1.1. Démontrer qu'il n'existe pas de fraction (=nombre rationnel) x telle que $x^2 = 3$.

1.2. Considérons l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. Détailler soigneusement ce qui est correct et ce qui ne l'est pas dans le raisonnement suivant.

D'une part, écrivons $x = -1 - x^2$. D'autre part, si l'on divise l'équation de départ par x, on trouve $x + 1 + \frac{1}{x} = 0$ et donc $x = -1 - \frac{1}{x}$. En comparant les deux expressions obtenues pour x, il suit que $x^2 = \frac{1}{x}$. Nous déduisons $x^3 = 1$ et donc $x = 1$.

1.3. Calculer la somme

$$S = 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + ... + 2020 \cdot 2^{2020}$$

Entre nous, S vaut exactement:

4861357454804846923063943984689163640747714287799266149168548540634831
6911886834884706996120411725553264857503102207259355952881220609821148
9491013200872269425941567157065206089941034153377321389475765614937487
3962316176998574233628120356237097336961336757464353837064027042368428
5142919107264499240529126203615247542962717523696246813292701400901838
7014596493804895055489162667714643339621047467730885547389609218656328
1304389610221309698896339609553328239769259083834793972309381025663926
3321961717371106876038272584327204427484277415462253350996181572959171
6324623224814025900498094435024166127959403699109890

. . . mais vous trouverez une expression plus intelligente!

Indications:

(a) Montrer que

$$S = \sum_{n=1}^{2020} (n-1)2^n + \sum_{n=1}^{2020} 2^n$$

(b) Montrer que

$$S = 2S - 2 \cdot 2020 \cdot 2^{2020} + \sum_{n=1}^{2020} 2^n$$

(c) Utiliser la relation $(1 + x + x^2 + ... + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}$.