Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-04-26 au 2021-04-30

Série 18 du mercredi 28 avril 2021

Exercice 1.

Considérons la fonction f définie pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{1}$$

et l'ensemble

$$S := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\}. \tag{2}$$

1) Montrer que f atteint un minimum global sur S.
2) Calculer ce minimum par une méthode géométrique.

Exercice 2.

Parmi tous les triangles rectangles ayant la même aire, déterminer celui qui a la plus petite hypoténuse.

Exercice 3.

1) Soient $q \in \mathbb{R}_+^*$ et $\boldsymbol{x} \in \,]0, +\infty[^n$. Montrer que

$$\prod_{i=1}^n x_i = q^n \implies \prod_{i=1}^n (1 + x_i) \geqslant (1 + q)^n. \tag{3}$$

Sous quelles conditions a-t-on égalité, i.e. $\prod_{i=1}^n (1 + x_i) = (1 + q)^n$?

2) Soient $x_0, x_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x_0 < x_{n+1}$. Trouver, s'ils existent, les points $\boldsymbol{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ en lesquels

$$\sup\left\{ \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=0}^n (x_i + x_{i+1})} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \; ; \; \forall i \in \{0, \dots, n\}, \; x_i < x_{i+1} \right\} \tag{4}$$

est atteint.

Indication. Utiliser le résultat du point 1.