Facultades de Ciencias y de Ciencias Económicas y de Administración
Licenciatura en Estadística

Probabilidad II
Primer semestre de 2018
Práctico 2

1. Probar los siguientes resultados
   (a) Si $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ y $Y_n \xrightarrow{c.s.} Y$ entonces $X_n + Y_n \xrightarrow{c.s.} X + Y$.
   (c) Si $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ y g es una función continua, entonces $g(X_n) \xrightarrow{c.s.} g(X)$.
   (e) Si $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ y $Y_n \xrightarrow{c.s.} Y$ y a_n, b_n dos sucesiones de números reales tales que $a_n \to a > 0$ y $b_n \to b$, entonces $a_nX_n + b_nY_n \xrightarrow{c.s.} aX + bY$.
   (d) ¿Valen los resultados anteriores en el caso que $X_n \xrightarrow{P} X$ y $Y_n \xrightarrow{P} Y$?
2. Verificar que si $X_1, X_2, \dots$ i.i.d., entonces $\overline{X}_n$ es un estimador coherente o consistente para
   (a) El parámetro p, si $X_1 \sim Bin(1, p)$,
   (b) λ, si $X_1 \sim Poi(\lambda)$,
   (c) $1/\lambda$, si $X_1 \sim Exp(\lambda)$.
3. Supongamos que queremos obtener un estimador de θ de una muestra $X_1, X_2, \dots$ de la distribución Unif$(0, \theta]$. Dado que $\int_0^\theta xdF(x) = \theta/2$, se propone el estimador $T_n = 2\sum_{i=1}^n X_i/n$. ¿$T_n$, converge c.s. a θ?. Analizar la convergencia del estimador alternativo de θ, $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.
4. Mostrar que $d_2(X, Y) = \sqrt{\mathbb{E}(X - Y)^2}$ es una distancia en el conjunto de las variables aleatorias con momento de segundo orden finito. Verificar que $d_2(X_n, Y) \to 0$ implica $X_n \xrightarrow{P} Y$, pero $X_n \xrightarrow{P} Y$ no implica que $d_2(X_n, Y) \to 0$.
5. Se define $d_P(X, Y) := E(1 - \exp(-|X - Y|))$. Demostrar que
   (a) $d_P(X, Y)$ es una distancia en el espacio de todas las v.a. reales. Para la desigualdad triangular se sugiere usar (y demostrar) que $1 - uv \leq 1 - u + 1 - v$ para todo $u, v \in [0, 1]$.
   (b) si $Y, X_1, X_2, \dots$ es una sucesión de v.a. reales entonces $d_P(X_n, Y) \to 0$ si y sólo si $X_n \xrightarrow{P} Y$.
6. Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de v.a. que converge en media cuadrática a la v.a. X cuando $n \to \infty$, y X es tal que $E(X^2) < \infty$, es decir $E[(X_n - X)^2] \to 0$ cuando $n \to \infty$. Demostrar que
   (a) $E(X_n) \to E(X)$ cuando $n \to \infty$.
   (b) $E(X_n^2) \to E(X^2)$ cuando $n \to \infty$.

   Encontrar una sucesión de v.a. que converge en media pero no converge en media cuadrática.

7. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d y sea $X_{1:n} := min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Probar que la sucesión de estimadores $\{X_{1:n}\}_{n\geq 1}$ de θ es débilmente coherente según la f.d.p $f(x;\theta)$ sea

   a) $f(x;\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta < x < \theta + 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

   b) $f(x;\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{si } x > \theta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

   c) $f(x;\theta) = \begin{cases} 2(x-\theta) & \text{si } \theta < x < \theta + 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

   Finalmente, supongamos que $f(x;\theta) = 0 \ \forall \ x < \theta$. Proponer una condición sencilla sobre f que asegure la coherencia débil de la sucesión de estimadores $\{X_{1:n}\}_{n\geq 1}$ de θ y que contenga (a),(b) y (c) como casos particulares.

8. Se consideran las v.a. $X_k = \alpha + \beta\, z_k + \epsilon_k\,,\ \ k = 1, \ldots$ donde α y β son parametros desconocidos llamados *coeficientes de regresión*, z_k son constantes conocidas y ϵ_k son v.a. i.i.d. con $E(\epsilon_k) = 0$ y $Var(\epsilon_k) = \sigma^2\ \forall k$. Hallar una condición suficiente para la coherencia débil de las sucesiones de estimadores:

   $\hat{\alpha}_n = \overline{X}_n - \overline{z}_n\, \hat{\beta}_n$ de α

   $\hat{\beta}_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (z_i - \overline{z}_n)\, X_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (z_i - \overline{z}_n)^2}$ de β siendo $\overline{z}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$.

9. Una sucesión de variables aleatorias, Y_n, se dice *estocásticamente acotada*, cuando para cada $\epsilon > 0$ existe una constante K y un valor $n_0 = n_0(\epsilon)$ tales que $P(|Y_n| \leq K) \geq 1 - \epsilon \quad \forall\, n > n_0 = n_0(\epsilon)$. Dada Y_n estocásticamente acotada y otra sucesión de variables aleatorias X_n tal que

   $$\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{P} 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

   demostrar que

   $$X_n \xrightarrow{P} 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

10. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d. con valor esperado μ y variancia finita σ^2. Mostrar que

    $$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2} \xrightarrow{c.s.} \frac{\mu}{\sigma^2 + \mu^2}$$

    cuando $n \to \infty$.

11. Sea $\{(X_k, Y_k)^{tr},\ 1 \leq k \leq n\}$ una muestra aleatoria de una distribución bivariada con vector de valores esperados y matriz de variancias y covariancias

    $$\mu = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix},$$

y sean

$$\begin{array}{rl} \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k & S_{n,x}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n \left(X_k - \overline{X}_n\right)^2 \\ \overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k & S_{n,y}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n \left(Y_k - \overline{Y}_n\right)^2 \end{array}$$

las medias aritméticas y variancias muestrales.

(a) Probar que $S_{n,x}^2 \xrightarrow{c.s.} \sigma_x^2$ y que $S_{n,y}^2 \xrightarrow{c.s.} \sigma_y^2$ cuando $n \to \infty$.

(b) Se define el *coeficiente de correlación empírico* como

$$r_n = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \overline{X}_n)(Y_k - \overline{Y}_n)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \left(X_k - \overline{X}_n\right)^2 \sum_{k=1}^n \left(Y_k - \overline{Y}_n\right)^2}}.$$

Probar que $r_n \xrightarrow{c.s.} \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ cuando $n \to \infty$.

12. Dada una partición del intervalo $[0,1]$ en n subintervalos disjuntos de longitudes $p_1, p_2, \ldots, p_n$ se define la *entropía* de dicha partición como $H = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i$. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d. con distribución uniforme en $[0,1]$, y sea $Z_m(i)$ el número de variables $X_1, X_2, \ldots, X_m$ que caen en el intervalo i-ésimo de la partición dada. Mostrar que $R_m = \prod_{i=1}^n {p_i}^{Z_m(i)}$ cumple $\frac{1}{m}\log R_m \xrightarrow{c.s.} -H$ cuando $m \to \infty$.

13. Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continua.

(a) Sean $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ v.a. i.i.d., $\xi_1 \sim Uni[0,1]$, y se consideran las v.a. $X_n := f(\xi_n)$,$n \geq 1$. Mostrar que $\overline{X}_n \xrightarrow{c.s.} \int_0^1 f(t)dt$.

(b) Se define la sucesión de v.a. $\{Y_n := \mathbf{I}_{\{f(\xi_n) \geq U_n\}}\}_{n\geq 1}$ con $\xi_1, \xi_2, \ldots, U_1, U_2, \ldots$ v.a. i.i.d. $Uni[0,1]$. Mostrar que $\overline{Y}_n \xrightarrow{c.s.} \int_0^1 f(t)dt$.

(c) Calcular $Var(\overline{X}_n)$ y $Var(\overline{Y}_n)$.

14. Un jugador (con un capital inicial de por ejemplo \$1,000) realiza sus apuestas a lo largo de una sucesión de pruebas independientes con la misma probabilidad de éxito $0 < p < 1$. Al final de cada prueba el jugador tendrá un capital dado por el doble de lo anterior, o la mitad, dependiendo que el resultado de la prueba sea un éxito o un fracaso.

(a) Construir sobre un espacio de probabilidad una sucesión $\{X_n\}_{n\geq 1}$ de v.a. reales, tal que X_n represente el capital del jugador luego de la prueba n-ésima.

(b) Hallar el valor esperado de X_n, y calcular el límite de $E(X_n)$ cuando $n \to \infty$.

(c) Probar que si $p < \frac{1}{2}$ entonces $X_n \xrightarrow{c.s.} 0$. Sugerencia: considerar el logaritmo de X_n y emplear la LFGN de Kolmogorov para v.a. i.i.d.

(d) Comentar los resultados anteriores cuando $\frac{1}{3} < p < \frac{1}{2}$.

15. Se define una sucesión de experimentos independientes, cada uno consiste en sortear un número real al azar entre 0 y 1 con distribución uniforme. Se define la sucesión de sucesión de variables aleatorias: $X_n := \mathbb{I}_{[0,1/n]}(\omega_n)$ donde ω_n es el resultado del n-ésimo experimento. Se pide:

    a) Definir adecuadamente un espacio de probabilidad sobre el que se puedan definir toda la sucesión de variables aleatorias.

    b) Estudiar el límite *casi-seguro* de la sucesión.

16. Probar que

$$\cap_{\epsilon\in\mathbb{R}^+} \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty}\{|X_k - X| < \epsilon\} = \cap_{\epsilon\in\mathbb{Q}^+} \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty}\{|X_k - X| < \epsilon\}$$