Sesgo en el interior del soporte

Lejos del borde, lo cual significa que $x \geq h$, no hay superoposición del los kernels que contribuyen a la estimación con el borde. Por lo tanto la expresión para la media asintótica aplica. Si suponemos que f tiene deriavas primera y segunda contínuas en todo el soporte, y que $n \to \infty$, $h = h(n) \to 0$, y $nh \to \infty$, entonces:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\Big(\frac{x - X_i}{h}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_h\Big(x - X_i)$$

Por lo tanto:

$$E(\hat{f}(x)) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_h(x-y)) = \frac{n}{n}E(K_h(x-y)) = E(K_h(x - X_i))$$

Dado que el kernel es una función de la variable aleatoria y:

$$E(K_h(x-y)) = \int K_h(x-y)f(y)dy = \int \frac{1}{h}K\left(\frac{x-y}{h}\right)f(y)dy$$

Cambio de variable: $\frac{x-y}{h} = u$

$$\int \frac{1}{h}K\left(\frac{x-y}{h}\right)f(y)dy = \int k(u)f(x-uh)du$$

Desarrollo de taylor de orden 2 en $f(x-uh)$:

$$f(x-uh) = f(x) + f^{'}(x)(x-uh-x) + f^{''}(x)\frac{(x-uh-x)^2}{2!} + O(h^2) =$$

$$= f(x) - uhf^{'}(x) + \frac{(hu)^2}{2}f^{''}(x) + O(h^2)$$

Por lo tanto:

$$\int k(u)f(x-uh)du = \int k(u)\left[f(x) - uhf^{'}(x) + \frac{(uh)^2}{2!}f^{''}(x) + O(h^2)\right]du =$$

$$= f(x)\int k(u)du - f^{'}(x)h\int uk(u)du + \frac{h^2}{2}f^{''}(x)\int u^2k(u)du + O(h^2)\int k(u)du$$

Si:
- $\int k(u)du = 1$ - $\int uk(u)du = 0$

$$= f(x) + \frac{h^2}{2}f^{''}(x)\int u^2k(u)du + O(h^2)$$

Entonces tenemos que:

$$sesgo(\hat{f}(x)) = f(x) + \frac{h^2}{2}f^{''}(x)\int u^2k(u)du + O(h^2) - f(x)$$

$$sesgo(\hat{f}(x)) = \frac{h^2}{2} f^{''}(x) \int u^2 k(u) du + O(h^2)$$

Sesgo en y cerca del borde

En y cerca del borde, el problema viene dado porque se estima masa de probabilidad fuera del mismo. Es decir se da una pérdida de masa de probabilidad.

Suponiendo (sin pérdida de generalidad) que el soporte de f es $[0, \infty)$ y tomando $x = ph$, dónde $0 < p < 1$ (observe que si $p > 1$ se está en un punto lejos del borde por lo cual se está en el interior del soporte), entonces hay que prestar atención a los límites de la integral:

$E(\hat{f}(x)) = \int\limits_{-\infty}^{p} K(z) f(x - hz) dz$

Aplicando desarrollo de taylor para $f(x - hz)$, ahora $\int\limits_{-\infty}^{p} K(z) dz \neq 1$ por lo que la $f(x)$ queda ponderada por un término $\neq 1$. No se logra entonces una estimación consistente en los puntos cerca y en el borde.

$$E(\hat{f}(x)) = f(x) \int\limits_{-\infty}^{p} k(u) du + o(1)$$

O si aplicamos desarrollo de orden 2 obtenemos la expresión presentada anteriormente:

$$E(\hat{f}(x)) = \cdots = \int\limits_{-\infty}^{p} K(u) \left[f(x) - f^{'}(x)(uh) + f^{''}(x) \frac{(uh)^2}{2!} + O(h^2) \right] du =$$

$$\approx f(x) \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{p} k(u) du}_{a_0(p)} + f^{'}(x) h \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{p} u k(u) du}_{a_1(p)} + \frac{h^2}{2} f^{''}(x) \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{p} u^2 k(u) du}_{a_2(p)}$$

Por lo tanto:

$$E(\hat{f}(x)) \approx a_0(p) f(x) - h a_1(p) f^{'}(x) + \frac{1}{2} h^2 a_2(p) f^{''}(x)$$