DAVID WIEDEMANN

ANALYSEI

Table des matières

1	Int	Introduction		
	1.1	Buts du Cours		3

2 Definir \mathbb{R} 4

≠ List of Theorems

1	■ Theorem (env400)	3
2	🛊 Lemma (Lemme)	3
		3
		4
3	• Axiom (Nombres Reels)	4
4	🛊 Lemma (Theorem name)	5
		5
5	♦ Proposition (Annulation de l'element neutre)	5
		5
6	► Corollary (x fois moins 1 egale -x)	5
		6
7	• Axiom (Nombres Reels II)	6
8	Corollary (mama test)	6



1.1 Buts du Cours

Officiel:

Suites, series, fonctions, derivees, integrales, ...

Secrets:

Apprendre le raisonnement rigoureux

Creativite

Esprit Critique

Ne croyez rien tant que c'est pas prouve

On construit sur ce qu'on a fait, on recommence pas toujours a 0, par rapport a d'autres domaines(lettres par exemple)

Theorem 1 (env. -400)

Il n'existe aucin nombre (fraction) x tel que $x^2 = 2$.

Ca contredit pythagore nn?

On va demontrer le theoreme. 1

1. On demontre d'abord un lemme

2. Il se pourrait qu'il y ait 13 valeurs

pour $\sqrt{2}$

Lemma 2 (Lemme)

Soit $n \in \mathbb{N}$ Alors n pair $\iff n^2$ pair.

Proof

 \Rightarrow Si n pair $\Rightarrow n^2$ pair.

Hyp.
$$n = 2m(m \in \mathbb{N})$$

Donc
$$n^2 = 4m^2$$
, pair.

Par l'absurde, n impair. $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$.

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

impair. Donc si n est impair, alors n^2 est forcement impair. Ab-

Proof

Supposons par l'absurde $\exists x$ t.q. $x^2=2$ et $x=\frac{a}{b}(a,b\in\mathbb{Z},b\neq0)$.

On peut supposer a et b non tous pairs.(sinon reduire).

$$x^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{h^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$$

pair.

Lemme : a pair, i.e. $a = 2n(n \in \mathbb{N})$.

$$a^2 = 4n^2 = 2b^2 \Rightarrow 2n^2 = b^2$$
, i.e. b^2 pair.

Lemme : *b* pair.

Donc *a* et *b* sont les deux pairs, on a une contradiction.

4

En conclusion, le theoreme est bel et bien vrai, et contredit donc pythagore. Donc les fractions (\mathbb{Q}) ne suffisent pas a decrire/mesurer les longueurs geometriques. Il faut les nombres reels, on les comprends seulement vraiment depuis 2 siecles.

C'est important de chercher ce genre d'erreurs.

Prochain but : definir les nombres reels (\mathbb{R}). L'interaction entre les fractions et les nombres reels.

Definir R

On commence avec la definition axiomatique des nombres reels.

Axiom 3 (Nombres Reels)

 \mathbb{R} est un corps, en d'autres termes :

Ils sont munis de deux operations : plus et fois.

- Associativite $x + (y + z) = (x + y) + z(x, y, z \in \mathbb{R})^{1}$
- Commutativite x + y = y + x.
- Il existe un element neutre 0 t.q. 0 + x = x, $x \in \mathbb{R}$. ²
- Distributivite x(yz) = (xy)z

- L'associativite n'est pas forcement vraie(octonions)
- Il y a aucune difference entre les regles pour l'addition que pour la multiplication.

— Il existe un element inverse, unique $-x \in \mathbb{R}$ t.q. x + (-x) = 0

Remarque : Il existe beaucoup d'autres corps que \mathbb{R} , par exemple

 $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \{0, 1, 2\} \mod 3$

Attention: $\{0,1,2,3\} \mod 4$ n'est pas un corps!

Presque tous marchent, ils satisfont 8 des 9 axiomes.

♣ Lemma 4 (Theorem name)

 $\forall x \exists ! y \ t.q. \ x + y = 0.$

Proof

Supposons x + y = 0 = x + y'

A voir : y = y'.

$$y = y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y'$$

$$= (x + y) + y' = 0 + y' = y'$$

CQFD.

Exercice

Demontrer que 0 est unique.

♦ Proposition 5 (Annulation de l'element neutre)

 $0 \cdot x = 0$

Proof

$$x = x \cdot 1 = x(1+0) = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$$

$$0 = x + (-x) = x + (-x) + x \cdot 0$$

$$\Rightarrow 0 = x \cdot 0$$

3

3.
$$a - b = a + (-b)$$

Corollary 6 (x fois moins 1 egale -x)

$$x + x \cdot (-1) = 0$$

Proof

A voir : $x \cdot (-1)$ satisfait les proprietes de -x.

Or

$$x + x(-1) = x(1-1) = x \cdot 0 = 0.$$

Exercice

Montrer que $\forall x : -(-x) = x$ et que ceci implique (-a)(-b) = ab.

Rien de tout ca n'a quelque chose a voir avec \mathbb{R} .

Il nous faut plus d'axiomes!!

• Axiom 7 (Nombres Reels II)

 $\mathbb R$ est un corps ordonne. Ce qui revient a dire que les assertions suivantes sont verifiees.

- $x \le y$ et $y \le z$ impliquent $x \le z$
- $-(x \le yety \le x) \Rightarrow x = y$
- pour tout couple de nombres reels x et y: ou bien $x \le y$ ou bien $x \ge y$.

Exemple de corps ordonnnes :

(1) \mathbb{R} , (2) \mathbb{Q} , (3) $\{0,1,2\}$ mod 3 n'est pas un corps ordonne.

Exercice

$$x \le y \iff -x \ge -y$$
 Exercice

$$x \le y \text{ et } z \ge 0 \Rightarrow xz \le yz$$

$$x \le y \text{ et } z \le 0 \Rightarrow xz \ge yz.$$

Il nous manque encore un axiome, et c'est le dernier : pour mercredi!