BÀI TẬP TOÁN CAO CẤP 3

Bài 1: Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm số sau:

$a,\ z = x^3 e^{2y} - 3x^2y^2 + 2x - y.$

$b,\ z = x^3.y^3 + \ln\left(x^4 + y^4 + 1\right).$

$c,\ z = x^2y^2 + \ln\left(x^2 + y^2 + 2020\right).$

$d,\ z = x - \sqrt{x^2 + y^2}.$

$e,\ z = x\sin y + e^{xy}.$

$f,\ z = x^2\ln\left(y^3 + 1\right).$

$g,\ f(x, y) = e^{\sin(2x+3y)}.$

$h,\ z = \ln(xy) + xe^y.$

$i,\ f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}.$

$j,\ z = 2y + \ln(x^2 + y).$

$k,\ z = e^{x-y} + \dfrac{x^2}{y}.$

Bài 2: Tìm cực trị của các hàm số sau:

$a,\ z = 2x^4 + y^2 - xy + 1.$

$b,\ f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x - 2y.$

$c,\ f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x - 2y + 2.$

$d,\ z = x^5 + y^5 - 5xy.$

$e,\ f(x, y) = 2y^4 + 8y - x^3 + 6x^2 - 9x.$

$f,\ f(x, y) = x^2 + 2xy + \dfrac{1}{3}y^3 - 3y + 10.$

$g,\ f(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy.$

$h,\ f(x, y) = x + y - ye^x.$

$i,\ f(x, y) = (x - 2)\ln(xy).$

$j,\ f(x, y) = x^4 - 8x^2 + y^2 + 2.$

$k,\ f(x, y) = -\sqrt{x} + \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{y} + 9y + 5\ (x \geq 0,\ y \neq 0).$

Bài 3: Các bài tập về đạo hàm theo hướng và vector gradient:

a, Cho hàm số $u = x^3 - xz^2 + \ln(zy)$ và hai điểm $M_0(1, 2, 1), M_1(2, -1, 3)$.

i, Tính $\overrightarrow{grad}\, u(M_0)$.

ii, Tính $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$ biết $\vec{l}$ là vector đơn vị xác định bởi $\overrightarrow{M_0M_1}$.

b, Cho hàm số $f(x, y, z) = x^2 - \sqrt{z^2 + y^2}, M_0(1, 0, 1), M_1(1, 1, 0)$.

i, Tính $\overrightarrow{grad}\ f(M_0)$.

ii, Tính $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$ biết $\vec{l}$ là vector đơn vị xác định bởi $\overrightarrow{M_0M_1}$.

c, Cho hàm số $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \sin(xyz), M_0(1, 0, 1), M_1(1, 1, 0)$.

i, Tính $\overrightarrow{grad}\ f(M_0)$.

ii, Tính $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$ biết $\vec{l}$ là vector đơn vị xác định bởi $\overrightarrow{M_0M_1}$.

d, Cho hàm số $u = x^2 + y^2 - 2z^2 + z\ln x, M_0(1, -1, 1), M_1(2, 1, 0)$.

i, Tính $\overrightarrow{grad}\, u(M_0)$.

$ii,$ Tính $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$ biết $\vec{l}$ là vector đơn vị xác định bởi $\overrightarrow{M_0M_1}$.

$e,$ Cho hàm số $u = \sqrt{4x^2 + y^2 + 5z^2}, M_0(2, -2, 1), M_1(1, 0, -1)$.

$i,$ Tính $\overrightarrow{grad}\, u(M_0)$.

$ii,$ Tính $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$ biết $\vec{l}$ là vector đơn vị xác định bởi $\overrightarrow{M_0M_1}$.

$f,$ Cho hàm số $u = yz + x\sqrt{y+z}, M_0(2, -1, 2), M_1(2, 3, -1)$.

$i,$ Tính $\overrightarrow{grad}\, u(M_0)$.

$ii,$ Tính $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$ biết $\vec{l}$ là vector đơn vị xác định bởi $\overrightarrow{M_0M_1}$.

$g,$ Cho hàm số $f(x, y, z) = \mathrm{e}^{x^2+y^2} \sin z, M_0\left(1, 2, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

$i,$ Tính $\overrightarrow{grad}\, f(M_0)$.

$ii,$ Tính $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$ biết $\vec{l}$ là vector đơn vị xác định bởi $\overrightarrow{M_0M_1}$ với $M_1\left(0, 3, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

$h,$ Cho hàm số $u = \sqrt{2x^2 + y^2z + 4z^3}, M_0(2, 2, 1), M_1(3, 2, -1)$.

$i,$ Tính $\overrightarrow{grad}\, u(M_0)$.

$ii,$ Tính $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$ biết $\vec{l}$ là vector đơn vị xác định bởi $\overrightarrow{M_0M_1}$.

$i,$ Cho hàm số $u(x, y, z) = \sqrt{x + 2y^2 + 3z^3}, M_0(4, 1, 1), M_1(4, 2, 3)$.

$i,$ Tính $\overrightarrow{grad}\, u(M_0)$.

$ii,$ Tính $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$ biết $\vec{l}$ là vector đơn vị xác định bởi $\overrightarrow{M_0M_1}$.

$j,$ Cho hàm số $f(x, y, z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$ và điểm $A(1, 2, 3)$ và $B(-1, 1, 2)$.

$i,$ Tìm $\overrightarrow{grad}\, f(A)$.

$ii,$ Tính $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(A)$ biết $\vec{l}$ là vector đơn vị xác định bởi $\overrightarrow{AB}$.

$k,$ Cho hàm số $f(x, y, z) = x^3 - y^2 + z\sqrt{x^2 + y^2}$ và hai điểm $M_0(1, 0, 1), M_1(2, 1, 1)$.

$i,$ Tính $\overrightarrow{grad}\, f(M_0)$.

$ii,$ Tính $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$ biết $\vec{l}$ là vector đơn vị xác định bởi $\overrightarrow{M_0M_1}$.

$l,$ Cho hàm số $f(x, y, z) = z\sqrt{xy} - \dfrac{yz}{x}, M_0(1, 1, 1), M_1(2, 1, -1)$.

$i,$ Tính $\overrightarrow{grad}\, f(M_0)$.

$ii,$ Tính $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$ biết $\vec{l}$ là vector đơn vị xác định bởi $\overrightarrow{M_0M_1}$.

Bài 4: Các bài toán về tích phân bội 2:

a, Tính $I = \iint\limits_D \left(\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)$ trong đó $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big/ x^2+y^2 \le 4, y \ge 0\right\}$.

b, Tính $I = \iint\limits_D \left(\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\right)$ trong đó $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big/ x^2+y^2 \le 9, x \le 0\right\}$.

c, Tính $I = \iint\limits_D \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ trong đó D là miền giới hạn bởi $x^2+y^2 = 4, x \ge 0, y \ge x$.

d, Tính $I = \iint\limits_D \left(\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$ trong đó $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big/ x^2+y^2 \le 1, y \le x\right\}$.

e, Tính $I = \iint\limits_D \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ trong đó D là miền giới hạn bởi hai đường tròn $x^2+y^2 = \dfrac{\pi^2}{4}$ và $x^2+y^2 = \pi^2$.

f, Tính $I = \iint\limits_D \dfrac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ trong đó D là miền giới hạn bởi $x^2+y^2 = \dfrac{\pi^2}{4}$ và $y \ge 0$ và $x \ge 0$.

g, Tính $I = \iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ với miền D được xác định bởi $y \le 2x+3, y \le -x+3, y \ge 0$.

h, Tính $I = \iint\limits_D \left(2x^2+6y-15xy^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ trong đó D là tam giác ΔOAB với $O(0,0), A(1,0), B(1,2)$.

i, Tính $I = \iint\limits_D \left(xy\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ trong đó $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ x^2+y^2 \le 1,\ y > 0,\ x > 0\right\}$.

Bài 5: Các bài toán về phương trình vi phân:

a, Giải phương trình vi phân sau:
$y^{''} - 6y^{'} + 8y = \mathrm{e}^{2x}(x-1) + x^2$.

b, Giải phương trình vi phân sau: $y^{''} - 4y^{'} + 3y = x^2.\mathrm{e}^{3x}$.

c, Giải phương trình vi phân sau
i, $y^{'}(x) + 2xy(x) = 3x\mathrm{e}^{-x^2}$.
ii, $y^{''} - 4y^{'} + 3y = 2x^2$.

d, Giải phương trình vi phân sau: $y^{''} + 4y^{'} - 5y = \mathrm{e}^{x}(3x+5)$ thoả $y|_{x=0} = 4, y|_{x=-1} = 0$.

e, Giải phương trình vi phân sau: $y^{''} - 4y^{'} + 3y = \mathrm{e}^{3x}(2x+1)$ thoả điều kiện $y(0) = 1, y^{'}(0) = 2$.

f, Giải phương trình vi phân sau: $y^{''} - 3y^{'} + 2y = \mathrm{e}^{2x}(4x+1)$ thoả điều kiện $y(0) = 2, y^{'}(0) = \dfrac{1}{2}$.

g, i, Giải phương trình: $\sin^2 y\mathrm{d}x + \cos^2 x\mathrm{d}y = 0$.

ii, Giải phương trình: $y'' + 2y' - 3y = (x+1)\mathrm{e}^x$.

h, Giải phương trình vi phân sau: $y'' - 3y' + 2y = x\mathrm{e}^{2x}$.

i, Giải phương trình vi phân sau: $y'' - 4y' + 3y = 2x\mathrm{e}^{3x}$.

j, Giải phương trình vi phân $y'' - y' - 56y = 2x\mathrm{e}^{-x}$.

k, Giải phương trình vi phân sau: $y'' - 4y = x^2 + 1 + x\mathrm{e}^{2x}$.

l, i, Giải phương trình vi phân: $\sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}x = xy\,\mathrm{d}y$.

ii, Giải phương trình vi phân: $y'' - 5y' + 6y = \mathrm{e}^{2x}(x-2)$.