Série 12

David Wiedemann

4 décembre 2020

1

Ce résultat découle directement du théorème de Lagrange.
En effet, $|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}| = p^2$.
Soit H un sous-groupe propre.
Donc $|H| > 1$ et $|H| < p^2$. Par Lagrange, on sait que $|H||p^2$, ce qui force $|H| = p$.
On en conclut que $H \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

2

Dans ce qui suit, k représente le corps sur lequel U est défini et p sera la characteristique de ce corps.
Soit F un sous-groupe de U.
Supposons d'abord que $F \cap Z(U) \neq \{e\}$.
On a montré dans l'exercice 3 que le centre du groupe unipotent est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } a \in k$$

Si $F \cap Z(U) \neq \{e\}$, il existe une matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } a \in k^\times$$

appartenant à F.
Car F est un sous-groupe, le groupe cyclique engendré par M est contenu dans F.
Or $|Z(U)| = p$ et il est clair que $\langle M \rangle = Z(U)$, il suit $Z(U) \subseteq F$.
Supposons maintenant que $F \not\supseteq Z(U)$.

Par l'absurde, supposons que $F \cap Z(U) \neq \{e\}$.
Par le même argument que ci-dessus, ceci force $F \supseteq Z(U)$, ce qui est une contradiction.

3

On suppose que $F \cap Z(U) = \{e\}$.

Car $|U| = p^3$, par Lagrange, il y a 2 possibilités pour $|F|$.
Si $|F| = p$, alors il est évident que $|FZ(U)| = p^2$, donc

$$|{}^{FZ(U)}\!/_{Z(U)}| = p$$

Et on en conclut que

$$^{FZ(U)}\!/_{Z(U)} \simeq {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}}$$

Supposons donc $|F| = p^2$. On en conclut que $FZ(U) > p^2$, et donc $FZ(U) = U$.

Il est clair que

$$F \simeq {}^{F}\!/_{\{e\}}$$

Donc

$$F \simeq {}^{F}\!/_{F \cap Z(U)} \simeq {}^{FZ(U)}\!/_{Z(U)} = {}^{U}\!/_{Z(U)} \simeq k \oplus k \simeq {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}} \times {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}}$$

Ici, le premier isomorphisme est immédiat, le deuxième isomorphisme suit du deuxième théorème d'isomorphisme, le troisième suit de $FZ(U) = U$ et le quatrième isomorphisme suit de l'exercice 3.3.

Soit $a \in k^\times$, montrons que le sous-groupe E engendré par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un sous-groupe dont l'intersection avec $Z(U)$ est l'élément neutre est qui n'est pas normal.
On a dénoté avec $\bullet^{-1}$ l'inverse multiplicatif dans k.
Par l'exercice 3.1, on voit que E forme un sous-groupe d'ordre p dont l'intersection avec E est $\{e\}$.
Pourtant,

$$\begin{pmatrix} 1 & -a-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \notin E$$

4

Si $F \supsetneq Z(U)$ et F est un sous-groupe propre, alors, par Lagrange, $|F| = p^2$, et donc

$$|{}^{F}\!/\!_{Z(U)}| = \frac{p^2}{p} = p$$

Ce qui force

$${}^{F}\!/\!_{Z(U)} \simeq {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{p\mathbb{Z}}$$

Par le théorème de correspondance, il suffit de montrer que ${}^{F}\!/\!_{Z(U)}$ est normal dans ${}^{U}\!/\!_{Z(U)}$.
Pourtant, ${}^{U}\!/\!_{Z(U)} \simeq {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{p\mathbb{Z}} \times {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{p\mathbb{Z}}$.
En restreignant cet isomorphisme à ${}^{F}\!/\!_{Z(U)}$, on trouve un sous-groupe d'ordre p dans ${}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{p\mathbb{Z}} \times {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{p\mathbb{Z}}$.
Or ${}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{p\mathbb{Z}} \times {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{p\mathbb{Z}}$ est abélien, et donc n'importe quel sous-groupe est normal.
Il en suit que ${}^{F}\!/\!_{Z(U)} \trianglelefteq {}^{U}\!/\!_{Z(U)}$, on conclut avec le théorème de correspondance.