

Оглавление

1	Анализ типов	2
1.1	Что будет, если в нашу систему типов ввести тип <i>Bool</i> ?	2
1.1.1	Будет ли анализ более полным?	4
1.1.2	Будет ли анализ более точным?	4
1.2	Что будет, если в нашу систему типов ввести тип <i>Array</i> ?	4
1.2.1	Придумайте правила вывода для новых операторов	4
1.2.2	Попробуйте протипизировать программу	5
1.3	Дополнительные задания	5
1.4	Результат реализации TypeAnalysis в TIP	6
2	Теория решёток	8
2.1	Почему нам не подходит конкретный домен?	8
2.2	У решетки есть максимальный и минимальный элементы...	8
2.2.1	Являются ли они точной верхней или нижней гранью какого-либо подмножества S?	8
2.2.2	Уникальны ли они?	9
2.3	Произведения решёток	9
2.3.1	Как выглядит \sqcup и \sqcap для $L_1 \times L_2 \times \dots \times L_n$?	9
2.3.2	Какая высота у произведения решеток $L_1 \times L_2 \times \dots \times L_n$?	10
2.4	Точная верхняя/нижняя грань решётки отображений	10
2.5	Высота решётки отображений	10
2.6	Почему нельзя использовать унификационный решатель?	10
2.7	Результат реализации SignAnalysis в TIP	11
3	Потоковчувствительные анализы	14
3.1	Какова сложность структурного алгоритма?	14
3.2	Решите систему ограничений	15
3.3	Результат реализации Live Variables Analysis	15
3.4	Результат реализации Reaching Definitions Analysis	17

Глава 1

Анализ типов

1.1 Что будет, если в нашу систему типов ввести тип *Bool*?

Продублируем изначальные правила:

I	$[[I]] = int$
$E_1 == E_2$	$[[E_1]] == [[E_2]] \wedge [[E_1 \text{ op } E_2]] = int$
$E_1 \text{ op } E_2$	$[[E_1]] == [[E_2]] == [[E_1 \text{ op } E_2]] = int$
$input$	$[[input]] = int$
$X = E$	$[[X]] = [[E]]$
$output \ E$	$[[E]] = int$
$if(E) \{S_1\}$	$[[E]] = int$
$if(E) \{S_1\} \text{ else } \{S_2\}$	$[[E]] = int$
$while \ (E) \{S\}$	$[[E]] = int$
$f(X_1, \dots, X_n) \{...return \ E; \}$	$[[f]] = ([[X_1]], \dots, [[X_n]]) \rightarrow [[E]]$
$(E) \ (E_1, \dots, E_n)$	$[[E]] = ([[E_1]], \dots, [[E_n]]) \rightarrow [[(E)(E_1, \dots, E_n)]]$
$\&E$	$[[\&E]] = \&[[E]]$
$alloc$	$[[alloc]] = \&\alpha$
$null$	$[[null]] = \&\alpha$
$*E$	$[[E]] = \&[[*E]]$
$*X = E$	$[[X]] = \&[[E]]$

Тогда, перво-наперво введём булевый литерал в пару к I - целочисленном литералу:

$$B \Rightarrow [[B]] = \text{boolean}$$

Понятно, что возможные значения - это *True* или *False*. Следовательно меняется тип выражений в инструкциях, а также у бинарных операторов - теперь стоило бы выделить логические операторы и арифметические операторы, но т.к. в ТИР есть только два логических оператора то нет нужды выписывать какой-нибудь *logOp*.

Ещё одно следствие - мы не знаем тип *input* и *output*. Выпишем изменившиеся правила:

I	$[[I]] = \text{int}$
B	$[[B]] = \text{boolean}$
$E_1 > E_2$	$[[E_1]] == [[E_2]] = \text{int} \wedge [[E_1 > E_2]] = \text{boolean}$
$E_1 == E_2$	$[[E_1]] == [[E_2]] == [[E_1 == E_2]] = \text{boolean}$
$E_1 \text{ op } E_2$	$[[E_1]] == [[E_2]] == [[E_1 \text{ op } E_2]] = \text{int}$
input	$[[\text{input}]] = \alpha$
$X = E$	$[[X]] = [[E]]$
$\text{output } E$	$[[E]] = \alpha$
$\text{if}(E) \{S_1\}$	$[[E]] = \text{boolean}$
$\text{if}(E) \{S_1\} \text{ else } \{S_2\}$	$[[E]] = \text{boolean}$
$\text{while } (E) \{S\}$	$[[E]] = \text{boolean}$
$f(X_1, \dots, X_n) \{ \dots \text{return } E; \}$	$[[f]] = ([[X_1]], \dots, [[X_n]]) \rightarrow [[E]]$
$(E) (E_1, \dots, E_n)$	$[[E]] = ([[E_1]], \dots, [[E_n]]) \rightarrow [[(E)(E_1, \dots, E_n)]]$
$\&E$	$[[\&E]] = \&[[E]]$
alloc	$[[\text{alloc}]] = \&\alpha$
null	$[[\text{null}]] = \&\alpha$
$*E$	$[[E]] = \&[[*E]]$
$*X = E$	$[[X]] = \&[[E]]$

1.1.1 Будет ли анализ более полным?

Учитывая, что теперь в инструкциях *if* и *while* условие может быть только типа *Bool*, следовало бы что полнота анализа увеличилась, например можно было бы найти ошибки когда в этих инструкциях условие - это арифметическое выражение, однако семантика языка не совпадает с этим правилом (в обоих инструкциях можно вставить целочисленное значение как условие), поэтому полнота всё-таки упадёт.

1.1.2 Будет ли анализ более точным?

Точность не изменится. Soundness как была такая и осталась.

"...if typable, then no runtime type errors occurs..."

1.2 Что будет, если в нашу систему типов ввести тип *Array*?

По аналогии введём литерал массива, а также пустой массив:

$$\begin{aligned} \{ \} &\Rightarrow [[\{ \}]] = [\alpha] \\ \{E_1, \dots, E_n\} &\Rightarrow [[E_1]] == \dots == [[E_n]] \\ E = \{E_1, \dots, E_n\} &\Rightarrow [[E]] == [[[E_1]]] \end{aligned}$$

Все элементы массива должны иметь один тип, а вообще-то то есть это либо *int* либо *unit* (пустой массив), либо также массив, обозначим тип массива как $\langle \text{typename} \rangle$.

1.2.1 Придумайте правила вывода для новых операторов

Введём операцию взятия индекса:

$$\begin{aligned} E[E_1] &\Rightarrow [[E]] == [\alpha] \wedge [[E_1]] == \text{int} \wedge [[E[E_1]]] = \alpha \\ E[E_1] = E_2 &\Rightarrow [[E]] == [\alpha] \wedge [[E_1]] == \text{int} \wedge [[E[E_1]]] == [[E_2]] \wedge E_2 = \alpha \end{aligned}$$

Индексация происходит по числу, следовательно тип индекса - это *int*, также тип присваиваемого значения должен соответствовать типу элемента массива, говоря иначе типу выражения, которое возвращает операция взятия индекса.

1.2.2 Попробуйте протипизировать программу

Используя добавленные правила протипизируем программу:

```
main() {
  var x,y,z,t;
  x = {2,4,8,16,32,64};    [[x]] = [ [[2]] ] = [ int ]

  y = x[x[3]];              [[3]] = int ^ x = [int] => [[x[3]]] = int => [[x[x[3]]]] = int
                             => [[y]] = int

  z = {{},x};               [[{}]] = [a] ^ [[x]] = [int] => [[z]] = [ [int] ]

  t = z[1];                 [[z]] = [ [int] ] ^ [[1]] = int => [[t]] = [int]

  t[2] = y;                 [[y]] = int ^ [[2]] = int ^ [[t]] = [int] => [[t[2]]] = int
}
```

В результате получаем:

$$\begin{aligned} [[x]] &= [int] \\ [[y]] &= int \\ [[z]] &= [[int]] \\ [[t]] &= int \end{aligned}$$

1.3 Дополнительные задания

Exercise 3.9, p. 24: This exercise demonstrates the importance of the term equality axiom. First explain what the following TIP code does when it is executed:

```
var x,y;
x = alloc 1;
y = alloc (alloc 2);
x = y;
```

Then generate the type constraints for the code, and apply the unification algorithm (by hand).

Что делает этот код:

1. Объявляет две переменные X и Y
2. Аллоцирует ячейку памяти со значением 1 (X - поинтер)

3. Аллоцирует ячейку памяти со значением аллокации ячейки памяти со значением 2, иначе говоря \dot{Y} - это птр на птр со значением 2
4. X приравнивается к $\dot{Y} \rightarrow$ икс теперь хранит ссылку на п.3

Протипизируем программу:

```
var x,y;           //
x = alloc 1;       // [[x]] = [[alloc 1]]
y = alloc (alloc 2); // [[y]] = [[alloc [[alloc 2]] ]]
x = y;             // [[x]] = [[y]]
```

Получаем:

```
[[x]] = &int
[[y]] = &&int
[[x]] /= [[y]]
```

1.4 Результат реализации TypeAnalysis в TIR

Тестировал на программе:

```
g(a){
    return *a;
}

f(){
    var a;
    var b;
    a=10;
    if( a == 10 ){
        b=g(&a);
    }

    return a;
}
```

Вывод анализа:

```
[info] Inferred types:
  [a[6:9]] = int
  [b[7:9]] = int
  [g(a[1:3]){...}:1:1] = (!int) -> int
  [(*a)[2:12]] = int
  [a[1:3]] = !int
  [g(&a)[10:11]] = int
  [f(){...}:5:1] = () -> int
  [&a[10:13]] = !int
  [10[8:7]] = int
  [10[9:14]] = int
  [(a == 10)[9:10]] = int
[info] Results of types analysis of examples/locals.tip written to ./out/locals.tip__types.ttip
[success] Total time: 1 s, completed Jun 4, 2025, 11:27:06 PM
```

Рис. 1.1: Результат TypeAnalysis

Глава 2

Теория решёток

2.1 Почему нам не подходит конкретный домен?

Для начала я обратился к [1] чтобы понять вообще разницу между абстрактным и конкретным доменами (пусть и кажется оно интуитивным). Там приводится пример *complete lattice*, которую называю *concrete semantic domain*. Используется анализ множества возможных состояний программы, имея такую решётку и функции трансформации можно теоритически вывести все ‘контексты’, возможные состояния программы, однако это было бы просто невычислимо, учитывая точность такого анализа.

Если бы нам хотелось использовать конкретный домен для определения знака в выражении, тогда мы могли бы выбрать например домен целых чисел. Тогда необходимо было бы знать конкретное значение числа для переменной, что конечно делает анализ бесконечно сложным в теории.

2.2 У решетки есть максимальный и минимальный элементы...

2.2.1 Являются ли они точной верхней или нижней гранью какого-либо подмножества S?

Да! Доказать это можно через следующие определения [2]:

A *semilattice* is a partial order (X, \leq) in which every doubleton $\{x, y\}$ has a least upper bound, denoted $x \vee y$ and called the *join* of x and y . Even though the relation \leq is partial (i.e., not linear as an order), the operation \vee is total ($x \vee y$ is well-defined for all elements $x, y \in X$).

With this definition there is a dual notion, that of lower semilattice (so “semilattice” in the above means “upper semilattice”), in which every doubleton has a greatest lower bound, denoted $x \wedge y$ and called their *meet*.

Определение решётки затем складывается из нижней полурешётки и верхней полурешётки:

A *lattice* is a poset that is simultaneously an *upper semilattice* and a *lower semilattice*.

Для *upper semilattice* и *lower semilattice* определены *join* и *meet*, следовательно они присущи и решётке.

Из чего можно сделать вывод: решётка всегда имеет как точную верхнюю грань, так и точную нижнюю грань для любого конечного подмножества S , поскольку операции *join* и *meet* определены для всех пар элементов. Максимальный элемент решётки является точной верхней гранью всего множества, а минимальный — его точной нижней гранью.

2.2.2 Уникальны ли они?

Least upper bound и *greatest lower bound* решётки должны быть уникальны, но просто *upper bound* и *lower bound* для каких-либо $\{a, b\}$ не обязаны быть уникальными.

2.3 Произведения решёток

2.3.1 Как выглядит \sqcup и \sqcap для $L_1 \times L_2 \times \dots \times L_n$?

Напомню сам себе определения:

- $\sqcup L - X \subseteq \sqcup X \vee \forall y \in S : X \subseteq y \Rightarrow \sqcup X \subseteq y$
- $\sqcap L - \sqcap X \subseteq X \vee \forall y \in S : y \subseteq X \Rightarrow y \subseteq \sqcap X$

Достаточно посмотреть на получившуюся после перемножения решётку:

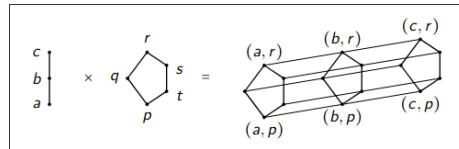


Рис. 2.1: Перемножение решёток

На ней и видно, что операции \sqcup и \sqcap определяются *покоординатно* следующим образом:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \sqcup (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 \sqcup b_1, a_2 \sqcup b_2, \dots, a_n \sqcup b_n)$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \sqcap (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 \sqcap b_1, a_2 \sqcap b_2, \dots, a_n \sqcap b_n)$$

А \top и \perp - для *product* L - кортеж из получившихся \top и \perp

2.3.2 Какая высота у произведения решеток $L_1 \times L_2 \times \dots \times L_n$?

$$height(L_1 \times \dots \times L_n) = height(L_1) + \dots + height(L_n)$$

2.4 Точная верхняя/нижняя грань решётки отображений

Пусть f — функция отображения. Тогда:

$$f_{\top}(x) = \top \forall x \in A,$$

$$f_{\perp}(x) = \perp \forall x \in A.$$

Эти отображения являются соответственно наибольшим и наименьшим элементами решётки отображений $A \rightarrow L$.

2.5 Высота решётки отображений

Высота решётки отображений $A \rightarrow L$ выражается через мощность области определения A и высоту базовой решётки L :

$$height(A \rightarrow L) = |A| \cdot height(L).$$

2.6 Почему нельзя использовать унификационный решатель?

Потому что нам интересны уравнения вида:

$$x_n \sqsubseteq f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Нам интересно чтобы результат в каждый ноде был меньше чем соотв. функция в которую мы его передали. Для такого унификационные солверы не подходят, потому что много *ambiguity*

2.7 Результат реализации SignAnalysis в TIP

Тестил над файлом:

```
fun(x) {
  var y;
  var k ;
  k = 8;
  y = 7;
  while(k > y) {
    k = k - 1;
  }
  return 0;
}
main() {
  var pos, neg, top, zero;
  var later;
  pos = 5 + 5;
  pos = 5 * 5;
  neg = -5 - 5;
  neg = -5 * 5;
  neg = 5 * -5;
  top = 5 - 5;
  top = top * 5;
  zero = top * 0;
  zero = 5 * zero;
  later = 7;
  return 0;
}
```

Вывод в виде графа:

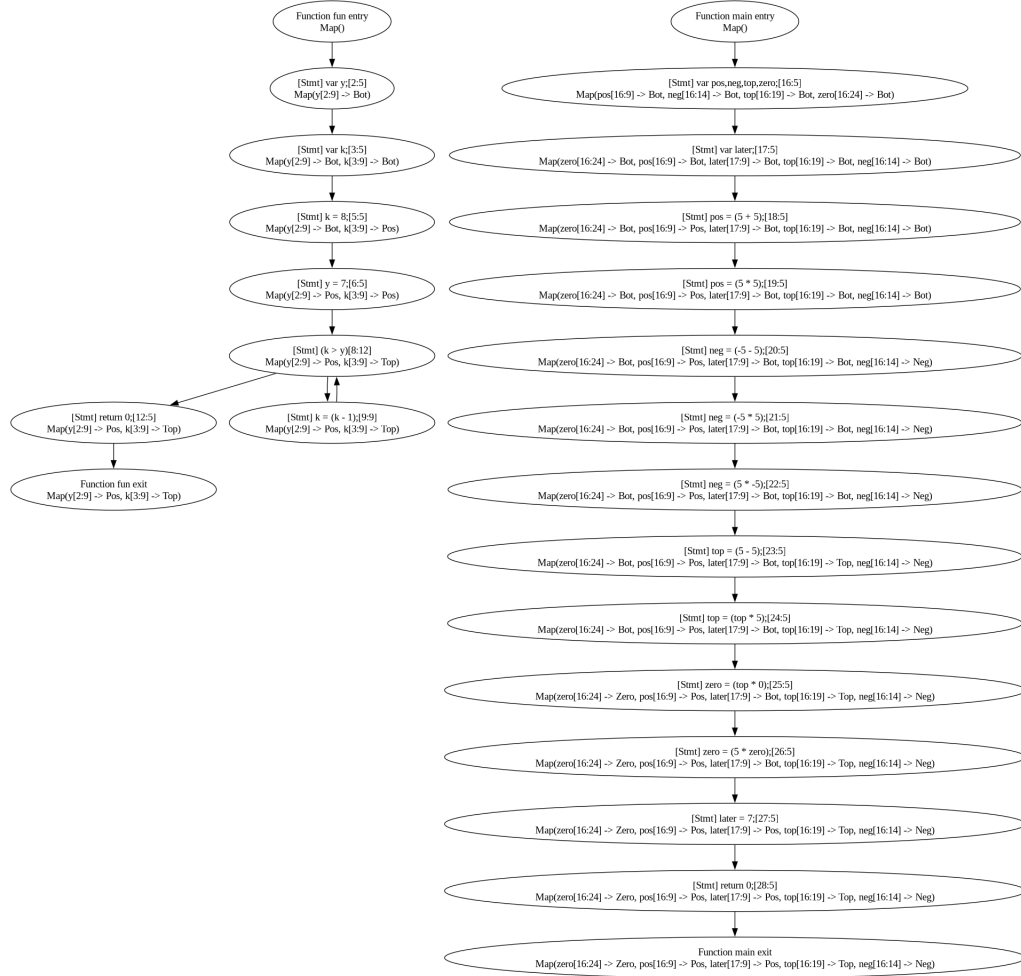


Рис. 2.2: Резултат SignAnalysis

Список литературы

- [1] Stefan Bydger. «Abstract Interpretation and Abstract Domains». B: *Department of Computer Science and Electronics Mälardalen University Västerås, Sweden* (2006).
- [2] *Lattice Theory*. URL: <http://boole.stanford.edu/cs353/handouts/book1.pdf>.

Глава 3

Потокочувствительные анализы

3.1 Какова сложность структурного алгоритма?

Пусть n — количество узлов CFG. Алгоритм последовательно обходит все узлы графа, и для каждого из них выполняет операции добавления или удаления информации о переменных. Каждая такая операция занимает время $O(k)$, где k — количество переменных в программе (или высота решётки, если говорить точнее).

При изменении состояния узла он может быть снова добавлен в *worklist* для пересчёта зависимых узлов. В худшем случае это приведёт к k проходам по всем n узлам графа — именно столько шагов нужно, чтобы достичь фикс-пойнта для всех переменных.

Таким образом, временная сложность алгоритма составляет:

$$O(n \times k^2)$$

Если в графе нет циклов (то есть, CFG ацикличен), то каждый узел обрабатывается только один раз. Это исключает повторные проходы по графу, и временная сложность снижается до:

$$O(n \times k)$$

Что касается сложности по памяти: нам нужно хранить состояние (значения переменных) для каждого узла программы. Общая память, таким образом, составляет:

$$n \times k$$

т.к. для каждого из n узлов хранится информация о k переменных.

3.2 Решите систему ограничений

Операции для *very busy analysis*:

$$[[x = E]] = \text{removere fs}(\text{JOIN}(n), x) \cup \text{exprs}(n)$$

$$[[n]] = \text{JOIN}(n) \cup \text{exprs}(n) \text{ - для любых других } n$$

$$\text{JOIN}(v) = \bigcap_{w \in \text{succ}(v)} [[w]]$$

Пример:

```
1   var x, a, b;
2   x = input;
3   a = x - 1;
4   b = x - 2;
5   while (x > 0) {
6       output a*b -x;
7       x = x - 1
8   }
9   output a*b
```

Результат:

```
1 {}
3 {x-1}
4 {x-1, x-2}
5 {x-1, x-2, x > 0}
6 {a*b-x, a*b, x-1, x-2, x > 0}
7 {a*b, x-1}
9 {a*b, x-1}
```

3.3 Результат реализации Live Variables Analysis

Тестировал на:

```
main() {
    var a,b,i;
    a = 5;
    b = 42;
    i = a;
    while (b > i) {
        // ...
        i = i + 1;
    }
    return 0;
}
```

Вывод:

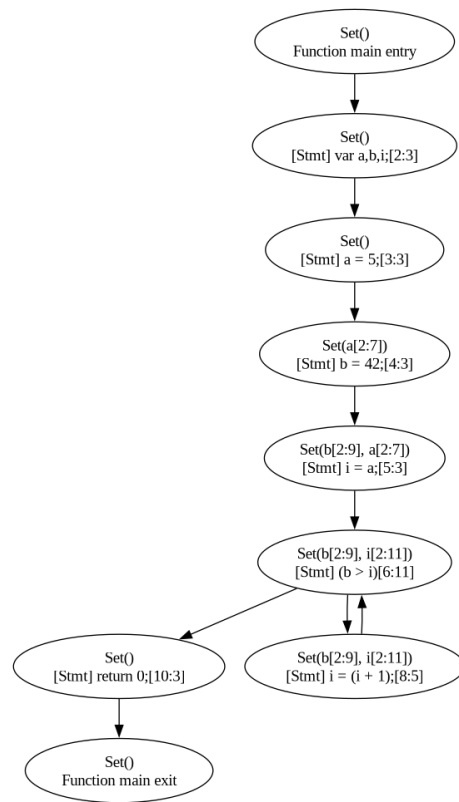


Рис. 3.1: Результат Live Vars Analysis

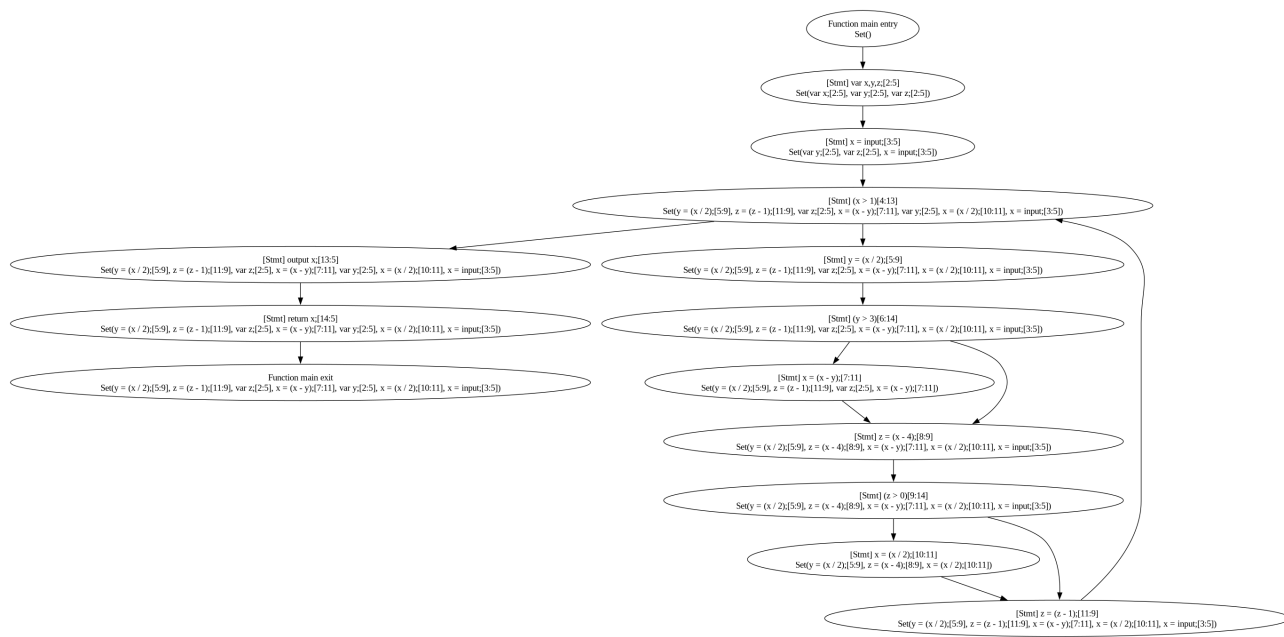


Рис. 3.2: Результат RD Analysis

3.4 Результат реализации Reaching Definitions Analysis

Тестил на программе со слайда:

```
main() {
    var x, y, z;
    x = input;
    while(x > 1) {
        y = x / 2;
        if (y > 3) x = x - y;
        z = x - 4;
        if (z > 0) x = x / 2;
        z = z - 1;
    }
    output x;
}
```

Вывод: