$$

$$(1.3) \quad \exists_{x \in A} \forall_{y \in B} p(x, y) \implies \forall_{y \in B} \exists_{x \in A} p(x, y)$$

$$(1.4) \quad \neg \left(\forall_{x \in A} p(x) \right) \iff \exists_{x \in A} \neg p(x)$$

$$(1.5) \quad \neg \left(\exists_{x \in A} p(x) \right) \iff \forall_{x \in A} \neg p(x)$$

L. 1.14

A. 1.15

Bem. 1.17

Bem. 1.18

L. 1.19

PART 1.3

D. 1.20

L. 1.22

Axiom (Existenz einer Obermenge)

A. 1.24

Sei \mathcal{M} eine Menge von Mengen. Dann gibt es eine Menge M (=Obermenge) mit $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A \subset M$.

Bemerkung: M ist eindeutig bestimmt.

Definition (Vereinigung und Durchschnitt)

D. 1.25

Seien A, B Mengen mit Obermenge X .

- (i) Dann ist die **Vereinigung** von A und B ($A \cup B$) definiert durch

$$A \cup B := \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$$
- (ii) der **(Durch-) Schnitt** von A und B ($A \cap B$) ist definiert durch

$$A \cap B := \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$$

Sei \mathcal{M} eine Menge von Mengen mit Obermenge X .

- (i) Vereinigung: $\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A := \{x \in X : (\exists A \in \mathcal{M} : x \in A)\}$
- (ii) Schnitt: $\bigcap_{A \in \mathcal{M}} A := \{x \in X : (\forall A \in \mathcal{M} : x \in A)\}$

Bemerkung

Bem. 1.26

Enthält \mathcal{M} keine Menge, so gelten $\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A = \emptyset$ sowie $\bigcap_{A \in \mathcal{M}} A = X$

Definition (Disjunkte Mengen)

D. 1.27

Seien A, B Mengen.

- (i) A und B heißen disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$. Schreibe in diesem Fall $A \dot{\cup} B$ statt $A \cup B$
- (ii) Sei \mathcal{M} eine Menge von Mengen. Dann heißen die Mengen in \mathcal{M} disjunkt, falls für $A, B \in \mathcal{M}, A \neq \emptyset$ stets $A \cap B = \emptyset$ gilt. Schreibe $\dot{\bigcup}_{A \in \mathcal{M}} A$ statt $\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A$.

Definition (Komplement)

D. 1.28

Seien A, B Mengen mit fester Obermenge X .

- (i) Definiere das **Komplement** von A in B durch $B \setminus A := \{x \in B : x \notin A\}$
- (ii) Definiere das Komplement von A durch $\complement A \equiv A^c := \{x \in X : x \notin A\}$

Proposition

P. 1.29

Seien A, B, C Mengen mit Obermenge X . Dann gelten:

- (i) $A \cup B = B \cup A$ (Kommutativität)
- (ii) $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativität)
- (iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Assoziativität)
- (iv) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Assoziativität)
- (v) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (Distributivität)
- (vi) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (Distributivität)
- (vii) $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ (De Morgansche Regel)
- (viii) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ (De Morgansche Regel)
- (ix) $\complement \complement A = A$
- (x) $A \cup \complement A = X$
- (xi) $A \setminus B = A \cap \complement B$

Axiom (Potenzmenge)

A. 1.30

Sei A eine beliebige Menge. Dann gibt es die Menge $\mathcal{P}(A)$ (oder 2^A), die Potenzmenge von A . Die Elemente von $\mathcal{P}(A)$ sind genau die Teilmengen von A .

Axiom (Kartesisches Produkt)

A. 1.32

Seien A, B Mengen. Dann gibt es eine Menge, das Kartesische Produkt von A und B ($A \times B$), die aus allen geordneten Paaren (a, b) mit $a \in A, b \in B$ besteht. a heißt erste, b heißt zweite Komponente des Paares (a, b) .

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Bemerkung

Bem. 1.33

$$(a, b) \equiv \{a, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(A \cup \mathcal{P}(A \cup B))$$

Definition (Funktion, Ableitung)

D. 1.34

Seien A, B Mengen.

- (i) Eine Funktion (oder Abbildung) f von A nach B , $f : A \rightarrow B$, ist eine Teilmenge von $A \times B$, sodass es zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in f$ gibt: $\forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in f$.

Schreibe $b = f(a)$, $a \mapsto b$.

Definiere den Graphen von f :

$$\text{graph } f := \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\} = f \subset A \times B$$

- (ii) A heißt **Definitionsbereich** von f , $D(f)$.

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} \equiv \{y \in B : (\exists x \in A : \underbrace{f(x) = y}_{(x,y) \in f})\} = \text{im } f = R(f)$$

heißt **Bild** oder **Wertebereich** von f .

- (iii) Sei $M \subset A$ beliebig.

$$f(M) := \{y \in B : (\exists x \in M : f(x) = y)\} \equiv \{f(x) : x \in M\}$$

Somit induziert $f : A \rightarrow B$ eine Funktion $\mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$, die wir wieder mit f bezeichnen.

- (iv) Zu einer beliebigen Funktion $f : A \rightarrow B$ definieren wir die **Urbildabbildung**

$$f^{-1} : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A) \text{ mit } f^{-1}(M) := \{x \in A : f(x) \in M\}, M \subset B \text{ beliebig.}$$

$f^{-1}(M)$ heißt **Urbild** von M unter f .

Bemerkung

Bem. 1.35

$f : A \rightarrow B$ und $g : C \rightarrow D$ sind gleich, falls sie als Teilmengen von $A \times B$ bzw. $C \times D$ gleich sind, insbesondere $B = D$.

Definition

D. 1.36

Sei $f : A \rightarrow B$.

- (i) f heißt **injektiv**, falls für alle $x, y \in A$ aus $f(x) = f(y)$ auch $x = y$ folgt.
- (ii) f heißt **surjektiv**, falls $f(A) = B$. Wir sagen, dass f die Menge A auf B abbildet. Bei nicht-surjektiven Abbildungen sagt man A wird nach oder in B abgebildet.
- (iii) f heißt **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist. f ist eine **Bijektion**.
- (iv) Ist f injektiv, so definieren wir die **Inverse** von f durch $f^{-1} : R(f) \rightarrow A$ mit $f(x) \mapsto x$. Es gilt $f^{-1}(f(x)) = x$.

Bemerkung

Bem. 1.37

- (i) $\mathcal{I}(f(x))$ bezeichnet die **Inverse** von $f(x)$.
- (ii) $U(\{f(x)\})$ bezeichnet die Umkehrabbildung der Menge $\{f(x)\}$, sie ist definiert durch $U : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ mit $M \subset B \mapsto \{x \in A : f(x) \in M\}$.
- (iii) $f : A \rightarrow B$ induziert $g : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$
 $\Rightarrow \{f(x)\} = g(\{x\})$

Definition (Komposition von Abbildungen)

D. 1.38

Seien $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ Abbildungen. Dann heißt $g \circ f : A \rightarrow C$ mit $x \mapsto g(f(x))$ **Komposition** von f und g .

Bemerkung

Bem. 1.40

Seien $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$ Abbildungen. Dann gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Sowie für Inverse und Umkehrabbildungen:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Definition (Relationen)

D. 1.41

Seien A, B Mengen.

- (i) $R \subset A \times B$ heißt **Relation**. Statt $(x, y) \in R$ sagen wir $R(x, y)$ gilt.
- (ii) $R \subset A \times A$ heißt
 - (a) **reflexiv**, falls $R(x, x)$ für alle $x \in A$ gilt
 - (b) **symmetrisch**, falls $R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$ für alle $x, y \in A$
 - (c) **antisymmetrisch**, falls $R(x, y) \wedge R(y, x) \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in A$
 - (d) **transitiv**, falls $R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)$ für alle $x, y, z \in A$
- (iii) $R \subset A \times A$ heißt **Äquivalenzrelation**, falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Schreibweise bei Äquivalenzrelationen: $x \sim y$ statt $R(x, y)$

Definition

D. 1.42

Sei $R \subset A \times A$ eine Äquivalenzrelation. Sei $x \in A$. dann heißt $[x] := \{y \in A : R(x, y)\}$ **Äquivalenzklasse von x** . Schreibe $y \equiv x \pmod{R}$ für $y \in [x]$.
 $A/R := \{[x] : x \in A\}$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen von R .

DIE REELLEN ZAHLEN

PART 1.5

Definition

D. 1.44

Die reellen Zahlen, \mathbb{R} , sind eine Menge mit den folgenden Eigenschaften:

- (A) \mathbb{R} ist ein Körper, d.h. es gibt die Abbildung
 - (i) $+$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die **Addition**, schreibe $x + y$ für $x(x, y)$
 - (ii) \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die **Multiplikation**, mit $(x, y) \mapsto x \cdot y \equiv xy$ bezeichnet und zwei ausgezeichneten Elementen: $0, 1$ mit $0 \neq 1$

Es gilt, soweit nicht anders angegeben, für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$:

- (K1) $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (K2) $x + y = y + x$
- (K3) $0 + x = x$
- (K4) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$, Schreibe $-x$ für y : $x + (-x) = 0$
- (K5) $(xy)z = x(yz)$
- (K6) $xy = yx$
- (K7) $1x = x$
- (K8) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{R} : xy = 1$, Schreibe x^{-1} für y : $xx^{-1} = 1$
- (K9) $x(y + z) = xy + xz$
- (B) \mathbb{R} ist ein angeordneter Körper, d.h. es gibt eine Relation $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (schreibe $x \leq y$ für $R(x, y)$), die für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ folgendes erfüllt:
 - (O1) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität)
 - (O2) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)
 - (O3) es gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$
 - (O4) aus $x \leq y$ folgt $x + z \leq y + z$
 - (O5) aus $0 \leq x$ und $0 \leq y$ folgt $0 \leq xy$.

Schreibe $y \geq x$ statt $x \leq y$ und $x < y$ bzw. $y > x$ für $x \leq y$ und $x \neq y$

- (C) \mathbb{R} ist vollständig, d.h. jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} besitzt ein Supremum in \mathbb{R} .

Definition (Ordnung)

D. 1.45

Eine transitive, antisymmetrische Relation \leq , für die stets $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt, heißt (**totale**) **Ordnung**.

Definition (Supremum, Infimum)

D. 1.46

- (i) $A \subset \mathbb{R}$ heißt **nach oben beschränkt**, falls es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $y \leq x, \forall y \in A$ gibt.
- (ii) $x_0 \in \mathbb{R}$ ist eine **obere Schranke** von $A \subset \mathbb{R}$, falls $y \leq x_0, \forall y \in A$.
- (iii) $x_0 \in \mathbb{R}$ ist das **Supremum** von $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 = \sup A$, falls für jede obere Schranke x von A stets $x \geq x_0$ gilt. x_0 heißt **kleinste obere Schranke**.
- (iv) Ist $\sup A \in A$, so heißt $\sup A$ **Maximum** von A .
- (v) Ist $A \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, so gibt $\sup A = +\infty$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ vereinbaren wir $-\infty < x < +\infty$.
- (vi) Entsprechend: **nach unten beschränkt**, **untere Schranke**, **Infimum** (=größte untere Schranke), **Minimum**.
Ist A nach unten unbeschränkt, so gilt $\inf A = -\infty$. Alternativ: $-A = \{-a : a \in A\}, A \subset \mathbb{R}$.
 A heißt nach **unten beschränkt**, falls $-A$ nach oben beschränkt ist. $x = \inf A$, falls $-x = \sup -A$.
- (vii) Ist $A \subset \mathbb{R}$ nach oben und unten beschränkt, so heißt A **beschränkt**.

Bemerkung

Bem. 1.47

$\sup \emptyset = -\infty$ und $\inf \emptyset = +\infty$

Definition

D. 1.49

Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

- (i) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (offenes Intervall)
- (ii) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (halboffenes Intervall)
- (iii) $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (halboffenes Intervall)
- (iv) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)

a, b heißen **Endpunkte** der Intervalle.

Lemma

L. 1.50

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

Lemma

L. 1.51

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gelten

- (i) $(-1)x = -x$
- (ii) $-(-x) = x$
- (iii) $(-1)(-1) = 1$

Lemma

L. 1.52

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist die additive Inverser $-x$ eindeutig bestimmt.

Lemma

L. 1.53

Es gelten $0 < 1$ und $-1 < 0$.

Lemma

L. 1.54

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt genau ein der drei folgenden Aussagen:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y$$

Lemma

L. 1.55

Gelte $0 < x < y$. Dann gelten:

- (i) $0 < x^{-1}$
- (ii) $0 < y^{-1} < x^{-1}$

Lemma

L. 1.56

$x, y \in \mathbb{R}$. Gilt $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0$.

Lemma

L. 1.57

Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

- (i) Aus $0 \leq a \leq b$ folgt $a^2 \leq b^2$
- (ii) Aus $a^2 \leq b^2$ und $b \geq 0$ folgt $a \leq b$.

Mit $a^2 = a \cdot a$.

Definition (Natürliche Zahlen)

Die natürlichen Zahlen \mathbb{N} sind die kleinste Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ mit

(N1) $0 \in A$

(N2) $a + 1 \in A, \forall a \in A$

\mathbb{N} ist die kleinste Menge mit (N1), (N2) in dem Sinn, dass für alle $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$ mit \mathcal{N} erfüllt (N1) und (N2) auch $\mathbb{N} \subset \mathcal{N}$ gilt.

Lemma

Es gibt die natürlichen Zahlen. Sie sind eindeutig bestimmt.

Lemma (Peanoaxiome)

Es gelten:

(i) $0 \in \mathbb{N}$

(ii) jedes $a \in \mathbb{N}$ besitzt genau einen Nachfolger $a^+ \in \mathbb{N}$

(iii) 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl

(iv) $\forall n, m \in \mathbb{N} : m^+ = n^+ \Rightarrow m = n$

(v) Sei $X \subset \mathbb{R}$ beliebig mit $0 \in X$ und $n^+ \in X, \forall n \in X$. Es folgt $\mathbb{N} \subset X$

Der Nachfolger von $a \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $a^+ := a + 1 \in \mathbb{N}$.

Theorem

\mathbb{R} ist **archimedisch**, d.h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $\mathbb{N} \ni n \geq n_0$ auch $n \geq x$ gilt.

Korollar

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und sei $a > 0$.

(i) Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $an \geq x$

(ii) Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{m} \leq a$

(iii) Ist $a \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (oder alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$), so ist $a \leq 0$.

Theorem (Vollständige Induktion)

Erfüllt $M \subset \mathbb{N}$ die Bedingungen

(i) $0 \in M$

(Induktionsanfang)

(ii) $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$

(Induktionsschritt)

so gilt $M = \mathbb{N}$.

Theorem

Sei p eine Aussageform auf \mathbb{N} . Gelten

(i) $p(0)$ und

(ii) $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

so gilt $p(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition (Familie, Folge)

(i) Seien \mathcal{I}, X Mengen, $f : \mathcal{I} \rightarrow X$ eine Abbildung. Dann heißt f auch **Familie**: $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ mit $x_i = f(i), \forall i \in \mathcal{I}$ (\mathcal{I} bezeichnet die Indexmenge).

(ii) Ist $\mathcal{I} = \mathbb{N}$, so heißt $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ **Folge**: $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset X$.

(iii) Ist $J \subset \mathcal{I}$, so heißt $(x_j)_{j \in J}$ **Teilfamilie** von $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$, falls die Werte auf J übereinstimmen.

(iv) Ist $\mathcal{I} = \mathbb{N}$, $J \subset \mathbb{N}$ unendlich, so heißt $(x_j)_{j \in J}$ **Teilfolge** von $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Ist $(j_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset J$ eine Folge mit $j_{k+1} > j_k, \forall k$ und $J = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{j_k\}$, so schreibe $(x_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$ für die Teilfolge.

(v) Sei $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie. Ist $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\} (\rightarrow (x_i)_{1 \leq i \leq n})$:

(a) $n = 2$: Die Familie heißt **Paar** (x_1, x_2)

(b) $n = 3$: Die Familie heißt **Triple** (x_1, x_2, x_3)

(c) n beliebig: Die Familie heißt **n -Tupel** (x_1, x_2, \dots, x_n)

Definition

D. 1.68

Sei $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen mit Obermenge X .

(i) $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i := \{x \in X : (\exists i \in \mathcal{I} : x \in A_i)\}$

(ii) $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i := \{x \in X : (\forall i \in \mathcal{I} : x \in A_i)\}$

(iii) $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\} : \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$, sowie $\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i$

Definition

D. 1.69

Ist $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie reeller Zahlen, so gilt

$\sup_{i \in \mathcal{I}} x_i := \sup\{x_i : i \in \mathcal{I}\}$, sowie

$\inf_{i \in \mathcal{I}} x_i := \inf\{x_i : i \in \mathcal{I}\}$.

Proposition

P. 1.70

(i) Seien $A, B \subset \mathbb{R}, A \subset B$.

$\Rightarrow \sup A \leq \sup B, \inf A \geq \inf B$.

(ii) Sei $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen $A_i \subset \mathbb{R}, \forall i \in \mathcal{I}$. Dann definiere

$A := \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$

$\Rightarrow \sup A = \sup_{i \in \mathcal{I}} \sup A_i$ und $\inf A = \inf_{i \in \mathcal{I}} \inf A_i$.

Definition

D. 1.71

(i) Sei A eine Menge, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt **nach oben (unten) beschränkt**, falls für $f(A)$ gilt:

(a) $\sup f(A) = \sup_{x \in A} f(x)$

(b) $\inf f(A) = \inf_{x \in A} f(x)$

(ii) Sei A eine Menge und $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Familie von Funktionen. Gilt für alle $x \in A$, dass $\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i(x) < \infty$, so definieren wir die Funktion

$\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$
 $(\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i)(x) := \sup_{i \in \mathcal{I}} f_i(x)$

(iii) Ohne $\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i(x) < \infty$ erhalten wir mit derselben Definition $\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) Analog für $\inf_{i \in \mathcal{I}} f_i$.

(v) Ist $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ gilt

$\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i = \sup(f_1, \dots, f_n) = \max(f_1, \dots, f_n)$.

Entsprechend für Infimum/Minimum.

Definition (Kartesisches Produkt)

D. 1.72

(i) Sei $\mathcal{I} \neq \emptyset$ und $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen. Definiere das **kartesische Produkt** wie folgt:

$\prod_{i \in \mathcal{I}} A_i := \{(x_i)_{i \in \mathcal{I}} : (\forall i \in \mathcal{I} : x_i \in A_i)\}$

(ii) Zu $j \in \mathcal{I}$ definieren wir die j -te Projektionsabbildung

$\pi_j : \prod_{i \in \mathcal{I}} A_i \rightarrow A_j$ mit $\pi_j((x_i)_{i \in \mathcal{I}}) := x_j$

Axiom

A. 1.74

Sei $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen $A_i \neq \emptyset, \forall i \in \mathcal{I}$. Dann gilt $\prod_{i \in \mathcal{I}} A_i \neq \emptyset$, d.h. es gibt eine Familie $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ mit $x_i \in A_i, \forall i \in \mathcal{I}$.

Proposition

Sei $\mathcal{I} \neq \emptyset$ und $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen. Dann gilt $\prod_{i \in \mathcal{I}} A_i = \emptyset \iff \exists i \in \mathcal{I} : A_i \neq \emptyset$.

P. 1.75

Lemma (Zornsches Lemma)

Sei $M \neq \emptyset$ mit einer Teilordnung (= partielle Ordnung) \leq . Nehme an, jede total geordnete Teilmenge $\Lambda \subset M$ (= Kette) besitzt eine obere Schranke $b \in M$, d.h. $x \leq b, \forall x \in \Lambda$. Dann enthält M ein maximales Element x_0 , d.h. $\exists x_0 \in M : x \geq x_0 \Rightarrow x = x_0$.

L. 1.76

Definition (Ausschöpfung, Partition, Überdeckung)

Sei A eine Menge.

- (i) Eine **Überdeckung** von A ist eine Familie $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ mit $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \supset A$.
- (ii) Eine **Partition** von A ist eine Überdeckung $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ mit $A_i \subset A$ und $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \in \mathcal{I}, A = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$.
- (iii) Eine **Ausschöpfung** von A ist eine aufsteigende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen von A , die $A_m \subset A_n, \forall m \leq n$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$ erfüllt.

D. 1.77

Proposition

- (i) Sei \sim eine Äquivalenzrelation auf A . Dann bilden die **Restklassen** von \sim eine Partition von A .
- (ii) Sei $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Partition von A . Dann ist \sim mit $x \sim y :\Leftrightarrow \exists i \in \mathcal{I} : x, y \in A_i$ eine Äquivalenzrelation auf A .

P. 1.78

Lemma

Seien A, B Mengen. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von A . Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Abbildungen $f_n : A_n \rightarrow B$ mit $f_n|_{A_m} = f_m$ für alle $m \leq n$. Dann gibt es genau eine Funktion $f : A \rightarrow B$ mit $f(x) = f_n(x), \forall x \in A_n$ oder $f|_{A_n} = f_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

L. 1.79

Proposition (Rekursive Definition)

Sei $B \neq \emptyset$ eine Menge, $x_0 \in B$ und $F : \mathbb{N} \times B \rightarrow B$ eine Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow B$ mit den Ergebnissen:

- (i) $f(0) = x_0$ und
- (ii) $f(n+1) = F(n, f(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

f ist eine rekursiv definierte Funktion.

P. 1.80

KARDINALITÄT

PART 1.6

Definition (Mächtigkeit)

Seien A, B Mengen.

- (i) A, B heißen **gleich mächtig** ($A \sim B$), falls es eine Bijektion $f : A \rightarrow B$ gibt.
- (ii) B heißt **mächtiger** als A ($B \succ A$) oder A **weniger mächtig** als B ($A \prec B$), falls es eine injektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ gibt.
- (iii) A heißt **abzählbar**, falls $A \sim \mathbb{N}$.
- (iv) A heißt **höchstens abzählbar**, falls $A \prec \mathbb{N}$.
- (v) A heißt **überabzählbar**, falls A nicht höchstens abzählbar ist.
- (vi) Sei A abzählbar, so heißt die Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine **Abzählung** von A , falls $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\} = A$.

D. 1.84

Bemerkung

- (i) \sim ist Äquivalenzrelation
- (ii) $A \prec B \prec C \Rightarrow A \prec C$
- (iii) $A \prec A$
- (iv) $G := \{2n : n \in \mathbb{N}\}, G \prec \mathbb{N} : 2n \mapsto 2n$ und $\mathbb{N} \prec G : n \mapsto 2n$. Bijektiv: $\mathbb{N} \sim G$

Theorem (Schröder-Bernstein)

Aus $A \prec B$ und $B \prec A$ folgt $A \sim B$.

Proposition

A, B, C sind Mengen. Seien $\varphi : A \rightarrow B, \psi : B \rightarrow C$ Abbildungen. Sei $f : A \rightarrow B$ Abbildung. Dann gelten:

- (i) Ist $\psi \circ \varphi$ injektiv, so ist φ injektiv
- (ii) Ist $\psi \circ \varphi$ surjektiv, so ist ψ surjektiv
- (iii) f surjektiv $\Leftrightarrow \exists g : B \rightarrow A, f \circ g = id_B$
- (iv) f injektiv $\Leftrightarrow \exists g : B \rightarrow A, g \circ f = id_A$

Korollar

$A \prec B \Leftrightarrow \exists f : B \rightarrow A, f$ ist surjektiv.

Definition

Sei A eine Menge.

- (i) A heißt **endlich**, falls es eine injektive Abbildung $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $f(a) \leq m, \forall a \in A$ gibt.
- (ii) A heißt **unendlich**, falls A nicht endlich ist.
- (iii) Gibt es eine bijektive Abbildung $f : A \rightarrow \{0, 1, \dots, m-1\} \subset \mathbb{N}$, so hat A die **Kardinalität** m ($|A| = m$). Gibt es keine solche Abbildung, so gilt $|A| = \infty$.
- (iv) Sei P eine Aussageform auf A . Dann gilt P für **fast alle** $i \in A$, falls $\{i \in A : \neg P(i)\}$ endlich ist.

Lemma

- (i) Für jede endliche Menge A gilt $|A| < \infty$, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : A \rightarrow \{0, \dots, m-1\}$.
- (ii) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f : \{0, \dots, m\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$ eine Bijektion. Dann gilt $n = m$. (\Rightarrow Kardinalität ist wohldefiniert).

Lemma

Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $(a_i)_{1 \leq i \leq m}$ eine endliche Familie natürlicher Zahlen (oder reeller). Dann gibt es ein $i \in \{1, \dots, m\} : a_i \leq a_j, \forall 1 \leq j \leq m$.
Schreibe $a_i = \min\{a_1, \dots, a_m\} \equiv \min(a_1, \dots, a_m)$.
Entsprechend $\max\{a_1, \dots, a_m\} \equiv \max(a_1, \dots, a_m)$.

Lemma

Die natürlichen Zahlen sind wohlgeordnet, d.h. jede Menge $M \subset \mathbb{N}, M \neq \emptyset$, besitzt ein kleinstes Element, d.h. $\exists a \in M : a \leq b, \forall b \in M$.

Lemma

Sei A eine unendliche Menge. Dann besitzt A eine abzählbare Teilmenge.

Lemma

Sei A eine Menge. Dann ist A genau dann höchstens abzählbar, wenn A endlich ist oder $A \sim \mathbb{N}$.

Lemma

Sei A eine Menge. Dann ist A genau dann höchstens abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ gibt.

Proposition

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

Bem. 1.85

T. 1.86

P. 1.87

K. 1.88

D. 1.89

L. 1.91

L. 1.92

L. 1.93

L. 1.94

L. 1.95

L. 1.96

P. 1.97

Proposition

P. 1.98

Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Dann ist $\prod_{i=1}^k \mathbb{N} = \mathbb{N}^k$ abzählbar. Dies gilt auch, wenn wir \mathbb{N} überall durch $A \sim \mathbb{N}$ ersetzen.

Lemma

L. 1.99

Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge abzählbarer Mengen. Dann ist $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ abzählbar.

Bemerkung

Bem. 1.100

P. 1.98 und L. 1.99 gelten auch mit „höchstens abzählbar“ statt abzählbar.

Theorem (Cantor)

T. 1.101

Sei A eine Menge $\Rightarrow \mathcal{P}(A) \succ A$ und $\mathcal{P}(A) \not\sim A$.

BETRAG UND WURZEL

PART 1.7

Definition

D. 1.102

- (i) Sei $x \in \mathbb{R}$. Definiere den **Betrag** von x wie folgt: $|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$
- (ii) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten a und b , so heißt $|a - b|$ **Länge von I** .

Proposition

P. 1.104

Seien $x, a \in \mathbb{R}$. Dann gelten

- (i) $x \leq |x|$
- (ii) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- (iii) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

WEITERE ZAHLEN UND MÄCHTIGKEIT

PART 1.8

KONVERGENZ

METRISCHE RÄUME

FOLGEN

Definition

Sei E ein metrischer Raum. Sei $x \in E, \varepsilon > 0$. Definiere $B_\varepsilon(x) := \{y \in E : d(y, x) < \varepsilon\}$ die ε -**Kugel**. $B_\varepsilon(x)$ heißt auch ε -**Umgebung von x**

Definition (Konvergenz)

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ eine Folge in einem metrischen Raum E .

- (i) Dann konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $a \in E$, falls für beliebige $\varepsilon > 0$ fast alle (nur endlich viele liegen außerhalb) Folgenglieder in $B_\varepsilon(a)$ liegen
- (ii) Konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $a \in E$, so heißt a **Limes** oder **Grenzwert** der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oder $x_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ oder $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$.

Bemerkung

Die Definition von Konvergenz ist äquivalent zu

- (i) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ auch $x_n \in B_\varepsilon(a)$ gilt.
- (ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ auch $d(x_n, a) < \varepsilon$ gilt.

Korollar (Bolzano-Weierstraß)

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Folge, d.h. $\exists r > 0 : x_k \in B_r(0), \forall k \in \mathbb{N}$. Dann besitzt $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert a und $|a| \leq r$.

Bemerkung

In \mathbb{R}^n gilt: $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\Leftrightarrow (x_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert für alle i .

Definition (Cauchyfolge, Vollständigkeit)

- (i) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum E heißt **Cauchyfolge (CF)**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_k, x_l) < \varepsilon, \forall k, l \geq n_0$ gibt.
- (ii) Ein metrischer Raum, in dem jede CF konvergiert, heißt **vollständiger metrischer Raum**.
- (iii) Ein normierter Raum, in dem jede CF konvergiert, heißt **vollständiger normierter Raum** oder **Banachraum (BR)**.
- (iv) Ein vollständiger Skalarproduktraum heißt **Hilbertraum (HR)**.

Lemma

Sei E ein metrischer Raum. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ konvergent. Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

REIHEN

GLEICHMÄSSIGE KONVERGENZ

KAP. 2

PART 2.1

PART 2.2

D. 2.1

D. 2.2

Bem. 2.3

K. 2.4

Bem. 2.5

D. 2.6

L. 2.7

PART 2.3

PART 2.4