

Analyse I

David Wiedemann

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	Buts du Cours	4
2	Definir \mathbb{R}	5
2.1	Exemple d'utilisation	7
3	Suites et limites	12
3.1	Convergence	12
4	Limsup et liminf	17
4.1	Suites de Cauchy	21
5	Series	22
5.0.1	Un calcul naif (avec la série harmonique alternée)	28
6	Fonctions	34

List of Theorems

1	Theorème (env. -400)	4
2	Lemme (Lemme)	4
3	Axiom (Nombres Reels)	5
4	Lemme (Theorem name)	6
5	Proposition (Annulation de l'element neutre)	6
6	Corollaire (x fois moins 1 egale -x)	6
7	Axiom (Nombres Reels II)	7
1	Definition (valeur absolue)	7
8	Proposition (Inegalite du triangle)	7
2	Definition (Bornes)	8
9	Axiom (Axiome de completude)	8
3	Definition (Supremum)	8
14	Proposition	9

15	Corollaire (Propriete archimediennne)	9
16	Theoreme (La racine de deux existe)	9
18	Proposition (\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R})	10
19	Lemme	10
20	Proposition (Densite des irrationnels)	11
4	Definition (Suite)	12
5	Definition (Convergence de suites)	12
23	Lemme (Unicite de la limite)	12
6	Definition	13
25	Lemme	13
27	Proposition	13
28	Lemme	14
30	Proposition (Inversion d'une limite)	15
31	Corollaire	15
32	Lemme	15
34	Proposition	16
35	Proposition	16
37	Lemme (Deux gendarmes)	17
7	Definition (Limsup et liminf)	17
38	Theoreme	18
39	Theoreme (Premiere regle de d'Alembert)	18
8	Definition (Sous-suite)	19
44	Proposition	20
45	Theoreme (Bolzano-Weierstrass)	20
9	Definition (Point d'accumulation)	20
10	Definition (Suites de Cauchy)	21
48	Lemme	21
49	Theoreme (Convergence des suites de Cauchy)	21
50	Lemme	21
11	Definition (Serie)	22
53	Corollaire	23
54	Corollaire	23
55	Corollaire	23
56	Corollaire (Critere de Cauchy pour les series)	24
58	Proposition	24
59	Proposition (Serie Geometrique)	25
60	Proposition (Serie Harmonique)	25
61	Proposition (Critere de Comparaison)	26
63	Corollaire	26
12	Definition (Series Alternées)	27
64	Theoreme	27

13	Definition	28
68	Lemme	29
69	Theorème	29
71	Theorème	30
72	Theorème (Critere de d'Alembert 2)	30
78	Proposition	32
79	Theorème (Critere de la racine)	32
83	Lemme	33

1 Introduction

1.1 Buts du Cours

Officiel :

Suites, series, fonctions, derivees, integrales , ...

Secrets :

Apprendre le raisonnement rigoureux

Creativite

Esprit Critique

Ne croyez rien tant que c'est pas prouve

On construit sur ce qu'on a fait, on recommence pas toujours a 0, par rapport a d'autres domaines(lettres par exemple)

Theorème 1 (env. -400)

Il n'existe aucun nombre (fraction) x tel que $x^2 = 2$.

Ca contredit pythagore mn?

On va demontrer le theoreme.¹

Lemme 2 (Lemme)

Soit $n \in \mathbb{N}$ Alors n pair $\iff n^2$ pair.

Preuve

\Rightarrow Si n pair $\Rightarrow n^2$ pair.

Hyp. $n = 2m (m \in \mathbb{N})$

Donc $n^2 = 4m^2$, pair.

Par l'absurde, n impair. $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$.

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

impair. Donc si n est impair, alors n^2 est forcément impair. Absurde. \square

Preuve

Supposons par l'absurde $\exists x$ t.q. $x^2 = 2$ et $x = \frac{a}{b} (a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$.

On peut supposer a et b non tous pairs.(sinon reduire).

$$x^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$$

1. On demontre d'abord un lemme

pair.

Lemme : a pair, i.e. $a = 2n (n \in \mathbb{N})$.

$$a^2 = 4n^2 = 2b^2 \Rightarrow 2n^2 = b^2, \text{ i.e. } b^2 \text{ pair.}$$

Lemme : b pair.

Donc a et b sont les deux pairs, on a une contradiction.

⚡

□

En conclusion, le theoreme est bel et bien vrai, et contredit donc pythagore. Donc les fractions (\mathbb{Q}) ne suffisent pas a decire/mesurer les longueurs geometriques. Il faut les nombres reels, on les comprends seulement vraiment depuis 2 siecles.

C'est important de chercher ce genre d'erreurs.

Prochain but : definir les nombres reels (\mathbb{R}). L'interaction entre les fractions et les nombres reels.

2 Definir \mathbb{R}

On commence avec la definition axiomatique des nombres reels.

Axiom 3 (Nombres Reels)

\mathbb{R} est un corps, en d'autres termes :

Ils sont munis de deux operations : plus et fois.

— Associativite $x + (y + z) = (x + y) + z (x, y, z \in \mathbb{R})$ ²

— Commutativite $x + y = y + x$.

— Il existe un element neutre 0 t.q. $0 + x = x, x \in \mathbb{R}$.³

— Distributivite $x(yz) = (xy)z$

— Il existe un element inverse, unique $-x \in \mathbb{R}$ t.q. $x + (-x) = 0$

Remarque : Il existe beaucoup d'autres corps que \mathbb{R} , par exemple $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \{0, 1, 2\} \mod 3$

Attention : $\{0, 1, 2, 3\} \mod 4$ n'est pas un corps !

Presque tous marchent, ils satisfont 8 des 9 axiomes.

2. L'associativite n'est pas forcément vraie(octonions)

3. Il y a aucune difference entre les regles pour l'addition que pour la multiplication.

Lemme 4 (Theorem name) $\forall x \exists ! y \text{ t.q. } x + y = 0.$ **Preuve***Supposons $x + y = 0 = x + y'$* *A voir : $y = y'$.*

$$\begin{aligned}
y &= y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' \\
&= (x + y) + y' = 0 + y' = y'
\end{aligned}$$

CQFD.

□

Exercice

Démontrer que 0 est unique.

Proposition 5 (Annulation de l'élément neutre) $0 \cdot x = 0$ **Preuve**

$$x = x \cdot 1 = x(1 + 0) = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$$

$$0 = x + (-x) = x + (-x) + x \cdot 0$$

□

$$\Rightarrow 0 = x \cdot 0$$

4

Corollaire 6 (x fois moins 1 égale -x)

$$x + x \cdot (-1) = 0$$

Preuve*A voir : $x \cdot (-1)$ satisfait les propriétés de $-x$.**Or*

$$x + x(-1) = x(1 - 1) = x \cdot 0 = 0.$$

□

ExerciceMontrer que $\forall x : -(-x) = x$ et que ceci implique $(-a)(-b) = ab$.Rien de tout ça n'a quelque chose à voir avec \mathbb{R} .

Il nous faut plus d'axiomes!!

$$4. \ a - b = a + (-b)$$

Axiom 7 (Nombres Reels II)

\mathbb{R} est un corps ordonne. Ce qui revient a dire que les assertions suivantes sont verifiees.

- $x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$
- $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$
- pour tout couple de nombres reels x et y : ou bien $x \leq y$ ou bien $x \geq y$.

Exemple de corps ordonnes :

- (1) \mathbb{R} , (2) \mathbb{Q} , (3) $\{0, 1, 2\} \pmod{3}$ n'est pas un corps ordonne.

Exercice

$$x \leq y \iff -x \geq -y \quad \text{Exercice}$$

$$x \leq y \text{ et } z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$$

$$x \leq y \text{ et } z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz.$$

Il nous manque encore un axiome, et c'est le dernier : pour mercredi !

Lecture 2: Cours Mercredi

Wed 16 Sep

2.1 Exemple d'utilisation

Definition 1 (valeur absolue)

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposition 8 (Inegalite du triangle)

Elle dit que

$$\forall x, y : |x + y| \leq |x| + |y|$$

Preuve

Cas $x, y \geq 0$: alors $x + y \geq 0$

$$\iff x + y \leq x + y$$

Ce qui est toujours vrai.

Cas $x \geq 0$ et $y < 0$.

Si $x + y \geq 0$, alors

$$\iff |x + y| \leq x - y$$

$$\iff x + y \leq x - y$$

$$y \leq -y$$

c'est vrai car $y < 0$.

Si $x + y < 0$, alors

$$\Longleftrightarrow -x - y \leq x - y$$

□

Donc $-x \leq x$ vrai car $x \geq 0$.

Definition 2 (Bornes)

Terminologie : Soit $A \subseteq E$, E corps ordonne.

— *Une borne superieure (majorant) pour A et un nombre b tq*

$$a \leq b \forall a \in A.$$

— *Une borne inferieure (minorant) pour A et un nombre b tq*

$$a \geq b \forall a \in A.$$

On dira que l'ensemble A est borne si il admet une borne.

Axiom 9 (Axiome de completude)

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \neq \emptyset$$

et majoree $\exists s \in \mathbb{R}$ t.q

1. *s est un majorant pour A .*

2. *\forall majorant b de A , $b \geq s$.*

Cet axiome finis la partie axiomatique du cours.

Remarque

1. *$\forall s' < s \exists a \in A : a > s'$.*

2. *s est unique.*

Definition 3 (Supremum)

Ce s s'appelle le supremum de A , note $\sup(A)$.

Remarque

\exists (pour A minore et $\neq \emptyset$) une borne inferieure plus grande que toutes les autres, notee $\inf(A)$ (infimum).

$$\inf(A) = -\sup(-A)$$

Remarque

Si $\sup(A) \in A$, on l'appelle le maximum.

Remarque

Si $\inf(A) \in A$, on l'appelle le minimum.

Proposition 14

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x.$$
Preuve

Par l'absurde,

Alors

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : n < x$$

$\Rightarrow \mathbb{N}$ borne et $\neq \emptyset \Rightarrow \exists s = \sup(\mathbb{N})$

$$s - \frac{1}{2} < s \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > s - \frac{1}{2}$$

$n + 1 \in \mathbb{N}$ et $n + 1 > s - \frac{1}{2} + 1 = s + \frac{1}{2}$

donc $n + 1 > s$ absurde. □

Corollaire 15 (Propriété archimédienne)

1. $\forall x \forall y > 0 \exists n \in \mathbb{N} : ny > x.$

2. $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon$

Preuve

Pour 2, appliquer la proposition à $x = \frac{1}{\epsilon} \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{1}{\epsilon}$

Alors

$$\Rightarrow \epsilon > \frac{1}{n}$$

Pour montrer le 1.

Considérer $\frac{x}{y}$ □

On peut maintenant montrer que la racine de deux existe.

Théorème 16 (La racine de deux existe)

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

Preuve

$$A := \{y | y^2 < 2\}$$

Clairément $A \neq \emptyset$ car $1 \in A$. De plus, A est majorée : 2 est une borne. (si $y > 2, y^2 > 4 > 2 \Rightarrow y \notin A$).

Donc $\exists x = \sup(A)$

Supposons (par l'absurde) que $x^2 < 2$

Soit $0 < \epsilon < 1, \frac{2-x^2}{4x}$.

Clairement, par hypothese $2 - x^2 > 0$ et idem pour $4x$ car $x \geq 1$. Soit $y = x + \epsilon$, alors

$$y^2 = x^2 + 2\epsilon x + \epsilon^2 < x^2 + \frac{2 - x^2}{2} + \frac{2 - x^2}{2} = 2$$

$\Rightarrow y \in A$ Mais $y = x + \epsilon > x$. Absurde car $x = \sup(A)$. Donc $x^2 \geq 2$.

Deuxiemement, supposons (absurde) $x^2 > 2$.

Soit $0 < \epsilon < \frac{x^2 - 2}{2x} > 0$.

Posons $b = x - \epsilon$.

$$\begin{aligned} b < x &\Rightarrow \exists y \in A : y > b \\ \Rightarrow y^2 > b^2 &= x^2 - 2\epsilon x + \epsilon^2 > x^2 - \underbrace{2\epsilon x}_{< x^2 - 2} \\ &> x^2 - (x^2 - 2) = 2. \end{aligned}$$

Conclusion : $y^2 > 2$ contredit $y \in a$.

Donc $x^2 = 2$. □

Remarque

Preuve similaire :

$$\forall y > 0 \exists! x > 0 : x^2 = y$$

Proposition 18 (\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R})

$$\forall x < y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y$$

Lemme 19

$$\forall x \exists n \in \mathbb{Z} : |n - x| \leq \frac{1}{2}$$

Ou encore :

$$\forall x \exists [x] \in \mathbb{Z} \text{ tq}$$

$$\begin{cases} [x] \leq x \\ [x] + 1 > x \end{cases}$$

Preuve

$$\exists n \in \mathbb{Z} : n > x (\text{Archimede}).$$

Soit $[x] = \inf\{n \in \mathbb{Z} : n > x\} - 1$ □

Preuve (Preuve de la densité)

Archimede : $\exists q \in \mathbb{N} : q > \frac{1}{y-x}$.

Donc

$$\begin{aligned}
& qy - qx > 1. \\
\Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : qx < p < qy
\end{aligned}$$

par exemple :

$$p = [qy]$$

si $qy \notin \mathbb{Z}$ ou bien

$$p = qy - 1$$

si $qy \in \mathbb{Z}$

□

Lecture 3: Suites

Wed 23 Sep

0,999

0,9

0.99

0.999

0.9999

⋮

Proposition 20 (Densité des irrationnels)

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, les irrationnels sont dense dans \mathbb{R} .

Preuve

Soit $x < y$ (dans \mathbb{R}).

Cherche $z \notin \mathbb{Q}$ tq $x < z < y$.

$$\exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ tq } x < \frac{p}{q} < y$$

Propr. archimédienne $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} :$

$$\underbrace{\frac{p}{q} + \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{n}}_{:=z} < y$$

car

$$\exists n : \frac{1}{n} < \underbrace{y - \frac{1}{q}}_{>0} / \sqrt{2}$$

Il reste a voir que : $z = \frac{p}{q} + \sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$

$$\sqrt{2} = n(z - \frac{p}{q})$$

$$z \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \quad \text{⚡}$$

□

3 Suites et limites

Definition 4 (Suite)

Une suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ dans \mathbb{R} est une application (= fonction) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Remarque

Suite $(x_n) \neq$ ensemble $\{x_n\}$ Il arrive qu'on indice x_n par une partie de \mathbb{N} . Mais suite = suite infinie

Exemple

$$x_n = \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$$

$$x_n = (-1)^n; x_n = n!; F_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$$

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415$$

3.1 Convergence

Definition 5 (Convergence de suites)

L'expression $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ signifie :

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$$

On dit alors que (x_n) converge (vers l). Sinon, (x_n) diverge.

Lemme 23 (Unicité de la limite)

Si (x_n) converge, il existe une unique $l \in \mathbb{R}$ tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$

Preuve

Supposons l, l' limites. Si $l \neq l'$, alors $|l - l'| > 0$ Donc $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \frac{|l - l'|}{2}$

De meme $\exists n_1 \forall n > n_1 : |x_n - l'| < \frac{|l - l'|}{2}$

Soit $n > n_0, n_1$ Alors :

$$|l - l'| = |l - x_n + x_n - l'| \leq \underbrace{|l - x_n|}_{< |l - l'|/2} + \underbrace{|x_n - l'|}_{|x_n - l'|}$$

Donc

$$|l - l'| < 2 \cdot \frac{|l - l'|}{2}$$

⚡

□

Exemple

1. Si (x_n) est constante ($\exists a \forall n : x_n = a$) alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ (Archimede)

Definition 6

Terminologie :

(x_n) est bornée, majorée, minorée, rationnelle, ... etc si l'ensemble $\{x_n\}$ l'est.

La suite (x_n) est croissante si $x_n \leq x_{n+1} \forall n$ Idem décroissante Dans les deux cas, on dit que la suite (x_n) est monotone

Lemme 25

Toute suite convergente est bornée.

Preuve

Posons $\epsilon = 7$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |x_n - l| < 7 \quad \square$$

Soit $B_1 \geq |x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|$

Posons $B = \max(B_1, |l| + 7)$ Alors $|x_n| \leq B \forall n$.

Attention la reciproque n'est pas vraie!!

Exemple

$x_n = (-1)^n$ definit une suite bornée non convergente.

Preuve

Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = l$.

Posons $\epsilon = \frac{1}{10}$ alors $\exists n_0 \forall n > n_0 : |(-1)^n - l| < \frac{1}{10}$

$n > n_0$ pair $\Rightarrow |1 - l| < \frac{1}{10}$

$n > n_0$ impair $\Rightarrow |-1 - l| < \frac{1}{10}$

ceci implique

$$\Rightarrow |1 - (-1)| \leq |1 - l| + |-1 - l| < \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \quad \square$$

Proposition 27

Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x'_n = l'$

Alors 1. : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + x'_n) = l + l'$, et 2. : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot x'_n = l \cdot l'$

Preuve

1 :

Soit $\epsilon > 0$ Cherche n_0 tq $\forall n > n_0 : |x_n + x'_n - (l + l')| < \epsilon$.

Appliquons les deux hypothèses à $\frac{\epsilon}{2} : \exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ et $\frac{\epsilon}{2} : \exists N' \forall n > N' : |x'_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$. Posons $n_0 = \max(N, N')$. Si $n > n_0$, alors

$$|x_n + x'_n - (l + l')| \leq |x_n - l| + |x'_n - l'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

2 :

Par le lemme, $\exists B$ tq. $|x_n|, |x'_n| < B \forall n$.

Soit $\epsilon > 0$. Appliquons les hypothèses à $\frac{\epsilon}{2B}$.

$$\exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2B}$$

Si $n > n_0 := \max(N, N')$:

$$\begin{aligned} |x_n x'_n - ll'| &\leq |x_n x'_n - x_n l'| + |x_n l' - ll'| \\ &= \underbrace{|x_n|}_{< B} \cdot \underbrace{|x'_n - l'|}_{< \frac{\epsilon}{2B}} + \underbrace{|l'|}_{< B} \cdot \underbrace{|x_n - l|}_{< \frac{\epsilon}{2B}} < \epsilon \end{aligned} \quad \square$$

Lemme 28

On a utilisé : lemme Si $x_n \leq B \forall n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ alors $l \leq B$

Preuve

Par l'absurde :

Si $l > B$, posons $\epsilon = l - B > 0$

$\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$

en particulier $x_n > l - \epsilon = B \nexists$ \square

Lecture 4: lundi

Mon 28 Sep

Remarque

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = |\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n|$, ce qui est sous-entendu ici est que la limite existe.
- $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergence et limite sont inchangées si on modifie un nombre fini de termes.
En particulier $(x_n)_{n=17}^{\infty}$, rien ne change.
- $x_n \rightarrow l$ ($n \rightarrow \infty$), équivalent à $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$
- On dit que (x_n) converge vers $+\infty$ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, si (x_n) diverge de la façon suivante :

$$\forall R \in \mathbb{R}, \exists n_0 \forall n > n_0 : x_n > R$$

La définition est la même si x_n converge vers $-\infty$

Proposition 30 (Inversion d'une limite)

Supposons que (x_n) converge vers $l \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{l}$

Corollaire 31

Si (x_n) converge vers l et

Si (y_n) converge vers $m \neq 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{l}{m}$$

Car $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$

Lemme 32

Sous les hypotheses de la proposition,

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n \neq 0$$

Preuve

Appliquons la convergence à $\epsilon = \frac{|l|}{2}$ (car $l \neq 0$)

$$|x_n - l| < \epsilon \Rightarrow x_n \neq 0$$

□

Preuve

Preuve de la proposition

Soit $\epsilon > 0$.

On veut estimer

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{l} \right| = \underbrace{\frac{|l - x_n|}{|x_n - l|}}_{\geq \frac{|l|}{2} |l|} < ? \epsilon$$

pour n comme dans le lemme. On veut donc

$$|l - x_n| < \epsilon \frac{|l|^2}{2}$$

Donc $\exists n_1 \forall n \geq n_1$, on a bien $|l - x_n| < \epsilon$

□

Exemple

On peut à présent calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_d n^d}{b_0 + \dots + b_f n^f}$$

$$a_d \neq 0, b_f \neq 0$$

Si $d > f$ alors $\lim = \pm \infty$

Si $d < f$ alors $\lim = 0$

Si $d = f$, alors $\lim = \frac{a_d}{b_f}$

Justification

La suite peut s'écrire

$$\frac{a_d + a^{d-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^{d-1}}}{b_0 \frac{1}{n^d + \dots + b_f n^{f-d}}}$$

Si $f = d$, $\rightarrow \frac{a_d}{b_f}$

Si $f > d$, $\rightarrow 0$

Si $f < d$, $\rightarrow \pm\infty$, selon signe de $\frac{a_d}{b_f}$

Proposition 34

Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $|a| < 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$$

Proposition 35

Si (x_n) est monotone et bornée, alors elle converge.

Preuve

Soit (x_n) croissante. Affirmation, $x_n \rightarrow s := \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Soit $\epsilon > 0$, $\exists n : x_n > s - \epsilon$ (def. de sup)

$\forall n \geq n_0 : s - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq s \Rightarrow |x_n - s| < \epsilon$

Idem, si elle était décroissante. □

Preuve

Remarque : $(x_n) \rightarrow 0 \iff (|x_n| \rightarrow 0)$.

$$\dots |x_n - 0| < \epsilon$$

Donc on va traiter le cas $a > 0$, alors $(a^n)_{n=1}^\infty$ est décroissante.

Bornée (par zéro et 1) \Rightarrow elle admet une limite l .

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{n+1}}_{a \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n}$ Donc $l = al$. Si $l \neq 0$, $1 = a$ absurde, donc l

nul. □

Exemple

Def (x_n) en posant $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$

Observons que $x_n \geq 2 > 0 \forall n$

Si (x_n) converge, alors

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x_n}\right) = 2 + \frac{1}{l}$$

Donc

$$l^2 - 2l - 1 = 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{1+1} = l$$

Or $l \geq 2 \Rightarrow l = 1 + \sqrt{2}$ si l existe.

A present, estimons $|x_n - l|$:

$$\begin{aligned} \left| x_n - 1 - \sqrt{2} \right| &= \left| 2 + \frac{1}{x_{n-1}} = \left(2 + \frac{1}{l} \right) \right| = \frac{|l - x_{n-1}|}{x_{n-1}l} \leq \frac{|x_{n-1} - l|}{4} \\ &\leq \dots \leq \frac{|x_{n-2} - l|}{4^2} \leq \frac{|2 - l|}{4^n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

car $\frac{1}{4^n} \rightarrow 0$

Lemme 37 (Deux gendarmes)

Soit $(x_n), (y_n), (z_n)$ trois suites avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$$

si $x_n \leq y_n \leq z_n \forall n$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = l$$

Preuve

repose sur le fait que

$$|x_n - l|, |z_n - l| < \epsilon \Rightarrow l - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \epsilon$$

montre $|y_n - l| < \epsilon$

□

4 Limsup et liminf

Definition 7 (Limsup et liminf)

Soit (x_n) une suite quelconque.

On definit la limite superieure par :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf_n \sup \{x_k, k \geq n\}$$

Attention : Ici on convient que

$$\sup(A) = +\infty$$

si A non majore

$$\inf(A) = -\infty$$

si A non minore

On definit la limite superieure par :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup_n \inf \{x_k, k \geq n\}$$

Notez : $z_n := \sup \{x_k : k \geq n\}$

Cela definit une suite decroissante et donc (z_n) converge vers son inf.

Conclusion : $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} x_k$

Lecture 5: mercredi 30

Wed 30 Sep

Theorème 38

(x_n) converge $\iff \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ Dans ce cas, la limite prend cette meme valeur.

Preuve

$\Leftarrow :$

Soit $z_n = \sup \{x_p : p \geq n\}$,

$$y_n = \inf \{x_p : p \geq n\}$$

Rappel : $(z_n) \rightarrow LS$ et $(y_n) \rightarrow LI$

Or, $y_n \leq x_n \leq z_n$. Donc par les 2 gendarmes

$$\Rightarrow (x_n) \rightarrow LS = LI$$

$\Rightarrow :$

Hypothese : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$.

A voir : $LS = LI = l$.

Montrons par exemple que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = l$$

(i.e. $LS = l$)

Soit $\epsilon > 0$.

$$\exists N \forall n \geq N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{et } \forall n \geq N : |z_n - LS| < \frac{\epsilon}{4}$$

Def. de $z_N \Rightarrow \exists p \geq N : |x_p| > z_N - \frac{\epsilon}{4}$

A present

$$|LS - l| \leq \underbrace{|LS - z_N|}_{< \frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|z_n - x_p|}_{< \frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|x_p - l|}_{< \frac{\epsilon}{2}}$$

avec $p \geq N$ et $N \geq N$ Donc $\forall \epsilon > 0 :$

$$|LS - l| < \epsilon$$

Donc $LS = l$

□

Theorème 39 (Premiere regle de d'Alembert)

Supposons $x_n \neq 0 \forall n$

Supposons que $\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|$ existe

Si $\rho < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

Si $\rho > 1$, alors (x_n) diverge.

Remarque

Si $\rho = 1$, on ne peut rien conclure

Exemple

- $x_n = n$ diverge, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$
- $x_n = \frac{1}{n}$ converge mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$

Preuve

Supposons $\rho < 1$.

A voir : $x_n \rightarrow 0$.

Soit $\rho < r < 1$. Convergence pour $\epsilon = r - \rho : \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - \rho \right| < r - \rho$

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < r$$

i.e. $|x_{n+1}| < r |x_n|$ de meme $|x_{n+2}| < r |x_{n+1}| < r^2 |x_n|$

Conclusion $\forall m \geq n_0 : |x_m| < r^{m-n_0} |x_{n_0}|$

Donc

$$\forall m \geq n_0 : |x_m| < r^m |x_{n_0}| r^{-n_0}$$

On sait que $\lim_{m \rightarrow +\infty} r^m = 0$ donc

$$0 \leq |x_m| \leq r^m c$$

avec c constante Cas $\rho > 1$.

On va montrer que $|x_n|$ est non bornée.

Soit $1 < r < \rho$.

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |x_{n+1}/x_n| > r$$

Donc

$$|x_{n+1}| > r |x_n|$$

comme avant :

$$x_m > r^{m-n_0} |x_{n_0}|$$

□

Remarque

Si $r > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = +\infty$ r^n est croissante donc il suffit de montrer que la suite est non bornée.

Si elle était bornée, soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} r^n \in \mathbb{R}$

Mais $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n+1} = rl$

Donc $l \neq 0 \Rightarrow 1 = r$ absurde.

Définition 8 (Sous-suite)

Soit $(x_n)_{n=1}^\infty$ une suite.

Une sous-suite de (x_n) est une suite de la forme $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$, ou $(n_k)_{k=1}^\infty$ est une suite strictement croissante de \mathbb{N} .

Exemple

Si (x_n) est une suite, considerer :

$$x_2, x_3, x_5, x_7, x_{11}, x_{13}, \dots$$

Ici, $n_k = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$

Proposition 44

Si x_n converge, alors toute sous-suite converge vers la meme limite.

Preuve

Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Soit $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ une sous-suite et $\epsilon > 0$.

A voir : $\exists k_0 \forall k > k_0 : |x_{n_k} - l| < \epsilon$

Or $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$.

Donc il suffit de choisir k_0 tq $n_{k_0} \geq n_0$.

(puisque la suite (n_k) est croissante.) □

Theorème 45 (Bolzano-Weierstrass)

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente

Preuve

On va construire une sous-suite qui converge vers $s := \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$

Ici, (x_n) est la suite en question et on pose

$$z_n = \sup \{x_p : p \geq n\}$$

Par recurrence, n_1 quelconque.

Supposons n_{k-1} construit et construisons n_k :

$$\exists N \forall n \geq N : |z_n - s| < \frac{1}{k}$$

Choisissons un $n \geq N, n_{k-1} + 1$

$$\exists p \geq n \text{ t.q. } x_p > z_n - \frac{1}{k}$$

On definit $n_k = p$ ($n_k > n_{k-1}$)

$$\text{Or, } \underbrace{|x_{n_k} - s|}_{< \frac{1}{k}} \leq \underbrace{|x_{n_k} - z_n|}_{< \frac{1}{k}} + \underbrace{|z_n - s|}_{< \frac{1}{k}}$$

Donc $(x_{n_k}) \rightarrow s (k \rightarrow \infty)$ □

Definition 9 (Point d'accumulation)

x est un point d'accumulation de la suite x_n s'il existe une sous-suite qui converge vers x .

Exemple

$$x = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$x = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

4.1 Suites de Cauchy

Definition 10 (Suites de Cauchy)

La suite (x_n) est dite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < \epsilon$$

Attention :

Il ne suffit pas de comparer x_n et x_{n+k} pour k fixe.

Exemple

$$x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\text{Cauchy} \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall k \in \mathbb{N} : |x_n - x_{n+k}| < \epsilon$$

Lemme 48

Si (x_n) converge, elle est de Cauchy.

Preuve

Soit $\epsilon > 0$, soit l la limite.

Hypothèse :

$$\text{avec } \frac{\epsilon}{2} : \exists N \forall n \geq N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

Si $n, n' \geq N$

$$|x_n - x_{n'}| \leq |x_n - l| + |x_{n'} - l| < \epsilon \quad \square$$

Theorème 49 (Convergence des suites de Cauchy)

Toute suite de Cauchy converge

Preuve

Soit (x_n) de Cauchy.

Lemme 50

(x_n) est bornée.

Preuve

Soit $\epsilon = 10$

$$\forall N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < 10$$

Donc $|(x_n)|$ est bornée par

$$\max(|x_N| + 10, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|) \quad \square$$

Appliquer Bolzano-Weierstrass

\exists sous-suite (x_{n_k})

qui converge, soit l sa limite. A voir (x_n) converge vers l .
 soit $\epsilon > 0 \exists k_0 \forall k \geq k_0 |x_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2}$

$$\exists N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < \frac{\epsilon}{2}$$

Si $n \geq N, n_{k_0}$ alors

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < \epsilon \quad \square$$

Lecture 6: lundi

Mon 05 Oct

Remarque

Ecriture decimale : 3.1415... ou encore 0.333... veut dire

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \dots$$

une somme infinie de fractions. La difference entre le n ieme terme et le n' ieme terme :

$$\leq 10^{-n} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Cauchy}$$

Cette limite est une "somme infinie".

5 Series

But : definir les "sommes infinies" .

$$\rightarrow \begin{cases} \text{Existe ?} \\ \text{Valeur ?} \end{cases}$$

Exemple

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$$

ou encore

$$\exp(x) = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \dots$$

ou

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Definition 11 (Serie)

Le symbole $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ représente

$x_0 + x_1 + x_2 + \dots$ et est défini par

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x_k$$

On appelle

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

une série et on dit qu'elle converge/diverge lorsque la suite $s_n := x_0 + \dots + x_n$ le fait.

Corollaire 53

Si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ existent, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

Preuve

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n, s_n = \sum_{k=0}^n x_k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n, t_n = \sum_{k=0}^n y_k$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n, \text{ où } u_n = (x_0 + y_0) + \dots + (x_n + y_n) = s_n + t_n$$

Donc la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n + t_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

□

Corollaire 54

Pour $a \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} ax_n = a \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

existe.

Sans preuve.

Corollaire 55

$$\sum_{n=n_0}^{if y} x_n \text{ existe si } \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

existe et vaut

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n - (x_0 + x_1 + \dots + x_{n_0-1})$$

n

Corollaire 56 (Critere de Cauchy pour les séries)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ converge} \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : \left| \sum_{p=N}^n x_p \right| < \epsilon$$

(Dans ce cas, $|\sum_{n=N}^{\infty} x_n| \leq \epsilon$)

Preuve

Appliquer Cauchy à la suite s_n :

$$\exists n_0 \forall n, n' > n_0 : |s_n - s_{n'}| < \epsilon$$

Alors

$$\left| \sum_{p=n'+1}^n x_p \right| < \epsilon$$

Exemple

Ecriture decimale,

Proposition 58

Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

Preuve

Appliquer Cauchy à $\left| \underbrace{s_n - s_{n-1}}_{=x_n} \right|$

Attention, la réciproque est FAUSSE.

□

2 Exemples

Proposition 59 (Serie Geometrique)

Soit $r \in \mathbb{R}$ avec $|r| < 1$, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Preuve

Soit

$$s_n = r^0 + r^1 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n+1} = 0$$

□

Donc $s_n \rightarrow \frac{1}{1-r}$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1$$

Proposition 60 (Série Harmonique)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge (vers } +\infty)$$

Preuve

Considérons

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{2^{n+1} - 2^n = 2^n \text{ termes.}} + \dots$$

Tous ces termes sont $\geq \frac{1}{2^{n+1}}$

Cette somme est :

$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} \geq 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

□

Contredit Cauchy pour $\epsilon = \frac{1}{2}$.

Astuce utile :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1$$

Preuve

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \quad \square$$

Donc ca converge.

C'est une série télescopique

Proposition 61 (Critère de Comparaison)

Supposons $0 \leq x_n \leq y_n$.

Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ converge, alors } \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ aussi .}$$

Preuve

$$s_n = x_0 + \dots + x_n$$

est croissante. Donc converge $\iff (s_n)$ bornée.

Mais $y_0 + \dots + y_n$ converge \Rightarrow bornée et $s_n \leq y_0 + \dots + y_n \Rightarrow (s_n)$ bornée \square

Remarque

De plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

Si, par contre,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ diverge}$$

Corollaire 63

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge.

Preuve

$$\forall n \geq 2 : \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Or

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \text{ converge.}$$

Donc, par comparaison, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge .}$$

\square

Lecture 7: mercredi

Wed 07 Oct

Definition 12 (Séries Alternées)

(x_n) est alternée si $x_n \cdot x_{n+1} \leq 0 \forall n$

Theorème 64

Soit (x_n) alternée, $|x_n|$ décroissante, et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ converge.}$$

Exemple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge. (série harmonique alternée)⁵

Preuve

On utilise cauchy.

Soit $n, m \in \mathbb{N}$.

$$\underbrace{x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m-1} + x_{n+m}}_{\geq 0}$$

Cas $x_n \geq 0$:

Cas où n pair

$$0 \leq \sum_{p=n}^{n+m} x_p \leq x_n$$

Si m impair :

idem

Que n soit pair ou impair

$$\left| \sum_{p=n}^{n+m} x_p \right| \leq |x_n|$$

Or, soit $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \Rightarrow$$

$$\exists N \forall n > N |x_n| \leq \epsilon.$$

Donc $\forall n > N, m|$

$$|x_n + \dots + x_{n+m}| < \epsilon$$

□

5. En fait la série converge vers $-\log 2$

5.0.1 Un calcul naïf (avec la série harmonique alternée)

Soit $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, existe par le théorème.

Note : $S < 0$.

$$s_n = \underbrace{-1 + \frac{1}{2}}_{=-\frac{1}{2}} - \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{<0} - \dots + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$s_n < -\frac{1}{n}, \forall n \text{ pair} \Rightarrow S \leq -\frac{1}{2}$$

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

à chaque terme x_n , on associe x_{2n}

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots \right) = \frac{1}{2} S \end{aligned}$$

Donc $S = \frac{1}{2}S \Rightarrow S = 0$ Faux !

Conclusion :

On ne peut pas permuter (en général) les termes d'une série convergente (somme infinie)

Definition 13

On dit que la somme de

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge absolument si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

converge.

Note : la valeur

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

ne nous intéresse pas

Remarque

Si $x_n \geq 0 \forall n$, aucune différence entre "convergence" et "convergence absolue".

Exemple

— La série harmonique alternée converge, mais pas absolument.

Lemme 68

Convergence absolue implique la convergence.

Preuve

$$\forall n : 0 \leq x_n + |x_n| \leq 2|x_n|$$

Donc convergence absolue \Rightarrow

$$\sum (x_n + |x_n|)$$

converge.

Or $-\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ converge .

Somme des deux sommes ci-dessus, implique que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

□

Theorème 69

Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge absolument, alors toute permutation converge vers la même somme.

Exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Clarification :

Soit σ une permutation de \mathbb{N} , i.e. bijection.

La nouvelle série sera

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ pour } y_n = x_{\sigma(n)}$$

Notons $s_n = x_0 + \dots + x_n$ et

$$t_n = y_0 + \dots + y_n = x_{\sigma(0)} + \dots + x_{\sigma(n)}$$

Le théorème dit : si $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ existe, alors $\lim s_n = \lim t_n$.

Preuve

1er cas "facile" .

Supposons $x_n \geq 0 \forall n$.

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sup \{s_n | n \in \mathbb{N}\}$

On va montrer que $\sup s_n \geq \sup t_n$ et que $\sup_n s_n \leq \sup_n t_n$

$$\underbrace{\quad}_=:s}^n \quad \underbrace{\quad}_=:t}^n$$

Pour $s \geq t$:

Soit $\epsilon > 0$. Or , par déf, $\exists n t_n > t - \epsilon$

ie

$$y_0 + \dots + y_n > t - \epsilon$$

ie

$$x_{\sigma(0)} + \dots + x_{\sigma(n)} > t - \epsilon$$

Soit $m = \max_{i=0,\dots,n} \sigma(i)$, alors

$$s_m \geq t - \epsilon$$

donc

$$s = \sup s_n > t - \epsilon$$

vrai $\forall \epsilon > 0 \Rightarrow s \geq t$

En considérant σ^{-1} , on obtien de même $t \geq s \Rightarrow s = t$, donc le théorème vrai

SI $x_n \geq 0$.

2ème cas : $x_n \leq 0 \forall n$, idem

Cas général :

Posons $x_n = x'_n + x''_n$, ou $x'_n = \max(x_n, 0)$ et $x''_n = \min(x_n, 0)$, alors

$$x_{\sigma(n)} = x'_{\sigma(n)} + x''_{\sigma(n)}$$

On conclut en appliquant le cas (1) a x'_n et (2) ou x''_n

□

Theorème 71

Supposons que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge, mais pas absolument.

$\forall l \in \mathbb{R} \exists$ permutation σ t.q.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = l.$$

Lecture 8: Series fin

Mon 12 Oct

Theorème 72 (Critere de d'Alembert 2)

Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \rho$ existe.

Si $\rho < 1$ alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

converge absolument.

Si $\rho > 1$, alors elle diverge.

Preuve

Si $\rho > 1$, x_n diverge donc ne converge pas vers 0, donc $\sum x_n$ diverge.

Supposons $\rho < 1$. $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{\rho+1}{2}$.

On déduit que

$$|x_n| \leq \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^{n-n_0} |x_{n_0}|$$

Donc

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|$$

peut être comparée à

$$|x_{n_0}| \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^{n-n_0}$$

Or la série ci-dessus est une série géométrique avec $\frac{\rho+1}{2} < 1$, donc elle converge.

Donc

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|$$

converge car la série géométrique converge, il suit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge absolument.

□

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument.

Preuve

$x_n = \frac{x^n}{n!}$, alors

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right| \rightarrow 0$$

□

Exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$x_n = \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Alors

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)}\right| \rightarrow 0$$

Remarque

Si $\rho = 1$ on ne peut rien conclure.

Exemple

$$\sum \frac{1}{n} \text{ diverge, or } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

Idem pour

$$\sum n$$

Exemple

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge, or

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

Proposition 78

On admet que

$$\forall x \geq 0 \exists ! x^{\frac{1}{n}} : (x^{\frac{1}{n}})^n = x$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

Preuve

Posons $\epsilon_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$, (a voir : $\epsilon_n \rightarrow 0$).

$$\begin{aligned} n &= ((1 + \epsilon_n)^{\frac{1}{n}})^n = 1 + n\epsilon_n + \frac{n(n-1)}{2} \epsilon_n^2 \underbrace{\dots}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} \epsilon_n^2 \\ \Rightarrow \epsilon_n &\leq \left(\frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad \square$$

Theorème 79 (Critere de la racine)

Soit $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} (|x_n|)^{\frac{1}{n}}$.

Si $L < 1$, alors $\sum x_n$ converge absolument

Si $L > 1$, alors $\sum x_n$ diverge.

Exemple

Soit

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Exemple

1.

$$\sum \frac{x_n}{n!}, \text{ alors } |x_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n!}^{\frac{1}{n}} \text{ donc } |x_n| \rightarrow 0 \text{ (exo)}$$

2.

$$\sum n \text{ diverge, } n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

3.

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge, or

$$\frac{1}{n^2}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} \rightarrow 1$$

Preuve

Si $L > 1$,

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \left\{ |x_k|^{\frac{1}{k}} : k \geq n \right\}$. Donc $\exists n_0 \forall n > n_0 : z_n > 1$, i.e.

$$\exists k \geq n : |x_k| > 1^k = 1$$

x_n ne converge pas vers zero \implies la série ne converge pas.

Si $L < 1$,

$\exists n_0 \forall n > n_0 : z_n < \frac{1+L}{2}$, or

$$|x_n| \leq z_n^n < \left(\frac{1+L}{2} \right)^n$$

On conclut par converge avec la série géométrique. □

Exemple

Posons $x_0 = 0$, et $x_{n+1} = \frac{1+nx_n}{2^{n+1}}$

Notons (exo par récurrence)

$$\forall n \leq 2^n$$

Donc

$$0 \leq x_n \leq 1$$

On a

$$x_n^{\frac{1}{n}} = \frac{(n+1)^{\frac{1}{n}}}{2 \cdot 2^{\frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Le critère s'applique : $L < 1$.

Lemme 83

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$$

Preuve

A voir : $(\sqrt[n]{n!})^2 \rightarrow +\infty$.

Or $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \geq \frac{n}{2}(\frac{n}{2} + 1) \cdot \dots \cdot n$

Si n pair.

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}(\frac{n}{2} + 1) \cdot \dots \cdot n \\ \geq (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Donc $\sqrt[n]{(n!)^2} \geq \sqrt[n]{(\frac{n}{2})^n} = \frac{n}{2} \rightarrow \infty$

□

6 Fonctions

En général, fonctions = applications = map.

En analyse I, fonction = fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} ou sur une partie $A \subseteq \mathbb{R}$.

En analyse II, on ira de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.