6 Juin 2022 *Curdin Wüthrich*

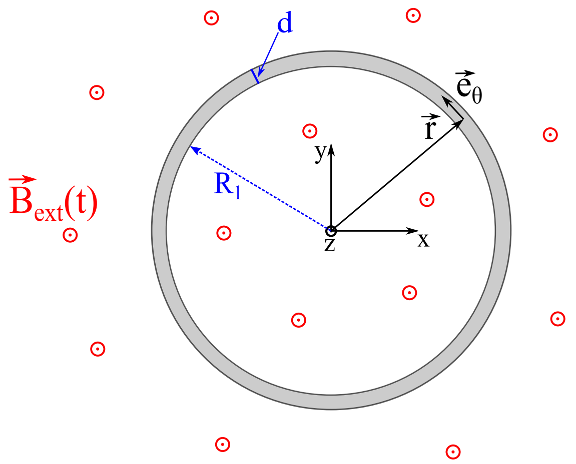
Corrigé 13

Exercice 1: Courant induit dans une canette (Examen 2019)

On considère un cylindre creux de diamètre interne R_1 et de longueur $l \gg R_1$, orienté le long de l'axe z, voir la figure ci-dessous. La largeur d des parois du cylindre est très mince, $d \ll R_1$. Le cylindre, constitué d'un matériau conducteur de conductibilité électrique σ, est plongé dans un champ magnétique externe $\vec{B}_{\text{ext}}(\vec{r}, t) = \vec{B}_{\text{ext}}(t)$, uniforme dans l'espace, donné par

$$\vec{B}_{\text{ext}}(t) = \vec{0} \qquad \text{pour } t < 0$$
$$\vec{B}_{\text{ext}}(t) = \alpha t \ \vec{e}_z \qquad \text{pour } t \geq 0$$

où $\alpha > 0$ est une constante



(a) Pour $t > 0$, trouvez la valeur de la tension induite et la direction du courant induit dans le cylindre par le champ magnétique $\vec{B}_{\text{ext}}(t)$. Justifiez votre réponse. Négligez ici l'auto-inductance du cylindre, c'est à dire l'effet du champ magnétique généré par le courant induit.

(b) Dans le cas a), pour $t > 0$, donnez la valeur du courant induit $I(t)$. Quelle est la valeur de $I(t)$ dans la limite $\sigma \to \infty$?

(c) On suppose maintenant que l'on peut écrire la densité de courant dans la paroi du cylindre comme $\vec{j} = j_0 \ \vec{e}_\theta$. Utilisez la loi d'Ampère pour déterminer, à l'intérieur du cylindre ($r < R_1$), la norme et la direction du champ magnétique $\vec{B}_c$ généré par $\vec{j}$, en exprimant la norme de $\vec{B}_c$ en fonction de j_0, puis également en fonction du courant I.
Indication : vous pouvez supposer que le champ magnétique $\vec{B}_c$ est nul à l'extérieur du cylindre ($r > R_1 + d$) et que $l \gg R_1$.

(d) Déterminez l'expression du courant $I(t)$ en prenant en compte les effets d'auto-induction du cylindre et en supposant que $I(t = 0) = 0$.

(e) En utilisant les résultats de c) et d), déterminez le champ magnétique total à l'intérieur du cylindre ($r < R_1$) pour un temps $t = t_0 > 0$, et trouvez sa valeur pour les cas limite $\sigma \to 0$ et $\sigma \to \infty$.
Indication : vous pouvez utiliser le développement limité $e^x \approx 1 + x$ pour une quantité $x \ll 1$.

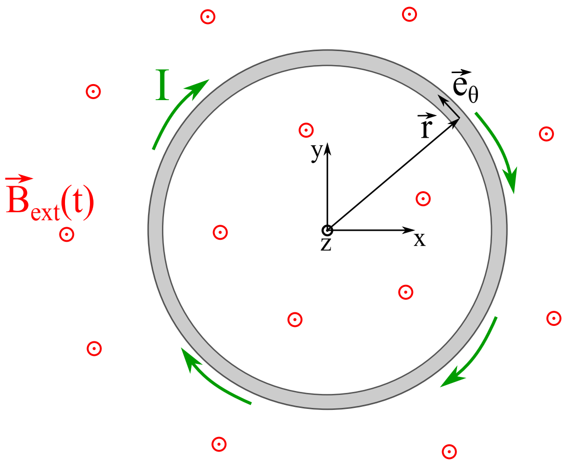
Solution:

(a) La variation temporelle de B_{ext} induit, dans le cylindre, une tension ε_{ext}

$$\varepsilon_{\text{ext}} = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{B}_{\text{ext}} \cdot d\vec{S}\right) = -\frac{d}{dt}(\alpha t \pi R_1^2)$$

$$\boxed{\varepsilon_{\text{ext}} = -\alpha\pi R_1^2}$$

où S est la section du cylindre, de rayon R_1, décrite par le vecteur $d\vec{S} = dS\ \vec{e}_z$ (on a donc orientée la surface S dans la direction $\vec{e}_z$).
En utilisant la Règle de Lenz, on trouve que cette tension crée un courant induit I dont la direction est dans le sens des aiguilles d'une montre dans le dessin, i.e. selon $-\vec{e}_\theta$, voir figure ci-dessus.



(b) Tout d'abord on calcule la résistance R du cylindre, qui est donnée par

$$R = \rho\frac{2\pi R_1}{ld} = \frac{1}{\sigma}\frac{2\pi R_1}{ld}$$

où ρ est la résistivité du cylindre et $\sigma = 1/\rho$ sa conductibilité. La valeur du courant induit est

$$\boxed{I(t) = I = \frac{\varepsilon_{\text{ext}}}{R} = -\frac{\alpha R_1 \sigma l d}{2}}$$

Si $\sigma \to \infty$, le courant devient infini

$$\boxed{\lim_{\sigma\to\infty} I(t) = -\infty}$$

(c) On définit ici la direction du courant tel qu'une valeur positive de I, et ainsi de j_0, signifie counter-clockwise. En utilisant la Règle de Lenz, on connait qu'un courant I positif génère un champ magnétique $\vec{B}_c$ dans la direction $\vec{e}_z$:

$$\vec{B}_c = B_c\ \vec{e}_z$$

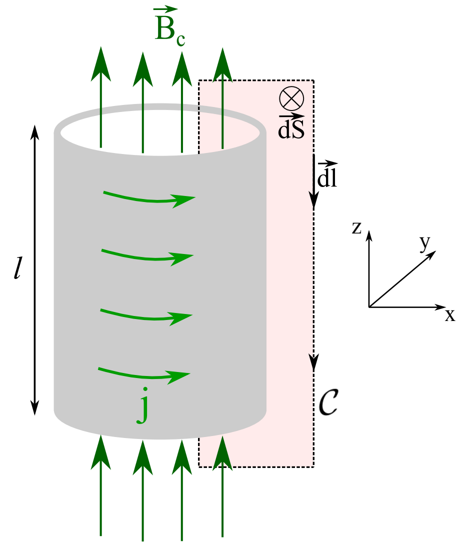
Cet champ est uniforme dans le cylindre (pour $r < R_1$), nulle à l'extérieur (pour $r > (R_1 + d)$).

Pour trouver la valeur de B_c à l'intérieur du cylindre, on considère un chemin fermé $\mathcal{C}$ comme celui montré dans la figure ci-dessous, et on applique la loi d'Ampère

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}_c \cdot \vec{dl} = \mu_0 I \quad \rightarrow \quad lB_c = \mu_0 I$$

$$\boxed{B_c = \frac{\mu_0 I}{l} = \mu_0 j_0 d}$$

étant $I = j_0 l d$ le courant.



En notation vectorielle, le champ magnétique devient

$$\vec{B}_c = \frac{\mu_0 I}{l}\ \vec{e}_z = \mu_0 j_0 d\ \vec{e}_z$$

Notez que dans a) on a trouvé que $I < 0$, de sorte que $\vec{B}_c$ est selon $-\vec{e}_z$, ce qui est consistent avec ce que l'on a discuté au début.

(d) En tenant en compte l'auto-inductance du cylindre, la tension induite ε_{tot} est

$$\varepsilon_{\text{tot}} = -\frac{d\phi_{\text{tot}}}{dt} = -\frac{d(\phi_{\text{ext}} + \phi_{\text{ind}})}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\alpha t \pi R_1^2 + \frac{\mu_0 I}{l}\pi R_1^2\right) = -\alpha\pi R_1^2 - \frac{\mu_0}{l}\pi R_1^2 \frac{dI}{dt}$$

En définissant

$$L = \frac{\mu_0 \pi R_1^2}{l} \qquad \varepsilon_{\text{ext}} = -\alpha\pi R_1^2$$

et en écrivant la tension comme

$$\varepsilon_{\text{tot}} = RI$$

on trouve l'équation différentielle en $I(t)$

$$\varepsilon_{\text{ext}} - L\frac{dI}{dt} - RI = 0 \tag{1}$$

La solution générale de cette équation s'écrit comme la somme d'une solution particulière I_{par} de l'équation complète avec la solution générale I_{hom} de l'équation homogène associée. Une solution particulière de l'équation (1) est $I_{\text{par}} = \varepsilon_{\text{ext}}/R$. L'équation homogène associée

$$L\frac{dI}{dt} + RI = 0$$

a solutions de forme $I_{\text{hom}}(t) = I_0 e^{\alpha t}$. En substituant cette expression dans l'équation homogène, on trouve $\alpha = -R/L$ et ainsi $I_{\text{hom}}(t) = I_0 e^{-(R/L)t}$.
Finalement, la solution générale de l'équation (1) est

$$I(t) = I_{\text{par}} + I_{\text{hom}} = \frac{\varepsilon_{\text{ext}}}{R} + I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

En utilisant la condition $I(t = 0) = 0$, on trouve $I_0 = -\varepsilon_{\text{ext}}/R$ et, ainsi,

$$\boxed{I(t) = \frac{\varepsilon_{\text{ext}}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = -\frac{\alpha R_1 \sigma l d}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\mu_0 \sigma d R_1}t}\right)}$$

(e) Le champ totale est la superposition du champ externe et de celui généré par le courant induit I :

$$\vec{B}_{\text{tot}}(t) = \vec{B}_{\text{ext}}(t) + \vec{B}_{\text{c}}(t) = \left(\alpha t + \frac{\mu_0 \varepsilon_{\text{ext}}}{lR}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})\right)\vec{e}_z$$

En posant $t = t_0 > 0$, et en remplaçant R avec sa définition, la composante du champ totale selon $\vec{e}_z$ devient

$$\boxed{B_{\text{tot}}(t_0) = \alpha t_0 - \frac{\mu_0 \alpha R_1 \sigma d}{2}(1 - e^{-\frac{2\pi R_1}{\sigma l L d}t_0})}$$

Si $\sigma \to 0$, la composante devient

$$\boxed{\lim_{\sigma \to 0} B_{\text{tot}}(t_0) = \alpha t_0}$$

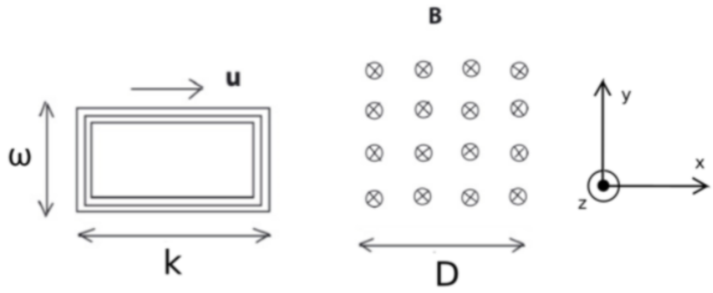
Si $\sigma \to \infty$, on utilise l'expansion $e^x \approx 1 + x$, avec $x = -\frac{2\pi R_1}{\sigma l L d}t_0$, et on trouve

$$\boxed{\lim_{\sigma \to \infty} B_{\text{tot}}(t_0) = \lim_{\sigma \to \infty}\left(\alpha t_0 - \frac{\mu_0 \alpha R_1 \sigma d}{2}\frac{2\pi R_1}{\sigma l L d}t_0\right) = 0}$$

vu que $L = \frac{\mu_0 \pi R_1^2}{l}$.

Exercice 2: Auto-inductance

On reprend l'exercice 4 de la semaine précédente. Maintenant, on prend en compte l'auto-inductance de la bobine, ainsi que sa résistance R non-nulle. On supposera que la bobine se déplace à une vitesse u constante le long de l'axe x. La bobine est considérée comme bobine idéale.



(a) Pendant la période durant laquelle la bobine entre dans la zone soumise au champ B mais n'est pas encore entièrement dedans, exprimez le flux du champ total (le champ B extérieur plus celui produit par le courant I dans la bobine) à travers la bobine en fonction du courant I et de la distance x parcourue par la bobine à l'intérieur de la zone avec le champ magnétique.

(b) A partir du résultat de a), montrez que le système est équivalent à un circuit fermé composé d'une résistance R, d'une inductance $L = \mu_0 n^2 l\omega k$ et d'une fem ε. Déterminez $I(t)$.

(c) Déterminez la dépendance temporelle du courant $I(t)$ à partir du moment où la bobine est entièrement dans la zone du champ magnétique et avant qu'elle ne commence à sortir par le côté droit.

Solution:

(a) Comme surface S, on choisit la section de la bobine. Son aire est donc $\omega \cdot k$. On oriente $\vec{dS}$ le long de l'axe z, tel qu'il sorte de la feuille. Par conséquent, le sens positif de la boucle est counter-clockwise (CCW). Selon la règle de Lenz, on s'attend à ce que le courant induit I circule aussi dans ce sens.
Le flux total $\phi_{tot,boucle}$ à travers une boucle de la bobine est :

$$\phi_{tot,boucle} = \omega x \vec{B}_{ext} \cdot \vec{e}_z + \omega k \vec{B}_b \cdot \vec{e}_z$$

ou $\vec{B}_{ext} = -B_0 \vec{e}_z$ est le champ extérieur et $\vec{B}_b$ celui produit par la bobine. Pour une bobine idéale, on a que $\vec{B}_b = \mu_0 n I \vec{e}_z$ (voir cours). On trouve donc

$$\phi_{tot,boucle} = -\omega x B_0 + \mu_0 n I \omega k$$

Pour les $N = nl$ boucles, on a donc que

$$\phi_{tot} = -nl\omega x B_0 + \mu_0 n^2 l I \omega k$$

(b) La loi d'induction de Faraday nous dit que la tension induite dans la bobine est

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi_{tot}}{dt} = nl\omega B_0 \frac{dx}{dt} - \mu_0 n^2 l\omega k \frac{dI}{dt}$$

Avec $u \equiv \frac{dx}{dt}$ et $L \equiv \mu_0 n^2 l\omega k$, on obtient

$$\varepsilon_{ind} = nl\omega B_0 u - L\frac{dI}{dt}$$

Cette tension induite fait circuler le courant dans la bobine, à travers sa résistance non-nulle, donc

$$\varepsilon_{ind} = nl\omega B_0 u - L\frac{dI}{dt} = RI$$

Si on définit $\varepsilon = nl\omega B_0 u$ comme la fem induite par le champ B extérieur, ceci s'écrit comme :

$$\varepsilon - RI - L\frac{dI}{dt} = 0$$

Notre système est donc équivalent à un circuit RL avec la fem ε.
Avec l'approche $I = I_0 e^{\alpha t}$ et la solution particulière $I = \varepsilon/R$, on trouve la solution générale de cette équation :

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{\varepsilon}{R}$$

Avec la condition initiale $I(t = 0) = 0$ (on choisit $t = 0$ quand $x = 0$) on trouve

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$

On trouve que après un temps $t \gg L/R$, le courant I est égal à celui trouvé dans l'exercice 4 de la série 12, où on avait négligé la auto-inductance. Le flux ϕ dû au champ extérieur et le courant dans le bobine sont montré dans la figure en bas, pour le cas que $\tau \equiv \frac{L}{R} \ll \frac{k}{u} \equiv t_{trans}$, avec t_{trans} le temps que la bobine prend pour entrer entièrement dans la zone du champ magnétique.

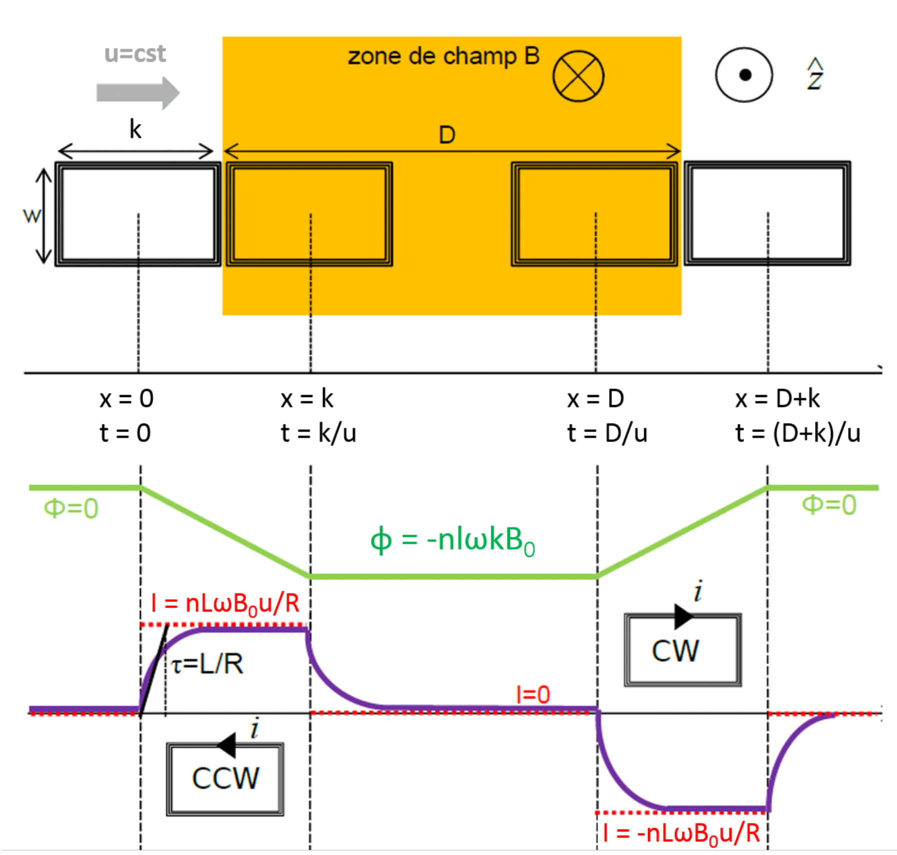
(c) Dès que la bobine est entièrement dans le champ, on a que $\varepsilon = 0$. Donc :

$$-RI - L\frac{dI}{dt} = 0$$

avec la solution générale $I(t) = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$. Au moment $t = 0$, quand la bobine est entièrement dans la zone du champ, on sait de la partie (b) qu'elle porte un courant

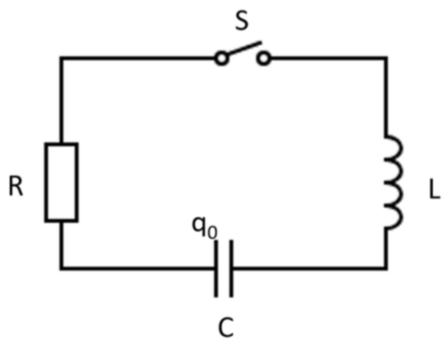
$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t_{trans}}\right)$$

Supposant $t_{trans} = \frac{k}{u} \gg \frac{L}{R} = \tau$, on obtient $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$ et donc $I(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{Rt}{L}}$. Cette situation est illustrée dans la figure ci-dessous, ainsi que le comportement inverse quand la bobine sort du champ magnétique.



Exercice 3: Circuit électrique oscillant - Principe de la bobine de Tesla (Examen 2020)

On considère le circuit montré dans la figure ci-dessous, composé d'un condensateur de capacité C, d'une bobine avec auto-inductance L, et d'une résistance de valeur R. L'auto-inductance du reste du circuit (à part celle de la bobine déjà tenue en compte) est négligeable. La situation initiale est telle que l'interrupteur S est ouvert et que le condensateur porte la charge $+q_0$.

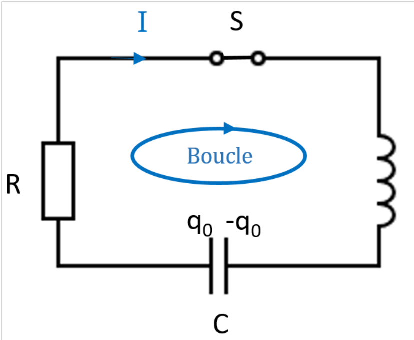


(a) À $t = 0$, on ferme l'interrupteur S. Démontrez que l'équation différentielle régissant l'évolution du courant est donnée par

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \qquad (2)$$

Solution:

On défini la direction du courant et de la boucle comme dans la figure.



Par la loi de Kirchhoff, on obtient,

$$V_R + V_L + V_C = 0 \tag{3}$$

Puis, on trouve,

$$V_R = -IR \tag{4}$$

$$V_L = -L\frac{dI}{dt} \tag{5}$$

$$V_C = +\frac{q_0}{C} \tag{6}$$

$$-L\frac{dI}{dt} - IR + \frac{q_0}{C} = 0 \tag{7}$$

La dérivée du temps nous donne :

$$-L\frac{d^2I}{dt^2} - R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq_0}{dt} = 0 \tag{8}$$

On peut ecrire le courant comme $I = -\frac{dq_0}{dt}$, et puis on trouve,

$$L\frac{dI^2}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \tag{9}$$

Si on avait défini le courant positif dans le sens inverse que celui montré dans la figure, on aurait obtenu $I = \frac{dq_0}{dt}$, avec l'expression :

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q_0}{C} = 0. \tag{10}$$

Enfin, on aurait trouvé la même expression finale :

$$L\frac{dI^2}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \tag{11}$$

(b) On a que $I(t=0) = 0$. Montrez que la deuxième condition initiale pour le courant est $\frac{dI}{dt}(t = 0) = +\frac{q_0}{LC}$ si vous avez défini la direction positive du courant dans la direction de l'aiguille de montre, ou $\frac{dI}{dt}(t=0) = -\frac{q_0}{LC}$ dans le cas contraire.

Solution:

À $t = 0$, l'équation (7) devient :

$$-L\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} - I(t=0)R + \frac{q_0}{C} = 0. \tag{12}$$

Comme $I(t=0)=0$, on trouve :

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = \frac{+q_0}{LC} \tag{13}$$

Pour le courant positif dans le sens anti-horaire, on aurait trouvé :

$$L\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} + I(t=0)R + \frac{q_0}{C} = 0, \tag{14}$$

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = \frac{-q_0}{LC} \tag{15}$$

(c) Avec les résultats des parties a) et b), déterminez $I(t)$ dans la limite $\frac{L}{C} > \frac{1}{4}R^2$.

Solution:

On commence à chercher une solution de la forme : $I(t) = I_0 \exp(\alpha t)$. Cela nous donne l'équation charactéristique suivante :

$$L\alpha^2 + R\alpha + \frac{1}{C} = 0, \tag{16}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \tag{17}$$

Vu que $L/C > 1/4R^2$, on peut récrire $\alpha_{1,2}$ comme :

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = -\frac{R}{2L} \pm i\omega, \tag{18}$$

où on défini la fréquence d'oscillation, $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$.

Comme il y a deux solutions de α, on arrive à la solution générale : $I(t) = I_1 \exp(\alpha_1 t) + I_2 \exp(\alpha_2 t)$.

De suite,

$$I(t) = \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right)[I_1 \exp(i\omega t) + I_2 \exp(-i\omega t)]. \tag{19}$$

De la première condition initiale, on a que,

$$I(t=0) = I_1 + I_2 = 0, \tag{20}$$

$$I_1 = -I_2. \tag{21}$$

Alors on trouve,

$$I(t) = I_1 \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right)[\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)], \tag{22}$$

$$I(t) = I_1 \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) 2i \sin(\omega t). \tag{23}$$

De la deuxième condition initiale, on a que,

$$\frac{dI}{dt} = 2iI_1[\exp\left(\frac{-Rt}{2L}\right)\omega\cos(\omega t) - \frac{R}{2L}\exp\left(\frac{-Rt}{2L}\right)\sin(\omega t)], \tag{24}$$

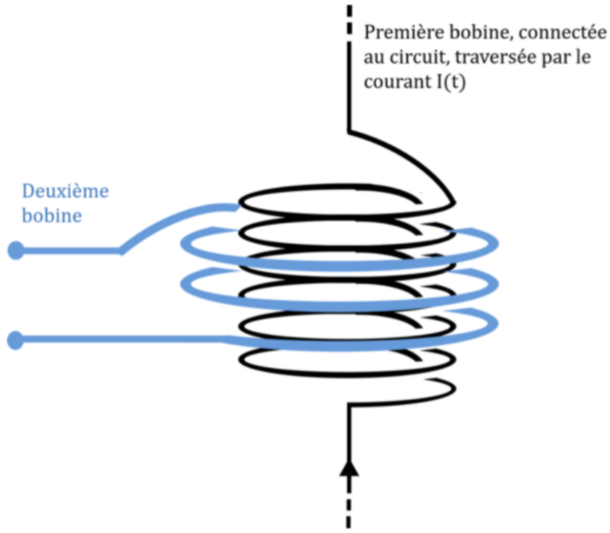
$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = 2iI_1\omega = \frac{q_0}{LC}, \tag{25}$$

$$I_1 = \frac{q_0}{2i\omega LC}. \tag{26}$$

Cela nous donne l'expression finale,

$$I(t) = \frac{q_0}{\omega LC} \exp\left(\frac{-Rt}{2L}\right) \sin(\omega t). \tag{27}$$

On ajoute maintenant une deuxième bobine, entourant la première comme indiqué dans la figure en bas. La première bobine reste connectée au circuit comme avant. Les bornes de la deuxième bobine sont ouvertes, tel qu'aucun courant ne peut circuler dans cette bobine. La longueur l_1, la section S_1, et le nombre de spires N_1 de la première bobine sont connus. Même chose pour la deuxième bobine (l_2, S_2, N_2). Les deux bobines peuvent être considérées comme des bobines idéales.



(d) Exprimez la tension induite dans la deuxième bobine en fonction du courant $I(t)$ dans la première bobine et d'autres quantités données.

Solution:

Le champ B généré à l'intérieur d'une bobine idéale par un courant I est donné par,

$$B(t) = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} I(t), \tag{28}$$

Le flux à travers une spire de la deuxième bobine est :

$$\Phi_2(t) = B(t) S_1 = \mu_0 \frac{N_1 S_1}{l_1} I(t). \tag{29}$$

Cela nous donne le flux qui traverse chaque spire de la deuxième bobine. Donc, le flux qui traverse l'entière de la deuxième bobine est :

$$\Phi_{2,tot}(t) = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_1}{l_1} I(t). \tag{30}$$

On trouve que la tension induite dans la deuxième bobine est :

$$\epsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_{2,tot}}{dt} = -\mu_0 \frac{N_1 N_2 S_1}{l_1} \frac{dI}{dt}. \tag{31}$$

(e) Trouvez le rapport entre la tension induite dans la deuxième bobine et la tension entre les bornes de la première bobine. Pour simplifier l'expression finale, exprimez l'auto-inductance de la première bobine en fonction du nombre de spires et de ses dimensions.

Solution:

La tension entre les bornes de la première bobine est :

$$\epsilon_1 = -L\frac{dI}{dt} = -\mu_0 \frac{N_1^2 S_1}{l_1}\frac{dI}{dt}. \tag{32}$$

Avec le résultat de d), on trouve :

$$\frac{\epsilon_{ind}}{\epsilon_1} = -\mu_0 \frac{N_1 N_2 S_1}{l_1}\frac{dI}{dt}\left(-\mu_0 \frac{N_1^2 S_1}{l_1}\frac{dI}{dt}\right)^{-1} = \frac{N_2}{N_1}. \tag{33}$$

Notez que l'arrangement de ces deux bobines est appelé un transformateur, permettant de transformer la tension d'une bobine à l'autre, dans le cas idéale par le rapport des nombre d'enroulements des deux bobines.

(f) En utilisant le résultat pour $I(t)$ trouvé dans la partie c) et supposant maintenant que $R = 0$, comment dépend la tension maximale induite dans la deuxième bobine de la capacité et la charge initiale q_0 du condensateur ?

Solution:

De la partie c), supposant que $R = 0$, on a :

$$I(t) = \frac{q_0}{\omega LC}\sin(\omega t), \tag{34}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{q_0}{LC}\cos(\omega t), \tag{35}$$

$$\epsilon_{ind} = -\mu_0 \frac{N_1 N_2 S_1}{l_1}\frac{q_0}{LC}\cos(\omega t). \tag{36}$$

En remplaçant L par l'expression suivante :

$$L = \mu_0 \frac{N_1^2 S_1}{l_1}, \tag{37}$$

on trouve l'expression :

$$\epsilon_{ind} = \frac{N_2}{N_1}\frac{q_0}{C}\cos(\omega t). \tag{38}$$

Alors, on trouve que la tension maximale induite dans la deuxième bobine est :

$$\epsilon_{ind}^{max} = \frac{N_2}{N_1}\frac{q_0}{C}. \tag{39}$$

Cette tension est donc proportionnel à q_0 et inversement proportionel à C.

Exercice 4: Onde électromagnétique (Examen 2019)

(a) Dérivez l'équation d'onde pour le champ magnétique $\vec{B}$ à partir des équations de Maxwell dans le vide (densité de charge $\rho_{el} = 0$, densité de courant $\vec{j} = 0$).

Rappel : Pour un champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r})$, on a l'identité suivante :

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \Delta \vec{A}$$

(b) Les ondes électromagnétiques visibles ont une longueur d'onde entre $\lambda_1 = 380$ nm et $\lambda_2 = 750$ nm (1 nm $= 10^{-9}$ m). Trouvez les fréquences ν_1 et ν_2 associées à ces ondes dans le vide. La vitesse de la lumière est $c = 3 \times 10^8$ m.s^{-1}

(c) On considère des ondes sonores de mêmes longueurs d'onde (entre $\lambda_1 = 380$ nm et $\lambda_2 = 750$ nm). Trouvez les fréquences ν_1 et ν_2 associées à ces ondes à $20°$C. Ces ondes sont-elles audibles pour un être humain ? L'indice adiabatique γ de l'air est $7/5$, la masse moyenne des molécules dans l'air est $m = 29{\cdot}1.67{\cdot}10^{-27}$ kg et la constante de Boltzmann est $1.38{\cdot}10^{-23}$ J/K. Les fréquences audibles pour un être humain s'étendent typiquement de 16 Hz à 16 kHz.

Solution:

(a) On écrit les équations de Maxwell dans le vide :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases} \tag{40}$$

On calcule le rotationnel de la troisième équation :

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) = \frac{1}{c^2}\nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{41}$$

On utilise le fait que le temps t et l'espace $\vec{r}$ sont deux variables indépendantes, et on utilise l'identité vectorielle indiquée dans la consigne :

$$\nabla\left(\nabla \cdot \vec{B}\right) - \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\left(\nabla \times \vec{E}\right)}{\partial t}. \tag{42}$$

Finalement, on substitue la première et la dernière equation du système (40) dans (42), et on obtient :

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \tag{43}$$

c'est-à-dire l'équation d'onde pour le champ magnétique $\vec{B}$ dans le vide.

(b) Pour une onde électromagnétique dans le vide on peut écrire :

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \tag{44}$$

donc on calcule la fréquence d'onde associé aux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 :

$$\nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{380 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \simeq 7.89 \cdot 10^{14} \text{ Hz}, \tag{45}$$

$$\nu_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{750 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \simeq 4.00 \cdot 10^{14} \text{ Hz}. \tag{46}$$

(c) En considérant l'aire comme un gaz idéal, on peut écrire la vitesse du son comme :

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}, \tag{47}$$

où k_B est la constante de Boltzmann et T la température en K. Dans notre cas, on obtient donc :

$$v_s = \sqrt{\frac{7}{5} \cdot \frac{1.38 \cdot 10^{-23}\mathrm{J/K}\,(20 + 273.15)\,\mathrm{K}}{29 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}\mathrm{kg}}} \simeq 342\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{48}$$

On peut maintenant calculer la fréquence des ondes sonores de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 :

$$\nu_1 = \frac{v_s}{\lambda_1} = \frac{342\ m/s}{380 \cdot 10^{-9}\ m} \simeq 900\ \mathrm{MHz}, \tag{49}$$

$$\nu_2 = \frac{v_s}{\lambda_2} = \frac{342\ m/s}{750 \cdot 10^{-9}\ m} \simeq 456\ \mathrm{MHz}. \tag{50}$$

Ces ondes ne sont donc pas audibles pour un être humain.

Exercice 5: Réflexion et transmission d'une onde électromagnétique

Soit une onde électromagnétique qui se propage dans le vide vers un matériau diélectrique uniforme et isotrope, avec un indice de réfraction $n = \sqrt{\varepsilon_r} > 1$. L'incidence de l'onde est perpendiculaire à l'interface entre vide et matériau. On s'attend à ce qu'une partie de l'onde soit transmise et une partie réfléchie. Pour le champ $\vec{E}$ associé à l'onde, on fait l'ansatz :

— Pour $z < 0$:

$$\widetilde{\vec{E}}(z<0,t) = \widetilde{\vec{E_I}}(z,t) + \widetilde{\vec{E_R}}(z,t)$$

avec

$$\widetilde{\vec{E_I}}(z,t) = E_{XI}\ e^{i(\omega t - k_I z + \varphi_I)}\vec{e}_x$$

et

$$\widetilde{\vec{E_R}}(z,t) = E_{XR}\ e^{i(\omega t + k_R z + \varphi_R)}\vec{e}_x$$

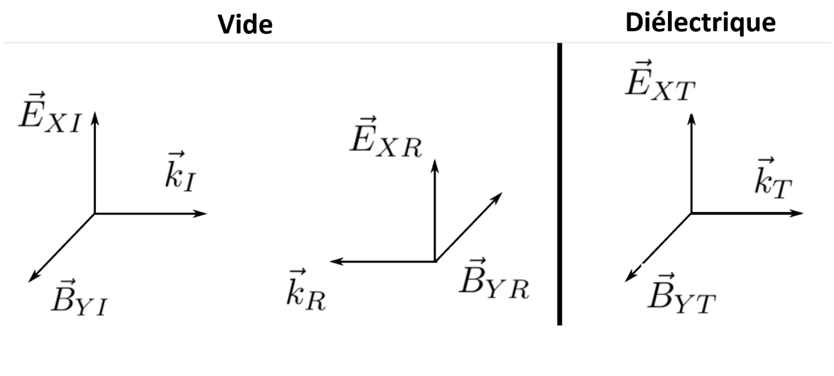
— Pour $z > 0$:

$$\widetilde{\vec{E}}(z>0,t) = \widetilde{\vec{E_T}}(z,t)$$

avec

$$\widetilde{\vec{E_T}}(z,t) = E_{XT}\ e^{i(\omega t - k_T z + \varphi_T)}\vec{e}_x$$

E_{XI}, E_{XR} et E_{XT} sont tous $\in \mathbb{R}$ et positifs.



(a) On suppose que ω, k_I, k_R et k_T sont tous positifs. Exprimez k_I, k_R et k_T en fonction de ω. *Indication : dans un matériau avec indice de réfraction n, la vitesse de la lumière est c/n, avec c la vitesse de la lumière dans le vide.*

(b) Complétez l'ansatz pour $\vec{E}$ par la composante du champ magnétique. Utiliser la relation

$$\widetilde{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \times \widetilde{\vec{E}}}{\omega}$$

qui suit de la Loi de Faraday est qui est valable dans le vide comme dans le matériau. Pourquoi sur la figure avons-nous représenté $\vec{B}_{YR}$ opposé à $\vec{B}_{YI}$?

(c) On peut montrer qu'à l'interface vide-diélectrique, les composantes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ parallèles à l'interface sont continues[1]. Utilisez ces conditions pour exprimer E_{XR}, φ_R, E_{XT} et φ_T en fonction de E_{XI} et φ_I.

(d) Comme application numérique de c), on prend l'interface air-eau. On a $n_{air} = \sqrt{\varepsilon_{r,air}} \approx \sqrt{1.0006} \approx 1 \approx$ cas du vide, et $n_{eau} = \sqrt{\varepsilon_{r,eau}} \approx \sqrt{1.7} = 1.3$ (valable pour les longueurs d'onde dans le visible). Quelle est votre conclusion ?

Solution:

(a) On a la relation $\omega = \frac{c}{n}|\vec{k}|$. Comme ω, k_I, k_R et k_T sont tous positifs, on trouve dans le vide $(n = 1)$ $k_I = k_R = \frac{\omega}{c}$. Dans le diélectrique $(n = \sqrt{\varepsilon_r})$ on a $k_T = \frac{n}{c}\omega$.

(b) On définit

$$\widetilde{\vec{B}_I}(z,t) = \frac{\vec{k_I} \times \widetilde{\vec{E}_I}}{\omega}$$

$$\widetilde{\vec{B}_R}(z,t) = \frac{\vec{k_R} \times \widetilde{\vec{E}_R}}{\omega}$$

$$\widetilde{\vec{B}_T}(z,t) = \frac{\vec{k_T} \times \widetilde{\vec{E}_T}}{\omega}$$

Dans ce cas, on a $\widetilde{\vec{B}}(z < 0, t) = \widetilde{\vec{B}_I}(z,t) + \widetilde{\vec{B}_R}(z,t)$ et $\widetilde{\vec{B}}(z > 0, t) = \widetilde{\vec{B}_T}(z,t)$.
Avec $\vec{k_I} = k_I \vec{e_z}$, on trouve

$$\widetilde{\vec{B}_I}(z,t) = \frac{1}{\omega} k_I \vec{e_z} \times \widetilde{\vec{E}_I} = \frac{1}{\omega} k_I \vec{e_z} \times (E_{XI}\ e^{i(\omega t - k_I z + \varphi_I)} \vec{e_x}) = \frac{1}{c} E_{XI}\ e^{i(\omega t - k_I z + \varphi_I)} \vec{e_y}$$

et avec $\vec{k_R} = -k_R \vec{e_Z}$, on trouve :

$$\widetilde{\vec{B}_R}(z,t) = \frac{1}{\omega}(-k_R \vec{e_z}) \times (E_{XR}\ e^{i(\omega t + k_R z + \varphi_R)} \vec{e_x}) = -\frac{1}{c} E_{XR}\ e^{i(\omega t + k_R z + \varphi_R)} \vec{e_y}$$

Finalement, avec $\vec{k_T} = k_T \vec{e_Z}$, on trouve :

$$\widetilde{\vec{B}_T}(z,t) = \frac{n}{c} E_{XT}\ e^{i(\omega t - k_T z + \varphi_T)} \vec{e_y}$$

Dans le vide comme dans un diélectrique isotrope et uniforme, les ondes électromagnétiques sont des ondes transversales où les vecteurs $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ forment un trièdre orthogonal orienté droit. Puisque l'onde réfléchie se propage selon $-\vec{e_z}$, $\vec{k_R}$ est selon $-\vec{e_z}$ et donc $\vec{B_{YR}}$ est selon $-\vec{e_y}$.

1. Pour $\vec{E}$, ceci est une conséquence du Loi de Faraday, pour $\vec{B}$ c'est une conséquence du Loi d'Ampère-Maxwell et du fait qu'il n'y a pas de courants de surface pour le cas d'un diélectrique.

(c) Comme l'incidence est perpendiculaire à l'interface vide-diélectrique, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont parallèles à l'interface et doivent donc être continus. Donc :

$$\widetilde{\vec{E}_I}(z \to 0^-, t) + \widetilde{\vec{E}_R}(z \to 0^-, t) = \widetilde{\vec{E}_T}(z \to 0^+, t)$$

et

$$\widetilde{\vec{B}_I}(z \to 0^-, t) + \widetilde{\vec{B}_R}(z \to 0^-, t) = \widetilde{\vec{B}_T}(z \to 0^+, t)$$

Avec les donnés de l'exercice et le résultat de b), ceci donne

$$E_{XI}\ e^{i(\omega t+\varphi_I)}\vec{e}_x + E_{XR}\ e^{i(\omega t+\varphi_R)}\vec{e}_x = E_{XT}\ e^{i(\omega t+\varphi_T)}\vec{e}_x$$

et

$$\frac{1}{c}E_{XI}\ e^{i(\omega t+\varphi_I)}\vec{e}_y - \frac{1}{c}E_{XR}\ e^{i(\omega t+\varphi_R)}\vec{e}_y = \frac{n}{c}E_{XT}\ e^{i(\omega t+\varphi_T)}\vec{e}_y$$

ce qui se simplifie en

$$E_{XI}\ e^{i\varphi_I} + E_{XR}\ e^{i\varphi_R} = E_{XT}\ e^{i\varphi_T} \quad (1)$$

$$E_{XI}\ e^{i\varphi_I} - E_{XR}\ e^{i\varphi_R} = nE_{XT}\ e^{i\varphi_T} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow E_{XT} = \frac{2}{1+n}E_{XI}\ e^{i(\varphi_I - \varphi_T)}$$

Comme on veut que E_{XI}, $E_{XT} \in \mathbb{R}$ et > 0, on peut écrire

$$\varphi_I = \varphi_T \Rightarrow E_{XT} = \frac{2}{1+n}E_{XI}$$

Donc :

$$n \cdot (1) - (2) \Rightarrow E_{XR} = -\frac{n-1}{n+1}E_{XI}\ e^{i(\varphi_I - \varphi_R)}$$

et on peut écrire

$$\varphi_R = \varphi_I + \pi \Rightarrow E_{XR} = \frac{n-1}{n+1}E_{XI}$$

(d) Avec $n = 1.3$, on a

$$E_{XR} = \frac{n-1}{n+1}E_{XI} = 0.13\ E_{XI}$$

$$E_{XT} = \frac{2}{n+1}E_{XI} = 0.87\ E_{XI}$$

On conclut qu'une petite partie de l'onde est réfléchie. Ceci explique que, même si vous pouvez voir la réflexion de votre visage sur l'eau, un miroir est quand-même beaucoup plus efficace.