Zusammenfassung für Analysis I

(Prof. Dr. Schnürer)

Wintersemester 2014/2015

von Dagmar Sorg

Grundlagen: Logik, Mengenlehre und reelle Zahlen — Kap. 1

Logische Grundlagen — Part 1.1

Definition (Aussage) — D. 1.1

(i) Eine ***Aussage*** ist etwas, dem der Wahrheitsgehalt „wahr“ oder „falsch“ zugeordnet ist.
(ii) Eine ***Aussageform*** ist eine Aussage, die eine noch unbestimmte oder freie Variable enthält.

Definition (Negation, Verneinung) — D. 1.3

Ist p eine Aussage, so bezeichnet $\neg p$ die Negation dieser Aussage.

Definition (Konjunktion) — D. 1.5

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \wedge q$ („p und q“) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

p	q	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Definition (Disjunktion) — D. 1.6

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \vee q$ („p oder q“) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Definition (Kontravalenz) — D. 1.7

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \dot\vee q$ („entweder p oder q“) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

p	q	$p \dot\vee q$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Definition (Implikation) — D. 1.8

Seien p und q Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von $p \Rightarrow q$ („p impliziert q“) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

p	q	$p \Rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

(i) p heißt *Voraussetzung, Prämisse* oder *hinreichende Bedingung* für q
(ii) q heißt *Behauptung, Konklusion* oder *notwendige Bedingung*

Definition

D. 1.10

(i) Seien p, q Aussagen. Definiere $p \Leftrightarrow q$ („p und q sind äquivalent“, „genau dann, wenn p gilt, gilt auch q“) durch

p	q	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

(ii) $p_1, p_2, \ldots$ heißen äquivalent, falls für je zwei dieser Aussagen, p und q, $p \Leftrightarrow q$ gilt.

Proposition

P. 1.11

Seien p, q, r Aussagen. Dann gelten

(i) $\neg\neg p \Leftrightarrow p$

(ii) $p \vee \neq p$

(iii) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ (Symmetrie)

(iv) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ (Symmetrie)

(v) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ (Symmetrie)

(vi) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ (Idempotenz)

(vii) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ (Idempotenz)

(viii) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

(ix) $p \Rightarrow (p \vee q)$

(x) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r))$

(xi) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r))$

(xii) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r))$

(xiii) $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$ (Assoziativität)

(xiv) $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ (Assoziativität)

(xv) $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ (Distributivität)

(xvi) $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (Distributivität)

(xvii) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$ (De Morgan)

(xviii) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$ (De Morgan)

(xix) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$

(xx) $((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

(xxi) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

(xxii) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$

(xxiii) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$

(xxiv) $p \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r))$ (Fallunterscheidung)

Erste Mengenlehre

Part 1.2

Definition (naive Definition einer Menge)

D. 1.12

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten, Elemente genannt. Ist A eine Menge, x ein Objekt, so schreiben wir $x \in A$, falls x ein Element von A ist. $x \notin A :\Leftrightarrow \neg(x \in A)$
Für eine Menge A, die genau die Elemente a, b und c enthält, schreiben wir $A = \{a, b, c\}$.
Es ist irrelevant, ob a mehrfach auftaucht oder wie die Elemente angeordnet werden.

Definition

D. 1.13

Seien A, B Mengen.

(i) Dann ist A eine Teilmenge von B ($A \subset B$ oder $A \subseteq B$), falls aus $x \in A$ auch $x \in B$ folgt.

(ii) A und B heißen gleich ($A = B$), falls $A \subset B$ und $B \subset A$ gelten.
$A \neq B :\Leftrightarrow \neg(A = B)$ (Extensionalitätsaxiom)

(iii) Schreibe $A \subsetneq B$ für $A \subset B$ und $A \neq B$.

Lemma L. 1.14

Seien A, B, C Mengen. Dann gelten:

(i) $A \subset A$ (Reflexivität)

(ii) $x \in A$ und $A \subset B$ implizieren $x \in B$

(iii) $A \subset B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (Transitivität)

Axiom (Aussonderungsaxiom) A. 1.15

Sei A eine Menge und $a(x)$ eine Aussageform. Dann gibt es eine Menge B, deren Elemente genau die $x \in A$ sind, die $a(x)$ erfüllen.
Schreibe $B = \{x \in A : a(x)\}$.

Bemerkung Bem. 1.17

Zu jeder Menge A gibt es eine Menge B und eine Aussageform $a(x) : A = \{x \in B : a(x)\}$.
Nehme $B = A, a(x) = (x \in A)$.

Bemerkung (Russelsche Antinomie) Bem. 1.18

Nimmt man im Aussonderungsaxiom statt A die „Allmenge“ (Menge aller Elemente), dann bekommt man Probleme:
Sei $A =$ Allmenge, $B = \{X \in A : X \notin X\}$. Es gilt $y \in B \Leftrightarrow (y \in A \wedge y \notin y) \Leftrightarrow y \notin y$.
Gilt $B \in B$? $\rightarrow$ Widerspruch.

Lemma (Existenz der leeren Menge) L. 1.19

Es gibt eine Menge $\emptyset$, die leere Menge, die kein Element enthält. Sie erfüllt:

(i) $\emptyset \subset A$ für alle Mengen A

(ii) $\emptyset$ ist eindeutig bestimmt.

Quantoren Part 1.3

Definition D. 1.20

Sei A eine Menge, $a(x)$ eine Aussageform.

(i) **Existenzquantor:** Wir schreiben $\exists x \in A : a(x)$ oder $\underset{x\in A}{\exists} a(x)$ für „Es gibt ein x in der Menge A, sodass dieses x $a(x)$ erfüllt.“
Schreibe $\exists! x \in A : a(x)$ für es gibt genau ein $x \in A$ mit $a(x)$. Dies zeigt man, indem man $\exists x \in A : a(x)$ und für alle $x, y \in A$ mit $a(x), a(y) : x = y$ zeigt.

(ii) **Allquantor:** Schreibe $\forall x \in A : a(x)$ oder $\underset{x\in A}{\forall} a(x)$ manchmal auch $a(x) \forall x \in A$ für „Für alle $x \in A$ gilt $a(x)$.“

Lemma L. 1.22

Seien A, B Mengen. $p(x), p(x, y)$ Aussageformen. Dann gelten

(1.1) $\underset{x\in A}{\forall}\, \underset{y\in B}{\forall} p(x,y) \Longleftrightarrow \underset{y\in B}{\forall}\, \underset{x\in A}{\forall} p(x,y)$

(1.2) $\underset{x\in A}{\exists}\, \underset{y\in B}{\exists} p(x,y) \Longleftrightarrow \underset{y\in B}{\exists}\, \underset{x\in A}{\exists} p(x,y)$

(1.3) $\underset{x\in A}{\exists}\, \underset{y\in B}{\forall} p(x,y) \Longrightarrow \underset{y\in B}{\forall}\, \underset{x\in A}{\exists} p(x,y)$

(1.4) $\neg\left(\underset{x\in A}{\forall} p(x)\right) \Longleftrightarrow \underset{x\in A}{\exists} \neg p(x)$

(1.5) $\neg\left(\underset{x\in A}{\exists} p(x)\right) \Longleftrightarrow \underset{x\in A}{\forall} \neg p(x)$

Weitere Mengenlehre — Part 1.4

Axiom (Existenz einer Obermenge) — A. 1.24

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen. Dann gibt es eine Menge M (=Obermenge) mit $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A \subset M$.
Bemerkung: M ist eindeutig bestimmt.

Definition (Vereinigung und Durchschnitt) — D. 1.25

Seien A, B Mengen mit Obermenge X.

(i) Dann ist die ***Vereinigung*** von A und B ($A \cup B$) definiert durch
$A \cup B := \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$

(ii) der ***(Durch-) Schnitt*** von A und B ($A \cap B$) ist definiert durch
$A \cap B := \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen mit Obermenge X.

(i) Vereinigung: $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{M}} A := \{x \in X : (\exists A \in \mathcal{M} : x \in A)\}$

(ii) Schnitt: $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{M}} A := \{x \in X : (\forall A \in \mathcal{M} : x \in A)\}$

Bemerkung — Bem. 1.26

Enthält $\mathcal{M}$ keine Menge, so gelten $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{M}} A = \emptyset$ sowie $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{M}} A = X$

Definition (Disjunkte Mengen) — D. 1.27

Seien A, B Mengen.

(i) A und B heißen disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$. Schreibe in diesem Fall $A \dot{\cup} B$ statt $A \cup B$

(ii) Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen. Dann heißen die Mengen in $\mathcal{M}$ disjunkt, falls für $A, B \in \mathcal{M}, A \neq \emptyset$ stets $A \cap B = \emptyset$ gilt. Schreibe $\dot{\bigcup\limits_{A \in \mathcal{M}}} A$ statt $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{M}} A$.

Definition (Komplement) — D. 1.28

Seien A, B Mengen mit fester Obermenge X.

(i) Definiere das ***Komplement*** von A in B durch $B \setminus A := \{x \in B : x \notin A\}$

(ii) Definiere das Komplement von A durch $\complement A \equiv A^{\complement} := \{x \in X : x \notin A\}$

Proposition — P. 1.29

Seien A, B, C Mengen mit Obermenge X. Dann gelten:

(i) $A \cup B = B \cup A$ (Kommutativität)

(ii) $A \cap B = b \cap A$ (Kommutativität)

(iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Assoziativität)

(iv) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Assoziativität)

(v) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (Distributivität)

(vi) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (Distributivität)

(vii) $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ (De Morgansche Regel)

(viii) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ (De Morgansche Regel)

(ix) $\complement\complement A = A$

(x) $A \cup \complement A = X$

(xi) $A \setminus B = A \cap \complement B$

Axiom (Potenzmenge) — A. 1.30

Sei A eine beliebige Menge. Dann gibt es die Menge $\mathcal{P}(A)$ (oder 2^A), die Potenzmenge von A. Die Elemente von $\mathcal{P}(A)$ sind genau die Teilmengen von A.

Axiom (Kartesisches Produkt) — A. 1.32

Seien A, B Mengen. Dann gibt es eine Menge, das Kartesische Produkt von A und B ($A \times B$), die aus allen geordneten Paaren (a, b) mit $a \in A, b \in B$ besteht. a heißt erste, b heißt zweite Komponente des Paares (a, b).
$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$

Bemerkung **Bem. 1.33**

$(a, b) \equiv \{a, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(A \cup \mathcal{P}(A \cup B))$

Definition (Funktion, Ableitung) **D. 1.34**

Seien A, B Mengen.

(i) Eine Funktion (oder Abbildung) f von A nach B, $f : A \to B$, ist eine Teilmenge von $A \times B$, sodass es zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in f$ gibt: $\forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in f$.
Schreibe $b = f(a), a \mapsto b$.
Definiere den Graphen von f:
$graph\ f := \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\} = f \subset A \times B$

(ii) A heißt ***Definitionsbereich*** von f, $D(f)$.
$f(A) := \{f(x) : x \in A\} \equiv \{y \in B : (\exists x \in A : \underbrace{f(x) = y}_{(x,y)\in f})\} = im\ f = R(f)$
heißt ***Bild*** oder ***Wertebereich*** von f.

(iii) Sei $M \subset A$ beliebig.
$f(M) := \{y \in B : (\exists x \in M : f(x) = y)\} \equiv \{f(x) : x \in M\}$
Somit induziert $f : A \to B$ eine Funktion $\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, die wir wieder mit f bezeichnen.

(iv) Zu einer beliebigen Funktion $f : A \to B$ definieren wir die ***Urbildabbildung*** $f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ mit $F^{-1}(M) := \{x \in A : f(x) \in M\}, M \subset B$ beliebig.
$f^{-1}(M)$ heißt ***Urbild*** von M unter f.

Bemerkung **Bem. 1.35**

$f : A \to B$ und $g : C \to D$ sind gleich, falls sie als Teilmengen von $A \times B$ bzw. $C \times D$ gleich sind, insbesondere $B = D$.

Definition **D. 1.36**

Sei $f : A \to B$.

(i) f heißt ***injektiv***, falls für alle $x, y \in A$ aus $f(x) = f(y)$ auch $x = y$ folgt.

(ii) f heißt ***surjektiv***, falls $f(A) = B$. Wir sagen, dass f die Menge A <u>auf</u> B abbildet.
Bei nicht-surjektiven Abbildungen sagt man A wird nach oder in B abgebildet.

(iii) f heißt ***bijektiv***, falls f injektiv und surjektiv ist. f ist eine ***Bijektion***.

(iv) ist f injektiv, so definieren wir die ***Inverse*** von f durch
$f^{-1} : R(f) \to A$ mit $f(x) \mapsto x$.
Es gilt $f^{-1}(f(x)) = x$

Bemerkung **Bem. 1.37**

(i) $\mathcal{I}(f(x))$ bezeichnet die ***Inverse*** von $f(x)$.

(ii) $U(\{f(x)\})$ bezeichnet die Umkehrabbildung der Menge $\{f(x)\}$, sie ist definiert durch
$U : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ mit $M \subset B \mapsto \{x \in A : f(x) \in M\}$

(iii) $f : A \to B$ induziert $g : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$
$\Rightarrow \{f(x)\} = g(\{x\})$

Definition (Komposition von Abbildungen) **D. 1.38**

Seien $f : A \to B, g : B \to C$ Abbildungen. Dann heißt
$g \circ f : A \to C$ mit $x \mapsto g(f(x))$ ***Komposition*** von f und g.

Bemerkung **Bem. 1.40**

Seien $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt
$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
Sowie für Inverse und Umkehrabbildungen:
$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Definition (Relationen) D. 1.41

Seien A, B Mengen.

(i) $R \subset A \times B$ heißt ***Relation***. Statt $(x, y) \in R$ sagen wir $R(x, y)$ gilt.

(ii) $R \subset A \times A$ heißt

  (a) **reflexiv**, falls $R(x, x)$ für alle $x \in A$ gilt

  (b) **symmetrisch**, falls $R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$ für alle $x, y \in A$

  (c) **antisymmetrisch**, falls $R(x, y) \wedge R(y, x) \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in A$

  (d) **transitiv**, falls $R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)$ für alle $x, y, z \in A$

(iii) $R \subset A \times A$ heißt ***Äquivalenzrelation***, falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Schreibweise bei Äquivalenzrelationen: $x \sim y$ statt $R(x, y)$

Definition D. 1.42

Sei $R \subset A \times A$ eine Äquivalenzrelation. Sei $x \in A$. dann heißt $[x] := \{y \in A : R(x, y)\}$ ***Äquivalenzklasse von*** x. Schreibe $y \equiv x \pmod R$ für $y \in [x]$.
$A/R := \{[x] : x \in A\}$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen von R.

Die reellen Zahlen Part 1.5

Definition D. 1.44

Die reellen Zahlen, $\mathbb{R}$, sind eine Menge mit den folgenden Eigenschaften:

(A) $\mathbb{R}$ ist ein Körper, d.h. es gibt die Abbildung

  (i) $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die **Addition**, schreibe $x + y$ für $x(x, y)$

  (ii) $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die **Multiplikation**, mit $(x, y) \mapsto x \cdot y \equiv xy$ bezeichnet und zwei ausgezeichneten Elementen: $0, 1$ mit $0 \neq 1$

  Es gilt, soweit nicht anders angegeben, für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$:

  (K1) $x + (y + z) = (x + y) + z$

  (K2) $x + y = y + x$

  (K3) $0 + x = x$

  (K4) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$, Schreibe $-x$ für y: $x + (-x) = 0$

  (K5) $(xy)z = x(yz)$

  (K6) $xy = yx$

  (K7) $1x = x$

  (K8) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R} : xy = 1$, Schreibe x^{-1} für $y : xx^{-1} = 1$

  (K9) $x(y + z) = xy + xz$

(B) $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper, d.h. es gibt eine Relation $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (schreibe $x \leq y$ für $R(x, y)$), die für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ folgendes erfüllt:

  (O1) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität)

  (O2) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)

  (O3) es gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$

  (O4) aus $x \leq y$ folgt $x + z \leq y + z$

  (O5) aus $0 \leq x$ und $0 \leq y$ folgt $0 \leq xy$.

  Schreibe $y \geq x$ statt $x \leq y$ und $x < y$ bzw. $y > x$ für $x \leq y$ und $x \neq y$

(C) $\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.

Definition (Ordnung) D. 1.45

Eine transitive, antisymmetrische Relation $\leq$, für die stets $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt, heißt ***(totale) Ordnung***.

Definition (Supremum, Infimum) D. 1.46

(i) $A \subset \mathbb{R}$ heißt ***nach oben beschränkt***, falls es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $y \leq x, \forall y \in A$ gibt.
(ii) $x_0 \in \mathbb{R}$ ist eine ***obere Schranke*** von $A \subset \mathbb{R}$, falls $y \leq x_0, \forall y \in A$.
(iii) $x_0 \in \mathbb{R}$ ist das ***Supremum*** von $A \subset \mathbb{R}, x_0 = \sup A$, falls für jede obere Schranke x von A stets $x \geq x_0$ gilt. x_0 heißt ***kleinste obere Schranke***.
(iv) Ist $\sup A \in A$, so heißt $\sup A$ ***Maximum*** von A.
(v) Ist $A \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, so gibt $\sup A = +\infty$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ vereinbaren wir $-\infty < x < +\infty$.
(vi) Entsprechend: ***nach unten beschränkt, untere Schranke, Infimum (=größte untere Schranke), Minimum***.
Ist A nach unten unbeschränkt, so gilt $\inf A = -\infty$. Alternativ: $-A = \{-a : a \in A\}, A \subset \mathbb{R}$.
A heißt nach ***unten beschränkt***, falls $-A$ nach oben beschränkt ist. $x = \inf A$, falls $-x = \sup -A$.
(vii) Ist $A \subset \mathbb{R}$ nach oben und unten beschränkt, so heißt A ***beschränkt***.

Bemerkung Bem. 1.47

$\sup \emptyset = -\infty$ und $\inf \emptyset = +\infty$

Definition D. 1.49

Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.
(i) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (offenes Intervall)
(ii) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (halboffenes Intervall)
(iii) $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (halboffenes Intervall)
(iv) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)

a, b heißen ***Endpunkte*** der Intervalle.

Lemma L. 1.50

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x0 = 0x = 0$.

Lemma L. 1.51

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gelten
(i) $(-1)x = -x$
(ii) $-(-x) = x$
(iii) $(-1)(-1) = 1$

Lemma L. 1.52

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist die additive Inverser $-x$ eindeutig bestimmt.

Lemma L. 1.53

Es gelten $0 < 1$ und $-1 < 0$.

Lemma L. 1.54

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt genau ein der drei folgenden Aussagen:

$$x < y, \qquad x = y, \qquad x > y$$

Lemma L. 1.55

Gelte $0 < x < y$. Dann gelten:
(i) $0 < x^{-1}$
(ii) $0 < y^{-1} < x^{-1}$

Lemma L. 1.56

$x, y \in \mathbb{R}$. Gilt $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0$.

Lemma L. 1.57

Seien $a, b \in \mathbb{R}$.
(i) Aus $0 \leq a \leq b$ folgt $a^2 \leq b^2$
(ii) Aus $a^2 \leq b^2$ und $b \geq 0$ folgt $a \leq b$.

Mit $a^2 = a \cdot a$.

Definition (Natürliche Zahlen) D. 1.58

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind die kleinste Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ mit

(N1) $=\in A$

(N2) $a + 1 \in A, \forall a \in A$

$\mathbb{N}$ ist die kleinste Menge mit (N1), (N2) in dem Sinn, dass für alle $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$ mit $\mathcal{N}$ erfüllt (N1) und (N2) auch $\mathbb{N} \subset \mathcal{N}$ gilt.

Lemma L. 1.59

Es gibt die natürlichen Zahlen. Sie sind eindeutig bestimmt.

Lemma (Peanoaxiome) L. 1.60

Es gelten:

(i) $0 \in \mathbb{N}$

(ii) jedes $a \in \mathbb{N}$ besitzt genau einen Nachfolger $a^+ \in \mathbb{N}$

(iii) 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl

(iv) $\forall n, m \in \mathbb{N} : m^+ = n^+ \Rightarrow n = m$

(v) Sei $X \subset \mathbb{R}$ beliebig mit $0 \in X$ und $n^+ \in X, \forall n \in X$. Es folgt $\mathbb{N} \subset X$

Der Nachfolger von $a \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $a^+ := a + 1 \in \mathbb{N}$.

Theorem T. 1.61

$\mathbb{R}$ ist **archimedisch**, d.h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $\mathbb{N} \ni n \geq n_0$ auch $n \geq x$ gilt.

Korollar K. 1.62

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und sei $a > 0$.

(i) Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $an \geq x$

(ii) Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $0 < \dfrac{1}{n} \leq a$

(iii) Ist $a \leq \dfrac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (oder alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$), so ist $a \leq 0$.

Theorem (Vollständige Induktion) T. 1.63

Erfüllt $M \subset \mathbb{N}$ die Bedingungen

(i) $0 \in M$ (Induktionsanfang)

(ii) $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$ (Induktionsschritt)

so gilt $M = \mathbb{N}$.

Theorem T. 1.64

Sei p eine Aussageform auf $\mathbb{N}$. Gelten

(i) $p(0)$ und

(ii) $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

so gilt $p(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition (Familie, Folge) D. 1.67

(i) Seien $\mathcal{I}, X$ Mengen, $f : \mathcal{I} \to X$ eine Abbildung. Dann heißt f auch ***Familie***: $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ mit $x_i = f(i), \forall i \in \mathcal{I}$ ($\mathcal{I}$ bezeichnet die Indexmenge).

(ii) Ist $\mathcal{I} = \mathbb{N}$, so heißt $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ ***Folge***: $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset X$.

(iii) Ist $J \subset \mathcal{I}$, so heißt $(x_j)_{j\in J}$ ***Teilfamilie*** von $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$, falls die Werte auf J übereinstimmen.

(iv) Ist $\mathcal{I} = \mathbb{N}, J \subset \mathbb{N}$ unendlich, so heißt $(x_j)_{j\in J}$ ***Teilfolge*** von $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Ist $(j_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset J$ eine Folge mit $j_{k+1} > j_k, \forall k$ und $J = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \{j_k\}$, so schreibe $(x_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ für die Teilfolge.

(v) Sei $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie. Ist $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$ ($\to (x_i)_{1\leq i\leq n}$):

  (a) $n = 2$: Die Familie heißt ***Paar*** (x_1, x_2)

  (b) $n = 3$: Die Familie heißt ***Triple*** (x_1, x_2, x_2)

  (c) n beliebig: Die Familie heißt n-***Tupel*** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Definition D. 1.68

Sei $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen mit Obermenge X.

(i) $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i := \{x \in X : (\exists i \in \mathcal{I} : x \in A_i)\}$

(ii) $\bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i := \{x \in X : (\forall i \in \mathcal{I} : x \in A_i)\}$

(iii) $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\} : \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i$, sowie $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i$

Definition D. 1.69

Ist $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie reeller Zahlen, so gilt
$\sup\limits_{i\in\mathcal{I}} x_i := \sup\{x_i : i \in \mathcal{I}\}$, sowie
$\inf\limits_{i\in\mathcal{I}} x_i := \inf\{x_i : i \in \mathcal{I}\}$.

Proposition P. 1.70

(i) Seien $A, B \subset \mathbb{R}, A \subset B$.
$\Rightarrow \sup A \leq \sup B, \inf A \geq \inf B$.

(ii) Sei $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen $A_i \subset \mathbb{R}, \forall i \in \mathcal{I}$. Dann definiere
$A := \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i$
$\Rightarrow \sup A = \sup\limits_{i\in\mathcal{I}} \sup A_i$ und $\inf A = \inf\limits_{i\in\mathcal{I}} \inf A_i$.

Definition D. 1.71

(i) Sei A eine Menge, $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt ***nach oben (unten) beschränkt***, falls für $f(A)$ gilt:

(a) $\sup f(A) = \sup\limits_{x\in A} f(x)$

(b) $\inf f(A) = \inf\limits_{x\in A} f(x)$

(ii) Sei A eine Menge und $f_i : A \to \mathbb{R}$ eine Familie von Funktionen. Gilt für alle $x \in A$, dass $\sup\limits_{i\in\mathcal{I}} f_i(x) < \infty$, so definieren wir die Funktion

$$\sup_{i\in\mathcal{I}} f_i : A \to \mathbb{R}$$
$$(\sup_{i\in\mathcal{I}} f_i)(x) := \sup_{i\in\mathcal{I}} f_i(x)$$

(iii) Ohne $\sup\limits_{i\in\mathcal{I}} f_i(x) < \infty$ erhalten wir mit derselben Definition $\sup\limits_{i\in\mathcal{I}} f_i : A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) Analog für $\inf\limits_{i\in\mathcal{I}} f_i$.

(v) Ist $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$ gilt
$\sup\limits_{i\in\mathcal{I}} f_i = \sup(f_1, \ldots, f_n) = \max(f_1, \ldots, f_n)$.
Entsprechend für Infimum/Minimum.

Definition (Kartesisches Produkt) D. 1.72

(i) Sei $\mathcal{I} \neq \emptyset$ und $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen. Definiere das ***kartesische Produkt*** wie folgt:
$\prod\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i := \{(x_i)_{i\in\mathcal{I}} : (\forall i \in \mathcal{I} : x_i \in A_i)\}$

(ii) Zu $j \in \mathcal{I}$ definieren wir die j-te Projektionsabbildung
$\pi_j : \prod\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i \to A_j$ mit $\pi_j((x_i)_{i\in\mathcal{I}}) := x_j$

Axiom A. 1.74

Sei $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen $A_i \neq \emptyset, \forall i \in \mathcal{I}$. Dann gilt $\prod\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i \neq \emptyset$, d.h. es gibt eine Familie $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ mit $x_i \in A_i, \forall i \in \mathcal{I}$.

Proposition

P. 1.75

Sei $\mathcal{I} \neq \emptyset$ und $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie von Mengen. Dann gilt $\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i = \emptyset \iff \exists i \in \mathcal{I} : A_i \neq \emptyset$.

Lemma (Zornsches Lemma)

L. 1.76

Sei $M \neq \emptyset$ mit einer Teilordnung (= partielle Ordnung) $\leq$. Nehme an, jede total geordnete Teilmenge $\Lambda \subset M$ (= Kette) besitzt eine obere Schranke $b \in M$, d.h. $x \leq b, \forall x \in \Lambda$. Dann enthält M ein maximales Element x_0, d.h. $\exists x_0 \in M : x \geq x_0 \Rightarrow x = x_0$.

Definition (Ausschöpfung, Partition, Überdeckung)

D. 1.77

Sei A eine Menge.

(i) Eine ***Überdeckung*** von A ist eine Familie $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ mit $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \supset A$.

(ii) Eine ***Partition*** von A ist eine Überdeckung $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ mit $A_i \subset A$ und $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \in \mathcal{I}$, $A = \dot{\bigcup_{i\in\mathcal{I}}} A_i$.

(iii) Eine ***Ausschöpfung*** von A ist eine aufsteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen von A, die $A_m \subset A_n, \forall m \leq n$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$ erfüllt.

Proposition

P. 1.78

(i) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Dann bilden die **Restklassen** von $\sim$ eine Partition von A.

(ii) Sei $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Partition von A. Dann ist $\sim$ mit $x \sim y :\Leftrightarrow \exists i \in \mathcal{I} : x, y \in A_i$ eine Äquivalenzrelation auf A.

Lemma

L. 1.79

Seien A, B Mengen. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von A. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Abbildungen $f_n : A_n \to B$ mit $f_n|_{A_m} = f_m$ für alle $m \leq n$. Dann gibt es genau eine Funktion $f : A \to B$ mit $f(x) = f_n(x), \forall x \in A_n$ oder $f|_{A_n} = f_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposition (Rekursive Definition)

P. 1.80

Sei $B \neq \emptyset$ eine Menge, $x_0 \in B$ und $F : \mathbb{N} \times B \to B$ eine Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion $f : \mathbb{N} \to B$ mit den Ergebnissen:

(i) $f(0) = x_0$ und

(ii) $f(n+1) = F(n, f(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

f ist eine rekursiv definierte Funktion.

Kardinalität

Part 1.6

Definition (Mächtigkeit)

D. 1.84

Seien A, B Mengen.

(i) A, B heißen ***gleich mächtig*** ($A \sim B$), falls es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt.

(ii) B heißt ***mächtiger*** als A ($B \succ A$) oder A ***weniger mächtig*** als B ($A \prec B$), falls es eine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.

(iii) A heißt ***abzählbar***, falls $A \sim \mathbb{N}$.

(iv) A heißt ***höchstens abzählbar***, falls $A \prec \mathbb{N}$.

(v) A heißt ***überabzählbar***, falls A nicht höchstens abzählbar ist.

(vi) Sei A abzählbar, so heißt die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine ***Abzählung*** von A, falls $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{x_i\} = A$.

Bemerkung

Bem. 1.85

(i) $\sim$ ist Äquivalenzrelation
(ii) $A \prec B \prec C \Rightarrow A \prec C$
(iii) $A \prec A$
(iv) $G := \{2n : n \in \mathbb{N}\}, G \prec \mathbb{N} : 2n \mapsto 2n$ und $\mathbb{N} \prec G : n \mapsto 2n$. Bijektiv: $\mathbb{N} \sim G$

Theorem (Schröder-Bernstein)

T. 1.86

Aus $A \prec B$ und $B \prec A$ folgt $A \sim B$.

Proposition

P. 1.87

A, B, C sind Mengen. Seien $\varphi : A \to B, \psi : B \to C$ Abbildungen. Sei $f : A \to B$ Abbildung. Dann gelten:

(i) Ist $\psi \circ \varphi$ injektiv, so ist φ injektiv
(ii) Ist $\psi \circ \varphi$ surjektiv, so ist ψ surjektiv
(iii) f surjektiv $\Leftrightarrow \exists g : B \to A, f \circ g = id_B$
(iv) f injektiv $\Leftrightarrow \exists g : B \to A, g \circ f = id_A$

Korollar

K. 1.88

$A \prec B \Leftrightarrow \exists f : B \to A,\ f$ ist surjektiv.

Definition

D. 1.89

Sei A eine Menge.

(i) A heißt ***endlich***, falls es eine injektive Abbildung $f : A \to \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $f(a)ym, \forall a \in A$ gibt.
(ii) A heißt ***unendlich***, falls A nicht endlich ist.
(iii) Gibt es eine bijektive Abbildung $f : A \to \{0, 1, \ldots, m-1\} \subset \mathbb{N}$, so hat A die ***Kardinalität*** $m(|A| = m)$. Gibt es keine solche Abbildung, so gilt $|A| = \infty$.
(iv) Sei P eine Aussageform auf A. Dann gilt P für ***fast alle*** $i \in A$, falls $\{i \in A : \neg P(i)\}$ endlich ist.

Lemma

L. 1.91

(i) Für jede endliche Menge A gilt $|A| < \infty$, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : A \to \{0, \ldots, m-1\}$.
(ii) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f : \{0, \ldots, m\} \to \{0, \ldots, n\}$ eine Bijektion. Dann gilt $n = m$. ($\Rightarrow$ Kardinalität ist wohldefiniert).

Lemma

L. 1.92

Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $(a_i)_{1 \leq i \leq m}$ eine endliche Familie natürlicher Zahlen (oder reeller). Dann gibt es ein $i \in \{a, \ldots, m\} : a_i \leq a_j, \forall 1 \leq j \leq m$.
Schreibe $a_i = \min\{a_1, \ldots, a_m\} \equiv \min(a_1, \ldots, a_n)$.
Entsprechend $\max\{a_1, \ldots, a_m\} \equiv \max(a_1, \ldots, a_n)$.

Lemma

L. 1.93

Die natürlichen Zahlen sind wohlgeordnet, d.h. jede Menge $M \subset \mathbb{N}, M \neq \emptyset$, besitzt ein kleinstes Element, d.h. $\exists a \in M : a \leq b, \forall b \in M$.

Lemma

L. 1.94

Sei A eine unendliche Menge. Dann besitzt A eine abzählbare Teilmenge.

Lemma

L. 1.95

Sei A eine Menge. Dann ist A genau dann höchstes abzählbar, wenn A endlich ist oder $A \sim \mathbb{N}$.

Lemma

L. 1.96

Sei A eine Menge. Dann ist A genau dann höchstens abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ gibt.

Proposition

P. 1.97

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

Proposition P. 1.98

Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Dann ist $\prod\limits_{i=1}^{k} \mathbb{N} = \mathbb{N}^k$ abzählbar. Dies gilt auch, wenn wir $\mathbb{N}$ überall durch $A \sim \mathbb{N}$ ersetzen.

Lemma L. 1.99

Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge abzählbarer Mengen. Dann ist $A := \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ abzählbar.

Bemerkung Bem. 1.100

P. 1.98 und L. 1.99 gelten auch mit „höchstens abzählbar“ statt abzählbar.

Theorem (Cantor) T. 1.101

Sei A eine Menge $\Rightarrow \mathcal{P}(A) \succ A$ und $\mathcal{P}(A) \not\sim A$.

Betrag und Wurzel — Part 1.7

Definition D. 1.102

(i) Sei $x \in \mathbb{R}$. Definiere den ***Betrag*** von x wie folgt: $|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$

(ii) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten a und b, so heißt $|a-b|$ ***Länge von*** I.

Proposition P. 1.104

Seien $x, a \in \mathbb{R}$. Dann gelten

(i) $x \leq |x|$

(ii) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

(iii) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

Weitere Zahlen und Mächtigkeit — Part 1.8

Konvergenz Kap. 2

Metrische Räume Part 2.1

Folgen Part 2.2

Definition D. 2.1

Sei E ein metrischer Raum. Sei $x \in E, \varepsilon > 0$. Definiere $B_\varepsilon(x) := \{y \in E : d(y,x) < \varepsilon\}$ die ***ε-Kugel***. $B_\varepsilon(x)$ heißt auch ***ε-Umgebung von x***

Definition (Konvergenz) D. 2.2

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ eine Folge in einem metrischen Raum E.

(i) Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in E$, falls für beliebige $\varepsilon > 0$ fast alle (nur endlich viele liegen außerhalb) Folgeglieder in $B_\varepsilon(a)$ liegen

(ii) Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in E$, so heißt a ***Limes*** oder ***Grenzwert*** der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$a = \lim_{n\to\infty} x_n$ oder $x_n \to a$ für $n \to \infty$ oder $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Bemerkung Bem. 2.3

Die Definition von Konvergenz ist äquivalent zu

(i) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ auch $x_n \in B_\varepsilon(a)$ gilt.

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ auch $d(x_n, a) < \varepsilon$ gilt.

Korollar (Bolzano-Weierstraß) K. 2.4

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Folge, d.h. $\exists r > 0 : x_k \in B_r(0), \forall k \in \mathbb{N}$. Dann besitzt $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert a und $|a| \leq r$.

Bemerkung Bem. 2.5

In $\mathbb{R}^n$ gilt: $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\Leftrightarrow (x_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert für alle i.

Definition (Cauchyfolge, Vollständigkeit) D. 2.6

(i) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum E heißt ***Cauchyfolge (CF)***, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_k, x_l) < \varepsilon, \forall k, l \geq n_0$ gibt.

(ii) Ein metrischer Raum, in dem jede CF konvergiert, heißt ***vollständiger metrischer Raum***.

(iii) Ein normierter Raum, in dem jede CF konvergiert, heißt ***vollständiger normierter Raum*** oder ***Banachraum (BR)***.

(iv) Ein vollständiger Skalarproduktraum heißt ***Hilbertraum (HR)***.

Lemma L. 2.7

Sei E ein metrischer Raum. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ konvergent. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

Reihen Part 2.3

Gleichmässige Konvergenz Part 2.4