Mathematische Grundlagen
Zusammenfassung

Maximilian Ortwein

14. Februar 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Logik

- $\neg$ geht vor $\wedge$ und $\wedge$ geht vor $\vee$
- Implikation: $A \rightarrow B = \neg A \vee B = \neg A \rightarrow \neg B$
- Äquivalenz: $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
- Antivalenz: $A \oplus B = (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$
- KNF: $(A \vee B) \wedge (B \vee C)$
- DNF: $(B \wedge C) \vee (A \wedge C)$

2 Beweisregeln

-**Abtrennregel** sind A und $A \rightarrow B$ allgemeingültig, dann ist auch B allgemeingültig
- **Fallunterscheidung** sind $A \rightarrow B$ und $\neg A \rightarrow B$ allgemeingültig, dann ist B allgemeingültig
-**Kettenschluss** sind $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow C$ allgemeingült, so ist $A \rightarrow C$ allgemeingültig
-**Kontraposition** sind $A \rightarrow B$ Allgemeingültig, so ist $\neg A \rightarrow \neg B$ allgemeingültig
-**indirekter Beweis** sind $A \rightarrow B$ und $A \rightarrow \neg B$ allgemeingültig, so ist $\neg A$ allgemeingültig

3 Mengen

- extensionale Darstellung: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$
- intensionale Darstellung: $A = \{a|E(a)\}$ E(a) bedeutet eine Bestimmte eigenschaft die a erfüllen Muss damit es in der Menge ist.

Mengenoperationen
- Vereinigung: $A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$ alle Elemente aus A und B
- Durchschnitt: $A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$ nur Elemente die in A und B vorkommen
- Differenz: $A \backslash B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$ Alle Elemente die nur in A enthalten sind
- Symmetrische Differenz: $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ Alle Elemente die nur in A und nur in B vorkommen
- Komplement: $\bar{A} = U \backslash A$ das Universum ohne A
- Zwei Mengen sind Disjunkt, wenn gilt $A \cap B = \emptyset$

Potenzmenge:
- $\mathcal{P}(A) = \{X|X \subseteq A\}$

1. $X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$
2. $\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)$
3. Wenn A endlich ist, gilt: $||\mathcal{P}(A)|| = 2^{||A||}$

BSP: $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$
Teilmengen von Potenzmengen sind Mengenfamilien

Partitionen:
Partitionen sind Mengenfamilien und stellen eine Zerlegung des Universums dar
Mengenfamilie: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$

1. $B \cap C = \emptyset$ für Alle Mengen $B, C \in \mathcal{F}$ mit $B \neq C$
2. $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{F}} B = A$

$B \in \mathcal{F}$ heißt Komponente der Partition
Haubersches Theorem: $\{A_1, \ldots A_n\}$ und $\{B_1 \ldots B_n\}$ sind Partitionen von U. Gilt $A_i \subseteq B_i$ dann gilt $B_i \subseteq A_i$ und $A_i = B_i$ für alle $i \in \{1 \ldots n\}$

4 Relationen

Kreuzprodukt: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2 \ldots a_n | \text{ALLE ZAHLEN} 1 \ldots n\}$ Jedes Element steht mit jedem Element aus allen Mengen in Beziehung. z.B.$\{a, b, c\} \times \{2, 3\} = \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3), (c, 2), (c, 3)\}$
(a, b) = Tupel; (a, b, c) = Tripel; Quadrupel für n=4
Sind alle Mengen gleich schreibt man A^n also z.B. $\mathbb{N}^2$ ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
Eine Menge $R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$ heisst n-Stellige Relation
Eine Binäre Relation ist definiert als $R \subseteq A^2$
$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$ und bedeutet x steht in Relation R zu y
Funktionen
1. Linkstotal: $(\forall x \in A)(\exists y \in B)[(x, y) \in R]$
Jedes Elemement der Menge A ist mit min. einem Element der Menge B in Relation
2. Rechtseindeutig: $(\forall x \in A)(\forall y, z \in B)[(x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \rightarrow y = z]$
Ein Element der Menge A kann nur mit genau einem Element der Menge B in Relation stehen
3. Rechtstotal: $(\forall y \in B)(\exists x \in A)[(x, y) \in R]$
Jedes Element der Menge B steht in Relation zu min. einem Element der Menge A
4. Linkseindeutig: $(\forall x, y \in A)(\forall z \in B)[(x, z) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow x = y]$
Ein Element der Menge B kann nur mit einem genau Element der Menge A in Relation stehen

R ist eine (totale) Funktion wenn R linkstotal und Rechtseindeutig ist
R ist eine partielle Funktion wenn R rechtseindeutig ist

Schreibweisen für Funktionen: $f \subseteq A \times B \equiv f : A \rightarrow B$
$(a, b) \in f \equiv f(a) = b$ Kompakt: $f : A \rightarrow B : a \mapsto f(a)$
Bild(menge): $f(A_0) = \{f(a) | a \in A_0\}$ $f(A_0)$ sind Bilder von A_0 von f
Urbild(menge): $f^{-1}(B_0) = \{a | f(a) \in B_0\}$

Sind A und B endliche Mengen und $f : A \rightarrow B$ eine Funktion, dann gilt:
$||A|| = \sum\limits_{b \in B} ||f^{-1}(\{b\})||$

Eine Funktion f ist:
Surjektiv f ist rechtstotal $(\forall b \in B)[||f^{-1}(\{b\})|| \geq 1]$ es gilt: $||A|| \geq ||B||$
Injektiv:f ist linkseindeutig$(\forall b \in B)[||f^{-1}(\{b\})|| \leq 1]$ es gilt: $||A|| \leq ||B||$

Bijektiv: f ist injektiv und surjektiv $(\forall b \in B)[||f^{-1}(\{b\})|| = 1]$ es gilt $||A|| = ||B||$

Umkehrrelation: $R^{-1} = \{(y,x)|(x,y) \in R\}$
R ist linkstotal dann R^{-1} rechtstotal; R ist rechtseindeutig, dann R^{-1} linkseindeutig; R ist rechtstotal, dann R^{-1} linkstotal; R ist Linkseindeutig, dann R^{-1} rechtseindeutig.
ist f bijektiv, dann ist f^{-1} auch bijektiv, f ist umkehrbar, wenn f^{-1} eine Funktion ist. Eine Funktion ist genau dann invertierbar, wenn sie bijektiv ist.

Hintereinanderausführung
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es gilt allerdings: $g \circ f \neq f \circ g$
sind g und f injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv; sind g und f surjektiv so ist $g \circ f$ surjektiv; sind g und f bijektiv so ist $g \circ f$ bijektiv
identitätsfunktion:$id_A : A \to A : x \mapsto x$
wenn $f : A \to B$ bijektiv, dann $f^{-1} \circ f = id_A$ und $f \circ f^{-1} = id_B$

4.1 Äquivalenzrelationen

reflexiv: $(\forall a \in A)[(a,a) \in R]$
transitiv: $(\forall a,b,c \in A)[((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \to (a,c) \in R]$
symmetrisch: $(\forall a,b \in A)[(a,b) \in R \to (b,a) \in R]$
Aäquivalenzrelation: reflexiv, transitiv, symmetrisch

4.2 Äquivalenzklassen

Es Gilt $R \subseteq A^2$ und $x \in A$
$[x]_R =_{def} \{y|(x,y) \in R\} \subseteq A$ ist eine Äquivalenzklasse von x und x ist Repräsentant
- ist $(x,y) \in R$ dann $[x]_R = [y]_R$
- ist $(x,y) \notin R$ dann sind $[x]_R$ und $[y]_R$ disjunkt

4.2.1 Repräsentantensystem

für alle $k_1, k_2 \in K$ mit $k_1 \neq k_2$ gilt $(k_1,k_2) \notin R$
$A = \bigcup\limits_{k \in K} [k]_R$
Die Äquivalenzklassen von K bilden eine Partition von A
$\mathcal{F}$ sei eine Partition von A, dann ist $R \subseteq A^2$ mit $(x,y) \in R \Leftrightarrow (\exists X \in \mathcal{F})[x \in X \wedge y \in X]$ eine Äquvalenzrelation

4.3 Ordnungsrelationen

- antisymmetrisch: $(\forall a, b \in A)[((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \rightarrow a = b]$
wenn a und b verschieden sind, darf nur eines der paare (a,b) oder (b,a) in der Relation vorkommen
- linear: $(\forall a, b)[a \neq b \rightarrow ((a, b) \in R \vee (b, a) \in R)]$
eines der paare (a,b) oder (b,a) müssen vorkommen wenn a und b verschieden sind

Halbordnung: reflexiv transitiv und antisymmetrisch
Ordnung(total) reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und linear(total)
ist R Halbordnung, so ist (A,R) Halbgeordnete Menge
ist R Ordnung, so ist (A,R) geordnete Menge

4.3.1 HASSE-Diagramme

- Elemente aus der Menge A werden durch Knoten dargestellt
- $(x, y) \in R$ für $x \neq y$ wird y oberhalb von x gezeichnet
- Wenn es kein $z \notin \{x, y\}$ mit $(x, z) \in R$ und $(z, y) \in R$ gibt werden x und y durch kante verbunden

4.3.2 Minima, Maxima u.s.w.

- Minimum bzw. Maximum: größtes bzw kleinstes Element einer Halbordnung, Min. und Max. müssen in der Halbordnung enthalten sein
- untere bzw. obere Schranke sind gleich definiert wie das Min. bzw. das Max. allerdings müssen sie nicht zur betrachteten Halbordnung gehören.
- Infimum bzw Supremum sind die kleinste bzw. größte Obere Schranke

Inf, Sup, Max und Min sind immer eindeutig!

4.4 Graphen

- $G = (V, E)$ V sind Knoten, E sind Kanten
- Weg ist Folge von Knoten
- Kreis ist Weg mit gleichem anfangs und Endknoten
- zusammenhängend heisst, das jeder Knoten verbunden ist
- Baum: Kreisfrei und Zusammenhängend

5 Induktion

Induktionsanfang: Zeige, das Aussage gilt für Anfangswert für n (z.B. n=0)
Induktionsschritt, Zeige, dass Aussage für n gilt unter der Annahme, das induktionsvoraussetzung für n-1 gilt.

5.1 Strukturelle Induktion

- IA: Zeige A(x) für alle $x \in B_0$
- IS: Zeige A(x) unter verwendung eines Allgemeinen $x \in B \backslash B_0$ Unter Annnahme, dass IV gilt.

5.2 transitive Hülle

- $R^+ = \Gamma_{\bowtie}(R)$

Reflexiv Transitive Hülle: $R^* = R^+ \cup \{(a,a) | a \in A\}$
$x \sim_{R^*} \Leftrightarrow (x,y) \in R^* \wedge (y,x) \in R^*$
$\sim_{R^*}$ ist Äquvalenzrelation
$[x]_{\sim_{R^*}} \leq_{R^*} [y]_{\sim_{R^*}} \Leftrightarrow (x,y) \in R^*$

5.3 Mächtigkeit von Mengen

Zwei Mengen sind gleichmächtig falls es bijektive Funktion $f : A \to B$ gibt.
A ist:
Abzählbar falls surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \to A$ existiert
Abzählbar unendlich falls injektive Funktion $f : \mathbb{N} \to A$ existiert
überabzählbar falls A nicht Abzählbar

6 Analysis

6.1 Konvergenz von Folgen

Wenn eine Folge gegen c konvergiert, so heißt c Grenzwert. Mathematisch: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$
Folge heißt konvergent, wenn Grenzwert existiert andernfalls divergent
Grenzwert ist immer eindeutig
Gilt $a_n \leq b_n$ so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ gilt wenn: $a_n \leq b_n \leq c_n$
$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ falls $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ und $b_n \neq 0$

6.2 konvergenz von Reihen

Reihe: $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$
Wenn s_n Konvergiert so gilt $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$
Absolut Konvergent: wenn $\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|$ Konvergent ist
Majoranten Kriterium (Marihuana-Kriterium ;-)):
Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent und gilt $|a_n| \leq |b_n|$ für in größer n_0 so ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent
Wurzelkriterium:
Gibt es ein $0 \leq q < 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle $n \geq n_0$ so ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent
Quotienten-Kriterium:
Gibt es ein $0 \leq q < 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit$|a_{n+1}| \leq q \cdot |a_n|$ für alle $n \geq n_0$ so ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent

6.3 oberer und unterer Grenzwert

oberer Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$
unterer Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n$
Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n = c$ dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$
Gibt es $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c \leq a_n \leq d$ für alle $n \geq n_0$ dann existieren $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$ und es gilt $c \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n \leq d$
$\lim\limits_{n\to\infty} \inf(-a_n) = -\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$
$\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n^{-1} = (\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n)^{-1}$

6.4 Asymptotik von Folgen und Reihen

$f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow (\exists c > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)[f(n) \leq c \cdot g(n)]$
f(n) wächst höchstens so schnell wie g(n)
$f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow (\exists c > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)[f(n) \geq c \cdot g(n)]$
f(n) wächst mindestens so schnell wie g(n)
$f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$
f(n) wächst genauso schnell wie g(n)
$f(n) \in o(g(n)) \Leftrightarrow (\forall c > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)[f(n) \leq c \cdot g(n)]$
f(n) wächst langsamer als g(n)
$f(n) \in \omega(g(n)) \Leftrightarrow (\forall c > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)[f(n) \geq c \cdot g(n)]$

f(n) wächst schneller als g(n)

$$f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow 0 \leq \lim_{n \to \infty} \sup \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$
$$f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow 0 \leq \lim_{n \to \infty} \sup \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$$
$$f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow 0 \leq \lim_{n \to \infty} \inf \frac{f(n)}{g(n)} \leq \lim_{n \to \infty} \sup \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$
$$f(n) \in o(g(n)) \Leftrightarrow \lim n \to \infty \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$
$$f(n) \in \omega(g(n)) \Leftrightarrow \lim n \to \infty \frac{g(n)}{f(n)} = 0$$

6.5 Potenzreihen

Potenzreihe: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ mit Entwicklungspunkt x_0
Absolut Konvergent falls: $|x - x_0| < R$, R ist Konvergenzradius
divergent falls $|x - x_0| > R$
Konvergiert (oder divergiert bestimmt) $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, gilt $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$
Konvergiert (oder divergiert bestimmt) $\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, gilt $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R$
Wenn $c < 0$ statt $c > 0$ dann divergiert Folge bestimmt gegen $-\infty$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ hat $R = 1$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, hat $R = 1$ konvergenz x = -1, divergenz x = 1
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, hat R = 1, konvergen |x| = 1
TAYLOR-Reihen
- $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$
- $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ für alle x zwischen -1 und 1 weil: $(\frac{1}{1-x})^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$
- $ln(1 + x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n$ für x zwischen -1 und 1

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) + (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$
$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}) x^n$$

Substitution:
BSP: $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$