Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-04-19 au 2021-04-23

Série 15 du lundi 19 avril 2021

Exercice 1.

Notons $U := \mathbb{R}_+^* \times]0,\pi[\times]0,2\pi[$; on considère l'application $\boldsymbol{f} : U \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1) $\boldsymbol{f}$ est-elle un difféomorphisme local ?
2) Trouver, si elle est définie, l'application réciproque de $\boldsymbol{f}$.
3) Donner l'ensemble $\boldsymbol{f}^{-1}(]0,+\infty[^3)$ et calculer la matrice jacobienne de $\boldsymbol{f}^{-1}$. Trouver le jacobien de $\boldsymbol{f}^{-1}$ en fonction du jacobien de $\boldsymbol{f}$.

Exercice 2.

Considérons l'équation

$$1 - y^2 + x^2 y \mathrm{e}^y = 0. \tag{2}$$

1) Montrer que (2) définit dans un voisinage du point $x = 0$ une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 1$.
2) Montrer que ϕ admet un minimum local en 0.

Exercice 3.

Soit $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe une fonction $y \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x,y(x)) = 0. \tag{3}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$; notons $b := y(a)$. Supposons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0, \quad \text{et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) > 0. \tag{4}$$

Montrer que y atteint un maximum local en a.