

# Algebre Lineaire II

David Wiedemann

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Polynomes</b>	<b>3</b>
1.1	Division avec reste . . . . .	5
1.2	Factorisation des polynomes sur un corps . . . . .	6
1.3	Factorisation des polynomes sur un corps . . . . .	7
1.4	Diviseurs Communs le plus grand . . . . .	7
1.5	Factorisation en elements irreductibles . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Valeurs et Vecteurs Propres</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Le polynome caracteristique</b>	<b>12</b>

## List of Theorems

1	Definition (Centre d'un anneau) . . . . .	3
2	Definition (Diviseurs de 0) . . . . .	3
3	Definition (Anneau integre) . . . . .	3
1	Theorème . . . . .	3
4	Definition (Polynome) . . . . .	3
2	Theorème . . . . .	3
5	Definition (Degre d'un polynome) . . . . .	4
3	Theorème . . . . .	4
4	Theorème . . . . .	4
5	Theorème . . . . .	5
6	Corollaire . . . . .	5
7	Theorème . . . . .	5
6	Definition (Diviseurs de polynomes) . . . . .	6
7	Definition (Racine) . . . . .	6
8	Theorème . . . . .	6
8	Definition (Multiplicite d'une racine) . . . . .	7
9	Theorème (Theoreme fondamental de l'algebre) . . . . .	7
9	Definition (Polynome irreductible) . . . . .	7

10	Theorème . . . . .	7
11	Theorème . . . . .	7
10	Definition (Polynome Unitaire) . . . . .	7
11	Definition (Diviseur Commun) . . . . .	8
12	Theorème . . . . .	8
12	Definition (PGCD) . . . . .	8
13	Theorème (Algorithme d'Euclide) . . . . .	8
14	Theorème . . . . .	9
15	Theorème (La factorisation est unique) . . . . .	9
16	Corollaire . . . . .	10
13	Definition (Vecteur propre) . . . . .	10
17	Lemme . . . . .	10
14	Definition . . . . .	10
18	Corollaire . . . . .	11
15	Definition (Matrices semblables) . . . . .	11
16	Definition (Sous-espace propre) . . . . .	11
19	Lemme . . . . .	11
20	Corollaire . . . . .	12
17	Definition (Multiplicite algebrique) . . . . .	13
21	Proposition . . . . .	13
22	Theorème (Theoreme de diagonalisation) . . . . .	13

# 1 Polynomes

## Definition 1 (Centre d'un anneau)

Le centre  $Z(R)$  est l'ensemble des elements  $x$  satisfaisant

$$\{x \in R \mid ra = ar \forall a \in R\}$$

## Definition 2 (Diviseurs de 0)

$a$  est un element non nul d'un anneau  $R$  satisfaisant qu'il existe  $b \in R$  tel que  $ab = 0$  ou  $ba = 0$ .

## Definition 3 (Anneau integre)

Si un anneau est commutatif et n'a pas de diviseurs de 0, alors l'anneau est integre.

### Theorème 1

Soit  $R$  un anneau, alors il existe un anneau  $S \supseteq R$  ( $R$  est un sous-anneau) et  $\exists x \in S \setminus R$  tel que

- $ax = xa, \forall a \in R$
- Si  $a_0 + \dots + a_n x^n = 0$  et  $a_i \in R \forall i$  alors  $a_i = 0 \forall i$

Cet  $x$  est appele indeterminee ou variable.

## Definition 4 (Polynome)

Un polynomer sur  $R$  est une expression de la forme

$$p(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$$

ou  $a_i$  est le  $i$ -eme coefficient de  $p(x)$ .

$R[x]$  est l'ensemble des polynomes sur  $R$ .

### Theorème 2

$R[X]$  est un sous-anneau.  $R$  est sans diviseurs de 0  $\Rightarrow R[X]$  est sans diviseurs de 0.

De meme, si  $R$  est commutatif,  $R[x]$  aussi.

## Preuve

Soit  $f(x) = \sum a_i x_i, g(x) = \sum b_i x^i$  de degre  $n$  resp.  $m$ .

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=1}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) x^i$$

De meme, on a

$$f(x) \cdot g(x) = a_0 b_0 + \dots = \sum_{k=0}^{m+n} \left( \sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k$$

Donc  $R[X]$  est stable pour  $+$ ,  $\cdot$  et donc immédiatement pour  $-$ , donc  $R[X]$  est un sous-anneau de  $S$ .

Soient  $f(x), g(x) \neq 0$  et  $n = \max\{i : a_i = 0\}$ , le  $m + n$ -ième coefficient de  $f(x)g(x)$  est  $a_n b_m$  et donc si  $R$  est intègre,  $R[x]$  l'est aussi.  $\square$

**Définition 5 (Degré d'un polynôme)**

Soit  $f(x) = a_0 + \dots \in R[X]$ ,  $f(x) \neq 0$ . On définit

$$\deg(f) = \max\{i : a_i \neq 0\}$$

Ce dernier terme s'appelle le coefficient dominant de  $f$ , de plus on définit

$$f(x) = 0 : \deg(f) = -\infty$$

Si  $\deg(f) = 0$ , alors  $f$  est une constante.

**Théorème 3**

Soit  $R$  un anneau,  $f, g \in R[X] \neq 0$  tel que au moins un de leur coefficients dominants de  $f$  ou de  $g$  ne sont pas des diviseurs de 0. Alors  $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$

**Preuve**

Soit  $f(x) = a_0 + \dots, g(x) = b_0 + \dots, \deg f = n, \deg g = m$ . Le  $n + m$  ième coefficient de  $f \cdot g = a_n \cdot b_m \neq 0$   $\square$

Soit  $p(x) \in R[x]$ , ce polynôme induit une application  $f_p : R \rightarrow R$ , on écrit aussi  $p(r)$

**Théorème 4**

Soit  $K$  un corps et  $r_0, r_1, \dots, r_n \in K$  des éléments distincts et soient  $g_0, \dots, g_n \in K$ .

Il existe un seul polynôme  $f \in K[x]$  tel que

1.  $\deg f \leq n$
2.  $f(r_i) = g_i$

**Preuve**

On cherche  $a_0, \dots, a_n$  tel que

$$a_0 + a_1 r_i + \dots + a_n r_i^n = g_i$$

Donc, on cherche

$$\begin{pmatrix} 1 & r_0 & \dots & r_0^n \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Il faut donc montrer que la matrice ci-dessus a un déterminant non nul.

On le montre par induction sur  $n$ .

Dans le cas  $n = 0$ , le déterminant vaut trivialement 1. Dans le cas  $n > 0$ , on a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 1(r_1 - r_0) & \dots & \\ \dots & \ddots & \\ 1(r_n - r_0) & \dots & \end{pmatrix} = (r_1 - r_0)(r_2 - r_0) \dots \det(V(r_1, \dots, r_n)) \neq 0 \quad \square$$

## Lecture 2: Polynomes

Wed 24 Feb

### Theorème 5

Soit  $K$  un corps fini de caractéristique  $q$ , alors  $K \supseteq \mathbb{Z}_q$ .

De plus  $K$  est un espace vectoriel de  $\mathbb{Z}_q$  de dimension finie.

### Corollaire 6

Soit  $K$  un corps infini. Deux polynomes sont égaux si et seulement si leurs évaluations sont les memes.

### Preuve

Une direction est triviale.

L'autre suit immédiatement du theoreme 1.6 □

## 1.1 Division avec reste

### Theorème 7

Soit  $R$  un anneau,  $f, g \in R[x]$ ,  $g \neq 0$  et soit le coefficient de  $g \in R^*$

Il existe  $q, r \in R[x]$  uniques tel que

1.  $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$
2.  $\deg r < \deg g$

### Preuve

Si  $\deg f < \deg g$ , on a fini.

Soit donc  $\deg f \geq \deg g$ , donc

$$f(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$$

et

$$g(x) = b_0 + \dots + b_m x^m$$

et  $b_m^{-1}$  existe.

On procede par induction sur  $n$ .

Si  $n = m$  :

On note que

$$f(x) - \frac{a_n}{b_m}g(x)$$

est un polynome de degre  $< n$  Si  $n > m$  :

On note que

$$f(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)$$

est un polynome de degre  $< n$ .

Par hypothese d'induction il existe  $q(x), r(x)$  tel que

- $f(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x) + r(x)$
- $\deg r < \deg g$

et donc on a fini de montrer l'existence.

Supposons maintenant qu'il existe  $r'$  et  $q'$  satisfaisant les memes proprietes que  $q$  et  $g$ , alors on a

$$q(x)g(x) + r(x) = q'(x)g(x) + r'(x)$$

Donc

$$r' \neq r \text{ et } q' \neq q$$

□

en comparant les degre, on a une contradiction.

## 1.2 Factorisation des polynomes sur un corps

### Definition 6 (Diviseurs de polynomes)

Soit  $q(x) \in K[x]$ .

$q$  divise  $f$  si il existe  $g(x)$  tel que

$$q(x)g(x) = f(x)$$

On dit que  $q$  est un diviseur de  $f$ , on ecrit  $q(x)|f(x)$

### Definition 7 (Racine)

Soit  $p(x) \in K[x]$ , et soit  $\alpha \in K$  tel que  $p(\alpha) = 0$

#### Theorème 8

Soit  $f(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ , alors  $\alpha \in K$  est une racine de  $f$  si et seulement si  $(x - \alpha)|f(x)$

#### Preuve

Si  $(x - \alpha)q(x) = f(x)$ , alors on a fini.

sinon, la division de  $f(x)$  par  $x - \alpha$  avec reste donne

$$f(x) = q(x)(x - \alpha) + r \text{ ou } r \in K$$

Si  $r \neq 0$ , alors  $f(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + r = r \neq 0$  et donc  $(x - \alpha)|f(x)$

□

**Definition 8 (Multiplicite d'une racine)**

La multiplicite d'une racine  $\alpha$  de  $p(x) \in K[x]$  est le plus grand  $i \geq 1$  tel que

$$(x - \alpha)^i | p(x)$$

**Theorème 9 (Theoreme fondamental de l'algebre)**

Tout polynome  $p(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$  de degre  $\geq 1$  possede une racine complexe.

**Lecture 3: Factorisation des polynomes sur un corps**

Tue 02 Mar

**1.3 Factorisation des polynomes sur un corps**

Soit  $K$  un corps.

**Definition 9 (Polynome irreductible)**

Un polynome  $p(x) \in K[x] \setminus \{0\}$  est irreductible si

- $\deg p \geq 1$
- si  $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ , alors  $\deg f = 0$  ou  $\deg g = 0$ .

**Theorème 10**

Un polynome de degre 2 sur  $K[x]$  est irreductible si et seulement si le polynome ne possede pas de racines.

**1.4 Diviseurs Communs le plus grand****Theorème 11**

Soient  $f(x), g(x) \in K[x]$  pas tous les deux nuls.

On considere l'ensemble  $I = \{u \cdot f + v \cdot g : u, v \in K[x]\}$ .

Il existe un polynome  $d(x) \in K[x]$  satisfaisant

$$I = \{h \cdot d : h \in K[x]\}$$

**Preuve**

Soit  $a \in I \setminus \{0\}$  de degre minimal.

L'ensemble  $\{h \cdot d : h \in K[x]\}$  est clairement un sous-ensemble de  $I$ .

Il reste a montrer l'inclusion inverse.

Si  $d$  ne divise pas  $uf + vg$ , la division avec reste donne

$$uf + vg = qd + r \iff r = uf + vg - qd = (u - qu')f + (v - qv')g$$

Or le reste est non nul, mais le reste est de degre inferieur a  $\deg d$ .  $\nrightarrow$  □

**Definition 10 (Polynome Unitaire)**

Un polynome  $f(x) \in K[x]$  dont le coeff. dominant = 1 est un polynome unitaire.

**Definition 11 (Diviseur Commun)**

Soient  $f, g \in K[x]$  non-nuls.

Un diviseur commun de  $f$  et  $g$  est un polynome qui divise  $f$  et  $g$ .

**Theorème 12**

Soient  $f, g \in K[x]$  non-nuls.

Soit  $d \in K[x]$  comme dans le theoreme precedent.

- $d$  est un diviseur commun de  $f$  et  $g$ .
- Chaque diviseur commun de  $f$  et  $g$  est un diviseur de  $d$ .
- Si  $d$  est unitaire, alors  $d$  est unique.

**Preuve**

- $f \in I \Rightarrow \exists h$  tel que  $hd = f \iff d|f$  et  $g \in I \Rightarrow d|g$
- Soit  $d' \in K[x]$  tq  $d'|f, d'|g$ , on veut montrer que  $d'|d$ .

$$f = f'd', g = g'd'$$

des que  $d \in I$ , il existe  $u, v \in K[x]$  tel que

$$d = uf + vg = uf'd' + vg'd' = (uf' + vg')d' \Rightarrow d'|d \quad \square$$

- Soit  $d' \in I$  tel que  $I = \{hd' | h \in K[x]\}$ .  
Soient  $d, d'$  unitaires.  
 $d|d'$  et  $d'|d$ , donc ils sont les memes a un facteur pres.

**Definition 12 (PGCD)**

L'unique polynome unitaire  $d \in K[x]$  qui satisfait les conditions ci-dessus est appele le plus grand commun diviseur de  $f$  et  $g$ .

**Theorème 13 (Algorithme d'Euclide)**

Soient  $f_0, f_1$  non nuls et

$$\deg f_0 \geq \deg f_1$$

On cherche  $\gcd(f_0, f_1)$  Si  $f_1 = 0$ , alors  $\gcd = f_0$ .

Si  $f_1 \neq 0$  On pose

$$f_0 = q_1 f_1 + f_2$$

Soit  $h \in K[x] : h|f_0$  et  $h|f_1 \Rightarrow h|f_2$  Et donc on pose  $\gcd(f_0, f_1) = \gcd(f_1, f_2)$  On repete jusqu'a trouver un  $f_k$  nul.

Grace a l'algorithme d'Euclide, on peut aussi trouver  $u, v \in K[x]$  tel que  $uf_0 + vf_1 = \gcd(f_0, f_1)$ .

En effet, on a

$$\begin{pmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{i-1} \\ f_i \end{pmatrix}$$



et donc en appliquant cette matrice plusieurs fois, on trouve une dépendance linéaire entre  $f_{k-1}$  et  $f_k$

Et donc le  $\gcd(f_0, f_1) = \frac{1}{\text{coeff dominant de } f_{k-1}}(uf_0 + vf_1)$

## Lecture 4: Polynomes 2

Wed 03 Mar

### 1.5 Factorisation en éléments irréductibles

Un polynome  $p(x)$  est irréductible si le degré de  $p$  est  $\geq 1$ ,  $p(x) \neq 0$ .

Si  $h|p$ , alors  $h = a$  ou  $h = a \cdot p$ .

Tout  $f(x) \in K[x]$  se laisse factoriser

$$f(x) = a \prod_i p_i(x), p_i(x) \text{ irréductibles, unitaires}$$

Est-ce que cette factorisation est unique ?

#### Theorème 14

Soit  $p(x) \in K[x] \setminus \{0\}$  irréductible et supposons que  $p|f_1(x) \dots f_k(x)$ , alors il existe  $i$  tel que  $p(x)|f_i(x)$

#### Preuve

Par récurrence, il suffit de démontrer l'assertion pour  $k = 2$ .

Supposons que  $p|f \cdot g$ ,  $f, g \in K[x] \setminus \{0\}$ .

Si  $p \nmid f$ , alors  $\gcd(p, f) = 1$ . Donc, il existe  $u, v \in K[x]$  tel que  $up + vf = 1$ , donc on a

$$upg + vfg = g \Rightarrow p|upg + vfg \Rightarrow p|g \quad \square$$

#### Theorème 15 (La factorisation est unique)

La factorisation est unique à l'ordre près des  $p_i$ .

#### Preuve

Soit  $f(x) = a \prod p_i(x)$  et  $f(x) = a \prod q_j(x)$  une autre factorisation en éléments irréductibles.

Par récurrence sur  $k$ .

Si  $k = 1$ , alors

$$ap_1(x) = aq_1(x) \dots q_l(x)$$

Et donc  $q_1(x) = p_1(x)$ , car  $p_1$  est irréductible. Si  $k > 1$ ,

$$ap_1(x) \dots p_k(x) = aq_1(x) \dots q_l(x)$$

Grace au théorème ci-dessus,  $p_1|q_j$  pour un certain  $j \iff p_1 = q_j$ . Et donc on obtient

$$p_2(x) \dots = q_1(x) \dots q_l(x) \quad \square$$

Par récurrence, cette factorisation existe et est la même à l'ordre près.

**Corollaire 16**

Soit  $f(x) \in K[x] \setminus \{0\}$  et  $\alpha_1 \dots$  des racines de  $f$  de multiplicité  $k_1, \dots, k_l$  respectivement.

Alors il existe  $g(x) \in K[x]$  tel que

$$f(x) = g(x) \prod (x - \alpha_i)^{k_i}$$

**Preuve**

Exercice

□

## 2 Valeurs et Vecteurs Propres

**Definition 13 (Vecteur propre)**

Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $K$  et  $f$  un endomorphisme sur  $V$ .

Un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda \in K$  est un vecteur  $v \neq 0$  satisfaisant

$$f(v) = \lambda v$$

**Lemme 17**

Soit  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  une base de  $V$  et  $A \in K^{n \times n}$  la matrice de l'endomorphisme  $f$  relatif à  $B$ .

La matrice  $A$  est une matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\iff v_i$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$ .

**Preuve**

On a

$$[f(v_i)]_B = Ae_i = \lambda_i e_i$$

Donc  $v_i$  est un vecteur propre associé à  $\lambda_i$ .

Dans l'autre sens, les arguments sont similaires.

□

**Definition 14**

Un endomorphisme  $f$  sur un espace vectoriel de dimension finie est appelé diagonalisable s'il existe une base tel que  $\{v_1, \dots\}$  de  $V$  composée de vecteurs propres.

## Lecture 5: Vecteurs/Valeurs Propres

Tue 09 Mar

**Corollaire 18**

Soit  $f : V \rightarrow V$  un endomorphisme et  $\{v_1, \dots, v_n\}$  une base de  $V$ .  
 Alors  $f$  est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice inversible  $P \in K^{n \times n}$  tel que  $P^{-1}A_BP$  est diagonale.

**Preuve**

$f$  est diagonalisable  $\iff \exists B' = \{w_1, \dots\}$  tel que  $A_{B'}$  est diagonale.

Mais  $A_{B'} = P^{-1}A_BP$

□

**Definition 15 (Matrices semblables)**

$A, B \in K^{n \times n}$  sont semblables s'il existe  $P \in K^{n \times n}$  inversible tel que

$$P^{-1}AP = B$$

Donc si  $f$  est diagonalisable, la matrice de  $f$  est semblable a une matrice diagonale.

**Definition 16 (Sous-espace propre)**

Soit  $f : V \rightarrow V$  un endomorphisme et  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ , alors

$$E_\lambda = \ker(f - \lambda \cdot \text{Id})$$

est l'espace propre de  $f$  associe a  $\lambda$ .

$\dim E_\lambda$  est la multiplicite geometrique de  $\lambda$ .

**Lemme 19**

Soit  $f : V \rightarrow V$  un endomorphisme et  $v_1, \dots, v_r$  des vecteurs propres associes aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  distinctes.  
 Alors  $\{v_1, \dots, v_r\}$  est un ensemble libre.

**Preuve**

$r = 1$  est evident.

Pour  $r = 2$  :

Supposons que  $v_1, v_2$  sont lineairement dependants, alors il existe  $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in K \setminus \{0\}$  tel que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$$

Spg  $\lambda_2 \neq 0$ , en appliquant  $f$ , on trouve

$$0 = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$$

$$0 = \alpha_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} v_1 + \alpha_2 v_2$$

$$0 = \alpha_1 \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) v_2$$

Pour  $r > 2$

Supposons l'assertion est fausse et soit  $r > 2$  minimal tel que  $v_1, \dots, v_r$  sont

lin. dependants.. Soit

$$\alpha_1 v_1 + \dots = 0$$

avec  $\alpha_i \neq 0 \forall i$ , alors

$$0 = \alpha_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_r} v_1 + \dots + \alpha_r v_r$$

En soustrayant les deux egalites, on trouve

$$0 = \alpha_1 \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_r}\right) v_1 + \dots$$

□

Ce qui contredit la minimalite.

### Corollaire 20

Soit  $f : V \rightarrow V$  un endomorphisme de  $V$  sur  $K$  et  $\dim V = n$ .

Soient  $\lambda_1, \dots$ , les valeurs propres differentes de  $f$ .

Soit  $n_1 \dots$  les multiplicites geometriques respectives.

Soient  $B_i = \{v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)}\}$  des bases de  $E_{\lambda_i}$ , alors

$$\bigcup_i B_i$$

est un ensemble libre.

$f$  est diagonalisable  $\iff n_1 + \dots + n_r = n$

### Preuve

Soit

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} v_j^{(i)} = 0$$

□

Montrons que  $\alpha_{ij} = 0 \forall i, j$  "Immediat" par lemme d'avant.

On remarque immediatement que si  $\sum n_i = n$ , les vecteurs propres forment une base.

A l'inverse, soit  $f$  diagonalisable, cad il existe une base  $B$  de  $V$  composee de vecteurs propres. Soit  $m_i = |B \cap E_{\lambda_i}|$ , donc  $m_i$  est le nombre de vecteurs dans  $B$  associe a  $\lambda_i$ .

Clairement  $\sum m_i = n$ , mais  $m_i \leq n_i \leq \dim E_{\lambda_i}$ , donc  $\sum n_i = n$ .

## Lecture 7: Polynome caracteristique

Wed 10 Mar

### 3 Le polynome caracteristique

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ ,  $\lambda \in K$  est une valeur propre de l'endomorphisme defini par  $A$  si et seulement si  $\ker(A - \lambda \text{Id}) \supsetneq \{0\}$ . On note

$$\det(A - \lambda I) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^n (A - \lambda \text{Id})_{i\pi(i)}$$

On observe que  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  si et seulement si  $\lambda$  est une racine de  $p_A$ .

Soit  $f : V \rightarrow V$  un endomorphisme,  $B = \{v_1, \dots\}$  une base de  $V$ . Le polynome caracteristique de  $f$  est donne par

$$\det(A_B - \lambda \text{Id})$$

Cette definition fait du sens, car le changement de base n'influence pas la valeur du determinant.

**Definition 17 (Multiplicite algebrique)**

*La multiplicite algebrique d'une valeur propre est la multiplicite comme racine du polynome caracteristique.*

**Proposition 21**

*Soit  $f$  un endomorphisme de  $V \rightarrow V$ .*

*Soit  $\lambda \in K$  une valeur propre.*

*La multiplicite geometrique de  $\lambda$  est au plus la multiplicite algebrique.*

**Preuve**

*Soit  $\{v_1, \dots, v_r\}$  une base de  $E_\lambda$ , on complete cette base en une base de  $V$  avec  $\{w_1, \dots, w_{n-r}\}$ . Dans cette base, la representation de la matrice de  $A - \lambda \text{Id}$  implique que*

$$\det(A - x \text{Id}) = (\lambda - x)^r \det C \quad \square$$

*et donc  $r$  est au plus la multiplicite algebrique.*

**Theoreme 22 (Theoreme de diagonalisation)**

*Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $K$  de dimension  $n$ ,  $f : V \rightarrow V$  un endomorphisme  $\lambda_1, \dots \in K$  les valeurs propres distinctes, alors  $f$  est diagonalisable si et seulement si*

- $p_f(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{g_i}$
- $\dim E_{\lambda_i} = g_i$  pour tout  $i$

**Preuve**

*Soit  $f$  diagonalisable et soit  $B = \{v_1, \dots\}$  une base composee de vecteurs propres.  $A_B$  est une matrice diagonale, alors  $p_f(x) = \det(A_B - x \text{Id}) = (-1)^n \prod (\lambda_i - x)^{g_i}$ . De plus  $\dim(\ker(A_B - \lambda_i \text{Id})) = g_i$*

*Soient  $m_i$  les multiplicites geometriques des valeurs propres. car*

$$\deg(p_f) = n$$

*on a fini.*  $\square$