

Analyse I

David Wiedemann

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Buts du Cours	3
2	Definir \mathbb{R}	4
2.1	Exemple d'utilisation	6
3	Suites et limites	11
3.1	Convergence	11

List of Theorems

1	Theorème (env. -400)	3
2	Lemme (Lemme)	3
	Preuve	3
	Preuve	3
3	Axiom (Nombres Reels)	4
4	Lemme (Theorem name)	5
	Preuve	5
5	Proposition (Annulation de l'element neutre)	5
	Preuve	5
6	Corollaire (x fois moins 1 egale -x)	5
	Preuve	5
7	Axiom (Nombres Reels II)	6
1	Definition (valeur absolue)	6
8	Proposition (Inegalite du triangle)	6
	Preuve	6
2	Definition (Bornes)	7
9	Axiom (Axiome de completude)	7
3	Definition (Supremum)	7
14	Proposition	8
	Preuve	8

15	Corollaire (Propriete archimediennne)	8
	Preuve	8
16	Theorème (La racine de deux existe)	8
	Preuve	8
18	Proposition (\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R})	9
19	Lemme	9
	Preuve	9
	Preuve (Preuve de la densite)	10
20	Proposition (Densite des irrationnels)	10
	Preuve	10
4	Definition (Suite)	11
5	Definition (Convergence de suites)	11
23	Lemme (Unicité de la limite)	11
	Preuve	11
6	Definition	12
25	Lemme	12
	Preuve	12
	Preuve	12
27	Proposition	12
	Preuve	12
28	Lemme	13
	Preuve	13

1 Introduction

1.1 Buts du Cours

Officiel :

Suites, series, fonctions, derivees, integrales , ...

Secrets :

Apprendre le raisonnement rigoureux

Creativite

Esprit Critique

Ne croyez rien tant que c'est pas prouve

On construit sur ce qu'on a fait, on recommence pas toujours a 0, par rapport a d'autres domaines (lettres par exemple)

Theorème 1 (env. -400)

Il n'existe aucun nombre (fraction) x tel que $x^2 = 2$.

Ca contredit pythagore mn ?

On va demontrer le theoreme.¹

Lemme 2 (Lemme)

Soit $n \in \mathbb{N}$ Alors n pair $\iff n^2$ pair.

Preuve

\Rightarrow Si n pair $\Rightarrow n^2$ pair.

Hyp. $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$)

Donc $n^2 = 4m^2$, pair.

Par l'absurde, n impair. $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$).

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

impair. Donc si n est impair, alors n^2 est forcément impair. Absurde. \square

Preuve

Supposons par l'absurde $\exists x$ t.q. $x^2 = 2$ et $x = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$).

On peut supposer a et b non tous pairs. (sinon reduire).

$$x^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$$

1. On demontre d'abord un lemme

pair.

Lemme : a pair, i.e. $a = 2n (n \in \mathbb{N})$.

$$a^2 = 4n^2 = 2b^2 \Rightarrow 2n^2 = b^2, \text{ i.e. } b^2 \text{ pair.}$$

Lemme : b pair.

Donc a et b sont les deux pairs, on a une contradiction.

⚡

□

En conclusion, le theoreme est bel et bien vrai, et contredit donc pythagore. Donc les fractions (\mathbb{Q}) ne suffisent pas a decire/mesurer les longueurs geometriques. Il faut les nombres reels, on les comprends seulement vraiment depuis 2 siecles.

C'est important de chercher ce genre d'erreurs.

Prochain but : definir les nombres reels (\mathbb{R}). L'interaction entre les fractions et les nombres reels.

2 Definir \mathbb{R}

On commence avec la definition axiomatique des nombres reels.

Axiom 3 (Nombres Reels)

\mathbb{R} est un corps, en d'autres termes :

Ils sont munis de deux operations : plus et fois.

— Associativite $x + (y + z) = (x + y) + z (x, y, z \in \mathbb{R})$ ²

— Commutativite $x + y = y + x$.

— Il existe un element neutre 0 t.q. $0 + x = x, x \in \mathbb{R}$.³

— Distributivite $x(yz) = (xy)z$

— Il existe un element inverse, unique $-x \in \mathbb{R}$ t.q. $x + (-x) = 0$

Remarque : Il existe beaucoup d'autres corps que \mathbb{R} , par exemple $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \{0, 1, 2\} \mod 3$

Attention : $\{0, 1, 2, 3\} \mod 4$ n'est pas un corps !

Presque tous marchent, ils satisfont 8 des 9 axiomes.

2. L'associativite n'est pas forcément vraie (octonions)

3. Il y a aucune difference entre les regles pour l'addition que pour la multiplication.

Lemme 4 (Theorem name) $\forall x \exists! y \text{ t.q. } x + y = 0.$ **Preuve***Supposons $x + y = 0 = x + y'$* *A voir : $y = y'$.*

$$\begin{aligned}
y &= y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' \\
&= (x + y) + y' = 0 + y' = y'
\end{aligned}$$

CQFD.

□

Exercice

Démontrer que 0 est unique.

Proposition 5 (Annulation de l'élément neutre) $0 \cdot x = 0$ **Preuve**

$$x = x \cdot 1 = x(1 + 0) = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$$

$$0 = x + (-x) = x + (-x) + x \cdot 0$$

□

$$\Rightarrow 0 = x \cdot 0$$

4

Corollaire 6 (x fois moins 1 égale -x)

$$x + x \cdot (-1) = 0$$

Preuve*A voir : $x \cdot (-1)$ satisfait les propriétés de $-x$.**Or*

$$x + x(-1) = x(1 - 1) = x \cdot 0 = 0.$$

□

ExerciceMontrer que $\forall x : -(-x) = x$ et que ceci implique $(-a)(-b) = ab$.Rien de tout ça n'a quelque chose à voir avec \mathbb{R} .

Il nous faut plus d'axiomes!!

$$4. \ a - b = a + (-b)$$

Axiom 7 (Nombres Reels II)

\mathbb{R} est un corps ordonne. Ce qui revient a dire que les assertions suivantes sont verifiees.

- $x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$
- $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$
- pour tout couple de nombres reels x et y : ou bien $x \leq y$ ou bien $x \geq y$.

Exemple de corps ordonnes :

- (1) \mathbb{R} , (2) \mathbb{Q} , (3) $\{0, 1, 2\} \bmod 3$ n'est pas un corps ordonne.

Exercice

$$x \leq y \iff -x \geq -y \quad \text{Exercice}$$

$$x \leq y \text{ et } z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$$

$$x \leq y \text{ et } z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz.$$

Il nous manque encore un axiome, et c'est le dernier : pour mercredi !

Lecture 2: Cours Mercredi

Wed 16 Sep

2.1 Exemple d'utilisation

Definition 1 (valeur absolue)

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposition 8 (Inegalite du triangle)

Elle dit que

$$\forall x, y : |x + y| \leq |x| + |y|$$

Preuve

Cas $x, y \geq 0$: alors $x + y \geq 0$

$$\iff x + y \leq x + y$$

Ce qui est toujours vrai.

Cas $x \geq 0$ et $y < 0$.

Si $x + y \geq 0$, alors

$$\iff |x + y| \leq x - y$$

$$\iff x + y \leq x - y$$

$$y \leq -y$$

c'est vrai car $y < 0$.

Si $x + y < 0$, alors

$$\Longleftrightarrow -x - y \leq x - y$$

□

Donc $-x \leq x$ vrai car $x \geq 0$.

Definition 2 (Bornes)

Terminologie : Soit $A \subseteq E$, E corps ordonne.

— *Une borne superieure (majorant) pour A et un nombre b tq*

$$a \leq b \forall a \in A.$$

— *Une borne inferieure (minorant) pour A et un nombre b tq*

$$a \geq b \forall a \in A.$$

On dira que l'ensemble A est borne si il admet une borne.

Axiom 9 (Axiome de completude)

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \neq \emptyset$$

et majoree $\exists s \in \mathbb{R}$ t.q

1. *s est un majorant pour A .*

2. *\forall majorant b de A , $b \geq s$.*

Cet axiome finis la partie axiomatique du cours.

Remarque 10

1. *$\forall s' < s \exists a \in A : a > s'$.*

2. *s est unique.*

Definition 3 (Supremum)

Ce s s'appelle le supremum de A , note $\sup(A)$.

Remarque 11

\exists (pour A minore et $\neq \emptyset$) une borne inferieure plus grande que toutes les autres, notee $\inf(A)$ (infimum).

$$\inf(A) = -\sup(-A)$$

Remarque 12

Si $\sup(A) \in A$, on l'appelle le maximum.

Remarque 13

Si $\inf(A) \in A$, on l'appelle le minimum.

Proposition 14

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x.$$
Preuve

Par l'absurde,

Alors

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : n < x$$

$\Rightarrow \mathbb{N}$ borne et $\neq \emptyset \Rightarrow \exists s = \sup(\mathbb{N})$

$$s - \frac{1}{2} < s \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > s - \frac{1}{2}$$

$n + 1 \in \mathbb{N}$ et $n + 1 > s - \frac{1}{2} + 1 = s + \frac{1}{2}$

donc $n + 1 > s$ absurde. □

Corollaire 15 (Propriété archimédienne)

1. $\forall x \forall y > 0 \exists n \in \mathbb{N} : ny > x.$

2. $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon$

Preuve

Pour 2, appliquer la proposition à $x = \frac{1}{\epsilon} \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{1}{\epsilon}$

Alors

$$\Rightarrow \epsilon > \frac{1}{n}$$

Pour montrer le 1.

Considérer $\frac{x}{y}$ □

On peut maintenant montrer que la racine de deux existe.

Théorème 16 (La racine de deux existe)

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

Preuve

$$A := \{y | y^2 < 2\}$$

Clairément $A \neq \emptyset$ car $1 \in A$. De plus, A est majorée : 2 est une borne. (si $y > 2, y^2 > 4 > 2 \Rightarrow y \notin A$).

Donc $\exists x = \sup(A)$

Supposons (par l'absurde) que $x^2 < 2$

Soit $0 < \epsilon < 1, \frac{2-x^2}{4x}$.

Clairément, par hypothèse $2 - x^2 > 0$ et idem pour $4x$ car $x \geq 1$. Soit $y = x + \epsilon$, alors

$$y^2 = x^2 + 2\epsilon x + \epsilon^2 < x^2 + \frac{2 - x^2}{2} + \frac{2 - x^2}{2} = 2$$

$\Rightarrow y \in A$ Mais $y = x + \epsilon > x$. Absurde car $x = \sup(A)$. Donc $x^2 \geq 2$.

Deuxièmement, supposons (absurde) $x^2 > 2$.

Soit $0 < \epsilon < \frac{x^2 - 2}{2x} > 0$.

Posons $b = x - \epsilon$.

$$\begin{aligned} b < x &\Rightarrow \exists y \in A : y > b \\ \Rightarrow y^2 > b^2 &= x^2 - 2\epsilon x + \epsilon^2 > x^2 - \underbrace{2\epsilon x}_{< x^2 - 2} \\ &> x^2 - (x^2 - 2) = 2. \end{aligned}$$

Conclusion : $y^2 > 2$ contredit $y \in A$.

Donc $x^2 = 2$. □

Remarque 17

Preuve similaire :

$$\forall y > 0 \exists! x > 0 : x^2 = y$$

Proposition 18 (\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R})

$$\forall x < y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y$$

Lemme 19

$$\forall x \exists n \in \mathbb{Z} : |n - x| \leq \frac{1}{2}$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} \forall x \exists [x] \in \mathbb{Z} & \text{ tq } \\ \begin{cases} [x] \leq x \\ [x] + 1 > x \end{cases} \end{aligned}$$

Preuve

$$\exists n \in \mathbb{Z} : n > x \text{ (Archimede).}$$

Soit $[x] = \inf\{n \in \mathbb{Z} : n > x\} - 1$ □

Preuve (Preuve de la densité)

Archimède : $\exists q \in \mathbb{N} : q > \frac{1}{y-x}$.

Donc

$$\begin{aligned} & qy - qx > 1. \\ \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : qx < p < qy \end{aligned}$$

par exemple :

$$p = [qy]$$

si $qy \notin \mathbb{Z}$ ou bien

$$p = qy - 1$$

si $qy \in \mathbb{Z}$

□

Lecture 3: Suites

Wed 23 Sep

0,999

0,9

0.99

0.999

0.9999

⋮

Proposition 20 (Densité des irrationnels)

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, les irrationnels sont denses dans \mathbb{R} .

Preuve

Soit $x < y$ (dans \mathbb{R}).

Cherche $z \notin \mathbb{Q}$ tq $x < z < y$.

$$\exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ tq } x < \frac{p}{q} < y$$

Prop. archimédienne $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} :$

$$\underbrace{\frac{p}{q} + \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{n}}_{:=z} < y$$

car

$$\exists n : \frac{1}{n} < \underbrace{y - \frac{1}{q}}_{>0} / \sqrt{2}$$

Il reste a voir que : $z = \frac{p}{q} + \sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$

$$\sqrt{2} = n(z - \frac{p}{q})$$

$$z \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \quad \text{⚡}$$

□

3 Suites et limites

Definition 4 (Suite)

Une suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ dans \mathbb{R} est une application (= fonction) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Remarque 21

Suite $(x_n) \neq$ ensemble $\{x_n\}$ Il arrive qu'on indice x_n par une partie de \mathbb{N} . Mais suite = suite infinie

Exemple 22

$$x_n = \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$$

$$x_n = (-1)^n; x_n = n!; F_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$$

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415$$

3.1 Convergence

Definition 5 (Convergence de suites)

L'expression $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ signifie :

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$$

On dit alors que (x_n) converge (vers l). Sinon, (x_n) diverge.

Lemme 23 (Unicité de la limite)

Si (x_n) converge, il existe une unique $l \in \mathbb{R}$ tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$

Preuve

Supposons l, l' limites. Si $l \neq l'$, alors $|l - l'| > 0$ Donc $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \frac{|l - l'|}{2}$

De meme $\exists n_1 \forall n > n_1 : |x_n - l'| < \frac{|l - l'|}{2}$

Soit $n > n_0, n_1$ Alors :

$$|l - l'| = |l - x_n + x_n - l'| \leq \underbrace{|l - x_n|}_{< |l - l'|/2} + \underbrace{|x_n - l'|}_{|x_n - l'|}$$

Donc

$$|l - l'| < 2 \cdot \frac{|l - l'|}{2}$$

⚡

□

Exemple 24

1. Si (x_n) est constante ($\exists a \forall n : x_n = a$) alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ (Archimede)

Definition 6

Terminologie :

(x_n) est bornée, majorée, minorée, rationnelle, ... etc si l'ensemble $\{x_n\}$ l'est.

La suite (x_n) est croissante si $x_n \leq x_{n+1} \forall n$ Idem décroissante Dans les deux cas, on dit que la suite (x_n) est monotone

Lemme 25

Toute suite convergente est bornée.

Preuve

Posons $\epsilon = 7$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |x_n - l| < 7$$

□

Soit $B_1 \geq |x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|$

Posons $B = \max(B_1, |l| + 7)$ Alors $|x_n| \leq B \forall n$.

Attention la reciproque n'est pas vraie!!

Exemple 26

$x_n = (-1)^n$ definit une suite bornée non convergente.

Preuve

Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = l$.

Posons $\epsilon = \frac{1}{10}$ alors $\exists n_0 \forall n > n_0 : |(-1)^n - l| < \frac{1}{10}$

$n > n_0$ pair $\Rightarrow |1 - l| < \frac{1}{10}$

$n > n_0$ impair $\Rightarrow |-1 - l| < \frac{1}{10}$

ceci implique

$$\Rightarrow |1 - (-1)| \leq |1 - l| + |-1 - l|$$

A finir...

□

Proposition 27

Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x'_n = l'$

Alors 1. : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + x'_n) = l + l'$, et 2. : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot x'_n = l \cdot l'$

Preuve

1 :

Soit $\epsilon > 0$ Cherche n_0 tq $\forall n > n_0 : |x_n + x'_n - (l + l')| < \epsilon$.

Appliquons les deux hypotheses a $\frac{\epsilon}{2} : \exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ et $\frac{\epsilon}{2} : \exists N' \forall n > N' : |x'_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ Posons $n_0 = \max(N, N')$
Si $n > n_0$, alors

$$|x_n + x'_n - (l + l')| \leq |x_n - l| + |x'_n - l'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

2 :

Par le lemme, $\exists B$ tq. $|x_n|, |x'_n| < B \forall n$.

Soit $\epsilon > 0$. Appliquons les hypotheses a $\frac{\epsilon}{2B}$.

$$\exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2B}$$

Si $n > n_0 := \max(N, N')$:

$$\begin{aligned} |x_n x'_n - ll'| &\leq |x_n x'_n - x_n l'| + |x_n l' - ll'| \\ &= \underbrace{|x_n|}_{< B} \cdot \underbrace{|x'_n - l'|}_{< \frac{\epsilon}{2B}} + \underbrace{|l'|}_{< B} \cdot \underbrace{|x_n - l|}_{< \frac{\epsilon}{2B}} < \epsilon \end{aligned} \quad \square$$

Lemme 28

On a utilise : lemme Si $x_n \leq B \forall n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ alors $l \leq B$

Preuve

Par l'absurde :

Si $l > B$, posons $\epsilon = l - B > 0$

$\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$

en particulier $x_n > l - \epsilon - B \not\downarrow$ □