4.1. Montrer qu'il existe $x \in \mathbf{R}$ tel $x^2 = 2020$. Faire une rédaction précise.

4.2. Montrer que si les deux suites $(x_{2n})_{n=0}^{\infty}$ et $(x_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ convergent vers la même limite ℓ, la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ converge vers ℓ.

4.3. On définit la suite de Fibonacci F_n par récurrence comme suit:

$$F_0 = 0, \;\; F_1 = 1, \;\; F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (\forall\, n \geq 2).$$

Prouver cette identité étonnante (connue depuis le dix-huitième siècle déjà):

$$F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}.$$

Indication: On pourra procéder par récurrence.