

Série 2

David Wiedemann

2 octobre 2020

On démontre d'abord la propriété énoncée dans l'exercice 2, partie 2 :

Lemme 1. $(a, b) \in R$ si et seulement si $R_a = R_b$.

Démonstration. On montre l'implication dans les deux sens.

\Rightarrow

Supposons, par l'absurde, $(a, b) \notin R$ mais $R_a \cap R_b$ non vide. Supposons $c \in R_a \cap R_b$, alors $c \in R_a$ et donc $(a, c) \in R$. De même, $c \in R_b$ et donc $(c, b) \in R$.

Par la transitivité de la relation d'équivalence, on a donc :

$$(a, b) \in R$$

ce qui est une contradiction à notre hypothèse.

\Leftarrow

Supposons, par l'absurde, $(a, b) \in R$ mais $R_a \cap R_b = \emptyset$, alors

$$(a, b) \in R \Rightarrow b \in R_b \text{ et } b \in R_a$$

Ce qui est une contradiction à l'hypothèse que $R_a \cap R_b = \emptyset$. \square

Ce lemme nous montre que deux classes d'équivalence différentes ne peuvent pas contenir d'éléments commun.

Etant donné que chaque classe d'équivalence contient au moins 1 élément. Finalement, on sait que les classes d'équivalence forment une partition de A , il n'y a pas d'éléments dans A qui n'appartiennent pas à une classe d'équivalence. En effet, supposons que $p \in A$, $(p, p) \in R$ et donc $p \in R_p$.

Grâce à ceci, on peut déduire que le nombre d'éléments de R vaut la somme du nombre d'éléments des classes d'équivalence.

Montrons que il y a trois manières différentes de répartir.

On voit que 6 peut s'écrire de trois manières comme somme de trois nombres non-nuls :

$$6 = 2 + 2 + 2$$

$$6 = 4 + 1 + 1$$

$$6 = 3 + 2 + 1$$

Si deux des trois classes d'équivalence ne contiennent qu'un seul élément, il faut que la dernière classe d'équivalence en contienne 4.

On sait, en utilisant de la combinatoire élémentaire, que une répartition avec répétition de 4 éléments sur 2 places a $4 \times 4 = 16$ possibilités. Les deux autres classes d'équivalence ont chacune 1 élément.

En tout R , contiendra donc $4 \times 4 + 1 + 1 = 18$.

Si une classe d'équivalence possède 1 élément, une autre 2 éléments et la dernière 3 éléments, R contiendra $(3 \times 3) + (2 \times 2) + (1 \times 1) = 14$ éléments.

Si chacune des trois classes d'équivalence possède 2 éléments R contiendra $(2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) = 12$ éléments.

On peut construire des relations d'équivalence qui satisfont la répartition des éléments tel que ci-dessus.

Soit $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

Soit A_1, A_2, A_3 une partition de l'ensemble A , avec les trois ensembles non-vides.

On pose que $(x_i, x_j) \in R$ si x_i et x_j sont dans le même A_k .

Cette relation satisfait les propriétés d'une relation d'équivalence, en effet :

1. Identité :

Si $x_i \in A_k$, alors, clairement $(x_i, x_j) \in R$

2. Reflexivite :

Si $(x_i, x_j) \in R$, alors $x_i \in A_k$ et $x_j \in A_k$, donc $(x_j, x_i) \in R$.

3. Transitivité :

Si $(x_i, x_j) \in R$ et $(x_j, x_g) \in R$, alors $x_i, x_j, x_g \in A_k$, donc $(x_i, x_g) \in R$