Question Ouverte 2

David Wiedemann

9 mai 2021

Notons d'abord que, parce que $U^T U = \mathrm{Id}$, les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
Pour simplifier, on notera

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Notons $V = \langle u_{l+2}, \ldots, u_n \rangle$, alors on a que

$$\min_{\substack{x \in S^{n-1} \\ x \perp u_{l+2}, \ldots, x \perp u_n}} f(x) = \min_{x \in S^{n-1} \cap V^\perp} f(x).$$

Notons d'abord que la valeur λ_{l+1} est bien atteinte par f sur S^{n-1}, en effet

$$f(u_{l+1}) = u_{l+1}^T A u_{l+1} = u_{l+1}^T U D U^T u_{l+1} = \lambda_{l+1}$$

Soit donc $x \in V^\perp \cap S^{n-1}$, et soit $x = (x_1, \ldots, x_{l+1}, 0, \ldots, 0)$ l'expression de x dans la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$.
Alors on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i u_i^T \right) \cdot A \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i u_i \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n x_i u_i^T \right) \cdot U \cdot D \cdot U^T \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i u_i \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n x_i (U^T u_i)^T \right) \cdot D \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i (U^T u_i) \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n x_i (U^T u_i)^T \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i (U^T u_i) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \lambda_i (U u_i^T)^T \cdot (U^T u_j)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \lambda_i \delta_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{l+1} \lambda_i x_i^2 \\
&\geq \sum_{i=1}^{l+1} \lambda_{l+1} x_i^2 \quad \text{On utilise que } \lambda_{l+1} \leq \lambda_i \forall 1 \leq i \leq l+1 \\
&\geq \lambda_{l+1} \sum_{i=1}^{l+1} x_i^2 \\
&\geq \lambda_{l+1}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, pour tout élément dans $x \in V^{\perp}$, on a montré que

$$x^T A x \geq \lambda_{l+1}$$

Et que λ_{l+1} est atteint, ce qui montre que

$$\min_{\substack{x \in S^{n-1} \\ x \perp u_{l+2}, \ldots, x \perp u_n}} f(x) = \lambda_{l+1}$$