EPFL Automne 2020
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 2

Tous les exercices seront corriges. La correction sera postee sur le moodle apres 2 semaines.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le dimanche de la semaine suivante celle ou la serie a ete postee. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme de fichier pdf (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien a cet effet dans la semaine de la serie.

Exercice 1. (une variante de l'exercice 1 de la serie 1) On considere l'application

$$f : x \in \mathbb{R}_{\geqslant -2} \mapsto x^3 - x \in \mathbb{R}.$$

1. Que vaut $f([-2, +\infty[)$? Que vaut $f([0, +\infty[)$?
2. Que vaut $f^{-1}([0, +\infty[)$? Que vaut $f^{-1}([-6, +\infty[)$?
3. Cette application est elle injective ?
4. Cette application est elle surjective ?
5. Comment modifier l'espace d'arrivee pour la rendre surjective ?
6. Trouver x_0 le plus petit possible pour cette application avec l'espace de depart $\mathbb{R}_{\geqslant x_0}$ soit injective.

Exercice 2. (Groupe produit) Soient $(G, \star)$ et $(H, *)$ deux groupes. On considere le produit cartesien $G \times H$ muni de la loi de composition interne :

$$(g, h) \boxtimes (g', h') := (g \star g', h * h').$$

1. Trouver un element neutre $e_{G\times H}$ et une inversion $(\bullet, \bullet)^{-1}$ de sorte que
$$(G \times H, \boxtimes, e_{G\times H}, (\bullet, \bullet)^{-1})$$
forme un groupe.
2. On suppose dans cette question que $G = H$. Montrer que la diagonale $\Delta G = \{(g, g),\ g \in G\}$ est un sous-groupe de $G \times G$.
3. Soient $G' \subset G$ et $H' \subset H$ des sous-groupes. Montrer que $G' \times H'$ est un sous-groupe de $G \times H$.

4. Est ce que la reciproque est vraie ? C'est a dire est ce que tout sous-groupe de $G \times H$ est de la forme $G' \times H'$?

Exercice 3. (Le centre d'un groupe) Soit $(G, .)$ un groupe et

$$Z(G) = \{z \in G, \text{ pour tout } g \in G, \ z.g = g.z\}.$$

Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe commutatif de G. On l'appelle le centre de G.

Exercice 4. ($\star$) Soit X un ensemble et $\mathrm{Bij}(X)$ le groupe des bijections de X sur lui-meme. Soit $Y \subset X$ un sous-ensemble de $\mathrm{Bij}(X)$. On introduit le sous-ensemble de $\mathrm{Bij}(X)$

$$\mathrm{Bij}(X)_Y := \{\sigma \in \mathrm{Bij}(X), \ \sigma(Y) = Y\}.$$

1. Montrer que $\mathrm{Bij}(X)_Y$ est un sous-groupe de $\mathrm{Bij}(X)$. On l'appelle le *stabilisateur de* Y *dans* $\mathrm{Bij}(X)$.
2. On suppose que X possede au moins 3 elements distincts, x_1, x_2, x_3 et on veut montrer que $\mathrm{Bij}(X)$ n'est pas commutatif. En les cherchant dans un stabilisateur convenable, trouver deux bijections $\sigma, \tau \in \mathrm{Bij}(X)$ qui ne commutent pas :

$$\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma.$$

3. Montrer que si X possde 1 ou deux elements $\mathrm{Bij}(X)$ est commutatif.

Exercice 5. Soit X un ensemble et $(G, \star)$ un groupe. Soit

$$\mathcal{F}(X, G) = \{f : X \mapsto G\}$$

l'ensemble des fonctions de X a valeurs dans G (les applications de X vers G).

On muni $\mathcal{F}(X, G)$ de la loi de composition interne suivante : etant donne $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(X, G)$ on defini la fonction $f_1 \star f_2$ par

$$\forall x \in X, \ f_1 \star f_2(x) := f_1(x) \star f_2(x).$$

(ici on abuse les notations en notant la loi de composition sur $\mathcal{F}(X, G)$ de la meme maniere que celle sur G).

1. Trouver un element neutre $e_{\mathcal{F}(X,G)}$ et une inversion $\bullet^{-1}$ de sorte que $(\mathcal{F}(X, G), \star, e_{\mathcal{F}(X,G)}, \bullet^{-1})$ forme un groupe.
2. Soit $U \subset G$ un sous-ensemble de G. Donner une condition necessaire et suffisante pour que le sous-ensemble des fonctions a valeurs dans U

$$\mathcal{F}(X, U) \subset \mathcal{F}(X, G)$$

forme un sous groupe de $\mathcal{F}(X, G)$.

Exercice 6. Soit X un ensemble et $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble des sous-ensembles de X. On definit une loi de composition sur $\mathscr{P}(X)$ par

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X) & \mapsto & \mathscr{P}(X) \\ (A, B) & \mapsto & A\Delta B := A \cup B - A \cap B \end{array}$$

ou $A\Delta B$ est la difference symetrique des sous-ensembles A et B

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B,\ x \notin A \cap B\}$$

(les elements de X qui sont dans la reunion de A et B et qui ne sont pas dans leur intersection).

1. Montrer que $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.
2. Calculer $\emptyset\Delta A$, $A\Delta A$, $A\Delta X$.
3. Trouver un element neutre $e_\Delta \in \mathscr{P}(X)$ et une application d'inversion

$$\bullet^{-1} : \mathscr{P}(X) \mapsto \mathscr{P}(X)$$

   de sorte que $(\mathscr{P}(X), \Delta, e_\Delta, \bullet^{-1})$ forme un groupe commutatif.

Exercice 7. Soit le groupe $(\mathbb{Z}, +)$. On rappelle que tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $q.\mathbb{Z}$ pour $q \in \mathbb{Z}$.

1. Quel est le sous-groupe engendre par 1 ?
2. Montrer que le groupe engendre par 2 et 3 vaut $\langle 2, 3\rangle = \mathbb{Z}$. (on montrera que ce sous-groupe contient 1).
3. Meme question pour 3 et 73.
4. Montrer (en utilisant Bezout) que pour $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\langle m, n\rangle = pgcd(m, n).\mathbb{Z}.$$