Analyse II

David Wiedemann

Table des matières

1 Intégrales généralisées **2**
1.1 Integrales absoluments convergentes 3
1.2 Integrale generalisee sur un intervalle non borne 5

List of Theorems

1 Definition (Intégrales généralisées (sur un intervalle borné non fermé)) 2
2 Definition (Integrale sur un intervalle borne ouvert) 2
1 Theorème (Critere de Comparaison) 2
3 Definition (Integrale absolument convergente) 3
3 Theorème (absolument convergente implique convergente) 3
5 Theorème (Critere de comparaison (II)) 4
4 Definition (Integrale sur un intervalle non borne) 5

Lecture 1: Introduction

Mon 22 Feb

1 Intégrales généralisées

Peut-on définir une intégrale sur un intervalle ouvert plutot que sur un intervalle fermé ? ie.

$$f : [a, b[\to \mathbb{R} \text{ c.p.m.}$$

Definition 1 (Intégrales généralisées (sur un intervalle borné non fermé))
Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *continue par morceaux (* $a < b$*).*
En particulier, f *est c.p.m. sur tout intervalle* $[a, x]$, $a < x < b$ *Soit* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.
On dit que l'integrale generalisee $\int_a^b f(x)dx$ *existe (ou converge) si* $\lim_{x\to b} F(X)$ *existe, dans ce cas, on note*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b} F(x) - F(a)$$

Si $\lim_{x\to b-} F(x)$ *n'existe pas, alors on dit que*

$$\int_a^b f(t)dt$$

diverge. Definition analogue pour le cas $]a, b]$.

On souhaite definir $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} tan(x)dx = 0$.
Dans certains cas cette integrale vaut 0. Mais si on calcule

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\frac{\pi}{2}+\epsilon^2} \frac{\pi}{2} - \epsilon tan(t)dt = \lim_{\epsilon\to 0+}(-\ln(\cos(\frac{\pi}{2} - \epsilon)) + \ln(\cos(-\frac{\pi}{2} + \epsilon^2))) = -\infty$$

Il faut donc une definition qui est coherente.

Definition 2 (Integrale sur un intervalle borne ouvert)
Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m et* $c \in]a, b[$.
Si les integrales generalisees $\int_a^c f(t)dt$ *et* $\int_c^b f(t)dt$ *existent, alors on definit l'integrale*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Si une des deux integrales diverge, alors le tout diverge.

Lecture 2: Integrales Generalisees

Wed 24 Feb

Theorème 1 (Critere de Comparaison)
Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m. et supposons* $\exists c \in [a, b[$ *tel que*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in [c, b[$$

Si $\int_a^b g(x)dx$ existe alors $\int_a^b f(x)dx$ existe aussi
Si $\int_a^b f(x)dx$ diverge alors $\int_a^b g(x)dx$ diverge aussi.

Preuve
Si $\int_a^b g(x)dx$ existe, alors $\int_c^b g(x)dx$ existe.
Donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{x\to b-}\int_a^x f(t)dt \\ &= \lim_{x\to b-}(\int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt) \\ &= \int_a^c f(t)dt + \lim_{x\to b-}\int_c^x f(t)dt \\ &\leq \int_a^c f(t)dt + \lim_{x\to b-}\int_c^x g(t)dt < +\infty\end{aligned}$$

En notant $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, F est non decroissante, et bornee superieurement sur l'intervalle $[a, b[\Rightarrow \lim_{x\to b-} F(x)$ existe. □

Exemple
$f(x) = \left|\sin(\frac{1}{x})\right|$ *sur* $]0, 1]$, *on a*

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

1 est integrable, et donc l'integrale de $f(x)$ existe.

1.1 Integrales absolument convergentes

Definition 3 (Integrale absolument convergente)
Soit I un intervalle du type $[a, b[,]a, b]$ ou $]a, b[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ c.p.m.
On dit que l'integrale generalisee de f sur I est absolument convergente si

$$\int_I |f(x)|dx$$

existe.

Theorème 3 (absolument convergente implique convergente)
Si l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument, alors il converge.

Preuve
Notons $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ et $f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}$ et on a $|f(x)| = f_+(x) + f_-$.
Donc

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)| \text{ et } 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)| \forall x \in I$$

Par critere de comparaison, si

$$\int_a^b |f(x)|dx \textit{ existe } \Rightarrow \textit{ alors } \int_a^b f_+(x)dx, \int_a^b f_-(x) \textit{ existent}$$

et donc $\int_a^b f(x)dx$ $\square$

Remarque

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *c.p.m Si* f *est bornee sur* I*, alors*

$$\int_I f(x)dx$$

existe.

Theoreme 5 (Critere de comparaison (II))

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m.*

S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1[$ *tel que*

$$\lim_{x \to b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \in \mathbb{R}$$

Alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

existe.

S'il existe $\alpha \geq 1$ *tel que*

$$\lim_{x \to b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \neq 0$$

alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

diverge.

Preuve

Par definition de la limite $\forall \epsilon > 0, \exists b - a > \delta_\epsilon > 0$ *tel que*

$$|f(x)(b-x)^\alpha - l| < \epsilon \forall x$$

$$\Rightarrow l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha \leq l + \epsilon$$

et donc

$$0 \leq |f(x)| \leq \frac{|l| + \epsilon}{(b-x)^\alpha}$$

Puisque le terme de droite est integrable, on conclut par le critere de comparaison. Pour la deuxieme partie, soit $\alpha \geq 1$ *et* $l \neq 0$.

Supposons $l > 0$*, on a*

$$l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha$$

Le meme raisonnement que ci-dessus donne que l'integrale de f *diverge.* $\square$

1.2 Integrale generalisee sur un intervalle non borne

Definition 4 (Integrale sur un intervalle non borne)
Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *c.p.m.*
On dit que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *existe si*

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(x)dx$$

existe et dans ce cas, on note

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

idem si $f :]-\infty, a[\to \mathbb{R}$. *Soit* $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *c.p.m. on dit que* $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *existe s'il existe* $c \in]a, \infty[$ *tel que*

$$\lim_{x \to a+} \int_x^c f(t)dt \text{ et } \lim_{y \to +\infty} \int_c^y f(t)dt$$

existent.