Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 1er au 5 mars 2021

Série 3 du lundi 1er mars 2021

Exercice 1.

1) Démontrer l'inégalité de Young :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \tag{1}$$

où $p \in \,]1, +\infty[$ et q est tel que $1/p + 1/q = 1$.

Indication. Utiliser le fait que la fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est concave et appliquer $\ln$ à la relation d'inégalité.

2) Démontrer que si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ où $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ et si $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ est le produit scalaire euclidien, alors on a l'inégalité de Hölder :

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q \tag{2}$$

où $p \in [1, +\infty]$ et $1/p + 1/q = 1$ (avec la convention $1/+\infty = 0$).

Indication. Lorsque $p, q \in \,]1, +\infty[$, poser $\lambda = \|\boldsymbol{x}\|_p^{-1/q} \|\boldsymbol{y}\|_q^{1/p}$ et utiliser le point 1 après avoir écrit $|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda |x_i| \times \frac{1}{\lambda}|y_i|$.

3) Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme pour $p \in [1, +\infty]$ mais, lorsque $n \geq 2$, pas pour $p \in \,]0, 1[$.

Indication. Pour $p \in]1, \infty[$, partir de $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p^p \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i||x_i + y_i|^{p-1}$ et utiliser le point 2 ci-dessus.

4) Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty]$ et $q \in \mathbb{R}$ tel que $1/p + 1/q = 1$. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant n^{1/q} \|\boldsymbol{x}\|_p \quad \text{si } p \neq 1, \tag{3}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \leqslant n^{1/p} \|\boldsymbol{x}\|_\infty \quad \text{si } p \neq +\infty, \tag{4}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1. \tag{5}$$

En déduire que toutes les normes $\{\|\cdot\|_p : p \in [1, +\infty]\}$ sont équivalentes.

Solution :

1) Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'inégalité est triviale. On suppose donc que $a > 0$ et $b > 0$. Si on pose $f(s) = \ln s$, on a $f'(s) = s^{-1}$ et $f''(s) = -s^{-2} < 0$ pour tout $s \in \,]0, +\infty[$. Ainsi, la fonction $g := -\ln$ est convexe. Puisque $1 < p < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$g\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \leqslant \frac{1}{p}g(a^p) + \frac{1}{q}g(b^q) \tag{6}$$

et par suite

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab). \tag{7}$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante, on a bien

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \tag{8}$$

2) Distinguons trois cas.

Cas $p = +\infty$**.** Alors $q = 1$ et, pour tout $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| = \left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i| \sum_{i=1}^n |y_i| = \|\boldsymbol{x}\|_\infty \|\boldsymbol{y}\|_1. \tag{9}$$

Cas $p = 1$**.** Alors $q = +\infty$. On inverse les rôles de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ pour obtenir

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| = |\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle| \leq \|\boldsymbol{y}\|_\infty \|\boldsymbol{x}\|_1. \tag{10}$$

Cas $p \in]1, +\infty[$**.** Alors $q = p/(p-1)$. Si $\boldsymbol{x} = 0$ ou $\boldsymbol{y} = 0$, l'inégalité est triviale. On suppose donc $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq (0,0)$. On a, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et en utilisant l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned} |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| &\leqslant \sum_{i=1}^n |x_i||y_i| = \sum_{i=1}^n \lambda|x_i|\frac{1}{\lambda}|y_i| && (11)\\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \frac{\lambda^p}{p}|x_i|^p + \sum_{i=1}^n \frac{1}{q\lambda^q}|y_i|^q = \frac{\lambda^p}{p}\|\boldsymbol{x}\|_p^p + \frac{1}{q\lambda^q}\|\boldsymbol{y}\|_q^q. && (12)\end{aligned}$$

Si on pose $\lambda = \|\boldsymbol{x}\|_p^{-1/q}\|\boldsymbol{y}\|_q^{1/p}$, puisque $p - p/q = q - q/p = 1$, on obtient :

$$\lambda^p \|\boldsymbol{x}\|_p^p = \|\boldsymbol{x}\|_p^{p-p/q}\|\boldsymbol{y}\|_q = \|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q \tag{13}$$

et

$$\lambda^{-q}\|\boldsymbol{y}\|_q^q = \|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q^{q-q/p} = \|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q. \tag{14}$$

Ainsi,

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leqslant \frac{1}{p}\|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q + \frac{1}{q}\|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q = \|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q. \tag{15}$$

3) Distinguons à nouveau trois cas.

Cas $p = +\infty$**.** Montrons l'inégalité triangulaire. Soient $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i + y_i| &\leq \max_{1\leqslant i\leqslant n}(|x_i| + |y_i|) && (16)\\ &\leq \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i| + \max_{1\leqslant j\leqslant n}|y_j| = \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}\|_\infty. && (17)\end{aligned}$$

Les autres propriétés d'une norme sont vérifiées trivialement.

Cas $p \in [1, +\infty[$**.** Montrons l'inégalité triangulaire. Soient $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^p &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p && (18)\\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \; |x_i + y_i|^{p-1} && (19)\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \; |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \; |x_i + y_i|^{p-1}. && (20)
\end{aligned}$$

Si $p = 1$, on en déduit immédiatement l'inégalité triangulaire. Si $p \in]1, +\infty[$, on utilise l'inégalité de Hölder :

$$|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{a}\|_p \|\boldsymbol{b}\|_q \tag{21}$$

avec

$$\boldsymbol{a} = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \quad \text{et } \boldsymbol{b} = (|x_1+y_1|^{p-1}, |x_2+y_2|^{p-1}, \dots, |x_n+y_n|^{p-1}). \tag{22}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |x_i| \; |x_i + y_i|^{p-1} = |\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle| &\leqslant \|\boldsymbol{a}\|_p \|\boldsymbol{b}\|_q && (23)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} && (24)\\
&= \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1} && (25)
\end{aligned}$$

Puisque $1/p + 1/q = 1$, on a $(p-1)q = p$ ainsi que $p/q = p - 1$. On obtient ainsi

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i| \; |x_i + y_i|^{p-1} \leqslant \|\boldsymbol{y}\|_p \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1} \tag{26}$$

et on a donc

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^p \leqslant \Big(\|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p\Big) \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1}. \tag{27}$$

Si $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p \neq 0$ on a l'inégalité triangulaire en divisant de part et d'autre par $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1}$. Si $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p = 0$, on l'a aussi trivialement. Les autres propriétés d'une norme sont vérifiées trivialement.

Cas $p \in]0, 1[$**.** Supposons $n \geq 2$ et montrons aue $\|\cdot\|$ n'est pas une norme. Soit $\boldsymbol{x} = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{y} = (0, 0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. Puisque $\|\boldsymbol{x}\|_p = \|\boldsymbol{y}\|_p = 1$ et $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p = 2^{1/p} > 2$, l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée. Par conséquent, $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme.

4) Si $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $|\boldsymbol{x}| = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$. Montrons les inégalités suivantes :

— En choisissant $\boldsymbol{y} = (1, 1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ dans le point 2, on obtient :

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \langle |\boldsymbol{x}|, \boldsymbol{y} \rangle \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q = n^{1/q} \|\boldsymbol{x}\|_p \tag{28}$$

où $p \in]1, +\infty]$, and $1/p + 1/q = 1$.

— Pour $p \in [1, +\infty[$, on a

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(n\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|\Big)^p\right)^{1/p} = n^{1/p}\|\boldsymbol{x}\|_\infty. \tag{29}$$

— On a également

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|\boldsymbol{x}\|_1. \tag{30}$$

Montrons maintenant que toutes les normes $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in [1, +\infty]\}$, sont équivalentes. Soit donc $p, r \in [1, +\infty]$ avec $(p, r) \neq (+\infty, 1)$. On a, pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant n^{1/s}\|\boldsymbol{x}\|_r \tag{31}$$

et

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \leqslant n^{1/p}\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant n^{1/p}\|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant n^{1/p}n^{1/s}\|\boldsymbol{x}\|_r = n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{s}}\|\boldsymbol{x}\|_r \tag{32}$$

avec $1/r + 1/s = 1$. Ces inégalités montrent que n'importe quelle norme $\|\cdot\|_\alpha$ peut être majorée par n'importe quelle autre norme $\|\cdot\|_\beta$ multipliée par une constante $C_{\alpha,\beta} > 0$ indépendante de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, avec $\alpha, \beta \in [1, +\infty]$.

Exercice 2.

Soient $f, g \in C^0([0, 1])$. On définit

$$\phi(f, g) = \int_0^1 fg \tag{33}$$

1) Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur $C^0([0, 1])$.
2) Montrer que $|\phi(f, g)| \leqslant \phi(f, f)^{1/2}\phi(g, g)^{1/2}$ en suivant la démonstration de l'inégalité de Cauchy–Schwarz donnée au cours.

Solution :

1) Pour $f, g \in C^0([0, 1])$, nous avons

$$\phi(f, f) \geqslant 0; \tag{34}$$
$$\phi(f, \cdot) \text{ et } \phi(\cdot, g) \text{ sont linéaires}; \tag{35}$$
$$\phi(f, g) = \phi(g, f). \tag{36}$$

Soit $f \in C^0([0, 1])$ telle que $\phi(f, f) = 0$. Il reste à prouver que $f = 0$; procédons par contradiction. Supposons $\exists a \in [0, 1], f(a) \neq 0$. Puisque $f^2 \in C^0[0, 1]$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f^2 est strictement positive sur $V(a, \delta)$ avec $V(a, \delta) = [a-\delta, a+\delta] \cap [0, 1]$. Par conséquent, comme $f^2 \geq 0$ sur $[0, 1]$, on a $\int_{V(a,\delta)} f^2 > 0$ et $\int_{[0,1]\setminus V(a,\delta)} f^2 \geqslant 0$. Nous obtenons,

$$\phi(f, f) = \int_0^1 f^2 = \int_{[0,1]\setminus V(a,\delta)} f^2 + \int_{V(a,\delta)} f^2 > 0, \tag{37}$$

ce qui est une contradiction.

2) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\phi(\alpha f + g, \alpha f + g) = \alpha^2 \phi(f, f) + 2\alpha\phi(f, g) + \phi(g, g) \geqslant 0. \tag{38}$$

Nous avons donc un polynôme de degré au plus 2 ayant au maximum une racine. Cela signifie que son discriminant est négatif, i.e.

$$\phi(f, g)^2 - \phi(f, f)\phi(g, g) \leqslant 0, \tag{39}$$

d'où l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Remarque. Cette preuve nécessite uniquement les points (34), (35) et (36). La propriété « $\phi(f, f) = 0 \implies f = 0$ » n'est pas utilisée.

Exercice 3.

1) Soit un espace métrique (M, d) et une fonction continue $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. On suppose que : (I) $h(0) = 0$; (II) h est dérivable sur $]0, +\infty[$; (III) $h' > 0$ sur $]0, +\infty[$; (IV) et h' est décroissante sur $]0, +\infty[$. Prouver que $\tilde{d} = h \circ d$ est aussi une distance sur M.
2) Si $V \neq \{0\}$ est un espace vectoriel équipé d'une norme N, d est la distance induite par N et $h(x) = x/(1 + x)$ pour $x \geq 0$, prouver que $\tilde{d} = h \circ d$ est une distance, mais qu'elle n'est induite par aucune norme.

Solution :

1) Soit $(a, b, c) \in M^3$.

Symétrie $\tilde{d}(a, b) = \tilde{d}(b, a)$ car d est symétrique.

Positivité $\tilde{d}(a, b) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $a = b$. En effet, ceci découle de la positivité de d et du fait que $h(x) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Inégalité triangulaire découle de l'inégalité triangulaire pour d :

$$\tilde{d}(a, b) = h(d(a, b)) \leq h(d(a, c) + d(c, b)) \tag{40}$$

(avec $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$, $h(x + y) \leq h(x) + h(y)$)

$$\leq h(d(a, c)) + h(d(c, b)) = \tilde{d}(a, c) + \tilde{d}(c, b), \tag{41}$$

Vérifions cette propriété de h. Si $x = 0$ ou $y = 0$, elle est évidente. Supposons donc $x > 0$, $y > 0$ et (sans perte de généralité) $y \leq x$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $u \in]0, y[$ et $v \in]x, x + y[$ tels que

$$\frac{h(y)}{y} = \frac{h(y) - h(0)}{y} = h'(u), \qquad \frac{h(x + y) - h(x)}{y} = h'(v). \tag{42}$$

Comme $u < v$, et h' est décroissante,

$$h(x + y) = h(x) + h'(v)y \leq h(x) + h'(u)y = h(x) + h(y). \tag{43}$$

2) La fonction h, définie par $h(x) := x/(1+x)$ pour $x \geq 0$, est bien continue sur $[0, +\infty[$. De plus, $h(0) = 0$, $h'(x) = 1/(1+x)^2 > 0$ sur $]0, +\infty[$, et h' est décroissante sur $]0, +\infty[$. D'après le point 1, $\tilde{d} = h \circ d$ est une distance sur V. Supposons qu'elle soit induite par norme $\tilde{N}$. Alors, pour tout $z \in V$ tel que $N(z) = 1$ et tout $\lambda > 0$,

$$\lambda \tilde{N}(z) = \tilde{N}(\lambda z) = \tilde{d}(\lambda z, 0) = h(d(\lambda z, 0)) = h(N(\lambda z)) = h(\lambda N(z)) = \frac{\lambda}{1+\lambda}. \tag{44}$$

Ce résultat est absurde, puisque le membre de gauche est linéaire en λ mais pas celui de droite. On en conclut que $\tilde{d}$ n'est induite par aucune norme.

Exercice 4.

Soit V l'ensemble de toutes les suites réelles dont seulement un nombre fini d'éléments sont non-nuls.

1) Montrer que V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2) Définissons l'application sur V

$$N : v \mapsto \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{N}} v_i^2}.$$

Prouver que N est une norme sur V.

3) Le théorème de Bolzano–Weierstrass, tel que formulé sur $\mathbb{R}^n$, est-il toujours vrai sur V équipé de la norme N ?

Solution :

Rappel 1. Un ensemble E est un *espace vectoriel réel* si les opérations de somme « + » et proportion [1] « $\cdot$ » sont définies sur E avec les propriétés suivantes.

Somme : $E \times E \ni (x, y) \mapsto x + y \in E$.

— $\forall x, y, z \in E$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.

— $\forall x, y \in E$, $x + y = y + x$.

— $\exists y \in E$, $\forall x \in E$, $x + y = x$: ce « neutre additif » y est généralement noté 0_E, ou simplement 0.

— $\forall x \in E, \exists y$, $x + y = 0$: cet « inverse additif » (ou « opposé ») de x est généralement noté $-x$.

Proportion : $\mathbb{R} \times E \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \in E$.

— $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$.

— $\forall x \in E$, $1 \cdot x = x$.

— $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$, $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$,

— $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.

1) Soit $(u, v) \in V^2$. La loi + sur V est définie par rapport à la loi + sur $\mathbb{R}$ – notées respectivement $+_V$ et $+_\mathbb{R}$ – avec $u +_V v = (u_i +_\mathbb{R} v_i)_{i \in \mathbb{N}}$. $(V, +)$ est un groupe abélien car $+_V$

— est interne à V (car $u + v \in V$), et

1. Multiplication par un scalaire (i.e. réel ici)

— hérite naturellement des propriétés d'associativité, de commutativité, d'unitarité et d'inversibilité de $+_{\mathbb{R}}$.

Soit $r \in \mathbb{R}$. La loi $\cdot$ sur V est définie par rapport à la loi $\times$ sur $\mathbb{R}$, avec $r \cdot u = (r \times u_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Quant à ses propriétés :

— elle est interne à V, car $r \cdot u \in V$;

— elle est associative par rapport à $\times$;

— elle est unitaire, et son élément neutre est l'élément neutre de $\times$;

— elle est distributive par rapport à $+_V$ et à $+_{\mathbb{R}}$.

Par conséquent, $(V, +, \cdot)$ est un espace vectoriel de corps $\mathbb{R}$.

2) N est définie sur V, puisque tout élément de V n'a qu'un nombre fini de termes non-nuls. N est également positive puisque, pour tout $v \in V$, il est évident que $N(v) \geqslant 0$. Elle est même définie positive car, si $N(v) = 0$, alors $\forall i \in \mathbb{N}, v_i = 0$, i.e. $v = 0_V$. De plus, N est absolument homogène car, $\forall r \in \mathbb{R}$, $N(r \cdot v) = \sqrt{r^2 \sum_{i\in\mathbb{N}} v_i^2} = |r|N(v)$. Enfin, pour tous $v, w \in V$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_i = w_i = 0$ pour tout $i > n$. En utilisant l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$, on obtient

$$N(v+w) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (v_i + w_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2} = N(v) + N(w). \tag{45}$$

Par conséquent, N vérifie l'inégalité triangulaire. N est donc une norme.

3) Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, notons δ_{ij} pour 1 si $i = j$, 0 sinon. Notons $\delta_i = (\delta_{ik})_{k\in\mathbb{N}} \in V$; N.B. $N(\delta_i) = 1$. Considérons la suite $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset V$. Clairement, une sous-suite ne pourrait converger que vers $0_V = (0, 0, 0, 0, ...)$. Or $N(0_V - \delta_i) = 1$ pour tout i, donc toute sous-suite de $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ diverge.