Facultades de Ciencias y de Ciencias Económicas y de Administración
Licenciatura en EstadÃstica

Probabilidad II
Primer semestre de 2019
Ejercicios sobre Sucesiones Estacionarias y Teoría Ergódica

1. Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ un conjunto finito y equiprobable ($P(\omega_i) = 1/n, \forall i = 1, 2, ..., n$), con $n \geq 2$. Se define $T(\omega_i) = \omega_{i+1}, \forall i = 1, 2, ..., n-1$ y $T(\omega_n) = \omega_1$. Probar que la transformación T preserva la medida.

2. Sea $\Omega = [0, 1)$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1))$ y P la probabilidad de la distribución $U(0, 1)$. Dado un número fijo $a \in [0, 1)$, se define $T(x) = x + a$ módulo 1 (o lo que es lo mismo, parte decimal de $x + a$). Demostrar que T es una transformación que preserva la medida.

3. En el mismo espacio de probabilidad del ejercicio anterior, estudiar si $T(x) = 2x$ módulo 1 preserva la medida.

4. Dada una v.a. X discreta en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y una función $T : \Omega \to \Omega$ que preserva la medida. Probar que si existe $E(X)$, entonces $E(X) = E(X(T))$.

5. Sea una v.a. X no negativa (esto es, $P(X \geq 0) = 1$). Probar que existe $D \subset A = \{\omega; X(\omega) > 0\}$ con $P(D) = P(A)$, tal que para todo $\omega \in D$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} X(T^k(\omega)) = \infty$$

6. Demostrar que toda transformación mixing es ergódica.