

TUGAS 1 Metode Numerik

Nama : Muhammad Ramdan

NIM : 1904637

Berikut beberapa deret McLaurin dan interval konvergensinya. Buktikan fungsi berikut memiliki hasil sesuai dengan hasilnya

Template

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Nomor 1

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
<p>Jawab:</p> $f(x) = \frac{1}{1-x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \rightarrow f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ <p>Untuk deret McLaurin, $a=0$</p> $P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$ <p>Karena $x=0$, maka $f^{(n)}(0)$ bernilai 1, sehingga</p> $P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ <p>Kenapa daerah konvergensinya $-1 < x < 1$? Karena jika x lebih besar dari 1 atau lebih kecil dari -1, akan menyebabkan $P(x)$ menjadi sangat besar hingga tak terhingga (divergen)</p>	

Nomor 2

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x < 1$
<p>Jawab:</p> $f(x) = \ln(1+x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} \rightarrow f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \rightarrow f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$	

$f^{(n)}(x) = (1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ <p>Untuk deret McLaurin, a=0</p> $P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$ <p>Untuk x=0,</p> $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ <p>Sehingga didapatkan,</p> $P(x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ <p>Note: (n-1)! Dicoret dengan n! menghasilkan n di bawah.</p> <p>Untuk deret konvergensinya adalah bilangan pecahan sejati karena bilangan pecahan sejati jika dipangkatkan akan semakin kecil sehingga tidak akan menghasilkan hasil tak terhingga.</p>
--

Nomor 3

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	Semua x
<p>Jawab:</p> $f(x) = e^x \rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \rightarrow f^{(n)}(0) = 1$ <p>Untuk deret McLaurin, a=0</p> $P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$ <p>Sehingga didapatkan,</p> $P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ <p>Jika dilihat sekilas, daerah konvergensi nya adalah bilangan pecahan sejati. Namun jika diteliti lebih lanjut, untuk n menuju tak hingga berlaku:</p> $x^n \ll n!$ <p>Sehingga semua x bisa dikatakan konvergen</p>	

Nomor 4

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	Semua x
<p>Jawab:</p> <p>Turunan sinus bersifat periodic, berulang setiap periode T=4.</p> $f'(x) = \cos x$ $f''(x) = -\sin x$	

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

Karena nilai $\sin x=0$, maka kita akan **mengeliminasi indeks genap**. Sehingga,

$f^{(n)}(0)$ bersifat sebagai tanda. Di mana indeks 1,5,9,13... akan mendapatkan tanda positif dan indeks 3,7,11,15... akan mendapatkan tanda negatif

Untuk deret McLaurin, $a=0$

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$$

Sehingga didapatkan,

$$P(x) = 0 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$$

Jika dilihat sekilas, daerah konvergensi nya adalah bilangan pecahan sejati. Namun jika diteliti lebih lanjut, untuk n menuju tak hingga berlaku:

$$x^n \ll n!$$

Sehingga semua x bisa dikatakan konvergen

Edit:

Alternatif penulisan

$$P(x) = \sum_k^n (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Nomor 5

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	Semua x
<p>Jawab:</p> <p>Turunan cosinus bersifat periodic, berulang setiap $T=4$.</p> $f'(x) = -\sin x$ $f''(x) = -\cos x$ $f'''(x) = \sin x$ $f^{(4)}(x) = \cos x$ <p>Karena nilai $\sin x=0$, maka kita akan mengeliminasi indeks ganjil. Sehingga,</p> <p>$f^{(n)}(0)$ bersifat sebagai tanda.</p> <p>Untuk deret McLaurin, $a=0$</p> $P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$ <p>Sehingga didapatkan,</p> $P(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ <p>Jika dilihat sekilas, daerah konvergensi nya adalah bilangan pecahan sejati. Namun jika diteliti lebih lanjut, untuk n menuju tak hingga berlaku:</p>	

$$x^n \ll n!$$

Sehingga semua x bisa dikatakan konvergen

Nomor 6

$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
<p>Jawab:</p> <p>Turunan untuk f(x):</p> $f^{(n)}(x) = p(p-1)(p-2)(p-3) \dots (p-n)(1-x)$ <p>Jika x=0, maka</p> $f^{(n)}(0) = p(p-1)(p-2)(p-3) \dots (p-n)$ <p>Sehingga didapatkan</p> $P(x) = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots$ <p>Bagaimana dimana dengan daerah konvergensinya?</p> <p>Jika dilihat sekilas, akan mirip dengan nomor 4 dan 5. Namun dalam kasus ini, nilai p bisa bernilai berapa saja bahkan tak hingga. Sehingga diperlukan parameter x untuk membuat sebuah konvergensi. Untuk itu, dipilih $-1 < x < 1$</p>	