# Mecanique

David Wiedemann

## Table des matières

# List of Theorems

**Lecture 1: Cours de Physique Generale**

Wed 16 Sep

# 1 Physique

— Science dont le but est d'etudier et de comprendre les composants de la matiere et leurs interactions mutuelles.

— Sur la base des proprietes observees de la matiere et des interactions, le physicien tente d'expliquer les phenomenes naturels observables.

— Les "explications" sont donnees sous forme de lois aussi fondamentales que possible : elles resument notre comprehension des phenomenes physiques.

— Les maths sont le language qu'on utilise pour decrire ces phenomenes.

<u>Exemple</u>
Une particule se deplace sur un axe droit.
Au temps $t_1$ position $x_1 = x(t_1)$. Au temps $t_2$ position $x_2 = x(t_2)$. $\Delta x = x_2 - x_1$ et $\Delta t = t_2 - t_1$
Donc la vitesse moyenne

$$v_{moyenne} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Mais on peut faire diminuer $\Delta t$, pour connaitre la vitesse moyenne sur un temps infinitesimal :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$$

Donc la vitesse instantanee est la derivee de la fonction $x(t)$ par rapport a $t$.

On peut faire la meme chose avec l'acceleration
Au temps $t_1$, vitesse $v_1 = v(t_1)$.
Au temps $t_2$, vitesse $v_2 = v(t_2)$.
Donc l'acceleration moyenne est

$$a_{moyenne} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Et donc par le meme raisonnement, l'acceleration instantanee est

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} := \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

## 1.1 Exemple de loi physique : l'addition des vitesse

Si je marche a la vitesse $v_{marche}$ sur un tapis , alors la vitesse par rapport au sol est

$$V = v_{marche} + v_{tapis}$$

C'est la loi d'addition des vitesses de galilee.
Ici, c'est une addition vectorielle qu'il faut faire.

Cette loi est

— independante des vitesses

— independante des objets en presence

— independante du temps ( hier, aujourd'hui, demain)

— etc...

## 1.2 Lois de conservation

Ce sont les lois les plus fondamentales.

— Conservation de l'energie

— Conservation de la quantite de mouvement

— Conservation du moment cinetique

Ces lois sont valables dans toutes les situations ( classiques, relativistes ou quantiques) .
Ne peuvent pas etre formulees mathematiquement de facon unique.
Resultent des principes “d'invariance” (ou de symmetrie) tres generaux.

## 1.3 Invariance par changement de referentiel

— Changement de referentiel ( ou d'observateur) : Referentiel $O'x'y'z'$ en mouvement par rapport au referentiel $Oxyz$

— Les lois de la physqiue sont-elles invariantes par rapport a n'importe quel changement de referentiel ?
Autrement dit, si les observateurs $O$ et $O'$ font la meme experience, obtiendront-ils le meme resultat ?

— Principe de Galilee :
Les lois de la physique sont les memes (i.e. invariantes) pour deux observateurs en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport a l'autre.

## 2 La mecanique classique

1. Mecanique :
   science du mouvement ( ou du repos) de systemes materiels caracterises par des variables d'espace et de temps.

2. Cinematique :
   Description du mouvement.

3. Dynamique :
   Etude de la relation entre le mouvement et les causes de sa variation(forces, lois de Newton, th. du moment cinetique).

4. Statique :
   Etude et description de l'equilibre.

## 3 Objectifs du cours de mecanique generale

• Apprendre a mettre sous forme mathematique un probleme, une situation physique :

— Definir le probleme, le modeliser

— Choisir une description mathematique

— Poser les equations regissant la physique du probleme

— Resoudre et/ou discuter la solution

• Developper un "savoir-faire" pratique, mais egalement un esprit scientifique :

— Reperer le sens physique derriere les equations

— Savoir formaliser mathematiquement la donnee d'un probleme physique.

## 4 Le modele du "point materiel"

**Definition 1 (Point materiel)**
*un systeme est assimile a un point geometrique auquel on attribue toute la masse de ce systeme, et dont l'etat est decrit en tout temps par une ( seule) position et une ( seule) vitesse.*

• Notion introduite par Newton.

On approxime un systeme a quelquechose de plus simple, le point peut etre "gros" ( exemple :la terre, le soleil).
Pas applicable dans toutes les situations ; le modele a des limites..

# 5 Mouvement Rectiligne Uniforme

Mouvement d'un point materiel se deplacant en ligne droite a vitesse constante. On definit un axe $x$ associe a la trajectoire rectiligne, avec une origine $O$.

$$v(t) := \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = v_0 = \text{constante}$$

La solution s'obtient en integrant le dessus : $x(t) = v_0 t + x_0$, ou $x_0 = $ constante. On appelle le resultat de cette integration l'equation horaire.

# 6 Mouvement rectiligne uniformement accelere

Ici

$$a(t) := \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) = a_0 = constante$$

C'est une equadiff d'ordre 2 faisant intervenir la derivee seconde de $x(t)$.
Solution

$$x(t) = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$$
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = a_0 t + v_0$$

ou $x_0$ et $v_0$ sont des constantes.

# 7 Lois de newton

— mouvement rectiligne uniforme $\Rightarrow \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$

— $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$

— Action reaction $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{F}$

# 8 Force de pesanteur et chute des corps

• L'attraction terrestre donne lieu a une force verticale ( le poids) proportionelle a la masse $m$ :

$$F = mg$$

$g \approx 9.8\frac{m}{s^2}$
• Application de la 2eme loi de Newton :
Si le poids est la seule force appliquee a un point materiel

$$F = ma \Rightarrow a = g = constante$$

Dans le vide, les corps ont un mouvement uniformement accelere

**Lecture 3: Oscillateurs Harmoniques**

Wed 23 Sep

# 9 Oscillateurs Harmoniques

Considerer des systemes ayant des mouvements oscillatoires.
Exemples :

— masse pendue a un ressort.
— pendule simple, pendule de torsion.
— vibrations.
— Resonateurs quartz ( montres)
— oscillations du champ
— etc...

**Remarque**
*Un mouvement oscillatoire permet de mesurer un intervalle de temps.*

## 9.1 Modelisation de la force d'un ressort

La force exercee par un ressort est proportionelle a son deplaccement par rapport a sa position de repos.

Force de rappel :

$$\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{\Delta x}$$

$k$ = constante elastique du ressort [N/m]

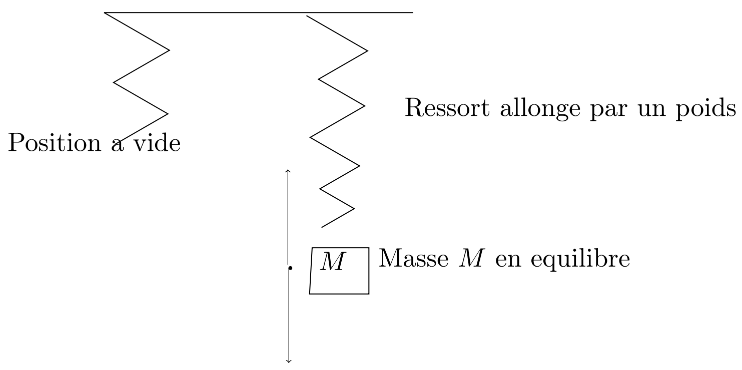



FIGURE 1 – ressort

**Remarque**
*Ce modele n'est que valable pour des petits allongements*

## 9.2 Oscillateurs harmoniques a une dimension

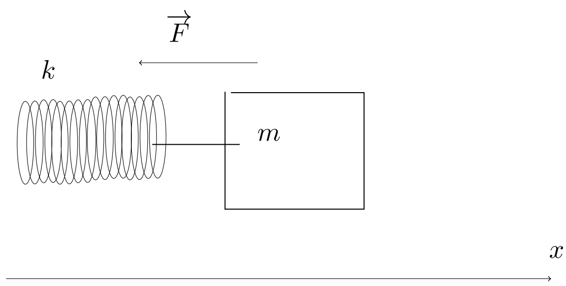



FIGURE 2 – Ressort plan horizontal

$$\text{Loi de Hooke } F_x = -kx$$
$$\text{2eme loi de Newton } F = ma$$

On arrive a

$$m\ddot{x} = -kx$$

But : connaissant $k, m$ et les conditions initiales, determiner $x(t)$ pour tout temps $t$.

**Exemple**

*Posons* $m = 1kg, k = 1\frac{N}{m} = 1\frac{kg}{s^2}$
*Conditions initiales :* $x(0) = 1m, v(0) = 0\frac{m}{s}$

$$\Rightarrow a(0) = \frac{F(0)}{m} = k\frac{x(0)}{m} = -1\frac{m}{s^2}$$

*Accroissement de* $v$ *entre* $t$ *et* $t + \Delta t$ *:* $\Delta v = a(t)\Delta t$ *car* $a(t) = dv(t)/dt$

$$\Rightarrow v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t$$

*Accroissement de* $x$ *entre* $t$ *et* $t + \Delta t$ *:*

$$\Rightarrow x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t$$

*Verification analytique :*
*On pose* $x(t) = \cos(\omega_0 t) \Rightarrow x(0) = 1$
$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 \sin(\omega_0 t) \Rightarrow v(0) = 0.$
$a(t) = \frac{dv}{dt} - \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x(t)$
*Comme* $a(t) = -\frac{k}{m}x(t)$*, on doit avoir :*

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

*C'est la pulsation propre de l'oscillateur libre.*

***Solution generale et dependance par rapport aux conditions initiales***

*Periode :*

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

*Frequence*

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Solution generale de $\ddot{x} = \omega_0^2 x = 0$ :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

ou

$$x(t) = C\sin(\omega_0 t + D)$$

Deux constantes d'integration a determiner en utilisant les conditions initiales

$$A = x_0$$

et

$$B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

ou bien $x_0^2 = x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega_0})^2$ et $\tan(D) = \omega_0 \frac{x_0}{v_0}$

Resolution de l'equation differentielle :

$$\begin{aligned}
x(t) &= A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \\
x(0) &= A \cdot 1 + B \cdot 0 = A = x_0 \\
\dot{x}(0) &= -A\omega_0 \sin(0) + B\omega_0 \cos(0) \\
&= B\omega_0 = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}
\end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned}
x(t) &= C\sin(\omega_0 t + D), x_0, v_0 \\
x(0) &= C\sin(D) = x_0 \\
\dot{x}(0) &= C\omega_0 \cos(D) = v_0 \\
\frac{1}{\omega_0}\tan(D) &= \frac{x_0}{v_0} \\
&\Rightarrow \tan(D) = \omega_0 \frac{x_0}{v_0} \\
C^2(\sin^2(D) + \cos^2(D)) = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \\
&\Rightarrow C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}
\end{aligned}$$

## 9.3 Oscillateur harmonique amorti

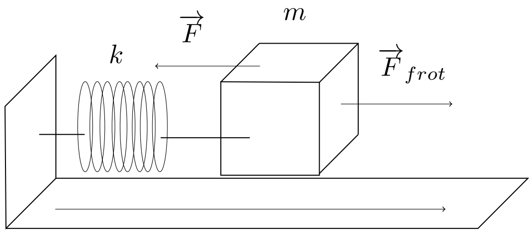



FIGURE 3 – oscillateur amorti

Par $b$ on definira la force de frottement.
Deuxieme loi de Newton : $F + F_{frot} = ma$, alors

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

**Resolution**

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0 \text{ avec } \gamma = \frac{b}{2m} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ammortissement sous-critique $\gamma < \omega_0$ $x(t) = e^{-\gamma t}[A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)]$
avec $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma_2}\omega_0$

Ammortissement critique $\gamma = \omega_0$ $x(t) = e^{-\gamma t}[A + Bt]$

Ammortissement sur-critique $\gamma > \omega_0$ $x(t) = e^{\gamma t}[A\exp(\omega_2 t) + B\exp(-\omega_2 t)]$
avec $\omega_2 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

FIGURE 4 – types d'ammortissement

## 9.4 Oscillateur force

En pratique tout oscillateur s'amortit, mais on peut entretenir les oscillations a l'aide d'une force exterieure.
Exemples

- Balancoire pousse par un enfant.
- Voiture ( avec suspension) passant sur des bosses
- Atome ( electron lie) recevant un rayonnement electromagnetique

On ajoute une force periodique $\overrightarrow{F}_{ext}$ Par exemple $F_{ext} = f\sin(\omega t)$ avec $f = 1N$

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_{ext}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = a_0\sin(\omega t) \text{ avec } \gamma = \frac{b}{2m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Solution :

$$x(t) = x_{transitoire}(t) + \rho\sin(\omega t - \Phi)$$

avec

$$\rho = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

et

$$\tan(\Phi) = 2\gamma\frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

## 9.5 Phenomes de resonnance

Resonnances desirables

- Circuitselectriques dans un tuner
- Tuyaux d'orgue
- Balancoire de jardin
- Amortisseurs d'une voiture
- Suspension du tambour d'une essoreuse a linge
- Structure de genie civil

### Lecture 4: Dynamique du point materiel

Wed 30 Sep

# 10 Dynamique du point materiel

Notions abordees :

- reperes, rappels d'analyse vectorielle
- referentiel, position, vitesse, acceleration normale et tangentielle
- rotations, repere en rotation, mouvement circulaire uniforme
- vitesse et acceleration en coordonnees cylindriques et spheriques
- contraintes et forces de liaison

**Definition 2 (Referentiel)**
*Un ensemble de N points ($N \geq 4$), non coplanaires, immobiles les uns par rapport aux autres.*

- La description du mouvement d'un systeme se fait toujours par rapport a un certain referentiel.
- L'observateur et les appareils de mesure sont immobiles par rapport au referentiel ( ils "font partie" du referentiel)
- Le choice du referentie du referentiel est arbitraire

**Definition 3 (Repere)**
*Origine O et trois axes orthogonaux definis par des vecteurs de longueur unite*

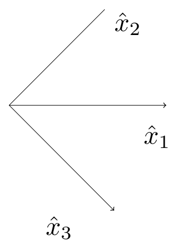



FIGURE 5 – reperes

Vecteurs unitaires

$$|\hat{x}_1| = |\hat{x}_2| = |\hat{x}_3| = 1$$

Vecteurs orthonormaux

$$\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 = \hat{x}_2 \cdot \hat{x}_3 = \hat{x}_3 \cdot \hat{x}_1 = 0$$

Base orthonormee

$$\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

## 10.1 Produit scaleaire

**Definition 4 (Produit scalaire)**

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\theta$$

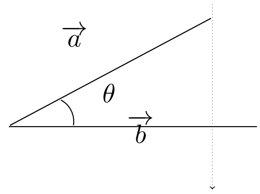



FIGURE 6 – produit scalaire

*En composantes*

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = (a_1\hat{x}_1 + a_2\hat{x}_2 + a_3\hat{x}_3) \cdot \ldots = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

*Proprietes*

- *Commutativite*
- *Distributivite*
- *...*

## 10.2 Projections et composantes d'un vecteur

Projection de $\overrightarrow{OP}$ sur l'axe u :

$$\overrightarrow{OP} \cdot \hat{u} = \left|\overrightarrow{OP}\right| |\overrightarrow{u}| \cos\theta = OP\cos\theta = OP'$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'}\hat{u} + \overrightarrow{OP''}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP} \cdot \hat{u}\hat{u} + \overrightarrow{OP}\hat{v}\hat{v}$$

Coordonnees cartesiennes du point $P$ ou composantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$

$$\begin{cases} x = \overrightarrow{OP} \cdot \hat{x} \\ y = \overrightarrow{OP} \cdot \hat{y} \\ z = \overrightarrow{OP} \cdot \hat{z} \end{cases}$$

Donc

$$\overrightarrow{OP} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

## 10.3 Repere direct

Par convention, on n'utilise que des reperes dont la chiralite est definie par la "regle du tire bouchon" ou la "la regle de la main droite" .

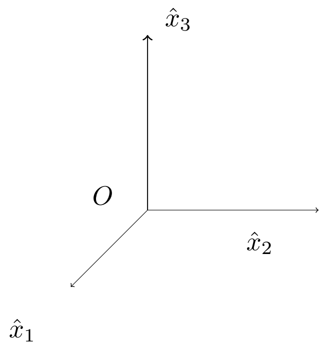



FIGURE 7 – repere droit

## 10.4 Produit vectoriel

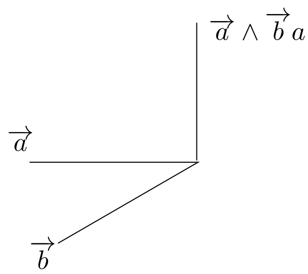



FIGURE 8 – produit vectoriel

**Definition 5 (Produit vectoriel)**
*En composantes*

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 = a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Proprieteres

- $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}$
- $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c}$
- $\overrightarrow{a} \wedge (\lambda \overrightarrow{b}) = \lambda(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$
- $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ si $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ paralleles

**Definition 6 (Produit Mixte)**

$$(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \det(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$$

Proprietes :

$$(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{a}$$

$$(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = 0 \iff \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \text{ et } \overrightarrow{c} \text{ coplanaires ( dans le meme plan)}$$

**Definition 7 (Double produit vectoriel)**

$$\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{c}$$

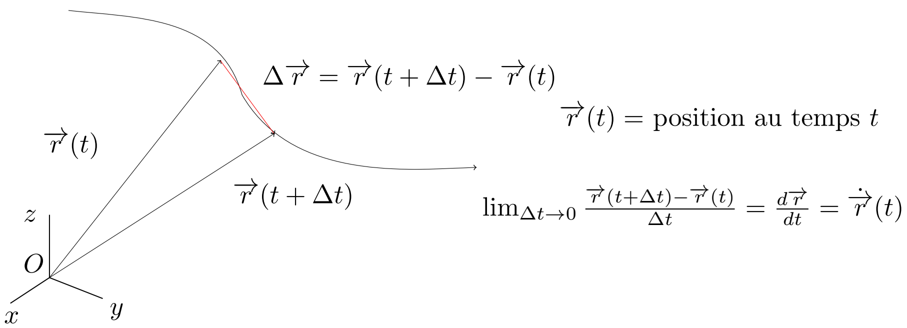
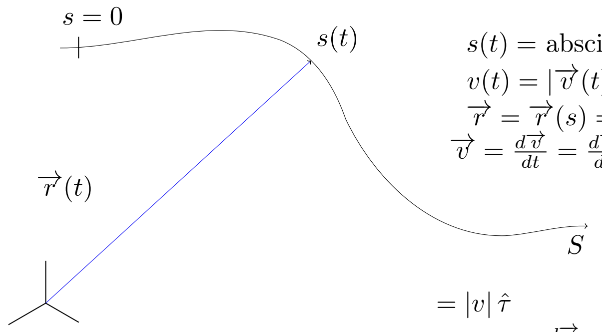



Figure 9 – trajectoire




$s(t) =$ abscisse curviligne

$v(t) = |\vec{v}(t)| = \frac{ds}{dt}$

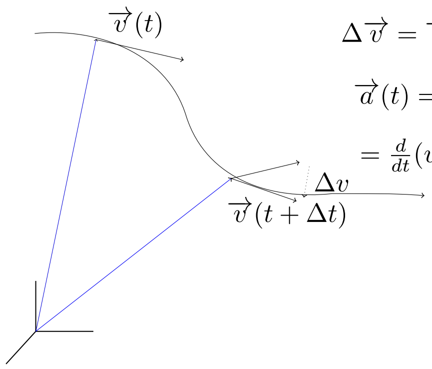
$\vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{r}(s(t))$

$\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$

$= |v|\,\hat{\tau}$

avec $\hat{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ = vecteur tangent a la trajectoire

Figure 10 – curviligne




$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$

$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}(t)$

$= \frac{d}{dt}(v \cdot \hat{\tau}) = \frac{dv}{dt}\hat{\tau} + v\frac{d\hat{\tau}}{dt}$

Figure 11 – curviligne2

Donc

$$\hat{\tau} \cdot \frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\hat{\tau}^2) = 0 \text{ car } \tau^2 = 1 \forall t$$

On peut approximer le mouvement localement par un cercle

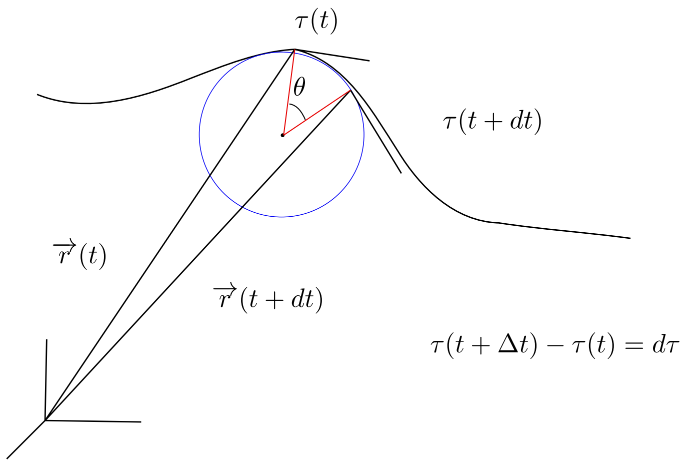



FIGURE 12 – mouvement approxime par cercle

$$\vec{a}_n(t) = v(t)\frac{d\tau}{dt} = v(t)\frac{d\tau}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v(t)^2\cdot\frac{d\tau}{ds}$$

On peut calculer la norme de $a_n$

$$\begin{aligned}
|\vec{a}_n(t)| = a_n(t) &= v^2\left|\frac{d\tau}{ds}\right|) \\
&= v^2\frac{d\theta}{R(t)d\theta} \\
&= \frac{v^2(t)}{R(t)}
\end{aligned}$$

## 10.5 Mouvement avec vitesse scalaire constante

Considerons un point materiel avec une vitesse scalaire $v = \frac{ds}{dt}$ constante non nulle
un vecteur vitesse qui change de direction au cours du temps
Acceleration

$$\vec{a}\cdot\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v}^2) = 0$$

pas de composante tangentielle : $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$ Donc $a$ est toujours perpendiculaire a $v$.
Force $\vec{F} = m\vec{a}$
Donc

$$F = ma = m\frac{v^2}{R}$$

force centripete

### 10.6 Systeme de coordonnees

**Definition 8 (Systeme de coordonnees)**
*Parametrisation , a un certain temps $t$, de la position des points du referentiel au mouen de trois nombres reels.*

Pour un referentiel donne il e xiste une infinite de systemes de coordonnes Exemples

- Coordonnes cartesiennes $(x, y, z)$
- Coordonnees cylindriques $(\rho, \phi, z)$
- Coordonnes spheriques $(r, \Theta, \phi)$

Chaque vecteur du repere est parallele a la variation de la position due a une modification de la variable correspondante

### Lecture 5: mercredi

Wed 07 Oct

## 11 Description des rotations spatiales

Une rotation spatiale est caractérisée par un axe de rotation ( dans l'espace), un sens de rotation et un angle de rotation.
Deux points de vue

- Rotation dûn systeme physique dans un repère fixe
- Système physique décrit dans un repère en rotation

**Theorème 4**
*Soit deux repères orthonormés droits de même origine, il existe toujours une rotation qui amène le premier sur le deuxième.*

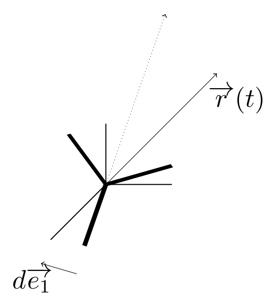



FIGURE 13 – repere

$$\dot{\hat{e}_1} = \frac{d\hat{e_1}(t)}{dt} = E_{11}\hat{e}_1 + E_{21}\hat{e}_2 + E_{31}\hat{e}_3$$
$$\dot{\hat{e}_2} = \frac{d\hat{e_2}(t)}{dt} = E_{12}\hat{e}_1 + E_{22}\hat{e}_2 + E_{32}\hat{e}_3$$
$$\dot{\hat{e}_3} = \frac{d\hat{e_2}(t)}{dt} = E_{13}\hat{e}_1 + E_{23}\hat{e}_2 + E_{33}\hat{e}_3$$

est équivalent à dire

$$\dot{\hat{e}}_i = \frac{d\hat{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} E_{JI}\hat{e}_j$$

C'est une écriture presque matricielle. On peut écrire

$$\dot{\hat{e}}_i = E\hat{e}_i \text{ avec}$$

$$\begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix}$$

On a un repère orthonormé $\Rightarrow \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$

$$\frac{d}{dt}\delta_{ij} = 0 = \frac{d}{dt}(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) = \dot{\hat{e}}_i \cdot \hat{e}_j + \hat{e}_i \cdot \dot{\hat{e}}_j = (E\hat{e}_i) \cdot \hat{e}_j + \hat{e}_i(E\hat{e}_j)$$
$$= (E_{1i}\hat{e}_i + E_{2i}\hat{e}_2 + E_{3i}\hat{e}_3) \cdot \hat{e}_j + \hat{e}_i(E_{1j}\hat{e}_i + E_{2j}\hat{e}_2 + E_{3j}\hat{e}_3) = E_{ji} + E_{ij}$$

On a donc 6 contraintes ( ij=11,12,13,22,23,33)
Donc

$$\begin{pmatrix} 0 & E_{12} & E_{13} \\ -E_{12} & 0 & E_{23} \\ -E_{13} & -E_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour un vecteur quelconque $\overrightarrow{r}(t)$.

$$\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = E\overrightarrow{r}\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

On a donc

**Theorème 5 (Formule de Poisson)**

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \overrightarrow{\omega} \wedge \hat{e}_i$$

## 11.1 Interprétation du vecteur $\omega$

Si $\overrightarrow{r}$ collinéaire à $\overrightarrow{\omega}$ alors $\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = 0$, donc $\overrightarrow{r}$ ne bouge pas.
Donc $\overrightarrow{\omega}$ définit l'axe de rotation au temps $t$. Sens de $\overrightarrow{\omega}$ = sens de rotation

$$|d\overrightarrow{r}| = |\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{r}|dt = |\overrightarrow{\omega}|dt|\overrightarrow{r}|\sin\theta$$

Mais $|d\overrightarrow{r}| = |\overrightarrow{r}|\sin\theta$

La norme de $\overrightarrow{\omega}$ est la vitesse angulaire de rotation.

### 11.1.1 Cas particulier

$\overrightarrow{\omega}$ = constante

Alors

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{r}$$

et

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{r}) = \overrightarrow{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \wedge (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{r})$$

## 11.2 Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

Vitesse angulaire de rotation du repère

$$\overrightarrow{\omega} = \frac{d\phi}{dt}\hat{z} = \dot{\phi}\hat{z}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r} = \overrightarrow{OP} &= \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z \\ \overrightarrow{v} = \dot{\overrightarrow{r}} &= \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\hat{e}}_\rho + \dot{z}\hat{e}_z + z\dot{\hat{e}}_z \end{aligned}$$

Par Poisson

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_\rho &= \overrightarrow{\omega} \wedge \hat{e}_{rho} = \dot{\phi}\hat{e}_z \wedge \hat{e}_\rho = \dot{\phi}\hat{e}_\phi \\ \dot{\hat{e}}_\phi &= \overrightarrow{\omega} \wedge \hat{e}_\phi = \dot{\phi}\hat{e}_z \wedge \hat{e}_\phi = -\dot{\phi}\hat{e}_\rho \end{aligned}$$

Donc

$$\overrightarrow{v} = \dot{\overrightarrow{r}} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\hat{e}}_\rho + \dot{z}\hat{e}_z + z\dot{\hat{e}}_z = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z$$

Donc

$$\overrightarrow{a} = \ddot{\overrightarrow{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z)$$

## 11.3 Pendule Mathématique

Contraintes

$$\begin{cases} \rho = L = \text{ connstante } \Rightarrow \dot{\rho} = 0, \ddot{\rho} = 0 \\ z = 0, \dot{z} = 0, \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Donc l'accélération est

$$\overrightarrow{a} = -L\dot{\phi}^2\hat{e}_\rho + L\ddot{\phi}\hat{e}_\phi$$

On a aussi

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{T}$$

Donc

$$\begin{cases} -mL\dot{\phi}^2 = F\cos\phi - T \text{ sur } \hat{e}_\rho \\ mL\ddot{\phi} = -F\sin\phi \text{ sur } \hat{e}_\phi \end{cases}$$

Donc

$$\ddot{\phi} = -\frac{F}{mL}\sin\phi = -\frac{g}{L}\sin\phi$$

Si les oscillations sont faibles, on a

$$\sin\phi \simeq \phi \Rightarrow \ddot{\phi} \simeq -\frac{g}{L}\phi$$

**Theorème 6**

*La force de liaison = force exercée sur le point matériel pour qu il obéisse a une contrainte géométrique*

- *Toujours perp. à la courbe ou à la surfacce*
- *jamais de composante tangente à la courbe ou la surface ( cad dans une direction ou le pout matériel peut bouger)*
- *La force de liaision devient nulle $\iff$ la contrainte disparait.*