Ejercicio 1 En una población $U = \{1, 2, \ldots, k, \ldots, N\}$ se mide una variable y. De alguna manera se consigue un diseño $p(\cdot)$ de tamaño fijo n y probabilidades de inclusión tales que $y_k/\pi_k = c \ \ \forall k \in U$ y c fijo.

Con los datos proporcionados, demostrar que $V(\hat{t}_{y\pi})$=0

¿Cuánto debe valer c para que $\hat{t}_{y\pi}$ sea insesgado?

Ejercicio 2 Para una población de tamaño $N = 5$ se dispone de la variable auxiliar x que toma los valores $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 8, x_5 = 16$. Se quiere tomar una muestra s de tamaño fijo $n = 3$ bajo un diseño $\pi ps - SY$; para ello se selecciona ξ, una variable aleatoria con distribución $Unif(0, 31/3)$; se obtiene el valor 3,33.

¿Qué etiquetas forman s?

Ejercicio 3 Para $U = \{1, 2, \ldots, 6\}$ se forman al azar $n = 3$ grupos de $m = 2$ elementos cada uno. Luego, dentro de cada grupo se selecciona un elemento con probabilidad proporcional al tamaño de la variable auxiliar x, $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3; x_4 = 4; x_5 = 5; x_6 = 6$.

¿Cuánto vale la probabilidad de inclusión del elemento 3 dado que se formaron los grupos $U_1 = \{1, 6\}, U_2 = \{2, 5\}$ y $U_3 = \{3, 4\}$?

¿Cuánto vale la probabilidad de inclusión del elemento 3?

Ejercicio 4

A fin de estimar el número de osos salvajes en cierta zona de Canadá se opta por el siguiente procedimiento: en un mapa se dibujaron líneas paralelas que constituyen sectores (que llamaremos fajas) a ser sobrevolados por una avioneta desde la cual se cuentan la cantidad de osos observados. Cada faja tiene exactamente el mismo ancho pero sus largos son variables. El procedimiento de elección de fajas fue el siguiente: se seleccionaron aleatoriamente *n* puntos sobre el mapa y se incluyeron en la muestra todas las fajas que tuvieran un punto de los seleccionados. De esta manera la probabilidad de selección de una faja resulta proporcional a su longitud. Si más de un punto seleccionado pertenecía a la misma faja esta se incluye en la muestra tantas veces como puntos seleccionados tuviera. Resulta así, un muestreo del tipo *pps*. Supongamos que el área bajo estudio fue de 100 kilómetros cuadrados. Las fajas se dibujaron de 1 kilómetro de ancho y se seleccionaron *n* = 4 puntos que llevaron a 4 observaciones correspondientes a 3 fajas (dado que la faja 9 salió sorteada 2 veces).

Se pide:

1. Completar el siguiente cuadro:

Faja k	**Y_k = Nro. de osos observados**	**L_k = Longitud de la faja (kms.)**	**p_k**
9	**60**	**5**	
9	**60**	**5**	
14	**14**	**2**	
21	**1**	**1**	

2. Obtener una estimación del total de osos salvajes del área usando el estimador t_{pwr}.
3. Calcular el error estándar de la estimación.
4. Suponiendo valida la aproximación normal, calcular un intervalo de confianza estimado aproximado al 95% para el total de osos salvajes.

Ejercicio 5

Sean p_k, k = 1, 2, ..., N, las probabilidades iniciales de selección para cada elemento de la población ($\Sigma_U\ p_k = 1$). Supongamos el siguiente procedimiento de muestreo: extraemos el primer elemento de la la muestra con probabilidad p_k, luego extraemos el segundo elemento sin remplazo y con probabilidad proporcional a la probabilidad de extraerlo en la primera extracción. Sea p_{ir} la probabilidad de extraer el i-ésimo elemento en la r-ésima extracción (r =1,2).

Se pide:

1. Mostrar que la probabilidad de que el elemento i sea seleccionado en la segunda extracción dado que el elemento k ($k \neq i$) fue seleccionado en la primera extracción es: $p_i/(1-p_k)$.
2. Mostrar que: $p_{i2} = p_i\{[\Sigma_U\ (p_k/(1-p_k))] - [p_i/(1-p_i)]\}$.
3. A partir de lo anterior mostrar que, en general, $p_{i2} \neq p_i$ a menos que $p_k = 1/N\ \ \forall k \in U$.

Comentar la siguiente afirmación: “lo demostrado anteriormente es lo que hace al muestreo πps tan complejo y poco aplicable salvo cuando N es grande y los p_k relativamente pequeños”.

Ejercicio 6

Consideremos el siguiente procedimiento de muestreo (Midzuno, 1950): el primer elemento se extrae con probabilidad p_k ($p_k \neq 1/N$) y los n – 1 restantes según un diseño *SI* sobre los N – 1 elementos no seleccionados de la población.

Probar que: $E(I_k) = p_k + (1 - p_k)\left(\frac{n-1}{N-1}\right)$.