Facultades de Ciencias y de Ciencias Económicas y de Administración
Licenciatura en Estadística

Probabilidad II
Primer semestre de 2019
Práctico 3

1. Si X_n es una sucesión de variables no negativas tal que $X_n \overset{a.s}{\to} X$ y $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X) < \infty$ entonces $\mathbb{E}|X_n - X| \to 0$. ¿Es cierto el resultado sin la hipótesis de que sean no negativas?.

2. Probar los siguientes resultados

   a) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$ siendo c constante, si y sólo si $X_n \xrightarrow{P} c$.

   b) si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ y $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$ entonces $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + c$;

   c) si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ y $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$ entonces $Y_n X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} cX$;

   d) si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ y $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$ entonces $X_n^{Y_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ y

   e) si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ y $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$ entonces $Y_n^{X_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$.

3. Probar que si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ y $F_X(x)$ es continua para todo x entonces F_{X_n} converge uniformemente a F_X.

4. Suponemos que $X_1, X_2, \dots$ es una sucesión de variables aleatorias que converge en ley a X y que g es una función continua. Demostrar que, $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X)$.

5. Si $X_n \sim \text{Unif}\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$, $n \geq 1$, demostrar que X_n converge en distribución, y hallar su distribución límite.

6. Si $X_1, X_2, \dots$ es una sucesión de variables aleatorias y una v.a. X que toman, a lo sumo, una cantidad finita de valores. Demostrar que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j) = \mathbb{P}(X = j)$ para cada j en el conjunto de valores de X_n, X.

7. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de v.a. i.i.d. tales que, para cada n, $X_n \sim Bin(n, p)$ con $0 < p < 1$. Hallar la distribución límite de X_n cuando $p \to 0$, $n \to \infty$ y $np \to \lambda$ fijo.

8. Las variables aleatorias de la sucesión $(X_n)_{n\geq 1}$ son independientes, con distribución $\mathbb{P}\{X_n = 0\} = \mathbb{P}\{X_n = 1/n\} = 1/2$, y para cada n denotamos F_n a la función de distribución de X_n. Llamamos X_0 a una variable c.s. igual a 0, y F_0 a su función de distribución. Demostrar que cuando $n \to \infty$,

   a) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_0$;

   b) $\lim n \to \infty_n F_n(0) \neq F_0(0)$; y

   c) $\lim_{n\to\infty} \sup_x |F_n(x) - F_0(x)| \neq 0$.

9. Las variables aleatorias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ constituyen una sucesión de v. a. i.i.d. con distribución F, tal que $\sup\{x : F(x) < 1\} = +\infty$. Definimos $\tau(m) = \min\{n : X_n > m\}$, $m \in \mathbf{N}$, es decir $\tau(m)$ es el índice de la primera variable que excede el nivel m.

   Demostrar que si $p_m = \mathbb{P}\{X_1 > m\}$, se cumple $p_m\tau(m)\xrightarrow{\mathcal{L}}\mathrm{Exp}(1)$ cuando $m \to +\infty$.

10. Si $X_n \sim Geo\left(\frac{\lambda}{n+\lambda}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lambda > 0$, mostrar que X_n/n converge en distribución a una v.a. exponencial y determinar su parámetro.

11. Si $X_n \sim Geo(p_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, mostrar que

    a) $p_n \to p > 0$ implica $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}Geo(p)$ cuando $n \to \infty$.
    b) $p_n \to 0$ y $n\,p_n \to \lambda > 0$ implican $X_n/n\xrightarrow{\mathcal{L}}\mathrm{Exp}(1/\lambda)$ cuando $n \to \infty$.

12. Verificar que si $X_n \sim Uni(-n, n)$, $n \geq 1$, entonces la sucesión de funciones de distribución de X_n converge a un límite F no decreciente con recorrido en $[0, 1]$, cuando $n \to \infty$. Verificar también que F no es la función de distribución de una variable aleatoria.

13. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d. y consideremos $\max_{1\leq m\leq n} X_m$. Probar que

    a) si $F(x) = (1 - x^{-\alpha})\mathbf{1}_{\{x\geq 1\}}$, $\alpha > 0$, entonces $\mathbb{P}\{\frac{M_n}{n^{1/\alpha}} \leq y\}$ converge a $\exp(-y^{-\alpha})$ para $y > 0$ cuando $n \to \infty$;
    b) si $F(x) = (1 - e^{-x})\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}$, entonces $\mathbb{P}\{M_n - \log n \leq y\}$ converge a $\exp(-e^{-y})$ para $y \in \mathbf{R}$ cuando $n \to \infty$.

14. Dada la función de distribución de probabilidades F en $\mathbf{R}$, se define su inversa generalizada mediante $F^{-1}(u) = \inf\{x : u \leq F(x)\}$.

    a) Mostrar que si $u \in (0, 1)$ el ínfimo en la definición anterior es un mínimo.
    Un punto x es de crecimiento de F cuando para cualesquiera y, z, $y < x < z$, se cumple que $F(y) < F(x) < F(z)$.
    b) Mostrar que el conjunto $\mathcal{U}$ de las imágenes por F de los puntos que no son de crecimiento de F es numerable.
    c) Mostrar que $F^{-1}(u)$ es continua en el complemento de $\mathcal{U}$.

15. Mostrar que cuando X tiene una función de distribución continua F, entonces $F(X)$ es uniforme en $(0, 1)$. Verificar también que, con la definición de inversa generalizada del ejercicio anterior, para cualquier función de distribución F, $F^{-1}(U)$ tiene distribución F cuando U es uniforme en $(0, 1)$.