Práctico 7

Daniel Czarnievicz

2019

Ejercicio 2

Sea el intervalo $(x,\, y)$ tal que $x \in [0,\, 1)$, $y \in [0,\, 1)$ con $x \neq y$. Luego entonces, dado que Pr es la distrubición de probabilidad de la distribución U(0, 1), tenemos que:

- $\Pr\Big((x,\, y)\Big) = y - x$
- $T^{-1}\Big((x,\, y)\Big) = (x - a,\, y - a)$
- $\Pr\Big(T^{-1}\Big((x,\, y)\Big)\Big) = y - a - (x - a) = y - x$

Ejercicio 4

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{x \in \text{Rec}(X)} x \, \Pr(X = x) \\
&= \sum_{x \in \text{Rec}(X)} x \, \Pr\Big(\Big\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\Big\}\Big) \\
&= \sum_{x \in \text{Rec}(X)} x \, \Pr\Big(X^{-1}(x)\Big) \\
&= \sum_{x \in \text{Rec}(X)} x \, \Pr\Big(T^{-1}(X^{-1}(x))\Big) \\
&= \sum_{x \in \text{Rec}(X)} x \, \Pr\Big(\Big\{\omega \in \Omega : X(T(\omega)) = x\Big\}\Big)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{E}\Big(X(T)\Big) = \sum_{y \in \text{Rec}(X(T))} y \, \Pr(X(T) = y)$$

La igualdad entre ambos se cumplirá únicamente si los recorridos son iguales. Podemos porbar esto por absurdo. Supongamos que $\exists y$ tal que $y \in \text{Rec}(X(T))$ pero $y \notin \text{Rec}(X)$. Pero si $y \in \text{Rec}(X(T))$ entonces $\exists \omega$ tal que $X(T(\omega)) = y$, por lo que los recorridos deben ser iguales.

Ejercicio 5

Sea $A_n = \left\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq {}^1\!/\!_n\right\}$. Entonces existe D_n tal que $\Pr(A_n) = \Pr(D_n)$, por lo que, $\forall \omega \in D_n$, se cumple $\sum_{k=0}^{+\infty} X(T^k(\omega)) = +\infty$. Luego entonces, si definimos al conjunto $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ tenemos que:

$$\Pr(A) = \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n\right) = \Pr(D)$$

Ejercicio 6

- Decimos que una transformación $T : \Omega \to \Omega$ es medible si para todo conjunto $A \in \mathcal{A}$ se cumple que $T^{-1}(A) = \left\{\omega \in \Omega : T(\omega) \in A\right\} \in \mathcal{A}$. Es decir, se debe cumplir que, para todo conjunto A en la σ-álgebra, el conjunto de las preimágenes a través de la transformación, también pertenezca a la σ-álgebra.
- Decimos que una transformación T preserva la medida si para todo $A \in \mathcal{A}$ se cumple que $\Pr(A = \Pr(T^{-1}(A))$. Es decir, la medida de probabilidad (o cualquier otra medida) toma el mismo valor para el conjunto A y para el conjunto de las preimágenes de A a través de la función T.
- Decimos que un conjuto $A \in \mathcal{A}$ es invariante a la tranformración T (siendo T una transformación que preserva la medida), si se cumple que $T^{-1}(A) = A$. Es decir, todo elemento (ω) que pertenece al conjunto A, pertenece también al conjunto de preimágenes de A a través de la transformación T (y viceversa, dado que se trata de una igualdad de conjuntos).
- Decimos que una transformación T que preserva la medida es ergódico, si se cumple que todo conjunto invariante tiene medida 0 o 1.
- Decimos que una transformación T que preserva la medida es mixing, si para todo par de conjuntos A, $B \in \mathcal{A}$ se cumple que:

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr\left(A \cap T^{-n}(B)\right) = \Pr(A)\Pr(B)$$

Para demostrar el teorema entonces veamos que:

$$B \text{ es invariante } \Leftrightarrow T^{-1}(B) = B \Leftrightarrow T^{-n}(B) = B \quad \forall n \geq 1$$

Luego, por la definición de transformación mixing, tenemos que:

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr\Big(A \cap \underbrace{T^{-n}(B)}_{=B}\Big) = \lim_{n\to+\infty} \Pr(A \cap B) = \Pr(A \cap B)$$

Pero si T es mixing, entonces también debe cumplirse que:

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr\left(A \cap T^{-n}(B)\right) = \Pr(A)\ \Pr(B)$$

Por lo tanto,

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{A}, \quad B \text{ invariante}$$

Si elegimos $A = B$, tenemos que, para todo B invariante:

$$\Pr(B \cap B) = \Pr(B)\ \Pr(B) = \Pr^2(B)$$

Pero a su vez, $\Pr(B \cap B) = \Pr(B)$. Por lo tanto, $\Pr(B) = \Pr^2(B)$. Pero dado que la proobabilidad simpre debe tomar valores entre 0 y 1, $\Pr(B)$ solo puede ser 0 ó 1 (dado que son los únicos posibles valores que elevados al cuadrado dan como resultado ellos mismos).