Exercice 7. Puisque les Y_i ne prennent que les valeurs 0 et 1, X ne peut prendre comme valeur que les entiers entre 0 et n. Mais $X = x$ si et seulement si exactement x des Y_i valent 1. Pour chaque $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ de cardinalité x, $\mathbb{P}(Y_i = 1$ pour $i \in I$ et $Y_i = 0$ pour $i \notin I) = p^x(1-p)^{n-x}$, en raison de l'indépendance des Y_i. L'événement $X = x$ est donc l'union (disjointe) sur tous les I de cardinalité x possibles, il y en a donc $\binom{n}{x}$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, \dots, n.$$

On peut aussi utiliser la fonction génératrice des moments. En effet, par l'exercice 4 de la série 1 et la formule du binôme, on a que

$$M_X(t) = (M_{Y_1}(t))^n = ((1-p) + pe^t)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} e^{tx}.$$

Cette dernière est par définition $\mathbb{E}[e^{tZ}]$ où $Z \sim Binom(n, p)$. Ainsi $X \sim Binom(n, p)$.

Exercice 8. Il est évident que T ne prend que des valeurs dans $\{0\} \cup \mathbb{N}$. Remarquons que $T + 1 = x + 1$ si et seulement si $Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_x = 0$ et $Y_{x+1} = 1$ et cet événement a une probabilité (grâce à l'indépendance des Y_i)

$$\mathbb{P}(Y_{x+1} = 1) \prod_{i=1}^{x} \mathbb{P}(Y_i = 0) = (1-p)^x p.$$

Ainsi $T \sim Geom(p)$.

Exercice 9. La fonction génératrice des moments de Y_i est

$$M_{Y_i}(t) = \frac{p}{1 - (1-p)e^t}, \quad t < -\log(1-p).$$

Puisque les Y_i sont indépendantes, la fonction génératrice des moments de $X = \sum_{i=1}^{r} Y_i$ est

$$M_X(t) = \prod_{i=1}^{r} M_{Y_i}(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^r = \frac{p^r}{[1-(1-p)e^t]^r}, \quad t < -\log(1-p),$$

et donc $X \sim NegBin(r, p)$

Exercice 10. Nous allons montrer que si $X \sim Poisson(\lambda)$ et $Y \sim Poisson(\mu)$ sont indépendantes pour $\lambda, \mu \geq 0$ alors $X + Y \sim Poisson(\lambda + \mu)$. L'énoncé sera donc achevé par récurrence. Pour x entier on a (car X et Y ne prennent que les valeurs dans $\{0\} \cup \mathbb{N}$)

$$\mathbb{P}(X+Y = x) = \sum_{k=0}^{x} \mathbb{P}(X = k, Y = x-k) = \sum_{k=0}^{x} e^{-\lambda} e^{-\mu} \frac{\lambda^k \mu^{x-k}}{k!(x-k)!} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^x}{x!} \sum_{k=0}^{x} \binom{x}{k} \frac{\lambda^k \mu^{x-k}}{(\lambda+\mu)^x}.$$

Cette dernière somme vaut 1 par la formule du binôme. Par conséquent $X + Y \sim Poisson(\lambda + \mu)$.

Exercice 11. Il est clair que les valeurs possibles de X sachant $X + Y = k$ sont $0, 1, \dots, k$. Pour un tel x, en utilisant l'exercice précédent,

$$\mathbb{P}(X = x | X+Y = k) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = k-x)}{\mathbb{P}(X+Y = k)} = e^{-\lambda} e^{-\mu} \frac{\lambda^x \mu^{k-x}}{x!(k-x)!} e^{\lambda+\mu} \frac{k!}{(\lambda+\mu)^k} = \binom{k}{x} p^x (1-p)^{k-x},$$

où $p = \lambda/(\lambda + \mu)$. L'énoncé est donc demontré.

Exercice 12. Nous avons par calcul direct que $\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}$. De plus, lorsque $x > 0$, l'événement $\{X \geq x + t\}$ est inclus dans $\{X > t\}$. Il s'en suit que

$$\mathbb{P}(X \geq x + t | X > t) = \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda x} = \mathbb{P}(X \geq x).$$

Si $x \leq 0$ l'égalité est évidente, car les deux côtés valent 1.

Exercice 13. Soit $x \geq 0$. Grâce à l'indépendence de X et Y,

$$\mathbb{P}(\min(X, Y) > x) = \mathbb{P}(X > x, Y > x) = \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > x) = e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}.$$

Il en découle que $\min(X, Y) \sim Exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.
Bonus. Nous avons que

$$\mathbb{P}(Z = X) = \mathbb{P}(\min(X, Y) = X) = \mathbb{P}(X \leq Y).$$

Les variables X et Y étant indépendantes, la densité conjointe de $(X,\ Y)$ est donnée par

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y},$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq Y) &= \int_0^\infty \int_x^\infty \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 y} dy dx \\
&= \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \left[-e^{-\lambda_2 y} \right]_x^\infty dx \\
&= \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} dx \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.
\end{aligned}$$

Exercice 14. La fonction de densité d'une variable aléatoire $Gamma(r, \lambda)$ pour $r = 1$ est

$$\lambda e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0.$$

Donc la distribution $Exp(\lambda)$ est la même que la distribution $Gamma(1, \lambda)$.
La distribution χ_2^2 n'est que la distribution $Gamma(1, 1/2)$ qui est donc la même distribution que $Exp(1/2)$.

Exercice 15. Rappelons qu'une famille de distributions est une famille exponentielle si sa fonction de masse/densité admet la représentation :

$$f(x) = \exp\left\{ \sum_{i=1}^k \phi_i T_i(x) - \gamma(\phi_1, \ldots, \phi_k) + S(x) \right\}, \qquad x \in \mathcal{X}. \tag{1}$$

Noter que dans les exemples suivants, les paramétrisations ne sont pas uniques.

(i) Si $X \sim Pois(\lambda)$, alors

$$\begin{aligned}
f(x; \lambda) &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\
&= \exp\left(\ln\left(\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \right) \right) \\
&= \exp\left(-\lambda + x \ln(\lambda) - \ln(x!) \right).
\end{aligned}$$

En posant $\phi = \ln(\lambda),\ T(x) = x,\ \gamma(\phi) = e^{\phi}$ et $S(x) = -\ln(x!)$ et en notant que le support de f (donné par $\mathcal{X} = \{0\} \cup \mathbb{N}$) ne dépend pas de ϕ, nous obtenons bien que $f(x;\lambda)$ est de la forme (1).

(ii) Si $X \sim Geom(p)$, alors

$$\begin{aligned} f(x;p) &= (1-p)^x p \\ &= \exp\left(x\ln(1-p) + \ln(p)\right). \end{aligned}$$

En posant $\phi = \ln(1-p),\ T(x) = x,\ \gamma(\phi) = -\ln(1-e^{\phi})$ et $S(x) = 0$ et en notant que le support de f (donné par $\mathcal{X} = \{0\} \cup \mathbb{N}$) ne dépend pas de ϕ, nous obtenons bien que $f(x;p)$ est de la forme (1).

(iii) Si $X \sim NegBin(r,p)$, alors

$$\begin{aligned} f(x;r,p) &= \binom{x+r-1}{x}(1-p)^x p^r \\ &= \exp\left(\ln\binom{x+r-1}{x} + x\ln(1-p) + r\ln(p)\right). \end{aligned}$$

En fixant r et en posant $\phi = \ln(1-p),\ T(x) = x,\ \gamma(\phi) = -r\ln(1-e^{\phi})$ et $S(x) = \ln\binom{x+r-1}{x}$ et en notant que le support de f (donné par $\mathcal{X} = \{0\} \cup \mathbb{N}$) ne dépend pas de ϕ, nous obtenons bien que $f(x;p)$ est de la forme (1).
Si r est inconnu, la famille binomiale négative n'est pas une famille exponentielle.

(iv) Si $X \sim Exp(\lambda)$, alors pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} f(x;\lambda) &= \lambda e^{-\lambda x} \\ &= \exp\left(\ln(\lambda) - \lambda x\right). \end{aligned}$$

En posant $\phi = \lambda,\ T(x) = -x,\ \gamma(\phi) = -\ln(\phi)$ et $S(x) = 0$ et en notant que le support de f (donné par $\mathcal{X} = [0,\infty)$) ne dépend pas de ϕ, nous obtenons bien que $f(x;\lambda)$ est de la forme (1).

(v) Si $X \sim Gamma(r,\lambda)$, alors pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} f(x;r,\lambda) &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \\ &= \exp\left(\ln\left(\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\right) + (r-1)\ln(x) - \lambda x\right) \\ &= \exp\left(r\ln(\lambda) - \ln(\Gamma(r)) + r\ln(x) - \ln(x) - \lambda x\right) \end{aligned}$$

Noter qu'ici $k = 2$, contrairement aux exercices précédents où k était égal à 1. En posant $\phi = (\phi_1,\phi_2) = (\lambda, r),\ T_1(x) = -x,\ T_2(x) = \ln(x),\ \gamma(\phi) = -\phi_2\ln(\phi_1) + \ln(\Gamma(\phi_2))$ et $S(x) = -\ln(x)$ et en notant que le support de f (donné par $\mathcal{X} = [0,\infty)$) ne dépend pas de ϕ, nous obtenons bien que $f(x;r,\lambda)$ est de la forme (1). Noter que nous aurions aussi pu poser $\phi = (\phi_1,\phi_2) = (\lambda, r-1),\ T_1(x) = -x,\ T_2(x) = \ln(x),\ \gamma(\phi) = -(\phi_2+1)\ln(\phi_1) + \ln(\Gamma(\phi_2+1))$ et $S(x) = 0$.

(vi) Si $X \sim \chi^2_k$, alors $X \sim Gamma(k/2, 1/2)$. Ainsi, il suffit de poser $r = k/2$ et $\lambda = 1/2$ dans les équations du problème (v), afin d'obtenir que $\phi = k/2,\ T(x) = \ln(x),\ \gamma(\phi) = -\phi\ln(1/2) + \ln(\Gamma(\phi))$ et $S(x) = -\ln(x) - x/2$ nous donne la représentation (1).

Exercice 16. Soit F_X la fonction de répartition de X, montrons que $F_X = F$. Nous avons

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(F^{-1}(Y) \leq x).$$

Il suffit donc de montrer que $F^{-1}(Y) \leq x \iff Y \leq F(x)$, car $Y \sim Unif(0,1)$ et donc $\mathbb{P}(F^{-1}(Y) \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq F(x)) = F(x)$.
Si $Y \leq F(x)$ alors x appartient à l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq Y\}$ et x est donc plus grand que l'infimum de cet ensemble, $F^{-1}(Y)$. Donc $Y \leq F(x)$ implique que $F^{-1}(Y) \leq x$.
Si $Y > F(x)$ alors, F étant continue à droite, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $Y > F(x+\varepsilon)$. Ainsi (puisque F est croissante) $F^{-1}(Y) = \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq Y\} \geq x + \varepsilon > x$. Donc $F^{-1}(Y) \leq x$ implique que $Y \leq F(x)$. La démonstration est ainsi achevée.

Exercice 17. Nous avons $Y = g(X) = e^X$ avec $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Par le lemme 1.30 des notes de cours nous savons que $\mathcal{Y} = g(\mathcal{X}) = g((-\infty, \infty)) = (0, \infty)$ et que

$$f_Y(y) = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g^{-1}(y)\right| f_X(g^{-1}(y)), \quad y \in (0, \infty),$$

où

$$g^{-1}(y) = \ln(y) \text{ et donc } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g^{-1}(y) = \frac{1}{y} > 0, \text{ puisque } y > 0,$$

et

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}.$$

Nous obtenons finalement que

$$f_Y(y) = \frac{1}{y}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(y)-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad y \in (0, \infty).$$

Exercice 18.
Pour n'importe quel $A \subset \mathcal{Y}^n$, on a

$$P(Y \in A) = \int_A f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

Mais on a aussi que

$$\begin{aligned} P(Y \in A) = P(g^{-1}(Y) \in g^{-1}(A)) &= P(X \in g^{-1}(A)) \\ &= \int_{g^{-1}(A)} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \int_A f_{\boldsymbol{X}}(g^{-1}(\boldsymbol{y}))\left|\det J_{g^{-1}}(\boldsymbol{y})\right|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \end{aligned}$$

où on a utilisé la formule de changement de variables dans une intégrale. Donc, pour chaque $A \subset \mathcal{Y}^n$,

$$\int_A f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_A f_{\boldsymbol{X}}(g^{-1}(\boldsymbol{y}))\left|\det J_{g^{-1}}(\boldsymbol{y})\right|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

et on conclut que

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = f_{\boldsymbol{X}}(g^{-1}(\boldsymbol{y}))\left|\det J_{g^{-1}}(\boldsymbol{y})\right|, \quad \forall \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^n.$$

Exercice 19. D'après le corollaire 1.34, la fonction de densité de $X+Y$ en $z \in \mathbb{R}$ est

$$f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{(z-v-\mu_1)^2}{-2\sigma_1^2}\right] \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\frac{(v-\mu_2)^2}{-2\sigma_2^2}\,\mathrm{d}v.$$

Nous allons faire en sorte que l'élément dans l'exponentielle serait $-(v-\mu)^2/2\sigma^2$ de sorte à pouvoir évaluer cette intégrale. On a

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\left[\frac{(z-v-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(v-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right] &= -\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[v^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2) - 2v(\sigma_2^2(z-\mu_1)+\sigma_1^2\mu_2) + \sigma_2^2(z-\mu_1)^2 + \sigma_1^2\mu_2^2\right] \\
&= -\frac{\sigma_2^2+\sigma_1^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[v^2 - 2v\frac{\sigma_2^2(z-\mu_1)+\sigma_1^2\mu_2}{\sigma_2^2+\sigma_1^2} + \frac{\sigma_2^2(z-\mu_1)^2+\sigma_1^2\mu_2^2}{\sigma_2^2+\sigma_1^2}\right] \\
&= -\frac{\sigma_2^2+\sigma_1^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[v - \frac{\sigma_2^2(z-\mu_1)+\sigma_1^2\mu_2}{\sigma_2^2+\sigma_1^2}\right]^2 \\
&\quad - \frac{\sigma_2^2+\sigma_1^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[\frac{\sigma_2^2(z-\mu_1)^2+\sigma_1^2\mu_2^2}{\sigma_2^2+\sigma_1^2} - \left(\frac{\sigma_2^2(z-\mu_1)+\sigma_1^2\mu_2}{\sigma_2^2+\sigma_1^2}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{\sigma_2^2+\sigma_1^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[\frac{\sigma_2^2(z-\mu_1)^2+\sigma_1^2\mu_2^2}{\sigma_2^2+\sigma_1^2} - \left(\frac{\sigma_2^2(z-\mu_1)+\sigma_1^2\mu_2}{\sigma_2^2+\sigma_1^2}\right)^2\right]\right\} \times \\
\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{\sigma_2^2+\sigma_1^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[v - \frac{\sigma_2^2(z-\mu_1)+\sigma_1^2\mu_2}{\sigma_2^2+\sigma_1^2}\right]^2\right\} \mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

L'expression dans la dernière intégrale est liée à la densité d'une variable aléatoire normale d'une certaine moyenne et de variance $\Sigma^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2/(\sigma_2^2+\sigma_1^2)$. Elle vaut donc $\sqrt{2\pi\Sigma^2}$ et on obtient

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_2^2+\sigma_1^2)}} \exp\left\{-\frac{\sigma_2^2+\sigma_1^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[\frac{\sigma_2^2(z-\mu_1)^2+\sigma_1^2\mu_2^2}{\sigma_2^2+\sigma_1^2} - \left(\frac{\sigma_2^2(z-\mu_1)+\sigma_1^2\mu_2}{\sigma_2^2+\sigma_1^2}\right)^2\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_2^2+\sigma_1^2)}} \exp\frac{(z-\mu_1)^2+\mu_2^2-2(z-\mu_1)\mu_2}{-2(\sigma_2^2+\sigma_1^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_2^2+\sigma_1^2)}} \exp\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{-2(\sigma_2^2+\sigma_1^2)},
\end{aligned}$$

qui est bien la densité d'une loi $N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

Exercice 20. Soient

$$Z_1 \sim \mathcal{N}(0,1), \qquad Z_2 \sim \chi_n^2 \qquad \text{et} \qquad T = \frac{Z_1}{\sqrt{Z_2/n}}.$$

Considérons la transformation $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$

$$g : (Z_1, Z_2) \mapsto (T, V) = \left(\frac{Z_1}{\sqrt{Z_2/n}}, Z_2\right).$$

La fonction inverse est

$$g^{-1} : (T, V) \mapsto \left(T\sqrt{\frac{V}{n}}, V\right), \qquad T \in \mathbb{R}, \quad V \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\},$$

ayant pour Jacobian

$$J_{g^{-1}} = \begin{pmatrix} \sqrt{V/n} & \star \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(J_{g^{-1}}(t,v)) = \sqrt{\frac{v}{n}}.$$

L'idée de la preuve est d'utiliser le théorème 1.33 afin de trouver la fonction de densité conjointe de (T,V) et d'ensuite obtenir la fonction de densité marginale de T en intégrant cette densité par rapport à V.
Rappelons que Z_1 et Z_2 sont des variables aléatoires indépendantes et donc

$$f_{(Z_1,Z_2)}(z_1,z_2) = f_{Z_1}(z_1) f_{Z_2}(z_2) = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} z_2^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(z_2+z_1^2)}.$$

La fonction de densité conjointe de (T,V) est alors donnée par

$$\begin{aligned} f_{(T,V)}(t,v) &= f_{(Z_1,Z_2)}(g^{-1}(t,v)) |\det(J_{g^{-1}}(t,v))| \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} v^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(v+v\frac{t^2}{n})} \cdot \left(\frac{v}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{\pi n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot v^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{v}{2}(1+\frac{t^2}{n})}. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant intégrer par rapport à v afin d'obtenir la fonction de densité de T :

$$f_T(t) = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{n\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{v}{2}\left(\frac{t^2}{n}+1\right)} v^{\frac{n-1}{2}} \, \mathrm{d}v.$$

En posant

$$y = \frac{v}{2}\left(\frac{t^2}{n}+1\right),$$

nous obtenons

$$v = \frac{2y}{\left(\frac{t^2}{n}+1\right)} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}v = \frac{2}{\left(\frac{t^2}{n}+1\right)},$$

et donc

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{n\pi}} \cdot \int_0^\infty e^{-y} \cdot \left[(2y)\left(\frac{t^2}{n}+1\right)^{-1}\right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2\left(\frac{t^2}{n}+1\right)^{-1} \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{n\pi}} \cdot \left(\frac{t^2}{n}+1\right)^{-\frac{n+1}{2}} \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot \int_0^\infty y^{\frac{n-1}{2}} e^{-y} \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \left(\frac{t^2}{n}+1\right)^{-\frac{n+1}{2}} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot y^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-y} \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \left(\frac{t^2}{n}+1\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \end{aligned}$$

où l'intégrale de l'avant dernière ligne est égale à 1, car c'est l'intégrale de la fonction de densité d'une distribution $\Gamma(n/2,1)$.

Autre façon de trouver la densité conjointe (portez attention à la nouvelle notation)

Soient

$$Z \sim \mathcal{N}(0,1), \qquad V \sim \chi_n^2 \qquad \text{et} \qquad T = \frac{Z}{\sqrt{V/n}}.$$

L'idée dans ce qui suit est de trouver la fonction de densité conjointe de (T, V) en utilisant la densité conditionnelle de $T|V = v$.

La distribution conditionnelle de T sachant $V = v$ est normale de moyenne 0 et de variance n/v. Nous pouvons alors calculer la densité conjointe de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f_{(T,V)}(t,v) =& f_{T|V}(t|V=v) f_V(v) \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{v}{n}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t^2\frac{v}{n}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} v^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}} \\ =& \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}} e^{-\frac{v}{2}\left(\frac{t^2}{n}+1\right)} v^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

Ensuite l'on procède comme avant pour trouver la densité de T.