DAVID WIEDEMANN

ALGEBRE LINEAIRE I

Table des matières

List of Theorems

Lecture 2: Injectivite, Surjectivite et Bijectivite

Tue 15 Sep

Definition 1 (Injectivite)

Une application $f : X \mapsto Y$ est injective (injection) si $\forall y \in Y f^{-1}(\{y\})$ ne possede pas plus d'un element. On note

$$f : X \hookrightarrow Y$$

Remarque : Une condition equivalente d' injectivite :

$$\forall x \neq x' \in X \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Definition 2 (Surjectivite)

Une application $f : X \mapsto Y$ est surjective (surjection) si $\forall y \in Y f^{-1}(\{y\})$ possede au moins un element.

On note

$$f : X \twoheadrightarrow Y$$

Soit $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, il existe au moins $x \in X$ tq $f(x) = y$

De maniere equivalente

$$\text{surjectif} \iff Im(f) = f(X) = Y$$

Alors on a une application

$$\begin{aligned} "f" : X &\mapsto Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Cette application est toujours surjective.

Definition 3 (Bijectivite)

Une application $f : X \mapsto Y$ est bijective (bijection) si elle est injective et surjective, cad si $\forall y \in Y, f^{-1}(\{y\}$ (l'ensemble des antecedents de y par f) possede exactement un element. On note la bijectivite par

$$f : X \simeq Y$$

Si $f : X \simeq Y$, alors on peut identifier les els de X avec ceux de Y :

$$x \in X \leftrightarrow f(x) \in Y$$

Remarque : Si $f : X \hookrightarrow Y$
$Y' = f(X)$ l'application

$$f : X \twoheadrightarrow Y' = f(x)$$

et toujours surjective. et comme f est injective, on obtient une bijection $f : X \simeq Y' = f(X)$ entre X et $f(X)$.

X peut etre identifie a $f(X)$.

— $Id_X : \underbrace{X \mapsto X}_{x \mapsto x}$ est bijective
— $x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ est inj et bijective.
— $\mathcal{P} \simeq \{0,1\}^X = \mathcal{F}(X, \{0,1\})$

Exercice

$C : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$
$(m,n) \simeq \frac{1}{2}((m+n)^2 + m + 3n)$
Montrer la bijectivite.

Dans ce qui suit, soient X et Y des ensembles finis possedant respectivement $|X|$ et $|Y|$ elements et $f : X \mapsto Y$ une application entre ces ensembles. On a les proprietes suivantes :

Proposition 1 (Injectivite et cardinalite)
Si $f : X \hookrightarrow Y$ est injective alors $|X| \leq |Y|$

Proposition 2 (Surjectivite et cardinalite)
Si $f :\twoheadrightarrow Y$ est surjective alors $|X| \geq |Y|$.

Proposition 3 (injectivite et condition)
Si $f : X \hookrightarrow Y$ et $|X| \geq |Y|$ alors $|Y| = |X|$ et f bijective.

Proposition 4 (Surjectivite et condition)
Si $f : X \twoheadrightarrow Y$ et $|X| \leq |Y|$ alors $|Y| = |X|$ et f bijective.

Propriete 5 (Bijectivite)
Si f bijective, on peut lui associer une application reciproque :

$$f^{-1} : Y \mapsto X$$
$$y \mapsto x$$

tel que $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$, x unique.

0.1 Relation de composition par les applications reciproques

— $f : X \simeq Y$ et $f^{-1} : Y \simeq X$

$$f^{-1} \circ f : X \mapsto Y \mapsto X = Id_X.$$

En effet, $\forall x \in X$ si on pose $y = f(x)$
on a $f^{-1}(y) = x = f^{-1}(f(x)) = x$

— $f \circ f^{-1} : Y \mapsto X \mapsto Y$
$f \circ f^{-1} = Id_Y$

— $(f^{-1})^{-1} = f$

— $f : X \simeq Y$ et $g : Y \simeq Z$
Alors $g \circ f : X \mapsto Z$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Lemme 6 (Composition d'applications surjectives et injectives)

1. *Si f et g sont injectives, $g \circ f$ est injective.*
2. *Si f et g sont surjectives, $g \circ f$ est surjective.*
3. *Si f et g sont bijectives, $g \circ f$ est bijective et*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Proof

1. $g \circ f : X \mapsto Y \mapsto Z$
$x \mapsto g(f(x))$
$\forall z \in Z$ on veut montrer que $(g \circ f)^{-1}(\{z\})$ a au plus un element

$$(g \circ f)^{-1}(\{z\}) = \{x \in X | g(f(x)) = z\}$$
$$\text{si } g(f(x)) = z \Rightarrow f(x) \in g^{-1}(\{z\})$$

l'ensemble $\{x \in X | g(f(x)) = z\}$ est contenu dans $g^{-1}(\{z\})$ et donc possede au plus 1 element. Si cet ensemble est vide on a fini $(g \circ f)^{-1}(\{z\}) = \emptyset$. Si $g^{-1}(\{z\}) \neq \emptyset$ alors $g^{-1}(\{z\}) = \{y\}$ et $x \in (g \circ f)^{-1}(\{z\})$ verifie

$$f(x) = y \Rightarrow x \in f^{-1}(\{y\})$$

Comme f^{-1} est injective $f^{-1}(\{y\})$ possede au plus un element.

Et donc $g^{-1}(f^{-1}(\{z\})$ a au plus 1 element car g est surjective

2. Surjectivite : Exercice

3. Bijectivite : si f et g sont bijectives $g \circ f$ est bijective.
f et g sont inj $\Rightarrow g \circ f$ inj.
f et g sont surj $\Rightarrow g \circ f$ surj
Si f et g sont bij $\Rightarrow g \circ f$ est injective et surjective
$\Rightarrow g \circ f$ bijective. □

Proposition 7 (Inverse d'une composition)

On veut montrer que $\forall z \in Z$

$$X := (g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1} \circ g^{-1}(z) \underbrace{=}_{?} f^{-1}(g^{-1}(z)) = x'$$

Proof

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = z \\ g \circ f(f^{-1}(g^{-1}(z))) &= g(f(f^{-1}(g^{-1}(z)))) \\ &= g(f \circ f^{-1}(g^{-1}(z))) \end{aligned}$$

Or on sait que

$$f \circ f^{-1} = g \circ g^{-1} Id_Y$$

et donc

$$g(f \circ f^{-1}(g^{-1}(z))) = g(g^{-1}(z)) = z = (g \circ f)(x)$$

On a donc montre que

$$(g \circ f)(x) = z = (g \circ f)(x')$$ □

$\Rightarrow x$ et x' on la meme image par $g \circ f$ et comme $g \circ f$ est injective $x = x'$. Donc $\forall z \in Z (g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1} \circ g^{-1}(z)$.

L'ensemble des applications entre X et Y seran note

$$\mathcal{F}(X, Y) = HOM_{ENS}(X, Y) = Y^X$$

Definition 4 (Notations Injection)
L'ensemble des applications injectives sera note

$$INJ_{ENS}(X, Y)$$

Definition 5 (Notations Surjection)
L'ensemble des applications surjectives sera note

$$SURJ_{ENS}(X, Y)$$

Definition 6 (Notations Bijection)
L'ensemble des applications bijectives sera note

$$BIJ_{ENS}(X, Y) = Iso_{ENS}(X, Y)$$

Si il s'agit d'une bijections de X vers $Y = X$ alors

$$Hom_{ENS}(X, X) = END_{ENS}(X) = AUT_{ENS} = ISO_{ENS}(X)$$

On appelle cet ensemble aussi parfois l'ensemble des permutations de X.

1 Groupes

1.1 Le groupe Symmetrique

Voici un exemple d'un groupe, le groupe des bijections muni de la composition.

X ensemble

$$Bij(X, X) = Bij(X)$$

Clairement $\{Id_X\} \subset Bij(X) \Rightarrow Bij(X) \neq \emptyset$.

Supposons $f, g \in Bij(X)$, alors

$$f, g \mapsto g \circ f \in Bij(X)$$

On dispose donc de cette loi de composition :

$$\circ : \begin{cases} Bij(X) \times Bij(X) & \longrightarrow Bij(X) \\ (g, f) & \longrightarrow g \circ f \end{cases}$$

$\circ$ est associative :
$f, g, h \in Bij(X)$, alors

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$$

Id_X est neutre : $\forall f \in Bij(X)$

$$f \circ Id_X = Id_X \circ f = f$$

Donc

$$x \in X(f \circ Id_X)(x) = f(Id_X(x)) = f(x)$$

Pour chaque element f on trouve une reciproque notee f^{-1} tel que

$$f^{-1} \circ f = Id_X = f \circ f^{-1}$$

Toutes ces proprietes font de

$$Bij(X) = Aut_{ENS}(X)$$

un groupe

Definition 7 (Groupe abstrait)

Un groupe $(G, \star, e_G, \cdot^{-1})$ est la donnee d'un quadruple forme

- *d'un ensemble G non-vide*
- *d'une application (appellee loi de composition interne) $\star$ tq*

$$\begin{aligned} &G \times G \mapsto G \\ &(g, g') \mapsto \star(g, g') =: g \star g' \end{aligned}$$

- *d'un element $e_G \in G$ (element neutre)*
- *de l'application d'inversion $\cdot^{-1}$*

$$\begin{aligned} &G \mapsto G \\ &g \mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

ayant les proprietes suivantes

- *Associativite : $\forall g, g', g'' \in G, (g \star g') \star g'' = g \star (g''')$.*
- *Neutralite e e_G : $\forall g \in G, g \star e_G = e_G \star g = g$.*

— *Inversibilite :* $\forall g \in G, g^{-1} \star g = g \star g^{-1} = e_G$.

Quelques exemples :

— $(Bij(X), \circ, Id_X, \cdot^{-1})$ est un groupe.

— $(\mathbb{Z}, +, 0, -\cdot)$ est un groupe.

— $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times, 1, \cdot^{-1})$ est un groupe.

— $(\{1, -1\}, \times, 1, \cdot^{-1})$ est un groupe.

Definition 8 (Groupes commutatifs)

Un groupe $(G, \star, e_G, \cdot^{-1}$ *est dit commutatif si* $\star$ *possede la propriete supplementaire de commutativite :*

$$\forall g, g' \in G g \star g' = g' \star g$$

Exemple Les groupes $(\mathbb{Z}, +)$ ou $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, x)$ sont des groupes commutatifs.

Par contre si X possede au moins 3 elements $Bij(X)$ n'est pas commutatif.