Géométrie Différentielle 2021

Marc Troyanov – EPFL

Etat au 27 octobre 2021

Table des matières

Chapitre 1

Géométrie des courbes

1.0 Rappels sur les Espace vectoriel euclidien

1.0.1 définitions de bases

Définitions. (i) Un *espace vectoriel euclidien* est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des réel muni d'un produit scalaire. On notera génériquement un tel espace par $(\mathbb{E}^n, \langle\ ,\ \rangle)$, où $n \in \mathbb{N}$ est la dimension de l'espace vectoriel et $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire. Rappelons qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire, symétrique et définie-positive sur l'espace vectoriel $\mathbb{E}^n$.

En particulier, le *produit scalaire standard* sur $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

(ii) Deux vecteurs x, y d'un espace vectoriel euclidien $\mathbb{E}^n$ sont dit *orthogonaux* si $\langle x, y\rangle = 0$. Dans ce cas on note $x \perp y$.
(iii) La *norme* d'un vecteur $x \in \mathbb{E}^n$ est le nombre réel défini par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

La norme est bien définie car $\langle x, x\rangle \geq 0$ pour tout x.

Le produit scalaire peut se retrouver à partir de la norme en utilisant les *formules de polarisation* :

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

Le résultat suivant est une propriété fondamentale des produits scalaires.

Proposition 1.0.1. *(Inégalité de Cauchy-Schwartz.) Pour tous vecteurs x, y de l'espace euclidien $\mathbb{E}^n$ on a*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

De plus on a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Proposition 1.0.2. *La norme vérifie les propriétés suivantes pour tous* $x, y \in \mathbb{E}^n$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *:*
(a) $\|x\| \geq 0$ *et* $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.
(b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
(c) $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Preuve. Les deux premières propriétés suivent facilement des définitions. La troisième propriété est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

Comme les normes de x, y et $x+y$ sont positives ou nulles, on peut prendre la racine carrée dans l'inégalité ci-dessus, ce qui nous donne $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

□

Définition. Dans un espace vectoriel euclidien, on défini :
(1.) La *distance* entre deux éléments x et y de $\mathbb{E}^n$ est

$$d(x, y) = \|y - x\|.$$

(2.) L'*angle* $\alpha \in [0, \pi]$ entre deux vecteurs non nuls $x, y \in \mathbb{E}^n$ est défini par

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Cette notion est bien définie car d'une part $\|x\|\|y\| \neq 0$ lorsque x et y sont non nuls et d'autre part on a

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq +1$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Notons que le produit scalaire est parfois défini géométriquement à partir de la notion d'angle via la formule

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \cos(\alpha),$$

mais du point de vue de l'algèbre linéaire, c'est le produit scalaire qui est la notion de base et l'angle est une notion dérivée.

(3.) L'*aire* du parallélogramme $\mathcal{P}(x, y)$ construit sur les vecteurs x et y est définie par

$$\text{Aire}\,(\mathcal{P}(x, y)) = \sqrt{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2}.$$

A nouveau, l'inégalité de Cauchy-Schwartz justifie aussi que $\text{Aire}\,(\mathcal{P}(x, y))$ est bien définie. On vérifie d'autre part facilement que

$$\text{Aire}\,(\mathcal{P}(x, y)) = \|x\|\|y\| \sin(\alpha),$$

ce qui correspond à la définition de l'aire d'un parallélogramme comme le produit de la "base" par la "hauteur".

Proposition 1.0.3. *Tout espace vectoriel euclidien $\mathbb{E}^n$ est un espace métrique pour la distance définie ci-dessus.*

Preuve. Nous devons vérifier que la distance $d(x, y) = \|y - x\|$ vérifie les trois propriétés suivantes pour tous $x, y, z \in \mathbb{E}^n$:

(i.) $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0$ si et sulement si $x = y$.

(ii.) $d(x, y) = d(y, x)$.

(iii.) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité du triangle).

Preuve. Ces propriétés se déduisent très facilement de la proposition 1.0.2. Vérifions par exemple l'inégalité du triangle :

$$d(x, z) = \|z - x\| = \|(z - y) - (y - x)\| \leq \|(z - y)\| + \|(y - x)\| = d(x, y) + d(y, z).$$

□

Proposition 1.0.4. *Les conditions suivantes suivantes sont équivalentes pour deux vecteurs non nuls $x, y \in \mathbb{E}^n$:*

(i.) $x \perp y$, *i.e.* $\langle x, y \rangle = 0$.

(ii.) L'angle θ entre x et y est égal à $\frac{\pi}{2}$.

(iii.) On a $\|x + y\| = \|x - y\|$.

(iv.) On a $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (théorème de Pythagore).

Preuve. L'équivalence entre (i) et (ii) vient de

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

L'équivalence entre (i) et (iii) vient de

$$2\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - (\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

et celle entre (i) et (iv) de

$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2.$$

□

1.0.2 Simitudes et Isométries d'un espace vectoriel euclidien.

Définition. Un *similitude de rapport* $\lambda > 0$ d'un espace vectoriel euclidien $\mathbb{E}^n$ est une application bijective $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ telle que

$$d(f(x), f(y))) = \lambda d(x, y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{E}^n.$$

Une *isométrie de* $\mathbb{E}^n$ est une similitude de rapport 1. C'est donc une bijection qui respecte les distances.

Il est facile de vérifier à partir de cette définition que les similitudes de $\mathbb{E}^n$ et les isométries forment un sous-groupe normal.

Théorème 1.0.5. *L'application $f : E \to E$ est une similitude de rapport λ si et seulement s'il existe un vecteur $b \in \mathbb{E}^n$ et une application linéaire $g : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ tels que $f(x) = g(x) + b$ pour tout $x \in \mathbb{E}^n$ et*

$$\|g(x)\| = \lambda\|x\| \qquad \forall x, y \in \mathbb{E}^n.$$

On dit que g est la *partie linéaire* de l'isométrie f et b est le *vecteur de translation* de f. Remarquons que ce vecteur est donné par $b = f(0)$.

Pour la preuve de ce théorème. on a besoin du théorème suivant, que nous acceptons sans démonstration :

Théorème 1.0.6. *(Théorème fondamental de la géométrie affine.) Pour une bijection $f : V \to V$ d'un espace vectoriel réel de dimension finie V, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) L'image par f de toute droite affine est une droite affine.

(b) f est une application affine*, i.e. il existe une application linéaire $g : V \to V$ et un vecteur $b \in V$ tels que $f(x) = g(x) + b$ pour tout $x \in V$.*

Preuve du théorème 1.0.5. La première étape est de prouver que l'image d'une droite affine par une isométrie f est une droite affine. De façon équivalente, il s'agit de vérifier que si $x, y, z \in \mathbb{E}^n$ sont trois points alignés, alors $f(x), f(y), f(z)$ sont également alignés. Or la condition pour que trois points soient alignés est que l'inégalité du triangle se réduise à une égalité, c'est-à-dire (quitte à renommer les points),

$$\|z - x\| = \|z - y\| + \|y - x\|,$$

ou si on préfère $\|z - y\| + \|y - x\| - \|z - x\| = 0$.
Puisque f est une similitude, on a

$$\|f(z) - f(y)\| + \|f(y) - f(x)\| - \|f(z) - f(x)\| = \lambda\left(\|z - y\| + \|y - x\| - \|z - x\|\right),$$

ce qui montre que $x, y, z \in \mathbb{E}^n$ sont alignés si et seulement si $f(x), f(y), f(z)$ sont alignés. Le théorème fondamental de la géométrie affine nous dit alors que f est une transformation affine, c'est-à-dire $f(x) = g(x) + b$ avec g linéaire. L'application g est elle-même une similitude car

$$\|g(y) - g(x)\| = \|(f(y) - b) - (f(y) - b)\| = \|f(y) - f(x)\| = \lambda\|y - x\|$$

pour tous $x, y \in \mathbb{E}^n$. En particulier on a $\|g(x)\| = \lambda\|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{E}^n$ (car $g(0) = 0$).

$\square$

Remarque. La partie linéaire g d'une similitude f de rapport λ vérifie

$$\langle g(x), g(y)\rangle = \lambda^2\langle x, y\rangle, \qquad \forall x, y \in \mathbb{E}^n.$$

En particulier, la partie linéaire d'une isométrie (cas $\lambda = 1$) respecte le produit scalaire.
Cela découle du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\langle g(x), g(y)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|g(x) + g(y)\|^2 - \|g(x) - g(y)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\|g(x + y)\|^2 - \|g(x - y)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\lambda^2\|x + y\|^2 - \lambda^2\|x - y\|^2\right) \\
&= \lambda^2\langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

$\square$

Corollaire 1.0.7. *Une application* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est une isométrie pour le produit scalaire standard de* $\mathbb{R}^n$ *si et seulement si on a*

$$f(x) = Ax + b,$$

où $b = f(0)$ *et* $A \in GL_n(\mathbb{R})$ *est une matrice vérifiant* $A^\top A = \mathrm{I}_n$*.*

Preuve. Par définition du produit scalaire standard de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

où $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (cette relation exprime que la base canonique ets une base orthonormée).
D'autre part $Ae_r = \sum_{i=1}^n a_{ir} e_i$ et $Ae_s = \sum_{j=1}^n a_{js} e_j$, par conséquent :

$$\delta_{rs} = \langle e_r, e_s \rangle = \langle Ae_r, Ae_s \rangle = \langle \sum_{i=1}^n a_{ir} e_i, \sum_{j=1}^n a_{js} e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ir} a_{js} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ir} a_{is} = \left(A^\top A\right)_{rs}.$$

Ce qui prouve que $A^\top A = \mathrm{I}_n$.

□

1.0.3 Le groupe orthogonal

Le résultat précédent justifie la définition importante suivante :

Définition 1.0.8. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si $A^\top A = \mathrm{I}_n$. L'ensemble des $n \times n$ matrices orthogonales se note

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^\top A = \mathrm{I}_n\}$$

Proposition 1.0.9. *Pour toute matrice* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $A \in \mathrm{O}(n)$*, c'est-à-dire* $A^\top A = I_n$*.*

(ii) *A est inversible et* $A^{-1} = A^\top$*.*

(iii) $\|Ax\| = \|x\|$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$*.*

(iv) $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}^n$*.*

(v) *Les colonnes de A forment une base orthonormée de* $\mathbb{R}^n$*.*

(vi) *Les lignes de A forment une base orthonormée de* $\mathbb{R}^n$*.*

(vii) *Pour tout vecteur* $b \in \mathbb{R}^n$*, l'application affine* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *définie par* $f(x) = Ax + b$ *est une isométrie.*

De plus $\mathrm{O}(n)$ *est un sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{R})$ *et pour tout* $A \in \mathrm{O}(n)$ *on a* $\det(A) = \pm 1$.

Dans cette proposition, le produit scalaire est le produits scalaire standard de $\mathbb{R}^n$ et la norme et la distance sont associées à ce produit scalaire. Nous laissons la preuve de cette proposition en exercice.

Remarquons que l'application déterminant définit un homomorphisme de groupes

$$\det : \mathrm{O}(n) \to \{\pm 1\},$$

le noyau de cet homomorphisme est le *groupe spécial orthogonal* :

$$\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^\top A = I_n \text{ et } \det(A) = +1\}.$$

La proposition suivante décrit les 2×2 matrices orthogonales.

Proposition 1.0.10. *Pour toute matrice $A \in O(2)$, il existe un angle θ tel que*

$$A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \text{ si } \det(A) = +1,$$

et

$$A = S_{\theta/2} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \text{ si } \det(A) = -1.$$

La matrice R_θ représente une rotation d'angle θ et $S_{\theta/2}$ représente la réflexion à travers la droite vectorielle formant un angle $\theta/2$ avec le premier vecteur e_1 de la base canonique.

Preuve. Les colonnes d'une matrices orthogonale $A \in O(2)$ doivent former une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. Il existe donc $\theta \in (-\pi, \pi]$ tel que la première colonne s'écrive $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$. La deuxième colonnes de A doit-être un vecteur de norme 1 orthogonal à la première colonne, c'est-à dire $\pm \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Ceci démontre que ou bien $A = R_\theta$ ou bien $A = S_{\theta/2}$.

Finalement R_θ est une matrice de rotation car l'angle entre tout vecteur non nul $\mathbf{x}$ et $R_\theta(\mathbf{x})$ est égal à θ et $S_{\theta/2}$ est une symétrie car cette matrice possède deux vecteurs propres orthogonaux de valeurs propre $+1$ et -1 respectivement. Ces vecteurs propres sont

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

Nous laissons la vérification de ces deux dernières affirmations en exercice.

□

1.0.4 Un théorème d'Euler

Le théorème d'Euler décrit les isométries directes fixant un point dans l'espace à trois dimensions.

Théorème. (Théorème d'Euler) *Toute isométrie directe $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ fixant un point est l'identité ou une rotation autour d'un axe passant par ce point.*

Preuve. On peut supposer que f fixe l'origine O. Alors f est une transformation linéaire. On a $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. On sait également que $A \in SO(3)$ (c'est-à-dire $A^\top A = \mathbf{I}$ et $\det(A) = +1$). Pour montrer qu'il existe un axe, il suffit de montrer qu'il existe un vecteur propre de valeur propre $\lambda = 1$. En effet, s'il existe un vecteur non nul $\mathbf{a}$ tel que $A\mathbf{a} = \mathbf{a}$, alors la droite $\mathbb{R}\,\mathbf{a}$ est fixe pour la transformation f (c'est donc un axe pour f) car

$$f(t\mathbf{a}) = A(t\mathbf{a}) = tA(\mathbf{a}) = t\mathbf{a}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour montrer que 1 est une valeur propre de A, il faut montrer que

$$\det(A - \mathbf{I}) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}\det(A-\mathbf{I}) &= \underbrace{\det(A^\top)}_{=1}\det(A-\mathbf{I}) = \det(A^\top(A-\mathbf{I})) \\ &= \det(A^\top A - A^t) = \det(\mathbf{I}-A^\top) = \det(\mathbf{I}-A).\end{aligned}$$

Or, comme $(A-\mathbf{I})$ est une matrice 3×3 , on a $\det(A-\mathbf{I}) = -\det(\mathbf{I}-A)$, donc

$$\det(\mathbf{I}-A) = -\det(\mathbf{I}-A).$$

Il en résulte que $\det(\mathbf{I}-A) = 0$.

Il faut encore prouver que f est bien une rotation autour de l'axe $\mathbb{R}\mathbf{a}$.
Prenons pour cela un vecteur $\mathbf{u}_1$ de longueur 1 et perpendiculaire à $\mathbf{a}$ et notons $\mathbf{u}_2 := \mathbf{a}\times\mathbf{u}_1$. Observons que $A\mathbf{u}_1$ et $A\mathbf{u}_2$ sont aussi orthogonaux à l'axe car

$$\langle A\mathbf{u}_i, \mathbf{a}\rangle = \langle A\mathbf{u}_i, A\mathbf{a}\rangle = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{a}\rangle = \mathbf{0}.$$

Ceci implique que les vecteurs $A\mathbf{u}_1$ et $A\mathbf{u}_2$ sont des combinaisons linéaires de $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$, et comme ces vecteurs sont aussi de longueur 1 et orthogonaux, on a

$$A\mathbf{u}_1 = \cos(\theta)\mathbf{u}_1 + \sin(\theta)\mathbf{u}_2,$$

$$A\mathbf{u}_2 = -\sin(\theta)\mathbf{u}_1 + \cos(\theta)\mathbf{u}_2$$

où θ est l'angle entre $\mathbf{u}_1$ et $A\mathbf{u}_1$.

La matrice de la transformation linéaire A dans la base orthonormée $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{a}$ est donc la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et il s'agit bien d'une rotation autour de l'axe $\mathbb{R}\mathbf{a}$.

□

Rappelons que la *trace* d'une matrice est la somme de ses éléments diagonaux. On prouve dans le cours d'algèbre linéaire que deux matrices semblables ont la même trace. Donc la trace de A dans la base originale coïncide avec la trace de A dans la base $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{a}$. Cette trace vaut donc $1+2\cos(\theta)$; on a prouvé le résultat suivant.

Proposition *L'angle θ d'une rotation $A\in SO(3)$ est donné par l'équation*

$$\boxed{\operatorname{trace}(A) = 1+2\cos(\theta).}$$

Certaines matrices de rotation sont très simples. Par exemple la rotation d'angle θ autour de l'axe Ox est donnée par la matrice

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et la rotation d'angle θ autour de l'axe Oy est donnée par la matrice

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(observer la place du signe $-$ dans cette matrice !).
Finalement, la rotation d'angle θ autour de l'axe Oz est donnée par la matrice

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si on effectue une rotation d'angle φ autour de l'axe Oz, puis une rotation d'angle θ autour de l'axe Oy et enfin une rotation d'angle ψ de nouveau autour de l'axe Oz, on obtient une matrice

$$A = R_z(\psi) \circ R_y(\theta) \circ R_z(\varphi) =$$
$$\begin{pmatrix} \cos(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\psi)\sin(\phi) & -\cos(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) - \sin(\psi)\cos(\phi) & \cos(\psi)\sin(\theta) \\ \sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi) + \cos(\psi)\sin(\phi) & -\sin(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) + \cos(\psi)\cos(\phi) & \sin(\psi)\sin(\theta) \\ -\sin(\theta)\cos(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Toute matrice de rotation dans $\mathbb{R}^3$ s'obtient de cette manière (avec $0 \leq \psi < 2\pi$, $0 \leq \theta < \pi$ et $0 \leq \varphi < 2\pi$). Les angles ψ, θ, φ s'appellent les *angles d'Euler* de la rotation A.

1.0.5 Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie

Dans ce bref paragraphe nous définissons la notion d'orientation d'un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des réels. Rappelons que si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ et $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sont deux bases d'un espace vectoriel V, alors on appelle *matrice de changement de base* de la base $\{u_i\}$ vers la base $\{v_j\}$ la matrice $P = (p_{ij})$ définie par

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} u_i$$

Définition. On dit que deux bases $\{u_1, \ldots, u_n\}$ et $\{v_1, \ldots, v_n\}$ d'un espace vectoriel réel ont la *même orientation* si le déterminant de la matrice de changement de base P est positif. Sinon on dit que les bases ont des *orientation opposées.*

Il n'est pas difficile de vérifier que "avoir la même orientation" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de V. De plus il existe exactement deux classes d'équivalences.

Définition. On appelle *orientation* de V le choix d'une classe d'équivalence pour cette relation. Un *espace vectoriel réel orienté* est un espace vectoriel muni du choix d'une orientation.

Une orientation de V est donc définie dès qu'on a choisi une base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et qu'on la déclarée d'orientation positive. Toute autre base est dite d'*orientation positive* si elle a la même orientation que $\mathcal{B}$; on dit aussi que c'est une *base directe*. Une base est dite d'*orientation négative* que c'est une *base indirecte* si elle a l'orientation opposée à d'*orientation positive* si elle a la même orientation que $\mathcal{B}$; on dit aussi que c'est une *base directe* $\mathcal{B}$.

Finalement, on dit qu'une application linéaire $f : V \to V$ *préserve l'orientation* si son déterminant est positif et qu'elle *inverse l'orientation* si son déterminant est négatif. Noter que cette notion est indépendante du choix d'une orientation sur V. On note

$$\mathrm{GL}_+(V) = \{f \in \mathrm{GL}(V) \mid \det(f) > 0\},$$

c'est un sous-groupe du groupe linéaire général de V.

1.1 Qu'est ce qu'une courbe ?

La notion mathématique de *courbe* ou de *ligne* formalise l'idée intuitive d'un objet du plan ou de l'espace qui est continu et n'a qu'une dimension. Euclide en donne la définition suivante dans le livre I des *Eléments* : *une ligne est une longueur sans largeur*. Les droites, les cercles et les ellipses sont des exemples familiers de courbes. Dans la vie courante, un fil de fer ou la trajectoire d'un projectile sont des exemples concrets.

La formalisation de la notion de courbes conduit à plusieurs concepts qu'il faudra distinguer. Le premier est celui de « lieu géométrique » des points satisfaisant certaines propriétés : cette idée nous conduit à la notion *implicite* d'une courbe comme ensemble des points satisfaisant une équation (dans le plan) ou deux équations (dans l'espace). Le second concept est celui de courbe comme « trajectoire » : on ne regarde plus la courbe comme un ensemble de points, mais comme un « point mobile », c'est-à-dire une fonction d'un paramètre à valeur dans le plan ou dans l'espace : c'est le point de vue *paramétrique* ou *cinématique* en théorie des courbes. L'acte de tracer une courbe au crayon noir sur une feuille blanche se décrit par le point de vue paramétrique, le résultat de cette action, la courbe qu'on a tracée, correspond au point de vue implicite. Dans ce chapitre, nous privilégions le point de vue paramétrique.

1.2 Notions fondamentales

Dans ce chapitre, on suppose que l'espace est muni d'un système de coordonnées fixe, on l'identifie donc à $\mathbb{R}^n$ et on admet que n est un entier quelconque. On supposera, sauf mention du contraire, que le système de coordonnées est orthonormé, la norme d'un vecteur $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ est alors donnée par

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Définitions. Une *courbe paramétrée* dans $\mathbb{R}^n$ est une application continue $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$:

$$\alpha : u \mapsto (\alpha_1(u), \alpha_2(u), ..., \alpha_n(u)) \in \mathbb{R}^n, \qquad u \in I$$

où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle appelé l'*intervalle de paramétrage* de la courbe.

La variable u parcourant l'intervalle I s'appelle le *paramètre* (elle est aussi parfois notée par les lettres s, t, φ ou θ) et l'ensemble

$$\alpha(I) = \{\alpha(u) \,\big|\, u \in I\} \subset \mathbb{R}^n$$

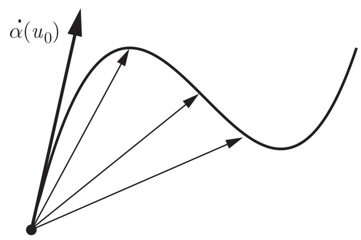
s'appelle la *trace* ou le *support* de la courbe paramétrée α.

On dit que la courbe α est *différentiable* en $u_0 \in I$ si la limite

$$\frac{d\alpha}{du}(u_0) := \lim_{u \to u_0} \frac{\alpha(u) - \alpha(u_0)}{u - u_0}$$

existe. Cette limite s'appelle alors le *vecteur vitesse* de la courbe α en u_0 et on le note $\dot{\alpha}(u_0)$ ou $\alpha'(u_0)$.

Remarquons que la direction du vecteur vitesse est tangente à la courbe en $\alpha(u_0)$ car cette direction est la limite des direcions prises par une suite de cordes reliant le point $p = \alpha(u_0)$ à un



point de la courbe se rapprochant du point p.

La *vitesse* de α en u_0 est la norme du vecteur vitesse, on la note

$$V_\alpha(u_0) = \|\dot\alpha(u_0)\|.$$

Lemme 1.1 *La courbe $\alpha(u) = (\alpha_1(u), ..., \alpha_n(u))$ est différentiable en u_0 si et seulement si les fonctions $\alpha_i(u)$ sont dérivables en u_0. De plus*

$$\dot\alpha(u_0) = \left(\frac{d\alpha_1}{du}(u_0), ..., \frac{d\alpha_n}{du}(u_0)\right),$$

et

$$V_\alpha(u_0) = \sqrt{\left(\frac{d\alpha_1}{du}(u_0)\right)^2 + \cdots + \left(\frac{d\alpha_n}{du}(u_0)\right)^2}.$$

□

Attention. La seconde formule est fausse si l'on travaille dans un système de coordonnées non orthonormé.

Définitions. Voyons quelques définitions supplémentaires.

(a) La courbe $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ est dite de *classe* C^1 si elle est différentiable en tout point de I et si les dérivées

$$\dot\alpha_j = \frac{d\alpha_j}{du}$$

sont continues sur l'intervalle I pour tout $j = 1, 2, \dots, n$.

(b) La courbe est dite de *classe* C^k (où k est un entier) si les dérivées d'ordre m

$$\frac{d^m\alpha_j}{du^m}(u)$$

existent et sont continues pour tout $j = 1, 2, \dots, n$ et tout $m = 1, 2, \dots, k$.

Si une courbe est de classe C^k pour tout entier k, on dit qu'elle est de classe C^∞. Si la courbe est simplement continue, on dit qu'elle est de *classe* C^0.

(c) Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ est une courbe de classe C^2, alors son *accélération* est le vecteur défini par

$$\ddot\alpha(u) = \frac{d^2\alpha}{du^2}(u).$$

(d) Soit α une courbe de classe C^1 et u_0 une valeur du paramètre. On dit que le point $p = \alpha(u_0)$ est *singulier* si $\dot{\alpha}(u_0) = \mathbf{0}$ (de façon équivalente, p est singulier si et seulement si $V_\alpha(u_0) = 0$). Le point $p = \alpha(u_0)$ est *régulier* s'il n'est pas singulier.

Une courbe est *régulière* si elle est de classe C^1 et si tous ses points sont réguliers.

(e) Le point $p = \alpha(u_0)$ sur une courbe de classe C^2 est *birégulier* si $\dot{\alpha}(u_0)$ et $\ddot{\alpha}(u_0)$ sont linéairement indépendants.

Une courbe est *birégulière* si elle est de classe C^2 et si tous ses points sont biréguliers.

(f) Le *plan osculateur* à la courbe α au point $p = \alpha(u_0)$ est le plan passant par p et qui est parallèle aux vecteurs $\dot{\alpha}(u_0)$ et $\ddot{\alpha}(u_0)$. Ce plan n'est défini que si p est un point birégulier.

(g) Un point p sur une courbe $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ est un *point double* s'il existe deux valeurs distinctes du paramètre ($u_1, u_2 \in I$, $u_1 \neq u_2$) telles que

$$p = \alpha(u_1) = \alpha(u_2)\,.$$

(h) Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ est une courbe et si $J \subset I$ est un intervalle, alors on dit que la restriction de α à J est un *arc* de la courbe *arc de courbe* α (un arc de courbe n'est donc rien d'autre qu'un « morceau de courbe »).

(i) On dit qu'un arc de courbe est *simple* s'il ne contient pas de point double.

(j) La *droite tangente* à la courbe γ au point régulier $\gamma(u_0)$ est la droite $T_{u_0}\gamma$ parcourue à vitesse constante, passant par $\gamma(u_0)$ dans la direction du vecteur vitesse $\dot{\gamma}(u_0)$:

$$T_{u_0}\gamma : \lambda \mapsto \gamma(u_0) + \lambda\dot{\gamma}(u_0), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.1
1) La *cubique* dans $\mathbb{R}^3$ est la courbe $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\alpha(u) = (au, bu^2, cu^3),$$

où a, b, c sont des constantes non nulles. Cette courbe est de classe C^∞, son vecteur vitesse est

$$\dot{\alpha}(u) = (a, 2bu, 3cu^2)$$

et son accélération est

$$\ddot{\alpha}(u) = (0, 2b, 6cu).$$

La cubique est donc birégulière et sa vitesse est

$$V_\alpha(u) = \|\dot{\alpha}(u)\| = \sqrt{a^2 + 4b^2u^2 + 9c^2u^4}.$$

2) La courbe $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\beta(u) = (u^2, u^3, \ldots, u^{n+1})$$

est de classe C^∞. Son vecteur vitesse est

$$\dot{\beta}(u) = (2u, 3u^2, \ldots, (n+1)u^n),$$

et sa vitesse est $V_\beta(u) = \left\|\dot\beta(u)\right\| = \sqrt{4u^2 + \cdots + ((n+1)u^n)^2}$. Cette courbe a un unique point singulier en $\beta(0) = (0,0,\ldots,0)$.

3) La droite passant par les points distincts $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ et $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ admet le paramétrage affine $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ suivant :

$$\delta(t) = p + t\,\overrightarrow{pq} = (p_1 + t(q_1 - p_1), p_2 + t(q_2 - p_2), ..., p_n + t(q_n - p_n)).$$

En posant $\mathbf{w} = \overrightarrow{pq} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, on a $\delta(t) = (p_1 + tw_1, ..., p_n + tw_n)$. Le vecteur vitesse et la vitesse sont donnés pour tout t par

$$\dot\delta(t) = \mathbf{w} \quad \text{et} \quad V_\delta(t) = \|\mathbf{w}\|,$$

et l'accélération est nulle. La courbe est donc régulière, de classe C^∞ et sa vitesse est constante. Son accélération est nulle et la droite n'est donc pas birégulière.

4) La même droite admet de nombreux autres paramétrages, par exemple :

$$\varepsilon(t) = p + t^3\mathbf{w} = (p_1 + t^3 w_1, ..., p_n + t^3 w_n) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Dans ce cas,

$$\dot\varepsilon(t) = 3t^2\mathbf{w} \quad \text{et} \quad V_\varepsilon(t) = 3t^2\|\mathbf{w}\|.$$

La courbe est de classe C^∞ et elle possède un unique point singulier en $\varepsilon(0) = p$.

5) Ou encore

$$\eta(t) = p + \sqrt[3]{t}\mathbf{w} = (p_1 + \sqrt[3]{t}w_1, ..., p_n + \sqrt[3]{t}\,w_n) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Cette courbe n'est alors pas de classe C^1, elle n'est en effet pas différentiable en $t = 0$. Nous avons pour $t \neq 0$:

$$\dot\eta(t) = \frac{1}{3}t^{-2/3}\mathbf{w} \quad \text{et} \quad V_\eta(t) = \frac{1}{3}t^{-2/3}\|\mathbf{w}\|,$$

et donc $V_\eta(t) \to \infty$ lorsque $t \to 0$.

6) Le cercle de centre p et rayon r dans le plan $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ admet le paramétrage

$$c(t) = p + r\cos(\omega\, t)\mathbf{b}_1 + r\sin(\omega\, t)\mathbf{b}_2 \qquad (0 \le t \le \frac{2\pi}{\omega})$$

où $p, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ est un repère orthonormé dans le plan Π et $\omega > 0$ est une constante appelée la *vitesse angulaire* (on vérifie en effet facilement que $\|c(t) - p\| = r$). La vitesse de cette courbe est

$$\dot c(t) = -\omega\, r\sin(\omega\, t)\mathbf{b}_1 + \omega\, r\cos(\omega\, t)\mathbf{b}_2 \quad \text{et} \quad V_c(t) = \omega r.$$

Son accélération est

$$\ddot c(t) = -\omega^2\, r\cos(\omega\, t)\mathbf{b}_1 - \omega^2\, r\sin(\omega\, t)\mathbf{b}_2.$$

La courbe est birégulière, elle est de classe C^∞, et sa vitesse est constante.

7) Le *graphe* d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est la courbe $\gamma_f : I \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma_f(x) = (x, f(x)).$$

Remarquons que la variable x est à la fois une coordonnée du plan et le paramètre de la courbe. Si f est continûment dérivable, alors la courbe est de classe C^1 et

$$\dot{\gamma}_f(x) = (1, f'(x)) \quad \text{et} \quad V_\gamma(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Cette courbe est toujours régulière puisqu'en tout point $V_\gamma(x) \geq 1$.

8) L'*hélice circulaire* est la courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

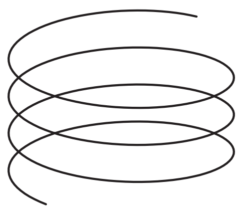
$$\gamma(u) = (a\ \cos(u),\ a\ \sin(u),\ b\,u),$$

avec a et b non nuls. Son vecteur vitesse et son accélération sont donnés par

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(u) &= (-a\sin(u), a\cos(u), b) \\ \ddot{\gamma}(u) &= a(-\cos(u), -\sin(u), 0)\,. \end{aligned}$$

L'hélice circulaire est donc une courbe birégulière et la vitesse est constante :

$$\parallel \dot{\gamma} \parallel = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



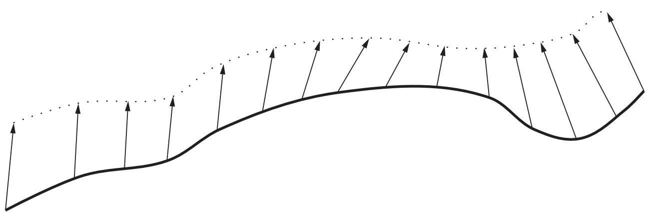
Hélice circulaire

1.3 Champs de vecteurs le long d'une courbe

Définition. Un *champ de vecteurs* le long d'une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est la donnée d'un vecteur

$$\mathbf{W}(u) = w_1(u)\mathbf{e}_1 + w_2(u)\mathbf{e}_2 + \cdots + w_n(u)\mathbf{e}_n$$

pour toute valeur du paramètre $u \in I$. Ce vecteur est en général considéré comme un vecteur fixe d'origine $\gamma(u)$, mais on peut aussi le voir comme un vecteur libre.



Champ de vecteurs le long d'une courbe.

Le champ de vecteurs $\mathbf{W}(u)$ est dit *de classe* C^k si les dérivées de $w_1, w_2, \ldots w_n$ existent et sont continues jusqu'à l'ordre k.

Exemples de champs de vecteurs

(1) Si γ est de classe C^1, alors son vecteur vitesse définit un champ $u \mapsto \dot{\gamma}(u)$.

(2) Si γ est de classe C^2, alors son accélération définit un champ $u \mapsto \ddot{\gamma}(u)$.

(3) Si $\mathbf{W}(u)$ est un champ de vecteurs de classe C^k, alors sa dérivée $\dot{\mathbf{W}}(u)$ est un champ de vecteurs de classe C^{k-1} et $\ddot{\mathbf{W}}(u)$ est de classe C^{k-2}.

(4) Si $\mathbf{W}(u)$ et $\mathbf{Z}(u)$ sont deux champs de vecteurs le long de la courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions, alors
$$u \mapsto f(u)\mathbf{W}(u) + g(u)\mathbf{Z}(u)$$
est un nouveau champ de vecteurs le long de la courbe.

(5) En dimension 3, un autre champ est donné par $u \to \mathbf{W}(u) \times \mathbf{Z}(u)$.

(6) Si $\gamma, \beta : I \mapsto \mathbb{R}^n$ sont deux courbes ayant même intervalle de paramétrage, alors on peut définir un champ
$$\mathbf{W}(u) = \beta(u) - \gamma(u),$$
ce champ s'appelle le *champ de poursuite* de la courbe β depuis la courbe γ.

(7) Un champ important est le *vecteur tangent* d'une courbe régulière $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. C'est le champ de vecteurs le long de la courbe obtenu en normalisant le vecteur vitesse :
$$\mathbf{T}_\gamma(u) := \frac{\dot{\gamma}(u)}{\|\dot{\gamma}(u)\|} = \frac{\dot{\gamma}(u)}{V_\gamma(u)}.$$

(8) Le *vecteur normal principal* d'une courbe birégulière γ de classe C^2 est le champ de vecteurs le long de la courbe défini par
$$\mathbf{N}_\gamma(u) := \frac{\ddot{\gamma}(u) - \langle \ddot{\gamma}(u), \mathbf{T}_\gamma(u) \rangle \cdot \mathbf{T}_\gamma(u)}{\|\ddot{\gamma}(u) - \langle \ddot{\gamma}(u), \mathbf{T}_\gamma(u) \rangle \cdot \mathbf{T}_\gamma(u)\|}.$$

Exercice. Vérifier que en chaque point d'une courbe birégulière, les vecteurs $\mathbf{T}_\gamma(u)$ et $\mathbf{N}_\gamma(u)$ forment un repère orthonormé du plan osculateur.

Lemme 1.2 (Règle de Leibniz) *Soient* $\mathbf{W}(u)$ *et* $\mathbf{Z}(u)$ *deux champs de vecteurs de classe* C^1 *le long de la courbe* $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, *alors*
$$\frac{d}{du}\Big\langle \mathbf{W}(u), \mathbf{Z}(u) \Big\rangle = \Big\langle \dot{\mathbf{W}}(u), \mathbf{Z}(u) \Big\rangle + \Big\langle \mathbf{W}(u), \dot{\mathbf{Z}}(u) \Big\rangle.$$
Si $n = 3$, *alors on a de même*
$$\frac{d}{du}\left(\mathbf{W}(u) \times \mathbf{Z}(u)\right) = \dot{\mathbf{W}}(u) \times \mathbf{Z}(u) + \mathbf{W}(u) \times \dot{\mathbf{Z}}(u),$$
et si $n = 2$,
$$\frac{d}{du}\left(\mathbf{W}(u) \wedge \mathbf{Z}(u)\right) = \dot{\mathbf{W}}(u) \wedge \mathbf{Z}(u) + \mathbf{W}(u) \wedge \dot{\mathbf{Z}}(u).$$

Preuve. Démontrons la première formule. Pour simplifier on écrit
$$\mathbf{W}(u) \cdot \mathbf{Z}(u) = \langle \mathbf{W}(u), \mathbf{Z}(u) \rangle.$$

On a alors par bilinéarité

$$\begin{aligned}
&\mathbf{W}(u+\varepsilon)\cdot\mathbf{Z}(u+\varepsilon)-\mathbf{W}(u)\cdot\mathbf{Z}(u)\\
&\quad=\Big(\mathbf{W}(u+\varepsilon)\cdot\mathbf{Z}(u+\varepsilon)-\mathbf{W}(u)\cdot\mathbf{Z}(u+\varepsilon)\Big)+\Big(\mathbf{W}(u)\cdot\mathbf{Z}(u+\varepsilon)-\mathbf{W}(u)\cdot\mathbf{Z}(u)\Big)\\
&\quad=\Big(\mathbf{W}(u+\varepsilon)-\mathbf{W}(u)\Big)\cdot\mathbf{Z}(u+\varepsilon)+\mathbf{W}(u)\cdot\Big(\mathbf{Z}(u+\varepsilon)-\mathbf{Z}(u)\Big).
\end{aligned}$$

Il suffit de diviser cette identité par ε et faire tendre ε vers 0 pour obtenir le lemme. Les autres formules se vérifient de la même manière.

□

Corollaire 1.3 (a) *Si $\mathbf{W}_1(u)$ et $\mathbf{W}_2(u)$ sont deux champs de vecteurs de classe C^1 le long de γ tel que $\langle\mathbf{W}_1(u),\mathbf{W}_2(u)\rangle$ est constant, alors on a*

$$\langle\mathbf{W}_1(u),\dot{\mathbf{W}}_2(u)\rangle=-\langle\dot{\mathbf{W}}_1(u),\mathbf{W}_2(u)\rangle$$

pour tout $u\in I$.

(b) *Si $\mathbf{W}(u)$ est un champ de vecteurs de classe C^1 le long de γ tel que $\|\mathbf{W}\|$ est constant, alors $\dot{\mathbf{W}}(u)$ est orthogonal à $\mathbf{W}(u)$ pour tout $u\in I$.*

Preuve. L'affirmation (a) est une conséquence immédiate de la règle de Leibniz et (b) découle de (a).

□

1.4 Longueur et abscisse curviligne

Définition. La *longueur* d'un arc de courbe $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ de classe C^1 est l'intégrale de sa vitesse :

$$\ell(\gamma)=\int_a^b V_\gamma(t)\,dt,\quad \text{où } V_\gamma=\|\dot\gamma(t)\|.$$

Exemple 1.2

1) Il est clair que si la vitesse est constante : $V_\gamma(t)\equiv v$, alors on a

$$\ell(\gamma)=v\cdot(b-a).$$

Ainsi, *la longueur d'un chemin parcouru à vitesse constante est égale à la vitesse fois le temps de parcours* :

$$\text{longueur}=\text{vitesse}\times\text{temps}.$$

2) Comme cas particulier, nous avons le segment $[p,q]$ paramétré par $\delta(t)=(p_1+t(q_1-p_1),\dots,p_n+t(q_n-p_n))$, avec $t\in[0,1]$.
On a vu que $V_\delta(t)=\|\overrightarrow{pq}\|=\|q-p\|$ et donc

$$\ell(\delta)=\|q-p\|\,.$$

3) L'arc de cercle de centre p et rayon r dans $\mathbb{R}^2$ est paramétré par $c(\theta)=(p_1+r\cos(\theta),p_2+r\sin(\theta))$, où θ varie de θ_0 à θ_1. La vitesse de cette courbe est constante : $V_c(\theta)=r$, et donc

$$\ell(c)=\int_{\theta_0}^{\theta_1}V_c\,d\theta=r\,(\theta_1-\theta_0)\,.$$

On a donc montré que *la longueur d'un arc de cercle est égale au produit du rayon par l'angle qui sous-tend l'arc.*

4) La longueur du graphe $\gamma_f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ de la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$\ell(\gamma_f) = \int_a^b V_\gamma(x)\,dx = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Voyons à présent quelques propriétés importantes de la longueur.

Proposition 1.4 *Si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une similitude de rapport $\lambda > 0$ et $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est un arc de courbe de classe C^1, alors $\tilde{\gamma} := g \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est aussi de classe C^1 et*

$$\ell(\tilde{\gamma}) = \lambda \ell(\gamma).$$

En particulier la longueur d'une courbe est invariante par isométrie.

Preuve. On sait que toute similitude g est de la forme $g(x) = \lambda A x + \mathbf{b}$, où $\mathbf{b}$ est un vecteur et A une matrice orthogonale. On a donc $\tilde{\gamma}(u) = \lambda A \gamma(u) + \mathbf{b}$, et, par la règle de Leibniz,

$$\dot{\tilde{\gamma}}(u) = \lambda \dot{A}\gamma(u) + \lambda A \dot{\gamma}(u) + \dot{\mathbf{b}} = \lambda A \dot{\gamma}(u)$$

puisque A et $\mathbf{b}$ sont constantes. Comme A est une matrice orthogonale, on a

$$V_{\tilde{\gamma}}(u) = \|\dot{\tilde{\gamma}}(u)\| = \|\lambda A \dot{\gamma}(u)\| = \lambda\, \|\dot{\gamma}(u)\| = \lambda V_\gamma(u),$$

et donc

$$\ell(\tilde{\gamma}) = \int_a^b V_{\tilde{\gamma}}(u)du = \lambda \int_a^b V_\gamma(u)du = \lambda \ell(\gamma).$$

□

Proposition 1.5 (additivité de la longueur) *Soit $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^1 et $c \in [a,b]$. Notons $\beta := \alpha|_{[a,c]} : [a,c] \to \mathbb{R}^n$ et $\gamma := \alpha|_{[c,b]} : [c,b] \to \mathbb{R}^n$ les restrictions de α aux intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$. Alors*

$$\ell(\alpha) = \ell(\beta) + \ell(\gamma).$$

Preuve. Cette proposition découle de la propriété correspondante de l'intégrale, nous laissons le lecteur compléter les détails.

□

Proposition 1.6 *Pour tout arc de courbe $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 on a*

$$d(\alpha(a), \alpha(b)) \leq \ell(\alpha).$$

Cette proposition dit que *le plus court chemin reliant deux points est le segment de droite entre ces deux points.*

Preuve. Si $\alpha(b) = \alpha(a)$ il n'y a rien à montrer. Sinon on pose $\mathbf{w} := \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{\|\alpha(b)-\alpha(a)\|}$ et on introduit la fonction

$$f(u) := \langle \alpha(u) - \alpha(a), \mathbf{w} \rangle.$$

Par la règle de Leibniz, on a

$$\dot{f}(u) = \frac{df}{du} = \langle \dot{\alpha}(u), \mathbf{w} \rangle + \langle \alpha(u) - \alpha(a), \dot{\mathbf{w}} \rangle = \langle \dot{\alpha}(u), \mathbf{w} \rangle,$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\dot{f}(u) = \langle \dot{\alpha}(u), \mathbf{w} \rangle \leq \|\dot{\alpha}(u)\| \, \|\mathbf{w}\| = \|\dot{\alpha}(u)\| = V_\alpha(u)$$

(car $\|\mathbf{w}\| = 1$). On a donc

$$\begin{aligned} d(\alpha(a), \alpha(b)) &= \|\alpha(b) - \alpha(a)\| \\ &= f(b) - f(a) \\ &= \int_a^b \dot{f}(u) du \\ &\leq \int_a^b V_\alpha(u) du = \ell(\alpha). \end{aligned}$$

□

Définition. Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1 et $u_0 \in I$ une valeur du paramètre. L'*abscisse curviligne* (ou *paramètre naturel*) sur α correspondant au *point initial* $p_0 = \alpha(u_0)$ est la fonction $s_\alpha : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$s_\alpha(u) = \int_{u_o}^u V_\alpha(\tau) d\tau.$$

L'abscisse curviligne mesure donc la longueur du chemin parcouru sur la courbe depuis le point initial, elle est négative avant le point initial et positive après :

$$s_\alpha(u) = \begin{cases} \ell(\alpha|_{[u_0,u]}) & \text{si } u \geq u_0 \\ -\ell(\alpha|_{[u_0,u]}) & \text{si } u \leq u_0. \end{cases}$$

Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, nous noterons l'abscisse curviligne par $s(u)$ au lieu de $s_\alpha(u)$.

1.5 Changement de paramétrage d'une courbe

La notion de courbe que nous avons introduite plus haut est une notion *cinématique* [1], i.e. fondée sur la notion de paramétrage. Il est naturel, d'un point de vue géométrique, d'admettre qu'une « même » courbe puisse avoir plusieurs paramétrages distincts.

Définition. Soit $\alpha(t)$ $(t \in I)$ une courbe paramétrée. On dit qu'une courbe $\beta(u)$ $(u \in J)$ est une *reparamétrage* de α s'il existe une bijection

$$h : I \to J$$

transformant le paramètre t en $u = h(t)$ et telle que

1. Le mot *cinématique* vient du grec κίνησις, qui signifie « mouvement ».

a) h est continûment différentiable ;

b) $h'(t) > 0$ quel que soit $t \in I$;

c) $\alpha = \beta \circ h$.

Observons que les deux courbes ont alors la même trace $\alpha(I) = \beta(J)$. Les vecteurs vitesses sont reliés par

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\beta}{du}\frac{du}{dt} = h'(t)\frac{d\beta}{du} \tag{1.1}$$

et les vitesses par

$$V_\alpha(t) = h'(t)V_\beta(u).$$

En particulier, comme $\dfrac{du}{dt} = h'(t) \neq 0$, on voit que les courbes α et β ont les mêmes points singuliers.

Les formules ci-dessus montrent en particulier que lorsqu'on reparamétrise une courbe, celle-ci ne change pas de sens de parcours (car les vecteurs vitesses des deux courbes ont même direction et même sens). On peut toutefois inverser le sens de parcours d'une courbe par une procédure similaire à un reparamétrage.

Définition. On dit qu'une courbe $\beta(u)$ $(u \in J)$ est une *inversion*, ou un *antireparamétrage*, de la courbe $\alpha(t)$ $(t \in I)$ s'il existe une bijection

$$h : I \to J$$

transformant le paramètre t en $u = h(t)$ et telle que

a) h est continûment différentiable ;

b) $h'(t) < 0$ quel que soit $t \in I$;

c) $\alpha = \beta \circ h$.

Voici un exemple simple : considérons les courbes du plan $\mathbb{R}^2$

$$\alpha(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \qquad (0 < \theta < \pi)$$

et

$$\gamma(x) = (x, \sqrt{1-x^2}), \qquad (-1 < x < 1).$$

Ces deux courbes ont la même trace, qui est le demi-cercle unité :

$$\left\{(x,y) \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1, y > 0\right\}.$$

La fonction $h : (0,\pi) \to (-1,1)$ définie par $h(\theta) = x = \cos(\theta)$ fait le lien entre les deux paramétrages car

$$\gamma(h(\theta)) = (x, \sqrt{1-x^2}) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) = \alpha(\theta).$$

Comme $h'(\theta) = \dfrac{dx}{d\theta} = -\sin(\theta) < 0$, on voit que la courbe α est une inversion de γ.

Observons par ailleurs que si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, alors $h'(\theta) = 0$. L'inversion h cesse d'être admissible aux extrémités de l'intervalle. Cela correspond au fait que la vitesse de γ

$$V_\gamma(x) = \left\|\frac{d\gamma}{dx}\right\| = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

tend vers l'infini lorsque $x \to \pm 1$.

1.6 Quantités géométriques et quantités cinématiques

Définition. Une quantité ou une notion attachée à une courbe est dite *géométrique* si elle est invariante par rapport aux changements de paramètre, et elle est dite *cinématique* dans le cas contraire.

Par exemple, la vitesse et l'accélération sont des notions cinématiques alors que la notion de point singulier, de point régulier et de direction tangente sont des notions géométriques.

Lemme 1.7 *Le vecteur tangent* $\mathbf{T}_\alpha(t)$ *est une quantité géométrique.*

Preuve. Cette affirmation est géométriquement évidente, puisque $\mathbf{T}$ est un champ de vecteurs unitaire indiquant la direction de la courbe. Voyons tout de même une preuve formelle de ce lemme :
Soit $\beta(u)$ $(u \in J)$ un reparamétrage de la courbe α. Il existe alors une fonction $h : I \to J$ telle que $h'(t) > 0$ et $\alpha(t) = \beta(h(t))$. On sait que $V_\alpha(t) = V_\beta(u)h'(t)$, par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\alpha, t) = \frac{1}{V_\alpha(t)}\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{V_\alpha(t)}\frac{d\beta(h(t))}{dt} \\ &= \frac{h'(t)}{V_\alpha(t)}\frac{d\beta(u)}{du} \\ &= \frac{1}{V_\beta(u)}\frac{d\beta(u)}{du} \\ &= \mathbf{T}(\beta, u). \end{aligned}$$

□

La longueur d'une courbe est également une quantité géométrique ; plus généralement, nous avons la proposition suivante.

Proposition 1.8 *Soient* α *et* β *deux courbes de classe* C^1. *Si* β *est un reparamétrage ou une inversion de* α, *alors* $\ell(\beta) = \ell(\alpha)$.

Preuve. Considérons d'abord le cas où $\beta(u)$ $(a' \leq u \leq b')$ est un reparamétrage de la courbe $\alpha(t)$ $(a \leq t \leq b)$; on a

$$\begin{aligned} \ell(\beta) = \int_{a'}^{b'} V_\beta(u)\, du &= \int_a^b V_\beta(u)\,\frac{du}{dt}\, dt \\ &= \int_a^b V_\alpha(t)\, dt \\ &= \ell(\alpha)\,. \end{aligned}$$

Dans le cas où $\beta(u)$ est une inversion de $\alpha(t)$, alors $\dfrac{du}{dt} < 0$ et on a

$$\begin{aligned}
\ell(\beta) = \int_{a'}^{b'} V_\beta(u)\, du &= \int_b^a V_\beta(u)\, \frac{du}{dt}\, dt \\
&= -\int_b^a V_\alpha(t)\, dt \\
&= \int_a^b V_\alpha(t)\, dt \\
&= \ell(\alpha)\,.
\end{aligned}$$

□

Considérons par exemple l'arc du cercle unité compris entre les points $(1, 0)$ et (x_0, y_0) (où l'on suppose $y > 0$), alors la longueur de cet arc de cercle est donnée par

$$\ell = \theta = \mathrm{Arcos}(x_0)\,.$$

Si cette courbe est paramétrée comme un graphe, i.e. par $\gamma(x) = (x, \sqrt{1 - x^2})$, $(x_0 < x < 1)$, alors la vitesse est $V_\gamma(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ et la longueur est donc donnée par

$$\ell = \int_{x_0}^{1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}\,.$$

La proposition 1.8 nous permet de déduire du résultat précédent l'identité analytique :

$$\int_{x_0}^{1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \mathrm{Arcos}(x_0)\,,$$

que nous avons obtenue (presque) sans aucun calcul, mais par un raisonnement purement géométrique.

1.7 Paramétrage naturel d'une courbe régulière

Théorème 1.9 *Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe régulière de classe C^1 et $t_0 \in I$ une valeur du paramètre. Alors il existe une unique reparamétrage $h : I \to J$, telle que $0 \in J$, $h(t_0) = 0$ et telle que $\beta := \alpha \circ h^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$ soit de vitesse 1 : $V_\beta(s) = 1$.*

Preuve. Montrons d'abord l'unicité de ce reparamétrage. On a vu plus haut (p. 20) que

$$V_\alpha(t) = h'(t) V_\beta(s).$$

Comme $V_\beta(s) = 1$ et $h' > 0$, on a donc $h'(t) = V_\alpha(t)$ et comme $h(t_0) = 0$, on doit avoir

$$s = h(t) = \int_{t_0}^{t} V_\alpha(\tau) d\tau.$$

Ainsi $h(t)$ coïncide avec l'abscisse curviligne $s(t)$.

Pour montrer l'existence du reparamétrage, on *définit* à présent h par $h(t) = s(t) = \int_{t_0}^{t} V_\alpha(\tau)d\tau$ et l'intervalle J par $J = h(I)$. Alors $h(t_0) = 0$ et $h'(t) = V_\alpha(t)$. En utilisant la formule (1.1) de la page 20, on voit que la courbe $\beta := \alpha \circ h^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$ vérifie

$$V_\beta(s) = V_\alpha(t)\,\frac{1}{h'(t)} = 1.$$

□

Définition. On dit qu'une courbe régulière γ est *paramétrée naturellement* si sa vitesse vaut 1, i.e. si $\left\|\dot{\gamma}(s)\right\| = 1$ pour tout s. Le théorème précédent nous dit que toute courbe régulière peut se reparamétrer de façon naturelle.

Dès qu'un point initial et un sens de parcours ont été choisis sur la courbe, le paramétrage naturel est unique et il est donné par l'abscisse curviligne.

Recette Pour trouver le paramétrage naturel d'une courbe α, il faut effectuer les opérations suivantes :

1) Identifier ou choisir le point initial u_0.
2) Calculer la vitesse $V_\alpha(u) = \|\dot{\alpha}(u)\|$.
3) Intégrer V_α pour obtenir l'abscisse curviligne s : $s(u) = \int_{u_0}^{u} V_\alpha(\tau)d\tau$.
4) Inverser la relation $s = s(u)$ (i.e. exprimer u en fonction de s : $u = u(s)$).
5) On obtient alors le paramétrage naturel $\beta(s) = \alpha(u(s))$.

Exemple 1.3 La *chaînette* est la courbe plane paramétrée par $\alpha(u) = (u, \cosh u)$. Le vecteur vitesse est $\dot{\alpha}(u) = (1, \sinh(u))$, et donc

$$V_\alpha(u) = \|\dot{\alpha}(u)\| = \sqrt{1 + \sinh^2(u)} = \cosh(u)\,.$$

L'abscisse curviligne depuis le point initial $\alpha(0) = (0, 1)$ est donnée par l'intégrale

$$s(u) = \int_0^u V_\alpha(t)dt = \int_0^u \cosh(t)dt = \sinh(u),$$

et on a donc

$$u(s) = \operatorname{argsh}(s) = \log(s + \sqrt{1 + s^2}).$$

Remarquons que $\cosh(u) = \sqrt{1 + \sinh^2(u)} = \sqrt{1 + s^2}$. En substituant cette relation dans le paramétrage de α, on obtient le paramétrage naturel de la chaînette :

$$\beta(s) = \alpha(u(s)) = (u(s), \cosh u(s)) = (\operatorname{argsh}(s), \sqrt{1 + s^2}).$$

On vérifie facilement que $\|\dot{\beta}(s)\| = 1$.

Les courbes pour lesquelles on peut effectivement calculer le paramétrage naturel sont plutôt rares ; mais cette notion joue un rôle théorique fondamental. Il faut en particulier se souvenir des relations suivantes qui relient le paramètre naturel s au paramètre donné u.

$$\boxed{ds = V(u) \cdot du \qquad , \qquad \frac{d}{ds} = \frac{1}{V(u)}\frac{d}{du}.} \tag{1.2}$$

Remarque. L'abscisse curviligne joue un rôle fondamental en théorie des courbes, car c'est dans le paramétrage naturel que les relations fondamentales entre les différentes quantités géométriques liées à une courbe sont le plus clairement mises en évidence. Pour cette raison, les livres traitant de courbes choisissent souvent d'écrire les formules relativement à la seule abscisse curviligne. Nous n'avons pas fait ce choix et avons préféré écrire les formules par rapport à un paramètre général en raison de la difficulté pratique de calculer le paramétrage naturel pour la plupart des courbes. Nous invitons toutefois le lecteurs à récrire lui-même les formules des prochains paragraphes dans le cas spécial d'une courbe paramétrée naturellement ; il constatera ainsi lui-même combien les formules et les calculs théoriques se simplifient.

1.8 Courbure d'une courbe de $\mathbb{R}^n$

Définition. Le *vecteur de courbure* d'une courbe régulière $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 est le champ de vecteurs le long de cette courbe défini par

$$\mathbf{K}(\alpha, t) := \frac{1}{V_\alpha(t)}\frac{d}{dt}\mathbf{T}(\alpha, t),$$

où $\mathbf{T}(\alpha, t) = \frac{1}{V_\alpha(t)}\dot{\alpha}(t)$ est le vecteur tangent à la courbe.

Remarque. Le corollaire 1.3 entraîne que le vecteur de courbure est toujours orthogonal au vecteur tangent :

$$\mathbf{K}(\alpha, t) \perp \mathbf{T}(\alpha, t).$$

On définit aussi la *courbure* de la courbe α ; c'est par définition la norme du vecteur de courbure :

$$\kappa(\alpha, t) := \|\mathbf{K}(\alpha, t)\|.$$

Il est facile de voir que la courbure d'une droite est nulle, voici un autre exemple simple.

Exemple 1.4 Un paramétrage d'un cercle de centre p et rayon r est donné par

$$c(\theta) = p + r\cos(\theta)\mathbf{u}_1 + r\sin(\theta)\mathbf{u}_2,$$

où $p, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ est un repère orthonormé du plan contenant le cercle. On a

$$\dot{c}(\theta) = -r\sin(\theta)\mathbf{u}_1 + r\cos(\theta)\mathbf{u}_2,$$

donc $V_c(\theta) = r$ et $\mathbf{T}(c, \theta) = -\sin(\theta)\mathbf{u}_1 + \cos(\theta)\mathbf{u}_2$.

En dérivant le vecteur tangent, on a $\dot{\mathbf{T}}(c, \theta) = -\cos(\theta)\mathbf{u}_1 - \sin(\theta)\mathbf{u}_2$, donc

$$\mathbf{K}(c, \theta) = \frac{1}{V_c(\theta)}\dot{\mathbf{T}}(c, \theta) = -\frac{1}{r}\left(\cos(\theta)\mathbf{u}_1 + \sin(\theta)\mathbf{u}_2\right)$$

et donc

$$\kappa(c, \theta) = \|\mathbf{K}(c, \theta)\| = \frac{1}{r}.$$

La courbure du cercle est donc l'inverse de son rayon.

Remarquons aussi qu'on a la relation suivante exprimant le centre du cercle en fonction d'un point sur le cercle et de la courbure :

$$c(\theta) + r^2\mathbf{K}(c, \theta) = p. \tag{1.3}$$

Proposition 1.10 *Le vecteur de courbure $\mathbf{K}_\alpha(t)$ et la courbure $\kappa_\alpha(t) = \|\mathbf{K}_\alpha(t)\|$ sont des quantités géométriques.*

Nous laissons la preuve en exercice.

Proposition 1.11 (Formule de l'accélération) *Le vecteur accélération d'une courbe régulière $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ vérifie*

$$\boxed{\ddot{\gamma}(u) = \left(V_\gamma(u)\right)^2 \mathbf{K}_\alpha(u) + \dot{V}_\gamma(u)\mathbf{T}_\alpha(u).} \tag{1.4}$$

Preuve. Ecrivons le vecteur vitesse sous la forme $\dot{\gamma}(u) = V_\gamma(u)\mathbf{T}_\alpha(u)$ et dérivons ce vecteur :

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(u) &= \frac{d}{du}\left(V_\gamma(u)\mathbf{T}_\alpha(u)\right) = V_\gamma(u)\dot{\mathbf{T}}_\alpha(u) + \dot{V}_\gamma(u)\mathbf{T}_\alpha(u) \\ &= \left(V_\gamma(u)\right)^2 \mathbf{K}_\alpha(u) + \dot{V}_\gamma(u)\mathbf{T}_\alpha(u). \end{aligned}$$

□

On dit que $\dot{V}_\gamma(u)\mathbf{T}_\alpha(u)$ est l'*accélération tangentielle* et $\left(V_\gamma(u)\right)^2 \mathbf{K}_\alpha(u)$ est l'*accélération normale* de γ.

En mécanique, cette formule signifie que la force subie par une particule en mouvement est fonction de l'accélération tangentielle $\dot{V}_\gamma$ et du carré de la vitesse multiplié par la courbure.

Corollaire 1.12 *Si α est paramétrée naturellement, i.e. si $V_\alpha \equiv 1$, alors*

$$\ddot{\alpha}(s) = \mathbf{K}(\alpha, s).$$

Preuve. Puisque $V_\alpha \equiv 1$, on a $\dot{V}_\alpha = 0$ et le corollaire se déduit immédiatement de la formule de l'accélération. □

Proposition 1.13 *Une courbe $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est de courbure nulle si et seulement si c'est une droite ou un segment de droite (qui peut être paramétrée arbitrairement).*

Preuve. On peut supposer grâce au théorème 1.9 que α est paramétrée naturellement. Le corollaire précédent entraîne alors que $\ddot{\alpha}(s) = \mathbf{K}(\alpha, s)$ et comme $\kappa(\alpha, s) = \|\mathbf{K}(\alpha, s)\| = 0$, on a donc $\ddot{\alpha}(s) = \mathbf{0}$. Le vecteur $\mathbf{v} := \dot{\alpha}$ est alors constant et on obtient donc en intégrant

$$\alpha(s) = p + s\mathbf{v}$$

où $p = \alpha(0)$. $\square$

Lemme 1.14 *Le vecteur de courbure d'une courbe de classe C^2 en un point est un multiple du vecteur normal principal en ce point :*

$$\mathbf{K}_\gamma(u) = \kappa_\gamma(u)\mathbf{N}_\gamma(u).$$

Preuve. Nous laissons la preuve en exercice. Rappelons que

$$\mathbf{N}_\gamma(u) = \frac{\ddot{\gamma}(u) - \langle \ddot{\gamma}(u), \mathbf{T}_\gamma(u)\rangle \cdot \mathbf{T}_\gamma(u)}{\|\ddot{\gamma}(u) - \langle \ddot{\gamma}(u), \mathbf{T}_\gamma(u)\rangle \cdot \mathbf{T}_\gamma(u)\|}.$$

$\square$

Proposition 1.15 *La courbure d'une courbe de classe C^2 est la variation angulaire de la direction de cette courbe par rapport au paramètre naturel.*

La signification exacte de cette proposition sera précisée dans la preuve.

Preuve. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^2 paramétrée naturellement et notons

$$\varphi(s_0, s) := \angle\left(\mathbf{T}(s_0), \mathbf{T}(s)\right)$$

l'angle entre $\mathbf{T}(s_0)$ et $\mathbf{T}(s)$ (où $s_0, s \in I$). Comme $\|\mathbf{T}(s_0)\| = \|\mathbf{T}(s)\| = 1$, on a par la trigonométrie élémentaire que

$$\|\mathbf{T}(s_0) - \mathbf{T}(s)\| = 2\sin\left(\frac{\varphi(s_0, s)}{2}\right).$$

On a donc

$$\lim_{s \to s_{0+}} \frac{\varphi(s_0, s)}{s - s_0} = \lim_{s \to s_{0+}} \left(\frac{\varphi(s_0, s)}{2\sin\left(\frac{\varphi(s_0,s)}{2}\right)} \cdot \frac{2\sin\left(\frac{\varphi(s_0,s)}{2}\right)}{s - s_0} \right) = \lim_{s \to s_{0+}} \left\| \frac{\mathbf{T}(s_0) - \mathbf{T}(s)}{s - s_0} \right\| = \|\dot{\mathbf{T}}(s_0)\|.$$

On a ainsi montré que *la courbure est la dérivée à droite de l'angle*, on peut noter

$$\kappa(s_0) = \lim_{s \to s_{0+}} \frac{\varphi(s_0, s)}{s - s_0} = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s_{0+}} \varphi(s_0, s) \tag{1.5}$$

$\square$

1.9 Contact entre deux courbes

Définition. On dit que deux courbes de classe C^k

$$\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^n$$

ayant le même paramètre $t \in I$ ont un *contact d'ordre* k en $t_0 \in I$ si $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ et si leurs dérivées en t_0 coïncident jusqu'à l'ordre k :

$$\frac{d^m\alpha}{dt^m}(t_0) = \frac{d^m\beta}{dt^m}(t_0),$$

pour $m = 1, 2, \ldots, k$.

Ainsi, deux courbes α, β ont un contact d'ordre 0 en t_0 si elles passent par le même point en t_0. Elles ont un contact d'ordre 1 si elles passent par le même point et elles ont le même vecteur vitesse en ce point :

$$\alpha(t_0) = \beta(t_0), \qquad \frac{d\alpha}{dt}(t_0) = \frac{d\beta}{dt}(t_0).$$

Concernant les courbes ayant un contact d'ordre 2, nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.16 *Deux courbes α, β de classe C^2 ont un contact d'ordre 2 en t_0 si et seulement si elles passent par le même point et si elles ont le même vecteur vitesse et le même vecteur de courbure en ce point :*

$$\alpha(t_0) = \beta(t_0), \quad \frac{d\alpha}{dt}(t_0) = \frac{d\beta}{dt}(t_0) \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_\alpha(t_0) = \mathbf{K}_\beta(t_0).$$

En particulier, si ces deux courbes sont birégulières alors elles ont le même plan osculateur en t_0.

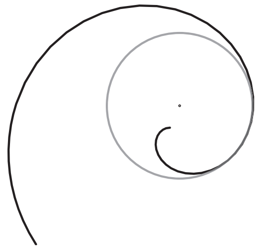
Preuve. C'est une conséquence directe de la proposition 1.11. □

Corollaire 1.17 *Deux cercles de $\mathbb{R}^n$ parcourus à vitesse constante ont un contact d'ordre 2 si et seulement si ces deux cercles coïncident.*

Preuve. Par le théorème précédent, les deux cercles ont le même vecteur vitesse et le même vecteur de courbure en leur point de contact. En particulier les deux cercles se situent dans le même plan, qui est le plan osculateur commun.. On sait en outre par l'exemple 1.4 que la courbure d'un cercle est égale à l'inverse de son rayon. Les deux cercles ont donc même rayon r. Mais on sait aussi par l'équation (1.3) que les deux cercles doivent avoir même centre, donc ils coïncident. □

Théorème 1.18 *Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^2 qui est birégulière en $t_0 \in I$. Alors il existe un cercle $c : I \to \mathbb{R}^n$ ayant un contact d'ordre 2 avec α en t_0. Ce cercle est unique à un changement de paramètre près, son rayon est l'inverse de $\kappa_\alpha(t_0)$ et son centre est donné par*

$$p = \alpha(t_0) + \frac{1}{\kappa_\alpha(t_0)^2}\mathbf{K}_\alpha(t_0). \tag{1.6}$$



Cercle osculateur.

Définition. Ce cercle s'appelle le *cercle osculateur*[2]. (aussi appelé le *cercle de courbure*) à α en t_0, c'est parmis tous les cercles celui qui approxime le mieux la courbe au voisinage de $\alpha(t_0)$. Son centre est le *centre de courbure* et son rayon est le *rayon de courbure* de α en t_0. On le note

$$\rho_\alpha(t_0) = \frac{1}{\kappa_\alpha(t_0)}.$$

Preuve. Supposons pour la preuve que la courbe α est paramétrée naturellement (et notons selon l'usage s le paramètre naturel). On supposera aussi que le point considéré correspond à la valeur $s = 0$ du paramètre.

Notons $\rho = \dfrac{1}{\kappa_\alpha(0)}$, $\mathbf{T} := \mathbf{T}_\alpha(0) = \dot{\alpha}(0)$ et $\mathbf{N} := \rho\, \mathbf{K}_\alpha(0)$, puis posons

$$p := \alpha(0) + \rho\, \mathbf{N} \tag{1.7}$$

et considérons le cercle

$$\gamma(s) = p - \rho \cos(s)\mathbf{N} + \rho \sin(s)\mathbf{T}.$$

Il s'agit bien d'un cercle, puisque $\mathbf{T}$ et $\mathbf{N}$ sont orthogonaux et de longueur 1. Il est alors clair que $\gamma(0) = \alpha(0)$ et que $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{T} = \dot{\alpha}(0)$. On sait d'autre part que la courbure du cercle de rayon ρ est constante et égale à $\frac{1}{\rho} = \kappa_\alpha(0)$. Le théorème 1.16 entraîne donc que la courbe α et le cercle γ ont un contact d'ordre 2 en $s = 0$.

L'unicité de ce cercle découle immédiatement du corollaire 1.17. $\square$

REMARQUE. Le plan osculateur à la courbe au point considéré admet le repère affine $\{\alpha(t_0), \mathbf{T}_\alpha(0), \mathbf{K}_\alpha(0)\}$. La preuve précédente montre que ce plan est le plan qui contient le cercle osculateur.

Définition. *On appelle* développée *de la courbe birégulière* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *la courbe*

$$\beta(u) = \alpha(u) + \rho_\alpha(u)\mathbf{N}_\alpha(u),$$

où ρ_α *est le rayon de courbure de* α. *On dit aussi que* β *est la* développante *de* α.

2. Le terme *osculateur* nous vient du latin et signifie *embrasser* : le cercle osculateur embrasse la courbe au point de contact.

1.10 Le repère de Frenet d'une courbes dans $\mathbb{R}^3$

Rappelons que le vecteur tangent et le vecteur normal principal d'une courbe birégulière $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ de classe C^2 sont le champ de vecteurs le long de cette courbe définis par

$$\mathbf{T}_\gamma(u) = \frac{\dot{\gamma}(u)}{V_\gamma(u)} \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_\gamma(u) = \frac{\ddot{\gamma}(u) - \langle \ddot{\gamma}(u), \mathbf{T}_\gamma(u)\rangle \cdot \mathbf{T}_\gamma(u)}{\|\ddot{\gamma}(u) - \langle \ddot{\gamma}(u), \mathbf{T}_\gamma(u)\rangle \cdot \mathbf{T}_\gamma(u)\|}.$$

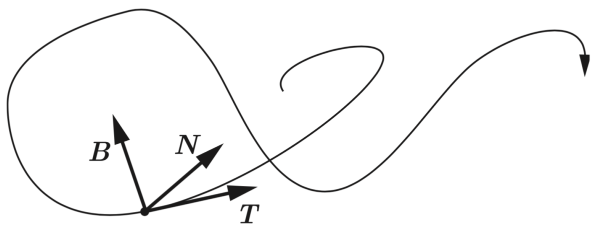
Définition. Le *vecteur binormal* de γ est le produit vectoriel du vecteur unitaire tangent et du vecteur normal principal :

$$\mathbf{B}_\gamma(u) = \mathbf{T}_\gamma(u) \times \mathbf{N}_\gamma(u).$$

Le Le repère de Frenet [3] est un repère mobile (les trois vecteurs sont des champs qui dépendent du paramètre u), il est orthonormé et direct. Il suit la courbe en ce sens que la premier vecteur de ce repère est toujours tangent à celle-ci.
de γ est le repère défini par les trois champs de vecteurs

$$\{\mathbf{T}_\gamma(u), \mathbf{N}_\gamma(u), \mathbf{B}_\gamma(u)\}.$$

Le repère de Frenet est uniquement défini aux points où la courbe est birégulière. C'est un repère mobile (les trois vecteurs sont des champs qui dépendent du paramètre u), il est orthonormé et direct. Il suit la courbe en ce sens que la premier vecteur de ce repère est toujours tangent à celle-ci.



Rappelons que le plan passant par $\gamma(u)$ de directions $\mathbf{T}_\gamma(u)$ et $\mathbf{N}_\gamma(u)$ est le *plan osculateur*. Le plan de directions $\mathbf{B}_\gamma(u)$ et $\mathbf{N}_\gamma(u)$ s'appelle le *plan normal* et le plan de directions $\mathbf{T}_\gamma(u)$ et $\mathbf{B}_\gamma(u)$ est le *plan rectifiant*.

Lemme 1.19 *Le vecteur binormal à la courbe γ peut aussi s'écrire*

$$\mathbf{B}_\gamma(u) = \frac{\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)}{\|\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)\|}.$$

Preuve. On a

$$\dot{\gamma} \times (\ddot{\gamma} - \langle \ddot{\gamma}, \mathbf{T}\rangle \cdot \mathbf{T}) = \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}$$

car $\dot{\gamma} \times \mathbf{T} = 0$. Donc

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \frac{\dot{\gamma}}{V_\gamma} \times \frac{(\ddot{\gamma} - \langle \ddot{\gamma}, \mathbf{T}\rangle \cdot \mathbf{T})}{\|\ddot{\gamma} - \langle \ddot{\gamma}, \mathbf{T}\rangle \cdot \mathbf{T}\|} = \frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{V_\gamma \|\ddot{\gamma} - \langle \ddot{\gamma}, \mathbf{T}\rangle \cdot \mathbf{T}\|} = \frac{\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)}{\|\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)\|}.$$

3. Jean Frédéric Frenet, mathématicien et astronome français 1816-1900.

$\square$

Définition. (i) On dit qu'une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ est *régulière au sens de Frenet*, si elle est de classe C^2, birégulière, et que le vecteur normal principal est un champ $u \mapsto \mathbf{N}_\gamma(u)$ de classe C^1.
(ii) La *torsion* d'une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ régulière au sens de Frenet de classe C^3 est la fonction $\tau : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\tau(u) := \frac{\langle \dot{\mathbf{N}}(u), \mathbf{B}(u)\rangle}{V_\gamma(u)}.$$

Théorème 1.20 (Formules de Serret-Frenet) *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe régulière au send de Frenet, Alors le repère de Frenet est de classe C^1 et ses dérivées sont données par les formules*

$\frac{1}{V_\gamma(u)}\,\dot{\mathbf{T}}(u) = \kappa(u)\,\mathbf{N}(u)\,;$

$\frac{1}{V_\gamma(u)}\,\dot{\mathbf{N}}(u) = -\,\kappa(u)\,\mathbf{T}(u)\,+\,\tau(u)\,\mathbf{B}(u)\,;$

$\frac{1}{V_\gamma(u)}\,\dot{\mathbf{B}}(u) = -\,\tau(u)\,\mathbf{N}(u).$

On verra au théorème 1.24 que la courbure et la torsion déterminent complètement la géométrie d'une courbe, par conséquent les formules de Serret-Frenet contrôlent toute la théorie des courbes.

Preuve. Le vecteur tangent $\mathbf{T}(u)$ est une fonction de classe C^1 du paramètre u car la courbe est supposée de classe C^2. Le vecteur normal principal $\mathbf{T}(u)$ est une fonction de classe C^1 par hypothèse et le vecteur binormal est une fonction de classe C^1 car $\mathbf{B}(u) = \mathbf{T}(u) \times \mathbf{N}(u)$.
La première équation est une conséquence immédiate des égalités

$$\dot{\mathbf{T}}(u) = V_\gamma(u)\mathbf{K}(u) = V_\gamma(u)\kappa(u)\mathbf{N}(u).$$

Pour prouver la deuxième équation, on remarque d'abord que

$$\dot{\mathbf{N}}(u) = \langle \dot{\mathbf{N}}(u), \mathbf{T}(u)\rangle \mathbf{T}(u) + \langle \dot{\mathbf{N}}(u), \mathbf{N}(u)\rangle \mathbf{N}(u) + \langle \dot{\mathbf{N}}(u), \mathbf{B}(u)\rangle \mathbf{B}(u),$$

car $\{\mathbf{T}_\gamma(u), \mathbf{N}_\gamma(u), \mathbf{N}_\gamma(u)\}$ est un repère orthonormé. D'autre part, on a $\langle \dot{\mathbf{N}}(u), \mathbf{N}(u)\rangle = 0$ car la norme de $\mathbf{N}(u)$ est constante et

$$\langle \dot{\mathbf{N}}(u), \mathbf{T}(u)\rangle \mathbf{T}(u) = -\langle \mathbf{N}(u), \dot{\mathbf{T}}(u)\rangle \mathbf{T}(u) = -V_\gamma(u)\kappa(u).$$

On a donc

$$\dot{\mathbf{N}}(u) = -V_\gamma(u)\kappa(u)\mathbf{T}(u) + V_\gamma(u)\tau(u)\mathbf{B}(u),$$

car $\langle \dot{\mathbf{N}}(u), \mathbf{B}(u)\rangle = V_\gamma(u)\tau(u)$ par définition de la torsion.

Pour prouver la troisième équation, on part de

$$\dot{\mathbf{B}}(u) = \langle \dot{\mathbf{B}}(u), \mathbf{T}(u)\rangle \mathbf{T}(u) + \langle \dot{\mathbf{B}}(u), \mathbf{N}(u)\rangle \mathbf{N}(u) + \langle \dot{\mathbf{B}}(u), \mathbf{B}(u)\rangle \mathbf{B}(u),$$

on a $\langle \dot{\mathbf{B}}(u), \mathbf{B}(u)\rangle = 0$ car $\|\mathbf{B}\|$ est constante et

$$\langle \dot{\mathbf{B}}(u), \mathbf{T}(u)\rangle = -\langle \mathbf{B}(u), \dot{\mathbf{T}}(u)\rangle = -V_\gamma(u)\kappa(u)\langle \mathbf{B}(u), \dot{\mathbf{N}}(u)\rangle = 0.$$

Donc

$$\dot{\mathbf{B}}(u) = \langle \dot{\mathbf{B}}(u), \mathbf{N}(u)\rangle \mathbf{N}(u) = -\langle \mathbf{B}(u), \dot{\mathbf{N}}(u)\rangle \mathbf{N}(u) = -V_\gamma(u)\tau(u)\mathbf{N}(u).$$

Le théorème est démontré.

$\square$

Exemple. Rappelons que l'*hélice circulaire* est la courbe $\gamma(u) = (a\cos(u),\ a\sin(u),\ b\,u)$, on a

$$\dot\gamma(u) = (-a\sin(u), a\cos(u), b), \quad \ddot\gamma(u) = a(-\cos(u), -\sin(u), 0) \quad \text{et} \quad V_\gamma = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Dans la suite, on suppose $a > 0$ et on notera $c := V_\gamma = \sqrt{a^2+b^2}$. Le repère de Frenet est donc

$$\mathbf{T} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} -a\sin(u) \\ a\cos(u) \\ b \end{pmatrix} \quad \mathbf{N} = -\begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} b\sin(u) \\ -b\cos(u) \\ a \end{pmatrix}$$

On trouve la courbure et la torsion en dérivant $\mathbf{N}$:

$$\kappa = -\frac{1}{c}\langle \dot{\mathbf{N}}, \mathbf{T}\rangle = \frac{a}{c^2} \qquad \text{et} \qquad \tau = \frac{1}{c}\langle \dot{\mathbf{N}}, \mathbf{B}\rangle = \frac{b}{c^2}.$$

Les résultats qui suivent donnent une interprétation géométrique de la torsion.

Proposition 1.21 *Une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ régulière au sens de Frenet est située dans un plan si et seulement si $\tau_\gamma(u) = 0$ pour tout $u \in I$.*

Preuve. Il est clair à partir du Lemme 1.19 que si la courbe γ est située dans un plan Π, alors le vecteur binormal est constant (c'est l'un des deux vecteurs unitaires orthogonal à Π). La troisième formule de Serret-Frenet entraîne alors que $\tau_\gamma(u) = 0$.

Réciproquement, supposons $\tau(u) \equiv 0$, alors par la troisième formule de Frenet, le vecteur $\mathbf{B}(u) = \mathbf{B}$ est constant. Posons alors

$$h(u) := \langle \gamma(u) - \gamma(u_0), \mathbf{B}\rangle,$$

et remarquons que

$$\frac{dh}{du} := \langle \dot\gamma(u), \mathbf{B}\rangle = V_\gamma(u)\langle \mathbf{T}(u), \mathbf{B}\rangle = 0.$$

Par conséquent h est constante, et comme $h(u_0) = 0$, la fonction h est identiquement nulle, ce qui montre que la courbe γ est contenue dans le plan d'équation

$$\langle \mathbf{x} - \gamma(u_0), \mathbf{B}\rangle = 0,$$

c'est-à-dire le plan orthogonal à $\mathbf{B}$ passant par $\gamma(u_0)$.

$\square$

1.10.1 Variation angulaire du plan osculateur

Proposition 1.22 *La torsion d'une courbe régulière au sens de Frenet est la variation angulaire de la direction de son vecteur binormal.*

Plus précisément, soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe régulière au sens de Frenet et notons

$$\theta(s_0, s) := \angle\left(\mathbf{B}(s_0), \mathbf{B}(s)\right),$$

alors

$$|\tau(s_0)| = \|\dot{\mathbf{B}}(s_0)\| = \lim_{s\to s_{0+}} \frac{\theta(s_0, s)}{s - s_0}.$$

La preuve est la même que celle de la Proposition 1.15. formule (1.5).
Remarquer que $\theta(s_0, s)$ représente aussi l'angle entre les plans osculateurs de la courbe en s_0 et en s. On a

1.10.2 Courbes de pente constante

Définition. On dit qu'une courbe de classe C^1 dans $\mathbb{R}^3$ est de *pente constante* si elle est régulière et si son vecteur tangent fait un angle constant avec une direction fixe. Une telle courbe s'appelle aussi une *hélice généralisée.*

Théorème 1.23 *Une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ régulière au sens de Frenet est de pente constante si et seulement si le rapport*

$$\frac{\tau_\gamma(u)}{\kappa_\gamma(u)}$$

est constant.

Preuve. On peut supposer sans perdre de généralité que γ est paramétrée naturellement.
Supposons qu'il existe un vecteur constant non nul $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$ tel que le produit scalaire $a = \langle \mathbf{T}_\gamma(s), \mathbf{A}\rangle$ est constant. En dérivant cette relation et en utilisant le première équation de Serret-Frenet, on trouve que

$$0 = \langle \dot{\mathbf{T}}_\gamma(s), \mathbf{A}\rangle = \kappa_\gamma(s)\langle \mathbf{N}_\gamma(s), \mathbf{A}\rangle.$$

Nous avons supposé que la courbe est birégulière, donc sa courbure est non nulle et on a donc $\langle \mathbf{N}_\gamma(s), \mathbf{A}\rangle = 0$ pour tout s.
Ceci implique que $b = \langle \mathbf{B}_\gamma(s), \mathbf{A}\rangle$ est également constant, car la troisième équation de Serret-Frenet nous dit que

$$\frac{d}{ds}\langle \mathbf{B}_\gamma(s), \mathbf{A}\rangle = \langle \dot{\mathbf{B}}_\gamma(s), \mathbf{A}\rangle = -\tau_\gamma(s)\langle \mathbf{N}_\gamma(s), \mathbf{A}\rangle = 0.$$

La seconde équation de Serret-Frenet nous dit maintenant que

$$0 = \frac{d}{ds}\langle \mathbf{N}_\gamma(s), \mathbf{A}\rangle = \langle \dot{\mathbf{N}}_\gamma(s), \mathbf{A}\rangle = -\kappa_\gamma(s)\langle \mathbf{T}_\gamma(s), \mathbf{A}\rangle + \tau_\gamma(s)\langle \mathbf{B}_\gamma(s), \mathbf{A}\rangle,$$

et donc

$$\frac{\tau_\gamma(s)}{\kappa_\gamma(s)} = \frac{\langle \mathbf{T}_\gamma(s), \mathbf{A}\rangle}{\langle \mathbf{B}_\gamma(s), \mathbf{A}\rangle} = \frac{a}{b}$$

est constante.
Supposons inversément que $\lambda := \dfrac{\tau_\gamma(s)}{\kappa_\gamma(s)}$ est constant et considérons le champ de vecteurs

$$\mathbf{A}(s) := \lambda \mathbf{T}_\gamma(s) + \mathbf{B}_\gamma(s).$$

Il est clair que l'angle entre $\mathbf{T}_\gamma$ et $\mathbf{A}$ est constant car $\langle \mathbf{A}, \mathbf{T}_\gamma\rangle = \lambda$. Vérifions que ce vecteur est constant :

$$\frac{d}{ds}\mathbf{A} = \lambda\dot{\mathbf{T}}_\gamma + \dot{\mathbf{B}}_\gamma \;= \lambda\kappa_\gamma(s)\mathbf{N}_\gamma - \tau_\gamma(s)\mathbf{N}_\gamma = 0.$$

La preuve de la proposition est complète.

$\square$

Remarque. La preuve montre que pour une courbe de pente constante, l'angle θ entre le vecteur tangent $\mathbf{T}_\gamma$ et la direction fixe $\mathbf{A}$ est donné par

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \mathbf{T}, \mathbf{A}\rangle}{\|\mathbf{T}(u)\| \, \|\mathbf{A}(u)\|} = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{\tau_\gamma}{\sqrt{\kappa_\gamma^2 + \tau_\gamma^2}}.$$

On remarque aussi que le vecteur $\mathbf{A}$ appartient au plan rectifiant de γ.

1.10.3 Le théorème fondamental de la théorie des courbes de $\mathbb{R}^3$.

Le *théorème fondamental* de la théorie des courbes de $\mathbb{R}^3$ dit que l'on peut prescrire arbitrairement la courbure et la torsion d'une courbe birégulière de $\mathbb{R}^3$. Cette courbe est unique à un déplacement près.

Théorème 1.24 *Si $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues et si $\kappa(s) > 0$ pour tout $s \in I$, alors il existe une courbe $\gamma I \to \mathbb{R}^3$, régulière au sens de Frenet, paramétrée naturellement et telle que*

$$\kappa_\gamma(s) = \kappa(s) \quad \textit{et} \quad \tau_\gamma(s) = \tau(s)$$

pour tout s. Cette courbe est unique à un déplacement près.

Par exemple toute courbe de $\mathbb{R}^3$ ayant courbure constante $\kappa > 0$ et torsion constante $\tau \neq 0$ est isométrique à une hélice.

Démonstration. Nous prouvons d'abord l'unicité. Supposons que $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{R}^3$ sont deux courbes régulières au sens de Frenet, paramétrées naturellement et dont la courbure et la torsion valent respectivement $\kappa(s)$ et $\tau(s)$. Notons $\{\mathbf{T}_1(s), \mathbf{N}_1(s), \mathbf{B}_1(s)\}$ et $\{\mathbf{T}_2(s), \mathbf{N}_2(s), \mathbf{B}_2(s)\}$ leur repère de Frenet respectifs.

Sans perdre de généralité, on peut supposer que l'intervalle I contient 0. Quitte à composer l'une ou l'autre (ou les deux) courbes par un déplacement, on peut supposer que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0$ et qu'en $s = 0$ les deux repères de Frenet coïncident avec la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Notons alors $\mathbf{F}_i(s) \in SO(3)$ la matrice orthogonale dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $\mathbf{T}_i(s), \mathbf{N}_i(s), \mathbf{B}_i(s)$ pour $i = 1, 2$. Les équations de Serret-Frenet s'écrivent alors

$$\frac{d}{ds}\mathbf{F}_i(s) = \mathbf{F}_i(s)\Omega(s), \qquad \text{où} \qquad \Omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2^{-1}) &= \frac{d}{ds}(\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2^\top) = \dot{\mathbf{F}}_1\mathbf{F}_2^\top + \mathbf{F}_1\dot{\mathbf{F}}_2^\top \\ &= (\mathbf{F}_1\Omega)\mathbf{F}_2^\top + \mathbf{F}_1(\mathbf{F}_2\Omega)^\top \\ &= \mathbf{F}_1\Omega\mathbf{F}_2^\top + \mathbf{F}_1\Omega^\top\mathbf{F}_2^\top \\ &= 0, \end{aligned}$$

car la matrice Ω est antisymétrique, i.e. $\Omega^\top = -\Omega$. Par conséquent la matrice $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2^{-1}$ est constante. Mais on a supposé que $\mathbf{F}_1(0) = \mathbf{F}_2(0) = \mathbf{I}_3$ (la matrice identité). Donc $\mathbf{F}_1(s)\mathbf{F}_2(s)^{-1} = \mathbf{I}_3$ pour tout c'est-à-dire $\mathbf{F}_1(s) = \mathbf{F}_2(s)$. En particulier $\mathbf{T}_1(s) = \mathbf{T}_2(s)$ pour tout s et donc

$$\gamma_1(s) = \int_0^s \mathbf{T}_1(u)du = \int_0^s \mathbf{T}_2(u)du = \gamma_2(s).$$

Prouvons maintenant l'existence. Pour cela on se donne deux fonctions continues $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}$ et on considère le problème de Cauchy

$$\frac{d}{ds}\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}(s)\Omega(s), \qquad \mathbf{F}(0) = \mathbf{I}_3, \tag{1.8}$$

où $\Omega(s)$ est la matrice définie plus haut. Le théorème de Cauchy–Lipschitz global (théorème 9.37 dans le cours d'analyse II) nous dit qu'il existe une solution globale $\mathbf{F} : I \to M_3(\mathbb{R})$ de classe C^1 de ce problème. Nous affirmons que $\mathbf{F}(s) \in SO(3)$ pour tout s. En effet, on a

$$\frac{d}{ds}\mathbf{F}\mathbf{F}^\top = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^\top + \mathbf{F}\dot{\mathbf{F}}^\top = \mathbf{F}\Omega\mathbf{F}^\top + \mathbf{F}\Omega^\top\mathbf{F}^\top = 0$$

par antisymétrie de Ω. Or $\mathbf{F}(0)\mathbf{F}^\top(0) = \mathbf{I}_3$ (à cause de la condition initiale dans (1.8)), donc $\mathbf{F}(s)\mathbf{F}^\top(s) = \mathbf{I}_3$ pour tout $s \in I$, ce qui signifie que $\mathbf{F}(s) \in SO(3)$.

Notons respectivement $\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)$ les trois colonnes de la matrice $\mathbf{F}(s)$ et définissons $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ par

$$\gamma(s) = \int_0^s \mathbf{T}(u)du.$$

Alors γ est clairement une courbe de classe C^2 car $s \to \mathbf{T}(s)$ est de classe C^1, De plus cette courbe est paramétrée naturellement puisque $\dot{\gamma}(s) = \mathbf{T}(s)$ est un vecteur unitaire. L'équation différentielle (1.8) est équivalente aux équations de Serret-Frenet. Cela implique que implique que $s \to \mathbf{N}(s)$ est aussi de classe C^1 et que la courbure et la torsion de γ sont données par les fonctions κ et τ, ce qui complète notre démonstration.

$\square$

1.11 Géométrie vectorielle dans un plan orienté

Dans ce paragraphe et le suivant nous travaillons dans un espace vectoriel euclidien $\mathbb{E}^2$ muni d'une orientation ; on se donne également une base orthonormée directe (i.e. d'orientation positive) $\{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\}$.

Par définition les vecteurs $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$, forment une autre base directe de $\mathbb{E}^2$ si et seulement si $a_1b_2 - a_2b_1 > 0$. Ils forment une base d'orientation négative si $a_1b_2 - a_2b_1 < 0$.

L'opérateur J

On note $\mathbf{J} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ l'application linéaire qui est donnée dans une base orthonormée directe par $\mathbf{J}(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) = -v_2\mathbf{e}_1 + v_1\mathbf{e}_2$. Sa matrice est donc

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

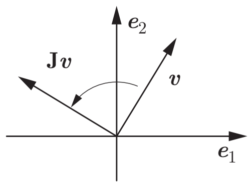
Cet opérateur $\mathbf{J}$ est caractérisée par les propriétés suivantes :

(i) $\|\mathbf{Jv}\| = \|\mathbf{v}\|$ (en particulier $\mathbf{J}(0) = 0$),

(ii) $\mathbf{Jv} \perp \mathbf{v}$,

(iii) Si $\mathbf{v} \neq 0$, alors $\{\mathbf{v}, \mathbf{Jv}\}$ est une base d'orientation positive.

En particulier, $\mathbf{J}$ ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie (mais cet opérateur dépend de l'orientation de $\mathbb{E}^2$.)
Géométriquement, l'opérateur $\mathbf{J}$ est la rotation qui fait tourner le vecteur $\mathbf{v}$ d'un quart de tour dans le sens positif.



Définition. Le *produit extérieur* de deux vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^2$ est le scalaire $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \in \mathbb{R}$ défini par

$$\boxed{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \langle \mathbf{J}(\mathbf{a}), \mathbf{b} \rangle.}$$

Dans une base orthonormée directe $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, le produit extérieur de $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$ est donné par

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \langle -a_2\mathbf{e}_1 + a_1\mathbf{e}_2, b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 \rangle = a_1b_2 - a_2b_1,$$

c'est-à-dire :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Les propriétés suivantes découlent immédiatement de cette formule :

Proposition 1.25 *Le produit extérieur vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ *(antisymétrie) ;*

(ii) $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$ *si et seulement si* $\mathbf{a}$ *et* $\mathbf{b}$ *sont colinéaires ;*

(iii) si $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, *alors* $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \pm \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|$ *;*

(iv) le produit extérieur est bilinéaire :

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2) \wedge (\mu_1 \mathbf{b}_1 + \mu_2 \mathbf{b}_2) \\
&\qquad = \lambda_1 \mu_1 (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_1) + \lambda_1 \mu_2 (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_2) + \lambda_2 \mu_1 (\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{b}_1) + \lambda_2 \mu_2 (\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{b}_2).
\end{aligned}
$$

On définit alors l'*angle orienté* $\theta_{\text{or}} \in (-\pi, \pi]$ entre deux vecteurs non nuls $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2\}$ de $\mathbb{E}^2$ par

$$
\theta_{\text{or}} = \begin{cases} \angle\left(\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2\right), & \text{si } \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \geq 0, \\ -\angle\left(\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2\right), & \text{si } \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} < 0. \end{cases}
$$

où $\angle\left(\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2\right) \in [0, \pi]$ est l'angle non orienté. Ainsi l'angle orienté entre $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{b}_2$ est négatif si et seulement si ces deux vecteurs forment ne base d'orientation négative (et dans ce cas le signe du sinus de l'angle orienté est négatif). L'angle orienté est complètement déterminé par les formules :

$$
\cos\left(\theta_{\text{or}}\right) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}, \qquad \sin\left(\theta_{\text{or}}\right) = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}.
$$

Aire orientée

1.12 Courbes dans un plan orienté

Le repère de Frenet et la courbure d'une courbe dans un plan orienté est défini en tenant compte de l'orientation du plan :

Définition. (a) Le *repère de Frenet orienté* d'une courbe régulière $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2 dans le plan orienté est le repère mobile d'origine $\gamma(u)$ et formé par les deux vecteurs

$$
\mathbf{T}_\gamma(u) = \frac{\dot{\gamma}(u)}{V_\gamma(u)}, \qquad \mathbf{N}_\gamma^{\text{or}}(u) = \mathbf{J}(\mathbf{T}_\gamma(u)).
$$

(b) La *courbure orientée* de γ en u est définie par

$$
\kappa_\gamma^{\text{or}}(u) = \frac{1}{V_\gamma(u)} \langle \dot{\mathbf{T}}_\gamma(u), \mathbf{N}_\gamma^{\text{or}}(u) \rangle.
$$

Remarques.

(i) Le repère $\{\mathbf{T}_\gamma(u), \mathbf{N}_\gamma^{\text{or}}(u)\}$ est un repère orthonormé direct.

(ii) La courbure non orientée de γ est égale à la valeur absolue de $\kappa_\gamma^{\text{or}}(u)$.

(iii) La courbure orientée peut aussi s'écrire

$$
\kappa_\gamma^{\text{or}}(u) = \frac{\mathbf{T}_\gamma(u) \wedge \dot{\mathbf{T}}_\gamma(u)}{V_\gamma(u)}.
$$

(iv) Si la courbe γ est birégulière, on a

$$\kappa_\gamma^{\mathrm{or}}(u)\mathbf{N}_\gamma^{\mathrm{or}}(u) = \kappa_\gamma(u)\mathbf{N}_\gamma(u) = \mathbf{K}_\gamma(u) \ \ (= \text{le vecteur de courbure}).$$

Cette égalité vient du fait que si on change l'orientation du plan, alors $\kappa_\gamma^{\mathrm{or}}(u)$ et $\mathbf{N}_\gamma^{\mathrm{or}}(u)$ changent tous les deux de signe.

Dans la suite de ce paragraphe, nous n'utiliserons que le vecteur normal orienté, nous noterons donc $\mathbf{N}_\gamma^{\mathrm{or}}(u)$ au lieu de $\mathbf{N}_\gamma^{\mathrm{or}}(u)$. Nous noterons aussi $k_\gamma(u)$ pour la courbure orientée.

Proposition 1.26 *Avec ces notations, les formules de Serret-Frenet pour une courbe plane de classe C^2 s'écrivent*

$$\begin{aligned}\frac{1}{V_\gamma}\frac{d}{du}\mathbf{T}_\gamma(u) &= \quad k_\gamma(u)\mathbf{N}_\alpha(u)\\ \frac{1}{V_\gamma}\frac{d}{du}\mathbf{N}_\gamma(u) &= -k_\gamma(u)\mathbf{T}_\alpha(u).\end{aligned}$$

Preuve. On a d'une part

$$\dot{\mathbf{T}} = \langle\dot{\mathbf{T}},\mathbf{T}\rangle\mathbf{T} + \langle\dot{\mathbf{T}},\mathbf{N}\rangle\mathbf{N} = \langle\dot{\mathbf{T}},\mathbf{N}\rangle\mathbf{N} = Vk\mathbf{N}.$$

par définition de la courbure orientée k (et en utilisant $\langle\dot{\mathbf{T}},\mathbf{T}\rangle = 0$). D'autre part

$$\dot{\mathbf{N}} = \langle\dot{\mathbf{N}},\mathbf{T}\rangle\mathbf{T} + \langle\dot{\mathbf{N}},\mathbf{N}\rangle\mathbf{N} = \langle\dot{\mathbf{N}},\mathbf{T}\rangle\mathbf{T} = -\langle\dot{\mathbf{T}},\mathbf{N}\rangle\mathbf{T} = -Vk\mathbf{T}.$$

□

Proposition 1.27 La *courbure orientée* d'une courbe plane $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2 est donnée par

$$k_\gamma(u) = \frac{\dot\gamma(u)\wedge\ddot\gamma(u)}{V_\gamma^3(u)}.$$

Preuve. On a

$$\dot\gamma\wedge\ddot\gamma = (V\mathbf{T})\wedge(\dot V\mathbf{T} + V^2k\mathbf{N}) = V^3k,$$

car $\mathbf{T}\wedge\mathbf{T} = 0$ et $\mathbf{T}\wedge\mathbf{N} = 1$.

□

La courbure orientée de $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ est donc donnée par

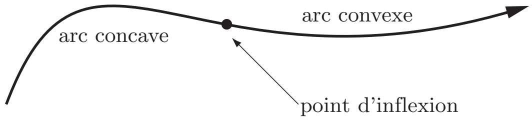
$$k(t) = \frac{\dot x\ddot y - \ddot x\dot y}{(\dot x^2 + \dot y^2)^{3/2}},$$

en particulier, si γ est le graphe de la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, i.e. $\gamma(x) = (x, f(x))$, alors on a

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}.$$

Définitions. On dit qu'un arc $\gamma(u)$ $(a < u < b)$ est *convexe* si la courbure orientée k_γ est positive sur cet arc. L'arc est *concave* si la courbure orientée est négative. Un *point d'inflexion* est un point séparant un arc convexe d'un arc concave (en particulier la courbure est nulle en un point d'inflexion).

On dit qu'un arc est une *spirale* si la courbure est non nulle et monotone sur cet arc. Un point est un *sommet* si c'est un maximum local ou un minimum local de la courbure.



La fonction angulaire

La fonction angulaire mesure l'inclinaison en chaque point d'une courbe (par rapport à la direction horizontale).

Définition. Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière de classe C^1. La *fonction angulaire* de la courbe γ avec point initial $p = \gamma(u_0))$ est la fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que

(a) $\varphi(u_0)$ est l'angle orienté entre $\dot\gamma(u)$ et le vecteur $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$.

(b) φ est continue.

(c) L'angle orienté entre $\dot\gamma(u)$ et $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ est égal à $\varphi(u)$ modulo 2π pour tout $u \in [a, b]$

Remarque. Dans le concept de fonction angulaire d'une courbe plane, on n'identifie pas $\varphi(u)$ à $\varphi(u) + 2\pi$. Au contraire, le paramètre angulaire mesure le nombre de tours effectués (entre u_0 et u) par le vecteur tangent. Ce nombre peut être supérieur à 2π.

Le nombre $\varphi(b) - \varphi(a)$ est la *variation angulaire totale* de la courbe. Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ est une courbe périodique (i.e. une courbe fermée régulière), alors le nombre entier

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi}$$

s'appelle l'*indice*, le *degré* ou le *nombre de tours* de γ.

Lemme 1.28 *Le repère de Frenet orienté d'une courbe régulière $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 peut s'écrire*

$$\mathbf{T}_\gamma(u) = (\cos(\varphi(u)), \sin(\varphi(u)) \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_\gamma(u) = (-\sin(\varphi(u)), \cos(\varphi(u)),$$

où $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est la fonction angulaire de γ.

Preuve. La formule pour $\mathbf{T}$ est évidente, puisque φ (modulo $2\,\pi$) mesure l'angle du vecteur tangent $\mathbf{T}$ avec $\mathbf{e}_1$. La formule pour $\mathbf{T}$ se déduit alors de la définition $\mathbf{N} = \mathbf{J}(\mathbf{T})$.

$\square$

Théorème 1.29 *La courbure orientée d'une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2 vérifie*

$$k_\gamma(u) = \frac{1}{V_\gamma(u)} \frac{d\varphi}{du}.$$

Preuve. Par le lemme précédent, on a $\dot{\mathbf{T}} = (-\sin(\varphi(u)), \cos(\varphi(u))\dot\varphi(u) = \mathbf{N}\dot\varphi$, donc $k_\gamma = \frac{1}{V}\langle \dot{\mathbf{T}}, \mathbf{N}\rangle = \frac{1}{V}\dot\varphi$. $\square$

Le diagramme de courbure

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière de classe C^2. Choisissons un point initial sur γ et un sens de parcours. Le *diagramme de courbure* de γ est la courbe dans un plan de coordonnées s, k donnée par

$$u \mapsto (s(u), k(u)),$$

où $s(u)$ est l'abscisse curviligne de γ correspondant aux choix du point initial et du sens de parcours, et k est la courbure orientée.
Le diagramme de courbure est toujours un graphe (c'est le graphe de la fonction courbure $k = k(s)$ exprimée à partir de l'abscisse curviligne).
Les éléments de la courbe γ que l'on peut facilement mettre en correspondance avec le diagramme de courbure sont :

- sa longueur $\ell(\gamma)$;
- le signe de la courbure ;
- les points d'inflexions de γ (ce sont les points où $k(s)$ change de signe) ;
- les sommets de γ (i.e. les points où $\dfrac{dk}{du} = 0$).

D'autre part, l'aire $\int_0^\ell k(s)ds = \int_0^\ell d\varphi$ limitée par le diagramme de courbure correspond à la variation angulaire totale de la courbe.
Hormis la position de la courbe dans le plan, le diagramme de courbure contient toutes les informations géométriques sur une courbe.

Théorème 1.30 (Théorème fondamental de la théorie des courbes planes) *Toute fonction continue $k : [0, \ell] \to \mathbb{R}$ est la courbure orientée d'une courbe plane de classe C^2 paramétrée naturellement. Cette courbe est unique à un déplacement près.*

Preuve. Montrons d'abord l'unicité. Supposons que $\gamma : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$ est une courbe de classe C^2 paramétrée naturellement dont la courbure orientée est $k(s)$. Le vecteur tangent est donné par

$$\mathbf{T}(s) = \dot{\gamma}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s)) = (\cos(\varphi(s))), \sin(\varphi(s))$$

où $\varphi : [0, \ell] \to \mathbb{R}$ est la fonction angulaire. Les trois fonctions $(x(s), y(s), \varphi(s))$ forment alors une solution du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = \cos(\varphi) \\ \dfrac{dy}{ds} = \sin(\varphi) \\ \dfrac{d\varphi}{ds} = k(s) \end{cases} .$$

La courbe γ est donc déterminée à partir de la fonction $k(s)$ en résolvant ces équations.
Pour résoudre ce système, on calcule φ par intégration : $\varphi(s) = \varphi_0 + \int_0^s k(\sigma)d\sigma$. Puis on trouve $x(s)$ et $y(s)$ par une nouvelle intégration :

$$x(s) = x_0 + \int_0^s \cos(\varphi(\sigma))d\sigma \qquad , \qquad y(s) = y_0 + \int_0^s \sin(\varphi(\sigma))d\sigma$$

les constantes x_0, y_0, et φ_0 sont des constantes d'intégration et peuvent être choisies arbitrairement (ce sont les *conditions initiales* du système d'équations différentielles).
En changeant les valeurs de x_0 et y_0, on modifie la courbe par une translation ; si l'on change φ_0, alors la courbe γ subit une rotation. L'argument montre à la fois l'existence et l'unicité de la courbe γ à un déplacement près.

$\square$

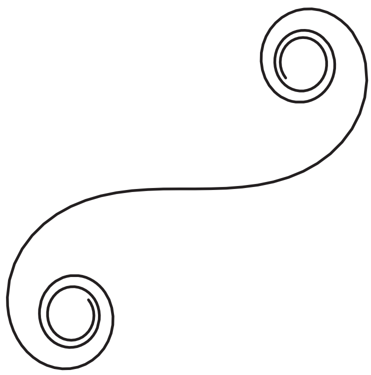
REMARQUE. La relation $k = k(s)$ entre l'abscisse curviligne et la courbure orientée s'appelle l'*équation intrinsèque* de la courbe. Elle contient la même information que le diagramme de courbure.

Exemple 1.5 Considérons la courbe dont le diagramme de courbure est une droite (i.e. l'équation intrinsèque est linéaire : $k(s) = ms + n$). Alors la fonction angulaire est donnée par

$$\varphi(s) = \int k(s)\, ds = \frac{m}{2}s^2 + ns + c\,,$$

la courbe est donc donnée par

$$x(s) = \int \cos\left(\frac{m}{2}s^2 + ns + c\right)\, ds \quad , \quad y(s) = \int \sin\left(\frac{m}{2}s^2 + ns + c\right)\, ds\,.$$



Chlotoïde.

Ces intégrales s'appellent les *fonctions de Fresnel*. Elle ne peuvent pas être exprimées à partir des fonctions élémentaires.

Cette courbe s'appelle une *chlotoïde* ou *spirale de Cornu*, elle permet par exemple de passer d'une droite à un cercle sans discontinuité de la courbure. Pour cette raison, elle est utilisée dans la conception des tracés ferroviaires ou autoroutiers.

1.13 Le théorème des quatre sommets

Définition. On dit que $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est une *courbe fermée de classe* C^m si la fonction γ peut s'étendre à un intervalle ouvert $[a-\epsilon, b+\epsilon]$ et si on a

$$\frac{d^k\gamma}{du^k}(a) = \frac{d^k\gamma}{du^k}(b),$$

pour $0 \leq k \leq m$. On dit aussi que γ est une courbe *périodique* de classe C^m car on peut l'étendre en une fonction périodique $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de période $(b-a)$.

Théorème 1.31 *Toute courbe fermée de classe* C^3 *dans un plan orienté possède au moins quatre sommets.*

On rappelle qu'un sommet est d'une courbe de classe C^2 est un maximum local ou un minimum local de la courbure orientée. A titre d'exemple, une ellipse possède deux minimums et deux maximums de courbure.

La preuve utilisera le lemme suivant :

Lemme 1.32 Soit $\gamma : [0,\ell] \to \mathbb{R}^2$ une courbe fermée de classe C^3 paramétrée naturellement. Alors

$$\int_0^\ell x(s)\dot{k}(s)ds = \int_0^\ell y(s)\dot{k}(s)ds = 0.$$

Preuve du Lemme. Examinons la seconde intégrale, on a

$$\int_0^\ell y(s)\dot{k}(s)ds = -\int_0^\ell \dot{y}(s)k(s)ds = \int_0^\ell \ddot{x}(s)ds = 0.$$

En effet la première égalité est une intégration par parties, la seconde égalité vient de la relation $\ddot{x} = -ky$ qui se déduit des équations de Serret-Frenet et la dernière égalité est évidente.

□

Preuve du Théorème. La preuve dans le cas général est assez complexe, nous ne la donnerons que dans le cas où la courbe est le bord d'un domaine convexe de $\mathbb{R}^2$. Par hypothèse, γ est une courbe fermée de classe C^3, par conséquent la dérivée de la courbure vérifie $\dot{k}(0) = \dot{k}(\ell)$ et la fonction $k(s)$ doit donc avoir au moins un maximum local et un minimum local. Nous allons d'abord prouver par l'absurde que $k(s)$ doit avoir au moins un troisième extremum local.

Supposons donc par l'absurde que $k(s)$ a exactement deux extremum locaux, et faisons également les hypothèse suivantes sans perte de généralité :

1. On suppose que $\gamma : [0,\ell] \to \mathbb{R}^2$ est paramétrée naturellement.
2. Le minimum local de $k(s)$ est en $s = 0$ et le maximum local est en $s_0 \in (0,\ell)$.
3. $\gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(s_0) = (x_0, 0)$.

Ces hypothèses entraînent que $k(s)$ est strictement croissante sur l'intervalle $(0, s_0)$ et strictement décroissante sur (s_0, ℓ). Donc $\dot{k}(s) > 0$ sur le premier intervalle et $\dot{k}(s) < 0$ sur le deuxième intervalle.
Puisque γ borde un domaine convexe, les deux arcs $\gamma|_{[0,s_0]}$ et $\gamma|_{[s_0,\ell]}$ sont situés l'un dans le demi-plan $\{y \geq 0\}$ et l'autre dans le demi-plan $\{y \leq 0\}$. Supposons par exemple que $y(s) > 0$

sur l'intervalle $(0, s_0)$ et $y(s) < 0$ sur l'intervalle (s_0, ℓ), alors nous avons $y(s)\dot{k}(s) > 0$ pour tous $s \notin \{0, s_0\}$. Mais ceci entre en contradiction avec le lemme précédent car ce lemme implique que

$$\int_0^{s_0} y(s)\dot{k}(s)ds = -\int_{s_0}^{\ell} y(s)\dot{k}(s)ds.$$

L'argument est le même (avec le signe opposé) si $y(s) < 0$ sur l'intervalle $(0, s_0)$ et $y(s) > 0$ sur (s_0, ℓ).

Nous avons montré que $\dot{k}(s)$ doit au moins s'annuler trois fois, mais comme on a $\dot{k}(0) = \dot{k}(\ell)$, cette fonction ne peut pas avoir un nombre impair de changements de signe. Il y a donc au moins quatre points où $\dot{k}(s) = 0$. $\square$