Série 8, Exercice à rendre

David Wiedemann

23 mars 2021

1

Par un théoreme du cours, il faut montrer que pour toute suite $(x^{(k)})$ convergeant vers 0, on a

$$\lim_{k \to +\infty} N(x^{(k)}) = 0$$

Soit donc $x^{(k)}$ une suite convergeant vers 0. On peut écrire $x^{(k)} = \lambda_k \cdot e_k$, ici $\lambda_k \in \mathbb{R}$ et $e_k \in \mathbb{R}^n$.
On peut egalement supposer que e_k satisfait $N(e_k) = N(e_j) \neq 0 \quad \forall k, j \in \mathbb{N}^*$. L'existence de ces e_j est garantie car $N(\lambda \cdot x) = |\lambda| \cdot N(x)$.
La norme étant bornée, on déduit que Ainsi, $\lim_{k \to +\infty} \lambda_k = 0$ et donc

$$\lim_{k \to +\infty} N(x^{(k)}) = \lim_{k \to +\infty} |\lambda_k| \cdot N(e_k) = 0$$

2

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, soit $x^{(k)}$ une suite convergeant vers x_0, alors faisons l'observation que [1]

$$|N(x^{(n)} - x_0) - N(x_0)| \leq N(x^{(n)}) \leq N(x^{(n)} - x_0) + N(x_0) \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Or, la suite $x^{(n)} - x_0$ tend vers 0.
En conclut, par le théorème des deux gendarmes et donc

$$\lim_{k \to +\infty} N(x^{(k)}) = N(x_0)$$

pour toute suite $x^{(k)}$ et donc $N(x)$ est une fonction continue.

1. On utilise ici l'inégalité triangulaire inversée, la preuve de cette dernière suit de l'inégalité triangulaire et ne dépend donc pas du choix de la norme.

3

Etant donné que la sphère unitaire centrée en 0 est le bord de l'ensemble $B(0,1)$, il est immédiat que cet ensemble est borné. On dénotera la sphère unitaire par S.
Pour montrer que S est fermé, on remarque que $S = \partial B(0,1)$ et donc $\forall x \in S \quad \exists \delta > 0$ tel que $B(x,\delta) \cap B(0,1) \neq \emptyset$ et $B(x,\delta) \cap B(0,1)^c \neq \emptyset$.
Ainsi, il est immédiat que le complémentaire de S est ouvert et donc S est fermé.
S étant fermé et borné, S est compact.
Montrons maintenant que toute norme est équivalenter à la norme euclidienne.
N étant une fonction continue, N atteint ses extremas sur S :

$$\exists x_m, x_M \text{ tel que } N(x_m) = \inf_{i \in S} N(i) \text{ et } N(x_M) = \sup_{i \in S} N(i)$$

Si N atteint son maximum (respectivement minimum) plusieurs fois, il suffit de choisir un des x_M.
Posons maintenant

$$C_1 = N(x_m) \text{ et } C_2 = N(x_M)$$

On a alors [2] que $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$N(x) = N(\|x\|_2 \frac{x}{\|x\|_2}) = \|x\|_2 N(\frac{x}{\|x\|_2}) \leq \|x\|_2 C_2$$

et de la même manière, on trouve que

$$N(x) \geq \|x\|_2 C_1$$

et on en déduit

$$\|x\|_2 C_2 \geq N(x) \geq \|x\|_2 C_1$$

Cette inégalité est bien sur également respectée dans le cas $x = 0$, et donc les normes sont équivalentes.

4

Soient $A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux normes, alors par la partie 3, $\exists a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_2 a_1 \leq A(x) \leq \|x\|_2 a_2 \text{ et } \|x\|_2 b_1 \leq B(x) \leq \|x\|_2 b_2$$

2. Ceci suit du fait que $\frac{x}{\|x\|_2}$ est dans S pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

On en déduit que

$$\frac{A(x)}{a_2} \leq \frac{B(x)}{b_1} \Rightarrow A(x) \leq \frac{a_2}{b_1} B(x)$$

et de même

$$A(x)\frac{1}{a_1} \geq B(x)\frac{1}{b_2} \Rightarrow A(x) \geq \frac{a_1}{b_2} B(x)$$

Ainsi, les normes $A(x)$ et $B(x)$ sont semblables.
On en déduit que toutes les norme sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.