Práctico 5

Daniel Czarnievicz

2019

Ejercicio 1

Parte a

Sea X una variable aleatoria con distribución Unif$(-1, 1)$. La función característica de X será entonces $\varphi_X(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$. Luego, por el teorema de inversión sabemos que:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt$$

Por lo tanto, resolver la integral propuesta implica resolver $f_X(0)$. Por otro lado, dado que $X \sim$ Unif$(-1, 1)$, sabemos que $f_X(x) = 1/2$ para todo $x \in [-1, 1]$. Por lo tanto,

$$f_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-it(0)} \varphi_X(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(t) dt = \frac{1}{2} \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(t) dt = \pi$$

Parte b

Consideremos ahora una segunda variable aleatoria Y independiente de X pero con la misma distribución. Por la propiedad 3.3/4 sabemos que $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\, \varphi_Y(t)$. Pero dado que ambas variables tiene la misma distribución, la función característica de su suma será:

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X^2(t) = \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2$$

Por otro lado, que X e Y tienen distribución Unif$(-1, 1)$, $Z = X + Y \sim$ Triag$(-2, 2)$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} f_Z(0) = \dfrac{1}{2} \\ f_Z(0) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-it(0)}\, \varphi_Z(t) dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_Z(t) dt = \pi$$

Ejercicio 2

Primero hallamos la función característica de una variable con distribución exponencial:

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}\left(e^{itX}\right) = \int\limits_0^{+\infty} e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda \int\limits_0^{+\infty} e^{x(it-\lambda)}dx = \lambda \left[\frac{e^{x(it-\lambda)}}{it-\lambda}\Bigg|_{x=0}^{x\to+\infty} \right] = \frac{-\lambda}{it-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Antes de proceder a integrar la función característica, conviene multiplicar por su conjugado de forma de lograr una expresión que no tenga a la constante imaginaria i en el denominador.

$$\frac{\lambda}{\lambda - it} \times \frac{\lambda + it}{\lambda + it} = \frac{\lambda^2 + \lambda it}{\lambda^2 + t^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2} + \frac{\lambda t}{\lambda^2 + t^2}\ i$$

Luego procedemos a integrar el módulo de φ_X de la siguiente forma:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\varphi_X(t)\right| dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2} + \frac{\lambda t}{\lambda^2 + t^2}\ i \right| dt \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2} \right| + \left| \frac{\lambda t}{\lambda^2 + t^2}\ i \right| dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2} \right| dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |i| \left| \frac{\lambda t}{\lambda^2 + t^2} \right| dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2} \right| dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\lambda t}{\lambda^2 + t^2} \right| dt$$

Dado que todas las cantidades son positivas, no es necesario seguir trabajando con el valor absoluto. Por lo tanto:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2} \right| dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\lambda t}{\lambda^2 + t^2} \right| dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2} dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda t}{\lambda^2 + t^2} dt =$$

$$= \sqrt{\lambda}\,\tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\lambda}{2}\ \ln|\lambda^2 + t^2|\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = +\infty$$

Ejercicio 3

Parte a

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}\left(e^{itX}\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x(it+1)}dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{x(it-1)}dx = \frac{1}{2}\left.\frac{e^{x(it+1)}}{it+1}\right|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}\left.\frac{e^{x(it-1)}}{it-1}\right|_{0}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{2(it+1)} - \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x(it+1)}}{2(it+1)} + \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x(it-1)}}{2(it-1)} - \frac{1}{2(it-1)} =$$

$$= \frac{1}{2(it+1)} - \lim_{x\to-\infty}\underbrace{\frac{\overbrace{e^{x}}^{\to 0}\left(\overbrace{\cos(tx)}^{\text{acot}}+i\overbrace{\sin(tx)}^{\text{acot}}\right)}{2(it+1)}}_{\to 0} + \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x(it-1)}}{2(it-1)} - \frac{1}{2(it-1)} =$$

$$= \frac{1}{2(it+1)} + \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{\overbrace{e^{-x}}^{\to 0}\left(\overbrace{\cos(tx)}^{\text{acot}}+i\overbrace{\sin(tx)}^{\text{acot}}\right)}{2(it-1)}}_{\to 0} - \frac{1}{2(it-1)} =$$

$$= \frac{1}{2(it+1)} - \frac{1}{2(it-1)} = \frac{it+1-it+1}{2(it+1)(it-1)} = \frac{1}{1+t^2}$$

Parte b

Antes de utilizar el enunciado 2 del teorema de inversión debemos verificar que estamos en las condiciones del mismo:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\varphi_X(t)|dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{1+t^2}\right|dt = \arctan(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi < \infty$$

Luego entonces:

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\frac{1}{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\cos(-tx)+i\sin(-tx)\Big)\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt - i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt = \frac{1}{2\pi}\pi e^{-|x|} = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

Parte c

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}\left(e^{itX}\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(tx)+i\sin(tx)}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{1+x^2}dx = e^{-|t|}$$

Ejercicio 4

$$\varphi_{\bar{X}_n}(t) = \mathbf{E}\left(e^{it\bar{X}_n}\right) = \mathbf{E}\left(e^{i(t/n)X_1}\right)\dots\mathbf{E}\left(e^{i(t/n)X_n}\right) = \left[\varphi_X({}^t\!/\!_n)\right]^n = \left[e^{-|t/n|}\right]^n = e^{-n|t/n|} = e^{-|t|}$$

Por lo tanto, $\bar{X}_n \sim \text{Cauchy}(0,1)$.

Ejercicio 5

Sea $U \sim \text{Unif}(0,1) \Rightarrow \varphi_U : \mathbb{R} \to \mathbb{C} / \varphi_U(t) = \dfrac{e^{it}-1}{it}$.

Luego sea $Z = X - Y$ donde X e Y son iid. Su función característica será:

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{X-Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_{-Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(-t) = \varphi_X\ \overline{\varphi_X(-t)} = |\varphi_X(t)|^2 \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, no es posible encontrar dos variables iid tales que su resta tenga distribución Unif$(0,1)$.

Ejercicio 6

$$\begin{aligned}
\varphi_{(X+Y)^s}(t) &= \mathbf{E}\left(e^{it(X+Y)^s}\right)\\
&= \mathbf{E}\left(e^{it(X+Y-X'-Y')}\right)\\
&= \mathbf{E}\left(e^{it(X-X')+it(Y-Y')}\right)\\
&= \mathbf{E}\left(e^{it(X-X')}\right)\mathbf{E}\left(e^{it(Y-Y')}\right)\\
&= \varphi_{X^s}(t)\,\varphi_{Y^s}(t)\\
&= \varphi_{X^s+Y^s}(t)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(X+Y)^s \overset{d}{=} X^s + Y^s$.