Práctico 2

Daniel Czarnievicz

2019

Ejercicio 1

Parte a

Si $X_n \overset{cs}{\to} X$ y $Y_n \overset{cs}{\to} Y$ entonces $X_n + Y_n \overset{cs}{\to} X + Y$

Dem:

Si $X_n \overset{cs}{\to} X \Rightarrow \exists A$ con $\Pr(A) = 1$ tal que $\forall \omega \in A$, $X_n(\omega) \overset{n}{\to} X(\omega)$. Análogamente, si $Y_n \overset{cs}{\to} Y \Rightarrow \exists B$ con $\Pr(B) = 1$ tal que $\forall \omega \in B$, $Y_n(\omega) \overset{n}{\to} Y(\omega)$. Sea $D = A \cap B \Rightarrow$ por proposición 1.9/9, $\Pr(D) = \Pr(A \cap B) = 1 \Rightarrow X_n + Y_n \overset{cs}{\to} X + Y$.

Parte c

Si $X_n \overset{cs}{\to} X$ y g es continua, entonces $g(X_n) \overset{cs}{\to} g(X)$.

Dem:

Si $X_n \overset{cs}{\to} X \Rightarrow \exists A$ con $\Pr(A) = 1$ tal que $\forall \omega \in A$, $X_n(\omega) \overset{n}{\to} X(\omega)$. Si g es continua, entonces $\forall \omega \in A$, $g(X_n(\omega)) \overset{n}{\to} g(X(\omega))$. Dado que $\Pr(A) = 1$, $g(X_n) \overset{cs}{\to} g(X)$.

Parte e

Si $X_n \overset{cs}{\to} X$ y $Y_n \overset{cs}{\to} Y$, y sean a_n y b_n dos sucesiones de números reales tales que $a_n \overset{n}{\to} a > 0$ y $b_n \overset{n}{\to} b$, entonces $a_n X_n + b_n Y_n \overset{cs}{\to} a X + b Y$.

Dem: alcanza con demostrar que $a_n X_n \overset{cs}{\to} a X$ y luego usar el resultado de la parte a del ejercicio.

Si $X_n \overset{cs}{\to} X \Rightarrow \exists A$ con $\Pr(A) = 1$ tal que $\forall \omega \in A$, $X_n(\omega) \overset{n}{\to} X(\omega)$. Luego a_n es una sucesión real que sabemos converge a a (por hipótesis), por lo tanto, $\forall \omega \in A$, $a_n X_n(\omega) \overset{n}{\to} a X(\omega)$. Dado que $\Pr(A) = 1$, $a_n X_n \overset{cs}{\to} a X$.

Parte d

¿Valen los resultado anteriores si $X_n \xrightarrow{p} X$ y $Y_n \xrightarrow{p} Y$?

Parte 1: Si $X_n \xrightarrow{p} X$ y $Y_n \xrightarrow{p} Y$ entonces $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$

Dem: requiere demostrar que $\Pr\Big(\{\omega : |X_n(\omega) + Y_n(\omega) - X(\omega) - Y(\omega)| > \varepsilon\}\Big) \xrightarrow{n} 0$, $\forall\varepsilon > 0$. Antes de demostrar la convergencia necesitamos explicitar tres resultados:

1. Si $X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow \Pr\Big(|X_n - X| > \varepsilon/2\Big) \xrightarrow{n} 0$, por definición de convergencia en probabilidad.
2. Si $Y_n \xrightarrow{p} Y \Rightarrow \Pr\Big(|Y_n - Y| > \varepsilon/2\Big) \xrightarrow{n} 0$, por definición de convergencia en probabilidad.
3. $\{\omega \in \Omega : |X_n + Y_n - X - Y| > \varepsilon\} \subset \{\omega \in \Omega : |X_n - X| + |Y_n - Y| > \varepsilon\}$ por lo tanto, $\varepsilon < |X_n + Y_n - X - Y| \leq |X_n - X| + |Y_n - Y|$

Luego entonces,

$$0 \leq \Pr\Big(|X_n + Y_n - X - Y| > \varepsilon\Big) \leq \Pr\Big(|X_n - X| > \varepsilon/2\Big) + \Pr\Big(|Y_n - Y| > \varepsilon/2\Big) \xrightarrow{n} 0$$

Parte 2: Si $X_n \xrightarrow{p} X$ y g es una función continua entonces $g(X_n) \xrightarrow{p} g(X)$

Dem: g es continua $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta$ tal que si $|X_n(\omega) - X(\omega)| < \delta \Rightarrow |g(X_n(\omega)) - g(X(\omega))| < \varepsilon$. Por contra recíproco esto implíca que si $|g(X_n(\omega)) - g(X(\omega))| \geq \varepsilon \Rightarrow |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \delta$. Luego entonces:

$$0 \leq \Pr\left(\Big|g[X_n(\omega)] - g[X(\omega)]\Big| \geq \varepsilon\right) \leq \Pr\left(\Big|X_n(\omega) - X(\omega)\Big| \geq \delta\right) \xrightarrow{n} 0$$

dado que $\{\omega : |g(X_n(\omega)) - g(X(\omega))| \geq \varepsilon\} \subseteq \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \delta\}$. Por lo tanto, $g(X_n) \xrightarrow{p} g(X)$.

Parte 3: Si $X_n \xrightarrow{p} X$ y $Y_n \xrightarrow{p} Y$, y sean a_n y b_n dos sucesiones de números reales tales que $a_n \xrightarrow{n} a > 0$ y $b_n \xrightarrow{n} b$, entonces $a_n X_n + b_n Y_n \xrightarrow{p} a\,X + b\,Y$.

Dem: al igual que con la convergencia *cs*, alcanza con demostrar que $a_n X_n \xrightarrow{p} a\,X$. Esto implica demostrar que $\Pr(|a_n X_n - aX| > \varepsilon) \xrightarrow{n} 0$.

$$\Pr\Big(|a_n X_n - aX| > \varepsilon\Big) = \Pr\Big(|a_n X_n - a\,X_n + a\,X_n - a\,X| > \varepsilon\Big) \leq$$
$$\leq \Pr\Big(|a_n X_n - a\,X_n| > \varepsilon/2\Big) + \Pr\Big(|a\,X_n - a\,X| > \varepsilon/2\Big) =$$
$$= \Pr\Big(|a_n - a|\,|X_n| > \varepsilon/2\Big) + \Pr\Big(|a|\,|X_n - X| > \varepsilon/2\Big) =$$

$$= \Pr\Big(|a_n - a|\,|X_n - X + X| > \varepsilon/2\Big) + \underbrace{\Pr\Big(|a|\,|X_n - X| > \varepsilon/2\Big)}_{\xrightarrow{n} 0, \text{ porque } X_n \xrightarrow{p} X} \leq$$

$$\leq \underbrace{\Pr\Big(|a_n - a|\,|X_n - X| > \varepsilon/4\Big)}_{\xrightarrow{n} 0, \text{ porque } X_n \xrightarrow{p} X} + \Pr\Big(|a_n - a|\,|X| > \varepsilon/4\Big) =$$

$$= \Pr\left(\underbrace{|a_n - a|}_{\substack{\xrightarrow{n} 0, \text{ dado} \\ \text{que } a_n \xrightarrow{n} a}} > \frac{\varepsilon}{4|X|}\right) \xrightarrow{n} 0$$

Procediendo de forma análoga se demuestra que $b_n\, Y_n \xrightarrow{p} b\, Y$, y aplicando el resultado de la parte 1 queda demostrado que $a_n\, X_n + b_n\, Y_n \xrightarrow{p} a_n\, X + b\, Y$.

Ejercicio 2

Verificar que si X_1; X_2; … iid, entonces $\bar{X}_n$ es un estimador consistente para

a. el parámetro p, si $X_1 \sim \text{Bin}(1, p)$

b. λ, si $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda)$

c. $1/\lambda$, si $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$

Parte a

Por convergencia en media cuadrática:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}(\bar{X}_n) = \mathbf{E}(X_1) = p \\ \mathbf{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\mathbf{Var}(X_1)}{n} = \frac{p(1-p)}{n} \xrightarrow{n} 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{mc} p \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{p} p$$

Utilizando desigualdad de Chebychev:

$$\Pr\Big(|\bar{X}_n - p| > \varepsilon\Big) \leq \frac{\mathbf{Var}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbf{Var}(X_1)/n}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbf{Var}(X_1)}{n\,\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\,\varepsilon^2} \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{p} p$$

Parte b

Por convergencia en media cuadrática:

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{E}(\bar{X}_n) = \mathbf{E}(X_1) = \lambda \\ \mathbf{Var}(\bar{X}_n) = \dfrac{\mathbf{Var}(X_1)}{n} = \dfrac{\lambda}{n} \xrightarrow{n} 0\end{array}\right\} \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{mc} \lambda \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{p} \lambda$$

Utilizando desigualdad de Chebychev:

$$\Pr\left(|\bar{X}_n - \lambda| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbf{Var}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbf{Var}(X_1)/n}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbf{Var}(X_1)}{n\,\varepsilon^2} = \frac{\lambda}{n\,\varepsilon^2} \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{p} \lambda$$

Parte c

Por convergencia en media cuadrática:

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{E}(\bar{X}_n) = \mathbf{E}(X_1) = \dfrac{1}{\lambda} \\ \mathbf{Var}(\bar{X}_n) = \dfrac{\mathbf{Var}(X_1)}{n} = \dfrac{1/\lambda^2}{n} \xrightarrow{n} 0\end{array}\right\} \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{mc} \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{p} \frac{1}{\lambda}$$

Utilizando desigualdad de Chebychev:

$$\Pr\left(|\bar{X}_n - \lambda| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbf{Var}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbf{Var}(X_1)/n}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbf{Var}(X_1)}{n\,\varepsilon^2} = \frac{1/\lambda^2}{n\,\varepsilon^2} \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{p} \frac{1}{\lambda}$$

Ejercicio 3

Estimador $T_n = 2\sum_{i=1}^{n} X_i/n$

Por el ejercicio 1 parte c sabemos que si g es continua y $X_n \xrightarrow{cs} X$, entonces $g(X_n) \xrightarrow{cs} g(X)$. Por el LFGN sabemos que $S_n/n \xrightarrow{cs} \mathbf{E}(X_1)$. Por último, dado que X_n es una sucesión iid de variables aleatorias con distribución $Unif(0,\theta]$, sabemos que $\mathbf{E}(X_i) = \theta/2$. Con esto entonces:

$$T_n = 2\frac{S_n}{n} = g(S_n) \xrightarrow{cs} g(\mathbf{E}(X_1)) = 2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \theta$$

dado que $g(z) = 2z$ es continua por ser polinómica.

Estimador $X_{(n)}$

Sea $X_{(n)} = \max\limits_{n}\{X_1, X_2, \ldots\} \Rightarrow f_{X_{(n)}}(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}\,\mathbb{I}_{[0<x<\theta]}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\Pr\left(|X_{(n)} - \theta| > \varepsilon\right) &= 1 - \Pr\left(|X_{(n)} - \theta| < \varepsilon\right) = 1 - \Pr\left(\theta - \varepsilon < X_{(n)} < \theta + \varepsilon\right) = \\
&= 1 - \Pr\left(\theta - \varepsilon < X_{(n)} < \theta\right) = 1 - \int\limits_{\theta-\varepsilon}^{\theta} f_{X_{(n)}}(x)dx = 1 - \int\limits_{\theta-\varepsilon}^{\theta} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx = \\
&= 1 - \frac{1}{\theta^n}\left(x^n\Big|_{\theta-\varepsilon}^{\theta}\right) = 1 - \left(\frac{\theta^n}{\theta^n} - \frac{(\theta-\varepsilon)^n}{\theta^n}\right) = \frac{(\theta-\varepsilon)^n}{\theta^n} = \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n
\end{aligned}$$

Luego por el corolario 2.4 sabemos que si $\forall\varepsilon > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Pr\left(|X_{(n)} - \theta| > \varepsilon\right) < \infty \Rightarrow X_{(n)} \overset{cs}{\to} \theta$. Lo cual se cumple en este caso:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \Pr\left(|X_{(n)} - \theta| > \varepsilon\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n = -1 + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n = \\
= -1 + \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n &= -1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n < +\infty \text{ dado que } \left|\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right| < 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, encontramos que $X_n \overset{cs}{\to} \theta$.

Ejercicio 4

Parte a: mostrar que $d_2(X,Y) = \sqrt{\mathbf{E}(X-Y)^2}$ es una distancia en el conjunto de las variables aleatorias con momento de segundo orden finito.

Dem: implica probar todas las características de una distancia.

1) *No negatividad*: $d_2(X,Y) > 0$, $\forall X \neq Y$ se cumple dado que $Z = (X-Y)^2 > 0 \Rightarrow \sqrt{\mathbf{E}(Z)} > 0$.

2) *Identidad*: $d_2(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$. El directo requiere definir clases de equivalencias. Es decir, no es cierto así como aparece planteado en el ejercicio. Ahora, si $X \overset{cs}{=} Y$, es decir, X e Y son iguales en un conjunto de probabilidad 1, entonces sí se cumple que si $d_2(X,Y) = 0$, X debe ser igual (cs) a Y, dado que es la única forma de que su cuadrado sea cero. Por su parte, el recíproco sí es inmediato. Es decir, si $X = Y \Rightarrow d_2(X,Y) = \sqrt{\mathbf{E}(X-Y)^2} = \sqrt{\mathbf{E}(X-X)^2} = \sqrt{\mathbf{E}(0)^2} = \sqrt{\mathbf{E}(0)} = \sqrt{0} = 0$.

3) *Simetría*: $d_2(X,Y) = \sqrt{\mathbf{E}(X-Y)^2} = \sqrt{\mathbf{E}(Y-X)^2} = d_2(Y,X)$

4) *Desigualdad triangular*:

$$d_2(X,Y) = \sqrt{\mathbf{E}(X-Y)^2} = \sqrt{\mathbf{E}(X-Z+Z-Y)^2} =$$

$$= \sqrt{\mathbf{E}(X-Z)^2 + 2\,\mathbf{E}(X-Z)(Z-Y) + \mathbf{E}(Z-Y)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\mathbf{E}(X-Z)^2 + 2\sqrt{\mathbf{E}(X-Z)^2\ \mathbf{E}(Z-Y)^2} + \mathbf{E}(Z-Y)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\mathbf{E}(X-Z)^2 + \mathbf{E}(Z-Y)^2} \leq \sqrt{\mathbf{E}(X-Z)^2} + \sqrt{\mathbf{E}(Z-Y)^2} = d_2(X,Z) + d_2(Z,Y)$$

Parte b: verificar que $d_2(X_n, Y) \to 0$ implíca $X_n \xrightarrow{p} Y$.

$$0 \leq \Pr\left(|X_n - Y| > \varepsilon\right) = \Pr\left(\sqrt{|X_n - Y|^2} > \sqrt{\varepsilon^2}\right) \leq \frac{\mathbf{E}\left(\sqrt{|X_n - Y|^2}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2}} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{\mathbf{E}\left(|X_n - Y|^2\right)}}{\varepsilon} = \frac{d_2(X_n, Y)}{\varepsilon} \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} Y$$

Donde, para la primer desigualdad usamos que toda probabilidad está acotada inferiormente por cero. Para la segunda utilizamos la desigualdad de Markov dado que $|X_n - Y|^2$ es siempre positiva. Por último, para la tercer desigualdad utilizamos la desigualdad de Jensen donde $g(z) = \sqrt{z}$ es una función cóncava.

Parte c: primero debemos percatarnos de que lo que necesitamos hallar es una sucesión de variables aleatorias que converga en probabilidad, pero no en media L^2 dado que, que la función de distancia con la que estamos trabajando converga a cero, implíca que $X_n \xrightarrow{L^2} Y$.

Sean $U \sim \text{Unif}(0,1)$ y $X_n = n\,\mathbb{I}_{[0,\,{}^1/_n]}(u)$.

$$\Pr_{X_n}(X_n = n) = \Pr_{X_n}\Big(n\,\mathbb{I}_{[0,\,{}^1/_n]}(u) = n\Big) = \Pr_{X_n}\Big(\mathbb{I}_{[0,\,{}^1/_n]}(u) = 1\Big) =$$

$$= \Pr_U\Big(u \in [0,\ {}^1/_n]\Big) = F_U\left({}^1/_n\right) - F_U(0) = \frac{1}{n}$$

$$\Pr_{X_n}(X_n = 0) = \Pr_U\Big(u \notin [0,\ {}^1/_n]\Big) = 1 - \Pr_U\Big(u \in [0,\ {}^1/_n]\Big) = 1 - \frac{1}{n}$$

Luego entonces,

$$\Pr\Big(|X_n - 0| > \varepsilon\Big) = \Pr(X_n > \varepsilon) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} 0$$

Mientras que:

$$\mathbf{E}(X_n) = n\ \Pr(X_n = n) + 0\ \Pr(X_n = 0) = n\,\frac{1}{n} = 1 \neq 0 = \mathbf{E}(X) \Rightarrow \mathbf{E}(X_n) \not\xrightarrow{L^2} \mathbf{E}(X)$$

Ejercicio 5

Parte a: Demostrar que $d_p(X,Y) = \mathbf{E}\left(1 - e^{-|X-Y|}\right)$ es una distancia en el espacio de todas las variables aleatorias.

1) *No negatividad*: $d_p(X,Y) = \mathbf{E}\left(\underbrace{1 - \overbrace{\exp\left\{\underbrace{-|X-Y|}_{<0}\right\}}^{<1}}_{>0}\right) > 0$

2) *Identidad*: $d_p(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X \overset{cs}{=} Y$. Si la distancia es cero entonces $X \overset{cs}{=} Y$ dado que es la única forma de que la esperanza considerada sea la esperanza de cero. Por su parte, si $X \overset{cs}{=} Y$ entonces la demostración es inmediata:

$$d_p(X,Y) = \mathbf{E}\left(1 - e^{-|X-X|}\right) = \mathbf{E}(1 - e^{-0}) = \mathbf{E}(1-1) = \mathbf{E}(0) = 0$$

3) *Simetría*: $d_p(X,Y) = \mathbf{E}\left(1 - e^{-|X-Y|}\right) = \mathbf{E}\left(1 - e^{-|Y-X|}\right) = d_p(Y,X)$

4) *Desigualdad triangular*: $d_p(X,Y) \leq d_p(X,Z) + d_p(Z,Y)$

$$\begin{gathered}
|X-Y| = |X-Z+Z-Y| \leq |X-Z| + |Z-Y| \\
-|X-Y| \geq -|X-Z| - |Z-Y| \\
\exp\Big\{-|X-Y|\Big\} \geq \exp\Big\{-|X-Z| - |Z-Y|\Big\} \\
-\exp\Big\{-|X-Y|\Big\} \leq -\exp\Big\{-|X-Z| - |Z-Y|\Big\}
\end{gathered}$$

Obtuvimos una expresión de la forma $-e^{-c} \leq -e^{-a-b}$ donde $a,b,c \geq 0$. Queremos ahora probar que si $a,b \geq 0$, entonces $-e^{-a-b} \leq 1 - e^{-a} - e^{-b}$. Comenzamos por escribir la desigualdad como una función:

$$f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} / f(a,b) = e^{-a} + e^{-b} - e^{-a-b} - 1$$

Queremos demostrar entonces que $f(a,b) \leq 0$ para todo $a,b \geq 0$. Primero veamos que $f(0,0) = e^{-0} + e^{-0} - e^{-0-0} - 1 = 0$. Luego, si la función siempre decrece (tanto en trayectorias de a como en trayectorias de b), entonces la función es menor a 0 para todo $a,b \geq 0$. Comenzemos entonces calculando sus derivadas parciales.

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a,b) = -e^{-a} + e^{-a-b} \leq 0 \Leftrightarrow e^{-a-b} \leq e^{-a} \Leftrightarrow -a-b \leq -a \Leftrightarrow -b \leq 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial}{\partial b} f(a,b) = -e^{-b} + e^{-a-b} \leq 0 \Leftrightarrow e^{-a-b} \leq e^{-b} \Leftrightarrow -a-b \leq -b \Leftrightarrow -a \leq 0 \quad \checkmark$$

Ambas se cumplen dado que $a,b \geq 0 \Rightarrow -a,-b \leq 0$. Por tanto, la función f tiene su máximo en $(0,0)$ y decrece a medida que a y b crecen. Hemos entonces demostrado que se cumple la siguiente desigualdad:

$$-e^{-c} \leq -e^{-a-b} \leq 1 - e^{-a} - e^{-b} \Rightarrow -e^{-c} \leq 1 - e^{-a} - e^{-b}$$

Volviendo a nuestro problema:

$$-e^{-|X-Y|} \leq -e^{-|X-Z|}\, e^{-|Z-Y|} \leq 1 - e^{-|X-Z|} - e^{-|Z-Y|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-|X-Y|} \leq 1 - e^{-|X-Z|} + 1 - e^{-|Z-Y|} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{E}\left(1 - e^{-|X-Y|}\right) \leq \mathbf{E}\left(1 - e^{-|X-Z|} + 1 - e^{-|Z-Y|}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{E}\left(1 - e^{-|X-Y|}\right) \leq \mathbf{E}\left(1 - e^{-|X-Z|}\right) + \mathbf{E}\left(1 - e^{-|Z-Y|}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d_p(X,Y) \leq d_p(X,Z) + d_p(Z,Y)$$

Parte b: Demostrar que $d_p(X,Y) \xrightarrow{n} 0 \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{p} Y$

($\Rightarrow$)

$$\Pr\left(|X_n - Y| > \varepsilon\right) = \Pr\left(-|X_n - Y| < -\varepsilon\right) = \Pr\left(e^{-|X_n-Y|} < e^{-\varepsilon}\right) =$$

$$= \Pr\left(-e^{-|X_n-Y|} > -e^{-\varepsilon}\right) = \Pr\left(1 - e^{-|X_n-Y|} > 1 - e^{-\varepsilon}\right) \leq \frac{\mathbf{E}\left(1 - e^{-|X_n-Y|}\right)}{1 - e^{-\varepsilon}} =$$
$$= \frac{d_p\left(X_n, Y\right)}{1 - e^{-\varepsilon}} \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} Y$$

($\Leftarrow$)

$$0 \leq d_p(X_n,Y) = \mathbf{E}\left(1 - e^{-|X_n-Y|}\right) \leq 1 - e^{-\mathbf{E}(|X_n-Y|)} =$$
$$= 1 - \exp\left\{-\mathbf{E}\left[|X_n - Y|\left(\mathbb{I}_{\{|X_n-Y|>\varepsilon\}} + \mathbb{I}_{\{|X_n-Y|\leq\varepsilon\}}\right)\right]\right\} =$$
$$= 1 - \exp\left\{-\mathbf{E}\left[|X_n - Y|\,\mathbb{I}_{\{|X_n-Y|>\varepsilon\}}\right] - \mathbf{E}\left[|X_n - Y|\,\mathbb{I}_{\{|X_n-Y|\leq\varepsilon\}}\right]\right\} \leq$$
$$\leq 1 - \exp\left\{-\mathbf{E}\left[\underbrace{|X_n - Y|}_{\leq\varepsilon}\,\mathbb{I}_{\{|X_n-Y|\leq\varepsilon\}}\right]\right\} \leq$$
$$\leq 1 - \exp\left\{-\mathbf{E}\left[\varepsilon\,\mathbb{I}_{\{|X_n-Y|\leq\varepsilon\}}\right]\right\} = 1 - \exp\left\{-\varepsilon\;\mathbf{E}\left[\mathbb{I}_{\{|X_n-Y|\leq\varepsilon\}}\right]\right\} =$$
$$= 1 - \exp\left\{-\varepsilon\,\underbrace{\Pr\left(|X_n - Y| \leq \varepsilon\right)}_{\xrightarrow{n}1}\right\} = 1 - e^{-\varepsilon} \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow d_p(X_n,Y) \xrightarrow{n} 0$$

Donde en la primera desigualdad utilizamos la no negatividad de la medida de distancia. En la segunda desigualdad utilizamos la desigualdad de Jensen. La tercera desigualdad se cumple por que $1 - e^{-(a+b)} \leq 1 - e^{-a}$ por ser $1 - e^{-(a+b)}$ monótona creciente en todos los reales. Mientras que la cuarta desigualdad se cumple por que es cuando la indicatriz toma valor 1 (por lo que $|X_n - Y|$ efectivamente es menor que ε).

Ejercicio 6

Parte a: probar que si $\mathbf{E}\left[(X_n - X)^2\right] \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow \mathbf{E}(X_n) \xrightarrow{n} \mathbf{E}(X)$.

Comencemos notando que lo que debemos demostrar es que $\mathbf{E}(X_n) \xrightarrow{n} \mathbf{E}(X)$, lo cual implíca demostrar que $\mathbf{E}(X_n - X) \xrightarrow{n} 0$. Por la desigualdad de Jensen tenemos que:

$$\left[\mathbf{E}(X_n - X)\right]^2 \leq \mathbf{E}\left[(X_n - X)^2\right]$$

dado que $g(z) = z^2$ es convexa. Luego entonces:

$$\sqrt{\left[\mathbf{E}(X_n - X)\right]^2} = \mathbf{E}(X_n - X) = \mathbf{E}(X_n) - \mathbf{E}(X) \leq \sqrt{\mathbf{E}\left[(X_n - X)^2\right]} \xrightarrow{n} 0$$

Por lo tanto, $\mathbf{E}(X_n) \xrightarrow{n} \mathbf{E}(X)$.

Parte b: probar que si $\mathbf{E}\left[(X_n - X)^2\right] \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow \mathbf{E}(X_n^2) \xrightarrow{n} \mathbf{E}(X^2)$.

Queremos probar que, dadas las hipótesis, $\mathbf{E}(X_n^2 - X^2) \xrightarrow{n} 0$. Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos que:

$$\mathbf{E}(X_n^2 - X^2) = \mathbf{E}\left[(X_n - X)(X_n + X)\right] \leq \underbrace{\sqrt{\mathbf{E}\left[(X_n - X)^2\right]}}_{\xrightarrow{n} 0 \text{ por hipótesis}} \sqrt{\mathbf{E}\left[(X_n + X)^2\right]}$$

Vemos entonces que el límite de $\mathbf{E}(X_n^2 - X^2)$ es igual al producto de dos factores, uno de los cuales tiende a cero. Si el otro factor está acotado (no tiende a $+\infty$), entonces el producto tiende a cero y queda demostrada la proposición. Veamos que esto se cumple.

$$(X_n + X)^2 = (X_n - X + 2X)^2 \leq 2(X_n - X)^2 + 2(2X)^2$$

La desigualdad se cumple dado que:

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \Rightarrow 0 \leq (a^2 - b^2) \Leftrightarrow 2ab \leq a^2 + b^2$$

Sumando a^2 y b^2 a ambos lados de la desigualdad obtenemos que:

$$2ab + a^2 + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \Rightarrow (a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

Volviendo a nuestro problema, si tomamos esperanza obtenemos que:

$$\mathbf{E}\left[(X_n + X)^2\right] \leq \mathbf{E}\left[2(X_n - X)^2 + 2(2X)^2\right] = 2\left[\underbrace{\mathbf{E}\left[(X_n - X)^2\right]}_{\xrightarrow{n} 0 \text{ por hipótesis}} + 4\ \mathbf{E}(X^2)\right] = 8\ \mathbf{E}(X)$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{E}(X_n^2 - X^2) = \mathbf{E}\left[(X_n - X)(X_n + X)\right] \leq \underbrace{\sqrt{\mathbf{E}\left[(X_n - X)^2\right]}}_{\xrightarrow{n} 0 \text{ por hipótesis}} \underbrace{\sqrt{\mathbf{E}\left[(X_n + X)^2\right]}}_{\text{acotado por } \sqrt{8\,E(X)}} \xrightarrow{n} 0$$

Entonces, $\mathbf{E}(X_n^2) \xrightarrow{n} \mathbf{E}(X^2)$.

Parte c: encontrar una sucesión que converga en media pero no en media cuardática

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias iid con reocrrido $\text{Rec}(X_n) = \{-n, 0, n\}$ tales que:

$$p_{X_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad x = -n \\ 1 - \dfrac{2}{n} & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad x = n \end{cases} \Rightarrow F_{X_n}(x) \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -n \\ \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad -n \leq x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si} \quad x \geq n \end{cases}$$

Convergencia en media

Esperanza de X_n: $\mathbf{E}(X_n) = -n\left(\dfrac{1}{n}\right) + 0\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) + n\left(\dfrac{1}{n}\right) = -1 + 1 = 0$

Por lo tanto: $\mathbf{E}(X_n - X) = \mathbf{E}(X_n) = 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^1} 0$

Convergencia en media cuadrática

Cuantía de X_n^2: $\Pr(X_n^2 = x) = \begin{cases} \dfrac{2}{n} & \text{si} \quad x = n^2 \\ 1 - \dfrac{2}{n} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

Segundo momento de X_n: $\mathbf{E}(X_n^2) = n^2\left(\dfrac{2}{n}\right) + 0\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) = 2n \xrightarrow{n} +\infty$. Por lo tanto, $E(X_n - 0)^2 = E(X_n^2) = 2n \Rightarrow X_n \overset{mc}{\not\to} 0$.

Ejercicio 7

Parte a

$$f_{X_n}(x;\theta) = \mathbb{I}_{\{\theta<x<\theta+1\}} \qquad F_{X_n}(x;\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x<\theta \\ x-\theta & \text{si} & \theta \le x < \theta+1 \\ 1 & \text{si} & x \ge \theta \end{cases}$$

$$f_{X_{1:n}}(x;\theta) = n\,(1-x+\theta)^{n-1}\,\mathbb{I}_{\{\theta<x<\theta+1\}} \quad F_{X_{1:n}}(x;\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x<\theta \\ 1-(\theta+1-x)^n & \text{si} & \theta \le x < \theta+1 \\ 1 & \text{si} & x \ge \theta \end{cases}$$

$$\Pr\Big(|X_{1:n}-\theta| > \varepsilon\Big) = 1 - \Pr\Big(|X_{1:n}-\theta| < \varepsilon\Big) = 1 - \Pr\Big(-\varepsilon < X_{1:n}-\theta < \varepsilon\Big) =$$
$$= 1 - \Pr\Big(\theta < X_{1:n} < \theta+\varepsilon\Big) = 1 - \Big[F_{X_{1:n}}(\theta+\varepsilon) - F_{X_{1:n}}(\theta)\Big] = 1 - F_{X_{1:n}}(\theta+\varepsilon) + F_{X_{1:n}}(\theta) =$$
$$= 1 - \Big[1-(\theta+1-\theta-\varepsilon)^n\Big] + \Big[1-(\theta+1-\theta)^n\Big] =$$
$$= (1-\varepsilon)^n + 1 - 1^n = (\underbrace{1-\varepsilon}_{\le 1})^n \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow X_{1:n} \xrightarrow{p} \theta$$

Parte b

$$f_{X_n}(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}\,\mathbb{I}_{\{x\ge\theta\}} \qquad F_{X_n}(x;\theta) = \Big(1-e^{-(x-\theta)}\Big)\,\mathbb{I}_{\{x\ge\theta\}}$$

$$f_{X_{1:n}}(x;\theta) = n\,e^{-n(x-\theta)}\,\mathbb{I}_{\{x\ge\theta\}} \quad F_{X_{1:n}}(x;\theta) = \Big(1-e^{-n(x-\theta)}\Big)\,\mathbb{I}_{\{x\ge\theta\}}$$

$$\Pr\Big(|X_{1:n}-\theta| > \varepsilon\Big) = 1 - \Pr\Big(|X_{1:n}-\theta| < \varepsilon\Big) = 1 - \Pr\Big(-\varepsilon < X_{1:n}-\theta < \varepsilon\Big) =$$
$$= 1 - \Pr\Big(\theta < X_{1:n} < \theta+\varepsilon\Big) = 1 - \Big[F_{X_{1:n}}(\theta+\varepsilon) - F_{X_{1:n}}(\theta)\Big] = 1 - F_{X_{1:n}}(\theta+\varepsilon) + F_{X_{1:n}}(\theta) =$$
$$= 1 - \Big(1-e^{-n(\theta+\varepsilon-\theta)}\Big) + \Big(1-e^{-n(\theta-\theta)}\Big) = 1 - \Big(1-e^{-n\varepsilon}\Big) = e^{-n\,\varepsilon} \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow X_{1:n} \xrightarrow{p} \theta$$

Parte c

$$f_{X_n}(x;\theta) = 2(x-\theta)\,\mathbb{I}_{\{\theta<x<\theta+1\}} \quad F_{X_n}(x;\theta) = (x-\theta)^2\,\mathbb{I}_{\{\theta<x<\theta+1\}} + \mathbb{I}_{\{x\geq\theta+1\}}$$

$$f_{X_{1:n}}(x;\theta) = 2n(x-\theta)\Big[1-(x-\theta)^2\Big]^{n-1}\,\mathbb{I}_{\{\theta<x<\theta+1\}}$$

$$F_{X_{1:n}}(x;\theta) = \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x\leq\theta \\ 1-\Big[1-(x-\theta)^2\Big]^n & \text{si} & \theta<x<\theta+1 \\ 1 & \text{si} & x\geq\theta+1 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}
\Pr\Big(|X_{1:n}-\theta|>\varepsilon\Big) &= 1-\Pr\Big(|X_{1:n}-\theta|<\varepsilon\Big) = 1-\Pr\Big(-\varepsilon<X_{1:n}-\theta<\varepsilon\Big) = \\
= 1-\Pr\Big(\theta<X_{1:n}<\theta+\varepsilon\Big) &= 1-\Big[F_{X_{1:n}}(\theta+\varepsilon)-F_{X_{1:n}}(\theta)\Big] = 1-F_{X_{1:n}}(\theta+\varepsilon)+F_{X_{1:n}}(\theta) = \\
&= 1-\Big(1-\Big[1-(\theta+\varepsilon-\theta)^2\Big]^n\Big)+\Big(1-\Big[1-(\theta-\theta)^2\Big]^n\Big) = \\
&= 1-1+\Big(1-\varepsilon^2\Big)^n+1-1^n = \Big(\underbrace{1-\varepsilon^2}_{\leq 1}\Big)^n \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow X_{1:n} \xrightarrow{p} \theta
\end{aligned}$$

Parte d

Condición: $\theta = \text{mín}\{\text{Rec}(X_n)\}$

$$f(x;\theta) = \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x<\theta \\ a>0 & \text{si} & \theta<x<\text{máx}\{\text{Rec}(X_n)\} \end{array}\right.$$

Ejercicio 8

Parte a

$$\begin{aligned}
\operatorname*{plim}_n \hat{\alpha}_n &= \operatorname*{plim}_n(\bar{X}_n-\bar{z}_n\hat{\beta}_n) = \operatorname*{plim}_n(\alpha+\beta\bar{z}_n+\bar{\varepsilon}_n-\bar{z}_n\hat{\beta}_n) = \\
&= \operatorname*{plim}_n\Big(\alpha+(\beta-\hat{\beta}_n)\bar{z}_n+\bar{\varepsilon}_n\Big) = \alpha+\bar{z}_n\operatorname*{plim}_n(\beta-\hat{\beta}_n)+\underbrace{\bar{\varepsilon}_n}_{=0}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\hat{\alpha}_n \xrightarrow{p} \alpha \Leftrightarrow \hat{\beta}_n \xrightarrow{p} \beta$, en cuyo caso obtendríamos $\operatorname*{plim}_n \hat{\alpha} = \alpha$.

Parte b

$$\underset{n}{\text{plim}}\,\hat{\beta}_n = \underset{n}{\text{plim}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z}_n)X_i}{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z}_n)^2}\right) = \underset{n}{\text{plim}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z}_n)(\alpha+\beta\,z_i+\varepsilon_i)}{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z}_n)^2}\right) =$$

$$= \alpha\ \underset{n}{\text{plim}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z}_n)}{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z}_n)^2}\right) + \beta\ \underset{n}{\text{plim}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z}_n)z_i}{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z}_n)^2}\right) + \underset{n}{\text{plim}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z}_n)\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z}_n)^2}\right) =$$

$$= \alpha\ \underset{n}{\text{plim}}\left(\frac{n\,\bar{z}_n - n\,\bar{z}_n}{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z}_n)^2}\right) + \beta\ \underset{n}{\text{plim}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \bar{z}_n\sum_{i=1}^{n} z_i}{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z}_n)^2}\right) + \underset{n}{\text{plim}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i\,\varepsilon_i - \bar{z}_n\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z}_n)^2}\right) =$$

$$= \beta\ \underset{n}{\text{plim}}\left(\frac{n\Big(S_z^2+\bar{z}_n^2\Big) - n\,\bar{z}_n^2}{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z}_n)^2}\right) + \underset{n}{\text{plim}}\left(\frac{n\Big(S_{z\varepsilon}+\bar{z}_n\,\bar{\varepsilon}_n\Big) - n\,\bar{z}_n\,\bar{\varepsilon}_n}{\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z}_n)^2}\right) =$$

$$= \beta\ \underset{n}{\text{plim}}\left(\frac{n\,S_z^2}{n\,S_z^2}\right) + \underset{n}{\text{plim}}\left(\frac{n\,S_{z\varepsilon}}{n\,S_z^2}\right) = \beta + \underset{n}{\text{plim}}\left(\frac{S_{z\varepsilon}}{S_z^2}\right)$$

Por lo tanto, $\underset{n}{\text{plim}}\,\hat{\beta}_n = \beta \Leftrightarrow S_{z\varepsilon} = 0$. Es decir, si el regresor, z, y el término de error, ε, están incorrelados.

Ejercicio 9

Comenzamos con la definición de convergencia en probabilidad de X_n a 0, e "introducimos" Y_n haciendo uso de que $\Pr(A) = \Pr(A\cap\Omega) = \Pr(A\cap(B\cup\bar{B})) = \Pr((A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})) = \Pr(A\cap B) + \Pr(A\cap\bar{B})$ dado que $(A\cap B)$ y $(A\cap\bar{B})$ son disjuntos.

$$\Pr\Big(|X_n-0|>\varphi\Big) = \Pr\Big(|X_n|>\varphi\Big) = \Pr\Big(|X_n|>\varphi,\,|Y_n|>K\Big) + \Pr\Big(|X_n|>\varphi,\,|Y_n|\le K\Big)$$

Trabajando ahora con el primer sumando tenemos que:

$$\Pr\Big(|X_n|>\varphi,\,|Y_n|>K\Big) \le \Pr\Big(|Y_n|>K\Big) = 1-\Pr\Big(|Y_n|\le K\Big) = \varepsilon$$

Donde la desigualdad se desprende del razonamiento aplicado al inicio para "introducir" Y_n, y el resto de la afirmación surge de la definición de la probabilidad del complemento de un suceso y la hipótesis de que Y_n es estocásticamente acotada.

Para el segundo sumando tenemos que:

$$\Pr\Big(|X_n|>\varphi,\,|Y_n|\le K\Big) = \Pr\left(|X_n|>\varphi,\,\frac{1}{|Y_n|}>\frac{1}{K}\right) = \Pr\left(\frac{|X_n|}{|Y_n|}>\frac{\varphi}{K}\right) =$$

$$= \Pr\left(\left|\frac{|X_n|}{|Y_n|} - 0\right| > \left|\frac{\varphi}{K}\right|\right) \xrightarrow{n} 0$$

Por lo tanto, $\Pr\Big(|X_n - 0| > \varphi\Big) \leq \varepsilon$, entonces $X_n \xrightarrow{p} 0$ dado que podemos hacer ε tan chico como queramos.

Ejercicio 10

Para poder demostrar que $\dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{X_1^2 + \ldots + X_n^2} \xrightarrow{cs} \dfrac{\mu}{\sigma^2 + \mu^2}$ debemos demostrar que:

a. $X_1 + \ldots + X_n \xrightarrow{cs} \mu$,

b. $X_1^2 + \ldots + X_n^2 \xrightarrow{cs} \sigma^2 + \mu^2$.

c. el cociente de dos sucesiones de variables aleatorias convergentes, converge al cociente de sus límites.

Parte a

Esta primera parte es inmediata, dado que se desprende de la Ley Fuerte de los Grandes Números (teniendo únicamente que multiplicar tanto nuestro numerador como nuestro denominador por $1/n$ para que se verifique).

Parte b

Primero demostremos que la varianza muestral converge casi seguramente a la varianza poblacional. Sea:

$$S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu + \mu - \bar{X}_n)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big[(X_i - \mu)^2 + 2(X_i - \mu)(\mu - \bar{X}_n) + (\mu - \bar{X}_n)^2\Big] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + 2(\mu - \bar{X}_n)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu - \bar{X}_n)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + 2(\mu - \bar{X}_n)(\bar{X}_n - \mu) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu - \bar{X}_n)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2(\mu - \bar{X}_n)^2 + (\mu - \bar{X}_n)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - (\mu - \bar{X}_n)^2$$

Hemos mostrado que $S_X^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - (\mu - \bar{X}_n)^2$. Para estudiar la convergencia casi segura de esta expresión utilizamos el resultado del Ejercicio 1 parte a (la suma de suceciones convergentes converge a la suma de los límites). Por lo tanto, utilizando nuevamente la LFGN, tenemos que:

$$S_X^2 \overset{cs}{\to} \mathbf{E}\left[(X_i - \mu)^2\right] - (\mu - \mu)^2 = \mathbf{E}\left[(X_i - \mu)^2\right] = \sigma^2$$

Luego, re-escribimos el denominador de nuestro cociente de la siguiente forma:

$$X_1^2 + \ldots + X_n^2 = n(S_X^2 + \bar{X}_n^2) \overset{cs}{\to} n(\sigma^2 + \mu^2)$$

donde, de nuevo, hemos aplicado el resultado del Ejercicio 1 parte a, esta vez en conjunto con el resultado del Ejercicio 1 parte e, lo cual podemos hacer dado que $g(z) = z^2$ y $h(w) = n\,w$ son ambas funciones continuas.

Parte c

Resta solo demostrar que el cociente de dos sucesiones convergentes converge al cociente de sus límites. Para esto utilizamos que:

I. La inversa de una sucesión convergente converge a la inversa de su límite (dado que $g(z) = 1/z$ es una función continua para los positivos). Esto se cumple en nuestro caso dado que la sucesión de los cuadrados es una sucesión de elementos positivos.

II. El producto de dos sucesiones convergentes converge al producto de sus límites:

Dem: Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones casi seguramente convergentes a A y B respectivamente. Entonces existen dos conjutnos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ con probabilidad 1 tales que $\forall\omega$ en $\mathcal{A}$, $A_n(\omega) \overset{n}{\to} A(\omega)$, y $\forall\omega$ en $\mathcal{B}$, $B_n(\omega) \overset{n}{\to} B(\omega)$. Luego, sea $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Por la proposición 1.9/9 sabemos que $P(\mathcal{C}) = 1 \Rightarrow A_n\,B_n \overset{cs}{\to} A\,B$.

Tomando los resultados de las tres partes tenemos que:

$$\frac{n(X_1 + \ldots + X_n)}{n(X_1^2 + \ldots + X_n^2)} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{X_1^2 + \ldots + X_n^2} = (X_1 + \ldots + X_n)\left(\frac{1}{X_1^2 + \ldots + X_n^2}\right) \overset{cs}{\to} \frac{\mu}{\sigma^2 + \mu^2}$$

Ejercicio 11

Parte a

En el ejercicio 10 parte b se demostró que $S_X^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \overset{cs}{\to} \sigma_X^2$. Por lo tanto:

$$S_{n,X}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{n}{n-1}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \overset{cs}{\to} \sigma_X^2$$

dado que $\dfrac{n}{n-1} \overset{cs}{\to} 1$, y por la parte e del ejercicio 1 sabemos que el producto de una sucesión real convergente por una sucesión de va's convergentes, converge al producto de sus límites. La demostración para Y_n es análoga.

Parte b

Utilizaremos los siguientes resultados de los ejercicios 1 y 10:

I. $S_X^2 \overset{cs}{\to} \sigma_X^2$ y $S_Y^2 \overset{cs}{\to} \sigma_Y^2$.

II. Si $X_n \overset{cs}{\to} X$ y g es continua, entonces $g(X_n) \overset{cs}{\to} g(X)$.

III. Si $X_n \overset{cs}{\to} X$, entonces $1/X_n \overset{cs}{\to} 1/X$.

IV. Si $X_n \overset{cs}{\to} X$ y $Y_n \overset{cs}{\to} Y$ entonces $X_n\,Y_n \overset{cs}{\to} X\,Y$.

Comencemos notando entonces que podemos re-escribir r_n de la siguiente forma:

$$r_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_n)^2}} = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n)\frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_n)^2}}$$

Por lo demostrado en el ejercicio 10 sabemos que $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \overset{cs}{\to} n\sigma_X^2$. Análogamente entonces, $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_n)^2 \overset{cs}{\to} n\sigma_Y^2$. Sabemoss también que el producto de sucesiones convergentes, converge al producto de sus límites. Por último, $g(z) = \sqrt{z}$ es continua. Por lo tanto:

$$\frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_n)^2}} \overset{cs}{\to} \frac{1}{\sqrt{n^2\,\sigma_X^2\,\sigma_Y^2}} = \frac{1}{n\,\sigma_X\,\sigma_Y}$$

Resta únicamente demostrar que $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n) \overset{cs}{\to} n\,\sigma_{XY}$. Para esto procedemos de forma análoga a como lo hicimos en la parte b deel ejercicio 10.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)(Y_i-\bar{Y}_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_X+\mu_X-\bar{X}_n)(Y_i-\mu_Y+\mu_Y-\bar{Y}_n)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big[(X_i-\mu_X)+(\mu_X-\bar{X}_n)\Big]\Big[(Y_i-\mu_Y)+(\mu_Y-\bar{Y}_n)\Big]=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big[(X_i-\mu_X)(Y_i-\mu_Y)+(X_i-\mu_X)(\mu_Y-\bar{Y}_n)+(\mu_X-\bar{X}_n)(Y_i-\mu_Y)+(\mu_X-\bar{X}_n)(\mu_Y-\bar{Y}_n)\Big]=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_X)(Y_i-\mu_Y)}_{\text{A}}+\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_X)(\mu_Y-\bar{Y}_n)}_{\text{B}}+\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_X-\bar{X}_n)(Y_i-\mu_Y)}_{\text{C}}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_X-\bar{X}_n)(\mu_Y-\bar{Y}_n)}_{\text{D}}$$

Trabajando ahora con cada sumando por separado tenemos que:

$$\text{A:}\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_X)(Y_i-\mu_Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(X_iY_i-X_i\mu_Y-\mu_xY_i+\mu_X\mu_Y\Big)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\mu_Y-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_xY_i+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_X\mu_Y=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\,Y_i-\bar{X}_n\,\mu_Y-\mu_x\,\bar{Y}_n+\mu_X\mu_Y\xrightarrow{cs}\mathbf{E}(X_i\,Y_i)-\mu_X\,\mu_Y=\sigma_{XY}$$

donde la convergencia se cumple por Ley Fuerte de los Grandes Números, y luego solo se aplicar la definición de covarianza.

Las expresiones B y C son análogas por lo que solo resolvemos una de ellas:

$$\text{B:}\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_X)(\mu_Y-\bar{Y}_n)=(\mu_Y-\bar{Y}_n)\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_X)=(\mu_Y-\bar{Y}_n)(\bar{X}_n-\mu_X)\xrightarrow{cs}0$$

donde la convergencia se cumple por Ley Fuerte de los Grandes Números.

Por último trabajamos con la expresión D:

$$\text{D:}\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_X-\bar{X}_n)(\mu_Y-\bar{Y}_n)=(\mu_X-\bar{X}_n)(\mu_Y-\bar{Y}_n)\xrightarrow{cs}0$$

donde, una vez más, la convergencia se cumple por Ley Fuerte de los Grandes Números.

Por lo tanto, uniendo todas las partes encontramos que:

$$r_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)(Y_i-\bar{Y}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y}_n)^2}}=\frac{n\,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)(Y_i-\bar{Y}_n)}{n\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y}_n)^2}}\xrightarrow{cs}\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\,\sigma_Y}$$

Ejercicio 12

$$\frac{1}{m}\log R_m = \frac{1}{m}\log\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{Z_m(i)}\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} Z_m(i)\,\log(p_i)$$

Sea $Y_{m_j}(i) = \mathbb{I}_{\{X_j \in \text{ al } i\text{-ésimo sub-intervalo}\}} \Rightarrow Y_{m_j} \sim \text{Ber}(p_i)$, dado que las $X_j \sim \text{Unif}[0;1]$. Luego, sea $Z_m(i) = \sum_{j=1}^{m} Y_{m_j}(i)$ (es decir, la cantidad de X's que cayeron en el i-ésimo intervalo). Por lo tanto, $Z_m(i) \sim \text{Bin}(m,\, p_i)$. Podemos entonces re-escribir el "estimador" de la siguiente forma:

$$\frac{1}{m}\log R_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Y_{m_j}(i)\,\log(p_i) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} Y_{m_j}(i)\,\log(p_i)$$

Sea $W_j = \sum_{i=1}^{n} Y_{m_j}(i)\,\log(p_i) \Rightarrow \frac{1}{m}\log R_m = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} W_j$. Si logramos probar que estamos en las condiciones de la Ley Fuerte de los Grandes Números, entonces $\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} W_j \stackrel{cs}{\to} \mathbf{E}(W_j)$. Adicionalmente, si logramos probar que $\mathbf{E}(W_j) = -H$, habremos resuelto el problema.

El segundo postulado es sencillo de probar. Dado que Y_{m_j} es una indicatriz que toma valor 1 si la variable X_j cayó en el i-ésimo intervalo, la distribución de las mismas solo depende de las X_j, y dado que estas son independientes, también lo son las Y_{m_j}. Por lo tanto:

$$\mathbf{E}(W_j) = \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{n} Y_{m_j}(i)\log(p_i)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\mathbf{E}\left(Y_{m_j}(i)\log(p_i)\right)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\log(p_i)\left[\mathbf{E}\left(Y_{m_j}(i)\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\log(p_i)\Pr(X_j \in \text{ al } i\text{-ésimo sub-intervalo}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\log(p_i)\,p_i = -H$$

Para probar que estamos en las hipótesis de la Ley Fuerte de los Grandes Números debemos probar que las W_j son iid, y que $\mathbf{E}\,|W_j| < \infty$.

Que son iid es sencillo de ver dado que las W_j son sumas ponderadas (por el logaritmo de la longitud del intervalo) de indicatrices que dependen únicamente de variables iid (las X_j). Por lo tanto, las W_j son iid. Por otro lado, $\mathbf{E}\,|W_j| < \infty$ dado que es una suma finita.

Por lo tanto, hemos probado que estamos en las hipótesis de la Ley Fuerte de los Grandes Números, y que la esperanza en $-H$, por lo que queda resuelto el problema.

Ejercicio 13

Sea $g : [0;1] \to [0;1]$ continua.

Parte a

Primero debemos notar que dado que las ξ_n son iid y g es continua, las $X_n = g(\xi_n)$ son variables aleatorias iid. Por otro lado, $E|X_n| < \infty$ dado que el soporte de las variables está acotado. Por lo tanto:

$$\mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}\left[g(\xi_n)\right] = \int_0^1 g(\xi_n)\,\underbrace{f_{\xi_n}(\xi_n)}_{=1}\,d\xi_n = \int_0^1 g(\xi)_n d\xi_n$$

donde $f_{\xi_n}(\xi_n) = 1$ dado que $\xi_n \sim Unif[0;1]$. Por lo tanto, podemos aplicar la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\bar{X}_n \xrightarrow{cs} \mathbf{E}(X_n) = \int_0^1 g(t)dt$$

Parte b

Primero debemos notar que Y_n son iid dado que tanto las ξ_n como las U_n lo son y g es una función continua. Al igual que en la parte a, $\mathbf{E}\,|Y_n| < \infty$ dado que los soportes están acotados. Luego entonces:

$$\mathbf{E}(Y_n) = 1\ \Pr(Y_n = 1) + 0\ \Pr(Y_n = 0) = \Pr(Y_n = 1) = \Pr\left(g(\xi_n) \geq U_n\right) =$$

$$= \int_0^1 \int_0^x f_X(x)\,f_U(u)dxdu = \int_0^1 f_X(x)\underbrace{\left(\int_0^x f_U(u)du\right)}_{\substack{=x \text{ dado que} \\ U\sim\text{Unif}[0;1]}} dx =$$

$$= \int_0^1 x\,f_X(x)dx = \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}\left[g(\xi_n)\right] = \int_0^1 g(t)dt$$

Por lo tanto, utilizando la Ley Fuerte de los Grandes Números obtenemos que:

$$\bar{Y}_n \xrightarrow{cs} E(Y_n) = \int\limits_0^1 g(t)dt$$

Parte c

Para calcular la varianza de $\bar{X}_n$ debemos primero calcular $\mathbf{E}(X^2)$ y luego utilizar la siguiente fórumla para la varianza: $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}^2(X)$.

$$\mathbf{E}(X_n^2) = \mathbf{E}\left[(g(\xi_n))^2\right] = \int\limits_0^1 \Big(g(t)\Big)^2 1dt = \int\limits_0^1 \Big(g(t)\Big)^2 dt$$

donde de nuevo utilizamos que $f_{\xi_n}(\xi_n) = 1$ dado que $\xi_n \sim \text{Unif}[0;1]$. Luego entonces:

$$\mathbf{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\mathbf{Var}(X)}{n} = \frac{1}{n}\Big[\mathbf{E}(X_n^2) - \mathbf{E}^2(X_n)\Big] = \frac{1}{n}\left[\int\limits_0^1 \Big(g(t)\Big)^2 dt - \left(\int\limits_0^1 g(t)dt\right)^2\right]$$

Por su parte, para calcular la varianzaa de $\bar{Y}_m$ debemos utilizar que, por ser una indicatriz, $Y_n \sim \text{Ber}(P(Y_n = 1))$, mientras que $\bar{Y}_n \sim \text{Bin}(n, P(Y_n = 1))$. Por lo tanto,

$$\mathbf{Var}(\bar{Y}_n) = \frac{1}{n}\Big[\Pr(Y_n = 1)\Big(1 - \Pr(Y_n = 1)\Big)\Big] = \frac{1}{n}\left[\int\limits_0^1 g(t)dt \left(1 - \int\limits_0^1 g(t)dt\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\int\limits_0^1 g(t)dt - \left(\int\limits_0^1 g(t)dt\right)^2\right]$$

Ejercicio 14

Parte a

Sean $X_n =$ "el capital al final de la n-ésima prueba", y $Z_n = \mathbb{I}_{\{\text{ganar en la } n\text{-ésima prueba}\}}$.

Supongamos primero que el jugador siempre gana. Entonces la sucesión de su capital será:

$$\begin{aligned}
X_0 &= (2)^0\, C \\
X_1 &= (2)^1\, C \\
X_2 &= (2)^2\, C \\
X_3 &= (2)^3\, C \\
&\vdots \\
X_n &= (2)^n\, C \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Si, en cambio, el jugador siempre pierde, entonces su capital al final de cada etapa será:

$$\begin{aligned}
X_0 &= (1/2)^0\, C \\
X_1 &= (1/2)^1\, C \\
X_2 &= (1/2)^2\, C \\
X_3 &= (1/2)^3\, C \\
&\vdots \\
X_n &= (1/2)^n\, C \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si llamamos $Y_n =$ "la cantidad de victorias luego de la n-ésima prueba", tenemos que la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ viene dada por:

$$\begin{aligned}
X_0 &= C\, \frac{2^{Y_0}}{2^{0-Y_0}} \\
X_1 &= C\, \frac{2^{Y_1}}{2^{1-Y_1}} \\
X_2 &= C\, \frac{2^{Y_2}}{2^{2-Y_2}} \\
X_3 &= C\, \frac{2^{Y_3}}{2^{3-Y_3}} \\
&\vdots \\
X_n &= C\, \frac{2^{Y_n}}{2^{n-Y_n}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Parte b

$$\mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}\left(C\,\frac{2^{Y_n}}{2^{n-Y_n}}\right) = \mathbf{E}\left(C\,2^{Y_n-(n-Y_n)}\right) = C\,2^{-n}\,\mathbf{E}\left(2^{2Y_n}\right) =$$

$$= C\,2^{-n}\sum_{i=0}^{n} 2^{2i}P(Y_i=y_i) = C\,2^{-n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^{2i}p^i(1-p)^{n-i} =$$

$$= C\,2^{-n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(2^2p\right)^i(1-p)^{n-i} = C\,2^{-n}\left(2^2p+1-p\right)^n = C\left(\frac{3p+1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{E}(X_n) = \lim_{n\to+\infty} C\left(\frac{3p+1}{2}\right)^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0\le p<1/3 \\ C & \text{si} \quad p=1/3 \\ +\infty & \text{si} \quad 1/3<p\le 1 \end{cases}$$

Parte c

Por la parte c del ejercicio 1 sabemos que si $Y_n \xrightarrow{cs} Y \Rightarrow g(Y_n) \xrightarrow{cs} g(Y)$ para toda g continua. En este caso, $Y_n \sim \text{Bin}(n,p)$. Entonces $(Y_n - np) \xrightarrow{cs} 0$ por la LFGN (teorema 2.34). Sea $g(z) = 2^{2z-n}$, entonces:

$$\lim_n 2^{2Y_n-n} = \lim_n 2^{2(Y_n-n/2)} = \lim_n 2^{2(Y_n-np+np-n/2)} = \lim_n 2^{2\overbrace{(Y_n-np)}^{\xrightarrow{n}0}+2n(p-1/2)} = \lim_n 2^{2n(p-1/2)}$$

Luego si $0<p<\dfrac{1}{2}$ entonces $2n(p-1/2)<0$ y $2^{2n(p-1/2)} \xrightarrow{n} 0$, por lo que $X_n \xrightarrow{cs} 0$.

Parte d

Cuando $\dfrac{1}{3}<p<\dfrac{1}{2}$ la sucesión converge casi seguramente a cero, pero no en media.

Ejercicio 15

Parte a

Sea el siguiente espacio de probabilidad $\left(\Omega=[0;1]^n,\ \mathcal{B}([0;1]),\ P_{X_n}\right)$, donde:

$$p_{X_n}(x) = \Pr_{X_n}(X_n=x) = \begin{cases} 1-\dfrac{1}{n} & \text{si} \quad x=0 \\ \\ \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad x=1 \end{cases}$$

Parte b

$$\forall\varepsilon>0 \quad \sum_{n=1}^{\infty}\Pr(|X_n-0|>\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty}\Pr(X_n>\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty}\Pr(X_n=1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$$

Ejercicio 16

Probar la siguiente igualdad:

$$\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\Big\{|X_k-X|<\varepsilon\Big\}=\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\Big\{|X_k-X|<\varepsilon\Big\}$$

Dado que se trata de una igualdad de conjuntos, debemos probar la doble inclusión.

Parte 1: $\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\Big\{|X_k-X|<\varepsilon\Big\}\subset\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\Big\{|X_k-X|<\varepsilon\Big\}$

$$\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\Big\{|X_k-X|<\varepsilon\Big\}=\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+}\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big\{\forall k\geq n,\ |X_k-X|<\varepsilon\Big\}=$$

$$=\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+}\Big\{\exists n\text{ tal que }\forall k\geq n,\ |X_k-X|<\varepsilon\Big\}=$$

$$=\Big\{\forall\varepsilon\in\mathbb{Q}^+,\ \exists n\text{ tal que }\forall k\geq n,\ |X_k-X|<\varepsilon\Big\}\subset\Big\{\forall\varepsilon>0,\ \exists n\text{ tal que }\forall k\geq n,\ |X_k-X|<\varepsilon\Big\}=$$

$$=\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+}\Big\{\exists n\text{ tal que }\forall k\geq n,\ |X_k-X|<\varepsilon\Big\}=$$

$$=\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+}\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big\{\forall k\geq n,\ |X_k-X|<\varepsilon\Big\}=\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\Big\{|X_k-X|<\varepsilon\Big\}$$

Parte 2: $\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\Big\{|X_k-X|<\varepsilon\Big\}\subset\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\Big\{|X_k-X|<\varepsilon\Big\}$