Fluides et Electromagnetisme

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Introduction

Tue 23 Feb

1 Notations du cours et maths necessaires

1.1 Scalaires et Vecteurs

On distingue les quantites scalaires (pression, masse, la charge electrique) et les quantites vectorielles (vitesse, force) .
Dans un repere 3D, les vecteurs de base unitaires e_x, e_y, e_z
On definit un champ scalaire(resp. vectoriel) par une fonction $p(\overrightarrow{r}, t)$ qui depend de la position et du temps.

1.2 L'operateur ∇ (nabla) et la definition du gradient, de la divergence et du rotationnel

En coordonnes cartesiennes, on a

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

On note

$$\frac{\partial p}{\partial x}(\overrightarrow{r}, t) = \lim_{h \to 0} \frac{p(x+h, y, z, t) - p(x, y, z, t)}{h}$$

— Le gradient, note ∇f d'un champ scalaire $f(\overrightarrow{r}, t)$ est un champ vectoriel donne par

$$\nabla f(\overrightarrow{r}, t) = e_x \frac{\partial f}{\partial x} + e_y \frac{\partial f}{\partial y} + e_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

— La divergence, notee $\nabla \cdot \overrightarrow{u}$ d'un champ vectoriel $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}, t)$ est un champ scalaire donne par

$$\nabla \cdot \overrightarrow{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

— Le rotationnel $\nabla \times \overrightarrow{u}$ d'un champ vectoriel est un champ vectoriel donne par

$$\nabla \times \overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}, t) = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \times (u_x, u_y, u_z)$$

Remarque
On peut utiliser ∇ comme un vecteur, mais il faut faire attention a ce que les operations sont pas commutatives.

Remarque
Souvent, on ecrit ∂_x pour $\frac{\partial}{\partial x}$

Remarque
Les expressions du gradient, divergence, rotationel sont independantes du systeme de coordonnees

1.3 Formules d'integration

Theorème 4 (Theoreme du gradient)
Soit un volume V quelconque dans l'espace et soit S la surface fermee limitant le volume V (on note $S = \partial V$).
A chaque element de la surface, on assimile un vecteur orthogonal a la surface en ce point. On le note $d\overrightarrow{S}$ et il represente le "petit element" de surface.
Alors on a

$$\int\int_S f d\overrightarrow{S} = \int\int\int_V \nabla f dV$$

Theorème 5 (Theoreme de La divergence(de Gauss))
Le flux d'un champ vectoriel $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}, t)$ au travers d'une surface S :

$$\phi = \int\int_S \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Soit une surface fermee $S = \partial V$ et $d\overrightarrow{S}$ qui point vers l'exterieur de V, alors on a

$$\int\int_S \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{S} = \int\int\int_V (\nabla \cdot \overrightarrow{A}) dV$$

Theorème 6 (Theoreme de Stokes)
On definit la circulation d'un champ vectoriel $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}, t)$ le long d'une courbe fermee Γ :

$$\Sigma = \oint_\Gamma \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{l}$$

Dans ce cas la, on a

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{dl} = \int\int_S (\nabla \times \overrightarrow{A}) \cdot \overrightarrow{dS}$$

L'orientation relative de $\overrightarrow{dl}$ et $\overrightarrow{dS}$ est donnee par la regle de la main droite.

2 Fluides au repos

2.1 Introduction

On appelle un fluide un corps qui est a l'etat liquide, gazeux, ou plasma, systeme d'un grand nombre de particules qui est susceptible de s'ecouler facilement.
Autrement dit, un corps deformable/qui n'a pas de forme propre.
Pour beaucoup d'applications : un fluide est decrit par sa densite de masse $\rho(\overrightarrow{r}, t)$, la pression ($p(\overrightarrow{r}, t)$) et la vitesse $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}, t)$

Dans ce chapitre, on suppose $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r},t) = 0$,$\rho(\overrightarrow{r},t) = \rho(\overrightarrow{r})$ et $p(\overrightarrow{r},t) = p(\overrightarrow{r})$

2.2 Densite de fluide

Supposons un recipient avec un fluide dedans et un systeme de coordonnees.
On note

$$\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

pour la densite moyenne.
On prend ensuite la limite $\Delta V \to dV$ et on obtient ainsi

$$\rho(\overrightarrow{r},t) = \lim_{\Delta V \to dV} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$