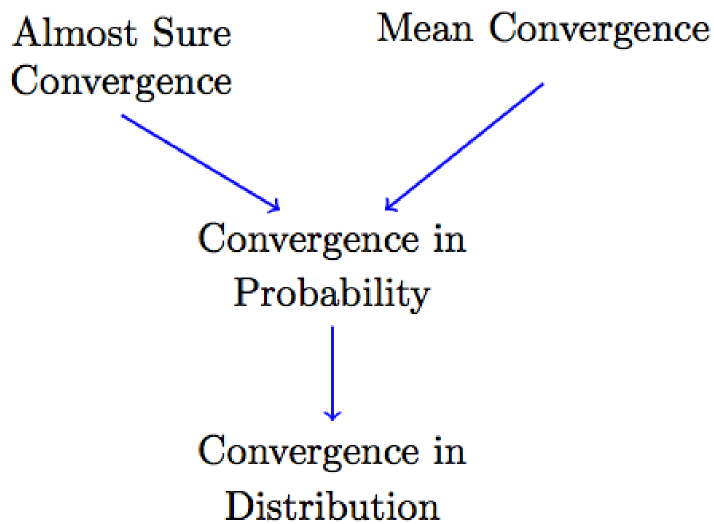
Relaciones entre conceptos de convergencia

Daniel Czarnievicz

2019

Visión global



Convergencia casi segura implica convergencia en probabilidad

Demostración

Para demostrar la implicancia utilizaremos las siguientes definiciones de convergencia casi segura y de convergencia en probabilidad respectivamente:

- $X_n \overset{cs}{\to} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ se cumple que $\Pr\left(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} \left\{ \omega \in \Omega \, : \, \Big| X_n(\omega) - X(\omega) \Big| > \varepsilon \right\} \right) \overset{k}{\to} 0$
- $X_n \overset{p}{\to} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ se cumple que $\Pr\left(\left\{ \omega \in \Omega \, : \, \Big| X_k(\omega) - X(\omega) \Big| > \varepsilon \right\} \right) \overset{k}{\to} 0$

Sean:

I. $A_n = \left\{ \omega \in \Omega \, : \, \Big| X_n(\omega) - X(\omega) \Big| > \varepsilon \right\}$

II. $A_k = \left\{ \omega \in \Omega \, : \, \Big| X_k(\omega) - X(\omega) \Big| > \varepsilon \right\}$

De esta forma, podemos rescribir las definiciones a utilizar de la siguiente forma:

- $X_n \xrightarrow{cs} X \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ se cumple que $\Pr\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \xrightarrow{k} 0$
- $X_n \xrightarrow{p} X \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ se cumple que $\Pr\left(A_k\right) \xrightarrow{k} 0$

Notemos ahora que $\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = A_k \cup A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup \ldots$. Esto implica que $A_k \subset \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$. Por lo tanto, $\Pr(A_k) \leq \Pr\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right)$. Pero $\Pr\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \xrightarrow{k} 0$ dado que $X_n \xrightarrow{cs} X$ por hipótesis. Esto implica que $\Pr(A_k)$ está acotado inferirormente por 0 (por ser una probabilidad) y superiormente por una probabilidad que converge a cero. Entonces $\Pr(A_k) \xrightarrow{k} 0$, y por lo tanto, $X_n \xrightarrow{p} X$.

Contraejemplo del recíproco

Consideremos los siguientes conjuntos: $I_n^i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, y la sucesión de variables aleatorias $X_n^i = \mathbb{I}_{\{\omega \in I_n^i\}}$ con $i = 1, 2, \ldots, n$. Es decir que nuestras variables son las indicatrices de pertenecer a los siguientes conjuntos:

$$
\begin{aligned}
&I_1^1 = [0, 1] \\
&I_2^1 = \left[0, {}^1\!/_2\right] \quad I_2^2 = \left[{}^1\!/_2, 1\right] \\
&I_3^1 = \left[0, {}^1\!/_3\right] \quad I_3^2 = \left[{}^1\!/_3, {}^2\!/_3\right] \quad I_3^3 = \left[{}^2\!/_3, 1\right] \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Luego entonces, la distribución de probabilidades de X_n viene dada por:

- $\Pr(X_n^i = 1) = \Pr(x \in \mathbb{I}_{X_n^i}) = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$
- $\Pr(X_n^i = 0) = 1 - \frac{1}{n}$

Convergencia en probabilidad

$$\forall\varepsilon > 0,\ \ \Pr\left(\left\{\omega \in \Omega : \left|X_n^i(\omega) - 0\right| > \varepsilon\right\}\right) = \Pr\left(\left\{\omega \in \Omega : X_n^i(\omega) = 1\right\}\right) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} 0$$

Convergencia casi segura

$$\forall\varepsilon > 0,\ \ \Pr\left(\left\{\omega \in \Omega : \bigcup_{n=k}^{\infty} \left|X_n^i(\omega) - 0\right| > \varepsilon\right\}\right) = \Pr\left(\left\{\omega \in \Omega : \bigcup_{n=k}^{\infty} X_n^i(\omega) = 1\right\}\right) =$$

$$= \Pr\left(x \in [0, 1]\right) = 1 \Rightarrow X_n \not\xrightarrow{cs} 0$$

Convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución

Demostración

Supongamos $x \in \mathscr{C}(F)$ y definamos las sucesiones reales $a_k = x - {}^{1}\!/_{k}$ y $b_k = x + {}^{1}\!/_{k}$. Dado que $a < x < b$, se cumple que $a_k < x < b_k$. Por otra parte, dado que $X_n \xrightarrow{p} X$:

$$F_X(a_k) \leq \liminf_n F_{X_n}(x) \leq \limsup_n F_{X_n}(x) \leq F_X(b_k)$$

Tomando límites cuando $k \to +\infty$ y teniendo en cuenta que $x \in \mathscr{C}(F)$ obtenemos que:

$$F_X(x) = \lim_k F_X(a_k) \leq \lim_k \liminf_n F_{X_n}(x) \leq \lim_k \limsup_n F_{X_n}(x) \leq \lim_k F_X(b_k) = F_X(x)$$

$$F_X(x) = \lim_k F_X(a_k) \leq \liminf_n F_{X_n}(x) \leq \limsup_n F_{X_n}(x) \leq \lim_k F_X(b_k) = F_X(x)$$

De donde podemos concluir que, dado que tanto el $\liminf$ como el $\limsup$ están acotados tanto superior como inferiormente por $F_X(x)$,

$$F_X(x) = \liminf_n F_{X_n}(x) = \limsup_n F_{X_n}(x)$$

Contraejemplo del recíproco

Sean la variable aleatorias $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ y la sucesión de variables aleatorias $X_n = (-1)^n X$. Entonces, dado que la distribución normal es simétrica, se cumple que $X_n \sim \mathrm{N}(0,1)$. Por lo tanto,

$$F_{X_n}(x) = \Phi_n(x) \xrightarrow{n} \Phi(x) = F_X(x) \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$

Por otro lado tenemos que, si n es par, entonces se cumple que $|X_n - X| = 0$ por lo tanto $P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$. Mientras que si n es impar, tenemos que $|X_n - X| = 2|X|$, por lo tanto:

$$\Pr(|X_n - X| > \varepsilon) = \Pr(2\,|X| > \varepsilon) = \Pr(|X| > \varepsilon/2) = 2\,\Phi(\varepsilon/2) > 0$$

Por lo tanto, $X_n \overset{p}{\nrightarrow} X$.

Convergencia en L^p implica convergencia en probabilidad

Demostración

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \Pr\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = \Pr\left(|X_n - X|^p > \varepsilon^p\right) \leq \frac{\mathbf{E}\left(|X_n - X|^p\right)}{\varepsilon^p} \xrightarrow{n} 0$$

donde la convergencia está dada porque $X_n \xrightarrow{L^p} X$. Dado que converge a cero, queda demostrado que $X_n \xrightarrow{p} X$.

Contraejemplo del recíproco

Sea $\Omega = [0,\, 1]$ y la siguiente sucesión de variables aleatorias:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} e^n & \text{si} \quad \omega \in \left[0,\, {}^1\!/_n\right] \\ \\ 0 & \text{si} \quad \omega \in \left({}^1\!/_n,\, 1\right] \end{cases}$$

Luego entonces:

$$\Pr\left(|X_n - 0| > \varepsilon\right) = \Pr\left(X_n > \varepsilon\right) = \Pr\left(X_n = e^n\right) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} 0$$

Mientras que:

$$\mathbf{E}\left(|X_n - 0|^p\right) = \mathbf{E}\left(|X_n|^p\right) = \mathbf{E}\left(X^p\right) = (e^n)^p \, \frac{1}{n} + 0^p \left(1 - \frac{1}{n}\right) = e^{np} \xrightarrow{n} +\infty \Rightarrow X_n \stackrel{L^p}{\not\to} 0$$