Série 10

David Wiedemann

21 novembre 2020

1

Montrons que l'application est injective.
En effet, soient $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ et supposons que

$$(\phi(g_1), \ldots, \phi(g_r)) = (\psi(g_1), \ldots, \psi(g_r))$$

Soit $a \in G$, car $G = \langle g_1, \ldots, g_r \rangle$, on sait que $a = \prod_i g_i^{a_i}$, on a alors que

$$\phi(a) = \phi\left(\prod_i g_i^{a_i}\right) = \prod_i \phi(g_i^{a_i}) = \prod_i \phi(g_i)^{a_i} = \prod_i \psi(g_i)^{a_i} = \prod_i \psi\left(g_i^{a_i}\right) = \psi\left(\prod_i g_i^{a_i}\right) = \psi(a)$$

On en conclut que $\phi = \psi$, et donc l'application est injective.

2

Par l'exercice 2, on sait que $S_3 = \langle (12), (23) \rangle$, et donc, en particulier, $S_3 = \langle (12), (23), (13) \rangle$.
On en déduit

$$\forall \Sigma \in S_3, \Sigma = (12)^a (23)^b (13)^c$$

Montrons qu'un automorphisme de $\mathrm{Aut}(S_3)$ peut seulement permuter ces 3 cycles.
On sait que S_3 est seulement composé de deux-cycles et de trois-cycles.
Supposons d'abord qu'il existe $\phi \in \mathrm{Aut}(S_3)$ tel que

$$\phi((ab)) = (abc)$$

Alors, on voit que

$$\mathrm{Id} = \phi(\mathrm{Id}) = \phi((ab)(ab)) = \phi((ab))\phi((ab)) = (abc)(abc) = (acb)$$

Ce qui est une contradiction.
Le raisonnement est le même si on suppose que $\phi((ab)) = (acb)$.
Car un produit de deux 2-cycles dans S_3 est un 3-cycle, on a montré que

$\phi((ab))$ doit être un autre 2-cycle.
Car ϕ est une bijection, ϕ doit permuter les 2-cycles. On définit donc l'application

$$\Psi : \phi \in \mathrm{Aut}(S_3) \to \begin{pmatrix} (12) & (23) & (13) \\ \phi(12) & \phi(23) & \phi(13) \end{pmatrix}$$

On voit que $\Psi(\mathrm{Id}_{S_3}) = \mathrm{Id}$, où Id_{S_3} est l'automorphisme identité de S_3 et Id est la permutation identité de $S_{(12),(23),(13)}$.
Posons $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(S_3)$, $\Psi(\alpha) = A, \Psi(\beta) = B$, montrons que $\Psi(\alpha \circ \beta) = A.B$.
Par la partie 1, il suffit de considérer l'image des éléments engendrant le groupe.
Or, par définition de Ψ, pour $(ab) \in \{(12), (23), (13)\}$,

$$\Psi(\alpha \circ \beta)(ab) = \alpha \circ \beta(ab) = A.B(ab)$$

Montrons que cette application est injective.
En effet, supposons que $\phi \in \mathrm{Aut}(S_3)$ et $\Psi(\phi) = \mathrm{Id}$, alors, pour tout $\sigma \in S_3$, il existe $x, y, z \in \{0, 1\}$ et $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$ avec a, b, c deux-à-deux différents tel que

$$\phi(\sigma) = \phi((ab)^a(bc)^b(ac)^c) = (ab)^a(bc)^b(ac)^c$$

Donc $\ker \Psi = \{\mathrm{Id}_{S_3}\}$, et donc Ψ est injective.

3

Grace à la partie 2, il suffit de montrer que la conjugaison par un cycle correspond à la permutation de deux-cycles.
En effet, soit $\sigma \in S_3$, on a que $\sigma = (ab)^x(bc)^y(ac)^z$, avec a, b, c.
Grâce à l'exercice 2, il nous suffit de verifier la conjugaison par des 2-cycles, car n'importe-quelle permutation s'écrit comme produit de 2-cycles.

On a donc

$$\begin{aligned}
(ab)(ab)(ab) &= (ab)\\
(ab)(bc)(ab) &= (ac)\\
(ab)(ac)(ab) &= (bc)\\
(ab)(ab)(bc)(ab) &= (ab)(ac)\\
(ab)(ab)(ac)(ab) &= (ab)(bc)\\
(ab)(bc)(ac)(ab) &= (ac)(bc)\\
(ab)(bc)(ab)(ab) &= (ac)(ab)\\
(ab)(ac)(ab)(ab) &= (bc)(ab)\\
(ab)(ac)(bc)(ab) &= (bc)(ac)\\
(ab)(ab)(bc)(ac)(ab) &= (ab)(ac)(bc)\\
(ab)(ab)(ac)(bc)(ab) &= (ab)(bc)(ac)\\
(ab)(ac)(ab)(bc)(ab) &= (bc)(ab)(bc)\\
(ab)(ac)(bc)(ab)(ab) &= (bc)(ac)(ab)\\
(ab)(bc)(ac)(ab)(ab) &= (ac)(bc)(ab)\\
(ab)(bc)(ab)(ac)(ab) &= (ac)(ab)(bc)
\end{aligned}$$

On remarque donc que la conjugaison par un deux cycle est une permutation des deux-cycles de la transposition.
On a donc également une injection entre l'ensemble des conjugaisons et l'ensemble des automorphismes de S_3.
On conclut avec Cantor-Schroeder-Bernstein.