Práctico 1

Daniel Czarnievicz

2019

Ejercicio 1

Parte 1

Dado que se trata de una igualdad de conjuntos, debemos demostrar la doble inclusión.

Parte i: $\{\omega \in \Omega / \omega \in A_n \text{ para infinitos valores de } n\} \subset \limsup_n A_n$

Si ω pertenece a infinitos $A_n \Rightarrow \forall n, \exists n_0 \geq n / \omega \in A_{n_0}$. Luego si $\omega \in A_{n_0} \Rightarrow \omega \in \bigcup_{k=n_0}^{+\infty} A_k \, \forall n$ dado que $n_0 \geq n$. Por lo tanto, $\omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = \limsup_n A_n$

Parte ii: $\limsup_n A_n \subset \{\omega \in \Omega / \omega \in A_n \text{ para infinitos valores de } n\}$

Demostración por absurdo. Si ω pertenece a una cantidad finita de $A_n \Rightarrow \exists n / \forall n_1 \geq n$, $\omega \notin A_{n_1} \Rightarrow \omega \notin \bigcup_{k=n_1}^{+\infty} A_k \Rightarrow \omega \notin \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n_1}^{+\infty} A_k$

Parte 2

Dado que se trata de una igualdad de conjuntos, debemos demostrar la doble inclusión.

Parte i: $\liminf_n A_n \subset \{\omega \in \Omega / \omega \in A_n \forall n \text{ salvo, a lo sumo, una cantidad finita de índices}\}$

$\exists n / \forall n_0 \geq n$, $\omega \in A_n \Rightarrow \omega \in \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \Rightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} A_k$

Parte ii: $\{\omega \in \Omega / \omega \in A_n \forall n \text{ salvo, a lo sumo, una cantidad finita de índices}\} \subset \liminf_n A_n$

Si $\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \Rightarrow \exists n_0 / \omega \in A_k \, \forall k \geq n_0$

Parte 3

A continuación se demuestra que si ω pertenece al límite inferior, entonces debe existir un índice, n_0, a partir del cual ω pertenece a todos los A_k, dado que esa es la condición para pertenecer a la intersección de los conjuntos. Pero, en el enunciado 1 de la proposición se demostró que si ω pertenece a una cantidad infinita de índices, entonces pertenece al límite superior.

Si $\omega \in \liminf_n A_n \Rightarrow \exists n_0$ a partir del cual $\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \omega$ pertenece a una cantidad infinita de índices (todos ellos a partir de n_0) $\Rightarrow \omega \in \limsup_n A_n$

Parte 4

Veamos primero que la sucesión B_n es decreciente. La misma está defiinida de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
B_n & = & A_n & \cup & A_{n+1} & \cup & A_{n+2} & \cup & \dots \\
B_{n+1} & = & & & A_{n+1} & \cup & A_{n+2} & \cup & \dots \\
B_{n+2} & = & & & & & A_{n+2} & \cup & \dots \\
\vdots & & & & & & & &
\end{array}
$$

Dado que cada vez unimos menos conjuntos, el conjunto resultante es “más chico”, y por tanto, la sucesión es decreciente. Luego entonces,

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(\limsup_n A_n\right) &= \Pr\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) && \text{por definición de límite superior} \\
&= \Pr\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) && \text{por definición de } B_n \\
&= \lim_{n\to+\infty} \Pr(B_n) && \text{por continuidad de la probabilidad de una} \\
& && \text{sucesión decreciente (ver prop 1.8/8)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \Pr\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) && \text{por definición de } B_n
\end{aligned}
$$

Parte 5

Veamos primero que la sucesión B_n es creciente. La misma está defiinida de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lcccccccc} B_n & = & A_n & \cap & A_{n+1} & \cap & A_{n+2} & \cap & \dots \\ B_{n+1} & = & & & A_{n+1} & \cap & A_{n+2} & \cap & \dots \\ B_{n+2} & = & & & & & A_{n+2} & \cap & \dots \\ \vdots & & & & & & & & \end{array}$$

Dado que cada vez intersectamos menos conjuntos, el conjunto resultante es "más grande", y por tanto, la sucesión es creciente. Luego entonces,

$$\begin{array}{rcll} \Pr\left(\liminf_n A_n\right) & = & \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\right) & \text{por definición de límite inferior} \\ & = & \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) & \text{por definición de } B_n \\ & = & \lim_{n\to+\infty} \Pr(B_n) & \text{por continuidad de la probabilidad de una} \\ & & & \text{sucesión creciente (ver prop 1.8/7)} \\ & = & \lim_{n\to+\infty} \Pr\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\right) & \text{por definición de } B_n \end{array}$$

Parte 6

Dado que se trata de una triple igualdad entre conjuntos, debemos demostrar dos de los pares de doble inclusiones, y el tercero se cumplirá por transitividad.

Parte I: $\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$

- Parte I.i: $\liminf_n A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$

Si $\omega \in \liminf_n A_n \Rightarrow \omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n} A_k$. Pero si la sucesión es creciente, entonces tenemos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \liminf_n A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

- Parte I.ii: $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \liminf_n A_n$

Si la sucesión es creciente, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k$. Por lo tanto, $\forall \omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, tenemos que $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k = \liminf_n A_n$. Por lo tanto, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \liminf_n A_n$

Parte II: $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$

- Parte II.i: $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$

Ver parte 3 del ejercicio (no se requiere que la sucesión sea creciente).

- Parte II.ii: $\limsup_n A_n \subset \liminf_n A_n$

Si $\omega \in \limsup_n A_n$ entonces ω pertenece a infinitos A_n (ver demostración de parte 1). Pero dado que la sucesión es creciente, $\exists n_0$ tal que $\omega \in A_n \, \forall n \geq n_0$. Pero esto implica que $\omega \notin A_n$ solo para aquellos valores de $n < n_0$. Entonces ω no pertenece a una cantidad finita de índices. Por lo tanto, $\omega \in \liminf_n A_n$

De lo anterior se desprende que $\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ (parte I) y que $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$ (parte II). Por transitividad entonces $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \limsup_n A_n$, por lo que queda demostrado el teorema.

Parte 7

Dado que se trata de una triple igualdad entre conjuntos, debemos demostrar dos de los pares de doble inclusiones, y el tercero se cumplirá por transitividad.

Parte I: $\limsup_n A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

- Parte I.i: $\limsup_n A_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Si $\omega \in \limsup_n A_n \Rightarrow \omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$. Pero si la sucesión es decreciente, entonces tenemos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \limsup_n A_n \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$.

- Parte I.ii: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \limsup_n A_n$

Si la sucesión es decreciente, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$. Por lo tanto, $\forall \omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k = \limsup_n A_n$. Por lo tanto, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \limsup_n A_n$

Parte II: $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$

- Parte II.i: $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$

Ver parte 3 (no se requiere que la sucesión sea decreciente).

- Parte II.ii: $\limsup_n A_n \subset \liminf_n A_n$

Si $\omega \in \liminf_n A_n$ entonces ω pertenece a todos los A_n salvo, a lo sumo, a una cantidad finita de ellos (ver demostración de prop 1.11/2). Luego, si $\omega \in \limsup_n A_n \Rightarrow \omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$, pero si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, entonces $\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow$ por definición de intersección, $\omega \in A_n \; \forall n \Rightarrow \omega \in \liminf_n A_n$

De lo anterior se desprende que $\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ (parte I) y que $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$ (parte II). Por transitividad entonces $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \liminf_n A_n$, por lo que queda demostrado el teorema.

Parte 8

Debemos demostrar tres de las cuatro desigualdades. La última queda demostrada por transitividad.

Parte I: $\Pr\left(\liminf_n A_n\right) \leq \liminf_n \Pr(A_n)$

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(\liminf_n A_n\right) &= \Pr\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k\right) && \text{por definición de límite inferior} \\
&= \Pr\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) && \text{definiendo a } B_n = \bigcap_{k\geq n} A_k \\
&= \lim_n \Pr(B_n) && \text{por ser } B_n \text{ creciente} \\
&= \lim_n \Pr\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) && \text{por definición de } B_n \\
&= \liminf_n \Pr\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) && \text{por ser el primero el límite de una sucesión} \\
&\leq \liminf_n \Pr(A_k)\ \ \forall k \geq n && \text{por definición de intersecsión}
\end{aligned}
$$

Parte II: $\liminf_n \Pr(A_n) \leq \limsup_n \Pr(A_n)$

En este caso estamos hablando del límite inferior y del límite superior de una sucesión real, los cuales se definen como:

- $\liminf_n \Pr(A_n) = \lim_n \left[\inf_{k\geq n} \Pr(A_n)\right]$
- $\limsup_n \Pr(A_n) = \lim_n \left[\sup_{k\geq n} \Pr(A_n)\right]$

Por lo tanto, $\liminf_n \Pr(A_n) \leq \limsup_n \Pr(A_n)$

Parte III: $\limsup_n \Pr(A_n) \leq \Pr\left(\limsup_n A_n\right)$

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\limsup_n A_n\right) &= \Pr\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k\right) && \text{por definición de límite superior} \\
&= \Pr\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) && \text{definiendo a } B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k \\
&= \lim_n \Pr(B_n) && \text{por ser } B_n \text{ decreciente} \\
&= \lim_n \Pr\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) && \text{por definición de } B_n \\
&= \limsup_n \Pr\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) && \text{por ser el primero el límite de una sucesión} \\
&\geq \limsup_n \Pr(A_k)\, \forall k \geq n && \text{por definición de unión}
\end{aligned}$$

Ejercicio 2

Por el teorema del valor medio sabemos que:

$$f(\xi_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \Rightarrow f(\xi)[x_i - x_{i-1}] = F(x_i) - F(x_{i-1}) \text{ para todo } \xi \in [x_{i-1}, x_i]$$

Luego entonces,

$$\int_a^b g(x)dF(x) = \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Big[F(x_i) - F(x_{i-1})\Big] =$$

$$= \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)f(\xi_i)\Big[x_i - x_{i-1}\Big] = \int_a^b g(x)f(x)dx$$

Ejercicio 3

$$\int_a^b (\alpha g(x)+\beta h(x))dF(x) = \lim_{||P||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big(\alpha g(\xi_i)+\beta h(\xi_i)\Big)\Big[F(x_i)-F(x_{i-1})\Big] =$$

$$= \lim_{||P||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\bigg(\alpha g(\xi_i)\Big[F(x_i)-F(x_{i-1})\Big]+\beta h(\xi_i)\Big[F(x_i)-F(x_{i-1})\Big]\bigg) =$$

$$= \lim_{||P||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\alpha g(\xi_i)\Big[F(x_i)-F(x_{i-1})\Big] + \lim_{||P||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\beta h(\xi_i)\Big[F(x_i)-F(x_{i-1})\Big] =$$

$$= \alpha\lim_{||P||\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Big[F(x_i)-F(x_{i-1})\Big] + \beta\lim_{||P||\to 0}\sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\Big[F(x_i)-F(x_{i-1})\Big] =$$

$$= \alpha\int_a^b g(x)dF(x) + \beta\int_a^b h(x)dF(x) = \alpha I_g + \beta I_h = I^*$$

Ejercicio 4

Por el teorema de Weierstrass sabemos que toda función continua tiene máximo (M) y mínimo (m) en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$. Por lo tanto:

I. $I = \int_a^b gdF = \lim_{||P||\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Big(F(x_i)-F(x_{i-1})\Big) \leq \lim_{||P||\to 0}\sum_{i=1}^{n} M\Big(F(x_i)-F(x_{i-1})\Big) = M\lim_{||P||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big(F(x_i)-F(x_{i-1})\Big) = M\Big(F(b)-F(a)\Big)$

II. $I = \int_a^b gdF = \lim_{||P||\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Big(F(x_i)-F(x_{i-1})\Big) \geq \lim_{||P||\to 0}\sum_{i=1}^{n} m\Big(F(x_i)-F(x_{i-1})\Big) = m\lim_{||P||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big(F(x_i)-F(x_{i-1})\Big) = m\Big(F(b)-F(a)\Big)$

Por lo tanto, sabemos que:

$$m\Big(F(b)-F(a)\Big) \leq I \leq M\Big(F(b)-F(a)\Big) \Rightarrow m \leq \frac{1}{F(b)-F(a)}\, I \leq M$$

Luego, por el teorema de Darboux sabemos que $\exists c \in [a,b]$ tal que $g(c) = \frac{1}{F(b)-F(a)}\, I$. Por lo tanto, $I = g(c)\Big(F(b)-F(a)\Big)$.

Ejercicio 5

Sea la partición $P = \{-z = c_0; \ldots; c_n = z\}$ tal que $a \in [c_{a-1}; c_a]$, $b \in [c_{b-1}; c_b]$ y $x_i \in [c_{i-1}; c_i]$. Luego entonces,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dF(x) = \lim_{z\to+\infty} \int_{-z}^{z} \psi(x)dF(x) = \lim_{z\to+\infty} \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i)\Big[F(c_i) - F(c_{i-1})\Big] =$$

$$= \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=a}^{b} \psi(x_i)\Big[F(c_i) - F(c_{i-1})\Big] =$$

$$= \lim_{||P||\to 0} \Bigg[\underbrace{\psi(x_a)}_{\psi(a)} \underbrace{\Big[\underbrace{F(c_a)}_{F(a)} - \underbrace{F(c_{a-1})}_{F(a)}\Big]}_{=0} + \sum_{i=a+1}^{b-1} \psi(x_i)\Big[F(c_i) - F(c_{i-1})\Big] + \underbrace{\psi(x_b)}_{\psi(b)} \underbrace{\Big[\underbrace{F(c_b)}_{F(b)} - \underbrace{F(c_{b-1})}_{F(b)}\Big]}_{=0} \Bigg] =$$

$$= \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=a+1}^{b-1} \underbrace{\psi(x_i)}_{=1} \Big[F(c_i) - F(c_{i-1})\Big] = \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=a+1}^{b-1} \Big[F(c_i) - F(c_{i-1})\Big] =$$

$$= \lim_{||P||\to 0} \Big[F(c_{b-1}) - F(c_{a+1})\Big] = F(b) - F(a)$$

donde la última igualdad se debe a que $c_{b-1} \xrightarrow{||P||\to 0} b$ y $c_{a+1} \xrightarrow{||P||\to 0} a$.

Ejercicio 6

Parte a

Queremos demostrar que $\exists \int_a^c gdF$. Por el teorema 1.33 sabemos que, dadas dos particiones P y Q tales que $||P|| \leq \delta$ y $||Q|| \leq \delta$, se cumple que $\Big|S_P - S_Q\Big| < \varepsilon$.

Construyo las siguientes dos particiones:

I. $P^*[a, b]$ tal que $||P^*|| < \delta$, $P^* = P$ en el intervalo $[a, c]$.

II. $Q^*[a, b]$ tal que $||Q^*|| < \delta$, $Q^* = Q$ en el intervalo $[a, c]$.

III. En el intervalo $[c, b]$, P^* y Q^* comparten los mismos límites.

Luego entonces,

$$\Big|S_{P^*} - S_{Q^*}\Big| \;<\; \varepsilon$$

$$\Big|S_P - S_Q\Big| \;<\; \varepsilon$$

Parte b

Sean $g(x) = \mathbb{I}_{(c,\, b]}$ y $f(x) = \mathbb{I}_{[c,\, b]}$, entonces:

1. $\int\limits_a^c gdF = 0$ dado que está fuera del intervalo.

2. $\int\limits_c^b gdF = 0$ dado que F siempre vale 1.

3. $\int\limits_a^b gdF = \lim\limits_{||P|| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Big[F(c_i) - F(c_{i-1})\Big]$

Luego, sea $c \in [c_j,\, c_{j+1}]$. Si $\xi_i \in [c_j,\, c]$ entonces:

$$\lim_{||P|| \to 0} g(\xi_i)\Big[\underbrace{F(c_j)}_{=0} - \underbrace{F(c)}_{=1}\Big] = \lim_{||P|| \to 0} g(\xi_i) = 0$$

Si, en cambio, $\xi_i \in [c,\, c_{j+1}]$, entonces:

$$\lim_{||P|| \to 0} g(\xi_i)\Big[\underbrace{F(c_j)}_{=0} - \underbrace{F(c)}_{=1}\Big] = \lim_{||P|| \to 0} g(\xi_i) = 1$$

Dado que los límites por derecha e izquierda de c no coinciden, entonces no existe dicho límite, y por tanto no existe la integral.