Licence Informatique 3 – AD Développeur
2) *Tableaux et Espaces* (TD) – EC 160-512

Pr. Carl FRÉLICOT – Dpt Info / Lab MIA

1. Des Données

Soit le tableau de données X ci-contre.

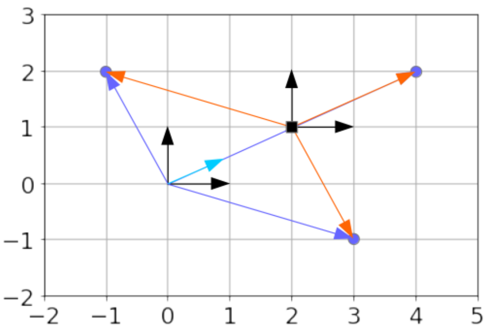
1-1) Que valent le nombre n d'individus et le nombre p de variables ?

1-2) Dessinez le nuage de points correspondant.

$X =$

X_1	X_2	
3	-1	${}^t x_1$
-1	2	${}^t x_2$
4	2	${}^t x_3$

; ci-dessous X et X'



2. Espace des Individus

2-1) À quel produit scalaire correspond la dernière valeur 2 du tableau ?

2-2) Calculez la norme du 3ème individu.

2-3) Comment généraliser à tous les individus par produit matriciel ?

2-4) Calculez le vecteur u unitaire colinéaire au 3ème individu.

2-5) Projetez le 2ème individu sur l'axe défini par u.

2-6) Déduisez la valeur de l'angle entre le 2ème et le 3ème individu ?

2-7) Quelle métrique M a-t-on implicitement utilisée ?

2-8) Calculez la distance euclidienne entre le 1er et le 2ème individu.

2-9) Calculez le centre $\overline{x}$ du nuage X.

HW) Quand vous aurez le tableau X', trouvez une métrique M diagonale telle que les deux derniers individus centrés (x'_2 et x'_3) soient orthogonaux.

3. Espace des Variables

3-1) Quel tableau faut-il soustraire à X pour le centrer ?

3-2) Déduisez le tableau centré X'.

3-3) Soit $D = \frac{1}{n} I_n$ la matrice de poids des individus. Calculez la D-norme de la 2ème variable (centrée).

3-4) Calculez le D-produit scalaire entre les deux variables (centrées).

3-5) Généralisez à toutes les variables par produit matriciel. Qu'obtient-on ?

3-6) Par quel tableau faut-il diviser X' (élément par élément) pour le réduire ?

3-7) Déduisez le tableau centré-réduit X''.

3-8) Calculez ${}^t X'' D X''$. Qu'obtient-on ?

1-1) $n = 3$ et $p = 2$

1-2) voir figure

2-1) $<x_3, e_2>$

2-2) $||x_3||^2 = (4, 2)\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = 20$, donc $||x_3|| = 2\sqrt{5}$

2-3) $X\,{}^tX = \begin{pmatrix}10 & -5 & 10\\ -5 & 5 & 0\\ 10 & 0 & 20\end{pmatrix}$ puis $\sqrt{\ }$ de la diagonale

2-4) $u = \frac{x_3}{||x_3||} = \boxed{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}} / \sqrt{5} = \boxed{\begin{matrix}0.8944\\0.4472\end{matrix}}$

2-5) $< x_2, u >= (-1, 2)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} / \sqrt{5} = 0$

2-6) $x_2 \perp u$ donc $x_2 \perp x_3$ et $cos(x_2, x_3) = 0 = \frac{<x_2,x_3>}{||x_2||||x_3||}$

2-7) $M = I_p = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ de sorte que partout $<x, y>_M = {}^t x M y$

2-8) $||x_1 - x_2||^2_I = (4, -3)\begin{pmatrix}3 - -1\\ -1 - 2\end{pmatrix} = 25$ et $d_2(x_1, x_2) = 5$

2-9) $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_x x_k = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = (2, 1)$

HW) résoudre ${}^t x'_2 M x'_3 = 0$ avec $M = \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$;

solution $b = 6\,a$, donc toute métrique $M = \alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$

3-1)

2	1
2	1
2	1

c'est-à-dire $1_n\,{}^t\overline{x}$

3-2) $X' =$

1	-2
-3	1
2	1

3-3) $||X'_2||^2_D = \frac{1}{3}(-2, 1, 1)\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} = 2$, c'est s^2_2

donc $\sqrt{2}$ (s_2)

3-4) $< X'_1, X'_2 >_D = {}^t X'_1 D X'_2 = -1$, c'est s^2_{12}

3-5) ${}^t X' D X' =$

14/3	-1
-1	2

$= V$

3-6) $S =$

$\sqrt{14/3}$	$\sqrt{2}$
$\sqrt{14/3}$	$\sqrt{2}$
$\sqrt{14/3}$	$\sqrt{2}$

c'est-à-dire $1_n\,{}^t diag(\sqrt{V})$

3-7) $X'' =$

$\sqrt{3/14}$	$-\sqrt{2}$
$-3\sqrt{3/14}$	$\sqrt{2}/2$
$2\sqrt{3/14}$	$\sqrt{2}/2$

$=$

0.4629	-1.4142
-1.3887	0.7071
0.9258	0.7071

3-8)

1	$-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$	1

$=$

1	-0.3273
-0.3273	1

$= R$