Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-03-15 au 2021-03-19

Série 07 du lundi 15 mars 2021

Exercice 1.

Soit $E = ([0,1] \times [0,1]) \setminus \{(0,0)\}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\forall (x,y) \in E$.

1) f est-elle continue sur E ?
2) f est-elle uniformément continue sur E ?

Solution :

1) f est continue sur E pour les raisons habituelles ($(0,0)$ ne fait pas partie de E).
2) On constate que

$$\lim_{t \to 0^+} f(t,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

alors que

$$\lim_{t \to 0^+} f(0,t) = 0. \tag{2}$$

Ainsi f n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$. A fortiori, elle ne peut pas être uniformément continue sur E.

Exercice 2.

Soient V et W deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $f : V \to W$ une fonction. On considère V muni des normes $\|\cdot\|_V$, $|||\cdot|||_V$ et W muni des normes $\|\cdot\|_W$, $|||\cdot|||_W$. On suppose que

$$\exists C_1 > 0, \forall v \in V : \quad |||v|||_V \leqslant C_1 \|v\|_V, , \tag{3}$$

$$\exists C_2 > 0, \forall v \in V : \quad |||w|||_W \leqslant C_2 \|w\|_W. \tag{4}$$

On dit alors que la norme $\|\cdot\|_V$ est « plus forte que $|||\cdot|||_V$ », ou de manière équivalente, $|||\cdot|||_V$ est « plus faible que $\|\cdot\|_V$ ». De même pour W.

Montrer que

1) Si $f : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ est continue, alors $f : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, |||\cdot|||_W)$ est continue.
2) Si $f : (V, |||\cdot|||_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ est continue, alors $f : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ est continue.

Rappel 1. $f : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ est continue si

$$\forall \epsilon > 0, \forall v \in V, \exists \delta = \delta(v,\epsilon) > 0 : \forall \tilde{v} \in V, \quad (\|\tilde{v} - v\|_V < \delta \implies \|f(\tilde{v}) - f(v)\|_W < \epsilon). \tag{5}$$

Solution :

1) Si $f:(V,\|\cdot\|_V)\to(W,\|\cdot\|_W)$ est continue alors $\forall\epsilon>0$, $\forall v\in V$, $\exists\delta=\delta(v,\epsilon)>0$:

$$\forall\tilde{v}\in V,\quad \Big(\tilde{v}\in \mathrm{B}_{\|\cdot\|_V}(v,\delta)\implies f(\tilde{v})\in \mathrm{B}_{\|\cdot\|_W}(f(v),\epsilon)\Big). \tag{6}$$

Si on prend $\delta_1(v,\epsilon)=\delta(v,\epsilon/C_2)$ alors,

$$\tilde{v}\in \mathrm{B}_{\|\cdot\|_V}(v,\delta_1)\implies f(\tilde{v})\in \mathrm{B}_{\|\cdot\|_W}\left(f(v),\frac{\epsilon}{C_2}\right). \tag{7}$$

En utilisant l'hypothèse sur les normes,

$$|||f(\tilde{v})-f(v)|||_W\leqslant C_2\|f(\tilde{v})-f(v))\|_W<\epsilon, \tag{8}$$

c'est-à-dire, $\tilde{v}\in \mathrm{B}_{\|\cdot\|_V}(v,\delta_1)\implies f(\tilde{v})\in \mathrm{B}_{|||\cdot|||_W}(v,\epsilon)$.

2) On sait que $\forall\epsilon>0$, $\forall v\in V$, $\exists\delta=\delta(v,\epsilon)>0$:

$$\forall\tilde{v}\in V,\quad \Big(\tilde{v}\in \mathrm{B}_{|||\cdot|||_V}(v,\delta)\implies f(\tilde{v})\in \mathrm{B}_{\|\cdot\|_W}(f(v),\epsilon)\Big), \tag{9}$$

et on veut montrer que, $\forall\epsilon>0$, $\forall v\in V$, $\exists\tilde{\delta}=\tilde{\delta}(v,\epsilon)>0$:

$$\forall\tilde{v}\in V,\quad \Big(\tilde{v}\in \mathrm{B}_{\|\cdot\|_V}\big(v,\tilde{\delta}\big)\implies f(\tilde{v})\in \mathrm{B}_{\|\cdot\|_W}(f(v),\epsilon)\Big). \tag{10}$$

Il suffit prendre $\tilde{\delta}(v,\epsilon)=\frac{\delta(v,\epsilon)}{C_1}$ et observer que, si $\tilde{v}\in \mathrm{B}_{\|\cdot\|_V}\big(v,\tilde{\delta}\big)$, alors

$$|||\tilde{v}-v|||_V\leqslant C_1\|\tilde{v}-v\|_V<\delta, \tag{11}$$

c'est-à-dire, $\mathrm{B}_{\|\cdot\|_V}\big(v,\tilde{\delta}\big)\subset \mathrm{B}_{|||\cdot|||_V}(v,\delta)$. On a donc que

$$\tilde{v}\in \mathrm{B}_{\|\cdot\|_V}\big(v,\tilde{\delta}\big)\implies \tilde{v}\in \mathrm{B}_{|||\cdot|||_V}(v,\delta)\implies f(\tilde{v})\in \mathrm{B}_{\|\cdot\|_W}(f(v),\epsilon). \tag{12}$$

Exercice 3.

Définition 1 (Fonction höldérienne)**.** On dit qu'une fonction $\boldsymbol{f}:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ est α-höldérienne, pour $\alpha\in\,]0,1]$, si

$$\sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E}\frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^\alpha}<\infty. \tag{13}$$

On vérifie facilement que cette définition ne dépend pas de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

1) Montrer que si $\boldsymbol{f}$ est α-höldérienne, alors $\boldsymbol{f}$ est uniformément continue sur E.
2) Utiliser cette propriété pour montrer que la fonction $f:[-1,1]^2\to\mathbb{R}$,

$$f:(x_1,x_2)\mapsto\sqrt{|x_1-x_2|} \tag{14}$$

est uniformément continue sur $[-1,1]^2$.

Indication. Utiliser la propriété que, $\forall a,b\in\mathbb{R}^+$, $\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|\leqslant\sqrt{|a-b|}$.

Solution :

1) Par hypothèse, $\exists C > 0 : \sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E} \frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^\alpha} < C$ et on veut vérifier que

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) : \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E, \quad \big(\boldsymbol{y} \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{x}, \delta) \implies \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \epsilon)\big). \tag{15}$$

En choisissant $\delta(\epsilon) = \left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{1/\alpha}$, on obtient que $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$, si $\boldsymbol{y} \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{x}, \delta(\epsilon))$ alors,

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\| \leqslant C\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^\alpha < C \times \frac{\epsilon}{C} < \epsilon. \tag{16}$$

2) On montre que f est α-höldérienne. Soient $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2)$ et $\boldsymbol{y} := (y_1, y_2)$ dans $[-1, 1]^2$; posons $a := |y_1 - y_2|$, $b := |x_1 - x_2|$. Alors

$$\begin{aligned}
|f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})| = \left|\sqrt{|y_1 - y_2|} - \sqrt{|x_1 - x_2|}\right| &\leqslant \sqrt{||y_1 - y_2| - |x_1 - x_2||} && (17)\\
&\leqslant \sqrt{|y_1 - y_2 - x_1 + x_2|} && (18)\\
&\leqslant \sqrt{|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|} && (19)\\
&= \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_1^{1/2}. && (20)
\end{aligned}$$

Par conséquent, f est $1/2$-höldérienne, donc uniformément continue.

Exercice 4.

Considérons l'espace $M(m, n)$ des matrices réelles de taille $m \times n$. Montrer que

1) $M(m, n)$ est un espace vectoriel (pour les opérations usuelles de somme des matrices et proportion par un scalaire) ;
2) l'application $\|\cdot\| : M(m, n) \to \mathbb{R}^+$, $\|A\| := \sup_{0\neq \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}$ est une norme [1] sur $M(m, n)$;
3) l'application $|||\cdot||| : M(m, n) \to \mathbb{R}^+$, $|||A||| := \sqrt{\sum_{i,j} A_{i,j}^2}$, définit aussi une norme [2] sur $M(m, n)$.
4) Trouver deux constantes strictement positives C_1, C_2 telles que, $\forall A \in M(m, n)$,

$$C_1\|A\| \leqslant |||A||| \leqslant C_2\|A\|. \tag{21}$$

Solution :

1) Il est immédiat vérifier les huit propriétés de la définition d'une norme (cf. cours).
2) Soit $A \in M(m, n)$. On a que $\|A\| \geqslant 0$, et

$$\|A\| = 0 \implies (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|A\boldsymbol{x}\|_2 = 0) \implies A = 0_{M(m,n)}. \tag{22}$$

Ensuite,

$$\|\lambda A\| = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|\lambda A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|\lambda|\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = |\lambda| \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = |\lambda|\|A\|. \tag{23}$$

1. Cette norme est appelée « norme spectrale ».
2. Cette norme est appelée « norme de Frobenius ».

Enfin,

$$\|A+B\| = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|(A+B)\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} \tag{24}$$

$$\leqslant \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2+\|B\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} \tag{25}$$

$$\leqslant \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} + \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|B\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} \tag{26}$$

$$= \|A\| + \|B\|. \tag{27}$$

3) Clairement, on a $|||A||| \geqslant 0$, $\forall A \in M(m,n)$. Ensuite

$$|||A||| = 0 \implies (\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!], A_{i,j} = 0) \implies A = 0_{M(m,n)}. \tag{28}$$

Pour la deuxième propriété, $|||\lambda A||| = \sqrt{\sum_{i,j} \lambda^2 A_{i,j}^2} = |\lambda| |||A|||$. Enfin, utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$|||A+B|||^2 = \sum_{i,j} (A_{i,j}+B_{i,j})^2 \tag{29}$$

$$= \sum_{i,j} A_{i,j}^2 + \sum_{i,j} B_{i,j}^2 + 2\sum_{i,j} A_{i,j}B_{i,j} \tag{30}$$

$$\leqslant \sum_{i,j} A_{i,j}^2 + \sum_{i,j} B_{i,j}^2 + 2\left(\sum_{i,j} A_{i,j}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i,j} B_{i,j}^2\right)^{1/2} \tag{31}$$

$$= (|||A||| + |||B|||)^2. \tag{32}$$

4) Soit $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in \mathbb{R}^n$, $(e_j)_{j=1}^n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(a_j)_{j=1}^n$ les colonnes de A. Alors, on a

$$\|A\boldsymbol{x}\|_2^2 = \left\|\sum_{j=1}^n x_j a_j\right\|_2^2 \leqslant \left(\sum_{j=1} |x_j| \|a_j\|_2\right)^2 \tag{33}$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1} x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n \|a_j\|_2^2\right) \tag{34}$$

$$= \|\boldsymbol{x}\|_2^2 \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m A_{i,j}^2\right) \tag{35}$$

$$= \|\boldsymbol{x}\|_2^2 |||A|||^2. \tag{36}$$

Donc, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $\frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} \leqslant |||A|||$, c'est-à-dire, $\|A\| \leqslant |||A|||$. De manière similaire,

$$|||A|||^2 = \sum_{i,j} A_{i,j}^2 = \sum_{j=1}^n \|a_j\|_2^2 = \sum_{j=1} \|Ae_j\|_2^2 \tag{37}$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\|Ae_j\|_2^2}{\|e_j\|_2^2} \tag{38}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^n \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2^2}{\|\boldsymbol{x}\|_2^2} = \sum_{j=1}^n \|A\|^2 = n\|A\|^2, \tag{39}$$

donc, $|||A||| \leqslant \sqrt{n}\|A\|$.