EPFL Automne 2020

Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 10

Tous les exercices seront corriges. La correction sera postee sur le moodle apres 2 semaines.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le dimanche de la semaine suivante celle ou la serie a ete postee. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme de fichier pdf (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien a cet effet dans la semaine de la serie.

Exercice 1. Pour les nombres complexes suivants

$$z_1 = 1 + i,\ z_2 = 3 - 2i,\ z_3 = \frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$$

calculer pour $i, j = 1, 2, 3$ (sous la forme $x + iy$)

$$\overline{z_i},\ |z_i|,\ z_i/|z_i|, z_i^{-1}, \mathrm{c}(z_i),\ \mathrm{s}(z_i)$$

$$z_i + z_j,\ z_i.z_j,\ z_i/z_j.$$

Exercice 2. On pose

$$\omega_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \omega_6 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \omega_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1. Pour $n = 3, 6, 8$, calculer $|\omega_n|$ et $1/\omega_n$.
2. Montrer que $\omega_n^n = 1$.
3. Calculer
$$(1 + i\sqrt{3})^7,\ (1 + i)^9.$$

Exercice 3. Soit $z \in \mathbb{C}^\times$ un nombre complexe non-nul.

1. Montrer que
$$z^{-1} = \overline{z} \iff |z| = 1.$$
2. Montrer que
$$z^n,\ n \in \mathbb{Z} - \{0\} = 1 \Longrightarrow |z| = 1.$$

3. Montrer que
$$z + 1/z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou bien } |z| = 1$$

Exercice 4. On considere l'espace vectoriel de dimension 3 sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$,
$$\mathbb{C}^3 = \{(u, v, w),\ u, v, w \in \mathbb{C}\}.$$

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{C}$ la famille
$$\{(1, 2i, a + i),\ (a, 3 + i, 1 + 2i),\ (1, 0, 2 + 2i)\}$$
est elle une base de $\mathbb{C}^3$?
2. On prend $a = i$, exprimer les trois vecteurs de la base canonique comme combinaison lineaire des trois vecteurs precedent.

Exercice 5. On a admis dans le cours l'existence et l'unicite d'un morphisme de groupes surjectif a valeurs dans le groupe des complexes de modules 1
$$e^{i\bullet} : \theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{C}^{(1)}$$
qui est derivable et dont la derivee en $\theta = 0$ vaut
$$(e^{i\bullet})'(0) = i.$$
On rappelle que les fonctions cosinus et le sinus de θ sont definies comme etant la partie reelle et la partie imaginaire de $e^{i\theta}$:
$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$
Dire que $e^{i\bullet}$ est derivable signifie precisement que les fonctions $\theta \mapsto \cos(\theta)$ et $\theta \mapsto \sin(\theta)$ sont derivables. On note $\cos'(\theta)$ et $\sin'(\theta)$ leurs derivees et on a alors
$$(e^{i\bullet})'(\theta) = \cos'(\theta) + i \sin'(\theta)$$

1. Que valent $\cos(0)$, $\sin(0)$ et $\cos'(0)$ et $\sin'(0)$? (raisonnez comme si vous ne connaissiez pas les valeurs de cosinus et sinus en 0).
2. On suppose seulement que cos et sin sont derivables en 0 : cad que les limites de leur taux d'accroissement en 0 existent
$$\lim_{\theta' \to 0} \frac{\cos(\theta') - \cos(0)}{\theta' - 0} =: \cos'(0),\ \lim_{\theta' \to 0} \frac{\sin(\theta') - \sin(0)}{\theta' - 0} =: \sin'(0).$$
Montrer que $e^{i\bullet}$ et donc (de maniere equivalente) $\cos(\bullet)$ et $\sin(\bullet)$ sont derivables pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et que l'on a les formules usuelles
$$\cos'(\theta) = -\sin(\theta),\ \sin'(\theta) = \cos(\theta),\ (e^{i\bullet})'(\theta) = ie^{i\theta}$$

et que ces fonctions sont infiniment derivables. Pour cela on montrera l'existence des limites des taux d'accroissements

$$\lim_{\theta' \to 0} \frac{\cos(\theta+\theta')-\cos(\theta)}{\theta'-0}, \ \lim_{\theta' \to 0} \frac{\sin(\theta+\theta')-\sin(\theta)}{\theta'-0}.$$

On utilisera le fait que $e^{i\bullet}$ est un morphisme de groupe et donc que $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}.e^{i\theta'}$.

Remarque 0.1. En utilisant la theorie de l'integration, il suffit en fait de montrer que $e^{i\bullet}$ est continue en 0 pour en deduire que $e^{i\bullet}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ensuite en deduire que $e^{i\bullet}$ est derivable sur $\mathbb{R}$ (et alors infiniment derivable).

Exercice 6. ($\star$) Soit K un corps et $M_2(K)$ l'algebre des matrices 2×2 a coefficients dans K. Dans cet exercice on va generaliser la construction de $\mathbb{C}$ comme corps contenu dans $M_2(\mathbb{R})$.

Soit $d \in K^\times$ et I_d la matrice

$$I_d := \begin{pmatrix} 0 & d \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose

$$C_d := K.\mathrm{Id}_2 + K.I_d$$

le sous-espace espace vectoriel engendre par Id_2 et I_d.

1. Quelle est la dimension de C_d ?
2. Calculer I_d^2 et montrer que C_d est un sous-anneau de $M_2(K)$.
3. Soit $Z = x.\mathrm{Id}_2 + y.I_d, \ x, y \in K$ une matrice non-nulle. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que
$$Z^2 - \lambda.Z \in K.\mathrm{Id}_2.$$
En deduire qu'il existe $Z' \in C_d$ tel que
$$Z.Z' \in \mu.\mathrm{Id}_2, \ \mu \in K$$
ou μ depend de Z.
4. Montrer que si d n'est pas un carre dans K c'est a dire il n'existe pas de $u \in K$ tel que $u^2 = d$ alors Z est inversible ssi $Z \neq \mathbf{0}_2$ et donc que C_d est un corps.
5. Montrer que si d est un carre dans K alors C_d n'est pas un corps.

Exercice 7. Soit K un corps et

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice carree de taille 2. On va donner une condition necessaire et suffisante pour que M soit inversible (son determinant est non-nul). On note

$$C_M = K.\mathrm{Id}_2 + K.M \subset M_2(K)$$

l'espace vectoriel de matrices engendre par l'indetite et M.

1. On suppose que $M \in K.\mathrm{Id}_2$ est une matrice scalaire. Montrer que M est inversible si et seulement si $M \neq 0$.
2. Dans cette question et les trois suivantes, on suppose que M n'est pas une matrice scalaire. Quelle est la dimension de C_M ?
3. Calculer M^2 et montrer qu'il existe $t, \Delta \in K$ (qui dependent de a, b, c, d) tels que
$$M^2 - t.M + \Delta.\mathrm{Id}_2 = 0_2. \tag{7.1}$$
4. Montrer que Δ et t sont uniques.
5. Montrer que M est inversible ssi $\Delta \neq 0_K$ et si c'est le cas donner une expression de M^{-1} en fonction de a, b, c, d.
6. On considere a nouveau le cas general (M scalaire ou pas). On definit le *determinant* de M comme etant l'expression
$$\det(M) := ad - bc.$$
Montrer que M est inversible ssi $\det(M) \neq 0$. Si c'est le cas donner une expression de M^{-1} en fonction de a, b, c, d.
7. On rappelle (cf la serie precedente) que la trace de M est la somme des coefficients diagonaux :
$$\mathrm{tr}(M) = a + d.$$
En utilisant les resultats de cet exercice, montrer que pour $C \in \mathrm{GL}_2(K)$
$$\mathrm{tr}(C.M.C^{-1}) = \mathrm{tr}(M),\ \det(C.M.C^{-1}) = \det(M)$$
(rmq : on a deja montre cette identite pour la trace en general). Pour cela on pourra verifie que $C.M.C^{-1}$ verifie la meme equation polynomiale (7.1) que M.