TUGAS 1 Metode Numerik

Nama : Muhammad Ramdan
NIM : 1904637

Berikut beberapa deret McLaurin dan interval konvergensinya. Buktikan fungsi berikut memiliki hasil sesuai dengan hasilnya

Template

$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Nomor 1

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$-1 < x < 1$
Jawab: $f(x) = \frac{1}{1-x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \rightarrow f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ Untuk deret McLaurin, a=0 $P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$ Karena x=0, maka $f^{(n)}(0)$ bernilai n!, sehingga $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$ Kenapa daerah konvergensinya -1<x<1? Karena jika x lebih besar dari 1 atau lebih kecil dari -1, akan menyebabkan P(x) menjadi sangat besar hingga tak terhingga (divergen)	

Nomor 2

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$-1 < x < 1$
Jawab: $f(x) = \ln(1+x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} \rightarrow f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \rightarrow f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$	

$f^{(n)}(x) = (1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ Untuk deret McLaurin, a=0 $P(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$ Untuk x=0, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ Sehingga didapatkan, $P(x) = 0 + x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$ Note: (n-1)! Dicoret dengan n! menghasilkan n di bawah. Untuk deret konvergensinya adalah bilangan pecahan sejati karena bilangan pecahan sejati jika dipangkatkan akan semakin kecil sehingga tidak akan menghasilkan hasil tak terhingga.

Nomor 3

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$	Semua x
Jawab: $f(x) = e^x \to f^{(n)}(x) = e^x \to f^{(n)}(0) = 1$ Untuk deret McLaurin, a=0 $P(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$ Sehingga didapatkan, $P(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots$ Jika dilihat sekilas, daerah konvergensi nya adalah bilangan pecahan sejati. Namun jika diteliti lebih lanjut, untuk n menuju tak hingga berlaku: $$x^n \ll n!$$ Sehingga semua x bisa dikatakan konvergen	

Nomor 4

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$	Semua x
Jawab: Turunan sinus bersifat periodic, berulang setiap periode T=4. $f'(x) = \cos\ x$ $f''(x) = -\sin x$	

$f'''(x) - \cos x$
$f^{(4)}(x) = \sin x$
Karena nilai sin x=0, maka kita akan **mengeliminasi indeks genap**. Sehingga,
$f^{(n)}(0)$ bersifat sebagai tanda. Di mana indeks 1,5,9,13… akan mendapatkan tanda positif dan indeks 3,7,11,15… akan mendapatkan tanda negatif

Untuk deret McLaurin, a=0
$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$$
Sehingga didapatkan,
$$P(x) = 0 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$$
Jika dilihat sekilas, daerah konvergensi nya adalah bilangan pecahan sejati. Namun jika diteliti lebih lanjut, untuk n menuju tak hingga berlaku:
$$x^n \ll n!$$
Sehingga semua x bisa dikatakan konvergen

Edit:
Alternatif penulisan
$$P(x) = \sum_{k}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Nomor 5

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$	Semua x

Jawab:
Turunan cosinus bersifat periodic, berulang setiap T=4.
$f'(x) = -\sin x$
$f''(x) = -\cos x$
$f'''(x) = \sin x$
$f^{(4)}(x) = \cos x$
Karena nilai sin x=0, maka kita akan **mengeliminasi indeks ganjil**. Sehingga,
$f^{(n)}(0)$ bersifat sebagai tanda.

Untuk deret McLaurin, a=0
$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$$
Sehingga didapatkan,
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
Jika dilihat sekilas, daerah konvergensi nya adalah bilangan pecahan sejati. Namun jika diteliti lebih lanjut, untuk n menuju tak hingga berlaku:

$$x^n \ll n!$$ Sehingga semua x bisa dikatakan konvergen

Nomor 6

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots$$	$-1 < x < 1$
Jawab: Turunan untuk f(x): $f^{(n)}(x) = p(p-1)(p-2)(p-3)\ldots(p-n)(1-x)$ Jika x=0, maka $f^{(n)}(0) = p(p-1)(p-2)(p-3)\ldots(p-n)$ Sehingga didapatkan $P(x) = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots$ Bagaimana dimana dengan daerah konvergensinya? Jika dilihat sekilas, akan mirip dengan nomor 4 dan 5. Namun dalam kasus ini, nilai p bisa bernilai berapa saja bahkan tak hingga. Sehingga diperlukan parameter x untuk membuat sebuah konvergensi. Untuk iitu, dipilih -1<x<1	