EPFL Automne 2020

Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 1

Tous les exercices sauf celui marque d'une ($\star$) seront corriges. La correction sera postee sur le moodle apres 2 semaines. La correction de l'exercice ($\star$) ne sera donnee qu'au mois de Janvier pendant les revisions.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) a partir du lundi suivant (et meme plus tard si vous avez besoin de plus de temps) a un assistant.e qui vous donnera une evaluation personalisee de votre solution (mais qui ne vous donnera pas la solution). Il faudra transmettre votre solution, sous forme de fichier pdf, soit un scan de feuilles ecrites a la main, soit un texte tape en LaTeX.

Exercice 1. On considere l'application

$$f : x \in \mathbb{R}_{\geqslant -2} \mapsto x^3 + x \in \mathbb{R}.$$

1. Que vaut $f([-2, +\infty[)$? Que vaut $f([0, +\infty[)$?
2. Que vaut $f^{-1}([0, +\infty[)$? Que vaut $f([-2, +\infty[)$?
3. Cette application est elle injective ?
4. Cette application est elle surjective ?
5. Comment modifier l'espace d'arrivee pour la rendre surjective ?
6. Trouver x_0 le plus petit possible pour cette application avec l'espace de depart $\mathbb{R}_{\geqslant x_0}$ soit injective.

Exercice 2.
1. On considere l'application

$$(p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) \mapsto p + q \in \mathbb{Z}.$$

Pourquoi cette application ne permet-elle pas de definir une application de

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q},\ (p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})\}$$

vers $\mathbb{Z}$ en posant $p/q \mapsto (p, q) \mapsto p + q$.

2. Montrer que en revanche l'application

$$(p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) \mapsto (2^p)^{1/q} \in \mathbb{R}_{>0}$$

permet de finir une application de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{R}_{>0}$.

Exercice 3. Soit $q \geqslant 1$ un entier. On note $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \subset \mathscr{P}(\mathbb{Z})$ l'ensemble des sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ de la forme

$$a \,(\mathrm{mod}\, q) := a + q\mathbb{Z} = \{a + q.k,\ k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$$

(les classes de congruences modulo q).

1. Montrer que l'application

$$\pi_q : a \in \mathbb{Z} \mapsto a \,(\mathrm{mod}\, q) \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$$

   est surjective.
2. On suppose $q = 4$ et on considere l'application

$$\iota^{\bullet} : a \in \mathbb{Z} \mapsto \iota^{a} \in \mathbb{C}$$

   (ou ι est le nombre complexe tel que $\iota^2 = -1$). Montrer que cette application permet de definir une application de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{C}$ donnee par

$$\iota_4^{\bullet} : a \,(\mathrm{mod}\, 4) \mapsto i^{a}$$

   et que

$$\iota^{\bullet} = \iota_4^{\bullet} \circ \pi_4.$$

Exercice 4. Soit $f : X \mapsto Y$ une application entre ensembles.

1. Montrer que pour tous sous-ensembles $A, B \subset X$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

2. (a) Montrer que pour tout $A, B \subset X$ des sous-ensembles, on a

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B);$$

   (b) donner un exemple pour lequel $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
   (c) Montrer que si f est injective on a

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

3. Montrer que pour tout sous-ensembles $C, D \subset Y$ de Y on a $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
4. Montrer que pour tout pour tout sous-ensembles $C, D \subset Y$ de Y, on a $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

5. Montrer que (ici et ci-dessous f^{-1} designe l'image reciproque pour les sous-ensembles de Y pas la reciproque d'une application bijective)
$$f \text{ est injective } \iff \forall A \subset X,\ f^{-1}(f(A)) = A.$$
6. Montrer que
$$f \text{ est surjective } \iff \forall C \subset Y,\ f(f^{-1}(C)) = C.$$

Exercice 5. Soient X, Y, Z des ensembles (pas forcement finis) et $\phi : X \to Y$ et $\psi : Y \to Z$ deux applications entre les ensembles X et Y et les ensembles Y et Z et $\varphi = \psi \circ \phi : X \to Z$ l'application composee.

1. Montrer que si φ est surjective alors ψ est surjective. Donner un exemple montrant que ϕ ne l'est pas forcement.
2. Montrer que si φ est injective alors ϕ est injective. Donner un exemple montrant que ψ ne l'est pas forcement.

Exercice 6. ($\star$) On veut montrer le resultat de Cantor : l'application polynomiale (de Cantor)
$$C : (m, n) \mapsto ((m+n)^2 + m + 3n)/2$$
et une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$. Pour cela

1. Verifier que C est une application de $\mathbb{N}^2$ a valeurs vers $\mathbb{N}$.
2. Calculer les valeurs $C(m, n)$ pour $m + n \leqslant 3$ et les reporter sur les point $(, n) \in \mathbb{Z}^2$ d'une representation du quart de plan $\{(x, y),\ x, y \geqslant 0\}$.
3. Pour $k \geqslant 0$ un entier, on definit le sous-ensemble
$$D_k = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2,\ m + n = k\}.$$
Quelles sont les valeurs prises par $C(m, n)$ quand (m, n) decrit D_k ?
4. En deduire l'injectivite et la surjectivite de C.

Remarque. Une autre application possible (obtenue par symetrie) est
$$C'(m, n) = ((m+n)^2 + 3m + n)/2.$$
On ne sait pas si il y a d'autre applications polynomiales etablissant une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.

Exercice 7. Soit $G = [0, 1[$ et $\boxplus : G \times G \mapsto \mathbb{R}$ la loi de composition definie par
$$x \boxplus x' := \begin{cases} x + x' & \text{si } x + x' < 1 \\ x + x' - 1 & \text{si } x + x' \geqslant 1 \end{cases}.$$
Montrer que $\boxplus$ est a valeurs dans G et trouver un element neutre $0_G \in G$ et une application inversion $\boxminus : G \mapsto G$ telles que
$$(G, \boxplus, 0_G, \boxminus)$$
forme un groupe commutatif.