LICENCIATURA EN ESTADÍSTICA
MUESTREO Y PLANIFICACIÓN DE ENCUESTAS
PRIMER REPARTIDO

EJERCICIOS 1 – 5 Ejercicios 2.3 al 2.6 y 2.8 de C. E. Särndall, B. Swensson y J. Wretman. Model Assisted Survey Sampling. Springer-Verlag New York 1992.

EJERCICIO 6

Dada $U=\{1,2,3,4\}$, se sabe que $y_1=12, y_2=10, y_3=5, y_4=3$.

Sea $S=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\}$ con $p(s)=\frac{1}{3}\ \forall s\in S$.

Se pide:

a) Calcule π_2.
b) ¿Estamos frente a un diseño aleatorio? ¿Por qué?
c) Si $s=\{1,3\}$, ¿cuánto vale $\hat{t}_{y\pi}$ para esa muestra?
d) ¿Estamos frente a un diseño medible? ¿Por qué?

EJERCICIO 7 (Ejercicio de la Primer Revisión de 2002)

Suponga un diseño $p(s)$ de tamaño n_s aleatorio. Partiendo de $n_s=\sum_U I_k$ demostrar

$$E(n_s)=\sum_U \pi_k$$
$$V(n_s)=\sum\sum_U \pi_{kl}-\left(\sum_U \pi_k\right)^2$$

Suponiendo que el diseño es de tamaño fijo, *n*, demostrar

$$\sum_U \pi_k = n$$
$$\sum\sum_{\substack{U\\k\neq l}} \pi_{kl} = n(n-1)$$
$$\sum_{\substack{U\\k\neq l}} \pi_{kl} = \pi_k(n-1)$$
$$\sum\sum_U \Delta_{kl} = 0$$

EJERCICIO 8 (Ejercicio de la Primer Revisión de 2002)

Sean $a_1,a_2,\ldots,a_k,\ldots,a_N$ y $a_{11},a_{12},\ldots,a_{kl},\ldots,a_{NN}$ números fijos y $\frac{a_k}{\pi_k}$ y $\frac{a_{kl}}{\pi_{kl}}$ sus respectivos valores π-expandidos (con $\pi_k>0$ y $\pi_{kl}>0$). Demostrar que

$\sum_s \frac{a_k}{\pi_k}$ es insesgado para $\sum_U a_k$ y que $\sum\sum_s \frac{a_{kl}}{\pi_{kl}}$ lo es para $\sum\sum_U a_{kl}$.

Usando lo anterior demostrar que $-\frac{1}{2}\sum\sum_s \frac{\Delta_{kl}}{\pi_{kl}}\left(\frac{y_k}{\pi_k}-\frac{y_l}{\pi_l}\right)^2$ es insesgado para estimar $V\left(\hat{t}_\pi\right)$ si el diseño es de tamaño fijo.

EJERCICIO 9 (Ejercicio de la Primer Revisión de 2000)

Se desconoce el tamaño total (N) de una cierta población. Se selecciona una muestra $S=\{15, 25, 36, 49\}$ con probabilidades de inclusión $\pi_{15}=0.25$, $\pi_{25}=0.01$, $\pi_{36}=0.10$, $\pi_{49}=0.10$. Note que el tamaño de la población puede escribirse como $N=\Sigma_U 1$.

Se pide:

a) Establezca el estimador-π de N y la varianza del mismo.
b) Calcule una estimación puntual de N para el presente caso.
c) Se puede estimar la varianza del estimador-π de N con los datos proporcionados? En caso afirmativo, cuánto vale la estimación de la varianza?

EJERCICIO 10

Supongamos que los valores de una variable y en una población U son tales que se cumple $y_k = c\pi_k \quad \forall\ k \in U$ donde $c > 0$ es una constante (es decir, la probabilidad de inclusión de cada elemento es proporcional al valor de la variable y.

Se pide:

1. Plantear la forma particular del estimador π de t_y.
2. Calcule la varianza del estimador π de t_y.

EJERCICIO 11

Sea $\hat{t}_y = \sum_s \frac{y_k}{\pi_k}$ y $\hat{t}_z = \sum_s \frac{z_k}{\pi_k}$ los estimadores de $\hat{t}_y$ y $\hat{t}_z$ bajo un diseño *p(s)* medible dado.

Se pide:

1. Mostrar que $COV\left(\hat{t}_y, \hat{t}_z\right) = \sum\sum_U \Delta_{kl} \frac{y_k}{\pi_k}\frac{z_l}{\pi_l}$.
2. Demostrar que $\sum\sum_s \frac{\Delta_{kl}}{\pi_{kl}}\frac{y_k}{\pi_k}\frac{z_l}{\pi_l}$ es un estimador insesgado de $COV\left(\hat{t}_y, \hat{t}_z\right)$.