

## Série 21 du lundi 10 mai 2021

### Exercice 1.

Soient  $R \subset \mathbb{R}^{n-1}$  un pavé et  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ .

- 1) Supposons que  $f$  est continue. Montrer que son graphe  $\mathcal{G}(f) := \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in R\}$  est un sous-ensemble négligeable de  $\mathbb{R}^n$ .
- 2) Supposons que  $f$  est bornée et intégrable au sens de Riemann.  $\mathcal{G}(f)$  est-il toujours un sous-ensemble négligeable de  $\mathbb{R}^n$  ?

### Exercice 2.

- 1) Notons  $A_1 := \{n^{-1} : n \in \mathbb{N}^*\}$ .  $A_1$  est-il mesurable au sens de Jordan ? Si oui, calculer  $\text{Vol } A_1$ .
- 2) Notons  $A_2 := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ .
  - a) Soit  $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Trouver un recouvrement par pavés  $\{R_j : j \in \mathbb{N}\}$  de  $A_2$  tel que  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{Vol } R_j < \epsilon$ .
  - b)  $A_2$  est-il mesurable au sens de Jordan ? Si oui, calculer  $\text{Vol } A_2$ .

### Exercice 3.

- 1) Montrer que l'union d'une famille finie d'ensembles négligeables est négligeable.
- 2) L'union d'une famille infinie dénombrable d'ensembles négligeables est-elle négligeable ?