EPFL Automne 2020
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 4

Tous les exercices seront corriges. La correction sera postee sur le moodle apres 2 semaines.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le dimanche de la semaine suivante celle ou la serie a ete postee. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme de fichier pdf (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien a cet effet dans la semaine de la serie.

Exercice 1. Soient A, B, C des anneaux et $\varphi : A \mapsto B$ et $\psi : B \mapsto C$ des morphismes d'anneaux.

1. Montrer que $\psi \circ \varphi : A \mapsto C$ est un morphisme d'anneaux.
2. Montrer que si φ est bijectif alors sa reciproque $\psi^{-1} : B \mapsto A$ est un morphisme d'anneaux.

Exercice 2. Soit $(M, +, *)$ un A-module (de loi de multiplication externe notee $*$).

1. Montrer que pour tout $m \in M$

$$0_A.m = 0_M,\ (-1_A) * m = -m$$

(ou $-m$ est l'oppose de m dans le groupe additif $(M, +)$).

Exercice 3. On considere le $\mathbb{Z}$-module libre (muni de l'addition)

$$\mathbb{Z}^3 = \{(x, y, z),\ x, y, z \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Montrer que l'ensemble

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3,\ x + 2y + 3z = 0\}$$

est un sous $\mathbb{Z}$-module non-nul de $\mathbb{Z}^3$.

2. Montrer que l'ensemble

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3,\ x + 2y + 3z = 3x + 2y + z = 0\}$$

est un sous $\mathbb{Z}$-module non-nul de $\mathbb{Z}^3$.

Exercice 4. ($\star$) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = \pm 1$. On va montrer que la paire $\{(a, b), (c, d)\}$ engendre le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^2$.

1. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{Q}^2$, resoudre dans $\mathbb{R}^2$ le systeme d'equations lineaires (d'inconnue (x, y))
$$\begin{cases} ax + cy = m \\ bx + dy = n \end{cases}.$$
(on discutera separement les cas $b = 0$ et $b \neq 0$).
2. Montrer que si $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ alors en fait $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
3. Montrer que tout element de $\mathbb{Z}^2$ peut s'exprimer comme une combinaison lineaire de (a, b) et (c, d) a coefficients dans $\mathbb{Z}$ et en deduire que $\{(a, b), (c, d)\}$ engendre le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^2$.
4. Montrer que en revanche, si $\Delta = ad - bc \neq \pm 1$ alors le module engendre $\langle (a, b), (c, d) \rangle$ n'est pas egal a $\mathbb{Z}^2$. On traitera seulement le cas $\Delta \neq 0$ et on montrera que si on avait $\langle (a, b), (c, d) \rangle = \mathbb{Z}^2$ alors Δ diviserait a, b, c et d et on en deduira une contradiction.

Exercice 5. Soit A un anneau et L un A-module, $X, Y \subset L$ des sous-ensembles et $\langle X \rangle,\ \langle Y \rangle \subset L$ les sous A-modules qu'ils engendrent.

1. Montrer que si $X \subset Y$ alors $\langle X \rangle \subset \langle Y \rangle$.
2. Montrer que si $\langle Y \rangle$ contient une famille generatrice de L alors Y est une famille generatrice de L (et donc $\langle Y \rangle = L$).
3. Montrer que $\langle X \cap Y \rangle \subset \langle X \rangle \cap \langle Y \rangle$ et donner un exemple (pour l'anneau $A = \mathbb{Z}$) d'un module non-nul L tel que $\langle X \cap Y \rangle = \{0_L\}$ et $\langle X \rangle \cap \langle Y \rangle = L$; ceci montre qu'on n'a pas egalite en general dans l'inclusion precedente.

Exercice 6. Soit A un anneau et $L, M \subset N$ des sous A-modules d'un module N. On defini la somme de ces sous-modules par
$$L + M := \{l + m,\ l \in L,\ m \in M\} \subset N.$$

1. Montrer que $L + M$ est un sous-module de N et que
$$\langle L \cup M \rangle = L + M.$$
2. Soient X et Y des parties generatrices de L et M respectivement : $L = \langle X \rangle,\ M = \langle Y \rangle$. Montrer que
$$\langle X \cup Y \rangle = L + M.$$

Exercice 7. Soit $(A, +, .)$ un anneau, $\mathrm{End}_{Gr}(A)$ l'anneau des endomorphismes du groupe additif $(A, +)$. On a definit pour tout $a \in A$ l'application de A vers A,
$$[\times a] : a' \in A \mapsto [\times a](a') := a.a' \in A$$
et on a montre que c'etait un endomorphisme du groupe $(A, +)$, ie. $[\times a] \in \mathrm{End}_{Gr}(A)$.

1. Montrer que $[\times a]$ n'est pas un morphisme d'anneaux sauf si $a = 0_A, 1_A$.
2. Montrer que l'application

$$[\times \bullet] : \begin{array}{ccc} A & \mapsto & \mathrm{End}_{Gr}(A) \\ a & \mapsto & [\times a] \end{array}$$

   est un morphisme d'anneaux.
3. En deduire que l'ensemble $A.\mathrm{Id}_A = \{[\times a],\ a \in A\} \subset \mathrm{End}_{Gr}(A)$ est un sous-anneau de $\mathrm{End}_{Gr}(A)$.