Série 4 du mercredi 3 mars 2021

Exercice 1.

Montrer que l'adhérence $\overline{E}$ d'un ensemble arbitraire $E \subset \mathbb{R}^n$ est l'ensemble fermé minimal contenant E.

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Par définition, $x \in \overline{E}$ si $\forall \delta \in]0, +\infty[$, $B(x, \delta) \cap E \neq \varnothing$. Il en résulte que $E \subset \overline{E}$. Dans le cours, nous avons vu que $\overline{E}$ est fermé.

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$, fermé, tel que $F \supset E$. Prouvons que $\overline{E} \subset F$, i.e. que $\mathbb{R}^n \setminus F \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{E}$. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$. Puisque $\mathbb{R}^n \setminus F$ est ouvert, il existe $\delta \in]0, +\infty[$ tel que $B(x, \delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$; puisque $E \subset F$, $B(x, \delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus E$. D'où $B(x, \delta) \cap E = \varnothing$ et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{E}$.

Exercice 2.

Considérons les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\Omega_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x_1^2 + x_2^2 < 16\}, \tag{1}$$

$$\Omega_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 = 1\}, \tag{2}$$

$$\Omega_3 := \left\{(x_1, x_2) \in]0, 1[\times \mathbb{R} : \sin \frac{1}{x_1} < x_2 < 2\right\}, \tag{3}$$

$$\Omega_4 := \{(x_1, x_2) \in]0, 1[\times \mathbb{R} : x_2 \in]1, 5[\text{ si } x_1 \in \mathbb{Q}; x_2 \in]0, 5[\text{ sinon}\}, \tag{4}$$

$$\Omega_5 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\} \cup \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 \leqslant 1\right\}. \tag{5}$$

Ces ensembles sont-ils ouverts ? Sont-ils fermés ? Sont-ils bornés ? Quel est leur bord ? Justifiez vos réponses.

Solution :

Remarque préliminaire : les seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ à la fois ouverts et fermés sont $\varnothing$ et $\mathbb{R}^n$.

1) L'ensemble Ω_1 est une couronne ouverte centrée à l'origine. Pour le montrer, considérons $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2) \in \Omega_1$ et

$$\delta := \frac{1}{2} \min\left\{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1, 4 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right\}. \tag{6}$$

Alors

$$B_{\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{x}, \delta) \subset \Omega_1. \tag{7}$$

Prouvons (7) en étudiant un quelconque $\boldsymbol{y} \in B_{\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{x}, \delta)$. Par définition de δ, on a

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 < \frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}\|_2 - 1) \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 < \frac{1}{2}(4 - \|\boldsymbol{x}\|_2). \tag{8}$$

Cela conduit à

$$\|\boldsymbol{y}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2 + \|\boldsymbol{x}\|_2 < \frac{1}{2}(4-\|\boldsymbol{x}\|_2) + \|\boldsymbol{x}\|_2 = \frac{1}{2}(4+\|\boldsymbol{x}\|_2) < 4 \tag{9}$$

et

$$\|\boldsymbol{y}\|_2 \geqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2 > \|\boldsymbol{x}\|_2 - \frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}\|_2 - 1) = \frac{1}{2}(1+\|\boldsymbol{x}\|_2) > 1. \tag{10}$$

On a donc $\boldsymbol{y} \in \Omega_1$, ce qui prouve (7).
D'autre part, Ω_1 est borné car $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega_1$, $\|\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant 4$. Son bord est

$$\partial\Omega_1 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 16\}. \tag{11}$$

Pour le prouver : si $x_1^2 + x_2^2 = 1$ et si $\delta > 0$, on vérifie aisément que $B_{\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{x},\delta) \cap \Omega_1 \neq \varnothing$ et $B_{\|\cdot\|_2}(\boldsymbol{x},\delta) \cap \Omega_1^c \neq \varnothing$; de même si $x_1^2 + x_2^2 = 16$.

2) Soit $(x_1,x_2) \in \Omega_2$. On a

$$1 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = y_1 y_2 \tag{12}$$

avec

$$y_1 := x_1 - x_2, \quad y_2 := x_1 + x_2. \tag{13}$$

Or l'équation « $y_1 y_2 = 1$ » décrit une hyperbole dans le système d'axe Oy_1y_2.
Il s'agit d'un ensemble fermé. Pour le prouver, prouvons que son complémentaire dans $\mathbb{R}^2$, i.e. $\Omega_2^c := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 \neq 1\}$, est ouvert. Considérons un point $\boldsymbol{z} := (z_1,z_2) \in \Omega_2^c$ et montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|_1}(\boldsymbol{z},\delta) \subset \Omega_2^c$ (notez la norme utilisée). Sans restriction de généralité[1] supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $z_1^2 - z_2^2 - 1 = \varepsilon$. Soient $\delta \in \,]0,+\infty[$, et $\boldsymbol{w} := (w_1,w_2) \in \mathrm{B}_{\|\cdot\|_1}(\boldsymbol{z},\delta)$. Alors $\boldsymbol{w}$ s'écrit

$$\begin{cases} w_1 = z_1 + \delta_1, \\ w_2 = z_2 + \delta_2, \end{cases} \quad \text{avec} \quad |\delta_1| + |\delta_2| < \delta, \tag{14}$$

et vérifie

$$\begin{aligned} w_1^2 - w_2^2 - 1 &= z_1^2 - z_2^2 - 1 + 2\delta_1 z_1 - 2\delta_2 z_2 + \delta_1^2 - \delta_2^2 \qquad (15) \\ &> \varepsilon - (2\delta\,(|z_1| + |z_2|) + 2\delta^2). \qquad (16) \end{aligned}$$

Ainsi, en choisissant $\delta \leqslant \min\{0.125\varepsilon/(|z_1| + |z_2|), \sqrt{0.125\varepsilon}\}$, alors

$$w_1^2 - w_2^2 - 1 > \frac{\varepsilon}{2} > 0. \tag{17}$$

On en conclut que $B_{\|\cdot\|_1}(\boldsymbol{z},\delta) \subset \Omega_2^c$ et Ω_2^c est ouvert.
On vérifie sans difficulté que le bord de Ω_2 est Ω_2 lui-même et que Ω_2 n'est pas borné.

3) Ω_3 est un ensemble ouvert. Soit $\overline{\boldsymbol{x}} := (\overline{x}_1,\overline{x}_2) \in \Omega_3$. Cherchons $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ de sorte que $]\overline{x}_1 - \delta_1, \overline{x}_1 + \delta_1[\, \times \,]\overline{x}_2 - \delta_2, \overline{x}_2 + \delta_2[\, \subset \Omega_3$. Posons $\delta_2 = (\overline{x}_2 - \sin(\overline{x}_1^{-1}))/2 > 0$. Puisque la fonction $x \mapsto \sin(x^{-1})$ est continue en $\overline{x}_1$, on a l'existence de $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x_1 > 0$ vérifiant $|x_1 - \overline{x}_1| < \delta_1$,

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x_1}\right) - \sin\left(\frac{1}{\overline{x}_1}\right)\right| < \delta_2. \tag{18}$$

1. La démarche est identique si on suppose $\varepsilon < 0$.

Finalement si $(x_1, x_2) \in \,]\overline{x}_1 - \delta_1, \overline{x}_1 + \delta_1[\, \times \,]\overline{x}_2 - \delta_2, \overline{x}_2 + \delta_2[$ alors

$$\sin\left(\frac{1}{x_1}\right) < \sin\left(\frac{1}{\overline{x}_1}\right) + \delta_2 = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{\overline{x}_1}\right) + \overline{x}_2\right) = \overline{x}_2 - \delta_2 < x_2. \tag{19}$$

Il suffit maintenant de réduire δ_1 de sorte que $]\overline{x}_1 - \delta_1, \overline{x}_1 + \delta_1[\, \subset \,]0,1[$ et δ_2 de sorte que : $\overline{x}_2 + \delta_2 < 2$. Cela montre que $B_{\|\cdot\|_\infty}(\overline{\boldsymbol{x}}, \min(\delta_1, \delta_2)) \subset \Omega_3$. Il est vivement conseillé d'agrémenter cette preuve d'un dessin.
L'ensemble Ω_3 est borné car, $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega_3$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant 3$. Le bord de Ω_3 est donné par

$$\begin{aligned}\partial\Omega_3 := \left\{(x_1, \sin(x_1^{-1})) \in [0,1] \times \mathbb{R}\right\} \\ \cup (\{0\} \times [-1,2]) \cup ([0,1] \times \{2\}) \cup (\{1\} \times [\sin 1, 2]).\end{aligned} \tag{20}$$

Montrons seulement que $\{0\} \times [-1,1] \subset \partial\Omega_3$. En effet, $\forall (x_1, x_2) \in \{0\} \times [-1,1]$, $\forall \delta \in \,]0,+\infty[$, $\exists \varepsilon \in \,]0,\delta[$ tel que $\sin(\varepsilon^{-1}) = -1$. Dans le cas $x_2 \in \,]-1,1]$, on a $(\varepsilon, x_2) \in \Omega_3$ et $(\varepsilon, x_2) \in B_{\|\cdot\|_\infty}(\boldsymbol{x}, \delta)$. Dans le cas $x_2 = -1$, $(\varepsilon, x_2 + \epsilon) \in \Omega_3$ et $(\varepsilon, x_2 + \epsilon) \in B_{\|\cdot\|_\infty}(\boldsymbol{x}, \delta)$. D'autre part $B_{\|\cdot\|_\infty}(\boldsymbol{x}, \delta) \cap \Omega_3^c \neq \varnothing$.

4) Ω_4 n'est ni ouvert, ni fermé. Soit $\delta \in \,]0,+\infty[$; considérons deux cas.
   a) Soit $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2) \in (]0,1[\setminus \mathbb{Q}) \times \,]0,1[$: $\boldsymbol{x} \in \Omega_4$ et $B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap \Omega_4^c \neq \varnothing$. Ainsi $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega_4$, ce qui montre que Ω_4 *n'est pas ouvert.*
   b) Soit $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2) \in (]0,1[\cap \mathbb{Q}) \times \,]0,1[$: alors $\boldsymbol{x} \notin \Omega_4$ et $B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap \Omega_4 \neq \varnothing$. Cela prouve que Ω_4^c n'est pas ouvert, donc Ω_4 *n'est pas fermé.*

   Ω_4 est borné car, $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega_4$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant 5$. Enfin,

$$\partial\Omega_4 = (\{0,1\} \times [1,5]) \cup ([0,1] \times ([0,1] \cup \{5\})) \tag{21}$$

   La seule contribution non triviale est prouver que $[0,1] \times [0,1] \subset \partial\Omega_4$. Soient $\boldsymbol{x} \in [0,1] \times [0,1]$ et $\delta > 0$: le disque $B(\boldsymbol{x}, \delta)$ contient des points de Ω_4 et des points de Ω_4^c, ce qui conclut l'inclusion.

5) $\Omega_5 = C_1 \cup C_2$ avec
   — C_1 le disque ouvert centré en $(0,0)$, de rayon 1, et
   — C_2 le disque fermé centré en $(1,1)$ de rayon 1.

   Il n'est ni ouvert ni fermé :

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \partial\Omega_5 \setminus \Omega_5 \tag{22}$$

   et

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \notin \mathring{\Omega}_5. \tag{23}$$

   Ω_5 est borné, car $\Omega_5 \subset B_{\|\cdot\|_2}\big((0,0), 1 + \sqrt{2}\big)$.
   Enfin,

$$\begin{aligned}\partial\Omega_5 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 x_2 \leqslant 0\right\} \\ \cup \left\{(x_1, x_2) \in [1,+\infty[\, \times \mathbb{R} : (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 = 1\right\} \\ \cup \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times [1,+\infty[: (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 = 1\right\} \\ \cup \left\{(x_1, x_2) \in \,]-\infty, 0]^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}.\end{aligned} \tag{24}$$

Exercice 3.

Notons $E = \{(x, \sin {}^1\!/\!x) : x \in]0, +\infty[\}$.

1) Montrer que E est connexe par arcs.
2) Donner une description explicite de $\overline{E}$.
3) Montrer que $\overline{E}$ n'est pas connexe par arcs.

Solution :

1) Montrons que E est connexe par arcs. Soient $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in E$ et $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2) \in E$. l'application $\gamma : [0, 1] \to E$ définie par

$$\gamma(t) = \left(a_1 + t(b_1 - a_1), \sin \frac{1}{a_1 + t(b_1 - a_1)}\right) \tag{25}$$

est un chemin de E d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{b}$.

2) Montrons que $\overline{E} = E \cup A$ où $A := \{0\} \times [-1, 1]$. Pour cela, notons $F := E \cup A$ et montrons les deux inclusions.

$F \subset \overline{E}$**.** Puisque $E \subset \overline{E}$ il suffit de montrer $A \subset \overline{E}$. Soit $(0, b) \in A$. La suite $(\boldsymbol{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\boldsymbol{x}_k = \left(\frac{1}{\arcsin b + 2(k+1)\pi},\ b\right) \tag{26}$$

est une suite d'éléments de E qui converge vers $(0, b)$. Pour le prouver, notons $\forall k \in \mathbb{N}$, $z_k := \arcsin b + 2(k+1)\pi$. La fonction arcsin étant définie de $[-1, 1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $z_k \geqslant \pi > 0$. De plus, $\sin z_k = b$ et $\lim_{k \to +\infty} {z_k}^{-1} = 0$. On en conclut que $(0, b) \in \overline{E}$ et donc que $F \subset \overline{E}$.

$\overline{E} \subset F$**.** Soit $(c, d) \in \overline{E}$. Il existe une suite $(c_k, \sin(c_k^{-1}))_{k \in \mathbb{N}} \subset E$ qui converge vers (c, d), i.e.

$$\lim_{k \to +\infty} c_k = c \geqslant 0, \qquad \lim_{k \to +\infty} \sin \frac{1}{c_k} = d. \tag{27}$$

Par conséquent, ou bien $c > 0$ et $d = \sin(c^{-1})$, ou bien $c = 0$ et $d \in [-1, 1]$; donc $(c, d) \in F$. Ceci prouve que $\overline{E} \subset F$.

Remarque. « $\lim_{k \to +\infty} \sin(c_k^{-1}) = d$ » ne contredit pas le fait que $x \mapsto \sin(x^{-1})$ n'a pas de limite en 0.

3) Raisonnons par contradiction : supposons que $\overline{E}$ est connexe par arcs. Il existe donc un chemin continu $\boldsymbol{\gamma} := (\gamma_1, \gamma_2) : [0, 1] \to \overline{E}$ d'origine $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0, 1)$ et d'extrémité $\boldsymbol{\gamma}(1) = (1, \sin 1)$. On remarque que pour tout $t \in [0, 1]$ tel que $\gamma_1(t) > 0$, on a nécessairement $\gamma_2(t) = \sin(\gamma_1(t)^{-1})$ car il y a un seul point dans $\overline{E}$ d'abscisse $\gamma_1(t)$ si $\gamma_1(t) \in]0, 1]$. Puisque $\gamma_1(1) = 1 > 0$ et γ_1 continue, il existe $s \in [0, 1]$ tel que, $\forall t \in [s, 1]$, $\gamma_1(t) > 0$. On peut alors définir $\alpha := \inf\{r \in [0, 1] : \forall t \in [r, 1], \gamma_1(t) > 0\}$; bien sûr, $\alpha \geqslant 0$. Ainsi, sur l'intervalle $]\alpha, 1]$ le chemin reste sur E et on a

$$\lim_{t \to \alpha^+} \gamma_1(t) = \gamma_1(\alpha) = 0, \tag{28}$$

ce qui amène

$$\lim_{t \to \alpha^+} \gamma_2(t) = \lim_{t \to \alpha^+} \sin \frac{1}{\gamma_1(t)}. \tag{29}$$

Le membre de droite de (29) n'existe pas, or la continuité de γ_2 en α implique $\lim_{t\to\alpha^+}\gamma_2(t) = \gamma_2(\alpha)$. Ceci contredit l'hypothèse de départ : il n'existe pas de chemin continu d'origine $(0,1)$ et d'extrémité $(1,\sin 1)$.