16.1. ($*$) Soient $a \in \mathbf{R}$ et $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en a. Vérifier que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Réciproquement, l'existence de cette dernière limite entraîne-t-elle celle de $f'(a)$?

16.2. Déterminer quand la dérivée existe, et la calculer, pour la fonction $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dans les deux situations suivantes:

(a) $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$, $x \in \mathbf{R}$,

(b) $f(x) = x^2\,[x]$, $x \in \mathbf{R}$, où $[x]$ dénote la partie entière de x.

16.3. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in \mathbf{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en 0 nulle part ailleurs.