Série 10

David Wiedemann

11 mai 2021

1

Montrons d'abord que la fonction $f(x, y)$ est intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]^2$.
Nous allons montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partition P_ϵ de $[0, 1]^2$ satisfaisant

$$\overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) < \epsilon.$$

Faisons d'abord l'observation que $\underline{S}(f, P) = 0$ pour toute partition P de $[0, 1]^2$, en effet on peut supposer que tous les éléments $Q \in P$ sont des pavés non dégénérés (si ils l'étaient, ils ne contribueraient pas à la somme) , et alors

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{Q \in P} \inf_{z \in Q} f(z) \operatorname{Vol}(Q)$$

et $\inf_{z \in Q} f(z) = 0$ pour tout $Q \in P$ car par densité des irrationnels, il existe $(a, b) \in Q$ tel que $a, b \notin \mathbb{Q}$; on en déduit que $\underline{S}(f, P) = 0$

Soit donc $\epsilon > 0$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$ le plus petit nombre naturel satisfaisant $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$.
Soit $k = \frac{\epsilon}{4n}$.
On definit $A_i = \left[\frac{1}{i} - k, \frac{1}{i} + k\right] \times [0, 1]$ si $i > 1$ et par $A_1 = [1 - k, 1] \times [0, 1]$.
Definissons de plus $B_i = \left[\frac{1}{i} + k, \frac{1}{i-1} - k\right] \times [0, 1]$.

Considérons la partition

$$P_\epsilon = \left\{[0, \frac{1}{n} - k] \times [0, 1], A_n, B_n, A_{n-1}, B_{n-1}, \ldots, B_1, A_1\right\}$$

Il est clair que P_ϵ est une partition de $[0, 1]^2$ car $\frac{1}{2}(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}) > (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = \frac{1}{2n^2} > \frac{\epsilon}{4n} = k$.

On peut maintenat calculer la différence des sommes de Darboux.

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) &= \overline{S}(f, P_\epsilon) \\
&= \sum_{Q \in P_\epsilon} \sup_{z \in Q} f(z) \operatorname{Vol}(Q) \\
&= \frac{1}{n} + k + \sum_{i=1}^{n} \sup_{z \in A_i} f(z) + \sum_{i=1}^{n} \sup_{z \in B_i} f(z)
\end{aligned}$$

On utilise maintenant que dans l'intervalle B_i, il n'y a pas de nombres de la forme $\frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n} \sup_{z \in A_i} f(z) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + 2nk \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

Ce qui montre le fait que l'intégrale existe.

2

Etant donné que l'intégrale existe, et que pour toute partition P de $[0,1]^2$, la somme de Darboux inférieure est nulle, on en déduit que

$$\int_{[0,1]^2} f = 0.$$