Notes de cours

MATH-105(a)
Analyse avancée II

(Section MA)

Boris Buffoni, Fabio Nobile

2020-2021

Dernière mise à jour : 22 février 2021

Table des matières

Notations

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\}$

$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{- + \infty, +\infty\}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$

Chapitre 0

Intégrales Généralisées

Ce chapitre reprend le dernier sujet du cours d'Analyse Avancée I, notamment la construction de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue où continue par morceaux sur un intervalle borné et fermé. On rappelle qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ avec $a < b$ dans $\mathbb{R}$ est dite *continue par morceaux* si $\lim_{t \to x^+} f(t)$ existe (sous-entendu, dans $\mathbb{R}$) pour tout $x \in [a, b[$, $\lim_{t \to x^-} f(t)$ existe pour tout $x \in]a, b]$ et f est continue en x pour tout $x \in [a, b]$ avec au plus un nombre fini d'exceptions. Cette définition se généralise à un intervalle I quelconque avec une infinité de points : une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux (c.p.m.) si f est continue par morceaux sur tout intervalle $[a, b] \subset I$ avec $a < b$.

On se pose ici la question de comment généraliser la définition de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ dans le cas où l'intervalle d'intégration est borné mais pas fermé, et la fonction f n'est pas définie en a ou en b, comme dans les exemples suivantes :

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx, \qquad \int_0^1 \ln(x)dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}dx,$$

ou encore, comment généraliser la définition de l'intégrale sur un intervalle non borné, par exemple :

$$\int_0^\infty \sin(x)dx, \qquad \int_0^\infty \sin(x^2)dx, \qquad \int_0^\infty e^{-x}dx, \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx, \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx,$$

où on entendra toujours ∞ par $+\infty$, dans ce chapitre.

0.1 Intégrale généralisée sur un intervalle borné

On commence par définir l'intégrale généralisée sur un intervalle borné et "demi-ouvert" (ouvert à droite et fermé à gauche ou bien ouvert à gauche et fermé à droite).

Définition 0.1. *Pour $a < b$ dans $\mathbb{R}$, soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ c.p.m. et $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b[$. Si $\lim_{x \to b^-} F(x)$ existe, on dit que $\int_a^b f(x)dx$ existe (ou converge) et on pose*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to b^-} F(x).$$

Si $\lim_{x\to b^-} F(x)$ *n'existe pas, on dit que* $\int_a^b f(x)dx$ *diverge.*

De façon similaire, soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ *c.p.m., et* $F(x) = \int_x^b f(t)dt$, $x \in]a,b]$*. Si* $\lim_{x\to a^+} F(x)$ *existe, on dit que* $\int_a^b f(x)dx$ *existe (ou converge) et on pose*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Autrement on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ *diverge.*

Exemple 0.2. *On étudie l'existence de l'intégrale généralisée*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soit $F(x) = \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$, $x \in]0,1]$ *qui est bien définie car la fonction* $f(t) = t^{-\alpha}$ *est continues sur* $[x,1]$ *pour tout* $x \in]0,1]$*. Pour* $\alpha \neq 1$ *on a*

$$F(x) = \left.\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_x^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

tandis que pour $\alpha = 1$ *on a*

$$F(x) = \ln t\big|_x^1 = -\ln x.$$

Donc

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

et l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ *existe pour tout* $\alpha < 1$.

On vérifie facilement que si la fonction f admet une extension par continuité sur $[a,b]$ alors l'intégrale généralisé de f existe et coïncide avec l'intégrale sur l'intervalle fermé $[a,b]$ de l'extension par continuité de la fonction. Plus précisément, on a le résultat suivant, dont la preuve est laissée comme exercice.

Lemme 0.3. *Pour* $a < b$ *dans* $\mathbb{R}$*, soit* $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m. telle que* $\lim_{x\to b^-} f(x)$ *existe et définissons la fonction c.p.m. sur* $[a,b]$

$$f_b(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,b[, \\ \lim_{t\to b^-} f(t), & x = b. \end{cases}$$

Alors, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ *existe et* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_b(x)dx$.

On a le même résultat pour une fonction $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ *c.p.m. telle que* $\lim_{x\to a^+} f(x)$ *existe.*

On considère maintenant le cas d'un intervalle ouvert (à gauche et à droite).

Définition 0.4. *Soit* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m.,* $a < b$*. Pour* $c \in]a,b[$*, si* $\int_a^c f(x)dx$ *et* $\int_c^b f(x)dx$ *existent, alors on pose* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$*, auquel cas* $\int_a^b f(x)dx$ *est dite exister ou converger, sinon* $\int_a^b f(x)dx$ *est dite diverger.*

Il est facile de montrer que l'existence (ou non) de $\int_a^b f(x)dx$ ne dépend pas du choix de $c \in]a,b[$. En fait, soit $\tilde{c} \in]a,b[$, $\tilde{c} \neq c$. Alors

$$\int_a^{\tilde{c}} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{\tilde{c}} f(x)dx$$

existe ssi $\int_a^c f(x)dx$ existe, car f est c.p.m. sur $[c,\tilde{c}] \cup [\tilde{c},c]$. De même,

$$\int_{\tilde{c}}^b f(x)dx = \int_{\tilde{c}}^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

existe ssi $\int_c^b f(x)dx$ existe, et

$$\int_a^{\tilde{c}} f(x)dx + \int_{\tilde{c}}^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{\tilde{c}} f(x)dx + \int_{\tilde{c}}^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Exemple 0.5. *Dire si l'intégrale suivante*

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(x)dx$$

existe ou non.

On est tenté de calculer

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi/2^-} \int_{-x}^x \tan(t)dt &= \lim_{x\to\pi/2^-} \int_{-x}^x (-\ln(\cos t))'dt = \lim_{x\to\pi/2^-} \Big(-\ln(\cos x) + \ln(\cos(-x))\Big) \\ &= \lim_{x\to\pi/2^-} \ln\left(\frac{\cos(-x)}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\pi/2^-} \ln(1) = 0\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\pi/2^-} \int_0^x \tan(t)dt = \lim_{x\to\pi/2^-} \ln\left(\frac{\cos(0)}{\cos x}\right) = +\infty \\ \textit{et } &\lim_{x\to\pi/2^-} \int_{-x}^0 \tan(t)dt = -\infty.\end{aligned}$$

Donc $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(x)dx$ *diverge. En effet,* $\displaystyle\lim_{\substack{x_1\to-\pi/2^+ \\ x_2\to\pi/2^-}} \int_{x_1}^{x_2} \tan(x)dx$ *dépend de comment* x_1 *et* x_2 *tendent respectivement vers* $-\pi/2$ *et* $\pi/2$*. Prendre par exemple* $\lim_{\epsilon\to0^+} \int_{-\pi/2+\epsilon}^{\pi/2-\epsilon^2} \tan(x)dx = +\infty$ *et* $\lim_{\epsilon\to0^+} \int_{-\pi/2+\epsilon^2}^{\pi/2-\epsilon} \tan(x)dx = -\infty$.

L'intégrale généralisée a les propriétés suivantes :

Lemme 0.6 (Propriétés de l'intégrale généralisée)**.** *Soit* $a < b$ *dans* $\mathbb{R}$*,* I *de la forme* $[a,b[$*,* $]a,b]$ *ou* $]a,b[$*, et des fonctions c.p.m.* $f,g : I \to \mathbb{R}$*. Alors*

— $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$*, l'intégrale généralisée à gauche étant convergente si les deux intégrales généralisées à droite convergent.*

— $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $\forall c \in]a,b[$, *l'intégrale généralisée à gauche étant convergente ssi chacune des deux intégrales à droite converge au cas où elle est généralisée.*

— *si* $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in I$ *et* $\int_a^b f(x)dx$ *et* $\int_a^b g(x)dx$ *existent, alors* $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Pour établir si une intégrale généralisée existe, le critère de comparaison suivant est souvent très utile.

Lemme 0.7 (Critère de comparaison)**.** *Soit* $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions c.p.m. et supposons qu'il existe* $c \in [a,b[$ *tel que*

$$0 \le f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [c,b[.$$

— *Si* $\int_a^b g(x)dx$ *existe, alors* $\int_a^b f(x)dx$ *existe aussi ;*

— *si* $\int_a^b f(x)dx$ *diverge, alors* $\int_a^b g(x)dx$ *diverge aussi.*

Démonstration. Si $\int_a^b g(x)dx$ existe, alors $\int_c^b g(x)dx$ existe aussi. De plus, pour tout $x \in [c,b[$

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt \le \int_c^x g(t)dt \le \int_c^b g(t)dt < +\infty$$

Puisque F est une fonction croissante et bornée supérieurement sur $[c,b[$ on a que $\lim_{x\to b^-} F(x)$ existe. Ainsi $\int_c^b f(t)dt$ converge et

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \lim_{x\to b^-} \int_c^x f(t)dt$$

existe aussi. La seconde affirmation est la contraposée de la première. □

Corollaire 0.8. *Soit* $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m., non négative et bornée. Alors* $\int_a^b f(x)dx$ *existe.*

Démonstration. Il suit immédiatement du fait que $0 \le f(x) \le M < +\infty, \quad \forall x \in [a,b[$ et $\int_a^b M dx$ converge. □

Des versions analogues du Lemme 0.7 et Corollaire 0.8 existent pour $f, g :]a,b] \to \mathbb{R}$ ou bien $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$.

Exemple 0.9. *Grâce au Corollaire 0.8, on montre facilement que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\sin\frac{1}{x})^2}{\sqrt{x}}dx$ *converge.*

En effet, $0 \le f(x) = \dfrac{(\sin\frac{1}{x})^2}{\sqrt{x}} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ *et* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ *converge.*

0.2 Intégrale généralisée absolument convergente

Définition 0.10. *Soit* I *un intervalle de la forme* $[a,b[$, $]a,b]$ *ou* $]a,b[$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *c.p.m. On dit que l'intégrale généralisée est absolument convergente si l'intégrale* $\int_a^b |f(x)|dx$ *existe.*

Théorème 0.11. *Si l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente, alors elle existe.*

Démonstration. Soit $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ et $f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}$. On a $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$,

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|, \quad 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|.$$

Donc, par le critère de comparaison, $\int_a^b f_+(x)dx$ et $\int_a^b f_-(x)dx$ existent, et $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (f_+(x) - f_-(x))dx$ existe aussi. □

Corollaire 0.12. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ c.p.m. et* bornée*, où I est un intervalle* borné *comme ci-dessus. Alors $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument et par conséquent, existe.*

Démonstration. On a $0 \leq |f(x)| \leq M < +\infty, \quad \forall x \in I$. Comme $\int_a^b M dx$ converge, $\int_a^b |f(x)|dx$ converge aussi et $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument. □

Exercice 0.13. *Montrer que les intégrales généralisées*

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$$

convergent absolument.

Théorème 0.14. *Une condition suffisante pour que $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument avec $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ c.p.m. est qu'il existe $\alpha \in]-\infty, 1[$ tel que*

$$\lim_{x \to b^-} (b - x)^\alpha f(x) = l \in \mathbb{R}.$$

Si $\exists \alpha \geq 1$ tel que $\lim_{x \to b^-} (b - x)^\alpha f(x) = l \neq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Démonstration. Soit $\alpha \in]-\infty, 1[$ tel que $\lim_{x \to b^-} (b - x)^\alpha f(x) = l \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta_\epsilon \in]0, b - a[$ tel que

$$\forall x \in [b - \delta_\epsilon, b[, \quad (l - \epsilon)(b - x)^{-\alpha} < f(x) < (l + \epsilon)(b - x)^{-\alpha}.$$

Si $\alpha < 1$, alors $\int_a^b (b - x)^{-\alpha} dx$ converge et, puisque $0 \leq |f(x)| < (|l| + \epsilon)(b - x)^{-\alpha}$ pour $x \in [b - \delta_\epsilon, b[$, on en déduit grâce au Lemme 0.7 que $\int_a^b |f(x)|dx$ converge, donc $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument.

Si, par contre, $\alpha \geq 1$ et $l \neq 0$, en prenant $\epsilon \in]0, |l|[$ on a que $\int_{b-\delta_\epsilon}^b (b - x)^{-\alpha} dx$ diverge, f est non nul et de signe constant sur $[b - \delta_\epsilon, b[$ et $|f(x)| > (|l| - \epsilon)(b - x)^{-\alpha}, \quad \forall x \in [b - \delta_\epsilon, b[$. Grâce au Lemme 0.7 on déduit que $\int_{b-\delta_\epsilon}^b |f(x)|dx$ diverge, et $\int_{b-\delta_epsilon}^b f(x)dx$ et $\int_a^b f(x)dx$ divergent aussi. □

Remarque 0.15. *On a présenté le Théorème 0.14 pour un intervalle I de la forme $[a,b[$. Il y a deux conditions suffisantes analogues en a pour I de la forme $]a,b]$. Si I est de la forme $]a,b[$, on choisit $c \in]a,b[$ et on étudie séparément l'intégrale généralisée sur $[c,b[$ et celle sur $]a,c]$.*

Exercice 0.16. *Étudier, en utilisant le critère de puissance du Théorème 0.14 si l'intégrale généralisée $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx$ converge ou non.*

0.3 Intégrale généralisée sur un intervalle non borné

Soit I de la forme $[a,\infty[$, $]-\infty,a]$, $]a,\infty[$, $]-\infty,a[$ ou $]-\infty,\infty[$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ c.p.m. On définit l'intégrale généralisée de f sur I de façon similaire à ce qu'on a fait pour I borné.

Définition 0.17. *Si $I = [a,\infty[$ et $\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^\infty f(x)dx$ existe et on pose*

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{x\to\infty} F(x).$$

On dit que $\int_a^\infty f(x)dx$ est absolument convergente si $\int_a^\infty |f(x)|dx$ existe.

Si $I =]-\infty,a]$ et $\lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)dt$ existe, on dit que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ existe et on pose

$$\int_{-\infty}^a f(t)dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)dt.$$

On dit que $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ est absolument convergente si $\int_\infty^a |f(x)|dx$ existe.

Soit I de la forme $]a,\infty[$, $]-\infty,a[$ ou $\mathbb{R}$, et soit $c \in I$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_I f(t)dt$ existe si les intégrales généralisées de f sur $I_1 = I\cap]-\infty,c]$ et sur $I_2 = I \cap [c,\infty[$ existent les deux, auquel cas on pose

$$\int_I f(t)dt = \int_{I_1} f(t)dt + \int_{I_2} f(t)dt$$

(ceci ne dépend pas du choix de c dans I). On dit que $\int_I f(x)dx$ est absolument convergente si $\int_I |f(x)|dx$ converge.

Si une intégrale généralisée existe, on dit aussi qu'elle converge, sinon on dit qu'elle diverge.

Exemple 0.18. *On étudie l'existence de l'intégrale généralisée*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^x = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}, \qquad \alpha \neq 1$$

$$F(x) = \ln x \qquad \alpha = 1$$

Donc

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} < \infty, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha \in]-\infty, 1] \end{cases}$$

et l'intégrale généralisée $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ *existe pour tout* $\alpha > 1$.

Il est intéressant de comparer ce dernier exemple avec l'exemple 0.2. On voit que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ existe pour tout $\alpha < 1$ alors que l'intégrale généralisée $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ existe pour tout $\alpha > 1$.

L'intégrale généralisée sur un intervalle non borné a les mêmes propriétés que celui sur un intervalle borné. En particulier, étant donné un un intervalle I non borné et des fonctions c.p.m. $f, g : I \to \mathbb{R}$.

— linéarité : $\int_I (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_I f(x)dx + \beta \int_I g(x)dx, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, l'intégrale généralisée à gauche étant convergente si les deux intégrales généralisées à droite convergent.

— $\int_I f(x)dx = \int_{I\cap]-\infty,c]} f(x)dx + \int_{I\cap[c,\infty[} f(x)dx, \quad \forall c \in I$, l'intégrale généralisée à gauche étant convergente ssi chacune des deux intégrales à droite converge au cas où elle est généralisée.

— relation d'ordre : si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in I$ et $\int_I f(x)dx$ et $\int_I g(x)dx$ existent, alors $\int_I f(x)dx \leq \int_I g(x)dx$.

Les critères de comparaison énoncés au Lemme 0.7 et au Théorème 0.14 se généralisent aussi au cas d'un intervalle non borné.

Lemme 0.19 (Critères de comparaison – intervalles non bornés)**.**

— *Soit* $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *c.p.m. et supposons qu'il existe* $c \in [a, \infty[$ *tel que*

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [c, +\infty[.$$

Si $\int_a^\infty g(x)dx$ *existe alors* $\int_a^\infty f(x)dx$ *existe. Si* $\int_a^\infty f(x)dx$ *diverge alors* $\int_a^\infty g(x)dx$ *diverge.*

— *Soit* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *c.p.m.*

$$\text{Si } \exists \beta > 1 : \lim_{x\to\infty} x^\beta f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \text{alors } \int_a^\infty f(x)dx \text{ converge absolument.}$$

$$\text{Si } \exists \beta \in]-\infty, 1] : \lim_{x\to\infty} x^\beta f(x) = l \neq 0 \quad \text{alors } \int_a^\infty f(x)dx \text{ diverge.}$$

Remarque 0.20. *Attention, comparez les conditions sur* β *avec les conditions du Théorème 0.14 sur* α *! Il y a des résultats analogues pour* I *de la forme* $]-\infty, a]$. *Si* I *est de la forme* $]a, \infty[$, $]-\infty, a[$ *ou* $]-\infty, \infty[$, *on choisit* $c \in I$ *et on étudie séparément l'intégrale généralisée sur* $I \cap [c, +\infty[$ *et celle sur* $I \cap]-\infty, c]$.

Exercice 0.21. *Étudier à l'aide du Lemme 0.19 l'existence des intégrales suivantes*

$$\int_1^\infty x^\alpha e^{-x}dx,\ \alpha\in\mathbb{R}, \qquad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx.$$

On remarque qu'une intégrale généralisée peut être convergente mais pas absolument convergente, comme l'exemple suivant le montre.

Exemple 0.22. *On montre dans cet exemple que l'intégrale généralisée* $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ *est convergente mais pas absolument convergente.*

Soit $F(x)=\int_\pi^x \frac{\sin t}{t}dt$*. On a*

$$\begin{aligned}F(x)&=-\int_\pi^x \frac{\cos t}{t^2}dt+\left.\frac{-\cos t}{t}\right|_\pi^x\\&=-\int_\pi^x \frac{\cos t}{t^2}dt+\frac{\cos\pi}{\pi}-\frac{\cos x}{x}\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}\underbrace{-\int_\pi^x\frac{\cos t}{t^2}dt}_{\substack{\textit{absolument convergent}\\ \textit{donc la limite existe}}}-\frac{1}{\pi}-\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}}_{=0}$ *existe.*

En revanche, $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ *ne converge pas absolument. En effet, pour tout* $k\in\mathbb{N}$*,* $k>1$

$$\begin{aligned}F(k\pi)&=\int_\pi^{k\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\\&=\sum_{j=1}^{k-1}\int_{j\pi}^{(j+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\\&\geq\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{(j+1)\pi}\underbrace{\int_{j\pi}^{(j+1)\pi}|\sin x|dx}_{=2}\\&=\sum_{j=1}^{k-1}\frac{2}{(j+1)\pi}\xrightarrow{k\to\infty}+\infty.\end{aligned}$$

Remarque 0.23. *Si* $\int_a^\infty f(x)dx$ *converge et* $\lim_{x\to\infty}f(x)$ *existe, alors nécessairement* $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ *(cf le critère du Lemme 0.19 avec* $\beta=0$*). En revanche le fait que* $\int_a^\infty f(x)dx$ *converge absolument n'implique pas que* f *est bornée.*

Par exemple, considérons la fonction $\phi(x)=\max\{1-|x|,0\}$ *et la fonction* $f:[0,\infty[\to\mathbb{R}_+$ *définie par*

$$f(x)=\sum_{n=1}^\infty n\phi\left(n^3(x-n)\right)$$

qui est continue mais pas bornée sur $[0,\infty[$.

Puisque

$$\int_0^\infty n\phi\left(n^3(x-n)\right)dx = n^{-2}\int_{-n^4}^\infty \phi(y)dy = n^{-2}\int_{-1}^1 \phi(y)dy = n^{-2},$$

on a que pour tout $x \in [0,\infty[$

$$F(x) = \int_0^x |f(t)|dx \le \int_0^{\lceil x\rceil} \le \sum_{n=1}^{\lceil x\rceil}\int_0^\infty n\phi\left(n^3(x-n)\right)dx \le \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$$

Donc, F *est non décroissante est bornée supérieurement et la limite* $\lim_{x\to\infty} F(x)$ *existe. Il en suit que l'intégrale généralisée* $\int_0^\infty f(x)dx$ *converge absolument, même si* $\limsup_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque 0.24. *Soit un intervalle* I *qui n'est pas simultanément borné fermé, et une fonction c.p.m.* $f : I \to [0,\infty[$. *Comme* $f \ge 0$*, la limite (ou chacune des deux limites) intervenant dans la définition d'intégrale généralisée tend vers un nombre réel* ≥ 0 *ou vers* $+\infty$. *On peut donc dans ce cas écrire* $\int_I f(x)dx < \infty$ *si l'intégrale généralisée converge et* $\int_I f(x)dx = \infty = +\infty$ *si elle diverge.*

0.4 Intégrales et séries numériques

L'intégrale généralisée peut être utilisé aussi pour étudier la convergence d'une série numériques $\sum_{n=1}^\infty a_n$. L'idée est de construit la fonction c.p.m. $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = a_n$ pour $x \in [n, n+1[$ ou bien la fonction c.p.m. $\tilde{f} : [1,\infty[\to \mathbb{R}$, telle que $\tilde{f}(x) = a_n$, pour $x \in [n-1, n[$. Alors, pour tout $N \ge 0$,

$$\sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} a_n dx = \int_1^{N+1} f(x)dx = \int_0^N \tilde{f}(x)dx$$

et on peut utiliser les critères de comparaison pour les intégrales généralisées afin d'établir la convergence de la série.

Exemple 0.25. *On veut étudier la convergence de la série numérique* $S = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ *pour* $N \to \infty$.

Soit $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ *c.p.m. définie par* $f(x) = 1/n^2$ *si* $x \in [n, n+1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ *de telle sorte que* $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \int_1^{N+1} f(x)dx$. *On vérifie facilement que* $0 \le f(x) \le 1/(x-1)^2$ *sur* $[2,\infty[$ *et* $\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ *converge, d'où on déduit que* $\int_1^\infty f(x)dx$ *converge et*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \lim_{N\to\infty}\int_1^{N+1} f(x)dx < +\infty.$$

On peut encore utiliser les propriétés des intégrales généralisées pour donner des bornes par dessous et par dessus à la série S. *En effet, on a* $\frac{1}{x^2} \le f(x) \le \frac{1}{(x-1)^2}$ *pour tout* $x \in [1,\infty[$

du coup

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \int_1^2 f(x)dx + \int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}dx = 2,\\
S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_1^{\infty} f(x)dx \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1,
\end{aligned}
$$

On conclut donc $1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$.

Exercice 0.26. *Étudier si la série* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ *converge ou non.*