

Analyse I

David Wiedemann

Table des matières

1	Introduction	6
1.1	Buts du Cours	6
2	Définir \mathbb{R}	7
2.1	Exemple d'utilisation	9
3	Suites et limites	14
3.1	Convergence	14
4	Limsup et liminf	19
4.1	Suites de Cauchy	23
5	Series	24
5.0.1	Un calcul naïf (avec la série harmonique alternée) . . .	30
6	Fonctions	36
6.1	Continuité	41
7	Suites de Fonctions	48
8	Dérivation	53
8.1	Applications de la dérivée	56
8.1.1	Recherche d'extremums	56
8.2	Principe de Bernoulli-L'Hospital	61
8.3	Bernoulli-L'hospital pour infini sur infini	62
9	Polynome de Taylor et développements limites	63

List of Theorems

1	Theorème (env. -400)	6
2	Lemme (Lemme)	6
3	Axiom (Nombres Reels)	7

4	Lemme (Theorem name)	8
5	Proposition (Annulation de l'element neutre)	8
6	Corollaire (x fois moins 1 egale $-x$)	8
7	Axiom (Nombres Reels II)	9
1	Definition (valeur absolue)	9
8	Proposition (Inegalite du triangle)	9
2	Definition (Bornes)	10
9	Axiom (Axiome de completude)	10
3	Definition (Supremum)	10
14	Proposition	11
15	Corollaire (Propriete archimедienne)	11
16	Theoreme (La racine de deux existe)	11
18	Proposition (\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R})	12
19	Lemme	12
20	Proposition (Densite des irrationnels)	13
4	Definition (Suite)	14
5	Definition (Convergence de suites)	14
23	Lemme (Unicite de la limite)	14
6	Definition	15
25	Lemme	15
27	Proposition	15
28	Lemme	16
30	Proposition (Inversion d'une limite)	17
31	Corollaire	17
32	Lemme	17
34	Proposition	18
35	Proposition	18
37	Lemme (Deux gendarmes)	19
7	Definition (Limsup et liminf)	19
38	Theoreme	20
39	Theoreme (Premiere regle de d'Alembert)	20
8	Definition (Sous-suite)	21
44	Proposition	22
45	Theoreme (Bolzano-Weierstrass)	22
9	Definition (Point d'accumulation)	22
10	Definition (Suites de Cauchy)	23
48	Lemme	23
49	Theoreme (Convergence des suites de Cauchy)	23
50	Lemme	23
11	Definition (Serie)	24
53	Corollaire	25

54	Corollaire	25
55	Corollaire	26
56	Corollaire (Critere de Cauchy pour les séries)	26
58	Proposition	26
59	Proposition (Serie Geometrique)	27
60	Proposition (Série Harmonique)	27
61	Proposition (Critère de Comparaison)	28
63	Corollaire	28
12	Definition (Séries Alternées)	29
64	Theorème	29
13	Definition	30
68	Lemme	31
69	Theorème	31
71	Theorème	32
72	Theorème (Critere de d'Alembert 2)	33
78	Proposition	34
79	Theorème (Critere de la racine)	35
83	Lemme	36
14	Definition	36
15	Definition	37
85	Theorème	37
87	Corollaire	38
88	Corollaire	38
89	Corollaire	38
90	Corollaire	38
91	Lemme	38
92	Corollaire	39
93	Corollaire (Cauchy)	39
94	Lemme	39
95	Corollaire	40
97	Proposition	40
16	Definition	41
99	Proposition	41
101	Corollaire	41
102	Corollaire	41
104	Proposition	42
17	Definition (Terminologie Supplémentaire)	42
18	Definition	42
19	Definition	42
20	Definition	43
21	Definition (Notation)	43

22	Definition (Notation)	43
106	Theorème	43
107	Theorème	43
108	Proposition	44
23	Definition	44
113	Proposition	45
115	Theorème	45
117	Theorème (Théorème de la valeur intermédiaire (TVI))	46
118	Corollaire	46
119	Corollaire	47
120	Corollaire	47
121	Proposition (1er theoreme de la fonction implicite)	47
122	Lemme	47
123	Corollaire	48
24	Definition	48
25	Definition (Convergence uniforme de fonctions)	51
127	Proposition	51
128	Theorème	52
129	Theorème (Dini)	52
26	Definition	53
132	Proposition	53
133	Proposition	53
134	Corollaire	54
135	Proposition	54
137	Proposition	55
138	Theorème (Chain Rule)	55
139	Theorème	56
27	Definition (Point Critique)	56
28	Definition	57
142	Proposition	57
144	Proposition (Méthode de recherche d'extremum)	57
145	Theorème (theoreme de Rolle)	57
146	Theorème (théorème des accroissements finis TAF)	58
147	Corollaire	58
148	Corollaire	59
149	Corollaire	59
29	Definition (Fonctions Lipschitzienne)	59
151	Corollaire	59
153	Corollaire (Théorème de Darboux)	60
155	Theorème (Theoreme de Cauchy)	60
156	Theorème (Bernoulli-L'Hospital)	61

157	Theorème (BH pour l'infini)	61
158	Theorème	62
30	Definition (Polynome de Taylor)	63
159	Theorème (Formule de Taylor)	63
31	Definition (Developpement limite)	64
164	Proposition	64
165	Proposition	65
166	Theorème	65
169	Lemme	65

1 Introduction

1.1 Buts du Cours

Officiel :

Suites, series, fonctions, derivees, integrales , ...

Secrets :

Apprendre le raisonnement rigoureux

Creativite

Esprit Critique

Ne croyez rien tant que c'est pas prouve

On construit sur ce qu'on a fait, on recommence pas toujours a 0, par rapport a d'autres domaines (lettres par exemple)

Theorème 1 (env. -400)

Il n'existe aucun nombre (fraction) x tel que $x^2 = 2$.

Ca contredit pythagore non ?

On va demontrer le theoreme.¹

Lemme 2 (Lemme)

Soit $n \in \mathbb{N}$ Alors n pair $\iff n^2$ pair.

Preuve

\Rightarrow Si n pair $\Rightarrow n^2$ pair.

Hyp. $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$)

Donc $n^2 = 4m^2$, pair.

Par l'absurde, n impair. $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$).

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

impair. Donc si n est impair, alors n^2 est forcément impair. Absurde. □

Preuve

Supposons par l'absurde $\exists x$ t.q. $x^2 = 2$ et $x = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$).

On peut supposer a et b non tous pairs. (sinon reduire).

$$x^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$$

1. On demontre d'abord un lemme

pair.

Lemme : a pair, i.e. $a = 2n (n \in \mathbb{N})$.

$$a^2 = 4n^2 = 2b^2 \Rightarrow 2n^2 = b^2, \text{ i.e. } b^2 \text{ pair.}$$

Lemme : b pair.

Donc a et b sont les deux pairs, on a une contradiction.



□

En conclusion, le theoreme est bel et bien vrai, et contredit donc pythagore. Donc les fractions (\mathbb{Q}) ne suffisent pas a decire/mesurer les longueurs geometriques. Il faut les nombres reels, on les comprends seulement vraiment depuis 2 siecles.

C'est important de chercher ce genre d'erreurs.

Prochain but : definir les nombres reels (\mathbb{R}). L'interaction entre les fractions et les nombres reels.

2 Definir \mathbb{R}

On commence avec la definition axiomatique des nombres reels.

Axiom 3 (Nombres Reels)

\mathbb{R} est un corps, en d'autres termes :

Ils sont munis de deux operations : plus et fois.

— Associativite $x + (y + z) = (x + y) + z (x, y, z \in \mathbb{R})$ ²

— Commutativite $x + y = y + x$.

— Il existe un element neutre 0 t.q. $0 + x = x, x \in \mathbb{R}$.³

— Distributivite $x(yz) = (xy)z$

— Il existe un element inverse, unique $-x \in \mathbb{R}$ t.q. $x + (-x) = 0$

Remarque : Il existe beaucoup d'autres corps que \mathbb{R} , par exemple $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \{0, 1, 2\} \text{ mod } 3$

Attention : $\{0, 1, 2, 3\} \text{ mod } 4$ n'est pas un corps!

Presque tous marchent, ils satisfont 8 des 9 axiomes.

2. L'associativite n'est pas forcement vraie(octonions)

3. Il y a aucune difference entre les regles pour l'addition que pour la multiplication.

Lemme 4 (Theorem name)

$$\forall x \exists ! y \ t.q. \ x + y = 0.$$

Preuve

Supposons $x + y = 0 = x + y'$

A voir : $y = y'$.

$$\begin{aligned} y &= y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' \\ &= (x + y) + y' = 0 + y' = y' \end{aligned}$$

CQFD.

□

Exercice

Démontrer que 0 est unique.

Proposition 5 (Annulation de l'élément neutre)

$$0 \cdot x = 0$$

Preuve

$$x = x \cdot 1 = x(1 + 0) = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$$

$$0 = x + (-x) = x + (-x) + x \cdot 0$$

□

$$\Rightarrow 0 = x \cdot 0$$

4

Corollaire 6 (x fois moins 1 égale -x)

$$x + x \cdot (-1) = 0$$

Preuve

A voir : $x \cdot (-1)$ satisfait les propriétés de $-x$.

Or

$$x + x(-1) = x(1 - 1) = x \cdot 0 = 0.$$

□

Exercice

Montrer que $\forall x : -(-x) = x$ et que ceci implique $(-a)(-b) = ab$.

Rien de tout ça n'a quelque chose à voir avec \mathbb{R} .

Il nous faut plus d'axiomes!!

$$4. \ a - b = a + (-b)$$

Axiom 7 (Nombres Reels II)

\mathbb{R} est un corps ordonne. Ce qui revient a dire que les assertions suivantes sont verifiees.

— $x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$

— $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$

— pour tout couple de nombres reels x et y : ou bien $x \leq y$ ou bien $x \geq y$.

Exemple de corps ordonnes :

(1) \mathbb{R} , (2) \mathbb{Q} , (3) $\{0, 1, 2\} \pmod{3}$ n'est pas un corps ordonne.

Exercice

$x \leq y \iff -x \geq -y$ **Exercice**

$x \leq y$ et $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$

$x \leq y$ et $z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz$.

Il nous manque encore un axiome, et c'est le dernier : pour mercredi !

Lecture 2: Cours Mercredi

Wed 16 Sep

2.1 Exemple d'utilisation

Definition 1 (valeur absolue)

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposition 8 (Inegalite du triangle)

Elle dit que

$$\forall x, y : |x + y| \leq |x| + |y|$$

Preuve

Cas $x, y \geq 0$: alors $x + y \geq 0$

$$\iff x + y \leq x + y$$

Ce qui est toujours vrai.

Cas $x \geq 0$ et $y < 0$.

Si $x + y \geq 0$, alors

$$\iff |x + y| \leq x - y$$

$$\iff x + y \leq x - y$$

$$y \leq -y$$

c'est vrai car $y < 0$.

Si $x + y < 0$, alors

$$\Longleftrightarrow -x - y \leq x - y$$

□

Donc $-x \leq x$ vrai car $x \geq 0$.

Definition 2 (Bornes)

Terminologie : Soit $A \subseteq E$, E corps ordonné.

— Une borne supérieure (majorant) pour A et un nombre b tq

$$a \leq b \forall a \in A.$$

— Une borne inférieure (minorant) pour A et un nombre b tq

$$a \geq b \forall a \in A.$$

On dira que l'ensemble A est borne si il admet une borne.

Axiom 9 (Axiome de completude)

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \neq \emptyset$$

et majorée $\exists s \in \mathbb{R}$ t.q

1. *s est un majorant pour A .*

2. *\forall majorant b de A , $b \geq s$.*

Cet axiome finis la partie axiomatique du cours.

Remarque

1. *$\forall s' < s \exists a \in A : a > s'$.*

2. *s est unique.*

Definition 3 (Supremum)

Ce s s'appelle le supremum de A , note $\sup(A)$.

Remarque

\exists (pour A minore et $\neq \emptyset$) une borne inférieure plus grande que toutes les autres, notée $\inf(A)$ (infimum).

$$\inf(A) = -\sup(-A)$$

Remarque

Si $\sup(A) \in A$, on l'appelle le maximum.

Remarque

Si $\inf(A) \in A$, on l'appelle le minimum.

Proposition 14

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x.$$
Preuve

Par l'absurde,

Alors

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : n < x$$

$\Rightarrow \mathbb{N}$ borne et $\neq \emptyset \Rightarrow \exists s = \sup(\mathbb{N})$

$$s - \frac{1}{2} < s \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > s - \frac{1}{2}$$

$$n + 1 \in \mathbb{N} \text{ et } n + 1 > s - \frac{1}{2} + 1 = s + \frac{1}{2}$$

donc $n + 1 > s$ absurde. □

Corollaire 15 (Propriété archimédienne)

$$1. \forall x \forall y > 0 \exists n \in \mathbb{N} : ny > x.$$

$$2. \forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon$$

Preuve

Pour 2, appliquer la proposition à $x = \frac{1}{\epsilon} \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{1}{\epsilon}$

Alors

$$\Rightarrow \epsilon > \frac{1}{n}$$

Pour montrer le 1.

Considérer $\frac{x}{y}$ □

On peut maintenant montrer que la racine de deux existe.

Théorème 16 (La racine de deux existe)

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

Preuve

$$A := \{y | y^2 < 2\}$$

Clairement $A \neq \emptyset$ car $1 \in A$. De plus, A est majorée : 2 est une borne. (si $y > 2$, $y^2 > 4 > 2 \Rightarrow y \notin A$).

Donc $\exists x = \sup(A)$

Supposons (par l'absurde) que $x^2 < 2$

Soit $0 < \epsilon < 1, \frac{2-x^2}{4x}$.

Clairement, par hypothese $2 - x^2 > 0$ et idem pour $4x$ car $x \geq 1$. Soit $y = x + \epsilon$, alors

$$y^2 = x^2 + 2\epsilon x + \epsilon^2 < x^2 + \frac{2-x^2}{2} + \frac{2-x^2}{2} = 2$$

$\Rightarrow y \in A$ Mais $y = x + \epsilon > x$. Absurde car $x = \sup(A)$. Donc $x^2 \geq 2$. Deuxiemement, supposons (absurde) $x^2 > 2$.

Soit $0 < \epsilon < \frac{x^2-2}{2x} > 0$.

Posons $b = x - \epsilon$.

$$\begin{aligned} b < x &\Rightarrow \exists y \in A : y > b \\ \Rightarrow y^2 > b^2 &= x^2 - 2\epsilon x + \epsilon^2 > x^2 - \underbrace{2\epsilon x}_{< x^2-2} \\ &> x^2 - (x^2 - 2) = 2. \end{aligned}$$

Conclusion : $y^2 > 2$ contredit $y \in A$.

Donc $x^2 = 2$. □

Remarque

Preuve similaire :

$$\forall y > 0 \exists! x > 0 : x^2 = y$$

Proposition 18 (\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R})

$$\forall x < y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y$$

Lemme 19

$$\forall x \exists n \in \mathbb{Z} : |n - x| \leq \frac{1}{2}$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} \forall x \exists [x] \in \mathbb{Z} \text{ tq} \\ \begin{cases} [x] \leq x \\ [x] + 1 > x \end{cases} \end{aligned}$$

Preuve

$$\exists n \in \mathbb{Z} : n > x \text{ (Archimede).}$$

Soit $[x] = \inf\{n \in \mathbb{Z} : n > x\} - 1$ □

Preuve (Preuve de la densité)

Archimède : $\exists q \in \mathbb{N} : q > \frac{1}{y-x}$.

Donc

$$\begin{aligned} & qy - qx > 1. \\ \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : qx < p < qy \end{aligned}$$

par exemple :

$$p = [qy]$$

si $qy \notin \mathbb{Z}$ ou bien

$$p = qy - 1$$

si $qy \in \mathbb{Z}$

□

Lecture 3: Suites

Wed 23 Sep

0,999

0,9

0.99

0.999

0.9999

\vdots

Proposition 20 (Densité des irrationnels)

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, les irrationnels sont dense dans \mathbb{R} .

Preuve

Soit $x < y$ (dans \mathbb{R}).

Cherche $z \notin \mathbb{Q}$ tq $x < z < y$.

$$\exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ tq } x < \frac{p}{q} < y$$

Prop. archimédienne $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} :$

$$\underbrace{\frac{p}{q} + \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{n}}_{:=z} < y$$

car

$$\exists n : \frac{1}{n} < \underbrace{y - \frac{1}{q}}_{>0} / \sqrt{2}$$

Il reste a voir que : $z = \frac{p}{q} + \sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$

$$\sqrt{2} = n(z - \frac{p}{q})$$

$$z \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \quad \text{⚡}$$

□

3 Suites et limites

Definition 4 (Suite)

Une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dans \mathbb{R} est une application (= fonction) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Remarque

Suite $(x_n) \neq$ ensemble $\{x_n\}$ Il arrive qu'on indice x_n par une partie de \mathbb{N} . Mais suite = suite infinie

Exemple

$$x_n = \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$$

$$x_n = (-1)^n; x_n = n!; F_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$$

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415$$

3.1 Convergence

Definition 5 (Convergence de suites)

L'expression $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ signifie :

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$$

On dit alors que (x_n) converge (vers l). Sinon, (x_n) diverge.

Lemme 23 (Unicité de la limite)

Si (x_n) converge, il existe un unique $l \in \mathbb{R}$ tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$

Preuve

Supposons l, l' limites. Si $l \neq l'$, alors $|l - l'| > 0$ Donc $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \frac{|l - l'|}{2}$

De meme $\exists n_1 \forall n > n_1 : |x_n - l'| < \frac{|l - l'|}{2}$

Soit $n > n_0, n_1$ Alors :

$$|l - l'| = |l - x_n + x_n - l'| \leq \underbrace{|l - x_n|}_{< |l - l'|/2} + \underbrace{|x_n - l'|}_{|x_n - l'|}$$

Donc

$$|l - l'| < 2 \cdot \frac{|l - l'|}{2}$$

⚡

□

Exemple

1. Si (x_n) est constante ($\exists a \forall n : x_n = a$) alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ (Archimede)

Definition 6

Terminologie :

(x_n) est bornée, majorée, minorée, rationnelle, ... etc si l'ensemble $\{x_n\}$ l'est.

La suite (x_n) est croissante si $x_n \leq x_{n+1} \forall n$ Idem décroissante Dans les deux cas, on dit que la suite (x_n) est monotone

Lemme 25

Toute suite convergente est bornée.

Preuve

Posons $\epsilon = 7$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |x_n - l| < 7$$

□

Soit $B_1 \geq |x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|$

Posons $B = \max(B_1, |l| + 7)$ Alors $|x_n| \leq B \forall n$.

Attention la réciproque n'est pas vraie!!

Exemple

$x_n = (-1)^n$ définit une suite bornée non convergente.

Preuve

Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = l$.

Posons $\epsilon = \frac{1}{10}$ alors $\exists n_0 \forall n > n_0 : |(-1)^n - l| < \frac{1}{10}$

$n > n_0$ pair $\Rightarrow |1 - l| < \frac{1}{10}$

$n > n_0$ impair $\Rightarrow |-1 - l| < \frac{1}{10}$

ceci implique

$$\Rightarrow |1 - (-1)| \leq |1 - l| + |-1 - l| < \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

□

Proposition 27

Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x'_n = l'$

Alors 1. : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + x'_n) = l + l'$, et 2. : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot x'_n = l \cdot l'$

Preuve

1 :

Soit $\epsilon > 0$ Cherche n_0 tq $\forall n > n_0 : |x_n + x'_n - (l + l')| < \epsilon$.

Appliquons les deux hypothèses à $\frac{\epsilon}{2}$: $\exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ et

$\frac{\epsilon}{2} : \exists N' \forall n > N' : |x'_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ Posons $n_0 = \max(N, N')$
 Si $n > n_0$, alors

$$|x_n + x'_n - (l + l')| \leq |x_n - l| + |x'_n - l'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

2 :

Par le lemme, $\exists B$ tq. $|x_n|, |x'_n| < B \forall n$.

Soit $\epsilon > 0$. Appliquons les hypotheses a $\frac{\epsilon}{2B}$.

$$\exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2B}$$

Si $n > n_0 := \max(N, N') :$

$$\begin{aligned} |x_n x'_n - ll'| &\leq |x_n x'_n - x_n l'| + |x_n l' - ll'| \\ &= \underbrace{|x_n|}_{< B} \cdot \underbrace{|x'_n - l'|}_{< \frac{\epsilon}{2B}} + \underbrace{|l'|}_{< B} \cdot \underbrace{|x_n - l|}_{< \frac{\epsilon}{2B}} < \epsilon \end{aligned} \quad \square$$

Lemme 28

On a utilise : lemme Si $x_n \leq B \forall n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ alors $l \leq B$

Preuve

Par l'absurde :

Si $l > B$, posons $\epsilon = l - B > 0$

$\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$

en particulier $x_n > l - \epsilon = B \nmid$ □

Lecture 4: lundi

Mon 28 Sep

Remarque

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = |\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n|$, ce qui est sous-entendu ici est que la limite existe.
- $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergence et limite sont inchangées si on modifie un nombre fini de termes.
 En particulier $(x_n)_{n=17}^{\infty}$, rien ne change.
- $x_n \rightarrow l$ ($n \rightarrow \infty$), équivalent a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$
- On dit que (x_n) converge vers $+\infty$ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, si (x_n) diverge de la façon suivante :

$$\forall R \in \mathbb{R}, \exists n_0 \forall n > n_0 : x_n > R$$

La définition est la même si x_n converge vers $-\infty$

Proposition 30 (Inversion d'une limite)

Supposons que (x_n) converge vers $l \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{l}$

Corollaire 31

Si (x_n) converge vers l et

Si (y_n) converge vers $m \neq 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{l}{m}$$

Car $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$

Lemme 32

Sous les hypotheses de la proposition,

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n \neq 0$$

Preuve

Appliquons la convergence à $\epsilon = \frac{|l|}{2}$ (car $l \neq 0$)

$$|x_n - l| < \epsilon \Rightarrow x_n \neq 0$$

□

Preuve

Preuve de la proposition

Soit $\epsilon > 0$.

On veut estimer

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{l} \right| = \underbrace{\frac{|l - x_n|}{|x_n - l|}}_{\geq \frac{|l|}{2} |l|} < ? \epsilon$$

pour n comme dans le lemme. On veut donc

$$|l - x_n| < \epsilon \frac{|l|^2}{2}$$

Donc $\exists n_1 \forall n \geq n_1$, on a bien $|l - x_n| < \epsilon$

□

Exemple

On peut à présent calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_d n^d}{b_0 + \dots + b_f n^f}$$

$$a_d \neq 0, b_f \neq 0$$

Si $d > f$ alors $\lim = \pm \infty$

Si $d < f$ alors $\lim = 0$

Si $d = f$, alors $\lim = \frac{a_d}{b_f}$

Justification

La suite peut s'écrire

$$\frac{a_d + a^{d-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^{d-1}}}{b_0 \frac{1}{n^d} + \dots + b_f \frac{1}{n^{f-d}}}$$

Si $f = d$, $\rightarrow \frac{a_d}{b_f}$

Si $f > d$, $\rightarrow 0$

Si $f < d$, $\rightarrow \pm\infty$, selon signe de $\frac{a_d}{b_f}$

Proposition 34

Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $|a| < 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$$

Proposition 35

Si (x_n) est monotone et bornée, alors elle converge.

Preuve

Soit (x_n) croissante. Affirmation, $x_n \rightarrow s := \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Soit $\epsilon > 0$, $\exists n : x_n > s - \epsilon$ (def. de sup)

$\forall n \geq n_0 : s - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq s \Rightarrow |x_n - s| < \epsilon$

Idem, si elle était décroissante. □

Preuve

Remarque : $(x_n) \rightarrow 0 \iff (|x_n| \rightarrow 0)$.

$$\dots |x_n - 0| < \epsilon$$

Donc on va traiter le cas $a > 0$, alors $(a^n)_{n=1}^\infty$ est décroissante.

Bornée (par zero et 1) \Rightarrow elle admet une limite l .

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{n+1}}_{a \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n}$ Donc $l = al$. Si $l \neq 0$, $1 = a$ absurde, donc l nul. □

Exemple

Def (x_n) en posant $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$

Observons que $x_n \geq 2 > 0 \forall n$

Si (x_n) converge, alors

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + \frac{1}{x_n}) = 2 + \frac{1}{l}$$

Donc

$$l^2 - 2l - 1 = 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{1+1} = l$$

Or $l \geq 2 \Rightarrow l = 1 + \sqrt{2}$ si l existe.

A present, estimons $|x_n - l|$:

$$\begin{aligned} \left| x_n - 1 - \sqrt{2} \right| &= \left| 2 + \frac{1}{x_{n-1}} = \left(2 + \frac{1}{l} \right) \right| = \frac{|l - x_{n-1}|}{x_{n-1}l} \leq \frac{|x_{n-1} - l|}{4} \\ &\leq \dots \leq \frac{|x_{n-2} - l|}{4^2} \leq \frac{|2 - l|}{4^n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

car $\frac{1}{4^n} \rightarrow 0$

Lemme 37 (Deux gendarmes)

Soit $(x_n), (y_n), (z_n)$ trois suites avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$$

si $x_n \leq y_n \leq z_n \forall n$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = l$$

Preuve

repose sur le fait que

$$|x_n - l|, |z_n - l| < \epsilon \Rightarrow l - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \epsilon$$

montre $|y_n - l| < \epsilon$

□

4 Limsup et liminf

Definition 7 (Limsup et liminf)

Soit (x_n) une suite quelconque.

On definit la limite superieure par :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf_n \sup \{x_k, k \geq n\}$$

Attention : Ici on convient que

$$\sup(A) = +\infty$$

si A non majore

$$\inf(A) = -\infty$$

si A non minore

On definit la limite superieure par :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup_n \inf \{x_k, k \geq n\}$$

Notez : $z_n := \sup \{x_k : k \geq n\}$

Cela definit une suite decroissante et donc (z_n) converge vers son inf.

Conclusion : $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} x_k$

Lecture 5: mercredi 30

Wed 30 Sep

Theorème 38

(x_n) converge $\iff \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ Dans ce cas, la limite prend cette même valeur.

Preuve

$\Leftarrow :$

Soit $z_n = \sup \{x_p : p \geq n\}$,

$$y_n = \inf \{x_p : p \geq n\}$$

Rappel : $(z_n) \rightarrow LS$ et $(y_n) \rightarrow LI$

Or, $y_n \leq x_n \leq z_n$. Donc par les 2 gendarmes

$$\Rightarrow (x_n) \rightarrow LS = LI$$

$\Rightarrow :$

Hypothèse : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$.

A voir : $LS = LI = l$.

Montrons par exemple que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = l$$

(i.e. $LS = l$)

Soit $\epsilon > 0$.

$$\exists N \forall n \geq N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{et } \forall n \geq N : |z_n - LS| < \frac{\epsilon}{4}$$

Def. de $z_N \Rightarrow \exists p \geq N : |x_p| > z_N - \frac{\epsilon}{4}$

A present

$$|LS - l| \leq \underbrace{|LS - z_N|}_{< \frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|z_n - x_p|}_{< \frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|x_p - l|}_{< \frac{\epsilon}{2}}$$

avec $p \geq N$ et $N \geq N$ Donc $\forall \epsilon > 0 :$

$$|LS - l| < \epsilon$$

Donc $LS = l$

□

Theorème 39 (Première règle de d'Alembert)

Supposons $x_n \neq 0 \forall n$

Supposons que $\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|$ existe

Si $\rho < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

Si $\rho > 1$, alors (x_n) diverge.

Remarque

Si $\rho = 1$, on ne peut rien conclure

Exemple

- $x_n = n$ diverge, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$
- $x_n = \frac{1}{n}$ converge mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$

Preuve

Supposons $\rho < 1$.

A voir : $x_n \rightarrow 0$.

Soit $\rho < r < 1$. Convergence pour $\epsilon = r - \rho$: $\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - \rho \right| < r - \rho$

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < r$$

i.e. $|x_{n+1}| < r |x_n|$ de meme $|x_{n+2}| < r |x_{n+1}| < r^2 |x_n|$

Conclusion $\forall m \geq n_0 : |x_m| < r^{m-n_0} |x_{n_0}|$

Donc

$$\forall m \geq n_0 : |x_m| < r^m |x_{n_0}| r^{-n_0}$$

On sait que $\lim_{m \rightarrow +\infty} r^m = 0$ donc

$$0 \leq |x_m| \leq r^m c$$

avec c constante Cas $\rho > 1$.

On va montrer que $|x_n|$ est non bornée.

Soit $1 < r < \rho$.

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |x_{n+1}/x_n| > r$$

Donc

$$|x_{n+1}| > r |x_n|$$

comme avant :

$$x_m > r^{m-n_0} |x_{n_0}|$$

□

Remarque

Si $r > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = +\infty$ r^n est croissante donc il suffit de montrer que la suite est non bornée.

Si elle était bornée, soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} r^n \in \mathbb{R}$

Mais $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n+1} = rl$

Donc $l \neq 0 \Rightarrow 1 = r$ absurde.

Définition 8 (Sous-suite)

Soit $(x_n)_{n=1}^\infty$ une suite.

Une sous-suite de (x_n) est une suite de la forme $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$, ou $(n_k)_{k=1}^\infty$ est une suite strictement croissante de \mathbb{N} .

Exemple

Si (x_n) est une suite, considérer :

$$x_2, x_3, x_5, x_7, x_{11}, x_{13}, \dots$$

Ici, $n_k = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$

Proposition 44

Si x_n converge, alors toute sous-suite converge vers la même limite.

Preuve

Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Soit $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ une sous-suite et $\epsilon > 0$.

A voir : $\exists k_0 \forall k > k_0 : |x_{n_k} - l| < \epsilon$

Or $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$.

Donc il suffit de choisir k_0 tq $n_{k_0} \geq n_0$.

(puisque la suite (n_k) est croissante.) □

Theorème 45 (Bolzano-Weierstrass)

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente

Preuve

On va construire une sous-suite qui converge vers $s := \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$

Ici, (x_n) est la suite en question et on pose

$$z_n = \sup \{x_p : p \geq n\}$$

Par récurrence, n_1 quelconque.

Supposons n_{k-1} construit et construisons n_k :

$$\exists N \forall n \geq N : |z_n - s| < \frac{1}{k}$$

Choisissons un $n \geq N, n_{k-1} + 1$

$$\exists p \geq n \text{ t.q. } x_p > z_n - \frac{1}{k}$$

On définit $n_k = p$ ($n_k > n_{k-1}$)

$$\text{Or, } \underbrace{|x_{n_k} - s|}_{< \frac{1}{k}} \leq \underbrace{|x_{n_k} - z_n|}_{< \frac{1}{k}} + \underbrace{|z_n - s|}_{< \frac{1}{k}}$$

Donc $(x_{n_k}) \rightarrow s$ ($k \rightarrow \infty$) □

Définition 9 (Point d'accumulation)

x est un point d'accumulation de la suite x_n s'il existe une sous-suite qui converge vers x .

Exemple

$$x = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$x = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

4.1 Suites de Cauchy

Definition 10 (Suites de Cauchy)

La suite (x_n) est dite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < \epsilon$$

Attention :

Il ne suffit pas de comparer x_n et x_{n+k} pour k fixe.

Exemple

$$x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\text{Cauchy} \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall k \in \mathbb{N} : |x_n - x_{n+k}| < \epsilon$$

Lemme 48

Si (x_n) converge, elle est de Cauchy.

Preuve

Soit $\epsilon > 0$, soit l la limite.

Hypothèse :

$$\text{avec } \frac{\epsilon}{2} : \exists N \forall n \geq N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

Si $n, n' \geq N$

$$|x_n - x_{n'}| \leq |x_n - l| + |x_{n'} - l| < \epsilon$$

□

Theorème 49 (Convergence des suites de Cauchy)

Toute suite de Cauchy converge

Preuve

Soit (x_n) de Cauchy.

Lemme 50

(x_n) est bornée.

Preuve

Soit $\epsilon = 10$

$$\forall N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < 10$$

Donc (x_n) est bornée par

$$\max(|x_N| + 10, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|)$$

□

Appliquer Bolzano-Weierstrass

$$\exists \text{ sous-suite } (x_{n_k})$$

qui converge, soit l sa limite. A voir (x_n) converge vers l .

soit $\epsilon > 0 \exists k_0 \forall k \geq k_0 |x_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2}$

$$\exists N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < \frac{\epsilon}{2}$$

Si $n \geq N, n_{k_0}$ alors

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < \epsilon$$

□

Lecture 6: lundi

Mon 05 Oct

Remarque

Ecriture decimale : 3.1415... ou encore 0.333... veut dire

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \dots$$

une somme infinie de fractions. La difference entre le n ieme terme et le n' ieme terme :

$$\leq 10^{-n} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Cauchy}$$

Cette limite est une "somme infinie".

5 Series

But : definir les "sommes infinies" .

$$\rightarrow \begin{cases} \text{Existe?} \\ \text{Valeur?} \end{cases}$$

Exemple

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$$

ou encore

$$\exp(x) = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \dots$$

ou

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Definition 11 (Serie)

Le symbole $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ représente

$x_0 + x_1 + x_2 + \dots$ et est defini par

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x_k$$

On appelle

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

une série et on dit qu'elle converge/diverge lorsque la suite $s_n := x_0 + \dots + x_n$ le fait.

Corollaire 53

Si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ existent, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

Preuve

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n, s_n = \sum_{k=0}^n x_k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n, t_n = \sum_{k=0}^n y_k$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n, \text{ où}$$

$$u_n = (x_0 + y_0) + \dots + (x_n + y_n) = s_n + t_n$$

Donc la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n + t_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

□

Corollaire 54

Pour $a \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} ax_n = a \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

existe.

Sans preuve.

Corollaire 55

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n \text{ existe si } \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ existe et vaut}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n - (x_0 + x_1 + \dots + x_{n_0-1})$$

n

Corollaire 56 (Critere de Cauchy pour les séries)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ converge} \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : \left| \sum_{p=N}^n x_p \right| < \epsilon$$

(Dans ce cas, $|\sum_{n=N}^{\infty} x_n| \leq \epsilon$)

Preuve

Appliquer Cauchy à la suite s_n :

$$\exists n_0 \forall n, n' > n_0 : |s_n - s_{n'}| < \epsilon$$

Alors

$$\left| \sum_{p=n'+1}^n x_p \right| < \epsilon$$

Exemple

Ecriture decimale,

Proposition 58

Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

Preuve

Appliquer Cauchy à $\underbrace{s_n - s_{n-1}}_{=x_n}$

Attention, la réciproque est FAUSSE.

□

2 Exemples

Proposition 59 (Serie Geometrique)

Soit $r \in \mathbb{R}$ avec $|r| < 1$, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Preuve

Soit

$$s_n = r^0 + r^1 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n+1} = 0$$

□

Donc $s_n \rightarrow \frac{1}{1-r}$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$$

Proposition 60 (Série Harmonique)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge (vers } +\infty)$$

Preuve

Considérons

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \underbrace{\frac{1}{2^n+1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{2^{n+1}-2^n=2^n \text{ termes.}} + \dots$$

Tous ces termes sont $\geq \frac{1}{2^{n+1}}$

Cette somme est :

$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} \geq 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

□

Contredit Cauchy pour $\epsilon = \frac{1}{2}$.

Astuce utile :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Preuve

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \quad \square$$

Donc ça converge.

C'est une série télescopique

Proposition 61 (Critère de Comparaison)

Supposons $0 \leq x_n \leq y_n$.

Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ converge, alors } \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ aussi.}$$

Preuve

$$s_n = x_0 + \dots + x_n$$

est croissante. Donc converge $\iff (s_n)$ bornée.

Mais $y_0 + \dots + y_n$ converge \Rightarrow bornée et $s_n \leq y_0 + \dots + y_n \Rightarrow (s_n)$ bornée \square

Remarque

De plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

Si, par contre,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ diverge}$$

Corollaire 63

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge.

Preuve

$$\forall n \geq 2 : \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Or

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \text{ converge.}$$

Donc, par comparaison, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge .}$$

□

Lecture 7: mercredi

Wed 07 Oct

Definition 12 (Séries Alternées)

(x_n) est alternée si $x_n \cdot x_{n+1} \leq 0 \forall n$

Theorème 64

Soit (x_n) alternée, $|x_n|$ décroissante, et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ converge.}$$

Exemple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge. (série harmonique alternée)⁵

Preuve

On utilise cauchy.

Soit $n, m \in \mathbb{N}$.

$$\underbrace{x_n + x_{n+1}}_{\geq 0} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m-1} + x_{n+m}$$

Cas $x_n \geq 0$:

Cas où n pair

$$0 \leq \sum_{p=n}^{n+m} x_p \leq x_n$$

Si m impair :

idem

Que n soit pair ou impair

$$\left| \sum_{p=n}^{n+m} x_p \right| \leq |x_n|$$

5. En fait la série converge vers $-\log 2$

Or, soit $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \Rightarrow$$

$$\exists N \forall n > N |x_n| \leq \epsilon.$$

$$\text{Donc } \forall n > N, m |$$

$$|x_n + \dots + x_{n+m}| < \epsilon$$

□

5.0.1 Un calcul naïf (avec la série harmonique alternée)

Soit $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, existe par le théorème.

Note : $S < 0$.

$$s_n = \underbrace{-1 + \frac{1}{2}}_{=-\frac{1}{2}} - \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{<0} - \dots + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$s_n < -\frac{1}{n}, \forall n \text{ pair} \Rightarrow S \leq -\frac{1}{2}$$

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

à chaque terme x_n , on associe x_{2n}

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \dots \\ &= \frac{1}{2}(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots) = \frac{1}{2}S \end{aligned}$$

Donc $S = \frac{1}{2}S \Rightarrow S = 0$ Faux!

Conclusion :

On ne peut pas permuter (en général) les termes d'une série convergente (somme infinie)

Definition 13

On dit que la somme de

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge absolument si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

converge.

Note : la valeur

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

ne nous intéresse pas

Remarque

Si $x_n \geq 0 \forall n$, aucune différence entre “convergence” et “convergence absolue”.

Exemple

— La série harmonique alternée converge, mais pas absolument.

Lemme 68

Convergence absolue implique la convergence.

Preuve

$$\forall n : 0 \leq x_n + |x_n| \leq 2|x_n|$$

Donc convergence absolue \Rightarrow

$$\sum (x_n + |x_n|)$$

converge.

Or $-\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ converge.

Somme des deux sommes ci-dessus, implique que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

□

Theorème 69

Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge absolument, alors toute permutation converge vers la même somme.

Exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Clarification :

Soit σ une permutation de \mathbb{N} , i.e. bijection.

La nouvelle série sera

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ pour } y_n = x_{\sigma(n)}$$

Notons $s_n = x_0 + \dots + x_n$ et

$$t_n = y_0 + \dots + y_n = x_{\sigma(0)} + \dots + x_{\sigma(n)}$$

Le théorème dit : si $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ existe, alors $\lim s_n = \lim t_n$.

Preuve

1er cas "facile".

Supposons $x_n \geq 0 \forall n$.

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sup \{s_n | n \in \mathbb{N}\}$

On va montrer que $\underbrace{\sup_n s_n}_{=:s} \geq \underbrace{\sup_n t_n}_{=:t}$ et que $\sup_n s_n \leq \sup_n t_n$

Pour $s \geq t$:

Soit $\epsilon > 0$. Or, par déf, $\exists n t_n > t - \epsilon$

ie

$$y_0 + \dots + y_n > t - \epsilon$$

ie

$$x_{\sigma(0)} + \dots + x_{\sigma(n)} > t - \epsilon$$

Soit $m = \max_{i=0, \dots, n} \sigma(i)$, alors

$$s_m \geq t - \epsilon$$

donc

$$s = \sup s_n > t - \epsilon$$

vrai $\forall \epsilon > 0 \Rightarrow s \geq t$

En considérant σ^{-1} , on obtient de même $t \geq s \Rightarrow s = t$, donc le théorème vrai SI

$x_n \geq 0$.

2ème cas : $x_n \leq 0 \forall n$, idem

Cas général :

Posons $x_n = x'_n + x''_n$, ou $x'_n = \max(x_n, 0)$ et $x''_n = \min(x_n, 0)$, alors

$$x_{\sigma(n)} = x'_{\sigma(n)} + x''_{\sigma(n)}$$

On conclut en appliquant le cas (1) à x'_n et (2) ou x''_n

□

Theorème 71

Supposons que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge, mais pas absolument.

$\forall l \in \mathbb{R} \exists$ permutation σ t.q.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = l.$$

Lecture 8: Series fin

Mon 12 Oct

Theorème 72 (Critere de d'Alembert 2)

Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \rho$ existe.

Si $\rho < 1$ alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

converge absolument.

Si $\rho > 1$, alors elle diverge.

Preuve

Si $\rho > 1$, x_n diverge donc ne converge pas vers 0, donc $\sum x_n$ diverge.

Supposons $\rho < 1$. $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{\rho+1}{2}$.

On déduit que

$$|x_n| \leq \left(\frac{\rho+1}{2} \right)^{n-n_0} |x_{n_0}|$$

Donc

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|$$

peut etre comparee à

$$|x_{n_0}| \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{\rho+1}{2} \right)^{n-n_0}$$

Or la série ci-dessus est une série géométrique avec $\frac{\rho+1}{2} < 1$, donc elle converge.

Donc

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|$$

converge car la série géométrique converge, il suit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge absolument. □

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument.

Preuve

$x_n = \frac{x^n}{n!}$, alors

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| \rightarrow 0$$

□

Exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$x_n = \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Alors

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \left| \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)} \right| \rightarrow 0$$

Remarque

Si $\rho = 1$ on ne peut rien conclure.

Exemple

$$\sum \frac{1}{n} \text{ diverge, or } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

Idem pour

$$\sum n$$

Exemple

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge, or

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

Proposition 78

On admet que

$$\forall x \geq 0 \exists ! x^{\frac{1}{n}} : (x^{\frac{1}{n}})^n = x$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

Preuve

Posons $\epsilon_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$, (a voir : $\epsilon_n \rightarrow 0$).

$$\begin{aligned} n &= ((1 + \epsilon_n)^{\frac{1}{n}})^n = 1 + n\epsilon_n + \frac{n(n-1)}{2} \underbrace{\epsilon_n^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} \epsilon_n^2 \\ \Rightarrow \epsilon_n &\leq \left(\frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

□

Theorème 79 (Critere de la racine)

Soit $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} (|x_n|)^{\frac{1}{n}}$.

Si $L < 1$, alors $\sum x_n$ converge absolument

Si $L > 1$, alors $\sum x_n$ diverge.

Exemple

Soit

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Exemple

1.

$$\sum \frac{x_n}{n!}, \text{ alors}$$

$$|x_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n!}^{\frac{1}{n}} \text{ donc } |x_n| \rightarrow 0 \text{ (exo)}$$

2.

$$\sum n \text{ diverge, } n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

3.

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge, or

$$\frac{1}{n^2}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} \rightarrow 1$$

Preuve

Si $L > 1$,

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \left\{ |x_k|^{\frac{1}{k}} : k \geq n \right\}$. Donc $\exists n_0 \forall n > n_0 : z_n > 1$, i.e.

$$\exists k \geq n : |x_k| > 1^k = 1$$

x_n ne converge pas vers zero \implies la série ne converge pas.

Si $L < 1$,

$\exists n_0 \forall n > n_0 : z_n < \frac{1+L}{2}$, or

$$|x_n| \leq z_n^n < \left(\frac{1+L}{2} \right)^n$$

On conclut par converge avec la série géométrique. □

Exemple

Posons $x_0 = 0$, et $x_{n+1} = \frac{1+nx_n}{2^{n+1}}$

Notons (exo par récurrence)

$$\forall n \leq 2^n$$

Donc

$$0 \leq x_n \leq 1$$

On a

$$x_n^{\frac{1}{n}} = \frac{(n+1)^{\frac{1}{n}}}{2 \cdot 2^{\frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Le critère s'applique : $L < 1$.

Lemme 83

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$$

Preuve

A voir : $(\sqrt[n]{n!})^2 \rightarrow +\infty$.

Or $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \geq \frac{n}{2} (\frac{n}{2} + 1) \cdot \dots \cdot n$

Si n pair.

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} (\frac{n}{2} + 1) \cdot \dots \cdot n \\ \geq (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Donc $\sqrt[n]{(n!)^2} \geq \sqrt[n]{(\frac{n}{2})^n} = \frac{n}{2} \rightarrow \infty$

□

6 Fonctions

En général, fonctions = applications = map.

En analyse I, fonction = fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} ou sur une partie $A \subseteq \mathbb{R}$.

En analyse II, on ira de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Lecture 9: mercredi

Wed 14 Oct

Definition 14

On dit qu'une fonction f est définie au voisinage de $x \in \mathbb{R}$, si $\exists \epsilon > 0$: f définie sur

$$]x - \epsilon, x[\text{ et }]x, x + \epsilon[$$

Exemple

$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$ défini au voisinage de 0.

Definition 15

Soit f définie au voisinage de x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

signifie

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Theorème 85

Soit f définie au voisinage de x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall \text{ suite } (a_n)_{n=1}^{\infty}$$

qui converge vers x_0 et $a_n \neq x_0, \forall n$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$$

Remarque

A priori, f n'est pas définie en a_n , mais $\exists n_0, \forall n > n_0 : a_n \in \text{domaine de définition}$ car f définie au voisinage de x_0

Preuve

\Rightarrow

Soit $a_n \neq x_0$, une suite convergent vers x_0 . A voir : Soit $\epsilon > 0$, cherche $n_0 \forall n > n_0 :$
 $|f(a_n) - l| < \epsilon$.

Par hypothese, $\exists \delta > 0 \forall x$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \quad (1)$$

Appliquer $\lim a_n = x_0$ à δ :

$$\exists n_0, \forall n > n_0 : |a_n - x_0| < \delta$$

Appliquer à présent 1 à $x = a_n$

\Leftarrow

Soit $\epsilon > 0$, on cherche $\delta > 0$

Supposons par l'absurde qu'aucun δ satisfait la définition.

En particulier, $\delta = \frac{1}{n}$

$$\exists x_n : 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - l| \geq \epsilon$$

Or

$$x_n \neq x_0 \text{ et } (x_n) \rightarrow x_0$$

Par hypothèse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$$

En particulier, pour ϵ ,

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : |f(x_n) - l| < \epsilon$$

□

Corollaire 87

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} l$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l'$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + f'(x) = l + l'$$

Idem pour produit.

Corollaire 88

Si $f(x) \geq a$, $\forall x$ au voisinage de x_0 et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \text{ alors } l \geq a$$

Corollaire 89

Si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

Corollaire 90

Pour

$$\lim \frac{g(x)}{f(x)}$$

il suffit de traiter $\lim \frac{1}{f(x)}$.

Lemme 91

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq 0$, alors

$$\exists \epsilon > 0 \forall x \in]x_0 - \epsilon, x_0[\cup]x_0, x_0 + \epsilon[$$

tel que $f(x) \neq 0$

Preuve

$$|f(x) - l| < \frac{|l|}{2}$$

dans un voisinage de x_0 , alors $f(x) \neq 0$

□

Corollaire 92

Si $\lim f(x) = l = \lim g(x)$ et

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \forall x \text{ au voisinage de } x_0$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

Corollaire 93 (Cauchy)

Soit f définie au voisinage de x_0 , alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ existe} \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \text{ avec}$$

$$0 < |x_i - x_0| < \delta \quad (i = 1, 2)$$

on a

$$|f(x_i) - f(x_2)| < \epsilon$$

Lemme 94

Si $\lim f(a_n)$ existe \forall suite $(a_n \neq x_0)$ convergeant vers x_0 , alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

existe

Preuve

Il suffit de montrer que toutes ces limites $f(a_n)$ ont la même valeur.

En effet, on peut alors appliquer le théorème et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

Sinon, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l \neq l' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a'_n)$ pour deux telles suites a_n et a'_n .

A présent

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{si } n \text{ pair} \\ a'_n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

□

or $f(b_n)$ converge absurde car elle admet deux sous-suites avec limites distinctes l, l' .

Preuve

Preuve du corollaire ci-dessus.

Grace au lemme, il suffit de montrerr que \forall suite $a_n \rightarrow x_0$, la suite $f(a_n)$ est de Cauchy.

Par hypothèse, $\exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 : 0 < |x_i - x_0| < \delta$ implique

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Or, $\exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - x_0| < \delta$.

Applique $a_n = x_1$ et $a_m = x_2$ donne que $f(a_n)$ est de cauchy.

□

Corollaire 95

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l'$, alors $l = l'$.

Remarque

On a implicitement utilisé les concept de $+$, \cdot , \leq sur les fonctions.

Ce n'est pourtant pas un corps.

Par exemple, $\forall x, y \in \text{corps}$

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$$

Les fonctions ont une opération supplémentaire

$$f \circ g$$

est définie par

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

Soit $g : A \rightarrow B$ des parties de \mathbb{R} , et $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ avec g défini au voisinage de x_0 et f au voisinage de g_0 .

Proposition 97

Supposons $g(x) \neq g_0 \forall x$ au voisinage de x_0

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$ et $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = l$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f \circ g(x) = l$$

Preuve

Soit $\epsilon > 0$, à voir $\exists \delta > 0 \forall x :$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - l| < \epsilon$$

2eme hup nous dit

$$\exists \eta > 0 \forall y : |y - y_0| < \eta \Rightarrow |f(y) - l| < \epsilon$$

Idee : appliquer la premiere hypothèse à η et poser $y = g(x)$.

Ca marche, tant que $y \neq y_0$. □

Exemple

Exemple délicat :

Soit

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Clairement $\lim_{x \rightarrow 0} = 0$.

On pose que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On voit que $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 0$.

Or

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))$$

n'existe pas.

Lecture 10: fonctions

Mon 19 Oct

6.1 Continuité

Definition 16

Soit f définie au voisinage de x_0 .

Alors f est dite continue en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Donc f continue (en x_0) si on peut "sortir f de la limite" (en x_0)

Proposition 99

f continue en $x_0 \iff$ toute suite a_n tendant vers x_0 , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

Preuve

Théorème de traduction pour $l = f(x_0)$

□

Remarque

Pour parler de continuité en x_0 , il faut que f soit définie en x_0 et au voisinage de x_0

Corollaire 101

Si f et g sont continues en x_0 , alors $f + g$ et $f \cdot g$ aussi.

Preuve

Idem que avant

□

Corollaire 102

Si de plus $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est cont. en x_0 .

Remarque

On a montré que alors dans ce cas il existe un voisinage de x_0 où $g(x) \neq 0$

Proposition 104

Soit g continue en x_0 et f continue en $g(x_0)$, alors $f \circ g$ est continue en x_0 .

Preuve

Ecrivons la définition de g continue en x_0 :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$$

Soit $\epsilon > 0$. Cherche $\eta > 0$ tq $\forall x$:

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(\underbrace{g(x)}_{=y}) - f(g(x_0))| < \epsilon$$

Continuité de f en $g(x_0)$ appliquée à ϵ donne $\theta > 0$ tq $\forall y$

$$|y - g(x_0)| < \theta \Rightarrow |f(y) - f(g(x_0))| < \epsilon$$

continuité de g en x_0 appliquée à θ

$$\exists \eta > 0 \forall x \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \theta$$

□

Pour $y = g(x)$ on a montré ce qu'il fallait.

Definition 17 (Terminologie Supplémentaire)

f est définie au voisinage à gauche de x_0 si $\exists \epsilon > 0$ tq f est définie sur $]x_0 - \epsilon, x_0[$.

De même à droite : $]x_0, x_0 + \epsilon[$

Definition 18

Soit f définie au voisinage à droite de x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0 >} = l$$

signifie

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x > x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

La limite à gauche est définie de la même manière.

Definition 19

f est continue à droite en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0 >} f(x) = f(x_0)$$

Idem à gauche.

Exercice 105

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ existe} \iff \text{les limites à gauche et à droite existent et coïncident.}$$

Definition 20

f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a , à gauche en b .

Definition 21 (Notation)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

si

$$\forall R \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > R$$

Idem pour $-\infty$

Definition 22 (Notation)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

signifie

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall x > n_0 : |f(x) - l| < \epsilon$$

On note $C([a, b])$ ou parfois $C^0([a, b])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$

Theorème 106

Toute fonction continue sur $[a, b]$ est bornée.

Preuve

Supposons par l'absurde f non-bornée (disons sans perte de généralité non majorée).

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n : f(x_n) > n$.

On a une suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ de $[a, b]$

Par Bolzano-Weierstrass implique qu'on a une sous-suite x_{n_k} qui converge vers $x \in [a, b]$

f continue en $x \iff f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k})$

□

Theorème 107

Toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue atteint son sup donc max.

Preuve

On sait déjà que f est bornée, soit donc $s := \sup \{f(x) | x \in [a, b]\}$

Si par l'absurde $f(x) \neq s \forall x \in [a, b]$ posons

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - s}$$

g est continue et donc g est bornée, disons par B .

Absurde car implique $|f(x) - s| > \frac{1}{B}$.

□

Proposition 108

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I .

Soit $A \subseteq I$ une partie dense. Si

$$f|_A = g|_A$$

Alors $f = g$ sur tout I

Preuve

Soit $x \in I$. Par densité,

$$\exists (a_n)$$

suite de A avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x$.

$$\text{Continuité } f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(a_n) = g(x) \quad \square$$

Lecture 11: limites de fonctions

Wed 21 Oct

Comment définir 3^π ?

Exemple

Supposons que f soit définie et continue sur $I \setminus \{x_0\}$, où I est un intervalle ouvert et $x_0 \in I$.

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe, on obtient une fonction continue sur I en définissant $f(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Ca s'appelle le "prolongement par continuité".

Un exemple de preuve de continuité :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ sur }]0, +\infty[$$

Soit $\epsilon > 0$, cherche δ

Veut : $\forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon$.

Or, $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \epsilon$ si $\delta = \sqrt{x_0}\epsilon > 0$

Remarque

Ce δ montre la continuité en $y \forall y \geq x_0$

Definition 23

f est dite uniformément continue sur I (où I est un intervalle ou plus généralement $I \subseteq \mathbb{R}$) si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x_0 \in I :$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Comparer à f continue sur I :

$$\forall x_0 \in I \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x :$$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Le point clé est que le delta dépend que de ϵ et pas de x_0 .

Exemple

$f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1, +\infty[$

Et aussi sur $[\frac{1}{100}, +\infty[$.

Exemple

$f(x) = x^2$ non uniformément continu sur $[0, +\infty[$. Considérons

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|(x + x_0)$$

Proposition 113

Si f et g sont uniformément continues sur I , alors $f + g$ aussi. *Attention :*

Faux pour $f.g$ et pour $\frac{1}{f}$.

Exercice 114

Supposons f uniformément continue sur $[a, b]$ et $[b, c]$, alors f uniformément continue sur $[a, c]$

Theorème 115

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$

Remarque

Donc $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$.

Preuve

Si, par l'absurde, f n'est pas uniformément continue, alors :

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, x_0 :$$

$$|x - x_0| < \delta \text{ mais } |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on applique ça à $\delta = \frac{1}{n}$, alors

$$\Rightarrow \exists y_n, z_n : |y_n - z_n| < \frac{1}{n} ; |f(y_n) - f(z_n)| \geq \epsilon$$

Car y_n suite de $[a, b]$, par Bolzano-Weierstrass $\Rightarrow \exists$ sous-suite y_{n_k} convergente.

Alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} z_{n_k} = y$ car $|z_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$.

Le théorème de traduction implique

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(y_{n_k}) = f(y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(z_{n_k})$$

Mais $|f(y_{n_k}) - f(z_{n_k})| \geq \epsilon$.

↯

□

Theorème 117 (Théorème de la valeur intermédiaire (TVI))

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

$\forall c$ entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists x \in [a, b] : f(x) = c$.

Preuve

Sans perte de généralité, $f(a) < c < f(b)$; et $c = 0$ (sinon remplacer f par $f - c$).

Supposons par l'absurde $f(a) < 0 < f(b)$ mais $f(x) \neq 0 \forall x$.

Alors $\frac{1}{f}$ est continue. Donc bornée. Donc $\exists \alpha > 0$ tq $|f(x)| \geq \alpha \forall x$.

On sait que f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Appliquer à α .

Donc, $\exists \delta > 0 \forall y, z : |y - z| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| < \alpha$.

Prenons $n \in \mathbb{N}$ avec $\frac{b-a}{n} < \delta$ (Archimède)

Posons $a_i = a + i \frac{b-a}{n}$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Donc $\forall i \forall y, z \in [a_i, a_{i+1}]$

$$|f(y) - f(z)| < \alpha$$

□

Donc $\forall i$, soit f est $\leq -\alpha$ sur tout $[x_i, x_{i+1}]$ soit $\geq \alpha$ pour tout $[x_i, x_{i+1}]$.

Or $f(a) < 0$ donc $\leq -\alpha$ Donc $f \leq -\alpha$ sur $[a_0, a_1]$

Or $f(a) < 0$ donc $\leq -\alpha$ Donc $f \leq -\alpha$ sur $[a_1, a_2]$, etc.

Or $f(a_n) = b$, donc \nexists

Lecture 12: Fonctions

Mon 26 Oct

Corollaire 118

$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \geq 0 : \exists y \geq 0 : y^n = x$

Comme ce y est unique (axiome de $<$) on peut donc définir $\sqrt[n]{x} = y$

Preuve

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(y) = y^n$.

f est continu, $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Rappel : i.e.

$$\exists y_0 \forall y \geq y_0 : f(y) \geq x$$

TVI pour $[0, y] : \exists z$ tq $f(z) = x$.

□

Rappel

- $ax + b = 0$ admet une solution (en x) si $a \neq 0$
- $ax^2 + bx + c$ admet parfois une solution
- $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ admet une solution ($a \neq 0$)
- degré 4 admet parfois une solution
- degré 5 : pas de formule avec "juste" des racines.

Corollaire 119

Tout polynôme de degré impair admet des racines.

Preuve

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

n impair, $a_n \neq 0$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (si $a_n > 0$ $-\infty$ si $a_n < 0$)

En effet

$$a_n x^n (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{-1} + \dots)$$

Donc $\exists x_1 : f(x_1) > 0$ (resp. < 0).

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (resp. $+\infty$).

Donc

$$\exists x_2 : f(x_2) < 0$$

□

TVI sur $[x_2, x_1] \Rightarrow \exists x : f(x) = 0$

Corollaire 120

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

$f([a, b]) = [m, M]$ où $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$

Proposition 121 (1er theoreme de la fonction implicite)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement monotone.

Donc (corollaire précédent) , f est bijective

$$f : [a, b] \rightarrow [m, M]$$

i.e. $\exists f^{-1} : [m, M] \rightarrow [a, b]$

Alors f^{-1} est continue

Preuve

Sans perte de généralité, f strictement croissante.

Lemme 122

Soit $g : [m, M] \rightarrow [a, b]$ surjective et strictement croissante.

Alors g est continue

Preuve

En x_0

Soit $\epsilon > 0 : \exists x_1 : g(x_1) > g(x_0) - \epsilon$

De même, $\exists x_2 : g(x_2) < g(x_0) + \epsilon$.

Donc sur $[x_1, x_2]$ f prend des valeurs entre $g(x_0) - \epsilon$ et $g(x_0) + \epsilon$

□

Appliquer à $g = f^{-1}$.

C'est surjectif, par définition du domaine de f^{-1} , i.e. l'image de f .

Corollaire 123

Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue.

Alors $\exists x \in [a, b] : f(x) = x$.

Preuve

Considérer g

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

avec

$$g(x) = x - f(x)$$

Donc

$$g(a) = a - f(a) \leq 0$$

$$g(b) = b - f(b) \geq 0$$

$$TVI \Rightarrow \exists x : g(x) = 0 \text{ i.e. } f(x) = x$$

□

7 Suites de Fonctions

But : donner un sens à

" f_n converge vers une fonction f "

Definition 24

(f_n) converge ponctuellement vers f si

$$\forall x : \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

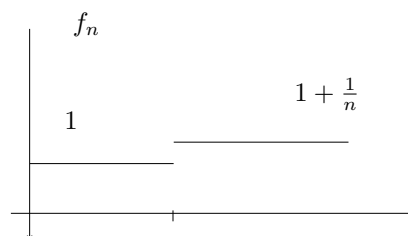


FIGURE 1 – fonction1

Exemple

—

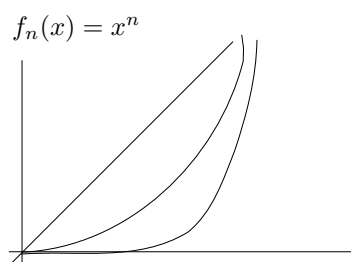


FIGURE 2 – fonction2

— Ponctuellement, $f_n \rightarrow f$ où

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Remarque

$$\lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = 1$$

On pourrait donc prendre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = 1$$

Par contre

$$\lim_{\underbrace{x \rightarrow 1}_{<}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

Donc, attention à la continuité !

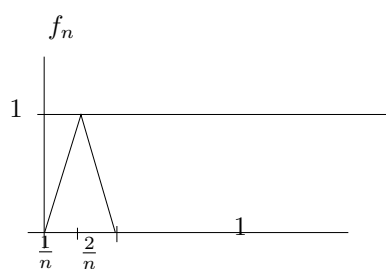


FIGURE 3 – fonction3

— f_n est continue pour tout n ,

$$\max f_n = 1$$

Or $f_n \rightarrow 0$ ponctuellement.

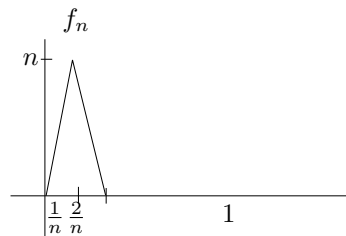


FIGURE 4 – fonction4

— Or, à nouveau, $f_n \rightarrow f = 0$

Definition 25 (Convergence uniforme de fonctions)

Une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément sur $A \subseteq \mathbb{R}$ sur f si :

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Lecture 13: Suites de Fonctions 2

Wed 28 Oct

Remarque

La convergence uniforme implique la convergence ponctuelle

Proposition 127

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément.

Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)}_{=l_n}$$

existe.

Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

Preuve

Soit f la limite de (f_n) .

Hyp : $\forall n : l_n = \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$ existe et $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n$.

But : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Soit donc $\epsilon > 0$, alors

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |l_n - l| < \frac{\epsilon}{3}$$

De plus, par convergence uniforme

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 \begin{cases} |l_n - l| < \frac{\epsilon}{3} \\ \forall x : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \end{cases}$$

Donc

$$\exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - l_{n_0}| < \frac{\epsilon}{3}$$

Soit $0 < |x - x_0| < \delta$, on veut

$$|f(x) - l| < \epsilon$$

Or

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - l_{n_0}| + |l_{n_0} - l| < \epsilon \quad \square$$

Theorème 128

Toute limite uniforme de fonctions continues est continue.

Preuve

Soit f la limite uniforme de (f_n) , f_n est continue $\forall n$.

Soit x_0 avec f_n définie au voisinage de x_0 .

A voir : f continue en x_0 , i.e.

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f(x_0) \quad \square$$

Theorème 129 (Dini)

Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions continues.

Si (f_n) converge ponctuellement vers f continue, alors f_n converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Exercice 130

Trouver un contre exemple sans l'hypothèse décroissante.

Preuve

Par l'absurde,

$$\exists \epsilon > 0 \forall n_0 \exists n \geq n_0 \exists x_n : |f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$$

Par Bolzano-Weierstrass \Rightarrow

(x_{n_k}) qui converge vers x

et tel que

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \epsilon$$

Convergence de $f_n(x)$ implique

$$\exists k : |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Continuité de f_{n_k} et de f en x

$$\exists \delta > 0 \forall y : |x - y| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \\ |f_{n_k}(y) - f_{n_k}(x)| < \frac{\epsilon}{3} \end{cases}$$

Choisir un k' tel que $|x_{n_{k'}} - x| < \delta$

Comme

- $|f(x) - f(x_{n_k})| < \frac{\epsilon}{3}$
- $|f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_{n_{k'}})| < \frac{\epsilon}{3}$
- $f \leq f_{n_{k'}} \leq f_{n_k}$

Donc

$$|f_{n_{k'}}(x_{n_{k'}}) - f(x_{n_{k'}})| < \epsilon$$

□

Absurde.

8 Dérivation

Definition 26

Soit f définie au voisinage de x_0 .

On dit que f est dérivable en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe.

Alors cette limite s'appelle la dérivée de f en x_0 , notée $f'(x_0)$.

Remarque

Si f est dérivable partout, alors on obtient une fonction f' .

On définit de même la dérivée gauche et droite.

Proposition 132

Si f et g sont dérivables en x_0 , alors $f + g$ aussi et

$$(f + g)' = f' + g'$$

Preuve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

□

Proposition 133

Soit f définie au voisinage de x_0 . Alors

$$f \text{ dérivable en } x_0 \iff \exists a \in \mathbb{R} \exists \text{ fonction } r \text{ au voisinage de } x_0 \text{ tel que}$$

$$1. f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$$

Dans ce cas, $a = f'(x_0)$

Lecture 14: Derivees

Mon 02 Nov

Corollaire 134

f dérivable en x_0 implique f continue en x_0 .

Preuve

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{continue pour tout } x} + \underbrace{r(x)}_{\text{continu en } x_0}$$

□

Proposition 135

Soient f, g dérivables en x_0

- $f + g$ est dérivable en x_0 et $(f + g)' = f' + g'$
- fg est dérivable en x_0 et

$$(fg)' = f'g + fg' \text{ (règle de Leibnitz)}$$

- Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Preuve

- Somme est déjà faite
- Produit :

$$\begin{aligned} & \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{\rightarrow g(x_0)} + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow g'(x_0)} \end{aligned}$$

- Quotient :

Il suffit d'appliquer Leibnitz à f et $\frac{1}{g}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \frac{1}{g}\right)' = f' \frac{1}{g} + f \left(\frac{1}{g}\right)'$$

Il suffit de montrer que

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

Soit donc $g(x_0) \neq 0$.

$$\frac{\frac{1}{g(x) - \frac{1}{g(x_0)}}}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \quad \square$$

Exemple

Soit $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, $f(x) = x^n = \frac{1}{x^{|n|}}$ Donc

$$(x^{|n|})' = |n|x^{|n|-1}$$

Donc, par la proposition

$$f'(x) = \frac{-|n|x^{|n|-1}}{x^{2|n|}}$$

Or $|n| = -n$, alors

$$f'(x) = nx^{-n-1+2n} = nx^{n-1}$$

Proposition 137

Donc, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Attention, ne pas écrire $(x^n)'$

Theorème 138 (Chain Rule)

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

Soit g dérivable en x_0 et f en $g(x_0)$, alors $f \circ g$ est dérivable en x_0 avec la formule ci-dessus.

Preuve

Définissons h par

$$h(y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} & \text{si } y \neq g(x_0) \\ f'(g(x_0)) & \text{si } y = g(x_0) \end{cases}$$

Alors h est continue en $g(x_0)$ (par définition de f dérivable en $g(x_0)$).

On a alors

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} h(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \end{aligned} \quad \square$$

Theorème 139

Soit $f :]a, b[\rightarrow]c, d[$ bijective, continue.

Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Preuve

$$\begin{aligned} L &= \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\ &= \left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} \right)^{-1} \end{aligned}$$

En posant $x = f^{-1}(y)$, on obtient

$$\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)^{-1}$$

Or, f^{-1} est continue, donc quand $y \rightarrow y_0$, on a que $x \rightarrow x_0$.

Donc, la limite pour $y \rightarrow y_0$ de L est

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)^{-1} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

Lecture 15: Derivees

Wed 04 Nov

Exemple

Soit $f(x) = \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$.

Donc la dérivée est

$$f'(x) = \frac{1}{q(x^{\frac{1}{q}})^{q-1}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}$$

On sait donc dériver des puissances rationnelles quelconques

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} = g(h(x))$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= p(x^{\frac{1}{q}})^{p-1} \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} \\ &= \frac{p}{q} x^{\frac{p-1}{q} + \frac{1}{q} - 1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} \end{aligned}$$

8.1 Applications de la dérivée**8.1.1 Recherche d'extremums****Definition 27 (Point Critique)**

x est un point critique de f si f est dérivable en x et $f'(x) = 0$.

Remarque

Bien que $x = 0$ soit un point critique de $f(x) = x^3$, cette fonction est strictement croissante.

Definition 28

x est un maximum local de f si il existe un voisinage de x sur lequel x est un (vrai) maximum.

La définition pour les minimas est équivalente.

Plus généralement, on parlera d'extremums.

Proposition 142

Soit f dérivable en x_0 (donc définie dans son voisinage).

Si x_0 est un extremum local de f , alors c'est un point critique.

Remarque

1. La réciproque est fausse.
2. Si f n'est pas dérivable, on peut très bien avoir un max / min.
3. Dérivable à droite (gauche) pas suffisant.

Preuve

Sans perte de généralité, x_0 est un max local de f .

Dérivée à gauche :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

De même, dérivée à droite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Donc, $f'(x_0) = 0$.

□

Proposition 144 (Méthode de recherche d'extremum)

Pour $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$.

Les candidats sont

1. Les points critiques dans $]a, b[$
2. Les points non-différentiables
3. Les bornes : a, b

Theorème 145 (theoreme de Rolle)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors $\exists x \in]a, b[: f'(x) = 0$

Preuve

$\exists x_1 \in [a, b] : \sup_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_1)$.

Si $x_1 \in]a, b[$, alors $f'(x_1) = 0$ par la proposition.

Cas restant : $x_1 = a$ ou b .

$$\exists x_2 \in [a, b] \text{ min} : \inf_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_2)$$

Le seul cas restant est donc :

max et min atteints en a ou b .

Or $f(a) = f(b)$, donc $\max f = \min f$, donc f constante. \square

Théorème 146 (théorème des accroissements finis TAF)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$.

Alors $\exists x \in]a, b[: f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Preuve

Posons $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ g est aussi continue dérivable.

Or

$$g(a) = f(a) \text{ et } g(b) = f(a)$$

Donc g satisfait l'hypothèse de Rolle.

Donc, par Rolle

$$\exists x \in]a, b[: g'(x) = 0$$

Or

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

\square

Corollaire 147

Si $f' = 0$, alors f constante.

Plus précisément :

Soit

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

continue dérivable sur $]a, b[$ tel que $f'(x) = 0 \forall x \in]a, b[$, alors f est constante sur $[a, b]$

Preuve

Si, par l'absurde, il existe $x, y \in [a, b]$ avec $f(x) \neq f(y)$.

Par TAF pour $[x, y]$, il existe $z \in]x, y[$:

$$f'(z) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \neq 0$$

Absurde. \square

Corollaire 148

$f' > 0$ (sur un intervalle) implique f strictement croissante.

Preuve

Soit $x < y$, à voir $f(x) < f(y)$.

Or, par TAF $\Rightarrow \exists z \in]x, y[$

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0$$

□

Corollaire 149

$f' \geq 0$ (sur un intervalle) $\iff f$ croissante (pas forcément strictement)

Preuve

$\Leftarrow :$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$\Rightarrow :$

Par l'absurde :

$$\exists x < y \text{ tel que } f(x) > f(y)$$

Par TAF $\Rightarrow \exists z \in]x, y[$ tel que

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < 0$$

□

Ce qui est absurde.

Lecture 16: Lundi 09

Mon 09 Nov

Définition 29 (Fonctions Lipschitzienne)

La fonction f est Lipschitz sur un intervalle I si il existe l tel que $\forall x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq l \cdot |x - y|$$

Remarque

Si f est Lipschitz, f est continue, même uniformément continue sur I , poser $\delta = \frac{\epsilon}{l}$.

On dit aussi "L-lipschitz".

Corollaire 151

Si f est dérivable et $|f'| \leq L$ sur I , alors f est L -lipschitz sur I

Preuve

TAF sur $[x, y]$, donc

$$\exists z \in]x, y[: f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$$

□

Remarque

$f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$ est uniformément continue, mais sa dérivée est non-bornée sur $]0, 1[$.

Corollaire 153 (Théorème de Darboux)

Soit f continu en x_0 . Si f est dérivable au voisinage de x_0 et si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

existe, alors f est dérivable en x_0 .

Preuve

TAF sur $[x_0, x]$.

Donc il existe $z \in]x_0, x[$ tel que

$$f'(z) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Posons $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$, donc

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Donc $f'(x_0)$ existe et est égal à l . □

Remarque

Nous avons prouvé que $f'(x_0)$ existe et de plus $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

Donc la dérivée est continue.

Théorème 155 (Théorème de Cauchy)

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$.

Supposons que g' ne s'annule pas sur $[a, b]$, alors

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Preuve

Considérons

$$h(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a)) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

On a

$$h(a) = 0$$

$$h(b) = 0$$

Rolle (pour h) implique $\exists c \in]a, b[$ tel que

$$h'(c) = 0$$

Or

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)$$

□

$$\text{i.e. } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

8.2 Principe de Bernoulli-L'Hospital

Idée :

Calculer des limites du type $\frac{0}{0}$.

Theorème 156 (Bernoulli-L'Hospital)

Soient $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivables avec

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a+} g(x)$$

Supposons

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe et $g'(x) \neq 0$ au voisinage à droite de a .

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Preuve

On étend f et g par continuité sur $[a, b[$ en posant $f(a) = 0 = g(a)$.

Soit $a < x < b$. Appliquons Cauchy sur $[a, x]$.

Donc $\exists c \in]a, x[$ tel que $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Par hypothèse, la limite

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

existe.

□

Theorème 157 (BH pour l'infini)

Soient $f, g :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

Supposons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Preuve

Sans perte de généralité $a > 0$.

On définit $\phi, \psi :]0, \frac{1}{a}[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\phi(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \psi(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

BH pour $\frac{\phi}{\psi}$ sur $]0, \frac{1}{a}$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}$$

□

Lecture 17: BH

Wed 11 Nov

8.3 Bernoulli-L'hospital pour infini sur infini

Theorème 158

Soient $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivables tel que

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow a+} g(x)$$

Si $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe aussi, avec la meme valeur

Preuve

Le principe est que pour calculer la limite d'une expression A (pour $x \rightarrow a$), on peut remplacer A par

$$ABC$$

pour autant que $\lim_{x \rightarrow a+} BC = 1$.

Soit $\epsilon > 0$. Posons $l = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ A montrer : Pour x suffisamment proche de a

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \epsilon$$

On sait que $\exists y \forall a < c < y$

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - l \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Par Cauchy sur $[x, y]$, on a

$$\forall a < x < y : \left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - l \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Ecrivons donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \frac{f(x)}{f(x) - f(y)} \frac{g(x) - g(y)}{g(x)}$$

En effet, pour notre y :

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{f(x) - f(y)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{1}{1 - \frac{g(y)}{f(x)}} = 1$$

□

9 Polynome de Taylor et developpements limites

But : Approximer des fonctions par polynomes.

Definition 30 (Polynome de Taylor)

Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n fois derivable.

Le polynome de Taylor de f en a et d'ordre n est

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

Theoreme 159 (Formule de Taylor)

Supposons f $n+1$ fois derivable

$\forall x \exists t \in]a, x[$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-a)^{n+1}$$

Remarque

Excellent si f raisonnable car $\frac{1}{(n+1)!}$ tres petit.

Preuve

On note $T(y)$ pour le polynome de Taylor.

Soit

$$g(y) = f(y) - T(y) + \frac{T(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}}(y-a)^{n+1}$$

On remarque que

$$g^{(k)}(a) = \text{cst. } (n+1)(n) \dots (n+1-k)(y-a)^{n+1-k} = 0$$

Or, $g(x) = 0$.

On applique donc Rolle a g sur $[a, x]$ Par Rolle, $\exists x_1 \in]a, x[$ tel que $g'(x_1) = 0$.

Rolle pour g' sur $[a, x_1]$.

$$\exists x_2 \in]a, x_1[\text{ tel que } g''(x_2) = 0$$

etc...

Rolle pour $g^{(n)}$ sur $[a, x_n]$, donc

$$\exists t \in]a, x_n[\text{ tel que } g^{(n+1)}(t) = 0$$

Donc

$$0 = g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) + \frac{T(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}}(n+1)!$$

Donc

$$-T(x) + f(x) = f^{(n+1)}(t)(x-a)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}$$

□

Lecture 18: Developpements Limites

Mon 16 Nov

De maniere generale, si

$$P(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k$$

Alors

$$P^{(k)}(a) = k!c_k$$

Definition 31 (Developpement limite)

Soit f une fonction definie au voisinage de a .

Un developpement limit (DL) d'ordre n pour f en a est la donnee d'un polynome

$$\sum_{j=0}^n a_j (x-a)^j$$

(la partie principale) et d'une fonction r (le reste) tel que

1. $f(x) = \sum a_j (x-a)^j + r(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x-a)^n}$

Remarque

Le cas $n = 1$ correspond a notre critere de differentiability de f en a .

Admettre un DL d'ordre 1 en $a \iff f$ derivable en a .

Remarque

Admettre un DL d'ordre 0 en $a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.

Remarque

Si on note $r(x) = \epsilon(x)(x-a)^n$, on obtient

1. $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j (x-a)^j + \epsilon(x)(x-a)^n$
2. $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$

Ceci montre que si f admet un DL d'ordre n , alors $\forall k \leq n$

$$f^{(k)}(a) = k!a_k$$

Proposition 164

Si un DL d'ordre n existe, il est unique.

Preuve

Suffit de montrer l'unicite de la partie principale. Or, les coefficients a_j sont determines par les derivees de f ,

$$f^{(k)}(a) (k \leq n)$$

qui existent bel et bien par la remarque precedente. □

Proposition 165

Si f admet un DL d'ordre n en a , elle admet aussi un DL d'ordre $m \leq n$ en a .

Preuve

On a qu'à tronquer la partie principale de la somme.

□

Theorème 166

Soit $f \in C^{n+1}(I)$, I intervalle ouvert, $a \in I$.

Alors f admet un DL d'ordre n en a , et la partie principale est le polynôme de Taylor.

Preuve

On va juste utiliser que $f^{(n+1)}$ est bornée sur un voisinage de a .

A voir :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{n+1!} f^{(n+1)}(t)(x-a)^{n+1}}{(x-a)^n} = 0$$

□

Exercice 167

Si f et g admettent des DL d'ordre n en a , alors $f + g$, $f \cdot g$ et $f \circ g$ (ici : f admet DL en $g(a)$) aussi.

Les parties principales seront la somme, respectivement produit, resp. composition des parties principales.

Exemple (Un Bel Exemple)

Soit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

On voit que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Lemme 169

$f^{(k)} = f \cdot \frac{P}{Q}$, pour deux polynômes P, Q .