Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-04-12 au 2021-04-16

Série 13 du lundi 12 avril 2021

Exercices de révision sur la première partie du cours

Exercice 1.

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) \coloneqq \int_0^x \mathrm{e}^{xy^2}\,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

Calculer le polynôme p de degré 4 pour obtenir $|f(x) - p(x)| = o(|x|^4)$.

Exercice 2.

Notons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1) Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ unitaire (i.e. $\|\boldsymbol{v}\| = 1$) ; pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ donné nous notons $g_{\boldsymbol{x}} \coloneqq t \mapsto f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v})$, définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$|g'_{\boldsymbol{x}}(0)| \leqslant \|\nabla f(\boldsymbol{x})\|.$$

Donner un critère d'égalité.

2) Soit $\gamma \in C^1([0,1], \mathbb{R}^n)$ une courbe paramétrée telle que $\forall s \in [0,1]$, $\|\gamma'(s)\| = 1$. Montrer que

$$|f(\gamma(0)) - f(\gamma(1))| \leqslant \int_0^1 \|\nabla f(\gamma(s))\|\,\mathrm{d}s.$$

Exercice 3.

Nous définissons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) \coloneqq \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^3 - xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

Étudiez la différentiabilité de f en $(0,0)$.

Exercice 4.

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) \coloneqq \frac{x^2 y}{x^2+y^2} + \frac{xy^3}{x^2+y^6}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \tag{3}$$

Étudiez la limite de f en $(0,0)$.

Exercice 5.

Étudier la convergence des intégrales suivantes ; les calculer n'est pas nécessaire.

$$\int_0^{+\infty} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sin x)}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Indication (Intégrale (5)). Changer de variable par une translation de π puis comparer les intégrales.