Série 2

David Wiedemann

5 octobre 2020

On démontre d'abord la propriété énoncée dans l'exercie 2, partie 2 :

Lemme 1. *$(a, b) \notin R$ si et seulement si $R_a \cap R_b = \emptyset$.*

Démonstration. On montre l'implication dans les deux sens.
$\boxed{\Longrightarrow}$
Supposons, par l'absurde, $(a, b) \notin R$ mais $R_a \cap R_b$ non vide. Supposons $c \in R_a \cap R_b$, alors $c \in R_a$ et donc $(a, c) \in R$. De même, $c \in R_b$ et donc $(c, b) \in R$.
Par la transitivité de la relation d'équivalence, on a donc :

$$(a, b) \in R$$

ce qui est une contradiction à notre hypothèse.
$\boxed{\Longleftarrow}$
Supposons, par l'absurde, $(a, b) \in R$ mais $R_a \cap R_b = \emptyset$, alors

$$(a, b) \in R \Rightarrow b \in R_b \text{ et } b \in R_a$$

Ce qui est une contradiction à l'hypothèse que $R_a \cap R_b = \emptyset$. □

Ce lemme nous montre que deux classes d'équivalence différentes ne peuvent pas contenir d'éléments commun.
Finalement, on sait que les classes d'équivalence forment une partition de A, il n'y a pas d'éléments dans A qui n'appartienne pas à une classe d'équivalence. En effet, supposons que $p \in A$, $(p, p) \in R$ et donc $p \in R_p$, donc tout élément est dans une classe d'équivalence.
Grâce à ceci, on peut déduire que le nombre d'éléments de R vaut la somme du nombre d'éléments des classes d'équivalence.

On voit que 6 peut s'écrire de trois manières comme somme de trois nombres non-nuls :

$$6 = 2 + 2 + 2$$
$$6 = 4 + 1 + 1$$
$$6 = 3 + 2 + 1$$

On montre d'abord que
$$|R_i \times R_i| = |R_i|^2$$

Démonstration. On pose que $|R_i| = n$.
Par définition $R_i \times R_i = \{(a, b) | a, b \in R_i\}$.
La cardinalité de $R_i \times R_i$ est donc simplement la répartition de n éléments sur 2 places, donc $n^2 = |R_i|^2$ □

Car les classes d'équivalences forment une partition de A, on a que :

$$|R| = |R_1 \times R_1| + |R_2 \times R_2| + |R_3 \times R_3|$$

Ou R_1, R_2, R_3 sont les trois classes d'équivalence sur A, engendrées par R.

Démonstration. Supposons

$$|R| < |R_1 \times R_1| + |R_2 \times R_2| + |R_3 \times R_3|$$

Sans perte de généralité, supposons que $R_1 \times R_1$ contient un élément de plus (il suffit de réindexer les ensembles si nécessaire).
Donc, $\exists (a, b) \in R_1 \times R_1 \Rightarrow a, b \in R_1$, or ceci implique, par définition que $(a, b) \in R$.
Supposons donc

$$|R| > |R_1 \times R_1| + |R_2 \times R_2| + |R_3 \times R_3|$$

Donc, $\exists (a, b) \in R$, tel que $(a, b) \notin R_1, R_2, R_3$.
Si $a = b$, alors l'élément a définit une nouvelle classe d'équivalence ce qui est une contradiction à l'hypothèse qu'il y ait 3 classes d'équivalences.
Si $a \neq b$, alors par hypothèse, $a \in R_i$ et $b \in R_j (j \neq i)$, or par le lemme 1, ceci implique que $R_i = R_j$, ce qui contredit l'hypothèse qu'il y ait 3 classes d'équivalence.
On en déduit que

$$|R| = |R_1 \times R_1| + |R_2 \times R_2| + |R_3 \times R_3|$$

□

Il suffit maintenant de calculer les 3 cas énumérés plus haut.

Si une classe d'équivalence a 4 éléments, les deux autres classes d'équivalence ont chacune 1 élément.
En tout R, contiendra donc $4 \times 4 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 18$ éléments.

Si une classe d'équivalence possède 1 élément, une autre 2 éléments et la dernière 3 éléments, R contiendra $(3 \times 3) + (2 \times 2) + (1 \times 1) = 14$ éléments.

Si chacune des trois classes d'équivalence possède 2 éléments R contiendra $(2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) = 12$ éléments.

On peut construire des relations d'équivalence qui satisfont la répartition des éléments tel que ci-dessus.
Soit $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$
Soit A_1, A_2, A_3 une partition de l'ensemble A, avec les trois ensembles non-vides.
On remarque qu'on peut choisir les A_1, A_2, A_3 en utilisant la répartition telle que définie ci-dessus (ie. 2-2-2, 4-1-1 et 3-2-1).
On pose que $(x_i, x_j) \in R$ si x_i et x_j sont dans le même A_k.
Cette relation satisfait les propriétés d'une relation d'équivalence, en effet :

1. Identité :
   Si $x_i \in A_k$, alors, clairement $(x_i, x_i) \in R$
2. Reflexivite :
   Si $(x_i, x_j) \in R$, alors $x_i \in A_k$ et $x_j \in A_k$, donc $(x_j, x_i) \in R$.
3. Transitivité :
   Si $(x_i, x_j) \in R$ et $(x_j, x_g) \in R$, alors $x_i, x_j, x_g \in A_k$, donc $(x_i, x_g) \in R$

On a donc montré qu'il y a 3 valeurs possibles pour la cardinalité de R : $18, 14$ ou 12, et qu'il existe en effet des relations d'équivalence qui possèdent ce nombre d'éléments.