

Série 1, Exercice 6

David Wiedemann

26 septembre 2020

• Clairement le numérateur est un entier positif, il suffit donc de montrer qu'il est pair.
On distingue donc les cas.

— Supposons m pair et n pair, alors :

$$m = 2i \text{ et } n = 2k$$

Donc

$$\begin{aligned}(m+n)^2 + m + 3n &= (2i+2k)^2 + 2i + 6k \\ &= 2(2(i+k))^2 + i + 3k\end{aligned}$$

Donc le numérateur est pair.

— Supposons m pair et n impair, alors

$$m = 2i \text{ et } n = 2k + 1$$

Donc

$$\begin{aligned}(m+n)^2 + m + 3n &= (2i+2k+1)^2 + 2i + 6k + 3 \\ &= (2i+2k)^2 + 2(2i+2k) + 1 + 2i + 6k + 3 \\ &= (2i+2k)^2 + 2(2i+2k) + 2i + 6k + 4 \\ &= 2(2(i+k))^2 + (2i+2k) + i + 3k + 2\end{aligned}$$

Donc le numérateur est pair.

— Supposons m impair et n pair, alors

$$m = 2i + 1 \text{ et } n = 2k$$

Donc

$$\begin{aligned}
(m+n)^2 + m + 3n &= (2i+2k+1)^2 + 2i+6k+1 \\
&= (2i+2k)^2 + 2(2i+2k) + 1 + 2i+6k+1 \\
&= (2i+2k)^2 + 2(2i+2k) + 2i+6k+2 \\
&= 2(2(i+k))^2 + (2i+2k) + i+3k+1
\end{aligned}$$

— Finalement, supposons m impair et n impair

$$m = 2i + 1 \text{ et } n = 2k + 1$$

Donc

$$\begin{aligned}
(m+n)^2 + m + 3n &= (2i+2k+2)^2 + 2i+6k+4 \\
&= 2(2(i+k+1)) + i+3k+2
\end{aligned}$$

- Par la définition de D_k , $(m, n) \in D_k$ implique que $(k-n, n) \in D_k$ avec $0 \leq n \leq k$.

Supposons donc $(m, n) \in D_k$, on a :

$$\begin{aligned}
C(m, n) &= C(k-n, n) = \frac{1}{2} \cdot ((k-n+n)^2 + k-n+3n) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (k^2 + k + 2n) \\
&= \frac{k^2 + k}{2} + n
\end{aligned}$$

Donc si $n = 0$, $C(m, n) = \frac{k^2+k}{2}$ et si $n = k$, $C(m, n) = \frac{k^2+k}{2} + k$, donc les valeurs de $C(m, n)$ sont comprises entre $\frac{k^2+k}{2}$ et $\frac{k^2+k}{2} + k$.

- Je n'ai pas fait le graphique en latex.
- On est maintenant prêt à montrer la bijectivité de $C : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$. Pour ceci, on va procéder par étapes :

1. Montrer que $C : D_k \rightarrow \{\frac{k^2+k}{2}, \dots, \frac{k^2+k}{2} + k\}$ est bijective.
2. Montrer que $D_i \cap D_k = \emptyset$, si $i \neq k$.
3. Montrer que $\bigcup_{i=0}^{+\infty} D_i = \mathbb{N}^2$.
4. Montrer que $C(D_k) \cap C(D_i) = \emptyset$, $i \neq k$
5. Montrer la bijectivité de $C : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$.

Pour le point 1.

Trouver un inverse pour $C : D_k \rightarrow \{\frac{k^2+k}{2}, \dots, \frac{k^2+k}{2} + k\}$ est facile, soit $a \in \{\frac{k^2+k}{2}, \dots, \frac{k^2+k}{2} + k\}$, alors

$$\begin{aligned}
C^{-1} : \left\{ \frac{k^2+k}{2}, \dots, \frac{k^2+k}{2} + k \right\} &\rightarrow D_k \\
a &\rightarrow \left(a - \frac{1}{2}(k^2+k), k + \frac{1}{2}(k^2+k) - a \right)
\end{aligned}$$

Clairement, cette application est bijective car k est constante.

Pour le point 2.

Par l'absurde, supposons que $\exists(m, n) \in D_k$ tel que $(m, n) \in D_i$, avec $i \neq k$.
Donc $m + n = i$ et $m + n = k$, donc $i = k$, ce qui est une contradiction à l'hypothèse.

Pour le point 3.

On montre la double inclusion.

L'inclusion de gauche à droite est évidente, pour $(m, n) \in D_k, m, n \in \mathbb{N} \implies (m, n) \in \mathbb{N}^2$.

Supposons donc $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. On pose $m + n = i, i \in \mathbb{N}$, donc $m = i - n$.

$$(m, n) = (i - n, n) \in D_i$$

On en déduit $\bigcup_{i=0}^{+\infty} D_i = \mathbb{N}^2$

Pour le point 4.

Sans perte de généralité, on suppose $i < k$, donc $k = i + a, a \in \mathbb{Z}^+$. Montrons que $\sup(C(D_i)) < \inf(C(D_k))$.

Clairement

$$C : D_i \rightarrow \left\{ \frac{i^2 + i}{2}, \dots, \frac{i^2 + i}{2} + i \right\}$$

et

$$C : D_k \rightarrow \left\{ \frac{k^2 + k}{2}, \dots, \frac{k^2 + k}{2} + k \right\} = \left\{ \frac{i^2 + 2ia + a^2 + i + a}{2}, \dots, \frac{i^2 + 2ia + a^2 + i + a}{2} + i + a \right\}$$

On sait que $\sup(C(D_i)) = \frac{i^2 + i}{2}$ et que $\inf(C(D_k)) = \frac{i^2 + 2ia + a^2 + i + a}{2}$, donc

$$\inf(C(D_k)) - \sup(C(D_i)) = \frac{i^2 + 2ia + a^2 + i + a}{2} - \left(\frac{i^2 + i}{2} + i \right) \quad (1)$$

$$= \frac{i^2 + 2ia + a^2 + i + a}{2} - \frac{i^2 + 3i}{2} \quad (2)$$

$$= \frac{a^2 + 2ia - 2i + a}{2} \quad (3)$$

Car $i, a > 0$, la différence est plus grande que 0 et donc l'intersection de $C(D_i) \cap C(D_k)$ est vide.

Pour le point 5.

Donc C est injective sur $D_i \cup D_k, k \neq i$ et donc elle est injective sur $\bigcup_{i=0}^{+\infty} D_i$

On voit aussi que si on pose $a = 1$ dans l'équation 3, on a :

$$\frac{1 + 2i - 2i + 1}{2} = 1$$

Donc, il n'existe pas d'éléments de $k \in \mathbb{N}$ qui ne sont pas dans un $C(D_i), i \in \mathbb{N}$, donc les $C(D_i)$ couvrent \mathbb{N} et $C : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ est surjective.

Donc $C : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ est une bijection.