

# Zusammenfassung für Analysis I

(Prof. Dr. Schnürer)

Wintersemester 2014/2015

von Dagmar Sorg



# GRUNDLAGEN: LOGIK, MENGENLEHRE

## UND REELLE ZAHLEN

## KAP. 1

### PART 1.1

### LOGISCHE GRUNDLAGEN

#### Definition (Aussage)

- (i) Eine **Aussage** ist etwas, dem der Wahrheitsgehalt „wahr“ oder „falsch“ zugeordnet ist.
- (ii) Eine **Aussageform** ist eine Aussage, die eine noch unbestimmte oder freie Variable enthält.

#### Definition (Negation, Verneinung)

Ist  $p$  eine Aussage, so bezeichnet  $\neg p$  die Negation dieser Aussage.

#### Definition (Konjunktion)

Seien  $p$  und  $q$  Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von  $p \wedge q$  („ $p$  und  $q$ “) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

$p$	$q$	$p \wedge q$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$f$
$f$	$w$	$f$
$f$	$f$	$f$

#### Definition (Disjunktion)

Seien  $p$  und  $q$  Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von  $p \vee q$  („ $p$  oder  $q$ “) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

$p$	$q$	$p \vee q$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$w$
$f$	$w$	$w$
$f$	$f$	$f$

#### Definition (Kontravalenz)

Seien  $p$  und  $q$  Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von  $p \dot{\vee} q$  („entweder  $p$  oder  $q$ “) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

$p$	$q$	$p \dot{\vee} q$
$w$	$w$	$f$
$w$	$f$	$w$
$f$	$w$	$w$
$f$	$f$	$f$

#### Definition (Implikation)

Seien  $p$  und  $q$  Aussagen. Dann definieren wir den Wahrheitswert von  $p \Rightarrow q$  („ $p$  impliziert  $q$ “) mittels der folgenden Wahrheitstabelle:

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$f$
$f$	$w$	$w$
$f$	$f$	$w$

- (i)  $p$  heißt *Voraussetzung*, *Prämisse* oder *hinreichende Bedingung* für  $q$
- (ii)  $q$  heißt *Behauptung*, *Konklusion* oder *notwendige Bedingung*

D. 1.1

D. 1.3

D. 1.5

D. 1.6

D. 1.7

D. 1.8

## Definition

D. 1.10

- (i) Seien  $p, q$  Aussagen. Definiere  $p \Leftrightarrow q$  („ $p$  und  $q$  sind äquivalent“, „genau dann, wenn  $p$  gilt, gilt auch  $q$ “) durch

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$
$w$	$w$	$w$
$w$	$f$	$f$
$f$	$w$	$f$
$f$	$f$	$w$

- (ii)  $p_1, p_2, \dots$  heißen äquivalent, falls für je zwei dieser Aussagen,  $p$  und  $q$ ,  $p \Leftrightarrow q$  gilt.

## Proposition

P. 1.11

Seien  $p, q, r$  Aussagen. Dann gelten

- (i)  $\neg\neg p \Leftrightarrow p$
- (ii)  $p \vee \neg p$
- (iii)  $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$  (Symmetrie)
- (iv)  $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$  (Symmetrie)
- (v)  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$  (Symmetrie)
- (vi)  $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$  (Idempotenz)
- (vii)  $(p \vee p) \Leftrightarrow p$  (Idempotenz)
- (viii)  $(p \wedge q) \Rightarrow p$
- (ix)  $p \Rightarrow (p \vee q)$
- (x)  $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r))$
- (xi)  $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r))$
- (xii)  $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r))$
- (xiii)  $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$  (Assoziativität)
- (xiv)  $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$  (Assoziativität)
- (xv)  $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$  (Distributivität)
- (xvi)  $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$  (Distributivität)
- (xvii)  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$  (De Morgan)
- (xviii)  $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$  (De Morgan)
- (xix)  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$
- (xx)  $((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
- (xxi)  $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- (xxii)  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$
- (xxiii)  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$
- (xxiv)  $p \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r))$  (Fallunterscheidung)

## ERSTE MENGENLEHRE

PART 1.2

### Definition (naive Definition einer Menge)

D. 1.12

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten, Elemente genannt. Ist  $A$  eine Menge,  $x$  ein Objekt, so schreiben wir  $x \in A$ , falls  $x$  ein Element von  $A$  ist.  $x \notin A \Leftrightarrow \neg(x \in A)$   
Für eine Menge  $A$ , die genau die Elemente  $a, b$  und  $c$  enthält, schreiben wir  $A = \{a, b, c\}$ .  
Es ist irrelevant, ob  $a$  mehrfach auftaucht oder wie die Elemente angeordnet werden.

### Definition

D. 1.13

Seien  $A, B$  Mengen.

- (i) Dann ist  $A$  eine Teilmenge von  $B$  ( $A \subset B$  oder  $A \subseteq B$ ), falls aus  $x \in A$  auch  $x \in B$  folgt.
- (ii)  $A$  und  $B$  heißen gleich ( $A = B$ ), falls  $A \subset B$  und  $B \subset A$  gelten.  
 $A \neq B \Leftrightarrow \neg(A = B)$  (Extensionalitätsaxiom)
- (iii) Schreibe  $A \subsetneq B$  für  $A \subset B$  und  $A \neq B$ .

## Lemma

Seien  $A, B, C$  Mengen. Dann gelten:

- (i)  $A \subset A$  (Reflexivität)
- (ii)  $x \in A$  und  $A \subset B$  implizieren  $x \in B$
- (iii)  $A \subset B \subset C \Rightarrow A \subset C$  (Transitivität)

## Axiom (Aussonderungssaxiom)

Sei  $A$  eine Menge und  $a(x)$  eine Aussageform. Dann gibt es eine Menge  $B$ , deren Elemente genau die  $x \in A$  sind, die  $a(x)$  erfüllen.

Schreibe  $B = \{x \in A : a(x)\}$ .

## Bemerkung

Zu jeder Menge  $A$  gibt es eine Menge  $B$  und eine Aussageform  $a(x) : A = \{x \in B : a(x)\}$ .  
Nehme  $B = A, a(x) = (x \in A)$ .

## Bemerkung (Russelsche Antinomie)

Nimmt man im Aussonderungssaxiom statt  $A$  die „Allmenge“ (Menge aller Elemente), dann bekommt man Probleme:

Sei  $A = \text{Allmenge}$ ,  $B = \{x \in A : x \notin x\}$ . Es gilt  $y \in B \Leftrightarrow (y \in A \wedge y \notin y) \Leftrightarrow y \notin y$ .

Gilt  $B \in B$ ?  $\rightarrow$  Widerspruch.

## Lemma (Existenz der leeren Menge)

Es gibt eine Menge  $\emptyset$ , die leere Menge, die kein Element enthält. Sie erfüllt:

- (i)  $\emptyset \subset A$  für alle Mengen  $A$
- (ii)  $\emptyset$  ist eindeutig bestimmt.

# QUANTOREN

## Definition

Sei  $A$  eine Menge,  $a(x)$  eine Aussageform.

- (i) **Existenzquantor:** Wir schreiben  $\exists x \in A : a(x)$  oder  $\exists_{x \in A} a(x)$  für „Es gibt ein  $x$  in der Menge  $A$ , sodass dieses  $x$   $a(x)$  erfüllt.“  
Schreibe  $\exists! x \in A : a(x)$  für es gibt genau ein  $x \in A$  mit  $a(x)$ . Dies zeigt man, indem man  $\exists x \in A : a(x)$  und für alle  $x, y \in A$  mit  $a(x), a(y) : x = y$  zeigt.
- (ii) **Allquantor:** Schreibe  $\forall x \in A : a(x)$  oder  $\forall_{x \in A} a(x)$  manchmal auch  $a(x) \forall x \in A$  für „Für alle  $x \in A$  gilt  $a(x)$ .“

## Lemma

Seien  $A, B$  Mengen.  $p(x), p(x, y)$  Aussageformen. Dann gelten

- (1.1)  $\forall_{x \in A} \forall_{y \in B} p(x, y) \iff \forall_{y \in B} \forall_{x \in A} p(x, y)$
- (1.2)  $\exists_{x \in A} \exists_{y \in B} p(x, y) \iff \exists_{y \in B} \exists_{x \in A} p(x, y)$
- (1.3)  $\exists_{x \in A} \forall_{y \in B} p(x, y) \implies \forall_{y \in B} \exists_{x \in A} p(x, y)$
- (1.4)  $\neg \left( \forall_{x \in A} p(x) \right) \iff \exists_{x \in A} \neg p(x)$
- (1.5)  $\neg \left( \exists_{x \in A} p(x) \right) \iff \forall_{x \in A} \neg p(x)$

L. 1.14

A. 1.15

Bem. 1.17

Bem. 1.18

L. 1.19

PART 1.3

D. 1.20

L. 1.22

**Axiom (Existenz einer Obermenge)**

A. 1.24

Sei  $\mathcal{M}$  eine Menge von Mengen. Dann gibt es eine Menge  $M$  (=Obermenge) mit  $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A \subset M$ .

*Bemerkung:*  $M$  ist eindeutig bestimmt.

**Definition (Vereinigung und Durchschnitt)**

D. 1.25

Seien  $A, B$  Mengen mit Obermenge  $X$ .

- (i) Dann ist die **Vereinigung** von  $A$  und  $B$  ( $A \cup B$ ) definiert durch  $A \cup B := \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$
- (ii) der **(Durch-) Schnitt** von  $A$  und  $B$  ( $A \cap B$ ) ist definiert durch  $A \cap B := \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$

Sei  $\mathcal{M}$  eine Menge von Mengen mit Obermenge  $X$ .

- (i) Vereinigung:  $\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A := \{x \in X : (\exists A \in \mathcal{M} : x \in A)\}$
- (ii) Schnitt:  $\bigcap_{A \in \mathcal{M}} A := \{x \in X : (\forall A \in \mathcal{M} : x \in A)\}$

**Bemerkung**

Bem. 1.26

Enthält  $\mathcal{M}$  keine Menge, so gelten  $\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A = \emptyset$  sowie  $\bigcap_{A \in \mathcal{M}} A = X$

**Definition (Disjunkte Mengen)**

D. 1.27

Seien  $A, B$  Mengen.

- (i)  $A$  und  $B$  heißen disjunkt, falls  $A \cap B = \emptyset$ . Schreibe in diesem Fall  $A \dot{\cup} B$  statt  $A \cup B$
- (ii) Sei  $\mathcal{M}$  eine Menge von Mengen. Dann heißen die Mengen in  $\mathcal{M}$  disjunkt, falls für  $A, B \in \mathcal{M}, A \neq \emptyset$  stets  $A \cap B = \emptyset$  gilt. Schreibe  $\dot{\bigcup}_{A \in \mathcal{M}} A$  statt  $\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A$ .

**Definition (Komplement)**

D. 1.28

Seien  $A, B$  Mengen mit fester Obermenge  $X$ .

- (i) Definiere das **Komplement** von  $A$  in  $B$  durch  $B \setminus A := \{x \in B : x \notin A\}$
- (ii) Definiere das Komplement von  $A$  durch  $\complement A \equiv A^c := \{x \in X : x \notin A\}$

**Proposition**

P. 1.29

Seien  $A, B, C$  Mengen mit Obermenge  $X$ . Dann gelten:

- (i)  $A \cup B = B \cup A$  (Kommutativität)
- (ii)  $A \cap B = B \cap A$  (Kommutativität)
- (iii)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  (Assoziativität)
- (iv)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  (Assoziativität)
- (v)  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$  (Distributivität)
- (vi)  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$  (Distributivität)
- (vii)  $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$  (De Morgansche Regel)
- (viii)  $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$  (De Morgansche Regel)
- (ix)  $\complement \complement A = A$
- (x)  $A \cup \complement A = X$
- (xi)  $A \setminus B = A \cap \complement B$

**Axiom (Potenzmenge)**

A. 1.30

Sei  $A$  eine beliebige Menge. Dann gibt es die Menge  $\mathcal{P}(A)$  (oder  $2^A$ ), die Potenzmenge von  $A$ . Die Elemente von  $\mathcal{P}(A)$  sind genau die Teilmengen von  $A$ .

**Axiom (Kartesisches Produkt)**

A. 1.32

Seien  $A, B$  Mengen. Dann gibt es eine Menge, das Kartesische Produkt von  $A$  und  $B$  ( $A \times B$ ), die aus allen geordneten Paaren  $(a, b)$  mit  $a \in A, b \in B$  besteht.  $a$  heißt erste,  $b$  heißt zweite Komponente des Paares  $(a, b)$ .

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

## Bemerkung

Bem. 1.33

$$(a, b) \equiv \{a, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(A \cup \mathcal{P}(A \cup B))$$

## Definition (Funktion, Ableitung)

D. 1.34

Seien  $A, B$  Mengen.

- (i) Eine Funktion (oder Abbildung)  $f$  von  $A$  nach  $B$ ,  $f : A \rightarrow B$ , ist eine Teilmenge von  $A \times B$ , sodass es zu jedem  $a \in A$  genau ein  $b \in B$  mit  $(a, b) \in f$  gibt:  $\forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in f$ .

Schreibe  $b = f(a)$ ,  $a \mapsto b$ .

Definiere den Graphen von  $f$ :

$$\text{graph } f := \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\} = f \subset A \times B$$

- (ii)  $A$  heißt **Definitionsbereich** von  $f$ ,  $D(f)$ .

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} \equiv \{y \in B : (\exists x \in A : \underbrace{f(x) = y}_{(x,y) \in f})\} = \text{im } f = R(f)$$

heißt **Bild** oder **Wertebereich** von  $f$ .

- (iii) Sei  $M \subset A$  beliebig.

$$f(M) := \{y \in B : (\exists x \in M : f(x) = y)\} \equiv \{f(x) : x \in M\}$$

Somit induziert  $f : A \rightarrow B$  eine Funktion  $\mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ , die wir wieder mit  $f$  bezeichnen.

- (iv) Zu einer beliebigen Funktion  $f : A \rightarrow B$  definieren wir die **Urbildabbildung**

$$f^{-1} : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A) \text{ mit } f^{-1}(M) := \{x \in A : f(x) \in M\}, M \subset B \text{ beliebig.}$$

$f^{-1}(M)$  heißt **Urbild** von  $M$  unter  $f$ .

## Bemerkung

Bem. 1.35

$f : A \rightarrow B$  und  $g : C \rightarrow D$  sind gleich, falls sie als Teilmengen von  $A \times B$  bzw.  $C \times D$  gleich sind, insbesondere  $B = D$ .

## Definition

D. 1.36

Sei  $f : A \rightarrow B$ .

- (i)  $f$  heißt **injektiv**, falls für alle  $x, y \in A$  aus  $f(x) = f(y)$  auch  $x = y$  folgt.
- (ii)  $f$  heißt **surjektiv**, falls  $f(A) = B$ . Wir sagen, dass  $f$  die Menge  $A$  auf  $B$  abbildet. Bei nicht-surjektiven Abbildungen sagt man  $A$  wird nach oder in  $B$  abgebildet.
- (iii)  $f$  heißt **bijektiv**, falls  $f$  injektiv und surjektiv ist.  $f$  ist eine **Bijektion**.
- (iv) Ist  $f$  injektiv, so definieren wir die **Inverse** von  $f$  durch  $f^{-1} : R(f) \rightarrow A$  mit  $f(x) \mapsto x$ . Es gilt  $f^{-1}(f(x)) = x$ .

## Bemerkung

Bem. 1.37

- (i)  $\mathcal{I}(f(x))$  bezeichnet die **Inverse** von  $f(x)$ .
- (ii)  $U(\{f(x)\})$  bezeichnet die Umkehrabbildung der Menge  $\{f(x)\}$ , sie ist definiert durch  $U : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  mit  $M \subset B \mapsto \{x \in A : f(x) \in M\}$ .
- (iii)  $f : A \rightarrow B$  induziert  $g : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$   
 $\Rightarrow \{f(x)\} = g(\{x\})$

## Definition (Komposition von Abbildungen)

D. 1.38

Seien  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  Abbildungen. Dann heißt  $g \circ f : A \rightarrow C$  mit  $x \mapsto g(f(x))$  **Komposition** von  $f$  und  $g$ .

## Bemerkung

Bem. 1.40

Seien  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$  Abbildungen. Dann gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Sowie für Inverse und Umkehrabbildungen:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

## Definition (Relationen)

D. 1.41

Seien  $A, B$  Mengen.

- (i)  $R \subset A \times B$  heißt **Relation**. Statt  $(x, y) \in R$  sagen wir  $R(x, y)$  gilt.
- (ii)  $R \subset A \times A$  heißt
  - (a) **reflexiv**, falls  $R(x, x)$  für alle  $x \in A$  gilt
  - (b) **symmetrisch**, falls  $R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$  für alle  $x, y \in A$
  - (c) **antisymmetrisch**, falls  $R(x, y) \wedge R(y, x) \Rightarrow x = y$  für alle  $x, y \in A$
  - (d) **transitiv**, falls  $R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)$  für alle  $x, y, z \in A$
- (iii)  $R \subset A \times A$  heißt **Äquivalenzrelation**, falls  $R$  reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Schreibweise bei Äquivalenzrelationen:  $x \sim y$  statt  $R(x, y)$

## Definition

D. 1.42

Sei  $R \subset A \times A$  eine Äquivalenzrelation. Sei  $x \in A$ . dann heißt  $[x] := \{y \in A : R(x, y)\}$  **Äquivalenzklasse von  $x$** . Schreibe  $y \equiv x \pmod{R}$  für  $y \in [x]$ .  
 $A/R := \{[x] : x \in A\}$  ist die Menge aller Äquivalenzklassen von  $R$ .

# DIE REELLEN ZAHLEN

PART 1.5

## Definition

D. 1.44

Die reellen Zahlen,  $\mathbb{R}$ , sind eine Menge mit den folgenden Eigenschaften:

- (A)  $\mathbb{R}$  ist ein Körper, d.h. es gibt die Abbildung
  - (i)  $+$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , die **Addition**, schreibe  $x + y$  für  $x(x, y)$
  - (ii)  $\cdot$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , die **Multiplikation**, mit  $(x, y) \mapsto x \cdot y \equiv xy$  bezeichnet und zwei ausgezeichneten Elementen:  $0, 1$  mit  $0 \neq 1$

Es gilt, soweit nicht anders angegeben, für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$ :

- (K1)  $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (K2)  $x + y = y + x$
- (K3)  $0 + x = x$
- (K4)  $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$ , Schreibe  $-x$  für  $y$ :  $x + (-x) = 0$
- (K5)  $(xy)z = x(yz)$
- (K6)  $xy = yx$
- (K7)  $1x = x$
- (K8)  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{R} : xy = 1$ , Schreibe  $x^{-1}$  für  $y$  :  $xx^{-1} = 1$
- (K9)  $x(y + z) = xy + xz$
- (B)  $\mathbb{R}$  ist ein angeordneter Körper, d.h. es gibt eine Relation  $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (schreibe  $x \leq y$  für  $R(x, y)$ ), die für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$  folgendes erfüllt:
  - (O1)  $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$  (Transitivität)
  - (O2)  $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$  (Antisymmetrie)
  - (O3) es gilt  $x \leq y$  oder  $y \leq x$
  - (O4) aus  $x \leq y$  folgt  $x + z \leq y + z$
  - (O5) aus  $0 \leq x$  und  $0 \leq y$  folgt  $0 \leq xy$ .

Schreibe  $y \geq x$  statt  $x \leq y$  und  $x < y$  bzw.  $y > x$  für  $x \leq y$  und  $x \neq y$

- (C)  $\mathbb{R}$  ist vollständig, d.h. jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$  besitzt ein Supremum in  $\mathbb{R}$ .

## Definition (Ordnung)

D. 1.45

Eine transitive, antisymmetrische Relation  $\leq$ , für die stets  $x \leq y$  oder  $y \leq x$  gilt, heißt (**totale**) **Ordnung**.



## Definition (Supremum, Infimum)

D. 1.46

- (i)  $A \subset \mathbb{R}$  heißt **nach oben beschränkt**, falls es ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $y \leq x, \forall y \in A$  gibt.
- (ii)  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist eine **obere Schranke** von  $A \subset \mathbb{R}$ , falls  $y \leq x_0, \forall y \in A$ .
- (iii)  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist das **Supremum** von  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 = \sup A$ , falls für jede obere Schranke  $x$  von  $A$  stets  $x \geq x_0$  gilt.  $x_0$  heißt **kleinste obere Schranke**.
- (iv) Ist  $\sup A \in A$ , so heißt  $\sup A$  **Maximum** von  $A$ .
- (v) Ist  $A \subset \mathbb{R}$  nicht nach oben beschränkt, so gibt  $\sup A = +\infty$ . Für alle  $x \in \mathbb{R}$  vereinbaren wir  $-\infty < x < +\infty$ .
- (vi) Entsprechend: **nach unten beschränkt**, **untere Schranke**, **Infimum** (=größte untere Schranke), **Minimum**.  
Ist  $A$  nach unten unbeschränkt, so gilt  $\inf A = -\infty$ . Alternativ:  $-A = \{-a : a \in A\}, A \subset \mathbb{R}$ .  
 $A$  heißt nach **unten beschränkt**, falls  $-A$  nach oben beschränkt ist.  $x = \inf A$ , falls  $-x = \sup -A$ .
- (vii) Ist  $A \subset \mathbb{R}$  nach oben und unten beschränkt, so heißt  $A$  **beschränkt**.

## Bemerkung

Bem. 1.47

$\sup \emptyset = -\infty$  und  $\inf \emptyset = +\infty$

## Definition

D. 1.49

Seien  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ .

- (i)  $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  (offenes Intervall)
- (ii)  $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  (halboffenes Intervall)
- (iii)  $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  (halboffenes Intervall)
- (iv)  $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  (abgeschlossenes Intervall)

$a, b$  heißen **Endpunkte** der Intervalle.

## Lemma

L. 1.50

Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ .

## Lemma

L. 1.51

Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gelten

- (i)  $(-1)x = -x$
- (ii)  $-(-x) = x$
- (iii)  $(-1)(-1) = 1$

## Lemma

L. 1.52

Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann ist die additive Inverser  $-x$  eindeutig bestimmt.

## Lemma

L. 1.53

Es gelten  $0 < 1$  und  $-1 < 0$ .

## Lemma

L. 1.54

Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann gilt genau ein der drei folgenden Aussagen:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y$$

## Lemma

L. 1.55

Gelte  $0 < x < y$ . Dann gelten:

- (i)  $0 < x^{-1}$
- (ii)  $0 < y^{-1} < x^{-1}$

## Lemma

L. 1.56

$x, y \in \mathbb{R}$ . Gilt  $xy = 0 \Rightarrow x = 0$  oder  $y = 0$ .

## Lemma

L. 1.57

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- (i) Aus  $0 \leq a \leq b$  folgt  $a^2 \leq b^2$
- (ii) Aus  $a^2 \leq b^2$  und  $b \geq 0$  folgt  $a \leq b$ .

Mit  $a^2 = a \cdot a$ .

## Definition (Natürliche Zahlen)

Die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  sind die kleinste Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  mit

(N1)  $0 \in A$

(N2)  $a + 1 \in A, \forall a \in A$

$\mathbb{N}$  ist die kleinste Menge mit (N1), (N2) in dem Sinn, dass für alle  $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$  mit  $\mathcal{N}$  erfüllt (N1) und (N2) auch  $\mathbb{N} \subset \mathcal{N}$  gilt.

## Lemma

Es gibt die natürlichen Zahlen. Sie sind eindeutig bestimmt.

## Lemma (Peanoaxiome)

Es gelten:

(i)  $0 \in \mathbb{N}$

(ii) jedes  $a \in \mathbb{N}$  besitzt genau einen Nachfolger  $a^+ \in \mathbb{N}$

(iii) 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl

(iv)  $\forall n, m \in \mathbb{N} : m^+ = n^+ \Rightarrow m = n$

(v) Sei  $X \subset \mathbb{R}$  beliebig mit  $0 \in X$  und  $n^+ \in X, \forall n \in X$ . Es folgt  $\mathbb{N} \subset X$

Der Nachfolger von  $a \in \mathbb{N}$  ist die Zahl  $a^+ := a + 1 \in \mathbb{N}$ .

## Theorem

$\mathbb{R}$  ist **archimedisch**, d.h. zu jedem  $x \in \mathbb{R}$  gibt es  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $\mathbb{N} \ni n \geq n_0$  auch  $n \geq x$  gilt.

## Korollar

Sei  $x \in \mathbb{R}$  beliebig und sei  $a > 0$ .

(i) Dann gibt es  $n \in \mathbb{N}$  mit  $an \geq x$

(ii) Dann gibt es  $m \in \mathbb{N}$  mit  $0 < \frac{1}{m} \leq a$

(iii) Ist  $a \leq \frac{1}{n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  (oder alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$ ), so ist  $a \leq 0$ .

## Theorem (Vollständige Induktion)

Erfüllt  $M \subset \mathbb{N}$  die Bedingungen

(i)  $0 \in M$

(Induktionsanfang)

(ii)  $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$

(Induktionsschritt)

so gilt  $M = \mathbb{N}$ .

## Theorem

Sei  $p$  eine Aussageform auf  $\mathbb{N}$ . Gelten

(i)  $p(0)$  und

(ii)  $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,

so gilt  $p(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

## Definition (Familie, Folge)

(i) Seien  $\mathcal{I}, X$  Mengen,  $f : \mathcal{I} \rightarrow X$  eine Abbildung. Dann heißt  $f$  auch **Familie**:  $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$  mit  $x_i = f(i), \forall i \in \mathcal{I}$  ( $\mathcal{I}$  bezeichnet die Indexmenge).

(ii) Ist  $\mathcal{I} = \mathbb{N}$ , so heißt  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  **Folge**:  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset X$ .

(iii) Ist  $J \subset \mathcal{I}$ , so heißt  $(x_j)_{j \in J}$  **Teilfamilie** von  $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ , falls die Werte auf  $J$  übereinstimmen.

(iv) Ist  $\mathcal{I} = \mathbb{N}$ ,  $J \subset \mathbb{N}$  unendlich, so heißt  $(x_j)_{j \in J}$  **Teilfolge** von  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Ist  $(j_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset J$  eine Folge mit  $j_{k+1} > j_k, \forall k$  und  $J = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{j_k\}$ , so schreibe  $(x_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$  für die Teilfolge.

(v) Sei  $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$  eine Familie. Ist  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\} (\rightarrow (x_i)_{1 \leq i \leq n})$ :

(a)  $n = 2$ : Die Familie heißt **Paar**  $(x_1, x_2)$

(b)  $n = 3$ : Die Familie heißt **Triple**  $(x_1, x_2, x_3)$

(c)  $n$  beliebig: Die Familie heißt  **$n$ -Tupel**  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

D. 1.58

L. 1.59

L. 1.60

T. 1.61

K. 1.62

T. 1.63

T. 1.64

D. 1.67

## Definition

D. 1.68

Sei  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  eine Familie von Mengen mit Obermenge  $X$ .

(i)  $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i := \{x \in X : (\exists i \in \mathcal{I} : x \in A_i)\}$

(ii)  $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i := \{x \in X : (\forall i \in \mathcal{I} : x \in A_i)\}$

(iii)  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\} : \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ , sowie  $\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i$

## Definition

D. 1.69

Ist  $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$  eine Familie reeller Zahlen, so gilt

$\sup_{i \in \mathcal{I}} x_i := \sup\{x_i : i \in \mathcal{I}\}$ , sowie

$\inf_{i \in \mathcal{I}} x_i := \inf\{x_i : i \in \mathcal{I}\}$ .

## Proposition

P. 1.70

(i) Seien  $A, B \subset \mathbb{R}, A \subset B$ .

$\Rightarrow \sup A \leq \sup B, \inf A \geq \inf B$ .

(ii) Sei  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  eine Familie von Mengen  $A_i \subset \mathbb{R}, \forall i \in \mathcal{I}$ . Dann definiere

$A := \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$

$\Rightarrow \sup A = \sup_{i \in \mathcal{I}} \sup A_i$  und  $\inf A = \inf_{i \in \mathcal{I}} \inf A_i$ .

## Definition

D. 1.71

(i) Sei  $A$  eine Menge,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.  $f$  heißt **nach oben (unten) beschränkt**, falls für  $f(A)$  gilt:

(a)  $\sup f(A) = \sup_{x \in A} f(x)$

(b)  $\inf f(A) = \inf_{x \in A} f(x)$

(ii) Sei  $A$  eine Menge und  $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine Familie von Funktionen. Gilt für alle  $x \in A$ , dass  $\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i(x) < \infty$ , so definieren wir die Funktion

$\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i)(x) := \sup_{i \in \mathcal{I}} f_i(x)$

(iii) Ohne  $\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i(x) < \infty$  erhalten wir mit derselben Definition  $\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) Analog für  $\inf_{i \in \mathcal{I}} f_i$ .

(v) Ist  $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$  gilt

$\sup_{i \in \mathcal{I}} f_i = \sup(f_1, \dots, f_n) = \max(f_1, \dots, f_n)$ .

Entsprechend für Infimum/Minimum.

## Definition (Kartesisches Produkt)

D. 1.72

(i) Sei  $\mathcal{I} \neq \emptyset$  und  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  eine Familie von Mengen. Definiere das **kartesische Produkt** wie folgt:

$\prod_{i \in \mathcal{I}} A_i := \{(x_i)_{i \in \mathcal{I}} : (\forall i \in \mathcal{I} : x_i \in A_i)\}$

(ii) Zu  $j \in \mathcal{I}$  definieren wir die  $j$ -te Projektionsabbildung

$\pi_j : \prod_{i \in \mathcal{I}} A_i \rightarrow A_j$  mit  $\pi_j((x_i)_{i \in \mathcal{I}}) := x_j$

## Axiom

A. 1.74

Sei  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  eine Familie von Mengen  $A_i \neq \emptyset, \forall i \in \mathcal{I}$ . Dann gilt  $\prod_{i \in \mathcal{I}} A_i \neq \emptyset$ , d.h. es gibt eine Familie  $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$  mit  $x_i \in A_i, \forall i \in \mathcal{I}$ .

## Proposition

Sei  $\mathcal{I} \neq \emptyset$  und  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  eine Familie von Mengen. Dann gilt  $\prod_{i \in \mathcal{I}} A_i = \emptyset \iff \exists i \in \mathcal{I} : A_i \neq \emptyset$ .

P. 1.75

## Lemma (Zornsches Lemma)

Sei  $M \neq \emptyset$  mit einer Teilordnung (= partielle Ordnung)  $\leq$ . Nehme an, jede total geordnete Teilmenge  $\Lambda \subset M$  (= Kette) besitzt eine obere Schranke  $b \in M$ , d.h.  $x \leq b, \forall x \in \Lambda$ . Dann enthält  $M$  ein maximales Element  $x_0$ , d.h.  $\exists x_0 \in M : x \geq x_0 \Rightarrow x = x_0$ .

L. 1.76

## Definition (Ausschöpfung, Partition, Überdeckung)

Sei  $A$  eine Menge.

- (i) Eine **Überdeckung** von  $A$  ist eine Familie  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  mit  $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \supset A$ .
- (ii) Eine **Partition** von  $A$  ist eine Überdeckung  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  mit  $A_i \subset A$  und  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \in \mathcal{I}, A = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ .
- (iii) Eine **Ausschöpfung** von  $A$  ist eine aufsteigende Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Teilmengen von  $A$ , die  $A_m \subset A_n, \forall m \leq n$  und  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$  erfüllt.

D. 1.77

## Proposition

- (i) Sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $A$ . Dann bilden die **Restklassen** von  $\sim$  eine Partition von  $A$ .
- (ii) Sei  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  eine Partition von  $A$ . Dann ist  $\sim$  mit  $x \sim y :\Leftrightarrow \exists i \in \mathcal{I} : x, y \in A_i$  eine Äquivalenzrelation auf  $A$ .

P. 1.78

## Lemma

Seien  $A, B$  Mengen. Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Ausschöpfung von  $A$ . Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Familie von Abbildungen  $f_n : A_n \rightarrow B$  mit  $f_n|_{A_m} = f_m$  für alle  $m \leq n$ . Dann gibt es genau eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  mit  $f(x) = f_n(x), \forall x \in A_n$  oder  $f|_{A_n} = f_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

L. 1.79

## Proposition (Rekursive Definition)

Sei  $B \neq \emptyset$  eine Menge,  $x_0 \in B$  und  $F : \mathbb{N} \times B \rightarrow B$  eine Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow B$  mit den Ergebnissen:

- (i)  $f(0) = x_0$  und
- (ii)  $f(n+1) = F(n, f(n))$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

$f$  ist eine rekursiv definierte Funktion.

P. 1.80

# KARDINALITÄT

# PART 1.6

## Definition (Mächtigkeit)

Seien  $A, B$  Mengen.

- (i)  $A, B$  heißen **gleich mächtig** ( $A \sim B$ ), falls es eine Bijektion  $f : A \rightarrow B$  gibt.
- (ii)  $B$  heißt **mächtiger** als  $A$  ( $B \succ A$ ) oder  $A$  **weniger mächtig** als  $B$  ( $A \prec B$ ), falls es eine injektive Abbildung  $f : A \rightarrow B$  gibt.
- (iii)  $A$  heißt **abzählbar**, falls  $A \sim \mathbb{N}$ .
- (iv)  $A$  heißt **höchstens abzählbar**, falls  $A \prec \mathbb{N}$ .
- (v)  $A$  heißt **überabzählbar**, falls  $A$  nicht höchstens abzählbar ist.
- (vi) Sei  $A$  abzählbar, so heißt die Folge  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine **Abzählung** von  $A$ , falls  $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$  und  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\} = A$ .

D. 1.84

## Bemerkung

- (i)  $\sim$  ist Äquivalenzrelation
- (ii)  $A \prec B \prec C \Rightarrow A \prec C$
- (iii)  $A \prec A$
- (iv)  $G := \{2n : n \in \mathbb{N}\}, G \prec \mathbb{N} : 2n \mapsto 2n$  und  $\mathbb{N} \prec G : n \mapsto 2n$ . Bijektiv:  $\mathbb{N} \sim G$

## Theorem (Schröder-Bernstein)

Aus  $A \prec B$  und  $B \prec A$  folgt  $A \sim B$ .

## Proposition

$A, B, C$  sind Mengen. Seien  $\varphi : A \rightarrow B, \psi : B \rightarrow C$  Abbildungen. Sei  $f : A \rightarrow B$  Abbildung. Dann gelten:

- (i) Ist  $\psi \circ \varphi$  injektiv, so ist  $\varphi$  injektiv
- (ii) Ist  $\psi \circ \varphi$  surjektiv, so ist  $\psi$  surjektiv
- (iii)  $f$  surjektiv  $\Leftrightarrow \exists g : B \rightarrow A, f \circ g = id_B$
- (iv)  $f$  injektiv  $\Leftrightarrow \exists g : B \rightarrow A, g \circ f = id_A$

## Korollar

$A \prec B \Leftrightarrow \exists f : B \rightarrow A, f$  ist surjektiv.

## Definition

Sei  $A$  eine Menge.

- (i)  $A$  heißt **endlich**, falls es eine injektive Abbildung  $f : A \rightarrow \mathbb{N}$  und  $m \in \mathbb{N}$  mit  $f(a) \leq m, \forall a \in A$  gibt.
- (ii)  $A$  heißt **unendlich**, falls  $A$  nicht endlich ist.
- (iii) Gibt es eine bijektive Abbildung  $f : A \rightarrow \{0, 1, \dots, m-1\} \subset \mathbb{N}$ , so hat  $A$  die **Kardinalität**  $m$  ( $|A| = m$ ). Gibt es keine solche Abbildung, so gilt  $|A| = \infty$ .
- (iv) Sei  $P$  eine Aussageform auf  $A$ . Dann gilt  $P$  für **fast alle**  $i \in A$ , falls  $\{i \in A : \neg P(i)\}$  endlich ist.

## Lemma

- (i) Für jede endliche Menge  $A$  gilt  $|A| < \infty$ , d.h. es gibt ein  $m \in \mathbb{N}$  und eine Bijektion  $f : A \rightarrow \{0, \dots, m-1\}$ .
- (ii) Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $f : \{0, \dots, m\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$  eine Bijektion. Dann gilt  $n = m$ . ( $\Rightarrow$  Kardinalität ist wohldefiniert).

## Lemma

Sei  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und  $(a_i)_{1 \leq i \leq m}$  eine endliche Familie natürlicher Zahlen (oder reeller). Dann gibt es ein  $i \in \{1, \dots, m\} : a_i \leq a_j, \forall 1 \leq j \leq m$ .  
Schreibe  $a_i = \min\{a_1, \dots, a_m\} \equiv \min(a_1, \dots, a_m)$ .  
Entsprechend  $\max\{a_1, \dots, a_m\} \equiv \max(a_1, \dots, a_m)$ .

## Lemma

Die natürlichen Zahlen sind wohlgeordnet, d.h. jede Menge  $M \subset \mathbb{N}, M \neq \emptyset$ , besitzt ein kleinstes Element, d.h.  $\exists a \in M : a \leq b, \forall b \in M$ .

## Lemma

Sei  $A$  eine unendliche Menge. Dann besitzt  $A$  eine abzählbare Teilmenge.

## Lemma

Sei  $A$  eine Menge. Dann ist  $A$  genau dann höchstens abzählbar, wenn  $A$  endlich ist oder  $A \sim \mathbb{N}$ .

## Lemma

Sei  $A$  eine Menge. Dann ist  $A$  genau dann höchstens abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  gibt.

## Proposition

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ .

Bem. 1.85

T. 1.86

P. 1.87

K. 1.88

D. 1.89

L. 1.91

L. 1.92

L. 1.93

L. 1.94

L. 1.95

L. 1.96

P. 1.97

## Proposition

P. 1.98

Sei  $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ . Dann ist  $\prod_{i=1}^k \mathbb{N} = \mathbb{N}^k$  abzählbar. Dies gilt auch, wenn wir  $\mathbb{N}$  überall durch  $A \sim \mathbb{N}$  ersetzen.

## Lemma

L. 1.99

Sei  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge abzählbarer Mengen. Dann ist  $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$  abzählbar.

## Bemerkung

Bem. 1.100

P. 1.98 und L. 1.99 gelten auch mit „höchstens abzählbar“ statt abzählbar.

## Theorem (Cantor)

T. 1.101

Sei  $A$  eine Menge  $\Rightarrow \mathcal{P}(A) \succ A$  und  $\mathcal{P}(A) \not\sim A$ .

# BETRAG UND WURZEL

PART 1.7

## Definition

D. 1.102

- (i) Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Definiere den **Betrag** von  $x$  wie folgt:  $|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$
- (ii) Ist  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall mit Endpunkten  $a$  und  $b$ , so heißt  $|a - b|$  **Länge von  $I$** .

## Proposition

P. 1.104

Seien  $x, a \in \mathbb{R}$ . Dann gelten

- (i)  $x \leq |x|$
- (ii)  $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- (iii)  $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

## Korollar

K. 1.105

Sei  $A \subset \mathbb{R}$ . Dann ist  $A$  genau dann beschränkt, wenn es ein  $a \in \mathbb{R}$  mit  $|x| \leq a, \forall x \in A$  gibt.

## Theorem (Dreiecksungleichung)

T. 1.106

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

- (i)  $|a + b| \leq |a| + |b|$
- (ii)  $|a - b| \geq |a| - |b|$
- (iii)  $|a - b| \geq ||a| - |b||$

## Proposition (Existenz der $m$ -ten Wurzel)

P. 1.107

Seien  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Dann gibt es genau ein  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0} : x^m = a$ .

## Definition

D. 1.108

- (i)  $\sqrt{a}$  ist die Zahl in  $\mathbb{R}_+$  mit  $(\sqrt{a})^2 = a$
- (ii)  $\sqrt[m]{a}$  oder  $a^{\frac{1}{m}}$  ist die Zahl in  $\mathbb{R}_+$  mit  $(\sqrt[m]{a})^m = a$
- (iii)  $a^0 := 1, a^{\frac{n}{m}} := \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n$

## Definition

D. 1.109

- (i) Die Menge der  $x \in \mathbb{R}$ , sodass es  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $m - n = x$  gibt, heißt die Menge der **ganzen Zahlen**:  $\mathbb{Z} := \{m - n : m, n \in \mathbb{N}\}$
- (ii) Die **rationalen Zahlen** sind die Menge aller  $x \in \mathbb{R}$ , sodass es  $m, n \in \mathbb{Z}$  mit  $n \neq 0$  und  $x = \frac{m}{n}$  gibt:  $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- (iii)  $\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  heißt die Menge der **irrationalen Zahlen**.
- (iv) Die **komplexen Zahlen** sind Paare reeller Zahlen:  $\mathbb{C} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ .

**Addition:**  $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$

**Multiplikation:**  $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, bc + ad)$

Schreibe  $(a, b) \equiv a + ib$ . Es gilt  $i^2 = -1$ .

Sei  $z = a + ib$ . Dann heißt  $a = \operatorname{Re} z$  **Realteil von  $z$**  und  $b = \operatorname{Im} z$  **Imaginärteil von  $z$** .

$a + ib := a - ib$  heißt **konjugiert komplexe Zahl zu  $a + ib$** .

$|a + ib| := \sqrt{a^2 + b^2}$  heißt **Betrag von  $a + ib$** .

Für  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt:

- $|a + ib|^2 = (a + ib)(\overline{a + ib})$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $|z|^2 = |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2$
- $|z|^2 = |\overline{z}|^2$

Betrachte  $\mathbb{R}$  mithilfe von  $\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{C}$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}$ .  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{x} = x$ .

## Bemerkung

Bem. 1.110

- (i) Summen, Differenzen und Produkte ganzer Zahlen sind ganze Zahlen.
- (ii)  $\mathbb{Q}$  bildet einen angeordneten Körper,  $\mathbb{Q}$  ist nicht vollständig.
- (iii)  $\mathbb{C}$  ist ein Körper,  $\mathbb{C}$  ist nicht angeordnet,  $\mathbb{C}$  ist als metrischer Raum vollständig.  
 $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ . Für  $(a, b) \neq 0$  ist daher  $\frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2} = (a + ib)^{-1}$
- (iv) Seien  $z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow |z + w| \leq |z| + |w|$
- (v)  $|zw| = |z| \cdot |w|$

## Theorem (Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ )

T. 1.111

Sei  $I \subset (a, b) \subset \mathbb{R}$  ein Intervall mit  $I \neq \emptyset$ . Dann ist  $I \cap \mathbb{Q}$  unendlich.

## Proposition

$\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

P. 1.112

## Proposition

$\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$

P. 1.113

## Bemerkung (Cantorsches Diagonalverfahren ( $\mathbb{R} \succ \mathbb{N}, \mathbb{R} \not\sim \mathbb{N}$ ))

Bem. 1.114

Alle reellen Zahlen werden untereinander aufgelistet. Man nimmt die Diagonale und schreibt eine neue Zahl unter die Liste, die zur Diagonale verschieden ist  $\rightarrow$  nicht in der Liste!

## Bemerkung

$\mathbb{R} \sim (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

Bem. 1.115

# KONVERGENZ

## METRISCHE RÄUME

## FOLGEN

### Definition

Sei  $E$  ein metrischer Raum. Sei  $x \in E, \varepsilon > 0$ . Definiere  $B_\varepsilon(x) := \{y \in E : d(y, x) < \varepsilon\}$  die  $\varepsilon$ -**Kugel**.  $B_\varepsilon(x)$  heißt auch  $\varepsilon$ -**Umgebung von  $x$**

### Definition (Konvergenz)

Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  eine Folge in einem metrischen Raum  $E$ .

- (i) Dann konvergiert  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a \in E$ , falls für beliebige  $\varepsilon > 0$  fast alle (nur endlich viele liegen außerhalb) Folgenglieder in  $B_\varepsilon(a)$  liegen
- (ii) Konvergiert  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a \in E$ , so heißt  $a$  **Limes** oder **Grenzwert** der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :  
 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  oder  $x_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  oder  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ .

### Bemerkung

Die Definition von Konvergenz ist äquivalent zu

- (i) Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$  auch  $x_n \in B_\varepsilon(a)$  gilt.
- (ii) Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$  auch  $d(x_n, a) < \varepsilon$  gilt.

### Korollar (Bolzano-Weierstraß)

Sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte Folge, d.h.  $\exists r > 0 : x_k \in B_r(0), \forall k \in \mathbb{N}$ . Dann besitzt  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert  $a$  und  $|a| \leq r$ .

### Bemerkung

In  $\mathbb{R}^n$  gilt:  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert  $\Leftrightarrow (x_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert für alle  $i$ .

### Definition (Cauchyfolge, Vollständigkeit)

- (i) Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem metrischen Raum  $E$  heißt **Cauchyfolge (CF)**, falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $d(x_k, x_l) < \varepsilon, \forall k, l \geq n_0$  gibt.
- (ii) Ein metrischer Raum, in dem jede CF konvergiert, heißt **vollständiger metrischer Raum**.
- (iii) Ein normierter Raum, in dem jede CF konvergiert, heißt **vollständiger normierter Raum** oder **Banachraum (BR)**.
- (iv) Ein vollständiger Skalarproduktraum heißt **Hilbertraum (HR)**.

### Lemma

Sei  $E$  ein metrischer Raum. Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  konvergent. Dann ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge.

## REIHEN

## GLEICHMÄSSIGE KONVERGENZ

KAP. 2

PART 2.1

PART 2.2

D. 2.1

D. 2.2

Bem. 2.3

K. 2.4

Bem. 2.5

D. 2.6

L. 2.7

PART 2.3

PART 2.4