

# Analyse I

David Wiedemann

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	Buts du Cours . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Definir <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>5</b>
2.1	Exemple d'utilisation . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Suites et limites</b>	<b>12</b>
3.1	Convergence . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Limsup et liminf</b>	<b>17</b>
4.1	Suites de Cauchy . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Series</b>	<b>22</b>
5.0.1	Un calcul naif ( avec la série harmonique alternée) . . . . .	28

## List of Theorems

1	Theorème (env. -400) . . . . .	4
2	Lemme (Lemme) . . . . .	4
3	Axiom (Nombres Reels) . . . . .	5
4	Lemme (Theorem name) . . . . .	6
5	Proposition (Annulation de l'element neutre) . . . . .	6
6	Corollaire (x fois moins 1 egale -x) . . . . .	6
7	Axiom (Nombres Reels II) . . . . .	7
1	Definition (valeur absolue) . . . . .	7
8	Proposition (Inegalite du triangle) . . . . .	7
2	Definition (Bornes) . . . . .	8
9	Axiom (Axiome de completude) . . . . .	8
3	Definition (Supremum) . . . . .	8
14	Proposition . . . . .	9
15	Corollaire (Propriete archimediennne) . . . . .	9
16	Theorème (La racine de deux existe) . . . . .	9

18	Proposition ( $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ) . . . . .	10
19	Lemme . . . . .	10
20	Proposition (Densité des irrationnels) . . . . .	11
4	Définition (Suite) . . . . .	12
5	Définition (Convergence de suites) . . . . .	12
23	Lemme (Unicité de la limite) . . . . .	12
6	Définition . . . . .	13
25	Lemme . . . . .	13
27	Proposition . . . . .	13
28	Lemme . . . . .	14
30	Proposition (Inversion d'une limite) . . . . .	15
31	Corollaire . . . . .	15
32	Lemme . . . . .	15
34	Proposition . . . . .	16
35	Proposition . . . . .	16
37	Lemme (Deux gendarmes) . . . . .	17
7	Définition (Limsup et liminf) . . . . .	17
38	Théorème . . . . .	18
39	Théorème (Première règle de d'Alembert) . . . . .	18
8	Définition (Sous-suite) . . . . .	19
44	Proposition . . . . .	20
45	Théorème (Bolzano-Weierstrass) . . . . .	20
9	Définition (Point d'accumulation) . . . . .	20
10	Définition (Suites de Cauchy) . . . . .	21
48	Lemme . . . . .	21
49	Théorème (Convergence des suites de Cauchy) . . . . .	21
50	Lemme . . . . .	21
11	Définition (Série) . . . . .	22
53	Corollaire . . . . .	23
54	Corollaire . . . . .	23
55	Corollaire . . . . .	23
56	Corollaire (Critère de Cauchy pour les séries) . . . . .	24
58	Proposition . . . . .	24
59	Proposition (Série Géométrique) . . . . .	25
60	Proposition (Série Harmonique) . . . . .	25
61	Proposition (Critère de Comparaison) . . . . .	26
63	Corollaire . . . . .	26
12	Définition (Séries Alternées) . . . . .	27
64	Théorème . . . . .	27
13	Définition . . . . .	28
68	Lemme . . . . .	29

69	Theorème . . . . .	29
71	Theorème . . . . .	30

# 1 Introduction

## 1.1 Buts du Cours

### Officiel :

Suites, series, fonctions, derivees, integrales , ...

### Secrets :

Apprendre le raisonnement rigoureux

Creativite

Esprit Critique

Ne croyez rien tant que c'est pas prouve

On construit sur ce qu'on a fait, on recommence pas toujours a 0, par rapport a d'autres domaines (lettres par exemple)

### **Theorème 1 (env. -400)**

*Il n'existe aucun nombre (fraction)  $x$  tel que  $x^2 = 2$ .*

Ca contredit pythagore mn ?

On va demontrer le theoreme.<sup>1</sup>

### **Lemme 2 (Lemme)**

*Soit  $n \in \mathbb{N}$  Alors  $n$  pair  $\iff n^2$  pair.*

### **Preuve**

$\Rightarrow$  Si  $n$  pair  $\Rightarrow n^2$  pair.

*Hyp.*  $n = 2m (m \in \mathbb{N})$

Donc  $n^2 = 4m^2$ , pair.

Par l'absurde,  $n$  impair.  $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$ .

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

impair. Donc si  $n$  est impair, alors  $n^2$  est forcément impair. Absurde. □

### **Preuve**

Supposons par l'absurde  $\exists x$  t.q.  $x^2 = 2$  et  $x = \frac{a}{b} (a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$ .

On peut supposer  $a$  et  $b$  non tous pairs. (sinon reduire).

$$x^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$$

---

1. On demontre d'abord un lemme

pair.

*Lemme : a pair, i.e.  $a = 2n (n \in \mathbb{N})$ .*

$$a^2 = 4n^2 = 2b^2 \Rightarrow 2n^2 = b^2, \text{ i.e. } b^2 \text{ pair.}$$

*Lemme : b pair.*

*Donc a et b sont les deux pairs, on a une contradiction.*

⚡

□

En conclusion, le theoreme est bel et bien vrai, et contredit donc pythagore. Donc les fractions (  $\mathbb{Q}$  ) ne suffisent pas a decire/mesurer les longueurs geometriques. Il faut les nombres reels, on les comprends seulement vraiment depuis 2 siecles.

C'est important de chercher ce genre d'erreurs.

Prochain but : definir les nombres reels (  $\mathbb{R}$  ). L'interaction entre les fractions et les nombres reels.

## 2 Definir $\mathbb{R}$

On commence avec la definition axiomatique des nombres reels.

### Axiom 3 (Nombres Reels)

$\mathbb{R}$  est un corps, en d'autres termes :

Ils sont munis de deux operations : plus et fois.

— Associativite  $x + (y + z) = (x + y) + z (x, y, z \in \mathbb{R})$ <sup>2</sup>

— Commutativite  $x + y = y + x$ .

— Il existe un element neutre 0 t.q.  $0 + x = x, x \in \mathbb{R}$ .<sup>3</sup>

— Distributivite  $x(yz) = (xy)z$

— Il existe un element inverse, unique  $-x \in \mathbb{R}$  t.q.  $x + (-x) = 0$

Remarque : Il existe beaucoup d'autres corps que  $\mathbb{R}$ , par exemple  $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \{0, 1, 2\} \bmod 3$

Attention :  $\{0, 1, 2, 3\} \bmod 4$  n'est pas un corps !

Presque tous marchent, ils satisfont 8 des 9 axiomes.

---

2. L'associativite n'est pas forcément vraie(octonions)

3. Il y a aucune difference entre les regles pour l'addition que pour la multiplication.

**Lemme 4 (Theorem name)** $\forall x \exists ! y \text{ t.q. } x + y = 0.$ **Preuve***Supposons  $x + y = 0 = x + y'$* *A voir :  $y = y'$ .*

$$\begin{aligned}
y &= y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' \\
&= (x + y) + y' = 0 + y' = y'
\end{aligned}$$

*CQFD.*

□

**Exercice**

Démontrer que 0 est unique.

**Proposition 5 (Annulation de l'élément neutre)** $0 \cdot x = 0$ **Preuve**

$$x = x \cdot 1 = x(1 + 0) = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$$

$$0 = x + (-x) = x + (-x) + x \cdot 0$$

□

$$\Rightarrow 0 = x \cdot 0$$

4

**Corollaire 6 (x fois moins 1 égale -x)**

$$x + x \cdot (-1) = 0$$

**Preuve***A voir :  $x \cdot (-1)$  satisfait les propriétés de  $-x$ .**Or*

$$x + x(-1) = x(1 - 1) = x \cdot 0 = 0.$$

□

**Exercice**Montrer que  $\forall x : -(-x) = x$  et que ceci implique  $(-a)(-b) = ab$ .Rien de tout ça n'a quelque chose à voir avec  $\mathbb{R}$ .

Il nous faut plus d'axiomes!!

$$4. \ a - b = a + (-b)$$

### Axiom 7 (Nombres Reels II)

$\mathbb{R}$  est un corps ordonne. Ce qui revient a dire que les assertions suivantes sont verifiees.

- $x \leq y$  et  $y \leq z$  impliquent  $x \leq z$
- $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$
- pour tout couple de nombres reels  $x$  et  $y$  : ou bien  $x \leq y$  ou bien  $x \geq y$ .

Exemple de corps ordonnes :

- (1)  $\mathbb{R}$ , (2)  $\mathbb{Q}$ , (3)  $\{0, 1, 2\} \bmod 3$  n'est pas un corps ordonne.

#### Exercice

$$x \leq y \iff -x \geq -y \quad \text{Exercice}$$

$$x \leq y \text{ et } z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$$

$$x \leq y \text{ et } z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz.$$

---

Il nous manque encore un axiome, et c'est le dernier : pour mercredi !

## Lecture 2: Cours Mercredi

Wed 16 Sep

### 2.1 Exemple d'utilisation

Definition 1 (valeur absolue)

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

#### Proposition 8 (Inegalite du triangle)

Elle dit que

$$\forall x, y : |x + y| \leq |x| + |y|$$

#### Preuve

Cas  $x, y \geq 0$  : alors  $x + y \geq 0$

$$\iff x + y \leq x + y$$

Ce qui est toujours vrai.

Cas  $x \geq 0$  et  $y < 0$ .

Si  $x + y \geq 0$ , alors

$$\iff |x + y| \leq x - y$$

$$\iff x + y \leq x - y$$

$$y \leq -y$$

*c'est vrai car  $y < 0$ .*

*Si  $x + y < 0$ , alors*

$$\Longleftrightarrow -x - y \leq x - y$$

□

*Donc  $-x \leq x$  vrai car  $x \geq 0$ .*

### **Definition 2 (Bornes)**

*Terminologie : Soit  $A \subseteq E$ ,  $E$  corps ordonne.*

— *Une borne superieure ( majorant) pour  $A$  et un nombre  $b$  tq*

$$a \leq b \forall a \in A.$$

— *Une borne inferieure ( minorant) pour  $A$  et un nombre  $b$  tq*

$$a \geq b \forall a \in A.$$

*On dira que l'ensemble  $A$  est borne si il admet une borne.*

### **Axiom 9 (Axiome de completude)**

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \neq \emptyset$$

*et majoree  $\exists s \in \mathbb{R}$  t.q*

1.  *$s$  est un majorant pour  $A$ .*

2.  *$\forall$  majorant  $b$  de  $A$ ,  $b \geq s$ .*

*Cet axiome finis la partie axiomatique du cours.*

### **Remarque**

1.  *$\forall s' < s \exists a \in A : a > s'$ .*

2.  *$s$  est unique.*

### **Definition 3 (Supremum)**

*Ce  $s$  s'appelle le supremum de  $A$ , note  $\sup(A)$ .*

### **Remarque**

*$\exists$  ( pour  $A$  minore et  $\neq \emptyset$ ) une borne inferieure plus grande que toutes les autres, notee  $\inf(A)$  ( infimum).*

$$\inf(A) = -\sup(-A)$$

### **Remarque**

*Si  $\sup(A) \in A$ , on l'appelle le maximum.*

### **Remarque**

*Si  $\inf(A) \in A$ , on l'appelle le minimum.*



**Proposition 14**

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x.$$
**Preuve**

Par l'absurde,

Alors

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : n < x$$

$\Rightarrow \mathbb{N}$  borne et  $\neq \emptyset \Rightarrow \exists s = \sup(\mathbb{N})$

$$s - \frac{1}{2} < s \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > s - \frac{1}{2}$$

$n + 1 \in \mathbb{N}$  et  $n + 1 > s - \frac{1}{2} + 1 = s + \frac{1}{2}$

donc  $n + 1 > s$  absurde. □

**Corollaire 15 (Propriété archimédienne)**

1.  $\forall x \forall y > 0 \exists n \in \mathbb{N} : ny > x.$

2.  $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon$

**Preuve**

Pour 2, appliquer la proposition à  $x = \frac{1}{\epsilon} \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{1}{\epsilon}$

Alors

$$\Rightarrow \epsilon > \frac{1}{n}$$

Pour montrer le 1.

Considérer  $\frac{x}{y}$  □

On peut maintenant montrer que la racine de deux existe.

**Théorème 16 (La racine de deux existe)**

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

**Preuve**

$$A := \{y | y^2 < 2\}$$

Clairément  $A \neq \emptyset$  car  $1 \in A$ . De plus,  $A$  est majorée : 2 est une borne. (si  $y > 2, y^2 > 4 > 2 \Rightarrow y \notin A$ ).

Donc  $\exists x = \sup(A)$

Supposons (par l'absurde) que  $x^2 < 2$

Soit  $0 < \epsilon < 1, \frac{2-x^2}{4x}$ .

Clairément, par hypothèse  $2 - x^2 > 0$  et idem pour  $4x$  car  $x \geq 1$ . Soit  $y = x + \epsilon$ , alors

$$y^2 = x^2 + 2\epsilon x + \epsilon^2 < x^2 + \frac{2 - x^2}{2} + \frac{2 - x^2}{2} = 2$$

$\Rightarrow y \in A$  Mais  $y = x + \epsilon > x$ . Absurde car  $x = \sup(A)$ . Donc  $x^2 \geq 2$ .

Deuxièmement, supposons (absurde)  $x^2 > 2$ .

Soit  $0 < \epsilon < \frac{x^2 - 2}{2x} > 0$ .

Posons  $b = x - \epsilon$ .

$$\begin{aligned} b < x &\Rightarrow \exists y \in A : y > b \\ \Rightarrow y^2 > b^2 &= x^2 - 2\epsilon x + \epsilon^2 > x^2 - \underbrace{2\epsilon x}_{< x^2 - 2} \\ &> x^2 - (x^2 - 2) = 2. \end{aligned}$$

Conclusion :  $y^2 > 2$  contredit  $y \in A$ .

Donc  $x^2 = 2$ . □

### Remarque

Preuve similaire :

$$\forall y > 0 \exists! x > 0 : x^2 = y$$

### Proposition 18 ( $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ )

$$\forall x < y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y$$

### Lemme 19

$$\forall x \exists n \in \mathbb{Z} : |n - x| \leq \frac{1}{2}$$

Ou encore :

$$\forall x \exists [x] \in \mathbb{Z} \text{ tq}$$

$$\begin{cases} [x] \leq x \\ [x] + 1 > x \end{cases}$$

### Preuve

$$\exists n \in \mathbb{Z} : n > x \text{ (Archimede).}$$

Soit  $[x] = \inf\{n \in \mathbb{Z} : n > x\} - 1$  □

### Preuve (Preuve de la densité)

Archimede :  $\exists q \in \mathbb{N} : q > \frac{1}{y-x}$ .

Donc

$$\begin{aligned} & qy - qx > 1. \\ \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : qx < p < qy \end{aligned}$$

par exemple :

$$p = [qy]$$

si  $qy \notin \mathbb{Z}$  ou bien

$$p = qy - 1$$

si  $qy \in \mathbb{Z}$

□

## Lecture 3: Suites

Wed 23 Sep

0,999

0,9

0.99

0.999

0.9999

⋮

### Proposition 20 (Densité des irrationnels)

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , les irrationnels sont dense dans  $\mathbb{R}$ .

### Preuve

Soit  $x < y$  ( dans  $\mathbb{R}$  ).

Cherche  $z \notin \mathbb{Q}$  tq  $x < z < y$ .

$$\exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ tq } x < \frac{p}{q} < y$$

Prop. archimédienne  $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} :$

$$\underbrace{\frac{p}{q} + \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{n}}_{:=z} < y$$

car

$$\exists n : \frac{1}{n} < \underbrace{y - \frac{1}{q}}_{>0} / \sqrt{2}$$

Il reste a voir que :  $z = \frac{p}{q} + \sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$

$$\sqrt{2} = n(z - \frac{p}{q})$$

$$z \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \quad \text{⚡}$$

□

### 3 Suites et limites

#### Definition 4 (Suite)

Une suite  $(x_n)_{n=1}^\infty$  dans  $\mathbb{R}$  est une application (= fonction)  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

#### Remarque

Suite  $(x_n) \neq$  ensemble  $\{x_n\}$  Il arrive qu'on indice  $x_n$  par une partie de  $\mathbb{N}$ . Mais suite = suite infinie

#### Exemple

$$x_n = \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$$

$$x_n = (-1)^n; x_n = n!; F_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$$

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415$$

#### 3.1 Convergence

##### Definition 5 (Convergence de suites)

L'expression  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$  signifie :

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$$

On dit alors que  $(x_n)$  converge (vers  $l$ ). Sinon,  $(x_n)$  diverge.

##### Lemme 23 (Unicité de la limite)

Si  $(x_n)$  converge, il existe une unique  $l \in \mathbb{R}$  tq  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$

#### Preuve

Supposons  $l, l'$  limites. Si  $l \neq l'$ , alors  $|l - l'| > 0$  Donc  $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \frac{|l - l'|}{2}$

De meme  $\exists n_1 \forall n > n_1 : |x_n - l'| < \frac{|l - l'|}{2}$

Soit  $n > n_0, n_1$  Alors :

$$|l - l'| = |l - x_n + x_n - l'| \leq \underbrace{|l - x_n|}_{< |l - l'|/2} + \underbrace{|x_n - l'|}_{|x_n - l'|}$$

Donc

$$|l - l'| < 2 \cdot \frac{|l - l'|}{2}$$

⚡

□

**Exemple**

1. Si  $(x_n)$  est constante ( $\exists a \forall n : x_n = a$ ) alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  (Archimede)

**Definition 6**

Terminologie :

$(x_n)$  est bornée, majorée, minorée, rationnelle, ... etc si l'ensemble  $\{x_n\}$  l'est.

La suite  $(x_n)$  est croissante si  $x_n \leq x_{n+1} \forall n$  Idem décroissante Dans les deux cas, on dit que la suite  $(x_n)$  est monotone

**Lemme 25**

Toute suite convergente est bornée.

**Preuve**

Posons  $\epsilon = 7$ .

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |x_n - l| < 7 \quad \square$$

Soit  $B_1 \geq |x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|$

Posons  $B = \max(B_1, |l| + 7)$  Alors  $|x_n| \leq B \forall n$ .

Attention la reciproque n'est pas vraie!!

**Exemple**

$x_n = (-1)^n$  definit une suite bornée non convergente.

**Preuve**

Supposons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = l$ .

Posons  $\epsilon = \frac{1}{10}$  alors  $\exists n_0 \forall n > n_0 : |(-1)^n - l| < \frac{1}{10}$

$n > n_0$  pair  $\Rightarrow |1 - l| < \frac{1}{10}$

$n > n_0$  impair  $\Rightarrow |-1 - l| < \frac{1}{10}$

ceci implique

$$\Rightarrow |1 - (-1)| \leq |1 - l| + |-1 - l| < \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \quad \square$$

**Proposition 27**

Supposons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x'_n = l'$

Alors 1. :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + x'_n) = l + l'$ , et 2. :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot x'_n = l \cdot l'$

**Preuve**

1 :

Soit  $\epsilon > 0$  Cherche  $n_0$  tq  $\forall n > n_0 : |x_n + x'_n - (l + l')| < \epsilon$ .

Appliquons les deux hypotheses a  $\frac{\epsilon}{2} : \exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$  et  $\frac{\epsilon}{2} : \exists N' \forall n > N' : |x'_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$  Posons  $n_0 = \max(N, N')$   
Si  $n > n_0$ , alors

$$|x_n + x'_n - (l + l')| \leq |x_n - l| + |x'_n - l'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

2 :

Par le lemme,  $\exists B$  tq.  $|x_n|, |x'_n| < B \forall n$ .

Soit  $\epsilon > 0$ . Appliquons les hypotheses a  $\frac{\epsilon}{2B}$ .

$$\exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2B}$$

Si  $n > n_0 := \max(N, N')$  :

$$\begin{aligned} |x_n x'_n - ll'| &\leq |x_n x'_n - x_n l'| + |x_n l' - ll'| \\ &= \underbrace{|x_n|}_{< B} \cdot \underbrace{|x'_n - l'|}_{< \frac{\epsilon}{2B}} + \underbrace{|l'|}_{< B} \cdot \underbrace{|x_n - l|}_{< \frac{\epsilon}{2B}} < \epsilon \end{aligned} \quad \square$$

### Lemme 28

On a utilise : lemme Si  $x_n \leq B \forall n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$  alors  $l \leq B$

### Preuve

Par l'absurde :

Si  $l > B$ , posons  $\epsilon = l - B > 0$

$\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$

en particulier  $x_n > l - \epsilon = B \nexists$   $\square$

## Lecture 4: lundi

Mon 28 Sep

### Remarque

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = |\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n|$ , ce qui est sous-entendu ici est que la limite existe.
- $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  convergence et limite sont inchangées si on modifie un nombre fini de termes.  
En particulier  $(x_n)_{n=17}^{\infty}$ , rien ne change.
- $x_n \rightarrow l$  ( $n \rightarrow \infty$ ), équivalent a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$
- On dit que  $(x_n)$  converge vers  $+\infty$  et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ , si  $(x_n)$  diverge de la façon suivante :

$$\forall R \in \mathbb{R}, \exists n_0 \forall n > n_0 : x_n > R$$

La définition est la même si  $x_n$  converge vers  $-\infty$

**Proposition 30 (Inversion d'une limite)**

Supposons que  $(x_n)$  converge vers  $l \neq 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{l}$

**Corollaire 31**

Si  $(x_n)$  converge vers  $l$  et

Si  $(y_n)$  converge vers  $m \neq 0$  alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{l}{m}$$

Car  $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$

**Lemme 32**

Sous les hypotheses de la proposition,

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n \neq 0$$

**Preuve**

Appliquons la convergence à  $\epsilon = \frac{|l|}{2}$  (car  $l \neq 0$ )

$$|x_n - l| < \epsilon \Rightarrow x_n \neq 0$$

□

**Preuve**

Preuve de la proposition

Soit  $\epsilon > 0$ .

On veut estimer

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{l} \right| = \underbrace{\frac{|l - x_n|}{|x_n - l|}}_{\geq \frac{|l|}{2}} < ? \epsilon$$

pour  $n$  comme dans le lemme. On veut donc

$$|l - x_n| < \epsilon \frac{|l|^2}{2}$$

Donc  $\exists n_1 \forall n \geq n_1$ , on a bien  $|l - x_n| < \epsilon$

□

**Exemple**

On peut à présent calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_d n^d}{b_0 + \dots + b_f n^f}$$

$$a_d \neq 0, b_f \neq 0$$

Si  $d > f$  alors  $\lim = \pm \infty$

Si  $d < f$  alors  $\lim = 0$

Si  $d = f$ , alors  $\lim = \frac{a_d}{b_f}$

Justification

La suite peut s'écrire

$$\frac{a_d + a^{d-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^{d-1}}}{b_0 \frac{1}{n^d + \dots + b_f n^{f-d}}}$$

Si  $f = d$ ,  $\rightarrow \frac{a_d}{b_f}$

Si  $f > d$ ,  $\rightarrow 0$

Si  $f < d$ ,  $\rightarrow \pm\infty$ , selon signe de  $\frac{a_d}{b_f}$

### Proposition 34

Soit  $a \in \mathbb{R}$  avec  $|a| < 1$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$$

### Proposition 35

Si  $(x_n)$  est monotone et bornée, alors elle converge.

### Preuve

Soit  $(x_n)$  croissante. Affirmation,  $x_n \rightarrow s := \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Soit  $\epsilon > 0$ ,  $\exists n : x_n > s - \epsilon$  (def. de sup)

$\forall n \geq n_0 : s - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq s \Rightarrow |x_n - s| < \epsilon$

Idem, si elle était décroissante. □

### Preuve

Remarque :  $(x_n) \rightarrow 0 \iff (|x_n| \rightarrow 0)$ .

$$\dots |x_n - 0| < \epsilon$$

Donc on va traiter le cas  $a > 0$ , alors  $(a^n)_{n=1}^\infty$  est décroissante.

Bornée (par zéro et 1)  $\Rightarrow$  elle admet une limite  $l$ .

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{n+1}}_{a \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n}$  Donc  $l = al$ . Si  $l \neq 0$ ,  $1 = a$  absurde, donc  $l$

nul. □

### Exemple

Def  $(x_n)$  en posant  $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$

Observons que  $x_n \geq 2 > 0 \forall n$

Si  $(x_n)$  converge, alors

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x_n}\right) = 2 + \frac{1}{l}$$

Donc

$$l^2 - 2l - 1 = 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{1+1} = l$$



Or  $l \geq 2 \Rightarrow l = 1 + \sqrt{2}$  si  $l$  existe.

A present, estimons  $|x_n - l|$  :

$$\begin{aligned} \left| x_n - 1 - \sqrt{2} \right| &= \left| 2 + \frac{1}{x_{n-1}} = \left( 2 + \frac{1}{l} \right) \right| = \frac{|l - x_{n-1}|}{x_{n-1}l} \leq \frac{|x_{n-1} - l|}{4} \\ &\leq \dots \leq \frac{|x_{n-2} - l|}{4^2} \leq \frac{|2 - l|}{4^n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

car  $\frac{1}{4^n} \rightarrow 0$

### Lemme 37 (Deux gendarmes)

Soit  $(x_n), (y_n), (z_n)$  trois suites avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$$

si  $x_n \leq y_n \leq z_n \forall n$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = l$$

### Preuve

repose sur le fait que

$$|x_n - l|, |z_n - l| < \epsilon \Rightarrow l - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \epsilon$$

montre  $|y_n - l| < \epsilon$

□

## 4 Limsup et liminf

### Definition 7 (Limsup et liminf)

Soit  $(x_n)$  une suite quelconque.

On definit la limite superieure par :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf_n \sup \{x_k, k \geq n\}$$

Attention : Ici on convient que

$$\sup(A) = +\infty$$

si  $A$  non majore

$$\inf(A) = -\infty$$

si  $A$  non minore

On definit la limite superieure par :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup_n \inf \{x_k, k \geq n\}$$

Notez :  $z_n := \sup \{x_k : k \geq n\}$

Cela definit une suite decroissante et donc  $(z_n)$  converge vers son inf.

Conclusion :  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} x_k$

## Lecture 5: mercredi 30

Wed 30 Sep

### Theorème 38

$(x_n)$  converge  $\iff \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  Dans ce cas, la limite prend cette meme valeur.

### Preuve

$\Leftarrow :$

Soit  $z_n = \sup \{x_p : p \geq n\}$ ,

$$y_n = \inf \{x_p : p \geq n\}$$

Rappel :  $(z_n) \rightarrow LS$  et  $(y_n) \rightarrow LI$

Or,  $y_n \leq x_n \leq z_n$ . Donc par les 2 gendarmes

$$\Rightarrow (x_n) \rightarrow LS = LI$$

$\Rightarrow :$

Hypothese :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ .

A voir :  $LS = LI = l$ .

Montrons par exemple que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = l$$

( i.e.  $LS = l$  )

Soit  $\epsilon > 0$ .

$$\exists N \forall n \geq N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{et } \forall n \geq N : |z_n - LS| < \frac{\epsilon}{4}$$

Def. de  $z_N \Rightarrow \exists p \geq N : |x_p| > z_N - \frac{\epsilon}{4}$

A present

$$|LS - l| \leq \underbrace{|LS - z_N|}_{< \frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|z_n - x_p|}_{< \frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|x_p - l|}_{< \frac{\epsilon}{2}}$$

avec  $p \geq N$  et  $N \geq N$  Donc  $\forall \epsilon > 0 :$

$$|LS - l| < \epsilon$$

Donc  $LS = l$

□

### Theorème 39 (Premiere regle de d'Alembert)

Supposons  $x_n \neq 0 \forall n$

Supposons que  $\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|$  existe

Si  $\rho < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

Si  $\rho > 1$ , alors  $(x_n)$  diverge.

**Remarque**

Si  $\rho = 1$ , on ne peut rien conclure

**Exemple**

- $x_n = n$  diverge, mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$
- $x_n = \frac{1}{n}$  converge mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$

**Preuve**

Supposons  $\rho < 1$ .

A voir :  $x_n \rightarrow 0$ .

Soit  $\rho < r < 1$ . Convergence pour  $\epsilon = r - \rho : \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - \rho \right| < r - \rho$

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < r$$

i.e.  $|x_{n+1}| < r |x_n|$  de meme  $|x_{n+2}| < r |x_{n+1}| < r^2 |x_n|$

Conclusion  $\forall m \geq n_0 : |x_m| < r^{m-n_0} |x_{n_0}|$

Donc

$$\forall m \geq n_0 : |x_m| < r^m |x_{n_0}| r^{-n_0}$$

On sait que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} r^m = 0$  donc

$$0 \leq |x_m| \leq r^m c$$

avec  $c$  constante Cas  $\rho > 1$ .

On va montrer que  $|x_n|$  est non bornée.

Soit  $1 < r < \rho$ .

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |x_{n+1}/x_n| > r$$

Donc

$$|x_{n+1}| > r |x_n|$$

comme avant :

$$x_m > r^{m-n_0} |x_{n_0}|$$

□

**Remarque**

Si  $r > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = +\infty$   $r^n$  est croissante donc il suffit de montrer que la suite est non bornée.

Si elle était bornée, soit  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} r^n \in \mathbb{R}$

Mais  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n+1} = rl$

Donc  $l \neq 0 \Rightarrow 1 = r$  absurde.

**Définition 8 (Sous-suite)**

Soit  $(x_n)_{n=1}^\infty$  une suite.

Une sous-suite de  $(x_n)$  est une suite de la forme  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ , ou  $(n_k)_{k=1}^\infty$  est une suite strictement croissante de  $\mathbb{N}$ .

### Exemple

Si  $(x_n)$  est une suite, considerer :

$$x_2, x_3, x_5, x_7, x_{11}, x_{13}, \dots$$

Ici,  $n_k = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$

#### Proposition 44

Si  $x_n$  converge, alors toute sous-suite converge vers la meme limite.

#### Preuve

Soit  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ . Soit  $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  une sous-suite et  $\epsilon > 0$ .

A voir :  $\exists k_0 \forall k > k_0 : |x_{n_k} - l| < \epsilon$

Or  $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$ .

Donc il suffit de choisir  $k_0$  tq  $n_{k_0} \geq n_0$ .

(puisque la suite  $(n_k)$  est croissante.) □

#### Theorème 45 (Bolzano-Weierstrass)

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente

#### Preuve

On va construire une sous-suite qui converge vers  $s := \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$

Ici,  $(x_n)$  est la suite en question et on pose

$$z_n = \sup \{x_p : p \geq n\}$$

Par recurrence,  $n_1$  quelconque.

Supposons  $n_{k-1}$  construit et construisons  $n_k$  :

$$\exists N \forall n \geq N : |z_n - s| < \frac{1}{k}$$

Choisissons un  $n \geq N, n_{k-1} + 1$

$$\exists p \geq n \text{ t.q. } x_p > z_n - \frac{1}{k}$$

On definit  $n_k = p$  ( $n_k > n_{k-1}$ )

$$\text{Or, } \underbrace{|x_{n_k} - s|}_{< \frac{1}{k}} \leq \underbrace{|x_{n_k} - z_n|}_{< \frac{1}{k}} + \underbrace{|z_n - s|}_{< \frac{1}{k}}$$

Donc  $(x_{n_k}) \rightarrow s (k \rightarrow \infty)$  □

#### Définition 9 (Point d'accumulation)

$x$  est un point d'accumulation de la suite  $x_n$  s'il existe une sous-suite qui converge vers  $x$ .

### Exemple

$$x = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$x = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

## 4.1 Suites de Cauchy

### Definition 10 (Suites de Cauchy)

La suite  $(x_n)$  est dite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < \epsilon$$

Attention :

Il ne suffit pas de comparer  $x_n$  et  $x_{n+k}$  pour  $k$  fixe.

### Exemple

$$x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\text{Cauchy} \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall k \in \mathbb{N} : |x_n - x_{n+k}| < \epsilon$$

### Lemme 48

Si  $(x_n)$  converge, elle est de Cauchy.

### Preuve

Soit  $\epsilon > 0$ , soit  $l$  la limite.

Hypothèse :

$$\text{avec } \frac{\epsilon}{2} : \exists N \forall n \geq N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

Si  $n, n' \geq N$

$$|x_n - x_{n'}| \leq |x_n - l| + |x_{n'} - l| < \epsilon$$

□

### Theorème 49 (Convergence des suites de Cauchy)

Toute suite de Cauchy converge

### Preuve

Soit  $(x_n)$  de Cauchy.

### Lemme 50

$(x_n)$  est bornée.

### Preuve

Soit  $\epsilon = 10$

$$\forall N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < 10$$

Donc  $|(x_n)|$  est bornée par

$$\max(|x_N| + 10, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|)$$

□

Appliquer Bolzano-Weierstrass

$\exists$  sous-suite  $(x_{n_k})$

qui converge, soit  $l$  sa limite. A voir  $(x_n)$  converge vers  $l$ .  
 soit  $\epsilon > 0 \exists k_0 \forall k \geq k_0 |x_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2}$

$$\exists N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < \frac{\epsilon}{2}$$

Si  $n \geq N, n_{k_0}$  alors

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < \epsilon \quad \square$$

## Lecture 6: lundi

Mon 05 Oct

### Remarque

*Ecriture decimale : 3.1415... ou encore 0.333... veut dire*

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \dots$$

*une somme infinie de fractions. La difference entre le  $n$  ieme terme et le  $n'$  ieme terme :*

$$\leq 10^{-n} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Cauchy}$$

*Cette limite est une "somme infinie".*

## 5 Series

But : definir les "sommages infinies" .

$$\rightarrow \begin{cases} \text{Existe ?} \\ \text{Valeur ?} \end{cases}$$

### Exemple

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$$

*ou encore*

$$\exp(x) = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \dots$$

*ou*

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

### Definition 11 (Serie)

Le symbole  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  represente

$x_0 + x_1 + x_2 + \dots$  et est defini par

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x_k$$

---

On appelle

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

une série et on dit qu'elle converge/diverge lorsque la suite  $s_n := x_0 + \dots + x_n$  le fait.

**Corollaire 53**

*Si  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  existent, alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

**Preuve**

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n, s_n = \sum_{k=0}^n x_k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n, t_n = \sum_{k=0}^n y_k$$

*Alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n, \text{ où } u_n = (x_0 + y_0) + \dots + (x_n + y_n) = s_n + t_n$$

*Donc la limite*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n + t_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

□

**Corollaire 54**

*Pour  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} ax_n = a \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ , si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

*existe.*

*Sans preuve.*

**Corollaire 55**

$$\sum_{n=n_0}^{if y} x_n \text{ existe si } \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

existe et vaut

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n - (x_0 + x_1 + \dots + x_{n_0-1})$$

$n$

### Corollaire 56 (Critere de Cauchy pour les séries)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ converge} \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : \left| \sum_{p=N}^n x_p \right| < \epsilon$$

( Dans ce cas,  $|\sum_{n=N}^{\infty} x_n| \leq \epsilon$  )

### Preuve

Appliquer Cauchy à la suite  $s_n$  :

$$\exists n_0 \forall n, n' > n_0 : |s_n - s_{n'}| < \epsilon$$

Alors

$$\left| \sum_{p=n'+1}^n x_p \right| < \epsilon$$

### Exemple

Ecriture decimale,

### Proposition 58

Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

### Preuve

Appliquer Cauchy à  $\left| \underbrace{s_n - s_{n-1}}_{=x_n} \right|$

Attention, la réciproque est FAUSSE.

□

2 Exemples



**Proposition 59 (Serie Geometrique)**

Soit  $r \in \mathbb{R}$  avec  $|r| < 1$ , alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

**Preuve**

Soit

$$s_n = r^0 + r^1 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n+1} = 0$$

□

Donc  $s_n \rightarrow \frac{1}{1-r}$ .

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1$$

**Proposition 60 (Série Harmonique)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge (vers } +\infty)$$

**Preuve**

Considérons

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{2^{n+1} - 2^n = 2^n \text{ termes.}} + \dots$$

Tous ces termes sont  $\geq \frac{1}{2^{n+1}}$

Cette somme est :

$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} \geq 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

□

Contredit Cauchy pour  $\epsilon = \frac{1}{2}$ .

Astuce utile :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1$$

**Preuve**

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \quad \square$$

*Donc ca converge.*

*C'est une série télescopique*

**Proposition 61 (Critère de Comparaison)**

*Supposons  $0 \leq x_n \leq y_n$ .*

*Si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ converge, alors } \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ aussi .}$$

**Preuve**

$$s_n = x_0 + \dots + x_n$$

*est croissante. Donc converge  $\iff (s_n)$  bornée.*

*Mais  $y_0 + \dots + y_n$  converge  $\Rightarrow$  bornée et  $s_n \leq y_0 + \dots + y_n \Rightarrow (s_n)$  bornée  $\square$*

**Remarque**

*De plus,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

*Si, par contre,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ diverge}$$

**Corollaire 63**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

*converge.*

**Preuve**

$$\forall n \geq 2 : \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

*Or*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \text{ converge.}$$

*Donc, par comparaison,  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge*

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge .}$$

$\square$

## Lecture 7: mercredi

Wed 07 Oct

### Definition 12 (Séries Alternées)

$(x_n)$  est alternée si  $x_n \cdot x_{n+1} \leq 0 \forall n$

#### Theorème 64

Soit  $(x_n)$  alternée,  $|x_n|$  décroissante, et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ converge.}$$

#### Exemple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge. (série harmonique alternée)<sup>5</sup>

#### Preuve

On utilise cauchy.

Soit  $n, m \in \mathbb{N}$ .

$$\underbrace{x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m-1} + x_{n+m}}_{\geq 0}$$

Cas  $x_n \geq 0$  :

Cas où  $n$  pair

$$0 \leq \sum_{p=n}^{n+m} x_p \leq x_n$$

Si  $m$  impair :

idem

Que  $n$  soit pair ou impair

$$\left| \sum_{p=n}^{n+m} x_p \right| \leq |x_n|$$

Or, soit  $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \Rightarrow$$

$$\exists N \forall n > N |x_n| \leq \epsilon.$$

Donc  $\forall n > N, m|$

$$|x_n + \dots + x_{n+m}| < \epsilon$$

□

---

5. En fait la série converge vers  $-\log 2$

### 5.0.1 Un calcul naïf ( avec la série harmonique alternée)

Soit  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ , existe par le théorème.

Note :  $S < 0$ .

$$s_n = \underbrace{-1 + \frac{1}{2}}_{=-\frac{1}{2}} - \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{<0} - \dots + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$s_n < -\frac{1}{n}, \forall n \text{ pair} \Rightarrow S \leq -\frac{1}{2}$$

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

à chaque terme  $x_n$ , on associe  $x_{2n}$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots \right) = \frac{1}{2} S \end{aligned}$$

Donc  $S = \frac{1}{2} S \Rightarrow S = 0$  Faux !

Conclusion :

On ne peut pas permuter ( en général) les termes d'une série convergente ( somme infinie)

#### Definition 13

On dit que la somme de

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge absolument si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

converge.

Note : la valeur

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

ne nous intéresse pas

#### Remarque

Si  $x_n \geq 0 \forall n$ , aucune différence entre "convergence" et "convergence absolue".

#### Exemple

— La série harmonique alternée converge, mais pas absolument.

**Lemme 68**

*Convergence absolue implique la convergence.*

**Preuve**

$$\forall n : 0 \leq x_n + |x_n| \leq 2|x_n|$$

*Donc convergence absolue  $\Rightarrow$*

$$\sum (x_n + |x_n|)$$

*converge.*

*Or  $-\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$  converge .*

*Somme des deux sommes ci-dessus, implique que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

□

**Theorème 69**

*Si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

*converge absolument, alors toute permutation converge vers la même somme.*

**Exemple**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

*Clarification :*

*Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathbb{N}$ , i.e. bijection.*

*La nouvelle série sera*

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ pour } y_n = x_{\sigma(n)}$$

*Notons  $s_n = x_0 + \dots + x_n$  et*

$$t_n = y_0 + \dots + y_n = x_{\sigma(0)} + \dots + x_{\sigma(n)}$$

*Le théorème dit : si  $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$  existe, alors  $\lim s_n = \lim t_n$ .*

**Preuve**

*1er cas "facile" .*

*Supposons  $x_n \geq 0 \forall n$ .*

*Alors  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sup \{s_n | n \in \mathbb{N}\}$*

*On va montrer que  $\sup s_n \geq \sup t_n$  et que  $\sup_n s_n \leq \sup_n t_n$*

$$\underbrace{\quad}_{{=:s}} \quad \underbrace{\quad}_{{=:t}}$$

Pour  $s \geq t$  :

Soit  $\epsilon > 0$ . Or , par déf,  $\exists n t_n > t - \epsilon$

ie

$$y_0 + \dots + y_n > t - \epsilon$$

ie

$$x_{\sigma(0)} + \dots + x_{\sigma(n)} > t - \epsilon$$

Soit  $m = \max_{i=0,\dots,n} \sigma(i)$ , alors

$$s_m \geq t - \epsilon$$

donc

$$s = \sup s_n > t - \epsilon$$

vrai  $\forall \epsilon > 0 \Rightarrow s \geq t$

En considérant  $\sigma^{-1}$ , on obtien de même  $t \geq s \Rightarrow s = t$ , donc le théorème vrai

SI  $x_n \geq 0$ .

2ème cas :  $x_n \leq 0 \forall n$ , idem

Cas général :

Posons  $x_n = x_n''$ , ou  $x_n' = \max(x_n, 0)$  et  $x_n'' = \min(x_n, 0)$ , alors

$$x_{\sigma(n)} = x_{\sigma(n)}' + x_{\sigma(n)}''$$

On conclut en appliquant le cas ( 1) a  $x_n'$  et ( 2) ou  $x_n''$

□

### Theorème 71

Supposons que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge, mais pas absolument.

$\forall l \in \mathbb{R} \exists$  permutation  $\sigma$  t.q.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = l.$$