Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-03-15 au 2021-03-19

Série 08 du mercredi 17 mars 2021

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = 0, \\ \dfrac{\cos\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_3^3\right) - 1}{x_1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $\nabla f(0,0,0)$. f est-elle différentiable en $(0,0,0)$?

Solution :

Calculons $\nabla f(\mathbf{0})$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0,0) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(|t|) - 1}{t^2} \quad (1)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t) - 1}{t^2}$$

$$\overset{\text{B–H}}{=} -\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{2t} = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t,0) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0,t) - f(\mathbf{0})}{t} = 0. \quad (3)$$

Ainsi $\nabla f(\mathbf{0}) = (-1/2, 0, 0)$.

Si f est différentiable en $\mathbf{0}$, alors

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\mathbf{0}) + (\nabla f(\mathbf{0}))^\top \boldsymbol{x} + o_{\mathbf{0}}(\|\boldsymbol{x}\|). \quad (4)$$

D'après le cours, la dérivée dans la direction de tout vecteur ν devrait donc être $(\nabla f(\mathbf{0}))^\top \nu$ (ν étant un vecteur colonne ici, comme le gradient). Cependant, la dérivée dans la direction $\nu = (1,1,0)$ est

$$\mathrm{D}_\nu f(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{0} + t\nu) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t,0)}{t} \quad (5)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cos(\sqrt{2}|t|) - 1}{t^2} \quad (6)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cos(\sqrt{2}t) - 1}{t^2} \quad (7)$$

$$\overset{\text{B–H}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)}{2t} \quad (8)$$

$$\overset{\text{B–H}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{-2\cos(\sqrt{2}t)}{2} = -1, \quad (9)$$

alors que $(\nabla f(\mathbf{0}))^\top \nu = -\frac{1}{2}$. La contradiction prouve que f n'est pas différentiable en $\mathbf{0}$.

Exercice 2.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{|x|^\alpha y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donner les valeurs de α pour lesquelles f est

1) continue en $(0,0)$;
2) différentiable en $(0,0)$.

Solution :

1) **Cas $\alpha > 0$.** Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a

$$0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant |x|^\alpha \leqslant r^\alpha \tag{10}$$

avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Comme $\lim_{r\to 0^+} r^\alpha = 0$, le théorème des deux gendarmes donne

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \tag{11}$$

et donc f est continue en $(0,0)$.

Cas $\alpha = 0$. Alors

$$\lim_{t\to 0^+} f(t,t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} t^\alpha = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 = f(0,0) \tag{12}$$

et donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Cas $\alpha < 0$. Alors

$$\lim_{t\to 0^+} f(t,t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} t^\alpha = +\infty \tag{13}$$

et donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Finalement, f est continue en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha > 0$.

2) Nous allons montrer que f est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha > 1$. Si $\alpha \leqslant 0$, on sait déjà que f n'est pas différentiable en $(0,0)$ car f n'est même pas continue en $(0,0)$.

Cas $\alpha = 1$. Montrons que $\mathrm{D}_{(1,1)} f(0,0)$ existe, mais

$$\mathrm{D}_{(1,1)} f(0,0) \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot 1, \tag{14}$$

ce qui montre que f n'est pas différentiable en $(0,0)$. Comme $f(t,t) = t/\sqrt{2}$ (aussi pour $t = 0$), on a

$$\mathrm{D}_{(1,1)} f(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0+t) - f(0,0)}{t} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)\bigg|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{15}$$

Comme $f(x,0)=0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left(\frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{x=0} = 0. \tag{16}$$

Comme $f(0,y)=0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left(\frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}y}\right)\Big|_{y=0} = 0. \tag{17}$$

Ainsi

$$\mathrm{D}_{(1,1)}\, f(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 = 1\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + 1\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \tag{18}$$

et f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Cas $0 < \alpha < 1$**.** Montrons que $\mathrm{D}_{(1,1)}\, f(0,0)$ n'existe pas. On a en effet

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} t^{\alpha-1} = +\infty. \tag{19}$$

Ainsi f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Cas $\alpha > 1$**.** Nous allons montrer que f est déjà sous la forme $f(x,y) = f(0,0) + L(x,y) + o_{(0,0)}(\|(x,y)\|_2)$, avec L l'application nulle et $f(0,0)=0$. On a pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ et en posant $r := \sqrt{x^2+y^2}$

$$0 \leqslant \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|_2} = \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|^\alpha |y|}{x^2+y^2} \leqslant r^{\alpha-1} \tag{20}$$

avec $\lim_{r\to 0^+} r^{\alpha-1} = 0$, si $\alpha > 1$. Le théorème des deux gendarmes donne alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|_2} = 0. \tag{21}$$

Exercice 3.

On définit

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \\ x^2 \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{22}$$

Montrer que

1) les dérivées directionnelles de f existent dans $\mathbb{R}^2$;
2) f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$;
3) les dérivées directionnelles de f sont discontinues en $(0,0)$.

Solution :

1) Montrons que les dérivées directionnelles de f existent dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\boldsymbol{v} \coloneqq (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|\boldsymbol{v}\| = 1$ (norme euclidienne). D'après la définition de dérivée directionnelle au point $\boldsymbol{x}_0$, nous voulons montrer que

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}\, f(\boldsymbol{x_0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x_0} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x_0})}{t} \tag{23}$$

existe. Montrons qu'elle existe en $\mathbf{0} = (0,0)$, qui est le seul point $\boldsymbol{x}_0$ délicat ici :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}\, f(\mathbf{0}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{0} + t\boldsymbol{v}) - f(\mathbf{0})}{t} && (24)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \times t^2 v_1^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{t^2v_1^2 + t^2v_2^2}}\right) && (25)\\
&= \lim_{t\to 0} t v_1^2 \sin\left(\frac{1}{|t|}\right) = 0. && (26)
\end{aligned}$$

Donc, les dérivées directionnelles de f existent dans $\mathbb{R}^2$.

2) Montrons que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est différentiable en tout $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. Concernant l'origine, nous allons montrer que $f(x,y) = o_{(0,0)}(\|(x,y)\|)$, donc que $f(x,y)$ est déjà sous la forme $f(x,y) = f(0,0) + L(x,y) + o_{(0,0)}(\|(x,y)\|)$, avec $f(0,0) = 0$ et $L = 0$ (l'application nulle). Pour la norme euclidienne, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ et en posant $r \coloneqq \sqrt{x^2+y^2}$,

$$0 \leqslant \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} = \frac{x^2}{r}\left|\sin\left(\frac{1}{r}\right)\right| \leqslant r\left|\sin\left(\frac{1}{r}\right)\right| \tag{27}$$

avec $\lim_{r\to 0^+} = 0$. Le théorème des deux gendarmes assure que $\lim_{(x,y)\to 0} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$.

3) Montrons que les dérivées directionnelles de f sont discontinues en $(0,0)$. Fixons $\boldsymbol{v}$ de norme (euclidienne) 1. Comme f est différentiable en tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, on peut appliquer la formule $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}\, f(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{v}$. Les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ sont

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -yx^2 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(x^2+y^2)^{-3/2}, && (28)\\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - x^3 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(x^2+y^2)^{-3/2}. && (29)
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}\, f(\boldsymbol{x}) = 2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) v_1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(x^2+y^2)^{-3/2}(x^3v_1 + yx^2v_2). \tag{30}$$

En particulier, pour $t > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}\, f(t,t) &= 2t \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}t}\right) v_1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}t}\right)(\sqrt{2}t)^{-3}(t^3v_1 + t^3v_2) && (31)\\
&= 2t \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}t}\right) v_1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}t}\right) 2^{-3/2}(v_1 + v_2). && (32)
\end{aligned}$$

En considérant $(\sqrt{2}t)^{-1}$ de la forme $\pi k/2$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, autrement dit, en posant $t_k = \sqrt{2}/(k\pi)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient que $\lim_{k\to+\infty} \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(t_k, t_k)$ n'existe pas si $v_1 + v_2 \neq 0$, et donc $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f$ n'est pas continue en $(0, 0)$.
Si $v_2 = -v_1$, alors $v_1 \neq 0$ et $\lim_{t\to 0^+} \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(t, 0)$ n'existe pas et donc $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f$ n'est pas continue en $(0, 0)$.