

Exercice 1. Sous-groupe normal engendré par... Soit G un groupe et $g_i, i \in I$ des éléments de G . On considère $H = \langle g_i, i \in I \rangle$ le sous-groupe engendré par les g_i et $N = \langle\!\langle g_i, i \in I \rangle\!\rangle$ le sous-groupe normal engendré par les g_i , i.e. le plus petit sous-groupe normal de G contenant les g_i .

1. Montrer que N est l'intersection de tous les sous-groupes normaux de G contenant les g_i .
2. Montrer que H est un sous-groupe de N , mais que $H \neq N$ en général. On pourra utiliser une permutation dans un groupe symétrique ou un mot dans un groupe libre.

Exercice 2. Groupe abélien libre. Soit $F(a, b)$ le groupe libre à deux générateurs a et b . On considère le relateur $aba^{-1}b^{-1}$. On pose $A = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$.

1. Montrer que tout élément de A admet un représentant de la forme $a^n b^m$ pour $n, m \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que A est un groupe abélien.
3. Montrer que $A \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le groupe abélien libre à deux générateurs.

Remarque. Le noyau du quotient $F(a, b) \rightarrow A$ est en fait un groupe libre à une infinité de générateurs, alors que le sous-groupe engendré par $aba^{-1}b^{-1}$ est isomorphe à \mathbb{Z} .

Exercice 3. Présentations. Pour chacun des trois exemples suivants, compter le nombre d'éléments et identifier le groupe en question.

1. $D = \langle a, b \mid a^2, b^4, abab \rangle$
2. $Q = \langle a, b \mid a^4, a^2b^2, abab^3 \rangle$
3. $\star S = \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (ab)^3, (bc)^3, (ac)^2 \rangle$
4. Construire un groupe G tel qu'un homomorphisme $G \rightarrow H$ corresponde au choix de trois éléments $x, y, z \in H$ avec x d'ordre 3, y d'ordre 6, z d'ordre 11 et enfin $xy = yx$.

Exercice 4. Collapse d'une arête. On considère ici un graphe comme un espace topologique dont les arêtes sont homéomorphes à I et les extrémités sont identifiées si elles correspondent au même sommet. Plus formellement si Γ est un graphe dont les arêtes $e \in E$ et les sommets $s \in S$, il s'agit d'une réunion disjointe de copies de I , autant qu'il y a d'arêtes et d'une réunion disjointe de points, autant qu'il y a de sommets : $\coprod_E ([0, 1], e) \coprod \coprod_S (*, s)$, que l'on quotiente par les relations $(0, e) \sim (*, s)$ si s est l'origine de l'arête e et $(1, e) \sim (*, s)$ si s est son but.

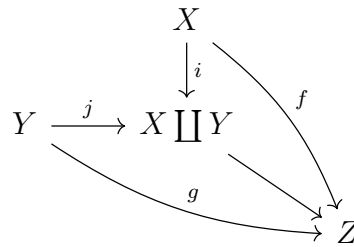
1. Soit Γ le graphe de Cayley du groupe cyclique C_3 pour le choix d'un générateur. Montrer que le collapse d'une arête a produit une équivalence d'homotopie $q: \Gamma \rightarrow \Gamma/a$. On demande donc de construire un inverse et de construire les homotopies.
2. Soit Γ le graphe ayant six sommets A, B, C, D, E et F et les cinq arêtes suivantes :

$$a = \{A, C\}, b = \{B, C\}, c = \{C, D\}, d = \{D, F\} \text{ et } e = \{D, E\}$$

Montrer que $q: \Gamma \rightarrow \Gamma/a$ est une équivalence d'homotopie. On demande donc de construire un inverse et de construire les homotopies. Même question pour l'arête "centrale" c .

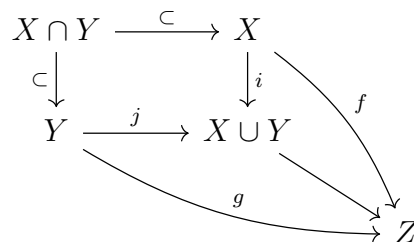
Exercice 5. La propriété universelle du pushout.

1. Soit X, Y, Z des espaces topologiques, et $f : X \rightarrow Z$, $g : Y \rightarrow Z$ deux applications continues. Montrer qu'il existe une unique application continue $f \amalg g : X \amalg Y \rightarrow Z$ qui fait commuter le diagramme



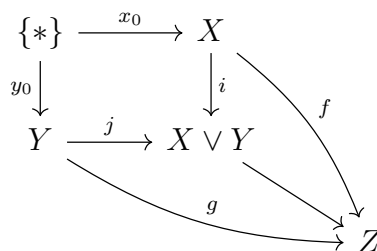
où $i : X \hookrightarrow X \amalg Y$ et $j : Y \hookrightarrow X \amalg Y$ sont les inclusions canoniques.

2. Soit T un espace topologique, et $X, Y, Z \subset T$ des sous-espaces de T . Si $f : X \rightarrow Z$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont des applications continues, montrer qu'il existe une unique application $f \cup g : X \cup Y \rightarrow Z$ qui fait commuter le diagramme



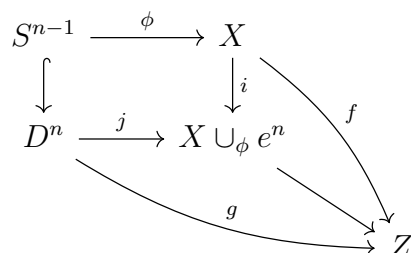
où $i : X \hookrightarrow X \cup Y$ et $j : Y \hookrightarrow X \cup Y$ sont les inclusions canoniques.

3. Soit $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$ des espaces topologiques pointés, et $f : X \rightarrow Z$, $g : Y \rightarrow Z$ deux applications pointées. Montrer qu'il existe une unique application pointée $f \vee g : X \vee Y \rightarrow Z$ qui fait commuter le diagramme



où $i : X \hookrightarrow X \vee Y$ et $j : Y \hookrightarrow X \vee Y$ sont les inclusions canoniques.

4. Soit X, Z des espaces topologiques et $\phi : S^{n-1} \rightarrow X$, $f : X \rightarrow Z$, $g : D^n \rightarrow Z$ des applications continues. Montrer qu'il existe une unique application $f \cup_\phi g : X \cup_\phi D^n \rightarrow Z$ qui fait commuter le diagramme



où $i : X \hookrightarrow X \cup_\phi D^n$ et $j : D^n \hookrightarrow X \cup_\phi D^n$ sont les inclusions canoniques.

Exercice 6. La bouteille de Klein. Le but est de montrer que la somme connexe $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ est homéomorphe à la bouteille de Klein K . Des dessins clairs et des explications concernant les opérations de découpage et d'identification sont demandées (une paramétrisation explicite n'est pas nécessaire, mais les dessins ne suffisent pas). Notre définition de K est le quotient du carré par la relation d'équivalence indiquée par le mot $abab^{-1}$, autrement dit on identifie les côtés opposés horizontaux a et a' par $(s, 0) \sim (1 - s, 1)$ et les verticaux b et b' par $(0, t) \sim (1, t)$.

1. Montrer que le mot x^2y^2 définit un espace homéomorphe à K . On pourra voir le carré comme quotient d'une réunion disjointe de deux triangles isocèles rectangles.
2. Montrer que la somme connexe de deux plans projectifs réels est homéomorphe à une bouteille de Klein.

L'exercice 6 est à rendre le mercredi 6 avril. C'est le deuxième exercice obligatoire pour note. L'exercice à rendre en 2021 était l'Exercice 2.