Série 5

David Wiedemann

27 mars 2021

1

La commutativité de l'addition, l'associativité de la multiplication par un scalaire, la distributivité de la multiplication par un scalaire et l'existence d'un élément neutre multiplicatif sont immédiats.
Pour montrer que W est un espace vectoriel, on va donc montrer que l'espace est stable par addition, multiplication par un scalaire et qu'il existe un élément neutre additif.
Soit $f, g \in W$, montrons que $f + g$ est également contenu dans W.
Soit $x_0 \in U$, par hypothèse, il existe $r_f(x)$ et $r_g(x)$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + r_f(x)$$
$$g(x) = g(x_0) + Dg(x_0)(x - x_0) + r_g(x)$$

tel que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_f(x)}{\|x - x_0\|} = \lim_{x \to x_0} \frac{r_g(x)}{\|x - x_0\|} = 0$$

Ainsi, on a

$$f(x) + g(x) = f(x_0) + g(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + Dg(x_0)(x - x_0) + r_f(x) + r_g(x)$$
$$(f + g)(x) = (f + g)(x_0) + (Df(x_0) + Dg(x_0))(x - x_0) + (r_f)(x) + r_g(x)$$

Où on a utilisé que l'addition de matrices est linéaire. Notons que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_f(x) + r_g(x)}{\|x - x_0\|} = 0$$

et ainsi $f + g$ est différentiable en x_0, et on en déduit que $f + g$ est différentiable sur U .
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\lambda \cdot f(x) = \lambda f(x_0) + \lambda \cdot Df(x_0)(x - x_0) + \lambda \cdot r_f(x)$$

et car

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\lambda r_f(x)}{\|x - x_0\|} = 0$$

On en déduit que $\lambda \cdot f(x)$ est différentiable en x_0 et est donc différentiable sur U.
Finalement, il est clair que la fonction constante $e(x) = 0$ est différentiable, en effet toutes ses dérivées partielles sont nulles et donc elle verifie bien

$$e(x) = e(x_0) + \overline{0}(x - x_0) + r_e(x)$$

où $r_e(x) = 0$ et $\overline{0}$ est l'élément nul de $\mathbb{R}^{1\times n}$, en effet il est immédiat que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_e(x)}{\|x - x_0\|} = \lim_{x\to x_0} \frac{0}{\|x - x_0\|} = 0$$

Ainsi W possède également un élément nul et est un espace vectoriel.

2

Soit f et $g \in W$ comme dans la partie précédente

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + r_f(x) \\ g(x) &= g(x_0) + Dg(x_0)(x - x_0) + r_g(x) \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) = f(x_0)g(x_0) &+ f(x_0)Dg(x_0)(x - x_0) + f(x_0)r_g(x) \\ &+ g(x_0)Df(x_0)(x - x_0) + Df(x_0)(x - x_0)Dg(x_0)(x - x_0) + Df(x_0)(x - x_0)r_g(x) \\ &+ r_f(x)g(x_0) + r_f(x)Dg(x_0)(x - x_0) + r_f(x)r_g(x) \end{aligned}$$

Il faut donc montrer que

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x}\to x_0} \frac{1}{\|x - x_0\|} &(Df(x_0)(x - x_0)Dg(x_0)(x - x_0) + Df(x_0)(x - x_0)r_g(x) + f(x_0)r_g(x) \\ &+ r_f(x)g(x_0) + r_f(x)Dg(x_0)(x - x_0) + r_f(x)r_g(x)) \end{aligned}$$

On procède terme par terme, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x}\to x_0} \quad & \frac{1}{\|x - x_0\|} |(Df(x_0)(x - x_0)Dg(x_0)(x - x_0))| \\ & \leq \frac{1}{\|x - x_0\|} (\|Df(x_0)\| \, \|x - x_0\| \, \|Dg(x_0)\| \, \|x - x_0\|) = 0 \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
De même

$$\lim_{\vec{x}\to x_0} \frac{r_g(x)}{\|x - x_0\|} (Df(x_0)(x - x_0) + f(x_0)) = 0$$

et

$$\lim_{\vec{x}\to x_0} \frac{r_f(x)}{\|x-x_0\|}(Dg(x_0)(x-x_0)+g(x_0)+r_g(x))=0$$

Ainsi, en posant

$$\begin{aligned} r_h(x) := & Df(x_0)(x-x_0)Dg(x_0)(x-x_0)+Df(x_0)(x-x_0)r_g(x)+f(x_0)r_g(x) \\ & + r_f(x)g(x_0)+r_f(x)Dg(x_0)(x-x_0)+r_f(x)r_g(x) \end{aligned}$$

On obtient que

$$(f\cdot g)(x)=(f\cdot g)(x_0)+f(x_0)Dg(x_0)(x-x_0)+g(x_0)Df(x-x_0)+r_h(x)$$

Et car, $r_h(x)$ satisfait

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_h(x)}{\|x-x_0\|}=0$$

On en déduit que $f\cdot g$ est différentiable et que

$$D(f\cdot g)(x_0)=g(x_0)Df(x_0)+f(x_0)Dg(x_0).$$

Ce qui conclut la démonstration.