| | |
|---|---|
| EPFL - Printemps 2022 | Prof. Z. Patakfalvi |
| **Anneaux et Corps** | **Exercices** |
| Série 7 | 11 Avril 2022 |

Vous pouvez télécharger vos solutions à l'exercice bonus (Exercice 8) sur la page Moodle du cours avant le dimanche 24 avril, 18h.

---

# 1 Exercices

**Exercice 1.**

1. Soit $A$ un anneau Euclidien. Prouvez que l'algorithme d'Euclide peut être adapté pour calculer les pgdc dans $A$.
2. Effectuez la division avec reste de $27-23i$ par $8+i$ dans $\mathbb{Z}[i]$, et montrez que ces deux entiers de Gauss sont premiers entre eux.
3. Calculez un pgdc de $11+3i$ et de $1+8i$ dans $\mathbb{Z}[i]$. Ce pgdc est-il unique ?

**Exercice 2.**
Notons $\mathcal{C} := C^0([0,1];\mathbb{R})$ l'anneau des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0,1]$ (muni des opérations d'addition et de multiplication de fonctions).

1. Pour $x \in [0,1]$, écrivons $I_x := \{f \in \mathcal{C} \mid f(x) = 0\}$. Montrez que $I_x$ est un idéal maximal.
2. Pour $x \neq y$, montrez que $I_x \cap I_y$ n'est pas un idéal premier.
3. Soit $I \subset \mathcal{C}$ un idéal. Supposons que $I$ n'est contenu dans aucun des $I_x$. Montrez que $I = \mathcal{C}$.
   *Indication : la propriété de Heine–Borel sera utile.*
4. Montrez que tout idéal maximal de $\mathcal{C}$ est égal à $I_x$ pour un certain $x \in [0,1]$.

**Exercice 3.**
Considérons les polynômes $f = x^3 - 2x^2 + x - 2$ et $g = x^4 - 2x^3 + 7x - 14$ dans $\mathbb{Z}[x]$.

1. Montrez que le pgdc de $f$ et de $g$ dans $\mathbb{Z}[x]$ vaut $x-2$.
2. Ecrire $f = (x-2)f_0$ et $g = (x-2)g_0$ dans $\mathbb{Z}[x]$.
3. Pour un premier $p$, notons $\bar{f}$ et $\bar{g}$ la réduction de $f$ et $g$ dans $\mathbb{F}_p[x]$. Calculez le pgdc de $\bar{f}$ et de $\bar{g}$ pour chaque $p$.
   *Indication : Remarquez que les étapes de l'algorithme d'Euclide définissables dans $\mathbb{Z}[x]$ sont des étapes de l'algorithme d'Euclide dans $\mathbb{F}_p[x]$ après réduction modulo $p$.*

**Exercice 4.**

1. Soit $d > 0$ un entier positif. Montrez que $\mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$ est un corps de fractions de $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$.
2. Montrez que $x^3 - 2i$ est irréductible dans $(\mathbb{Z}[i])[x]$.
   *Indication : Utilisez le lemme de Gauss, et gardez en tête qu'un élément de $\mathbb{Q}[i]$ peut s'écrire comme $\frac{a+bi}{n}$ avec $a, b, n \in \mathbb{Z}$.*

**Exercice 5.**
Soit $k$ un corps.

1. Montrez que le sous-anneau $k[t^2, t^3] \subset k[t]$ n'est pas factoriel.
2. De même, montrez que $k[t^2, t^5]$ et $k[t^3, t^7]$ ne sont pas factoriels.

3. Montrez que $k[x,y]/(x^2-y^3)$ n'est pas factoriel.
*Indication : Montrez que cet anneau est isomorphe à l'un des anneaux considérés précédemment.*

**Exercice 6.**
Considérons l'anneau de matrices

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} n & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z},\ x, y \in \mathbb{Q} \right\}$$

ainsi que le sous-ensemble

$$I := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Q} \right\} \subset A.$$

1. Montrez que $I$ est un idéal bilatère, que $A/I \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ et que $A/I$ est Noethérien.
2. Montrez que $I$ est un idéal à droite minimal (c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'idéal à droite $J$ tel que $0 \subsetneq J \subsetneq I$).
3. Montrez que $A$ est Noethérien à droite.
*Indication : Etant donnée une chaîne croissante d'idéaux, considérez son image par l'application quotient $A \to A/I$.*

# 2 Exercice supplémentaire

Cet exercice était l'exercice bonus de l'année 2021.

**Exercice 7.** 1. Montrez que $x^2+y^2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x,y]$, mais pas dans $\mathbb{C}[x,y]$.
2. Montrez que $x^3-(y^7+2y^5+y^3)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x,y]$.

# 3 Exercice bonus

**Exercice 8.**
Let $A$ be a UFD (anneau factoriel), and let $K = Frac(A)$ the fraction field of $A$ with $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(K) \neq 2$. Let $a, b, c \in A$ with $a \neq 0$ and $pgdc = 1$ .

1. Show that $ax^2+bx+c \in A[x]$ is not irreducible if and only if $\exists s \in A$ such that $s^2 = b^2-4ac$.
2. Are the following polynomials irreducible or not in $\mathbb{C}[x,y]$ ? If not, write down the irreducible factorization.
   (a) $x^2+2yx+1$
   (b) $y^2x^2+yx^2+yx+y^2$
   (c) $x^2+yx+y^2$