Mini-Examen 3

David Wiedemann

30 mai 2021

On notera d'abord que pour $\lambda \in \mathbb{C}$,$\lim_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$ si et seulement si $|\lambda| < 1$.
En effet, écrivons $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$, avec $\theta \in [0, 2\pi[$, alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda^n = \lim_{n\to+\infty} |\lambda|^n e^{in\theta}$$

Car la norme de $e^{in\theta}$ est égale à 1 pour tout valeur de n et de θ, il est immédiat que si $|\lambda| < 1$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$$

De même, si $\lim_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$, alors il faut que $\lim_{n\to+\infty} |\lambda|^n = 0$ et un résultat d'analyse I implique alors que $|\lambda| < 1$.

On montre maintenant la double implication.
$\Rightarrow$
Etant donné que A est diagonalisable, il existe deux matrices $D, U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tel que D est diagonale, U inversible et telle que l'égalité suivante soit satisfaite

$$A = UDU^{-1}.$$

Ecrivons

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} A^k &= \lim_{k\to+\infty} UD^kU^{-1} \\ &= U(\lim_{k\to+\infty} D^k)U^{-1} \\ &= U(\lim_{k\to+\infty} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix})U^{-1} = 0_n \end{aligned}$$

En multipliant par U^{-1} à gauche et par U à droite, on trouve

$$\lim_{k\to+\infty}\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{pmatrix}=0$$

Et on en déduit que pour tout $i=1,\ldots,n$, on a $|\lambda_i|<1$.
$\Leftarrow$
Si $|\lambda_i|<1$ pour tout $i=1,\ldots,n$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}A^k &= U(\lim_{k\to+\infty}D^k)U^{-1}\\ &= U(\lim_{k\to+\infty}\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{pmatrix})U^{-1}\end{aligned}$$

Etant donné que pour $i=1,\ldots,n$, on a $|\lambda_i|<1$, en passant à la limite, on trouve

$$\begin{aligned}&= U(\begin{pmatrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{pmatrix})U^{-1}\\ &= 0_n\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'assertion.