Facultades de Ciencias y de Ciencias Económicas y de Administración
Licenciatura en Estadística

Probabilidad II
Primer semestre de 2018
Ejercicios sobre función característica

1.
   - Calcular la parte real e imaginaria de $\frac{1}{a+bi}$; $(a+bi)^2$
   - Probar que $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
   - Probar que $\overline{\overline{z}} = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$
   - Probar que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
   - Probar que $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

2. Calcular las funciones características para las siguientes distribuciones

   a) $X \sim Uni(-a, a)$ con $a \in \mathbf{R}^+$;

   b) $X \sim Poi(\lambda)$;

   c) $X \sim Bin(n, p)$; y

   d) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

3. Calcular la varianza de la v.a. X, con función característica $\psi(t) = (1 + \exp(3it))^2/4$.

4. Sean $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)$ funciones características y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ constantes que verifican $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, $a_i \geq 0$ para todo i. Demostrar que $\sum_{i=1}^n \psi_i(t) a_i$ es una función característica.

5. Determinar si las siguientes son funciones características

   a) $\psi(t) = \exp(itc)$, con $c \in \mathbf{R}$;

   b) $\psi(t) = \cos(t)$;

   c) $\psi(t) = \operatorname{sen}(t)$;

   d) $\psi(t) = \cos^2(t)$; y

   e) $\psi(t) = (\exp(it) + \exp(2it))^3/8$.