

Mecanique

David Wiedemann

Table des matières

1	Physique	4
1.1	Exemple de loi physique : l'addition des vitesses	4
1.2	Lois de conservation	5
1.3	Invariance par changement de référentiel	5
2	La mécanique classique	6
3	Objectifs du cours de mécanique générale	6
4	Le modèle du "point matériel"	6
5	Mouvement Rectiligne Uniforme	7
6	Mouvement rectiligne uniformément accéléré	7
7	Lois de Newton	7
8	Force de pesanteur et chute des corps	7
9	Quelques notions mathématiques	8
9.1	Fonctions	8
9.2	Équations différentielles	8
10	Vecteurs	9
11	Trigonométrie	9
12	Oscillateurs Harmoniques	9
12.1	Modélisation de la force d'un ressort	10
12.2	Oscillateurs harmoniques à une dimension	10
12.3	Oscillateur harmonique amorti	13
12.4	Oscillateur forcé	14
12.5	Phénomènes de résonance	14

13 Dynamique du point materiel	14
13.1 Produit scalaire	15
13.2 Projections et composantes d'un vecteur	16
13.3 Repere direct	17
13.4 Produit vectoriel	17
13.5 Mouvement avec vitesse scalaire constante	20
13.6 Systeme de coordonnees	21
14 Description des rotations spatiales	21
14.1 Interprétation du vecteur ω	23
14.1.1 Cas particulier	23
14.2 Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques	23
14.3 Pendule Mathématique	23
14.4 Coordonnées sphériques	24
14.5 Bille en équilibre dans un anneau en rotation	25
15 Travail, énergie, forces conservatives	25
15.1 Forces de Frottement	25
15.2 Forces de frottement sec	26
15.3 Coefficients de frottement	26
15.4 Impulsion et quantité de mouvement	26
15.5 Travail et énergie cinétique	27
15.6 Travail et Puissance d'une force	27
15.7 Théorème de l'énergie cinétique	28
15.8 Voiture en accélération	28
15.9 Conservation de l'énergie mécanique	28
15.10Travail de la force de pesanteur	29
15.11Travail de la force de rappel d'un ressort	29
15.12Travail d'une force centrale en $\frac{1}{r^2}$	29
15.13Forces conservatives	29
15.14Energie potentielle	30
15.15Théorème de l'énergie	30
15.16Lugeur	30
15.17L'énergie mécanique : intégrale première	31
16 Gravitation, Moment Cinétique	31
16.1 Lois de Kepler	31
16.2 Le développement de la dynamique	32
16.3 Mouvement central et loi des aires	32
16.4 Mouvement central	32
16.5 Dédution de la force de Gravitation en $\frac{1}{r^2}$	33
16.6 Loi de gravitation universelle	33

16.7	Champ de gravitation	34
16.8	Energie potentielle gravifique	34
16.9	Mouvement dans un potentiel central	34
16.10	Intégrales premières d'un mouvement central	35

List of Theorems

1	Definition (Point materiel)	6
2	Definition (Referentiel)	15
3	Definition (Repere)	15
4	Definition (Produit scalaire)	15
5	Definition (Produit vectoriel)	17
6	Definition (Produit Mixte)	18
7	Definition (Double produit vectoriel)	18
8	Definition (Systeme de coordonnees)	21
4	Theorème	21
5	Theorème (Formule de Poisson)	22
6	Theorème	24
9	Definition	32
7	Theorème (Gravitation Universelle)	34

1 Physique

- Science dont le but est d'étudier et de comprendre les composants de la matiere et leurs interactions mutuelles.
- Sur la base des proprietes observees de la matiere et des interactions, le physicien tente d'expliquer les phenomenes naturels observables.
- Les "explications" sont donnees sous forme de lois aussi fondamentales que possible : elles resument notre comprehension des phenomenes physiques.
- Les maths sont le langage qu'on utilise pour decrire ces phenomenes.

Exemple

Une particule se deplace sur un axe droit.

Au temps t_1 position $x_1 = x(t_1)$. Au temps t_2 position $x_2 = x(t_2)$. $\Delta x = x_2 - x_1$ et $\Delta t = t_2 - t_1$

Donc la vitesse moyenne

$$v_{moyenne} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Mais on peut faire diminuer Δt , pour connaitre la vitesse moyenne sur un temps infinitesimal :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$$

Donc la vitesse instantanee est la derivee de la fonction $x(t)$ par rapport a t .

On peut faire la meme chose avec l'acceleration

Au temps t_1 , vitesse $v_1 = v(t_1)$.

Au temps t_2 , vitesse $v_2 = v(t_2)$.

Donc l'acceleration moyenne est

$$a_{moyenne} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Et donc par le meme raisonnement, l'acceleration instantanee est

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} := \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

1.1 Exemple de loi physique : l'addition des vitesse

Si je marche a la vitesse v_{marche} sur un tapis , alors la vitesse par rapport au sol est

$$V = v_{marche} + v_{tapis}$$

C'est la loi d'addition des vitesses de galilee.
Ici, c'est une addition vectorielle qu'il faut faire.

- Cette loi est
- independante des vitesses
 - independante des objets en presence
 - independante du temps (hier, aujourd'hui, demain)
 - etc...

1.2 Lois de conservation

- Ce sont les lois les plus fondamentales.
- Conservation de l'energie
 - Conservation de la quantite de mouvement
 - Conservation du moment cinetique

Ces lois sont valables dans toutes les situations (classiques, relativistes ou quantiques) .

Ne peuvent pas etre formulees mathematiquement de facon unique.

Resultent des principes "d'invariance" (ou de symmetrie) tres generaux.

1.3 Invariance par changement de referentiel

- Changement de referentiel (ou d'observateur) : Referentiel $O'x'y'z'$ en mouvement par rapport au referentiel $Oxyz$
- Les lois de la physique sont-elles invariantes par rapport a n'importe quel changement de referentiel ?
Autrement dit, si les observateurs O et O' font la meme experience, obtiendront-ils le meme resultat ?
- Principe de Galilee :
Les lois de la physique sont les memes (i.e. invariantes) pour deux observateurs en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport a l'autre.

2 La mécanique classique

1. Mécanique :
science du mouvement (ou du repos) de systemes materiels caracterises
par des variables d'espace et de temps.
2. Cinématique :
Description du mouvement.
3. Dynamique :
Etude de la relation entre le mouvement et les causes de sa variation (forces,
lois de Newton, th. du moment cinétique).
4. Statique :
Etude et description de l'équilibre.

3 Objectifs du cours de mécanique generale

- Apprendre a mettre sous forme mathematique un probleme, une situation
physique :
 - Définir le probleme, le modeliser
 - Choisir une description mathématique
 - Poser les equations regissant la physique du probleme
 - Resoudre et/ou discuter la solution
- Developper un “savoir-faire” pratique, mais également un esprit scientifique :
 - Reperer le sens physique derriere les equations
 - Savoir formaliser mathematiquement la donnee d'un probleme physique.

4 Le modele du “point materiel”

Definition 1 (Point materiel)

*un systeme est assimile a un point geometrique auquel on attribue toute la masse
de ce systeme, et dont l'etat est decrit en tout temps par une (seule) position
et une (seule) vitesse.*

- Notion introduite par Newton.

On approxime un systeme a quelquechose de plus simple, le point peut etre “gros” (exemple :la terre, le soleil).

Pas applicable dans toutes les situations ; le modele a des limites..

5 Mouvement Rectiligne Uniforme

Mouvement d’un point materiel se deplacant en ligne droite a vitesse constante. On definit un axe x associe a la trajectoire rectiligne, avec une origine O .

$$v(t) := \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = v_0 = \text{constante}$$

La solution s’obtient en integrant le dessus : $x(t) = v_0 t + x_0$, ou $x_0 = \text{constante}$. On appelle le resultat de cette integration l’equation horaire.

6 Mouvement rectiligne uniformement accelere

Ici

$$a(t) := \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) = a_0 = \text{constante}$$

C’est une equadiff d’ordre 2 faisant intervenir la derivee seconde de $x(t)$.

Solution

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0 \\ v(t) &= \frac{dx}{dt} = a_0 t + v_0 \end{aligned}$$

ou x_0 et v_0 sont des constantes.

7 Lois de newton

— mouvement rectiligne uniforme $\Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$

— $\vec{F} = m \vec{a}$

— Action reaction $\vec{F} = -\vec{F}$

8 Force de pesanteur et chute des corps

• L’attraction terrestre donne lieu a une force verticale (le poids) proportionnelle a la masse m :

$$F = mg$$

$$g \approx 9.8 \frac{m}{s^2}$$

- Application de la 2eme loi de Newton :

Si le poids est la seule force appliquee a un point materiel

$$F = ma \Rightarrow a = g = \text{constante}$$

Dans le vide, les corps ont un mouvement uniformement accelere

Lecture 2: Notions Mathematiques

Wed 16 Sep

9 Quelques notions mathematiques

9.1 Fonctions

$$F(x) \underbrace{\longrightarrow}_{\text{derivee}} F'(x) = \frac{dF}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Quand on parle d'un point dans l'espace, on aura tjrs 3 coordonnees

$$\begin{aligned} x(t) &\longrightarrow x'(t) := \dot{x}(t) := \dot{x} \\ x''(t) &:= \ddot{x}(t) := \ddot{x} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(x^2(t)) = 2x(t)\dot{x}(t) = 2x\dot{x}$$

Si je fais

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

9.2 Equations Differentielles

$$F''(x) = C$$

Pour resoudre

$$F'(x) = Cx + D$$

$$F(x) = \frac{1}{2}Cx^2 + Dx + E$$

$$mg = F = ma = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = -c^2 x$$

On devine la solution :

$$x(t) = A \sin(Ct) + B \cos(Ct)$$

$$\dot{x} = AC \cos(Ct) - BC \sin(Ct)$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= -AC^2 \sin(Ct) - BC^2 \cos(Ct) \\ &= -C^2 [A \sin(Ct) + B \cos(Ct)] = -C^2 x(t)\end{aligned}$$

10 Vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3$$

Le point (x_1, x_2, x_3) on l'atteint en faisant une combinaison lineaire de (e_1, e_2, e_3) .

11 Trigonometrie

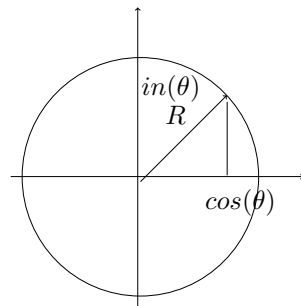


FIGURE 1 – cercletrigo

Lecture 3: Oscillateurs Harmoniques

Wed 23 Sep

12 Oscillateurs Harmoniques

Considerer des systemes ayant des mouvements oscillatoires.
Exemples :

- masse pendue a un ressort.
- pendule simple, pendule de torsion.
- vibrations.
- Resonateurs quartz (montres)
- oscillations du champ
- etc...

Remarque

Un mouvement oscillatoire permet de mesurer un intervalle de temps.

12.1 Modelisation de la force d'un ressort

La force exercee par un ressort est proportionnelle a son deplacement par rapport a sa position de repos.

Force de rappel :

$$\vec{F} = -k\vec{\Delta x}$$

k = constante elastique du ressort [N/m]

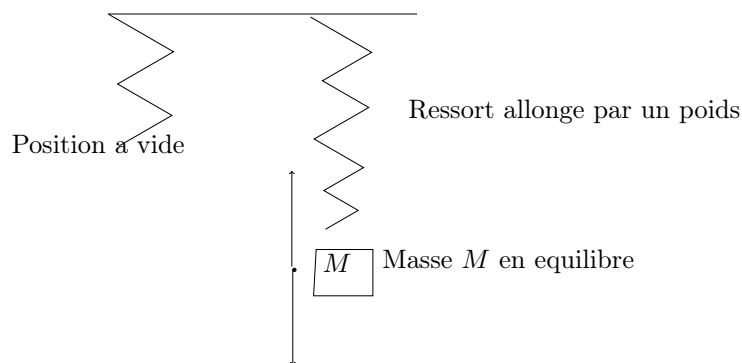


FIGURE 2 – ressort

Remarque

Ce modele n'est que valable pour des petits allongements

12.2 Oscillateurs harmoniques a une dimension

Loi de Hooke $F_x = -kx$

2eme loi de Newton $F = ma$

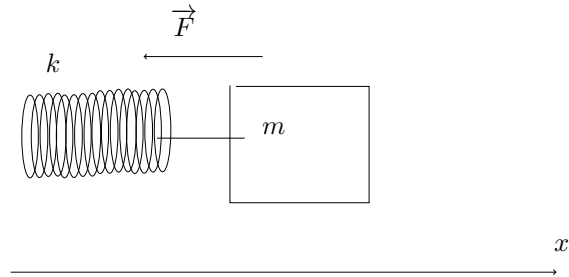


FIGURE 3 – Ressort plan horizontal

On arrive a

$$m\ddot{x} = -kx$$

But : connaissant k, m et les conditions initiales, determiner $x(t)$ pour tout temps t .

Exemple

Posons $m = 1\text{kg}, k = 1\frac{N}{m} = 1\frac{kg}{s^2}$

Conditions initiales : $x(0) = 1m, v(0) = 0\frac{m}{s}$

$$\Rightarrow a(0) = \frac{F(0)}{m} = k\frac{x(0)}{m} = -1\frac{m}{s^2}$$

Accroissement de v entre t et $t + \Delta t$: $\Delta v = a(t)\Delta t$ car $a(t) = dv(t)/dt$

$$\Rightarrow v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t$$

Accroissement de x entre t et $t + \Delta t$:

$$\Rightarrow x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t$$

Verification analytique :

On pose $x(t) = \cos(\omega_0 t) \Rightarrow x(0) = 1$

$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 \sin(\omega_0 t) \Rightarrow v(0) = 0$.

$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x(t)$

Comme $a(t) = -\frac{k}{m}x(t)$, on doit avoir :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

C'est la pulsation propre de l'oscillateur libre.

Solution generale et dependance par rapport aux conditions initiales

Periode :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Frequence

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Solution generale de $\ddot{x} = \omega_0^2 x = 0$:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

ou

$$x(t) = C \sin(\omega_0 t + D)$$

Deux constantes d'integration a determiner en utilisant les conditions initiales

$$A = x_0$$

et

$$B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

ou bien $x_0^2 = x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega_0})^2$ et $\tan(D) = \omega_0 \frac{x_0}{v_0}$

Resolution de l'equation differentielle :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$x(0) = A \cdot 1 + B \cdot 0 = A = x_0$$

$$\dot{x}(0) = -A\omega_0 \sin(0) + B\omega_0 \cos(0)$$

$$= B\omega_0 = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

$$x(t) = C \sin(\omega_0 t + D), x_0, v_0$$

$$x(0) = C \sin(D) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = C\omega_0 \cos(D) = v_0$$

$$\frac{1}{\omega_0} \tan(D) = \frac{x_0}{v_0}$$

$$\Rightarrow \tan(D) = \omega_0 \frac{x_0}{v_0}$$

$$C^2(\sin^2(D) + \cos^2(D)) = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

12.3 Oscillateur harmonique amorti

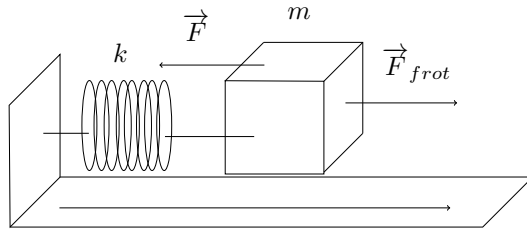


FIGURE 4 – oscillateur amorti

Par b on definira la force de frottement.

Deuxieme loi de Newton : $F + F_{frot} = ma$, alors

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

Resolution

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0 \text{ avec } \gamma = \frac{b}{2m} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ammortissement sous-critique	$\gamma < \omega_0$	$x(t) = e^{-\gamma t}[A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)]$ avec $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
Ammortissement critique	$\gamma = \omega_0$	$x(t) = e^{-\gamma t}[A + Bt]$
Ammortissement sur-critique	$\gamma > \omega_0$	$x(t) = e^{-\gamma t}[A \exp(\omega_2 t) + B \exp(-\omega_2 t)]$ avec $\omega_2 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

FIGURE 5 – types d'ammortissement

12.4 Oscillateur force

En pratique tout oscillateur s'amortit, mais on peut entretenir les oscillations a l'aide d'une force exterieure.

Exemples

- Balancoire pousse par un enfant.
- Voiture (avec suspension) passant sur des bosses
- Atome (electron lie) recevant un rayonnement electromagnetique

On ajoute une force periodique \vec{F}_{ext} Par exemple $F_{ext} = f \sin(\omega t)$ avec $f = 1N$

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_{ext}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = a_0 \sin(\omega t) \text{ avec } \gamma = \frac{b}{2m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Solution :

$$x(t) = x_{transitoire}(t) + \rho \sin(\omega t - \Phi)$$

avec

$$\rho = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

et

$$\tan(\Phi) = 2\gamma \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

12.5 Phenomes de resonance

Resonances desirables

- Circuits electriques dans un tuner
- Tuyaux d'orgue
- Balancoire de jardin
- Amortisseurs d'une voiture
- Suspension du tambour d'une essoreuse a linge
- Structure de genie civil

Lecture 4: Dynamique du point materiel

Wed 30 Sep

13 Dynamique du point materiel

Notions abordees :

- reperes, rappels d'analyse vectorielle
- referentiel, position, vitesse, acceleration normale et tangentielle
- rotations, repere en rotation, mouvement circulaire uniforme
- vitesse et acceleration en coordonnees cylindriques et spheriques
- contraintes et forces de liaison

Definition 2 (Referentiel)

Un ensemble de N points ($N \geq 4$), non coplanaires, immobiles les uns par rapport aux autres.

- La description du mouvement d'un systeme se fait toujours par rapport a un certain referentiel.
- L'observateur et les appareils de mesure sont immobiles par rapport au referentiel (ils "font partie" du referentiel)
- Le choix du referentie du referentiel est arbitraire

Definition 3 (Repere)

Origine O et trois axes orthogonaux definis par des vecteurs de longueur unite

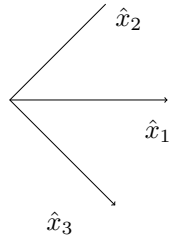


FIGURE 6 – reperes

Vecteurs unitaires

$$|\hat{x}_1| = |\hat{x}_2| = |\hat{x}_3| = 1$$

Vecteurs orthonormaux

$$\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 = \hat{x}_2 \cdot \hat{x}_3 = \hat{x}_3 \cdot \hat{x}_1 = 0$$

Base orthonormee

$$\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

13.1 Produit scalaire**Definition 4 (Produit scalaire)**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

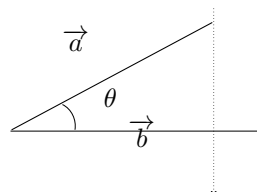


FIGURE 7 – produit scalaire

En composantes

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\hat{x}_1 + a_2\hat{x}_2 + a_3\hat{x}_3) \cdot \dots = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Propriétés

- *Commutativité*
- *Distributivité*
- ...

13.2 Projections et composantes d'un vecteur

Projection de \vec{OP} sur l'axe u :

$$\vec{OP} \cdot \hat{u} = \left| \vec{OP} \right| \left| \vec{u} \right| \cos \theta = OP \cos \theta = OP'$$

$$\vec{OP} = \vec{OP}'\hat{u} + \vec{OP}''\vec{v} = \vec{OP} \cdot \hat{u}\hat{u} + \vec{OP}''\hat{v}\hat{v}$$

Coordonnées cartésiennes du point P ou composantes du vecteur \vec{OP}

$$\begin{cases} x = \vec{OP} \cdot \hat{x} \\ y = \vec{OP} \cdot \hat{y} \\ z = \vec{OP} \cdot \hat{z} \end{cases}$$

Donc

$$\vec{OP} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

13.3 Repere direct

Par convention, on n'utilise que des repères dont la chiralité est définie par la "règle du tire bouchon" ou la "règle de la main droite".

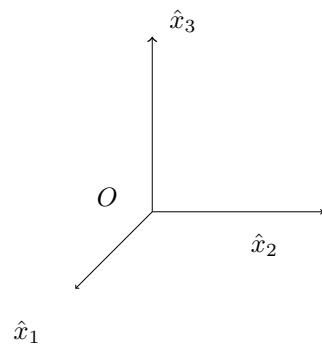


FIGURE 8 – repere droit

13.4 Produit vectoriel

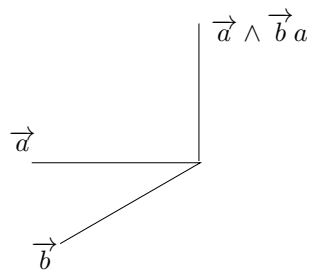


FIGURE 9 – produit vectoriel

Definition 5 (Produit vectoriel)

En composantes

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Propriétés

- $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$
- $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$
- $\vec{a} \wedge (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})$
- $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$ si \vec{a}, \vec{b} parallèles

Definition 6 (Produit Mixte)

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = \det(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$

Propriétés :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \iff \vec{a}, \vec{b} \text{ et } \vec{c} \text{ coplanaires (dans le meme plan)}$$

Definition 7 (Double produit vectoriel)

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

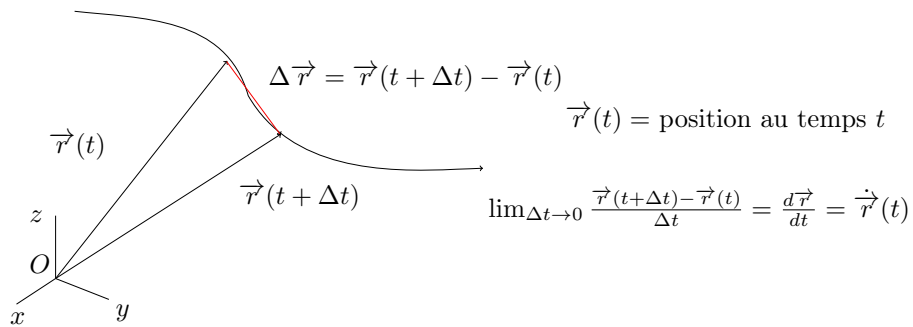


FIGURE 10 – trajectoire

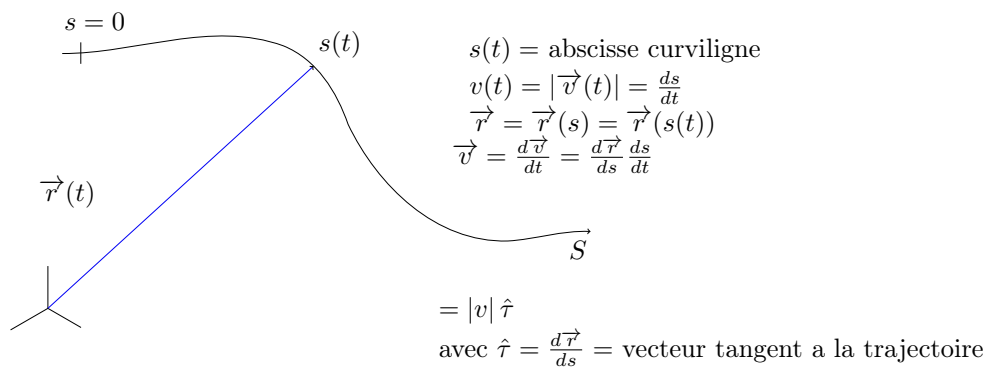


FIGURE 11 – curviligne

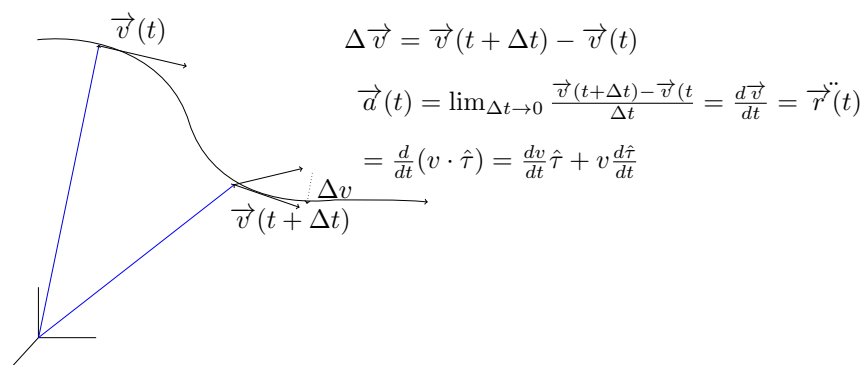


FIGURE 12 – curviligne2

Donc

$$\hat{\tau} \cdot \frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\hat{\tau}^2) = 0 \text{ car } \tau^2 = 1 \forall t$$

On peut approximer le mouvement localement par un cercle

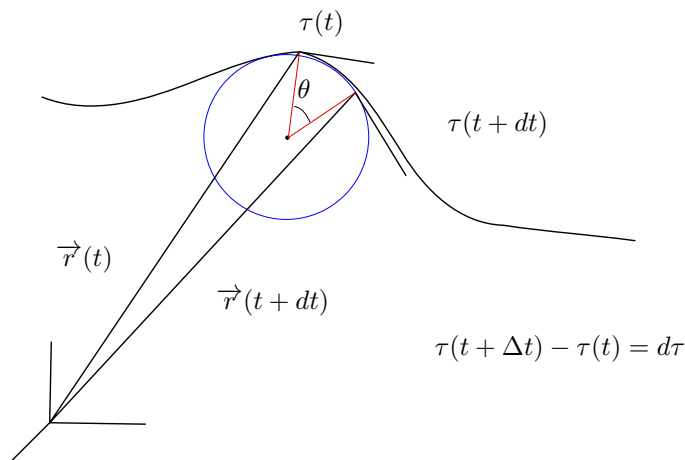


FIGURE 13 – mouvement approxime par cercle

$$\vec{a}_n(t) = v(t) \frac{d\tau}{dt} = v(t) \frac{d\tau}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v(t)^2 \cdot \frac{d\tau}{ds}$$

On peut calculer la norme de a_n

$$\begin{aligned} |\vec{a}_n(t)| &= a_n(t) = v^2 \left| \frac{d\tau}{ds} \right| \\ &= v^2 \frac{d\theta}{R(t)d\theta} \\ &= \frac{v^2(t)}{R(t)} \end{aligned}$$

13.5 Mouvement avec vitesse scalaire constante

Considerons un point materiel avec une vitesse scalaire $v = \frac{ds}{dt}$ constante non nulle

un vecteur vitesse qui change de direction au cours du temps

Acceleration

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v}^2) = 0$$

pas de composante tangentielle : $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$ Donc a est toujours perpendiculaire a v .

Force $\vec{F} = m \vec{a}$

Donc

$$F = ma = m \frac{v^2}{R}$$

force centripete

13.6 Systeme de coordonnees

Definition 8 (Systeme de coordonnees)

Parametrisation , a un certain temps t , de la position des points du referentiel au mouen de trois nombres reels.

Pour un referentiel donne il e xiste une infinite de systemes de coordonnes

Exemples

- Coordonnes cartesiennes (x, y, z)
- Coordonnees cylindriques (ρ, ϕ, z)
- Coordonnes spheriques (r, Θ, ϕ)

Chaque vecteur du repere est parallele a la variation de la position due a une modification de la variable correspondante

Lecture 5: mercredi

Wed 07 Oct

14 Description des rotations spatiales

Une rotation spatiale est caractérisée par un axe de rotation (dans l'espace), un sens de rotation et un angle de rotation.

Deux points de vue

- Rotation d n systeme physique dans un repère fixe
- Systeme physique décrit dans un repère en rotation

Theorème 4

Soit deux repères orthonormés droits de même origine, il existe toujours une rotation qui amène le premier sur le deuxième.

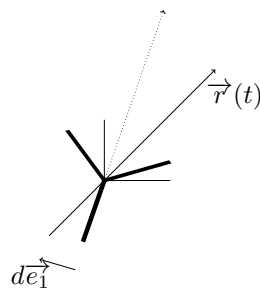


FIGURE 14 – repere

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_1 &= \frac{d\hat{e}_1(t)}{dt} = E_{11}\hat{e}_1 + E_{21}\hat{e}_2 + E_{31}\hat{e}_3 \\ \dot{\hat{e}}_2 &= \frac{d\hat{e}_2(t)}{dt} = E_{12}\hat{e}_1 + E_{22}\hat{e}_2 + E_{32}\hat{e}_3 \\ \dot{\hat{e}}_3 &= \frac{d\hat{e}_3(t)}{dt} = E_{13}\hat{e}_1 + E_{23}\hat{e}_2 + E_{33}\hat{e}_3\end{aligned}$$

est équivalent à dire

$$\dot{\hat{e}}_i = \frac{d\hat{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^3 E_{ji}\hat{e}_j$$

C'est une écriture presque matricielle. On peut écrire

$$\dot{\hat{e}}_i = E\hat{e}_i \text{ avec}$$

$$\begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix}$$

On a un repère orthonormé $\Rightarrow \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\delta_{ij} &= 0 = \frac{d}{dt}(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) = \dot{\hat{e}}_i \cdot \hat{e}_j + \hat{e}_i \cdot \dot{\hat{e}}_j = (E\hat{e}_i) \cdot \hat{e}_j + \hat{e}_i \cdot (E\hat{e}_j) \\ &= (E_{1i}\hat{e}_1 + E_{2i}\hat{e}_2 + E_{3i}\hat{e}_3) \cdot \hat{e}_j + \hat{e}_i \cdot (E_{1j}\hat{e}_1 + E_{2j}\hat{e}_2 + E_{3j}\hat{e}_3) = E_{ji} + E_{ij}\end{aligned}$$

On a donc 6 contraintes (ij=11,12,13,22,23,33)

Donc

$$\begin{pmatrix} 0 & E_{12} & E_{13} \\ -E_{12} & 0 & E_{23} \\ -E_{13} & -E_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour un vecteur quelconque $\vec{r}(t)$.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = E\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

On a donc

Theorème 5 (Formule de Poisson)

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i$$

14.1 Interprétation du vecteur ω

Si \vec{r} collinéaire à $\vec{\omega}$ alors $\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$, donc \vec{r} ne bouge pas.
Donc $\vec{\omega}$ définit l'axe de rotation au temps t . Sens de $\vec{\omega}$ = sens de rotation

$$|d\vec{r}| = |\vec{\omega} \wedge \vec{r}| dt = |\vec{\omega}| dt |\vec{r}| \sin \theta$$

Mais $|d\vec{r}| = |\vec{v}| \sin \theta$

La norme de $\vec{\omega}$ est la vitesse angulaire de rotation.

14.1.1 Cas particulier

$\vec{\omega} = \text{constante}$

Alors

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

et

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

14.2 Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

Vitesse angulaire de rotation du repère

$$\vec{\omega} = \frac{d\phi}{dt} \hat{z} = \dot{\phi} \hat{z}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \overrightarrow{OP} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z \\ \vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\hat{e}}_\rho + \dot{z} \hat{e}_z + z \dot{\hat{e}}_z \end{aligned}$$

Par Poisson

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_\rho &= \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\rho = \dot{\phi} \hat{e}_z \wedge \hat{e}_\rho = \dot{\phi} \hat{e}_\phi \\ \dot{\hat{e}}_\phi &= \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\phi = \dot{\phi} \hat{e}_z \wedge \hat{e}_\phi = -\dot{\phi} \hat{e}_\rho \end{aligned}$$

Donc

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\hat{e}}_\rho + \dot{z} \hat{e}_z + z \dot{\hat{e}}_z = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z$$

Donc

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z$$

14.3 Pendule Mathématique

Contraintes

$$\begin{cases} \rho = L = \text{constante} \Rightarrow \dot{\rho} = 0, \ddot{\rho} = 0 \\ z = 0, \dot{z} = 0, \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Donc l'accélération est

$$\vec{a} = -L\dot{\phi}^2 \hat{e}_\rho + L\ddot{\phi} \hat{e}_\phi$$

On a aussi

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{T}$$

Donc

$$\begin{cases} -mL\dot{\phi}^2 = F \cos \phi - T \text{ sur } \hat{e}_\rho \\ mL\ddot{\phi} = -F \sin \phi \text{ sur } \hat{e}_\phi \end{cases}$$

Donc

$$\ddot{\phi} = -\frac{F}{mL} \sin \phi = -\frac{g}{L} \sin \phi$$

Si les oscillations sont faibles, on a

$$\sin \phi \simeq \phi \Rightarrow \ddot{\phi} \simeq -\frac{g}{L} \phi$$

Theorème 6

La force de liaison = force exercée sur le point matériel pour qu'il obéisse à une contrainte géométrique

- *Toujours perp. à la courbe ou à la surface*
- *jamais de composante tangente à la courbe ou la surface (cad dans une direction où le point matériel peut bouger)*
- *La force de liaison devient nulle \iff la contrainte disparaît.*

Lecture 6: mercredi

Wed 14 Oct

14.4 Coordonnées sphériques

On a

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{z} + \dot{\theta} \hat{e}_\phi$$

Dérivées des vecteurs de base

$$\begin{aligned} \dot{e}_r &= \vec{\omega} \wedge e_r = \dot{\theta} e_\theta + \dot{\phi} \sin \theta e_\phi \\ \dot{e}_\theta &= \vec{\omega} \wedge e_\theta = -\dot{\theta} e_r + \dot{\phi} \cos \theta e_\phi \\ \dot{e}_\phi &= \vec{\omega} \wedge e_\phi = -\dot{\phi} e_r - \dot{\theta} \cos \theta e_\phi \end{aligned}$$

Position vitesse et accélération dans ce repère

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r e_r$$

14.5 Bille en équilibre dans un anneau en rotation

Referentiel = le laboratoire

Repere lié au référentiel : $Oxyz$

Vitesse angulaire de l'anneau $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$

Coordonnées sphériques : r, θ, ϕ

Contrainte : la bille reste sur l'anneau

$$\begin{cases} r = R, \dot{r} = 0, \ddot{r} = 0 \\ \dot{\phi} = \omega, \ddot{\phi} = 0 \end{cases}$$

Si bille en équilibre : $\dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0$

Forces s'exerçant sur la bille

$$\begin{cases} \text{poids de la bille : } m\vec{g} = -mg\hat{z} \\ \text{force de liaison } \vec{N} \cdot \vec{N}e_\theta = 0 \end{cases}$$

On obtient que

$$\begin{aligned} m\vec{g} &= -mg \cos \theta e_r + mg \sin \theta e_\theta \\ \vec{N} &= N_r e_r + N_\phi e_\phi \end{aligned}$$

2eme loi de newton : $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$

$$\begin{cases} \text{sur } e_r : N_r - mg \cos \theta = -mR\omega^2 \sin^2 \theta \\ \text{sur } e_\theta : mg \sin \theta = -mR\omega^2 \sin \theta \cos \theta \\ \text{sur } e_\phi : N_\phi = 0 \end{cases}$$

Pour la deuxième equation, on a

soit $\sin \theta = 0 (\Rightarrow \theta = 0 \text{ ou } \pi)$

ou $\cos \theta = \frac{-g}{R\omega^2}$ (seulement si $|\omega| \geq \sqrt{\frac{g}{R}}$)

15 Travail, énergie, forces conservatives

15.1 Forces de Frottement

- Forces exercées sur un corps par le fluide dans lequel il se déplace
- Ces forces s'opposent au mouvement du corps

$$\vec{F}_{frot} = -f(v)\hat{v}, f(v) > 0$$

- Elles résultent d'un grand nombre de phénomènes microscopiques, complexes à décrire
- On décrit donc les forces de frottement par des lois empiriques
 - Tirées de l'expérience
 - Non-fondamentales
 - Approximatives

15.2 Forces de frottement sec

- Force F exercée par une surface sur un solide :

- composant normale à la surface N = force de liaison
- composante tangente à la surface F_{frot} = force de frottement sec

Lois de Coulomb :

$$\begin{aligned} \text{si } v = 0 : F_{frot} &\leq F_{frot}^{max} = \mu_s N \\ \text{si } v \neq 0 : \vec{F}_{frot} &= -\mu_c N \frac{\vec{v}}{v} \end{aligned}$$

15.3 Coefficients de frottement

- Dépendent de
 - Natures des surfaces
 - Etat des surfaces
 - Température
- En général

$$\mu_c < \mu_s$$

- En première approximation ne dépendent pas de
 - la vitesse (si $v \neq 0$)
 - la dimension des surfaces de contact (surfaces planes)

Ne dépendent pas de la dimension de la surface de contact

- Surface pas parfaitement plane
- Surface de contact véritable proportionnelle à la charge

15.4 Impulsion et quantité de mouvement

- Point matériel de masse m soumis à une force F entre les points 1 et 2.
- Definition

$$d\vec{I} = \vec{F} dt \Rightarrow \vec{I}_{12} = \int_1^2 d\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

- Si F est la résultante des forces s'appliquant sur le point matériel

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \vec{a} \Rightarrow \vec{I}_{12} = \int_1^2 m \vec{a} dt = \int_1^2 m d\vec{v} \\ &= \int_1^2 d(m \vec{v}) = m \vec{v}_2 - m \vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \end{aligned}$$

ou on a défini

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

La variation de la quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la somme des forces. Donc, si m est constante, on a

$$\vec{F} = m \vec{a} \iff \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

15.5 Travail et énergie cinétique

Définition :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow W_{12} = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Si F est la résultante des forces s'appliquant sur le point matériel (et si m constante)

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 m \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt \\ &= \int_1^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) dt = K_2 - K_1 \end{aligned}$$

où on a défini $K = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$

La variation de l'énergie cinétique est égale au travail de la somme des forces.

15.6 Travail et Puissance d'une force

$$W_{12} = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F \cos \alpha ds = \int_1^2 F_t ds$$

Seule la composante de \vec{F} tangente à la trajectoire travaille, la composante normale à la trajectoire ne travaille pas.

Puissance instantanée d'une force

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Lecture 7: Energie cinétique

Wed 21 Oct

$$d\vec{I} = \vec{F} dt \Rightarrow \vec{I}_{12} = \int_1^2 \delta W$$

Puissance instantanée d'une force

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

15.7 Théorème de l'énergie cinétique

On a montré que le travail d'une force est égale à la différence des énergies cinétiques.

Pour un point matériel :

$$K_2 - K_1 = W_{12} \iff \frac{dK}{dt} = P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Pour un système de points matériels, on aura

$$K_2^{tot} - K_1^{tot} = W_{12}^{tot,ext} + W_{12}^{tot,int} \iff \frac{dK^{tot}}{dt} = P^{tot,ext} + P^{tot,int}$$

15.8 Voiture en accélération

Forces extérieures s'exerçant sur la voiture

- poids mg
- réaction du sol N
- frottements de la route sur les roues
- frottements de l'air sur la carrosserie

On peut appliquer la deuxième loi de Newton

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{route} + \vec{F}_{air} \Rightarrow \begin{cases} N = mg \\ ma = F_{route} - F_{air} \end{cases}$$

Clairement, F_{route} ne travaille pas (roulement sans glissement)

aucune force extérieure ne travaille sauf F_{air}

Le travail de F_{air} est négatif et cause une diminution d'énergie cinétique mais l'énergie augmente \Rightarrow il y a des forces internes dont le travail est positif

$$\frac{dK^{voiture}}{dt} = \underbrace{P^{tot,ext}}_{<0} + P^{tot,int} > 0$$

15.9 Conservation de l'énergie mécanique

- Si $W_{12} \neq 0$ alors l'énergie cinétique K n'est pas conservée
- Cependant, dans certains cas particuliers, \vec{F} ne dépend que de la position et "dérive du potentiel", c'est-à-dire qu'il existe une énergie potentielle $V(\vec{r})$ tel que

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 \iff \vec{F}(\vec{r}) = - \begin{pmatrix} \partial V(\vec{r}) / \partial x \\ \partial V(\vec{r}) / \partial y \\ \partial V(\vec{r}) / \partial z \end{pmatrix}$$

Si on peut écrire notre force ainsi, on la nomme conservative

Dans ce cas, on a

$$W_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) = K_2 - K_1$$

On remarque alors que $K_1 + V(\vec{r}_1)$ est constante, on note donc

$$E = K + V(\vec{r})$$

15.10 Travail de la force de pesanteur

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -mg\hat{e}_z \cdot d\vec{r} \\ &= - \int_1^2 mgdz = -[mgz]_1^2 \\ &= mgz_1 - mgz_2 \end{aligned}$$

Le travail ne dépend que des coordonnées z des points 1 et 2 : il ne dépend pas de la trajectoire.

On peut s'imaginer une trajectoire de 1 à 2 et de 2 à 1

$$W_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 1} = \int_1^2 m\vec{g} \cdot d\vec{r} + \int_2^1 m\vec{g} \cdot d\vec{r} = W_{12} + W_{21} = 0$$

On note

$$\oint m\vec{g} \cdot d\vec{r} = 0$$

15.11 Travail de la force de rappel d'un ressort

On a

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{x} = -kx\hat{e}_x$$

Donc on pose

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -kx dx \\ &= -[\frac{1}{2}kx^2]_1^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \end{aligned}$$

15.12 Travail d'une force centrale en $\frac{1}{r^2}$

On pose

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 -\frac{GmM}{r^2} \hat{e}_r \cdot d\vec{l} = -\frac{GmM}{r_1} + \frac{GmM}{r_2}$$

15.13 Forces conservatives

Ce sont les forces dont le travail ne dépend que des points de départ et d'arrivée (quels que soient ces points), et non de la trajectoire entre les deux

Propriétés

- $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \forall$ courbe fermée
- \exists une fonction $V(\vec{r})$ tel que

$$\int_1^2 = -[V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)], \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2$$

- \exists une fonction $V(\vec{r})$ (potentiel) tell que

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

15.14 Energie potentielle

potentiel dont une force conservative dérive = energie potentielle du point matériel soumis a cette force.

L'énergie potentielle est définie à une constante arbitraire près.

On a

$$V = \int_{\text{position du point matériel}}^{\text{position de référence}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

15.15 Théorème de l'énergie

- Point matériel soumis à
 - des forces conservatives $F_k = -\vec{\nabla} V_k(\vec{r})$
 - des forces conservatives de résultante \vec{F}^{NC}
- Energie mécanique

$$E(\vec{r}, \vec{v}) = K(\vec{v}) + V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + \sum_k V_k(\vec{r})$$

- Entre les points 1 et 2, on a

$$\begin{aligned} K_2 - K_1 &= W_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) + W_{12}^{NC} \\ \Rightarrow E_2 - E_1 &= W_{12}^{NC} \iff \frac{dE}{dt} = P^{NC} = \vec{F}^{NC} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Donc la variation de l'énergie mécanique est égale au travail des forces non-conservatives.

- Si seules des forces conservatives travaillent

$$E = \text{constante}$$

15.16 Lugeur

Un lugeur part au repos au point 1 : quelle est sa vitesse au point 2 Point de départ 1 : $z_1 = h, v_1 = 0$

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + m g z_1 = m g h$$

Point de d'arrivée 2 : $z_2 = 0, v_2 = ?$

$$E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

Or par le th de l'énergie cinétique, on a

$$E_2 - E_1 = W_{12}^{NC} = \int_1^2 \vec{F}_{frot} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -F_{frot} ds = -mg\mu_c \cos \alpha \frac{h}{\sin \alpha}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_2^2 - mgh &= -mg\mu_c \frac{h}{\tan \alpha} \\ \frac{1}{2}mv_2^2 &= mgh(1 - \frac{\mu_c}{\tan \alpha}) \end{aligned}$$

Donc

$$v_2 = \sqrt{2gh(1 - \frac{\mu_c}{\tan \alpha})}$$

15.17 L'énergie mécanique : intégrale première

Si $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(\vec{r})$ est constante, alors, par dérivation

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2 + V(\vec{r})) = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) + \frac{dV(\vec{r})}{dt} \\ &= m\vec{a} \cdot \vec{v} + \left(\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) \\ &= m\vec{a} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot \vec{v} = (m\vec{a} - \vec{F}) \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Et donc $\vec{F} = m\vec{a}$

Lecture 8: Gravitation

Wed 28 Oct

16 Gravitation, Moment Cinétique

16.1 Lois de Kepler

- 2ème loi :(lois des aires) Le rayon-vecteur du Soleil à une planète balaie des aires égales en des temps égaux
- 1ère loi :(1609) Les Trajectoires des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers.
- 3ème loi :(1609) Les carrés des périodes de révolution sont proportionnels aux cubes des grands axes :

$$\frac{\text{période}^2}{\text{grand axe}^3} = \text{constante}$$

16.2 Le développement de la dynamique

- Qu'est-ce qui fait bouger les planètes
 - Avant Galilée/Newton
 - Le mouvement naturel d'un corps est l'immobilité
 - Une planète doit constamment être poussée dans la direction de son mouvement
 - Après Galilée
 - Le mouvement naturel d'un corps est rectiligne uniforme
- Newton tire les conséquences des lois de Kepler
 - La 2ème loi et la planète de l'orbite impliquent que la force (et donc l'accélération) subie par une planète pointe toujours vers le soleil
 - En utilisant de plus la 3ème loi, Newton montre que la force est proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$
 - A partir de là, il prédit une trajectoire elliptique !

16.3 Mouvement central et loi des aires

Definition 9

Un point P de masse m a un mouvement central si son accélération passe toujours par un même point $O \iff \vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}$ reste toujours parallèle à $\vec{a}(t)$

Conséquences Le vecteur moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ reste constant et le mouvement est plan.

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v}) = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge m\vec{a} = 0$$

L'aire balayée par unité de temps par le vecteur $\vec{r}(t)$ est constante (loi des aires)

$$dA = \frac{1}{2} r v dt \sin(\vec{r}, \vec{v}) \iff \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v}| = \frac{L}{2m}$$

Donc on a

mouvement central \iff moment cinétique constant \iff loi des aires + mouvement dans un plan

16.4 Mouvement central

Composante horizontale

$$F_p = \vec{F} \cdot \hat{e}_\rho = -mg \cos \alpha \sin \alpha$$

Le support de \vec{F}_p passe toujours par O

$$|\vec{F}_p| = mg \cos \alpha \sin \alpha$$

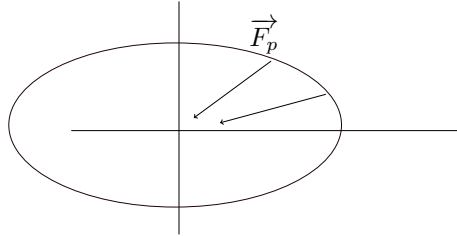


FIGURE 15 – mouvement_{central}

16.5 Dédution de la force de Gravitation en $\frac{1}{r^2}$

Supposons une orbite circulaire.

Calculons le moment cinétique

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \vec{r} \wedge m \vec{v} = m \vec{r} \wedge (\omega \wedge \vec{r}) \\ &= mr^2 \vec{\omega}\end{aligned}$$

Par la 2ème loi de Kepler $\vec{L} = \text{constante}$, on en déduit

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \text{constante} \Rightarrow |\vec{v}| = v = \omega r$$

Donc on a un mouvement circulaire uniforme.

Par la 3ème loi de Kepler

$$T^2 = Cr^3$$

Par la deuxième loi de Newton

$$F = ma = m \frac{v^2}{r} = \frac{m}{r} \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2 = \frac{m}{r} \frac{r \pi^2 r^2}{Cr^3} = \frac{4\pi^2}{C} m \frac{1}{r^2}$$

Posons $\xi = \frac{4\pi^2}{C}$, on a donc

$$= \xi m \frac{1}{r^2}$$

Donc

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\xi}}$$

16.6 Loi de gravitation universelle

Theorème 7 (Gravitation Universelle)

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{e}_r - G \frac{Mm}{r^3} \vec{r}$$

16.7 Champ de gravitation

Une masse ponctuelle M produit un champ gravitationnel $\vec{g}(\vec{r})$ à la position r :

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Quel est le champ gravitationnel produit par une masse M non ponctuelle supposée sphérique de rayon R et homogène ? (par exemple la terre)

Réponse : Si $r \geq R$, le même champ que produirait une masse M ponctuelle située au centre de la terre (conséquence de la forme en $\frac{1}{r^2}$)

16.8 Energie potentielle gravifique

Energie potentielle

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}$$

Approximation à la surface de la terre ($h \ll R$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{R+h} = \frac{R-h}{R^2-h^2} \simeq \frac{R-h}{R^2} = \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2} \\ \Rightarrow V(r) &= -\frac{GMm}{r} \simeq -\frac{GMm}{R} + \frac{GM}{R^2}mh \end{aligned}$$

On a

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}$$

$$\Rightarrow \text{Force} = F_1 \hat{x}_1 + F_2 \hat{x}_2 + F_3 \hat{x}_3$$

On a donc

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{2x_i}{2r} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{x_i}{r}$$

Et donc

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

16.9 Mouvement dans un potentiel central

Si le potentiel ne dépend que de la distance à l'origine, $V = V(r)$, alors on a une force centrale

$$\vec{F} = -\nabla V(r)$$

Force centrale \iff vecteur moment cinétique constante \Rightarrow mouvement plan

Dans le plan du mouvement, on a

$$\begin{cases} \vec{r} = r\hat{e}_r \\ \vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \end{cases}$$

Constantes du mouvement

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = mr\hat{e}_r \wedge (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\hat{e}_z$$

de meme

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta)^2 + V(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

16.10 Intégrales premières d'un mouvement central

Point matériel soumis à une force centrale

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dr}\hat{e}_r$$

$\vec{m\ddot{a}} = \vec{F}$ projeté sur \hat{e}_θ

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \iff \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

$\vec{m\ddot{a}} = \vec{F}$ projeté sur \hat{e}_r On obtient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \right) = 0$$