Práctico 4

Daniel Czarnievicz

2019

Ejercicio 1

a) Calcular la parte real e imaginaria de $\dfrac{1}{a+bi}$, y $(a+bi)^2$

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2 - abi + bia - b^2 i^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\, i$$

$$(a+bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2 i^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

b) Probar que $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ para todo $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\overline{z_1\, z_2} &= \overline{(a+bi)(c+di)} \\
&= \overline{ac + adi + bic + bdi^2} \\
&= \overline{(ac-bd) + (ad+bc)i} \\
&= (ac-bd) - (ad+bc)i \\
&= ac - bd - adi - bci \\
&= ac + bdi^2 - adi - bci \\
&= ac + bidi - adi - bci \\
&= ac - adi + bidi - bci \\
&= a(c-di) + bi(di-c) \\
&= a(c-di) - bi(c-di) \\
&= (a-bi)(c-di) \\
&= \overline{z_1}\,\overline{z_2}
\end{aligned}$$

c) Probar que $\overline{\overline{z}} = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$

$$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a+bi = z$$

d) Probar que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ para todo z_1 y $z_2 \in 0mathbbC$

$$
\begin{array}{rcl}
|z_1 + z_2|^2 & = & (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\
 & = & (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
 & = & z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\
 & = & |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{\overline{z_2\overline{z_1}}} + |z_2|^2 \\
 & = & |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{\overline{z_2}z_1} + |z_2|^2 \\
 & = & |z_1|^2 + 2\Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \\
 & \leq & |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\
 & = & |z_1|^2 + 2|z_1|\,|\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\
 & = & |z_1|^2 + 2|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 \\
 & = & \Big(|z_1| + |z_2|\Big)^2
\end{array}
$$

Por lo tanto, hallamos que $|z_1 + z_2|^2 \leq \Big(|z_1| + |z_2|\Big)^2$ de donde se desprende que:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

e) Probar que $|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|$ para todo z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$

$$
\begin{array}{rcl}
|z_1\, z_2| & = & |(a+bi)(c+di)| \\
 & = & |ac + adi + bic + bdi^2| \\
 & = & |(ac - bd) + (bc + ad)i| \\
 & = & \sqrt{(ac-bd)^2 + (bc+ad)^2} \\
 & = & \sqrt{(ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (bc)^2 + 2abcd + (ad)^2} \\
 & = & \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (bc)^2 + (ad)^2} \\
 & = & \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2} \\
 & = & \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)} \\
 & = & \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\
 & = & |z_1|\,|z_2|
\end{array}
$$

Ejercicio 2

Recordar que:

- $e^{itx} = \cos(tx) + i\sin(tx)$
- $\sin(x)$ es impar, por lo tanto, $\sin(x) = -\sin(-x)$, y $\int\limits_{\mathbb{R}} \sin(x)dx = 0$.
- $\cos(x)$ es par, por lo tanto, $\cos(x) = \cos(-x)$, y $\int\limits_{\mathbb{R}} \cos(x)dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \cos(x)dx$.

a) $X \sim$ Unif$(-a, a)$ con $a \in \mathbb{R}$

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}\left(e^{itX}\right) = \int\limits_{-a}^{a} e^{itx}\frac{1}{2a}dx = \frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a} e^{itx}dx = \frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a}\Big(\cos(tx) - i\sin(tx)\Big)dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a}\cos(tx)dx - \underbrace{\frac{i}{2a}\int\limits_{-a}^{a}\sin(tx)dx}_{\substack{=0\text{, por ser seno} \\ \text{función impar}}} = \frac{1}{a}\int\limits_{0}^{a}\cos(tx)dx = \frac{1}{a}\left(\frac{\sin(tx)}{t}\bigg|_{0}^{a}\right) = \frac{\sin(ta)}{ta}$$

b) $X \sim$ Pois(λ)

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}\left(e^{itX}\right) = \sum_{x=0}^{+\infty} e^{itx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{(e^{it}\lambda)^x}{x!} = \exp\Big\{-\lambda + e^{it}\lambda\Big\} = \exp\Big\{\lambda(e^{it}-1)\Big\}$$

c) $X \sim$ Bin(n, p)

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}\left(e^{itX}\right) = \sum_{x=0}^{n} e^{itx}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\Big(e^{it}p\Big)^x(1-p)^{n-x} = \Big(e^{it}p + 1 - p\Big)^n$$

d) $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$

Primero hallamos la función característica de una variable aleatoria Y con distribución Normal$(0,1)$, y luego utilizamos la propiedad 3 (prop 3.3) para hallar la de una Normal(μ, σ^2).

$$\varphi_Y(t) = \mathbf{E}\left[e^{ity}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}\,\phi_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dx$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_Y(t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-y^2/2}dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial}{\partial t}\,e^{ity}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-y^2/2}dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ix\,e^{ity}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-y^2/2}dy = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}\,(-y)\,e^{-y^2/2}dy$$

Podemos luego entonces aplicar integración por partes donde $g(y) = e^{ity} \Rightarrow g'(y) = it\,e^{ity}$, y $f'(y) = (-y)\,e^{-y^2/2} \Rightarrow f(y) = e^{-y^2/2}$ y obtenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_Y(t) = i\left[\frac{\left(-\,e^{-y^2/2}\right)\left(e^{ity}\right)}{\sqrt{2\pi}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{-e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{ity}(it)\,dy\right]$$

donde el primer sumando es cero dado que $-e^{-y^2/2}$ tiende a cero en los límites propuestos, mientras que e^{ity} está acotada, dado que podemos escribirla como una función de senos y cosenos, los cuales están acotados. Por lo tanto, obtenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_Y(t) = -i\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{-e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{ity}(it)\,dy = -t\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{ity}dy = -t\,\varphi_Y(t)$$

Por lo tanto, hallamos que $\varphi_Y'(t) = -t\varphi_Y(t)$. Esto equivale a resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden $\varphi_Y'(t) + t\varphi_Y(t) = 0$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_Y(t) = c\,e^{-t^2/2} \\ \varphi_Y(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_Y(t) = e^{-t^2/2}$$

Aplicando ahora la propiedad 3 (prop 3.3), obtenemos que:

$$\varphi_X(t) = \varphi_{\sigma Y+\mu}(t) = e^{it\mu}\varphi_Y(t\,\sigma) = e^{it\mu}e^{-(\sigma t)^2/2} = \exp\left\{it\mu - \frac{(\sigma t)^2}{2}\right\}$$

Ejercicio 3

$$i\,\mathbf{E}(X) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_X(t)\bigg|_{t=0} = \frac{1}{4}\,2\,\left(1+e^{3it}\right)\left(3ie^{3it}\right)\bigg|_{t=0} = \frac{3i}{2}\left(1+e^{3it}\right)e^{3it}\bigg|_{t=0} =$$
$$= \frac{3i}{2}\left(1+e^{3i(0)}\right)e^{3i(0)} = \frac{3i}{2}(1+1) = 3i \Rightarrow \mathbf{E}(X) = 3$$

$$i^2\,\mathbf{E}(X^2) = \frac{\partial^2}{\partial^2 t}\varphi_X(t)\bigg|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{3i}{2}\left(1+e^{3it}\right)e^{3it}\right]\bigg|_{t=0} = \frac{3i}{2}\left(3ie^{3it}e^{3it} + (1+e^{3it})3ie^{3it}\right)\bigg|_{t=0} =$$
$$= \frac{9i^2}{2}e^{3it}\left(2\,e^{3it}+1\right)\bigg|_{t=0} = \frac{9i^2}{2}e^{3i(0)}\left(2\,e^{3i(0)}+1\right) = \frac{9i^2}{2}3 = \frac{27}{2}i^2 \Rightarrow \mathbf{E}(X^2) = \frac{27}{2}$$

$$\therefore \mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}^2(X) = \frac{27}{2} - 3^2 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}$$

Ejercicio 4

Queremos hallar una variable aleatoria Y tal que $\varphi_Y(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j\,\varphi_{X_j}(t)$.

$$\varphi_Y(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j\,\varphi_{X_j}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j\,\mathbf{E}\left(e^{itX_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_j(x) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n} a_j e^{itx} dF_j(x) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \sum_{j=1}^{n} a_j dF_j(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\left(\sum_{j=1}^{n} a_j F_j(x)\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_Y(x) = \mathbf{E}\left(e^{itY}\right) = \varphi_Y(t)$$

Por lo tanto, Y debe ser tal que $Y = \sum_{j=1}^{n} a_j F_j(x)$. Es decir, una combinación lineal convexa de la variables aleatorias originales.

Ejercicio 5

Parte a

Sea X una variable aleatoria tal que $X \stackrel{cs}{=} c$. Entonces:

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}\left(e^{itX}\right) = e^{itc}$$

Parte b

Sea X una variable aleatoria tal que $X = \begin{cases} -1 & \text{con probabilidad} \quad 1/2 \\ 1 & \text{con probabilidad} \quad 1/2 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \mathbf{E}\left(e^{itX}\right) && \text{definición de función característica} \\
&= e^{it(-1)}\frac{1}{2} + e^{it(1)}\frac{1}{2} && \text{definición de esperanza de una va} \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{-it} + e^{it}\right] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\cos(-t) + i\sin(-t) + \cos(t) + i\sin(t)\Big] && \text{definición de exponencial compleja} \\
&= \frac{1}{2}\Big[2\cos(t) + i\sin(-t) + i\sin(t)\Big] && \text{coseno es función par} \\
&= \frac{1}{2}\Big[2\cos(t) - i\sin(t) + i\sin(t)\Big] && \text{seno es función impar} \\
&= \frac{1}{2}\Big[2\cos(t)\Big] \\
&= \cos(t)
\end{aligned}$$

Parte c

$\sin(0) = 0 \neq 1 \Rightarrow$ no es una función característica (no cumple propiedad 3.3/2).

Parte d

Sea $Y = X$, donde X es la misma variable aleatoria de la parte b, y X e Y son independientes. Sea $Z = X + Y$ otra variable aleatoria. Luego entonces:

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t) = \cos(t)\,\cos(t) = \cos^2(t)$$

Parte e

Primero notemos que:

$$\varphi(t) = \frac{1}{8}\left(e^{it} + e^{2it}\right)^3 = \frac{1}{2^3}\left(e^{it} + e^{2it}\right)^3 = \left[\frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{2it}\right)\right]^3$$

Por lo tanto, estamos buscando tres variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función característica:

$$\varphi_{X_j}(t) = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{2it}\right)$$

Una posible candidata sería:

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad} \quad 1/2 \\ 2 & \text{con probabilidad} \quad 1/2 \end{cases}$$

Con la cual, si llamamos $X = \sum_{j=1}^{3} X_j$, obtendríamos:

$$\varphi_X(t) = \left[\varphi_{x_j}(t)\right]^3 = \left[\mathbf{E}\left(e^{itX_j}\right)\right]^3 = \left[e^{it(1)}\frac{1}{2} + e^{it(2)}\frac{1}{2}\right]^3 = \left[\frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{2it}\right)\right]^3 = \frac{1}{8}\left(e^{it} + e^{2it}\right)^3$$