Facultades de Ciencias/Ingeniería/Ciencias Económicas y de Administración
Licenciatura en Estadística

Probabilidad II
Primer semestre de 2019
Práctico 1

1. Probar que:

   1)
   $$\liminf_n \sup A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ para infinitos valores de n}\}$$
   (ocurren infinitos A_n).

   2)
   $$\liminf_n A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ para todo } n \text{ salvo a lo sumo una cantidad finita de índices}\}$$
   (ocurre A_n para todos los n salvo una cantidad finita).

   3) $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

   4) Como la sucesión $B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ es decreciente, entonces
   $$P(\limsup A_n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right).$$

   5) Como la sucesión $B_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$ es creciente, entonces
   $$P(\liminf A_n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\right).$$

   6) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, entonces
   $$\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

   7) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, entonces
   $$\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

   8)
   $$P(\liminf A_n) \le \liminf P(A_n) \le \limsup P(A_n) \le P(\limsup A_n).$$

2. Sean $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona y derivable tal que $F'(x) = f(x)$ siendo f integrable Riemann en $[a,b]$, probar que
$$\int_a^b g(x)dF(x) = \int_a^b g(x)f(x)dx.$$

3. Sean $g, h, F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que existen $\int_a^b g dF$ y $\int_a^b h dF$. Demostrar que entonces también existe $\int_a^b (\alpha g + \beta h) dF$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y además

$$\int_a^b (\alpha g + \beta h) dF = \alpha \int_a^b g dF + \beta \int_a^b h dF.$$

4. (**Teorema del valor medio.**) Sean $g, F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que g es continua, F es monótona creciente. Demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b g dF = g(c)(F(b) - F(a)$

5. Probar que si F es una función de distribución, $a < b$ son puntos de continuidad de F y

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x < a, x > b \\ 1/2, & x = a, x = b \\ 1, & a < x < b \end{cases},$$

entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dF(x) = F(b) - F(a)$

6. Demostrar la siguiente proposición y proponer un contraejemplo para justificar el que el recíproco no se cumple:

Proposición:

Si $g, F : [a, b] \to \mathbb{R}$ son tales que existe $\int_a^b g dF$ entonces para todo $c \in (a, b)$ existe $\int_a^c g dF$ y $\int_c^b g dF$ y vale

$$\int_a^b g dF = \int_a^c g dF + \int_c^b g dF$$