Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-03-22 au 2021-03-26

Série 10 du mercredi 24 mars 2021

Exercice 1.

Définition 1 (Fonction höldérienne)**.** Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, borné, convexe et non-vide. Pour $\alpha \in]0,1]$, on dit qu'une fonction $\boldsymbol{h} : E \to \mathbb{R}^m$ est α-höldérienne si

$$\exists C \in]0,+\infty[, \forall \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in E, \quad \|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})\| \leqslant C\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^\alpha. \tag{1}$$

Les fonctions 1-höldériennes sont appelées « lipschitziennes ».

Conservons les notations de la définition 1.

1) Soit $f \in \mathrm{C}^1(E,\mathbb{R})$ dont les dérivées partielles sont bornées.
   a) Pour quelles valeurs de $\alpha \in]0,1]$ f est-elle α-höldérienne ?
   b) Montrer que f est uniformément continue sur E.
2) Soit $\boldsymbol{f} \in \mathrm{C}^1(E,\mathbb{R}^m)$ dont les dérivées partielles sont bornées. Les résultats du point 1 sont-ils toujours valables ?

   Indication. Soit $K \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé borné et $\boldsymbol{g} \in \mathrm{C}^0(K,\mathbb{R}^m)$. Alors

   $$\left\|\int_K \boldsymbol{g}\right\| \leqslant \int_K \|\boldsymbol{g}\|, \tag{2}$$

   où l'intégrale $\int_K \boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^m$ s'obtient en intégrant chaque composante de $\boldsymbol{g}$. Ce résultat est vrai pour n'importe quelle norme.
3) Montrer le résultat de l'indication ci-dessus pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^m$.

Solution :

1) Pour $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, le fait d'être ou non α-höldérienne ne dépend pas du choix des normes. En revanche, la constante C peut dépendre du choix de la norme. Dans ce qui suit, $\|\cdot\|$ sera la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
   a) Prouvons que, pour tout $\alpha \in]0,1]$, f est α-höldérienne. Commençons par traiter le cas $\alpha = 1$. Choisissons une constante $L > 0$ telle que, $\forall \boldsymbol{x} \in E$, $\|\nabla f(\boldsymbol{x})\| \leqslant L$. Soient $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$. Alors, grâce à la convexité de E,

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| = \left|\int_0^1 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{y} + s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))\,\mathrm{d}s\right| \tag{3}$$

$$= \left|\int_0^1 \nabla f(\boldsymbol{y} + s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))^\top (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s\right| \tag{4}$$

$$\leqslant \int_0^1 \left|\nabla f(\boldsymbol{y} + s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))^\top (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right|\mathrm{d}s \tag{5}$$

$$\leqslant L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|. \tag{6}$$

Ainsi f est lipschitzienne.

Soit maintenant $\alpha \in]0,1[$ et $M > 0$ tel que, pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \leqslant M$. Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont dans E, alors

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leqslant L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \leqslant LM^{1-\alpha}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^{\alpha}. \tag{7}$$

et f est α-höldérienne for tout $\alpha \in]0,1[$.

b) Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E, \quad \Big(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \leqslant \frac{\epsilon}{L} \implies |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leqslant L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \leqslant \epsilon\Big), \tag{8}$$

autrement dit, f est uniformément continue. Ceci étant vrai pour la norme euclidienne, c'est également vrai pour toute autre norme équivalente, donc pour tout autre norme sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque. En tant que fonction uniformément continue sur E, f peut être prolongée par continuité sur $\overline{E}$, ceci de manière unique.

2) a) Le résultat est le même pour $\boldsymbol{f}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, l'argumentation étant similaire. En effet, le fait que $\boldsymbol{f}$ soit ou non α-höldérienne ne dépend pas du choix des normes $\|\cdot\|$ de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. Choisissons donc les normes euclidiennes. En particulier la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ est remplacée par la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^m$. De plus, la transposée du gradient $\nabla f^\top$ est remplacé par $\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}$ et l'expression $\nabla f(\boldsymbol{y}+s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ est remplacée par l'application linéaire $\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}+s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))$, qu'on applique au vecteur $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$. L'indication permet d'écrire

$$\left\|\int_0^1 \mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}+s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s\right\| \leqslant \int_0^1 \|\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}+s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\|\,\mathrm{d}s. \tag{9}$$

En notant $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}+s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$, on utilise ensuite que

$$\|\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\| = \left(\sum_{i=1}^m \|\nabla f_i(\boldsymbol{z})^\top(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\|^2\right)^{1/2} \tag{10}$$

avec l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^m \|\nabla f_i(\boldsymbol{z})\|^2\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^m \|\nabla f_i(\boldsymbol{z})\|^2\right)^{1/2}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|. \tag{11}$$

Ainsi on peut reprendre l'argumentation du cas précédent en remplaçant la norme euclidienne $\|\nabla f(\boldsymbol{z})\|$ par

$$\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{z})\right|^2\right)^{1/2}. \tag{12}$$

b) Le résultat est le même pour $\boldsymbol{f}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, l'argumentation étant similaire.

3) Soit $K \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé borné et une fonction $\boldsymbol{g} \in \mathrm{C}^0(K, \mathbb{R}^m)$. Choisissons $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ tel que $\|\boldsymbol{v}\| = 1$ et $\boldsymbol{v} \cdot \int_K \boldsymbol{g} = \|\int_K \boldsymbol{g}\|$. Si $\int_K \boldsymbol{g} \neq \boldsymbol{0}$, on pose plus précisément $\boldsymbol{v} = (\|\int_K \boldsymbol{g}\|)^{-1}\int_K \boldsymbol{g}$. Alors,

$$\left\|\int_K \boldsymbol{g}\right\| = \boldsymbol{v} \cdot \int_K \boldsymbol{g} = \int_K \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g} \leqslant \int_K \|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{g}\| = \int_K \|\boldsymbol{g}\|. \tag{13}$$

Exercice 2.

On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} \text{ sinon.} \end{cases} \tag{14}$$

1) Calculer les grandeurs suivantes pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(x,y)\ ; \tag{15}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,y)\ ; \tag{16}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,0). \tag{17}$$

2) Montrer que les dérivées partielles secondes mixtes (16)–(17) sont définies sur $\mathbb{R}^2$ mais diffèrent en $(0,0)$.

3) Le point 2 contredit-il le théorème de Schwarz ?

Solution :

1) Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}(y^3(x^2+y^2) - xy^3(2x)) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}(y^5 - x^2y^3), \tag{18}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}(3xy^2(x^2+y^2) - xy^3(2y)) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}(3x^3y^2 + xy^4). \tag{19}$$

En $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0, \tag{20}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0. \tag{21}$$

2) Les dérivées d'ordre 2 donnent, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^4}((5y^4 - 3x^2y^2)(x^2+y^2)^2 - (y^5 - x^2y^3)4y(x^2+y^2)), \tag{22}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^4}((9x^2y^2 + y^4)(x^2+y^2)^2 - (3x^3y^2 + xy^4)4x(x^2+y^2))\ ; \tag{23}$$

d'où, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,0) = 0, \tag{24}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,y) = 1. \tag{25}$$

En $(0,0)$, d'après (22)–(23),

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{t\to 0} 1 = 1 \neq \lim_{x\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,0), \tag{26}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{t\to 0} 0 = 0 \neq \lim_{y\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,y). \tag{27}$$

On en conclut que les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$: (I) sont bien définies partout, (II) diffèrent en $(0,0)$ et (III) ne sont pas continues en $(0,0)$.

3) Le théorème de Schwarz ne s'applique pas car il requiert la continuité en $(0,0)$ des dérivées partielles secondes mixtes.

Exercice 3.

Pour $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on note

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{28}$$

On appelle Δf le « laplacien de f ». On définit $g \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)). \tag{29}$$

Vérifier que, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$\Delta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta). \tag{30}$$

Solution :

On calcule les dérivées qui interviennent dans la formule en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées. Dans ce qui suit, on allège les notations en écrivant f au lieu de $f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, de même pour les dérivées partielles d'ordre 1 ou 2 de f.

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{31}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = \cos(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + \sin(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \tag{32}$$

$$= 2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \tag{33}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{34}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} - r\sin(\theta)\left(-r\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) \tag{35}$$

$$+ r\cos(\theta)\left(-r\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right),$$

$$= r^2\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - r\frac{\partial g}{\partial r} - 2r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}. \tag{36}$$

Finalement, on obtient que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta). \tag{37}$$