EPFL Automne 2020
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 13

Pour cette series et la suivante il n'y aura pas d'exercice a rendre (fin du semestre).

Sauf mention explicit du contraire, on suppose que le corps de base K est de caracteristique $\neq 0$.

1 Un exemple simple de symetrisation

Exercice 1. Soit $\mathcal{F}(K;K) = \{f : x \in K \mapsto f(x) \in K\}$ l'espace des fonctions de K dans K. On dit que f est paire (resp. impaire) si pour tout $x \in K$

$$f(-x) = f(x),\ (resp.\ f(-x) = -f(x)).$$

On note $\mathcal{F}(K;K)_+$ (resp. $\mathcal{F}(K;K)_-$) le sous-espace vectoriel des fonctions paires (resp. impaires).

1. Soit $f \in \mathcal{F}(K;K)$, on pose

$$f_+(x) = f(x) + f(-x),\ f_-(x) = f(x) - f(-x).$$

   Montrer que f_+ est paire, f_- est impaire et que (on rappelle que $\mathrm{car}(K) \neq 2$)

$$f = 2_K^{-1} f_+ + 2_K^{-1} f_-.$$

2. En deduire la decomposition en somme directe

$$\mathcal{F}(K;K) = \mathcal{F}(K;K)_+ \oplus \mathcal{F}(K;K)_-.$$

3. Interpreter les constructions de f_+ et f_- precedentes en terme du Theoreme de symetrisation 10.3 du cours (pour un groupe G et un morphisme $\iota : G \mapsto \mathcal{F}(K;K)$ convenables).

2 Formes multilineaires/symetriques/alternees

Exercice 2. Soit $\mathrm{Mult}^{(n)}(V;K)$ l'espaces des formes multilineaires en n variables sur un K-ev V et $\mathrm{Alt}^{(n)}(V;K)$ et $\mathrm{Sym}^{(n)}(V;K)$ les sous-ensembles des formes alternees et symetriques.

1. Montrer que $\mathrm{Alt}^{(n)}(V;K)$ et $\mathrm{Sym}^{(n)}(V;K)$ sont des SEV de $\mathrm{Mult}^{(n)}(V;K)$.
2. Montrer que $\mathrm{Alt}^{(n)}(V;K) \cap \mathrm{Sym}^{(n)}(V;K) = \{\underline{\mathbf{0}}_K\}$ (ie. ils sont en somme directe).
3. Montrer que si $\mathrm{car}K = 2$, $\mathrm{Alt}^{(n)}(V;K) = \mathrm{Sym}^{(n)}(V;K)$

Exercice 3. Soit $n \geqslant 1$ et $\sigma : \{1, \cdots, n\} \mapsto \{1, \cdots, n\}$ une permutation de $\{1, \cdots, n\}$.

1. Montrer que
$$\bullet_{|\sigma} : \Lambda \mapsto \Lambda_{|\sigma}$$
definie par
$$\Lambda_{|\sigma} : (v_1, \cdots, v_n) = \Lambda(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(n)})$$
est une application lineaire de $\mathrm{Mult}^{(n)}(V;K)$ sur $\mathrm{Mult}^{(n)}(V;K)$.
2. Montrer que $\bullet_{|\sigma}$ envoie le sous-espace $\mathrm{Alt}^{(n)}(V;K)$ sur $\mathrm{Alt}^{(n)}(V;K)$ et $\mathrm{Sym}^{(n)}(V;K)$ sur $\mathrm{Sym}^{(n)}(V;K)$.

Exercice 4. Dans le cours on a defini l'endomorphisme de $\mathrm{Mult}^{(n)}(V,K)$
$$\bullet_{\mathrm{sign}} : \Lambda \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)\Lambda_{|\sigma}.$$
On defini egalement
$$\bullet_1 : \Lambda \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \Lambda_{|\sigma}.$$

1. Montrer que $\bullet_1$ envoie $\mathrm{Mult}^{(n)}(V,K)$ sur $\mathrm{Sym}^{(n)}(V;K)$ (on a vu dans le cours que $\bullet_{\mathrm{sign}}$ envoie $\mathrm{Mult}^{(n)}(V,K)$ sur $\mathrm{Alt}^{(n)}(V;K)$).
2. Montrer que $\mathrm{Sym}^{(n)}(V;K)$ est contenu dans le noyau de $\bullet_{\mathrm{sign}}$ et que $\mathrm{Alt}^{(n)}(V;K)$ est contenu dans le noyau de $\bullet_1$.
3. Calculer Λ_{sign} si Λ est alternee.
4. Calculer Λ_1 si Λ est symetrique.

Exercice 5. On considere le cas $n = 2$, ie. $\mathrm{Mult}^{(2)}(V;K)$ l'espace des formes multilineaires en deux variables sur V (les formes bilineaires).

1. Soit $\Lambda : (v_1, v_2) \mapsto \Lambda(v_1, v_2)$ une forme bilineaire. Calculer
$$\Lambda_1(v_1, v_2) \textit{ et } \Lambda_{\mathrm{sign}}(v_1, v_2).$$

2. En deduire que la decomposition en somme directe

$$\mathrm{Mult}^{(2)}(V;K) = \mathrm{Sym}^{(2)}(V;K) \oplus \mathrm{Alt}^{(2)}(V;K).$$

(cette decomposition est fausse si $n > 2$)

Exercice 6. Dans cet exercice on va demontrer la formule generale pour la dimension de $\mathrm{Alt}^{(n)}(V;K)$ (pour $\mathrm{car}(K) \neq 2$) en fonction de $d = \dim V$. On rappelle que $\dim \mathrm{Alt}^{(n)}(V;K) = 0$ si $n > d$ et que $\dim \mathrm{Alt}^{(d)}(V;K) = 1$. On va montrer que pour $1 \leqslant n \leqslant d$

$$\dim \mathrm{Alt}^{(n)}(V;K) = C_d^n = \frac{d!}{n!(d-n)!} = |\{(j_1, \cdots, j_n) \in [1,d]^n,\ 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_n \leqslant d\}|.$$

Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\} \subset V$ une base et $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \cdots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$ la base duale. Soit $1 \leqslant n \leqslant d$ et $\Lambda \in \mathrm{Alt}^{(n)}(V;K)$ une forme alternee.

1. Montrer que
$$\Lambda = \sum_{\substack{(j_1,\cdots,j_n)\in[1,d]^n \\ j_i \text{ distincts}}} \Lambda(\mathbf{e}_{j_1}, \cdots, \mathbf{e}_{j_n})\mathbf{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_n}.$$

2. Pour $\mathbf{j} = (j_1, \cdots, j_n)$ comme ci-dessus ($(j_1, \cdots, j_n) \in [1,d]^n$ et les j_i distincts) on note
$$J_{\mathbf{j}} = \{j_1, \cdots, j_n\} \subset \{1, \cdots, d\}$$
le sous-ensemble (de cardinal n) forme par ces indices que l'on reecrit (en ordonnant les indices)
$$J_{\mathbf{j}} = J_{\mathbf{j}_0} = \{j_{0,1}, \cdots, j_{0,n}\},\ \textit{avec}\ \mathbf{j}_0 = (j_{0,1}, \cdots, j_{0,n})\ \textit{et}\ j_{0,1} < \cdots < j_{0,n}.$$

3. Montrer que si $J_{\mathbf{j}} = J_{\mathbf{j}_0}$ alors
$$\Lambda(\mathbf{e}_{j_1}, \cdots, \mathbf{e}_{j_n}) = (\pm 1)\Lambda(\mathbf{e}_{j_{0,1}}, \cdots, \mathbf{e}_{j_{0,n}})$$
avec (± 1) donne explicitement.

4. Montrer que pour tout sous-ensemble $J \subset \{1, \cdots, d\}$ de cardinal n, on a
$$\Lambda_J := \sum_{\substack{\mathbf{j}=(j_1,\cdots,j_n) \\ J_{\mathbf{j}}=J}} \Lambda(\mathbf{e}_{j_1}, \cdots, \mathbf{e}_{j_n})\mathbf{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_n} = \Lambda(\mathbf{e}_{j_{0,1}}, \cdots, \mathbf{e}_{j_{0,n}})\big(\mathbf{e}_{j_{0,1}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_{0,n}}\big)_{\mathrm{sign}}$$
avec
$$\big(\mathbf{e}_{j_{0,1}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_{0,n}}\big)_{\mathrm{sign}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)\mathbf{e}_{j_{0,\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_{0,\sigma(n)}}.$$

5. Montrer que quand J varie parmi les sous-ensembles de $\{1, \cdots, d\}$ ayant n elements, la famille de formes multilineaires alternees en n variables

$$\Lambda_{0,J} := \left(\mathbf{e}_{j_{0,1}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_{0,n}}\right)_{\text{sign}},\ J = \{j_{0,1} < \cdots < j_{0,n}\}$$

forme une base de $\mathrm{Alt}^{(n)}(V; K)$ et conclure.

Remarque 2.1. On montre par des arguments similaires que pour tout $n \geqslant 1$

$$\dim \mathrm{Sym}^{(n)}(V; K) = |\{(j_1, \cdots, j_n) \in [1, d]^n,\ 1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant \cdots \leqslant j_n \leqslant d\}| = C^n_{d-1+n}.$$

En particulier pour $n = 2$ (formes bilineaires) on a

$$C^2_{d+1} + C^2_d = \frac{(d+1)d}{2} + \frac{d(d-1)}{2} = d^2$$

ce qui explique l'exercice 5.

3 Matrices de permutations

Exercice 7. Soit V un K-ev de dimension d et $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ une base de V fixee. Soit $\sigma : \{1, \cdots, d\} \mapsto \{1, \cdots, d\}$ une permutation. On lui associe l'application lineaire φ_σ qui envoie chaque vecteur $\mathbf{e}_i$ sur le vecteur $\mathbf{e}_{\sigma(i)}$ pour $i \leqslant d$:

$$\varphi_\sigma : v = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d\mathbf{e}_d \mapsto \varphi_\sigma(v) = x_1\mathbf{e}_{\sigma(1)} + \cdots + x_d\mathbf{e}_{\sigma(d)}.$$

1. Quand $n = 2, 3$ donner les matrices M_σ des φ_σ calculees dans la base $\mathscr{B}$ (ces matrices sont appellees matrices de permutations).
2. Par echalonnement-reduction montrer que $M_{(123)}$ est inversible et que son inverse est une matrice de permutation.
3. En general montrer (sans calculs) que φ_σ est inversible et calculer son inverse.
4. Montrer que $\sigma \mapsto \varphi_\sigma$ defini un morphisme de groupes injectif de $\mathfrak{S}_d$ vers $\mathrm{GL}(V)$.
5. Montrer que $\det(\varphi_\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma)$.

Remarque 3.1. On rappelle que tout groupe fini G peut est realise comme (ie. par injection dans) un sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}_{|G|}$. Cette exercice montre donc que tout groupe fini peut etre realise comme un groupe d'applications lineaires inversibles (d'unespace de dimension $d = |G|$)