# Inferencia II - Entrega 2

*Daniel Czarnievicz*

*September 2017*

Considere los siguientes datos

| Year | Fatal accidents | Passenger deths | Death rate | Miles flown |
|---|---|---|---|---|
| 1976 | 24 | 734 | 0,19 | 3.863,16 |
| 1977 | 25 | 516 | 0,12 | 4.300,00 |
| 1978 | 31 | 754 | 0,15 | 5.026,67 |
| 1979 | 31 | 877 | 0,16 | 5.481,25 |
| 1980 | 22 | 814 | 0,14 | 5.814,29 |
| 1981 | 21 | 362 | 0,06 | 6.033,33 |
| 1982 | 26 | 764 | 0,13 | 5.876,92 |
| 1983 | 20 | 809 | 0,13 | 6.223,08 |
| 1984 | 16 | 223 | 0,03 | 7.433,33 |
| 1985 | 22 | 1.066 | 0,15 | 7.106,67 |

El objetivo es modelar la tasa de accidentes fatales por millas voladas. Para esto consideramos el modelo

$$y_i \overset{ind}{\sim} \text{Poisson}(x_i\,\lambda)$$

donde $y_i$ es el número de accidentes fatales en cada año, $x_i$ es el total de millas voladas en cada año y $\lambda$ es la tasa sobre la que nos interesa realizar inferencia.

Sea el siguiente modelo:

$$\begin{cases} y_i \overset{ind}{\sim} \text{Poisson}(x_i\,\lambda) \\ \lambda \sim \text{Gamma}(a,b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(y_i|x_i\,\lambda) = \frac{e^{-x_i\,\lambda}\,(x_i\,\lambda)^{y_i}}{y_i!}\text{I}_{[y_i\in\mathbb{N}_0]} \\ p(\lambda) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\,\lambda^{a-1}\,e^{-b\lambda}\text{I}_{[\lambda\geq 0]} \end{cases}$$

Utilizando la regla de Bayes obtenemos que:

$$\lambda|y_i\,x_i \sim \text{Gamma}\left(a+\sum_{i=1}^{10} y_i;\; b+\sum_{i=1}^{10} x_i\right)$$

1. Calcule un intervalo de credibilidad al 95% para $\lambda$ mediante percentiles.

$$P\left(\text{Gamma}_{(\alpha/2)} < \lambda|y_i\,x_i < \text{Gamma}_{(1-\alpha/2)}\right) = 1-\alpha$$

```
a <- b <- 1
sumy <- sum(d$fatal_accidents)
sumx <- sum(d$miles_flown)
alpha <- 0.05
qgamma(c(alpha/2, 1-alpha/2), shape=a+sumy, rate=b+sumx)
```

```
Lower Bound:  0.00367

Upper Bound:  0.00473
```

2. Calcule un intervalo de credibilidad al 95% para $\lambda$ hallando la región de máxima posterior.

```
set.seed(123456789)
bounds <- round(HDInterval::hdi(rgamma(100000, shape=a+sumy, rate=b+sumx)), 5)
```

```
Lower Bound:  0.00366
 Upper Bound:  0.00472
```

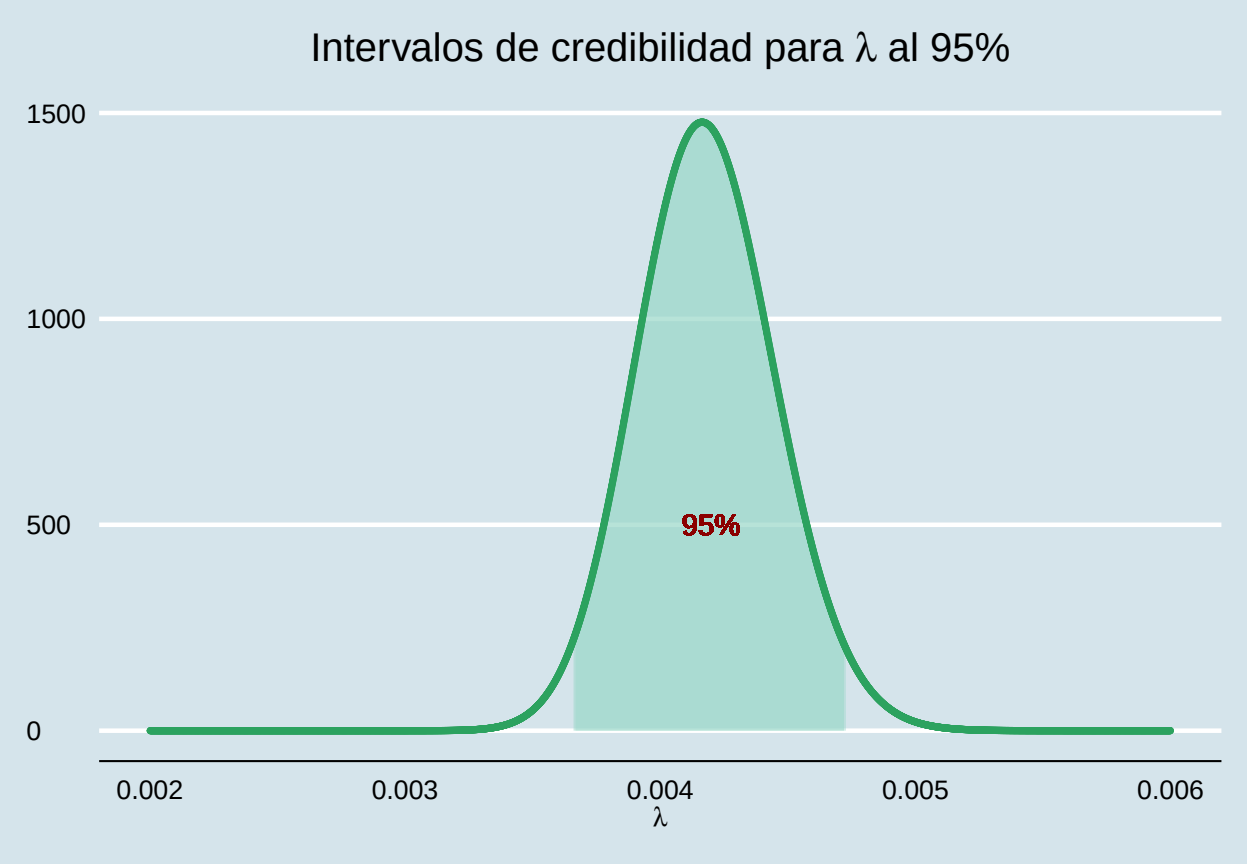



Figure 1: La diferencia entre máxima posterior y quintiles es prácticamente imperceptible debido a que la distribución es aproximadamente simétrica.

3. Calcule un intervalo de predicción al 95% para $y_{1986}|x_{1986=8000}$ (con cualquier método)

$$\star\ p(\tilde{y}\,|\,x_i) = \int_{Rec(\lambda)} p(\tilde{y};\,\lambda|\,x_i)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{Rec(\lambda)} p(\tilde{y}\,|\,x_i\,\lambda)\,p(\lambda\,|\,x_i)\,\mathrm{d}\lambda =$$

$$= \int_{Rec(\lambda)} \frac{e^{-x_i\,\lambda}\,(x_i\,\lambda)^{\tilde{y}}}{\tilde{y}!}\,\mathrm{I}_{[\tilde{y}\in\mathbb{N}_0]}\,\frac{b^a}{\Gamma(a)}\,\lambda^{a-1}\,e^{-b\,\lambda}\mathrm{I}_{[\lambda\geq 0]}\mathrm{d}\lambda =$$

$$= \frac{b^a\,x_i^{\tilde{y}}}{\Gamma(a)}\,\frac{\mathrm{I}_{[\tilde{y}\in\mathbb{N}_0]}}{\tilde{y}!}\int_0^{+\infty}\lambda^{\tilde{y}+a-1}e^{-(b+x_i)\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{b^a\,x_i^{\tilde{y}}}{\Gamma(a)}\,\frac{\mathrm{I}_{[\tilde{y}\in\mathbb{N}_0]}}{\tilde{y}!}\,\frac{\Gamma(\tilde{y}+a)}{(b+x_i)^{\tilde{y}+a}} =$$

$$= \frac{\Gamma(\tilde{y}+a)}{\tilde{y}!\,\Gamma(a)}\,\frac{b^a\,x_i^{\tilde{y}}}{(b+x_i)^{\tilde{y}+a}}\,\mathrm{I}_{[\tilde{y}\in\mathbb{N}_0]} = \frac{(\tilde{y}+a-1)!}{\tilde{y}!\,(a-1)!}\left[\frac{b}{b+x_i}\right]^a\left[\frac{x_i}{b+x_i}\right]^{\tilde{y}}\mathrm{I}_{[\tilde{y}\in\mathbb{N}_0]}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\tilde{y} \sim \text{BN}\left(a;\, \frac{b}{b+x_i}\right)}$$

$$\star\ p(\tilde{y}\,|\,y;\,x_i) = \int_{Rec(\lambda)} p(\tilde{y};\,\lambda\,|\,y;\,x_i)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{Rec(\lambda)} p(\tilde{y}\,|\,x_i\,\lambda;\,y)\,p(\lambda\,|\,x_i;\,y)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{Rec(\lambda)} p(\tilde{y}\,|\,x_i\,\lambda)\,p(\lambda\,|\,x_i;\,y)\,\mathrm{d}\lambda =$$

$$= \int_{Rec(\lambda)} \frac{e^{-x_i\,\lambda}\,(x_i\,\lambda)^{\tilde{y}}}{\tilde{y}!}\,\mathrm{I}_{[\tilde{y}\in\mathbb{N}_0]}\,\frac{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i + b\right)^{\sum_{i=1}^{n} y_i + a}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{10} y_i + a\right)}\,\lambda^{\sum_{i=1}^{10} y_i + a - 1}\,\exp\left\{-\left(\sum_{i=1}^{10} x_i + b\right)\lambda\right\}\,\mathrm{I}_{[\lambda\geq 0]}\,\mathrm{d}\lambda =$$

$$= \left[\frac{\mathrm{I}_{[\tilde{y}\in\mathbb{N}_0]}\,x_i^{\tilde{y}}}{\tilde{y}!}\right]\left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i + b\right)^{\sum_{i=1}^{10} y_i + a}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{10} y_i + a\right)}\right]\underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda^{\sum_{i=1}^{10} y_i + a + \tilde{y} - 1}\,\exp\left\{-\left(\sum_{i=1}^{10} x_i + b + x_i\right)\lambda\right\}\,\mathrm{d}\lambda}_{\text{kernel de una Gamma}\left(\sum_{i=1}^{10} y_i + a + \tilde{y};\,\sum_{i=1}^{10} x_i + b + x_i\right)} =$$

$$= \left[\frac{\mathrm{I}_{[\tilde{y}\in\mathbb{N}_0]}\,x_i^{\tilde{y}}}{\tilde{y}!}\right]\left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i + b\right)^{\sum_{i=1}^{10} y_i + a}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{10} y_i + a\right)}\right]\left[\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{10} y_i + a + \tilde{y}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i + b + x_i\right)^{\sum_{i=1}^{10} y_i + a + \tilde{y}}}\right] =$$

Asumiendo que $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{N}$:

$$= \mathrm{I}_{[\tilde{y}\in\mathbb{N}_0]}\left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{10} y_i + a + \tilde{y} - 1\right)!}{\tilde{y}!\,\left(\sum_{i=1}^{10} y_i + a - 1\right)!}\right]\left[\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i + b}{\sum_{i=1}^{10} x_i + b + x_i}\right]^{\sum_{i=1}^{10} y_i + a}\left[\frac{x_i}{\sum_{i=1}^{10} x_i + b + x_i}\right]^{\tilde{y}} =$$

$$= \mathrm{I}_{[\tilde{y}\in\mathbb{N}_0]}\binom{\sum_{i=1}^{10} y_i + a + \tilde{y} - 1}{\sum_{i=1}^{10} y_i + a - 1}\left[\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i + b}{\sum_{i=1}^{10} x_i + b + x_i}\right]^{\sum_{i=1}^{10} y_i + a}\left[\frac{x_i}{\sum_{i=1}^{10} x_i + b + x_i}\right]^{\tilde{y}}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\tilde{y}|y \sim \text{BN}\left(\sum_{i=1}^{10} y_i + a;\, \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i + b}{\sum_{i=1}^{10} x_i + b + x_i}\right)}$$

```
xi <- 8000
qnbinom(c(alpha/2, 1-alpha/2), size=sumy+a, prob=((b+sumx)/(b+sumx+xi)))
```

```
Lower Bound:  22

Upper Bound:  46
```

Considere el siguiente codigo de R. Los objetos a1 y b1 representan los parámetros en la posterior $p(\lambda|y)$

```
N <- 1e3
a1 <- "???"
b1 <- "???"

slope_fn <- Vectorize(
  function(lam, xs) {
    yrep <- rpois(length(xs), lambda=lam*xs)
    m <- lm(log(yrep) ~ xs)
    coef(m)[2]
  },
  vectorize.args = 'lam')

slp.sims <- data_frame( lambda=rgamma(N, a1, b1) ) %>%
  mutate(slp = slope_fn(lam=lambda, xs = d$miles_flown))
```

4. Describa el código anterior. ¿Qué hace la función slope_fn? (la parte de Vectorize no importa).

slope_fn toma dos vectores numéricos, lam (de largo uno) y xs. Genera el vector yrep con length(xs) simulaciones de una distribución Poisson con esperanza y varianza igual a lam*xs. Luego estima un modelo lineal con variable dependiente log(yrep) contra una constante y xs. Devuelve el valor del parámetro asociado al regresor xs. Luego Vectorize vectoriza la función sobre el conjunto de lambdas expecificado por el usuario.

5. Complete el código con los valores para a1, b1 y ejecutalo. ¿Qué queda en el objeto slp.sims?

```
N <- 1e3
a <- b <- 1
a1 <- a+sumy
b1 <- b+sumx

set.seed(1234)
slope_fn <- Vectorize(
  function(lam, xs) {
    yrep <<- rpois(length(xs), lambda = lam*xs)
    m <<- lm(log(yrep) ~ xs)
    coef(m)[2]
  },
  vectorize.args = 'lam')

slp.sims <<- data_frame(lambda=rgamma(N, shape=a1, rate=b1)) %>%
  mutate(slp=slope_fn(lam=lambda, xs=d$miles_flown))
```

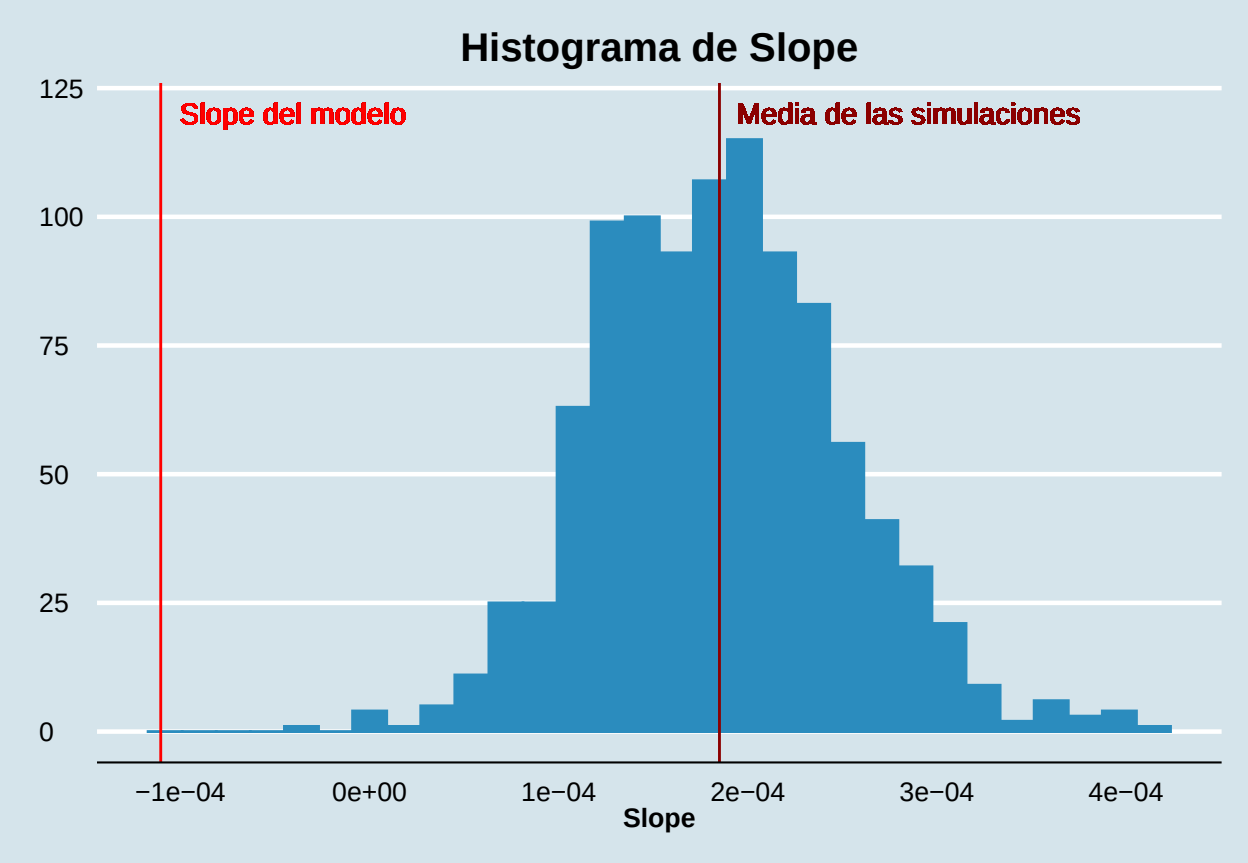
```
## Warning: `data_frame()` is deprecated, use `tibble()`.
## This warning is displayed once per session.
```

Devuelve un data.frame con 1000 filas y 2 columnas. La primera columna corresponde a los valores de lambda simulados con rgamma(N, shape=a1, rate=b1). La segunda columna contiene los valores de las pendientes calculadas mediante la función slope_fn.

| Lambda | Slope |
|---|---|
| 0,003853 | 0,000198 |
| 0,004258 | 0,000255 |
| 0,004270 | 0,000172 |
| 0,003977 | 0,000322 |
| 0,004310 | 0,000137 |
| 0,004019 | 0,000208 |
| 0,004442 | 0,000236 |

| Lambda | Slope |
|---|---|
| 0,004006 | 0,000194 |

6. Realiza un historgrama de la variable `slp` y agrega una línea vertical de color rojo con la pendiente del modelo `lm(log(fatal_accidents) ~ miles_flown, data=d)`




7. ¿Qué nos informa el dibujo sobre el modelo que estamos estimando?

Nos informa que el modelo no es adecuado para explicar los datos.