

# Fluides et Electromagnetisme

David Wiedemann

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Notations du cours et maths necessaires</b>	<b>3</b>
1.1	Scalaire et Vecteurs . . . . .	3
1.2	L'operateur $\nabla$ ( nabla) et la definition du gradient, de la divergence et du rotationnel . . . . .	3
1.3	Formules d'integration . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Fluides au repos</b>	<b>4</b>
2.1	Introduction . . . . .	4
2.2	Densite de fluide . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Pression dans un fluide</b>	<b>5</b>
3.1	Pression hydrostatique . . . . .	5
3.2	Densite de force associee a la pression . . . . .	6
3.3	Poussee d'Archimede . . . . .	7
3.4	Tension superficielle . . . . .	7
3.4.1	Origine et definition de la tension superficielle . . . . .	7
3.4.2	Quelques consequences immediates de la tension superficielle . . . . .	7
3.5	Interface solide/liquide/gaz . . . . .	8
3.6	Loi de laplace . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Dynamique des fluides</b>	<b>9</b>
4.1	Types d'ecoulement . . . . .	9
4.2	Derivee convective . . . . .	9
4.3	Equations fluides . . . . .	10
4.3.1	Equations de continuite( description Eulerienne) . . . . .	10
4.4	Equation d'Euler . . . . .	11
4.5	Equation d'etat . . . . .	11
4.6	Theoreme de Bernoulli . . . . .	12
4.7	Applications de Bernoulli . . . . .	14
4.8	Ecoulement d'un fluide visqueux . . . . .	14
4.8.1	Definition de la viscosite . . . . .	15

4.8.2	Force de viscosite par unite de volume et equation de Navier-Stokes incompressible . . . . .	16
4.8.3	Resolution Navier-Stokes avec l'ecoulement de Poiseuille . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Phenomenes Ondulatoires</b>	<b>19</b>
5.1	Onde transverse et longitudinale et l'equation d'onde . . . . .	19
5.2	Ondes sinusoidales . . . . .	20
5.3	Ondes stationnaires . . . . .	20
5.4	Ondes en $3D$ . . . . .	21
5.5	Quelques consequences du principe de superposition . . . . .	21
5.6	Vitesse de phase et de groupe . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Ondes dans les milieux fluides</b>	<b>22</b>
6.1	Ondes dans un fluide uniforme . . . . .	22
6.2	Tuyaux d'orgues . . . . .	25
6.3	Ondes lineaires a la surface d'un fluide parfait . . . . .	25
<b>7</b>	<b>L'electromagnetisme</b>	<b>26</b>
7.1	Electrostatique . . . . .	26
7.1.1	Charge electrique . . . . .	26
7.1.2	L'unite de la charge . . . . .	26
7.2	Loi de Coulomb . . . . .	26
7.2.1	Principe de superposition . . . . .	27
7.3	Champs Electriques . . . . .	27
7.3.1	Champ electrique du a une distribution des charges quelconque . . . . .	28
7.3.2	Densite de charge de surface . . . . .	28
7.3.3	Lignes de champ electrique . . . . .	30
7.4	Loi de Gauss . . . . .	32
7.4.1	Enonce de la loi de Gauss . . . . .	32
7.4.2	Preuve de la loi de Gauss . . . . .	34
7.5	Le potentiel electrostatique . . . . .	37
7.5.1	Quelques proprietes de $\phi$ ( et de $E$ ) en electrostatique . . . . .	38
7.6	Le role des conducteurs en electrostatique . . . . .	41
7.6.1	Proprietes de base . . . . .	41

## List of Theorems

4	Theorème (Theoreme du gradient) . . . . .	4
5	Theorème (Theoreme de La divergence( de Gauss) ) . . . . .	4
6	Theorème (Theoreme de Stokes) . . . . .	4
10	Theorème (Theoreme de Bernoulli) . . . . .	14

# 1 Notations du cours et maths necessaires

## 1.1 Scalaires et Vecteurs

On distingue les quantites scalaires ( pression, masse, la charge electrique ) et les quantites vectorielles (vitesse, force) .

Dans un repere 3D, les vecteurs de base unitaires  $e_x, e_y, e_z$

On definit un champ scalaire( resp. vectoriel) par une fonction  $p(\vec{r}, t)$  qui depend de la position et du temps.

## 1.2 L'operateur $\nabla$ ( nabla) et la definition du gradient, de la divergence et du rotationnel

En coordonnes cartesiennes, on a

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

On note

$$\frac{\partial p}{\partial x}(\vec{r}, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(x+h, y, z, t) - p(x, y, z, t)}{h}$$

- Le gradient, note  $\nabla f$  d'un champ scalaire  $f(\vec{r}, t)$  est un champ vectoriel donne par

$$\nabla f(\vec{r}, t) = e_x \frac{\partial f}{\partial x} + e_y \frac{\partial f}{\partial y} + e_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

- La divergence, notee  $\nabla \cdot \vec{u}$  d'un champ vectoriel  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  est un champ scalaire donne par

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

- Le rotationnel  $\nabla \times \vec{u}$  d'un champ vectoriel est un champ vectoriel donne par

$$\nabla \times \vec{u}(\vec{r}, t) = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (u_x, u_y, u_z)$$

### Remarque

*On peut utiliser  $\nabla$  comme un vecteur, mais il faut faire attention car les operations sont pas commutatives.*

### Remarque

*Souvent, on ecrit  $\partial_x$  pour  $\frac{\partial}{\partial x}$*

### Remarque

*Les expressions du gradient, divergence, rotationnel sont independantes du systeme de coordonnees*

### 1.3 Formules d'intégration

**Theorème 4 (Theoreme du gradient)**

Soit un volume  $V$  quelconque dans l'espace et soit  $S$  la surface fermée limitant le volume  $V$  ( on note  $S = \partial V$  ).

A chaque element de la surface, on assimile un vecteur orthogonal a la surface en ce point. On le note  $d\vec{S}$  et il represente le "petit element" de surface.

Alors on a

$$\iint_S f d\vec{S} = \iiint_V \nabla f dV$$

**Theorème 5 (Theoreme de La divergence( de Gauss) )**

Le flux d'un champ vectoriel  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  au travers d'une surface  $S$  :

$$\phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Soit une surface fermée  $S = \partial V$  et  $d\vec{S}$  qui point vers l'exterieur de  $V$ , alors on a

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV$$

**Theorème 6 (Theoreme de Stokes)**

On definit la circulation d'un champ vectoriel  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  le long d'une courbe fermée  $\Gamma$  :

$$\Sigma = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Dans ce cas la, on a

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

L'orientation relative de  $d\vec{l}$  et  $d\vec{S}$  est donnée par la règle de la main droite.

## 2 Fluides au repos

### 2.1 Introduction

On appelle un fluide un corps qui est a l'etat liquide, gazeux, ou plasma, systeme d'un grand nombre de particules qui est susceptible de s'écouler facilement.

Autrement dit, un corps deformable/qui n'a pas de forme propre.

Pour beaucoup d'applications : un fluide est decrit par sa densite de masse  $\rho(\vec{r}, t)$ , la pression (  $p(\vec{r}, t)$  ) et la vitesse  $\vec{u}(\vec{r}, t)$

Dans ce chapitre, on suppose  $\vec{u}(\vec{r}, t) = 0, \rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r})$  et  $p(\vec{r}, t) = p(\vec{r})$

## 2.2 Densite de fluide

Supposons un recipient avec un fluide dedans et un systeme de coordonnees.

On note

$$\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

pour la densite moyenne.

On prend ensuite la limite  $\Delta V \rightarrow dV$  et on obtient ainsi

$$\rho(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow dV} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

## Lecture 2: Pression dans un fluide

Fri 26 Feb

## 3 Pression dans un fluide

La pression dans un fluide est definie par la force par unite de surface exercee par le fluide sur une paroi ou sur une autre partie du fluide. Cette force sera perpendiculaire a la surface. On note

$$\vec{dF} \left[ \frac{N}{m^2} = \text{Pascal} = \text{Pa} \right] = p d\vec{S}$$

La pression est donnee par un champ scalaire.

L'isotropie de la pression suit naturellement dans le cas ou il n'y a pas de forces de cisaillement( = forces tangentielles a la surface)

### 3.1 Pression hydrostatique

On veut determiner  $p(\vec{r})$  pour un fluide au repos.

On supposera un fluide incompressible ( la densite est constante).

On considere un recipient contenant un fluide et un pave droit de dimension  $dy, dx$  et  $z_2 - z_1$ .

On utilise

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

selon  $z$ .

On a donc une force  $F_1$  s'appliquant en haut et  $F_2$  s'appliquant en bas et finalement  $F_g$ , on a donc

$$F_1 + F_g - F_2 = 0$$

$$p(z_1)dx dy + \rho dx dy (z_2 - z_1)g - p(z_2)dx dy = 0$$

$$p(z_2) = p(z_1) + \rho g(z_2 - z_1)$$

pour  $z_1 = 0$  et  $z_2 = h$ , on trouve

$$p(h) = p(0) + \rho gh = p_0 + \rho gh$$

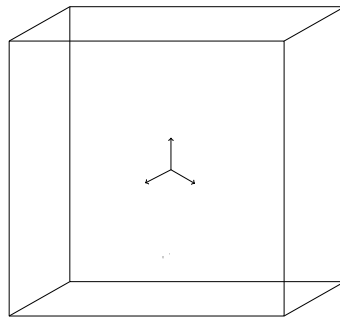
Ainsi, la variation d'un fluide au repos ne depend que de la profondeur, mais est independante de la forme du fluide et ne varie pas perpendiculairement a la pesanteur.

## Lecture 3: Hydrostatique

Tue 02 Mar

### 3.2 Densite de force associee a la pression

Calculons la force exercee sur un volume de fluide infinitesimal du a la pression.



On suppose qu'on connait  $p(\vec{r})$ .

$$\vec{F}_1 = p(\vec{r}(-\frac{dx}{2}, 0, 0))dydz\vec{e}_x$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^6 \vec{F}_i &= (-p(\frac{dx}{2}, 0, 0) - p(-\frac{dx}{2}, 0, 0))dydz + \dots \\ &= -\frac{p(\frac{dx}{2}, 0, 0) - p(-\frac{dx}{2}, 0, 0)}{dx}dxdydz\vec{e}_x + \dots \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x}dV\vec{e}_x + \dots = -\nabla p dV\end{aligned}$$

donc la densite de force associee a la pression est  $-\nabla p$ .

### 3.3 Poussee d'Archimede

Tout corps plonge dans un fluide recoit de la part de celui-ci une poussee verticale egale au poids du fluide deplace

### 3.4 Tension superficielle

Experience :

On a des tubes de largeurs differentes, ouverts en haut et plonge dans l'eau.

On note que le niveau d'eau monte a un niveau de  $h\alpha\frac{1}{r}$

Semble etre une contradiction de la pression hydrostatique.

On verra que ce phenomene est du a la tension superficielle. La loi  $p(h) = p_0 + \rho gh$  reste valable dans le fluide, mais pas necessairement a la surface.

#### 3.4.1 Origine et definition de la tension superficielle

On considere a nouveau un fluide, il est constitue de particules ayant des interactions entre elles ( inter moleculaires, etc)

Il y a moins de telles liaisons pour une molecule a la surface du fluide. Pour amener cette molecule la-bas et pour augmenter la surface, il faut faire un travail.

Experience :

Soit un film de liquide ( eau savonneuse) tendu dans un cadre ABCD.

Si on tend le cadre, il ya une force qui s'y oppose.

Le travail est donc proportionel au changement de surface

$$\Delta W = \gamma \Delta S = \gamma BC \Delta k \cdot 2$$

Le 2 apparait parce que il y a 2 surfaces ( liquide/gaz)

Donc on a

$$F = 2F_\gamma = 2BC\gamma$$

L'interface liquide/gaz est un peu comme une membrane elastique, mais la force est independante de la deformation.

Experience

Mesure de  $\gamma$  On plonge un cylindre attache a un newton metre dans le liquide.

On mesure la force necessaire pour faire apparaitre un film lie au cylindre et on prend la difference entre cette force et la force  $F_G$ .

#### 3.4.2 Quelques consequences immediates de la tension superficielle

Les bulles de savon minimisent leur surface et c'est pour cela qu'elles sont spheriques.

Meme chose pour les bulles d'eau en apesanteur.

Meme chose pour les cheveux mouilles qui collent.

Certains objets ( trombone, punaises) ou des insectes qui flottent ( qui marchent sur la surface)

## Lecture 4: Interfaces solide/liquide

Fri 05 Mar

### 3.5 Interface solide/liquide/gaz

On considere une goutte sur une surface.

En equilibre la somme des forces sur la ligne tripe est nulle.

Selon l'axe horizontal, on trouve

$$\gamma_{sg} = \gamma_{sl} + \cos \theta \gamma_{lg}$$

Cette propriete s'appelle la loi de Young. Si  $0 < \theta < 90$ , on a un bon mouillage.

Si  $\gamma_{sg} - \gamma_{sl} > \gamma_{lg}$ , on a  $\cos \theta > 1$ , cette situation est non-stationnaire. On parle alors de mouillage total.

Si  $-\gamma_{lg} < \gamma_{sg} - \gamma_{sl} < 0$ , alors  $-1 < \cos \theta < 0$  et donc  $90 < \theta < 180$ ,  $\Rightarrow$  mauvais mouillage.

Si  $\gamma_{sg} - \gamma_{sl} < -\gamma_{lg}$ , alors  $\cos \theta < -1$ , on parle alors de super-hydrophobie ou effet lotus.

### 3.6 Loi de laplace

Notons qu'a l'interieur d'un ballon, il y a une surpression.

Et a l'interieur d'une goutte d'eau, d'une bulle de savon, ... ?

On suppose une goutte de liquide spherique en apesanteur. Les forces s'appliquant sur la goutte donnent

$$\sum F_i^{ext} = 0 = \vec{F}_{p_2} + \underbrace{\vec{F}_{p_1}}_{=\pi R^2 p_1 \vec{e}_z} + \underbrace{\vec{F}_\gamma}_{=-2\pi R \gamma \vec{e}_z}$$

Pour  $\vec{F}_{p_2}$ , on a

$$\vec{F}_{p_2} = \iint_S -p_2 \vec{dS} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -p_2 \vec{e}_r R^2 \sin \theta d\theta d\phi = \vec{e}_z \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -p_2 R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi = -\pi R^2 p_2 \vec{e}_z$$

Donc

$$\sum F^{ext} = -2\pi R \gamma \vec{e}_z + \pi R^2 p_1 \vec{e}_z$$

Et donc

$$p_1 - p_2 = \frac{2\gamma}{R}$$

## Lecture 5: Hydrostatique continuation

Tue 09 Mar

### Exemple (Bulle de Savon-deux interfaces)

On note  $p_1$  la pression interne,  $p_2$  la pression externe et  $p_0$  la pression dans l'interface, on a donc

$$p_0 = p_2 + \frac{2\gamma}{R_e} \text{ et } p_1 = p_0 + \frac{2\gamma}{R_i}$$



$$p_1 = p_2 + \frac{2\gamma}{R_i} + \frac{2\gamma}{R_e}$$

comme  $R_i = R_e = R$ ,  $p_1 = p_2 + \frac{4\gamma}{R}$

### Exemple (Capillarite)

On considere  $h \gg l$  et que l'interface liquide/gaz est quasiment spherique.

On a  $p_1 = p_2 + 2\frac{\gamma}{R}$  et  $p_3 = p_2 + \rho gh$ .

$$p_1 = p_3 = p_{atm}$$

On trouve que  $\frac{2\gamma}{R} = \rho gh$  et donc

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g R} = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r} = \alpha \frac{1}{r}$$

## 4 Dynamique des fluides

On considere des fluides decris par

$$\rho(\vec{r}, t), p(\vec{r}, t), \vec{u}(\vec{r}, t)$$

Vitesse d'un element fluide infinitesimal( vitesse moyenne de toutes les particules dans cet element) .

### 4.1 Types d'ecoulement

- $\vec{u}(\vec{r}, t) = 0$ , ecoulement statique
- $\partial_t \vec{u} = 0, \partial_t \rho = 0, \partial_t p = 0$ , ecoulement stationnaire
- Ecoulement laminaire "couches successive de fluide se deplacent doucement et regulierement l'un a cote de l'autre. ( a basse vitesse)
- Ecoulement turbulent si non-laminaire.  
Mouvement irregulier et chaotique. ( typiquement a haute vitesse d'ecoulement)

### 4.2 Derivee convective

Attention

$\partial_t \vec{u}$  = variation de  $\vec{u}$  par unite de temps a un endroit fixe  $\neq$  acceleration de l'element fluide a  $(\vec{r}, t)$

On considere la trajectoire d'un element fluide au cours du temps.

On veut connaitre la variation temporelle de  $p$  au long de la trajectoire.

au temps  $t$  :  $p(\vec{r}, t)$

au temps  $t + dt$  : position  $\vec{r} + \vec{u}(\vec{r}, t)dt$ , pression  $p(\vec{r} + \vec{u}(\vec{r}, t)dt, t + dt)$

$$\begin{aligned} &= p(x + u_x dt, y + u_y dt, z + u_z dt, t + dt) \\ &= p(x, y, z, t) + \partial_x p u_x dt + \partial_y p u_y dt + \partial_z p u_z dt + \partial_t p dt \\ &= p(\vec{r}, t) + (\vec{u} \cdot \nabla) p dt + \partial_t p dt \end{aligned}$$

On appelle  $(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla)p := \frac{D}{Dt}p$

De meme, la variation temporelle de  $\vec{u}$  le long de la trajectoire (= l'acceleration)

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt}$$

### 4.3 Equations fluides

Pour determiner l'evolution des cinq fonctions  $\rho, p, \vec{u}$  il faut 5 equations.

#### 4.3.1 Equations de continuite( description Eulerienne)

Principe de conservation de masse en absence de sources/pertes. On considere un volume  $V$  fixe dans notre liquide, il definit une surface  $S$  fermee.

variation de masse dans  $V$  = Flux de masse a travers  $S$

On a

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = - \int \int_S \rho(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t) d\vec{S}$$

### Lecture 6: Equations de continuite

Fri 12 Mar

On a trouve que

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = \int \int \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t)$$

Pour la partie de droite, on a

$$- \int \int_S \rho(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t) d\vec{S} = - \int \int \int_V \nabla(\rho \vec{u}) dV$$

Donc

$$\int \int \int_V \frac{\partial}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) dV = 0$$

Pour tout volume  $V$

Et donc

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

#### 4.4 Equation d'Euler

On fait un bilan de la quantite de mouvement. On considere un fluide parfait ( pas de frottement interne).

La quantite de mouvement dans  $V(t)$ , on a

$$\vec{p} = \int \int \int_{V(t)} \rho \vec{u} dV$$

Seconde loi de newton :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \text{forces externes sur la partie du fluide contenue dans } V(t)$$

On va montrer que

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \int \int \int_{V(t)} \frac{D}{Dt}(\rho \vec{u}) + \rho \vec{u}(\nabla \cdot \vec{u}) dV \\ &= \int \int \int_{V(t)} \rho \vec{g} dV - \int \int_{S(t)} p d\vec{S} \\ &= \int \int \int_{V(t)} \rho \vec{g} dV - \int \int \int_{V(t)} \nabla p dV \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(\rho \vec{u}) + \rho \vec{u}(\nabla \cdot \vec{u}) &= \rho \vec{g} - \nabla p \\ \rho \frac{D}{Dt} \vec{u} + \vec{u} \frac{D}{Dt} \rho + \rho \vec{u}(\nabla \cdot \vec{u}) &= \rho \frac{D}{Dt} \vec{u} + \vec{u} \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{u}) \right) \end{aligned}$$

Le dernier terme est nul par l'equation de continuite, et on trouve

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p$$

#### Remarque

*En general, les fluides ont de la viscosite.*

*De plus, tout comme l'equation de continuite, l'equation d'Euler est non-lineaire, la solution a l'equation differentielle est generalement extremement complique.*

#### 4.5 Equation d'etat

equations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) &= 0 \\ \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} &= \rho \vec{g} - \nabla p \end{aligned}$$

Il nous manque encore une equation pour decire un fluide en mouvement :  
l'equation d'etat, qui depend du type de fluide.

$$\frac{D}{Dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0$$

ou  $\gamma$  est l'indice d'adiabaticite.

## Lecture 7: Theoreme de Bernoulli

Tue 16 Mar

### 4.6 Theoreme de Bernoulli

On considere un ecoulement laminaire au travers d'un tube

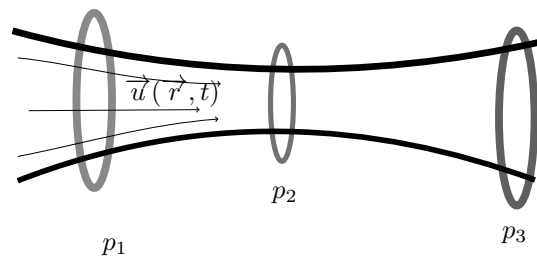


FIGURE 1 – tube 2

On s'interesse a la pression au travers du tube.

On remarque que la pression a diminue dans la partie etroite du tube si  $\vec{u} \neq 0$ .

On explique ce phenome par la theoreme de Bernoulli.

On considere un fluide parfait( pas de viscosite), on considere aussi qu'il est incompressible, et qu'il est en ecoulement stationnaire ( toutes les derivees partielles sont egales a 0), dans un champ de pesanteur  $\vec{g}$  constant.

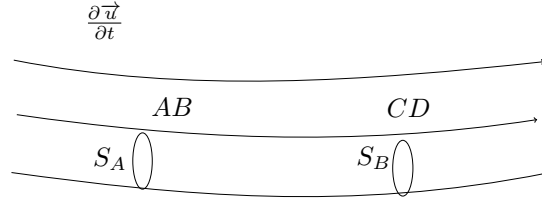


FIGURE 2 – tube de courant

On considère un tube de courant dans ce fluide et on le suit.

A  $t = t_0$  : on a une section  $ABCD$ , en  $t = t_0 + \Delta t$  :  $A'B'C'D'$ . On choisit  $S_A$  et  $\Delta t$  très petit, donc la distance entre  $AB$  et  $A'B' \approx \vec{u}_A \Delta t$ .

On utilise maintenant que

$$\text{Masse de } ABCD = \text{Masse de } A'B'C'D',$$

$$\begin{aligned} m_{A'B'C'D'} &= m_{ABCD} - S_A u_A \Delta t \rho + S_C u_c \Delta t \rho \\ S_A u_A \Delta t \rho &= S_C u_c \Delta t \rho \end{aligned}$$

Donc si la section diminue, la vitesse augmente. On définit

$$V_{ABA'B'} = S_A u_A \Delta t = V_{CDC'D'} =: \Delta V$$

Vu qu'on considère un fluide parfait, pour notre tube de courant, on a

$$\Delta E_{cin} + \Delta E_{pot} = \Delta W$$

Le changement d'énergie cinétique est donné par

$$\Delta E_{cin} = \frac{1}{2} \rho u_c^2 \Delta V - \frac{1}{2} \rho u_A^2 \Delta V$$

Et pour l'énergie potentielle

$$\Delta E_{pot} = \rho \Delta V g z_z - \rho \Delta V z_A g$$

Le travail  $\Delta W$  est dû au travail des forces de pression (  $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$  )

Donc

$$\Delta W = p_A S_A u_A \Delta t - p_C S_C u_C \Delta t$$

Donc

$$\Delta W = (p_A - p_C) \Delta V$$

Donc

$$\frac{1}{2} \rho u_C^2 - \frac{1}{2} \rho u_A^2 + \rho g z_c - \rho g z_A = p_A - p_C$$

Et donc

**Theorème 10 (Theoreme de Bernoulli)**

$$\frac{1}{2} \rho u_A^2 + \rho g z_A + p_A = \frac{1}{2} \rho u_C^2 + \rho g z_c + p_c$$

Ce qui implique que  $\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g z + p$  est constant le long d'une ligne de courant.

## 4.7 Applications de Bernoulli

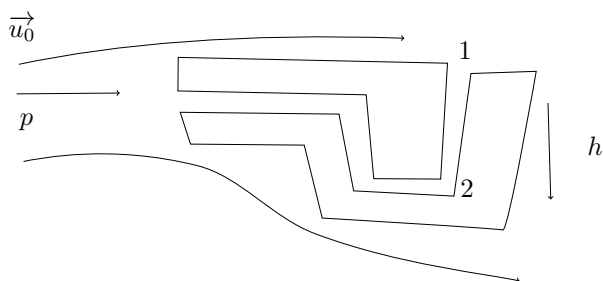


FIGURE 3 – Tube de Pitot

La difference de pression entre le point 1 et 2 permet de mesure la vitesse.

## Lecture 8: Ecoulement d'un fluide visqueux

Fri 19 Mar

### 4.8 Ecoulement d'un fluide visqueux

On se restreins au cas des fluides incompressibles.

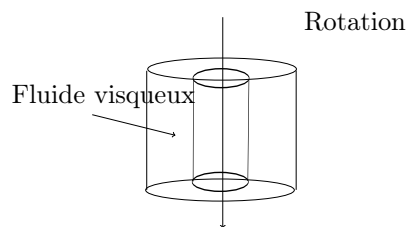


FIGURE 4 – viscosimetre

#### 4.8.1 Definition de la viscosite

##### Exemple (Viscosimetre de Couette)

*Observation :*

*Pour la meme frequence angulaire, le moment de force necessaire pour faire tourner le cylindre depend du type de fluide.*

Imaginons l'experience suivante ( "Ecoulement de Couette"), on a

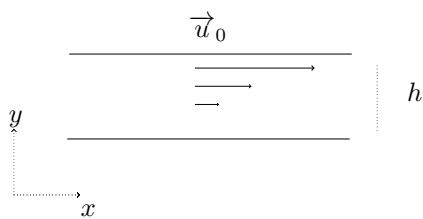


FIGURE 5 – ecoulement de couette

Il nous faut une force externe ( force de cisaillement ), on remarque que

$$F_{ext} \propto S \frac{u_0}{h}$$

On definit  $\eta$  par

$$F_{ext} = \eta S \frac{u_0}{h}$$

$\eta$  s'appelle le coefficient de viscosite dynamique (  $[\eta] = \frac{N}{m^2} s = Pa \cdot s$  ).

On a

$$F_{ext} = \eta S \frac{u_0}{h} = \eta S \frac{\partial u}{\partial y}$$

Les fluides qui obeissent cette loi s'appellent les fluides Newtoniens.

#### 4.8.2 Force de viscosite par unite de volume et equation de Navier-Stokes incompressible

Supposons  $\vec{u}(\vec{r}, t) = u_x(y) \vec{e}_x$

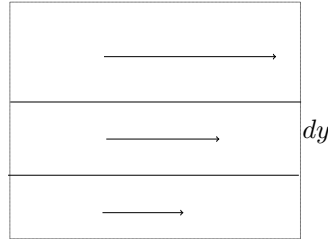


FIGURE 6 – viscosite par volume

La force de viscosite sur un element

$$\begin{aligned} F_{visc} &= -\eta S \frac{\partial u_x}{\partial y}(y) e_x + \eta S \frac{\partial u_x}{\partial y}(y + dy) e_x \\ &= \eta S dy \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}(y + dy) - \frac{\partial u_x}{\partial y}}{dy} e_x \\ &= dV \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} e_x \end{aligned}$$

Et donc le terme

$$\eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

est la force par unite de volume.

Dans le cas general, pour un fluide incompressible ( sans preuve) est donne par

$$\eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \vec{u} = \eta \Delta \vec{u}$$



Les equations pour un fluide incompressible et visqueux sont donc :

$$\rho = \text{const}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \eta \Delta \vec{u} \rightarrow \text{Navier-Stokes incompressible}$$

Les conditions de bords sont donnees par

$$\vec{u} = 0$$

a l'interface avec des parois immobile.

#### 4.8.3 Resolution Navier-Stokes avec l'ecoulement de Poiseuille

Ecoulement laminaire dans un tube

On force un ecoulement laminaire

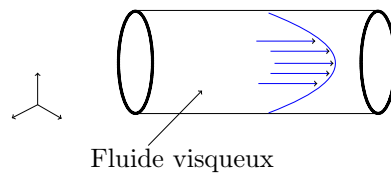


FIGURE 7 – glicerine dans un tube

Dans un cas plus simple

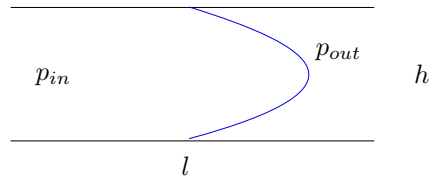


FIGURE 8 – écoulement plaques

On suppose  $\rho$  constant, on neglige la pesanteur et on pose

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}_x(y) \vec{e}_x$$

## Lecture 9: Resolution Ecoulement de Poiseuille

Tue 23 Mar

Verifions que l'équation de continuité est satisfaite.

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Ceci est clair par hypothèse.

De manière générale

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \eta \Delta \vec{u}$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_x(y) \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_x(y) \\ 0 \\ 0 \uparrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc  $0 = -\nabla p + \eta \Delta \vec{u}$ , et donc selon  $y$ .

$$0 = \frac{-\partial p}{\partial y} \Rightarrow p = f(x, z)$$

de même selon  $z$ , et donc la pression dépend seulement de  $x$ .

Ainsi

$$0 = \underbrace{\frac{-\partial p}{\partial x}}_{\text{dépend de } x} + \underbrace{\eta \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_x(y)}_{\text{une fonction de } y}$$

Donc  $p(x) = f(x) = -c_1x + c_2$

Donc

$$p = p_{in} - \frac{p_{in} - p_{out}}{l}x = p_{in} - \frac{\Delta P}{l}x$$

Determinons  $u_x(y)$

$$\eta \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_x = \frac{\partial p}{\partial x} = -c_1$$

Et donc

$$u_x = -\frac{c_1}{2\eta}y^2 + ay + b$$

Les conditions de bord donnent

$$u(-\frac{h}{2}) = -\frac{c_1}{2\eta} \frac{h^2}{4} - a\frac{h}{2} + b = 0$$

$$u(\frac{h}{2}) = -\frac{c_1}{2\eta} \frac{h^2}{4} + a\frac{h}{2} + b = 0$$

Donc

$$u_x(y) = \frac{c_1}{2\eta}(\frac{h^2}{4} - y^2) = \frac{\Delta p}{2\eta l}(\frac{h^2}{4} - y^2)$$

Calculons le debit volumique  $D$  de l'ecoulement

$$\begin{aligned} D &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy \int_0^{s_z} dz u_x(y) \\ &= \frac{\Delta p s_z h^3}{12\eta l} \end{aligned}$$

## 5 Phenomenes Ondulatoires

### 5.1 Onde transverse et longitudinale et l'equation d'onde

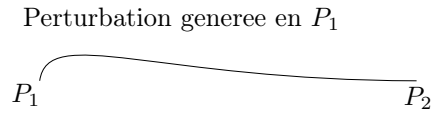


FIGURE 9 – corde suspendue

### Exemple (Corde tendue avec extremités fixées)

La perturbation se fait presque sans perturbation.

On définit la perturbation par  $y_0(x, t)$ .

En  $t = 0$ , on a  $y_0(x, 0) = f(x)$ .

Si la propagation se déplace juste, on a

$$y_0(x, t) = f(x - ct)$$

Si le maximum de  $f(x)$  se trouve en  $x_0$ , le maximum de  $f(x - ct)$  se trouve en  $x = x_0 + ct$ .

$c$  s'appelle la vitesse de propagation de l'onde.

Description mathématique pour des petites perturbations : On va montrer que

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2}$$

Étant donné que c'est une équation différentielle linéaire, si  $f$  et  $g$  sont une solution, alors  $f + g$  le sont aussi.

## 5.2 Ondes sinusoidales

Cas particulier des ondes sont les ondes de la forme

$$y_0(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \phi)$$

## 5.3 Ondes stationnaires

Notons que

$$A \cos(\omega t - kx + \phi)$$

ne respecte pas les conditions de bord.

Comme les ondes sont réfléchies, on cherche une solution de la forme

$$y_0(x, t) = \tilde{A}_1 e^{i(\omega t - kx)} + \tilde{A}_2 e^{i(\omega t + kx)}$$

## Lecture 10: Ondes Stationnaires

Fri 26 Mar

Une onde stationnaire est de la forme

$$y_0(x, t) = d \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cos\left(\frac{\pi c}{n} t + \phi\right)$$

la fréquence est donnée par

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{cn}{2l}$$

Ici,  $c$  est la vitesse de l'onde ( $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ ) Le mouvement arbitraire de la corde est une somme infinie des modes normaux

## 5.4 Ondes en 3D

En 3 dimensions, l'équation d'onde devient

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} = c^2 \Delta y_0$$

Les ondes sinusoidales deviennent des ondes sinusoidales planes

$$y_0 * (\vec{r}, t) = A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

ou  $\vec{k}$  est le vecteur d'ondes.

Une surface equiphase est definie par

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const}$$

On peut choisir  $e_x || \vec{k}$  et alors on a

$$\omega t - \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \omega t - kx$$

Et donc

$$x = \frac{\omega}{k} t - \frac{\phi_0}{k}$$

Donc les surfaces equiphases sont des plans et donc l'onde ( et les surfaces equiphases) se déplacent selon  $\vec{k}$ , avec la vitesse  $\frac{\omega}{k} = c$

## 5.5 Quelques consequences du principe de superposition

Superposition de deux ondes de frequence  $\omega + \Delta\omega$  et  $\omega - \Delta\omega$ , de vecteurs d'onde  $k + \Delta k$  et  $k - \Delta k$  et de dephasage  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , de meme amplitude.

$$y_0 = A e^{i(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x + \phi_1} + A e^{i(\omega - \Delta\omega)t - (k - \Delta k)x + \phi_2}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} & A e^{i(\omega t - kx)} \left( e^{i(\phi_1 - \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} + \Delta\omega t - \Delta kx)} + e^{i(\phi_2 - \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} - \Delta\omega t + \Delta kx)} \right) \\ &= 2A e^{i(\omega t - kx + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2})} \left( e^{i(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} + \Delta\omega t - \Delta kx)} + e^{i(-\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} - \Delta\omega t + \Delta kx)} \right) \\ &= 2A e^{i(\omega t - kx + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2})} \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} + \Delta\omega t - \Delta kx\right) \end{aligned}$$

La partie reelle est donc donne par

$$y_0 = 2A \cos(\omega t - kx + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}) \cos(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} + \Delta\omega t - \Delta kx)$$

Dans le cas  $\Delta\omega = 0 \Rightarrow \Delta k = 0$  et donc

$$y_0 = 2A \cos(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}) \cos(\omega t - kx + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2})$$

## 5.6 Vitesse de phase et de groupe

$\Delta\omega \neq 0$  mais  $\Delta\omega \ll \omega$ .

La vitesse de l'enveloppe  $V_G$  est appelee la vitesse de groupe

$$v_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \simeq \frac{d\omega}{dk}$$

pour  $\omega = ck$  on a une onde sans dispersion.

Pour une onde avec dispersion (  $\frac{\omega}{k} \neq \text{const.}$  ) on a la relation de dispersion  $\omega = \omega(k)$  on a en general

$$v_G = \frac{d\omega}{dk}$$

## Lecture 11: Phenomenes ondulatoires II

Tue 30 Mar

- Une onde sinuisoidale se deplace avec une vitesse de phase  $v = \frac{\omega}{k}$
- Une pule ( superposition d'ondes sinuisoidales) se deplace avec une vitesse de groupe  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ , donc "l'information" se deplace avec  $v_g$

### Exemple

Dans une corde, on a

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{\mu}} k$$

Alors la vitesse de phase est la vitesse de groupe.

Dans le cas d'une vague sur l'eau, alors

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kh)}$$

## 6 Ondes dans les milieux fluides

### 6.1 Ondes dans un fluide uniforme

<i>Equations de continuite</i>	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$
<i>Equations d'Euler</i>	$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p$
<i>Equations d'Etat</i>	$\frac{D}{Dt} \left( \frac{p}{\rho^0} \right) = 0$

En equilibre, on a

$$\rho = \rho_0 = \text{constant}$$

On considere des "petites" perturbations  $\rho_1, \vec{u}_1, p_1$  ( $\rho_1 \ll \rho_0, p_1 \ll p_0, \vec{u}_1 \ll$   
 ?) On pose  $\rho = \rho_0 + \rho_1, \vec{u} = \vec{u}_1, p = p_0 + p_1$ .

En considerant des "petites" perturbations, on peut negliger les termes quadratiques et d'ordre superieur en  $\rho_1, u_1$  et  $p_1$  et leurs derivees.

Ainsi, on linearise les equations.

L'equation de continuite implique

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} + \nabla(\rho_0 u_1 + \rho_1 \vec{u}_1) &= 0 \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{u}_1 &= 0\end{aligned}$$

L'equation d'Euler :

$$\begin{aligned}(\rho_0 + \rho_1) \left( \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + (\vec{u}_1 \cdot \nabla) \vec{u}_1 \right) &= -\nabla(p_0 + p_1) \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} &= -\nabla p_1\end{aligned}$$

L'equation de continuite donne

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u}_1 \cdot \nabla) \right) \left( \frac{p_0 + p_1}{(\rho_0 + \rho_1)^\gamma} \right) = 0$$

en exercice, on montrera que apres linearisation, on a

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial t} = 0$$

A partir de ces equations, on peut derivier des equations d'onde pour  $\rho_1, \vec{u}_1, p_1$  ( Villard, III, chap. 2) .

On cherche des solutions d'onde planes sinusoidales complexes se propageant au long de  $\vec{k}$ , ses solutions ont la forme

$$\begin{aligned}\rho_1(\vec{r}, t) &= \tilde{\rho}_1 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ u_1(\vec{r}, t) &= \vec{u}_1 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ p_1(\vec{r}, t) &= \tilde{p}_1 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}\end{aligned}$$

Les equations differentielles etant lineaires, si  $f$  etait une solution complexe,  $Re(f)$  serait une solution reelle. En substituant ces solutions dans les equations, on trouve

$$\begin{aligned}i\omega \tilde{\rho}_1 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \rho_0 (-i) \vec{k} \cdot \vec{u} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} &= 0 \\ i\omega \tilde{\rho}_1 - i\rho_0 \vec{k} \cdot \vec{u} &= 0\end{aligned}$$

De meme

$$i\omega \rho_0 \vec{u}_1 - i \vec{k} \tilde{p}_1 = 0$$

et finalement

$$i\omega \tilde{p}_1 - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} i\omega \tilde{\rho}_1 = 0$$

Donc

$$\tilde{\rho}_1 = \frac{\rho_0}{\gamma p_0} \tilde{p}_1$$

$$\vec{\tilde{u}}_1 = \frac{1}{\omega \rho_0} \vec{k} \tilde{p}_1$$

Ainsi,  $\vec{\tilde{u}}_1$  est parallele a  $\vec{k}$ . Choississans  $\vec{e}_z || \vec{k}$ , donc  $\vec{k} = k \vec{e}_z$ , et donc

$$\vec{\tilde{u}}_1 = \tilde{u}_1 \vec{e}_z$$

On a donc

$$\rho_1(\vec{r}, t) = \frac{\rho_0}{\gamma p_0} \tilde{p}_1 e^{i(\omega t - kz)}$$

$$u_1(\vec{r}, t) = \frac{k}{\omega \rho_0} \tilde{p}_1 e^{i(\omega t - kz)}$$

$$p_1(\vec{r}, t) = \tilde{p}_1 e^{i(\omega t - kz)}$$

En introduisant les equations d'avant, on trouve

$$i\omega \frac{\rho_0}{\gamma p_0} \tilde{p}_1 = i\rho_0 \vec{k} \cdot \vec{k} \frac{1}{\omega \rho_0} \tilde{p}_1$$

$$\omega^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} k^2$$

Et donc

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$$

**Quelle est la condtion sur la vitesse pour des petites perturbations de  $\vec{u}_1$**

On a suppose qu'on peut negliger  $(\vec{u}_1 \cdot \nabla) \vec{u}_1 << \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}$ .  
En choisissant nos coordonnees tel que  $\vec{k} || \vec{e}_z$ , alors

$$\vec{u}_1(\vec{r}, t) = |\vec{\tilde{u}}_1| \cos(\omega t - kz + \phi) \vec{e}_z$$

Donc

$$|\vec{\tilde{u}}_1| k |\cos(\omega t - kz + \phi) \cdot \sin(\omega t - kz + \phi)| << \frac{\partial \vec{\tilde{u}}_1}{\partial t} = |\vec{\tilde{u}}_1| \omega |\sin(\omega t - kz + \phi)|$$

Donc, on trouve que

$$|\vec{\tilde{u}}_1| << \frac{\omega}{k} = c$$



## 6.2 Tuyaux d'orgues

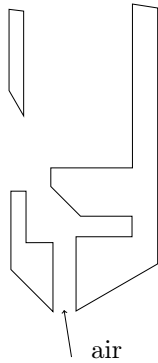


FIGURE 10 – Tuyau d'orgue

*La longueur d'onde est donnée par*

$$l = \frac{\lambda}{2} \text{ et } \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2l}$$

*C'est la fréquence fondamentale qui détermine la note, les deuxièmes, troisièmes, ... harmoniques déterminent le timbre.*

## Lecture 12: Ondes linéaires

Tue 13 Apr

### 6.3 Ondes linéaires à la surface d'un fluide parfait

On considère à nouveau une petite vague à la surface.

On définit par  $h$  la profondeur de l'eau non perturbée.

Si on néglige la viscosité et la tension superficielle et on reste en régime linéaire, on trouve la relation de dispersion

$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

#### Cas 1 : Eau profonde

Si  $kh = \frac{2\pi h}{\lambda} \gg 1$ , alors chaque point se déplace en "cercle"

#### Cas 2 : Eau peu profonde

Si  $kh \ll 1$ , les trajectoires sont aplaties mais ne deviennent pas négligeables. Alors

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{gh}$$

## 7 L'electromagnetisme

On connait quatre types de forces fondamentales

- L'interaction electromagnetique
- L'interaction nucleaire forte
- L'interaction nucleaire faible
- L'interaction gravitationnelle

### L'interaction electromagnetique

- Attractive ou repulsive
- Responsable de la plupart des phenomenes quotidiens
  - electricite
  - lumiere
  - structure des atomes et molecules
  - gouverne les reactions chimiques

### 7.1 Electrostatique

#### 7.1.1 Charge electrique

On definit deux types de charges, appelees positives et negatives.

Un corps est dit :

- neutre si les charges positives et negatives s'annulent
- charge s'il y a un exces d'un type de charge

#### 7.1.2 L'unite de la charge

On utilisera  $q$  pour indiquer la charge, l'unite est le coulomb  $C$ .

Dans le systeme international (SI), le coulomb est une unite "derivee".

1 coulomb est donne par un ampere pendant 1 seconde.

Il existe une charge elementaire  $e$ .

Un electron a une charge  $-e$  et un proton a une charge  $+e$ . Toutes les charges observables sont des multiples de  $e$ .

### Conservation de la charge

La quantite de charge totale est toujours conservee.

### 7.2 Loi de Coulomb

On considere deux charges ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$  et on considere le vecteur  $r_{12}$  qui relie les deux points. La loi de Coulomb donne

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|r_{12}|^2} \frac{r_{12}}{|r_{12}|}$$

Ou encore

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|r_{12}|^3} r_{12}$$

Par Newton on a bien sur que

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

### 7.2.1 Principe de superposition

Pour trois charges  $q_1, q_2$  et  $q_3$  on a que la force sur  $q_3$  en presence de  $q_1$  et  $q_2$  est donne par

$$F_{res} = F_{1 \rightarrow 3} + F_{2 \rightarrow 3}$$

## Lecture 13: Champs Electriques

Fri 16 Apr

### 7.3 Champs Electriques

Soit une charge ponctuelle au point  $r_1$

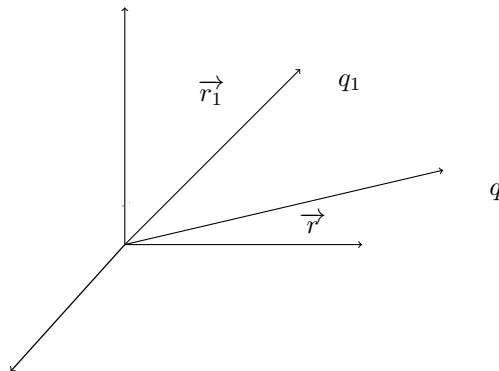


FIGURE 11 – charge ponctuelle

La charge  $q$  va ressentir une force donne par

$$\vec{F}_{1 \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}' - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}' - \vec{r}_1}{|\vec{r}' - \vec{r}_1|}$$

On appelle le champ electrique  $\vec{E}$  genere par  $q_1$ .

A cause du principe de superposition, il suit que le champ electrique  $\vec{E}$  genere par  $n$  charges  $q_i$  aux positions  $\vec{r}_i$ , peut s'ecrire par

$$\vec{E}(\vec{r}') = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r}' - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r}' - \vec{r}_i}{|\vec{r}' - \vec{r}_i|}$$

$\vec{E}$  pointe dans la direction de la force ressentie par une charge positive

### 7.3.1 Champ électrique d'une distribution de charges quelconque

Densité de charge  $\rho_{el}$

On définit

$$\rho_{el} = \lim_{\Delta V \rightarrow dV} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

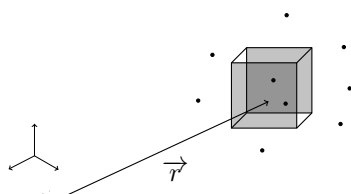


FIGURE 12 – densité de charge

Alors le champ vectoriel devient

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho \vec{e}_i(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

### 7.3.2 Densité de charge de surface

On définit

$$\sigma_{el} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s}$$

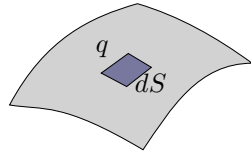


FIGURE 13 – charge de surface

Et on obtient

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_{el}(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS'$$

### Exemple

*Disque de rayon  $R$  uniformément chargé avec  $\sigma_{el} = \text{const.}$*

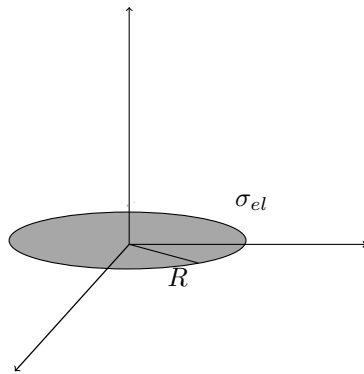


FIGURE 14 – disque charge

*Calculons  $\vec{E}$  le long de l'axe  $z$ , on a donc*

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{disque}} \frac{\sigma_{el}(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS'$$

Par symmetrie, on a toujours que  $\vec{E}(x=0, y=0, z) \parallel \vec{e}_z$ , on a donc

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma_{el}(z-z')}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\|^3} dS'$$

Or comme  $z' = 0$  sur  $S$ , on a

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma_{el}z}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dS'$$

Pour integrer sur le disque  $S$ , on utilise les coordonnees polaires

$$dS' = r' d\theta' dr'$$

et on a que  $x'^2 + y'^2 = r'^2$ , on a donc

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_{el}z}{(r'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} r' d\theta' dr' \\ &= \frac{\sigma_{el}z}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_0^R \frac{r'}{(r'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dr' \\ \dots &= \frac{\sigma_{el}}{2\epsilon_0} \left( \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \end{aligned}$$

En particulier, on voit que

$$E_z \rightarrow \frac{\sigma_{el}}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \text{ quand } R \rightarrow \infty$$

### 7.3.3 Lignes de champ electrique

Les lignes qui sont tangentielles a  $\vec{E}$  en tout point (en analogie avec les lignes de courant )

Ces lignes sont orientees dans la direction de  $E$ .

#### Exemple

Pour une charge ponctuelle positive

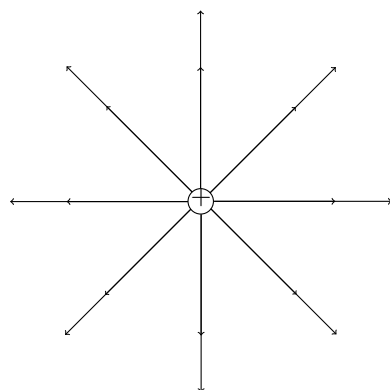


FIGURE 15 – champ électrique d'une charge positive

**Exemple**

*Pour deux charges positives*

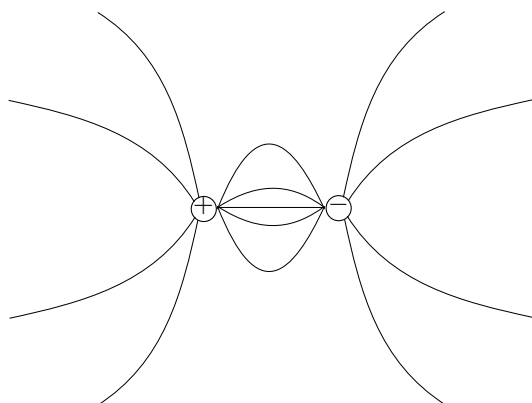


FIGURE 16 – champ deux charges



FIGURE 17 – conducteur avec deux charges positives

Le debut des lignes de champ  $E$  : charges positives ou a l'infini, et la fin des lignes de champ sont a l'infini ou sur la charge negative.

Les lignes de champ peuvent etre parametrees  $\vec{l}(s)$  ( courbe parametree par  $s$ ) determinee par la condition  $\frac{d\vec{l}}{ds} \times \vec{E}(\vec{l}(s)) = 0 \forall s$ <sup>1</sup>

## 7.4 Loi de Gauss

### 7.4.1 Enonce de la loi de Gauss

“ *Le flux du champ electrique a travers une surface  $S$  fermee est egale a la somme des charges electriques contenues dans le volume  $V$  delimite par  $S$ , divise par la permittivite du vide.*”

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_{el} dV$$

On peut aussi reecire ceci comme

$$\frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_{el} dV = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV$$

Ce qui est valable pour tout volume  $V$ . La forme differentielle de la loi de gauss s'ecrit donc

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0}$$

---

1. il faut que  $\frac{d\vec{l}}{ds}$  soit parallele a  $\vec{E}(\vec{l}(s))$



### Exemple

On suppose que le plan  $x - y$  est charge uniformement avec  $\sigma_{el} = \text{const} > 0$

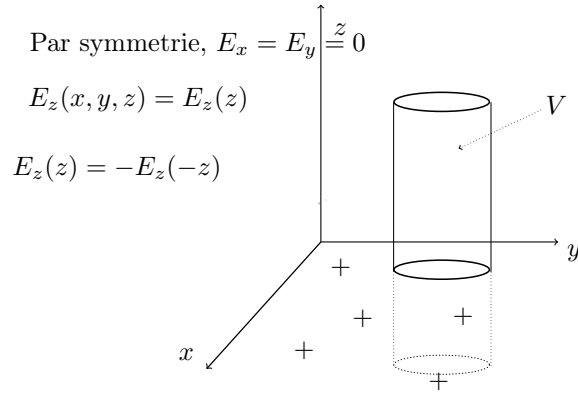


FIGURE 18 – plan charge xy

On a bien sur que  $S = \partial V$ , et on note  $A$  pour l'aire de la section du cylindre.

$$\begin{aligned}
 \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_{top}} E_z(z) \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z dS \\
 &\quad + \iint_{S_{bot}} E_z(-z) \vec{e}_z \cdot -\vec{e}_z dS \\
 &= E_z(z) \iint_{S_{top}} dS + E_z(-z)(-1) \iint_{S_{bot}} dS \\
 &= AE_z(z) - E_z(-z)A = 2E_z(z)A &= \frac{1}{\epsilon_0} \text{ charge totale dans } V \\
 &= E_z(z) = \frac{\sigma_{el}}{2\epsilon_0}
 \end{aligned}$$

### 7.4.2 Preuve de la loi de Gauss

Charge ponctuelle  $q$ ,  $S$  une sphere de rayon  $r$  autour de  $q$

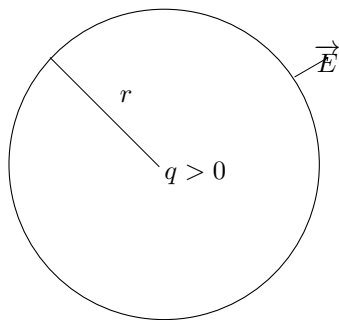


FIGURE 19 – surface avec charge ponctuelle

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_S |\vec{E}| dS \\ &= |\vec{E}| \iint_S dS \\ &= 4\pi r^2 |\vec{E}|\end{aligned}$$

En calculant l'autre cote de la loi de Gauss, on trouve

$$\frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_{el} dV = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Et donc

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Ce qui est vrai par la loi de Coulomb.

### Charge ponctuelle $q$ entourée d'une surface fermée $S$ arbitraire

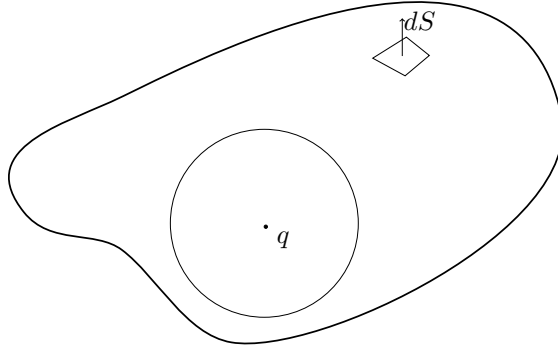


FIGURE 20 – surface arbitraire, charge ponctuelle

Le flux à travers  $d\vec{S}'$  est donné par

$$E' dS'$$

Le flux à travers  $d\vec{S}$  est donné par

$$E dS \cos \theta$$

En comparant les normes, on trouve que

$$E = E' \frac{r'^2}{r^2} \text{ ( loi de Coulomb )}$$

Par géométrie, on a aussi que

$$dS = dS' \frac{r^2}{r'^2} \frac{1}{\cos \theta}$$

Le flux à travers  $dS$  peut s'écrire comme

$$E dS \cos \theta = E' \frac{r'^2}{r^2} dS' \frac{r^2}{r'^2} \frac{1}{\cos \theta} \cos \theta = E' dS'$$

Et donc les deux flux sont les mêmes.

Ceci est valable pour chaque élément  $dS$  et donc le flux de  $E$  à travers  $S$  est le même que le flux de  $E$  à travers  $S'$  et donc la loi de Gauss est satisfaite dans ce cas.

### Charge ponctuelle $q$ a l'exterieur d'une surface $S$ fermee arbitraire

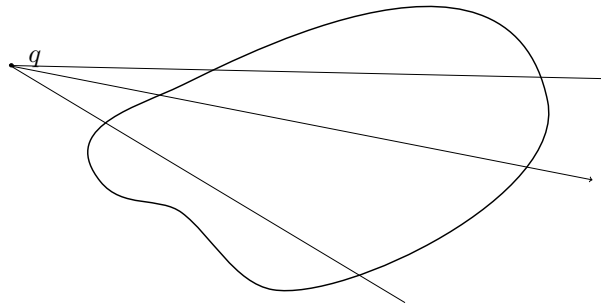


FIGURE 21 – charge  $q$  a l'exterieur

Pour la preuve on va utiliser

FIGURE 22 – preuve charge a l'exterieur

On a donc que la surface  $S_1 + S_2$  est fermee contenant  $q$ , donc on peut ecrire que

$$\begin{aligned} \iint_{S_1+S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q}{\epsilon_0} \\ &= \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

Si on laisse tendre  $d \rightarrow 0$ ,

$$\iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Et donc

$$\iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Le cas general pour une densite de charge abritraire ( qui est juste une somme de charges ponctuelles) suit du principe de superposition.

## 7.5 Le potentiel electrostatique

En electrostatique, on peut definir une fonction scalaire  $\phi(\vec{r})$  tel que  $\vec{E} = -\nabla\phi$ . On appelle  $\phi$  le potentiel elctrostatique.

Montrons l'existence de  $\phi$ .

Soit une charge ponctuelle  $q_1$  a la position  $\vec{r}_1$  :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \text{constante}$$

On calcule

$$\begin{aligned} -\nabla\phi(\vec{r}) &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}} \right) \\ -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}} \right) \\ -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}} \right) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \left( -\frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} \frac{q_1}{(\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2})^{\frac{3}{2}}} 2(x-x_1) \\ \frac{q_1}{(\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2})^{\frac{3}{2}}} 2(y-y_1) \\ \frac{q_1}{(\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2})^{\frac{3}{2}}} 2(z-z_1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \begin{pmatrix} x-x_1 \\ y-y_1 \\ z-z_1 \end{pmatrix} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \end{aligned}$$

Dans le cas general, on a

### Distribution de charges arbitraires

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_{el}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \text{const.} \\ -\nabla\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho_{el}(\vec{r}') (-\nabla) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_{el}(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' = \vec{E}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Pour une densite de charges de surface

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_{el}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' + \text{const}$$

### 7.5.1 Quelques propriétés de $\phi$ ( et de $E$ ) en électrostatique

1. Les unités de  $\phi$  sont le Volt  $V = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} \frac{1}{C} = \frac{\text{“énergie”}}{\text{“charge”}}$ .
2.  $\phi$  est seulement défini à une constante près ( la constante d'intégration.)
3. Le potentiel électrostatique dû à différentes charges est additif.
- 4.

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_x \phi \\ \partial_y \phi \\ \partial_z \phi \end{pmatrix} = 0$$

Et donc

$$\nabla \times \vec{E} = -\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

Par le théorème de Stokes, on a donc

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

## Lecture 15: Propriétés additionnelles

Fri 23 Apr

### Exemple

On considère une sphere avec  $\sigma_{el} = \text{const.}$

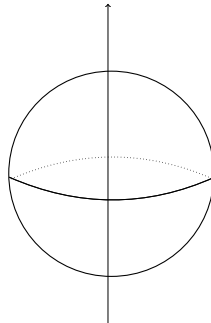


FIGURE 23 – sphere chargée

On a que l'inverse de la propriété 4 ci-dessus est également vraie :

$$\text{Pour } \vec{A}(\vec{r}) \text{ avec } \nabla \times \vec{A} = 0 \forall \vec{r}$$

Alors il existe  $\phi(\vec{r})$  tel que  $\vec{A} = -\nabla \phi$ .

Le travail pour déplacer une charge  $q$  dans un champ  $\vec{E}$  de  $A$  à  $B$  ne dépend pas du chemin suivi et est égal à  $q(\phi(B) - \phi(A))$

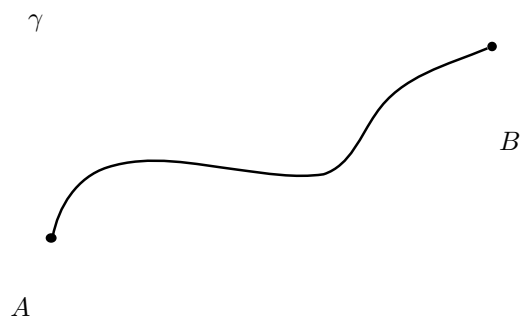


FIGURE 24 – dessin point A point B

### Preuve

On considere  $\gamma$  parametre par  $\vec{l}(s), s \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \omega_\gamma &= \underbrace{\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{l}}_{\text{On considere le travail contre la force}} \\
 &= - \int_\gamma q \vec{E} \cdot d\vec{l} \\
 &= \int_\gamma q \nabla \phi d\vec{l} \\
 &= \int_0^1 q \nabla \phi(\vec{l}(s)) \cdot \frac{d\vec{l}}{ds} ds \\
 &= \int_0^1 q \frac{d\phi(\vec{l}(s))}{ds} ds \\
 &= q\phi(\vec{l}(s))|_0^1 \\
 &= q(\phi(B) - \phi(A)) = \int_{A \rightarrow B} \vec{E} \cdot d\vec{l}
 \end{aligned}$$

est le changement de l'energie potentielle electrostatique par unite de charge si  $q$  est deplace de  $A$  a  $B$ .

On remarque que la difference de potentiel est independante du chemin choisi.

On appelle  $\phi(B) - \phi(A)$  la tension entre  $B$  et  $A$ .

On a aussi que le travail pour deplacer une charge  $q$  le long d'une courbe fermee est toujours nul, ce qui suit immediatement de la propriete precedente.

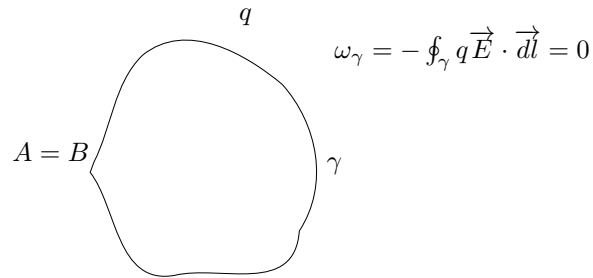


FIGURE 25 – travail sur une courbe fermee

donc  $q\vec{E}$  est une force conservative.

On peut donc definir des surfaces equipotentielles  $\{\vec{r} : \phi(\vec{r}) = \text{const}\}$ . Comme  $\vec{E} = -\nabla\phi$ , les lignes du champ electrique  $E$  sont perpendiculaires aux surfaces equipotentielles

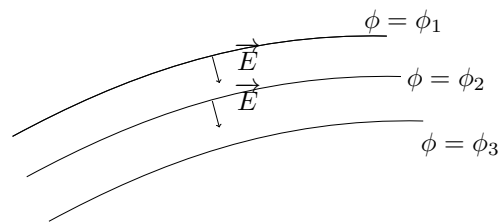


FIGURE 26 – champ electrique perpendiculaire

On prouve ceci avec l'expansion de Taylor

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r} + \vec{h}) &= \phi(\vec{r}) + \nabla\phi(\vec{r}) \cdot \vec{h} + O(|h|^2) \\ &= \phi(\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{h} + O(|h|^2) \end{aligned}$$



Pour  $|h|$  tres petit :

$$= \phi(\vec{r} + \vec{h}) = \phi(\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{h}$$

Donc, si  $\vec{h}$  est tangentiel a la surface equipotentielle au point  $r$ , on peut ecrire que

$$\phi(\vec{r} + \vec{h}) \approx \phi(\vec{r})$$

Et donc

$$\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{h} = 0$$

Et donc  $\vec{E}$  pointe dans la direction perpendiculaire aux surfaces equipotentielles.

## 7.6 Le role des conducteurs en electrostatique

### 7.6.1 Proprietes de base

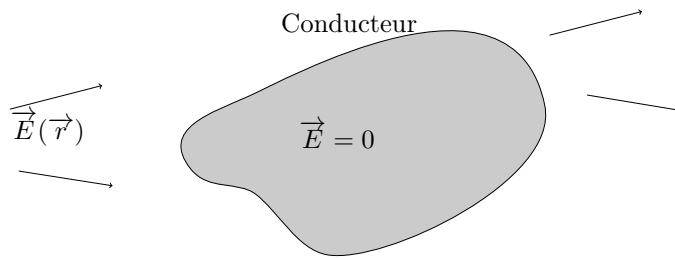


FIGURE 27 – champ electrique avec charges et conducteur

En electrostatique, il n'y a pas de courant, donc

- $\vec{E} = 0$  a l'interieur d'un conducteur ( sinon, les charges libres produiraient un courant)
- $\nabla \cdot \vec{E} = 0 = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0}$ , donc il n'y a pas de densite de charge a l'interieur du conducteur.
- Le conducteur delimite une region ou  $\phi$  ( le potentiel) est constant.
- $\vec{E} = -\nabla\phi \Rightarrow \vec{E}$  est perpendiculaire a la surface du conducteur.
- Des charges peuvent se trouver seulement a la surface du conducteur  $\Rightarrow \sigma_{el} = 0$  possible.