

Analyse I

David Wiedemann

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Buts du Cours	3
2	Definir \mathbb{R}	4
2.1	Exemple d'utilisation	6
3	Suites et limites	11
3.1	Convergence	11
4	Limsup et liminf	16

List of Theorems

1	Theorème (env. -400)	3
2	Lemme (Lemme)	3
	Preuve	3
	Preuve	3
3	Axiom (Nombres Reels)	4
4	Lemme (Theorem name)	5
	Preuve	5
5	Proposition (Annulation de l'element neutre)	5
	Preuve	5
6	Corollaire (x fois moins 1 egale -x)	5
	Preuve	5
7	Axiom (Nombres Reels II)	6
1	Definition (valeur absolue)	6
8	Proposition (Inegalite du triangle)	6
	Preuve	6
2	Definition (Bornes)	7
9	Axiom (Axiome de completude)	7
3	Definition (Supremum)	7
14	Proposition	8

	Preuve	8
15	Corollaire (Propriete archimediennne)	8
	Preuve	8
16	Theoreme (La racine de deux existe)	8
	Preuve	8
18	Proposition (\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R})	9
19	Lemme	9
	Preuve	9
	Preuve (Preuve de la densite)	10
20	Proposition (Densite des irrationnels)	10
	Preuve	10
4	Definition (Suite)	11
5	Definition (Convergence de suites)	11
23	Lemme (Unicite de la limite)	11
	Preuve	11
6	Definition	12
25	Lemme	12
	Preuve	12
	Preuve	12
27	Proposition	12
	Preuve	12
28	Lemme	13
	Preuve	13
30	Proposition (Inversion d'une limite)	14
31	Corollaire	14
32	Lemme	14
	Preuve	14
	Preuve	14
34	Proposition	15
35	Proposition	15
	Preuve	15
	Preuve	15
37	Lemme (Deux gendarmes)	16
	Preuve	16
7	Definition (Limsup et liminf)	16

1 Introduction

1.1 Buts du Cours

Officiel :

Suites, series, fonctions, derivees, integrales , ...

Secrets :

Apprendre le raisonnement rigoureux

Creativite

Esprit Critique

Ne croyez rien tant que c'est pas prouve

On construit sur ce qu'on a fait, on recommence pas toujours a 0, par rapport a d'autres domaines(lettres par exemple)

Theorème 1 (env. -400)

Il n'existe aucun nombre (fraction) x tel que $x^2 = 2$.

Ca contredit pythagore mn?

On va demontrer le theoreme.¹

Lemme 2 (Lemme)

Soit $n \in \mathbb{N}$ Alors n pair $\iff n^2$ pair.

Preuve

\Rightarrow Si n pair $\Rightarrow n^2$ pair.

Hyp. $n = 2m (m \in \mathbb{N})$

Donc $n^2 = 4m^2$, pair.

Par l'absurde, n impair. $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$.

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

impair. Donc si n est impair, alors n^2 est forcément impair. Absurde. \square

Preuve

Supposons par l'absurde $\exists x$ t.q. $x^2 = 2$ et $x = \frac{a}{b} (a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$.

On peut supposer a et b non tous pairs.(sinon reduire).

$$x^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$$

1. On demontre d'abord un lemme

pair.

Lemme : a pair, i.e. $a = 2n (n \in \mathbb{N})$.

$$a^2 = 4n^2 = 2b^2 \Rightarrow 2n^2 = b^2, \text{ i.e. } b^2 \text{ pair.}$$

Lemme : b pair.

Donc a et b sont les deux pairs, on a une contradiction.

⚡

□

En conclusion, le theoreme est bel et bien vrai, et contredit donc pythagore. Donc les fractions (\mathbb{Q}) ne suffisent pas a decire/mesurer les longueurs geometriques. Il faut les nombres reels, on les comprends seulement vraiment depuis 2 siecles.

C'est important de chercher ce genre d'erreurs.

Prochain but : definir les nombres reels (\mathbb{R}). L'interaction entre les fractions et les nombres reels.

2 Definir \mathbb{R}

On commence avec la definition axiomatique des nombres reels.

Axiom 3 (Nombres Reels)

\mathbb{R} est un corps, en d'autres termes :

Ils sont munis de deux operations : plus et fois.

— Associativite $x + (y + z) = (x + y) + z (x, y, z \in \mathbb{R})$ ²

— Commutativite $x + y = y + x$.

— Il existe un element neutre 0 t.q. $0 + x = x, x \in \mathbb{R}$.³

— Distributivite $x(yz) = (xy)z$

— Il existe un element inverse, unique $-x \in \mathbb{R}$ t.q. $x + (-x) = 0$

Remarque : Il existe beaucoup d'autres corps que \mathbb{R} , par exemple $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \{0, 1, 2\} \bmod 3$

Attention : $\{0, 1, 2, 3\} \bmod 4$ n'est pas un corps !

Presque tous marchent, ils satisfont 8 des 9 axiomes.

2. L'associativite n'est pas forcément vraie (octonions)

3. Il y a aucune difference entre les regles pour l'addition que pour la multiplication.

Lemme 4 (Theorem name) $\forall x \exists! y \text{ t.q. } x + y = 0.$ **Preuve***Supposons $x + y = 0 = x + y'$* *A voir : $y = y'$.*

$$\begin{aligned}
 y &= y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' \\
 &= (x + y) + y' = 0 + y' = y'
 \end{aligned}$$

CQFD.

□

Exercice

Démontrer que 0 est unique.

Proposition 5 (Annulation de l'élément neutre) $0 \cdot x = 0$ **Preuve**

$$x = x \cdot 1 = x(1 + 0) = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$$

$$0 = x + (-x) = x + (-x) + x \cdot 0$$

□

$$\Rightarrow 0 = x \cdot 0$$

4

Corollaire 6 (x fois moins 1 égale -x)

$$x + x \cdot (-1) = 0$$

Preuve*A voir : $x \cdot (-1)$ satisfait les propriétés de $-x$.**Or*

$$x + x(-1) = x(1 - 1) = x \cdot 0 = 0.$$

□

ExerciceMontrer que $\forall x : -(-x) = x$ et que ceci implique $(-a)(-b) = ab$.Rien de tout ça n'a quelque chose à voir avec \mathbb{R} .

Il nous faut plus d'axiomes!!

$$4. \ a - b = a + (-b)$$

Axiom 7 (Nombres Reels II)

\mathbb{R} est un corps ordonne. Ce qui revient a dire que les assertions suivantes sont verifiees.

- $x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$
- $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$
- pour tout couple de nombres reels x et y : ou bien $x \leq y$ ou bien $x \geq y$.

Exemple de corps ordonnes :

- (1) \mathbb{R} , (2) \mathbb{Q} , (3) $\{0, 1, 2\} \pmod 3$ n'est pas un corps ordonne.

Exercice

$$x \leq y \iff -x \geq -y \quad \text{Exercice}$$

$$x \leq y \text{ et } z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$$

$$x \leq y \text{ et } z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz.$$

Il nous manque encore un axiome, et c'est le dernier : pour mercredi !

Lecture 2: Cours Mercredi

Wed 16 Sep

2.1 Exemple d'utilisation

Definition 1 (valeur absolue)

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposition 8 (Inegalite du triangle)

Elle dit que

$$\forall x, y : |x + y| \leq |x| + |y|$$

Preuve

Cas $x, y \geq 0$: alors $x + y \geq 0$

$$\iff x + y \leq x + y$$

Ce qui est toujours vrai.

Cas $x \geq 0$ et $y < 0$.

Si $x + y \geq 0$, alors

$$\iff |x + y| \leq x - y$$

$$\iff x + y \leq x - y$$

$$y \leq -y$$

c'est vrai car $y < 0$.

Si $x + y < 0$, alors

$$\Longleftrightarrow -x - y \leq x - y$$

□

Donc $-x \leq x$ vrai car $x \geq 0$.

Definition 2 (Bornes)

Terminologie : Soit $A \subseteq E$, E corps ordonne.

— *Une borne superieure (majorant) pour A et un nombre b tq*

$$a \leq b \forall a \in A.$$

— *Une borne inferieure (minorant) pour A et un nombre b tq*

$$a \geq b \forall a \in A.$$

On dira que l'ensemble A est borne si il admet une borne.

Axiom 9 (Axiome de completude)

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \neq \emptyset$$

et majoree $\exists s \in \mathbb{R}$ t.q

1. *s est un majorant pour A .*

2. *\forall majorant b de A , $b \geq s$.*

Cet axiome finis la partie axiomatique du cours.

Remarque 10

1. *$\forall s' < s \exists a \in A : a > s'$.*

2. *s est unique.*

Definition 3 (Supremum)

Ce s s'appelle le supremum de A , note $\sup(A)$.

Remarque 11

\exists (pour A minore et $\neq \emptyset$) une borne inferieure plus grande que toutes les autres, notee $\inf(A)$ (infimum).

$$\inf(A) = -\sup(-A)$$

Remarque 12

Si $\sup(A) \in A$, on l'appelle le maximum.

Remarque 13

Si $\inf(A) \in A$, on l'appelle le minimum.

Proposition 14

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x.$$
Preuve

Par l'absurde,

Alors

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : n < x$$

$\Rightarrow \mathbb{N}$ borne et $\neq \emptyset \Rightarrow \exists s = \sup(\mathbb{N})$

$$s - \frac{1}{2} < s \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > s - \frac{1}{2}$$

$n + 1 \in \mathbb{N}$ et $n + 1 > s - \frac{1}{2} + 1 = s + \frac{1}{2}$

donc $n + 1 > s$ absurde. □

Corollaire 15 (Propriété archimédienne)

1. $\forall x \forall y > 0 \exists n \in \mathbb{N} : ny > x.$

2. $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon$

Preuve

Pour 2, appliquer la proposition à $x = \frac{1}{\epsilon} \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{1}{\epsilon}$

Alors

$$\Rightarrow \epsilon > \frac{1}{n}$$

Pour montrer le 1.

Considérer $\frac{x}{y}$ □

On peut maintenant montrer que la racine de deux existe.

Theorème 16 (La racine de deux existe)

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

Preuve

$$A := \{y | y^2 < 2\}$$

Clairement $A \neq \emptyset$ car $1 \in A$. De plus, A est majorée : 2 est une borne. (si $y > 2, y^2 > 4 > 2 \Rightarrow y \notin A$).

Donc $\exists x = \sup(A)$

Supposons (par l'absurde) que $x^2 < 2$

Soit $0 < \epsilon < 1, \frac{2-x^2}{4x}$.

Clairément, par hypothèse $2 - x^2 > 0$ et idem pour $4x$ car $x \geq 1$. Soit $y = x + \epsilon$, alors

$$y^2 = x^2 + 2\epsilon x + \epsilon^2 < x^2 + \frac{2 - x^2}{2} + \frac{2 - x^2}{2} = 2$$

$\Rightarrow y \in A$ Mais $y = x + \epsilon > x$. Absurde car $x = \sup(A)$. Donc $x^2 \geq 2$.

Deuxièmement, supposons (absurde) $x^2 > 2$.

Soit $0 < \epsilon < \frac{x^2 - 2}{2x} > 0$.

Posons $b = x - \epsilon$.

$$\begin{aligned} b < x &\Rightarrow \exists y \in A : y > b \\ \Rightarrow y^2 > b^2 &= x^2 - 2\epsilon x + \epsilon^2 > x^2 - \underbrace{2\epsilon x}_{< x^2 - 2} \\ &> x^2 - (x^2 - 2) = 2. \end{aligned}$$

Conclusion : $y^2 > 2$ contredit $y \in A$.

Donc $x^2 = 2$. □

Remarque 17

Preuve similaire :

$$\forall y > 0 \exists! x > 0 : x^2 = y$$

Proposition 18 (\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R})

$$\forall x < y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y$$

Lemme 19

$$\forall x \exists n \in \mathbb{Z} : |n - x| \leq \frac{1}{2}$$

Ou encore :

$$\forall x \exists [x] \in \mathbb{Z} \text{ tq}$$

$$\begin{cases} [x] \leq x \\ [x] + 1 > x \end{cases}$$

Preuve

$$\exists n \in \mathbb{Z} : n > x \text{ (Archimede).}$$

Soit $[x] = \inf\{n \in \mathbb{Z} : n > x\} - 1$ □

Preuve (Preuve de la densité)

Archimede : $\exists q \in \mathbb{N} : q > \frac{1}{y-x}$.

Donc

$$\begin{aligned} & qy - qx > 1. \\ \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : qx < p < qy \end{aligned}$$

par exemple :

$$p = [qy]$$

si $qy \notin \mathbb{Z}$ ou bien

$$p = qy - 1$$

si $qy \in \mathbb{Z}$

□

Lecture 3: Suites

Wed 23 Sep

0,999

0,9

0.99

0.999

0.9999

⋮

Proposition 20 (Densité des irrationnels)

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, les irrationnels sont dense dans \mathbb{R} .

Preuve

Soit $x < y$ (dans \mathbb{R}).

Cherche $z \notin \mathbb{Q}$ tq $x < z < y$.

$$\exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ tq } x < \frac{p}{q} < y$$

Prop. archimédienne $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} :$

$$\underbrace{\frac{p}{q} + \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{n}}_{:=z} < y$$

car

$$\exists n : \frac{1}{n} < \underbrace{y - \frac{1}{q}}_{>0} / \sqrt{2}$$

Il reste a voir que : $z = \frac{p}{q} + \sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$

$$\sqrt{2} = n(z - \frac{p}{q})$$

$$z \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \quad \text{⚡}$$

□

3 Suites et limites

Definition 4 (Suite)

Une suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ dans \mathbb{R} est une application (= fonction) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Remarque 21

Suite $(x_n) \neq$ ensemble $\{x_n\}$ Il arrive qu'on indice x_n par une partie de \mathbb{N} . Mais suite = suite infinie

Exemple 22

$$x_n = \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$$

$$x_n = (-1)^n; x_n = n!; F_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$$

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415$$

3.1 Convergence

Definition 5 (Convergence de suites)

L'expression $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ signifie :

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$$

On dit alors que (x_n) converge (vers l). Sinon, (x_n) diverge.

Lemme 23 (Unicité de la limite)

Si (x_n) converge, il existe une unique $l \in \mathbb{R}$ tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$

Preuve

Supposons l, l' limites. Si $l \neq l'$, alors $|l - l'| > 0$ Donc $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \frac{|l - l'|}{2}$

De meme $\exists n_1 \forall n > n_1 : |x_n - l'| < \frac{|l - l'|}{2}$

Soit $n > n_0, n_1$ Alors :

$$|l - l'| = |l - x_n + x_n - l'| \leq \underbrace{|l - x_n|}_{< |l - l'|/2} + \underbrace{|x_n - l'|}_{|x_n - l'|}$$

Donc

$$|l - l'| < 2 \cdot \frac{|l - l'|}{2}$$

⚡

□

Exemple 24

1. Si (x_n) est constante ($\exists a \forall n : x_n = a$) alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ (Archimede)

Definition 6

Terminologie :

(x_n) est bornée, majorée, minorée, rationnelle, ... etc si l'ensemble $\{x_n\}$ l'est.

La suite (x_n) est croissante si $x_n \leq x_{n+1} \forall n$ Idem décroissante Dans les deux cas, on dit que la suite (x_n) est monotone

Lemme 25

Toute suite convergente est bornée.

Preuve

Posons $\epsilon = 7$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |x_n - l| < 7 \quad \square$$

Soit $B_1 \geq |x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|$

Posons $B = \max(B_1, |l| + 7)$ Alors $|x_n| \leq B \forall n$.

Attention la reciproque n'est pas vraie!!

Exemple 26

$x_n = (-1)^n$ definit une suite bornée non convergente.

Preuve

Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = l$.

Posons $\epsilon = \frac{1}{10}$ alors $\exists n_0 \forall n > n_0 : |(-1)^n - l| < \frac{1}{10}$

$n > n_0$ pair $\Rightarrow |1 - l| < \frac{1}{10}$

$n > n_0$ impair $\Rightarrow |-1 - l| < \frac{1}{10}$

ceci implique

$$\Rightarrow |1 - (-1)| \leq |1 - l| + |-1 - l| < \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \quad \square$$

Proposition 27

Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x'_n = l'$

Alors 1. : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + x'_n) = l + l'$, et 2. : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot x'_n = l \cdot l'$

Preuve

1 :

Soit $\epsilon > 0$ Cherche n_0 tq $\forall n > n_0 : |x_n + x'_n - (l + l')| < \epsilon$.

Appliquons les deux hypothèses à $\frac{\epsilon}{2} : \exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ et $\frac{\epsilon}{2} : \exists N' \forall n > N' : |x'_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$. Posons $n_0 = \max(N, N')$. Si $n > n_0$, alors

$$|x_n + x'_n - (l + l')| \leq |x_n - l| + |x'_n - l'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

2 :

Par le lemme, $\exists B$ tq. $|x_n|, |x'_n| < B \forall n$.

Soit $\epsilon > 0$. Appliquons les hypothèses à $\frac{\epsilon}{2B}$.

$$\exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2B}$$

Si $n > n_0 := \max(N, N')$:

$$\begin{aligned} |x_n x'_n - ll'| &\leq |x_n x'_n - x_n l'| + |x_n l' - ll'| \\ &= \underbrace{|x_n|}_{< B} \cdot \underbrace{|x'_n - l'|}_{< \frac{\epsilon}{2B}} + \underbrace{|l'|}_{< B} \cdot \underbrace{|x_n - l|}_{< \frac{\epsilon}{2B}} < \epsilon \end{aligned} \quad \square$$

Lemme 28

On a utilisé : lemme Si $x_n \leq B \forall n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ alors $l \leq B$

Preuve

Par l'absurde :

Si $l > B$, posons $\epsilon = l - B > 0$

$\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$

en particulier $x_n > l - \epsilon = B \nexists$ \square

Lecture 4: lundi

Mon 28 Sep

Remarque 29

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = |\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n|$, ce qui est sous-entendu ici est que la limite existe.
- $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergence et limite sont inchangées si on modifie un nombre fini de termes.
En particulier $(x_n)_{n=17}^{\infty}$, rien ne change.
- $x_n \rightarrow l$ ($n \rightarrow \infty$), équivalent à $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$
- On dit que (x_n) converge vers $+\infty$ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, si (x_n) diverge de la façon suivante :

$$\forall R \in \mathbb{R}, \exists n_0 \forall n > n_0 : x_n > R$$

La définition est la même si x_n converge vers $-\infty$

Proposition 30 (Inversion d'une limite)

Supposons que (x_n) converge vers $l \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{l}$

Corollaire 31

Si (x_n) converge vers l et

Si (y_n) converge vers $m \neq 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{l}{m}$$

Car $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$

Lemme 32

Sous les hypotheses de la proposition,

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n \neq 0$$

Preuve

Appliquons la convergence à $\epsilon = \frac{|l|}{2}$ (car $l \neq 0$)

$$|x_n - l| < \epsilon \Rightarrow x_n \neq 0$$

□

Preuve

Preuve de la proposition

Soit $\epsilon > 0$.

On veut estimer

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{l} \right| = \underbrace{\frac{|l - x_n|}{|x_n - l|}}_{\geq \frac{|l|}{2} |l|} < ? \epsilon$$

pour n comme dans le lemme. On veut donc

$$|l - x_n| < \epsilon \frac{|l|^2}{2}$$

Donc $\exists n_1 \forall n \geq n_1$, on a bien $|l - x_n| < \epsilon$

□

Exemple 33

On peut à présent calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_d n^d}{b_0 + \dots + b_f n^f}$$

$$a_d \neq 0, b_f \neq 0$$

Si $d > f$ alors $\lim = \pm \infty$

Si $d < f$ alors $\lim = 0$

Si $d = f$, alors $\lim = \frac{a_d}{b_f}$

Justification

La suite peut s'écrire

$$\frac{a_d + a^{d-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^{d-1}}}{b_0 \frac{1}{n^d + \dots + b_f n^{f-d}}}$$

Si $f = d$, $\rightarrow \frac{a_d}{b_f}$

Si $f > d$, $\rightarrow 0$

Si $f < d$, $\rightarrow \pm\infty$, selon signe de $\frac{a_d}{b_f}$

Proposition 34

Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $|a| < 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$$

Proposition 35

Si (x_n) est monotone et bornée, alors elle converge.

Preuve

Soit (x_n) croissante. Affirmation, $x_n \rightarrow s := \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Soit $\epsilon > 0$, $\exists n : x_n > s - \epsilon$ (def. de sup)

$\forall n \geq n_0 : s - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq s \Rightarrow |x_n - s| < \epsilon$

Idem, si elle était décroissante. □

Preuve

Remarque : $(x_n) \rightarrow 0 \iff (|x_n| \rightarrow 0)$.

$$\dots |x_n - 0| < \epsilon$$

Donc on va traiter le cas $a > 0$, alors $(a^n)_{n=1}^\infty$ est décroissante.

Bornée (par zéro et 1) \Rightarrow elle admet une limite l .

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{n+1}}_{a \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n}$ Donc $l = al$. Si $l \neq 0$, $1 = a$ absurde, donc l

nul. □

Exemple 36

Def (x_n) en posant $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$

Observons que $x_n \geq 2 > 0 \forall n$

Si (x_n) converge, alors

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x_n}\right) = 2 + \frac{1}{l}$$

Donc

$$l^2 - 2l - 1 = 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{1+1} = l$$

Or $l \geq 2 \Rightarrow l = 1 + \sqrt{2}$ si l existe.

A present, estimons $|x_n - l|$:

$$\begin{aligned} \left| x_n - 1 - \sqrt{2} \right| &= \left| 2 + \frac{1}{x_{n-1}} = \left(2 + \frac{1}{l} \right) \right| = \frac{|l - x_{n-1}|}{x_{n-1}l} \leq \frac{|x_{n-1} - l|}{4} \\ &\leq \dots \leq \frac{|x_{n-2} - l|}{4^2} \leq \frac{|2 - l|}{4^n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

car $\frac{1}{4^n} \rightarrow 0$

Lemme 37 (Deux gendarmes)

Soit $(x_n), (y_n), (z_n)$ trois suites avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$$

si $x_n \leq y_n \leq z_n \forall n$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = l$$

Preuve

repose sur le fait que

$$|x_n - l|, |z_n - l| < \epsilon \Rightarrow l - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \epsilon$$

montre $|y_n - l| < \epsilon$

□

4 Limsup et liminf

Definition 7 (Limsup et liminf)

Soit (x_n) une suite quelconque.

On definit la limite superieure par :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf_n \sup \{x_k, k \geq n\}$$

Attention : Ici on convient que

$$\sup(A) = +\infty$$

si A non majore

$$\inf(A) = -\infty$$

si A non minore

On definit la limite superieure par :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup_n \inf \{x_k, k \geq n\}$$

Notez : $z_n := \sup \{x_k : k \geq n\}$

Cela definit une suite decroissante et donc (z_n) converge vers son inf.

Conclusion : $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} x_k$