EPFL Automne 2020
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 12

Tous les exercices seront corriges. La correction sera postee sur le moodle apres 2 semaines.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le dimanche de la semaine suivante celle ou la serie a ete postee. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme de fichier pdf (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien a cet effet dans la semaine de la serie.

1 Recherche d'une base

Exercice 1. Soit $M \in M_{d' \times d}(K)$. Soit $C_j,\ j \leqslant d$ la j-ieme colonne de M et

$$I = \langle C_1, \cdots, C_d \rangle \subset \mathrm{Col}_d(K)$$

l'espace vectoriel engendre par ces colonnes. Soit R la forme echelonnee reduite de M et $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant d$ ses echelons.

1. Montrer que $\{C_{j_1}, \cdots, C_{j_r}\}$ (les colonnes de la matrice M) forme une base de I. Pour cela on ecrira
$$R = T.M$$
avec T une matrice inversible et on considerera les produits
$$T.C_i,\ i = 1, \ldots, d.$$

Remarque 1.1. Si $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(\varphi)$ pour $\varphi : V \mapsto W$ cet exercice permet de trouver une base de l'image $\varphi(V)$.

2 Inversion de matrice

Exercice 2. Soit K un corps de caracteristique $\neq 2$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1/2 & -1/2 & -3/2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Determiner en fonction de $\mathrm{car}(K)$ quand cette matrice est inversible.
2. Quand c'est le cas, calculer son inverse.

Exercice 3. Soit K un corps, $\mathbf{b} = (b_0, \cdots, b_{d-1}) \in K^d$ et $X \in K^\times$ un element non-nul. On rappelle qu'on a deja vu la matrice "compagnon"

$$M_{\mathbf{b}} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b_{d-1} \end{pmatrix}$$

qui a la propriete de verifier l'equation polynomiale

$$M_{\mathbf{b}}^d + b_{d-1} M_{\mathbf{b}}^{d-1} + \cdots + b_0.\mathrm{Id}_d = \mathbf{0}_d.$$

On considere maintenant ici la matrice "caracteristique"

$$d(X, M_{\mathbf{b}}) := X.\mathrm{Id}_d - M_{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ -1 & X & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & X & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & X + b_{d-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $d(X, M_{\mathbf{b}})$ est inversible si et seulement si

   $$X^d + b_{d-1} X^{d-1} + \cdots + b_0 \neq 0.$$

   Pour cela on echelonnera-reduira cette matrice par une suite d'operations de type (III) pour la rendre triangulaire superieure.
2. Montrer que ce critere d'inversibilite reste vrai meme si $X = 0$ (on retrouve le fait que $M_{\mathbf{b}}$ est inversible ssi $b_0 \neq 0$.)
3. Dans le cas $d = 3$ calculez l' inverse de $d(X, M_{\mathbf{b}})$ (quand cet inverse existe).

3 Resolution de systeme

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$ un parametre. Resoudre le systeme suivant (en fonction de a).

$$\begin{array}{ccccccccl} 3x & - & y & + & 4z & + & t & = 1 \\ 6x & + & y & - & z & + & 2t & = 5 \\ & & y & + & az & + & 3t & = 2 \end{array}$$

En particulier,

1. Determiner les inconnues libres et les inconnues principales.
2. Donner une base de l'espace des solutions quand $(1, 5, 2)$ est remplace par $(0, 0, 0)$, .

Exercice 5. ($\star$) Resoudre dans $\mathbb{R}$ le systeme ci-dessous (d'inconnues x, y, z, t, u) :

$$\begin{array}{cccccccccl} 2x & + & 4y & + & 3z & + & 11t & - & 10u & = a \\ -x & - & 2y & + & 2z & + & 5t & + & 6u & = b \\ & & & & 4z & + & 12t & - & 2u & = c \\ 3x & + & 6y & - & 2z & - & 3t & + & 5u & = d \end{array}$$

En particulier,

1. Donner une condition necessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que le systeme ai au moins une solution.
2. Determiner les inconnues libres et les inconnues principales.
3. Donner quand $a = b = c = d = 0$, une base de l'espace des solutions.

4 Formes multilineaires

Exercice 6. Montrer que les applications suivantes sont multilineaires :

1. Si $V = K$, $n \geqslant 1$

$$\prod_n : \begin{array}{ccc} K^n & \mapsto & K \\ (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & \prod_n (x_1, \cdots, x_n) = x_1 . \cdots . x_n \end{array}$$

   est multilineaire.

2. Soit $V = K^2$ et $n = 2$, on a l'application "produit alterne"

$$\bullet \wedge \bullet : \begin{array}{ccc} K^2 \times K^2 & \mapsto & K \\ ((a, b), (c, d)) & \mapsto & (a, b) \wedge (c, d) = a.d - b.c \end{array}$$

3. Soit $V = K^d$ et $n = 2$, on a l'application "produit scalaire"

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : \begin{array}{ccc} K^d \times K^d & \mapsto & K \\ (\vec{x}, \vec{x}') & \mapsto & \langle \vec{x}, \vec{x}' \rangle \end{array}$$

avec

$$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_d), \ \vec{x}' = (x'_1, \cdots, x'_d)$$
$$\langle \vec{x}, \vec{x}' \rangle = x_1.x'_1 + x_2.x'_2 + \cdots + x_d.x'_d.$$

Exercice 7. Soit

$$\mathrm{Mult}^n(V, K) \subset \{\Lambda : V^n \mapsto K\}$$

l'espace des formes multilineaires en n variables sur un espace vectoriel V.

1. Montrer que $\mathrm{Mult}^n(V, K)$ est un SEV de l'espace des fonctions de V^n a valeur dans K quand on muni ce dernier espace de sa structure usuelle d'espace vectoriel : pour $\Lambda, \Xi : V^n \mapsto K$ et $\lambda \in K$ on pose

$$(\lambda.\Lambda + \Xi)(v_1, \cdots, v_n) = \lambda.\Lambda(v_1, \cdots, v_n) + \Xi(v_1, \cdots, v_n).$$

2. Montrer que pour $\lambda, \in K$

$$\Lambda(\lambda.v_1, \cdots, \lambda.v_n) = \lambda^n.\Lambda(v_1, \cdots, v_n).$$

3. Montrer que pour $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$

$$\Lambda(\lambda_1.v_1, \cdots, \lambda_n.v_n) = \lambda_1. \cdots .\lambda_n.\Lambda(v_1, \cdots, v_n).$$

4. On pourra commencer par le cas $n = 2$ pour voir ce qui ce passe.
Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \mu_1, \cdots, \mu_n \in K$, $2n$ scalaires et $v_1, v'_1, \cdots, v_n, v'_n \in V$, $2n$ vecteurs. Montrer que

$$\Lambda(\lambda_1.v_1 + \mu_1.v'_1, \cdots, \lambda_n.v_n + \mu_n.v'_n)$$

s'ecrit comme somme de 2^n termes (2^n est le nombre de sous-ensemble de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$) portant sur les partitions de $\{1, \cdots, n\}$ en deux sous-ensemble disjoints

$$\sum_{I \sqcup J = \{1, \cdots, n\}} (\prod_{i \in I} \lambda_i).(\prod_{j \in J} \mu_j)\Lambda(w_{IJ,1}, \cdots, w_{IJ,n})$$

avec

$$w_{IJ,i} = \begin{cases} v_i & \text{si } i \in I \\ v'_i & \text{si } i \in J \end{cases}.$$