$\mathbb{X}$ Estocástica

* Si $\mathbb{X}$ es estocástica $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_{MCO} = \beta + (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\varepsilon \quad \boxed{\text{no lineal}}$$

- $E(\hat{\beta}_{MCO}) = \beta + E[(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\varepsilon]$ y no podemos conocer su sesgo sin conocer $f_{\mathbb{X}\varepsilon}$

* Si condicionamos a valores fijos de $\mathbb{X}$, entonces:

i) $E(\varepsilon|\mathbb{X}) = 0$
ii) $E(\varepsilon'\varepsilon|\mathbb{X}) = \sigma_\varepsilon^2 I_n$
iii) $\varepsilon|\mathbb{X} \sim N(0; \sigma_\varepsilon^2 I_n)$ bajo homoscedasticidad

* Por lo tanto:

i) $E(\hat{\beta}_{MCO}|\mathbb{X}) = \beta$ $\boxed{\text{insesgado}}$
ii) $V(\hat{\beta}_{MCO}|\mathbb{X}) = \sigma_\varepsilon^2(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}$ $\boxed{\text{eficiente}}$
iii) $E(\hat{\sigma}_\varepsilon^2|\mathbb{X}) = \sigma_\varepsilon^2$ $\boxed{\text{insesgado}}$
iv) $\hat{V}(\hat{\beta}_{MCO}|\mathbb{X}) = \hat{\sigma}_\varepsilon^2(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}$

* También $t \sim t_{n-k}$ y $F \sim F_{k-1; n-k}$ dado que $\hat{\beta}_{MCO}|\mathbb{X} \sim N(\beta; \sigma_\varepsilon^2(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1})$

* <u>Conclusión</u>: Gauss-Markov es válido

Independencia entre $\mathbb{X}$ y ε

* Supuestos: $\mathbb{Y} = \mathbb{X}\beta + \varepsilon$
  - $\mathbb{X}$ es estocástica
  - $\varepsilon \sim N(0; \sigma^2_\varepsilon I_n)$
  - $E(\mathbb{X}'\varepsilon) = E(\mathbb{X}')E(\varepsilon) = 0$
  - $\text{plim}\,(1/n)\mathbb{X}'\mathbb{X} = Q$
  - $\text{plim}\,(1/n)\mathbb{X}'\varepsilon = 0$
* Esto implica que:
  i) $E(\varepsilon|\mathbb{X}) = E(\varepsilon) = 0$
  ii) $E(\varepsilon'\varepsilon|\mathbb{X}) = E(\varepsilon'\varepsilon) = \sigma^2_\varepsilon I_n$
  iii) $E(\mathbb{Y}|\mathbb{X}) = \mathbb{X}\beta$
  iv) $V(\mathbb{Y}|\mathbb{X}) = \sigma^2_\varepsilon I_n$
* Esto implica que podríamos trabajar con la $\mathbb{X}$ condicionadas, y tratarlas como fijas, obteniendo todos los resultados conocidos.
* Resultados en muestras chicas sin fijar las $\mathbb{X}$:
  i) $\hat{\beta}_{MCO} = \beta + (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\varepsilon$ $\boxed{\text{no lineal en } \mathbb{X} \text{ ni } \varepsilon}$
  ii) $E(\hat{\beta}_{MCO}) = \beta$ $\boxed{\text{insesgado}}$ Asumiendo indep. entre $\mathbb{X}$ y ε
  iii) $V(\hat{\beta}_{MCO}) = \sigma^2_\varepsilon E_x[(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}]$ $\boxed{\text{mínima Var}}$
  iv) $\hat{V}(\hat{\beta}_{MCO}) = \hat{\sigma}^2_\varepsilon E_x[(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}]$

$\beta \not\sim N \Rightarrow t \not\sim t_{n-k}$ y $F \not\sim F_{k-1; n-k} \Rightarrow$ la inferencia no es válida

* En muestras grandes, si $\text{plim}\,(1/n)\,X'X = Q$

i) $\text{plim}(\hat{\beta}_{MCO}) = \beta$ $\boxed{\text{consistente}}$

ii) $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{MCO} - \beta) \overset{D}{\sim} N(0; \sigma_\varepsilon^2 Q^{-1})$

* Por tanto: $t \overset{D}{\sim} N(0;1)$ y $F \overset{D}{\sim} \chi^2_q$

* Restricciones múltiples:

$H_0)\ R\beta - r = 0$ vs. $H_1)\ R\beta - r \neq 0$

$RC = \{\text{muestras} / F > \chi^2_q(1-\alpha)\}$

$F_0 = \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}\right)\left[(R\hat{\beta}_{MCO} - r)'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\beta_{MCO} - r)\right] \overset{D}{\sim} \chi^2_q$

* Restricción simple:

$H_0)\ \beta_i = r$ vs. $H_1)\ \beta_i \neq r$

$RC = \{\text{muestras} / |t| > Z(1-\alpha/2)\}$

$t_0 = \dfrac{\hat{\beta}_{MCO} - r}{\sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{\varepsilon}}^2\, a_{ii}}} \overset{D}{\sim} N(0;1)$

Incorrelación contemp. entre X y ε

* X y ε no son indep, pero $E(X'\varepsilon) = 0$
  - Por lo tanto: $\operatorname{COV}(X; \varepsilon) = 0$
* Propiedades MCO: $\hat{\beta}_{MCO} = \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$
  - $E(\hat{\beta}_{MCO}) = E(\beta) + E((X'X)^{-1}X'\varepsilon) \neq \beta$ $\boxed{\text{sesgado}}$
  - No podemos calcular $V(\hat{\beta}_{MCO})$ dada la no linealidad
  - No conocemos la distribución en muestras pequeñas $\Rightarrow$ t y F no válidos
* En muestras grandes:
  i) $\operatorname{plim}(\hat{\beta}_{MCO}) = \beta$ $\boxed{\text{concistencia}}$
  ii) $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{MCO} - \beta) \overset{D}{\sim} N(0; \sigma^2_\varepsilon Q^{-1})$
* **Restricciones múltiples:**

$H_0)\ R\beta - r = 0$ versus $H_1)\ R\beta - r \neq 0$

$RC = \{\text{muestras} \mid F_0 > \chi^2_q(1-\alpha)\}$

$$F_0 = (1/\hat{\sigma}^2_{\hat{\varepsilon}})\left[(R\beta_{MCO} - r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\beta_{MCO} - r)\right] \overset{D}{\sim} \chi^2_q$$

* **Restricción simple:**

$H_0)\ \beta_i = r$ Vs. $H_1)\ \beta_i \neq r$

$RC = \{\text{muestras} \mid |t| > z(1-\alpha/2)\}$

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_{MCO} - r}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{\varepsilon}}\, a_{ii}}} \overset{D}{\sim} N(0;1)$$

Correlación entre X y ε

* Sea el modelo: $Y = X\beta + \varepsilon$ pero donde $cov(X_i; \varepsilon) \neq 0$

* En este modelo $\hat{\beta}_{MCO}$ no es consistente ni siquiera en muestras grandes

* Fuentes de endogeneidad:
  i) Modelos con variable endógena retardada como regresor y perturbación con autocorr.
  ii) Variable exógena medida con error.
  iii) Variable relevante omitida y esta está correlacionada con el error.
  iv) Modelos de ecuaciones simultáneas.

* Solución:
  i) Si el problema es por omisión de variable relevante ⇒ agregar variable
  ii) En otros casos ⇒ no estimar por MCO