Série 3

David Wiedemann

4 octobre 2020

1

On construit une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Z}$.

$$\phi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$$
$$m \to \begin{cases} 2m \text{ si } m \geq 0 \\ -2m + 1 \text{ si } m < 0 \end{cases}$$

On considère le 0 comme pair.
Pour vérifier que cette application définit une injection, on montre la surjectivité dans les deux sens.

Surjectivité

Soit $n \in \mathbb{N}$, si n pair, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Alors k est l'antécédent de k par ϕ.
Si n impair, $\exists j \in \mathbb{N}$ tel que $2j + 1 = n$, on pose $k = -j$, alors $-2k + 1 = n$.

Injectivité

Supposons $\exists k, j \in \mathbb{Z}$ tel que $\phi(k) = \phi(j)$. Si k et j sont de signe différent, alors soit $\phi(k)$ ou $\phi(j)$ est impair et donc l'égalité ne peut pas tenir.
Supposons donc $k, j > 0$, alors $\phi(k) = 2k$ et $phi(j) = 2j$ donc $2k = 2j$ et $j = k$.
Si $k, j < 0$, alors $\phi(k) = -2k+1$ et $\phi(j) = -2j+1$ donc $-2k+1 = -2j+1 \Rightarrow k = j$.

On en déduit que l'application ϕ est bijective et que $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

2

Par Cantor-Schroeder-Bernstein, il suffit de trouver une injection de $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ et de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$.

Injection de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$

Soit

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{N} &\to \mathbb{N}^n \\ k &\to (k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ fois}}) \end{aligned}$$

Cette application est clairement injective car $(m, 0, \ldots, 0) = (j, 0, \ldots, 0)$ implique $m = j$.

Injection de $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$

Soit

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{N}^n &\to \mathbb{N} \\ (a_1, \ldots, a_n) &\to \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i} \end{aligned}$$

où $p_1, \ldots, p_n$ sont les n premiers nombres premiers.
L'injectivité de cette application suit directement de l'unicité de la décomposition en nombres premiers.
En effet, si $(a_1, \ldots, a_n) \neq (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{N}^n$, alors l'unicité implique que

$$\prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i} \neq \prod_{i=1}^{n} p_i^{b_i}$$

et donc l'application ϕ est injective.

On en déduit que $|\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}|$

3

On utilise à nouveau Cantor-Schroeder-Bernstein.

Injection de $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

L'application

$$K : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$$
$$n \to n$$

est une injection.

Injection de $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$

On montre un résultat préliminaire.

Théorème 1. *Si $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles infini dénombrables, alors*

$$K = A_1 \times \ldots \times A_n \text{ est infini dénombrable.}$$

Démonstration. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in K$.
Par hypothèse, $\exists \phi_1, \ldots, \phi_n$ des bijections $\phi_i : A_i \to \mathbb{N}, 0 < i \leq n$. L'application

$$\Phi : K \to \mathbb{N}^n$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \to (\phi_1(a_1), \ldots, \phi_n(a_n))$$

est une bijection.
Par la partie 2, on sait qu'il existe une bijection de $\psi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ et donc

$$\Psi \circ \Phi$$

est une bijection de $K \to \mathbb{N}$. $\square$

On est pret à montrer l'injection de $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.
On construit une bijection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$.
Soit $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ la bijection définie précédemment et $t_1 : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ la bijection [1] :

$$t_1 : n \to n - 1$$

On peut donc, par le théorème 1, construire une bijection de $G : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$.

On définit la surjection [2]

$$Q : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$$
$$(a, b) \to \frac{a}{b}$$

1. L'injectivité et la surjectivité de cette bijection sont évidentes.
2. La surjectivité suit du fait qu'à chaque fraction, on puisse assimiler un 2-uplet.

Par l'exercice 5, de la série 2, on peut construire une injection F

$$F : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Et donc, l'application

$$G \circ F$$

est une injection de $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$

4

Soit $q(t) \in \mathbb{Q}[t]$, alors

$$q(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i t^{i-1}, \text{ avec } q_i \in \mathbb{Q}$$

Soit

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{Q}[t] &\to \mathbb{Q}^n \\ q(t) &\to (q_1, \ldots, q_n) \end{aligned}$$

Cette application est une bijection.

Surjectivité

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Q}^n$, alors le polynôme

$$a(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i t^{i-1}$$

est un antécédent de $a(t)$.

Injectivité

Soit $a(t), b(t) \in \mathbb{Q}[t], a(t) \neq b(t)$, alors $\exists 0 < i \leq n$ tq $a_i \neq b_i$, donc

$$Q(a(t)) = (a_1, \ldots, a_n) \neq Q(b(t)) = (a_1, \ldots, a_n)$$

Par la partie 3, on sait que $\mathbb{Q}$ est infini dénombrable, et donc, par le théorème 1, $\mathbb{Q}^n$ l'est aussi. Donc $\exists M : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}$, M une bijection.
La fonction définie par

$$M \circ Q$$

est donc une bijection, et donc $\mathbb{Q}[t]$ est infini dénombrable.

On pose

$$A = \{z \in \mathbb{C} | z \text{ algébrique } \}$$

Soit $a(t) \in \mathbb{Q}[t]$, on dénote par $S_{a(t)}$, l'ensemble des solutions de l'équation $a(t) = 0$.
On veut montrer que

$$A = \bigcup_{a(t) \in \mathbb{Q}[t]} S_{a(t)}$$

Om montre la double inclusion.
Soit $z \in A$, alors $\exists Z(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tel que $Z(a) = 0$, donc $z \in S_{Z(t)}$, donc

$$z \in \bigcup_{a(t) \in \mathbb{Q}[t]} S_{a(t)}.$$

Soit

$$z \in \bigcup_{a(t) \in \mathbb{Q}[t]} S_{a(t)}$$

donc $\exists b(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tel que $b(a) = 0$, donc a algébrique, donc $a \in A$.
