THÉORIE DES GROUPES - SÉRIE 6

29 octobre 2021

Solutions des Exercices

Exercice 6.1. Soit p un nombre premier. Montrer que

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}.$$

Solution. Supposons par l'absurde qu'on ait un isomorphisme de groupes

$$f \colon \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Soit $x \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ d'ordre p^2 et soit $(a,b) = f(x) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Alors

$$f(p \cdot x) = p \cdot f(x) = p \cdot (a,b) = (p \cdot a, p \cdot b) = (0,0),$$

mais $p \cdot x \neq 0$. Donc f n'est pas injective. Contradiction.

Exercice 6.2. Soit $\varphi \colon G \to H$ un homomorphisme de groupes. On note $i \colon \ker(\varphi) \to G$ l'inclusion.

(i) Montrer que $\{e\} \to G/\ker(\varphi) \xleftarrow{q} G$ est un push-out de $\{e\} \xleftarrow{\pi} \ker(\varphi) \xrightarrow{i} G$.

(ii) Montrer que $\{e\} \to \operatorname{im}(\varphi) \xleftarrow{\varphi} G$ est un push-out de $\{e\} \xleftarrow{\pi} \ker(\varphi) \xrightarrow{i} G$.

(iii) En déduire qu'il existe un unique homomorphisme $f \colon G/\ker(\varphi) \to \operatorname{im}(\varphi)$ tel que $f \circ q = \varphi$, et qu'il existe un unique homomorphisme $f' \colon \operatorname{im}(\varphi) \to G/\ker(\varphi)$ tel que $f' \circ \varphi = q$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G/\ker(\varphi) \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\ & \operatorname{im}(\varphi) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "q"'] & \operatorname{im}(\varphi) \arrow[d, dashed, "\exists! f'"] \\ & G/\ker(\varphi) \end{tikzcd}$$

En utilisant la propriété universelle, montrer que $f \circ f' = \mathrm{Id}_{\operatorname{im}(\varphi)}$ et $f' \circ f = \mathrm{Id}_{G/\ker(\varphi)}$, i.e., on a un isomorphisme $G/\ker(\varphi) \cong \operatorname{im}(\varphi)$. Cela donne une nouvelle preuve du premier théorème d'isomorphisme.

Solution.

(i) Comme $\operatorname{im}(i) = \ker(\varphi)$ est un sous-groupe normal de G, alors $\{e\} \to G/\ker(\varphi) \xleftarrow{q} G$ est un push-out de $\{e\} \xleftarrow{\pi} \ker(\varphi) \xrightarrow{i} G$ par la Proposition 5 du Chapitre II du cours.

(ii) On doit montrer que le diagramme (1) ci-dessous commute et la propriété universelle du push-out: pour tout diagramme commutatif (2) comme ci-dessous, il existe un unique homomorphisme $\overline{f} \colon \operatorname{im}(\varphi) \to K$ tel que $\overline{f} \circ \varphi = f$.

$$\begin{tikzcd} \ker(\varphi) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & G \arrow[d, "\varphi"] \\ \{e\} \arrow[r, "\iota"'] & \operatorname{im}(\varphi) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \ker(\varphi) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & G \arrow[d, "f"] \\ \{e\} \arrow[r, "\iota"'] & K \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & G \arrow[d, "\varphi"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\ \{e\} \arrow[r, "\iota"'] \arrow[drr, bend right, "\iota"'] & \operatorname{im}(\varphi) \arrow[dr, dashed, "\exists! \overline{f}"] & \\ & & K \end{tikzcd}$$

Remarquez que l'égalité $\overline{f}\circ\iota=\iota$ est toujours vraie, vu qu'il y a un unique homomorphisme $\{e\}\to K$, et on peut donc l'ignorer. Pour commencer, on a que le diagramme (1) commute, car pour tout $g\in\ker(\varphi)$, on a $\varphi(i(g))=\varphi(g)=e_{\mathrm{im}(\varphi)}$. Etant donné un diagramme commutatif comme en (2) ci-dessus, alors on définit

$$\overline{f}\colon \mathrm{im}(\varphi)\to K,\ \varphi(g)\mapsto f(g)$$

C'est bien défini, car si $\varphi(g)=\varphi(g')$, on a que $\varphi(g^{-1}\cdot g')=\varphi(g)^{-1}\cdot\varphi(g')=e_H$, d'où $g^{-1}\cdot g'\in\ker(\varphi)$, et ainsi $f(i(g^{-1}\cdot g'))=e_K$ par le diagramme (2), d'où $f(g)=f(g')$. De plus, $\overline{f}$ est bien un homomorphisme de groupes, car on a que $\overline{f}(\varphi(g)\cdot\varphi(h))=\overline{f}(\varphi(g\cdot h))=f(g\cdot h)=f(g)\cdot f(h)=\overline{f}(\varphi(g)\cdot\overline{f}(\varphi(h))$, pour tout $g,h\in G$. De plus, on a bien $\overline{f}\circ\varphi=f$, et c'est clairement l'unique homomorphisme qui satisfait cette condition. On a montré le résultat désiré.

(iii) Par (i), on a un carré commutatif (3) comme ci-dessous, qui satisfait la propriété universelle du push-out, et par (ii), on a un carré commutatif (4) comme ci-dessous, qui satisfait la propriété universelle du push-out.

$$\begin{tikzcd}
\ker(\varphi) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & G \arrow[d, "q"] \\
\{e\} \arrow[r, "\iota"'] & G/\ker(\varphi)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\ker(\varphi) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & G \arrow[d, "\varphi"] \\
\{e\} \arrow[r, "\iota"'] & \mathrm{im}(\varphi)
\end{tikzcd}$$

Par la propriété universelle de $q\colon G\to G/\ker(\varphi)$ appliquée au diagramme (4), il existe un unique homomorphisme $f\colon G/\ker(\varphi)\to\mathrm{im}(\varphi)$ tel que $f\circ q=\varphi$. Par la propriété universelle de $\varphi\colon G\to\mathrm{im}(\varphi)$ appliquée au diagramme (3), il existe un unique homomorphisme $f'\colon\mathrm{im}(\varphi)\to G/\ker(\varphi)$ tel que $f'\circ\varphi=q$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G/\ker(\varphi) \arrow[d, dashed, "\exists!f"] \\
& \mathrm{im}(\varphi)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "q"'] & \mathrm{im}(\varphi) \arrow[d, dashed, "\exists!f'"] \\
& G/\ker(\varphi)
\end{tikzcd}$$

De plus, on a que $f'\circ f\circ q=f'\circ\varphi=q$, et par unicité dans la propriété universelle de $q\colon G\to G/\ker(\varphi)$, comme on a aussi $\mathrm{Id}_{G/\ker(\varphi)}\circ q=q$, on obtient que $f'\circ f=\mathrm{Id}_{G/\ker(\varphi)}$. De même, on a que $f\circ f'\circ\varphi=f\circ q=\varphi$, et par unicité dans la propriété universelle de $\varphi\colon G\to\mathrm{im}(\varphi)$, comme on a aussi $\mathrm{Id}_{\mathrm{im}(\varphi)}\circ\varphi=\varphi$, on obtient que $f\circ f'=\mathrm{Id}_{\mathrm{im}(\varphi)}$.

Exercice 6.3.

(i) Montrer que le noyau définit un foncteur $\ker\colon \mathsf{Gr}^{\to}\to\mathsf{Gr}$. Montrer qu'on a une adjonction

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Gr} \arrow[r, shift left, "F_e"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Gr}^{\to} \arrow[l, shift left, "\ker"]
\end{tikzcd}$$

où F_e envoie un groupe G sur l'unique homomorphisme $\pi\colon G\to\{e\}$ et un homomorphisme de groupes $f\colon G\to G'$ sur "lui-même" (expliquer!).

(ii) Montrer que le "conoyau" définit un foncteur $\mathrm{coker}\colon\mathsf{Gr}^{\to}\to\mathsf{Gr}$, où, pour tout homomorphisme de groupes $\varphi\colon G\to H$, on a que $\mathrm{coker}(\varphi)=H/N_\varphi$ avec N_φ le plus petit sous-groupe normal de H qui contient $\mathrm{im}(\varphi)$. Montrer qu'on a une adjonction

$$\mathsf{Gr}^{\to} \underset{F^e}{\overset{\text{coker}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathsf{Gr}$$

où F^e envoie un groupe G sur l'unique homomorphisme $\iota\colon \{e\} \to G$ et un homomorphisme de groupes $f\colon G \to G'$ sur "lui-même" (expliquer!).

Solution.

(i) On montre d'abord que le noyau induit un foncteur $\ker\colon \mathsf{Gr}^{\to} \to \mathsf{Gr}$. Soit $\varphi\colon G \to H$ un objet de $\mathsf{Gr}^{\to}$. Alors $\ker(\varphi)$ est un groupe (c'est un sous-groupe de G), et cela définit $\ker\colon \mathsf{Gr}^{\to} \to \mathsf{Gr}$ sur les objets. Soit maintenant $(f,k)\colon \varphi \to \varphi'$ un morphisme dans $\mathsf{Gr}^{\to}$, i.e., un carré commutatif d'homomorphismes

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & H \arrow[d, "k"] \\ G' \arrow[r, "\varphi'"'] & H'. \end{tikzcd}$$

Alors, pour tout $g \in \ker(\varphi)$, on a que $\varphi'(f(g)) = k(\varphi(g)) = k(e_H) = e_{H'}$, i.e., $f(g) \in \ker(\varphi')$. Ainsi, l'homomorphisme $f\colon G \to G'$ restreint à un homomorphisme $\ker(f,k)\colon \ker(\varphi) \to \ker(\varphi')$, $g \mapsto f(g)$. Cela définit $\ker\colon \mathsf{Gr}^{\to} \to \mathsf{Gr}$ sur les morphismes. Le fait que ker préserve les identités et les compositions est facile à démontrer, et $\ker\colon \mathsf{Gr}^{\to} \to \mathsf{Gr}$ est bien un foncteur.

Le foncteur $F_e\colon \mathsf{Gr} \to \mathsf{Gr}^{\to}$ envoie un groupe $G \in \mathsf{Gr}$ sur l'unique homomorphisme $F_e(G) = \pi\colon G \to \{e\}$ dans $\mathsf{Gr}^{\to}$, et un homomorphisme $f\colon G \to G'$ dans Gr sur le morphisme $(f, \mathrm{Id}_{\{e\}})\colon F_e(G) \to F_e(G')$ dans $\mathsf{Gr}^{\to}$ donné par le carré commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "F_e(G)"] \arrow[d, "f"'] & \{e\} \arrow[d, equal] \\ G' \arrow[r, "F_e(G')"'] & \{e\} \end{tikzcd}$$

Clairement, F_e préserve les identités et compositions, et donc $F_e\colon \mathsf{Gr} \to \mathsf{Gr}^{\to}$ est bien un foncteur.

Pour montrer qu'on a une adjonction $F_e \dashv \ker$, on construit des transformations naturelles

$$\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}} \to \ker \circ F_e \quad \text{et} \quad \varepsilon\colon F_e \circ \ker \to \mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}^{\to}}$$

qui satisfont les identités triangulaires.

On montre d'abord que $\ker \circ F_e = \mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}}$. Soit $G \in \mathsf{Gr}$ un groupe. Alors $\ker(F_e(G)) = \ker(G \to \{e\}) = G$ et on a $i_{F_e(G)} = \mathrm{Id}_G$. Soit maintenant $\varphi\colon G \to H$ un homomorphisme dans Gr. Alors

$$\ker(F_e(\varphi)) = \ker(\varphi, \mathrm{Id}_{\{e\}})\colon \ker(F_e(G)) = G \to \ker(F_e(H)) = H,\ g \mapsto \varphi(g).$$

Donc $\ker(F_e(\varphi)) = \varphi$ et on a bien $\ker \circ F_e = \mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}}$. Ainsi on pose $\eta = \mathrm{Id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}}}\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}} \to \ker \circ F_e = \mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}}$.

Soit maintenant $\varphi\colon G \to H$ un objet de $\mathsf{Gr}^{\to}$. Alors $F_e(\ker(\varphi))\colon \ker(\varphi) \to \{e\}$ est l'unique homomorphisme vers $\{e\}$. On définit la composante de $\varepsilon\colon F_e \circ \ker \to \mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}^{\to}}$ en φ comme étant le morphime $\varepsilon_\varphi = (i_\varphi, \iota)\colon F_e(\ker(\varphi)) \to \varphi$ dans $\mathsf{Gr}^{\to}$ donné par le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
\ker(\varphi) \arrow[r, "F_e(\ker(\varphi))"] \arrow[d, "i_\varphi"'] & \{e\} \arrow[d, "\iota"] \\
G \arrow[r, "\varphi"'] & H
\end{tikzcd}
$$

où $i_\varphi\colon \ker(\varphi) \to G$ est l'inclusion et $\iota\colon \{e\} \to H$ est l'unique homomorphisme de $\{e\}$ vers H. Clairement, ce diagramme commute car, pour tout $g \in \ker(\varphi)$, on a $\varphi(i(g)) = \varphi(g) = e_H$. On montre que ε ainsi définie est naturelle. Soit $(f,k)\colon \varphi \to \varphi'$ un morphisme dans $\mathsf{Gr}^{\to}$ comme donné par le diagramme (1). On montre que le diagramme suivant commute.

$$
\begin{tikzcd}
\big(F_e(\ker(\varphi))\colon \ker(\varphi) \to \{e\}\big) \arrow[r, "\varepsilon_\varphi = (i_\varphi, \iota)"] \arrow[d, "F_e(\ker(f,k)) = (\ker(f,k), \mathrm{Id}_{\{e\}})"'] & \big(\varphi\colon G \to H\big) \arrow[d, "(f,k)"] \\
\big(F_e(\ker(\varphi'))\colon \ker(\varphi') \to \{e\}\big) \arrow[r, "\varepsilon_{\varphi'} = (i_{\varphi'}, \iota)"'] & \big(\varphi'\colon G' \to H'\big)
\end{tikzcd}
$$

en montrant qu'il commute composante par composante, i.e., $f \circ i_\varphi = i_{\varphi'} \circ \ker(f,k)\colon \ker(\varphi) \to G'$ et $k \circ \iota = \iota \circ \mathrm{Id}_{\{e\}}\colon \{e\} \to H'$. Or ces deux égalités sont clairement vraies par définition de $\ker(f,k)$, i_φ, $i_{\varphi'}$ et par unicité d'un homomorphisme de $\{e\}$ vers H'. Donc $\varepsilon\colon F_e \circ \ker \to \mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}^{\to}}$ est bien une transformation naturelle.

Il reste à démontrer les identités triangulaires. On les vérifie à l'aide des faits suivants:

- $\eta = \mathrm{Id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}}}$,
- $\varepsilon_{F_e(G)} = (i_{F_e(G)}, \iota) = (\mathrm{Id}_G, \mathrm{Id}_{\{e\}}) = \mathrm{Id}_{F_e(G)}\colon F_e(\ker(F_e(G))) = F_e(G) \to F_e(G)$, pour tout groupe $G \in \mathsf{G}$,
- $\ker(\varepsilon_\varphi) = \ker(i_\varphi, \iota)\colon \ker(F_e(\ker(\varphi))) = \ker(\varphi) \to \ker(\varphi)$ est donné par la restriction de l'inclusion $i_\varphi\colon \ker(\varphi) \to G$ à $\ker(\varphi) \to \ker(\varphi)$ et est donc l'identité $\mathrm{Id}_{\ker(\varphi)}$, pour tout object $\varphi\colon G \to H$ de $\mathsf{Gr}^{\to}$.

On a montré que $F_e \dashv \ker$ est bien une adjonction.

(ii) Pour résoudre cet exercice, on va utiliser la propriété universelle du conoyau vu en cours (voir Proposition 5), que l'on rappelle maintenant. Soit $\varphi\colon G \to H$ un homomorphisme de groupes. Soit N_φ le plus petit sous-groupe normal de H qui contient $\mathrm{im}(\varphi)$. Alors le diagramme (1) ci-dessous commute. Et la propriété universelle dit la chose suivante: pour tout diagramme commutatif (2) comme ci-dessous, il existe un unique homomorphisme $\overline{f}\colon H/N_\varphi \to K$ tel que $\overline{f} \circ q_\varphi = f$.

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & H \arrow[d, "q_\varphi"] \\
\{e\} \arrow[r, "\iota"'] & H/N_\varphi
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & H \arrow[d, "f"] \\
\{e\} \arrow[r, "\iota"'] & K
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & H \arrow[d, "q_\varphi"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\
\{e\} \arrow[r, "\iota"'] \arrow[drr, bend right, "\iota"'] & H/N_\varphi \arrow[dr, dashed, "\exists! \overline{f}"] & \\
 & & K
\end{tikzcd}
$$

Remarquez que l'égalité $\overline{f} \circ \iota = \iota$ est toujours vraie, vu qu'il y a un unique homomorphisme $\{e\} \to K$, et on peut donc l'ignorer.

On commence par définir le foncteur $\mathrm{coker}\colon \mathsf{Gr}^{\to} \to \mathsf{Gr}$. Soit $\varphi\colon G \to H$ un objet de $\mathsf{Gr}^{\to}$, i.e., un homomorphisme de groupes. Alors on définit $\mathrm{coker}(\varphi) = H/N_\varphi$, où N_φ le plus petit sous-groupe normal de H qui contient $\mathrm{im}(\varphi)$. Comme N_φ est normal, le quotient H/N_φ est un groupe et cela définit coker sur les objets. Soit maintenant $(f,k)\colon \varphi \to \varphi'$ un morphisme dans $\mathsf{Gr}^{\to}$, i.e., un carré commutatif d'homomorphismes

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & H \arrow[d, "k"] \\ G' \arrow[r, "\varphi'"'] & H'. \end{tikzcd}$$

Alors le diagramme en (4) suivant commute, car $q_{\varphi'}(k(\varphi(g))) = q_{\varphi'}(\varphi'(f(g))) = e_{H'/N_{\varphi'}}$ pour tout $g \in G$, et donc, par la propriété universelle du conoyau, on a un unique homomorphisme

$$\mathrm{coker}(f,k)\colon H/N_\varphi = \mathrm{coker}(\varphi) \to H'/N_{\varphi'} = \mathrm{coker}(\varphi')$$

tel que $\mathrm{coker}(f,k) \circ q_\varphi = q_{\varphi'} \circ k$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & H \arrow[d, "q_{\varphi'} \circ k"] \\ \{e\} \arrow[r, "\iota"'] & H'/N_{\varphi'} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[r, "k"] \arrow[d, "q_\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "(5)"] & H' \arrow[d, "q_{\varphi'}"] \\ H/N_\varphi \arrow[r, dashed, "\exists!\mathrm{coker}(f,k)"'] & H'/N_{\varphi'} \end{tikzcd}$$

Cela définit coker sur les morphismes. On va vérifier que coker préserve les compositions en utilisant la propriété universelle, et on laisse en exercice de vérifier que coker préserve les identités, qui se prouve similairement. Soit $(f,k)\colon \varphi \to \varphi'$ et $(f',k')\colon \varphi' \to \varphi$ deux morphismes de $\mathsf{Gr}^{\to}$ donné par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & H \arrow[d, "k"] \\ G' \arrow[r, "\varphi'"'] & H' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "f'"'] & H' \arrow[d, "k'"] \\ G'' \arrow[r, "\varphi''"'] & H''. \end{tikzcd}$$

Alors les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "k' \circ k"] \arrow[d, "q_\varphi"'] & H'' \arrow[d, "q_{\varphi''}"] \\ H/N_\varphi \arrow[r, "\mathrm{coker}(f' \circ f, k' \circ k)"'] & H''/N_{\varphi''} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[r, "k"] \arrow[d, "q_\varphi"'] & H' \arrow[r, "k'"] \arrow[d, "q_{\varphi'}"] & H'' \arrow[d, "q_{\varphi''}"] \\ H/N_\varphi \arrow[r, "\mathrm{coker}(f,k)"'] & H'/N_{\varphi'} \arrow[r, "\mathrm{coker}(f',k')"'] & H''/N_{\varphi'} \end{tikzcd}$$

Par unicité de la propriété universelle du conoyau $q_\varphi\colon H \to H/N_\varphi$ (appliquer le diagramme (5) où on remplace $q_{\varphi'}$ par $q_{\varphi''}$ et k par $k' \circ k$), on obtient que $\operatorname{coker}(f' \circ f, k' \circ k) = \operatorname{coker}(f', k') \circ \operatorname{coker}(f, k)$, ce qui montre que $\operatorname{coker}\colon \mathsf{Gr}^{\to} \to \mathsf{Gr}$ est bien un foncteur.

Comme en (i), on peut montrer que le foncteur $F^e\colon \mathsf{Gr} \to \mathsf{Gr}^{\to}$ qui envoie un groupe $G \in \mathsf{Gr}$ sur l'unique homomorphisme $F^e(G) = \iota\colon \{e\} \to G$ dans $\mathsf{Gr}^{\to}$ et un homomorphisme de groupes $f\colon G \to G'$ dans Gr sur le morphisme $(\mathrm{Id}_{\{e\}}, f)\colon F^e(G) \to F^e(G')$ dans $\mathsf{Gr}^{\to}$.

Pour montrer qu'on a une adjonction $\operatorname{coker} \dashv F^e$, on construit des transformations naturelles

$$\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}^{\to}} \to F^e \circ \operatorname{coker} \quad \text{et} \quad \varepsilon\colon \operatorname{coker} \circ F^e \to \mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}}$$

qui satisfont les identités triangulaires.

Pour commencer, on montre que $\operatorname{coker} \circ F^e = \mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}}$. Soit $G \in \mathsf{Gr}$ un groupe. Alors on a que $\operatorname{coker}(F^e(G)) = \operatorname{coker}(\{e\} \to G) = G/\{e\} = G$ et on a $q_{F^e(G)} = \mathrm{Id}_G$. Soit maintenant $\varphi\colon G \to H$ un homomorphisme dans Gr. Alors

$$\operatorname{coker}(F^e(\varphi)) = \operatorname{coker}(\mathrm{Id}_{\{e\}}, \varphi)\colon \operatorname{coker}(F^e(G)) = G \to \operatorname{coker}(F^e(H)) = H$$

est tel que $\varphi = q_{F^e(G')} \circ \varphi = \operatorname{coker}(\mathrm{Id}_{\{e\}}, \varphi) \circ q_{F^e(G)} = \operatorname{coker}(\mathrm{Id}_{\{e\}}, \varphi)$ (par définition de coker sur les morphismes, voir diagramme (5)). Donc $\operatorname{coker}(F^e(\varphi)) = \varphi$ et on a bien $\operatorname{coker} \circ F^e = \mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}}$. Ainsi on pose $\varepsilon = \mathrm{Id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}}}\colon \operatorname{coker} \circ F^e = \mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}} \to \mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}}$.

Soit maintenant $\varphi\colon G \to H$ un objet de $\mathsf{Gr}^{\to}$. Alors $F^e(\operatorname{coker}(\varphi))\colon \{e\} \to \operatorname{coker}(\varphi) = H/N_\varphi$ est l'unique homomorphisme depuis $\{e\}$. On définit la composante de $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}^{\to}} \to F^e \circ \operatorname{coker}$ en φ comme étant le morphime $\eta_\varphi = (\pi, q_\varphi)\colon \varphi \to F^e(\operatorname{coker}(\varphi))$ dans $\mathsf{Gr}^{\to}$ donné par le diagramme commutatif (1) ci-dessus. On montre que η ainsi définie est naturelle. Soit $(f, k)\colon \varphi \to \varphi'$ un morphisme dans $\mathsf{Gr}^{\to}$ comme donné par le diagramme (3). On montre que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
\big(\varphi\colon G \to H\big) \arrow[r, "\eta_\varphi = (\pi, q_\varphi)"] \arrow[d, "{(f,k)}"'] & \big(F^e(\operatorname{coker}(\varphi))\colon \{e\} \to H/N_\varphi\big) \arrow[d, "{F^e(\operatorname{coker}(f,k)) = (\mathrm{Id}_{\{e\}}, \operatorname{coker}(f,k))}"] \\
\big(\varphi'\colon G' \to H'\big) \arrow[r, "\eta_{\varphi'} = (\pi, q_{\varphi'})"'] & \big(F^e(\operatorname{coker}(\varphi'))\colon \{e\} \to H'/N_{\varphi'}\big)
\end{tikzcd}$$

en montrant qu'il commute composante par composante. Clairement, $\mathrm{Id}_{\{e\}} \circ \pi = \pi \circ f\colon G \to \{e\}$ puisqu'il y a un unique homomorphisme de G vers $\{e\}$. De plus, $\operatorname{coker}(f, k) \circ q_\varphi = q_{\varphi'} \circ k$ commute par le diagramme commutatif (5). Donc $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}^{\to}} \to F^e \circ \operatorname{coker}$ est bien une transformation naturelle.

Il reste à démontrer les identités triangulaires. On les vérifie à l'aide des faits suivants:

- $\varepsilon = \mathrm{Id}_{\mathrm{Id}_{\mathsf{Gr}}}$,
- $\eta_{F^e(G)} = (\pi, q_{F^e(G)}) = (\mathrm{Id}_{\{e\}}, \mathrm{Id}_G) = \mathrm{Id}_{F^e(G)}\colon F^e(G) \to F^e(\operatorname{coker}(F^e(G))) = F^e(G)$, pour tout groupe $G \in \mathsf{G}$,
- pour tout object $\varphi\colon G \to H$ de $\mathsf{Gr}^{\to}$,

  $$\operatorname{coker}(\eta_\varphi) = \operatorname{coker}(\pi, q_\varphi)\colon \operatorname{coker}(\varphi) \to \operatorname{coker}(F^e(\operatorname{coker}(\varphi))) = \operatorname{coker}(\varphi)$$

  est l'unique morphisme qui satisfait l'égalité $q_\varphi = q_{F^e(\operatorname{coker}(\varphi))} \circ q_\varphi = \operatorname{coker}(\pi, q_\varphi) \circ q_\varphi$ (par définition de coker, voir diagamme (5)). Comme l'identité $\mathrm{Id}_{\operatorname{coker}(\varphi)}$ satisfait également cette égalité, alors on obtient $\operatorname{coker}(\pi, q_\varphi) = \mathrm{Id}_{\operatorname{coker}(\varphi)}$.

On a montré que $\operatorname{coker} \dashv F^e$ est bien une adjonction.

Définition. Soit G un groupe. Le **groupe dérivé** de G est le sous-groupe $[G, G]$ de G engendré par les commutateurs $\{[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\}$.

Exercice 6.4. Soit G un groupe. Montrer que:

(i) le groupe dérivé $[G, G]$ est un sous-groupe normal de G et son quotient $G_{\text{ab}} = G/[G, G]$ est abélien, appelé l'**abélianisé** de G,

(ii) si A est un groupe abélien et $\varphi\colon G \to A$ est un homomorphismes de groupes, alors il existe un unique homomorphisme $\overline{\varphi}\colon G_{\text{ab}} \to A$ tel que $\varphi = \overline{\varphi} \circ q$, où $q\colon G \to G_{\text{ab}} = G/[G, G]$ est l'application quotient,

(iii) si H est un sous-groupe de G tel que $[G, G] \subset H$, alors H est normal et G/H est abélien.

(iv) si $N < G$ est un sous-groupe normal de G tel que G/N est abélien, alors $[G, G] \subset N$. En déduire que $[G, G]$ est le plus petit sous-groupe normal de G pour lequel le groupe quotient est abélien.

(v) Montrer que le processus d'abélianisation donne un foncteur $(-)^{\text{ab}} : \mathsf{Gr} \to \mathsf{Ab}$ de la catégorie des groupes vers celle des groupes abéliens, et montrer qu'on a une adjonction

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Gr} \arrow[r, shift left, "(-)^{\text{ab}}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Ab} \arrow[l, shift left, "I"] \end{tikzcd}$$

où I est le foncteur inclusion.

Solution. A rendre.