Capítulo 4 - Sucesiones estacionarias y teoría ergódica

Daniel Czarnievicz

2019

Sucesiones estacionarias (en sentido estricto) de variables aleatorias

Operador shift

Sea $X = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias en el espacio de probabilidad $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \text{Pr})$. Dado $k > 0$ se define el *operador shift* entre sucesiones, θ_k, tal que:

$$X\,\theta_k = \{X_n\}_{n>k} = \{X_{k+1},\, X_{k+2}, \ldots\}$$

Definición 4.1: Sucesión estadicionaria (en sentido estricto)

Una sucesión de variables aleatorias X es estacionaria si la distribución de probabilidad de X es igual a la de $X\,\theta_k$, para todo $k \geq 1$. Es decir,

$$\text{Pr}\Big((X_1,\, X_2, \ldots) \in B\Big) = \text{Pr}\Big((X_{k+1},\, X_{k+2}, \ldots) \in B\Big) \;\; \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$$

Definición 4.2: Función medible

Una función $T : \Omega \to \Omega$ es medible si para todo $A \in \mathcal{A}$ se cumple que:

$$T^{-1}(A) = \Big\{\omega \in \Omega : T(\omega) \in A\Big\} \in \mathcal{A}$$

Preservación de la medida

Una función medible preserva la medida si para todo $A \in \mathcal{A}$ se cumple que

$$\text{Pr}(A) = \text{Pr}(T^{-1}(A))$$

Proposición 4.4

Sean T una función que preserva la medida y X_1 una variable aleatoria. Si definimos la variable X_k tal que $X_k(\omega) = X_1\Big(T^{k-1}(\omega)\Big)$, entonces la sucesión $X = \Big\{X_1,\, X_2,\, \ldots\Big\}$ es estacionaria.

Proposición 4.5

Dada una sucesión estacionaria $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida en $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mathrm{Pr})$, podemeos construir un nuevo espacio de probabilidad $(\tilde{\Omega},\, \tilde{\mathcal{A}},\, \tilde{\mathrm{Pr}})$, una variable aletoria $\tilde{X}_1$ y una transformación $\tilde{T}$ que preserva la medida, tales que la distribución de $\tilde{X} = \left\{\tilde{X}_1,\, \tilde{X}_1(\tilde{T}),\, \tilde{X}_1(\tilde{T}^2),\, \ldots\right\}$ es igual a la de X.

Teorema 4.6

Sean $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mathrm{Pr})$ un espacio de probabilidad y T una función que preserva la medida. Dado $A \in \mathcal{A}$, existe $D \subset A$ tal que $\mathrm{Pr}(D) = \mathrm{Pr}(A)$ y para todo $\omega \in D$ se cumple que $T^n(\omega) \in A$ para infinitos n.

Corolario 4.7

Sea X una variable aleatoria no negativa. Existe un conjunto $D \subset \left\{\omega : X(\omega) > 0\right\}$ con $\mathrm{Pr}(D) = \mathrm{Pr}\left(\left\{\omega : X(\omega) > 0\right\}\right)$ tal que para todo $\omega \in D$ se cumple que:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} X\Big(T^k(\omega)\Big) = \infty$$

Ergodicidad y mixing

Definición 4.8: Invarianza

Sean $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mathrm{Pr})$ un espacio de probabilidad y T una transformación que preserva la medida.

1. Un conjunto $A \in \mathcal{A}$ es invariante si $T^{-1}(A) = A$.
2. T es ergódica si todo conjunto invariante tienen medida 0 o 1.
3. Una variable aleatoria X es invariante si $X(\omega) = X\Big(T(\omega)\Big)$ para todo $\omega \in \Omega$.

Definición 4.9: Mixing

Una función T que preserva la medida es mixing si para todo $A,\, B \in \mathcal{A}$ se cumple que:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Pr}\left(A \cap T^{-n}(B)\right) = \mathrm{Pr}(A)\, \mathrm{Pr}(B)$$

Deifnición 4.10: α-mixing

Sea $X = X_1,\, X_2\, \ldots$ una sucesión estacionaria. Denotamos:

1. $\mathcal{A}_n^{\infty} = \sigma(X_n,\, X_{n+1},\, \ldots)$
2. $\mathcal{A}_1^{n} = \sigma(X_1,\, \ldots,\, X_n)$
3. $\alpha_n = \sup\limits_{\substack{A\in\mathcal{A}_1 \\ B\in\mathcal{A}_n}} \Big|\mathrm{Pr}(A \cap B) - \mathrm{Pr}(A)\, \mathrm{Pr}(B)\Big|$

Decimos que X es α-mixing si $\alpha_n \xrightarrow{n} 0$.

Lema 4.12: Teorema Eergódico Maximal

Sean T una transformación que preserva la medida y X una variable aleatoria tal que $\mathbf{E}\,|X| < \infty$. Sean también:

1. $S_k = X(\omega) + X(T(\omega)) + \ldots + X(T^{k-1}(\omega))$
2. $M_k(\omega) = \text{máx}\left\{0,\, S_1(\omega), \ldots, S_k(\omega)\right\}$

entonces $\mathbf{E}\left(X\,\mathbb{I}_{\{M_n > 0\}}\right) \geq 0$

Teorema 4.13: Teorema de Birkhoff-Khinchin

Sean T una transformación ergódica y X una variable aleatoria tal que $\mathbf{E}\,|X| < \infty$, entonces:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X\left(T^k(\omega)\right) = \mathbf{E}(X)$$

Teorema 4.14: Teorema de Bradley

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias estacionarias y centradas. Supongamos que:

1. $\mathbf{E}\left(X_n^2\right) = \sigma_n < \infty$ para todo n
2. $\sigma_n \xrightarrow{n} \infty$
3. existe $\delta > 0$ tal que:
   1. $\mathbf{E}\left(|X_1|^{2+\delta}\right) < \infty$
   2. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{\delta/(2+\delta)} < \infty$

entonces $\sum_{k=2}^{\infty} \left|\,\mathbf{E}(X_1\,X_k)\right| < \infty$ si $\sigma^2 = \mathbf{E}\left(X_1^2\right) + 2\sum_{k=2}^{\infty} \mathbf{E}(X_1\,X_k) > 0$. Entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{n=1}^{\infty} X_n \xrightarrow{d} Z \sim \mathrm{N}(0,\, \sigma^2)$$