Práctico 7

Daniel Czarnievicz

2019

Ejercicio 6

- Decimos que una transformación $T : \Omega \to \Omega$ es medible si para todo conjunto $A \in \mathcal{A}$ se cumple que $T^{-1}(A) = \Big\{ \omega \in \Omega : T(\omega) \in A \Big\} \in \mathcal{A}$. Es decir, se debe cumplir que, para todo conjunto A en la σ-álgebra, el conjunto de las preimágenes a través de la transformación, también pertenezca a la σ-álgebra.
- Decimos que una transformación T preserva la medida si para todo $A \in \mathcal{A}$ se cumple que $\Pr(A = \Pr(T^{-1}(A))$. Es decir, la medida de probabilidad (o cualquier otra medida) toma el mismo valor para el conjunto A y para el conjunto de las preimágenes de A a través de la función T.
- Decimos que un conjuto $A \in \mathcal{A}$ es invariante a la tranformración T (siendo T una transformación que preserva la medida), si se cumple que $T^{-1}(A) = A$. Es decir, todo elemento (ω) que pertenece al conjunto A, pertenece también al conjunto de preimágenes de A a través de la transformación T (y viceversa, dado que se trata de una igualdad de conjuntos).
- Decimos que una transformación T que preserva la medida es ergódico, si se cumple que todo conjunto invariante tiene medida 0 o 1.
- Decimos que una transformación T que preserva la medida es mixing, si para todo par de conjuntos A, $B \in \mathcal{A}$ se cumple que:

$$\lim_{n \to +\infty} \Pr \Big(A \cap T^{-n}(B) \Big) = \Pr(A) \Pr(B)$$

Para demostrar el teorema entonces veamos que:

$$B \text{ es invariante } \Leftrightarrow T^{-1}(B) = B \Leftrightarrow T^{-n}(B) = B \quad \forall n \geq 1$$

Luego, por la definición de transformación mixing, tenemos que:

$$\lim_{n \to +\infty} \Pr \Big(A \cap \underbrace{T^{-n}(B)}_{=B} \Big) = \lim_{n \to +\infty} \Pr(A \cap B) = \Pr(A \cap B)$$

Pero si T es mixing, entonces también debe cumplirse que:

$$\lim_{n \to +\infty} \Pr \Big(A \cap T^{-n}(B) \Big) = \Pr(A) \Pr(B)$$

Por lo tanto,

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{A}, \;\; B \text{ invariante}$$

Si elegimos $A = B$, tenemos que, para todo B invariante:

$$\Pr(B \cap B) = \Pr(B) \; \Pr(B) = \Pr^2(B)$$

Pero a su vez, $\Pr(B \cap B) = \Pr(B)$. Por lo tanto, $\Pr(B) = \Pr^2(B)$. Pero dado que la proobabilidad simpre debe tomar valores entre 0 y 1, $\Pr(B)$ solo puede ser 0 ó 1 (dado que son los únicos posibles valores que elevados al cuadrado dan como resultado ellos mismos).