Teorema de Lindeberg

Supongamos que para cada $n \geq 1$ tenemos una sucesión $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ de variables independientes, tales que

$$\mathbb{E}\left(X_{nk}\right) = 0, \qquad \mathbb{E}\left(X_{nk}^2\right) = \sigma_{nk}^2 > 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} \sigma_{nk}^2 = 1,$$

denotamos

$$S_n = X_{n1} + \cdots + X_{nn} \qquad F_{nk}(x) = \mathbb{P}(X_{nk} \leq x)$$

$$\Phi(x) = \mathbb{P}\big(N(0,1) \leq x\big) \qquad \Phi_{nk}(x) = \mathbb{P}\big(N(0,\sigma_{nk}^2) \leq x\big) = \Phi(x/\sigma_{nk})$$

Teorema 1. *(**Lindeberg.**) Una condición necesaria y suficiente para que*

$$S_n \xrightarrow{d} N(0,1)$$

es

$$(\Lambda) \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\varepsilon} |x||F_{nk}(x) - \Phi_{nk}(x)|dx \to 0 \quad \textit{cuando } n \to \infty$$

Veremos únicamente que la condición (Λ) es suficiente, denotamos

$$f_{nk}(t) = \mathbb{E}\,(e^{itX_{nk}}), \qquad f_n(t) = \mathbb{E}\,(e^{itS_n}),$$
$$\varphi_{nk}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\Phi_{nk}(x), \qquad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\Phi(x).$$

Tenemos que probar que, para todo t, $f_n(t) \to \varphi(t)$ cuando $n \to \infty$. Observemos que, como las X_{ik} son independientes

$$f_n(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t),$$

por otra parte como $\sum_{k=1}^{n} \sigma_{nk}^2 = 1$, si $Z \sim N(0,1)$, $Z \stackrel{d}{=} Z_1 + \cdots + Z_n$ con $Z_i \sim N(0, \sigma_{in}^2)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, e independientes, por lo tanto

$$\varphi(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{nk}(t),$$

es decir

Propiedad

Si $|x_i| < 1$ y $|y_i| < 1$, para $i = 1, \ldots, n$ entonces

$$|\prod_{i=1}^{n} x_i - \prod_{i=1}^{n} y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$
\begin{aligned}
|f_n(t) - \varphi(t)| = &\left| \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - \prod_{k=1}^{n} \varphi_{nk}(t) \right| \\
&\text{como } |f_{nk}(t)| < 1 \text{ y } |\phi_{nk}(t)| < 1\text{, usamos la propiedad:} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |f_{nk}(t) - \varphi_{nk}(t)| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_{nk}(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\Phi_{nk}(x) \right| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d(F_{nk} - \Phi_{nk})(x) \right|
\end{aligned}
$$

Como las X_{nk} y las Z_{nk} tienen la misma esperanza y mismo segundo momento: $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, d(F_{nk} - \Phi_{nk})(x) = 0$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d(F_{nk} - \Phi_{nk})(x) = 0$ se tiene también que $\int_{-\infty}^{+\infty} itx\, d(F_{nk} - \Phi_{nk})(x) = 0$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} t^2 x^2\, d(F_{nk} - \Phi_{nk})(x) = 0$, por lo tanto se puede sumar estas expresiones sin alterar el resultado.

Entonces:

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d(F_{nk} - \Phi_{nk})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - itx + \frac{1}{2} t^2 x^2 \right) d(F_{nk} - \Phi_{nk})(x)
$$

Fórmula de integración por partes

$$
\int_{a}^{b} g dF = gF\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} F dg
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(e^{itx} - itx + \frac{1}{2}t^2x^2\Big) d(F_{nk} - \Phi_{nk})(x) &= \\
\Big(e^{itx} - itx + \frac{1}{2}t^2x^2\Big)(F_{nk}(x) - \Phi_{nk}(x))\Big|_{-\infty}^{+\infty} &- \\
\int_{-\infty}^{+\infty} (ite^{itx} - it + t^2x)\big(F_{nk}(x) - \Phi_{nk}(x)\big) dx
\end{aligned}
$$

Trabajando con el primer término:

$$
\begin{aligned}
\Big(e^{itx} - itx + \frac{1}{2}t^2x^2\Big)(F_{nk}(x) - \Phi_{nk}(x))\Big|_{-\infty}^{+\infty} &= \\
\lim_{a\to+\infty} \Big(e^{itx} - itx + \frac{1}{2}t^2x^2\Big)(F_{nk}(x) - \Phi_{nk}(x))\Big|_{x=-a}^{x=a} &= \\
\lim_{a\to+\infty} a^2(F_{nk}(a) - \Phi_{nk}(a)) - a^2(F_{nk}(-a) - \Phi_{nk}(-a)) &= \\
\lim_{a\to+\infty} a^2[F_{nk}(a) - F(-a) - 1] - \lim_{a\to+\infty} a^2[\Phi_{nk}(a) - \Phi_{nk}(-a) - 1] &= 0
\end{aligned}
$$

Lema previo

Si $\mathbb{E}\left(|X|^n\right) < \infty$, entonces $\lim_{x\to+\infty} x^n(F(x) - F(-x) - 1) = 0$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d(F_{nk} - \Phi_{nk})(x) &= \\
\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - itx + \frac{1}{2}t^2x^2) d(F_{nk} - \Phi_{nk})(x) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} (ite^{itx} - it + t^2x)\big(F_{nk}(x) - \Phi_{nk}(x)\big) dx \\
&= - it \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx)\big(F_{nk}(x) - \Phi_{nk}(x)\big) dx
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
&|f_{nk}(t)-\varphi_{nk}(t)| = \\
&\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d(F_{nk}-\Phi_{nk})(x)\right| = \left|t\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1-itx)\big(F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)\big)dx\right| \\
&\leq |t| \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{itx}-1-itx\right| |F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)|\, dx
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{itx}-1-itx\right| |F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)|\, dx = \\
&\int_{|x|\leq\varepsilon} \left|e^{itx}-1-itx\right| |F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)|\, dx + \\
&\int_{|x|>\varepsilon} \left|e^{itx}-1-itx\right| |F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)|\, dx =: I_1+I_2
\end{aligned}
$$

Lema previo

$$
\left|e^{ix}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(ix)^k}{k!}\right| \leq \frac{1}{n!}|x|^n
$$

Para acotar I_1 usamos que $|e^{itx}-1-itx| \leq \frac{1}{2}t^2|x|^2$, que se sigue del Lema y acotamos $|x|^2$ por $\varepsilon|x|$ cuando $|x|\leq\varepsilon$,

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|\leq\varepsilon} \left|e^{itx}-1-itx\right| |F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)|\, dx &\leq \frac{1}{2}t^2\int_{|x|\leq\varepsilon} |x|^2\, |F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)|\, dx \\
&\leq \frac{1}{2}|t|^2\varepsilon\int_{|x|\leq\varepsilon} |x|\, |F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)|\, dx
\end{aligned}
$$

integrando por partes

$$\int_{|x|\leq\varepsilon} |x|\,|F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} |x|\,|F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)|\,dx \leq 2\sigma_{nk}^2$$

Por tanto

$$I_1 \leq \varepsilon|t|^2\sigma_{nk}^2$$

Para acotar I_2 usamos nuevamente uno de los Lemas, acotando $|e^{itx}-1| \leq t|x|$ y $|itx| \leq |t||x|$, entonces por la desigualdad triangular $|e^{itx}-1-itx| \leq 2|t||x|$.

$$I_2 = \int_{|x|>\varepsilon} \left|e^{itx}-1-itx\right| |F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)|\,dx \leq 2|t| \int_{|x|>\varepsilon} |x|\,|F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)|\,dx$$

Volviendo a (1)

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d(F_{nk}-\Phi_{nk})(x)\right| \leq \frac{1}{2}|t|^3\varepsilon\sigma_{nk}^2 + 2|t|^2 \int_{|x|>\varepsilon} |x|\,|F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)|\,dx,$$

si sumamos en k y usamos que $\sum_{k=1}^{n}\sigma_{nk}^2 = 1$ obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d(F_{nk}-\Phi_{nk})(x)\right| \leq \frac{1}{2}|t|^3\varepsilon + 2|t|^2 \sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon} |x|\,|F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)|\,dx,$$

tomando límite en $n\to\infty$ y usando (Λ) se sigue la prueba.