

# Práctico 1

*Daniel Czarniewicz*

*2019*

## Ejercicio 1

### Parte 1

Dado que se trata de una igualdad de conjuntos, debemos demostrar la doble inclusión.

Parte i:  $\{\omega \in \Omega / \omega \in A_n \text{ para infinitos valores de } n\} \subset \limsup_n A_n$

Si  $\omega$  pertenece a infinitos  $A_n \Rightarrow \forall n, \exists n_0 \geq n / \omega \in A_{n_0}$ . Luego si  $\omega \in A_{n_0} \Rightarrow \omega \in \bigcup_{k=n_0}^{+\infty} A_k \forall n$

dado que  $n_0 \geq n$ . Por lo tanto,  $\omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = \limsup_n A_n$

Parte ii:  $\limsup_n A_n \subset \{\omega \in \Omega / \omega \in A_n \text{ para infinitos valores de } n\}$

Demostración por absurdo. Si  $\omega$  pertenece a una cantidad finita de  $A_n \Rightarrow \exists n / \forall n_1 \geq n$ ,  
 $\omega \notin A_{n_1} \Rightarrow \omega \notin \bigcup_{k=n_1}^{+\infty} A_k \Rightarrow \omega \notin \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$

### Parte 2

Dado que se trata de una igualdad de conjuntos, debemos demostrar la doble inclusión.

Parte i:  $\liminf_n A_n \subset \{\omega \in \Omega / \omega \in A_n \forall n \text{ salvo, a lo sumo, una cantidad finita de índices}\}$

$\exists n / \forall n_0 \geq n, \omega \in A_n \Rightarrow \omega \in \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \Rightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$

Parte ii:  $\{\omega \in \Omega / \omega \in A_n \forall n \text{ salvo, a lo sumo, una cantidad finita de índices}\} \subset \liminf_n A_n$

Si  $\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \Rightarrow \exists n_0 / \omega \in A_k \forall k \geq n_0$

### Parte 3

A continuación se demuestra que si  $\omega$  pertenece al límite inferior, entonces debe existir un índice,  $n_0$ , a partir del cual  $\omega$  pertenece a todos los  $A_k$ , dado que esa es la condición para pertenecer a la intersección de los conjuntos. Pero, en el enunciado 1 de la proposición se

demostró que si  $\omega$  pertenece a una cantidad infinita de índices, entonces pertenece al límite superior.

Si  $\omega \in \liminf_n A_n \Rightarrow \exists n_0$  a partir del cual  $\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \forall n \geq n_0 \Rightarrow \omega$  pertenece a una cantidad infinita de índices (todos ellos a partir de  $n_0$ )  $\Rightarrow \omega \in \limsup_n A_n$

## Parte 4

Veamos primero que la sucesión  $B_n$  es decreciente. La misma está definida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} B_n &= A_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \dots \\ B_{n+1} &= A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \dots \\ B_{n+2} &= A_{n+2} \cup \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dado que cada vez unimos menos conjuntos, el conjunto resultante es “más chico”, y por tanto, la sucesión es decreciente. Luego entonces,

$$\begin{aligned} \Pr \left( \limsup_n A_n \right) &= \Pr \left( \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right) && \text{por definición de límite superior} \\ &= \Pr \left( \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \right) && \text{por definición de } B_n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(B_n) && \text{por continuidad de la probabilidad de una} \\ &&& \text{sucesión decreciente (ver prop 1.8/8)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr \left( \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right) && \text{por definición de } B_n \end{aligned}$$

## Parte 5

Veamos primero que la sucesión  $B_n$  es creciente. La misma está definida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} B_n &= A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} \cap \dots \\ B_{n+1} &= A_{n+1} \cap A_{n+2} \cap \dots \\ B_{n+2} &= A_{n+2} \cap \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dado que cada vez intersectamos menos conjuntos, el conjunto resultante es “más grande”, y por tanto, la sucesión es creciente. Luego entonces,

$$\begin{aligned} \Pr\left(\liminf_n A_n\right) &= \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\right) && \text{por definición de límite inferior} \\ &= \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) && \text{por definición de } B_n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(B_n) && \text{por continuidad de la probabilidad de una} \\ &&& \text{sucesión creciente (ver prop 1.8/7)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\right) && \text{por definición de } B_n \end{aligned}$$

## Parte 6

Dado que se trata de una triple igualdad entre conjuntos, debemos demostrar dos de los pares de doble inclusiones, y el tercero se cumplirá por transitividad.

**Parte I:**  $\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$

■ Parte I.i:  $\liminf_n A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$

Si  $\omega \in \liminf_n A_n \Rightarrow \omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k$ . Pero si la sucesión es creciente, entonces tenemos que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow \omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow \liminf_n A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

- Parte I.ii:  $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \liminf_n A_n$

Si la sucesión es creciente, entonces  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k$ . Por lo tanto,  $\forall \omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , tenemos

que  $\omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k = \liminf_n A_n$ . Por lo tanto,  $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \liminf_n A_n$

**Parte II:**  $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$

- Parte II.i:  $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$

Ver parte 3 del ejercicio (no se requiere que la sucesión sea creciente).

- Parte II.ii:  $\limsup_n A_n \subset \liminf_n A_n$

Si  $\omega \in \limsup_n A_n$  entonces  $\omega$  pertenece a infinitos  $A_n$  (ver demostración de parte 1). Pero dado que la sucesión es creciente,  $\exists n_0$  tal que  $\omega \in A_n \forall n \geq n_0$ . Pero esto implica que  $\omega \notin A_n$  solo para aquellos valores de  $n < n_0$ . Entonces  $\omega$  no pertenece a una cantidad finita de índices. Por lo tanto,  $\omega \in \liminf_n A_n$

---

De lo anterior se desprende que  $\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$  (parte I) y que  $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$  (parte II). Por transitividad entonces  $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \limsup_n A_n$ , por lo que queda demostrado el teorema.

## Parte 7

Dado que se trata de una triple igualdad entre conjuntos, debemos demostrar dos de los pares de doble inclusiones, y el tercero se cumplirá por transitividad.

**Parte I:**  $\limsup_n A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$

- Parte I.i:  $\limsup_n A_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$

Si  $\omega \in \limsup_n A_n \Rightarrow \omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k$ . Pero si la sucesión es decreciente, entonces tenemos que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow \omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow \limsup_n A_n \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

- Parte I.ii:  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \limsup_n A_n$

Si la sucesión es decreciente, entonces  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k$ . Por lo tanto,  $\forall \omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ,

$$\omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k = \limsup_n A_n. \text{ Por lo tanto, } \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \limsup_n A_n$$

**Parte II:**  $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$

- Parte II.i:  $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$

Ver parte 3 (no se requiere que la sucesión sea decreciente).

- Parte II.ii:  $\limsup_n A_n \subset \liminf_n A_n$

Si  $\omega \in \liminf_n A_n$  entonces  $\omega$  pertenece a todos los  $A_n$  salvo, a lo sumo, a una cantidad finita de ellos (ver demostración de prop 1.11/2). Luego, si  $\omega \in \limsup_n A_n \Rightarrow \omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k$ ,

pero si  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es decreciente, entonces  $\omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow$  por definición de intersección,  $\omega \in A_n \forall n \Rightarrow \omega \in \liminf_n A_n$

De lo anterior se desprende que  $\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$  (parte I) y que  $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$

(parte II). Por transitividad entonces  $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \liminf_n A_n$ , por lo que queda demostrado el teorema.

## Parte 8

Debemos demostrar tres de las cuatro desigualdades. La última queda demostrada por transitividad.

**Parte I:**  $\Pr\left(\liminf_n A_n\right) \leq \liminf_n \Pr(A_n)$

$$\begin{aligned}\Pr\left(\liminf_n A_n\right) &= \Pr\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k\right) && \text{por definición de límite inferior} \\ &= \Pr\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) && \text{definiendo a } B_n = \bigcap_{k \geq n} A_k \\ &= \lim_n \Pr(B_n) && \text{por ser } B_n \text{ creciente} \\ &= \lim_n \Pr\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right) && \text{por definición de } B_n \\ &= \liminf_n \Pr\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right) && \text{por ser el primero el límite de una sucesión} \\ &\leq \liminf_n \Pr(A_k) \quad \forall k \geq n && \text{por definición de intersección}\end{aligned}$$

**Parte II:**  $\liminf_n \Pr(A_n) \leq \limsup_n \Pr(A_n)$

En este caso estamos hablando del límite inferior y del límite superior de una sucesión real, los cuales se definen como:

$$\begin{aligned}\blacksquare \quad \liminf_n \Pr(A_n) &= \lim_n \left[ \inf_{k \geq n} \Pr(A_k) \right] \\ \blacksquare \quad \limsup_n \Pr(A_n) &= \lim_n \left[ \sup_{k \geq n} \Pr(A_k) \right]\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\liminf_n \Pr(A_n) \leq \limsup_n \Pr(A_n)$

**Parte III:**  $\limsup_n \Pr(A_n) \leq \Pr\left(\limsup_n A_n\right)$

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\limsup_n A_n\right) &= \Pr\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) && \text{por definici3n de l3mite superior} \\
&= \Pr\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) && \text{definiendo a } B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k \\
&= \lim_n \Pr(B_n) && \text{por ser } B_n \text{ decreciente} \\
&= \lim_n \Pr\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) && \text{por definici3n de } B_n \\
&= \limsup_n \Pr\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) && \text{por ser el primero el l3mite de una sucesi3n} \\
&\geq \limsup_n \Pr(A_k) \forall k \geq n && \text{por definici3n de uni3n}
\end{aligned}$$

## Ejercicio 2

Por el teorema del valor medio sabemos que:

$$f(\xi_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \Rightarrow f(\xi)[x_i - x_{i-1}] = F(x_i) - F(x_{i-1}) \text{ para todo } \xi \in [x_{i-1}, x_i]$$

Luego entonces,

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x) dF(x) &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \\
&= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) f(\xi_i) [x_i - x_{i-1}] = \int_a^b g(x) f(x) dx
\end{aligned}$$

### Ejercicio 3

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\alpha g(x) + \beta h(x)) dF(x) &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\alpha g(\xi_i) + \beta h(\xi_i)) [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \\
&= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left( \alpha g(\xi_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] + \beta h(\xi_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] \right) = \\
&= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \alpha g(\xi_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] + \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \beta h(\xi_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \\
&= \alpha \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] + \beta \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n h(\xi_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \\
&= \alpha \int_a^b g(x) dF(x) + \beta \int_a^b h(x) dF(x) = \alpha I_g + \beta I_h = I^*
\end{aligned}$$

### Ejercicio 4

Por el teorema de Weierstrass sabemos que toda función continua tiene máximo ( $M$ ) y mínimo ( $m$ ) en un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\text{I. } I &= \int_a^b g dF = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) (F(x_i) - F(x_{i-1})) \leq \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \\
&M \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = M (F(b) - F(a)) \\
\text{II. } I &= \int_a^b g dF = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) (F(x_i) - F(x_{i-1})) \geq \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \\
&m \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = m (F(b) - F(a))
\end{aligned}$$

Por lo tanto, sabemos que:

$$m(F(b) - F(a)) \leq I \leq M(F(b) - F(a)) \Rightarrow m \leq \frac{1}{F(b) - F(a)} I \leq M$$

Luego, por el teorema de Darboux sabemos que  $\exists c \in [a, b]$  tal que  $g(c) = \frac{1}{F(b) - F(a)} I$ . Por lo tanto,  $I = g(c)(F(b) - F(a))$ .



## Ejercicio 5

Sea la partición  $P = \{-z = c_0; \dots; c_n = z\}$  tal que  $a \in [c_{a-1}; c_a]$ ,  $b \in [c_{b-1}; c_b]$  y  $x_i \in [c_{i-1}; c_i]$ . Luego entonces,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dF(x) &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_{-z}^z \psi(x) dF(x) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \psi(x_i) [F(c_i) - F(c_{i-1})] = \\
 &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=a}^b \psi(x_i) [F(c_i) - F(c_{i-1})] = \\
 &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left[ \underbrace{\psi(x_a) [F(c_a) - F(c_{a-1})]}_{\psi(a) \underbrace{F(a) - F(a)}_{=0}} + \sum_{i=a+1}^{b-1} \psi(x_i) [F(c_i) - F(c_{i-1})] + \underbrace{\psi(x_b) [F(c_b) - F(c_{b-1})]}_{\psi(b) \underbrace{F(b) - F(b)}_{=0}} \right] = \\
 &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=a+1}^{b-1} \underbrace{\psi(x_i)}_{=1} [F(c_i) - F(c_{i-1})] = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=a+1}^{b-1} [F(c_i) - F(c_{i-1})] = \\
 &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} [F(c_{b-1}) - F(c_{a+1})] = F(b) - F(a)
 \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que  $c_{b-1} \xrightarrow{\|P\| \rightarrow 0} b$  y  $c_{a+1} \xrightarrow{\|P\| \rightarrow 0} a$ .

## Ejercicio 6

### Parte a

Queremos demostrar que  $\exists \int_a^c g dF$ . Por el teorema 1.33 sabemos que, dadas dos particiones  $P$  y  $Q$  tales que  $\|P\| \leq \delta$  y  $\|Q\| \leq \delta$ , se cumple que  $|S_P - S_Q| < \varepsilon$ .

Construyo las siguientes dos particiones:

- I.  $P^*[a, b]$  tal que  $\|P^*\| < \delta$ ,  $P^* = P$  en el intervalo  $[a, c]$ .
- II.  $Q^*[a, b]$  tal que  $\|Q^*\| < \delta$ ,  $Q^* = Q$  en el intervalo  $[a, c]$ .
- III. En el intervalo  $[c, b]$ ,  $P^*$  y  $Q^*$  comparten los mismos límites.

Luego entonces,

$$|S_{P^*} - S_{Q^*}| < \varepsilon$$

$$|S_P - S_Q| < \varepsilon$$

## Parte b

Sean  $g(x) = \mathbb{I}_{(c, b]}$  y  $f(x) = \mathbb{I}_{[c, b]}$ , entonces:

1.  $\int_a^c g dF = 0$  dado que está fuera del intervalo.
2.  $\int_c^b g dF = 0$  dado que  $F$  siempre vale 1.
3.  $\int_a^b g dF = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \left[ F(c_i) - F(c_{i-1}) \right]$

Luego, sea  $c \in [c_j, c_{j+1}]$ . Si  $\xi_i \in [c_j, c]$  entonces:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} g(\xi_i) \left[ \underbrace{F(c_j)}_{=0} - \underbrace{F(c)}_{=1} \right] = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} g(\xi_i) = 0$$

Si, en cambio,  $\xi_i \in [c, c_{j+1}]$ , entonces:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} g(\xi_i) \left[ \underbrace{F(c_j)}_{=0} - \underbrace{F(c)}_{=1} \right] = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} g(\xi_i) = 1$$

Dado que los límites por derecha e izquierda de  $c$  no coinciden, entonces no existe dicho límite, y por tanto no existe la integral.