Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 22 au 26 février 2021

Série 1 du lundi 22 février 2021

Exercice 1.

Démontrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{1/2} \left(\frac{\sin(t^n)}{\ln(t^n)}\right)^n \mathrm{d}t \tag{1}$$

est convergente pour tout entier n positif.

Solution :

Pour $n > 0$ entier, notons

$$f := t \mapsto \left(\frac{\sin(t^n)}{\ln(t^n)}\right)^n,$$

qui est bien définie sur $]0, 1/2]$. Comme $\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0$, f est continûment prolongeable en 0, ce qui implique que $\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 2.

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln t}{t^2} & \text{si } 0 < t \leq 1, \\ \ln t & \text{si } t > 1. \end{cases} \tag{2}$$

1) Montrer que les deux intégrales généralisées $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ divergent, i.e. que les limites

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

n'existent pas dans $\mathbb{R}$.

2) Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{1/x}^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \int_{1/x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Solution :

1) a) Soit $g(t) = t + \ln(t)$. On a que $g(e^{-1}) = e^{-1} - 1 < 0$, $g(1) > 0$ et g est monotone sur $]0, 1[$. Ainsi, pour tout $t \in]0, e^{-1}[$, $g(t) < 0$ et

$$f(t) = -\frac{\ln t}{t^2} > \frac{t}{t^2} \implies \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{diverge.} \tag{5}$$

b)

$$\lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty \implies \int_1^\infty \ln t\,\mathrm{d}t \quad \text{diverge.} \tag{6}$$

2) a) Pour tout $x > 1$,

$$\int_{1/x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1/x}^{1} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t = \int_{1/x}^{1} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t - \int_{1/x}^{1} \frac{\ln s}{s^2}\,\mathrm{d}s = 0 \tag{7}$$

$$\implies \lim_{x\to+\infty} \int_{1/x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{8}$$

b) Pour tout $x > e$,

$$\int_{1/x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1/x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} \ln t\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

$$= (2x^2 - x)\ln x + (x - x^2) \tag{10}$$

$$> (x^2 - x)\ln x. \tag{11}$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{1/x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty. \tag{12}$$

Exercice 3.

Montrer les affirmations suivantes :

1) Si $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ est $C^1([0, \pi])$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{13}$$

2) Si $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ est continue, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{14}$$

Indication. D'après le théorème de Weierstraß, pour tout $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ et $\varepsilon \in]0, +\infty[$, il existe un polynôme p_ε tel que $\forall x \in [a, b]$, $|f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon$.

Solution :

1) Pour le cas f différentiable, on peut simplement faire une intégration par parties.

2) Montrons que, si $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ est continue, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{15}$$

Soit $\varepsilon \in]0, +\infty[$. Puisque $f \in C^0([0, \pi])$, d'après le théorème de Weierstraß, il existe un polynôme p_ε tel que

$$|f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [0, \pi]. \tag{16}$$

On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi p_\varepsilon(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi (f(t) - p_\varepsilon(t))\sin(nt)\,\mathrm{d}t \tag{17}$$

et donc

$$\left|\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_0^\pi p_\varepsilon(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| + \pi\varepsilon. \tag{18}$$

Puisque p_ε est différentiable, on a (cf. point 1) :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi p_\varepsilon(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{19}$$

et donc il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, si $n > N_\varepsilon$, on a :

$$\left|\int_0^\pi p_\varepsilon(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon \tag{20}$$

ce qui prouve en utilisant (18) que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{21}$$

Exercice 4.

Soit $b > 0$ dans $\mathbb{R}$, une fonction continue $f : [0, b] \to \mathbb{R}$, et une fonction périodique et continue $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant la période 1.

1) Si $p \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et $\int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t = 1$, prouver que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^b f(t)p(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{22}$$

2) Si $M = \int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t$, prouver que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^b f(t)p(nt)\,\mathrm{d}t = M \int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{23}$$

Solution :

1) La fonction f étant continue sur $[0,b]$, elle est intégrable au sens de Riemann. Soit $k,n\in\mathbb{N}^*$ tels que $k/n<b$ et $(k+1)/n\geq b$, et posons $a_j=j/n$ pour $j\in\{0,\dots k\}$. Alors $\int_0^{1/n} p(nt)\,\mathrm{d}t = 1/n$, la fonction $t\to p(nt)$ admet la période $1/n$,

$$\int_0^b f(t)p(nt)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^k \int_{a_{j-1}}^{a_j} f(t)p(nt)\,\mathrm{d}t + \int_{a_k}^b f(t)p(nt)\,\mathrm{d}t \tag{24}$$

$$\begin{aligned}&\leq \sum_{j=1}^k \int_{a_{j-1}}^{a_j} p(nt)\,\mathrm{d}t \max_{[a_{j-1},a_j]} f + \int_{a_k}^b \Big(\max_{[a_k,b]} f\Big)\,\mathrm{d}t \\ &\qquad + \int_{a_k}^b \Big(f(t)p(nt) - \max_{[a_k,b]} f\Big)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{25}$$

$$\leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{n} \max_{[a_{j-1},a_j]} f + (b-a_k)\max_{[a_k,b]} f + \frac{1}{n}(1+\max_{\mathbb{R}} p)\max_{[0,b]}|f| \tag{26}$$

et de même

$$\int_0^b f(t)p(nt)\,\mathrm{d}t \geq \sum_{j=1}^k \frac{1}{n} \min_{[a_{j-1},a_j]} f + (b-a_k)\min_{[a_k,b]} f - \frac{1}{n}(1+\max_{\mathbb{R}} p)\max_{[0,b]}|f|. \tag{27}$$

Or, d'après la définition de l'intégrale de Riemann, les membres de droite de (26) et (27) tendent tous deux vers $\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque $n\to+\infty$.

2) Si $p=0$ sur $\mathbb{R}$, c'est évident. Si $p\geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et $M=\int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t>0$, on applique le raisonnement du point 1 à la fonction $M^{-1}p$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^b f(t)M^{-1}p(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t \tag{28}$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^b f(t)p(nt)\,\mathrm{d}t = M\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{29}$$

Dans le cas général, écrivons

$$p(x) =: p_+(x) - p_-(x) \qquad \text{avec, } \forall x\in\mathbb{R}, \begin{cases} p_+(x) = \max\{p(x),0\}, \\ p_-(x) = -\min\{p(x),0\}. \end{cases}$$

On obtient alors

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^b f(t)p(nt)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_0^b f(t)p_+(nt)\,\mathrm{d}t - \lim_{n\to\infty}\int_0^b f(t)p_-(nt)\,\mathrm{d}t \tag{30}$$

$$= \int_0^1 p_+(t)\,\mathrm{d}t\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 p_-(t)\,\mathrm{d}t\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t \tag{31}$$

$$= \int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{32}$$