Série 6

David Wiedemann

2 novembre 2020

1

Soit $g \in G$ un élément satisfaisant $g^2 = e_G$, où e_G dénote l'élément neutre.
On construit alors l'application de ${}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{2\mathbb{Z}}$ vers G.

$$\phi_g : \begin{array}{l} [0] \to e_G \\ [1] \to g \end{array}$$

Montrons que tous les homomorphismes de ${}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{2\mathbb{Z}}$ vers G sont de cette forme.
En effet, supposons qu'il existe un homomorphisme ϕ tel que $\phi(1)^2 \neq e_G$, alors

$$e_G = \phi([0]) = \phi([1] + [1]) = \phi([1])^2 \neq e_G$$

Ce qui est une contradiction au fait que ϕ est un homomorphisme. Donc tous les homomorphismes sont de la forme ϕ_g.
Dénotons par $G_2 = \{g \in G | g^2 = e_G\}$, alors on définit l'application

$$\begin{aligned} G_2 &\mapsto \mathrm{Hom}\left({}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{2\mathbb{Z}}, G\right) \\ g &\mapsto \phi_g \end{aligned}$$

On vérifie facilement que cette application est bijective, la surjectivité est immédiate par la propriété démontrée ci-dessus.
L'injectivité est immédiate, en effet, soit $g, g' \in G_2$ deux éléments différents, alors

$$\phi_{g'} = \phi_g \text{ implique } \phi_{g'}([1]) = \phi_g([1]) \text{ et donc } g' = g$$

Ce qui implique l'injectivité.

2

Posons, comme dans l'exercice 2, $G = H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
On sait que le groupe $\left(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\right)^{\times}$ contient 4 éléments :

$$1, 3, 5, 7$$

Clairement, 1 sera l'élément neutre, les 3 éléments restants sont tous des 2-torsions [1]. Donc par la section 1, les seuls morphismes de $\left(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\right)^{\times}$ sont de la forme ϕ_g.
Définissons donc $\alpha = \phi_3$ et $\beta = \phi_5$, on utilise ici la même notation que dans la partie 1.
Car $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{\times}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont des groupes abéliens, les hypothèses de l'exercice 2 s'appliquent et il existe un unique homomorphisme ϕ de

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \mapsto (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{\times}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier qu'il s'agit d'un morphisme bijectif.
Si on traduit l'exercice 2 aux conditions de cet exercice, on obtient un diagramme tel que celui-ci :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[d, "\iota_1"'] \arrow[dr, "\phi_3"] & \\
\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r, "\phi"] & \left(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\right)^{\times} \\
\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[u, "\iota_2"] \arrow[ur, "\phi_5"'] &
\end{tikzcd}$$

Dans l'exercice 2, on a trouvé que $\phi(g, h) = \phi_3(g) \cdot \phi_5(h)$ où $g \in G, h \in H$.
Pour montrer la bijectivité de ϕ, on montre la surjectivité et l'injectivité.

1. En effet,

$$3^2 \mod 8 = 1, 5^2 \mod 8 = 1, 7^2 \mod 8 = 1$$

Clairement, chaque élément de $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ est atteint, en effet :

$$\begin{aligned}
\phi(0,0) &= \phi_3(0)\cdot\phi_5(0) = 1\\
\phi(1,0) &= \phi_3(1)\cdot\phi_5(0) = 3\\
\phi(0,1) &= \phi_3(0)\cdot\phi_5(1) = 5\\
\phi(1,1) &= \phi_3(1)\cdot\phi_5(1) = 7
\end{aligned}$$

De la liste ci-dessus, il suit également que ϕ est injective.
On a donc construit un isomorphisme entre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\left(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\right)^\times$, et donc les deux groupes sont isomorphes.