

Práctico 3

Daniel Czarniewicz

2019

Ejercicio 1

No se cumple. Para demostrarlo, tomemos el siguiente contraejemplo.

Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tales que:

$$X_n = \begin{cases} n^2 & \text{con probabilidad } 1/n^2 \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - 2/n^2 \\ -n^2 & \text{con probabilidad } 1/n^2 \end{cases}$$

Caculemos entonces su esperanza, y la esperanza de su valor absoluto.

$$\mathbf{E}(X_n) = \sum_{x \in \text{Rec}(X_n)} x \Pr(X_n = x) = n^2 \left(\frac{1}{n^2} \right) + 0 \left(1 - \frac{2}{n^2} \right) + (-n^2) \left(\frac{1}{n^2} \right) = 1 - 1 = 0$$

$$\mathbf{E}(|X_n|) = \sum_{x \in \text{Rec}(X_n)} |x| \Pr(X_n = x) = |n^2| \left(\frac{1}{n^2} \right) + |0| \left(1 - \frac{2}{n^2} \right) + |-n^2| \left(\frac{1}{n^2} \right) = 1 + 1 = 2$$

Veamos que la sucesión converge casi seguramente a cero.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(|X_n - 0| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(|X_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(|X_n| > 0) =$$

$$\Pr(X_n = n^2) + \Pr(X_n = -n^2) = \frac{2}{n^2} \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{cs} 0$$

Pero $\mathbf{E}|X_n - 0| = \mathbf{E}|X_n| = 2 \neq 0 = \mathbf{E}(X)$, por lo que no se cumple la tesis del teorema si la sucesión no es de variables no negativas.

Ejercicio 2

Parte a: $X_n \xrightarrow{d} c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{p} c$

(\Rightarrow) Si $X_n \xrightarrow{d} c$ entonces sabemos que $F_{X_n}(x) = F_c(x)$ para todo $x \in \mathcal{C}(F_c)$. Luego:

$$\begin{aligned} \Pr(|X_n - c| > \varepsilon) &= 1 - \Pr(|X_n - c| \leq \varepsilon) = \\ &= 1 - \Pr(-\varepsilon \leq X_n - c \leq \varepsilon) = 1 - \Pr(c - \varepsilon \leq X_n \leq c + \varepsilon) = \\ &= 1 - \left[\underbrace{F_{X_n}(c + \varepsilon)}_{=1} - \underbrace{F_{X_n}(c - \varepsilon)}_{=0} \right] = 1 - 1 = 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} c \end{aligned}$$

dado que $c + \varepsilon$ y $c - \varepsilon$ son puntos de continuidad de F_c .

(\Leftarrow) Si $X_n \xrightarrow{p} c$ entonces sabemos que $X_n \xrightarrow{d} c$ siempre.

Parte b: si $X_n \xrightarrow{d} X$ y $Y_n \xrightarrow{d} c \in \mathbb{R}$ entonces $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$

Utilizaremos los siguientes cuatro postulados:

- I. Si $Y_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow Y_n \xrightarrow{p} c$.
- II. Si $|Y_n - X_n| \xrightarrow{p} 0$ y $X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow Y_n \xrightarrow{d} X$.
- III. Si $X_n \xrightarrow{d} X$ y $Y_n \xrightarrow{p} c \Rightarrow (X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, c)$.
- IV. Si $X_n \xrightarrow{d} X$ y g es una función continua, entonces $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$.

Dem i: demostrado en la parte a del ejercicio.

Dem ii: consideremos una función f acotada y Lipschitz continua¹. Entonces, $\exists K > 0$, tal que $\forall x, y$ se cumple que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Luego, tomemos un $\varepsilon > 0$ y acotemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{E}[f(Y_n)] - \mathbf{E}[f(X_n)] \right| &= \left| \mathbf{E}[f(Y_n) - f(X_n)] \right| \leq \mathbf{E}[|f(Y_n) - f(X_n)|] = \\ &= \mathbf{E}[|f(Y_n) - f(X_n)| \mathbb{I}_{\{|Y_n - X_n| < \varepsilon\}}] + \mathbf{E}[|f(Y_n) - f(X_n)| \mathbb{I}_{\{|Y_n - X_n| \geq \varepsilon\}}] \leq \end{aligned}$$

¹Dados dos espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) decimos que una función $f : X \rightarrow Y$ es Lipschitz continua si $\exists K \geq 0$ tal que, para todo $x_1, x_2 \in X$, se cumpla que $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K d_X(x_1, x_2)$. Esto implica que para todo par de puntos sobre la gráfica de f , el valor absoluto de la pendiente del segmento de recta que conecta dichos puntos es mejor que K . En este sentido, la continuidad de Lipschitz es una cota a cuán rápido permitimos que la función cambie (crezca o decrezca).

$$\begin{aligned}
&\leq \mathbf{E} \left[K |Y_n - X_n| \mathbb{I}_{\{|Y_n - X_n| < \varepsilon\}} \right] + \mathbf{E} \left[2 M \mathbb{I}_{\{|Y_n - X_n| \geq \varepsilon\}} \right] \leq \\
&\leq \mathbf{E} \left[K \varepsilon \mathbb{I}_{\{|Y_n - X_n| < \varepsilon\}} \right] + \mathbf{E} \left[2 M \mathbb{I}_{\{|Y_n - X_n| \geq \varepsilon\}} \right] = \\
&= K \varepsilon \mathbf{E} \left[\mathbb{I}_{\{|Y_n - X_n| < \varepsilon\}} \right] + 2 M \mathbf{E} \left[\mathbb{I}_{\{|Y_n - X_n| \geq \varepsilon\}} \right] = \\
&= K \varepsilon \Pr \left(|Y_n - X_n| < \varepsilon \right) + 2 M \Pr \left(|Y_n - X_n| \geq \varepsilon \right) \leq \\
&\leq K \varepsilon + 2 M \Pr \left(|Y_n - X_n| \geq \varepsilon \right)
\end{aligned}$$

donde la primer desigualdad se cumple por la desigualdad de Jensen. La segunda desigualdad se cumple porque para el primer sumando utilizamos la continuidad de Lipschitz, y para el segundo el hecho de que f es una función acotada por M . En el primer término de la tercer desigualdad acotamos a $|Y_n - X_n|$ por ε dado que ese el conjunto que determina la indicatriz. Por último, en la cuarta desigualdad simplemente acotamos la probabilidad del suceso $\{|Y_n - X_n| < \varepsilon\}$ por 1 (lo cual es válido dado que toda probabilidad está acotada superiormente por 1).

El objetivo ahora es utilizar las definiciones alternativas de la convergencia en distribución que nos brinda el lema de Portmanteau para probar la tesis. El mismo establece que Y_n convergerá en distribución a X , sí y solo sí $\mathbf{E} [f(Y_n)] \xrightarrow{n} \mathbf{E} [f(X)]$ para toda f continua y acotada. Procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\left| \mathbf{E} [f(Y_n)] - \mathbf{E} [f(X)] \right| &= \left| \mathbf{E} [f(Y_n)] - \mathbf{E} [f(X_n)] + \mathbf{E} [f(X_n)] - \mathbf{E} [f(X)] \right| \leq \\
&\leq \left| \mathbf{E} [f(Y_n)] - \mathbf{E} [f(X_n)] \right| + \left| \mathbf{E} [f(X_n)] - \mathbf{E} [f(X)] \right| \leq \\
&\leq K \varepsilon + 2 M \underbrace{\Pr \left(|Y_n - X_n| \geq \varepsilon \right)}_{\xrightarrow{n} 0 \text{ dado que } |Y_n - X_n| \xrightarrow{P} 0} + \underbrace{\left| \mathbf{E} [f(X_n)] - \mathbf{E} [f(X)] \right|}_{\xrightarrow{n} 0 \text{ dado que } X_n \xrightarrow{d} X} = K \varepsilon \xrightarrow{n} 0
\end{aligned}$$

donde la primer desigualdad se cumple por desigualdad triangular y la segunda desigualdad se cumple utilizando la cota hallada en el paso anterior.

Por lo tanto, queda probado que $\mathbf{E} [f(Y_n)] \xrightarrow{n} \mathbf{E} [f(X)]$, de donde se desprende, por el lema de Portmanteau que $Y_n \xrightarrow{n} X$.

Dem iii: primero queremos demostrar que $(X_n, c) \xrightarrow{d} (X, c)$. Por el teorema 2.39 (lema de Portmanteau) sabemos que $(X_n, c) \xrightarrow{d} (X, c) \Leftrightarrow \mathbf{E} [f(X_n, c)] \xrightarrow{n} \mathbf{E} [f(X, c)]$ para toda $f(x, y)$ continua y acotada.

Tomemos una función f que cumpla con ser continua y acotada, y consideremos a la función $g(x) := f(x, c)$ (es decir, la función definida manteniendo la variable y constante en c). Debido a como la definimos, g también será continua y acotada. Por lo tanto, $\mathbf{E} [g(X_n)] \xrightarrow{n} \mathbf{E} [g(X)]$.

Pero dicha expresión es equivalente a decir que, $\mathbf{E} [f(X_n, c)] \xrightarrow{n} \mathbf{E} [f(X, c)]$, y por lo tanto, dado que $X_n \xrightarrow{d} X$, sabemos que $(X_n, c) \xrightarrow{d} (X, c)$.

En segundo lugar consideremos la expresión $|(X_n, Y_n) - (X_n, c)| = |X_n - X_n, Y_n - c| = |(0, Y_n - c)|$. Dicha expresión converge en probabilidad a cero dado que $Y_n \xrightarrow{p} c$.

Por lo tanto, hemos demostrado que:

a. $|(X_n, Y_n) - (X_n, c)| \xrightarrow{p} 0$

b. $(X_n, c) \xrightarrow{d} (X, c)$

Por lo tanto, estamos en las hipótesis del postulado ii. Entonces, podemos deducir que $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y)$.

Dem iv: demostrado en el ejercicio 4.

Recapitulando:

1. Por el postulado i sabemos que si $Y_n \xrightarrow{d} c$, entonces $Y_n \xrightarrow{p} c$.
2. Por los postulados ii y iii sabemos que si $X_n \xrightarrow{d} X$ y $Y_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow (X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, c)$.
3. Y por el postulado iv sabemos que si $X_n \xrightarrow{d} X$ y g es continua, entonces $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$.

Consideremos entonces la función $g(x, y) = x + y$, tenemos que $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$.

Parte c: si $X_n \xrightarrow{d} X$ y $Y_n \xrightarrow{d} c \in \mathbb{R}$ entonces $X_n Y_n \xrightarrow{d} X c$

Ídem parte b, solo que en este caso debemos tomar la función $g(x, y) = xy$.

Parte d: si $X_n \xrightarrow{d} X$ y $Y_n \xrightarrow{d} 1 \in \mathbb{R}$ entonces $X_n^{Y_n} \xrightarrow{d} X$

Por la parte a sabemos que si $Y_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow Y_n \xrightarrow{p} c$ (esto no es cierto en general, pero sí cuando la convergencia es a una constante).

$$X_n^{Y_n} = e^{Y_n \log(X_n)} \xrightarrow{d} e^{1 \log X} = e^{\log X} = X$$

Parte e: si $X_n \xrightarrow{d} X$ y $Y_n \xrightarrow{d} 1 \in \mathbb{R}$ entonces $Y_n^{X_n} \xrightarrow{d} 1$

Por la parte a sabemos que si $Y_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow Y_n \xrightarrow{p} c$ (esto no es cierto en general, pero sí cuando la convergencia es a una constante).

$$Y_n^{X_n} = e^{X_n \log(Y_n)} \xrightarrow{d} e^{X \log 1} = e^0 = 1$$

Ejercicio 3

Convergencia uniforme de funciones:

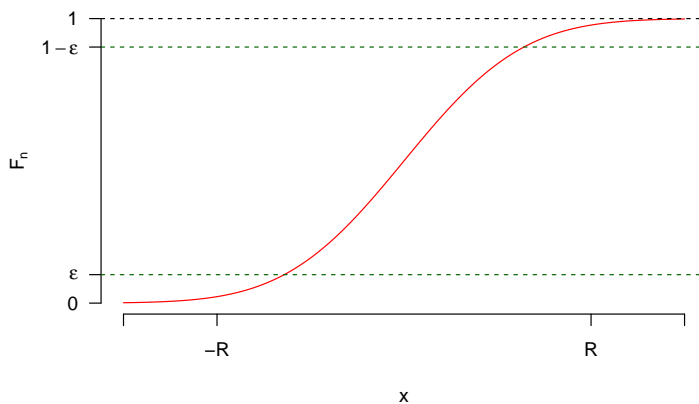
Sean $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ funciones a valores reales. Decimos que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f sí, y solo sí, $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in E$.

Una forma alternativa de caracterizar este concepto (la que usaremos en este ejercicio) es la siguiente. Sea $d_n(f_n, f) = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$. Entonces, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow f \Leftrightarrow d_n(f_n, f) \xrightarrow{n} 0$.

Por lo tanto, probar una convergencia uniforme implica probar que la sucesión de funciones se encuentra siempre (léase, a partir de un n) cerca de la función límite f . Es decir, $f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon$ para todos los valores del x en el conjunto E .

Dado que lo que queremos probar es que $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n} 0$, definamos el conjunto $E = [-R, R]$ y estudiemos los dos supremos por separado: i) cuando $x \in E$, y ii) cuando $x \in E^c$.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $R = R(\varepsilon) > 0$ tal que $F(R) - F(-R) > 1 - \varepsilon$. Por lo tanto, $F(-R) < \varepsilon$, mientras que $F(R) > 1 - \varepsilon$.



Dado que F es continua en R y en $-R$ (por hipótesis) y F_n converge puntualmente a F (dado que, por hipótesis, converge en distribución), sabemos que $\exists N_0$ tal que $\forall n \geq N_0$ se cumple que $|F_n(R) - F(R)| < \varepsilon$ y $|F_n(-R) - F(-R)| < \varepsilon$. Es decir, $d_n(F_n, F) \xrightarrow{n} 0$ en $x = R$ y en $x = -R$.

Consideremos primero un $r \leq -R$ (es decir, un valor de x a la izquierda de $-R$). Por la convergencia en distribución y la continuidad sabemos que $|F_n(r) - F(r)| < \varepsilon$. El objetivo es acotar esta expresión. Primero observemos que $F_n(-R) < F(-R) + \varepsilon$:

$$|F_n(-R) - F(-R)| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < F_n(-R) - F(-R) < \varepsilon \Leftrightarrow F(-R) - \varepsilon < F_n(-R) < F(-R) + \varepsilon$$

Luego entonces, para todo $n \geq N_0$ se cumple que:

$$|F_n(r) - F(r)| \leq F_n(r) + F(r) \leq F_n(-R) + F(-R) \leq F(-R) + \varepsilon + F(-R) \leq 3\varepsilon$$

donde la primer desigualdad se cumple por propiedad del valor absoluto.² La segunda desigualdad se cumple dado que tomamos $r \leq -R$. La tercer desigualdad se cumple por el razonamiento anterior. La última desigualdad se cumple debido a como definimos $-R$.

Consideremos ahora un $r \geq R$. Sabemos lo siguiente:

- I. R fue elegido de forma tal que $1 - \varepsilon < F(R)$.
- II. Como hay convergencia puntual (por la convergencia en distribución), existe N_0 tal que para todo $n \geq N_0$ se cumple que:

$$|F_n(R) - F(R)| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < F_n(R) - F(R) < \varepsilon \Leftrightarrow F(R) - \varepsilon < F_n(R) < F(R) + \varepsilon$$

- III. Todas las funciones son de distribución, y por lo tanto, monótonas no decrecientes. Entonces:

$$\begin{aligned} F(R) &\leq F(r) \leq 1 \\ F_n(R) &\leq F_n(r) \leq 1 \end{aligned}$$

Utilizando que $1 - \varepsilon < F(R)$, y que $F(R) \leq F(r) \leq 1$ hallamos que $1 - \varepsilon < F(r) \leq 1$. Por otro lado, utilizando que $F(R) - \varepsilon < F_n(R) < F(R) + \varepsilon$, y que $F_n(R) \leq F_n(r) \leq 1$, hallamos que:

$$\begin{aligned} F(R) - \varepsilon < F_n(R) &\leq F_n(r) \leq 1 &\Leftrightarrow \\ -F(R) + \varepsilon > -F_n(R) &\geq -F_n(r) \geq -1 &\Leftrightarrow \\ -1 &\leq -F_n(r) < -F(R) + \varepsilon \end{aligned}$$

Sumando verticalmente ambas equaciones obtenemos que:

$$\begin{array}{rcccl} 1 - \varepsilon & < & F(r) & & \leq & 1 \\ -1 & & \leq & -F_n(r) & < & -F(R) + \varepsilon \\ \hline 1 - \varepsilon - 1 & < & F(r) - F_n(r) & < & 1 - F(R) + \varepsilon \end{array}$$

Del lado izquierdo (cota inferior), podemos simplificar para hallar que:

$$-\varepsilon < F(r) - F_n(r) < 1 - F(R) + \varepsilon$$

Por su parte, del lado derecho (cota superior), debemos recordar que R fue elegido de forma tal que $1 - \varepsilon < F(R)$. Pero esto implica que $1 - F(R) < \varepsilon$. Remplazando obtenemos que:

$$-\varepsilon < F(r) - F_n(r) < 1 - F(R) + \varepsilon < 2\varepsilon$$

²Por la desigualdad triangular sabemos que $a - b \leq |a - b| \leq |a| + |b|$. Dado que las funciones de distribución toman siempre valores positivos únicamente se cumple también que $|a| + |b| = a + b$.

Luego entonces:

$$-\varepsilon < F(r) - F_n(r) < 2\varepsilon \Leftrightarrow -2\varepsilon < F(r) - F_n(r) < 2\varepsilon \Leftrightarrow |F_n(r) - F(r)| < 2\varepsilon$$

Por lo tanto, hemos probado que, si $n \geq N_0$, $\sup_{x \in [-R, R]} |F_n(x) - F(x)| < 3\varepsilon$.

Por último, consideremos un $r \in [-R, R]$. Dado que F es uniformemente continua en $[-R, R]$ sabemos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, si $|x - y| < \delta$, entonces $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$. Consideremos la partición $-R < x_1 < x_2 < \dots < x_k < R$ tal que $x_i - x_{i-1} < \delta$. Como $F_n(x_i) \xrightarrow{n} F(x_i)$, $\exists n_i$ tal que si $n > n_i$, $|F_n(x_i) - F(x_i)| < \varepsilon$. Es decir, para cada sub-intervalo de la partición, la función converge a partir de algun valor n_i , no necesariamente el mismo para todos los sub-intervalos. Sea $N_1 = \max(n_1, \dots, n_k)$ (el mayor de todos los n_i).

Sea i tal que $x_{i-1} < r < x_i$ (es decir, el sub-intervalo que contiene al valor r), y consideremos $n > N_1$ (esto nos asegura que tengamos convergencia en dicho intervalo). Por lo tanto se cumple que:

$$\begin{aligned} F_n(r) - F(r) &\leq F_n(x_i) - F(x_{i-1}) & F(r) - F_n(r) &\leq F(x_i) - F_n(x_{i-1}) \\ &\leq F(x_i) + \varepsilon - F(x_{i-1}) & &\leq F(x_i) - F(x_{i-1}) + \varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon & &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado que, si $n \geq N_1$, $\sup_{x \in [-R, R]} |F_n(x) - F(x)| < 2\varepsilon$.

Por último, tomemos $n > \max(N_0, N_1)$. Entonces se cumple que $\sup |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow{n} 0$, por lo que queda demostrado que $f_n \Rightarrow f$.

Ejercicio 4

Demostración utilizando composición de funciones.

Por hipótesis sabemos que $X_n \xrightarrow{d} X$. Esto implica que para toda función f continua y acotada se cumple que $\mathbf{E}[f(X_n)] \xrightarrow{n} \mathbf{E}[f(X)]$ (ver teorema 2.39). Sea $h = f \circ g$. Entonces h también es continua y acotada dado que, por hipótesis, g es continua. Por lo tanto:

$$\mathbf{E}[f(g(X_n))] = \mathbf{E}[h(X_n)] \xrightarrow{n} \mathbf{E}[h(X)] = \mathbf{E}[f(g(X))] \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$$

Demostración utilizando el teorema de representación de Skorokhod.

Dado que $X_n \xrightarrow{d} X$ el teorema de Skorokhod nos asegura que existen $X_n^* \stackrel{d}{=} X_n$ y $X^* \stackrel{d}{=} X$ tales que $X_n^* \xrightarrow{cs} X^*$. Dado que g es continua, $g(X_n^*) \xrightarrow{cs} g(X^*)$. Pero dado que las nuevas variables (X_n^* y X^*) se definieron de forma de ser iguales en distribución a las variables originales (X_n y X), $g(X_n^*) \xrightarrow{cs} g(X^*)$ implica que $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$.

Lo anterior se cumple dado que si $X, Y : \Omega \rightarrow F$ son dos variables aleatorias tales que $X \stackrel{d}{=} Y$ entonces $g(X) \stackrel{d}{=} g(Y)$ para toda g función continua.

$$\begin{aligned} F_{g(X)}(x) &= \Pr(g(X) \leq x) = \Pr(X \in g^{-1}(-\infty, x]) = \Pr(Y \in g^{-1}(-\infty, x]) = \\ &= \Pr(g(Y) \leq x) = F_{g(Y)}(x) \end{aligned}$$

Ejercicio 5

Comenzemos entendiendo cómo es la sucesión de variables aleatorias con la que debemos trabajar. Se establece que $X_n \sim \text{Unif}\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ con $n \geq 1$, por lo tanto:

$$\text{Si } n = 1 : X_1 \sim \text{Unif}\{1\} \quad \Rightarrow \quad f_{X_1}(x) = 1$$

$$\text{Si } n = 2 : X_2 \sim \text{Unif}\left\{\frac{1}{2}, 1\right\} \quad \Rightarrow \quad f_{X_2}(x) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Si } n = 3 : X_3 \sim \text{Unif}\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\} \quad \Rightarrow \quad f_{X_3}(x) = \frac{1}{3}$$

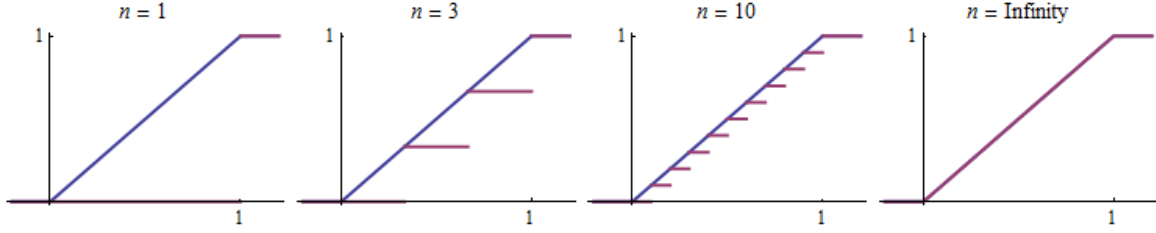
$$\text{Si } n = 4 : X_4 \sim \text{Unif}\left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\right\} \quad \Rightarrow \quad f_{X_4}(x) = \frac{1}{4}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\text{Si } n = k : X_k \sim \text{Unif}\left\{\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\right\} \quad \Rightarrow \quad f_{X_k}(x) = \frac{1}{k}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

Debemos demostrar que: $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ para todo punto de continuidad de F_X . Dada la sucesión de variables aleatorias descripta arriba sus funciones de distribución serán (por ejemplo):



Comencemos notando que, por cómo está definida la sucesión, $F_{X_n} = 0$ para todo valor de $x < 1/n$, mientras que $F_{X_n}(x) = 1$ para cualquier valor de $x \geq 1$. Para los valores de x entre 0 y 1 debemos notar (ver imagen) que F_{X_n} nunca se separa de F_X en más de $1/n$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\lim_n F_{X_n}(x) = \lim_n \frac{1}{n} \lfloor xn \rfloor \leq \lim_n \frac{nx}{n} = x$$

Donde la desigualdad se debe a que $nx - 1 \leq \lfloor xn \rfloor \leq nx$. Por lo tanto, hemos demostrado que $X_n \xrightarrow{d} X \sim \text{Unif}(0, 1)$.

Ejercicio 6

(\Rightarrow)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(X_n = x_j) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[F_{X_n}(x_j) - F_{X_n}(x_{j-1}) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x_j) - \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x_{j-1}) = \\ &= F_X(x_j) - F_X(x_{j-1}) = P(X = x_j) \end{aligned}$$

(\Leftarrow)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x_j) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{x \in \text{Rec}(X_n) \\ x \leq j}} \Pr(X_n = x_j) = \sum_{\substack{x \in \text{Rec}(X_n) \\ x \leq j}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(X_n = x_j) = \\ &= \sum_{\substack{x \in \text{Rec}(X_n) \\ x \leq j}} \Pr(X = x_j) = F_X(x_j) \end{aligned}$$

Ejercicio 7

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty \\ np \rightarrow \lambda}} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} &= \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty \\ np \rightarrow \lambda}} \frac{n!}{(n-x)! x!} p^x (1-p)^{n-x} = \\ &= \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty \\ np \rightarrow \lambda}} \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(x-1))}{x!} p^x (1-p)^{n-x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty \\ np \rightarrow \lambda}} \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(x-1))}{x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \\
&= \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty \\ np \rightarrow \lambda}} \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2) \dots (n-(x-1))}^{\text{Hay } x \text{ términos, por lo tanto es un polinomio de grado } x}}{n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \approx \\
&\approx \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty \\ np \rightarrow \lambda}} \frac{n^x}{n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty \\ np \rightarrow \lambda}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\rightarrow e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}}_{\rightarrow 1^{-x} \rightarrow 1} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Ejercicio 8

Parte a

$$\begin{aligned}
\lim_n F_n(x) &= \lim_n \left(\frac{1}{2} \mathbb{I}_{\{0 \leq x < 1/n\}} + \mathbb{I}_{\{x \geq 1/n\}} \right) = \frac{1}{2} \underbrace{\lim_n \mathbb{I}_{\{0 \leq x < 1/n\}}}_{\xrightarrow{n} \mathbb{I}_{\{x=0\}}} + \underbrace{\lim_n \mathbb{I}_{\{x \geq 1/n\}}}_{\xrightarrow{n} \mathbb{I}_{\{x > 0\}}} \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{I}_{\{x=0\}} + \mathbb{I}_{\{x > 0\}}
\end{aligned}$$

Pero $x = 0$ no es un punto de continuidad, por lo tanto no debe ser considerado. Para los puntos de continuidad sí se cumple la convergencia.

Parte b

Sea $F_0(x) = F_{X_0}(x) = \mathbb{I}_{\{x \geq 0\}}$. Luego entonces:

$$\lim_n F_n(0) = \lim_n \left(\frac{1}{2} \mathbb{I}_{\{x=0\}} \right) = \frac{1}{2} \neq 1 = F_0(0)$$

Parte c

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_x |F_n(x) - F_0(x)| = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 9

Primero debemos hallar la distribución de $\tau(m)$:

$$\begin{aligned}
 \Pr(\tau(m) = 1) &= \Pr(X_1 > m) = p_m \\
 \Pr(\tau(m) = 2) &= \Pr(X_1 \leq m) \Pr(X_2 > m) = F(m)[1 - F(m)] = p_m(1 - p_m) \\
 \Pr(\tau(m) = 3) &= \Pr(X_1 \leq m) \Pr(X_2 \leq m) \Pr(X_3 > m) = F(m)[1 - F(m)]^2 = p_m(1 - p_m)^2 \\
 &\vdots \\
 \Pr(\tau(m) = k) &= \Pr(X_1 \leq m) \dots \Pr(X_{k-1} \leq m) \Pr(X_k > m) = F(m)[1 - F(m)]^{k-1} = p_m(1 - p_m)^{k-1}
 \end{aligned}$$

Vemos entonces que $\tau(m) \sim \text{Geo}(p_m)$. Esto se condice con la definición de $\tau(m)$. Si llamamos “éxito” a sobrepasar el nivel m , entonces $\tau(m)$ = “# de experimentos antes de alcanzar el 1er éxito”. Si $\tau(m)$ tiene distribución Geométrica con parámetro p_m , entonces sobre su función de distribución sabemos que:

$$\begin{aligned}
 F_{\tau(m)}(y) &= \Pr(\tau(m) \leq y) = \sum_{i=1}^{\lfloor y \rfloor} p_m(1 - p_m)^{i-1} = \sum_{j=0}^{\lfloor y \rfloor - 1} p_m(1 - p_m)^j = \\
 &= p_m \frac{1 - (1 - p_m)^{\lfloor y \rfloor}}{1 - (1 - p_m)} = 1 - (1 - p_m)^{\lfloor y \rfloor}
 \end{aligned}$$

Luego, lo que queremos probar es que $p_m \tau(m) \xrightarrow{d} \text{Exp}(1) = (1 - e^{-x}) \mathbb{I}_{\{x \geq 0\}}$. Nótese que no estamos hablando de la distribución de $\tau(m)$, sino de la distribución de $p_m \tau(m)$. Pero dado que p_m es constante respecto de n , podemos establecer el siguiente vínculo entre ambas distribuciones:

$$F_{p_m \tau(m)}(x) = \Pr(p_m \tau(m) \leq x) = \Pr(\tau(m) \leq x/p_m) = F_{\tau(m)}(x/p_m)$$

Por lo tanto, para hallar la distribución límite de $p_m \tau(m)$ podemos trabajar con la distribución de $\tau(m)$ evaluada en x/p_m . Esto requiere resolver el siguiente límite:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} 1 - (1 - p_m)^{\lfloor \frac{x}{p_m} \rfloor}$$

Notemos ahora que $\frac{x}{p_m} - 1 \leq \left\lfloor \frac{x}{p_m} \right\rfloor \leq \frac{x}{p_m}$, por lo tanto, podemos acotar inferior y superiormente el límite de la siguiente forma:

$$\underbrace{\lim_{m \rightarrow +\infty} 1 - (1 - p_m)^{\frac{x}{p_m} - 1}}_{\xrightarrow{m} 1 - e^{-x}} \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} 1 - (1 - p_m)^{\lfloor \frac{x}{p_m} \rfloor} \leq \underbrace{\lim_{m \rightarrow +\infty} 1 - (1 - p_m)^{\frac{x}{p_m}}}_{\xrightarrow{m} 1 - e^{-x}}$$

Dado que ambas cotas convergen a la función de distribución de una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro 1, concluimos que $p_m \tau(m) \xrightarrow{d} \text{Exp}(1)$.

Ejercicio 10

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{\frac{X_n}{n}}(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr\left(\frac{X_n}{n} < x\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(X_n < nx) = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + n}\right)^{\lfloor nx \rfloor}\right] = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + n}\right)^{\lfloor nx \rfloor} = \\
&= 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left\{\log\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + n}\right)^{\lfloor nx \rfloor}\right\} = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left\{\lfloor nx \rfloor \log\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + n}\right)\right\} = \\
&= 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left\{\lfloor nx \rfloor \log\left(1 + \frac{-\lambda}{\lambda + n}\right)\right\} \underset{\uparrow}{\approx} 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left\{\lfloor nx \rfloor \left(\frac{-\lambda}{\lambda + n}\right)\right\} = \\
&\quad \boxed{\log(1 + u) \approx u \text{ cuando } u \rightarrow 0} \\
&= 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left\{-\lfloor nx \rfloor \left(\frac{\lambda}{\lambda + n}\right)\right\} = 1 - \exp\left\{-\lim_{n \rightarrow +\infty} \lfloor nx \rfloor \left(\frac{\lambda}{\lambda + n}\right)\right\}
\end{aligned}$$

Luego, para resolver este límite debemos acotar la expresión $\lfloor nx \rfloor$ de la siguiente manera:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1)x \left(\frac{\lambda}{\lambda + n}\right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \lfloor nx \rfloor \left(\frac{\lambda}{\lambda + n}\right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} nx \left(\frac{\lambda}{\lambda + n}\right)$$

Nótese que las expresiones en ambas cotas, son polinómios en n . Por lo tanto, la desigualdad anterior es equivalente a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx\lambda}{n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \lfloor nx \rfloor \left(\frac{\lambda}{\lambda + n}\right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx\lambda}{n}$$

De donde obtenemos entonces que nuestro límite está acotado inferior y superior mente por λx . Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{\frac{X_n}{n}}(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Por lo que podemos concluir que $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{d} X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Ejercicio 11

Parte a

$$\lim_{\substack{p_n \rightarrow p \\ n \rightarrow +\infty}} F_{X_n}(x) = \lim_{\substack{p_n \rightarrow p \\ n \rightarrow +\infty}} P(X_n \leq x) = \lim_{\substack{p_n \rightarrow p \\ n \rightarrow +\infty}} 1 - (1 - p_n)^{\lfloor x \rfloor} = 1 - (1 - p)^{\lfloor x \rfloor} \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X \sim \text{Geo}(p)$$

Parte b

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{p_n \rightarrow 0 \\ np_n \rightarrow \lambda \\ n \rightarrow +\infty}} F_{\frac{X_n}{n}}(x) &= \lim_{\substack{p_n \rightarrow 0 \\ np_n \rightarrow \lambda \\ n \rightarrow +\infty}} \Pr\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) = \lim_{\substack{p_n \rightarrow 0 \\ np_n \rightarrow \lambda \\ n \rightarrow +\infty}} \Pr(X_n \leq nx) = \lim_{\substack{p_n \rightarrow 0 \\ np_n \rightarrow \lambda \\ n \rightarrow +\infty}} 1 - (1 - p_n)^{\lfloor nx \rfloor} = \\
&= \lim_{\substack{p_n \rightarrow 0 \\ np_n \rightarrow \lambda \\ n \rightarrow +\infty}} 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor} = 1 - \lim_{\substack{p_n \rightarrow 0 \\ np_n \rightarrow \lambda \\ n \rightarrow +\infty}} \exp\left\{\lfloor nx \rfloor \log\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right\} = \\
&= 1 - \lim_{\substack{p_n \rightarrow 0 \\ np_n \rightarrow \lambda \\ n \rightarrow +\infty}} \exp\left\{\lfloor nx \rfloor \left(-\frac{\lambda}{n}\right)\right\} = 1 - \exp\left\{-\lim_{\substack{p_n \rightarrow 0 \\ np_n \rightarrow \lambda \\ n \rightarrow +\infty}} \frac{\lfloor nx \rfloor \lambda}{n}\right\} = 1 - e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{d} X \sim \text{Exp}(1/\lambda)$.

Ejercicio 12

Parte a: hallar función límite

Si $X_n \sim \text{Unif}(-n, n) \Rightarrow F_n(x) = \frac{x+n}{2n} \mathbb{I}_{[-n, n]} + \mathbb{I}_{[n, +\infty)}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_n F_{X_n}(x) &= \lim_n \Pr(X_n \leq x) = \lim_n \frac{x+n}{2n} \mathbb{I}_{[-n, n]} + \mathbb{I}_{[n, +\infty)} = \\
&= \lim_n \frac{x+n}{2n} \mathbb{I}_{[-n, n]} + \underbrace{\lim_n \mathbb{I}_{[n, +\infty)}}_{\rightarrow 0} = \lim_n \frac{x+n}{2n} \mathbb{I}_{[-n, n]} \approx \lim_n \frac{n}{2n} \mathbb{I}_{[-n, n]} = \frac{1}{2} \mathbb{I}_{\{x \in \mathbb{R}\}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $X_n \xrightarrow{d} F(x) = \frac{1}{2} \mathbb{I}_{\{x \in \mathbb{R}\}}$ (es decir, la función constante 1/2 en todos los reales).

Parte b: verificar que F no es la función de distribución de una variable aleatoria

Nótese que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \frac{1}{2} \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{1}{2} \neq 1$$

Por lo tanto F no es la función de distribución de una variable aleatoria.

Ejercicio 13

Parte a

Si $F_{X_n}(x) = (1 - x^{-\alpha}) \mathbb{I}_{\{x \geq 1\}}$ entonces $F_{X_{(n)}}(x) = (1 - x^{-\alpha})^n \mathbb{I}_{\{x \geq 1\}}$. Luego entonces, la distribución límite de $\frac{X_{(n)}}{n^{1/\alpha}}$ estará dada por:

$$\begin{aligned} \lim_n F_{\frac{X_{(n)}}{n^{1/\alpha}}}(x) &= \lim_n \Pr \left(\frac{X_{(n)}}{n^{1/\alpha}} \leq y \right) = \lim_n \Pr \left(X_{(n)} \leq y n^{1/\alpha} \right) = \\ &= \lim_n \left(1 - (x n^{1/\alpha})^{-\alpha} \right)^n \mathbb{I}_{\{x n^{1/\alpha} \geq 1\}} = \lim_n \left(1 - x^{-\alpha} n^{-\alpha/\alpha} \right)^n \mathbb{I}_{\{x \geq 1/n^{1/\alpha}\}} = \\ &= \lim_n \left(1 - x^{-\alpha} n^{-1} \right)^n \mathbb{I}_{\{x \geq 0\}} = \lim_n \left(1 + \frac{-x^{-\alpha}}{n} \right)^n \mathbb{I}_{\{x \geq 0\}} = e^{-x^{-\alpha}} \mathbb{I}_{\{x \geq 0\}} \end{aligned}$$

Parte b

Si $F_{X_n}(x) = (1 - e^{-x}) \mathbb{I}_{\{x \geq 0\}}$ entonces $F_{X_{(n)}}(x) = (1 - e^{-x})^n \mathbb{I}_{\{x \geq 0\}}$. Luego entonces, la distribución límite de $X_{(n)} - \log n$ estará dada por:

$$\begin{aligned} \lim_n F_{X_{(n)} - \log n}(x) &= \lim_n \Pr \left(X_{(n)} - \log n \leq x \right) = \lim_n \Pr \left(X_{(n)} \leq x + \log n \right) = \\ &= \lim_n \left(1 - \exp \left\{ - (x + \log n) \right\} \right)^n \mathbb{I}_{\{x + \log n \geq 0\}} = \\ &= \lim_n \left(1 - \exp \left\{ - (\log e^x + \log n) \right\} \right)^n \mathbb{I}_{\{x \geq -\log n\}} = \\ &= \lim_n \left(1 - \exp \left\{ - \log(n e^x) \right\} \right)^n \mathbb{I}_{\{x \geq -\log n\}} = \lim_n \left(1 - \exp \left\{ \log(n e^x)^{-1} \right\} \right)^n \mathbb{I}_{\{x \geq -\log n\}} = \\ &= \lim_n \left(1 - \exp \left\{ \log(n^{-1} e^{-x}) \right\} \right)^n \mathbb{I}_{\{x \geq -\log n\}} = \lim_n \left(1 - (n^{-1} e^{-x}) \right)^n \mathbb{I}_{\{x \geq -\log n\}} = \\ &= \lim_n \left(1 + \frac{-e^{-x}}{n} \right)^n \mathbb{I}_{\{x \geq -\log n\}} = e^{-e^{-x}} \mathbb{I}_{\{x \geq -\infty\}} = e^{-e^{-x}} \mathbb{I}_{\{x \in \mathbb{R}\}} \end{aligned}$$

Ejercicio 14

Parte a

Parte b

Parte c

Ejercicio 15

Parte a

Sea $Y = F_X(X)$. Luego entonces, para todo $y \in [0, 1]$ se cumple que:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \Pr(F_X(X) \leq y) = \Pr(X \leq F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y$$

Parte b

Sea $X = F_X^{-1}(Y)$. Luego entonces:

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \Pr(F_X^{-1}(Y) \leq x) = \Pr(X \leq F_X(x)) = F_X(x)$$