# Série 13

David Wiedemann

1er juin 2021

Soit $V(t)$ une primitive de $v(t)$ , on peut réecrire l'équation différentielle par le théorème fondamental de l'analyse comme

$$\begin{aligned}\int_1^x v(s)ds &= \frac{v(x)^2}{x}\\ V(x) - V(1) &= \frac{v(x)^2}{x}\end{aligned}$$

En dérivant par rapport à $x$, on trouve l'équation différentielle

$$\begin{aligned}v(x) &= \frac{2v(x)v'(x)x - v(x)^2}{x^2}\\ v(x) &= 2v'(x)x - v\\ v'(x) &= \frac{v(x)}{2x} + \frac{1}{2}x\end{aligned}$$

On voit facilement qu'une solution à l'équation différentielle homogène associée est de la forme

$$y(t) = C\sqrt{t}$$

On peut chercher une solution particulière à l'équation différentielle en considérant un polynôme quelconque de degré 2.
Soit $w(t) = at^2 + bt + c$, en substituant dans l'équation différentielle, on trouve

$$\begin{aligned}2at + b &= \frac{at^2 + bt + c}{2t} + \frac{1}{2}t\\ 2at + b &= \frac{1}{2}at + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}t + \frac{c}{2t}\end{aligned}$$

Ainsi, en comparant les termes de même exposant, on obtient la condition

$$2a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

et que $c = b = 0$ .
Ainsi, on trouve que $\frac{t^2}{3}$ est une solution particulière de l'équation différentielle.
On en déduit que la forme de la solution générale est

$$v(t) = \frac{t^2}{3} + C\sqrt{t}$$

On utilisant la condition initiale que $v(1) = 0$ , on déduit que

$$\frac{1}{3} + C\sqrt{1} = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{3}$$

Ainsi une solution à l'équation différentielle est

$$v(t) = \frac{t^2 - \sqrt{t}}{3}$$