Topologie

David Wiedemann

Table des matières

1 Quotients topologiques . . . **2**
1.1 La topologie quotient . . . 2
1.2 Relations d'equivalence . . . 3
1.3 Separation et quotients . . . 4

List of Theorems

1 Definition (Topologie quotient) . . . 2
3 Proposition . . . 2
4 Proposition . . . 2
5 Proposition . . . 2
6 Theorème . . . 3
7 Proposition . . . 3
8 Proposition . . . 3
2 Definition . . . 3
9 Proposition (Proprietes universelles) . . . 3
3 Definition . . . 3
4 Definition (Reunion disjointe) . . . 4
5 Definition . . . 4
6 Definition . . . 4
11 Proposition . . . 4

Lecture 1: Introduction

Mon 21 Feb

1 Quotients topologiques

Un espace topologique (X, τ) est ecrit X si la topologie est claire.
Le singloton $\{*\}$ est note $*$.
La boule unite de $\mathbb{R}^n$ est notee D^n et la version ouverte sera $int(D)^n$.

1.1 La topologie quotient

But : Construire de nouveaux espaces a l'aide d'espaces connus en identifiant des points.
Soit X un espace, Y un ensemble et $q : X \to Y$ surjective.

Definition 1 (Topologie quotient)
La topologie quotient sur Y est la topologie des $V \subset Y$ tel que $q^{-1}(V)$ est ouvert dans X .

Remarque
q est alors continue et on verifie que c'est une topologie.

Exemple
$X = [0, 1]$ et $Y = (0, 1) \cup \{*\}$ et q l'application qui envoie 0 et 1 sur $*$.
Alors q est surjective et donc Y peut etre muni de la topologie quotient et est homeomorphe a un cercle.
On definit $f : S^1 \to Y : e^{2\pi it} \mapsto t$ si $0 < t < 1$ et $*$ sinon.

Proposition 3
Soit $q : X \to Y$ une application continue, surjective et ouverte, alors q est un quotient.

Proposition 4
Soit $V \subset Y$ un sous-ensemble tel que $q^{-1}(V)$ est ouverte dans X. Comme q est surjective, alors $V = q(q^{-1}(V))$ et c'est un ouvert car q envoie les ouverts sur les ouverts.

Proposition 5
Une composition de quotients est un quotient.

Theorème 6
La topologie quotient est la plus fine qui rend q continue. De plus, pour $g : Y \to Z$, g est continue si et seulement si $g \circ q$ est continue.

Proposition 7
Si $q : X \to Y$ est continue, la preimage d'un ouvert de Y est ouvert dans X.
La topologie quotient est celle qui contient le plus d'ouvert possibles.
Clairement, si g est continue, alors $g \circ q$ l'est aussi.
Si $g \circ q$ est continue, soit $W \subset Z$ un ouvert, alors $(g \circ q)^{-1}(W) = q^{-1}(g^{-1}(W))$ est ouvert et par definition $g^{-1}(W)$ est ouvert dans Y.

Proposition 8
Le quotient d'un compact est compact

Preuve
L'image d'un compact est compacte. □

1.2 Relations d'equivalence

Si $q : X \to Y$ est un quotient, on definit sur X une relation d'equivalence $\sim$ par $x \sim x'$ ssi $q(x) = q(x')$, alors les points de Y sont les classes d'equivalence $[x]$.

Definition 2
Si $\simeq$ est une relation d'equivalence sur X, alors $X/\sim$ est l'espace quotient des classes d'equivalence.

Proposition 9 (Proprietes universelles)
Soit $\sim$ une relation d'equivalence sur X et $f : X \to Z$ tel que $x \sim x' \implies f(x) = f(x')$, alors il existe un unique $\overline{f} : X/\sim \to Z$ tel que $\overline{f} \circ q = f$

Preuve
Pour que le triangle commute, on doit poser $\overline{f}([x]) = f(x)$ et l'application est bien definie par hypothese et donc unique.
On sait que $\overline{f}$ est continue ssi $\overline{f} \circ q$ l'est. □

Definition 3
Si $A \subset X$, on pose $x \sim x' \iff x = x'$ ou $x, x' \in A$. Le collapse X/A est l'espace quotient $X/\sim$

Par exemple $I/\{0,1\}$.

Exemple

$$D^n/\partial D^n = D^n/S^{n-1} = S^n$$

Pour deux espaces bien connus, pointes (X_1, x_1) et (X_2, x_2), on peut construire un nouvel espace en identifiant x_1 et x_2.

Definition 4 (Reunion disjointe)
Soit I un ensemble, X_α un espace pour chaque $\alpha \in I$.
La reunion disjointe $\bigsqcup X_\alpha$ est l'ensemble $\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \times \{\alpha\}$ dont la topologie est engendree par les sous-ensemble de la forme $U_\alpha \times \{\alpha\}$

Definition 5
Soit I un ensemble et pour tout $\alpha \in I$, (X_α, x_α) un espace pointe.
Le wedge $\bigvee_\alpha X_\alpha$ est le collapse de la reunion disjointe ou on identifie les points de base

Definition 6
Soit X un espace. Le cylindre $Cyl(X)$ est $X \times I$ et le cone CX est le collapse du cylindre a la base.

1.3 Separation et quotients

On definit sur $\mathbb{R} \times \{0; 1\}$ une relation d'equivalence $\sim$ par $(x, 0) \sim (x, 1)$ si $x \neq 0$.
Le quotient est la droite a deux origines dont on ne peut separer les deux origines $(0, 1)$ et $(0, 0)$ par des ouverts.
Regardons le graphe de $\sim$ dans $\mathbb{R} \times \{0; 1\} \times (\mathbb{R} \times \{0, 1\})$ (ie. une copie de 4 plans)

Proposition 11
Si $X/\sim$ est separe, alors le graphe de $\sim$ dans $X \times X$ est ferme.

Preuve
La preimage de $\Delta \subset X/\sim \times X/\sim$ par $q \times q$ est $\Gamma_\sim$.
Comme Δ est ferme, sa preimage aussi. $\square$