Facultades de Ciencias y de Ciencias Económicas y de Administración
Licenciatura en EstadÃstica

Probabilidad II
Primer semestre de 2019
Ejercicios sobre Teoremas del Límite Central y otros

1. Se lanza un dado 180 veces. Hallar un valor aproximado para la probabilidad de que salga seis menos de 25 veces.

2. (Ley Débil de los Grandes Números de A. Ya. Khinchin (1894–1959))
Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de v.a. i.i.d. con $EX_1 = \mu$. Utilizar las funciones características para probar que $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ (que equivale a probar que $\overline{X}_n \xrightarrow{d} X$ con $P(X = \mu) = 1$)

3. Estudiar la convergencia en distribución de la sucesión $\left\{Y_n = \frac{\lambda}{\sqrt{n}} Z_n - \sqrt{n}\right\}_{n\geq 1}$,
con $Z_n \sim Gamma\,(n, \lambda)$, $f_{Z_n}(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\, e^{-\lambda\, x}\, x^{n-1}\, \mathbb{I}_{[0,\,\infty)}(x)$,
   (a) a partir del cálculo de la función característica,
   (b) utilizando el Teorema del Límite Central.

4. (Aproximación normal a la distribución de Poisson)
Probar que si $Z_\lambda \sim Pois(\lambda)$ entonces $\frac{Z_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{d} Z$ ($Z \sim N(0,1)$) cuando $\lambda \to \infty$.

5. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. $N(0,1)$ independientes, y $Y_i = X_i^2$ $1 \leq i \leq n$. Entonces $\sum_{i=1}^n Y_i \sim \chi^2_n$.
   (i) Estudiar la convergencia en distribución de $\sqrt{n}(\overline{Y}_n - 1)$.
   (ii) Probar que para cada $r > 0$, $\sqrt{n}(\overline{Y}_n^r - 1) \xrightarrow{d} N(0, V^2(r))$, y hallar $V^2(r)$ como función de r.
   (iii) Probar que $\frac{\sqrt{n}(\overline{Y}_n^{1/3} - (1 - \frac{2}{9n}))}{\sqrt{2/9}} \xrightarrow{d} Z$ con $Z \sim N(0,1)$. ¿ Este resultado concuerda con lo que se ha obtenido en (ii)?

6. Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de v.a. i.i.d. con $EX_1 = 0$ y $EX_1^2 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$. Probar que $\sum_{j=1}^n X_j / \sqrt{\sum_{j=1}^n X_j^2} \xrightarrow{d} Z$, $Z \sim N(0,1)$.

7. Si $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ son variables aleatorias independientes tal que $\mathbf{E}(X_{nk}) = m_{nk}$ y $\mathrm{Var}(X_{nk}) = \sigma^2_{nk} < \infty$. Denotemos $S_n = \sum_{k=1}^n X_{nk}$ y $V_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma^2_{nk}$. Probar que la condición
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{V_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\left((X_{nk} - m_{nk})^2 \mathbb{I}_{\{|X_{nk} - m_{nk}| \geq \varepsilon V_n\}}\right) = 0 \qquad (1)$$
implica que $\frac{1}{V_n^2} \max_{i=1,\ldots,n} \sigma^2_{ni} \to 0$. Probar que esto último implica que $\max_{i=1,\ldots,n} P(|X_{nk} - m_{nk}| > \varepsilon V_n) \to 0$.

8. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes tal que para todo $n \geq 1$ $|X_n| \leq K$, donde K es una constante, supongamos que $V_n = Var(S_n) \to \infty$, probar que en este caso vale el TCL para las X_i. Sugerencia probar que vale la condición de Lindeberg.

9. (TLC $(2+\delta)$ de Alexandre M. Liapunov (1857–1918))
Supongamos que, para cada $n \geq 1$, las v.a. $X_{n\,1}, \ldots, X_{n\,n}$ son independientes, $EX_{n\,j} = 0$ y $VarX_{n\,j} = \sigma^2_{n\,j}$ $(1 \leq j \leq n)$, y que para algún $0 < \delta (\leq 1)$
$\frac{1}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}} \sum_{j=1}^{n} E|X_{n\,j}|^{2+\delta} \to 0$ cuando $n \to \infty$, donde $B_n := \sum_{j=1}^{n} \sigma^2_{n\,j}$.
Probar que $\frac{1}{\sqrt{B_n}} \sum_{j=1}^{n} X_{n\,j} \xrightarrow{d} Z$, $Z \sim N(0,1)$.
Sugerencia: tratar como caso particular del teorema de Lindeberg.

10. Sea $\{X_j\}_{j \geq 1}$ una sucesión de v.a. independientes con $EX_j = \mu_j$, $VarX_j = \sigma^2_j$, $B_n := \sum_{j=1}^{n} \sigma^2_j$ y tal que $P(a \leq X_j \leq b) = 1$ para algunas constantes finitas $a < b$.
Probar que $\frac{1}{\sqrt{B_n}} \sum_{j=1}^{n} (X_j - EX_j) \xrightarrow{d} Z$, $Z \sim N(0,1)$, si y sólo si $\sqrt{B_n} \to \infty$ cuando $n \to \infty$.
Sugerencia: para probar que $\sqrt{B_n} \to \infty$ es suficiente para $\xrightarrow{d}$ puede emplearse el teorema de Liapunov con $\delta = 1$. Parte necesaria: probar por absurdo suponiendo que $\sqrt{B_n} \to b < \infty$.

11. (Teorema del Límite de Poisson)
Supongamos que, para cada $n \geq 1$, las v.a. $X_{n\,1}, \ldots, X_{n\,n}$ son independientes, $X_{n\,j} \sim Ber(\lambda_{n\,j})$ $(1 \leq j \leq n)$, y que los parámetros cumplen las condiciones $\lambda_n := \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n\,j} \to \lambda$ y $\sum_{j=1}^{n} \lambda^2_{n\,j} \to 0$.
Probar que $T_n := X_{n\,1} + \cdots + X_{n\,n} \xrightarrow{d} Pois(\lambda)$ cuando $n \to \infty$.
Sugerencia: emplear funciones características y el resultado siguiente: si para cada $n \geq 1$ los números complejos $z_{n\,1}, \ldots, z_{n\,n}$ cumplen las condiciones

(i) $\sum_{j=1}^{n} z_{n\,j} \to z$ cuando $n \to \infty$;
(ii) $\delta_n := \max_{1 \leq j \leq n} |z_{n\,j}| \to 0$;
(iii) $\delta_n \sum_{j=1}^{n} |z_{n\,j}| \to 0$,

entonces $\prod_{j=1}^{n} (1 + z_{n\,j}) \to e^z$ cuando $n \to \infty$.

12. Supongamos que se cumplen las hipótesis del Teorema del Límite de Poisson. Probar que $M_n := \max_{1 \leq j \leq n} |X_{n\,j}| \xrightarrow{d} Ber(1 - e^{-\lambda})$.

13. (Método delta)
Probar que si $\{Y_n\}_{n \in N}$ es una sucesión de variables aleatorias que cumplen que $\sqrt{n}(Y_n - \mu) \xrightarrow{d} V \sim N(0, \sigma^2)$, con $\mu \in \mathbb{R}$ y f es una función derivable en μ con derivada continua en un entorno de μ, entonces $\sqrt{n}(f(Y_n) - f(\mu)) \xrightarrow{d} W \sim N(0, \sigma^2 f'(\mu)^2)$.
Sugerencia: hacer un desarrollo de Taylor de f en un entorno de μ y usar el Lema de Slutsky.

14. a) Demostrar que si $E(|X|^n) < \infty$, entonces:

$$E(|X|^n) = n \int_0^\infty x^{n-1}(1 - F(x) + F(-x))dx.$$

Sugerencia: utilizar el método de integración por partes y el **Lema 3.16** de las notas.

b) Utilizar la parte anterior para demostrar la desigualdad que aparece en el **Teorema 3.14 (C.N. y S. de Lindeberg)** de las notas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x||F_{nk}(x) - \Phi_{nk}(x)|dx \leq 2\sigma^2_{nk}$$