

# Analyse III

David Wiedemann

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Nombres Complexes</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Nombres Complexes</b>	<b>6</b>
3.1	Topologie sur $\mathbb{C}$ . . . . .	7
3.2	Echange de sommes . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Analyse Complexe</b>	<b>7</b>
4.1	Fonctions analytiques complexes . . . . .	7
4.2	Rayon de Convergence . . . . .	8
4.3	Analyticite et recentrage . . . . .	9
4.4	Zeros isolés . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Fonctions exp, log, sin, cos, sinh, cosh</b>	<b>11</b>
5.1	exp . . . . .	11
5.2	Logarithme . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Fonctions holomorphes</b>	<b>14</b>
6.1	Analytique $\Rightarrow$ Holomorphe . . . . .	15
<b>7</b>	<b>Integration Complexe</b>	<b>16</b>
<b>8</b>	<b>Holomorphie et deformation de Contours</b>	<b>18</b>
8.1	Integration sur un petit carre . . . . .	19
8.2	Deformations . . . . .	19
8.3	Existence de primitives holomorphes . . . . .	21
8.4	Indice d'un lacet . . . . .	22
8.5	log et racines . . . . .	23
<b>9</b>	<b>Formule de Cauchy</b>	<b>24</b>
9.1	Applications de Morera . . . . .	26
<b>10</b>	<b>Applications de la formule de Cauchy</b>	<b>26</b>

<b>11 Singularites</b>	<b>30</b>
11.1 Series de Laurent . . . . .	30
11.2 Singularites . . . . .	32
<b>12 Fonctions Meromorphes</b>	<b>33</b>
12.1 Zeros, poles et derivees logarithmique . . . . .	33
12.2 Sphere de Riemann . . . . .	34
<b>13 Theoreme des residus</b>	<b>34</b>
13.1 Calcul des residus . . . . .	36
13.2 2 classes d'integrales souvent calculables par des residus . . . . .	36
<b>14 Applications conformes</b>	<b>41</b>
14.1 Applications conformes de $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ . . . . .	42
<b>15 Fonctions Elliptiques</b>	<b>44</b>
15.1 Fonctions Elliptiques . . . . .	46
<b>16 Analyse Vectorielle</b>	<b>47</b>
16.1 Integrales curvilignes et circulation . . . . .	47
16.2 Rotationnel . . . . .	48
16.3 Formule de Green-Riemann et Kelvin-Stokes . . . . .	49

## List of Theorems

1	Theorème (de la fonction inverse) . . . . .	6
2	Theorème (de la fonction implicite) . . . . .	6
4	Theorème (fondamental de l'algebre) . . . . .	7
5	Corollaire . . . . .	7
1	Definition (Serie entiere) . . . . .	8
2	Definition (Convergence de series entieres) . . . . .	8
3	Definition (Convergence uniforme) . . . . .	8
4	Definition (Convergence d'une suite de fonctions) . . . . .	8
6	Lemme . . . . .	8
5	Definition (Rayon de convergence) . . . . .	8
7	Lemme . . . . .	8
8	Lemme . . . . .	8
9	Lemme . . . . .	8
10	Lemme . . . . .	9
6	Definition . . . . .	9
11	Lemme (Lemme de recentrage) . . . . .	9
12	Proposition . . . . .	10
13	Corollaire . . . . .	10

14	Corollaire . . . . .	11
7	Definition (Exponentielle) . . . . .	11
8	Definition . . . . .	13
16	Proposition . . . . .	13
9	Definition (Fonction Holomorphe) . . . . .	14
10	Definition . . . . .	15
17	Proposition . . . . .	15
11	Definition . . . . .	15
18	Proposition . . . . .	15
19	Corollaire . . . . .	16
12	Definition (Operateurs de Wirtinger) . . . . .	16
13	Definition (Chemin) . . . . .	16
14	Definition . . . . .	17
15	Definition (Longueur) . . . . .	17
16	Definition (Lacet) . . . . .	17
21	Proposition (Integration par parties) . . . . .	18
22	Proposition . . . . .	18
17	Definition (Homotopie) . . . . .	19
18	Definition (Contractable) . . . . .	20
19	Definition . . . . .	20
23	Proposition . . . . .	20
24	Proposition . . . . .	20
25	Theorème . . . . .	21
26	Corollaire . . . . .	21
20	Definition . . . . .	21
21	Definition . . . . .	21
27	Theorème . . . . .	22
28	Corollaire . . . . .	22
30	Proposition . . . . .	22
31	Theorème . . . . .	23
32	Proposition . . . . .	23
33	Proposition . . . . .	24
35	Theorème (Formule de Cauchy) . . . . .	24
36	Corollaire . . . . .	25
37	Theorème . . . . .	25
38	Theorème (Morera) . . . . .	26
39	Theorème . . . . .	26
40	Corollaire . . . . .	26
41	Theorème (Inegalites de Cauchy) . . . . .	27
42	Theorème (Formule de Parseval) . . . . .	27
43	Theorème (Principe du maximum) . . . . .	27

44	Theorème (Theoreme de Liouville) . . . . .	28
45	Proposition . . . . .	28
46	Theorème (Theoreme de l'application ouverte) . . . . .	28
47	Proposition (Limite de fonctions holomorphes) . . . . .	29
48	Proposition (Formule de Cauchy sur l'anneau) . . . . .	30
49	Theorème (Formule de Cauchy generalisee) . . . . .	30
50	Theorème (Developpement en serie de Laurent) . . . . .	31
51	Corollaire . . . . .	32
22	Definition . . . . .	32
23	Definition (Valuation) . . . . .	32
53	Theorème (Casorati-Weierstrass) . . . . .	32
24	Definition . . . . .	33
54	Lemme . . . . .	33
56	Lemme . . . . .	34
57	Proposition . . . . .	34
58	Theorème (Theoreme des Residus) . . . . .	35
59	Lemme . . . . .	35
60	Corollaire . . . . .	36
61	Corollaire . . . . .	36
62	Corollaire (Comptage des zeros) . . . . .	36
64	Lemme . . . . .	36
65	Proposition . . . . .	37
67	Proposition . . . . .	37
68	Theorème (Theoreme des nombres premiers) . . . . .	37
69	Lemme (0) . . . . .	38
70	Lemme (1) . . . . .	38
71	Lemme (2) . . . . .	38
72	Lemme (3) . . . . .	38
73	Lemme (4) . . . . .	39
74	Lemme (5) . . . . .	39
75	Lemme (6) . . . . .	39
76	Lemme . . . . .	40
25	Definition (Transformee de Laplace) . . . . .	41
77	Theorème . . . . .	41
26	Definition (Fonction Holomorphe) . . . . .	41
78	Theorème . . . . .	42
79	Lemme . . . . .	42
80	Lemme . . . . .	43
27	Definition (Famille Normale) . . . . .	43
81	Proposition . . . . .	44
28	Definition . . . . .	44

82	Proposition . . . . .	45
83	Proposition . . . . .	46
29	Definition (Fonction de Weierstrass) . . . . .	46
84	Proposition . . . . .	46
30	Definition . . . . .	47
31	Definition (Integrale curviligne) . . . . .	47
32	Definition (Circulation) . . . . .	47
33	Definition (Gradient) . . . . .	47
87	Proposition . . . . .	48
88	Proposition . . . . .	48
89	Proposition . . . . .	49
90	Corollaire . . . . .	49
92	Proposition . . . . .	49
93	Theorème (Green-Riemann) . . . . .	49

## 1 Rappels

**Theorème 1 (de la fonction inverse)**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  tel que  $Df|_x$  est inversible. Alors il existe un voisinage  $V$  de  $x$ , un voisinage  $W$  de  $f(x)$  tel que  $f$  est une bijection de  $V$  à  $W$  et dont l'inverse est aussi dérivable. De plus  $Df^{-1}|_{f(x)} = (Df|_x)^{-1}$

**Theorème 2 (de la fonction implicite)**

Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $W \subset \mathbb{R}^p$  et  $f : U \times W \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction  $C^1$  et  $(x, z) \in U \times W$  tel que

$$Df|_{(x,z)} = [D_x f|_{(x,z)} | D_z f|_{(x,z)}]$$

est telle que  $D_x f|_{(x,z)}$  est inversible.

Alors si  $f(x, z) = 0$ , il existe un voisinage  $Z$  de  $z$  et une fonction  $g : Z \rightarrow V$  tel que  $f(g(\tilde{z}), \tilde{z}) = 0$  et

$$Dg|_z = -(D_x f|_{(x,z)})^{-1} D_z f|_{(x,z)}$$

## 2 Nombres Complexes

De même que  $\mathbb{R}$  est obtenu à partir de  $\mathbb{Q}$  en faisant une opération de complétion (topologique).

$\mathbb{C}$  est obtenu à partir de  $\mathbb{R}$  en faisant une opération de complétion algébrique ; on requiert simplement qu'il existe une solution à  $x^2 + 1 = 0$ .

## Lecture 2: Intro Complexes

## 3 Nombres Complexes

Si on veut étendre  $\mathbb{R}$  en un corps qui contienne  $i$ , on obtient  $\mathbb{C}$ .

On perd la relation d'ordre sur les complexes.

Géométriquement, on représente les nombres complexes dans le plan.

**Remarque**

L'argument d'un nombre complexe n'est défini que modulo  $2\pi$ .

La représentation polaire est particulièrement pertinente pour la multiplication

$$|zw| = |z||w| \text{ et } \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

Ce sera prouvé de manière élégante plus tard, mais on pourrait le vérifier avec les formules trigonométriques.

C'est consistant avec la notation  $z = re^{i\theta}$ . Un choix frequent pour  $\theta$  est de definir  $\arg$  sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  en le prenant dans  $(-\pi, \pi)$ .

### Solutions de $z^n = w$

pour  $n \in \mathbb{N}^*, w \in \mathbb{C}^*$ , il existe  $n$  solutions

$$\left\{ |\omega|^{\frac{1}{n}} e^{i(\arg(w) + 2k\pi)/n} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

## 3.1 Topologie sur $\mathbb{C}$

Comme en analyse reelle, l'outil principal est  $|\cdot|$  complexe.

Les objets de choix pour parler de convergence sont  $(x-r, x+r)$  et  $[x-r, x+r]$  sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$  leurs analogues sont  $D(z, r) = \{\omega \in \mathbb{C} \mid |z - \omega| < r\}$ .

On a  $\partial D(z, r) = \overline{D}(z, r) \setminus D(z, r)$  est le cercle de rayon  $r$  centre en  $z$ .

Un ensemble  $U \subset \mathbb{C}$  est dit ouvert si  $\forall z \in U \exists \delta > 0$  tel que  $D(z, \delta) \subset U$ .

Un domaine est un ouvert connexe.

## 3.2 Echange de sommes

— Sur  $\mathbb{R}$ , si  $a_{n,m} \geq 0$  on peut toujours dire

$$\sum_n \sum_m a_{n,m} = \sum_m \sum_n a_{n,m}$$

— Idem si la somme converge absolument.

### Theorème 4 (fondamental de l'algebre)

Si  $P$  est un polynome de degre  $\geq 1$ , alors  $\exists z \in \mathbb{C}$  tel que  $P(z) = 0$

### Corollaire 5

Tous les polynomes peuvent etre factorise.

# 4 Analyse Complexe

## 4.1 Fonctions analytiques complexes

But : aller plus loin que les polynomes.

On considere des series entieres

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_*)^n$$

Les fonctions analytiques sont les fonctions definies par des series entieres convergentes.

**Definition 1 (Serie entiere)**

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$  une serie entiere centree en  $z_*$

**Definition 2 (Convergence de series entieres)**

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$  si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k(z - z_*)^k$  existe.

**Definition 3 (Convergence uniforme)**

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$  converge uniformement sur  $K \subset \mathbb{C}$  si elle converge sur  $K$  et si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{k=0}^n a_k(z - z_*)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_*)^k \right\|_{\infty, K} = 0$$

**Definition 4 (Convergence d'une suite de fonctions)**

Si  $f_k : K \rightarrow \mathbb{C}$  est une suite de fonctions tel que  $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty, K} < +\infty$ , on dit que  $\sum f_k$  converge normalement.

**Lemme 6**

La convergence normale implique la convergence uniforme.

**Lecture 3: fonctions complexes**

Thu 30 Sep

**4.2 Rayon de Convergence****Definition 5 (Rayon de convergence)**

Le rayon de convergence de  $\sum_n a_n(z - z_*)^n$  est

$$\rho = \sup \left\{ r \geq 0 : \sum a_n(z - z_*)^n \text{ converge sur } D(z^*, r) \right\}$$

On a  $\rho \in [0, \infty]$ .

Ou de maniere equivalent

$$\sup \left\{ r \geq 0 : \sum |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$$

**Lemme 7**

Si  $\sum a_n z^n$  a rayon de convergence  $\rho$ , alors la serie converge normalement sur  $D(0, \rho)$

**Lemme 8**

Si  $\limsup |a_k| \rho^k < \infty$ , alors le rayon de convergence est  $\geq \rho$ .

**Lemme 9**

Si

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$



converge quand  $k \rightarrow \infty$  alors  $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \rightarrow \rho^{-1}$

$$\rho^{-1} = \limsup (|a_n|)^{\frac{1}{n}}$$

#### Lemme 10

$\sum a_k z^k, \sum b_n z^n$  convergent, alors

$$\sum (a_k + b_k) z^k$$

converge et vaut  $\sum a_k z^k + \sum b_k z^k$ .

Et si on pose  $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ , alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

converge et vaut le produit.

### 4.3 Analyticite et recentrage

#### Definition 6

Si  $f$  est donnee par une serie entiere  $\sum a_n z^n$ .

On definit les series entieres "derivees" par

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

ou les series derivees ont le meme rayon de convergence que la serie de base car

$$\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup (n^k |a_n|)^{\frac{1}{n}}$$

#### Lemme 11 (Lemme de recentrage)

Soit  $f : D(0, r) \rightarrow \mathbb{C}$  donnee par  $\sum a_n z^n$  avec rayon de convergence  $r$ .

Soit  $z_* \in D(0, r)$ . On a que la serie

$$\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_*) (z - z_*)^n$$

converge avec rayon de convergence  $\geq r - |z_*|$  ou  $f^n$  est la derivee formelle de  $f$  definie ci-dessus.

#### Preuve

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum a_n z^n \\ &= \sum a_n (z - z_* + z_*)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (z - z_*)^k z_*^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} z_*^{n-k} (z - z_*)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!} n(n-1) \dots (n-k+1) z_*^{n-k} (z - z_*)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_*)}{k!} (z - z_*)^k
\end{aligned}$$

Si on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n 1_{k \leq n} |a_n| \binom{n}{k} |z_*^{n-k}| |z - z_*|^k < \infty \quad \square$$

or ceci converge car  $z_* \in D(0, r)$  en effet  $\exists \epsilon > 0$  tel que  $|z_*| + \epsilon < r$

#### 4.4 Zeros isolés

##### Proposition 12

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytique, non nulle, alors l'ensemble

$$\{z \in U : f(z) = 0\}$$

ne contient pas de points d'accumulation dans  $U$ .

##### Preuve

Supposons  $z_* \in U$  un point d'accumulation.

Par le lemme de recentrage  $\exists \epsilon > 0$  tel que  $f(z) = \sum a_n (z - z_*)^n$ .

Par hypothèse  $\exists m$  tel que  $a_m \neq 0$ .

Soit  $n$  le plus petit tel entier

$$f(z) = (z - z_*)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - z_*)^n \quad \square$$

Donc il existe un voisinage de  $z^*$  où  $f$  est continue (parce que la série converge uniformément sur les compacts).

#### Lecture 4: Series entieres suite

Mon 04 Oct

##### Corollaire 13

Une fonction analytique  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  a un unique développement en série entière au voisinage de chaque  $z_* \in U$ .

**Preuve**

Sans perte de généralité  $z_* = 0$ .

Si on a deux développements en série  $\sum a_n z^n$  et  $\sum \tilde{a}_n z^n$  qui définissent la même fonction, donc

$$\sum (a_n - \tilde{a}_n) z^n$$

s'annule au voisinage de 0, donc  $a_n = \tilde{a}_n$ . □

**Corollaire 14**

Soient  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytiques.

Si  $f$  et  $g$  coïncident sur un ensemble avec un point d'accumulation dans  $\Sigma$ , alors  $f(z) = g(z) \forall z \in \Sigma$ .

**Preuve**

Montrons d'abord que si  $z_*$  est un point d'accumulation de  $\Sigma$ , alors  $z_* \in \Sigma$  et  $\exists r > 0$  tel que  $\Sigma \ni D(z_*, r)$ .

On développe  $f - g$  en série au voisinage de  $z_*$  et on obtient une série nulle au voisinage de  $z_*$ .

Pour conclure que  $\Sigma = U$ , on utilise un argument de connexité.

Soit  $z' \in U$ , comme  $U$  est un domaine,  $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow U$  allant de  $z_* \in \Sigma$  à  $z'$ .

Soit  $s \geq 0$  défini par  $s = \sup \{S \geq 0 \mid f(\gamma(t)) = g(\gamma(t)) \forall t \in [0, S]\}$ .

Si on a que  $s = 1$ , on a fini.

Si on avait  $s < 1$ , on sait que  $s > 0$  car  $z_*$  est un point d'accumulation.  $\gamma(s)$  est donc un point d'accumulation de  $\Sigma$ , donc

$$\exists r > 0 \text{ tel que } f - g$$

s'annule sur  $D(\gamma(s), r)$  mais du coup on a que  $f(\gamma(t)) = g(\gamma(t))$  pour  $t \in [0, s]$ . □

## 5 Fonctions exp, log, sin, cos, sinh, cosh

### 5.1 exp

**Definition 7 (Exponentielle)**

$\exp(z)$  aussi noté  $e^z$  est la fonction analytique définie par

$$\sum \frac{z^n}{n!}$$

La propriété fondamentale est qu'elle transforme l'addition en multiplication

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$$

En effet

$$\exp(z + w) = \sum_n \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{n!} \binom{n}{k}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_n \sum_k 1_{k \leq n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^n}{n!} \\
&= \sum_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \frac{z^k}{k!} \\
&= \exp(w) \exp(z)
\end{aligned}$$

L'échange est justifié car la série converge absolument.

Car  $\exp > 0$ , et  $\exp' > 0$ ,  $\exp$  est strictement croissante sur  $[0, \infty)$  et de même (car  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ ), elle envoie  $(-\infty, 0]$  sur  $(0, 1]$  bijectivement.

Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on définit  $\cos(t) = \operatorname{Re}(\exp(it))$  et  $\sin(t) = \operatorname{Im}(\exp(it))$ .

Sur  $i\mathbb{R}$ , on a  $e^{\bar{it}} = e^{-it}$  (on regarde le développement en série), on en déduit

$$|e^{it}| = \sqrt{e^{it} e^{\bar{it}}} = \sqrt{1}$$

Et donc

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \text{ et } \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

On peut maintenant étendre ces définitions à tout  $z \in \mathbb{C}$ , en posant

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ et } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

De même, on pose

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \text{ et } \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

**exp sur  $i\mathbb{R}$**

$$\mathbb{R} \rightarrow S^1 \quad t \mapsto e^{it} := \cos t + i \sin t$$

Comme on a le développement en série de  $\sin$  et  $\cos$ , on a

$$\sin' t = \cos t \text{ et } \cos'(t) = -\sin(t)$$

On sait donc qu'il existe un point  $t^*$  tel que  $\cos(t^*) = 0$  (sinon  $\cos$  serait borné inférieurement, et  $\sin$  grandirait à l'infini).

$\exp$  est périodique dans la direction imaginaire, montrons que  $2\pi$  est la plus petite période possible, c'est-à-dire que  $\forall t \in (0, 2\pi)$ .

Pour cela, notons que sur  $(0, \frac{\pi}{2})$   $\cos$  et  $\sin$  sont strictement positifs.

Posons  $t = 4s, s \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$e^{it} = (e^{is})^4 = (u + iv)^4, u, v > 0$$

Donc

$$e^{it} = (u + iv)^4 = u^4 + v^4 - 6u^2v^2 + 4i(u^2 - v^2)$$

Si on veut  $e^{it} = 0$ , alors  $u^2 - v^2 = 0 \Rightarrow u^2 = v^2$  donc  $u^2 = v^2 = 1$ , mais alors

$$u^4 + v^4 - 6u^2v^2 \neq 0$$

Contradiction

## Lecture 5: ...

Thu 07 Oct

### 5.2 Logarithme

Moralement, on aimerait définir le logarithme comme "l'inverse" de l'exponentielle.

Dans les reel, c'est ainsi qu'on avait procede, mais la difference, c'était que la fonction exponentielle etait bijective.

Ici, on a que la fonction exponentielle  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  est surjective.

Du coup on aurait envie de définir le log sur  $\mathbb{C}^*$ , mais la fonction exponentielle n'est pas injective.

En fait, cela fait qu'on ne peut pas définir une fonction log qui soit continue sur  $\mathbb{C}^*$ . Si on essaie de poser

$$\begin{aligned}\log \exp(a + ib) &= a + ib \\ \log e^a e^{ib} &= \log |w| + i \arg w\end{aligned}$$

Comment choisir  $\arg w$ .

#### Definition 8

*Une determination du logarithme est une fonction*

$$L : U \rightarrow \mathbb{C}$$

*ou  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$  tel que  $e^{L(z)} = z$*

#### Remarque

*Sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ , on a une determination de l'argument et du log :  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ , on prend  $\arg w$  dans  $(-\pi, \pi)$ .*

#### Proposition 16

*Il n'existe pas de determination continue du logarithme sur  $\mathbb{C}^*$*

#### Preuve

*Tous les problemes viennent du fait qu'on fait un tour autour de l'origine.*

*Montrons qu'il n'en existe pas sur  $\mathbb{S}^1$ .*

*Supposons qu'on ait une telle determination du log.*

*Posons  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definie par  $u^\theta = f(e^{i\theta})$ . On a  $u(\theta) - \theta = 2\pi i n\theta$  puisque*

$$e^{u(\theta)} - \theta$$

Donc

$$\operatorname{Im} u(\theta) = \arg(e^{i\theta}) + 2\pi\mathbb{Z}$$

Cependant

$$u(\theta + 2\pi) = \theta + 2\pi + n = u(\theta) \quad \square$$

## 6 Fonctions holomorphes

On souhaite generaliser la notion de derivee aux fonctions complexes.

Une possibilite est de voir le plan  $\mathbb{R}^2$  et en utilisant les notions de calcul differentiel sur  $\mathbb{R}^2$

La notion d'holomorphic, c'est celle d'etre derivable au sens d'une variable complexe, et on verra que c'est une notion beaucoup plus forte que celle d'etre differentiable au sens de  $\mathbb{R}^2$ , mais suffisamment naturelle pour etre verifiee dans beaucoup de cas

### Definition 9 (Fonction Holomorphe)

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ou  $U$  est un domaine de  $\mathbb{C}$ . On dit que  $f$  est holomorphe en  $z \in U$  s'il existe une limite notee  $f'(z) \in \mathbb{C}$  si la limite suivante existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

ou la limite est prise au sens complexe.

Formellement, cela veut dire  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tel que si  $h \in D(0, \delta) \setminus \{0\}$  on a

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| \leq \epsilon$$

Une autre maniere d'ecrire cela

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(h)$$

ou  $o(h)$  est telle que  $|o(h)/h| \rightarrow 0$ .

Comment comprendre ca en termes de derivees partielles en faisant l'identification  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$  ?

Dire que la fonction a un developpement de Taylor au 1er ordre pour une fonction  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \\ f_2(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_1, x_2) & \partial_2 f_1(x_1, x_2) \\ \partial_1 f_2(x_1, x_2) & \partial_2 f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(h_1, h_2)$$

Donc la matrice  $Df_{x_1, x_2}$  doit etre la matrice de la composition d'une rotation et d'une homothetie. Donc la contrainte d'etre differentiable au sens complexe est

equivalence a celle de demander d'être différentiable au sens de deux variables réelles et d'avoir que la jacobienne soit de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

donc

$$\partial_1 \operatorname{Re} f = \partial_2 \operatorname{Im} f \text{ et } \partial_1 \operatorname{Im} f = -\partial_2 \operatorname{Re} f$$

### Definition 10

On dit que  $f$  satisfait les équations de Cauchy-Riemann si

$$\partial_1 \operatorname{Re} f = \partial_2 \operatorname{Im} f \text{ et } \partial_1 \operatorname{Im} f = -\partial_2 \operatorname{Re} f$$

### Proposition 17

$f$  est holomorphe en  $z = x_1 + ix_2 \iff f$  est dérivable au sens de  $\mathbb{R}^2$  et satisfait les équations de Cauchy-Riemann.

### Definition 11

On dit que  $f$  est holomorphe sur un ouvert  $U \subset \mathbb{C}$  si elle est  $C^1$  (au sens de  $\mathbb{R}^2$ ) et qu'elle est holomorphe en tout point de  $U$

## 6.1 Analytique $\Rightarrow$ Holomorphe

### Proposition 18

Si

$$f(z) = \sum a_k (z - z_*)^k$$

avec comme rayon de convergence  $\rho$ , alors  $f$  est holomorphe sur  $D(z_*, \rho)$  et  $f'$  est donnée par la série entière

$$f'(z) = \sum k a_k (z - z_*)^{k-1}$$

qui a aussi comme rayon de convergence  $\rho$ .

### Preuve

La série qui donne la dérivée converge avec rayon de convergence  $\rho$ . Maintenant, ce qu'il nous faut, c'est de montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z) - hf'(z)}{h} = 0$$

Supposons  $z_* = 0$ .

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k (z+h)^k - a_k z^k}{h} - hf'(z) \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k[(z+h)^k - z^k - khz^{k-1}]}{h} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k[h[(z+h^{k-1}) + (z+h)^{k-2} + \dots + z^{k-1}]] - khz^{k-1}}{h} \end{aligned}$$

On va montrer que  $\forall \epsilon > 0$ , on peut rendre la queue de la serie plus petite que  $\frac{\epsilon}{2}$  en allant assez loin dans la serie et qu'ensuite, pour le  $N$  fixe qui sortira, on pourra prendre  $h$  assez petit pour que les  $N$  premieres termes soient plus petits que  $\frac{\epsilon}{2}$ .

Notons que pour  $mh$  suffisamment petit ( il existe  $\delta_1 > 0$  tel que si  $h \in D(0, \delta_1), z+h \in D(0, \rho)$  ) et du coup on aura la convergence de

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k[|z+h|^{k-1} + \dots + |z|^{k-1}] + k|z|^{k-1}]$$

vu que

$$[|z+h|^{k-1} + \dots] \leq k(|z| + |h|)^k \quad \square$$

## Lecture 6: ...

Mon 11 Oct

### Corollaire 19

Si  $f$  est analytique,  $f$  est infiniment derivable au sens complexe.

### Preuve

$f'$  est analytique, donc holomorphe, avec deriivee  $f''$ , elle meme aussi analytique  $\square$

### Definition 12 (Operateurs de Wirtinger)

Pour  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $C^1$  vue comme  $f : S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ .

On note

$$\partial_z f = \partial f = \frac{1}{2} (\partial_x - i\partial_y)$$

et

$$\partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2} (\partial_x + i\partial_y)$$

## 7 Integration Complexe

But : Trouver l'operation "inverse" de la derivation complexe.

### Definition 13 (Chemin)

Un chemin de  $a$  a  $b$  dans  $U \subset \mathbb{C}$  est une fonction continue  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$   $C^1$  par morceaux, avec deriivee bornee, avec  $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$



**Definition 14**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  continue et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  un chemin.

On définit

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

**Remarque**

L'intégrale complexe  $\int_{\gamma} f(z)dz$  dépend en général du chemin de  $\gamma$  mais pas de sa paramétrisation.

Si  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est bijective, croissante, dérivable sur  $(0, 1)$  et  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$  alors

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz$$

**Preuve**

Formule de changement de variable.

En supposant  $\gamma$   $C^1$  (pas par morceaux)

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt &= \int_0^1 f(\gamma(\phi(s)))\gamma'(\phi(s))\phi'(s)ds \\ &= \int_0^1 f(\tilde{\gamma})\tilde{\gamma}'(s)ds \end{aligned}$$

□

**Definition 15 (Longueur)**

Pour  $\gamma$  un chemin, sa longueur est donnée par

$$l(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|dt$$

**Definition 16 (Lacet)**

Si  $\gamma(0) = \gamma(1)$ ,  $\gamma$  est un lacet.

**Propriété de l'intégration complexe**

— Si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  et  $\ominus\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  est défini par  $\ominus\gamma(s) = \gamma(1 - s)$

$$\int_{\ominus\gamma} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz$$

— Si  $\gamma, \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U$  avec  $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(0)$ , alors

$$\gamma \oplus \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U$$

est défini par

$$\gamma \oplus \tilde{\gamma}(s) = \begin{cases} \gamma(2s) & \text{si } s \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{\gamma}(2s - 1) & \text{si } s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

et on a

$$\int_{\gamma \oplus \tilde{\gamma}} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz$$

— Si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe

$$\int_{\gamma} f'(\zeta) d\zeta = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

## Lecture 7: Integration Complexe

Thu 14 Oct

### Preuve

Considerons la fonction

$$t \mapsto f'(\gamma(t))\gamma'(t)$$

est la dérivée (au sens réel) de

$$t \mapsto f(\gamma(t))$$

et on peut donc y appliquer le théorème fondamental du CDI.  $\square$

### Proposition 21 (Integration par parties)

Soient  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphes et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  un chemin, alors

$$\int_{\gamma} f'g = f(\gamma(x))g(\gamma(x))\Big|_0^1 - \int_{\gamma} fg'$$

### Preuve

$$(fg)' = f'g + fg'$$

et on intègre.  $\square$

### Proposition 22

Si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  continue,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ , alors

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq l(\gamma) \max_{\gamma} |f(z)|$$

### Preuve

Suit de

$$\int_0^1 g(t) dt \leq \max g$$

pour les intégrales réelles.  $\square$

## 8 Holomorphie et déformation de Contours

But : Savoir dans quelle mesure

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

depend de  $\gamma$ . L'astuce est de deformer progressivement le chemin.

Si  $\gamma, \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U$  avec  $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$  et  $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$ , on a que  $\gamma \ominus \tilde{\gamma}$  est un lacet.

## 8.1 Integration sur un petit carre

Si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est  $C^1$ , avec  $\partial Q(z, \epsilon) \subset U$ .

Calculons

$$\oint_{\partial Q(z, \epsilon)} f(z) dz = \left( \int_b + \int_d + \int_g + \int_h \right) (f(z) dz)$$

On va supposer  $z = 0$

$$\begin{aligned} b(t) &= -\frac{\epsilon}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\epsilon \\ d(t) &= \frac{\epsilon}{2} + i\left(t - \frac{1}{2}\right)\epsilon \\ h(t) &= \frac{i\epsilon}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\epsilon \\ g(t) &= \frac{\epsilon}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\epsilon \end{aligned}$$

Donc

$$\int_b f(z) dz = \int_0^1 f\left(\frac{\epsilon i}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\epsilon\right) \epsilon dt$$

et

$$\int_d f(z) dz = \int_0^1 f\left(\frac{\epsilon}{2} + i\left(t - \frac{1}{2}\right)\epsilon\right) \epsilon dt$$

Comme  $f$  est  $C^1$

$$f\left(-\frac{i\epsilon}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\epsilon\right) = f(0) - \frac{\epsilon}{2} \partial_x f(0) + \left(t - \frac{1}{2}\right)\epsilon \partial_y f(0) + o(\epsilon)$$

Si on somme les 4 termes multiplie par leur facteur, on obtient  $\epsilon^2(i\partial_1 f(0) - \partial_2 f(0)) + o(\epsilon^2)$ .

Si on integre sur un carre de cote 1, le nombre de carres est d'ordre  $\frac{1}{\epsilon^2}$ , si  $f$  est holomorphe, la somme sur ces contributions tend vers 0.

## 8.2 Deformations

On a envie de montrer que pour une deformation locale d'un contour qui ne change pas les extremités, l'integrale de contour de  $f$  holomorphe ne change pas.

### Definition 17 (Homotopie)

Un lacet  $\gamma$  est dit homotope a un autre lacet  $\tilde{\gamma}$  s'il existe une fonction

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$$

tel que  $f(\cdot, 0) = \gamma, F(\cdot, 1) = \tilde{\gamma}$

et  $\forall s \in [0, 1], F(\cdot, s)$  est un lacet.

**Definition 18 (Contractable)**

Un lacet est contractible s'il est homotope au lacet trivial.

**Definition 19**

Un ouvert est dit simplement connexe si tout lacet dans  $U$  est contractible, et il est dit étoile par rapport à  $z^* \in U$  si  $\forall w \in U$  le segment  $[z^*, w] \in U$

## Lecture 8: Integration complexe suite

Mon 18 Oct

**Proposition 23**

$U$  étoile  $\Rightarrow U$  simplement connexe

**Preuve**

On prend l'homotopie de retraction  $\Gamma(s, t) = sz_* + (1 - s)\gamma(t) \in U$  □

**Proposition 24**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe et  $\gamma$  un contour contractible tel que  $\Gamma(s, t) = sz_* + (1 - s)\gamma(t) \in U$ .

Alors  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$

**Preuve**

Posons  $I(s) = \int_{\gamma_s} f(z)dz$ .

On a

$$I(0) = \int_{\gamma} f(z)dz \quad I(1) = 0$$

Calculons  $\frac{\partial}{\partial s} I(s) = \int_0^1 f((1 - s)\gamma(t) + sz_*)(1 - s)\gamma'(t)dt$ .

En permutant, on trouve

$$\begin{aligned} &= - \int_0^1 f((1 - s)\gamma(t) + sz_*)\gamma'(t)dt \\ &+ (1 - s) \int_0^1 f'((1 - s)\gamma(t) + sz_*)(-\gamma(t) + z_*)\gamma'(t)dt \\ &= - \int_{\gamma} g_s(z)dz + \int_{\gamma} g'_s(z)(z_* - z)dz \\ &= - \int_{\gamma} g_s(z)dz - \int_{\gamma} g_s(z)dz = 0 \end{aligned}$$

Avec

$$g_s(z) = f((1 - s)z + sz_*)$$

et

$$g'_s(z) = f'((1 - s)z + sz_*)(1 - s) \quad \square$$

**Theorème 25**

Soit  $f$  une courbe holomorphe et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  un contour contractible dans  $U$  alors

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

**Preuve**

On peut écrire  $\int_{\gamma} f(z)dz$  comme

$$\sum_i \int_{\gamma_i} f(z)dz$$

ou les  $\gamma_i$  sont retractables. □

**Corollaire 26**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe et  $\gamma, \tilde{\gamma}$  deux contours avec memes extremités homotopes.

**Preuve**

$\gamma \ominus \tilde{\gamma}$  est contractible. □

**8.3 Existence de primitives holomorphes**

On a déjà vu que  $\int_{\gamma} f'(z)dz = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$  et donc pour un lacet  $\int_{\gamma} f'(z)dz = 0$ .

Est-ce que si  $\int_{\gamma} f'(z)dz = 0$  pour tout  $\gamma$ , alors  $f = F'$  pour  $F$  holomorphe.

**Definition 20**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. On dit que  $f$  a une primitive holomorphe  $F$  si  $F' = f$ .

Comment construire  $F$ , si elle existe ?

On aimerait prendre  $z_* \in U$  et poser  $F(z) = \int_{z_*}^z f(\zeta)d\zeta$ , mais pour que ca soit bien défini, il faut que l'intégrale ne dépende pas du choix du chemin de  $z_*$  à  $z$ . Cela motive la définition suivante : On dit que  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  continue satisfait la condition de Morera si pour tout lacet  $\gamma : \int_{\gamma} f(z)dz = 0$ .

**Definition 21**

Si  $f$  satisfait la condition de Morera, on définit

$$\int_{z_*}^z f(\zeta)d\zeta$$

comme la valeur commune de  $\int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta$ .

**Theorème 27**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  continue. Alors  $f$  a une primitive holomorphe si et seulement si  $f$  satisfait la condition de Morera.

**Preuve**

Si  $f$  a une primitive holomorphe, alors  $\int_{\gamma} F' = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0$  pour tout lacet  $\gamma$ .

Posons  $z_* \in U$  et  $F(z) = \int_{z_*}^z f(\zeta) d\zeta$ , montrons que

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} \rightarrow f(z)$$

On a

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta$$

On a

$$\frac{F(z+h) - F(z) - hf(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta$$

En choisissant  $\gamma(t) = z + th$ , on a

$$\leq \left| \frac{F(z+h) - F(z) - hf(z)}{h} \right| \leq \frac{1}{|h|} l(\gamma) \max_{\zeta \in [z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)| \rightarrow 0$$

**Corollaire 28**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe avec  $U$  simplement connexe. Alors  $f$  a une primitive holomorphe.

**Preuve**

Comme tout lacet  $\gamma$  est contractible,  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  □

**Remarque**

On aimerait définir  $\log$  comme  $\int_1^z \frac{1}{\zeta} d\zeta$  mais ce n'est pas possible sur  $\mathbb{C}^*$

**8.4 Indice d'un lacet**

L'indice d'un lacet autour d'un point.

Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  un lacet et soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Im } \gamma$ , on définit l'indice  $\text{Ind}(\gamma, z)$  comme

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

**Proposition 30**

$\text{Ind}(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$

## Lecture 9: ...

Thu 21 Oct

### Theorème 31

$$\text{Ind}(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$$

### Preuve

Montrons que

$$\exp\left(\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}\right) = 1$$

Posons  $\phi(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds\right)$

On a donc

$$\partial_t \log \phi(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$$

De meme

$$\partial_t \log(\gamma(t) - z) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$$

Donc

$$\partial_t \log\left(\frac{\phi(t)}{\gamma(t) - z}\right) = 0$$

Si  $\gamma$  n'est pas derivable sur un ensemble  $S \subset [0, 1]$  fini, la conclusion est la meme car si  $f'(t) = 0 \forall t \in [0, 1] \setminus S$  35  $S$  fini,  $f$  constante.  $\square$

## 8.5 log et racines

### Proposition 32

Soit  $U$  un domaine simplement connexe qui ne contient pas 0 et  $z_* \in U$  et  $W_*$  tel que  $e^{W_*} = z_*$ .

Alors la fonction  $L : U \rightarrow \mathbb{C}$  definie par

$$L(z) = W_* + \int_{z_*}^z \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

est telle que

$$\exp(L(z)) = z \forall z \in U$$

### Preuve

En  $z_*$ , c'est bon.

On va essayer de montrer que sur un petit voisinage de  $W_*$ ,  $L \circ \exp = \text{Id}$ .

On a

$$(L(e^z))' = \frac{1}{e^z} e^z = 1$$

Si  $w$  est dans un petit voisinage de  $W_*$ .

Donc,

$$\exp(L(\exp(w))) = \exp(w)$$

Comme  $\exp$  est bijective dans un petit voisinage de  $W_*$ , on a  $\exp \circ \log = \text{Id}$ .  
 Dans la section suivante, on verra que holomorphe implique analytique et le principe des zeros isolés s'applique donc à la fonction  $\exp \circ \log - \text{Id} = 0$   $\square$

Avec un  $\log$  on peut définir des racines.

Soit  $U$  simplement connexe qui ne contient pas 0, alors pour tout  $n$ , il existe  $n$  fonctions holomorphes  $r_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  tel que

$$(r_n)^n(z) = z$$

### Preuve

Prendre  $\exp \frac{1}{n} L(z)$   $\square$

### Proposition 33

Soit  $U$  simplement connexe et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , avec  $f(z) \neq 0 \forall z$ , alors il existe  $L_f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe tel que

$$\exp(L_f) = f(z)$$

et soit  $z_* \in U$  et  $l_*$  tel que  $e^{l_*} = z_*$

### Preuve

On pose

$$L_f(z) = l_* + \int_{z_*}^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$$

$\square$

### Remarque

Cela couvre des cas où  $f(U)$  pourrait ne pas être simplement connexe.

## Lecture 10: ...

Mon 25 Oct

## 9 Formule de Cauchy

Donne les valeurs d'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un lacet en terme des valeurs sur le lacet.

### Theorème 35 (Formule de Cauchy)

Soit  $f : D(z, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe.

Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D(z, \rho)$  un lacet homotope dans  $D(z, \rho) \setminus \{z\}$  à  $\partial D(z, \epsilon)$  pour  $\epsilon > 0$ , orienté dans le sens trigonométrique.

Alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$



**Corollaire 36**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe et  $\gamma$  un lacet homotope dans  $U \setminus z$  à  $\partial D(z, \epsilon)$  dans  $z \in U$ , alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

**Preuve**

Par hypothèse sur  $\gamma$  et par holomorphie de  $f$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z, \epsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

pour tout  $\epsilon \in (0, \rho)$ .

Faisons tendre  $\epsilon \rightarrow 0$ , on utilise

$$f(\zeta) = f(z) + f'(z)(\zeta - z) + o(\zeta - z)$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z, \epsilon)} \frac{f(z) + f'(z)(\zeta - z) + o(\zeta - z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= f(z) + f'(z) \oint 1 d\zeta + \oint o(1) d\zeta \\ &= f(z) + 0 + o(\epsilon) \end{aligned}$$

**Conséquences***1. Analyticité***Théorème 37**

Soit  $f : D(z_*, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe, alors  $f$  est analytique, donnée par

$$f(z) = \sum a_n (z - z_*)^n$$

de rayon de convergence  $\geq \rho$  avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_*)^{n+1}} d\zeta$$

**Preuve**

Supposons  $z_* = 0$ , on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Comme

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta^n} z^n$$

On a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D(0,\rho)} \sum \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right) z^n \end{aligned} \quad \square$$

2. Ainsi,  $f$  holomorphe implique  $f'$  holomorphe.

**Theorème 38 (Morera)**

Si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  continue satisfait  $\forall \gamma$  contractible

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Alors  $f$  est analytique.

**Preuve**

Soit  $z_* \in U$  et  $\epsilon > 0$  tq  $D(z_*, \epsilon) \subset U$ .

Comme tout lacet est contractible dans  $D(z_*, \epsilon)$ , et ainsi  $f$  analytique. La condition de Morera dans  $D(z, \epsilon)$  est satisfaite.  $\square$

## Lecture 11: Liouville

Thu 28 Oct

### 9.1 Applications de Morera

**Theorème 39**

Soit  $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur tous les compacts de  $U$  vers  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ .

Alors  $f$  est holomorphe.

**Preuve**

$f$  est continue, et pour tout  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  contractible ( dans  $U$  ), on a

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma} f_n(z) dz$$

car  $\gamma$  est compact.  $\square$

**Corollaire 40**

Si  $\sum f_n$  avec  $f_n$  holomorphe et pour tout compact  $\sum \|f_n\|_{\infty}$  converge, alors la série converge vers une fonction holomorphe.

## 10 Applications de la formule de Cauchy

**Theorème 41 (Inegalites de Cauchy)**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe,  $z \in U$  et  $r > 0$  tel que  $\overline{D}(z, r) \subset U$  et soit  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta - z)^n$  le developpement de  $f$  en  $z$ .

Alors

$$|a_n| \leq r^{-n} \max_{\zeta \in \partial D(z, r)} |f(\zeta)|$$

**Preuve**

Par la formule de Cauchy, on a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \\ |a_n| &\leq \left| \frac{1}{2\pi i} \mathcal{L}(\partial D(z, r)) \right| \max_{\zeta \in \partial D(z, r)} \frac{|f(\zeta)|}{(\zeta - z)^{n+1}} \\ &= r^{-n} \max_{\zeta \in \partial D(z, r)} |f(\zeta)| \end{aligned} \quad \square$$

**Theorème 42 (Formule de Parseval)**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe,  $z \in U$  et  $r > 0$  tel que  $\overline{D}(z, r) \subset U$ .

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta} + z)|^2 d\theta$$

**Preuve**

Supposons  $z = 0$ .

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \\ \overline{f}(re^{i\theta}) &= \sum_{n=0}^{\infty} r \overline{a_n} e^{-in\theta} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2(re^{i\theta}) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n,m} r^{n+m} a_n \overline{a_m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\ &= \sum r^{2n} |a_n|^2 \end{aligned} \quad \square$$

**Theorème 43 (Principe du maximum)**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe et  $z \in U$ .

Alors si  $|f|$  atteint un max local en  $z$ ,  $f$  est constante.

**Preuve**

Ecrivons  $f(\zeta) = \sum a_n(\zeta - z)^n$ .

Si  $|f|$  a un max, alors il existe  $r > 0$  tel que  $\overline{D}(z, r) \subset U$  et

$$|f(z)|^2 \geq \max_{\zeta \in \partial D(z, r)} |f(\zeta)|^2$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})|^2 - |f(z)|^2 d\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} - |a_0|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq 0 \end{aligned} \quad \square$$

Donc  $a_n = 0 \ \forall n \geq 1$ .

Donc  $f$  constante sur  $\partial D(z, r)$  et donc sur tout  $U$ .

**Theorème 44 (Theoreme de Liouville)**

Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe.

Alors si  $|f|$  est bornee,  $f$  est constante.

**Preuve**

Par les inegalites de Cauchy, appliquees a  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,

$$|a_n| \leq \frac{1}{r} \max_{\zeta \in \partial D(z, r)} |f(\zeta)| \quad \square$$

**Lecture 12: Singularites**

Mon 01 Nov

**Proposition 45**

Soit  $f$  entiere non constante.

Alors  $f(\mathbb{C})$  est dense dans  $\mathbb{C}$

**Preuve**

Par l'absurde, sinon  $\exists w \in \mathbb{C}, \exists \delta > 0$  tel que  $\forall \zeta \in f(\mathbb{C}), |\zeta - w| \geq \delta$ .

Donc  $z \mapsto \frac{1}{f(z) - w}$  est bornee, donc constante, donc  $f$  est constante.  $\square$

**Theorème 46 (Theoreme de l'application ouverte)**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe non-constante, alors  $\forall$  ouvert  $V \subset U, f(V)$  est un ouvert.

**Preuve**

Il faut montrer que l'image de tout voisinage de  $z \in U$  est un voisinage de  $f(z) \in V$ .

Si  $f'(z) \neq 0$ , evident, par le theoreme de la fonction inverse.  
 Supposons que  $z = 0$  et  $f(z) = 0$ , alors on peut ecrire

$$f(\zeta) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \zeta^n$$

Ce qui donne

$$f(\zeta) = \zeta^k g(\zeta), g(\zeta) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \zeta^{n-k}$$

Dans un voisinage de 0, on peut ecrire

$$f(\zeta) = \phi^k(\zeta), \text{ ou } \phi(\zeta) = \zeta (g(\zeta))^{\frac{1}{k}}$$

Maintenant  $\phi'(0) \neq 0$ .

Donc  $\phi$  envoie un voisinage de 0 vers un voisinage de 0.

Maintenant  $w \mapsto w^k$  envoie ce voisinage de 0 vers un autre voisinage de 0  $\square$

**Proposition 47 (Limite de fonctions holomorphes)**

Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite  $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  de fonctions holomorphes qui converge uniformement sur les compacts vers  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ .

Alors  $f$  est holomorphe et de plus  $\forall k \geq 1$

$$f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$$

uniformement sur les compacts.

**Preuve**

Montrons que pour tout  $z \in U \exists \delta > 0$  tel que  $f_n^{(k)}|_{\overline{D}(z, \delta)} \rightarrow f^{(k)}$ .

Soit  $z_* \in U$  et  $\delta > 0$  tel que  $\overline{D}(z_*, 2\delta) \subset U$ .

Pour  $z \in \overline{D}(z_*, \delta)$  on a

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \overline{D}(z_*, 2\delta)} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

on a que

$$\zeta \mapsto \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} = g_n(\zeta)$$

Converge uniformement par rapport a  $z$  quand  $n \rightarrow \infty$  et aussi uniformement par rapport a  $\zeta$ .

Donc

$$\oint g_n(\zeta) d\zeta$$

$\square$

converge uniformement quand  $n \rightarrow \infty$

## 11 Singularites

On aimerait pouvoir considerer pour  $f$  holomorphe  $\frac{1}{f}$ , sans se poser la question de savoir  $f \neq 0$ .

Comme les 0 de  $f$  sont isoless, on devrait pouvoir donner un sens a cela.

### 11.1 Series de Laurent

Pour  $z_* \in \mathbb{C}$ ,  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$  est ce qu'on appelle une serie de Laurent.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$  est appelee partie reguliere et  $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_*)^n$  partie singuliere.

On dit que la serie converge si la partie reguliere converge et  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^{-1} a_n(z - z_*)^n$ .

Pour une serie de Laurent, son anneau de convergence

$$A(z_*, r, R) = D(z_*, R) \setminus \overline{D}(z_*, r) \text{ et } r = \frac{1}{\rho}$$

ou

$$\rho = \text{rayon de convergence de } \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$$

#### Proposition 48 (Formule de Cauchy sur l'anneau)

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe et  $z_* \in \mathbb{C}$  tel que  $\overline{A}(z_*, r, R) \subset U$ .

Alors  $\forall z \in A(z_*, r, R)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_*, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_*, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

## Lecture 13: Series de Laurent

Thu 04 Nov

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe avec  $U \supset \overline{A}(z_*, r, R)$ , est-ce que  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$  sur  $\overline{A}(z_*, r, R)$ ?

Oui!

#### Theoreme 49 (Formule de Cauchy generalisee)

Pour  $z \in A(z_*, r, R)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_*, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_*, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

#### Preuve

Comme  $f$  est holomorphe sur un voisinage de  $z$ ,  $\exists \delta$  tel que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z, \delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

On déforme  $\partial D(z, \delta)$  dans  $\overline{A}(z_*, r, R) \setminus \{z\}$  jusqu'à obtenir un contour entourant les deux bords de  $\overline{A}(z_*, r, R)$ .

On a donc

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_*, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_*, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \square$$

**Theorème 50 (Développement en série de Laurent)**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe avec  $U \supset \overline{A}(z_*, r, R)$  Alors

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_*)^n$$

sur  $\overline{A}(z_*, r, R)$  ou

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_*)^{n+1}} d\zeta \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

avec convergence uniforme sur les compacts

**Preuve**

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta(1 - \frac{z}{\zeta})} \\ &= \frac{1}{\zeta} \sum \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n \text{ si } |z| < |\zeta| \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{-1}{z} \left( \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} \right) \\ &= -\frac{1}{z} \sum \left( \frac{\zeta}{z} \right)^n \end{aligned}$$

On peut supposer  $z_* = 0$  en posant  $g(z) = f(z_* + z)$ .

Montrons que  $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ .

On a

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \oint_{C(R)} g(\zeta) \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^n} - \oint_{C(r)} g(\zeta) \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^n} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oint \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta z^n \quad \square \end{aligned}$$

**Corollaire 51**

Si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe et  $U \supset \overline{A}(z_*, r, R)$  alors

$$f = f_{int} + f_{ext}$$

Ou  $f_{int}$  est holomorphe sur  $D(z, r)$  et  $f_{ext}$  est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(z, r)$

**11.2 Singularites**

Si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe avec  $U \supset A(z_*, 0, R)$ , on dit que  $f$  a une singularite en  $z_*$ .

A partir des resultats ci-dessus,  $f$  est donnee par  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$  ou la serie converge sur les compacts de  $A(z_*, 0, R)$ .

**Definition 22**

Si  $f$  a une singularite en  $z_*$ , on dit qu'elle est effacable ou illusoire si  $a_n = 0 \forall n \leq -1$ .

On dit qu'elle est d'ordre fini  $n \geq 1$  ou dotee d'un pole d'ordre  $n \geq 1$  si  $a_{-n} \neq 0$  et  $a_k = 0 \forall k < -n$ .

On dit qu'elle a une singularite essentielle si

$$\{n \leq -1 | a_n \neq 0\}$$

est infini.

**Definition 23 (Valuation)**

On note  $v_{z_*}(f)$  la valuation de  $f$  en  $z_*$  defini comme

$$\inf \{n : a_n \neq 0\}$$

**Remarque**

Si on a une singularite effacable en  $z_*$ ,  $f$  est bornee au voisinage de  $z_*$  ( et peut etre etendue par  $a_0$  en  $z_*$  ).

Reciproquement, si  $f$  est bornee au voisinage de  $z_*$ , pour  $n \leq -1$ ,  $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_*)^{n+1}}$  est bornee au voisinage de  $z_*$  et donc  $a_n = 0$

**Theoreme 53 (Casorati-Weierstrass)**

Soit  $f$  avec une singularite essentielle en  $z_*$ . Alors  $\forall w \in \mathbb{C}, \exists (z_n)_{n \geq 0}, z_n \in U$  tel que  $f(z_n) \rightarrow w$ .

En d'autres termes, l'image de tout voisinage de  $z_*$  est dense dans  $\mathbb{C}$ .

**Preuve**

Par l'absurde, supposons qu'il existe un  $w \in \mathbb{C}$  non approchable par des suites  $f(z_n)$ .



On aurait donc  $|f(z) - w| \geq \epsilon$  pour  $\epsilon > 0$  dans un voisinage de  $z_*$ .  
 Mais alors  $\frac{1}{f(z)-w}$  est borné au voisinage de  $z_*$ , donc elle aurait une singularité effaçable.

$$\frac{1}{f(z)-w} = \sum_{k=n}^{\infty} b_k (z - z_*)^k$$

Donc quand  $z \rightarrow z_*$   $f(z-w) = O(\frac{1}{|z-z_*|^n})$ , ce qui contredit l'hypothèse que c'est une singularité essentielle.  $\square$

## Lecture 14: Fonctions méromorphes

Mon 08 Nov

### 12 Fonctions Méromorphes

#### Definition 24

Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un ouvert.

On dit qu'une fonction  $f$  est méromorphe sur  $U$  si c'est une fonction holomorphe  $U \setminus K \rightarrow \mathbb{C}$  ou  $K$  est fait de points isolés de  $U$  et  $f$  a comme singularités aux points de  $K$  soit des singularités effaçables soit des pôles.

#### Lemme 54

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions méromorphes sur  $U \subset \mathbb{C}$  non identiquement nulles alors  $f + g$ ,  $fg$  et  $\frac{f}{g}$  sont méromorphes.

Les pôles de  $\frac{1}{f}$  correspondent aux zéros de  $f$  et vice-versa.

#### Preuve

Pour  $f + g$ , rien à faire.

Pour  $fg$ , rien à faire.

Pour  $\frac{f}{g}$ , les pôles sont soit hérités de  $f$  soit ils viennent des zéros de  $g$ .

En ces zéros, on a

$$v_{z_*}\left(\frac{f}{g}\right) = v_{z_*}(f) - v_{z_*}(g)$$

$\square$

#### Remarque

On peut montrer que l'ensemble des fonctions holomorphes sur un domaine  $U$  est un anneau intègre et que son corps des fractions est l'ensemble des fonctions méromorphes.

#### 12.1 Zéros, pôles et dérivées logarithmique

Si  $f$  est méromorphe,  $f'$  aussi et  $\frac{f'}{f}$  aussi.

**Lemme 56**

Les poles et zeros de  $f$  correspondent a des poles d'ordre 1 de  $\frac{f'}{f}$  et le residu de  $\frac{f'}{f}$  en un tel point  $z_*$  sera  $v_{z_*}(f)$

**Preuve**

Si  $f$  a un zero d'ordre  $n \geq 1$  en  $z_*$

$$f(z) = (z - z_*)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_*)^k$$

$$f'(z) = n(z - z_*)^{n-1} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_*)^k \right) + (z - z_*)^n \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} k (z - z_*)^{k-1} \right)$$

Donc

$$\frac{f'}{f} = \frac{n}{z - z_*} + \frac{\dots}{\dots}$$

De meme, si  $f$  a un pole d'ordre  $n$ , on a

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_*)^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_{-n+k} (z - z_*)^k$$

Et on trouve

$$f'/f = \frac{-n}{z - z_*} + \frac{\dots}{\dots}$$

□

**12.2 Sphere de Riemann**

On va identifier  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}}$  avec la sphere  $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  par projection stereographique en identifiant  $\mathbb{C}$  avec le plan  $\{(u, v, -1), u, v \in \mathbb{R}\}$  par la fonction

$$(x, y, z) \mapsto \frac{x + iy}{1 - z} \text{ et } (0, 0, +1) \mapsto \infty$$

$\hat{\mathbb{C}}$  est muni de la topologie induite

**Proposition 57**

Soit  $f$  une fonction meromorphe sur  $U$ , alors  $f$  s'etend en une fonction continue  $U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$

Si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est telle que  $kU \supset \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, r)$  pour  $r \geq 0$  on dit qu'elle est definie au voisinage de l'infini si  $f(\frac{1}{w})$  est definie au voisinage de 0 et on parlera de singularites effacables, de poles ou de singularites essentielles selon le pole de  $f(\frac{1}{w})$

**13 Theoreme des residus**

**Theorème 58 (Theoreme des Residus)**

Soit  $U$  simplement connexe,  $F \subset U$  fini,  $f : U \setminus F \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  un lacet. Alors

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{z_* \in K} \text{res}_{z_*}(f) \text{Ind}_{z_*}(\gamma)$$

**Lecture 15: Residus**

Thu 11 Nov

**Lemme 59**

Le residu de  $f$  en  $z_* \in U$  est l'unique  $A \in \mathbb{C}$  tel que

$$z \mapsto f(z) - \frac{A}{z - z_*}$$

ait localement une primitive autour de  $z_*$

**Preuve**

Si on prend  $A = \text{res}_{z_*}(f)$ , alors  $z \mapsto f(z) - \frac{A}{z - z_*}$  a comme developpement en serie de Laurent

$$\sum_{k=-\infty}^{-2} a_k (z - z_*)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_*)^k$$

qui a comme primitive

$$\sum_{k=-\infty, k \neq -1}^{\infty} \frac{a_k (z - z_*)^{k+1}}{k+1}$$

□

Comme  $\frac{1}{z - z_*}$  n'a pas de primitive autour de  $z_*$ , ce  $A$  est l'unique qui convient.

**Theoreme des Residus****Preuve**

Posons  $g : U \setminus F \rightarrow \mathbb{C}$

$$g(z) = f(z) - \sum \text{res}_{z_*}(f) \frac{1}{z - z_*}$$

Par construction  $g$  a localement une primitive autour de chaque  $z_* \in U$ .

On peut donc deformar  $\gamma$  au travers de chaque point de  $F$  sans changer l'integrale.

Donc

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint \sum_{z_* \in F} \frac{\text{res}_{z_*}(f)}{z - z_*} dz = \sum_{z_* \in F} \text{res}_{z_*}(f) 2\pi \text{ind}_{z_*}(f)$$

□

**Corollaire 60**

Si  $\gamma = \partial\Omega$  ou  $\Omega$  est simplement connexe

$$\oint_{\partial\Omega} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_* \in F \cap \Omega} \text{res}_{z_*}(f)$$

**Corollaire 61**

Si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe,  $U$  simplement connexe et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  un lacet, alors  $\forall z \in U \setminus \gamma([0, 1])$

$$f(z) \text{ind}_z(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

**Corollaire 62 (Comptage des zeros)**

Soit  $f$  une fonction meromorphe sur  $U$  et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  un contour qui ne touche ni les zeros ni les poles de  $f$ .

Alors

$$\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{z_* \in \text{Zeros et poles de } f} v_{z_*}(f) \text{Ind}_{z_*}(f)$$

**13.1 Calcul des residus****Exemple**

Si  $f(z) = \frac{\text{res}_{z_*}(f)}{z - z_*} + \text{partie reg}(z)$ .

On regarde  $z \mapsto (z - z_*)f(z)$  et on prend la limite  $z \rightarrow z_*$

De maniere generale :

**Lemme 64**

Si  $f$  a un pole d'ordre  $n$  en  $z_*$

$$\text{res}_{z_*}(f) = \lim_{z \rightarrow z_*} \left( \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_*)^n f(z) \right) \frac{1}{(n-1)!}$$

**Lecture 16: Applications du theoreme des residus**

Mon 15 Nov

**13.2 2 classes d'integrales souvent calculables par des residus**

— Transformee de Fourier :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

— Integrales de la forme

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sin(x), \cos(x)) dx$$

## Motivation de la transformee de Fourier

Il y a un theoreme qui dit que si  $f$  est raisonnable

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi$$

## Comment calculer une transformee de Fourier

Idee : Calculer pour un lacet demi-cercle de rayon  $R$ .

Avec un peu de chance, la partie  $[-R, R]$  quand  $R \rightarrow \infty$  devrait nous donner  $\int_{-\infty}^{\infty} \dots$  et avec un peu de chance l'integrale sur le demi-cercle  $\rightarrow 0$ .

### Proposition 65

Si  $f$  meromorphe sur  $\mathbb{C}$  avec un nombre fini de poles et  $f(z) = O(\frac{1}{z})$  quand  $|z| \rightarrow \infty$ , alors pour  $\xi > 0$ , alors

$$\hat{f}(\xi) = i \sum_{z_* \in \text{poles inferieur}} \text{res}_{z_*}(e^{-i\xi z} f(z))$$

et on somme sur les singularites du plan inferieur si  $\xi < 0$

### Remarque

Si  $f(z) = o(\frac{1}{z})$  marche aussi pour  $\xi = 0$

### Proposition 67

Si on souhaite integrer  $\int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$ , on a

$$\int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{z \in D(0,1), \text{ poles}} \text{res}_{z_*}(f)$$

ou  $f(z) = R(\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}))$

## Lecture 17: theoreme des nombres premiers

Thu 18 Nov

### Theorème 68 (Theoreme des nombres premiers)

Soit  $\pi(x)$  = nombre de  $p$  premiers  $< x$  alors quand  $x \rightarrow \infty$

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

## Idees heuristiques

Regarder

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

En effet

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_p \sum_{n=0}^{\infty} p^{-sn}$$

On regarde

$$\frac{\zeta'}{\zeta} = -\partial_s \sum \log 1-p^{-s} = \sum \frac{\log p}{p^s-1}$$

### Preuve

On a

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \operatorname{Re}(s) > 1$$

On pose

$$\phi(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

et

$$\Phi(s) = \sum_p \frac{\log p}{p^s}$$

#### Lemme 69 (0)

$$s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

est holomorphe sur  $\{z : \operatorname{Re}(z) > 1\}$  et s'étend de manière holomorphe  $\mathbb{H}_0$

#### Lemme 70 (1)

Si  $\phi(x) \sim x$  quand  $x \rightarrow \infty$ , alors  $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$  quand  $x \rightarrow \infty$

#### Lemme 71 (2)

Si  $I_1$  converge, ou

$$I_1 = \int_1^{\infty} \frac{\phi(x) - x}{x^2} dx$$

Alors  $\phi(x) \sim x$  quand  $x \rightarrow \infty$

#### Lemme 72 (3)

Soit  $I(s)$  défini par

$$\int_1^{\infty} \frac{\phi(x) - x}{x^{1+s}} dx$$

pour  $\operatorname{Re} s > 1$ .

Alors si  $I$  a un prolongement meromorphe sur  $\mathbb{H}_{1-\epsilon}$  pour  $\epsilon > 0$  qui n'a pas de pole sur  $\overline{\mathbb{H}_1}$  alors  $I_1$  converge

**Lemme 73 (4)**

Sur  $\mathbb{H}_1$ , on a

$$I(s) = \frac{\Phi(s)}{s} - \frac{1}{s-1}$$

et cela s'etend sur  $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$ .

**Lemme 74 (5)**

La fonction  $\Phi$  s'etend en une fonction meromorphe  $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$  avec des poles correspondants aux poles de  $\zeta$ .

Les zeros de  $\zeta$  d'ordre  $n$  donnent des poles simples de  $\Phi$  de residu  $-n$ .

Les poles de  $\zeta$  d'ordre  $n$  donnent des poles simples de  $\Phi$  de residu  $n$ .

**Lemme 75 (6)**

La fonction  $\zeta$  n'a pas de zeros sur  $\overline{\mathbb{H}_1}$

**Preuve (Du theoreme des nombres premiers, avec les lemmes)**

Avec lemme 6 et lemme 0, le seul pole de  $\zeta$  sur  $\overline{\mathbb{H}_1}$  en  $s = 1$  n'a pas de zeros, donc  $\Phi$  a juste un pole simple de residu 1 en  $s = 1$ , pas d'autres poles sur  $\overline{\mathbb{H}_1}$ . Donc l'extension de  $I(s)$  a  $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$  n'a pas de poles sur  $\overline{\mathbb{H}_1}$ , donc  $I_1$  converge, donc  $\phi(x) \sim x$  et donc  $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$   $\square$

On prouve les lemmes

**Preuve (-1)**

Soit  $E(N)$  l'ensemble des nombres dont les facteurs premiers sont  $\leq N$ , alors

$$\prod_{p \leq N} \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_{p \leq N} (1+p^{-s}+\dots) = \sum_{n \in E(N)} \frac{1}{n^s}$$

En faisant tendre  $N \rightarrow \infty$ , on obtient le resultat.  $\square$

**Preuve (0)**

On a

$$\frac{1}{s-1} = \int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} - \int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx \right| &= \left| \int_1^\infty \left( \frac{1}{\lfloor x \rfloor^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \right| \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \left| \left( \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) \right| dx \end{aligned}$$

$$\leq \frac{|s|}{n^{\operatorname{Re}(s)+1}} \quad \square$$

## Lecture 18: Theoreme des Nombres premiers preuve

Mon 22 Nov

### Preuve (1)

On veut montrer que si  $\phi(x) \sim x$ , alors  $\pi(x) \sim \frac{\phi(x)}{\log x}$

$$\iff \pi(x) \log x \sim \phi(x)$$

On a clairement

$$\pi(x) \log x \geq \phi(x)$$

Soit  $\epsilon > 0$ , on a

$$\phi(x) \geq \sum_{x^{1-\epsilon} \leq p \leq x} \log p \geq \sum_{x^{1-\epsilon} \leq p \leq x} \log(x^{1-\epsilon}) = (1-\epsilon)(\pi(x) - \pi(x^{1-\epsilon})) \log x$$

Pour tout  $x$ ,  $\pi(x^{1-\epsilon}) \leq x^{1-\epsilon}$  et  $\pi(x) \geq \frac{\phi(x)}{\log x}$ . Donc si  $\phi(x) \sim x$  quand  $x \rightarrow \infty$ , alors

$$\pi(x^{1-\epsilon})/\pi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

et donc

$$\phi(x) \geq (1-\epsilon^2)\pi(x) \log x \quad \square$$

### Preuve (2)

Prouvons le par l'absurde.

Montrons qu'il n'est pas possible de trouver  $\lambda > 1$  une suite  $a_n \rightarrow \infty$  tel que  $\phi(a_n) \geq a_n$  et  $a_{n+1} \geq \lambda a_n$  ou  $\mu < 1$  et une suite  $b_n \rightarrow \infty$  avec

$$\phi(b_n) \leq \mu b_n \text{ et } b_{n+1} \geq \frac{1}{\mu} b_n$$

Si la suite  $a_n$  existait, montrons que  $I_1$  diverge. Montrons que

$$\begin{aligned} \int_{a_n}^{\lambda a_n} \frac{\phi(x) - x}{x^2} dx &\geq \int_{a_n}^{\lambda a_n} \frac{\phi(a_n) - x}{x^2} dx \\ &\geq \int_{a_n}^{\lambda a_n} \frac{\lambda a_n - x}{x^2} dx \\ &= \int_1^\lambda \frac{\lambda - t}{t^2} dt \geq \frac{1}{\lambda^2} \int_1^\lambda (\lambda - t) dt = \frac{\lambda - 1}{2\lambda^2} > 0 \end{aligned} \quad \square$$

Pour le lemme 3, commencons par un petit lemme intermediaire

#### Lemme 76

$\frac{\phi(x)}{x}$  est bornée.



**Preuve**

Pour ce faire, étudions

$$\phi(2n) - \phi(n) = \log \prod_{n \leq p \leq 2n} p \leq \log \binom{2n}{n} \leq \log(1+1)^n = \log(2)2n$$

Pour  $x > 1$ ,  $\phi(x) \geq \phi(\lfloor x \rfloor)$

$$\phi(2x) \leq \phi(2\lfloor x \rfloor) + \log(2\lfloor x \rfloor + 1)$$

Donc

$$\begin{aligned} \phi(2x) - \phi(x) &\leq \phi(\lfloor x \rfloor) - \phi(\lfloor x \rfloor) + \log(2x + 1) \\ &\leq 2 \log 2\lfloor x \rfloor + \log(2x + 1) \\ &\leq 2Cx \end{aligned}$$

Donc

$$\phi(x) - \phi\left(\frac{x}{2^n}\right) \leq C\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \dots\right) \leq Cx \quad \square$$

**Preuve (3)**

Repose sur la transformation de Laplace.

**Definition 25 (Transformée de Laplace)**

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction bornée et continue par morceaux sur  $[0, \infty)$ .

La transformée de Laplace de  $f$ , notée  $\mathcal{L}(f)$  est définie sur  $\mathbb{H}_0$  par

$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-tz} dt$$

**Theorème 77**

Si  $f$  est bornée et que  $\mathcal{L}f$  s'étend en une fonction méromorphe sur  $\mathbb{H}_{-\delta}$  pour  $\delta > 0$  sans pôles sur  $\mathbb{H}_0$ , alors

$$\int f(t)dt$$

converge et vaut  $\mathcal{L}f(0)$

Le lemme 3 en suit ( en prenant la transformée de Laplace ). □

**Lecture 19: Applications conformes**

Mon 29 Nov

**14 Applications conformes****Definition 26 (Fonction Holomorphe)**

Une fonction holomorphe bijective entre deux domaines.

## 14.1 Applications conformes de $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$

Une famille d'applications conformes  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  :

Pour  $\alpha \in \mathbb{D}$ , notons  $\phi_\alpha = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ .

Montrons que  $\phi_\alpha$  est une bijection.

Voyons que  $\phi_\alpha$  envoie  $\partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{D}$ .

Pour  $\beta \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{e^{i\beta} - \alpha}{1 - \alpha e^{-i\beta}} \right| = \left| \frac{e^{i\beta} - \alpha}{1 - \alpha e^{i-\beta}} \right| = 1$$

Par le principe du maximum,  $\phi_\alpha$  envoie  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$

On verifie de plus que l'inverse de  $\phi_\alpha$  est  $\phi_{-\alpha}$  Pour  $\alpha \in \mathbb{D}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ , on note

$$\phi_{\alpha,\theta}(z) = e^{i\theta} \phi_\alpha(z)$$

Voyons pourquoi les  $\phi_{\alpha,\theta}$  sont les seules applications conformes  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ .

### Preuve

*Idee : si  $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  est conforme, posons  $\alpha = \phi(0)$ , alors  $\tilde{\phi} = \phi_\alpha \circ \phi(0) = 0$ .*

*De plus, si  $\theta = \arg(\tilde{\phi}'(0))$ , alors*

$$\tilde{\phi} = \phi_{\alpha,-\theta} \circ \phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

□

### Theorème 78

Pour n'importe quel domaine simplement connexe  $\Omega$ , il existe une application conforme  $\Omega \rightarrow \mathbb{D}$ .

### Preuve

*L'idée est de trouver une fonction injective  $\phi$  qui envoie  $z \rightarrow 0$ ,  $\phi'(z) > 0$  et l'optimiser pour la rendre surjective.*

*Posons  $\Sigma_{\Omega,z_*}$  l'ensemble des fonctions holomorphes injectives qui envoient  $z_* \rightarrow 0$*

### Lemme 79

$\Sigma_{\Omega,z_*} \neq \emptyset$

### Preuve

*Soit  $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ , comme  $z \rightarrow z - w_0$  ne s'annule pas, il existe  $f(z) = \sqrt{z - w_0}$ , il existe  $f(z) = \sqrt{z - w_0}$ . Soit  $\tilde{\Omega} = f(\Omega)$ .*

*Montrons qu'il existe  $\tilde{\omega} \in \mathbb{C}$  tel que  $d(\tilde{\omega}, \tilde{\Omega}) > 0$ .*

*En effet,  $\exists z_1, z_2$  tel que  $f(z_1) = f(z_2)$  et  $\exists z_1 \neq -z_2$  tel que  $f(z_1) = -f(z_2)$ .*

*Donc*

$$f(\Omega) \cap -f(\Omega) = \emptyset$$

□

Soit  $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ . Soit  $\psi(z) = \sqrt{z - w}$ .

On a  $\psi(\Omega) \cap -\psi(\Omega)$ .

Par le theoreme de l'application ouverte  $\psi(\Omega)$  est ouvert et donc  $\exists b \in \psi(\Omega)$  et  $r(0, |b|)$  tel que  $D(b, r) \subset \psi(\Omega)$ . Mais alors  $D(-b, r) \subset \mathbb{C} \setminus \psi(\Omega)$ .

Donc  $z \rightarrow \frac{r}{\psi(z)+b}$  est injective et envoie  $\Omega \rightarrow \mathbb{D}$ .

En postcomposant avec une application de Moebius on arrive a une fonction dans  $\Sigma_{\Omega, z_*}$  □

## Lecture 20: Application conforme de Riemann

Thu 02 Dec

### Lemme 80

Soit  $\psi \in \Sigma_{\Omega, z_*}$ , si  $\psi$  n'est pas surjective, il existe  $\xi \in \Sigma_{\Omega, z_*}$  tel que  $\xi'(z_*) > \psi'(z_*)$ .

### Preuve

Soit  $\alpha \in \mathbb{D} \setminus \psi(\Omega)$ , posons  $\psi_0 = \phi_\alpha \circ \psi$ , comme  $\psi_0$  ne s'annule pas sur  $\Omega$ , il existe  $\psi_1 = \sqrt{\psi_0}$ .

Posons  $\beta = \psi_1(z_*)$  et choisissons  $\theta$  tel que

$$\psi_2 = \phi_{\beta, \theta} \circ \psi_1 \in \Sigma_{\Omega, z_*}$$

Posons  $\xi = \psi_2$ .

Pourquoi a-t'on  $\xi'(z_*) > \psi'(z_*)$  ?

$$\xi = \phi_{\beta, \theta} \circ \sqrt{\phi_\alpha \circ \psi}$$

Alors

$$\psi = \phi_{-\alpha} \left( (\phi_{-e^{i\beta}\theta, -\theta} \circ \xi)^2 \right)$$

Donc

$$\psi'(z_*) = F'(0)\xi'(z_*)$$

□

Pourquoi  $F'(0) < 1$  ?

$F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  et  $F(0) = 0$ .

Or  $F$  n'est pas bijective, et donc, par le lemme de Schwarz,  $F'(0) < 1$

### Definition 27 (Famille Normale)

Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , une famille de fonctions  $\mathcal{F}$  est dite normale si  $\forall (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , il existe une sous-suite  $f_{n_k}$  qui converge uniformement sur les compacts de  $\Omega$ .

Soit  $\mathcal{F}$  une famille de fonctions holomorphes  $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$  uniformement bornée sur les compacts de  $\Omega$ . Alors  $\mathcal{F}$  est normale.

### Preuve

Considerons  $\Sigma_{\Omega, z_*}$ .

Soit  $f_n$  une suite de fonctions dans  $\Sigma_{\Omega, z_*}$  tel que  $f'_n(z_*) \rightarrow \sup_{f \in \Sigma_{\Omega, z_*}} f'(z_*)$ .

Comme  $\Sigma_{\Omega, z_*}$  est une famille normale il existe  $f_{n_k} \rightarrow f$  uniformement sur les compacts.

$f$  est holomorphe et  $f'(z_*) < \infty$ .

Il reste seulement à montrer que  $f \in \Sigma_{\Omega, z_*}$  et donc que  $f$  est injective.

Soit  $z \in \Omega$  et  $\alpha = f(z)$ , montrons qu'il n'existe pas de  $w \in \Omega$  tel que  $f(w) = \alpha$ , donc que  $f(z) - \alpha$  ne s'annule qu'en  $z$ .

$f$  n'est pas constante car  $f'(z_*) > 0$ .

Donc les zéros de  $f - \alpha$  sont isolés.

Soit donc  $w \in \Omega \setminus \{z\}$ , montrons que  $f(w) - \alpha$  est non nul.

On sait comme  $f - \alpha$  qu'il existe un voisinage  $D(w, \delta)$  tel que  $D(z_2, \delta) \subset \Omega \setminus \{z_1\}$  et sur  $\partial D(w, \delta)$ ,  $f - \alpha$  ne s'annule pas.

On a que le nombre de zéros sur  $D(w, \delta)$  est donné par

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(w, \delta)} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - \alpha} d\zeta = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f'_{n_k}(z)}{f_{n_k}(z) - f_{n_k}(z_*)} dz = 0$$

On a donc prouvé l'existence, il reste l'unicité. En effet,  $(f_1 \circ f_2^{-1})'(0) > 0$  et  $(f_1 \circ f_2^{-1})(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$  et donc  $f_1 \circ f_2 = \text{Id} \implies f_1 = f_2$   $\square$

## 15 Fonctions Elliptiques

Une fonction  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite bi-periodique s'il existe  $T_1, T_2 \in \mathbb{C}$   $\mathbb{R}$ -linéairement indépendantes tel que  $f(z + T_1) = f(z + T_2) = f(z) \forall z$ .

### Proposition 81

Une fonction holomorphe bi-periodique est toujours constante

**Preuve**

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} f(z) = \sup_{z \in K} |f(z)| < \infty \quad \square$$

ou  $K$  est compact tel que  $\forall z \in \mathbb{C} \exists (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $z - k_1 T_1 - k_2 T_2 \in K$ .

Par Liouville  $f$  constante.

### Definition 28

Une fonction méromorphe bi-periodique est dite elliptique.

## Lecture 21: Fonctions Elliptiques

Mon 06 Dec

**Proposition 82**

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2}$$

**Preuve**

*Posons*

$$f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$$

*et*

$$g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2}$$

*On veut montrer que  $f - g = 0$ . Pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ,*

$$\frac{1}{|z - n|^2} = \frac{1}{\operatorname{Im} z^2 + (\operatorname{Re} z - n)^2} \leq \frac{1}{((\operatorname{Re} z - n))^2}$$

*Si on somme sur les  $n \in \mathbb{Z}$ , on a quelquechose en  $O(\frac{1}{n^2})$  quand  $n \rightarrow \infty$  donc la somme converge.*

*Pourquoi  $g$  meromorphe ?*

*On a que la serie converge uniformement sur  $D(0, R) \setminus \mathbb{Z} \forall R > 0$ .*

*Il suffit de voir que  $g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \cap D(0, R)} \frac{1}{(z - n)^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus D(0, R)} \frac{1}{(z - n)^2}$*

*Les termes de la premiere serie sont bornes par  $\frac{1}{(R - n)^2}$  et donc on a convergence uniforme. Pour montrer que  $f - g = 0$ , voyons d'abord que  $f - g$  n'a pas de poles.*

*$f$  et  $g$  n'ont de poles que sur les entiers et sont clairement  $\mathbb{R}$ -periodiques de periode 1.*

*Par periodicite, il suffit de voir ce qu'il se passe en 0.*

*Au voisinage de 0, on a*

$$\frac{\pi^2}{(\pi z - \pi^2 z^2 6^{-1} + O(z^6))^2} = \frac{1}{z^2(1 - \pi^3 z^2 3^{-1})}$$

*Donc  $f - g$  n'a pas de poles en 0.*

*Montrons que  $f - g$  est bornee.*

*Voyons pourquoi quand  $\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty$   $f, g \rightarrow 0$  Pour  $f$  on utilise*

$$|\sin^2 z| = \sin^2 \operatorname{Re} z + \sinh^2(\operatorname{Im} z)$$

*Comme  $\sinh^2(\operatorname{Im} z) \rightarrow \infty$  quand  $\operatorname{Im} z \rightarrow \infty$  il est clair que  $f \rightarrow 0$ .*

*Pour  $g$  il suffit de montrer que c'est le cas dans la bande  $[0, 1] \times i\mathbb{R}$  for all  $\epsilon > 0, \exists R > 0$  tel que*

$$\sum_{z \in \mathbb{Z} \setminus [-R, R]} \frac{1}{(z - n)^2} \leq \epsilon/2$$

*Donc quand  $\operatorname{Im} z \rightarrow \infty$ ,  $g$  tend vers 0.*

*Donc  $f - g$  est bornee et donc constante et donc  $f - g = 0$ .*

□

**Proposition 83**

$$\sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

**Preuve**

$$g(z) - \frac{1}{z^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-z)^2}$$

*Or*

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) - \frac{1}{z^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

□

**15.1 Fonctions Elliptiques**Soient  $T_1, T_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\frac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{R}$ .On obtient ainsi un reseau  $\Lambda = \{k_1 T_1 + k_2 T_2 | k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}$ Une fonction est alors elliptique si  $f(z + \mu) = f(z) \forall \mu \in \Lambda$  et  $f$  meromorphe.**Definition 29 (Fonction de Weierstrass)***La fonction de Weierstrass est definie par*

$$\wp = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0,0\}} \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

**Proposition 84***La serie  $\wp$  converge normalement sur  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  et definit une fonction elliptique.***Preuve***On a que  $|\Lambda \cap A(0, R, R+1)| = O(R)$* *Donc*

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right| &= \left| \frac{\lambda^2 - (z-\lambda)^2}{\lambda^2(z-\lambda)^2} \right| \\ &= \left| \frac{2\lambda z - z^2}{(z-\lambda)^2 \lambda^2} \right| = O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \end{aligned}$$

*Donc pour tout  $z \in D(0, R) \setminus \Lambda$  on a convergence uniforme ( par rapport a  $z$  ) de la serie.**Donc  $\wp$  est meromorphe avec poles sur  $\Lambda$* *Montrons que  $\wp$  est elliptique, regardons  $\wp' = -2 \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z-\lambda)^3}$  On a*

$$\frac{d}{dz}(\wp(z+p) - \wp(z)) = 0$$

*Donc  $z \rightarrow \wp(z + \mu) - \wp(z)$  est constante*

□

## 16 Analyse Vectorielle

But : Comprendre le gradient, le rotationnel, la divergence, le laplacien et les theoremes les reliant.

### Definition 30

Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un domaine.

Des fonctions  $C^1$   $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  est appelee champ scalaire et  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  un champ vectoriel.

### 16.1 Integrales curvilignes et circulation

Soit  $U$  un domaine,  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  un champ, et  $\gamma[0, 1] \rightarrow U$   $C^1$  par morceaux, continue, derivees bornees.

#### Definition 31 (Integrale curviligne)

L'integrale curviligne de  $\phi$  le long de  $\gamma$

$$\int_{\gamma} \phi ds$$

est par definition

$$\int_0^1 \phi(\gamma(s)) \|\gamma'(s)\| ds$$

En particulier

$$l(\gamma) = \int_{\gamma} 1 ds$$

#### Remarque

Une reparametrisation ne change pas la valeur de l'integrale.

#### Definition 32 (Circulation)

Soit  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ vectoriel et  $\gamma$  une courbe.

La circulation de  $X$  le long de  $\gamma$  est defini par

$$\int_{\gamma} X \cdot ds = \int_0^1 X(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds$$

#### Remarque

Cette definition est aussi invariante par reparametrisation.

#### Definition 33 (Gradient)

Le gradient d'un champ scalaire  $\phi$  est donne par

$$\nabla \phi = (\partial_1 \phi, \dots, \partial_n \phi)$$

**Proposition 87***Circulation d'un gradient.*

$$\int_{\gamma} \nabla \phi \cdot ds = \phi(\gamma(1)) - \phi(\gamma(0))$$

**Preuve***En supposant  $\gamma \in C^1$* 

$$\int_0^1 \nabla \phi(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds = \int_0^1 \frac{d}{ds} (\phi \circ \gamma) ds = \phi(\gamma(1)) - \phi(\gamma(0)) \quad \square$$

On dit qu'un champ vectoriel derive d'un potentiel ( scalaire) s'il existe  $\phi$  tel que

$$\nabla \phi = X$$

**Proposition 88***Si  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un champ vectoriel tel que  $\forall \gamma$  un lacet*

$$\int_{\gamma} X ds = 0$$

*Alors  $X$  derive d'un potentiel.***Preuve***Soit  $x_* \in U$ , posons pour  $x \in U$* 

$$\phi(x) = \int_{\gamma} X ds$$

*ou  $\gamma$  est un chemin de  $x_*$  vers  $x$ .**Cette integrale ne depend pas du choix de  $\gamma$ .**Montrons que  $\nabla \phi = X$ .* $\forall v \in \mathbb{R}^n$ 

$$\nabla \phi(x) \cdot v = X(x) \cdot v$$

*On a donc*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_x^{x+tv} X ds$$

*On parametre le segment de maniere affine*

$$= \frac{1}{t} X(x + stv) \cdot tv = X(x + stv) \cdot v \rightarrow X(x) \cdot v$$

**16.2 Rotationnel***Pour  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$* 

$$\nabla \times X : U \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \partial_1 X_2 - \partial_2 X_1 \quad \square$$



## Lecture 23: Analyse vectorielle

Mon 13 Dec

On se demande si un champ vectoriel derive d'un potentiel

### Proposition 89

Soit  $x \in U$  et  $T \subset \mathbb{R}^2$  un triangle, soit  $T_{x,\epsilon} = x + \epsilon T$ .

Alors si on orient  $\partial T_{x,\epsilon}$  dans le sens trigonometrique, alors

$$\int_{\partial T_{x,\epsilon}} X \cdot ds = \text{Aire}(T_{x,\epsilon}) \text{rot}(X)$$

### Corollaire 90

On peut remplacer  $T$  par tout polygone en le decoupant en triangles.

### Remarque

On voit que si  $X$  a un potentiel  $\text{rot}X = 0$

En 3D, plus complique car il faut choisir comment représenter des petits lacets

### Proposition 92

Soit  $T \subset \mathbb{R}^3$  le triangle avec sommets  $0, v, w$  apparaissant dans cet ordre suivant l'orientation de  $\partial T$ .

Alors

$$\int_{\partial T_{x,\epsilon}} X ds = \frac{1}{2} \epsilon \text{rot}X \cdot (v \times w)$$

## 16.3 Formule de Green-Riemann et Kelvin-Stokes

Que dire de

$$\int_{\gamma} X \cdot ds$$

si  $\gamma$  est le bord de  $U \subset \mathbb{R}^2$

### Theorème 93 (Green-Riemann)

$$\int_{\gamma} X \cdot ds = \int_U \text{rot}X \, du dv$$