Analyse I

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Introduction

Mon 14 Sep

1 Introduction

1.1 Buts du Cours

Officiel :

Suites, series, fonctions, derivees, integrales , ...

Secrets :

Apprendre le raisonnement rigoureux
Creativite
Esprit Critique
Ne croyez rien tant que c'est pas prouve

On construit sur ce qu'on a fait, on recommence pas toujours a 0, par rapport a d'autres domaines(lettres par exemple)

Theorème 1 (env. -400)
Il n'existe aucin nombre (fraction) x tel que $x^2 = 2$.

Ca contredit pythagore nn ?
On va demontrer le theoreme.[1]

Lemme 2 (Lemme)
Soit $n \in \mathbb{N}$ Alors n pair $\iff$ n^2 pair.

Preuve
$\Rightarrow$ *Si n pair $\Rightarrow n^2$ pair.*
Hyp. $n = 2m (m \in \mathbb{N})$
Donc $n^2 = 4m^2$, *pair.*

Par l'absurde, n impair. $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$.

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

impair. Donc si n est impair, alors n^2 est forcement impair. Absurde. □

Preuve
Supposons par l'absurde $\exists x$ t.q. $x^2 = 2$ et $x = \frac{a}{b} (a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$.
On peut supposer a et b non tous pairs.(sinon reduire).

$$x^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$$

1. On demontre d'abord un lemme

pair.
Lemme : a pair, i.e. $a = 2n (n \in \mathbb{N})$.

$$a^2 = 4n^2 = 2b^2 \Rightarrow 2n^2 = b^2, i.e. b^2 pair.$$

Lemme : b pair.
Donc a et b sont les deux pairs, on a une contradiction.
$\lightning$ $\square$

En conclusion, le theoreme est bel et bien vrai, et contredit donc pythagore. Donc les fractions ($\mathbb{Q}$) ne suffisent pas a decrire/mesurer les longueurs geometriques. Il faut les nombres reels, on les comprends seulement vraiment depuis 2 siecles.
C'est important de chercher ce genre d'erreurs.
Prochain but : definir les nombres reels ($\mathbb{R}$). L'interaction entre les fractions et les nombres reels.

2 Definir $\mathbb{R}$

On commence avec la definition axiomatique des nombres reels.

Axiom 3 (Nombres Reels)
$\mathbb{R}$ *est un corps, en d'autres termes :*
Ils sont munis de deux operations : plus et fois.

- *Associativite* $x + (y + z) = (x + y) + z (x, y, z \in \mathbb{R})$ [2]

- *Commutativite* $x + y = y + x$.

- *Il existe un element neutre* 0 *t.q.* $0 + x = x, x \in \mathbb{R}$. [3]
- *Distributivite* $x(yz) = (xy)z$

- *Il existe un element inverse, unique* $-x \in \mathbb{R}$ *t.q.* $x + (-x) = 0$

Remarque : Il existe beaucoup d'autres corps que $\mathbb{R}$, par exemple $\mathbb{Q}, \mathbb{C}$, $\{0, 1, 2\} \mod 3$

Attention : $\{0, 1, 2, 3\} \mod 4$ n'est pas un corps !
Presque tous marchent, ils satisfont 8 des 9 axiomes.

---

2. L'associativite n'est pas forcement vraie(octonions)
3. Il y a aucune difference entre les regles pour l'addition que pour la multiplication.

Lemme 4 (Theorem name)
$\forall x \exists ! y$ *t.q.* $x + y = 0$.

Preuve
Supposons $x + y = 0 = x + y'$
A voir : $y = y'$.

$$\begin{aligned} y &= y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' \\ &= (x + y) + y' = 0 + y' = y' \end{aligned}$$

CQFD. □

Exercice
Demontrer que 0 est unique.

Proposition 5 (Annulation de l'element neutre)
$0 \cdot x = 0$

Preuve

$$x = x \cdot 1 = x(1 + 0) = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$$

$$0 = x + (-x) = x + (-x) + x \cdot 0$$ □

$\Rightarrow 0 = x \cdot 0$
[4]

Corollaire 6 (x fois moins 1 egale -x)

$$x + x \cdot (-1) = 0$$

Preuve
A voir : $x \cdot (-1)$ *satisfait les proprietes de* $-x$.
Or
$$x + x(-1) = x(1 - 1) = x \cdot 0 = 0.$$ □

Exercice
Montrer que $\forall x : -(-x) = x$ et que ceci implique $(-a)(-b) = ab$.

Rien de tout ca n'a quelque chose a voir avec $\mathbb{R}$.
Il nous faut plus d'axiomes !!

4. $a - b = a + (-b)$

Axiom 7 (Nombres Reels II)
$\mathbb{R}$ est un corps ordonne. Ce qui revient a dire que les assertions suivantes sont verifiees.

— $x \leq y$ *et* $y \leq z$ *impliquent* $x \leq z$

— $(x \leq y et y \leq x) \Rightarrow x = y$

— *pour tout couple de nombres reels* x *et* y *: ou bien* $x \leq y$ *ou bien* $x \geq y$.

Exemple de corps ordonnnes :
(1) $\mathbb{R}$, (2) $\mathbb{Q}$, (3) $\{0, 1, 2\} \mod 3$ n'est pas un corps ordonne.

Exercice

$x \leq y \iff -x \geq -y$ **Exercice**
$x \leq y$ et $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$
$x \leq y$ et $z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz$.

Il nous manque encore un axiome, et c'est le dernier : pour mercredi !

Lecture 2: Cours Mercredi

Wed 16 Sep

2.1 Exemple d'utilisation

Definition 1 (valeur absolue)

$$|x| = \begin{cases} x \ si \ x \geq 0 \\ -x \ si \ x < 0 \end{cases}$$

Proposition 8 (Inegalite du triangle)
Elle dit que

$$\forall x, y : |x + y| \leq |x| + |y|$$

Preuve
Cas $x, y \geq 0$ *: alors* $x + y \geq 0$

$$\iff x + y \leq x + y$$

Ce qui est toujours vrai.
Cas $x \geq 0$ *et* $y < 0$.
Si $x + y \geq 0$*, alors*

$$\begin{aligned} \iff |x + y| &\leq x - y \\ \iff x + y &\leq x - y \\ y &\leq -y \end{aligned}$$

c'est vrai car $y < 0$.
Si $x + y < 0$, alors

$$\iff -x - y \leq x - y \qquad \square$$

Donc $-x \leq x$ vrai car $x \geq 0$.

Definition 2 (Bornes)
Terminologie : Soit $A \subseteq E$, E corps ordonne.

— *Une borne superieure (majorant) pour A et un nombre b tq*

$$a \leq b \forall a \in A.$$

— *Une borne inferieure (minorant) pour A et un nombre b tq*

$$a \geq b \forall a \in A.$$

On dira que l'ensemble A est borne si il admet une borne.

Axiom 9 (Axiome de completude)

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \neq \emptyset$$

et majoree $\exists s \in \mathbb{R}$ t.q

1. *s est un majorant pour A.*
2. *$\forall$ majorant b de A, $b \geq s$.*

Cet axiome finis la partie axiomatique du cours.

Remarque

1. *$\forall s' < s \exists a \in A : a > s'$.*
2. *s est unique.*

Definition 3 (Supremum)
Ce s s'appelle le supremum de A, note $sup(A)$.

Remarque
$\exists$ (pour A minore et $\neq \emptyset$) une borne inferieure plus grande que toutes les autres, notee $inf(A)$ (infimum).

$$\inf(A) = -\sup(-A)$$

Remarque
Si $\sup(A) \in A$, on l'appelle le maximum.

Remarque
Si $\inf(A) \in A$, on l'appelle le minimum.

Proposition 14
$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x.$

Preuve
Par l'absurde,
Alors
$$\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : n < x$$
$\Rightarrow \mathbb{N}$ *borne et* $\neq \emptyset \Rightarrow \exists s = \sup(\mathbb{N})$
$$s - \frac{1}{2} < s \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > s - \frac{1}{2}$$
$n + 1 \in \mathbb{N}$ *et* $n + 1 > s - \frac{1}{2} + 1 = s + \frac{1}{2}$
donc $n + 1 > s$ *absurde.* □

Corollaire 15 (Propriete archimedienne)
1. $\forall x \forall y > 0 \exists n \in \mathbb{N} : ny > x.$
2. $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon$

Preuve
Pour 2, appliquer la proposition a $x = \frac{1}{\epsilon} \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{1}{\epsilon}$
Alors
$$\Rightarrow \epsilon > \frac{1}{n}$$
Pour montrer le 1.
Considerer $\frac{x}{y}$ □

On peut maintenant montrer que la racine de deux existe.

Theorème 16 (La racine de deux existe)
$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

Preuve
$$A := \{y | y^2 < 2\}$$
Clairement $A \neq \emptyset$ *car* $1 \in A$. *De plus,* A *est majore : 2 est une borne. (si* $y > 2, y^2 > 4 > 2 \Rightarrow y \notin A$*).*
Donc $\exists x = \sup(A)$
Supposons (par l'absurde) que $x^2 < 2$
Soit $0 < \epsilon < 1, \frac{2-x^2}{4x}$.

Clairement, par hypothese $2-x^2>0$ *et idem pour* $4x$ *car* $x\geq 1$. *Soit* $y=x+\epsilon$, *alors*

$$y^2 = x^2+2\epsilon x+\epsilon^2 < x^2+\frac{2-x^2}{2}+\frac{2-x^2}{2}=2$$

$\Rightarrow y\in A$ *Mais* $y=x+\epsilon > x$. *Absurde car* $x=\sup(A)$. *Donc* $x^2\geq 2$.
Deuxiemement, supposons (absurde) $x^2>2$.
Soit $0<\epsilon<\frac{x^2-2}{2x}>0$.
Posons $b=x-\epsilon$.

$$\begin{aligned} b<x &\Rightarrow \exists y\in A : y>b \\ \Rightarrow y^2>b^2=x^2-2\epsilon x+\epsilon^2 &> x^2-\underbrace{2\epsilon x}_{<x^2-2} \\ &> x^2-(x^2-2)=2. \end{aligned}$$

Conclusion : $y^2>2$ *contredit* $y\in a$.
Donc $x^2=2$. □

Remarque
Preuve similaire :

$$\forall y>0\exists! x>0 : x^2=y$$

Proposition 18 ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$)

$$\forall x<y\in\mathbb{R}\exists z\in\mathbb{Q} : x<z<y$$

Lemme 19

$$\forall x\exists n\in\mathbb{Z} : |n-x|\leq\frac{1}{2}$$

Ou encore :

$$\forall x\exists [x]\in\mathbb{Z}tq$$

$$\begin{cases}[x]\leq x\\ [x]+1>x\end{cases}$$

Preuve

$$\exists n\in\mathbb{Z} : n>x(Archimede).$$

Soit $[x]=\inf\{n\in\mathbb{Z} : n>x\}-1$ □

Preuve (Preuve de la densite)
Archimede : $\exists q \in \mathbb{N} : q > \frac{1}{y-x}$.
Donc

$$qy - qx > 1.$$
$$\Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : qx < p < qy$$

par exemple :

$$p = [qy]$$

si $qy \notin \mathbb{Z}$ *ou bien*

$$p = qy - 1$$

si $qy \in \mathbb{Z}$ □

Lecture 3: Suites

Wed 23 Sep

$$\begin{aligned} 0,999 \\ 0,9 \\ 0.99 \\ 0.999 \\ 0.9999 \\ \vdots \end{aligned}$$

> **Proposition 20 (Densite des irrationnels)**
> $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *les irrationnels sont dense dans* $\mathbb{R}$.

Preuve
Soit $x < y$ *(dans* $\mathbb{R}$*).*
Cherche $z \notin \mathbb{Q}$ *tq* $x < z < y$.

$$\exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} tq x < \frac{p}{q} < y$$

Propr. archimedienne $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\underbrace{\frac{p}{q} + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{n}}_{:=z} < y$$

car

$$\exists n : \frac{1}{n} < \underbrace{y - \frac{1}{q}}_{>0} / \sqrt{2}$$

Il reste a voir que : $z = \frac{p}{q} + \sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$

$$\sqrt{2} = n(z - \frac{p}{q})$$
$$z \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \lightning$$

□

3 Suites et limites

Definition 4 (Suite)
Une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est une application (= fonction)* $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Remarque
Suite $(x_n) \neq$ *ensemble* $\{x_n\}$ *Il arrive qu'on indice* x_n *par une partie de* $\mathbb{N}$*. Mais suite = suite infinie*

Exemple
$x_n = \frac{1}{n}(n = 1, 2, \ldots)$
$x_n = (-1)^n; x_n = n!; F_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$
$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415$

3.1 Convergence

Definition 5 (Convergence de suites)
L'expression $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$ *signifie :*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$$

On dit alors que (x_n) *converge (vers* l*). Sinon,* (x_n) *diverge.*

Lemme 23 (Unicite de la limite)
Si (x_n) *converge, il existe un unique* $l \in \mathbb{R}$ *tq* $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$

Preuve
Supposons l, l' *limites. Si* $l \neq l'$*, alors* $|l - l'| > 0$ *Donc* $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \frac{|l-l'|}{2}$
De meme $\exists n_1 \forall n > n_1 : |x_n - l'| < \frac{|l-l'|}{2}$
Soit $n > n_0, n_1$ *Alors :*

$$|l - l'| = |l - x_n + x_n - l'| \leq \underbrace{|l - x_n|}_{<|l-l'|/2} + \underbrace{|x_n - l'|}_{|x_n - l'|}$$

Donc
$$|l - l'| < 2 \cdot \frac{|l - l'|}{2}$$

$\lightning$ □

Exemple

1. *Si* (x_n) *est constante (* $\exists a \forall n : x_n = a$*) alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ *(Archimede)*

Definition 6

Terminologie :

(x_n) *est bornee, majoree, minoree, rationnelle, ... etc si l'ensemble* $\{x_n\}$ *l'est.*

La suite (x_n) *est croissante si* $x_n \leq x_{n+1} \forall n$ *Idem decroissante Dans les deux cas, on dit que la suite* (x_n) *est monotone*

> **Lemme 25**
> *Toute suite convergente est bornee.*

Preuve

Posons $\epsilon = 7$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |x_n - l| < 7 \qquad \square$$

Soit $B_1 \geq |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|$

Posons $B = max(B_1, |l| + 7)$ *Alors* $|x_n| \leq B \forall n$.

Attention la reciproque n'est pas vraie!!

Exemple

$x_n = (-1)^n$ *definit une suite bornee non convergente.*

Preuve

Supposons $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n = l$.

Posons $\epsilon = \frac{1}{10}$ *alors* $\exists n_0 \forall n > n_0 : |(-1)^n - l| < \frac{1}{10}$

$n > n_0$ *pair* $\Rightarrow |1 - l| < \frac{1}{10}$

$n > n_0$ *impair* $\Rightarrow |-1 - l| < \frac{1}{10}$

ceci implique

$$\Rightarrow |1 - (-1)| \leq |1 - l| + |-1 - l| < \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \qquad \square$$

> **Proposition 27**
> *Supposons* $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$ *et* $\lim_{n\to+\infty} x'_n = l'$
> *Alors* 1. : $\lim_{n\to+\infty}(x_n + x'_n) = l + l'$, *et* 2. : $\lim_{n\to+\infty} x_n \cdot x'_n = l \cdot l'$

Preuve

1 :

Soit $\epsilon > 0$ *Cherche* n_0 *tq* $\forall n > n_0 : |x_n + x'_n - (l + l')| < \epsilon$.

Appliquons les deux hypothese a $\frac{\epsilon}{2}$: $\exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ *et* $\frac{\epsilon}{2}$: $\exists N' \forall n > N' : |x'_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ *Posons* $n_0 = \max(N, N')$
Si $n > n_0$, *alors*

$$|x_n + x'_n - (l + l')| \leq |x_n - l| + |x'_n - l'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

2 :
Par le lemme, $\exists B$ *tq.* $|x_n|, |x'_n| < B \forall n$.
Soit $\epsilon > 0$. *Appliquons les hypotheses a* $\frac{\epsilon}{2B}$.

$$\exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2B}$$

Si $n > n_0 := \max(N, N')$:

$$\begin{aligned} |x_n x'_n - ll'| &\leq |x_n x'_n - x_n l'| + |x_n l' - ll'| \\ &= \underbrace{|x_n|}_{<B} \cdot \underbrace{|x'_n - l'|}_{<\frac{\epsilon}{2B}} + \underbrace{|l'|}_{<B} \cdot \underbrace{|x_n - l|}_{<\frac{\epsilon}{2B}} < \epsilon \end{aligned}$$

□

Lemme 28
On a utilise : lemme Si $x_n \leq B \forall n$ *et* $\lim_{n \to +\infty} x_n = l$ *alors* $l \leq B$

Preuve
Par l'absurde :
Si $l > B$, *posons* $\epsilon = l - B > 0$
$\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$
en particulier $x_n > l - \epsilon = B$ ↯

□

Lecture 4: lundi

Mon 28 Sep

Remarque

— $\lim_{n \to +\infty} |x_n| = |\lim_{n \to +\infty} x_n|$, *ce qui est sous-entendu ici est que la limite existe.*

— $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *convergence et limite sont inchangees si on modifie un nombre fini de termes.*
En particulier $(x_n)_{n=17}^{\infty}$, *rien ne change.*
— $x_n \to l$ ($n \to \infty$), *equivalent a* $\lim_{n \to +\infty} x_n = l$
— *On dit que* (x_n) *converge vers* $+\infty$ *et on note* $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, *si* (x_n) *diverge de la facon suivante :*

$$\forall R \in \mathbb{R}, \exists n_0 \forall n > n_0 : x_n > R$$

La definition est la meme si x_n *converge vers* $-\infty$

Proposition 30 (Inversion d'une limite)
Supposons que (x_n) *converge vers* $l \neq 0$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{l}$

Corollaire 31
Si (x_n) *converge vers* l *et*
Si (y_n) *converge vers* $m \neq 0$ *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{l}{m}$$

Car $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$

Lemme 32
Sous les hypotheses de la proposition,

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n \neq 0$$

Preuve
Appliquons la convergence a $\epsilon = \frac{|l|}{2}$ *(car* $l \neq 0$*)*

$$|x_n - l| < \epsilon \Rightarrow x_n \neq 0$$ □

Preuve
Preuve de la proposition
Soit $\epsilon > 0$.
On veut estimer

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{l}\right| = \underbrace{\frac{|l - x_n|}{|x_n - l|_{\geq \frac{|l|}{2}|l|}} <?\epsilon}$$

pour n *comme dans le lemme. On veut donc*

$$|l - x_n| < \epsilon \frac{|l|^2}{2}$$

Donc $\exists n_1 \forall n \geq n_1$, *on a bien* $|l - x_n| < \epsilon$ □

Exemple
On peut a present calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_d n^d}{b_0 + \ldots + b_f n^f}$$

$a_d \neq 0, b_f \neq 0$
Si $d > f$ *alors* $lim = \pm\infty$
Si $d < f$ *alors* $lim = 0$

Si $d = f$, *alors* $lim = \frac{a_d}{b_f}$
Justification
La suite peut s'ecrire

$$\frac{a_d + a^{d-1}\frac{1}{n} + \ldots + a_0 \frac{1}{n^{d-1}}}{b_0 \frac{1}{n^d + \ldots + b_f n^{f-d}}}$$

Si $f = d, \to \frac{a_d}{b_f}$

Si $f > d, \to 0$
Si $f < d, \to \pm\infty$, *selon signe de* $\frac{a_d}{b_f}$

Proposition 34
Soit $a \in \mathbb{R}$ *avec* $|a| < 1$, *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$$

Proposition 35
Si (x_n) *est monotone et bornee, alors elle converge.*

Preuve
Soit (x_n) *croissante. Affirmation,* $x_n \to s := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$
Soit $\epsilon > 0, \exists n : x_n > s - \epsilon$ *(def. de sup)*
$\forall n \geq n_0 : s - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq s \Rightarrow |x_n - s| < \epsilon$
Idem, si elle etait decroissante. □

Preuve
Remarque : $(x_n) \to 0 \iff (|x_n| \to 0)$.

$$\ldots |x_n - 0| < \epsilon$$

Donc on va traiter le cas $a > 0$, *alors* $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ *est decroissante.*
Bornee (par zero et 1) $\Rightarrow$ *elle admet une limite* l.
Or $\lim_{n\to+\infty} a^n = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} a^{n+1}}_{a\cdot\lim_{n\to+\infty} a^n}$ *Donc* $l = al$. *Si* $l \neq 0$, $1 = a$ *absurde, donc* l *nul.* □

Exemple
Def (x_n)*en posant* $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$
Observons que $x_n \geq 2 > 0 \forall n$
Si (x_n) *converge, alors*

$$l = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}(2 + \frac{1}{x_n}) = 2 + \frac{1}{l}$$

Donc

$$l^2 - 2l - 1 = 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{1+1} = l$$

Or $l \geq 2 \Rightarrow l = 1 + \sqrt{2}$ si l existe.
A present, estimons $|x_n - l|$:

$$\left|x_n - 1 - \sqrt{2}\right| = \left|2 + \frac{1}{x_{n-1}} = (2 + \frac{1}{l})\right| = \frac{|l - x_{n-1}|}{x_{n-1}l} \leq \frac{|x_{n-1} - l|}{4}$$

$$\leq \ldots \leq \frac{|x_{n-2} - l|}{4^2} \leq \frac{|2 - l|}{4^n} \to 0$$

car $\frac{1}{4^n} \to 0$

Lemme 37 (Deux gendarmes)
Soit $(x_n), (y_n), (z_n)$ trois suites avec

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l = \lim_{n\to+\infty} z_n$$

si $x_n \leq y_n \leq z_n \forall n$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = l$$

Preuve
repose sur le fait que

$$|x_n - l|, |z_n - l| < \epsilon \Rightarrow l - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \epsilon$$

montre $|y_n - l| < \epsilon$ □

4 Limsup et liminf

Definition 7 (Limsup et liminf)
Soit (x_n) une suite quelconque.
On definit la limite superieure par :

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \inf_n \sup\{x_k, k \geq n\}$$

Attention : Ici on convient que

$$\sup(A) = +\infty$$

si A non majore

$$\inf(A) = -\infty$$

si A non minore

On definit la limite superieure par :

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \sup_n \inf\{x_k, k \geq n\}$$

Notez : $z_n := \sup\{x_k : k \geq n\}$

Cela definit une suite decroissante et donc (z_n) converge vers son inf.
Conclusion : $\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} z + n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} x_k$

Lecture 5: mercredi 30

Wed 30 Sep

Theorème 38
(x_n) converge $\iff \limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$ Dans ce cas, la limite prend cette meme valeur.

Preuve
$\Leftarrow$:
Soit $z_n = \sup\{x_p : p \geq n\}$,

$$y_n = \inf\{x_p : p \geq n\}$$

Rappel : $(z_n) \to LS$ *et* $(y_n) \to LI$
Or, $y_n \leq x_n \leq z_n$*. Donc par les 2 gendamrmes*

$$\Rightarrow (x_n) \to LS = LI$$

$\Rightarrow$:
Hypothese : $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$.
A voir : $LS = LI = l$.
Montrons par exemple que

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = l$$

(i.e. $LS = l$*)*
Soit $\epsilon > 0$.

$$\exists N \forall n \geq N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$
$$\text{et } \forall n \geq N : |z_n - LS| < \frac{\epsilon}{4}$$

Def. de $z_N \Rightarrow \exists p \geq N : |x_p| > z_N - \frac{\epsilon}{4}$
A present

$$|LS - l| \leq \underbrace{|LS - z_N|}_{<\frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|z_n - x_p|}_{<\frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|x_p - l|}_{<\frac{\epsilon}{2}}$$

avec $p \geq N$ *et* $N \geq N$ *Donc* $\forall \epsilon > 0$:

$$|LS - l| < \epsilon$$

Donc $LS = l$ □

Theorème 39 (Premiere regle de d'Alembert)
Supposons $x_n \neq 0 \forall n$
Supposons que $\rho = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ *existe*
Si $\rho < 1$*, alors* $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$
Si $\rho > 1$*, alors* (x_n) *diverge.*

Remarque
Si $\rho = 1$, on ne peut rien concluer

Exemple

- $x_n = n$ *diverge, mais* $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$
- $x_n = \frac{1}{n}$ *converge mais* $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$

Preuve
Supposons $\rho < 1$.
A voir : $x_n \to 0$.
Soit $\rho < r < 1$. *Convergence pour* $\epsilon = r - \rho$: $\left|\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - \rho\right| < r - \rho$

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < r$$

i.e. $|x_{n+1}| < r\,|x_n|$ *de meme* $|x_{n+2}| < r\,|x_{n+1}| < r^2\,|x_n|$

Conclusion $\forall m \geq n_0 : |x_m| < r^{m-n_0}\,|x_{n_0}|$
Donc

$$\forall m \geq n_0 : |x_m| < r^m\,|x_{n_0}|\,r^{-n_0}$$

Onn sait que $\lim_{m\to+\infty} r^m = 0$ *donc*

$$0 \leq |x_m| \leq r^m c$$

avec c constante Cas $\rho > 1$.
On va montrer que $|x_n|$ *est non bornee.*
Soit $1 < r < \rho$.

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |x_{n+1}/x_n| > r$$

Donc

$$|x_{n+1}| > r\,|x_n|$$

comme avant :

$$x_m > r^{m-n_0}\,|x_{n_0}| \qquad \square$$

Remarque
Si $r > 1$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} r^n = +\infty$ r^n *est croissante donc il suffit de montrer que la suite est non bornee.*
Si elle etait bornee, soit $l = \lim_{n\to+\infty} r^n \in \mathbb{R}$
Mais $l = \lim_{n\to+\infty} r^{n+1} = rl$
Donc $l \neq 0 \Rightarrow 1 = r$ *absurde.*

Definition 8 (Sous-suite)
Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *une suite.*
Une sous-suite de (x_n) *est une suite de la forme* $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, *ou* $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ *est une suite strictement croissante de* N.

Exemple
Si (x_n) *est une suite, considerer :*

$$x_2, x_3, x_5, x_7, x_{11}, x_{13}, \dots$$

Ici, $n_k = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$

Proposition 44
Si x_n *converge, alors toute sous-suite converge vers la meme limite.*

Preuve
Soit $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$. *Soit* $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ *une sous-suite et* $\epsilon > 0$.
A voir : $\exists k_0 \forall k > k_0 : |x_{n_k} - l| < \epsilon$
Or $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$.
Donc il suffit de choisir k_0 *tq* $n_{k_0} \geq n_0$.
(puisque la suite (n_k) *est croissante.)* □

Theorème 45 (Bolzano-Weierstrass)
Toute suite bornee admet une sous-suite convergente

Preuve
On va construire une sous-suite qui converge vers $s := \limsup_{n\to\infty} x_n$
Ici, (x_n) *est la suite en question et on pose*

$$z_n = \sup\{x_p : p \geq n\}$$

Par recurrence, n_1 *quelconque.*
Supposons n_{k-1} *construit et construisons* n_k *:*

$$\exists N \forall n \geq N : |z_n - s| < \frac{1}{k}$$

Choisissons un $n \geq N$, $n_{k-1} + 1$

$$\exists p \geq n \ t.q.\ x_p > z_n - \frac{1}{k}$$

On definit $n_k = p$ *(* $n_k > n_{k-1}$*)*
Or, $\underbrace{|x_{n_k} - s|}_{<\frac{1}{k}} \leq \underbrace{|x_{n_k} - z_n|}_{<\frac{1}{k}} + \underbrace{|z_n - s|}_{<\frac{1}{k}}$
Donc $(x_{n_k} \to s(k \to \infty)$ □

Definition 9 (Point d'accumulation)
x est un point d'accumulation de la suite x_n *s'il existe une sous-suite qui converge vers* x.

Exemple

$$x = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

$$x = \liminf_{n\to\infty} x_n$$

4.1 Suites de Cauchy

Definition 10 (Suites de Cauchy)
La suite (x_n) est dire de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < \epsilon$$

Attention :
Il ne suffit pas de comparer x_n et x_{n+k} pour k fixe.

Exemple
$x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

Cauchy $\iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall k \in \mathbb{N} : |x_n - x_{n+k}| < \epsilon$

Lemme 48
Si (x_n) converge, elle est de Cauchy.

Preuve
Soit $\epsilon > 0$, soit l la limite.
Hypothese :
avec $\frac{\epsilon}{2} : \exists N \forall n \geq N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$
Si $n, n' \geq N$

$$|x_n - x_{n'}| \leq |x_n - l| + |x_{n'} - l| < \epsilon$$

□

Theorème 49 (Convergence des suites de Caucjy)
Toute suite de Cauchy converge

Preuve
Soit (x_n) de Cauchy.

Lemme 50
(x_n) est bornee.

Preuve
Soit $\epsilon = 10$

$$\forall N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < 10$$

Donc $|(x_n)|$ est bornee par

$$\max(|x_N| + 10, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|)$$

□

Appliquer Bolzano-Weierstrass

$$\exists \text{ sous-suite } (x_{n_k})$$

qui converge, soit l sa limite. A voir (x_n) converge vers l.
soit $\epsilon > 0 \exists k_0 \forall k \geq k_0 \, |x_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2}$

$$\exists N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < \frac{\epsilon}{2}$$

Si $n \geq N, n_{k_0}$ alors

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < \epsilon$$

□

Lecture 6: lundi

Mon 05 Oct

Remarque

Ecriture decimale : $3.1415\ldots$ ou encore $0.333\ldots$ veut dire

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \ldots$$

une somme infinie de fractions. La difference entre le n ieme terme et le n' ieme terme :

$$\leq 10^{-n} \to 0 \Rightarrow \quad \textit{Cauchy}$$

Cette limite est une "somme infinie".

5 Series

But : definir les "sommes infinies" .

$$\to \begin{cases} \text{Existe ?} \\ \text{Valeur ?} \end{cases}$$

Exemple

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$$

ou encore

$$\exp(x) = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots$$

ou

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

Definition 11 (Serie)

Le symbole $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ représente

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots \quad \textit{et est défini par}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k$$

On appelle

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

une série et on dit qu'elle converge/diverge lorsque la suite $s_n := x_0 + \ldots + x_n$ le fait.

Corollaire 53
Si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ existent, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

Preuve

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} s_n, s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} t_n, t_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n, \text{ où}$$

$$u_n = (x_0 + y_0) + \ldots + (x_n + y_n) = s_n + t_n$$

Donc la limite

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(s_n + t_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

□

Corollaire 54
Pour $a \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} ax_n = a\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

existe.

Sans preuve.

Corollaire 55

$$\sum_{n=n_0}^{ify} x_n \text{ existe si } \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

existe et vaut

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n - (x_0 + x_1 + \ldots + x_{n_0-1})$$

n

Corollaire 56 (Critere de Cauchy pour les séries)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n converge \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : \left| \sum_{p=N}^{n} x_p \right| < \epsilon$$

(Dans ce cas, $|\sum_{n=N}^{\infty} x_n| \leq \epsilon$*)*

Preuve

Appliquer Cauchy à la suite s_n *:*

$$\exists n_0 \forall n, n' > n_0 : |s_n - s_{n'}| < \epsilon$$

Alors

$$\left| \sum_{p=n'+1}^{n} x_p \right| < \epsilon$$

Exemple

Ecriture decimale,

Proposition 58

Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge, alors

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$$

Preuve

Appliquer Cauchy à $\left| \underbrace{s_n - s_{n-1}}_{=x_n} \right|$

Attention, la réciproque est FAUSSE. □

2 Exemples

Proposition 59 (Serie Geometrique)
Soit $r \in \mathbb{R}$ *avec* $|r| < 1$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Preuve
Soit

$$s_n = r^0 + r^1 + \ldots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r^n}$$

Or

$$\lim_{n \to +\infty} r^{n+1} = 0$$

□

Donc $s_n \to \frac{1}{1-r}$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$$

Proposition 60 (Série Harmonique)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge (vers } +\infty)$$

Preuve
Considérons

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \underbrace{\frac{1}{2^n+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{2^{n+1}-2^n=2^n \text{ termes.}} + \ldots$$

Tous ces termes sont $\geq \frac{1}{2^{n+1}}$
Cette somme est :

$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} \geq 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

□

Contredit Cauchy pour $\epsilon = \frac{1}{2}$.

Astuce utile :

$$\sum_{n=}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1$$

Preuve

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \qquad \square$$

Donc ca converge.
C'est une série téléscopique

Proposition 61 (Critère de Comparaison)
Supposons $0 \leq x_n \leq y_n$.
Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ converge, alors } \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ aussi .}$$

Preuve

$$s_n = x_0 + \ldots + x_n$$

est croissante. Donc converge $\iff$ (s_n) *bornée.*
Mais $y_0 + \ldots + y_n$ *converge* $\Rightarrow$ *bornée et* $s_n \leq y_0 + \ldots + y_n \Rightarrow (s_n)$ *bornée* $\square$

Remarque
De plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

Si, par contre,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ diverge}$$

Corollaire 63

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge.

Preuve
$\forall n \geq 2 : \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$
Or

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \text{ converge.}$$

Donc, par comparaison, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge*

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge .}$$

$\square$

Lecture 7: mercredi

Wed 07 Oct

Definition 12 (Séries Alternées)
(x_n) est alternée si $x_n \cdot x_{n+1} \leq 0 \forall n$

Theorème 64
Soit (x_n) alternée, $|x_n|$ décroissante, et

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ converge.}$$

Exemple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge. (série harmonique alternée)[5]

Preuve
On utilise cauchy.
Soit $n, m \in \mathbb{N}$.

$$\underbrace{x_n + x_{n+1}}_{\geq 0} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m-1} + x_{n+m}$$

Cas $x_n \geq 0$:
Cas où n pair

$$0 \leq \sum_{p=n}^{n_m} x_p \leq x_n$$

Si m impair :
idem
Que n soit pair ou impair

$$\left| \sum_{p=n}^{n+m} x_p \right| \leq |x_n|$$

Or, soit $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \Rightarrow$$

$\exists N \forall n > N | \, |x_n| \leq \epsilon$.

Donc $\forall n > N, m|$

$$|x_n + \ldots + x_{n+m}| < \epsilon$$

□

5. En fait la série converge vers $-\log 2$

5.0.1 Un calcul naif (avec la série harmonique alternée)

Soit $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, existe par le théorème.
Note : $S < 0$.

$$s_n = \underbrace{-1 + \frac{1}{2}}_{=-\frac{1}{2}} \underbrace{-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{<0} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n}$$

$s_n < -\frac{1}{n}, \forall n$ pair $\Rightarrow S \leq -\frac{1}{2}$

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$$

à chaque terme x_n, on associe x_{2n}

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \ldots$$
$$= \frac{1}{2}(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots) = \frac{1}{2}S$$

Donc $S = \frac{1}{2}S \Rightarrow S = 0$ Faux !
Conclusion :
On ne peut pas permuter (en général) les termes d'une série convergente (somme infinie)

Definition 13
On dit que la somme de

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge absolument si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

converge.
Note : la valeur

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

ne nous intéresse pas

Remarque
Si $x_n \geq 0 \forall n$, aucune différence entre "convergence" et "convergence absolue".

Exemple

— *La série harmonique alternée converge, mais pas absolument.*

Lemme 68
Convergence absolue implique la convergence.

Preuve
$\forall n : 0 \leq x_n + |x_n| \leq 2|x_n|$
Donc convergence absolue $\Rightarrow$

$$\sum (x_n + |x_n|)$$

converge.
Or $-\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ *converge .*
Somme des deux sommes ci-dessus, implique que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

□

Theorème 69
Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge absolument, alors toute permutation converge vers la même somme.

Exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Clarification :
Soit σ *une permutation de* $\mathbb{N}$*, i.e. bijection.*
La nouvelle série sera

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ pour } y_n = x_{\sigma(n)}$$

Notons $s_n = x_0 + \ldots + x_n$ *et*

$$t_n = y_0 + \ldots + y_n = x_{\sigma(0)} + \ldots + x_{\sigma(n)}$$

Le théorème dit : si $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ *existe, alors* $\lim s_n = \lim t_n$.

Preuve
1er cas "facile" .
Supposons $x_n \geq 0 \forall n$.
Alors $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sup \{s_n | n \in \mathbb{N}\}$
On va montrer que $\underbrace{\sup_n s_n}_{=:s} \geq \underbrace{\sup_n t_n}_{=:t}$ *et que* $\sup_n s_n \leq \sup_n t_n$

Pour $s \geq t$ *:*
Soit $\epsilon > 0$. *Or , par déf,* $\exists n t_n > t - \epsilon$
ie

$$y_0 + \ldots + y_n > t - \epsilon$$

ie

$$x_{\sigma(0)} + \ldots + x_{\sigma(n)} > t - \epsilon$$

Soit $m = max_{i=0,\ldots,n}\sigma(i)$, *alors*

$$s_m \geq t - \epsilon$$

donc

$$s = \sup s_n > t - \epsilon$$

vrai $\forall \epsilon > 0 \Rightarrow s \geq t$
En considérant σ^{-1}, *on obtien de même* $t \geq s \Rightarrow s = t$, *donc le théorème vrai SI* $x_n \geq 0$.
2ème cas : $x_n \leq 0 \forall n$, *idem*
Cas général :
Posons $x_n = x'_n + x''_n$, *ou* $x'_n = \max(x_n, 0)$ *et* $x''_n = \min(x_n, 0)$, *alors*

$$x_{\sigma(n)} = x'_{\sigma(n)} + x''_{\sigma(n)}$$

On conclut en appliquant le cas (1) a x'_n *et (2) ou* x''_n □

Theorème 71
Supposons que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge, mais pas absolument.
$\forall l \in \mathbb{R} \exists$ *permutation* σ *t.q.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = l.$$

Lecture 8: Series fin

Mon 12 Oct

Theorème 72 (Critere de d'Alembert 2)
Supposons que $\lim_{n\to+\infty} |\frac{x_{n+1}}{x_n}| = \rho$ *existe.*
Si $\rho < 1$ *alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

converge absolument.

Si $\rho > 1$, alors elle diverge.

Preuve

Si $\rho > 1$, x_n diverge donc ne converge pas vers 0, donc $\sum x_n$ diverge.
Supposons $\rho < 1$. $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{\rho+1}{2}$.
On déduit que

$$|x_n| \leq \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^{n-n_0} |x_{n_0}|$$

Donc

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|$$

peut etre comparee à

$$|x_{n_0}| \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^{n-n_0}$$

Or la série ci-dessus est une série géometrique avec $\frac{\rho+1}{2} < 1$, donc elle converge.
Donc

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|$$

converge car la série géometrique converge, il suit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge absolument. □

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument.

Preuve

$x_n = \frac{x^n}{n!}$*, alors*

$$|\frac{x_{n+1}}{x_n}| = |\frac{x}{n+1}| \to 0$$

□

Exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$x_n = \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Alors

$$|\frac{x_{n+1}}{x_n}| = |\frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)}| \to 0$$

Remarque
Si $\rho = 1$ on ne peut rien conclure.

Exemple

$$\sum \frac{1}{n} \text{ diverge, or } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$$

Idem pour

$$\sum n$$

Exemple

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge, or

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

Proposition 78
On admet que

$$\forall x \geq 0 \exists ! x^{\frac{1}{n}} : (x^{\frac{1}{n}})^n = x$$

Alors

$$\lim_{n \to +\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

Preuve
Posons $\epsilon_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$, (a voir : $\epsilon_n \to 0$).

$$\begin{aligned} n = ((1+\epsilon_n)^{\frac{1}{n}})^n &= 1 + n\epsilon_n + \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 \underbrace{\ldots}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}\epsilon_n^2 \\ \Rightarrow \epsilon_n &\leq \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

□

Theorème 79 (Critere de la racine)
Soit $L = \limsup_{n \to \infty} (|x_n|)^{\frac{1}{n}}$.
Si $L < 1$, alors $\sum x_n$ converge absolument
Si $L > 1$, alors $\sum x_n$ diverge.

Exemple
Soit

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} \text{ si } n \text{ pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Exemple

1.

$$\sum \frac{x_n}{n!}, alors$$

$$|x_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n!}^{\frac{1}{n}} \; donc \; |x_n| \to 0(\; exo \;)$$

2.

$$\sum n \; diverge \; , n^{\frac{1}{n}} \to 1$$

3.

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge, or

$$\frac{1}{n^2}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} \to 1$$

Preuve

Si $L > 1$,
alors $\lim_{n\to+\infty} \sup \left\{ |x_k|^{\frac{1}{k}} : k \geq n \right\}$. *Donc* $\exists n_0 \forall n > n_0 : z_n > 1$, *i.e.*

$$\exists k \geq n : |x_k| > 1^k = 1$$

x_n *ne converge pas vers zero* $\implies$ *la série ne converge pas.*
Si $L < 1$,
$\exists n_0 \forall n > n_0 : z_n ; \frac{1+L}{2}$, *or*

$$|x_n| \leq z_n^n < \left(\frac{1+L}{2} \right)^n$$

On conclut par converge avec la série géometrique. □

Exemple

Posons $x_0 = 0$, *et* $x_{n+1} = \frac{1+nx_n}{2^{n+1}}$
Notons (exo par récurrence)

$$\forall n \leq 2^n$$

Donc

$$0 \leq x_n \leq 1$$

On a

$$x_n^{\frac{1}{n}} = \frac{(n+1)^{\frac{1}{n}}}{2 \cdot 2^{\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{2}$$

Le critère s'applique : $L < 1$.

Lemme 83
$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$

Preuve
A voir : $(\sqrt[n]{n!})^2 \to +\infty$.
Or $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n \geq \frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1) \cdot \ldots n$
Si n *pair.*

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1) \cdot \ldots n \\ \geq (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Donc $\sqrt[n]{(n!)^2} \geq \sqrt[n]{(\frac{n}{2}^n)} = \frac{n}{2} \to \infty$ □

6 Fonctions

En général, fonctions = applications = map.

En analyse I, fonction = fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ou sur une partie $A \subseteq \mathbb{R}$.
En analyse II, on ira de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Lecture 9: mercredi

Wed 14 Oct

Definition 14
On dit qu'une fonction f *est définie au voisinage de* $x \in \mathbb{R}$, *si* $\exists \epsilon > 0 : f$ *définie sur*

$$]x-\epsilon, x[\text{ et }]x, x+\epsilon[$$

Exemple
$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$ *défini au voisinage de 0.*

Definition 15
Soit f *définie au voisinage de* x_0.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

signifie

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Theorème 85
Soit f définie au voisinage de x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \text{ suite } (a_n)_{n=1}^{\infty}$$

qui converge vers x_0 et $a_n \neq x_0, \forall n$, on a

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

Remarque
A priori, f n'est pas définie en a_n, mais $\exists n_0, \forall n > n_0 : a_n \in$ domaine de définition car f définie au voisinage de x_0

Preuve
$\Rightarrow$
Soit $a_n \neq x_0$, une suite convergent vers x_0. A voir : Soit $\epsilon > 0$, cherche $n_0 \forall n > n_0 : |f(a_n) - l| < \epsilon$.
Par hypothese, $\exists \delta > 0 \forall x$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \quad (1)$$

Appliquer $\lim a_n = x_0$ à δ :

$$\exists n_0, \forall n > n_0 : |a_n - x_0| < \delta$$

Appliquer à présent 1 à $x = a_n$
$\Leftarrow$
Soit $\epsilon > 0$, on cherche $\delta > 0$
Supposons par l'absurde qu'aucun δ satisfait la définition.
En particulier, $\delta = \frac{1}{n}$

$$\exists x_n : 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - l| \geq \epsilon$$

Or

$$x_n \neq x_0 \text{ et } (x_n) \to x_0$$

Par hypothèse

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$$

En particulier, pour ϵ,

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : |f(x_n) - l| < \epsilon$$

□

Corollaire 87
Si $\lim_{x \to x_0} l$ et $\lim_{x \to x_0} f'(x) = l'$, alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + f'(x) = l + l'$$

Idem pour produit.

Corollaire 88
Si $f(x) \geq a, \quad \forall x$ *au voisinage de* x_0 *et*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \text{ alors } l \geq a$$

Corollaire 89
Si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Alors

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$$

Corollaire 90
Pour

$$\lim \frac{g(x)}{f(x)}$$

il suffit de traiter $\lim \frac{1}{f(x)}$.

Lemme 91
Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq 0$, *alors*

$$\exists \epsilon > 0 \forall x \in]x_0 - \epsilon, x_0[\cup]x_0, x_0 + \epsilon[$$

tel que $f(x) \neq 0$

Preuve

$$|f(x) - l| < \frac{|l|}{2}$$

dans un voisingae de x_0, *alors* $f(x) \neq 0$ □

Corollaire 92
Si $\lim f(x) = l = \lim g(x)$ *et*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \forall x \text{ au voisinage de } x_0$$

Alors

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

Corollaire 93 (Cauchy)
Soit f définie au voisinage de x_0, alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ existe } \iff \forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x_1, x_2 \text{ avec}$$

$$0 < |x_i - x_0| < \delta \quad (i = 1, 2)$$

on a

$$|f(x_i) - f(x_2)| < \epsilon$$

Lemme 94
Si $\lim f(a_n)$ existe $\forall$ suite ($a_n \neq x_0$) convergeant vers x_0,alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

existe

Preuve
Il suffit de montrer que toutes ces limites $f(a_n)$ ont la même valeur.
En effet, on peut alors appliquer le théorème et $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$
Sinon, $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = l \neq l' = \lim_{n\to+\infty} f(a'_n)$ pour deux telles suites a_n et a'_n. A présent

$$b_n = \begin{cases} a_n \text{ si a pair} \\ a'_n \text{ si a impair} \end{cases}$$

□

or $f(b_n)$ converge absurde car elle admet deux sous-suites avec limites distinctes l, l'.

Preuve
Preuve du corollaire ci-dessus.
Grace au lemme, il suffit de montrerr que $\forall$ suite $a_n \to x_0$, la suite $f(a_n)$ est de Cauchy.
Par hypothèse, $\exists\delta > 0 \forall x_1, x_2 : 0 < |x_i - x_0| < \delta$ implique

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Or, $\exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - x_0| < \delta$.
Applique $a_n = x_1$ et $a_m = x_2$ donne que $f(a_n)$ est de cauchy. □

Corollaire 95
Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x\to x_0} f(x) = l'$, alors $l = l'$.

Remarque

On a implicitement utilisé les concept de $+, \cdot, \leq$ sur les fonctions.

Ce n'est pourtant pas un corps.
Par exemple, $\forall x, y \in$ corps

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$$

Les fonctions ont une opération supplémentaire

$$f \circ g$$

est définie par

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

Soit $g : A \to B$ des parties de $\mathbb{R}$, et $f : B \to \mathbb{R}$ avec g défini au voisinage de x_0 et f au voisinage de g_0.

> **Proposition 97**
> *Supposons $g(x) \neq g_0 \forall x$ au voisinage de x_0*
> *Si $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$ et $\lim_{y \to y_0} f(y) = l$, alors*
>
> $$\lim_{x \to x_0} f \circ g(x) = l$$

Preuve

Soit $\epsilon > 0$, à voir $\exists \delta > 0 \forall x$:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - l| < \epsilon$$

2eme hup nous dit

$$\exists \eta > 0 \forall y : |y - y_0| < \eta \Rightarrow |f(y) - l| < \epsilon$$

Idee : appliquer la premiere hypothèse à η et poser $y = g(x)$.
Ca marche, tant que $y \neq y_0$. $\square$

Exemple

Exemple délicat :
Soit

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Clairement $\lim_{x \to 0} = 0$.
On pose que

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

On voit que $\lim_{y\to 0} f(y) = 0$.
Or

$$\lim_{x\to 0} f(g(x))$$

n'existe pas.

Lecture 10: fonctions

Mon 19 Oct

6.1 Continuité

Definition 16

Soit f *définie au voisinage de* x_0.
Alors f *est dite continue en* x_0 *si*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Donc f continue (en x_0) si on peut "sortir f de la limite" (en x_0)

Proposition 99

f *continue en* x_0 $\iff$ *toute suite* a_n *tendant vers* x_0, *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

Preuve

Théorème de traduction pour $l = f(x_0)$ □

Remarque

Pour parler de continuité en x_0, *il faut que* f *soit définie en* x_0 *et au voisinage de* x_0

Corollaire 101

Si f *et* g *sont continues en* x_0, *alors* $f+g$ *et* $f\cdot g$ *aussi.*

Preuve

Idem que avant □

Corollaire 102

Si de plus $g(x_0)\neq 0$, *alors* $\frac{f}{g}$ *est cont. en* x_0.

Remarque

On a montré que alors dans ce cas il existe un voisinage de x_0 *où* $g(x)\neq 0$

Proposition 104

Soit g *continue en* x_0 *et* f *continue en* $g(x_0)$, *alors* $f\circ g$ *est continue en*

x_0.

Preuve

Ecrivons la définition de g continue en x_0 :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$$

Soit $\epsilon > 0$. Cherche $\eta > 0$ tq $\forall x$:

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(\underbrace{g(x)}_{=y}) - f(g(x_0))| < \epsilon$$

Continuité de f en $g(x_0)$ appliquée à ϵ donne $\theta > 0$ tq $\forall y$

$$|y - g(x_0)| \Rightarrow |f(y) - f(g(x_0))| < \epsilon$$

continuité de g en x_0 appliquée à θ

$$\exists \eta > 0 \forall x \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \theta$$ □

Pour $y = g(x)$ on a montré ce qu'il fallait.

Definition 17 (Terminologie Supplémentaire)

f est définie au voisinage à gauche de x_0 si $\exists \epsilon > 0$ tq f est définie sur $]x_0 - \epsilon, x_0[$. De même à droite : $]x_0, x_0 + \epsilon[$

Definition 18

Soit f définie au voisinage à droite de x_0

$$\lim_{x \to x_0 >} = l$$

signifie

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x > x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

La limite à gauche est définie de la même manière.

Definition 19

f est continue à droite en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0 >} f(x) = f(x_0)$$

Idem à gauche.

Exercice 105

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ *existe* $\iff$ *les limites à gauche et à droite existent et coincident.*

Definition 20

f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a, à gauche en b.

Definition 21 (Notation)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

si

$$\forall R \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > R$$

Idem pour $-\infty$

Definition 22 (Notation)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

signifie

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall x > n_0 : |f(x) - l| < \epsilon$$

On note $C([a,b])$ ou parfois $C^0([a,b])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$

> **Theorème 106**
> *Toute fonction continue sur* $[a,b]$ *est bornée.*

Preuve
Supposons par l'absurde f *non-bornée (disons sans perte de généralité non majorée).*
Donc $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n : f(x_n) > n$.
On a une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *de* $[a,b]$
Par Bolzano-Weierstrass implique qu'on a une sous-suite x_{n_k} *qui converge vers* $x \in [a,b]$
f *continue en* $x \iff f(x) = \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k})$ □

> **Theorème 107**
> *Toute fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue atteint son* $\sup$ *donc max.*

Preuve
On sait déjà que f *est bornée, soit donc* $s := \sup\{f(x)|x \in [a,b]\}$
Si par l'absurde $f(x) \neq s \forall x \in [a,b]$ *posons*

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - s}$$

g *est continue et donc* g *est bornée, disons par* B.
Absurde car implique $|f(x) - s| > \frac{1}{B}$. □

Proposition 108

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I.

Soit A une partie dense. Si

$$f|_A = g|_A$$

Alors $f = g$ sur tout I

Preuve

Soit $x \in I$. Par densité,

$$\exists (a_n)$$

suite de A avec $\lim_{n \to +\infty} a_n = x$.

$$\textit{Continuité } f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim_{n \to +\infty} g(a_n) = g(x)$$