EPFL - Automne 2020	Prof. Z. Patakfalvi
Structures Algébriques	**Exercices**
Série 13	11 décembre 2020

Exercice 1.
Dans l'exercice 8 de la série 8, nous avons vu un exemple d'un sous-groupe normal $H \trianglelefteq A_4$ et d'un sous-groupe normal $F \trianglelefteq H$ tel que F n'est pas normal dans A_4. Nous présentons ici une notion qui permet de résoudre ce "problème".
Fixons un groupe G ainsi qu'un sous-groupe $H \leq G$.

1. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

   (a) $\forall \sigma \in \mathrm{Aut}(G): \ \sigma(H) \subseteq H$

   (b) $\forall \sigma \in \mathrm{Aut}(G): \ \sigma(H) = H$

   Définition : Un sous-groupe $H \leq G$ est dit *caractéristique dans* G s'il satisfait l'une des deux conditions ci-dessus.

   Remarque : si on fixe un automorphisme $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$, il n'est en général pas vrai que $\sigma(H) \subseteq H$ est équivalent à $\sigma(H) = H$. Un exemple est donné dans l'exercice 7 ci-dessous.

2. Supposons que $H \trianglelefteq G$ et que $F \leq H$ est un sous-groupe caractéristique de H. Démontrer que $F \trianglelefteq G$.

3. Montrez que $F = \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle$ est un sous-groupe caractéristique de A_4. Déduisez que $F \trianglelefteq S_4$. (Voir également l'exercice 4 de la série 11).

Exercice 2.

1. Soit k un corps. Montrez que dans le sous-groupe de Borel $B(n, k)$ on a la règle de multiplication suivante:

$$\begin{pmatrix} a_1 & * & \dots & * & * \\ 0 & a_2 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & * & \dots & * & * \\ 0 & b_2 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & * & \dots & * & * \\ 0 & a_2 b_2 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} b_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n b_n \end{pmatrix}$$

2. Montrez que $U(n, \mathbb{F}_p) \leq B(n, \mathbb{F}_p)$ est un sous-groupe caractéristique. *Indication : utilisez l'exercice 2.1 de la série 12, ainsi que l'exercice 1.2 de la série 5.*

3. Montrez que $B(n, \mathbb{F}_p) \cong U(n, \mathbb{F}_p) \rtimes_\phi T(n, \mathbb{F}_p)$ pour $\phi = \mathrm{Ad}_{T(n,\mathbb{F}_p)}^{U(n,\mathbb{F}_p)}$ (voir la définition 3.8.3 des notes du cours).

   Indication : utilisez le théorème 3.8.13.

4. Calculez le noyau de $\mathrm{Ad}_{T(2,\mathbb{F}_p)}^{U(2,\mathbb{F}_p)}$.

Exercice 3.
Prenons $H = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et $F = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et notons que $\mathrm{Aut}\, H = \left(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\right)^\times \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (voir Remarque 3.5.36 (2)).

1. Montrez qu'il existe deux homomorphismes non-triviaux $\phi, \phi' : F \to \mathrm{Aut}\, H$, donnés par
$$\Big(\phi([1]_3)\Big)\big([i]_7\big) = [2i]_7$$
et
$$\Big(\phi'([1]_3)\Big)\big([i]_7\big) = [4i]_7$$

2. Calculez les formules, pour tout $r \geq 1$
$$\forall\big([i],[1]\big) \in H \rtimes_\phi F : \ \big([i],[1]\big)^r = \left(\sum_{l=0}^{r-1} \left[2^l i\right], [r]\right) = \big(\left[(2^r-1)i\right], [r]\big)$$
et
$$\forall\big([i],[2]\big) \in H \rtimes_\phi F : \ \big([i],[2]\big)^r = \left(\sum_{l=0}^{r-1} \left[4^l i\right], [2r]\right) = \big(\left[\tfrac{4^r-1}{3} \cdot i\right], [2r]\big)$$

3. Démontrez que l'ordre d'un élément non-trivial $\big([i],[j]\big) \in H \rtimes_\phi F$ vaut
$$o\big([i],[j]\big) = \begin{cases} 7 & \text{si } [j] = [0] \\ 3 & \text{si } [j] \neq [0] \end{cases}$$

4. Montrez que $H \rtimes_\phi F \cong H \rtimes_{\phi'} F$.

Exercice 4.
Posons $H = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $F = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, où p et q sont des nombres premiers. On admet ici le fait que le groupe $\mathrm{Aut}\, H \cong \left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^\times$ est isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$.

1. Démontrez que si q divise $p-1$, alors il existe un homomorphisme non-trivial $\phi : F \to \operatorname{Aut} H$. Dans ce cas, on fixe un tel morphisme ϕ pour les parties qui suivent.

2. Démontrez que pour chaque $\big([i],[j]\big) \in H \rtimes_\phi F$ tel que $[j] \neq [0]$ il existe un $[s] \in \left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^\times$ tel que $[s] \neq [1]$ et
$$\big([i],[j]\big)^r = \left(\sum_{l=0}^{r-1} \left[s^l i\right], [jr]\right) = \left(\left[\tfrac{s^r-1}{s-1} \cdot i\right], [jr]\right)$$

3. Démontrez que l'ordre d'un élément non-trivial $\big([i],[j]\big) \in H \rtimes_\phi F$ vaut
$$o\big([i],[j]\big) = \begin{cases} p & \text{si } [j] = [0] \\ q & \text{si } [j] \neq [0] \end{cases}$$

Exercice 5. 1. Si $H \leq G$, alors $Z(G) \leq N_G(H)$ et $\operatorname{Ad}^H_{Z(G)}$ est trivial. Déduisez que si $H \cap Z(G) = \{e\}$, alors $\langle H, Z(G)\rangle = HZ(G) \cong H \times Z(G)$.

2. Démontrez qu'il n'existe pas de sous-groupe $H \leq U(3, \mathbb{F}_p)$ tel que $H \cap Z(U(3,\mathbb{F}_p)) = \{e\}$ et $H \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. (Autrement dit, une des deux possibilités pour $H \neq \{e\}$ obtenu dans l'exercice 4.3 de la série 12 n'existe pas.)

Exercice 6. 1. Montrez que tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes caractéristiques.

2. Considérons un sous-groupe $H \leq D_{2n}$. Soit $N = \langle\sigma\rangle$ le sous-groupe normal d'ordre n.

   Montrez que soit $H \subseteq N$ ou bien il existe $g \in D_{2n} \smallsetminus N$ tel que $H = \big(H \cap N\big)\langle g\rangle$.

3. Quel sont les sous-groupes de D_{2n} qui sont normaux ?

   Indications : utilisez l'exercice 6.2 de la série 9. La réponse dépend de la parité de n. Par ailleurs, il est utile de voir que si $H \trianglelefteq D_{2n}$ n'est pas contenu dans N, alors $\sigma^2 \in H$.

Exercice 7 (Exercice facultatif).
Soit $H = \prod_{n\in\mathbb{Z}} H_n$, où $H_n = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (voir l'exercice 7 de la série 6).

Considérons l'application $\phi : \mathbb{Z} \to \operatorname{Aut}(H)$ qui envoie $n \in \mathbb{Z}$ sur le "décalage à droite par n positions", c'est-à-dire que $\phi(n) = \phi_n$ est l'automorphisme de H donné par
$$\phi_n : (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \longmapsto (x_{i+n})_{i\in\mathbb{Z}}.$$

Soit $G = H \rtimes_\phi \mathbb{Z}$ et soit $F \leq G$ le sous-ensemble

$$F = \left\{ (h, 0) \in G \ : \ h \in \prod_{n \in \mathbb{N}} H_n \right\} \subset H \times \mathbb{Z}.$$

(Ici on considère un élément $(x_n)_{n \geq 0} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} H_n$ comme un élément de H, en posant $x_n := 0$ pour tout $n < 0$).

1. Montrez que ϕ est un morphisme de groupes et que F est un sous-groupe de G.

2. Posons $g := (\mathbf{0}, 1) \in G$, où $\mathbf{0}$ désigne la suite nulle, qui est l'élément neutre du groupe H.

   Montrez que $gFg^{-1} \subseteq F$ mais $gFg^{-1} \neq F$.