Notes de cours

MATH-105(a)
Analyse avancée II

(Section MA)

Boris Buffoni, Fabio Nobile

2020-2021

Dernière mise à jour : 22 avril 2021

Table des matières

Notations

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\}$

$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{- + \infty, +\infty\}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$

Chapitre 0

Intégrales Généralisées

Ce chapitre reprend le dernier sujet du cours d'Analyse Avancée I, notamment la construction de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue où continue par morceaux sur un intervalle borné et fermé. On rappelle qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ avec $a < b$ dans $\mathbb{R}$ est dite *continue par morceaux* si $\lim_{t \to x^+} f(t)$ existe (sous-entendu, dans $\mathbb{R}$) pour tout $x \in [a, b[$, $\lim_{t \to x^-} f(t)$ existe pour tout $x \in]a, b]$ et f est continue en x pour tout $x \in [a, b]$ avec au plus un nombre fini d'exceptions. Cette définition se généralise à un intervalle I quelconque avec une infinité de points : une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux (c.p.m.) si f est continue par morceaux sur tout intervalle $[a, b] \subset I$ avec $a < b$.

On se pose ici la question de comment généraliser la définition de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ dans le cas où l'intervalle d'intégration est borné mais pas fermé, et la fonction f n'est pas définie en a ou en b, comme dans les exemples suivantes :

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx, \qquad \int_0^1 \ln(x)dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}dx,$$

ou encore, comment généraliser la définition de l'intégrale sur un intervalle non borné, par exemple :

$$\int_0^\infty \sin(x)dx, \qquad \int_0^\infty \sin(x^2)dx, \qquad \int_0^\infty e^{-x}dx, \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx, \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx,$$

où on entendra toujours ∞ par $+\infty$, dans ce chapitre.

0.1 Intégrale généralisée sur un intervalle borné

On commence par définir l'intégrale généralisée sur un intervalle borné et "demi-ouvert" (ouvert à droite et fermé à gauche ou bien ouvert à gauche et fermé à droite).

Définition 0.1. *Pour $a < b$ dans $\mathbb{R}$, soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ c.p.m. et $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b[$. Si $\lim_{x \to b^-} F(x)$ existe, on dit que $\int_a^b f(x)dx$ existe (ou converge) et on pose*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to b^-} F(x).$$

Si $\lim_{x\to b^-} F(x)$ *n'existe pas, on dit que* $\int_a^b f(x)dx$ *diverge.*

De façon similaire, soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ *c.p.m., et* $F(x) = \int_x^b f(t)dt$*,* $x \in]a,b]$*. Si* $\lim_{x\to a^+} F(x)$ *existe, on dit que* $\int_a^b f(x)dx$ *existe (ou converge) et on pose*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Autrement on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ *diverge.*

Exemple 0.2. *On étudie l'existence de l'intégrale généralisée*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

Soit $F(x) = \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$*,* $x \in]0,1]$ *qui est bien définie car la fonction* $f(t) = t^{-\alpha}$ *est continue sur* $[x,1]$ *pour tout* $x \in]0,1]$*. Pour* $\alpha \neq 1$ *on a*

$$F(x) = \left.\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_x^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

tandis que pour $\alpha = 1$ *on a*

$$F(x) = \ln t\big|_x^1 = -\ln x.$$

Donc

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

et l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ *existe pour tout* $\alpha < 1$*.*

On vérifie facilement que si la fonction f admet une extension par continuité sur $[a,b]$ alors l'intégrale généralisé de f existe et coïncide avec l'intégrale sur l'intervalle fermé $[a,b]$ de l'extension par continuité de la fonction. Plus précisément, on a le résultat suivant, dont la preuve est laissée comme exercice.

Lemme 0.3. *Pour* $a < b$ *dans* $\mathbb{R}$*, soit* $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m. telle que* $\lim_{x\to b^-} f(x)$ *existe et définissons la fonction c.p.m. sur* $[a,b]$

$$f_b(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,b[, \\ \lim_{t\to b^-} f(t), & x = b. \end{cases}$$

Alors, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ *existe et* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_b(x)dx$*.*

On a le même résultat pour une fonction $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ *c.p.m. telle que* $\lim_{x\to a^+} f(x)$ *existe.*

On considère maintenant le cas d'un intervalle ouvert (à gauche et à droite).

Définition 0.4. *Soit* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m.,* $a < b$*. Pour* $c \in]a,b[$*, si* $\int_a^c f(x)dx$ *et* $\int_c^b f(x)dx$ *existent, alors on pose* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$*, auquel cas* $\int_a^b f(x)dx$ *est dite exister ou converger, sinon* $\int_a^b f(x)dx$ *est dite diverger.*

Il est facile de montrer que l'existence (ou non) de $\int_a^b f(x)dx$ ne dépend pas du choix de $c \in]a,b[$. En fait, soit $\tilde{c} \in]a,b[$, $\tilde{c} \neq c$. Alors

$$\int_a^{\tilde{c}} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{\tilde{c}} f(x)dx$$

existe ssi $\int_a^c f(x)dx$ existe, car f est c.p.m. sur $[c,\tilde{c}] \cup [\tilde{c},c]$. De même,

$$\int_{\tilde{c}}^b f(x)dx = \int_{\tilde{c}}^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

existe ssi $\int_c^b f(x)dx$ existe, et

$$\int_a^{\tilde{c}} f(x)dx + \int_{\tilde{c}}^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{\tilde{c}} f(x)dx + \int_{\tilde{c}}^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Exemple 0.5. *Dire si l'intégrale suivante*

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(x)dx$$

existe ou non.

On est tenté de calculer

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi/2^-} \int_{-x}^{x} \tan(t)dt &= \lim_{x\to\pi/2^-} \int_{-x}^{x} (-\ln(\cos t))'dt = \lim_{x\to\pi/2^-} \Big(-\ln(\cos x) + \ln(\cos(-x))\Big) \\ &= \lim_{x\to\pi/2^-} \ln\left(\frac{\cos(-x)}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\pi/2^-} \ln(1) = 0\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\pi/2^-} \int_0^x \tan(t)dt = \lim_{x\to\pi/2^-} \ln\left(\frac{\cos(0)}{\cos x}\right) = +\infty \\ \textit{et } &\lim_{x\to\pi/2^-} \int_{-x}^0 \tan(t)dt = -\infty.\end{aligned}$$

Donc $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(x)dx$ *diverge. En effet,* $\displaystyle\lim_{\substack{x_1\to-\pi/2^+ \\ x_2\to\pi/2^-}} \int_{x_1}^{x_2} \tan(x)dx$ *dépend de comment* x_1 *et* x_2 *tendent respectivement vers* $-\pi/2$ *et* $\pi/2$*. Prendre par exemple* $\lim_{\epsilon\to0^+} \int_{-\pi/2+\epsilon}^{\pi/2-\epsilon^2} \tan(x)dx = +\infty$ *et* $\lim_{\epsilon\to0^+} \int_{-\pi/2+\epsilon^2}^{\pi/2-\epsilon} \tan(x)dx = -\infty$.

L'intégrale généralisée a les propriétés suivantes :

Lemme 0.6 (Propriétés de l'intégrale généralisée)**.** *Soit* $a < b$ *dans* $\mathbb{R}$, I *de la forme* $[a,b[$, $]a,b]$ *ou* $]a,b[$, *et des fonctions c.p.m.* $f,g : I \to \mathbb{R}$. *Alors*

— $\int_a^b(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, *l'intégrale généralisée à gauche étant convergente si les deux intégrales généralisées à droite convergent.*

— $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $\forall c \in]a,b[$, *l'intégrale généralisée à gauche étant convergente ssi chacune des deux intégrales à droite converge au cas où elle est généralisée.*

— *si* $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in I$ *et* $\int_a^b f(x)dx$ *et* $\int_a^b g(x)dx$ *existent, alors* $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Pour établir si une intégrale généralisée existe, le critère de comparaison suivant est souvent très utile.

Lemme 0.7 (Critère de comparaison)**.** *Soit* $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions c.p.m. et supposons qu'il existe* $c \in [a,b[$ *tel que*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [c,b[.$$

— *Si* $\int_a^b g(x)dx$ *existe, alors* $\int_a^b f(x)dx$ *existe aussi ;*

— *si* $\int_a^b f(x)dx$ *diverge, alors* $\int_a^b g(x)dx$ *diverge aussi.*

Démonstration. Si $\int_a^b g(x)dx$ existe, alors $\int_c^b g(x)dx$ existe aussi. De plus, pour tout $x \in [c,b[$

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt \leq \int_c^x g(t)dt \leq \int_c^b g(t)dt < +\infty$$

Puisque F est une fonction croissante et bornée supérieurement sur $[c,b[$ on a que $\lim_{x\to b^-} F(x)$ existe. Ainsi $\int_c^b f(t)dt$ converge et

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \lim_{x\to b^-} \int_c^x f(t)dt$$

existe aussi. La seconde affirmation est la contraposée de la première. □

Corollaire 0.8. *Soit* $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m., non négative et bornée. Alors* $\int_a^b f(x)dx$ *existe.*

Démonstration. Il suit immédiatement du fait que $0 \leq f(x) \leq M < +\infty, \quad \forall x \in [a,b[$ et $\int_a^b M dx$ converge. □

Des versions analogues du Lemme 0.7 et Corollaire 0.8 existent pour $f, g :]a,b] \to \mathbb{R}$ ou bien $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$.

Exemple 0.9. *Grâce au Corollaire 0.8, on montre facilement que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\sin\frac{1}{x})^2}{\sqrt{x}}dx$ *converge.*

En effet, $0 \leq f(x) = \dfrac{(\sin\frac{1}{x})^2}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ *et* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ *converge.*

0.2 Intégrale généralisée absolument convergente

Définition 0.10. *Soit* I *un intervalle de la forme* $[a,b[$, $]a,b]$ *ou* $]a,b[$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *c.p.m. On dit que l'intégrale généralisée est absolument convergente si l'intégrale* $\int_a^b |f(x)|dx$ *existe.*

Théorème 0.11. *Si l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente, alors elle existe.*

Démonstration. Soit $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ et $f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}$. On a $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$,

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|, \quad 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|.$$

Donc, par le critère de comparaison, $\int_a^b f_+(x)dx$ et $\int_a^b f_-(x)dx$ existent, et $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (f_+(x) - f_-(x))dx$ existe aussi. □

Corollaire 0.12. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ c.p.m. et* bornée*, où I est un intervalle* borné *comme ci-dessus. Alors $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument et par conséquent, existe.*

Démonstration. On a $0 \leq |f(x)| \leq M < +\infty$, $\forall x \in I$. Comme $\int_a^b M dx$ converge, $\int_a^b |f(x)|dx$ converge aussi et $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument. □

Exercice 0.13. *Montrer que les intégrales généralisées*

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$$

convergent absolument.

Théorème 0.14. *Une condition suffisante pour que $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument avec $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ c.p.m. est qu'il existe $\alpha \in]-\infty, 1[$ tel que*

$$\lim_{x \to b^-} (b - x)^\alpha f(x) = l \in \mathbb{R}.$$

Si $\exists \alpha \geq 1$ tel que $\lim_{x \to b^-} (b - x)^\alpha f(x) = l \neq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Démonstration. Soit $\alpha \in]-\infty, 1[$ tel que $\lim_{x \to b^-} (b - x)^\alpha f(x) = l \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta_\epsilon \in]0, b - a[$ tel que

$$\forall x \in [b - \delta_\epsilon, b[, \quad (l - \epsilon)(b - x)^{-\alpha} < f(x) < (l + \epsilon)(b - x)^{-\alpha}.$$

Si $\alpha < 1$, alors $\int_a^b (b - x)^{-\alpha} dx$ converge et, puisque $0 \leq |f(x)| < (|l| + \epsilon)(b - x)^{-\alpha}$ pour $x \in [b - \delta_\epsilon, b[$, on en déduit grâce au Lemme 0.7 que $\int_a^b |f(x)|dx$ converge, donc $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument.

Si, par contre, $\alpha \geq 1$ et $l \neq 0$, en prenant $\epsilon \in]0, |l|[$ on a que $\int_{b-\delta_\epsilon}^b (b - x)^{-\alpha} dx$ diverge, f est non nul et de signe constant sur $[b - \delta_\epsilon, b[$ et $|f(x)| > (|l| - \epsilon)(b - x)^{-\alpha}$, $\forall x \in [b - \delta_\epsilon, b[$. Grâce au Lemme 0.7 on déduit que $\int_{b-\delta_\epsilon}^b |f(x)|dx$ diverge, et $\int_{b-\delta_\epsilon}^b f(x)dx$ et $\int_a^b f(x)dx$ divergent aussi. □

Remarque 0.15. *On a présenté le Théorème 0.14 pour un intervalle I de la forme $[a, b[$. Il y a deux conditions suffisantes analogues en a pour I de la forme $]a, b]$. Si I est de la forme $]a, b[$, on choisit $c \in]a, b[$ et on étudie séparément l'intégrale généralisée sur $[c, b[$ et celle sur $]a, c]$.*

Exercice 0.16. *Étudier, en utilisant le critère de puissance du Théorème 0.14 si l'intégrale généralisée $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx$ converge ou non.*

0.3 Intégrale généralisée sur un intervalle non borné

Soit I de la forme $[a, \infty[$, $]-\infty, a]$, $]a, \infty[$, $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, \infty[$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ c.p.m. On définit l'intégrale généralisée de f sur I de façon similaire à ce qu'on a fait pour I borné.

Définition 0.17. *Si $I = [a, \infty[$ et $\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^\infty f(x)dx$ existe et on pose*

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{x\to\infty} F(x).$$

On dit que $\int_a^\infty f(x)dx$ est absolument convergente si $\int_a^\infty |f(x)|dx$ existe.

Si $I =]-\infty, a]$ et $\lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)dt$ existe, on dit que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ existe et on pose

$$\int_{-\infty}^a f(t)dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)dt.$$

On dit que $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ est absolument convergente si $\int_\infty^a |f(x)|dx$ existe.

Soit I de la forme $]a, \infty[$, $]-\infty, a[$ ou $\mathbb{R}$, et soit $c \in I$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_I f(t)dt$ existe si les intégrales généralisées de f sur $I_1 = I\cap]-\infty, c]$ et sur $I_2 = I \cap [c, \infty[$ existent les deux, auquel cas on pose

$$\int_I f(t)dt = \int_{I_1} f(t)dt + \int_{I_2} f(t)dt$$

(ceci ne dépend pas du choix de c dans I). On dit que $\int_I f(x)dx$ est absolument convergente si $\int_I |f(x)|dx$ converge.

Si une intégrale généralisée existe, on dit aussi qu'elle converge, sinon on dit qu'elle diverge.

Exemple 0.18. *On étudie l'existence de l'intégrale généralisée*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^x = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}, && \alpha \neq 1 \\
F(x) &= \ln x && \alpha = 1
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\lim_{x\to\infty} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} < \infty, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha \in]-\infty, 1] \end{cases}
$$

et l'intégrale généralisée $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ *existe pour tout* $\alpha > 1$.

Il est intéressant de comparer ce dernier exemple avec l'exemple 0.2. On voit que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ existe pour tout $\alpha < 1$ alors que l'intégrale généralisée $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ existe pour tout $\alpha > 1$.

L'intégrale généralisée sur un intervalle non borné a les mêmes propriétés que celui sur un intervalle borné. En particulier, étant donné un intervalle I non borné et des fonctions c.p.m. $f, g : I \to \mathbb{R}$.

- linéarité : $\int_I (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_I f(x) dx + \beta \int_I g(x) dx, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, l'intégrale généralisée à gauche étant convergente si les deux intégrales généralisées à droite convergent.
- $\int_I f(x) dx = \int_{I\cap]-\infty,c]} f(x) dx + \int_{I\cap[c,\infty[} f(x) dx, \quad \forall c \in I$, l'intégrale généralisée à gauche étant convergente ssi chacune des deux intégrales à droite converge au cas où elle est généralisée.
- relation d'ordre : si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in I$ et $\int_I f(x) dx$ et $\int_I g(x) dx$ existent, alors $\int_I f(x) dx \leq \int_I g(x) dx$.

Les critères de comparaison énoncés au Lemme 0.7 et au Théorème 0.14 se généralisent aussi au cas d'un intervalle non borné.

Lemme 0.19 (Critères de comparaison – intervalles non bornés)**.**

- *Soit* $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *c.p.m. et supposons qu'il existe* $c \in [a, \infty[$ *tel que*

$$
0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [c, +\infty[.
$$

  Si $\int_a^\infty g(x) dx$ *existe alors* $\int_a^\infty f(x) dx$ *existe. Si* $\int_a^\infty f(x) dx$ *diverge alors* $\int_a^\infty g(x) dx$ *diverge.*
- *Soit* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *c.p.m.*

$$
\begin{aligned}
&\textit{Si } \exists \beta > 1 : \lim_{x\to\infty} x^\beta f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \textit{alors } \int_a^\infty f(x) dx \textit{ converge absolument.} \\
&\textit{Si } \exists \beta \in]-\infty, 1] : \lim_{x\to\infty} x^\beta f(x) = l \neq 0 \quad \textit{alors } \int_a^\infty f(x) dx \textit{ diverge.}
\end{aligned}
$$

Remarque 0.20. *Attention, comparez les conditions sur* β *avec les conditions du Théorème 0.14 sur* α *! Il y a des résultats analogues pour* I *de la forme* $]-\infty, a]$. *Si* I *est de la forme* $]a, \infty[$, $]-\infty, a[$ *ou* $]-\infty, \infty[$, *on choisit* $c \in I$ *et on étudie séparément l'intégrale généralisée sur* $I \cap [c, +\infty[$ *et celle sur* $I \cap]-\infty, c]$.

Exercice 0.21. *Étudier à l'aide du Lemme 0.19 l'existence des intégrales suivantes*

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx,\ \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx.$$

On remarque qu'une intégrale généralisée peut être convergente mais pas absolument convergente, comme l'exemple suivant le montre.

Exemple 0.22. *On montre dans cet exemple que l'intégrale généralisée $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente mais pas absolument convergente.*

Soit $F(x) = \int_{\pi}^{x} \frac{\sin t}{t} dt$. On a

$$\begin{aligned} F(x) &= -\int_{\pi}^{x} \frac{\cos t}{t^2} dt + \left.\frac{-\cos t}{t}\right|_{\pi}^{x} \\ &= -\int_{\pi}^{x} \frac{\cos t}{t^2} dt + \frac{\cos \pi}{\pi} - \frac{\cos x}{x} \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{-\int_{\pi}^{x} \frac{\cos t}{t^2} dt}_{\substack{\text{absolument convergent} \\ \text{donc la limite existe}}} - \frac{1}{\pi} - \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}}_{=0}$ *existe.*

En revanche, $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ ne converge pas absolument. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$

$$\begin{aligned} F(k\pi) &= \int_{\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &\geq \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{(j+1)\pi} \underbrace{\int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin x| dx}_{=2} \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2}{(j+1)\pi} \xrightarrow{k\to\infty} +\infty. \end{aligned}$$

Remarque 0.23. *Si $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge et $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe, alors nécessairement $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ (cf le critère du Lemme 0.19 avec $\beta = 0$). En revanche le fait que $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge absolument n'implique pas que f est bornée.*

Par exemple, considérons la fonction $\phi(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$ et la fonction $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}_+$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\phi\left(n^3(x-n)\right)$$

qui est continue mais pas bornée sur $[0, \infty[$.

Puisque

$$\int_0^\infty n\phi\left(n^3(x-n)\right)dx = n^{-2}\int_{-n^4}^\infty \phi(y)dy = n^{-2}\int_{-1}^1 \phi(y)dy = n^{-2},$$

on a que pour tout $x \in [0, \infty[$

$$F(x) = \int_0^x |f(t)|dx \leq \int_0^{\lceil x\rceil} \leq \sum_{n=1}^{\lceil x\rceil}\int_0^\infty n\phi\left(n^3(x-n)\right)dx \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$$

Donc, F *est non décroissante est bornée supérieurement et la limite* $\lim_{x\to\infty} F(x)$ *existe. Il en suit que l'intégrale généralisée* $\int_0^\infty f(x)dx$ *converge absolument, même si* $\limsup_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque 0.24. *Soit un intervalle* I *qui n'est pas simultanément borné fermé, et une fonction c.p.m.* $f : I \to [0, \infty[$. *Comme* $f \geq 0$, *la limite (ou chacune des deux limites) intervenant dans la définition d'intégrale généralisée tend vers un nombre réel* ≥ 0 *ou vers* $+\infty$. *On peut donc dans ce cas écrire* $\int_I f(x)dx < \infty$ *si l'intégrale généralisée converge et* $\int_I f(x)dx = \infty = +\infty$ *si elle diverge.*

0.4 Intégrales et séries numériques

L'intégrale généralisée peut être utilisé aussi pour étudier la convergence d'une série numérique $\sum_{n=1}^\infty a_n$. L'idée est de construire la fonction c.p.m. $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = a_n$ pour $x \in [n, n+1[$ ou bien la fonction c.p.m. $\tilde{f} : [1, \infty[\to \mathbb{R}$, telle que $\tilde{f}(x) = a_n$, pour $x \in [n-1, n[$. Alors, pour tout $N \geq 0$,

$$\sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} a_n dx = \int_1^{N+1} f(x)dx = \int_0^N \tilde{f}(x)dx$$

et on peut utiliser les critères de comparaison pour les intégrales généralisées afin d'établir la convergence de la série.

Exemple 0.25. *On veut étudier la convergence de la série numérique* $S = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ *pour* $N \to \infty$.

Soit $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ *c.p.m. définie par* $f(x) = 1/n^2$ *si* $x \in [n, n+1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ *de telle sorte que* $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \int_1^{N+1} f(x)dx$. *On vérifie facilement que* $0 \leq f(x) \leq 1/(x-1)^2$ *sur* $[2, \infty[$ *et* $\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ *converge, d'où on déduit que* $\int_1^\infty f(x)dx$ *converge et*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \lim_{N\to\infty}\int_1^{N+1} f(x)dx < +\infty.$$

On peut encore utiliser les propriétés des intégrales généralisées pour donner des bornes par dessous et par dessus à la série S. *En effet, on a* $\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}$ *pour tout* $x \in [1, \infty[$

du coup

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \int_1^2 f(x)dx + \int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}dx = 2,$$
$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_1^{\infty} f(x)dx \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1,$$

On conclut donc $1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$.

Exercice 0.26. *Étudier si la série* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ *converge ou non.*

Chapitre 1

L'espace $\mathbb{R}^n$ et sa topologie

1.1 Espaces vectoriels normés

On rappelle ici les notions générales d'espace vectoriel, norme, distance et produit scalaire.

Définition 1.1 (**Espace vectoriel réel**). *Un ensemble V est un* espace vectoriel réel *si les opérations de somme et multiplication par un scalaire (réel) sont définies sur V avec les propriétés suivantes :*

1. *somme :* $V \times V \to V, \quad (x, y) \in V \times V \mapsto z = x + y \in V,$
   — $\forall x, y \in V, \quad x + y = y + x,$
   — $\forall x, y, z \in V, \quad (x + y) + z = x + (y + z),$
   — $\exists$ *élément nul* $0 : \quad x + 0 = x,$
   — $\forall x \in V$, $\exists$ *élément opposé* $-x : \quad x + (-x) = 0,$
2. *multiplication par un scalaire :* $\mathbb{R} \times V \to V, \quad (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times V \mapsto z = \lambda x \in V,$
   — $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x,$
   — $\forall x \in V, \quad 1 \cdot x = x,$
   — $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in V, \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,$
   — $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V, \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.$

Définition 1.2 (**Norme**). *Soit V un espace vectoriel réel. Une norme sur V est une application $N : V \to \mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\forall x \in V, \quad N(x) \geq 0, \quad$ *et* $\quad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
2. $\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{R}, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x),$
3. $\forall x, y \in V, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y) \quad$ *(inégalité triangulaire).*

On note souvent une norme par $\|\cdot\| \quad (N(x) = \|x\|)$.

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé** et souvent noté $(V, \|\cdot\|)$. On dit que deux normes N_1 et N_2 sur un espace vectoriel V sont équivalentes s'ils existent deux constants $\underline{c}, \overline{c} > 0$ telles que $\underline{c} N_1(x) \leq N_2(x) \leq \overline{c} N_1(x)$ pour tout $x \in V$.

Définition 1.3 (distance). *Soit X un ensemble. Une* distance *ou* métrique *sur X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\forall x, y \in X, \quad d(x,y) \geq 0, \quad$ *et* $\quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
2. $\forall x, y \in X, \quad d(x,y) = d(y,x),$
3. $\forall x, y, z \in X, \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad$ *(inégalité triangulaire).*

Un ensemble X muni d'une distance (X, d) est appelé **espace métrique**. Si $(V, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, alors l'application

$$d : V \times V \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in V,$$

est une distance (vérifiez-le) appelée *la distance induite par la norme* $\|\cdot\|$. Donc $(V, d(x,y) = \|x - y\|)$ est un espace métrique.

Exercice 1.4. *Soit V un espace vectoriel, $d(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}_+$ une distance sur V et $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ une fonction différentiable telle que $h(0) = 0$, $h'(x) > 0$ pour $x > 0$ et $h'(x)$ décroissante sur $[0,\infty)$. Montrer que $\tilde{d} = h \circ d$ est aussi une distance sur V. Vérifier que les hypothèses sont satisfaites par la fonction $h(x) = x/(1+x)$, mais que la distance $\tilde{d} = h \circ d$ n'est pas induite par une norme même si ceci est vrais pour d.*

Définition 1.5 (Produit scalaire). *Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel V est une application $b : V \times V \to \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

1. *(symétrie)* $\quad \forall x, y \in V, \quad b(x,y) = b(y,x),$
2. *(bi-linéarité)* $\quad \forall x, y \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x,z) + \beta b(y,z),$
3. *(positivité)* $\quad \forall x \in V, \quad b(x,x) \geq 0, \quad$ *et* $\quad b(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Un produit scalaire satisfait l'importante inégalité suivante :

Lemme 1.6 (Inégalité de Cauchy–Schwarz). *Soit V un espace vectoriel réel et $b : V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire sur V. Alors*

$$\forall x, y \in V, \quad |b(x,y)| \leq b(x,x)^{\frac{1}{2}} b(y,y)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in V$

$$0 \leq b(\alpha x + y, \alpha x + y) = \alpha^2 b(x,x) + 2\alpha b(x,y) + b(y,y) = p_2(\alpha)$$

où $p_2(\alpha)$ est un polynôme de degré 2 en α. Par la positivité de b, on obtient la condition suivante pour le discriminant : $\Delta \leq 0$ ce qui implique $b^2(x,y) - b(x,x)b(y,y) \leq 0$, d'où la thèse. □

Grâce à cette propriété, un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est toujours un espace normé.

Théorème 1.7. *Soit $b : V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire sur un espace vectoriel réel V. Alors $\|x\|_b = b(x,x)^{\frac{1}{2}} : V \to \mathbb{R}_+$ est une norme et $(V, \|\cdot\|_b)$ un espace vectoriel normé.*

Démonstration. Il faut vérifier que $\|\cdot\|_b$ satisfait toutes les propriétés d'une norme selon la Définition 1.2. Les propriétés 1. et 2. suivent directement de la positivité du produit scalaire (propriété 3. de 1.5) et de sa bi-linéarité (propriété 2. de 1.5).

Quant à l'inégalité triangulaire (propriété 3.) elle est une conséquence de l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\begin{aligned}\|x+y\|_b^2 &= b(x+y,x+y) = b(x,x) + 2b(x,y) + b(y,y)\\ &\leq b(x,x) + b(y,y) + 2b(x,x)^{\frac{1}{2}}b(y,y)^{\frac{1}{2}}\\ &= (\|x\|_b + \|y\|_b)^2\end{aligned}$$

□

1.2 L'espace $\mathbb{R}^n$

On note $\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}^{n \text{ fois}}$ l'ensemble des n-uples $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, avec $x_i \in \mathbb{R}$, pour $i = 1,\ldots,n$, muni des opérations de

— somme : pour tout $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)$, $\quad \mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$,

— multiplication par un scalaire : pour tout $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n), \lambda \in \mathbb{R}$, $\quad \lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$.

Ainsi, $\mathbb{R}^n$ a une structure d'espace vectoriel réel. Sur $\mathbb{R}^n$, on peut introduire plusieurs normes. Voici les plus communes :

— **Norme euclidienne :**

$$\|\mathbf{x}\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

— **Norme p :**

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1,$$

— **Norme ∞ :**

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|.$$

La norme euclidienne correspond à la norme p avec $p = 2$, i.e. $\|\mathbf{x}\|_E = \|\mathbf{x}\|_2$. On vérifie (exercice) que toutes les applications $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, pour tout $p \geq 1$ et $p = \infty$, sont des normes. Par contre, $\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ avec $0 < p < 1$ n'est pas une norme lorsque $n \geq 2$ (elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire).

Toutes les normes $\|\cdot\|_p$, $p \geq 1$, sont équivalentes, c'est-à-dire, $\forall p, q \geq 1$, il existe $0 < c_1(p,q) < c_2(p,q)$:

$$c_1(p,q)\|\mathbf{x}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_q \leq c_2(p,q)\|\mathbf{x}\|_p, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Plus généralement, sur $\mathbb{R}^n$, **toutes les normes sont équivalentes**, c'est-à-dire, si $\|\cdot\|$ et $|||\cdot|||$ sont deux normes sur $\mathbb{R}^n$, alors $\exists\, 0 < c_1 < c_2$ tels que.

$$c_1\|\mathbf{x}\| \leq |||\mathbf{x}||| \leq c_2\|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

La preuve de ce résultat sera proposée plus loin dans le cours.

Seule la norme euclidienne $\|\mathbf{x}\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ parmi toutes les normes $\|\cdot\|_p,\ p \geq 1$ est une norme induite par un produit scalaire, nommément le **produit scalaire euclidien** :

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \mathbf{y}^\top \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{x}.$$

Dans ces deux dernières expressions, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont des vecteurs colonnes, $\mathbf{y}^\top$ est la transposée de $\mathbf{y}$ et le produit est la multiplication matricielle. En effet, $\|\mathbf{x}\|_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$ et l'inégalité de Cauchy Schwarz sur $\mathbb{R}^n$ devient :

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2.$$

1.3 Suites dans $\mathbb{R}^n$

Définition 1.8 (**Suite convergente**). *Soit $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$. On dit que $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge s'il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\| = 0$, c.-à-d. :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N > 0 : \quad \forall k \geq N, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \epsilon.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$.

Puisque toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$, la convergence de la suite $\mathbf{x}^{(k)}$ **ne dépend pas** de la norme choisie. De même que la valeur limite $\mathbf{x}$ (si elle existe) ne dépend pas de la norme. En particulier, si on prend la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans la définition de $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$, on en tire la propriété suivante.

Lemme 1.9. *Une suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ converge vers $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\{x_j^{(k)}\}_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}$ converge vers $x_j \in \mathbb{R}$ pour toute composante $j = 1, \ldots, n$.*

Démonstration. Soit $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$, et considérons la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans la définition de convergence d'une suite de $\mathbb{R}^n$. Alors,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N > 0 : \quad \forall k \geq N, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j - x_j^{(k)}| \leq \epsilon,$$

ce qui implique que $\lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} = x_j,\ \forall j = 1, \ldots, n$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} = x_j$, $\forall j = 1, \ldots, n$. Alors,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N_j > 0 : \quad \forall k \geq N_j, \quad |x_j - x_j^{(k)}| \leq \epsilon.$$

En prenant $\bar{N} = \max\{N_1, \ldots, N_n\}$ on a $\max_{j=1,\ldots,n} |x_j - x_j^{(k)}| \leq \epsilon$ pour tout $k \geq \bar{N}$, ce qui implique $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$. $\square$

Définition 1.10 (Suite de Cauchy). *Une suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ est dite de **Cauchy** si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0 : \quad \forall k, j \geq N, \quad \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(j)}\| \leq \epsilon.$$

En suivant la même démonstration du lemme 1.9, on peut montrer qu'une suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ est de Cauchy si et seulement si chaque suite $\{x_j^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R},\ j = 1, \dots, n$ est de Cauchy.

Théorème 1.11. *Une suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration. Ceci est vrai pour $n = 1$ (voir cours d'Analyse I). En utilisant la norme $\|\cdot\|_\infty$ et le lemme 1.9, on a : $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge $\iff$ $\{x_i^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour tout i $\iff$ $\{x_i^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour tout i $\iff$ $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. □

Théorème 1.12 (Bolzano–Weierstrass sur $\mathbb{R}^n$)**.** *Soit $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ une suite **bornée**, c.-à-d., $\exists M \in]0, +\infty[$ tel que $\|\mathbf{x}^{(k)}\| \leq M,\ \forall k \geq 0$. Alors il existe une sous-suite $\{\mathbf{x}^{(k_j)}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui est convergente.*

Démonstration. On utilise le théorème de Bolzano–Weierstrass sur $\mathbb{R}$: puisque $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, en particulier $\{x_1^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée où $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$. Donc on peut extraire une sous-suite $x_1^{(k_j)}$ qui converge vers $x_1 \in \mathbb{R}$. Prenons maintenant la suite $y_2^{(j)} = x_2^{(k_j)}$. Puisqu'elle est bornée, on peut extraire une sous-suite $y_2^{(j_\ell)}$ qui converge vers $x_2 \in \mathbb{R}$. Ainsi $\lim_{\ell\to\infty} x_2^{(k_{j_\ell})} = x_2$ et $\lim_{\ell\to\infty} x_1^{(k_{j_\ell})} = x_1$. En itérant ce raisonnement n fois, on peut extraire une sous-suite de $\mathbf{x}^{(k)}$ dont chaque composante converge vers $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. □

Ce qui est important dans la preuve de ce théorème est que l'on fait un nombre **fini** d'itérations (n est fini). Si n était ∞ la preuve ne porterait pas à conclusion.

1.4 Topologie de $\mathbb{R}^n$

1.4.1 Concepts de base

On s'intéresse ici à l'étude et classification des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. On commence par définir les *boules*.

Définition 1.13 (Boule de $\mathbb{R}^n$)**.** *Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, on appelle*

- $B(\mathbf{x}, \delta) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta\}$ *: la boule ouverte centrée en $\mathbf{x}$ et de rayon δ,*
- $S(\mathbf{x}, \delta) = \partial B(\mathbf{x}, \delta) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \delta\}$ *: la sphère centrée en $\mathbf{x}$ et de rayon δ,*
- $\overline{B}(\mathbf{x}, \delta) = B(\mathbf{x}, \delta) \cup S(\mathbf{x}, \delta) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta\}$ *: la boule fermée centrée en $\mathbf{x}$ et de rayon δ.*

La Figure 1.1 montre la forme des boules de $\mathbb{R}^2$ selon la norme qu'on choisit. On travaille par la suite avec la norme euclidienne $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2$ mais toutes les définitions ci après s'appliquent à n'importe quelle norme puisque toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

On considère maintenant un sous-ensemble quelconque E de $\mathbb{R}^n$.

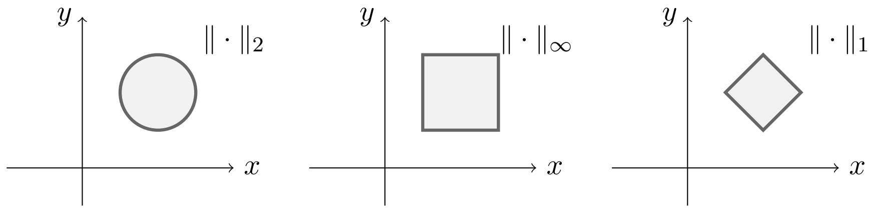


Figure 1.1 – Forme des boules de $\mathbb{R}^2$ pour des normes différentes

Définition 1.14 (sous-ensembles ouverts, fermés, bornés)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. On dit que*

— *E **est ouvert** s'il est vide ou si $\forall \mathbf{x} \in E, \quad \exists \delta > 0$ tel que $B(\mathbf{x}, \delta) \subset E$.*

— *E **est fermé** si son complémentaire $E^c = \mathbb{R}^n \backslash E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \notin E\}$ est ouvert.*

— *E **est borné** s'il existe $M > 0$ tel que $\|\mathbf{x}\| \leq M, \ \forall \mathbf{x} \in E$.*

On vérifie facilement que si un sous-ensemble E est ouvert par rapport a une norme, il est aussi ouvert par rapport à n'importe quelle autre norme puisque toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. La même conclusion est vraie pour les ensembles fermé ou bornés. L'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^n$ est appelé la **topologie** de $\mathbb{R}^n$ (induite par une norme).

Remarque 1.15. *Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$,*

— *$B(\mathbf{x}, \delta)$ est* ouvert *car $\forall \mathbf{z} \in B(\mathbf{x}, \delta), \ B(\mathbf{z}, \delta - \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|) \subset B(\mathbf{x}, \delta)$;*

— *de même, $\overline{B}(\mathbf{x}, \delta)$ est* fermé *car $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{B}(\mathbf{x}, \delta), \ B(\mathbf{z}, \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| - \delta) \subset \mathbb{R}^n \backslash \overline{B}(\mathbf{x}, \delta)$.*

Étant donné un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$, on peut classifier les points $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ par rapport à E de la façon suivante :

Définition 1.16. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. On dit que*

— *$\mathbf{x}$ est un **point intérieur** de E si*

$$\exists \delta > 0 : \quad B(\mathbf{x}, \delta) \subset E.$$

L'ensemble des points intérieurs de E est noté $\mathring{E}$ ou int(E) *et appelé l'***intérieur** *de E.*

— *$\mathbf{x}$ est un **point frontière** si*

$$\forall \delta > 0, \quad B(\mathbf{x}, \delta) \cap E \neq \emptyset \quad \text{et} \quad B(\mathbf{x}, \delta) \cap E^c \neq \emptyset.$$

L'ensemble des points frontières de E est noté ∂E et appelé la **frontière** *ou le* **bord** *de E.*

— *$\mathbf{x}$ est un **point adhérent** à E si*

$$\forall \delta > 0, \quad B(\mathbf{x}, \delta) \cap E \neq \emptyset.$$

*Un point adhérent est soit un point intérieur, soit un point frontière. L'ensemble des points adhérents à E est noté $\overline{E}$, et appelé l'***adhérence** *ou la* **fermeture** *de E, et coïncide avec $\overline{E} = E \cup \partial E = \mathring{E} \cup \partial E$.*

— $\mathbf{x}$ *est un* ***point isolé*** *de* E *si*

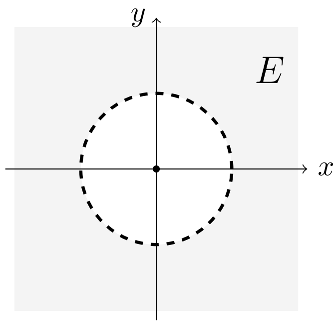
$$\exists\delta > 0 : \quad B(\mathbf{x}, \delta) \cap E = \{\mathbf{x}\}$$

— $\mathbf{x}$ *est un* ***point d'accumulation*** *de* E *si* $\forall\delta > 0$, $B(\mathbf{x}, \delta)$ *contient au moins un point de* E *autre que* $\mathbf{x}$*, c.-à-d.* $B(\mathbf{x}, \delta) \cap (E\backslash\{\mathbf{x}\}) \neq \emptyset$*. (Rappel :* $E\backslash\{\mathbf{x}\} = E$ *si* $\mathbf{x} \notin E$*.)*

Il s'ensuit que si $\mathbf{x}$ *est un point d'accumulation de* E*, alors* $\forall\delta > 0$*,* $B(\mathbf{x}, \delta)$ *contient une infinité de points de* E*. Les points d'accumulation de* E *sont tous les points de* $\overline{E} = E \cup \partial E$ *qui ne sont pas isolés.*

On remarque que pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, on a $B(\mathbf{y}, \delta) \cap E \neq \emptyset \Leftrightarrow B(\mathbf{y}, \delta) \cap \overline{E} \neq \emptyset$. En effet, l'implication $\Rightarrow$ est claire car $E \subset \overline{E}$. Pour montrer l'implication $\Leftarrow$, soit $\mathbf{z} \in B(\mathbf{y}, \delta) \cap \overline{E}$. Puisque $\mathbf{z}$ est point adhérent à E, il existe $\mathbf{w} \in B(\mathbf{z}, \delta - \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|) \cap E \subset B(\mathbf{y}, \delta) \cap E$. Donc $B(\mathbf{y}, \delta) \cap E \neq \emptyset$.

Exercice 1.17. *Soit* $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\} \cup \{(0, 0)\}$ *le sous-ensemble montré en figure. Déterminer son intérieur* $\mathring{E}$*, sa frontière* ∂E*, son complémentaire* E^c*, son adhérence* $\overline{E}$*, ainsi que tous ses points isolés et d'accumulation.*



<u>Quelques remarques sur les ensemble ouverts</u> :

— $\mathring{E}$ est ouvert.

Démonstration. En effet, si $\mathbf{x} \in \mathring{E}$, il existe $\delta > 0$ tel que $B(\mathbf{x}, \delta) \subset E$. Vérifions que $B(\mathbf{x}, \delta) \subset \mathring{E}$, ce qui prouvera que $\mathring{E}$ est ouvert. Pour tout $\mathbf{z} \in B(\mathbf{x}, \delta)$, on a $B(\mathbf{z}, \delta - \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|) \subset B(\mathbf{x}, \delta) \subset E$, et donc $\mathbf{z} \in \mathring{E}$. □

— E est ouvert si et seulement si $E = \mathring{E}$.

— Toute réunion quelconque (même *infinie*, dénombrable ou non) de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert.

Démonstration. Soit $E = \bigcup_\alpha E_\alpha$ avec E_α ouvert. Pour tout $\mathbf{x} \in E$, il existe $\alpha : \mathbf{x} \in E_\alpha$. Mais, E_α étant ouvert, $\exists \delta > 0 :\ B(\mathbf{x}, \delta) \subset E_\alpha \subset E$. Donc E est ouvert. □

— Toute intersection *finie* de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert.

Démonstration. Soit $E = \bigcap_{i=1}^m E_i$, avec E_i ouvert. Si $\mathbf{x} \in E$, alors $\mathbf{x} \in E_i \quad \forall i = 1, \ldots, m$ et, puisque chaque E_i est ouvert, $\exists \delta_i :\ B(\mathbf{x}, \delta_i) \subset E_i$. Soit $\delta = \min\{\delta_1, ..., \delta_m\}$ alors $B(\mathbf{x}, \delta) \subset B(\mathbf{x}, \delta_i) \subset E_i,\ \forall i$ et donc $B(\mathbf{x}, \delta) \subset \bigcap_{i=1}^m E_i = E$. □

— $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont ouverts.

Quelques remarques sur les ensembles fermés :

— $\mathbb{R}^n \backslash \overline{E} = \mathrm{int}(\mathbb{R}^n \backslash E)$ et $\overline{\mathbb{R}^n \backslash E} = \mathbb{R}^n \backslash \mathring{E}$.

— L'adhérence $\overline{E}$ d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est toujours fermé.

Démonstration. La preuve est par "passage au complémentaire" : son complémentaire $\mathbb{R}^n \backslash \overline{E} = \mathrm{int}(\mathbb{R}^n \backslash E)$ est en effet ouvert. □

— E est fermé si et seulement si $E = \overline{E}$. (Preuve : par passage aux complémentaires.)

— Toute intersection quelconque (même *infinie*, dénombrable ou non) de sous-ensembles fermés est fermée. (On passe aux complémentaires pour montrer cette propriété et la suivante.)

— Toute union *finie* de sous-ensembles fermés est fermée.

— $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont fermés.

Une caractérisation importante des ensembles fermés est la suivante.

Lemme 1.18. *Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide est fermé si et seulement si toute suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset E$ convergente, converge vers un élément de E.*

Démonstration. Soit E fermé et $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset E$ une suite convergente vers $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Alors $\mathbf{x}$ adhère à E et, puisque E est fermé, $\mathbf{x} \in E$.

Réciproquement, supposons que E n'est pas fermé, autrement dit, que $\mathbb{R}^n \backslash E$ n'est pas ouvert. Il existe donc $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \backslash E$ tel que $\forall \delta > 0 \ \ B(\overline{\mathbf{x}}, \delta) \not\subset (\mathbb{R}^n \backslash E)$. En choisissant $\delta = 1/k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient $\mathbf{x}^{(k)} \in B(\overline{\mathbf{x}}, 1/k) \cap E$. La suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ dans E converge alors vers $\overline{\mathbf{x}} \notin E$. □

On montre de même que $\mathbf{x} \in \overline{E}$ ssi il existe une suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset E$ qui converge vers $\mathbf{x}$.

1.4.2 Ensembles compacts

On peut donner plusieurs définitions équivalentes d'un ensemble compact en $\mathbb{R}^n$. On présente ici la définition la plus "facile", mais non pas celle qui caractérise le mieux la notion de compacité.

Définition 1.19 (Compacité)**.** *Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est* ***compact*** *s'il est à la fois borné et fermé. L'ensemble vide sera considéré comme compact.*

Les deux autres caractérisations (équivalentes en $\mathbb{R}^n$) sont montrées dans les théorèmes suivants.

Théorème 1.20 (Caractérisation de la compacité par sous-suites convergentes)**.** *Un sous-ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact (fermé et borné) si et seulement si de toute suite d'éléments de E on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de E.*

Démonstration.

1. Soit E compact (fermé et borné). Par le théorème de Bolzano–Weierstrass, de toute suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ bornée (car E est borné), on peut extraire une sous-suite $\{\mathbf{x}^{(k_j)}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset E$ convergente telle que $\lim_{j\to\infty} \mathbf{x}^{(k_j)} = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Puisque E est fermé, $\mathbf{x} \in E$.
2. Supposons que E n'est pas compact, autrement dit, qu'il n'est pas fermé ou qu'il n'est pas borné (ou ni l'un ni l'autre). Si E n'est pas fermé, il existe $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \backslash E$ et une suite $\{\mathbf{y}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{y}^{(k)} = \bar{\mathbf{x}}$. Une telle suite n'a aucune sous-suite qui converge vers un élément de E (car $\bar{\mathbf{x}} \notin E$). Si E n'est pas borné, il existe une suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\|\mathbf{x}^{(k)}\| > k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Toute sous-suite $\{\mathbf{x}^{(k_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ satisfait $\|\mathbf{x}^{(k_j)}\| > k_j \geq j$ et $\{\mathbf{x}^{(k_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

$\square$

Théorème 1.21 (de Heine-Borel-Lebesgue – Caractérisation de la compacité par recouvrements finis)**.** *Un sous-ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact (fermé et borné) si et seulement si de toute famille de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ constituant un recouvrement de E, c.-à-d. $E \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, avec U_α ouvert, on peut extraire une famille* ***finie*** *qui est encore un recouvrement de E.*

On dit qu'un ensemble E satisfait la *propriété de Heine–Borel* si de toute famille de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ constituant un recouvrement de E on peut extraire une famille finie qui est encore un recouvrement de E. Le théorème précédent affirme donc que un ensemble E est compact si et seulement si il satisfait la propriété de Heine–Borel. On montre deux exemples d'application de la propriété de Heine–Borel pour montrer qu'un ensemble n'est pas compact.

Exemple 1.22. $\mathbb{R}^2$ *n'est pas compact. En fait, on peut écrire $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B(0,k)$ mais de ce recouvrement, on ne peut pas extraire de sous-recouvrement* fini*.*

Exemple 1.23. $E = \overline{B}(0,1)\backslash\{0\}$ *n'est pas compact. En fait, on peut écrire $E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \left(\overline{B}(0,\frac{1}{k})\right)^c$ qui est un recouvrement de E mais duquel on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini.*

La démonstration du théorème 1.21 va au dela du programme de ce cours, mais on la propose quand même ici par souci d'exhaustivité.
Quelques remarques sur les ensembles compacts :

— La caractérisation du théorème 1.20, qui peut être prise comme définition alternative de compacité, dit qu'un ensemble E est compact si et seulement si toute suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de E admet une sous-suite qui converge vers un élément de E, c'est-à-dire qu'il existe (au moins) un point $\mathbf{x} \in E$ (point d'accumulation de la suite) tel que toute boule $B(\mathbf{x}, \delta)$, $\delta > 0$ contient une infinité de terms de la suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Donc E est suffisamment contraignant (compact) pour que toute suite de E s'accumule quelque part dans E.

— La caractérisation du théorème 1.21 est la définition la plus générale de compacité, mais aussi la plus abstraite. Elle exprime le fait qu'on puisse décrire un ensemble compact par un nombre *fini* de termes et est à la base de toute étape d'approximation. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble quelconque. Clairement, pour tout $\varepsilon > 0$, $\bigcup_{\mathbf{x}\in E} B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ est un recouvrement de E. Si E est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini, c.-à-d. il existe $s = s(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ et $\{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(s)}\} \in E$ tels que $E \subset \bigcup_{i=1}^{s} B(\mathbf{x}^{(i)}, \varepsilon)$. Donc, E est bien approché par l'ensemble fini $\hat{E} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(s)}\}$ au sens que pour tout $\mathbf{x} \in E$, $\mathrm{dist}(\mathbf{x}, \hat{E}) = \inf_{i=1,\dots,s} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)}\| < \varepsilon$. Le nombre $s = s(\varepsilon)$ est appelé *nombre de recouvrement* de E et est un indicateur de la difficulté d'approcher E par un ensemble fini.

1.4.3 Ensembles connexes et connexes par arcs

Intuitivement, un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est connexe s'il est fait "d'un seul morceau". Plus rigoureusement, on dit qu'un ensemble E ouvert est connexe si on ne peut pas le séparer en deux parties *ouvertes* non vides et *disjointes*. La définition générale pour un ensemble quelconque est la suivante :

Définition 1.24 (Connexité)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. On dit que E est **connexe** s'il n'existe pas deux ouverts $A, B \subset \mathbb{R}^n$ disjoints ($A \cap B = \emptyset$) tels que $A \cap E \neq \emptyset$, $B \cap E \neq \emptyset$ et $E \subset A \cup B$.*

En particulier $\emptyset$ est connexe. Les ensembles connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, par exemple $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $[0, 1]$, $]0, 1[$, $[0, 1[$, $]-\infty, 0[$,$[0, \infty[$, etc. Une notion un peu plus forte de connexité est celle de *connexité par arcs*.

Définition 1.25. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide. On appelle chemin de E une application $\boldsymbol{\gamma} : [0, 1] \to E$, $t \mapsto \boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t)) \in E$, dont les fonctions $\gamma_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sont continues.*

Définition 1.26 (Connexité par arcs)**.** *Un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est connexe par arcs si pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, il existe un chemin $\boldsymbol{\gamma} : [0, 1] \to E$ tel que $\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}(1) = \mathbf{y}$ (et $\boldsymbol{\gamma}(t) \in E, \forall t \in [0, 1]$). Nous considérerons $\emptyset$ comme connexe par arcs.*

On peut montrer que tout ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ connexe par arcs est aussi connexe. Le réciproque n'est toutefois pas vraie. On verra dans le chapitre suivant que les propriétés de compacité, connexité et connexité par arcs sont des propriétés topologiques, préservées par les applications continues. Autrement dit, si $E \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble compact (resp. connexe ou connexe par arcs) et $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue, alors $\mathbf{f}(E) \subset \mathbb{R}^m$ est compact (resp. connexe ou connexe par arcs).

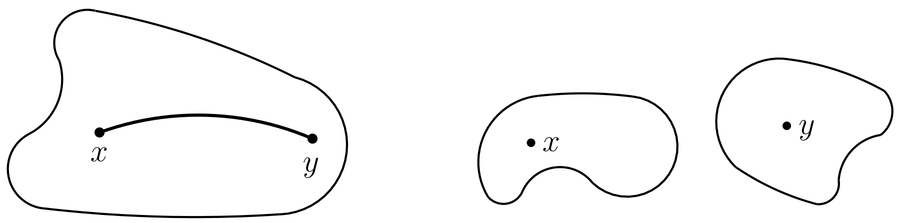


FIGURE 1.2 – Gauche : ensemble connexe par arcs. Droite : ensemble non connexe

Chapitre 2

Fonctions de plusieurs variables réelles ; limites et continuité

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide. On appelle *fonction sur E à valeurs réelles* une application $f : E \to \mathbb{R}$. C'est à dire, $\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in E$, $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ est l'image de $\mathbf{x}$ par f. La fonction f est donc une fonction de n variables réelles. On note :

— E ou $D(f)$ le domaine de f ;

— $\mathrm{Im}(f) = \{f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R} : \mathbf{x} \in E\}$ l'image de f (notée aussi $f(E)$) ;

— $\mathcal{G}(f) = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in E\}$ le graphe de f.

Une fonction de 2 variables réelles à valeurs réelles, $(x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$, peut être visualisée par son graphe (surface de $\mathbb{R}^3$), ou par ces lignes de niveau $N_f(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x, y) = c\}$. La figure 2.1 montre le graphe et les lignes de niveau de la fonction $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}, \ (x, y) \in [-1, 1]^2$.

2.1 Notions de limite

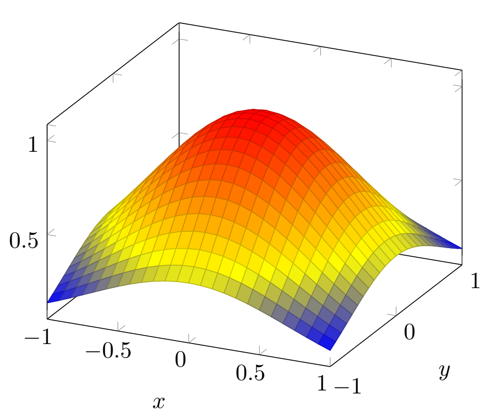
Définition 2.1 (limite). *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E. On dit que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ existe et est égale à $l \in \mathbb{R}$ si*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall \mathbf{x} \in E \ \ \Big(\ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \delta \ \Rightarrow \ |f(\mathbf{x}) - l| \leq \epsilon \ \Big).$$

On écrit alors $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l$

La propriété $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l$ ne dépend pas du choix de la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ car les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont deux à deux équivalentes. On note que dans la définition de limite ci dessus, on exclut le point $\mathbf{x}_0$ de l'ensemble $\{\mathbf{x} \in E, \ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \delta\}$. Cette limite est parfois appelée *limite épointée* et notée aussi $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0 \\ \neq}} f(\mathbf{x})$ ou $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{x}_0}} f(\mathbf{x})$. Dans ces notes on entendra toujours par $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ la limite épointée. Le fait que $\mathbf{x}_0 \in E$ ou $\mathbf{x}_0 \notin E$ n'intervient pas dans cette définition.

Le théorème suivant donne une caractérisation équivalente de limite par les suites.



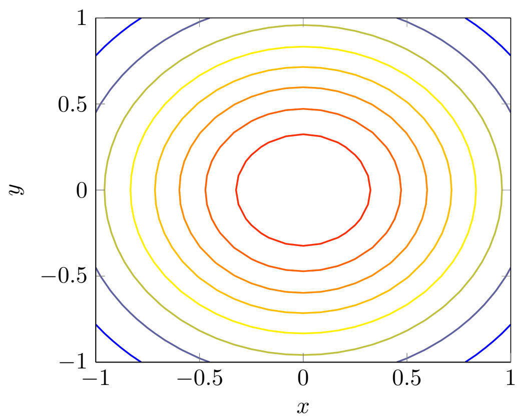


Figure 2.1 – Graphe (gauche) et lignes de niveau (droite) de la fonction $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, $(x,y) \in [-1,1]^2$.

Théorème 2.2. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E. Alors f admet pour limite l lorsque $\mathbf{x}$ tend vers $\mathbf{x}_0$ si et seulement si, pour toute suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E\backslash\{\mathbf{x}_0\}$ telle que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}_0$, on a $\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}^{(k)}) = l$. De plus la limite l est unique (si elle existe).*

Démonstration. Identique au cas d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en remplaçant la boule 1D $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ par la boule de $\mathbb{R}^n$, $B(\mathbf{x}_0, \delta)$. Voici la démonstration complète.

1. Supposons que f admet pour limite l lorsque $\mathbf{x}$ tend vers $\mathbf{x}_0$ et donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\mathbf{x} \in E$ vérifiant $0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| \leq \delta$, on a $|f(\mathbf{x}) - l| \leq \epsilon$. Soit, maintenant, $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ une suite telle que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}_0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}_0\| \leq \delta$ pour tout $k \geq N$ et donc $|f(\mathbf{x}^{(k)}) - l| \leq \epsilon$, ce qui montre que $\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}^{(k)}) = l$.

2. Supposons que $\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}^{(k)}) = l$ pour toute suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\mathbf{x}_0$. En raisonnant par l'absurde, supposons que f n'admet pas pour limite l lorsque $\mathbf{x}$ tend vers $\mathbf{x}_0$. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ on a l'existence de $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x} \in E$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| \leq \delta$ (puisque $\mathbf{x}_0$ est un point d'accumulation de E) tel que $|f(\mathbf{x})-l| > \epsilon$. Prenons $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe une suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}_0\| \leq \frac{1}{k}$ (et donc $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}_0$) et $|f(\mathbf{x}^{(k)}) - l| > \epsilon$, ce qui est contradictoire.

□

Bien que la définition de limite soit la même pour des fonctions d'une seule ou de plusieurs variables réelles, le calcul des limites pour des fonctions de plusieurs variables réelles est bien plus compliqué. Prenons la caractérisation de limite par les suites :

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \forall\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E\backslash\{\mathbf{x}_0\},\ \lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}_0 \\ \text{on a } \lim\limits_{k\to\infty} f(\mathbf{x}^{(k)}) = l \end{array}$$

Pour affirmer que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l$ existe, il faut s'assurer que $f(\mathbf{x}^{(k)}) \xrightarrow{k\to\infty} l$ pour *n'importe quelle* suite s'approchant de $\mathbf{x}_0$.

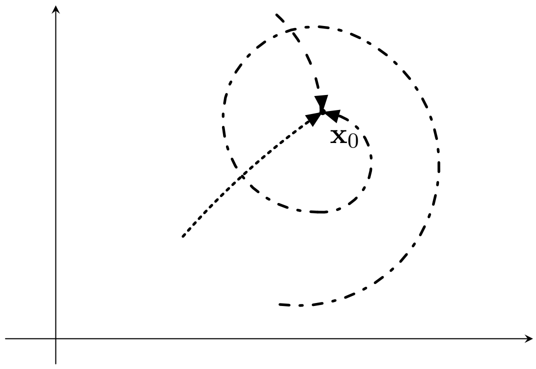


Figure 2.2 – Exemples de chemins possibles qu'on peut suivre pour atteindre $\mathbf{x}_0$.

Exemple 2.3. *Considérons la fonction* $f : E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *et* $\mathbf{x}_0 = (0,0)$*, qui est un point d'accumulation de* E*. Est-ce que* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ *existe ?*

Prenons la suite

$$\mathbf{x}^{(k)} = (\frac{1}{k}, 0) \quad k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbf{x}^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} (0,0).$$

On a que

$$f(\mathbf{x}^{(k)}) = \frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{\frac{1}{k^2}}} = 1 \quad \forall k \quad \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}^{(k)}) = 1.$$

Prenons maintenant la suite

$$\mathbf{y}^{(k)} = (0, \frac{1}{k}) \quad k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbf{y}^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} (0,0).$$

On a que

$$f(\mathbf{y}^{(k)}) = 0 \quad \forall k \quad \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(\mathbf{y}^{(k)}) = 0.$$

On a donc trouvé deux suites différentes $\{(\frac{1}{k}, 0)\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ *et* $\{(0, \frac{1}{k})\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ *qui donnent des limites différentes. On conclut donc que* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ *n'existe pas.*

Exemple 2.4. *Considérons la fonction* $f : E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$*, et* $\mathbf{x}_0 = (0,0)$*, qui est un point d'accumulation de* E*. Est-ce que* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ *existe ?*

Prenons la suite $\mathbf{x}^{(k)} = (\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}), k \geq 1$*, avec* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *non nuls en même temps. On a que*

$$f(\mathbf{x}^{(k)}) = \frac{\frac{\alpha\beta^2}{k^3}}{\frac{\alpha^2}{k^2} + \frac{\beta^4}{k^4}} = \frac{\alpha\beta^2 k}{\alpha^2 k^2 + \beta^2} \xrightarrow{k\to\infty} 0, \quad \forall(\alpha,\beta) \neq (0,0).$$

Donc si on se rapproche de $\mathbf{x}_0$ *par un chemin "droit" la limite est 0. Toutefois, si on prend la suite* $\mathbf{x}^{(k)} = (\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}) \xrightarrow{k\to\infty} (0,0)$*, on a que*

$$f(\mathbf{x}^{(k)}) = \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^4}} = \frac{1}{2} \quad \forall k \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}^{(k)}) = \frac{1}{2}.$$

Donc $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ *n'existe pas !*

2.1.1 Propriétés de l'opération de limite

L'opération de limite $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ pour des fonctions $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de plusieurs variables réelles a les mêmes propriétés que pour des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'une seule variable réelle.

Théorème 2.5. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0$ un point d'accumulation de E et $f, g : E \to \mathbb{R}$ tels que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l_1$ et $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = l_2$. Alors*

— $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}(\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})) = \alpha l_1 + \beta l_2$

— $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) = l_1 l_2$

— *Si* $l_2 \neq 0$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{l_1}{l_2}$

Comme pour les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'une seule variable réelle, on a un critère de comparaison qui peut être très utile pour établir l'existence d'une limite.

Théorème 2.6 (des deux gendarmes)**.** *Soient $f, g, h : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0$ un point d'accumulation de E et $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = l$. S'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$h(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in E,\ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \alpha$$

alors $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l$.

Remarque 2.7. *Dans le théorème des deux gendarmes, on utilise souvent des fonctions h et g qui dépendent uniquement de la distance $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$. Soit par exemple $g : E \to \mathbb{R}$ avec $E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{x}_0\}$, et supposons que*

$$\forall \mathbf{x} \in E \backslash \{\mathbf{x}_0\} \quad g(\mathbf{x}) = \tilde{g}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|),$$

où $\tilde{g} :]0, \infty[\to \mathbb{R}$. Alors $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = l$ si et seulement si $\lim_{r\to 0^+} \tilde{g}(r) = l$. En effet

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall \mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, \delta) \backslash \{\mathbf{x}_0\} \quad |g(\mathbf{x}) - l| = |\tilde{g}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) - l| \leq \epsilon$$

si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall r \in]0, \delta] \quad |\tilde{g}(r) - l| \leq \epsilon.$$

Exemple 2.8. *Soit $f : E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y \ln((x-1)^2 + y^2)$. Calculer si elle existe $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x, y)$.*

Prenons la suite $\mathbf{x}^{(k)} = (1, \frac{1}{k})$ Alors $\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln \frac{1}{k^2} = 0$. Donc si la limite existe elle doit être égale à $l = 0$. On a de plus

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(x, y)| &= |y|\, |\ln((x-1)^2 + y^2)| \\ &\leq \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\, |\ln((x-1)^2 + y^2)|. \end{aligned}$$

Notons $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \|(x, y) - (1, 0)\|$. Puisque

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} |\ln((x-1)^2 + y^2)| = \lim_{\rho\to 0^+} \rho |\ln \rho^2| = \lim_{\rho\to 0^+} \rho(-\ln \rho^2) = 0$$

(par la remarque appliquée à la norme euclidienne), on conclut par le théorème des deux gendarmes que $\lim_{(x,y)\to(1,0)} |f(x, y)| = 0$ et $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x, y) = 0$.

Théorème 2.9 (Critère de Cauchy)**.** *Soit* $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* $\mathbf{x}_0$ *un point d'accumulation de* E*. Alors* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ *existe (dans* $\mathbb{R}$*) si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, \delta) \cap (E \backslash \{\mathbf{x}_0\}) \ \ |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \epsilon.$$

Démonstration. Le sens $\Rightarrow$ est clair. Montrons le sens $\Leftarrow$. Il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, \delta_1) \cap (E \backslash \{\mathbf{x}_0\}) \ \ |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq 1.$$

Pour $\delta \in]0, \delta_1]$, soit les nombres réels

$$\alpha(\delta) = \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, \delta) \cap (E \backslash \{\mathbf{x}_0\})\}, \ \ \beta(\delta) = \sup\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, \delta) \cap (E \backslash \{\mathbf{x}_0\})\}$$

(deux fonctions monotones en δ). Il en résulte que

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta \in]0, \delta_1] \ \ 0 \leq \beta(\delta) - \alpha(\delta) \leq \epsilon$$

et donc, comme $\beta - \alpha$ est croissante en δ, $\lim_{r\to 0^+}(\beta(r) - \alpha(r)) = 0$. Posons $\ell = \lim_{r\to 0^+} \beta(r) = \lim_{r\to 0^+} \alpha(r)$. Comme

$$\forall \mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, \delta_1) \cap (E \backslash \{\mathbf{x}_0\}) \ \ \alpha(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \leq f(\mathbf{x}) \leq \beta(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|),$$

le théorème des deux gendarmes assure que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell$. □

2.1.2 Limite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

La définition de limite s'étend sans difficultés aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Soit $\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, c'est-à-dire,

$$\forall \mathbf{x} \in E \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

où $f_i : E \to \mathbb{R}$. Donc une fonction $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ est une collection de m fonctions $f_i : E \to \mathbb{R}$. Lorsque $n = m$, la norme dans l'espace de départ n'est pas nécessairement la même que celle dans l'espace d'arrivée. Dans ce qui suit, nous choisirons la norme euclidienne, sauf mention du contraire.

Définition 2.10. *Soit* $\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *et* $\mathbf{x}_0$ *un point d'accumulation de* E*. On dit que* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$ *si*

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \quad \forall \mathbf{x} \in E, \ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \delta \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}\| \leq \epsilon.$$

Comme pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$ existe si et seulement si pour toute suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ telle que $\mathbf{x}^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} \mathbf{x}_0$ on a $\lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{l}$ (limite dans $\mathbb{R}^m$). Il est aussi facile de montrer que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$ si et seulement si toutes les limites $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = l_i$, $i = 1, \ldots, m$ existent.

2.2 Fonctions continues

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide et $f : E \to \mathbb{R}$.

Définition 2.11 (fonction continue en un point)**.** *Soit* $\mathbf{x}_0 \in E$.

- *Si* $\mathbf{x}_0$ *est un point isolé, on admettra (par définition) que* f *est continue en* $\mathbf{x}_0$.
- *Si* $\mathbf{x}_0$ *n'est pas isolé (il est donc un point d'accumulation de* E*) on dit que* f *est continue en* $\mathbf{x}_0$ *si* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ *existe et* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

De la définition 2.1 de limite d'une fonction ainsi que du théorème 2.2, caractérisant les limites par les suites, il en suit que, pour tout $\mathbf{x}_0 \in E$, les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

i. $f : E \to \mathbb{R}$ est continue en $\mathbf{x}_0$;

ii. $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon, \mathbf{x}_0) > 0 :\ \forall \mathbf{y} \in E\ \ \Big(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| \leq \delta \Rightarrow |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0)| \leq \epsilon \Big)$;

iii. $\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}^{(k)}) = f(\mathbf{x}_0)$ pour toute suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ qui converge vers $\mathbf{x}_0$.

Définition 2.12 (fonction continue sur un ensemble)**.** *On dit que* $f : E \to \mathbb{R}$ *est continue sur* E *si elle est continue en tout point* $\mathbf{x} \in E$*. Dans ce cas, on note* $f \in C^0(E)$ *(ou* $f \in C^0(E, \mathbb{R})$*).*

Il en résulte que f est continue en tout $\mathbf{x} \in E$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0\ \forall \mathbf{x} \in E\ \exists \delta = \delta(\epsilon, \mathbf{x}) > 0 :\ \forall \mathbf{y} \in E\ \ \Big(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \epsilon \Big).$$

Définition 2.13 (fonction uniformément continue)**.** *On dit que* $f : E \to \mathbb{R}$ *est* uniformément *continue sur* E *si*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 :\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E\ \ \Big(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \epsilon \Big).$$

On note que ici δ *peut être choisi de manière qui ne dépend pas de* $\mathbf{x}$*, contrairement à la caractérisation précédente de continuité sur* E.

On remarque qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ uniformément continue sur E est aussi continue sur E. Le contraire n'est pas nécessairement vrai.

Exemple 2.14. *La fonction* $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\| \in \mathbb{R}_+$ *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}^n$ *(et donc continue) car, pour tous* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$\Big| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \Big| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

(inégalité triangulaire inverse*, qui découle de l'inégalité triangulaire).*

Exemple 2.15. *Toute fonction constante* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{C} \in \mathbb{R}^m$ *et, pour* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *fixé, la* i*-ème projection* $\mathbf{x} \mapsto x_i \in \mathbb{R}$ *sont des fonctions uniformément continues sur* $\mathbb{R}^n$*. En effet* $|x_i - y_i| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ *(norme euclidienne) pour tous* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Les définitions de continuité et continuité uniforme s'étendent sans difficultés à des fonctions $\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Définition 2.16. *Soit* $\mathbf{x}_0 \in E$.

— *Si* $\mathbf{x}_0$ *est un point isolé, on admettra (par définition) que* $\mathbf{f}$ *est continue en* $\mathbf{x}_0$.

— *Si* $\mathbf{x}_0$ *n'est pas isolé, on dit que* $\mathbf{f}$ *est continue en* $\mathbf{x}_0$ *si* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *existe et* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

Il en suit que, pour tout $\mathbf{x}_0 \in E$, les quatre affirmations suivantes sont équivalentes :

i. $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) : E \to \mathbb{R}^m$ est continue en $\mathbf{x}_0$;

ii. $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon, \mathbf{x}_0) > 0 :\ \forall \mathbf{y} \in E\ \Big(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| \leq \delta \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| \leq \epsilon\Big)$;

iii. $\lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ pour toute suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ qui converge vers $\mathbf{x}_0$;

iv. pour chaque $i \in \{1, \ldots, m\}$ la fonction $f_i : E \to \mathbb{R}$ est continue en $\mathbf{x}_0$.

Il en résulte aussi que $\mathbf{f}$ est continue en tout $\mathbf{x} \in E$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0\ \forall \mathbf{x} \in E\ \exists \delta = \delta(\epsilon, \mathbf{x}) > 0 :\ \forall \mathbf{y} \in E\ \Big(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq \epsilon\Big).$$

Dans ce cas, on note $f \in C^0(E, \mathbb{R}^m)$ (ou simplement $f \in C^0(E)$).

Définition 2.17. *On dira que* $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}$ *est* uniformément *continue sur E si*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 :\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E\ \Big(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq \epsilon\Big). \tag{2.1}$$

Remarque 2.18. *Soit* $\emptyset \neq A \subset E$ *et la restriction* $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^m$ *de* $\mathbf{f}$ *à* A *(notée aussi* $\mathbf{f}|_A$*). Si* $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ *est continue sur* E*, alors* $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^m$ *est continue sur* A.

2.2.1 Propriétés des fonctions continues

Théorème 2.19. *Soient* f *et* g *deux fonctions de* $E \subset \mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *continues en* $\mathbf{x}_0 \in E$.

— $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ *est continue en* $\mathbf{x}_0$;

— $f \cdot g$, $|f|$, $|g|$ *sont continues en* $\mathbf{x}_0$;

— *si* $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, *alors* $\frac{f}{g}$ *est continue en* $\mathbf{x}_0$.

Théorème 2.20 (Composition de fonctions continues)**.** *Soit* $\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *continue en* $\mathbf{x}_0 \in E$ *et* $\mathbf{g} : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ *continue en* $\mathbf{y}_0 \in A$ *et telle que* $\mathbf{x}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{y}_0)$. *Alors* $\mathbf{h} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g} : B = \{\mathbf{y} \in A : \mathbf{g}(\mathbf{y}) \in E\} \to \mathbb{R}^m$ *est continue en* $\mathbf{y}_0$.

Démonstration. Pour toute suite $\{\mathbf{y}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B$ telle que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{y}_0$, on a par la continuité de $\mathbf{g}$ que $\mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k)}) \xrightarrow{k\to\infty} \mathbf{g}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{x}_0$ et par la continuité de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k)})) \xrightarrow{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Donc, $\mathbf{h}(\mathbf{y}^{(k)}) \xrightarrow{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)) = \mathbf{h}(\mathbf{y}_0)$ ce qui montre la continuité de $\mathbf{h}$ en $\mathbf{x}_0$. $\square$

2.3 Prolongement de fonctions par continuité

Définition 2.21. *Soit* $\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *et* $\mathbf{x}_0 \in \overline{E} \backslash E$*. Une fonction* $\tilde{\mathbf{f}} : E \cup \{\mathbf{x}_0\} \to \mathbb{R}^m$ *est appelée un prolongement par continuité de* $\mathbf{f}$ *en* $\mathbf{x}_0$ *si* $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$ *sur* E *et* $\tilde{\mathbf{f}}$ *est continue en* $\mathbf{x}_0$*.*

Il est facile de vérifier qu'un prolongement $\tilde{\mathbf{f}}$ existe si et seulement si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ existe (dans $\mathbb{R}^m$), auquel cas $\tilde{\mathbf{f}}$ est uniquement déterminée par $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in E$ et $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Théorème 2.22. *Soit* $E \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble non vide et* $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ *une fonction continue sur* E*. Supposons que, pour tout* $\mathbf{x} \in \bar{E} \setminus E$*, la limite* $\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{y})$ *existe. Alors la fonction* $\tilde{\mathbf{f}} : \bar{E} \to \mathbb{R}^m$ *définie par* $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *si* $\mathbf{x} \in E$ *et* $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{y})$ *si* $\mathbf{x} \in \bar{E} \setminus E$ *est continue et appelée le prolongement de* $\mathbf{f}$ *par continuité sur* $\overline{E}$*.*

Démonstration. Soit $\mathbf{x} \in \bar{E}$ et prouvons la continuité de $\tilde{\mathbf{f}}$ en $\mathbf{x}$ à l'aide de suites. Soit donc une suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \bar{E}$ qui converge vers $\mathbf{x}$. Remplaçons-la par une suite $\{\mathbf{y}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ qui converge aussi vers $\mathbf{x}$ et telle que $\lim_{k\to+\infty} \|\mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)}) - \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{(k)})\| = 0$: si $\mathbf{x}^{(k)} \in E$, on pose $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)}$ et, si $\mathbf{x}^{(k)} \in \bar{E} \backslash E$, on choisit $\mathbf{y}^{(k)} \in E$ tel que

$$\|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq 2^{-k} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)}) - \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{(k)})\| \leq 2^{-k}.$$

Par définition de $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$, on a $\lim_{k\to+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)}) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$; en effet, si $\mathbf{x} \in E$, alors $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ et ceci découle de la continuité de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{x}$ et, si $\mathbf{x} \in \bar{E} \backslash E$, ceci découle de la définition de $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$. Donc $\lim_{k\to+\infty} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{(k)}) = \lim_{k\to+\infty} \left(\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)})\right) + \lim_{k\to+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)}) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$. □

Le prochain théorème est un résultat important. Il montre que sous l'hypothèse que la fonction soit *uniformément continue* sur E, on n'a pas besoin de vérifier l'existence des limites au bord pour pouvoir prolonger la fonction par continuité. L'hypothèse d'uniforme continuité est bien plus facile à vérifier que l'existence de la limite en chaque point du bord. On verra, par exemple, dans le chapitre suivant, que si la fonction est dérivable sur un ensemble E convexe avec dérivées partielles bornées, alors elle est uniformément continue sur E.

Théorème 2.23 (Prolongement de fonctions uniformément continues)**.** *Soit* $E \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble non vide et* $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ *une fonction uniformément continue sur* E*. Alors* $\mathbf{f}$ *peut être prolongée par continuité sur* $\overline{E}$ *et son prolongement continu* $\tilde{\mathbf{f}} : \overline{E} \to \mathbb{R}^m$ *est uniformément continu.*

Démonstration. Vérification que $\mathbf{f}$ *peut être prolongée par continuité sur* $\overline{E}$. Il faut vérifier que $\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ existe en tout $\mathbf{x} \in \overline{E} \setminus E$ (la limite en $\mathbf{x} \in E$ existe car $\mathbf{f}$ est continue sur E). Par hypothèse, la fonction $\mathbf{f}$ est uniformément continue sur E. Pour tout $\epsilon > 0$, soit $\delta > 0$ la valeur correspondante dans la définition (2.1) de continuité uniforme.

Pour chaque $\mathbf{a} \in \overline{E} \setminus E$, choisissons une suite $\{\mathbf{a}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ qui converge vers $\mathbf{a}$. Pour $\mathbf{a} \in \overline{E} \backslash E$ fixé, la suite choisie $\{\mathbf{a}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Il existe donc $N = N(\delta)$ tel que $\forall j, k \geq N \;\; \|\mathbf{a}^{(j)} - \mathbf{a}^{(k)}\| \leq \delta$. Il s'ensuit que, pour tous $j, k \geq N$, $\|\mathbf{f}(\mathbf{a}^{(j)}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}^{(k)})\| \leq \epsilon$. D'où $\{\mathbf{f}(\mathbf{a}^{(k)})\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^m$, qui admet pour limite un certain

$\mathbf{l} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{a}^{(k)}) \in \mathbb{R}^m$. Cette limite ne dépend pas de la suite choisie. En effet, soit $\{\mathbf{b}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ une autre suite telle que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{a}$ et $\mathbf{m} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{b}^{(k)})$. Alors il existe $\tilde{N} > N:\ \forall k \geq \tilde{N},\ \|\mathbf{m} - f(\mathbf{b}^{(k)})\| \leq \epsilon,\ \|\mathbf{l} - f(\mathbf{a}^{(k)})\| \leq \epsilon,\ \|\mathbf{a}^{(k)} - \mathbf{b}^{(k)}\| \leq \delta$. Par conséquent,

$$\|\mathbf{l} - \mathbf{m}\| \leq \|\mathbf{l} - \mathbf{f}(\mathbf{a}^{(k)})\| + \|\mathbf{f}(\mathbf{a}^{(k)}) - \mathbf{f}(\mathbf{b}^{(k)})\| + \|\mathbf{m} - \mathbf{f}(\mathbf{b}^{(k)})\| \leq 3\epsilon$$

ce qui implique $\mathbf{l} = \mathbf{m}$ par l'arbitrarité de ϵ et donc la limite $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ existe en tout $\mathbf{a} \in E$ et $\mathbf{f}$ peut être prolongée par continuité. On dénote $\tilde{\mathbf{f}}$ le prolongement par continuité de $\mathbf{f}$.

Vérification que $\tilde{\mathbf{f}}$ *est uniformément continue sur* $\overline{E}$. Soit $\epsilon > 0$ et $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{E}$ tels que $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \frac{\delta}{3}$, où $\delta = \delta(\epsilon)$ est comme ci-dessus. Introduisons deux suites $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}, \{\mathbf{y}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ qui convergent à $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, respectivement. Alors, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $k \geq M$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \frac{\delta}{3}$ et $\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^{(k)}\| \leq \frac{\delta}{3}$, d'où $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{y}^{(k)}\| \leq \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^{(k)}\| \leq \delta$.

Puisque $\tilde{\mathbf{f}}$ est continue sur $\overline{E}$ on a $\lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$, $\lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)}) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{y})$ et il existe $\tilde{M} > M$ tel que, pour tout $k \geq \tilde{M}$, $\|\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})\| \leq \epsilon$ et $\|\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)})\| \leq \epsilon$. On a alors

$$\|\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{y})\| \leq \|\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})\| + \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)})\| + \|\mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)}) - \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{y})\| \leq 3\epsilon.$$

Ainsi, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{E}$ satisfont $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \frac{\delta}{3}$, on a $\|\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{y})\| \leq 3\epsilon$, ce qui prouve que $\tilde{\mathbf{f}}$ est uniformément continue sur $\overline{E}$. □

2.4 Fonctions continues sur un compact

On commence par introduire la notion de fonction bornée et de borne supérieure et inférieure.

Définition 2.24 (fonction bornée)**.** *On dit que* $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est bornée s'il existe* $C > 0$ *tel que* $|f(\mathbf{x})| \leq C,\ \forall \mathbf{x} \in E$.

Définition 2.25 (bornes supérieure et inférieure)**.** *Soit* $E \subset \mathbb{R}^n$ *non vide et* $f : E \to \mathbb{R}$.

— *Soit* $M = \sup_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x})$. *Si* $M < +\infty$, *alors on a* $f(\mathbf{x}) \leq M,\ \forall \mathbf{x} \in E$ *et il existe une suite* $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ *telle que* $\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}^{(k)}) = M$. *On dit que* M *est la borne supérieure ou le supremum de* f *sur* E.

— *S'il existe* $\mathbf{x}_M \in E$ *tel que* $f(\mathbf{x}_M) = M$, *alors on dit que* M *est le* maximum *de* f *sur* E, $M = \max_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x})$ *et* f *atteint son maximum au point* $\mathbf{x}_M$. *On dit aussi que* $\mathbf{x}_M$ *(pas nécessairement unique) est un point de maximum de* f.

— *Si* $M = +\infty$, *on dit que* f *n'est pas bornée supérieurement.*

— *On a des définitions du même type pour la borne inférieure ou l'infimum* $m = \inf_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x})$, *le minimum* $m = \min_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x})$ *et un point de minimum* $\mathbf{x}_m \in E$ *tel que* $f(\mathbf{x}_m) = m$.

Théorème 2.26. *Soit* $E \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble non vide et* compact, *et* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors* f *est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire, il existe* $\mathbf{x}_M, \mathbf{x}_m \in E$ *tels que* $f(\mathbf{x}_M) = \sup_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x})$ *et* $f(\mathbf{x}_m) = \inf_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x})$.

Démonstration. Similaire au cas des fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sur un intervalle fermé et borné. Montrons d'abord que f est bornée. Ab absurdo, si f n'était pas bornée, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists \mathbf{x}^{(k)} \in E : \; |f(\mathbf{x}^{(k)})| > k$. Puisque E est compact, on peut extraire une sous-suite $\{\mathbf{x}^{(k_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $\mathbf{x} \in E$. Mais, f étant continue en $\mathbf{x}$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $K_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|f(\mathbf{x}^{(k_j)})| \le |f(\mathbf{x})| + \epsilon$ pour tout $j > K_\epsilon$, ce qui contredit $|f(\mathbf{x}^{(k_j)})| > k_j \ge j$, $\forall j$.

Soit maintenant $M = \sup_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x})$. Il existe une suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}^{(k)}) = M$. A nouveau, on peut extraire une sous-suite $\{\mathbf{x}^{(k_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $\mathbf{x}_M \in E$ et, par continuité de f, on a $f(\mathbf{x}_M) = M$, ce qui prouve que $M = \sup_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_M) = \max_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x})$. Idem pour le minimum. □

Théorème 2.27. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide,* compact *et* connexe par arcs*, et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur E. Alors f atteint toutes les valeurs entre son minimum m et maximum M sur E, et* $\mathrm{Im}(f) = [m, M]$.

Démonstration. Puisque E est compact et $f : E \to \mathbb{R}$ continue, il existe $\mathbf{x}_m$ et $\mathbf{x}_M$ t.q. $f(\mathbf{x}_m) = \min_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x})$ et $f(\mathbf{x}_M) = \max_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x})$. Puisque E est connexe par arcs, il existe un chemin $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ avec $\gamma_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues et $\boldsymbol{\gamma}(t) \in E$, $\forall t \in [0, 1]$, $\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{x}_m$, $\boldsymbol{\gamma}(1) = \mathbf{x}_M$. Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(\boldsymbol{\gamma}(t)) = f(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$, qui est continue sur $[0, 1]$ puisqu'elle est la composition de fonctions continues. D'après le théorème de la valeur intermédiaire d'Analyse I, $\mathrm{Im}(g)$ est un intervalle, et il contient $g(0) = m$ et $g(1) = M$, et donc tout $[m, M]$. D'où

$$[m, M] \subset \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f) \subset [m, M]$$

et $\mathrm{Im}(f) = [m, M]$. □

Les deux théorèmes précédents montrent deux propriétés importantes des fonctions continues, qui se généralisent comme suit aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Soit $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ continue et $\emptyset \neq A \subset E \subset \mathbb{R}^n$.

- Si A est compact, alors $\mathbf{f}(A) \subset \mathbb{R}^m$ est aussi compact.
- Si A est connexe (resp. connexe par arcs), alors $\mathbf{f}(A)$ est connexe (resp. connexe par arcs).

On conclut par une propriété importante des fonctions continues sur un compact.

Théorème 2.28 (Cantor-Heine)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide et* compact*, et $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue. Alors $\mathbf{f}$ est uniformément continue sur E.*

Démonstration. Similaire au cas des fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sur un intervalle fermé et borné. Ab absurdo supposons que $\mathbf{f}$ ne soit pas uniformément continue, autrement dit, il n'est pas vrai que

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E \;\; \Big(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \le \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \le \epsilon \Big).$$

Ainsi

$$\exists \epsilon > 0 : \; \forall \delta > 0 \; \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E \;\; \Big(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \le \delta \;\text{ et }\; |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| > \epsilon \Big).$$

Pour un tel $\epsilon > 0$, considérons $\delta = 1/k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$: il existe $\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)} \in E$ tels que

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{y}^{(k)}\| \leq \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)})\| > \epsilon.$$

La suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ étant bornée (puisque E est borné), il existe une sous-suite $\{\mathbf{x}^{(k_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $\mathbf{x} \in E$ puisque E est fermé. On a alors

$$\|\mathbf{y}^{(k_i)} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{y}^{(k_i)} - \mathbf{x}^{(k_i)}\| + \|\mathbf{x}^{(k_i)} - \mathbf{x}\| \leq \frac{1}{k_i} + \|\mathbf{x}^{(k_i)} - \mathbf{x}\| \to 0, \quad \text{si} \quad i \to \infty.$$

Ainsi $\lim_{i\to\infty} \mathbf{y}^{(k_i)} = \mathbf{x}$. Puisque $\mathbf{f}$ est continue sur E on a

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k_i)}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim_{i\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k_i)}),$$

ce qui contredit $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)})\| > \epsilon$ pour tout k. □

Chapitre 3

Dérivabilité

On commence ce chapitre en rappelant la notion de dérivée d'une fonction réelle d'une seule variable réelle, $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en un point $x_0 \in \mathring{E}$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{si la limite existe.}$$

Elle représente le taux d'accroissement de la fonction en x_0. De la définition, il suit immédiatement qu'il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset E$ et

$$\forall h \in]-\delta, \delta[\quad f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(|h|)$$

c'est-à-dire,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)h}_{\text{application linéaire en } h} + o(|h|)$$

et l'incrément $f(x_0 + h) - f(x_0)$ est bien approché par une application linéaire en h. Ici $o(|h|)$ dénote une fonction g définie sur un ouvert contenant 0 (un "voisinage" de 0) et telle que $\lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = 0$ (voir plus loin pour une définition plus générale). En fait il suffit de poser $g(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h$ pour $|h| < \delta$.

On a donc une double interprétation de la notion de dérivée : comme limite du taux d'accroissement en x_0, ainsi que comme application linéaire approchant localement la fonction dans un voisinage de x_0 (on appelle voisinage de x_0 un ouvert contenant x_0). En particulier, f dérivable en x_0 implique que f est aussi continue en x_0. Dans ce chapitre, on va généraliser ces deux notions pour des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ou $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de plusieurs variables réelles.

3.1 Dérivées partielles, dérivées directionnelles, différentielle

Définition 3.1. *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de n variables réelles, $\mathbf{x}_0 \in \mathring{E}$ un point intérieur de E et $\mathbf{v}$ un vecteur arbitraire de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est dérivable dans la direction $\mathbf{v}$ au point $\mathbf{x}_0$ si la limite $\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$ existe. Dans ce cas on pose*

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

Si $\|\mathbf{v}\| = 1$ pour la norme euclidienne, on appelle $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0)$ la ***dérivée directionnelle*** *de f dans la direction $\mathbf{v}$ au point $\mathbf{x}_0$.*

Si on définit la fonction $\tilde{f}(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})$ dans un voisinage de 0 (ce qui est toujours possible car $\mathbf{x}_0$ est un point intérieur de E), alors $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \tilde{f}'(0)$. On peut donc interpréter la dérivée directionnelle $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0)$ comme la limite du taux d'accroissement en suivant la direction $\mathbf{v}$. En particulier, si on prend $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$, le i-ème vecteur de la base

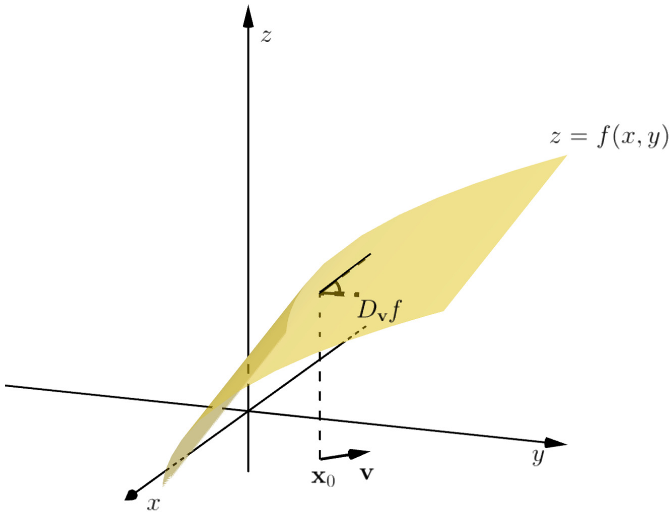


Figure 3.1 – Interprétation géométrique de dérivée directionnelle pour une fonction $f(x, y)$ de deux variables réelles

canonique de $\mathbb{R}^n$, alors la dérivée directionnelle correspondante est appelée *i-ème dérivée partielle* et est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{e}_i} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{t}.$$

Autrement dit, pour $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathring{E}$ point intérieur,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{t},$$

ce qui revient à calculer la dérivée de la fonction $x_i \mapsto f(\cdot, x_i, \cdot)$ pensée comme une fonction uniquement de la variable x_i, en traitant les autres variables $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ comme des paramètres. Pour cela, on peut donc utiliser les règles de dérivation des fonctions d'une seule variable réelle.

Définition 3.2 (vecteur gradient)**.** *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\mathbf{x}_0$ un point intérieur de E. Si toutes les dérivées partielles de f existent en $\mathbf{x}_0$, on appelle* ***matrice jacobienne*** *$Df(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (vecteur ligne) le vecteur*

$$Df(\mathbf{x}_0) = \left[\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\right] = \begin{pmatrix} \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

*et **vecteur gradient**, noté $\nabla f(\mathbf{x}_0)$, son transposé*

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = Df(\mathbf{x}_0)^\top = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.3. *Soit $f(x,y) = x^2 \cos y$. Alors*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2 \sin y, \quad \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x\cos y \\ -x^2\sin y \end{bmatrix}.$$

Une fonction peut avoir des dérivées partielles ou directionnelles en un point $\mathbf{x}_0$ sans pour autant être continue en ce point, comme les exemples suivants le montrent.

Exemple 3.4. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

mais f n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, on a $\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} \neq 0$. Pour cette fonction, les autres dérivées directionnelles n'existent pas :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 v_1 v_2}{t^3(v_1^2 + v_2^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2}{t(v_1^2+v_2^2)}$$

n'existe pas si $v_1 v_2 \neq 0$ (ici $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|\mathbf{v}\| = 1$ pour la norme euclidienne)

Exemple 3.5. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Toutes les dérivées directionnelles existent. En effet,

$$D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4} = \begin{cases} \frac{v_2^2}{v_1}, & \text{si } v_1 \neq 0, \\ 0, & \text{si } v_1 = 0. \end{cases}$$

Toutefois, f n'est pas continue en $(0,0)$ car $\lim_{t\to 0} f(t^2, t) = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$.

Comme l'exemple précédent le montre, la notion de dérivée partielle est trop faible et n'implique pas la continuité de la fonction. Si on veut introduire une notion de dérivabilité qui permet d'approcher une fonction au voisinage de $\mathbf{x}_0$ par une fonction affine, on a besoin d'une définition de dérivée plus forte. On rappelle qu'une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est telle que $L(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha L(\mathbf{x}) + \beta L(\mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Elle peut être représentée par la matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (m lignes et n colonnes) telle que $L(\mathbf{e}_i)$ est la $i^{\text{ème}}$ colonne de A, où $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, de telle sorte que $L(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x} = A\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (produit matriciel entre une matrice $m \times n$ et un vecteur colonne dans $\mathbb{R}^n$). Le produit matriciel $A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ donne dans cette formule un vecteur colonne.

Définition 3.6 (Dérivabilité et différentielle)**.** *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\mathbf{x}_0$ un point intérieur de E. On dit que f est différentiable (ou dérivable) en $\mathbf{x}_0$ s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et une fonction $g : E \to \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall \mathbf{x} \in E \quad f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}), \quad \textit{et} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{g(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0.$$

*L'application linéaire L est alors appelée la **différentielle** de f en $\mathbf{x}_0$.*

On remarque que la fonction g satisfait nécessairement $g(\mathbf{x}_0) = 0$ et est continue en $\mathbf{x}_0$.

Notation. *Pour $p \geq 0$, on utilise souvent la notation $g(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^p)$ pour indiquer une fonction g définie au moins sur $B(\mathbf{x}_0, \delta)\backslash\{\mathbf{x}_0\}$ pour un certain $\delta > 0$ et telle que* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{g(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^p} = 0$.

Avec la notation $o(\cdot)$, dans la définition 3.6 on peut ainsi écrire $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$ sur E (ici $p = 1$ et g est définie sur E).

Le théorème suivant met en relation l'application linéaire L de la définition précédente avec la matrice jacobienne (ou bien le gradient) de f en $\mathbf{x}_0$ et montre aussi que la différentielle de f en $\mathbf{x}_0$, si elle existe, est unique.

Théorème 3.7. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ différentiable en $\mathbf{x}_0 \in \mathring{E}$. Alors, toutes les dérivées partielles de f existent en $\mathbf{x}_0$ et la différentielle de f en $\mathbf{x}_0$ est unique, donnée par*

$$L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = Df(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

(produit matriciel entre un vecteur ligne et un vecteur colonne), ce qui s'écrit aussi $L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)^\top \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ (produit matriciel). On peut aussi utiliser le produit scalaire usuel entre deux vecteurs colonnes : $L(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ (produit scalaire). De plus, f est continue en $\mathbf{x}_0$.

Démonstration. On note $a_i = L(\mathbf{e}_i)$ de sorte que $L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n a_i(x_i - x_{0_i})$. Par définition de la différentiabilité en $\mathbf{x}_0$, on a $f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) = f(\mathbf{x}_0) + tL(\mathbf{e}_i) + g(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i)$ et, si on note $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \\
&= L(\mathbf{e}_i) + \lim_{t\to 0} \frac{g(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i)}{t} \\
&= L(\mathbf{e}_i) + \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sign}(t) g(\mathbf{x}_t)}{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_0\|}}_{=0} = a_i,
\end{aligned}$$

donc toutes les dérivées partielles existent et $L(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = Df(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$. De plus, on a

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)(x_i - x_{0_i})}_{=0} + \underbrace{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})}_{=0} = f(\mathbf{x}_0),$$

ce qui montre que f est continue en $\mathbf{x}_0$.

□

Une conséquence immédiate du théorème précédent est que, si $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable en $\mathbf{x}_0 \in \mathring{E}$, alors toutes les dérivées directionnelles existent et $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = Df(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}_0)^\top\mathbf{v}$ (produit matriciel). En effet,

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = L(\mathbf{v}) + \underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{g(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v})}{t}}_{=0} = L(\mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{x}_0)^\top\mathbf{v}.$$

En particulier, $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$ est dans ce cas une application linéaire en $\mathbf{v}$. On a de plus, pour la norme euclidienne,

$$\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| = \max_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n\\ \|\mathbf{v}\|=1}} \nabla f(\mathbf{x}_0)^\top\mathbf{v} = \max_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n\\ \|\mathbf{v}\|=1}} D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0),$$

le maximum étant atteint en $\mathbf{v} = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$ si $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ n'est pas nul. S'il n'est pas nul, le vecteur gradient donne donc la direction de croissance maximale pour la fonction f. On a aussi que toute direction $\mathbf{w} \perp \nabla f(\mathbf{x}_0)$ est une direction de croissance nulle.

Exemple 3.8. *Considérons la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 + y^2$. *Son gradient est donné par* $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)^\top$. *En* $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, *la direction de croissance maximale est* $\mathbf{v} = \frac{\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^\top$ *(norme euclidienne normalisée à* 1 *ici), la direction de croissance minimale est* $\mathbf{v} = -\frac{\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|} = -\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^\top$, *tandis que la direction de croissance nulle est* $\mathbf{w} = \pm\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^\top$.

Enfin, si f est différentiable en $\mathbf{x}_0$, on peut construir l'hyperplan tangent au graph de f en $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$, ainsi que un vecteur normal au graphe de f en $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$.

Définition 3.9. *Soit* $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *différentiable en* $\mathbf{x}_0 \in \mathring{E}$ *et notons* $y_0 = f(\mathbf{x}_0)$ *et* $\mathcal{G}_f = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ \mathbf{x} \in E,\ y = f(\mathbf{x})\}$ *le graphe de* f. *On définie* **hyperplan tangent** *à* $\mathcal{G}_f$ *en* $(\mathbf{x}_0, y_0)$ *le sous-ensemble de* $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\Pi_{(\mathbf{x}_0,y_0)}(\mathcal{G}_f) = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ y = y_0 + \nabla f(\mathbf{x}_0)^\top(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\}$$

Le vecteur

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|^2}}\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \cdots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0), 1\right)^\top \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

est appelé le **vecteur normal** *au graphe de* f *en* $(\mathbf{x}_0, y_0)$.

En effet, on vérifie facilement que le vecteur $\mathbf{n}$ est normal à l'hyperplan tangent $\Pi_{(\mathbf{x}_0,y_0)}(\mathcal{G}_f)$ en $(\mathbf{x}_0, y_0)$, c'est à dire il satisfait

$$\mathbf{n} \cdot ((\mathbf{x}, y) - (\mathbf{x}_0, y_0)) = 0, \qquad \forall (\mathbf{x}, y) \in \Pi_{(\mathbf{x}_0,y_0)}(\mathcal{G}_f).$$

Les définitions de différentiabilité et dérivées partielles/directionnelles s'étendent sans difficultés aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Définition 3.10. *Soit* $\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*,*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^\top = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

noté aussi sous forme ligne (nous préciserons si nécessaire))

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) & \dots & f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) & \dots & f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

et soit $\mathbf{x}_0 \in \mathring{E}$*. On appelle* dérivée partielle de la i-ème composante de $\mathbf{f}$ par rapport à la j-ème variable *en* $\mathbf{x}_0$*, notée* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$*, la quantité*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}_0)}{t},$$

si la limite existe, et matrice jacobienne *de* $\mathbf{f}$ *en* $\mathbf{x}_0$ *la matrice* $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *de composantes* $(D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$*, autrement dit,*

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix},$$

si toutes les dérivées partielles existent.

De façon similaire, on introduit la notion de différentiabilité.

Définition 3.11. *On dit que* $\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est différentiable (ou dérivable) en* $\mathbf{x}_0 \in \mathring{E}$ *s'il existe une application linéaire* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *et une fonction* $\mathbf{g} : E \to \mathbb{R}^m$ *tels que*

$$\forall \mathbf{x} \in E \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

et $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$*, c.-à-d.* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0$.

Si plus généralement $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| = o(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^p)$ dans le sens déjà introduit, on notera simplement $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^p)$. Si $\mathbf{f}$ est différentiable en $\mathbf{x}_0$, alors toutes les dérivées partielles et directionnelles existent, et $\mathbf{f}$ est continue en $\mathbf{x}_0$. De plus, l'application linéaire L est unique et donnée par

$$L(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)(x_j - x_{0_j})\mathbf{e}_i$$

où $\mathbf{e}_i$ est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Ceci s'écrit aussi

$$L(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0),$$

où intervient ici le produit matriciel entre une matrice $\mathbb{R}^{m\times n}$ et un vecteur colonne dans $\mathbb{R}^n$, ce qui donne un vecteur colonne dans $\mathbb{R}^m$. La dérivée de $\mathbf{f}$ dans la direction $\mathbf{v}$ au point $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{v} \mapsto D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = L(\mathbf{v}) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}$, est linéaire en $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (si $\mathbf{f}$ est différentiable en $\mathbf{x}_0$).

La condition de différentiabilité d'une fonction $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$) n'est pas immédiate à vérifier. Heureusement, on a une condition suffisante, facile à vérifier, qui nous permet de conclure si f est différentiable en $\mathbf{x}_0 \in \mathring{E}$. On donne ici la version du résultat pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais le résultat se généralise sans difficulté au cas d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Théorème 3.12. *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\mathbf{x}_0 \in \mathring{E}$. S'il existe $\delta > 0$ tel que $B(\mathbf{x}_0, \delta) \subset E$ et les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ existent pour tout $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$ et sont continues en $\mathbf{x}_0$, alors f est différentiable en $\mathbf{x}_0$.*

Démonstration. On utilise la norme euclidienne et, pour alléger la notation, on renomme $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Pour un $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in B(\mathbf{a}, \delta)$ donné, on introduit la notation $\mathbf{x}^k = (x_1, \ldots, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ de sorte que $\mathbf{x}^n = \mathbf{x}$ et $\mathbf{x}^0 = \mathbf{a}$. Alors, la différence $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})$ peut être écrite comme somme télescopique

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n}(f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{k-1})).$$

Par le théorème des accroissements finis on a que $\forall k = 1, \ldots, n$, il existe un $\theta_k \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{k-1}) &= f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) - f(x_1, \ldots, x_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_{k-1}, a_k + \theta_k(x_k - a_k), a_{k+1}, \ldots, a_n)(x_k - a_k) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}^{k-1} + \theta_k(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}))(x_k - a_k). \end{aligned}$$

Puisque les dérivées partielles sont continues en $\mathbf{a}$, on a que

$$g_k(\mathbf{x}) := \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}^{k-1} + \theta_k(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1})) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \xrightarrow{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} 0.$$

En effet, la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ en $\mathbf{a}$ implique que

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \widetilde{\delta} \in]0, \delta/2] :\ \forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{a}, 2\widetilde{\delta})\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{y}) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})\right| < \epsilon,$$

et de plus, pour $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{k-1} + \theta_k(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1})$ avec $1 \leq k \leq n$, on a

$$\|\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}\| = \|(1-\theta_k)(\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{a}) + \theta_k(\mathbf{x}^k - \mathbf{a})\| \leq \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{x}^k - \mathbf{a}\| \leq 2\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$$

et donc

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \widetilde{\delta} \in]0, \delta/2] :\ \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \widetilde{\delta})\quad |g_k(\mathbf{x})| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})\right| < \epsilon,$$

ce qui montre que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g_k(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $k = 1, \ldots, n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) &= \sum_{k=1}^{n} (f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}^{k-1} + \theta_k(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}))(x_k - a_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})(x_k - a_k) + g_k(\mathbf{x})(x_k - a_k)\right) \\ &= Df(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + g(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

(produit matriciel entre un vecteur ligne et un vecteur colonne), avec $g(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} g_k(\mathbf{x})(x_k - a_k)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|g(\mathbf{x})| \leq (\sum_{k=1}^{n} g_k(\mathbf{x})^2)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ et donc

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{|g(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} \leq \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} g_k(\mathbf{x})^2} = 0$$

ce qui montre que $g(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|)$. □

3.1.1 L'espace C^1

Le théorème 3.12 montre que si toutes les dérivées partielles existent dans un voisinage d'un point intérieur $\mathbf{x}_0$ et sont continues en $\mathbf{x}_0$, alors la fonction est différentiable (et continue) en $\mathbf{x}_0$ et toutes les dérivées directionnelles existent aussi et sont continues.

Définition 3.13 (Espace C^1). *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide. On dit que $f : E \to \mathbb{R}$ est continûment différentiable sur E si toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ pour $i = 1, \ldots, n$, existent et sont continues en tout point $\mathbf{x} \in E$. Dans ce cas on note $f \in C^1(E)$ (f est de classe C^1). De même, on dit que $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^1, $\mathbf{f} \in C^1(E, \mathbb{R}^m)$, si chaque composante de $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ satisfait $f_k \in C^1(E)$, $k = 1, \ldots, m$.*

Grâce au théorème 3.12, si $f \in C^1(E)$ alors f est différentiable en tout point $\mathbf{x}_0 \in E$ (E étant ouvert) et donc elle est aussi continue, c'est-à-dire $f \in C^1(E) \Rightarrow f \in C^0(E)$; de même, on a $C^1(E, \mathbb{R}^m) \subset C^0(E, \mathbb{R}^m)$. De plus, toutes les dérivées directionnelles $D_{\mathbf{v}} f$ existent et sont continues sur E.

On vérifie facilement que $C^1(E)$ a une structure d'espace vectoriel réel. En effet, pour tous $f, g \in C^1(E)$ et toutes constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a $\lambda f + \mu g \in C^1(E)$. On vérifie aussi facilement les règles de dérivation suivantes : Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f, g \in C^1(E)$ et des constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & \lambda f + \mu g \in C^1(E), & D(\lambda f + \mu g)(\mathbf{x}) = \lambda Df(\mathbf{x}) + \mu Dg(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in E, \\ \text{ii)} & fg \in C^1(E), & D(fg)(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})Dg(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in E. \end{array}$$

3.2 Dérivation de fonctions composées

Soit $\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{g} : F \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ avec E, F ouverts non vides. Si $\mathrm{Im}(\mathbf{f}) \subseteq F$, on peut définir la fonction composée

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^p, \quad \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in E.$$

Par composantes :

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)), \\ &\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m), \quad \mathbf{g}(\mathbf{y}) = (g_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_p(y_1, \ldots, y_m)), \\ &\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \Big(g_1(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) \,, \,\ldots\,, \, g_p(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) \Big). \end{aligned}$$

Théorème 3.14. *Soient* $\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbf{g} : F \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *; E, F des ouverts contenant respectivement* $\mathbf{x}_0$ *et* $\mathbf{y}_0$ *;* $\mathrm{Im}(\mathbf{f}) \subseteq F$ *et* $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$*. Si* $\mathbf{f}$ *est différentiable en* $\mathbf{x}_0$ *et* $\mathbf{g}$ *est différentiable en* $\mathbf{y}_0$*, alors* $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^p$ *est différentiable en* $\mathbf{x}_0$ *et*

$$D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

(produit matriciel des matrices jacobiennes). Par composantes on a :

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\} \ \forall j \in \{1, \ldots, n\} \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0).$$

Si de plus $\mathbf{f} \in C^1(E, \mathbb{R}^m)$ *et* $\mathbf{g} \in C^1(F, \mathbb{R}^p)$ *alors* $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(E, \mathbb{R}^p)$.

Démonstration. Par hypothèse on a

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}), \quad \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{g}(\mathbf{y}_0) + D\mathbf{g}(\mathbf{y}_0) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) + \mathbf{R}_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}), \quad \lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{y}_0} \frac{\mathbf{R}_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|} = \mathbf{0}.$$

On écrit

$$\mathbf{R_f}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\mathbf{r_f}(\mathbf{x}) \quad \text{avec} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{r_f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{r_f}(\mathbf{x}_0) := \mathbf{0},$$
$$\mathbf{R_g}(\mathbf{y}) = \|\mathbf{y}-\mathbf{y}_0\|\mathbf{r_g}(\mathbf{y}) \quad \text{avec} \quad \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0} \mathbf{r_g}(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{r_g}(\mathbf{y}_0) := \mathbf{0}.$$

On veut montrer qu'il existe une application linéaire $\mathbf{L}_\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et une fonction $\mathbf{R}_\varphi : E \to \mathbb{R}^p$ tels que

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0) + \mathbf{L}_\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \mathbf{R}_\varphi(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{R}_\varphi(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = \mathbf{0}.$$

On a :

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) &= \mathbf{g}\Big(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \overbrace{D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\mathbf{r_f}(\mathbf{x})}^{\mathbf{h}(\mathbf{x})}\Big)\\
&= \mathbf{g}(\mathbf{y}_0) + D\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)\cdot\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|\mathbf{r_g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\\
&= \mathbf{g}(\mathbf{y}_0) + D\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)\cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \underbrace{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|D\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)\cdot\mathbf{r_f}(\mathbf{x})}_{\mathbf{A}(\mathbf{x})} + \underbrace{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|\mathbf{r_g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))}_{\mathbf{B}(\mathbf{x})}.\end{aligned}$$

Il faut montrer que $\mathbf{R}_\varphi(\mathbf{x}) := \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})$ satisfait $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{R}_\varphi(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = \mathbf{0}$. Pour $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ on a

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{A}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \|D\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)\cdot\mathbf{r_f}(\mathbf{x})\| \le |||D\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)||| \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \|\mathbf{r_f}(\mathbf{x})\| = 0,$$

où on a noté $|||C|||$ la norme matricielle $|||C||| = \sup_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m\\ \mathbf{y}\neq\mathbf{0}}} \frac{\|C\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} < +\infty$ pour $C \in \mathbb{R}^{p\times m}$ (et on utilise finalement le théorème des deux gendarmes).
Pour $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ on a pour tout $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x} \in E$

$$\begin{aligned}\frac{\|\mathbf{B}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} &= \frac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}\|\mathbf{r_g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\|\\
&\le \frac{\|D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\| + \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\|\mathbf{r_f}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}\|\mathbf{r_g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\|\\
&\le (|||D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)||| + \|\mathbf{r_f}(\mathbf{x})\|)\|\mathbf{r_g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\|\end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{f}$ est continue en $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{r_g}$ en $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, la composée $\mathbf{r_g}\circ\mathbf{f}$ est continue en $\mathbf{x}_0$. D'où $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{r_g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{r_g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{r_g}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$. D'autre part $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{r_f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (par hypothèse) et on conclut que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{B}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} \le (|||D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)||| + \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \|\mathbf{r_f}(\mathbf{x})\|) \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \|\mathbf{r_g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\| = 0.$$

On a donc montré que

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \mathbf{R}_\varphi(\mathbf{x}) \quad \text{où} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{R}_\varphi(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = \mathbf{0}.$$

On conclut donc que $\boldsymbol{\varphi}$ est différentiable en $\mathbf{x}_0$ et

$$D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Si maintenant $\mathbf{f} \in C^1(E, \mathbb{R}^m)$ et $\mathbf{g} \in C^1(F, \mathbb{R}^p)$, alors chaque composante des matrices $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ et $D\mathbf{g}(\mathbf{y})$ est une fonction continue de $\mathbf{x}$ (resp. $\mathbf{y}$) et $D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ est continue en $\mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in E$. Donc $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(E, \mathbb{R}^p)$. □

Remarque 3.15. *Dans cette preuve, on a utilisé la norme matricielle* $|||C||| = \sup_{\substack{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m \\ \mathbf{y}\neq \mathbf{0}}} \frac{\|C\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} < +\infty$ *pour* $C \in \mathbb{R}^{p\times m}$. *C'est effectivement une norme sur l'espace vectoriel des matrices* $\mathbb{R}^{p\times m}$*, appelée plus spécifiquement la norme "spectrale". Il y a d'autres normes matricielles possibles sur* $\mathbb{R}^{p\times m}$.

Exemple 3.16. *Soient* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *et* $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *donnés par*

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} xy \\ x + 2y \\ \sin x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(u, v, w) = \begin{bmatrix} u + w \\ v^2 \end{bmatrix},$$

avec matrices jacobiennes

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 1 & 2 \\ \cos x & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \quad D\mathbf{g}(u, v, w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

Alors,

$$\boldsymbol{\varphi}(x, y) = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} xy + \sin x \\ (x + 2y)^2 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

et

$$D\boldsymbol{\varphi}(x, y) = \begin{bmatrix} y + \cos x & x \\ 2(x + 2y) & 4(x + 2y) \end{bmatrix} = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(x, y)) \cdot D\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & x \\ 1 & 2 \\ \cos x & 0 \end{bmatrix}.$$

Un cas particulier du théorème 3.14 est celui de la composition d'une fonction $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe C^1 sur l'ouvert non vide E et un chemin dans E, $\boldsymbol{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \to E$, I ouvert non vide et $t \mapsto \boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$, avec $\gamma_i \in C^1(I)$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Dans ce cas, la fonction composée $\varphi = f \circ \boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi(t) = f(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ est dérivable sur I, $\varphi \in C^1(I)$ et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(t) &= Df(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot D\boldsymbol{\gamma}(t) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{\gamma}(t)), & \ldots, & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{\gamma}(t))\dot{\gamma}_i(t). \end{aligned}$$

La quantité $\frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{d}{dt}f(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ est appelée la dérivée totale de f le long du chemin $\boldsymbol{\gamma}(t)$.

3.3 Théorème des accroissements finis

On rappelle d'abord le théorème des accroissements finis pour une fonction réelle d'une seule variable réelle : soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. On vise à généraliser ce résultat pour des fonctions $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ou $\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de plusieurs variables réelles.

On introduit la notation suivante : pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, on note $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ le segment fermé d'origine $\mathbf{x}$ et d'extrémité $\mathbf{y}$: $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{z} = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}),\ t \in [0, 1]\}$ et par $]\mathbf{x}, \mathbf{y}[$ le segment "ouvert" $]\mathbf{x}, \mathbf{y}[= \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{z} = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}),\ t \in]0, 1[\}$ (si $n \geq 2$, $]\mathbf{x}, \mathbf{y}[$ n'est ni ouvert ni fermé).

Théorème 3.17. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur E. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ distincts sont tels que $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset E$, alors il existe $\mathbf{z} \in]\mathbf{x}, \mathbf{y}[$, tel que*

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

(produit matriciel entre un vecteur ligne et un vecteur colonne).

Démonstration. On pose $g(t) = f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$ avec $t \in [0, 1]$. g est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$ (composition de fonctions dérivables $f(\mathbf{v}(t))$, où $\mathbf{v}(t) = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})$), et par la règle de dérivation d'une composée, $g'(t) = Df(\mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{v}'(t) = Df(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})$. Par le théorème des accroissements finis pour des fonctions d'une seule variable, il existe $\theta \in]0, 1[$ t.q. $g(1) - g(0) = g'(\theta)$ ce qui équivaut à

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) &= Df(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}), \qquad \theta \in]0, 1[\\ &= Df(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}), \qquad \mathbf{z} = \mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in]\mathbf{x}, \mathbf{y}[. \end{aligned}$$

□

Dans la démonstration ci-dessus on a $g'(t) = Df(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})$. Si on suppose, maintenant, que f est de classe C^1, on a $g \in C^1(]0, 1[)$ et $g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt$. On en déduit

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \int_0^1 Df(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})dt. \tag{3.1}$$

Considérons maintenant une fonction $\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ avec E ouvert non vide et $\mathbf{f}$ dérivable sur E. L'analogue du théorème des accroissements finis pour une telle fonction vectorielle est *en défaut* ! En fait, on peut appliquer le théorème à chaque composante $f_k,\ k = 1, \ldots, m$ de $\mathbf{f}$. Donc il existe $\mathbf{z}_k \in]\mathbf{x}, \mathbf{y}[,\ k = 1, \ldots, m$ tels que

$$f_k(\mathbf{y}) - f_k(\mathbf{x}) = Df_k(\mathbf{z}_k) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Toutefois, on n'a aucune garantie que les $\mathbf{z}_k$ coïncident. On ne peut donc pas trouver, en général, un seul $\mathbf{z}$ pour lequel $\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})$ (produit matriciel entre une matrice $m \times n$ et un vecteur colonne dans $\mathbb{R}^n$, ce qui donne un vecteur colonne dans $\mathbb{R}^m$). Néanmoins, la formule (3.1) se généralise pour toute fonction vectorielle $\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1.

Lemme 3.18. *Soit* $\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *de classe* C^1 *sur* E *ouvert non vide et* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ *tels que* $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset E$. *Alors*

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \int_0^1 D\mathbf{f}(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) dt.$$

Ici l'intégrale d'une fonction continue $[0, 1] \to \mathbb{R}^m$ est comprise comme le vecteur dans $\mathbb{R}^m$ obtenu en prenant l'intégrale de chaque composante (chaque composante étant une fonction continue $[0, 1] \to \mathbb{R}$).

Le Lemme précédent, demande que la fonction $\mathbf{f}$ soit de classe C^1 sur E. On peut obtenir une *version faible* du théorème des accroissements finis qui demande uniquement que les dérivées partielles existent et soient bornées sur le segment $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

Lemme 3.19. *Soit* $\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *dérivable sur* E *ouvert non vide et* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ *distincts tels que* $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \in E$. *S'il existe* $M > 0$ *tel que* $|||D\mathbf{f}(\mathbf{z})||| \leq M$, $\forall \mathbf{z} \in]\mathbf{x}, \mathbf{y}[$, *alors*

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq M\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

Démonstration. Le résultat est évident si $\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Supposons donc $\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ et considérons $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ comme un vecteur colonne, $\mathbf{u} \in E$. Soit un vecteur ligne $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ fixé et considérons la fonction $f_{\mathbf{w}} : E \to \mathbb{R}$ définie par $f_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}) = \mathbf{w}\mathbf{f}(\mathbf{u})$ pour $\mathbf{u} \in E$, où apparaît le produit matriciel entre $\mathbf{w}$ et $\mathbf{f}(\mathbf{u})$. On sait alors qu'il existe $\mathbf{z} \in]\mathbf{x}, \mathbf{y}[$ (qui peut dépendre de $\mathbf{w}$) tel que $f_{\mathbf{w}}(\mathbf{y}) - f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = Df_{\mathbf{w}}(\mathbf{z})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, c'est-à-dire

$$\mathbf{w}(\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{w}D\mathbf{f}(\mathbf{z})(\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Choisissons $\mathbf{w} = (\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}))^\top$, ce qui donne

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2 = \mathbf{w}D\mathbf{f}(\mathbf{z})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leq \|\mathbf{w}\| \, \|D\mathbf{f}(\mathbf{z})(\mathbf{y} - \mathbf{x})\|$$

$$\leq \|\mathbf{w}\| \, |||D\mathbf{f}(\mathbf{z})||| \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\| \, M \, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|,$$

et donc $\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq M\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$. □

Chapitre 4

Dérivées d'ordres supérieurs

4.1 Dérivées secondes

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ et un indice $j \in \{1, \ldots, n\}$ fixé, tels que $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ existe en tout $\mathbf{x} \in E$. On considère maintenant la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_j} : E \to \mathbb{R}$ et soit $k \in \{1, \ldots, n\}$ fixé. Si cette fonction admet une dérivée partielle par rapport à x_k en tout $\mathbf{x} \in E$, on peut définir la dérivée partielle seconde $\frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_k} : E \to \mathbb{R}$. On utilise la notation $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\mathbf{x}) := \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_k}(\mathbf{x})$. Pour $k = j$ on utilise la notation $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_j}(\mathbf{x})$.

Définition 4.1 (espace $C^2(E)$)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide. On dit que $f : E \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, $f \in C^2(E)$, si toutes les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : E \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$ existent et sont continues sur E.*

Définition 4.2 (matrice hessienne)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide et $f \in C^2(E)$. On appelle matrice hessienne de f en $\mathbf{x} \in E$ la matrice $H_f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$:*

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

On peut aussi définir les dérivées directionnelles mixtes : soit $f : E \to \mathbb{R}$ différentiable sur E et $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})^\top \mathbf{v}$ la dérivée directionnelle de f dans la direction fixée $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{v}\| = 1$ (norme euclidienne). Si $D_{\mathbf{v}} f : E \to \mathbb{R}$ admet une dérivée directionnelle dans la direction fixée $\mathbf{w}$ en tout point $\mathbf{x} \in E$, on note

$$D^2_{\mathbf{wv}} f(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{w}}(D_{\mathbf{v}} f)(\mathbf{x})$$

la dérivée directionnelle mixte.

Lemme 4.3. *Soit $f \in C^2(E)$, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide et $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = 1$. Alors*

$$D^2_{\mathbf{wv}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^\top H_f(\mathbf{x})\mathbf{v},$$

où il y a deux produits matriciels, et $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont des vecteurs colonnes. Ceci s'écrit aussi

$$D^2_{\mathbf{wv}} f(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) v_j w_i.$$

Démonstration. Puisque $f \in C^2(E)$, toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}, j = 1, \ldots, n$ sont continues sur E et f est différentiable sur E. Donc $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) v_j$ et $D_{\mathbf{v}} f : E \to \mathbb{R}$ est continue. De plus, ses dérivées partielles $\frac{\partial (D_{\mathbf{v}} f)}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$ existent et sont continues sur E car

$$\frac{\partial (D_{\mathbf{v}} f)}{\partial x_i} = \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} v_j \right)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} v_j$$

et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in C^0(E)$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$ puisque $f \in C^2(E)$. Donc $D_{\mathbf{v}} f \in C^1(E)$ et

$$D_{\mathbf{w}}(D_{\mathbf{v}} f)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (D_{\mathbf{v}} f)}{\partial x_i}(\mathbf{x}) w_i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) v_j w_i = \mathbf{w}^\top H_f(\mathbf{x})\mathbf{v}.$$

□

Exemple 4.4. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 y$, et considérons les deux directions $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $\mathbf{w} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. On a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Donc

$$Df(x, y) = (2xy, x^2), \qquad H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$D^2_{\mathbf{wv}} f(x, y) = \mathbf{w}^\top H_f(x, y)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x(1 - \sqrt{3}) + y).$$

On remarque de plus que $D^2_{\mathbf{wv}} f(x, y) = D^2_{\mathbf{vw}} f(x, y)$ puisque H_f est symétrique.

Dans l'exemple précédent on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Sous des conditions assez générales, on aura toujours $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Ceci est garanti par l'important résultat suivant :

Théorème 4.5 (de Schwarz)**.** *Soit deux indices fixés* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$*,* $E \subset \mathbb{R}^n$ *ouvert non vide avec* $n \geq 2$*,* $\mathbf{x} \in E$ *fixé et* $f : E \to \mathbb{R}$ *telle que* $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *existent dans* E *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *sont continues en cet* $\mathbf{x} \in E$*. Alors* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x})$*.*

Démonstration. Soient $s, t > 0$ fixés suffisamment petits de sorte que le rectangle rempli fermé de sommets $\mathbf{x}, \mathbf{x} + s\mathbf{e}_i, \mathbf{x} + t\mathbf{e}_j, \mathbf{x} + s\mathbf{e}_i + t\mathbf{e}_j$ est contenu dans E. Ceci est toujours possible car $\mathbf{x}$ est un point intérieur de E. On considère la quantité

$$\Delta(s,t) = f(\mathbf{x} + s\mathbf{e}_i + t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x} + s\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) + f(\mathbf{x})$$

et les deux fonctions auxiliaires

$$g(\xi) = f(\mathbf{x}+\xi\mathbf{e}_i+t\mathbf{e}_j)-f(\mathbf{x}+\xi\mathbf{e}_i),\ \xi \in [0,s], \quad h(\xi) = f(\mathbf{x}+s\mathbf{e}_i+\xi\mathbf{e}_j)-f(\mathbf{x}+\xi\mathbf{e}_j),\ \xi \in [0,t].$$

La fonction g est dérivable dans $]0, s[$ par hypothèse ($\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe dans E) et donc, par le théorème des accroissements finis, il existe $\tilde{s} \in]0, s[$ tel que

$$g(s) - g(0) = g'(\tilde{s})s = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} + \tilde{s}\mathbf{e}_i + t\mathbf{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} + \tilde{s}\mathbf{e}_i)\right) s.$$

Soit maintenant

$$\varphi(\eta) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} + \tilde{s}\mathbf{e}_i + \eta\mathbf{e}_j), \quad \eta \in [0,t].$$

La fonction φ est dérivable dans $]0, t[$ car $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existe dans E, et donc il existe $\tilde{t} \in]0, t[$ tel que

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \varphi'(\tilde{t})t = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x} + \tilde{s}\mathbf{e}_i + \tilde{t}\mathbf{e}_j)t.$$

On a finalement

$$\Delta(s,t) = g(s) - g(0) = g'(\tilde{s})s = \Big(\varphi(t) - \varphi(0)\Big)s = \varphi'(\tilde{t})st = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x} + \tilde{s}\mathbf{e}_i + \tilde{t}\mathbf{e}_j)st.$$

On répète maintenant les mêmes arguments pour la fonction h :

$$\exists \hat{t} \in]0,t[\ : \quad \Delta(s,t) = h(t) - h(0) = h'(\hat{t})t = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x} + s\mathbf{e}_i + \hat{t}\mathbf{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x} + \hat{t}\mathbf{e}_j)\right) t$$

Soit $\psi(\eta) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x} + \eta\mathbf{e}_i + \hat{t}\mathbf{e}_j),\ \eta \in [0, s]$, alors

$$\exists \hat{s} \in]0,s[\ : \quad \psi(s) - \psi(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x} + s\mathbf{e}_i + \hat{t}\mathbf{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x} + \hat{t}\mathbf{e}_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x} + \hat{s}\mathbf{e}_i + \hat{t}\mathbf{e}_j)s$$

et donc

$$\Delta(s,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x} + \hat{s}\mathbf{e}_i + \hat{t}\mathbf{e}_j)st = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x} + \tilde{s}\mathbf{e}_i + \tilde{t}\mathbf{e}_j)st.$$

Si on prend maintenant $s = t \to 0^+$, on obtient $\hat{s}, \tilde{s} \to 0^+$ et $\hat{t}, \tilde{t} \to 0^+$. Puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont continues en $\mathbf{x}$, on a

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{1}{s^2} \Delta(s, s) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}).$$

$\square$

Corollaire 4.6. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide avec $n \geq 2$ et $f \in C^2(E)$. Alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in E, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Le résultat du théorème de Schwarz n'est pas forcément vrai sans l'hypothèse de continuité des dérivées partielles secondes, comme l'exemple suivant le montre.

Exercice 4.7. *Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

On vérifie que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent mais elles ne sont pas égales.

Grâce au théorème de Schwarz on a que si $f : E \to \mathbb{R}$ admet toutes les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : E \to \mathbb{R}$ $i, j = 1, \ldots, n$ et qu'elles sont continues en $\mathbf{x} \in E$, alors $H_f(\mathbf{x})$ est une matrice symétrique. Donc, en fait, il suffit de calculer seulement $\frac{n(n+1)}{2}$ dérivées partielles secondes au lieu de n^2. Si de plus f est de classe $C^2(E)$, il s'ensuit aussi que les dérivées directionnelles secondes $D_{\mathbf{vw}} f(\mathbf{x})$ existent pour tout $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ de norme 1 et que $D_{\mathbf{vw}} f(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{wv}} f(\mathbf{x})$.

4.2 Dérivées partielles d'ordres supérieurs à 2

Soit $f : E \to \mathbb{R}$, avec $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, et $(i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, n\}^p$. On généralise facilement la notion de dérivée partielle d'ordre p de f par rapport aux variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}$:

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \partial x_{i_{p-1}} \ldots \partial x_{i_1}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \left(\frac{\partial \left(\ldots \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \ldots \right)}{\partial x_{i_{p-1}}} \right)}{\partial x_{i_p}}(\mathbf{x}).$$

Définition 4.8 (espace $C^p(E)$)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide et $f : E \to \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^p, $f \in C^p(E)$, si toutes les dérivées partielles d'ordre p, $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}} : E \to \mathbb{R}$, existent pour tout $(i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, n\}^p$ et sont continues sur E.*

Grâce au théorème de Schwarz, si $f \in C^p(E)$, alors

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}} = \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial x_{i_{\sigma(p)}}}$$

où $\sigma(1), \dots, \sigma(p)$ est une permutation arbitraire des indices $1, \dots, p$. Autrement dit, l'ordre de dérivation n'est pas importante si $f \in C^p(E)$.

On remarque que si $f \in C^p(E)$, alors $f \in C^q(E)$, $\forall 0 \le q \le p$, c.-à-d., $C^p(E) \subset C^{p-1}(E) \subset \cdots \subset C^1(E) \subset C^0(E)$.

Notation par multi-entiers. Considérons une dérivée partielle d'ordre p, $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}}$. Soit $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ où l'entier $\alpha_j \ge 0$ est le nombre de fois que l'indice $j \in \{1, \dots, n\}$ apparaît dans la suite $i_1, \dots, i_p$. On note $|\boldsymbol{\alpha}| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ (dans ce cas $|\boldsymbol{\alpha}| = p$). On utilise souvent la notation

$$\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}}$$

où $\partial x_j^{\alpha_j}$ signifie qu'on dérive α_j fois par rapport à x_j. Cette notation ne distingue pas l'ordre de dérivation.

Exemple 4.9. $f(\mathbf{x}) = x_1 x_2^2 x_3^3$. *Calculons* $\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}$ *pour* $\boldsymbol{\alpha} = (1,2,0)$ *et* $\boldsymbol{\alpha} = (1,1,1)$.

$$\boldsymbol{\alpha} = (1,2,0) \Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_2 \partial x_1} = 2x_3^3$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} = (1,1,1) \Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_2} \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_1} = 6x_2 x_3^2 \end{aligned}$$

Remarquons que le nombre de dérivées partielles d'ordre $|\boldsymbol{\alpha}|$ qui correspondent à un multi-entier $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n$, est

$$\binom{|\boldsymbol{\alpha}|}{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{|\boldsymbol{\alpha}|!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}.$$

4.3 Développement limité et Formule de Taylor

Rappelons d'abord la formule de Taylor pour une fonction d'une seule variable réelle définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$ et p fois continûment dérivable sur I, $f \in C^p(I)$: $\forall x, y \in I$

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{f''(x)}{2}(y-x)^2 + \cdots + \frac{f^{(p)}(x)}{p!}(y-x)^p + R_p(y) \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k}_{=T_x^p(y)} + R_p(y) \end{aligned}$$

où $T_x^p(y) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k$ est le polynôme de Taylor de degré p et $R_p(y)$ est le reste de la formule de Taylor t.q. $\lim_{y\to x} \frac{R_p(y)}{|y-x|^p} = 0$ (ou avec notation "petit o", $R_p(y) = o(|y-x|^p)$). La formule de Taylor donne donc le développement limité d'ordre p de la fonction f autour de x. Si, de plus, la dérivée d'ordre $p+1$ existe sur I et est continue, alors le reste de la formule peut être caractérisé par

Reste de Lagrange : $$R_p(y) = \frac{f^{(p+1)}(x+t(y-x))}{(p+1)!}(y-x)^{p+1} \quad \text{pour un } t \in]0,1[,$$

Reste (sous forme d') intégrale : $$R_p(y) = \int_0^1 (1-t)^p \frac{f^{(p+1)}(x+t(y-x))}{p!}(y-x)^{p+1} dt.$$

Considérons maintenant le **cas $n \geq 2$**. Pour un multi-entier $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on utilise les notations suivantes :

$$\boldsymbol{\alpha}! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!, \qquad \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}.$$

Un polynôme de degré p dans les variables $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ s'écrit

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^n \\ |\boldsymbol{\alpha}|\leq p}} c_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad c_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{R}.$$

Définition 4.10. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $\mathbf{x} \in \mathring{E}$. S'il existe $\delta > 0$, un polynôme $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \mapsto q(\mathbf{y}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^n \\ |\boldsymbol{\alpha}|\leq p}} c_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}}$ de degré p en $\mathbf{y}$ et une fonction $R_p : E \to \mathbb{R}$ tels que*

$$f(\mathbf{y}) = q(\mathbf{y}) + R_p(\mathbf{y}), \qquad \forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta) \cap E \tag{4.1}$$

et $\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} \frac{R_p(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^p} = 0$, alors on dit que (4.1) est un développement limité d'ordre p de f autour de $\mathbf{x}$.

Comme pour les fonctions d'une seule variable réelle, si un développement limité d'ordre p de f autour d'un point existe, alors il est unique et peut être construit en utilisant la formule de Taylor. On va détailler sa dérivation pour une fonction $f \in C^{p+1}(E)$, avec $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide.

Soit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ tels que le segment $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{\mathbf{z} = \mathbf{x} + t(\mathbf{y}-\mathbf{x}),\ t \in [0,1]\} \subset E$. On note $g(t) = f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y}-\mathbf{x}))$, qui est bien définie et de classe C^{p+1} sur un intervalle ouvert $I =]-\delta, 1+\delta[$ qui contient $[0,1]$, grâce au fait que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ sont des points intérieurs. L'idée pour dériver une formule de Taylor pour f est d'utiliser la formule de Taylor pour $g : I \to \mathbb{R}$:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2}t^2 + \cdots + \frac{g^p(0)}{p!}t^p + R_p^g(t), \quad t \in [0,1]$$

où

$$R_p^g(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^p}{p!} g^{(p+1)}(\tau) d\tau = \frac{g^{(p+1)}(\theta)}{(p+1)!} t^{p+1} \quad \text{pour un } \theta \in]0,t[.$$

Or, si on note $\mathbf{x}_t = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})$:

$$\begin{aligned}
g(t) &= f(\mathbf{x}_t) \\
g'(t) &= \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(y_{i_1} - x_{i_1}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=1} \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{x}_t)(\mathbf{y} - \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}} \\
g''(t) &= \sum_{i_2=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(y_{i_1} - x_{i_1}) \right) (y_{i_2} - x_{i_2}) \\
&= \sum_{i_1, i_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(\mathbf{x}_t)(y_{i_1} - x_{i_1})(y_{i_2} - x_{i_2}) \\
&= \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=2} \frac{2!}{\boldsymbol{\alpha}!} \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{x}_t)(\mathbf{y} - \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}} \\
&\vdots \\
g^{(p)}(t) &= \sum_{i_1, \ldots, i_p=1}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}}(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(y_{i_1} - x_{i_1}) \cdots (y_{i_p} - x_{i_p}) \\
&= \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=p} \frac{p!}{\boldsymbol{\alpha}!} \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{x}_t)(\mathbf{y} - \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Finalement, on peut écrire la formule de Taylor

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{y}) = g(1) &= \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + R_p^g(1) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k} \frac{k!}{\boldsymbol{\alpha}!} \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}} + R_p(\mathbf{y}) \\
&= \underbrace{\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \le p} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}}}_{=T_{\mathbf{x}}^p(\mathbf{y})} + R_p(\mathbf{y}),
\end{aligned}$$

où on identifie :

$$T_{\mathbf{x}}^p(\mathbf{y}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \le p} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}} \qquad \textbf{(polynôme de Taylor de degré } p\textbf{)}$$

et

$$\begin{aligned}
R_p(\mathbf{y}) &= \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=p+1} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} \frac{\partial^{(p+1)} f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(\mathbf{y} - \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}} \quad \text{pour un } \theta \in]0,1[\quad \textbf{(reste de Lagrange)}, \\
&= \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=p+1} \frac{(p+1)}{\boldsymbol{\alpha}!} \int_0^1 (1-t)^p \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(\mathbf{y} - \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}} dt \qquad \textbf{(reste intégrale)}.
\end{aligned}$$

4.3.1 Formule de Taylor pour des fonctions vectorielles

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, $\mathbf{f} \in C^{p+1}(E, \mathbb{R}^m)$ et $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ t.q. $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset E$. On peut appliquer la formule de Taylor à chaque composante f_k de $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$: il existe $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m \in]0, 1[$ t.q.

$$f_k(\mathbf{y}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq p} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f_k}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}} + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| = p+1} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} \frac{\partial^{(p+1)} f_k}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{x} + \theta_k(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(\mathbf{y} - \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Toutefois, en général, les $\theta_1, \ldots, \theta_m$ ne sont pas égaux entre eux et on ne peut pas trouver un seul $\theta \in]0, 1[$ tel que $\mathbf{R}_p(\mathbf{y}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| = p+1} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} \frac{\partial^{(p+1)} \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(\mathbf{y} - \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}}$. D'un autre côté, la formule de Taylor avec reste intégrale est valable aussi pour des fonctions vectorielles :

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq p} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}} + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| = p+1} \frac{p+1}{\boldsymbol{\alpha}!} \int_0^1 (1-t)^p \frac{\partial^{(p+1)} \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(\mathbf{y} - \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}} dt$$

et fournit le développement limité d'ordre p de $\mathbf{f}$ autour de $\mathbf{x}$.

Chapitre 5

Intégrales qui dépendent de paramètres

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle avec une infinité de points et $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide. On considère une fonction $f : I \times E \to \mathbb{R}$, $(t, \mathbf{x}) \mapsto f(t, \mathbf{x})$ telle que, pour tout $\mathbf{x} \in E$, l'intégrale (éventuellement généralisée)

$$g(\mathbf{x}) = \int_I f(t, \mathbf{x})dt$$

existe. On se pose la question si certaines propriétés de la fonction $g : E \to \mathbb{R}$ comme, par exemple, la continuité ou la dérivabilité, peuvent se déduire de celles de f et si on peut passer les opérations de limite et dérivation sous le signe de intégrale :

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) \stackrel{?}{=} \int_I \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(t, \mathbf{x})dt, \qquad \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \stackrel{?}{=} \int_I \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, \mathbf{x})dt.$$

Que ceci ne soit pas toujours le cas est illustré par l'exemple suivant.

Exemple 5.1. *Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t, x) = x^2 e^{-x^2 t}$. On considère l'intégrale généralisée*

$$g(x) = \int_0^\infty f(t, x)dt = \int_0^\infty x^2 e^{-x^2 t}dt, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Clairement, f est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et l'intégrale généralisée $g(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. Toutefois, par calcul direct, on trouve

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ce qui montre que la fonction g n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to 0} \int_0^\infty f(t, x)dt \neq \int_0^\infty f(t, 0)dt$.

5.1 Intégrales sur un intervalle fermé et borné

Le fait que dans l'exemple 5.1 la continuité de la fonction f n'implique pas la continuité de la fonction g est dû à un manque d'uniformité dans la continuité de f. On va d'abord se restreindre au cas où le domaine d'intégration est un intervalle fermé et borné (compact).

Théorème 5.2. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $E \subset \mathbb{R}^n$* ouvert *non vide. Si $f : [a, b] \times E \to \mathbb{R}$ est* continue*, alors la fonction $g(\mathbf{x}) = \int_a^b f(t, \mathbf{x})dt$ est bien définie $\forall \mathbf{x} \in E$ et continue sur E. En particulier, pour tout $\mathbf{x}_0 \in E$:*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \int_a^b f(t, \mathbf{x}_0)dt = \int_a^b \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(t, \mathbf{x})dt.$$

Démonstration. Pour tout $\mathbf{x} \in E$, la fonction $t \mapsto f_{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x})$ est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ donc uniformément continue et bornée, et l'intégrale $g(\mathbf{x}) = \int_a^b f_{\mathbf{x}}(t)dt$ existe. On montre que la fonction $g : E \to \mathbb{R}$ est continue.

Soit $\mathbf{x}_0 \in E$ (point intérieur puisque E est ouvert). Alors il existe $\eta > 0$ tel que $\overline{B}(\mathbf{x}_0, \eta) \subset E$ et $f : [a, b] \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, \eta) \to \mathbb{R}$ (restriction de f à $[a, b] \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, \eta)$) est uniformément continue, puisque $[a, b] \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, \eta)$ est compact. Donc, pour $\epsilon > 0$ donné, il existe $\delta \in]0, \eta[$ tel que, pour tous $(t, \mathbf{x}), (s, \mathbf{y}) \in [a, b] \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, \eta)$,

$$\Big(\ |t - s| \leq \delta \text{ et } \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta\ \Big) \ \Rightarrow\ |f(t, \mathbf{x}) - f(s, \mathbf{y})| \leq \frac{\epsilon}{b - a}$$

et, en particulier, si on prend $s = t$ et $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0$

$$\forall (t, \mathbf{x}) \in [a, b] \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, \delta) \quad |f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{x}_0)| \leq \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Ainsi, pour tout $\mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, \delta)$

$$\begin{aligned} |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| &= \left| \int_a^b (f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{x}_0))dt \right| \\ &\leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b - a} dt = \epsilon \end{aligned}$$

ce qui prouve la continuité de g en $\mathbf{x}_0 \in E$. Puisque $\mathbf{x}_0$ est arbitraire, g est continue sur E. □

La démonstration précédente utilise la *continuité uniforme* de f sur $[a, b] \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, \eta)$. Le théorème est encore valable si

— *E est fermé*, car pour tous $\mathbf{x}_0 \in E$ et $\eta > 0$, $[a, b] \times \Big(\overline{B}(\mathbf{x}_0, \eta) \cap E\Big)$ est compact et f est uniformément continue sur $[a, b] \times \Big(\overline{B}(\mathbf{x}_0, \eta) \cap E\Big)$;

— *E est un sous-ensemble quelconque et f est uniformément continue sur $[a, b] \times E$.*

Exercice 5.3. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{e^{x^2 y}}{x^2+y^2+1}$, et $g(y) = \int_{-1}^1 f(x, y)dx$. Calculer* $\lim_{y\to 0} g(y)$.

On considère maintenant la dérivabilité de la fonction $g(\mathbf{x}) = \int_a^b f(t, \mathbf{x})dt$.

Théorème 5.4. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $E \subset \mathbb{R}^n$* ouvert *non vide, $f : [a,b] \times E \to \mathbb{R}$ continue et $g(\mathbf{x}) = \int_a^b f(t,\mathbf{x})dt$, $\forall \mathbf{x} \in E$. Soit encore $i \in \{1,\dots,n\}$ fixé. Si $\frac{\partial f}{\partial x_i} : [a,b]\times E \to \mathbb{R}$ existe et est continue, alors $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ existe pour tout $\mathbf{x} \in E$ et $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x})dt$ est continue en tout $\mathbf{x} \in E$.*

Démonstration. Soit $\mathbf{x}_0 \in E$ arbitraire. Puisque E est ouvert, $\exists \eta > 0$ t.q. $\overline{B}(\mathbf{x}_0, \eta) \subset E$ et $\frac{\partial f}{\partial x_i}\big|_{[a,b]\times\overline{B}(\mathbf{x}_0,\eta)}$ est uniformément continue. Donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta \in]0,\eta]$ tel que

$$\forall \mathbf{y} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, \delta)\ \forall t \in [a,b] \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{y}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x}_0)\right| \le \frac{\epsilon}{b-a}.$$

On a pour $0 < |s| \le \delta$

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{e}_i) - g(\mathbf{x}_0)}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x}_0)dt\right| &= \left|\int_a^b \left(\frac{f(t,\mathbf{x}_0+s\mathbf{e}_i) - f(t,\mathbf{x}_0)}{s} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x}_0)\right)dt\right| \\ &= \left|\int_a^b \frac{1}{s}\left(\int_0^s \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x}_0+\sigma\mathbf{e}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x}_0)\right)d\sigma\right)dt\right| \\ &\le \int_a^b \frac{1}{|s|}\int_0^s \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x}_0+\sigma\mathbf{e}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x}_0)d\sigma\right|dt \le \epsilon,\end{aligned}$$

ce qui montre que $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \lim_{s\to 0}\frac{g(\mathbf{x}_0+s\mathbf{e}_i)-g(\mathbf{x}_0)}{s}$ existe et vaut $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x}_0)dt$. Puisque $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est continue sur $[a,b]\times E$, $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ est continue sur E.

□

5.2 Intégrales avec des bornes variables

Considérons maintenant le cas où les bornes d'intégration dépendent aussi de $\mathbf{x}$:

$$g(\mathbf{x}) = \int_{a(\mathbf{x})}^{b(\mathbf{x})} f(t,\mathbf{x})dt$$

avec $a, b : E \subset \mathbb{R}^n \to]\alpha,\beta[\subset \mathbb{R}$ et $f :]\alpha,\beta[\times E \to \mathbb{R}$.

Théorème 5.5. *Soit $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, $a, b \in C^1(E)$ tels que $\mathrm{Im}(a), \mathrm{Im}(b) \subset]\alpha,\beta[$ et $f :]\alpha,\beta[\times E \to \mathbb{R}$ continue, avec dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i} :]\alpha,\beta[\times E \to \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,n$ continues. Alors $g \in C^1(E)$ et*

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial b}{\partial x_i}(\mathbf{x})f(b(\mathbf{x}),\mathbf{x}) - \frac{\partial a}{\partial x_i}(\mathbf{x})f(a(\mathbf{x}),\mathbf{x}) + \int_{a(\mathbf{x})}^{b(\mathbf{x})} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x})dt.$$

Démonstration. Soit $c \in]\alpha,\beta[$ et définissons la fonction $G(s,\mathbf{x}) = \int_c^s f(t,\mathbf{x})dt$, $(s,\mathbf{x}) \in]\alpha,\beta[\times E$. Alors

$$g(\mathbf{x}) = \int_{a(\mathbf{x})}^{c} f(t,\mathbf{x})dt + \int_c^{b(\mathbf{x})} f(t,\mathbf{x})dt = G(b(\mathbf{x}),\mathbf{x}) - G(a(\mathbf{x}),\mathbf{x}).$$

Montrons que la fonction $G(s,\mathbf{x})$ a toutes les dérivées partielles en tout $(s,\mathbf{x}) \in]\alpha,\beta[\times E$. Par un résultat fondamental d'analyse I, $\frac{\partial G}{\partial s}(s,\mathbf{x})$ existe et vaut $f(s,\mathbf{x})$.

Pour $s \in]c,\beta[$, le théorème 5.4 assure que $\frac{\partial G}{\partial x_i}(s,\mathbf{x})$ existe et vaut $\int_c^s \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x})dt$. La même conclusion est vraie pour $s \in]\alpha,c[$ car la fonction $\mathbf{x} \mapsto \int_s^c f(t,\mathbf{x})dt$ admet une dérivée partielle en x_i et qu'elle vaut $\int_s^c \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x})dt$. Ainsi $\frac{\partial G}{\partial x_i}(s,\mathbf{x})$ existe et vaut $\int_c^s \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x})dt$. Enfin, pour $s=c$ on a $G(c,\mathbf{x})=0$ sur E et donc $\frac{\partial G}{\partial x_i}(c,\mathbf{x})$ existe et est nul et $\frac{\partial G}{\partial x_i}(c,\mathbf{x}) = 0 = \int_c^c \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x})dt$. En résumé, pour tout $s \in]\alpha,\beta[$ et $\mathbf{x} \in E$, $\frac{\partial G}{\partial x_i}(s,\mathbf{x})$ existe et vaut $\int_c^s \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x})dt$.

Montrons que les dérivées partielles sont continues sur $]\alpha,\beta[\times E$. Ceci est vrai pour $\frac{\partial G}{\partial s}(s,\mathbf{x}) = f(s,\mathbf{x})$. Pour $i \in \{1,\dots,n\}$ fixé, soit la fonction $H :]\alpha,\beta[\times E \to \mathbb{R}$ définie par $H(s,\mathbf{x}) = \int_c^s \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x})dt$. Cette fonction est bien continue sur $]\alpha,\beta[\times E$, la preuve étant similaire à celle du théorème 5.2. En effet, soit $(s_0,\mathbf{x}_0) \in]\alpha,\beta[\times E$ et $\eta > 0$ t.q.

$$A := \Big[\min\{s_0,c\}-\eta, \max\{s_0,c\}+\eta\Big] \times \overline{B}(\mathbf{x}_0,\eta) \subset]\alpha,\beta[\times E.$$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est uniformément continue sur le compact A, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta \in]0,\eta]$ t.q.

$$\forall (t,\mathbf{x}) \in \tilde{A} := \Big[\min\{s_0,c\}-\eta, \max\{s_0,c\}+\eta\Big]\times\overline{B}(\mathbf{x}_0,\delta) \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x}_0)\right| \le \frac{\epsilon}{2|s_0-c|+1}.$$

De plus, $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|$ est continue sur le compact A, et soit M son maximum. Alors, si on prend $\hat{\delta} = \min\{\delta, \frac{\epsilon}{2M+1}\}$, on a $\forall (s,\mathbf{x}) \in [s_0-\hat{\delta}, s_0+\hat{\delta}] \times \overline{B}(\mathbf{x}_0,\hat{\delta}) \subset \tilde{A} \subset A$

$$\begin{aligned}
|H(s,\mathbf{x}) - H(s_0,\mathbf{x}_0)| &\le |H(s,\mathbf{x}) - H(s_0,\mathbf{x})| + |H(s_0,\mathbf{x}) - H(s_0,\mathbf{x}_0)| \\
&\le \left|\int_{s_0}^s \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x})dt\right| + \left|\int_c^{s_0} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x}_0)\right)dt\right| \\
&\le M|s-s_0| + \frac{|s_0-c|\epsilon}{2|s_0-c|+1} \le M\frac{\epsilon}{2M+1} + \frac{\epsilon}{2} \le \epsilon.
\end{aligned}$$

A ce stade, nous avons donc prouvé que G est de classe C^1 sur $]\alpha,\beta[\times E$. Par les propriétés de dérivation de fonctions composées on a que $g(\mathbf{x}) = G(b(\mathbf{x}),\mathbf{x}) - G(a(\mathbf{x}),\mathbf{x})$ est de classe C^1 sur E et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial G}{\partial s}(b(\mathbf{x}),\mathbf{x})\frac{\partial b}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \frac{\partial G}{\partial x_i}(b(\mathbf{x}),\mathbf{x}) - \frac{\partial G}{\partial s}(a(\mathbf{x}),\mathbf{x})\frac{\partial a}{\partial x_i}(\mathbf{x}) - \frac{\partial G}{\partial x_i}(a(\mathbf{x}),\mathbf{x}) \\
&= f(b(\mathbf{x}),\mathbf{x})\frac{\partial b}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \int_c^{b(\mathbf{x})} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x})dt - f(a(\mathbf{x}),\mathbf{x})\frac{\partial a}{\partial x_i}(\mathbf{x}) - \int_c^{a(\mathbf{x})} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x})dt \\
&= f(b(\mathbf{x}),\mathbf{x})\frac{\partial b}{\partial x_i}(\mathbf{x}) - f(a(\mathbf{x}),\mathbf{x})\frac{\partial a}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \int_{a(\mathbf{x})}^{b(\mathbf{x})} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x})dt.
\end{aligned}$$

□

Exercice 5.6. *Soit* $g(y) = \int_1^{\sqrt{y}} \frac{e^{-xy}}{x}dx, \quad y > 0$. *Calculer* $g'(y)$ *si elle existe.*

5.3 Intégrales généralisées dépendant de paramètres

On considère maintenant le cas où l'intégrale est définie sur un intervalle non compact. On se limite à discuter le cas d'un intervalle de la forme $[a, b[$ où b pourrait être $+\infty$ mais tous les autres cas se traitent de façon similaire.

Soit donc $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide, et $f : [a, b[\times E \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale généralisée

$$g(\mathbf{x}) = \int_a^b f(t, \mathbf{x})dt$$

converge pour tout $\mathbf{x} \in E$, c-à-d, $\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(t, \mathbf{x})dt$ existe pour tout $\mathbf{x} \in E$. Comme dans la section précédente, pour pouvoir établir la continuité de la fonction g, on a besoin de quelque forme d'uniformité en $\mathbf{x}$ pour la convergence de l'intégrale.

Définition 5.7. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide et $f : [a, b[\times E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t, \mathbf{x})dt$ converge uniformément sur E si elle converge pour tout $\mathbf{x} \in E$ et si*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \bar{c} \in]a, b[: \quad \forall c \in [\bar{c}, b[\ \forall \mathbf{x} \in E \quad \left| \int_c^b f(t, \mathbf{x})dt \right| \leq \epsilon.$$

Avec cette définition, on peut établir le résultat suivant.

Théorème 5.8. *Soient $-\infty < a < b \leq +\infty$ et $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide. Si $f : [a, b[\times E \to \mathbb{R}$ est continue et l'intégrale $\int_a^b f(t, \mathbf{x})dt$ converge uniformément sur E, alors la fonction $g(\mathbf{x}) = \int_a^b f(t, \mathbf{x})dt$ est continue sur E.*

Démonstration. Soit $\mathbf{x}_0 \in E$ quelconque et $\epsilon > 0$. Alors, il existe $\eta > 0$ t.q. $\overline{B}(\mathbf{x}_0, \eta) \subset E$ et $\bar{c} \in]a, b[$ t.q. $| \int_{\bar{c}}^b f(t, \mathbf{x})dt| \leq \epsilon$, $\forall \mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, \eta)$, grâce à la convergence uniforme de l'intégrale. La restriction de f à $[a, \bar{c}] \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, \eta)$ étant uniformément continue, il existe $\delta \in]0, \eta]$ t.q. $|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{x}_0)| \leq \frac{\epsilon}{\bar{c}-a}$, $\forall t \in [a, \bar{c}]$, $\mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, \delta)$. Donc, pour tout $\mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, \delta)$,

$$|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| \leq \left| \int_a^{\bar{c}} (f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{x}_0))dt \right| + \left| \int_{\bar{c}}^b f(t, \mathbf{x})dt \right| + \left| \int_{\bar{c}}^b f(t, \mathbf{x}_0)dt \right| \leq 3\epsilon,$$

ce qui montre la continuité de g en tout $\mathbf{x}_0 \in E$. □

On a un résultat similaire pour la dérivabilité de g qu'on énonce sans démonstration.

Théorème 5.9. *Soit $-\infty < a < b \leq +\infty$ et $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide. Si $f \in C^1([a, b[\times E)$ et les intégrales $\int_a^b f(t, \mathbf{x})dt$, $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, \mathbf{x})dt$, $i = 1, \ldots, n$, convergent uniformément sur E, alors la fonction $g(\mathbf{x}) = \int_a^b f(t, \mathbf{x})dt$ est de classe C^1 sur E et $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, \mathbf{x})dt$.*

Vérifier la condition de convergence uniforme de l'intégrale n'est parfois pas immédiat. Voici un critère de majoration qui est souvent plus simple à vérifier.

Théorème 5.10. *Soit $-\infty < a < b \leq +\infty$ et $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide. Si $f : [a, b[\times E \to \mathbb{R}$ est continue et il existe une fonction $h : [a, b[\to \mathbb{R}_+$ telle que $\int_a^b h(t)dt$ converge et*

$|f(t,\mathbf{x})| \leq h(t)$, $\forall (t,\mathbf{x}) \in [a,b[\times E$, alors la fonction $g(\mathbf{x}) = \int_a^b f(t,\mathbf{x})dt$ est continue sur E.

Si en plus f est de classe C^1 et il existe $h_1,\dots,h_n : [a,b[\to \mathbb{R}$ t.q. pour tout $i = 1,\dots,n$, $\int_a^b h_i(t)dt$ existe et $|\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x})| \leq h_i(t)$, $\forall (t,\mathbf{x}) \in [a,b[\times E$, alors $g \in C^1(E)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que la condition de majoration du théorème implique que l'intégrale $\int_a^b f(t,\mathbf{x})dt$ converge uniformément. En effet, puisque $\int_a^b h(t)dt$ converge, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\bar{c} \in]a,b[$ t.q. $\int_c^b h(t)dt \leq \epsilon$, $\forall c \in [\bar{c},b[$, et donc $|\int_c^b f(t,\mathbf{x})dt| \leq \epsilon$, ce qui implique que l'intégrale $\int_a^b f(t,\mathbf{x})dt$ converge uniformément. □

Remarque 5.11. *Dans les théorèmes 5.8 et 5.9, la condition d'intégrabilité uniforme de $\int_a^b f(t,\mathbf{x})dt$ et $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x})dt$, $1 \leq i \leq n$, sur tout l'ensemble E est parfois trop contraignante. Elle peut être affaiblie de la façon suivante :*

Il existe un recouvrement $\{U_\alpha\}_\alpha$ de E, avec U_α ouverts et $E \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, tel que, pour tout α, les intégrales $\int_a^b f(t,\mathbf{x})dt$ et $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x})dt$, $1 \leq i \leq n$, convergent uniformément sur $U_\alpha \cap E$.

Alors, les conclusions des théorèmes 5.8, 5.9 sont encore valables. Pour généraliser leur démonstration il suffit de remarquer que, pour tout $\mathbf{x}_0 \in E$, il existe α tel que $\mathbf{x}_0 \in U_\alpha$ (puisque $\{U_\alpha\}_\alpha$ est un recouvrement de E). Les intégrales $\int_a^b f(t,\mathbf{x})dt$ et $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x})dt$ étant uniformément convergentes sur $U_\alpha \cap E$, on conclut que $g(\mathbf{x})$ est continue / différentiable sur $U_\alpha \cap E$ pour tout α et donc sur $E = \bigcup_\alpha (U_\alpha \cap E)$.

Le même raisonnement s'applique au théorème 5.10 où on peut remplacer la condition de majoration par la suivante :

Il existe un recouvrement $\{U_\alpha\}_\alpha$ de E, avec U_α ouverts et $E \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, et, pour chaque α, des fonctions $h_{i,\alpha} : [a,b[\to \mathbb{R}_+$, $i = 0,\dots,n$, telles que $\int_a^b h_{i,\alpha}(t)dt$ converge et

- $|f(t,\mathbf{x})| \leq h_{0,\alpha}(t)$ pour tout $(t,\mathbf{x}) \in [a,b[\times(U_\alpha \cap E)$,
- $|\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\mathbf{x})| \leq h_{i,\alpha}(t)$ pour tout $(t,\mathbf{x}) \in [a,b[\times(U_\alpha \cap E)$ et tout $i \in \{1,\dots,n\}$.

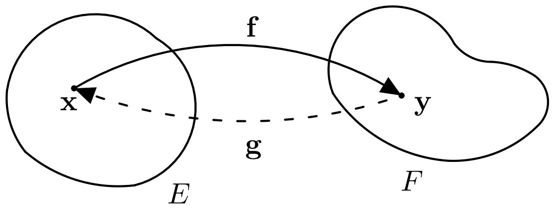
Chapitre 6

Difféomorphismes locaux et fonctions implicites

6.1 Fonctions bijectives et difféomorphismes locaux

Considérons une fonction $\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to F \subset \mathbb{R}^n$ bijective. Alors on peut définir l'application inverse (ou "réciproque") $\mathbf{g} : F \to E$ telle que

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \circ \mathbf{f} = \mathrm{id}_E \ &: \quad \forall \mathbf{x} \in E \quad \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \\ \mathbf{f} \circ \mathbf{g} = \mathrm{id}_F \ &: \quad \forall \mathbf{y} \in F \quad \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}. \end{aligned}$$



Un premier intérêt à étudier la bijectivité d'une fonction est de pouvoir garantir l'existence d'une solution unique $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ du système d'équations non-linéaires

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}, \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = y_1 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = y_n \end{cases}$$

pour tout $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in F$. Souvent, on souhaite avoir aussi de bonnes propriétés de stabilité aux petites perturbations, i.e. si $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{y}})$ et $\tilde{\mathbf{y}} \to \mathbf{y}$ on souhaite que $\tilde{\mathbf{x}} \to \mathbf{x}$ ce qui revient à demander la continuité de la fonction inverse (en plus de la continuité de $\mathbf{f}$). On parle d'*homéomorphisme* lorsque $\mathbf{f}$ est une bijection continue avec inverse continu.

Définition 6.1 (Homéomorphisme)**.** *Soient $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non vides. Une application $\mathbf{f} : E \to F$ est un* homéomorphisme *si elle est bijective et si $\mathbf{f}$ et son inverse $\mathbf{g}$ sont continues.*

Un autre intérêt d'étudier des bijections est pour introduire un changement de variables. Soit $\mathbf{f} : E \to F$ une bijection et $\phi : F \to \mathbb{R}$, $\mathbf{y} \mapsto \phi(\mathbf{y}) = \phi(y_1, \ldots, y_n)$, une fonction réelle.

Grâce à l'application $\mathbf{f}$, on peut exprimer ϕ en fonction des variables $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in E$:

$$\tilde{\phi} = \phi \circ \mathbf{f} : E \to \mathbb{R}, \quad \tilde{\phi}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in E$$

et vice versa, étant donné $\tilde{\phi} : E \to \mathbb{R}$, on peut l'exprimer en fonction des variables $\mathbf{y}$:

$$\phi = \tilde{\phi} \circ \mathbf{g} : F \to \mathbb{R}, \quad \phi(\mathbf{y}) = \tilde{\phi}(\mathbf{g}(\mathbf{y})), \quad \mathbf{y} \in F,$$

où $\mathbf{g} : F \to E$ est l'inverse de $\mathbf{f}$. Dans ce cas, si ϕ est une fonction régulière, par exemple de classe C^k, on souhaite que la fonction transformée $\tilde{\phi}$ soit aussi de classe C^k, et vice-versa. Ceci est garanti si le changement de variables $\mathbf{f}$ et son inverse sont de classe C^k.

Exemple 6.2. *Transformation en coordonnées polaires :*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \mathbf{f} :]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y = 0\}.$$

Cette transformation est continue, même de classe C^∞, et inversible. De plus, l'application inverse est continue, même de classe C^∞, sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y = 0\} \to]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$.

On va étudier dans ce chapitre des bijections continûment différentiables avec application inverse continûment différentiable. Ces applications sont appelées *difféomorphismes.*

Définition 6.3 (Difféomorphisme)**.** *Soient $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non vides. Une application $\mathbf{f} : E \to F$ inversible de classe C^1, $\mathbf{f} \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$, est un difféomorphisme si l'application inverse $\mathbf{g} : F \to E$ (t.q. $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} = \mathrm{id}_E$ et $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} = \mathrm{id}_F$) est de classe C^1 sur F, $\mathbf{g} \in C^1(F, \mathbb{R}^n)$. De plus, on dit que $\mathbf{f}$ est un k-difféomorphisme si $\mathbf{f} \in C^k(E, \mathbb{R}^n)$ et l'application inverse $\mathbf{g} \in C^k(F, \mathbb{R}^n)$.*

Remarque 6.4. *A strictement parler, $\mathbf{f} : E \to F$ est un difféomorphisme (E et F étant des ouverts non vides) si $\mathbf{f}$ est différentiable en tout point de E, bijective et son inverse $\mathbf{g} : F \to E$ est différentiable en tout point de F. Dans ce cours, sauf mention contraire, nous rajouterons l'hypothèse que $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont de classe C^1.*

Établir si une application $\mathbf{f} : E \to F$ est un difféomorphisme est souvent compliqué. On introduit une définition plus faible qui est plus facile à vérifier :

Définition 6.5 (Difféomorphisme local)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, $\mathbf{x}_0 \in E$ et $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. On dit que $\mathbf{f}$ est un difféomorphisme local en $\mathbf{x}_0$ s'il existe un ouvert $U \subset E$ contenant $\mathbf{x}_0$ (un voisinage de $\mathbf{x}_0$) et un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ contenant $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ (un voisinage de $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$) tels que $\mathbf{f} : U \to V$ est un difféomorphisme (fonction bijective avec inverse $\mathbf{g} : V \to U$ de classe C^1). Si $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont de classe C^k sur U et V respectivement, on dit que $\mathbf{f}$ est un k-difféomorphisme local. Nous appellerons $\mathbf{g}$ un* inverse local de $\mathbf{f}$ restreinte à un voisinage de $\mathbf{x}_0$.

Soient $E, F, G \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non vides. Il est facile de montrer (exercice !) que si $\mathbf{f} : E \to F$ est un difféomorphisme local en $\mathbf{x}_0 \in E$ et $\mathbf{h} : F \to G$ est un difféomorphisme local en $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in F$, alors $\mathbf{h} \circ \mathbf{f}$ est un difféomorphisme local en $\mathbf{x}_0$.

On pourrait penser que si $\mathbf{f} : E \to F$, avec $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, est un difféomorphisme local en tout point $\mathbf{x}_0 \in E$, alors elle est un difféomorphisme global entre E et F. Ceci n'est en général pas vrai, comme l'exemple suivant le montre.

Exemple 6.6. *Soit* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *donnée par*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \cos x_2 \\ e^{x_1} \sin x_2 \end{pmatrix}.$$

On verra par la suite que $\mathbf{f}$ *est un difféomorphisme local en tout point* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$*. Toutefois, elle n'est pas un difféomorphisme global car elle n'est pas une bijection :* $\mathbf{f}(0,0) = \mathbf{f}(0, 2k\pi)$*,* $\forall k \in \mathbb{Z}$*.*

Toutefois, si on ajoute l'hypothèse que $\mathbf{f}$ est une bijection, alors le difféomorphisme est global.

Théorème 6.7. *Soient* $E, F \subset \mathbb{R}^n$ *ouverts non vides et* $\mathbf{f} : E \to F$ *un difféomorphisme local en tout point* $\mathbf{x} \in E$*. Si* $\mathbf{f}$ *est une bijection entre* E *et* F*, alors elle est un difféomorphisme global.*

La démonstration de ce théorème est laissée comme exercice.

6.2 Théorème d'inversion locale

On s'intéresse à comprendre sous quelles conditions une application $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^n$, avec $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, est un difféomorphisme local en $\mathbf{x}_0 \in E$. Pour cela, on va d'abord étudier le cas d'une application *affine* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$

qui est clairement de classe C^1 (même C^∞). Cette transformation est une bijection si et seulement si la matrice A est inversible, c.-à-d. si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, l'application inverse est donnée par $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) = A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b})$ et $\mathbf{g}$ est de classe C^1 (même C^∞). Donc $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ est un difféomorphisme (global) si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

On considère maintenant le cas d'une application non linéaire $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 sur $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. La différentiablilité de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{x}_0 \in E$ assure que l'on peut écrire

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{R}_\mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\|\mathbf{R}_\mathbf{f}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0,$$

pour tout $\mathbf{x} \in E$. Donc, localement autour de $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ est bien approchée par la fonction affine $\mathbf{T}^1_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. On soupçonne alors que $\mathbf{f}$ est un difféomorphisme local en $\mathbf{x}_0$ si et seulement si $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \neq 0$.

On remarque que la condition $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \neq 0$ n'est pas nécessaire pour que $\mathbf{f}$ soit localement inversible. Par exemple, la fonction $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \mathbf{f}(x, y) = (x^3, y)$ est localement inversible autour de $(x, y) = (0, 0)$ (et même globalement sur tout $\mathbb{R}^2$) même si $\det(D\mathbf{f}(0,0)) = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$. Toutefois, cette condition est nécessaire pour que la fonction $\mathbf{f}$ soit un difféomorphisme local, comme le lemme suivant le montre.

Lemme 6.8. *Soit* $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^n$*, avec* $E \subset \mathbb{R}^n$ *ouvert, un difféomorphisme local autour de* $\mathbf{x}_0 \in E$*. Alors* $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \neq 0$*.*

Démonstration. Puisque $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme local en $\mathbf{x}_0 \in E$, il existe un ouvert $U \subset E$ contenant $\mathbf{x}_0$ et un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ contenant $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ t.q. $\mathbf{f} : U \to V$ est bijective et la fonction inverse $\mathbf{g} : V \to U$ est de classe C^1. Puisque $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in U$, $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$, $\forall \mathbf{y} \in V$ et $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont différentiables en $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{y}_0$, on a :

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)D\mathbf{g}(\mathbf{y}_0) = D\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = I$$

ce qui implique que $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ est inversible et $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \neq 0$. □

La condition $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \neq 0$ est aussi suffisante pour que $\mathbf{f}$ soit un difféomorphisme local autour de $\mathbf{x}_0$, comme le théorème suivant le montre.

Théorème 6.9 (d'inversion locale)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $\mathbf{f} \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$ et $\mathbf{x}_0 \in E$. Si $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \neq 0$, alors $\mathbf{f}$ est un difféomorphisme local en $\mathbf{x}_0$, c.-à-d. qu'il existe un ouvert $U \subset E$ contenant $\mathbf{x}_0$ et un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ contenant $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ tels que $\mathbf{f} : U \to V$ est une bijection et la fonction inverse $\mathbf{g} : V \to U$ est de classe C^1. De plus $D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = (D\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{-1}$ pour tout $\mathbf{x} \in U$.*

Avant de démontrer ce théorème, nous allons prouver des résultats intermédiaires. Commençons par le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 6.10 (du point fixe de Banach)**.** *Soit un fermé non vide $K \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction $\boldsymbol{\phi} : K \to \mathbb{R}^n$ telle que*

- *$\boldsymbol{\phi}(K) \subset K$,*
- *il existe $\rho \in]0, 1[$ tel que $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in K \quad \|\boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\phi}(\mathbf{w})\| \leq \rho\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$.*

Alors il existe *un* unique *$\mathbf{v}_* \in K$ tel que $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}_*) = \mathbf{v}_*$.*

Démonstration.

Existence. Fixons $\mathbf{v}^{(0)}$ dans K et définissons $\{\mathbf{v}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ par récurrence comme suit :

$$\mathbf{v}^{(k+1)} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}^{(k)}) \in K, \quad k \geq 0.$$

Vérifions que $\{\mathbf{v}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\mathbf{v}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k)}\| = \|\boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}^{(k)}) - \boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}^{(k-1)})\| \leq \rho\|\mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{v}^{(k-1)}\| \leq \ldots \leq \rho^k\|\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{v}^{(0)}\|.$$

Soit $\epsilon > 0$. Alors pour $k > m \geq 0$,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{v}^{(m)}\| &\leq \|\mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{v}^{(k-1)}\| + \ldots + \|\mathbf{v}^{(m+1)} - \mathbf{v}^{(m)}\| \leq (\rho^{k-1} + \ldots + \rho^m)\|\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{v}^{(0)}\| \\ &\leq \rho^m \left(\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j\right) \|\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{v}^{(0)}\| = \rho^m(1-\rho)^{-1}\|\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{v}^{(0)}\| < \epsilon\end{aligned}$$

si m (et donc k) est suffisamment grand.

Soit $\mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^n$ la limite de $\{\mathbf{v}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Alors $\mathbf{v}_* \in K$ car K est fermé, et

$$\|\mathbf{v}_* - \boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}_*)\| \leq \|\mathbf{v}_* - \mathbf{v}_{k+1}\| + \|\mathbf{v}_{k+1} - \boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}_*)\| = \|\mathbf{v}_* - \mathbf{v}_{k+1}\| + \|\underline{\phi}(\mathbf{v}_k) - \boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}_*)\|$$

$$\leq \|\mathbf{v}_* - \mathbf{v}_{k+1}\| + \rho\|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_*\| \to 0$$

lorsque $k \to +\infty$. D'où $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}_*) = \mathbf{v}_*$.

Unicité. Supposons qu'il existe un autre $\mathbf{u}_* \in K$ tel que $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{u}_*) = \mathbf{u}_*$. Alors

$$\|\mathbf{u}_* - \mathbf{v}_*\| = \|\boldsymbol{\phi}(\mathbf{u}_*) - \boldsymbol{\phi}(\mathbf{v}_*)\| \leq \rho\|\mathbf{u}_* - \mathbf{v}_*\|$$

avec $\rho \in]0, 1[$. D'où $\|\mathbf{u}_* - \mathbf{v}_*\| = 0$ et $\mathbf{u}_* = \mathbf{v}_*$. □

Définition 6.11. *Avec les notations du théorème 6.10, puisque $\rho < 1$, on dit que l'application $\boldsymbol{\phi} : K \to \mathbb{R}^n$ est* contractante *ou* une contraction*.*

est Pour la démonstration du théorème 6.9 nous avons encore besoin de deux lemmes suivants.

Lemme 6.12. *Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. On note par $|||A|||$ la* norme spectrale *de A, $|||A||| = \sup_{\substack{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n \\ \|\boldsymbol{\xi}\|=1}} \|A\boldsymbol{\xi}\|$, où $\|\cdot\|$ denote la norme euclidienne, et par $\|A\|_F$ la* norme de Frobenius *de A, $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij}^2}$. Alors, on a $|||A||| \leq \|A\|_F$.*

Démonstration. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|||A|||^2 = \sup_{\substack{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n \\ \|\boldsymbol{\xi}\|=1}} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n A_{ij}\xi_j\right)^2 \leq \sup_{\substack{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n \\ \|\boldsymbol{\xi}\|=1}} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n A_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2\right) = \|A\|_F^2.$$

□

Lemme 6.13. *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $t \mapsto \mathbf{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_m(t))$ une fonction continue. Alors*

$$\left\|\int_a^b \mathbf{f}(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|\mathbf{f}(t)\|dt,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

Démonstration. Chaque fonction $f_i : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\; i = 1, \ldots, m$ est intégrale, ainsi que la fonction $g = \|\mathbf{f}\| : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, étant une composition de fonctions continues sur $[a, b]$. Notons $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ le vecteur de composantes $v_i = \int_a^b f_i(t)dt$, $\; i = 1, \ldots, m$. Alors

$$\left\|\int_a^b \mathbf{f}(t)dt\right\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 = \sum_{i=1}^m v_i v_i = \int_a^b \sum_{i=1}^m v_i f_i(t)dt \leq \int_a^b \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{f}(t)\|dt,$$

d'où le résultat. □

Démonstration du théorème 6.9 d'inversion locale. On va couper la preuve en trois étapes :

(i) On montre qu'il existe $r, \tilde{r} > 0$ tel que $\forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, \tilde{r})$ l'équation $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ a une solution unique $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$ (on utilise le théorème du point fixe de Banach).

(ii) Soit $V = B(\mathbf{y}_0, \tilde{r})$ et $U = B(\mathbf{x}_0, r) \cap \mathbf{f}^{-1}(V) = \{\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r) : \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in V\}$, on montre que $\mathbf{f} : U \to V$ est une bijection et la fonction inverse $\mathbf{g} : V \to U$ est continue.

(iii) On montre que $\mathbf{g} : V \to U$ est de classe $C^1(V, \mathbb{R}^n)$ et $D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = (D\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{-1}$ pour tout $\mathbf{x} \in U$.

Première étape. On étudie l'équation $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ avec $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ fixé dans un voisinage convenable de $\mathbf{y}_0$. En notant par $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice identité, observons d'abord que l'application $\mathbf{x} \mapsto I - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}D\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est continue sur E (c.-à-d. chaque composante de la matrice $I - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}D\mathbf{f}$ est une fonction continue sur E) et s'annule en $\mathbf{x}_0$. De même l'application $\mathbf{x} \mapsto \det D\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ est continue et, par hypothèse, ne s'annule pas en $\mathbf{x}_0$. Il existe donc $r > 0$ tel que, pour tout $\mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$,

- $\mathbf{x} \in E$,
- chaque composante de la matrice $I - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ est dans $\left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right]$,
- $\det D\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq 0$ et donc la matrice jacobienne $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ est inversible.

L'équation $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ est équivalente à $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ où $\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y})$, grâce au fait que $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ est inversible. On remarque, en particulier, que $\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}} \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$. Alors $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ a une solution dans $\overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$ si et seulement si $\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}}$ a un point fixe dans $\overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$. Mais, pour tout $\mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$,

$$D\phi^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = I - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}D\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

et donc $\left|\frac{\partial \phi_i^{\mathbf{y}}}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right| \leq \frac{1}{2n}$, $\forall \mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$. Ceci implique

$$|||D\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})||| \leq \|D\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left|\frac{\partial \phi_i^{\mathbf{y}}}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}, \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, r).$$

Par le théorème des accroissements finis (version intégrale, où apparaît le produit matricielle d'une matrice et d'un vecteur colonne, donnant un vecteur colonne) et les lemmes 6.12-6.13 , on a pour $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_2) - \boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_1)\| &= \left\|\int_0^1 D\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)dt\right\| \\
&\leq \int_0^1 \|D\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\|dt \\
&\leq \int_0^1 |||D\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}}(\underbrace{\mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}_{\in \bar{B}(\mathbf{x}_0, r)})|||\, \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|dt \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|
\end{aligned}$$

et $\boldsymbol{\phi}$ est contractante sur $\overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$ pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. De plus, pour tout $\mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$ et $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, \tilde{r})$, avec $\tilde{r} = \frac{r}{2|||D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}|||}$, on a

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0\| &\leq \|\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0)\| + \|\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}(\mathbf{y}_0 - \mathbf{y})\| \leq \frac{r}{2} + |||D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}|||\, \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}\| < r.
\end{aligned}$$

Donc, si on prend $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, \tilde{r})$, on a $\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}}(\overline{B}(\mathbf{x}_0, r)) \subset B(\mathbf{x}_0, r)$. Par conséquent, $\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}} : \overline{B}(\mathbf{x}_0, r) \to \overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$ a un point fixe unique $\mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$. Mais puisque $\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}}(\overline{B}(\mathbf{x}_0, r)) \subset$

$B(\mathbf{x}_0, r)$, ce point fixe est dans la boule ouverte $B(\mathbf{x}_0, r)$. On a donc montré que $\forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, \tilde{r})$, il existe un unique $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$ t.q. $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$, c.-à-d. t.q. $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Deuxième étape. Soit $V = B(\mathbf{y}_0, \tilde{r})$ et $U = B(\mathbf{x}_0, r) \cap \mathbf{f}^{-1}(V) = \{\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r) : \ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{y}_0, \tilde{r})\}$. On remarque que $\mathbf{f}^{-1}(V)$ est ouvert ($\mathbf{f}$ est continue sur l'ouvert E, donc la pré-image d'un ouvert est un ouvert), donc U est ouvert. Par l'étape précédente, $\mathbf{f} : U \to V$ est une bijection donc on peut définir la fonction inverse $\mathbf{g} : V \to U$. On montre que $\mathbf{g}$ est continue. Soit $\epsilon > 0$ et $\delta = \frac{\epsilon}{2|||D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}|||}$, alors, pour tous $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$ tels que $\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \leq \delta$, et en notant $\mathbf{x}_1 = \mathbf{g}(\mathbf{y}_1)$ et $\mathbf{x}_2 = \mathbf{g}(\mathbf{y}_2)$, on a

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| &= \|\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}_1}(\mathbf{x}_1) - \boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}_2}(\mathbf{x}_2)\| \\ &\leq \|\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}_1}(\mathbf{x}_1) - \boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}_1}(\mathbf{x}_2)\| + \|\boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}_1}(\mathbf{x}_2) - \boldsymbol{\phi}^{\mathbf{y}_2}(\mathbf{x}_2)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| + \|D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\|,\end{aligned}$$

et donc

$$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| = \|\mathbf{g}(\mathbf{y}_1) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_2)\| \leq 2|||D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}|||\ \|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\| \leq \epsilon$$

ce qui montre la continuité (uniforme) de $\mathbf{g} : V \to U$. Même plus, le calcul précédent montre que $\mathbf{g}$ est Lipschitz.

Troisième étape. Il reste à montrer que $\mathbf{g} : V \to U$ est de classe C^1 et $D\mathbf{g}(\mathbf{y}) = (D\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{-1}$, $\forall \mathbf{y} \in V$, où $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$. Par le choix de r, $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ est inversible pour tout $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$. Soit maintenant $\mathbf{y}_1 \in V$ et $\mathbf{x}_1 = \mathbf{g}(\mathbf{y}_1)$. Puisque $\mathbf{f} \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$, on a

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) + \mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_1) \quad \text{avec} \lim_{\mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}} \frac{\|\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_1)\|}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}\|} = 0.$$

Ceci implique

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y}_1) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) = D\mathbf{f}(\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}) \underbrace{-D\mathbf{f}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_1)}_{\mathbf{R}_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}_1)}$$

On va montrer que $\lim_{\mathbf{y}_1 \to \mathbf{y}} \frac{\mathbf{R}_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}_1)}{\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}\|} = 0$. En effet,

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{y}_1 \to \mathbf{y}} \frac{\|\mathbf{R}_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}_1)\|}{\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}\|} = \lim_{\mathbf{y}_1 \to \mathbf{y}} \frac{\|D\mathbf{f}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_1)\|}{\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}\|} &\leq \lim_{\mathbf{y}_1 \to \mathbf{y}} |||D\mathbf{f}(\mathbf{x})^{-1}||| \frac{\|\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_1)\|}{\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}\|} \\ &= |||D\mathbf{f}(\mathbf{x})^{-1}||| \lim_{\mathbf{y}_1 \to \mathbf{y}} \frac{\|\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_1)\|}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}\|} \frac{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}\|}.\end{aligned}$$

D'un autre côté, comme on l'a vu au point précédent

$$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}\| \leq 2|||D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}|||\ \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}\|,$$

et donc

$$\lim_{\mathbf{y}_1 \to \mathbf{y}} \frac{\|\mathbf{R}_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}_1)\|}{\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}\|} \leq 2|||D\mathbf{f}(\mathbf{x})^{-1}||||||D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}||| \lim_{\mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}} \frac{\|\mathbf{R}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_1)\|}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}\|} = 0.$$

On conclut que $\mathbf{g} : V \to U$ est différentiable en tout $\mathbf{y} \in V$ et $D\mathbf{g}(\mathbf{y}) = D\mathbf{f}(\mathbf{x})^{-1}$, avec $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$. Enfin, puisque $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ est continue en tout $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$, $D\mathbf{f}(\mathbf{x})^{-1}$ est continue pourvu que $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{x})) \neq 0$, ce qui est vrai dans $B(\mathbf{x}_0, r)$. Ceci montre que $\mathbf{g} \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$. $\square$

6.3 Hypersurfaces et fonctions implicites

Considérons une fonction continue $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Le graphe de la fonction ϕ, qu'on appellera Σ par la suite, donné par $\Sigma = \mathcal{G}(\phi) = \{\mathbf{z} = (\mathbf{x}, y) \in U \times \mathbb{R} : y = \phi(\mathbf{x})\}$ représente une *surface* de $\mathbb{R}^3$. Plus généralement, si on a une fonction continue $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, le graphe $\Sigma = \mathcal{G}(\phi) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sera une *hypersurface* de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Le fait d'avoir une représentation explicite de la surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ comme graphe d'une fonction $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nous permet de définir facilement certaines quantités locales comme, par exemple, l'hyperplan tangent ou le vecteur normal à la surface en un point $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{x}_0, \phi(\mathbf{x}_0)) \in \Sigma$, si la fonction ϕ est de classe C^1. En effet, la fonction ϕ est bien approchée, dans un voisinage de $\mathbf{x}_0$, par l'application affine

$$T^1_\phi(\mathbf{x}) = \underbrace{\phi(\mathbf{x}_0)}_{=y_0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)(x_i - x_{0,i})$$

dont le graphe est l'hyperplan $\Pi_{\mathbf{z}_0}(\Sigma) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+1} : (-D\phi(\mathbf{x}_0), 1) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) = 0\}$ appelé l'***hyperplan tangent*** *à la surface* Σ *au point* $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{x}_0, \phi(\mathbf{x}_0))$. Le vecteur $\mathbf{n} = (-D\phi(\mathbf{x}_0), 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ est appelé le ***vecteur normal*** *à la surface* Σ *au point* $\mathbf{z}_0$, étant un vecteur normal à l'hyperplan tangent à Σ en $\mathbf{z}_0$ (voir la définition 3.9 du Chapitre 3). On parle, alors, d'une *surface différentiable* ou bien d'une *variété différentiable*. De plus, si ϕ est de classe C^2, on peut introduire des notions de *courbure* de la surface au point $\mathbf{z}_0 \in \Sigma$, liées à la matrice hessienne de la fonction ϕ en $\mathbf{x}_0$. On ne va pas détailler plus ces notions dans ce cours.

Considérons maintenant un ensemble $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$. On peut se poser la question si, autour d'un point $\mathbf{z}_0 \in \Sigma$, l'ensemble peut être représenté localement comme le graphe d'une fonction continue $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si ceci est le cas, on dit que Σ est une hypersurface de $\mathbb{R}^{n+1}$ localement autour de $\mathbf{z}_0$.

Définition 6.14. *Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{z}_0 \in \Sigma$ et $k \in \mathbb{N}$. On dit que Σ est une hypersurface de classe C^k autour de $\mathbf{z}_0$ si elle est le graphe d'une fonction de classe C^k localement autour de $\mathbf{z}_0$, c.-à-d., s'il existe un voisinage V de $\mathbf{z}_0$, un indice $i \in \{1, \dots, n+1\}$, un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction $\phi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^k tels que*

$$\Sigma \cap V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i = \phi(\mathbf{x}_{\sim i}),\ \mathbf{x}_{\sim i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \in U\}.$$

On dit que Σ est une hypersurface de classe C^k si elle est le graphe d'une fonction de classe C^k localement autour de chacun de ses points.

On s'intéresse par la suite à des ensembles définis par

$$\Sigma = \{\mathbf{x} \in E : f(\mathbf{x}) = 0\}, \quad \text{avec } f : E \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \ \text{ régulière (à préciser)},$$

c.-à-d. que Σ est la courbe de niveau zéro de la fonction f définie sur l'ouvert $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Si Σ est une hypersurface, localement autour d'un point $\mathbf{z}_0 \in \Sigma$, alors elle peut être représentée comme le graphe d'une fonction continue $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localement autour de $\mathbf{z}_0$, c'est-à-dire il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contenant $\mathbf{z}_0$, un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et un indice $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ tels que

$$\begin{aligned}\Sigma \cap V &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x_i = \phi(\mathbf{x}_{\sim i}), \ \mathbf{x}_{\sim i} \in U\} \\ &= \{\mathbf{x} \in V : \ f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0\}.\end{aligned}$$

On dit dans ce cas que l'équation $f(\mathbf{x}) = 0$ définit *implicitement* une fonction $x_i = \phi(\mathbf{x}_{\sim i})$ localement autour du point $\mathbf{z}_0$. Autrement dit, la relation

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0 \tag{6.1}$$

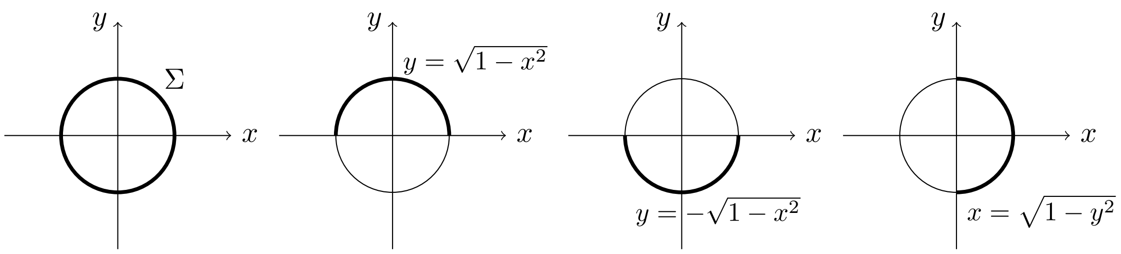
permet d'exprimer la variable x_i en fonction des autres variables, $x_i = \phi(\mathbf{x}_{\sim i})$, et le graphe de ϕ coïncide avec l'ensemble des zéros de f dans un voisinage de $\mathbf{z}_0$. On se pose alors la question de savoir quand l'équation (6.1) peut être explicitée par rapport à une des variables.

6.4 Théorème des fonctions implicites – cas scalaire

Regardons plus en détail le cas d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de deux variables réelles.

Exemple 6.15. *Soit* $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = x^2 - y = 0\}$. *L'équation* $f(x, y) = 0$ *définit implicitement la fonction* $y = \phi(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *C'est à dire, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x, \phi(x)) = x^2 - \phi(x) = 0$ *et* $\mathcal{G}(\phi) = \Sigma$.

Exemple 6.16. *Soit* $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}$. *Clairement, l'ensemble* Σ *correspond au cercle unitaire.*



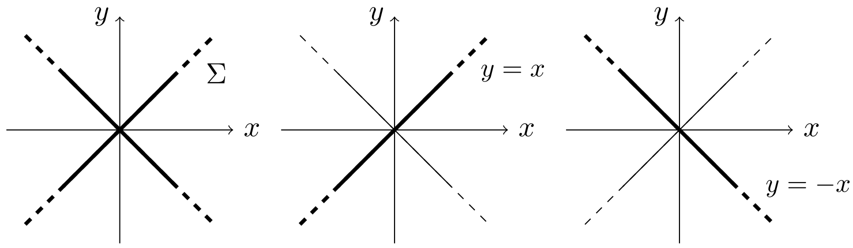
Les fonctions $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ *et* $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$ *sont définies implicitement par* $f(x, y) = 0$, *Toutefois, on ne peut pas trouver une seule fonction* $y = \phi(x)$ *ou* $x = \phi(y)$ *qui décrit tout l'ensemble* Σ. *En revanche, soit* $\mathbf{z}_0 \in \Sigma$ *arbitraire. Alors, autour de* $\mathbf{z}_0$, *on peut définir une fonction* $y = \phi(x)$ *ou* $x = \phi(y)$. *Par exemple, soit* $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0) \in \Sigma$.

— *Si* $y_0 > 0$, *alors on peut prendre* $y = \phi(x) = \sqrt{1 - x^2}$ *et on a* $f(x, \phi(x)) = 0$ *dans un voisinage de* x_0 *et* $\mathcal{G}(\phi)$ *coïncide avec* Σ *dans un voisinage de* $\mathbf{z}_0$.

— *Si* $y_0 < 0$ *alors on peut prendre* $y = \phi(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ *et on a* $f(x, \phi(x)) = 0$ *dans un voisinage de* x_0 *et* $\mathcal{G}(\phi)$ *coïncide avec* Σ *dans un voisinage de* $\mathbf{z}_0$.

— *Si* $y_0 = 0$, *par exemple* $\mathbf{z}_0 = (1, 0)$, *alors on peut expliciter* x *en fonction de* y, $x = \phi(y) = \sqrt{1 - y^2}$ *mais non pas* y *en fonction de* x.

Exemple 6.17. *Soit* $\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x,y) = x^2 - y^2 = 0\}$*. Clairement, l'équation* $f(x,y) = 0$ *est satisfaite si et seulement si* $x = y$ *ou* $x = -y$*.*



Soit $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0) \in \Sigma$*.*

— *Si* $x_0y_0 > 0$ *alors* $f(x,y) = 0$ *définit implicitement la fonction* $y = \phi(x) = x$ *(ou bien la fonction* $x = \phi(y) = y$*) et* $\mathcal{G}(\phi)$ *coïncide avec* Σ *dans un voisinage de* $\mathbf{z}_0$*.*

— *Pareillement, si* $x_0y_0 < 0$ *alors* $f(x,y) = 0$ *définit implicitement la fonction* $y = \phi(x) = -x$ *(ou bien la fonction* $x = \phi(y) = -y$*) et* $\mathcal{G}(\phi)$ *coïncide avec* Σ *dans un voisinage de* $\mathbf{z}_0$*.*

— *En revanche, si* $(x_0, y_0) = (0,0)$*, il n'est pas possible de trouver ni une fonction* $y = \phi(x)$ *ni une fonction* $x = \phi(y)$ *définies implicitement par l'équation* $f(x,y) = 0$ *qui décrivent* Σ *dans un voisinage de* $\mathbf{z}_0 = (0,0)$*. On dit dans ce cas que* $(0,0)$ *est un point singulier de* Σ*. On remarque que* $\nabla f(0,0) = (0,0)$*.*

Exemple 6.18. *Soit* $\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x,y) = xe^y + ye^x = 0\}$*. L'équation* $f(x,y) = xe^y + ye^x = 0$ *ne peut pas être explicitée sous forme simple ni par rapport à* x *ni par rapport à* y*. Est-ce que l'équation* $f(x,y) = 0$ *définit implicitement une fonction* $y = \phi(x)$ *ou* $x = \phi(y)$ *au moins localement autour de chaque point* $\mathbf{z}_0 \in \Sigma$*, dont le graphe coïncide avec* Σ *dans un voisinage de* $\mathbf{z}_0$ *? On verra que la réponse à cette question est positive.*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$. Supposons que $f(x,y) = 0$ définit implicitement une fonction $y = \phi(x)$ autour de $\mathbf{z}_0$, c'est-à-dire $\exists \delta > 0$ et $\phi :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ tels que $y_0 = \phi(x_0)$ et $f(x, \phi(x)) = 0$, $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Supposons de plus que f et ϕ sont de classe C^1 et notons $\tilde{f}(x) = f(x, \phi(x))$. Alors, par la formule de dérivation de fonctions composées, on a :

$$0 = \frac{d}{dx}\tilde{f}(x) = \frac{d}{dx} f(x, \phi(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))\phi'(x), \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

On en tire que si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, alors

$$\phi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Plus généralement, si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, alors $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) \neq 0$ pour tout x suffisamment proche de x_0 et

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}$$

Même si on ne connaît pas ϕ, on peut quand même évaluer sa dérivée $\phi'(x_0)$ si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. De plus, si f et ϕ sont de classe C^2, on peut itérer le raisonnement :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2}{dx^2} f(x, \phi(x)) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))\phi'(x)\right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \phi(x)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, \phi(x))\phi'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, \phi(x))(\phi'(x))^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))\phi''(x).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\phi''(x_0) = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\phi'(x_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(\phi'(x_0))^2\right).$$

et, pour tout x suffisamment proche de x_0,

$$\phi''(x) = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \phi(x)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, \phi(x))\phi'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, \phi(x))(\phi'(x))^2\right).$$

Plus généralement, si f est de classe C^k, alors ϕ sera aussi de classe C^k et on peut calculer explicitement $\phi^{(k)}(x_0)$. Tous les calculs précédents sont valables sous l'hypothèse qu'une fonction implicite ϕ de classe C^k existe et que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Cette dernière condition s'avère être suffisante pour l'existence d'une fonction implicite.

Théorème 6.19 (des fonctions implicites — cas $n = 2$)**.** *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, E ouvert non vide, de classe C^1, $\Sigma = \{(x, y) \in E : f(x, y) = 0\}$ et $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0) \in \Sigma$ t.q. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Alors il existe un voisinage $U =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ de x_0, un ouvert $V \subset E$ contenant $\mathbf{z}_0$ et une unique fonction $\phi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que*

— *$y_0 = \phi(x_0)$;*

— *$(x, \phi(x)) \in V$ et $f(x, \phi(x)) = 0$, $\forall x \in U$;*

— *$\mathcal{G}(\phi) = \Sigma \cap V$.*

De plus, pour tout $x \in U$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) \neq 0$ et

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))},$$

et si $f \in C^k(E)$, alors $\phi \in C^k(U)$.

Démonstration. Supposons $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ (le cas $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) < 0$ est identique). Puisque $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur E (f étant de classe C^1), il existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tels que, pour tout $(x, y) \in W := [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] \times [y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2]$, on a

$$(x, y) \in E \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0.$$

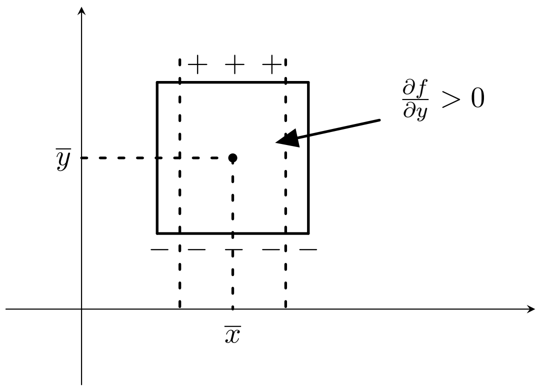
Pour tout $x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$, la fonction $y \mapsto g_x(y) = f(x, y)$ est strictement croissante dans l'intervalle $[y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2]$ car $g'_x(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$. En particulier

$$g_{x_0}(y_0 - \delta_2) < g_{x_0}(y_0) = f(x_0, y_0) = 0 < g_{x_0}(y_0 + \delta_2).$$

Puisque f est continue, il existe $0 < \delta \leq \delta_1$ tel que

$$g_x(y_0-\delta_2) = f(x, y_0-\delta_2) < 0 \quad \text{et} \quad g_x(y_0+\delta_2) = f(x, y_0+\delta_2) > 0, \quad \forall x \in U :=]x_0-\delta, x_0+\delta[$$

comme illustré dans la figure ci dessous.



Pour $x \in U$, $g_x(y)$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2]$, et donc il existe un unique $y = \phi(x) \in]y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2[$ tel que $g_x(y) = f(x, y) = 0$. Cette procédure permet de définir de façon unique une fonction $\phi : U \to \mathbb{R}$ telle que

$$\phi(x_0) = y_0 \quad \text{et} \quad f(x, \phi(x)) = 0 \quad \forall x \in U.$$

De plus, si on note $V =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\times]y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2[$, on a $\mathcal{G}(\phi) = \{(x, y) \in V : f(x, y) = 0\} = \Sigma \cap V$.

Continuité de ϕ. Soit $\bar{x} \in U$ et $\bar{y} = \phi(\bar{x})$. Pour tout $\epsilon \in]0, \delta_2 - |\bar{y} - y_0|\,]$, considérons $W_\epsilon = [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] \times [\bar{y} - \epsilon, \bar{y} + \epsilon]$. Puisque $W_\epsilon \subset W$ on a que $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ sur W_ϵ. En raisonnant comme auparavant, mais sur W_ϵ au lieu de W, il existe $\delta_\epsilon > 0$ et une fonction $\bar{\phi} :]\bar{x} - \delta_\epsilon, \bar{x} + \delta_\epsilon[\cap U \to \mathbb{R}$ tels que $\bar{y} = \bar{\phi}(\bar{x})$ et $f(x, \bar{\phi}(x)) = 0$, $\forall x \in]\bar{x} - \delta_\epsilon, \bar{x} + \delta_\epsilon[\cap U$. Par l'unicité de la fonction implicite sur W et le choix de W_ϵ, on a $\bar{\phi}(x) = \phi(x) \in [\bar{y} - \epsilon, \bar{y} + \epsilon]$, $\forall x \in]\bar{x} - \delta_\epsilon, \bar{x} + \delta_\epsilon[\cap U$. On a donc montré que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que $|\phi(x) - \phi(\bar{x})| \leq \epsilon$ pour tout $x \in]\bar{x} - \delta_\epsilon, \bar{x} + \delta_\epsilon[\cap U$ ce qui montre la continuité de ϕ en tout point $\bar{x} \in U$.

Continuité de ϕ'. Soient $x_1 \neq x_2$ dans U, $y_1 = \phi(x_1)$ et $y_2 = \phi(x_2)$. Puisque $f \in C^1(E)$, on a

$$0 = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta)(x_2 - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta)(y_2 - y_1)$$

avec $(\xi, \eta) = (x_1 + \theta(x_2 - x_1), y_1 + \theta(y_2 - y_1))$ et $\theta \in]0, 1[$. Alors

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\phi(x_2) - \phi(x_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta)}{\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta)}$$

et $\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) > 0$ car $(\xi, \eta) \in V \subset W$. Il s'ensuit

$$\phi'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{\phi(x_2) - \phi(x_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1)},$$

donc ϕ est dérivable en tout $x \in U$. De plus, $\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x))}$ est continue grâce au fait que $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et ϕ sont continues et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) \neq 0$, $\forall x \in U$. La démonstration que $\phi \in C^k(U)$ si $f \in C^k(E)$ se fait par récurrence sur $k \geq 1$. $\square$

On a montré le théorème des fonctions implicites pour une fonction de deux variables réelles $(x, y) \mapsto f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Toutefois, la démonstration de ce théorème se généralise sans difficulté au cas d'une fonction de n variables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Théorème 6.20 (des fonctions implicites à plusieurs variables)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ouvert non vide, $f : E \to \mathbb{R}$ de classe C^1, $\Sigma = \{(\mathbf{x}, y) \in E, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R} : f(\mathbf{x}, y) = 0\}$ et $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{x}_0, y_0) \in \Sigma$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0$. Alors, il existe un voisinage $U = B(\mathbf{x}_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ de $\mathbf{x}_0$, un ouvert $V \subset E$ contenant $\mathbf{z}_0$ et une unique application $\phi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que :*

- $y_0 = \phi(\mathbf{x}_0)$ *;*
- $(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) \in V$ *et* $f(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) = 0$, $\forall \mathbf{x} \in U$ *;*
- $\mathcal{G}(\phi) = \Sigma \cap V$, *(i.e. le graphe de ϕ décrit Σ dans un voisinage de $\mathbf{z}_0$).*

De plus

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))}, \quad \forall \mathbf{x} \in U,$$

et si $f \in C^k(E)$ alors $\phi \in C^k(U)$.

Le théorème précédent montre que si $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{z}_0) \neq 0$, l'ensemble Σ coïncide avec le graphe d'une fonction $y = \phi(\mathbf{x})$ dans un voisinage de $\mathbf{z}_0$. Ceci permet de définir l'hyperplan tangent à Σ en $\mathbf{z}_0$, noté $\Pi_{\mathbf{z}_0}(\Sigma)$, comme l'hyperplan tangent au graphe de ϕ en $\mathbf{x}_0$, qui est donné par

$$\Pi_{\mathbf{z}_0}(\Sigma) = \left\{ (\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \qquad y = \phi(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)(x_i - x_{0,i}) \right\}.$$

En se rappelant de l'expression des dérivées partielles de ϕ en $\mathbf{x}_0$, l'hyperplan tangent peut s'écrire de façon équivalente comme

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{z}_0)(y - y_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{z}_0)(x_i - x_{0,i}) = 0,$$

qui conduit à l'expression simple

$$\Pi_{\mathbf{z}_0}(\Sigma) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+1} : \nabla f(\mathbf{z}_0) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) = 0\}. \tag{6.2}$$

Cette équation montre que le vecteur $\nabla f(\mathbf{z}_0)$ est un vecteur normal à Σ en $\mathbf{z}_0$.

Enfin, on remarque que si $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{z}_0) = 0$ mais $\nabla f(\mathbf{z}_0) \neq \mathbf{0}$, alors il existe un $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{z}_0) \neq 0$ et on peut encore appliquer le théorème des fonctions implicites en exprimant la variable x_i en fonction des autres variables. L'expression de l'hyperplan tangent (6.2) et du vecteur normal sont inchangées.

6.5 Théorème des fonctions implicites – cas vectoriel

Les idées présentées dans la section précédente se généralisent au cas d'une fonction continue à valeurs vectorielles $\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, où E est ouvert non vide. Soit $\Sigma = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E : \ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\}$ l'ensemble des solutions de l'équation $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Cette équation correspond au système sous-déterminé des m équations

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \end{cases} \tag{6.3}$$

des $n + m$ inconnues $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$. Du point de vue géométrique,

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^{m} \Sigma_i, \qquad \text{où } \Sigma_i = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E : \ f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}.$$

Si chaque ensemble Σ_i est une surface de $\mathbb{R}^{n+m}$, alors Σ est l'intersection de m surfaces. Par exemple, si $f_1(x, y, z) = 0$ et $f_2(x, y, z) = 0$ définissent des surfaces en $\mathbb{R}^3$, leur intersection $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ f_1(x, y, z) = 0 \text{ et } f_2(x, y, z) = 0\}$ sera en générale une courbe de $\mathbb{R}^3$ (voir Figure 6.1). On peut se poser de nouveau la question de savoir si l'ensemble Σ peut être représenté comme le graphe d'une fonction continue, au moins localement autour de chaque point $\mathbf{z}_0 \in \Sigma$. De façon équivalente, on veut savoir si pour l'équation $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ on peut exprimer m variables, disons $(y_1, \ldots, y_m)$, comme fonctions continues des n variables restantes $(x_1, \ldots, x_n)$, dans un voisinage de $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$; autrement dit, si le système (6.3) définit implicitement une fonction continue $\boldsymbol{\phi} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ autour de $\mathbf{x}_0$ telle que $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{x} \in U$ et $\Sigma = \mathcal{G}(\boldsymbol{\phi})$ dans un voisinage de $\mathbf{z}_0$.

Avant de donner le résultat d'existence générale, il est utile de considérer le cas d'une fonction $\mathbf{f}_a$ *affine* :

$$\mathbf{f}_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A_1\mathbf{x} + A_2\mathbf{y} + \mathbf{b}, \qquad A_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}, \ A_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}, \ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

L'équation $\mathbf{f}_a = \mathbf{0}$ équivaut à $A_2\mathbf{y} = -(A_1\mathbf{x} + \mathbf{b})$. Donc on peut écrire de façon unique $\mathbf{y}$ en fonction de $\mathbf{x}$ si et seulement si la matrice A_2 est inversible, c.-à-d. $\det(A_2) \neq 0$. Dans ce cas on a

$$\mathbf{y} = -A_2^{-1}A_1\mathbf{x} - A_2^{-1}\mathbf{b}.$$

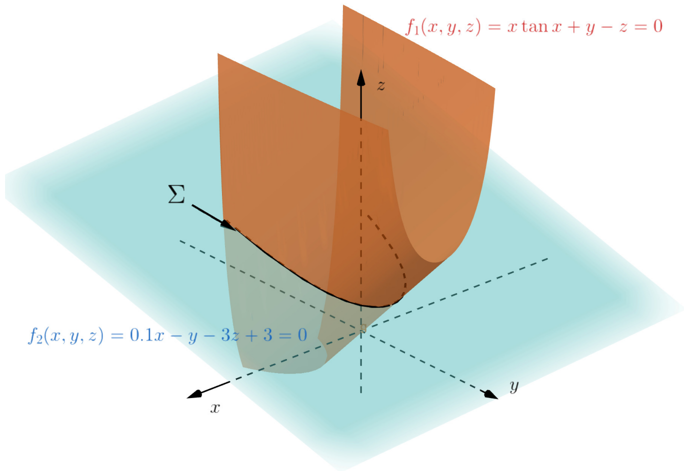


Figure 6.1 – Courbe $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; f_1(x,y,z) = 0 \text{ et } f_2(x,y,z) = 0\}$ obtenue par l'intersection des deux surfaces $f_1(x,y,z) = x\tan x + y - z = 0$ et $f_2(x,y,z) = \frac{x}{10} - y - 3z + 3 = 0$.

Considérons maintenant une fonction *non-linéaire* $\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 et $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \Sigma = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \; (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in E, \; \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}\}$. La différentiablilité de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{z}_0 \in E$ assure que l'on peut écrire pour tout $\mathbf{z} \in E$

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \cancelto{0}{\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)} + D\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) + \mathbf{R}_\mathbf{f}(\mathbf{z}), \qquad \lim_{\mathbf{z}\to\mathbf{z}_0} \frac{\mathbf{R}_\mathbf{f}(\mathbf{z})}{\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\|} = \mathbf{0}.$$

Il est pratique d'écrire la matrice jacobienne $D\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)}$ par blocs comme

$$D\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{z}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{z}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\mathbf{z}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\mathbf{z}_0) \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{z}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{z}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\mathbf{z}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\mathbf{z}_0) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} D_\mathbf{x}\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) & D_\mathbf{y}\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) \end{array}\right].$$

Donc, dans un voisinage de $\mathbf{z}_0$, la fonction $\mathbf{f}$ est bien approchée par la fonction affine

$$\mathbf{f}_a(\mathbf{z}) = D\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) = D_\mathbf{x}\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + D_\mathbf{y}\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)$$

et on s'attend à pouvoir exprimer $\mathbf{y}$ en fonction de $\mathbf{x}$ si $\det(D_\mathbf{y}\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)) \neq 0$. Le théorème suivant rend ce raisonnement rigoureux.

Théorème 6.21. *Soit $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ouvert non vide, $\mathbf{f} \in C^1(E, \mathbb{R}^m)$, $\Sigma = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in E : \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}\}$ et $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \Sigma$ tel que $\det(D_\mathbf{y}\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)) \neq 0$. Alors il existe une boule ouverte $U = B(\mathbf{x}_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert $V \subset E$ contenant $\mathbf{z}_0$ et une unique fonction $\boldsymbol{\phi} : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tels que*

1. *$\mathbf{y}_0 = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_0)$;*
2. *pour tout $\mathbf{x} \in U$, $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})) \in V$ et $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$;*

3. $\Sigma \cap V = \mathcal{G}(\boldsymbol{\phi})$;
4. $\det(D_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})) \neq 0$ *et* $D\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = -(D_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})))^{-1}D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}))$, $\forall \mathbf{x} \in U$ *(dans cette dernière formule, il y a un produit matriciel).*

De plus, pour tout entier $k \geq 1$, si $\mathbf{f}$ est de classe C^k, alors $\boldsymbol{\phi}$ l'est aussi.

Démonstration. On utilise le théorème d'inversion locale. Soit $\mathbf{F} : E \to \mathbb{R}^{n+m}$, $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}))$. On a $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) = (\mathbf{x}_0,\mathbf{0})$ et

$$D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & 0 \\ D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) & D_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) \end{bmatrix}, \quad \det(D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)) = \det(D_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)) \neq 0.$$

Donc il existe un voisinage V' de $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ et un voisinage U' de $(\mathbf{x}_0,\mathbf{0})$ tels que $V' \subset E$ et $\mathbf{F}$ est un difféomorphisme de V' à U'. Soit $\mathbf{G}$ la fonction inverse. On peut toujours trouver une boule ouverte $U = B(\mathbf{x}_0,\delta) \subset \mathbb{R}^n$ et un ouvert $W \subset \mathbb{R}^m$ contenant $\mathbf{0}$ tels que $U \times W \subset U'$. On considère alors la restriction $\mathbf{F} : V \to U \times W$ où $V = \mathbf{G}(U \times W)$. La fonction inverse a la forme $\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{w}) = (\mathbf{x},\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},\mathbf{w}))$ avec $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0,\mathbf{0}) = \mathbf{y}_0$. On note, en particulier, que si $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in V$, alors $\mathbf{x} \in U$. La fonction implicite cherchée est alors $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},\mathbf{0}) : U \to \mathbb{R}^m$. En effet :

$$\forall \mathbf{x} \in U, \qquad (\mathbf{x},\mathbf{0}) = \mathbf{F}\circ\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{0}) = \mathbf{F}(\mathbf{x},\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},\mathbf{0})) = \mathbf{F}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})) = (\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}))),$$

donc $\mathbf{f}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{x} \in U$, et

$$\forall (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \Sigma \cap V, \quad (\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{G}\circ\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{G}(\mathbf{x},\underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})}_{=\mathbf{0}}) = (\mathbf{x},\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},\mathbf{0})) = (\mathbf{x},\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})),$$

donc $\Sigma \cap V = \mathcal{G}(\boldsymbol{\phi})$.

Montrons l'unicité de $\boldsymbol{\phi}$: si $\boldsymbol{\phi}^\star : U \to \mathbb{R}^m$ satisfait aussi $\Sigma \cap V = \mathcal{G}(\boldsymbol{\phi}^\star)$, alors $\mathcal{G}(\boldsymbol{\phi}^\star) = \mathcal{G}(\boldsymbol{\phi})$ et donc $\boldsymbol{\phi}^* = \boldsymbol{\phi}$.

Finalement, $\boldsymbol{\phi}$ est de classe C^1 puisque $\mathbf{G}$ est de classe C^1, $\mathbf{F}$ étant un difféomorphisme. De plus, $0 \neq \det(D\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})) = \det(D_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}))$ $\forall (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in V$, donc $D_{\mathbf{y}}\mathbf{f}$ est inversible sur V. Par la formule de dérivation des fonctions composées, on a

$$0 = D(\mathbf{f}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}))) = D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})) + D_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}))\cdot D\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}).$$

d'où

$$D\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = -(D_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})))^{-1}D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})).$$

La démonstration que $\boldsymbol{\phi} \in C^k(U)$ si $\mathbf{f} \in C^k(E)$ se fait par récurrence sur $k \geq 1$. □

Remarque 6.22. *Dans le théorème 6.21, la décomposition du vecteur $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+m}$ en $\mathbf{z} = (\mathbf{x},\mathbf{y})$ est arbitraire. Le théorème reste valable sous la condition plus générale :*

$$\mathrm{Rang}(D\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)) = m.$$

En effet, dans ce cas on sait qu'il existe m colonnes de $D\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)$ linéairement indépendantes. Notons ces colonnes $i_1,\ldots,i_m$. On peut alors définir $(y_1,\ldots,y_m) = (z_{i_1},\ldots,z_{i_m})$ et $(x_1,\ldots,x_n)$ les variables restantes. On aura donc $\det(D_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)) \neq 0$ et on peut appliquer le théorème pour exprimer ces m variables $\mathbf{y}$ en fonction des autres n variables $\mathbf{x}$.

Sous les hypothèses du théorème 6.21, grâce à l'existence d'une fonction implicite on peut définir l'hyperplan tangent à Σ en $\mathbf{z}_0$:

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathbf{z}_0}(\Sigma) &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subset \mathbb{R}^{n+m} : \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 - D\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}\} \\ &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subset \mathbb{R}^{n+m} : D\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) = \mathbf{0}\}\end{aligned}$$

On remarque que $\Pi_{\mathbf{z}_0}(\Sigma)$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^{n+m}$ qui satisfont m équations linéaires. Puisque $D\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)$ a rang maximal, $\Pi_{\mathbf{z}_0}(\Sigma)$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^{n+m}$ de dimension n.

Chapitre 7

Extrema de fonctions réelles

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ pas forcément ouvert pour le moment. On considère ici une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (fonction scalaire) et on se pose la question de trouver le maximum et le minimum de f sur E s'ils existent. Ceci est un problème d'*optimisation*. On commence par donner la définition de point de minimum et maximum local ou global.

Définition 7.1 (Minima et maxima locaux et globaux)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{x}^* \in E$.*

— *On dit que f admet un* maximum local *(ou relatif) au point $\mathbf{x}^* \in E$ s'il existe $\delta > 0$:*

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*), \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^*, \delta) \cap E.$$

Si l'inégalité est stricte (i.e. $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^*)$, $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^*, \delta) \cap E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$) alors le maximum local est strict. *Le point $\mathbf{x}^*$ est appelé point de maximum local (strict) pour f.*

— *On dit que f admet un* minimum local *(ou relatif) au point $\mathbf{x}^* \in E$ s'il existe $\delta > 0$:*

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*), \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^*, \delta) \cap E.$$

Le minimum est strict si l'inégalité est stricte. Le point $\mathbf{x}^*$ est appelé point de minimum local (strict) pour f.

— *Par extremum local (strict) on entend un minimum ou maximum local (strict).*

— *On dit que f admet un maximum (global ou absolu), resp. minimum (global ou absolu) au point $\mathbf{x}^* \in E$ si $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*)$, $\forall \mathbf{x} \in E$, resp. $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$, $\forall \mathbf{x} \in E$. Le maximum/minimum est strict si l'inégalité est stricte*

7.1 Extrema libres

On considère d'abord le cas où l'ensemble E est ouvert et la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ différentiable (une ou plusieurs fois) sur E.

Rappelons ce qu'on sait dire sur la caractérisation des extrema locaux pour une fonction d'une seule variable réelle $f : I \to \mathbb{R}$, définie sur un ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Soit $x^* \in I$.

— Si f est dérivable en x^* et x^* est un point d'extremum local de f, alors $f'(x^*) = 0$ (condition nécessaire du premier ordre).

— Si f est deux fois dérivable sur I et x^* est un point de minimum (resp. maximum) local, alors $f'(x^*) = 0$ et $f''(x^*) \geq 0$ (resp. $f''(x^*) \leq 0$) (condition nécessaire du second ordre).

— Soit f deux fois dérivable sur I et x^* un point stationnaire de f, c.-à-d. que $f'(x^*) = 0$. Si $f''(x^*) > 0$ (resp. $f''(x^*) < 0$) alors x^* est un point de minimum (resp. maximum) local strict (condition suffisante).

— Si $f'(x^*) = f''(x^*) = 0$, on ne peut rien conclure. Pour décider si x^* est un point de minimum / maximum / inflection, il faut regarder les dérivées d'ordres supérieurs (si elles existent) en x^*, ou bien étudier le signe de la fonction $g(x) = f(x) - f(x^*)$ autour de x^*. Par exemple, si on peut montrer que g est non négative dans un voisinage de x^*, alors x^* est un point de minimum local de f. Par contre, si g change de signe en x^*, alors x^* est un point d'inflection (sous l'hypothèse $f'(x^*) = 0$).

Considérons maintenant le cas d'une fonction de plusieurs variables $f : E \to \mathbb{R}$, avec $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide. Soit $\mathbf{x}^* \in E$ (point intérieur car E est ouvert). On peut regarder le comportement de f le long des droites : soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{v}\| = 1$ et $g_{\mathbf{v}}(t) = f(\mathbf{x}^* + t\mathbf{v})$. Si f est différentiable sur E et $\mathbf{x}^*$ est un point d'extremum local de f, alors pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, la fonction $g_{\mathbf{v}}$ est dérivable et admet un extremum local en $t = 0$ (voir Figure 7.1). Il s'ensuit

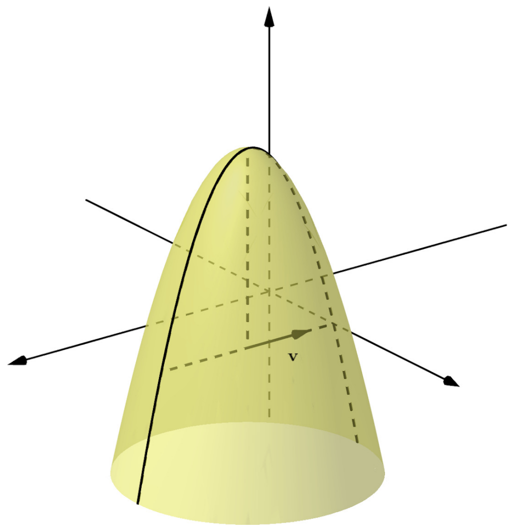


Figure 7.1 – Si $\mathbf{x}^*$ est point de maximum, alors la fonction $g_{\mathbf{v}}(t) = f(\mathbf{x}^* + t\mathbf{v})$ à maximum en $t = 0$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

$$\Big(\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad 0 = g'_{\mathbf{v}}(0) = D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^*) = \nabla f(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{v} \Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

(produit scalaire entre deux vecteurs colonnes). On s'attend alors à ce que $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ soit une condition nécessaire pour que f admette un extremum local en $\mathbf{x}^*$. Le théorème suivant formalise cette idée.

Définition 7.2 (Point stationnaire)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, $\mathbf{x}^* \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ différentiable en $\mathbf{x}^*$. On dit que $\mathbf{x}^*$ est un* point stationnaire *de f si $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ (i.e. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = 0,\ i = 1, \ldots, n$ ou, de façon équivalente, $Df(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$).*

Théorème 7.3 (condition nécessaire de premier ordre)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide et $f : E \to \mathbb{R}$ différentiable sur E admettant un extremum local en $\mathbf{x}^* \in E$. Alors $\mathbf{x}^*$ est un point stationnaire de f, c.-à-d. que $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.*

Démonstration. Puisque E est ouvert, $\exists \delta > 0 : B(\mathbf{x}^*, \delta) \subset E$. Alors $\mathbf{x}^* + t\mathbf{e}_j \in E$ pour tout $t \in \,]-\delta, \delta[$ et $g_j(t) = f(\mathbf{x}^* + t\mathbf{e}_j) : \,]-\delta, \delta[\, \to \mathbb{R}$ est dérivable. Puisque $\mathbf{x}^*$ est un point d'extremum local pour f, 0 est un point d'extremum local pour g_j et $g_j'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) = 0$. □

On considère maintenant le cas $f \in C^2(E)$, qui assure que la matrice $H_f(\mathbf{x}^*)$ est symétrique. Soit $\mathbf{x}^*$ un point de minimum local de f. Alors $t = 0$ est un point de minimum local de $g_{\mathbf{v}}$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ de norme 1. Il s'ensuit que

$$0 \leq g_{\mathbf{v}}''(0) = D^2_{\mathbf{v}\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{v}^\top H_f(\mathbf{x}^*)\mathbf{v}$$

et ainsi $\mathbf{v}^\top H_f(\mathbf{x}^*)\mathbf{v} \geq 0$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Donc, la condition $\mathbf{v}^\top H_f(\mathbf{x}^*)\mathbf{v} \geq 0,\ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, est aussi nécessaire pour que f admette un minimum local en $\mathbf{x}^*$, pourvu que f soit de classe C^2 sur E. De même, la condition $\mathbf{v}^\top H_f(\mathbf{x}^*)\mathbf{v} \leq 0,\ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, est nécessaire pour que f admette un maximum local en $\mathbf{x}^*$, pourvu que f soit de classe C^2 sur E. On a donc démontré

Théorème 7.4 (condition nécessaire du second ordre)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide et $f : E \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur E, admettant un minimum (resp. maximum) local en $\mathbf{x}^* \in E$. Alors $\mathbf{x}^*$ est un point stationnaire de f et $\mathbf{v}^\top H_f(\mathbf{x}^*)\mathbf{v} \geq 0$ (resp. $\mathbf{v}^\top H_f(\mathbf{x}^*)\mathbf{v} \leq 0$) pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.*

Si l'inégalité dans la condition précédente est stricte, i.e. si $\mathbf{v}^\top H_f(\mathbf{x}^*)\mathbf{v} > 0,\ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$, la condition devient suffisante pour que f admette un minimum en $\mathbf{x}^*$, pourvu que $\mathbf{x}^*$ soit un point stationnaire. Ceci est montré dans le théorème 7.8 ci-dessous. Avant de présenter le théorème, on rappelle quelques notions d'algèbre linéaire sur les matrices définies positives ou négatives.

Définition 7.5. *Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique. On dit que A est*

- *définie positive (ou simplement « positive ») si $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} > 0,\ \forall\, \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;*
- *semi-définie positive si $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} \geq 0,\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;*
- *définie négative (ou simplement « négative ») si $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} < 0,\ \forall\, \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;*
- *semi-définie négative si $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} \leq 0,\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;*
- *indéfinie s'il existe $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} > 0$ et $\mathbf{y}^\top A\mathbf{y} < 0$.*

À une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on peut associer une forme quadratique

$$Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Lemme 7.6. *Une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est définie positive si et seulement si*

$$\exists c > 0 \ : \quad \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} \geq c\|\mathbf{x}\|^2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

(On peut prendre n'importe quelle norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$; la constante c dépendra de la norme choisie.)

Démonstration. Soit A définie positive et $Q_A(\mathbf{x})$ la forme quadratique associée à A. Clairement $Q_A(\mathbf{x})$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$. De plus, $\forall t \in \mathbb{R}$, $Q_A(t\mathbf{x}) = t^2 Q_A(\mathbf{x})$. Considérons l'ensemble compact $\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \|\mathbf{x}\| = 1\}$. $Q_A(\mathbf{x})$ admet un maximum et un minimum sur $\mathcal{S}$. Soit $c = \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} Q_A(\mathbf{x})$. Clairement, $c > 0$ car $Q_A(\mathbf{x}) > 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$, et

$$\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = Q_A(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 Q_A\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) \geq c\|\mathbf{x}\|^2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Inversement, s'il existe $c > 0$ tel que $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} \geq c\|\mathbf{x}\|^2$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, on conclut immédiatement que A est définie positive. □

Lemme 7.7. *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique. A est définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A sont positives. De plus $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} \geq \lambda_{min}\|\mathbf{x}\|_2^2$.*

Démonstration. On sait de l'algèbre linéaire qu'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique est toujours diagonalisable avec valeurs propres réelles et n vecteurs propres orthonormés (de norme euclidienne 1 et deux à deux orthogonaux ; ils sont écrits sous forme colonne dans ce qui suit) :

$$AV = VD, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \ \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad V = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] : \ V^\top V = VV^\top = I.$$

Si A est définie positive, c'est-à-dire $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} > 0$, $\forall\, \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, en particulier l'inégalité de l'énoncé est vraie pour $\mathbf{x} = \mathbf{v}_j$ et

$$\mathbf{v}_j^\top A\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j^\top \mathbf{v}_j = \lambda_j > 0, \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Inversement, supposons $\lambda_j > 0$, $\forall j = 1, \ldots, n$. Puisque $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, on peut écrire de façon unique tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ comme $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j = V\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{\beta}$ étant un vecteur colonne) et $\|\mathbf{x}\|_2 = \|\boldsymbol{\beta}\|_2$. Donc $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}^\top V^\top AV\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^\top D\boldsymbol{\beta} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \beta_j^2 \geq \lambda_{min}\|\boldsymbol{\beta}\|_2^2 = \lambda_{min}\|\mathbf{x}\|_2^2$. □

Le Lemme précédent montre que la constant c du Lemme 7.6 est $c = \lambda_{min}$ si la matrice A est symétrique et si on utilise la norme euclidienne. On revient maintenant à la question de caractériser les points d'extremum local d'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$.

Théorème 7.8 (condition suffisante pour extrema locaux)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}$ ouvert non vide, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur E et $\mathbf{x}^* \in E$ un point stationnaire de f, c'est-à-dire $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$. Si $H_f(\mathbf{x}^*)$ est définie positive (resp. définie négative) alors f a un minimum (resp. maximum) local strict en $\mathbf{x}^*$.*

Démonstration. Considérons le cas $H_f(\mathbf{x}^*)$ définie positive (la démonstration pour $H_f(\mathbf{x}^*)$ définie négative est la même). Puisque f est de classe C^2 sur E on peut écrire un développement limité d'ordre 2 de f au point $\mathbf{x}^*$:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \underbrace{\nabla f(\mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)}_{=0} + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^\top H_f(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + R_f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in E,$$

où on a utilisé que $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$ ($\mathbf{x}^*$ est un point stationnaire) et où $R_f(\mathbf{x})$ est tel que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^*} \frac{R_f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2} = 0$. On note

$$r_f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{R_f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2}, & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*, \\ 0 & \mathbf{x} = \mathbf{x}^*, \end{cases}$$

qui est continue en $\mathbf{x}^*$. Puisque $H_f(\mathbf{x}^*)$ est définie positive, $\exists c > 0 :\ \mathbf{v}^\top H_f(\mathbf{x}^*)\mathbf{v} \geq c\|\mathbf{v}\|^2$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. De plus, puisque $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^*} r_f(\mathbf{x}) = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^*, \delta)$, $\mathbf{x} \in E$ et $|r_f(\mathbf{x})| \leq \frac{c}{4}$. Donc

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^*, \delta)\backslash\{\mathbf{x}^*\}, \qquad f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}\underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^\top H_f(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)}_{\geq c\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2} + \underbrace{R_f(\mathbf{x})}_{\geq -\frac{c}{4}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|^2} \\ &\geq f(\mathbf{x}^*) + \frac{c}{4}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 > f(\mathbf{x}^*), \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathbf{x}^*$ est un point de minimum local strict de f. □

D'après ce théorème, si la matrice hessienne est définie (positive ou négative) en un point stationnaire, on peut conclure que ce point stationnaire est un point d'extremum local. On se pose alors la question de savoir la nature d'un point stationnaire lorsque la matrice hessienne en ce point est semi-définie ou indéfinie. On donne d'abord la définition suivante.

Définition 7.9 (Point selle)**.** *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ différentiable sur $E \subset \mathbb{R}^n$, ouvert non vide, et $\mathbf{x}^* \in E$ un point stationnaire. On dit que $\mathbf{x}^*$ est un* point selle *de f si*

$$\forall \delta > 0\ \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}^*, \delta) \cap E \quad \Big(f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}^*) \ \textit{et}\ f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x}^*)\Big).$$

Avec cette définition et le résultat du théorème 7.8, on a la classification suivante des points stationnaires $\{\mathbf{x}^* \in E :\ \nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}\}$.

- Si $H_f(\mathbf{x}^*)$ est *définie positive* (i.e. $\mathbf{x}^\top H_f(\mathbf{x}^*)\mathbf{x} > 0,\ \forall \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ou, de façon équivalente, $\lambda_i(H_f(\mathbf{x}^*)) > 0,\ \forall i = 1, \ldots, n$), alors $\mathbf{x}^*$ est un point de minimum local strict. Lorsque $n = 2$, $H_f(\mathbf{x}^*)$ est définie positive ssi à la fois la trace de $H_f(\mathbf{x}^*)$ est > 0 et $\det(H_f(\mathbf{x}^*)) > 0$.
- Si $H_f(\mathbf{x}^*)$ est *définie négative* (i.e. $\mathbf{x}^\top H_f(\mathbf{x}^*)\mathbf{x} < 0,\ \forall \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ou, de façon équivalente, $\lambda_i(H_f(\mathbf{x}^*)) < 0,\ \forall i = 1, \ldots, n$), alors $\mathbf{x}^*$ est un point de maximum local strict. Lorsque $n = 2$, $H_f(\mathbf{x}^*)$ est définie négative ssi à la fois la trace de $H_f(\mathbf{x}^*)$ est < 0 et $\det(H_f(\mathbf{x}^*)) > 0$.

— Si $H_f(\mathbf{x}^*)$ est *indéfinie* (i.e. $\exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^\top H_f(\mathbf{x}^*)\mathbf{x} > 0,\ \mathbf{y}^\top H_f(\mathbf{x}^*)\mathbf{y} < 0$ ou, de façon équivalente, $\exists i, j = 1, \dots, n : \lambda_i(H_f(\mathbf{x}^*)) > 0$ et $\lambda_j(H_f(\mathbf{x}^*)) < 0$) alors $\mathbf{x}^*$ est un point selle. Une condition suffisante pour que $H_f(\mathbf{x}^*)$ soit indéfinie est que $\det(H_f(\mathbf{x}^*)) < 0$.

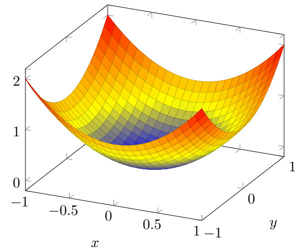
— Si $H_f(\mathbf{x}^*)$ est *seulement* semi-définie positive (ou négative), on ne peut pas conclure sur la nature du point stationnaire à partir des résultats précédents.

Exemple 7.10. *Considérons les trois fonctions* $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

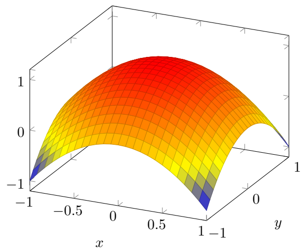
$$f_1(x,y) = x^2 + y^2, \qquad f_2(x,y) = 1 - x^2 - y^2, \qquad f_3(x,y) = x^2 - y^2.$$

Pour toutes les trois fonctions, le seul point stationnaire est $\mathbf{x}^* = (0,0)$. *Étudions sa nature dans les trois cas.*

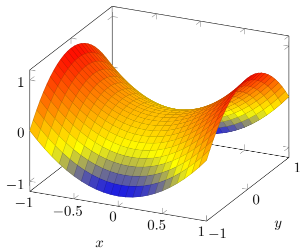
Fonction f_1 : $\quad H_{f_1}(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *définie positive*



Fonction f_2 : $\quad H_{f_2}(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ *définie négative*



Fonction f_3 : $\quad H_{f_3}(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ *indéfinie*



Exercice 7.11. *Trouver les extrema locaux de la fonction* $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 1$ *et les caractériser.*

Si $H_f(\mathbf{x}^*)$ est seulement semi-définie positive (ou négative), on ne peut pas conclure que $\mathbf{x}^*$ est un point de minimum local (ou maximum local). De plus, même si $g_{\mathbf{v}}(t) = f(\mathbf{x}^* + t\mathbf{v})$ a un minimum local en $t = 0$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, on ne peut pas conclure que f admet un minimum local en $\mathbf{x}^*$ comme l'exemple suivant le montre.

Exemple 7.12. *Considérons la fonction* $f(x, y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4$. *On a*

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} -6xy + 8x^3 \\ 2y - 3x^2 \end{bmatrix}, \qquad H_f(x, y) = \begin{bmatrix} -6y + 24x^2 & -6x \\ -6x & 2 \end{bmatrix}.$$

Donc

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} -6xy + 8x^3 = 0 \\ y = \frac{3}{2}x^2 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)$$

et $P = (0, 0)$ *est le seul point stationnaire. De plus* $H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *est semi-définie positive. Pour toute droite* $\mathbf{x} = (x, y) = t\mathbf{v},\ t \in \mathbb{R},\ \mathbf{v} \neq (1, 0)$, *on a*

$$\mathbf{v}^\top H_f(0, 0)\mathbf{v} = (v_1, v_2)\, H_f(0, 0) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2v_2^2 > 0,$$

donc la fonction $g_{\mathbf{v}}(t) = f(t\mathbf{v})$ *a un minimum local en* $t = 0$. *De plus pour* $\mathbf{v} = (1, 0)$, $g_{\mathbf{v}}(t) = f(t(1, 0)) = 2t^4$ *a un minimum local en* $t = 0$, *donc* $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, g_{\mathbf{v}}(t) = f(t\mathbf{v})$ *a un minimum local* $t = 0$. *Toutefois, si on prend* $x = t$ *et* $y = \frac{3}{2}t^2$ *on a*

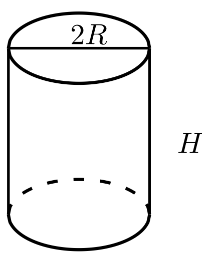
$$f(t, \frac{3}{2}t^2) = \frac{9}{4}t^4 - \frac{9}{2}t^4 + 2t^4 = -\frac{1}{4}t^4$$

qui a un maximum local en $t = 0$ *! Donc* $(0, 0)$ *n'est pas un point d'extremum local de* f.

7.2 Extrema liés

Il est souvent le cas dans les applications, qu'on cherche a trouver le minimum (ou maximum) d'une fonction $\min_{\mathbf{z} \in E} f(\mathbf{z})$ mais les variables $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ ne peuvent pas être choisies arbitrairement et sont liées par des contraintes.

Exemple 7.13. *Considérons une canette de forme cylindrique. On veut trouver la forme optimale qui minimise la surface (qui requiert le minimum de matériel) tout en gardant un volume constant. Soit* $\Sigma_{R,H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2,\ 0 \leq z \leq H\}$ *un cylindre plein de hauteur* $H > 0$ *et de rayon* $R > 0$.



Ce cylindre a un volume $V(R,H) = \pi R^2 H$ *et une surface* $S(R,H) = 2\pi R^2 + 2\pi RH$. *Le problème d'optimisation prend la forme suivante : pour* $\overline{V} > 0$ *donné, discuter*

$$\min_{R,H>0} S(R,H) \quad \textit{sous la contrainte } V(R,H) = \overline{V}.$$

Ceci est un problème de minimisation sous contrainte.

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide et $f, g : E \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose le problème de minimisation (maximisation) sous contrainte suivant

$$\min_{\mathbf{z}\in E} f(\mathbf{z}) \quad \text{sous la contrainte } g(\mathbf{z}) = 0.$$

Si on dénote par $\Sigma_g = \{\mathbf{z} \in E : g(\mathbf{z}) = 0\}$ l'ensemble des points qui satisfont la contrainte (appelé aussi *ensemble faisable* ou *admissible*), le problème de minimisation sous contrainte peut s'écrire de façon équivalente comme

$$\min_{\mathbf{z}\in\Sigma_g} f(\mathbf{z}).$$

Déterminer si le minimum est fini et effectivement atteint fait partie de la discussion.

Définition 7.14. *On dit que* $\mathbf{z}^* \in \Sigma_g$ *est un point de minimum local de* f *sur* Σ_g *si*

$$\exists \delta > 0 \ \forall \mathbf{z} \in B(\mathbf{z}^*, \delta) \cap \Sigma_g \quad f(\mathbf{z}^*) \leq f(\mathbf{z})$$

Le minimum est strict si l'inégalité est stricte, dans le même sens qu'expliqué plus haut.

De la même façon, on dit que $\mathbf{z}^* \in \Sigma_g$ *est un point de maximum local de* f *sur* Σ_g *si*

$$\exists \delta > 0 \ \forall \mathbf{z} \in B(\mathbf{z}^*, \delta) \cap \Sigma_g \quad f(\mathbf{z}^*) \geq f(\mathbf{z}).$$

Le maximum est strict si l'inégalité est stricte. On utilise aussi la terminologie de minimum/maximum (strict ou non) lié.

On se pose la question de caractériser les points d'extremum (minimum/maximum) liés. Voyons quelques exemples :

Exemple 7.15. *On considère le problème de minimisation suivante :*

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x^2 + y^2 \quad \textit{sous la contrainte } x + y - 1 = 0.$$

La fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ *à minimiser est convexe et a un minimum global en* $(0,0)$. *Toutefois, ce point ne satisfait pas la contrainte. Le minimum lié est caractérisé par le fait que* ∇f *est perpendiculaire à la contrainte au point de minimum lié. Voir la figure* 7.2 *(gauche) pour une interprétation graphique.*

Exemple 7.16. *On considère le problème de minimisation suivante :*

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x + y \quad \textit{sous la contrainte } x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

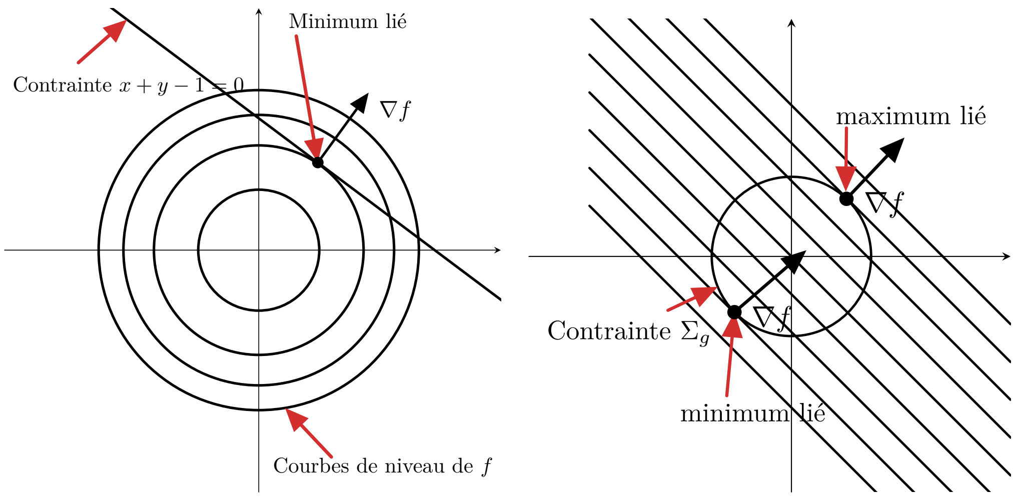


Figure 7.2 – Gauche : Problème de minimisation, Exemple 7.15. Droite : Problème de minimisation, Exemple 7.16.

La fonction $f(x, y) = x + y$ n'a pas de minimum ou maximum sur $\mathbb{R}^2$. Toutefois, l'ensemble $\Sigma_g = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ est compact, donc f étant continue, elle atteint son maximum et minimum sur Σ_g. On voit encore qu'aussi bien au point de minimum lié qu'au point de maximum lié, le vecteur ∇f est perpendiculaire à la courbe Σ_g (c'est-à-dire, orthogonal au plan tangent).

Soit $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ et x_M le point de maximum lié. Puisque $\nabla g = (2y, 2y)^\top \neq \mathbf{0}$, $\forall (x, y) \in \Sigma_g$, l'équation $g = 0$ définit implicitement une fonction $y = \phi(x)$ ou $x = \phi(y)$, et, autour de chaque point $\mathbf{z} \in \Sigma_g$, l'ensemble Σ_g peut être représenté par le graphe d'une fonction. De plus, le vecteur $\nabla g(\mathbf{z})$ est normal au plan tangent $\Pi_{\mathbf{z}}(\Sigma)$ à Σ_g en $\mathbf{z}$.

Puisqu'au point du maximum lié on a que $\nabla f(\mathbf{x}_M)$ est aussi un vecteur normal au plan tangent $\Pi_{\mathbf{x}_M}(\Sigma)$, il s'ensuit que $\nabla f(\mathbf{x}_M) \parallel \nabla g(\mathbf{x}_M)$, c'est-à-dire $\exists \lambda \in \mathbb{R} :\ \nabla f(\mathbf{x}_M) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_M)$. Ceci est en fait une condition nécessaire *pour avoir un extremum lié comme le théorème suivant le montre.*

Théorème 7.17 (Condition nécessaire d'optimalité)**.** *Soit $n \geq 2$, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $C^1(E)$ et $\mathbf{z}^* \in \Sigma_g = \{\mathbf{z} \in E : g(\mathbf{z}) = 0\}$ un point d'extremum local de f sur Σ_g. Alors, si $\nabla g(\mathbf{z}^*) \neq \mathbf{0}$, il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(\mathbf{z}^*) = \lambda^* \nabla g(\mathbf{z}^*)$.*

Démonstration. Puisque $\nabla g(\mathbf{z}^*) \neq \mathbf{0}$, il y a au moins une composante non nulle, soit $\frac{\partial g}{\partial z_j}(\mathbf{z}^*) \neq 0$. Pour se fixer les idées, supposons que $j = n$, le cas général se traitant de la même manière en permutant le rôle des coordonnées. Notons $y = z_n$ et $\mathbf{x} = (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, de sorte que tout point $\mathbf{z} \in E$ puisse s'écrire comme $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, y)$; en particulier $\mathbf{z}^* = (\mathbf{x}^*, y^*)$. Par le théorème des fonctions implicites, il existe $\delta > 0$ et une unique fonction $\phi : B(\mathbf{x}^*, \delta) \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(\mathbf{x}^*) = y^*$, $(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) \in E$ et $g(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) = 0$ sur $B(\mathbf{x}^*, \delta)$, et le graphe de ϕ coïncide avec Σ_g dans un voisinage de $\mathbf{z}^*$.

Alors la fonction $\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))$ admet un extremum local (libre) en $\mathbf{x}^*$ et $\nabla \tilde{f}(\mathbf{x}^*) =$

0. Donc

$$0 = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*, \phi(\mathbf{x}^*)) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}^*, \phi(\mathbf{x}^*))\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*), \quad \forall i = 1, \dots, n-1.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{z}^*)}{\frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{z}^*)}.$$

Par conséquent, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{z}^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{z}^*)\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{z}^*)}{\frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{z}^*)} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n-1.$$

Si on pose $\lambda^* = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{z}^*)}{\frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{z}^*)}$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{z}^*) = \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{z}^*), \quad \forall i = 1, \dots, n-1$$

et, par définition, $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{z}^*) = \lambda^* \frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{z}^*)$. On a donc bien

$$\nabla f(\mathbf{z}^*) = \lambda^* \nabla g(\mathbf{z}^*).$$

$\square$

D'après le théorème, une condition nécessaire pour que $\mathbf{z}^* \in \Sigma_g$, avec $\nabla g(\mathbf{z}^*) \neq \mathbf{0}$, soit un point d'extremum lié de f sur Σ_g est que $(\mathbf{z}^*, \lambda^*)$ soit solution du système

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{z}) = \lambda \nabla g(\mathbf{z}) \\ g(\mathbf{z}) = 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues $(\mathbf{z}, \lambda) = (z_1, \dots, z_n, \lambda)$. On remarque, en particulier, qu'un point $\mathbf{z}^*$ d'extremum lié de f sur Σ_g n'est généralement pas un point stationnaire de f car $\nabla f(\mathbf{z}^*) = \lambda^* \nabla g(\mathbf{z}^*) \neq \mathbf{0}$ si $\lambda^* \neq 0$.

Exemple 7.18. *On cherche les extrema de $f(x,y) = x+y$, liés par la contrainte $g(x,y) = 0$, où $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. On résout d'abord le système de 3 équations à trois inconnues (x, y, λ) :*

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

On remarque que $\lambda = 0$ n'est pas une solution. Alors, les premières deux équations donnent $x = y = \frac{1}{2\lambda}$ et, de la troisième équation, on obtient $\lambda^2 = \frac{1}{2}$ qui admet les deux solutions $\lambda^* = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. On a alors deux points candidats :

$$\mathbf{P}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \qquad \mathbf{P}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Puisque l'ensemble $\Sigma_g = \{(x,y) : \ g(x,y) = 0\}$ est compact et f est continue, alors f admet un maximum et un minimum sur Σ_g et nécessairement $\mathbf{P}_1$ ou $\mathbf{P}_2$ doit être un point de maximum lié et l'autre un point de minimum lié. Par évaluation directe de f en $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ on conclut :

$$\mathbf{P}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ est un point de maximum lié,} \qquad \max_{(x,y)\in\Sigma_g} f(x,y) = f(\mathbf{P}_1) = \frac{2}{\sqrt{2}},$$
$$\mathbf{P}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ est un point de minimum lié,} \qquad \min_{(x,y)\in\Sigma_g} f(x,y) = f(\mathbf{P}_2) = -\frac{2}{\sqrt{2}}.$$

7.3 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Le système (7.1) donne des *conditions nécessaires d'optimalité.* Il y a une autre façon d'obtenir ce système qui utilise la *fonction de Lagrange* (ou *lagrangienne*)

$$\mathcal{L} : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \mathcal{L}(\mathbf{z}, \lambda) = f(\mathbf{z}) - \lambda g(\mathbf{z}).$$

La variable $\lambda \in \mathbb{R}$ est appelée dans ce cas le *multiplicateur de Lagrange.*

Si $\mathbf{z}^* \in \Sigma_g = \{\mathbf{z} \in E : g(\mathbf{z}) = 0\}$ est un point d'extremum lié de f sur Σ_g avec $\nabla g(\mathbf{z}^*) \neq \mathbf{0}$, alors d'après le théorème 7.17, il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tel que $(\mathbf{z}^*, \lambda^*)$ est solution de (7.1). On vérifie facilement que ceci est équivalent à dire que $(\mathbf{z}^*, \lambda^*)$ est un point stationnaire de la fonction de Lagrange. En effet

$$\nabla\mathcal{L}(\mathbf{z}^*, \lambda^*) = \mathbf{0} \qquad \iff \qquad \begin{cases} \nabla_{\mathbf{z}}\mathcal{L}(\mathbf{z}^*, \lambda^*) = \mathbf{0} \\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{L}(\mathbf{z}^*, \lambda^*) = 0 \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} \nabla f(\mathbf{z}^*) = \lambda^*\nabla g(\mathbf{z}^*) \\ g(\mathbf{z}^*) = 0. \end{cases}$$

Donc pour trouver les extrema liés de f sur Σ_g, il faut d'abord chercher les points stationnaires de $\mathcal{L}$.

7.4 Extrema sous contraintes multiples

Dans les sections précédentes on a considéré le cas où les variables $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ sont liées par une contrainte $g(\mathbf{z}) = 0$. Les arguments présentés se généralisent au cas où les variables $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ sont liées par plusieurs contraintes.

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide et $f, g_1, g_2, \dots, g_m : E \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(E)$, avec $m < n$. On pose le problème de minimisation sous contraintes multiples suivant

$$\min_{\mathbf{z}\in E} f(\mathbf{z}) \quad \text{sous les contraintes} \quad g_i(\mathbf{z}) = 0, \ i = 1, \dots, m. \tag{7.2}$$

Soit $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_m) : E \to \mathbb{R}^m$ et $\Sigma_{\mathbf{g}} = \{\mathbf{z} \in E : \mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{z} \in E : g_i(\mathbf{z}) = 0, \ \forall i = 1, \dots, m\}$ l'ensemble faisable. Alors le problème (7.2) est équivalent à

$$\min_{\mathbf{z}\in\Sigma_{\mathbf{g}}} f(\mathbf{z}).$$

Le théorème 7.17 sur les conditions nécessaires d'optimalité se généralise de la façon suivante.

Théorème 7.19 (condition nécessaire d'optimalité – contraintes multiples)**.** *Soit* $E \subset \mathbb{R}^n$ *ouvert non vide,* $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(E)$ *et* $\mathbf{z}^* \in \Sigma_{\mathbf{g}} = \{\mathbf{z} \in E : g_i(\mathbf{z}) = 0,\ i = 1, \dots, m\}$ *un point d'extremum local lié de* f *sur* $\Sigma_{\mathbf{g}}$ *(avec* $m < n$*). Si* $\mathrm{Rang}(D\mathbf{g}(\mathbf{z}^*)) = m$*, c'est-à-dire si les vecteurs* $\{\nabla g_1(\mathbf{z}^*), \dots, \nabla g_m(\mathbf{z}^*)\}$ *sont linéairement indépendants, alors il existe* $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \in \mathbb{R}^m$ *tel que*

$$\nabla f(\mathbf{z}^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{z}^*)$$

ou, de façon équivalente, $(\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in E \times \mathbb{R}^m$ *est un point stationnaire de la fonction de Lagrange* $\mathcal{L} : E \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{z}) - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{z})$ *i.e.*

$$\nabla_{(\mathbf{z},\boldsymbol{\lambda})} \mathcal{L}(\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0}.$$

Démonstration. Puisque $\mathrm{Rang}(D\mathbf{g}(\mathbf{z}^*)) = m$, il existe m colonnes linéairement indépendantes de la matrice Jacobienne $D\mathbf{g}(\mathbf{z}^*)$. Soient $(i_1, \dots, i_m)$ ces colonnes. Pour se fixer les idées, supposons que ce soit les m dernières : $(i_1, \dots, i_m) = (n - m + 1, \dots, n)$, le cas général se traitant de la même manière en permutant le rôle des n coordonnées. Notons $\mathbf{y} = (z_{n-m+1}, \dots, z_n)$ et $\mathbf{x} = (z_1, \dots, z_{n-m})$ les variables restantes, de sorte que $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et, en particulier, $\mathbf{z}^* = (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$. De plus, nous décomposons la matrice jacobienne en $D\mathbf{g}(\mathbf{z}^*) = [D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{z}^*) | D_{\mathbf{y}}\mathbf{g}(\mathbf{z}^*)]$ où

$$D_{\mathbf{y}}\mathbf{g}(\mathbf{z}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_{n-m+1}}(\mathbf{z}^*) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial z_n}(\mathbf{z}^*) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial z_{n-m+1}}(\mathbf{z}^*) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial z_n}(\mathbf{z}^*) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

est inversible. Puisque $\det(D_{\mathbf{y}}\mathbf{g}(\mathbf{z}^*)) \neq 0$, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites. Donc il existe une boule ouverte $U = B(\mathbf{x}^*, \delta) \subset \mathbb{R}^{n-m}$, un ouvert $V \subset E \subset \mathbb{R}^n$ contenant $\mathbf{z}^*$ et une fonction $\boldsymbol{\phi} : U \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^1(U)$ tels que

— $\mathbf{y}^* = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}^*)$ et, pour tout $\mathbf{x} \in U$, $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})) \in V$ et $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$;

— $\Sigma_{\mathbf{g}} \cap V = \mathcal{G}(\boldsymbol{\phi})$

— $D\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}^*) = -(D_{\mathbf{y}}\mathbf{g}(\mathbf{z}^*))^{-1} D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{z}^*)$.

Introduisons $\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in U$. Alors $\mathbf{x}^*$ est un extremum local de $\tilde{f}$ sur U et $D\tilde{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = D\tilde{f}(\mathbf{x}^*) &= D_{\mathbf{x}} f(\mathbf{z}^*) + D_{\mathbf{y}} f(\mathbf{z}^*) \cdot D\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}^*) \\ &= D_{\mathbf{x}} f(\mathbf{z}^*) - D_{\mathbf{y}} f(\mathbf{z}^*) D_{\mathbf{y}}\mathbf{g}(\mathbf{z}^*)^{-1} D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{z}^*). \end{aligned}$$

Si on pose $\boldsymbol{\lambda}^* = \underbrace{D_{\mathbf{y}} f(\mathbf{z}^*)}_{\in \mathbb{R}^{1\times m}} \underbrace{D_{\mathbf{y}}\mathbf{g}(\mathbf{z}^*)^{-1}}_{\in \mathbb{R}^{m \times m}} \in \mathbb{R}^{1\times m}$ (vecteur ligne), on a pour $i = 1, \dots, n - m$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{z}^*) - \boldsymbol{\lambda}^* D_{x_i}\mathbf{g}(\mathbf{z}^*) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{z}^*) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{z}^*)$$

et, par définition, $D_{\mathbf{y}} f(\mathbf{z}^*) = \boldsymbol{\lambda}^* D_{\mathbf{y}} \mathbf{g}(\mathbf{z}^*)$ qui implique

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}(\mathbf{z}^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial y_i}(\mathbf{z}^*) \quad i = 1, \ldots, m.$$

Donc finalement

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(\mathbf{z}^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial z_i}(\mathbf{z}^*), \quad i = 1, \ldots, n$$

que l'on peut écrire comme

$$\nabla f(\mathbf{z}^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \nabla g_j(\mathbf{z}^*)$$

ou encore

$$\nabla_{(\mathbf{z},\boldsymbol{\lambda})} \mathcal{L}(\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0}.$$

□

Exercice 7.20. *Chercher les extrema liés de $f(x, y, z) = x + y + z$ sous les contraintes $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$, $g_2(x, y, z) = x + z - 1 = 0$.*

7.5 Conditions suffisantes

On mentionne ici sans démonstration (laissée comme exercice) des conditions suffisantes pour avoir un extremum local lié.

Théorème 7.21. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, $f, g_1, \ldots, g_m \in C^2(E)$ et $(\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in E \times \mathbb{R}^m$ un point stationnaire de la fonction de Lagrange $\mathcal{L}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{z}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{z})$ (c'est-à-dire $\nabla \mathcal{L}(\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0}$). On note $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_m) : E \to \mathbb{R}^m$ et $\Sigma_{\mathbf{g}} = \{\mathbf{z} \in E : \mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}\}$ l'ensemble faisable. Supposons encore* $\mathrm{Rang}(D\mathbf{g}(\mathbf{z}^*)) = m$ *et considérons l'*espace vectoriel *tangent à $\Sigma_{\mathbf{g}}$ en $\mathbf{z}^*$:*

$$T_{\mathbf{z}^*}(\Sigma_{\mathbf{g}}) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : D\mathbf{g}(\mathbf{z}^*) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}\}.$$

Si

$$\forall \mathbf{w} \in T_{\mathbf{z}^*}(\Sigma_{\mathbf{g}}) \backslash \{\mathbf{0}\} \quad \mathbf{w}^\top \left(H_f(\mathbf{z}^*) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* H_{g_i}(\mathbf{z}^*) \right) \mathbf{w} > 0,$$

alors $\mathbf{z}^*$ est un point de minimum local de f sur $\Sigma_{\mathbf{g}}$.

La condition $D\mathbf{g}(\mathbf{z}^*) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}$ dans le théorème précédent implique $(\nabla g_i(\mathbf{z}^*))^\top \cdot \mathbf{w} = 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$. Donc les directions $\mathbf{w}$ sont des directions orthogonales à tous les vecteurs $\nabla g_i(\mathbf{z}^*)$ et donc *tangentielles* à la contrainte $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Si on note $H_{\mathcal{L}}^{(\mathbf{z})}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda})$ la matrice Hessienne de $\mathcal{L}$ calculée uniquement par rapport aux variables $\mathbf{z}$:

$$\left(H_{\mathcal{L}}^{(\mathbf{z})}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda})\right)_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z_i \partial z_j}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(\mathbf{x}) - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell \frac{\partial^2 g_\ell}{\partial z_i \partial z_j}(\mathbf{x}),$$

on voit que $H_{\mathcal{L}}^{(\mathbf{z})}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}) = H_f(\mathbf{z}) - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell H_{g_\ell}(\mathbf{z})$. Le théorème précédent nous dit ainsi que, si

$$\forall \mathbf{w} \in T_{\mathbf{z}^*}(\Sigma_{\mathbf{g}}) \backslash \{\mathbf{0}\} \quad \mathbf{w}^\top H_{\mathcal{L}}^{(\mathbf{z})}(\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)\mathbf{w} > 0,$$

alors $\mathbf{z}^*$ est un point de minimum local lié. Il suffit de vérifier la positivité de la forme quadratique $\mathbf{w}^\top H_{\mathcal{L}}^{(\mathbf{z})}\mathbf{w}$ (et non pas de $\mathbf{w}^\top H_f(\mathbf{z}^*)\mathbf{w}$!) uniquement pour les directions tangentielles à la contrainte $\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$.