Série 11

David Wiedemann

12 mai 2021

Pour simplifier la notation, pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, on définit

$$\mathcal{G}(f, [a,b]) = \{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}$$

Soit $\epsilon > 0$.
On va montrer que le bord de l'ensemble A est négligeable.
Pour montrer celà, on va montrer qu'il existe une collection finie de pavés de $R_1, \ldots, R_k$, tel que

$$\partial A \subset \bigcup_{i=1}^{k} R_k \text{ et que } \operatorname{Vol}(\bigcup_{i=1}^{k} R_k) < \epsilon.$$

Posons d'abord $R_1 = [0, \frac{\epsilon}{12}] \times [0, 3]$.
Car $2+\sin(\frac{1}{x})$ est continue sur $[\frac{\epsilon}{12}, 1]$, par un exercice (Série 21, exercice 1) , on sait qu'il existe un ensemble de pavés $A_1, \ldots, A_j$, tel que Vol $\left(\bigcup_{i=1}^{j} A_i\right) < \frac{\epsilon}{4}$ et $\mathcal{G}\left(2 + \sin(\frac{1}{x}), [\frac{\epsilon}{2}, 1]\right) \subset \bigcup_{i=1}^{j} A_i$.
On définit alors pour $1 < i \leq j+1$, $R_i = A_{i-1}$.
De plus, on définit encore

$$R_{j+2} = \left[1 - \frac{\epsilon}{8(2+\sin(1))}, 1 + \frac{\epsilon}{8(2+\sin(1))}\right] \times [0, 2+\sin(1)]$$
$$R_{j+3} = [0,1] \times [-\frac{\epsilon}{8}, \frac{\epsilon}{8}]$$

Faisons d'abord l'observation que $\partial A \subset \bigcup_{i=1}^{j+3} R_i$.
De plus,

$$\operatorname{Vol}(\bigcup_{i=1}^{j+3} R_i) \leq \operatorname{Vol}(R_1) + \operatorname{Vol}(\bigcup_{i=1}^{j} A_i) + \operatorname{Vol}(R_{j+2}) + \operatorname{Vol}(R_{j+3}) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.$$

Et ainsi, le bord de A est négligeable, ce qui implique que A est mesurable au sens de Jordan.