Série 24 du 2021-05-19

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

1)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{1}$$

2)

$$\iint_{]0,+\infty[^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}. \tag{2}$$

Exercice 2.

1) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nous définissons la fonction I par

$$I(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3}$$

Donner le domaine de définition de I.

2) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nous définissons la fonction J par

$$J(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{4}$$

Donner le domaine de définition de J.

Exercice 3.

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)^2 - 5u(t) + 6, \quad \forall t \in [0,+\infty[, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{5}$$

Prouver l'existence d'une solution locale en en calculant une par séparation de variables. Donner les valeurs de u_0 pour lesquelles il existe une solution globale.

Exercice 4.

On considère le problème à valeur initiale

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)^{1/3}, \quad \forall t \in [0, +\infty[, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Trouver la totalité des solutions globales de classe $\mathrm{C}^1([0, +\infty[)$. De même, trouver la totalité des solutions globales de classe $\mathrm{C}^2([0, +\infty[)$.

Remarque. $u \in \mathrm{C}^1([0, +\infty[)$ signifie que : (I) $u \in \mathrm{C}^0([0, +\infty[) \cap \mathrm{C}^1(]0, +\infty[)$; (II) la dérivée à droite $u'_+(0) = \lim_{t \to 0^+}(u(t) - u(0))/t$ existe ; et (III) $u'_+(0) = \lim_{t \to 0^+} u'(t)$. Dans ce contexte, on note alors $u'(0) := u'_+(0)$. De même, $u \in \mathrm{C}^2([0, +\infty[)$ signifie que $u \in \mathrm{C}^1([0, +\infty[)$ et $u' \in \mathrm{C}^1([0, +\infty[)$, où u' est définie en 0 dans le sens ci-dessus.