EPFL Automne 2020
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

# Série 11

---

Tous les exercices seront corriges. La correction sera postee sur le moodle apres 2 semaines.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le dimanche de la semaine suivante celle ou la serie a ete postee. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme de fichier pdf (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien a cet effet dans la semaine de la serie.

## 1 Du Theoreme du noyau-image

**Exercice 1.** ($\star$) Soient $\varphi : U \mapsto V$, $\psi : V \mapsto W$ des applications lineaires entre EV de dimension finie.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(\psi \circ \varphi) \subset \mathrm{Im}(\psi)$.
2. Montrer que $\ker(\varphi) \subset \ker(\psi \circ \varphi)$.
3. Montrer que $\mathrm{rang}(\psi \circ \varphi) \leqslant \min(\mathrm{rang}(\psi), \mathrm{rang}(\varphi))$.
4. On suppose que $U = V = W$ (ie $\varphi, \psi$ sont des endomorphismes de $V$). Montrer que
$$\mathrm{rang}(\psi \circ \varphi) \geqslant \mathrm{rang}(\psi) + \mathrm{rang}(\varphi) - \dim(V).$$
5. Soit $M \in M_{d'' \times d'}(K)$, $N \in M_{d' \times d}(K)$ des matrices de dimensions convenables. Montrer que
$$\mathrm{rang}(M.N) \leqslant \min(\mathrm{rang}(M), \mathrm{rang}(N)).$$
6. On suppose que $d = d' = d''$ (ie. les matrices $M, N$ sont carrees de taille $d$). Montrer que
$$\mathrm{rang}(M.N) \geqslant \mathrm{rang}(M) + \mathrm{rang}(N) - d.$$

## 2 Des complexes

On admettra l'existence du morphisme de groupe "exponentielle complexe"

$$e^{i\bullet}:\begin{array}{ccc}(\mathbb{R},+) & \mapsto & (\mathbb{C}^{(1)},\times)\\ \theta & \mapsto & e^{i\theta}\end{array}.$$

On rappelle que ce morphisme est surjectif et que son noyau est de la forme

$$\ker e^{i\bullet}=2\pi\mathbb{Z}.$$

Cela implique qu'on a un isomorphisme de groupes et une bijection (note.e.s de la meme maniere)

$$e^{i\bullet}:(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},+)\simeq(\mathbb{C}^{(1)},\times),\ e^{i\bullet}:[0,2\pi[\simeq\mathbb{C}^{(1)}.$$

On notera egalement

$$\cos(\theta)=\Re(e^{i\theta}),\ \sin(\theta)=\mathrm{Im}(e^{i\theta}).$$

On a deja vu que $e^{i\bullet}$, $\cos(\bullet)$ et $\sin(\bullet)$ sont derivable sur $\mathbb{R}$ et

$$(e^{i\bullet})'=ie^{i\bullet},\ \cos(\bullet)'=-\sin(\bullet),\sin(\bullet)'=\cos(\bullet).$$

Par ailleur comme $\mathbb{C}$ est un corps, un polynome $P(X)\in\mathbb{C}[X]$ a coefficients dans $\mathbb{C}$ admet au plus $\deg P$ racines distinctes dans $\mathbb{C}$ : au plus $\deg P$ complexes $z\in\mathbb{C}$ tel que $P(z)=0$ ( en fait comme $\mathbb{C}$ est algebriquement clos $P(X)$ admet $d$ racines comptees avec multiplicite mais sauf mention explicite on ne s'en servira pas).

**Exercice 2.** On rappelle qu'on a demontre la formule d'Euler

$$\omega_2=e^{i\pi}=-1.$$

Demontrer que

$$\omega_3=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \omega_4=i$$

$$\omega_6=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \omega_8=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pour cela on observera que

1. $\omega_3$ est racine du polynome $X^2+X+1$.
2. $\omega_4$ est racine du polynome $X^2+1$.
3. $\omega_6^2=\omega_3$, $\omega_8^2=\omega_4$.
4. et on determinera les signes des fonctions cos et sin dans l'intervalle $[0,2\pi[$.

**Exercice 3.** Pour $n \geqslant 1$, On note

$$\mu_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}.$$

1. Montrer que $\mu_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$ et qu'en fait

$$\mu_n \subset \mathbb{C}^{(1)}.$$

   $\mu_n$ s'appelle le gorupe des racines $n$-iemes de l'unite.
2. On pose $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Montrer que $\omega_n^n = 1$.
3. Montrer que

$$\mu_n = \{\omega_n^k,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\} = \omega_n^{\mathbb{Z}}.$$

   En particulier ce groupe est cyclique d'ordre $n$.

**Exercice 4.** Comme $5 = 2^{2^1}+1$ est un premier de Fermat, $\omega_5$ doit avoir une expression simple. On va la calculer.

1. Montrer que $\omega_5$ est racine du polynome $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.
2. Montrer que

$$\omega_5^2 + \omega_5 + 1 + \omega_5^{-1} + \omega_5^{-2} = 0$$

   et en deduire que

$$2\cos(4\pi/5) + 2\cos(2\pi/5) + 1 = 0.$$

3. Montrer que $\cos(2\pi/5)$ est racine d'un polynome de degre 2 a coefficients rationnels et en deduire la valeur de $\cos(2\pi/5)$.
4. Calculer $\sin(2\pi/5)$ et $\omega_5$.

**Exercice 5.** On note

$$\mathbb{Z}[i] := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}.i = \{a + ib,\ a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ : on l'appelle l'anneau des entiers de Gauss.
2. Soit $\mathbb{Z}[i]^\times$ le groupe (multiplicatif) des elements inversibles (les unites) de cet anneau. Montrer que

$$\mathbb{Z}[i]^\times = \{a + ib \in \mathbb{Z}[i],\ |a + ib| = 1\}.$$

3. Montrer que $\mathbb{Z}[i]^\times = \{\pm 1, \pm i\}$.
4. Etant donne un nombre complexe $w = u + iv \in \mathbb{C}$ et

$$C_w := [u - 1/2, u + 1/2] + i[v - 1/2, v + 1/2] \subset \mathbb{C}$$

   le carre ferme de cotes de longueur 1 qui est centre en $w$ ; montrer que $C_w$ contient au moins un entier de Gauss $k = a + ib \in \mathbb{Z}[i] \cap C_w$.

5. Soit $q \in \mathbb{Z}[i] - \{0\}$ un entier de Gauss non-nul et $z \in \mathbb{Z}[i]$ un autre entier de Gauss. Montrer qu'il existe $k, r$ des entiers de Gauss verifiant
   (a) $z = q.k + r$,
   (b) $|r| < |q|$.

   Pour cela on considerera le quotient $w = z/q \in \mathbb{C}$.
   On dispose donc d'une sorte de "division euclidienne" sur l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ (cependant la paire $(k, r)$ n'est pas forcement unique).
6. Soit $I \subset \mathbb{Z}[i]$ un ideal de $\mathbb{Z}[i]$. On rappelle que $(I, +)$ est un sous-groupe additif qui est stable par multiplication par les elements de $\mathbb{Z}[i]$ :
$$\forall z \in \mathbb{Z}[i], \forall w \in I, \ z.w \in I.$$
7. On suppose que $I \neq \{0\}$. Montrer qu'il existe $q \in I - \{0\}$ de module $|q|$ minimal parmi tous les elements non-nuls de $I$.
8. Montrer qu'alors
$$I = q.\mathbb{Z}[i] = \{q.k, \ k \in \mathbb{Z}[i]\}.$$
   On a montrer que tout ideal de $\mathbb{Z}[i]$ est d'une forme tres simple : l'ensemble des multiples (par des elements de $\mathbb{Z}[i]$) d'un element $q$ : on dit que $I$ est un ideal principal et que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau principal.

# 3 Des echelonnages

**Exercice 6.** Soient
$$T_{ij}, D_{i,\lambda} \ (\lambda \neq 0), \ Cl_{ij,\mu}, \ i, j \leqslant d'$$
des matrices $d' \times d'$ des transformations elementaires.

1. En utilisant les expressions de ces matrices en terme de l'identite et des matrices elementaires $E_{ij}$, verifier que
$$T_{ij}^{-1} = T_{ij}, \ D_{i,\lambda}^{-1} = D_{i,1/\lambda}, \ Cl_{ij,\mu}^{-1} = Cl_{ij,-\mu}.$$

**Exercice 7.** Calculer la forme echelonnee reduite des matrices suivantes :

1. Pour un corps $K$ de caracteristique generale.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b_{d-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 11 & -10 \\ -1 & -2 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -2 \\ 3 & 6 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Pour $K = \mathbb{C}$,

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 1 \\ i-1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 8.** On suppose que $car(K) \neq 2$. Les matrices suivantes (qui sont equivalentes) sont elles ligne-equivalentes ?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \; et \; N = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$