Analyse III

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Introduction

Thu 23 Sep

1 Rappels

Theorème 1 (de la fonction inverse)
Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tel que $Df|_x$ est inversible. Alors il existe un voisinage V de x, un voisinage W de $f(x)$ tel que f est une bijection de V a W et dont l'inverse est aussi derivable. De plus $Df^{-1}|_{f(x)} = (Df|_x)^{-1}$

Theorème 2 (de la fonction implicite)
Soit $U \subset \mathbb{R}^n, W \subset \mathbb{R}^p$ et $f : U \times W \to \mathbb{R}^n$ une fonction C^1 et $(x, z) \in U \times W$ tel que

$$Df|_{(x,z)} = \left[Dxf|_{(x,z)}|D_z f_{(x,z)}\right]$$

est telle que $D_x f|_{(x,z)}$ est inversible.
Alors si $f(x, z) = 0$, il existe un voisinage Z de z et une fonction $g : Z \to V$ tel que $f(g(\tilde{z}, \tilde{z})) = 0$ et

$$Dg|_z = -(D_x f|_{(x,z)})^{-1} D_z f|_{(x,z)}$$

2 Nombres Complexes

De meme que $\mathbb{R}$ est obtenu a partir de $\mathbb{Q}$ en faisant une operation de completion (topologique).
$\mathbb{C}$ est obtenu a partir de $\mathbb{R}$ en faisant une operation de completion algebrique ; on requiert simplement qu'il existe une solution a $x^2 + 1 = 0$.

Lecture 2: Intro Complexes

Mon 27 Sep

3 Nombres Complexes

Si on veut etendre $\mathbb{R}$ en un corps qui contienne i, on obtient $\mathbb{C}$.
On perd la relation d'ordre sur les complexes.
Geometriquement, on represente les nombres complexes dans le plan.

Remarque
L'argument d'un nombre complexe n'est defini que modulo 2π.
La representation polaire est particulierement pertinente pour la multiplication

$$|zw| = |z||w| \text{ et } arg(zw) = arg(z) + arg(w)$$

Ce sera prouve de maniere elegante plus tard, mais on pourrait le verifier avec les formules trigonometriques.

C'est consistant avec la notation $z = re^{i\theta}$. Un choix frequent pour θ est de definir arg sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ en le prenant dans $(-\pi, \pi)$.

Solutions de $z^n = w$

pour $n \in \mathbb{N}^*, w \in \mathbb{C}^*$, il existe n solutions

$$\left\{|\omega|^{\frac{1}{n}} e^{i(arg(w)+2k\pi)/n} | k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3.1 Topologie sur $\mathbb{C}$

Comme en analyse reelle, l'outil principal est $|\cdot|$ complexe.
Les objets de choix pour parler de convergence sont $(x-r, x+r)$ et $[x-r, x+r]$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ leurs analogues sont $D(z,r) = \{\omega \in \mathbb{C} | |z-w| < r\}$.
On a $D(z,r) = \overline{D}(z,r) \setminus D(z,r)$ est le cercle de rayon r centre en z.
Un ensemble $U \subset \mathbb{C}$ est dit ouvert si $\forall z \in U \exists \delta > 0$ tel que $D(z,\delta) \subset U$.
Un domaine est un ouvert connexe.

3.2 Echange de sommes

— Sur $\mathbb{R}$, si $a_{n,m} \geq 0$ on peut toujours dire

$$\sum_n \sum_m a_{n,m} = \sum_m \sum_n a_{n,m}$$

— Idem si la somme converge absolument.

Theorème 4 (fondamental de l'algebre)
Si P est un polynome de degre ≥ 1, alors $\exists z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$

Corollaire 5
Tous les polynomes peuvent etre factorise.

4 Analyse Complexe

4.1 Fonctions analytiques complexes

But : aller plus loin que les polynomes.
On considere des series entieres

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_*)^n$$

Les fonctions analytiques sont les fonctions definies par des series entieres convergentes.

Definition 1 (Serie entiere)
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_*^n)$ *une serie entiere centree en* z_*

Definition 2 (Convergence de series entieres)
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$ *si* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k(z - z_*)^k$ *existe.*

Definition 3 (Convergence uniforme)
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$ *converge uniformement sur* $K \subset \mathbb{C}$ *si elle converge sur* K *et si*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k(z - z_*)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_*)^k \quad {}_{\infty,K} = 0$$

Definition 4 (Convergence d'une suite de fonctions)
Si $f_k : K \to \mathbb{C}$ *est une suite de fonctions tel que* $\sum_{k=0}^{\infty} f_{k\infty,K} < +\infty$*, on dit que* $\sum f_k$ *converge normalement.*

Lemme 6
La convergence normale implique la convergence uniforme.

Lecture 3: fonctions complexes

Thu 30 Sep

4.2 Rayon de Convergence

Definition 5 (Rayon de convergence)
Le rayon de convergence de $\sum_n a_n(z - z_*)^n$ *est*

$$\rho = \sup \left\{ r \geq 0 : \sum a_n(z - z_*)^n \text{ converge sur } D(z^*, r) \right\}$$

On a $\rho \in [0, \infty]$*.*
Ou de maniere equivalent

$$\sup \left\{ r \geq 0 : \sum |a_n||r|^n \text{ converge } \right\}$$

Lemme 7
Si $\sum a_n z^n$ *a rayon de convergence* ρ*, alors la serie converge normalement sur* $D(0, \rho)$

Lemme 8
Si $\limsup |a_k|\rho^k < \infty$*, alors le rayon de convergence est* $\geq \rho$*.*

Lemme 9
Si

$$|\frac{a_{k+1}}{a_k}|$$

converge quand $k \to \infty$ alors $|\frac{a_{K+1}}{a_k} \to \rho^{-1}$

$$\rho^{-1} = \limsup(|a_n|)^{\frac{1}{n}}$$

Lemme 10
$\sum a_k z^k, \sum b_n z^n$ *convergent, alors*

$$\sum(a_k + b_k)z^k$$

converge et vaut $\sum a_k z^k + \sum b_k z^k$.
Et si on pose $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

converge et vaut le produit.

4.3 Analyticite et recentrage

Definition 6
Si f est donnee par une serie entiere $\sum a_n z^n$.
On definit les series entieres "derivees" par

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

ou les series derivees ont le meme rayon de convergence que la serie de base car

$$\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup(n^k |a_n|)^{\frac{1}{n}}$$

Lemme 11 (Lemme de recentrage)
Soit $f : D(0,r) \to \mathbb{C}$ *donnee par* $\sum a_n z^n$ *avec rauon de convergence r.*
Soit $z_* \in D(0,r)$. *On a que la serie*

$$\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_*)(z - z_*)^n$$

converge avec rayon de convergence $\geq r - |z_*|$ *ou f^n est la derivee formelle de f definie ci-dessus.*

Preuve

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum a_n z^n \\ &= \sum a_n (z - z_* + z_*)^n \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z - z_*)^k z_*^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} z_*^{n-k} (z - z_*)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!} n(n-1)\dots(n-k+1) z_*^{n-k} (z - z_*) k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_*)}{k!} (z - z_*)^k$$

Si on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 1_{k \leq n} |a_n| \binom{n}{k} |z_*^{n-k}| |z - z_*|^k < \infty \qquad \square$$

or ceci converge car $z_* \in D(0, r)$ *en effet* $\epsilon > 0$ *tel que* $|z_*| + \epsilon < r$

4.4 Zeros isoles

Proposition 12

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ *analytique, non nulle, alors l'ensemble*

$$\{z \in U : f(z) = 0\}$$

ne contient pas de points d'accumulation dans U.

Preuve

Supposons $z_* \in U$ *un point d'accumulation.*
Par le lemme de recentrage $\exists \epsilon > 0$ *tel que* $f(z) = \sum a_n (z - z_*)^n$.
Par hypothese $\exists m$ *tel que* $a_m \neq 0$.
Soit n *le plus petit tel entier*

$$f(z) = (z - z^*)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - z_*)^n \qquad \square$$

Donc il existe un voisinage de z^* *ou* f *est continue (parce que la serie converge uniformement sur les compacts).*