Universidad de la República, Facultad de Ciencias Económicas y de Administración

ECONOMETRÍA II – Curso 2016

PRÁCTICO 11
Raíces Unitarias

Planteamiento y objetivos del práctico

Las series integradas de orden uno o dos son sumamente frecuentes en economía. Como se ha visto, en el caso en que en un modelo la/s variable/s dependiente/s o los regresores sean no estacionarios, las reglas de análisis e inferencia vistas hasta el momento dejan de ser válidas. En el Tema 4 del programa se cubrieron los modelos univariantes SARIMA (prácticos 8 a 10), en los cuales la estrategia ante procesos integrados fue realizar transformaciones estacionarias para poder estimar utilizando una serie estacionaria. En el Tema 5 se cubrieron los distintos tipos de modelos dinámicos multivariantes cuando todas las series de que se dispone son estacionarias. En este capítulo se presentan las herramientas básicas de contraste para determinar si una serie es integrada, lo cual como se verá puede encerrar algunas dificultades. En el Tema 7 se concluirá con el tratamiento de los modelos multivariantes con series integradas.

La determinación del Orden de Integración de una serie se basa en definir el número de diferencias que es necesario tomar para que la serie sea estacionaria, es decir, el número de “raíces unitarias” que posee la serie original. Para ello es fundamental disponer de herramientas de contraste que permitan decir si existe o no evidencia estadística que permita rechazar la hipótesis de existencia de raíz unitaria en una determinada serie. Para ello las pruebas clásicas son los Contrastes de Dickey-Fuller, que serán el objeto central de esta práctica.

Breve ubicación teórica

Un proceso integrado es fácilmente confundible con (i) un proceso que si bien es estacionario tiene raíz cercana a uno, o (ii) con un proceso estacionario alrededor de una tendencia determinística. Distinguir entre estos distintos casos tiene sin embargo implicaciones que son fundamentales. En el caso de un proceso estocástico estacionario los estimadores MCO de los parámetros de un modelo de regresión lineal dinámico serán sesgados pero consistentes, por lo cual los estadísticos de prueba tendrán una distribución asintótica conocida (las pruebas de hipótesis sobre un parámetro utilizando el estadístico t-Student valen únicamente de forma aproximada). Sin embargo, si los procesos son integrados no se conoce la distribución ni siquiera asintótica, por lo que no es posible determinar la distribución de los estadísticos de prueba. Vale la pena tener presentes dos consecuencias de este problema:

- Cuando se estima un modelo de regresión simple y los procesos involucrados son integrados, resulta altamente probable inferir que un parámetro es distinto de cero (es decir, que existe relación entre los procesos estocásticos) cuando en realidad ello es falso. A estas regresiones se les denomina regresiones espurias.
- Si se tiene un modelo dinámico con variable dependiente retardada, la presencia de variables no estacionarias produce un sesgo de sub estimación en el coeficiente autorregresivo del modelo[1].

[1] Un resultado frecuentemente reportado en la literatura es indicativo de este sesgo hacia abajo: en una caminata aleatoria, cuando el tamaño muestral tiende a infinito, se tiene que la $\text{Prob}(\,|\hat{\rho}_1| < 1/|\rho_1| = 1)$ tiende a 0,68; esto indica que en más de dos tercios de los casos se obtendrán estimaciones menores a la unidad para un coeficiente que por construcción es igual a uno.

Dado lo anterior, y más allá de otras sofisticaciones, las pruebas de raíz unitaria se basarán en modelos del tipo $y_t = \rho y_{t-1} + u_t$, y buscarán contrastar las hipótesis:

$$\begin{cases} H0: \rho = 1 \\ H1: \rho < 1 \end{cases}$$

Dado que la verdadera forma del Proceso Generador de Información es desconocida, no se sabe si en dicho proceso existen o no elementos deterministas como una constante o una tendencia determinista, y los valores críticos adecuados son sensibles a la presencia de dichos componentes.

Contrastes de Dickey-Fuller *(versión más detallada que en la letra del práctico)*

Dickey y Fuller proponen la utilización de tres modelos distintos para realizar la prueba, partiendo de la base que son las mejores aproximaciones al proceso que genera cualquier conjunto de datos. Así, se postulan los siguientes modelos para representar el proceso estocástico:

Modelo (a) – autorregresión sin constante ni tendencia determinista

$$y_t = \rho_a y_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\Delta y_t = \gamma_a y_{t-1} + \varepsilon_t \quad con\ \gamma_a = \rho_a - 1$$

Modelo (b) – autorregresión con constante y sin tendencia determinista

$$y_t = \alpha_b + \rho_b y_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\Delta y_t = \alpha_b + \gamma_b y_{t-1} + \varepsilon_t \quad con\ \gamma_b = \rho_b - 1$$

Modelo (c) – autorregresión con constante y tendencia determinista

$$y_t = \alpha_c + \beta_c t + \rho_c y_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\Delta y_t = \alpha_c + \beta_c t + \gamma_c y_{t-1} + \varepsilon_t \quad con\ \gamma_c = \rho_c - 1$$

Las versiones del modelo tomando diferencias de la variable (Δy_t) son las más comúnmente utilizadas, y en este caso la prueba de hipótesis de que la serie tiene una raíz unitaria se convierte en:

$$\begin{cases} H0: \gamma_i = 0 \quad con\ i = a, b, c \\ H1: \gamma_i < 0 \quad con\ i = a, b, c \end{cases}$$

La selección de cuál modelo utilizar para realizar la prueba debe basarse en el análisis previo de la serie. No obstante con frecuencia se realizan las pruebas para los tres modelos o para los dos entre los cuales se puedan presentar dudas, y los resultados en estos casos debe ser analizados en su conjunto, puesto que las pruebas de raíz unitaria casi nunca arrojan resultados que puedan estar excentos de dudas, y aunque en su conjunto pueden brindar un panorama bastante concluyente suelen no dar al investigador más que eso.

Para contrastar esta hipótesis Dickey y Fuller trabajan con el estadístico *t* habitual, a veces llamado "pseudo t" (por tratarse de un proceso no estacionario), que puede expresarse como:

$$\frac{\hat{\rho}_i - \rho_i}{\hat{\sigma}_{\rho_i}} = \frac{\hat{\gamma}_i}{\hat{\sigma}_{\gamma_i}}$$

El valor de este estadístico debe compararse con las tablas de valores críticos presentadas por Dickey (1976) y Dickey y Fuller (1981) y reproducidas en los libros de texto. Debe prestarse atención a que los valores críticos son diferentes para cada uno de los tres modelos, puesto que las distribuciones son sensibles a la presencia de parámetros adicionales, y también varían según el tamaño muestral (*T*) decreciendo los valores críticos a medida que aumenta *T*, como es habitual. (Dickey y Fuller, 1979)

Generalmente se utiliza la notación original de Dickey y Fuller (1979) para designar estas pruebas como:

$$\tau = \frac{\hat{\gamma}_a}{\hat{\sigma}_{\gamma_a}}; \quad \tau_\mu = \frac{\hat{\gamma}_b}{\hat{\sigma}_{\gamma_b}}; \quad \tau_\tau = \frac{\hat{\gamma}_c}{\hat{\sigma}_{\gamma_c}}$$

En cuanto a su potencia, las pruebas de DF son significativamente más potentes que el estadístico Q de Box-Pierce sugerido por Box y Jenkins (Dickey y Fuller, 1981). Sin embargo, no puede decirse que se trate de pruebas potentes, y por ende hay que considerar que existe una probabilidad no despreciable de que la hipótesis nula de existencia de raíz unitaria no sea rechazada cuando de hecho es falsa, es decir que se identifique una raíz unitaria en un proceso que en realidad es estacionario y que probablemente posee un coeficiente autorregresivo alto. Si bien los desarrollos posteriores han incorporado innovaciones importantes para realizar el contraste, las pruebas de Dickey-Fuller siguen siendo las de aplicación más generalizada. Los problemas de potencia son especialmente graves cuando ante un proceso cuyo PGI es una caminata aleatoria sin deriva – modelo a) – se aplican las pruebas de los modelos b) o c).

En su artículo de 1981, los autores aportan varias pruebas adicionales, que permiten probar la significación conjunta de todos los coeficientes en cada modelo (pruebas tipo ϕ) o la significación de los coeficientes de las variables determinísticas condicional a que existe una raíz unitaria en el proceso (pruebas $\tau_{\alpha\mu}$, $\tau_{\beta\tau}$, $\tau_{\alpha\tau}$). Utilizando el conjunto de pruebas, podrá arribarse a una conclusión sobre si el proceso es estacionario (se rechaza $\gamma = 0$, cuando hay evidencia razonable de $\alpha = 0$ y $\beta_c = 0$ si corresponde) o estacionario alrededor de una tendencia lineal (se rechaza $\gamma = 0$, cuando hay evidencia razonable de $\alpha \neq 0$ y $\beta_c = 0$ según corresponda) o cuadrática (se rechaza $\gamma = 0$, cuando hay evidencia razonable de $\beta_c \neq 0$), o si puede sostenerse la existencia de una raíz unitaria (no se rechaza $\gamma = 0$) y por ende una tendencia estocástica. La expresión "evidencia razonable" refiere en este caso a que en la evaluación debe tenerse en cuenta muy especialmente los problemas de potencia que presentan las pruebas realizadas con modelos que incorporen inadecuadamente componentes deterministas.

El modelo y la hipótesis a los que se aplica cada uno de los estadísticos mencionados puede resumirse como se muestra en el siguiente cuadro tomado de Enders (1995) y para una muestra de *T=100*:

Modelo	**Hipótesis nula**	**Est.**	**Valores críticos T=50**		**Valores críticos T=100**		**Valores críticos asintóticos**	
			95%	**99%**	**95%**	**99%**	**95%**	**99%**
$\Delta y_t = \gamma_a y_{t-1} + \varepsilon_t$	$\gamma_a = 0$	τ	-1,95	-2.62	-1,95	-2.6	-1,95	-2.58
$\Delta y_t = \alpha_b + \gamma_b y_{t-1} + \varepsilon_t$	$\gamma_b = 0$	τ_μ	-2,93	-3,58	-2,89	-3,51	-2,86	-3,43
	$\alpha_b = \gamma_b = 0$	ϕ_1	4,86	7,06	4,71	6,7	4,59	6,43
	$\alpha_b = 0 \ \ dado \ \ \gamma_b = 0$	$\tau_{\alpha\mu}$	2,56	3,28	2,54	3,22	2,52	3,18
$\Delta y_t = \alpha_c + \beta_c t + \gamma_c y_{t-1} + \varepsilon_t$	$\gamma_c = 0$	τ_τ	-3,5	-4,15	-3,45	-4,04	-3,41	-3,96
	$\alpha_c = \beta_c = \gamma_c = 0$	ϕ_2	5,13	7,02	4,88	6,5	4,68	6,09
	$\beta_c = \gamma_c = 0$	ϕ_3	6,73	9,31	6,49	8,73	6,25	8,27
	$\beta_c = 0 \ \ dado \ \ \gamma_c = 0$	$\tau_{\beta\tau}$	2,81	3,60	2,79	3,53	2,78	3,46
	$\alpha_c = 0 \ \ dado \ \ \gamma_c = 0$	$\tau_{\alpha\tau}$	3,14	3,87	3,11	3,78	3,08	3,71

Dada la Hipótesis Alternativa planteada, todas las pruebas se realizan "a una cola". En el caso de los estadísticos τ, τ_μ y τ_τ, los valores críticos utilizados son los de la cola izquierda, mientras que para los estadísticos $\tau_{\alpha\mu}$, $\tau_{\beta\tau}$ y $\tau_{\alpha\tau}$ se presenta la cola derecha de estas distribuciones simétricas. Los valores críticos de Dickey y Fuller son obivamente más exigentes que los de las distribuciones respectivas para el caso de procesos estacionarios, que de utilizarse en el caso integrado llevarían a rechazar la hipótesis de existencia de raíz unitaria con demasiada frecuencia.

Un problema mayor de la prueba de Dickey-Fuller como fue presentada hasta aquí es que no contempla la posible existencia de estructuras autorregresivas de un orden mayor en PGI, lo cual puede suceder con frecuencia en las variables económicas. Si se intentara modelar un PGI que posee una estructura autorregresiva de orden mayor o igual a dos por medio de un modelo autorregresivo de primer orden, surgiría un problema correlación serial en el término de error, producido por la incorrecta especificación dinámica del modelo (u omisión de variables exógenas). En ese caso la estimación podría conducir a un resultado equivocado con mayor frecuencia, y las tablas no serían válidas ya que fueron construidas en base al supuesto de perturbaciones independientes.

La prueba Dickey-Fuller Aumentado (ADF, por su sigla en inglés) plantea solucionar el problema de la eventualmente incorrecta especificación dinámica incorporando a los tres modelos considerados una estructura dinámica de orden mayor que sea adecuada. En este paso surge una nueva incógnita a definir por medio del análisis de las series: el orden de la ecuación autorregresiva a considerar. Debe señalarse que la verificación de la necesidad de incorporar una dinámica más rica es hoy un paso ineludible, y generalmente muestra la necesidad de esta especificación, particularmente en el caso en que la frecuencia de los datos es mayor que anual.

Modelo (a) – autorregresión sin constante ni tendencia determinista

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \sum_{i=2}^{p} \theta_i \Delta y_{t-i+1} + \varepsilon_t$$

Modelo (b) – autorregresión con constante y sin tendencia determinista

$$\Delta y_t = \alpha + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=2}^{p} \theta_i \Delta y_{t-i+1} + \varepsilon_t$$

Modelo (c) – autorregresión con constante y tendencia determinista

$$\Delta y_t = \alpha + \beta_c t + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=2}^{p} \theta_i \Delta y_{t-i+1} + \varepsilon_t$$

En estos modelos los incrementos pasados de yt capturan la dinámica del proceso y permiten así que los errores sean i.i.d., de modo que los valores críticos presentados por Dickey y Fuller son adecuados. Los estadísticos a utilizar en la prueba ADF son los mismos que los presentados para la prueba DF, por lo que la utilización de las pruebas ADF es análoga a la descrita para DF.

EJERCICIO 1

Genere un nuevo conjunto de datos, con 300 observaciones anuales comenzando en 1713.

a) Genere una serie de 300 observaciones con nombre BLANCO cuya distribución es normal con media cero y varianza 1 (semilla 12345).
b) A partir de la serie BLANCO obtenga una serie *x* de tamaño 299 cuyo proceso es un paseo aleatorio (sin deriva), cuyo valor inicial es cero. Grafíquela y obtenga su correlograma. ¿Presenta tendencia? ¿Crecimiento sistemático? Diferencie la serie y analice su comportamiento.

c) A partir de la serie BLANCO genere una serie y de tamaño 299 cuyo proceso es un paseo aleatorio con deriva igual a 0,3, cuyo valor inicial es cero. Grafíquela y obtenga su correlograma. ¿Presenta tendencia? ¿Crecimiento sistemático? Diferencie la serie y analice su comportamiento. ¿Qué representa la deriva en la serie diferenciada?

d) Genere la siguiente serie: z=2*z(-1)-z(-2)+BLANCO, con los dos primeros valores iguales a cero. Observe la gráfica y el correlograma. Realizando contrastes de Dickey-Fuller Aumentado, analice la existencia de raíces unitarias en z (para hacer las pruebas permita que el proceso de reducción de la dinámica se inicie en 10 rezagos y analice conjuntamente las salidas de los modelos a, b, c). Repita los contrastes de Dickey-Fuller Aumentado para las primeras diferencias de la serie. ¿Es posible determinar el orden de integración sin realizar pruebas adicionales? En caso de responder negativamente, realice las pruebas necesarias para definir empíricamente el orden de integración. Muestre analíticamente que el resultado obtenido respecto al orden de integración de z es razonable.

EJERCICIO 2

Considere la serie de exportaciones anuales de derivados de petróleo de Uruguay para el período 1965-2011, disponible en el archivo *export_derivados_petroleo.xls* (Fuente INE).

Siguiendo la estrategia de "la especificación más general a la más particular" de la regresión auxiliar, determine el orden de integración de la serie en logaritmos. Realice contrastes de Dickey Fuller Aumentado siguiendo la estrategia de planteada por Dolado et al (1990) y Perron (1989) para elegir entre las tres especificaciones:

1) Se estima en primer lugar un modelo [c], es decir el menos restringido. Si se rechaza $H0)\ \gamma = 0$, se concluye que no hay raíz unitaria y se termina el proceso.
2) Si no se rechaza la $H0$) anterior, se pasa a probar la significación del componente tendencial β. Dado que en este punto se está bajo la hipótesis de que $H0$) es cierta, se usa el estadístico $\tau_{\beta\tau}$.
3) Si el término β resulta ser significativo ($\beta \neq 0$) se prueba de nuevo la presencia de una raíz unitaria vía $H0)\ \gamma = 0$, pero utilizando la tabla de una normal N(0,1). Sea cual fuera el resultado, finalizamos la prueba admitiendo o rechazando la presencia de una raíz unitaria.
4) Si el termino β no resulta ser significativo, se replantea el modelo inicialmente estimado, pasándose a un modelo [b]. Se realiza la prueba $H0)\ \gamma = 0$. Si se rechaza la $H0$) no hay raíz unitaria. Si no se rechaza la $H0$), se prueba si es necesario poner la constante μ a través del estadístico $\tau_{\alpha\mu}$. Si el término constante resulta significativo, se usa una tabla de la N(0,1) para probar la existencia de una raíz unitaria, haciendo el test sobre γ, concluyendo aquí si existe o no dicha raíz.
5) Si la constante no resulta significativa, se utiliza el modelo [a] probándose la existencia de una raíz unitaria. Aquí no se usa la N(0,1) sino el test DF.

Para realizar las pruebas se sigue el siguiente procedimiento en el Gretl:

Variable/Contraste aumentado de Dickey-Fuller:

Se seleccionan las siguientes opciones:

i. Se define en 5 el máximo de retados para el contraste ADF.
ii. "Mostrar los resultados de la regresión".
iii. "Contrastar desde el máximo orden de retardos hacia abajo".
iv. Dependiendo del caso, se incluye constante y tendencia, sólo constante o sin constante.