Série 2

David Wiedemann

4 octobre 2020

4.1

On vérifie le critère du sous-groupe.
Soit $\sigma, \gamma \in \text{Bij}(X)_Y$, alors :

$$\sigma \circ \gamma(Y) = \sigma(\gamma(Y)) = \sigma(Y) = Y$$

donc $\sigma \circ \gamma \in \text{Bij}(X)_Y$
On montre que $\text{Bij}(X)_Y$ est clos sous l'inversion :
Soit $\sigma \in \text{Bij}(X)_Y : X \to X$, alors $\exists \sigma^{-1} : X \to X$ tel que $\sigma^{-1} \circ \sigma = \sigma \circ \sigma^{-1} = \text{Id}_X$. On a donc :

$$\sigma^{-1}(\sigma(Y)) = \text{Id}_X(Y)$$
$$\sigma^{-1}(Y) = Y$$

Donc $\sigma^{-1} \in \text{Bij}(X)_Y$.
On en conclut que $\text{Bij}(X)_Y$ forme un sous-groupe de $\text{Bij}(X)$

4.2

Dans un groupe à trois éléments, il suffit de trouver un contre exemple.
Soit

$$\sigma : \begin{cases} x_1 \to x_1 \\ x_2 \to x_3 \\ x_3 \to x_2 \end{cases} \quad \text{et } \tau : \begin{cases} x_1 \to x_2 \\ x_2 \to x_1 \\ x_3 \to x_3 \end{cases}$$

Alors on a :

$$\sigma \circ \tau : \begin{cases} x_1 \to x_2 \\ x_2 \to x_3 \\ x_3 \to x_1 \end{cases} \quad \text{et } \tau \circ \sigma : \begin{cases} x_1 \to x_3 \\ x_2 \to x_1 \\ x_3 \to x_2 \end{cases}$$

Considérons maintenant un groupe à plus que trois éléments et notons $Y = \{x_1, x_2, x_3\}, Y \subset X$.
On pose :

$$S : \begin{cases} x_n \to x_n \text{ si } x_n \notin Y \\ x_n \to \sigma(x_n) \text{ si } x_n \in Y \end{cases} \qquad \text{et } G : \begin{cases} x_n \to x_n \text{ si } x_n \notin Y \\ x_n \to \gamma(x_n) \text{ si } x_n \in Y \end{cases}$$

On remarque que $S, G \in \mathrm{Bij}(X)_Y$.
Si on compose G avec S, on remarque que les applications ne commutent pas :

$$G \circ S : \begin{cases} x_n \to x_n \text{ si } x_n \notin Y \\ x_n \to \gamma(\sigma(x_n)) \text{ si } x_n \in Y \end{cases} \qquad \text{et } S \circ G : \begin{cases} x_n \to x_n \text{ si } x_n \notin Y \\ x_n \to \sigma(\gamma(x_n)) \text{ si } x_n \in Y \end{cases}$$

car $\sigma \circ \gamma \neq \gamma \circ \sigma$, on voit que $S \circ G \neq G \circ S$.

4.3

Si X possède deux éléments, il y a deux éléments dans $\mathrm{Bij}(X)$:

$$\mathrm{Id} : \begin{cases} x_1 \to x_1 \\ x_2 \to x_2 \end{cases} \qquad \text{et } C : \begin{cases} x_1 \to x_2 \\ x_2 \to x_1 \end{cases}$$

On vérifie facilement que $C \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ C$, et donc le groupe est commutatif.
Si X possède un élément, il y a un élément dans $\mathrm{Bij}(X)$:

$$\mathrm{Id} : \begin{cases} x_1 \to x_1 \end{cases}$$

Clairement l'identité commute avec elle même, et donc le groupe est commutatif.