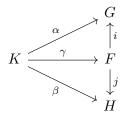
EPFL - Automne 2020	Prof. Z. Patakfalvi
Structures Algébriques	Exercices
Série 6	23 Octobre 2020

Veuillez télécharger vos solutions aux exercices à rendre (Exercice 6) sur la page Moodle du cours avant le lundi 2 novembre, 18h.

## 1 Exercices

Exercise 1 (Unicité du produit).

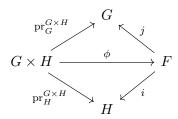
Soient G, H deux groupes. Supposons qu'il existe un groupe F, muni de deux homomorphismes  $i \colon F \to G$  et  $j \colon F \to H$ , qui vérifie la propriété universelle du produit : pour tout groupe K et toute paire d'homomorphismes  $\alpha \colon K \to G$  et  $\beta \colon K \to H$ , il existe un unique homomorphisme  $\gamma \colon K \to F$  tel que le diagramme



commute. Dans ce cas, montrez qu'il existe un unique isomorphisme

$$\phi \colon G \times H \xrightarrow{\cong} F$$

tel que le diagramme



commute.

Indication : Utilisez la propriété universelle pour construire  $\phi$  et son potentiel inverse.

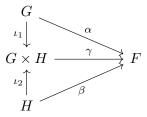
## Exercise 2.

Soient G, H des groupes abéliens. On définit deux homomorphismes

$$\iota_1 \colon G \longrightarrow G \times H, \quad g \mapsto (g, 0_H)$$

$$\iota_2 \colon H \longrightarrow G \times H, \quad h \mapsto (0_G, h).$$

Montrez que  $(G \times H, \iota_1, \iota_2)$  satisfait la propriété universelle suivante : pour tout groupe abélien F et toute paire d'homomorphismes  $\alpha \colon G \to F$  et  $\beta \colon H \to F$ , il existe un unique homomorphisme  $\gamma \colon G \times H \to F$  tel que le diagramme



commute.

Cette propriété est en un sens la propriété duale de celle décrite dans la Proposition 3.2.9. — Que se passe-t-il dans le cas non-abélien?

**Exercise 3** (Commutativité et associativité du produit). Soient  $G_1, G_2, G_3$  des groupes.

1. Montrez qu'il existe un unique isomorphisme  $\varphi \colon G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$  tel que les diagrammes

$$G_1 \times G_2 \xrightarrow{\varphi} G_2 \times G_1$$

$$\operatorname{pr}_{G_i}^{G_1 \times G_2} \xrightarrow{G_i} G_i$$

commutent pour i = 1, 2.

2. Remarquez que le produit  $G_1 \times (G_2 \times G_3)$  admet des homomorphismes vers  $G_1, G_2, G_3$  construits de la manière suivante :

$$\operatorname{pr}_{G_1}^{G_1 \times (G_2 \times G_3)} \colon G_1 \times (G_2 \times G_3) \to G_1$$

et

$$\mathrm{pr}_{G_{i}}^{G_{1}\times(G_{2}\times G_{3})}\colon G_{1}\times(G_{2}\times G_{3}) \xrightarrow{\mathrm{pr}_{G_{2}\times G_{3}}^{G_{1}\times(G_{2}\times G_{3})}} G_{2}\times G_{3} \xrightarrow{\mathrm{pr}_{G_{i}}^{G_{2}\times G_{3}}} G_{i}$$

pour i=2,3. De la même manière, le produit  $(G_1\times G_2)\times G_3$  admet un homomorphisme  $\operatorname{pr}_{G_j}^{G_1\times (G_2\times G_3)}$  vers  $G_j$  pour j=1,2,3.

Montrez qu'il existe un unique isomorphisme  $\psi$ :  $G_1 \times (G_2 \times G_3) \cong (G_1 \times G_2) \times G_3$  tels que les diagrammes

$$G_1 \times (G_2 \times G_3) \xrightarrow{\psi} (G_1 \times G_2) \times G_3$$

$$\operatorname{pr}_{G_j}^{G_1 \times (G_2 \times G_3)} \xrightarrow{Q_1} G_j$$

commutent pour j = 1, 2, 3.

Indication: Dans les deux points, utilisez la description explicite du produit de groupes pour construire des isomorphismes.

#### Exercise 4.

Montrez que  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  n'est pas isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

#### Exercise 5.

Montrez que les sous-groupes de  $\mathbb{Z}$  sont tous de la forme  $n\mathbb{Z}$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 2 Exercice à rendre

**Exercise 6.** 1. Soit G un groupe. Construisez une bijection explicite entre  $\{\text{homomorphismes } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to G\}$  et  $\{g \in G \mid g^2 = e_G\}$ .

2. Montrez que  $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{\times} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Indication: utilisez le point précédent et l'Exercice 2 pour construire un homomorphisme  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{\times}$ .

# 3 Exercice supplémentaire

#### Exercise 7.

Soit  $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  une collection de groupes indexés par les entiers naturels.

1. Considérons l'ensemble

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} G_n := \{ (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid g_n \in G_n \forall n \in \mathbb{N} \}.$$

Donnez une structure de groupe à  $\prod_n G_n$ , qui soit telle que l'application de projection

$$\prod_{n} G_n \longrightarrow G_m, \quad (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto g_m$$

soit un morphisme de groupe pour tous les  $m \in \mathbb{N}$ .

## 2. Posons maintenant

$$G:=\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}/8\mathbb{Z},\quad H:=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} imes G.$$

Montrez qu'il existe des homomorphismes injectifs  $G \hookrightarrow H$  et  $H \hookrightarrow G$ , mais que G et H ne sont pas isomorphes. En particulier, l'équivalent de Cantor-Schröder-Bernstein n'est pas vrai pour les groupes. Indication : s'il existait un isomorphisme  $\phi \colon H \to G$ , alors  $\phi(([1], 0_G))$  serait 2-torsion. En déduire que  $([1], 0_G)$  serait divisible par 4 dans H, ce qui est impossible.

3. Soit G comme dans le point précédent. Montrez que  $G\cong G\times G.$