

Topologie

David Wiedemann

Table des matières

1	Quotients topologiques	3
1.1	La topologie quotient	3
1.2	Relations d'équivalence	4
1.3	Séparation et quotients	5
1.4	Conditions de séparation du quotient	5
1.5	Quotients par des actions de groupe	8
1.6	$SO(n)$	9
1.7	Recollements	9
1.8	Attachement de cellules	11
2	Homotopies et Groupe Fondamental	12
2.1	Homotopie	12

List of Theorems

1	Definition (Topologie quotient)	3
3	Proposition	3
4	Proposition	3
5	Proposition	3
6	Théorème	3
7	Proposition	3
8	Proposition	4
2	Definition	4
9	Proposition (Propriétés universelles)	4
3	Definition	4
4	Definition (Réunion disjointe)	5
5	Definition	5
6	Definition	5
11	Proposition	5
12	Proposition	5
13	Proposition	6

14	Corollaire	7
7	Definition (Espaces projectifs)	7
17	Proposition	7
8	Definition (Espace projectif complexe)	7
9	Definition (Groupe topologique)	8
20	Lemme	8
10	Definition	8
11	Definition	8
22	Proposition	8
23	Proposition	9
12	Definition (Recollement)	9
26	Proposition	10
27	Lemme	10
28	Lemme	10
29	Proposition	11
31	Proposition	11
13	Definition (Suspension)	12
14	Definition (Homotopie entre applications)	12
32	Proposition	12
15	Definition (Classes d'homotopie)	13

1 Quotients topologiques

Un espace topologique (X, τ) est écrit X si la topologie est claire.

Le singleton $\{*\}$ est noté $*$.

La boule unité de \mathbb{R}^n est notée D^n et la version ouverte sera $\text{int}(D)^n$.

1.1 La topologie quotient

But : Construire de nouveaux espaces à l'aide d'espaces connus en identifiant des points.

Soit X un espace, Y un ensemble et $q : X \rightarrow Y$ surjective.

Definition 1 (Topologie quotient)

La topologie quotient sur Y est la topologie des $V \subset Y$ tel que $q^{-1}(V)$ est ouvert dans X .

Remarque

q est alors continue et on vérifie que c'est une topologie.

Exemple

$X = [0, 1]$ et $Y = (0, 1) \cup \{*\}$ et q l'application qui envoie 0 et 1 sur $*$.

Alors q est surjective et donc Y peut être muni de la topologie quotient et est homéomorphe à un cercle.

On définit $f : S^1 \rightarrow Y : e^{2\pi it} \mapsto t$ si $0 < t < 1$ et $*$ sinon.

Proposition 3

Soit $q : X \rightarrow Y$ une application continue, surjective et ouverte, alors q est un quotient.

Proposition 4

Soit $V \subset Y$ un sous-ensemble tel que $q^{-1}(V)$ est ouverte dans X . Comme q est surjective, alors $V = q(q^{-1}(V))$ et c'est un ouvert car q envoie les ouverts sur les ouverts.

Proposition 5

Une composition de quotients est un quotient.

Theorème 6

La topologie quotient est la plus fine qui rend q continue. De plus, pour $g : Y \rightarrow Z$, g est continue si et seulement si $g \circ q$ est continue.

Proposition 7

Si $q : X \rightarrow Y$ est continue, la preimage d'un ouvert de Y est ouvert dans X .

La topologie quotient est celle qui contient le plus d'ouvert possibles.

Clairement, si g est continue, alors $g \circ q$ l'est aussi.

Si $g \circ q$ est continue, soit $W \subset Z$ un ouvert, alors $(g \circ q)^{-1}(W) = q^{-1}(g^{-1}(W))$ est ouvert et par définition $g^{-1}(W)$ est ouvert dans Y .

Proposition 8

Le quotient d'un compact est compact

Preuve

L'image d'un compact est compacte. □

1.2 Relations d'équivalence

Si $q : X \rightarrow Y$ est un quotient, on définit sur X une relation d'équivalence \sim par $x \sim x'$ ssi $q(x) = q(x')$, alors les points de Y sont les classes d'équivalence $[x]$.

Definition 2

Si \simeq est une relation d'équivalence sur X , alors X/\simeq est l'espace quotient des classes d'équivalence.

Proposition 9 (Propriétés universelles)

Soit \sim une relation d'équivalence sur X et $f : X \rightarrow Z$ tel que $x \sim x' \implies f(x) = f(x')$, alors il existe un unique $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Z$ tel que $\bar{f} \circ q = f$

Preuve

Pour que le triangle commute, on doit poser $\bar{f}([x]) = f(x)$ et l'application est bien définie par hypothèse et donc unique.

On sait que \bar{f} est continue ssi $\bar{f} \circ q$ l'est. □

Definition 3

Si $A \subset X$, on pose $x \sim x' \iff x = x'$ ou $x, x' \in A$. Le collapse X/A est l'espace quotient X/\sim

Par exemple $I/\{0, 1\}$.

Exemple

$$D^n/\partial D^n = D^n/S^{n-1} = S^n$$

Pour deux espaces bien connus, pointés (X_1, x_1) et (X_2, x_2) , on peut construire un nouvel espace en identifiant x_1 et x_2 .

Definition 4 (Reunion disjointe)

Soit I un ensemble, X_α un espace pour chaque $\alpha \in I$.

La reunion disjointe $\bigcup X_\alpha$ est l'ensemble $\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \times \{\alpha\}$ dont la topologie est engendree par les sous-ensemble de la forme $U_\alpha \times \{\alpha\}$

Definition 5

Soit I un ensemble et pour tout $\alpha \in I$, (X_α, x_α) un espace pointe.

Le wedge $\bigvee_\alpha X_\alpha$ est le collapse de la reunion disjointe ou on identifie les points de base

Definition 6

Soit X un espace. Le cylindre $Cyl(X)$ est $X \times I$ et le cone CX est le collapse du cylindre a la base.

1.3 Separation et quotients

On definit sur $\mathbb{R} \times \{0;1\}$ une relation d'equivalence \sim par $(x,0) \sim (x,1)$ si $x \neq 0$.

Le quotient est la droite a deux origines dont on ne peut separer les deux origines $(0,1)$ et $(0,0)$ par des ouverts.

Regardons le graphe de \sim dans $\mathbb{R} \times \{0;1\} \times (\mathbb{R} \times \{0,1\})$ (ie. une copie de 4 plans)

Proposition 11

Si X/\sim est separe, alors le graphe de \sim dans $X \times X$ est ferme.

Preuve

La preimage de $\Delta \subset X/\sim \times X/\sim$ par $q \times q$ est Γ_\sim .

Comme Δ est ferme, sa preimage aussi. □

Lecture 2: Conditions de Separation

Sat 26 Feb

1.4 Conditions de separation du quotient

On donne une condition necessaire et une condition suffisante pour que le quotient soit separe

Proposition 12

Soit \sim une relation d'equivalence sur un espace X . Si X/\sim est separe, le graphe Γ de la relation est ferme dans $X \times X$

Preuve

Si X/\sim est separe, par un lemme, la diagonale $\Delta \subset X/\sim \times X/\sim$ est ferme.

Considerons $q \times q : X \times X \rightarrow X/\sim \times X/\sim$. Cette application est continue et donc $(q \times q)^{-1}(\Delta)$ est un ferme de $X \times X$. Or cette preimage est l'ensemble des paires de points $(x, y) \in X \times X$ tq $q(x) = q(y) \iff x \sim y$. \square

On donne maintenant une condition suffisante permettant de conclure qu'un quotient est separe.

Proposition 13

Soit \sim une relation d'equivalence sur un espace X separe. Si $q^{-1}(q(x))$ est compact pour tout point $x \in X$ et de plus que pour $F \subset X$ ferme $q^{-1}(q(F))$ est ferme, alors le quotient est separe.

Preuve

Soit $\bar{x} = q(x)$ et $\bar{y} = q(y)$ deux points distincts de X/\sim .

Les saturations $q^{-1}(\bar{x}), q^{-1}(\bar{y})$ sont des compacts par hypothese.

Comme X est separe, on peut separer des compacts avec des ouverts disjoints U et V .

On a donc

$$q^{-1}(\bar{x}) \subset U, q^{-1}(\bar{y}) \subset V \text{ et } U \cap V = \emptyset$$

Posons $E = X \setminus U, F = X \setminus V$ deux fermes de X .

Par hypothese, les saturations $q^{-1}(q(E))$ et $q^{-1}(q(F))$ sont fermes. Ainsi $U' = X \setminus q^{-1}(q(E))$ et $V' = X \setminus q^{-1}(q(F))$ sont des ouverts. On observe que $E \subset q^{-1}(q(E)), F \subset q^{-1}(q(F))$, alors $U' \subset U, V' \subset V$.

De plus $q^{-1}(q(x)) \subset U'$ et $q^{-1}(q(y)) \subset V'$.

Il reste a montrer que $q(U')$ et $q(V')$ sont ouverts dans X/\sim et disjoints.

Pour le premier point, il suffit de verifier que $q^{-1}(q(U'))$ est ouvert dans X .

On pretend que $q^{-1}(q(U')) = U'$.

En effet, $U' \subset q^{-1}(q(U'))$ est toujours vrai, il faut donc montrer l'inclusion inverse.

Soit $u \in q^{-1}(q(U'))$, donc $q(u) \in q(U')$. Donc $q(u) \notin q(E)$ et donc $u \in U'$

Le meme resultat est vrai pour V' .

Il faut donc finalement encore montrer que $q(U')$ et $q(V')$ sont des voisinages ouverts, de \bar{x} et \bar{y} disjoints.

Supposons qu'il existe $u' \in U', v' \in V'$ tel que $q(u') = q(v')$. Alors $u' \in q^{-1}(q(v')) \subset q^{-1}(q(V')) = V'$.

Donc $U' \cap V' \neq \emptyset$, contradiction. \square

Lecture 3: Groupes topologiques

Mon 28 Feb

Corollaire 14

Soit $A \subset X$ un sous-espace compact d'un espace X separe. Alors le collapse $\mathfrak{X}A$ est separe.

Preuve

Il suffit de verifier les proprietes du theoreme.

Soit $\bar{x} \in \mathfrak{X}A$.

Si $x \in A$, $q^{-1}(x) = A$ est compact. Si $x \notin A$, $q^{-1}(\bar{x}) = \{x\}$ qui est compact.

Soit F un ferme de X , alors si $F \cap A = \emptyset$, on a que $q^{-1}(q(F)) = F$ ferme, sinon $F \cap A \neq \emptyset$ et alors

$$q^{-1}(q(F)) = F \cup A$$

Comme A est compact et X separe, alors A ferme. \square

Exemple

Soit \sim une relation d'equivalence sur \mathbb{R}^2 defini par $(x, y) \sim (x', y') \iff (x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2$.

Alors

$$\mathbb{R}^2 \sim$$

est un tore, separe, or la proposition ne s'applique pas car $q^{-1}(0, 0) = \mathbb{Z}^2$.

Definition 7 (Espaces projectifs)

L'espace projectif reel $\mathbb{R}P^n$ est le quotient de S^n par la relation antipodale $x \sim y \iff x = \pm y$ pour $x, y \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Exemple

— $\mathbb{R}P^0 = \mathfrak{S}^0 \sim = *$, $\mathbb{R}P^1 = \mathfrak{S}^1 \sim \simeq S^1$.

— De plus $\mathbb{R}P^2 = S^2 / \sim$ est le plan projectif

Proposition 17

$\mathbb{R}P^n$ est compact et separe

Suit immediatement des propositions.

L'analogie complexe donne

Definition 8 (Espace projectif complexe)

L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ est le quotient de $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par la relation $x \sim y \iff \exists \alpha \in S^1$ tel que $x = \alpha y$.

De meme, pour les quaternions \mathbb{H} , on peut definir $\mathbb{H}P^n$, pour les octonions

on peut construire $\mathbb{O}P^0, \mathbb{O}P^1 \simeq S^8, \mathbb{C}P^2$

1.5 Quotients par des actions de groupe

Definition 9 (Groupe topologique)

Un groupe topologique est un groupe G tel que les applications de multiplication $\mu : G \times G \rightarrow G$ et l'inverse $\iota : G \rightarrow G$ sont continues.

Tout groupe peut être vu comme un groupe topologique discret.

Exemple

Le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{C}$ muni de la multiplication complexe est un groupe topologique

Remarque

Les seules sphères qui sont des groupes topologiques sont S^0, S^1, S^3

Lemme 20

Si $H < G$ est un sous-groupe d'un groupe topologique G , la topologie induite en fait un groupe topologique.

Definition 10

Une action d'un groupe topologique G sur un espace X est une application $\mu : X \times G \rightarrow X$ telle que

$$\mu(x, 1_G) = x \forall x \in X \text{ et } \mu(x, gg') = \mu(\mu(x, g), g')$$

Definition 11

Soit μ une action de G sur X , l'espace des orbites $\mathfrak{X}G$ et l'espace quotient de X par la relation $x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tel que } y = \mu(x, g)$

Remarque

Si $H < G$ est un groupe topologique, alors H agit sur G par multiplication à droite et $\mathfrak{S}H$ est l'espace des orbites gH . Si H est un sous-groupe normal, ce quotient est un groupe.

Proposition 22

Soit μ une action d'un groupe topologique G sur un espace X , alors

1. $q : X \rightarrow \mathfrak{X}G$ est ouverte
2. Si X est compact, le quotient est compact
3. Si X et G sont compact et séparés, alors $\mathfrak{X}G$ aussi.

Preuve

Soit $U \subset X$ ouvert, $q(U)$ est ouvert car $q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{g \in G} U \cdot g$ et $U \cdot g$ est ouvert car la translation est continue et est même un homeomorphisme.

La propriété 2 est immédiate.

On considère $X \times X \times G \rightarrow X \times X$ en envoyant $(x, y, g) \mapsto (x, yg)$, cette application est continue.

Le graphe Γ de la relation définie par μ est l'image de $\Delta \times G$.

Comme X est séparé, Δ est fermé donc compact et G est compact.

Ainsi Γ est compact dans $X \times X$ séparé donc Γ est fermé.

Soient xG et yG deux orbites différentes, ie. $(x, y) \notin \Gamma$.

Il existe donc des ouverts U, V tels que $U \times V \cap \Gamma = \emptyset$.

Comme q est ouverte, $q(U), q(V)$ sont des voisinages ouverts des orbites xG et yG respectivement. On conclut en remarquant que ces images sont disjointes.

Sinon on aurait zG commun, ie. $zg \in U, zg' \in V$ pour $g, g' \in G$ et alors $(zg, zgg^{-1}g') \in \Gamma \cap (U \times V)$ \square

1.6 $SO(n)$

Proposition 23

Soit G compact et X séparé. Soit μ une action transitive de G sur X .

Alors, si G_x , alors

$$\mathfrak{S}G_x = X$$

pour tout $x \in X$.

Preuve

On définit $\mu_x : G \rightarrow X$ envoyant $g \mapsto xg$, continue.

On observe que μ_x envoie G_x sur x et par transitivité, μ_x est surjective.

Par la propriété universelle du quotient, μ_x passe au quotient.

$\bar{\mu}_x$ est une bijection continue. C'est un homeo car $\mathfrak{S}G_x$ est compact, X séparé. \square

Lecture 4: Attachements de Cellules

Mon 07 Mar

1.7 Recollements

On construit de nouveaux espaces à l'aide de pièces plus simples.

On se donne $f : A \rightarrow X, g : A \rightarrow Y$ deux applications. On recolle X et Y le long de A

Definition 12 (Recollement)

Le recollement de X et Y le long de A est le quotient de $X \amalg Y$ par la relation d'équivalence engendrée par $f(a) \sim g(a) \forall a \in A$

Remarque

Il ne suffit pas d'identifier $f(a) \sim g(a)$ pour que la relation soit une relation d'équivalence.

Pour garantir la transitivité, on a des zigzags d'équivalence $f(a) \sim g(a) = g(b) \sim f(b) = f(c) \sim g(c) \dots$

Exemple

Si $A = *$, $f(*) = x_0 \in X$, $g(*) = y_0 \in Y$, alors le recollement $X \cup_* Y$ est le wedge $X \vee Y$

On notera le recollement $X \cup_A Y$.

Si $q : X \amalg Y \rightarrow X \cup_A Y$ est le quotient, alors l'inclusion $i_1 : X \rightarrow X \amalg Y$ induit $i = q \circ i_1 : X \rightarrow X \cup_A Y$ et de même pour l'inclusion de Y .

Proposition 26

Le recollement $X \cup_A Y$ est le pushout de $Y \leftarrow A \rightarrow X$.

Preuve

On doit montrer l'existence et l'unicité de θ .

Puisque chaque élément de $X \cup_A Y$ admet un représentant dans X ou Y , on doit poser $\theta([x]) = \alpha(x) \forall x \in X$ et $\theta([y]) = \beta(y) \forall y \in Y$.

On montre l'existence.

Posons $\Theta : X \amalg Y \rightarrow Z$ l'application déterminée par α et β .

On vérifie que Θ est compatible avec \sim . Soit $a \in A$, alors $\Theta(f(a)) = \alpha(f(a)) = \beta(g(a)) = \Theta(g(a))$.

Ainsi Θ passe au quotient et induit θ , qui est donc bien continue. \square

Des maintenant, on suppose que $g : A \subset Y$ est l'inclusion d'un sous-espace fermé.

Lemme 27

Soit $C \subset Y$, alors la saturation de C est

$$f(C \cap A) \amalg (C \cup f^{-1} \circ f(C \cap A))$$

Preuve

On va regarder ce qui se passe pour tout $c \in C$.

Si $c \notin A$, alors $q^{-1}(q(c)) = \{c\}$, sinon $q^{-1}(q(c))$ contient $f(c) \in X$ et $f^{-1}(f(c)) \subset Y$ \square

Lemme 28

Si $C \subset X$, $q^{-1}(q(C)) = C \amalg f^{-1}(C) \subset X \amalg Y$

Preuve

Comme ci-dessus, si $c \in C$ n'est pas dans l'image de f , on a $q^{-1}(q(c)) = \{c\}$, sinon on a $c \in X$ et $f^{-1}(c) \subset A \subset Y$ \square

Proposition 29

Soient X et Y deux espaces separes, $g : A \subset Y$ l'inclusion d'un compact, alors $X \cup_A Y$ est separe.

Preuve

On observe que $X \coprod Y$ est separe. Avant d'appliquer le critere de separabilite, on montre que l'application quotient est fermee. Comme un ferme de $X \coprod Y$ est la reunion disjointe de deux fermes on a deux cas.

Si $C \subset X$ ferme, alors $q(C)$ est ferme $\iff q^{-1}(q(C))$ est fermee. Par le lemme ci-dessus,

$$q^{-1}(q(C)) = C \coprod f^{-1}(C)$$

qui sont fermes.

Si $C \subset Y$, alors $q^{-1}(q(C)) = f(C \cap A) \coprod (C \cup f^{-1}(f(C \cap A)))$ \square

On a $f(C \cap A)$ compact et donc ferme puisque Y est separe.

Pour conclure, on verifie les deux conditions du critere.

Pour conclure, on verifie les deux conditions du critere, la saturation d'un ferme est fermee grace aux preparatifs.

Soit $z \in X \coprod Y$, on doit montrer que $q^{-1}(q(z))$ est compact, les lemmes ci-dessus permettent de conclure parce que si $z = a \in A$, $f^{-1}(f(a))$ est un ferme d'un compact et est donc compacte.

1.8 Attachement de cellules

Ici $g : A \subset CA = A \times I / A \times 1$.

Soit $f : A \rightarrow X$, le recollement $X \cup_A CA$ aussi note $X \cup_f CA$ est appele attachement d'une A -cellule sur X le long de f .

Si $A = S^{n-1}$ alors cet attachement est celui d'une n -cellule

Remarque

$CS^{n-1} \simeq D^n$, on note $X \cup_f CS^{n-1} = X \cup_f e^n$ ou $X \cup_f D^n$ et on appelle $e^n \simeq D^n$ une n -cellule (fermee.)

Proposition 31

Si X est separe et A est compact et separe, alors $X \cup_f CA$ est separe.

Si en plus X est compact

Preuve

Le premier point suit de la proposition precedente car CA est separe, le 2eme point suit du critere de compacite car $X \coprod Ca$ est compact. \square

Definition 13 (Suspension)

La suspension de A est le quotient $A \times I / (a, 0) \sim (a', 0)$ et $(a, 1) \sim (a', 1)$

Lecture 5: Homotopies et groupe fondamental

Sat 12 Mar

2 Homotopies et Groupe Fondamental**2.1 Homotopie****Definition 14 (Homotopie entre applications)**

Soient $f, g : X \rightarrow Y$ des applications. On dit que f et g sont homotopes et on note $f \simeq g$ s'il existe une application $H : X \times I \rightarrow Y$ tel que $H(-, 0) = f$ et $H(-, 1) = g$.

On appelle H une homotopie.

Proposition 32

La relation \simeq est une relation d'équivalence.

Preuve**Reflexivite**

Suit du fait qu'on peut définir une homotopie constante.

$$H : X \times I \rightarrow Y : (x, t) \mapsto f(x)$$

Symetrie

La symetrie suit du fait qu'on peut parcourir une homotopie dans l'autre sens.

Ainsi, soit $H : X \times I \rightarrow Y$ une homotopie entre f et g . On pose

$$G : X \times I \rightarrow Y : (x, t) \mapsto H(x, 1 - t)$$

Transitivite

Supposons que $H : X \times I \rightarrow Y, G : X \times I \rightarrow Y$ sont des homotopies, $f \simeq g \simeq h$. On construit une homotopie $K : X \times I \rightarrow Y$ entre f et h

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

On voit que K est continue et montre que $f \simeq h$. □

Definition 15 (Classes d'homotopie)

*On note $[X, Y]$ l'ensemble des classes d'homotopies d'applications $f : X \rightarrow Y$.
C'est donc $C(X, Y) / \simeq$.*

s