Analyse avancée II
Mathématiques 1$^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-03-29 au 2021-04-02

Série 12 du mercredi 31 mars 2021

Exercice 1.

Soit $x \in \,]0, +\infty[$. Calculer

$$\int_0^{\pi/2} \ln\bigl(x^2 \cos^2(t) + \sin^2(t)\bigr)\, \mathrm{d}t =: g(x). \tag{1}$$

Justifier toutes les étapes.

Indication. Calculer g' et en déduire g, en observant que $g(1) = 0$.

Exercice 2.

Définissons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \sin\Bigl(x\sqrt{1+t^2}\Bigr)\, \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Montrer que f admet un minimum local en 0.

Exercice 3.

Définissons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathit{\Gamma}(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t. \tag{3}$$

1) Montrer que $\mathit{\Gamma}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$; que $\mathit{\Gamma} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$; et que, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\mathit{\Gamma}^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^k(t) t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t. \tag{4}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathit{\Gamma}(x+1) = x\mathit{\Gamma}(x)$.
   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathit{\Gamma}(n+1) = n!$; i.e. $\mathit{\Gamma}$ permet de généraliser la notion de factorielle à des arguments non entiers.

Exercice 4.

Calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t \tag{5}$$

par la méthode suivante. Pour $x \geqslant 0$, notons $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$. Calculer $g'(x)$ pour $x > 0$, puis en déduire $I = g(0)$. Justifier soigneusement la continuité de g en 0 et la différentiabilité de g sur $]0, +\infty[$.