23 Avril 2021 *Sophie Gorno*

Série 7

Exercice 1: Principe de superposition linéaire et notation complexe

On considère l'équation d'onde en une dimension :

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2}$$

(a) Supposez que $f(x,t)$ et $g(x,t)$ soient toutes deux solutions de l'équation d'onde. Démontrez que dans ce cas, $f(x,t) + g(x,t)$ est aussi une solution.

(b) Supposez que $\tilde{f}(x,t)$ est une fonction complexe ($\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$) qui satisfait l'équation d'onde. Démontrez que dans ce cas, $f(x,t) = Re(\tilde{f}(x,t))$ est une solution réelle de l'équation d'onde.

(c) On considère maintenant l'équation d'onde en 3D :

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} = c^2 \Delta y_0$$

Démontrez que $\tilde{y_0}(\vec{r},t) = \tilde{A} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ satisfait cette équation. Quelle est la relation entre ω et $\vec{k}$?

Exercice 2: Linéarisation de l'équation d'état

On suppose que la densité, la pression, et le champs de vitesse peuvent être écrits comme :

$$\rho(\vec{r},t) = \rho_0 + \rho_1(\vec{r},t)$$

$$p(\vec{r},t) = p_0 + p_1(\vec{r},t)$$

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \vec{u_1}(\vec{r},t)$$

Avec ρ_0 et p_0 des constantes et $\rho_1 \ll \rho_0$, $p_1 \ll p_0$ et $|\vec{u_1}| \ll c$.
Montrez que dans ce cas, l'équation d'état linéarisée d'un gaz parfait devient :

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0$$

Exercice 3: Onde sonore stationnaire

Pour une onde sonore plane qui se propage le long de l'axe x, vers la droite ($\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{e_x}$), <u>les fluctuations</u> de la pression (autour de la valeur d'équilibre p_{atm}) et de la vitesse prennent la forme suivante (expression complexe) :

$$p_{droite}(\overrightarrow{r},t) = \tilde{p_r} e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\overrightarrow{u}_{droite}(\overrightarrow{r},t) = \tilde{u_r} e^{i(\omega t - kx)} \overrightarrow{e_x}$$

Avec $\tilde{p_r}$ et $\tilde{u_r} \in \mathbb{C}$ ainsi que ω et $k > 0$ satisfaisant $\omega/k = c$ (la vitesse du son). On suppose que $|\tilde{p_r}| \ll p_{atm}$, avec p_{atm} la pression atmosphérique et $|\tilde{u_r}| \ll c$.

(a) On donne l'équation d'Euler linéarisée et en absence de pesanteur :

$$\rho_0 \frac{\partial \overrightarrow{u_1}}{\partial t} + \nabla p_1 = 0,$$

Avec $\vec{u_1}$ et p_1 des petites perturbations. Exprimer $\tilde{u_r}$ en fonction de $\tilde{p_r}$, ρ_0, ω et k à l'aide de cette équation.

(b) On considère maintenant les fluctuations de la pression et de la vitesse d'une onde se propageant le long de l'axe x, mais cette fois-ci vers la gauche ($\overrightarrow{k} = -k\overrightarrow{e_x}$). Dans ce cas, on peut écrire :

$$p_{gauche}(\overrightarrow{r}, t) = \tilde{p_l} e^{i(\omega t + kx)}$$

$$\overrightarrow{u}_{gauche}(\overrightarrow{r}, t) = \tilde{u_l} e^{i(\omega t + kx)} \overrightarrow{e_x}$$

avec $\tilde{p_l}$ et $\tilde{u_l} \in \mathbb{C}$, tandis que k et ω sont les mêmes que dans la question (a).
Utilisez à nouveau l'expression d'Euler de la partie (a) pour exprimer $\tilde{u_l}$ en fonction de $\tilde{p_l}$, ρ_0, ω et k.

(c) On considère un tuyau d'orgue de longueur l avec les deux extrémités ouvertes. Trouvez les expressions des ondes stationnaires pour le champ de pression. Supposez que la pression aux deux extrémités est égale à la pression atmosphérique p_{atm} non-perturbée. Les fluctuations de la pression sont donc nulles à ces deux endroits.

(d) Trouvez maintenant l'expression des ondes stationnaires de la partie (c) pour le champ de vitesse. Utilisez les résultats de (a) et (b) pour exprimer $\tilde{u_r}$ et $\tilde{u_l}$ par $\tilde{p_r}$ et $\tilde{p_l}$. Est-ce que les nœuds et ventres de la pression et de la vitesse sont au même endroit ?

Exercice 4: Ondes dans un tuyau d'orgue

C'est l'hiver et il fait $-5°C$. Vous allez sur un marché à la recherche d'un tuyau d'orgue qui produit une note (= fréquence fondamentale) de $\nu = 440\ Hz$.

(a) Vous désirez un tuyau ouvert. Quelle doit être sa longueur ? (L'indice adiabatique γ de l'air est $7/5$, la masse moyenne des molécules dans l'air est $m = 29 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}\ kg$ et la constante de Boltzmann est $1.38 \cdot 10^{-23}\ J/K$).

(b) Vous avez de la chance et vous trouvez trois exemplaires chez trois vendeurs différents. Mais vous hésitez, car vous allez utiliser ce tuyau à des températures de $25°C$. Vendeur 1 vous dit qu'il n'y a pas de problèmes. Ses instruments sont fait d'un matériau qui a un coefficient de dilatation thermique linéaire α négatif. Le vendeur 2 dit qu'il faut acheter chez lui, car les siennes ont $\alpha = 0$. Finalement, le vendeur 3 dit que les siennes sont ce qu'il vous faut, car ils ont $\alpha > 0$. A qui vous faites confiance ?
Rappel : le coefficient de dilatation linéaire est défini par $\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta T$, ou l est la longueur initiale d'un matériel et Δl est le changement de cette longueur dû à un changement ΔT de température.

(c) Quelle est la valeur de α nécessaire pour garantir la même fréquence à $25°C$?

Exercice 5: Force électrostatique et gravitationnelle, Ordre de grandeur

(a) Soit un électron et un proton séparé par $L = 10^{-10}$ m. Calculez la force électrostatique qui s'exerce entre eux et la force de gravitation qui s'exerce entre eux, données :

$$\begin{aligned} m_e &= 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ m_p &= 1.6 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ e &= 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ \epsilon_0 &= 8.8 \cdot 10^{-12} \text{ en unité SI} \\ G &= 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ en unité SI} \end{aligned}$$

Qu'en déduisez pour les problèmes d'électrostatique ?

(b) Soit une charge $q > 0$. Dessinez les lignes de champ électrique crées par q. Comment sont les lignes de champ lorsque $q < 0$?
Soient deux charges $+q$ et $-q$ séparée par une distance d. Esquissez les lignes de champ électrique.

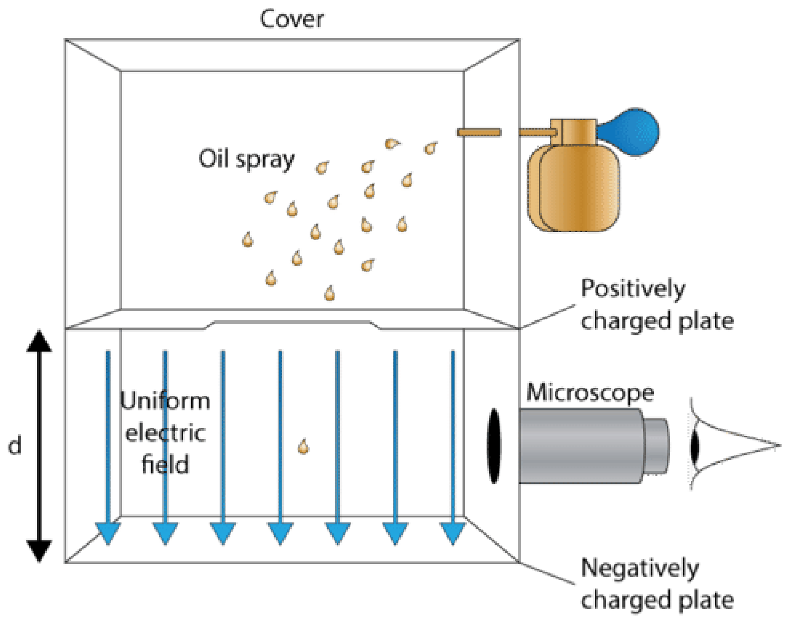
Exercice 6: Expérience de Millikan

Une goutte d'huile de rayon $R = 2.76\ \mu$m et de densité $\rho = 920$ kg/m^3 est chargée avec une charge Q et maintenue en équilibre sous l'effet de son poids et d'un champ électrique uniforme dirigé vers le bas et d'amplitude $E = 1.65 \times 10^6$ N/C.

Remarque : Robert Millikan a utilisé ce principe pour démontrer, en 1913, que la charge est quantifiée et mesurer la charge fondamentale, aujourd'hui établie à $|e| \approx 1.6 \times 10^{-19}$C (Figure).

(a) Calculer la valeur et le signe de la charge Q. Exprimer le résultat en multiples de $|e|$.

(b) La goutte est exposée à une source émettant des électrons. Deux électrons sont capturés par la goutte. Calculer l'accélération de la goutte en négligeant la viscosité de l'air.



Exercice 7: Propagation d'une onde transversale

(Exercice facultatif) Démontrer que la propagation d'une onde transversale le long de l'axe x dans une corde avec une tension T et une masse par unité de longueur μ est décrite par :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

On suppose des petites perturbations $y(x,t)$, que la corde est parfaitement souple et que la force gravitationnelle est négligeable. Indication : supposez une perturbation petite mais sinon arbitraire de la corde et écrivez la second loi de Newton selon y pour un petit élément de la corde de longueur Δx.