19.1. $(*)$ Utiliser les développements limités pour démontrer que si $f \in C^2(\mathbf{R})$ et si $x \in \mathbf{R}$, alors on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

19.2. Faites pour vous-même l'exemple ci-dessous vu au cours de lundi, si possible sans regarder vos notes de cours:

On accepte l'existence d'une fonction

$$\exp\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}_+$$

avec les propriétés suivantes: (i) exp est dérivable et $\exp' = \exp$; (ii) $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

On définit la fonction

$$f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}_+$$

par $f(x) = \exp(-1/x^2)$ quand $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0$.

b) Démontrer que pour tous polynômes P et Q on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)\exp(x)} = 0$.

c) Démontrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f est n fois dérivable et calculer $f^{(n)}(0)$. Indication: il n'est pas nécessaire de trouver une formule précise pour $f^{(n)}(x)$...