Vars. medidas con error

Var. depen.

[M] $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ — $u_t \sim N(0; \sigma_u^2)$

* Y_t no es observable, pero cuento con $Y_t^* = Y_t + \varepsilon_t \Rightarrow Y_t = Y_t^* - \varepsilon_t$ tal que

  i) $\varepsilon_t \sim iid(0; \sigma_\varepsilon^2)$
  ii) $cov(X_t; \varepsilon_t) = 0$
  iii) $cov(u_t; \varepsilon_t) = 0$

[ME] $Y_t^* = \alpha + \beta X_t + u_t^*$ con $u_t^* = u_t + \varepsilon_t$

* El error de medida en Y_t se acumula en la perturbación.

* Propiedades de u_t^*:

  i) $E(u_t^*) = 0$
  ii) $V(u_t^*) = \sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2$
  iii) $cov(u_t^*; u_s^*) = 0$
  iv) $u_t^* \sim N(0; \sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2)$

* Por lo tanto, puedo estimar MCO sin heteroscedasticidad.

Var. indep.

[M] $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ $\quad u_t \sim iid(0; \sigma_u^2)$

* X_t es no estocástica pero inobservable, pero cuento con $X_t^* = X_t + v_t$ con $v_t \sim iid(0; \sigma_v^2)$ tal que: $cov(u_t; v_t) = cov(u_t; v_s) = cov(u_s; v_t) = 0$

[ME] $Y_t = \alpha + \beta X_t^* + u_t^*$ $\quad u_t^* = u_t - \beta v_t$

* Propiedades de u_t^*

i) $E(u_t^*) = 0$
ii) $V(u_t^*) = \sigma_u^2 + \beta^2 \sigma_v^2$ (homocedástica)
iii) $cov(u_t^*; u_s^*) = 0$

* $cov(X_t^*; u_t^*) = -\beta \sigma_v^2$ (X_t^* es endógena)

* $cov(X_s^*; u_t^*) = 0$

* Estimación:

$$\hat{\beta}_{MCO} = \frac{\sum X^* Y}{\sum X^{*2}} = \beta + \frac{\sum X^* u^*}{\sum X^{*2}}$$

$$E(\hat{\beta}_{MCO}) = \beta + E\left(\frac{\sum X^* u^*}{\sum X^{*2}}\right) \neq \beta \quad \text{(MCO sesgado)}$$

* Props. asintóticas de β_{MCO} bajo los supuestos:

1. $\text{plim } (1/T)\, X'V = 0$
2. $\text{plim } (1/T)\, X'X = Q_{xx}$
3. $\text{plim } (1/T)\, V'V = \Omega_v$
4. $\text{plim } (1/T)\, V'U = 0$
5. $\text{plim } (1/T)\, X'U = 0$

de esta forma:

i) $\text{plim } (X^{*\prime} X^{*})(1/T) = Q_{xx} + \Omega_v$

ii) $\text{plim } \hat{\beta}_{MCO} = \beta - \dfrac{\beta\sigma_v^2}{\sigma_x^2 + \sigma_v^2} \neq \beta$ (inconsistente)

iii) $\text{Sasint}(\hat{\beta}_{MCO}) = \dfrac{\beta\sigma_v^2}{\sigma_x^2 + \sigma_v^2}$

* MCO es sesgado e inconsistente en muestras pequeñas y grandes $\Rightarrow$ se debe estimar VI.

$\boxed{\text{Vars indep y depen.}}$

[M] $\quad Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \quad$ con $\quad u_t \sim iid(0; \sigma_u^2)$

[ME] $\quad Y_t^{*} = \alpha + \beta X_t^{*} + u_t^{*} \quad$ con $\quad u_t^{*} = u_t + \varepsilon_t - \beta v_t$

tal que $\quad u_t^{*} \sim iid(0; \sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2 + \beta^2 \sigma_v^2)$

* $E(X_t^* \, ; u_t^*) = -\beta\, \sigma_v^2$
* X^* es endógena y, por tanto, se debe estimar VI