Analyse II

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Introduction

Mon 22 Feb

1 Intégrales généralisées

Peut-on définir une intégrale sur un intervalle ouvert plutot que sur un intervalle fermé ? ie.

$$f : [a, b[\to \mathbb{R} \text{ c.p.m.}$$

Definition 1 (Intégrales généralisées (sur un intervalle borné non fermé))
Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux ($a < b$).
En particulier, f est c.p.m. sur tout intervalle $[a, x]$, $a < x < b$ Soit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.
On dit que l'integrale generalisee $\int_a^b f(x)dx$ existe (ou converge) si $\lim_{x\to b} F(X)$ existe, dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b} F(x) - F(a)$$

Si $\lim_{x\to b-} F(x)$ n'existe pas, alors on dit que

$$\int_a^b f(t)dt$$

diverge. Definition analogue pour le cas $]a, b]$.

On souhaite definir $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} tan(x)dx = 0$.
Dans certains cas cette integrale vaut 0. Mais si on calcule

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\frac{\pi}{2}+\epsilon^2} \frac{\pi}{2} - \epsilon tan(t)dt = \lim_{\epsilon\to 0+} (-\ln(\cos(\frac{\pi}{2} - \epsilon)) + \ln(\cos(-\frac{\pi}{2} + \epsilon^2))) = -\infty$$

Il faut donc une definition qui est coherente.

Definition 2 (Integrale sur un intervalle borne ouvert)
Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ c.p.m et $c \in]a, b[$.
Si les integrales generalisees $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ existent, alors on definit l'integrale

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Si une des deux integrales diverge, alors le tout diverge.

Lemme 1
La valeur de l'integrale $\int_a^b f(t)dt$ ne depend pas de c, si elle converge.

Preuve
Soit $d \in]a, b[$, different de c, alors on a

$$\int_a^d f(t)dt = \lim_{x\to a+} \int_x^d f(t)dt = \lim_{x\to a+} \int_x^c f(t)dt + \int_c^d f(t)dt$$

$$= \int_c^d f(t)dt + \lim_{x\to a+} \int_x^c f(t)dt$$

Donc l'integrale existe.
Si elle existe, on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(t)dt = \int_a^d f(t)dt + \int_d^b f(t)dt \\
&= \lim_{x\to a+} \int_x^d f(t)dt + \lim_{y\to b-} \int_d^y f(t)dt \\
&= \int_c^d f(t)dt + \lim_{x\to a+} \int_x^c f(t)dt + \lim_{y\to b-} \int_d^c f(t)dt + \int_c^y f(t)dt \\
&= \int_a^b f(t)dt
\end{aligned}$$

□

Remarque
Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *continue.*
Si f *admet une extension par continuite sur* $[a,b]$*, alors on verifie facilement que*

$$\int_a^b f(t)dt$$

existe et coincide avec

$$\int_a^b \tilde{f}(t)dt$$

ou $\tilde{f}$ *est l'extension par continuite de* f *sur* $[a,b]$*.*

Lemme 3 (Critere de Comparaison)
Soit $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ *continues par morceaux et supposons qu'il existe* $c \in [a,b[$ *tel que*

$$0 \le f(x) \le g(x) \forall x \in [c,b[$$

et si $\int_c^b g(x)dx$ *existe, alors* $\int_a^b f(x)dx$ *existe aussi. De meme si* $\int_c^b f(x)dx$ *diverge, alors* $\int_a^b f(x)dx$

Lecture 2: Integrales Generalisees

Wed 24 Feb

Theorème 4 (Critere de Comparaison)
Soit $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m. et supposons* $\exists c \in [a,b[$ *tel que*

$$0 \le f(x) \le g(x) \forall x \in [c,b[$$

Si $\int_a^b g(x)dx$ *existe alors* $\int_a^b f(x)dx$ *existe aussi*
Si $\int_a^b f(x)dx$ *diverge alors* $\int_a^b g(x)dx$ *diverge aussi.*

Preuve
Si $\int_a^b g(x)dx$ *existe, alors* $\int_c^b g(x)dx$ *existe.*
Donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{x\to b-}\int_a^x f(t)dt \\ &= \lim_{x\to b-}(\int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt) \\ &= \int_a^c f(t)dt + \lim_{x\to b-}\int_c^x f(t)dt \\ &\leq \int_a^c f(t)dt + \lim_{x\to b-}\int_c^x g(t)dt < +\infty\end{aligned}$$

En notant $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *,* F *est non decroissante, et bornee superieurement sur l'intervalle* $[a, b[\Rightarrow \lim_{x\to b-} F(x)$ *existe.* □

Exemple
$f(x) = \left|\sin(\frac{1}{x})\right|$ *sur* $]0, 1]$*, on a*

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

1 est integrable, et donc l'integrale de $f(x)$ *existe.*

1.1 Integrales absoluments convergentes

Definition 3 (Integrale absolument convergente)
Soit I *un intervalle du type* $[a, b[,]a, b]$ *ou* $]a, b[$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *c.p.m.*
On dit que l'integrale generalisee de f *sur* I *est absolument convergente si*

$$\int_I |f(x)|dx$$

existe.

Theorème 6 (absolument convergente implique convergente)
Si l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ *converge absolument, alors il converge.*

Preuve
Notons $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ *et* $f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}$ *et on a* $|f(x)| = f_+(x) + f_-$*.*
Donc

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)| \text{ et } 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)| \forall x \in I$$

Par critere de comparaison, si

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ existe } \Rightarrow \text{ alors } \int_a^b f_+(x)dx, \int_a^b f_-(x) \text{ existent}$$

et donc $\int_a^b f(x)dx$ □

Remarque
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ c.p.m Si f est bornee sur I, alors

$$\int_I f(x)dx$$

existe.

Theorème 8 (Critere de comparaison (II))
Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ c.p.m.
S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1[$ tel que

$$\lim_{x \to b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \in \mathbb{R}$$

Alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

existe.
S'il existe $\alpha \geq 1$ tel que

$$\lim_{x \to b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \neq 0$$

alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

diverge.

Preuve
Par definition de la limite $\forall \epsilon > 0, \exists b - a > \delta_\epsilon > 0$ tel que

$$|f(x)(b-x)^\alpha - l| < \epsilon \forall x$$

$$\Rightarrow l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha \leq l + \epsilon$$

et donc

$$0 \leq |f(x)| \leq \frac{|l| + \epsilon}{(b-x)^\alpha}$$

Puisque le terme de droite est integrable, on conclut par le critere de comparaison. Pour la deuxieme partie, soit $\alpha \geq 1$ et $l \neq 0$.
Supposons $l > 0$, on a

$$l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha$$

Le meme raisonnement que ci-dessus donne que l'integrale de f diverge. □

1.2 Integrale generalisee sur un intervalle non borne

Definition 4 (Integrale sur un intervalle non borne)
Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *c.p.m.*
On dit que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *existe si*

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(x)dx$$

existe et dans ce cas, on note

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$$

idem si $f :]-\infty, a[\to \mathbb{R}$. *Soit* $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *c.p.m. on dit que* $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *existe s'il existe* $c \in]a, \infty[$ *tel que*

$$\lim_{x\to a+} \int_x^c f(t)dt \ \ et \ \lim_{y\to+\infty} \int_c^y f(t)dt$$

existent.

Lecture 3: L'espace R^n

Mon 01 Mar

2 L'espace R^n

2.1 Espace vectoriel norme

Soit un ensemble V sur lequel on definit deux operations

1. somme : $+ : V \times V \to V$
2. multiplication par un scalaire $\mathbb{R} \times V \to V$

On definit R^n par $R^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ldots \times \mathbb{R}$

Definition 5 (Norme d'un vecteur)
C'est une application $N : V \to \mathbb{R}$, *c'est une application qui satisfait*

— $\forall x \in V : N(x) \geq 0$ *et* $N(x) = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.
— $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V : N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
— $\forall x, y \in V, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

On utilise souvent la notation $N(x) = \|x\|$

Definition 6 (Espace vetoriel norme)
Un espace vectoriel norme est note $(V, \|.\|)$

Definition 7
Soit V *un espace vectoriel et* N_1, N_2 *deux normes sur* V.
On dit que N_1 *et* N_2 *sont equivalentes si* $\exists c_1, c_2 > 0$ *tel que*

$$c_1 N_2(x) \leq N_1(x) \leq c_2 N_2(x) \forall x \in V$$

Definition 8 (Distance)
Soit X un ensemble.
Une distance est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ qui satisfait les proprietes suivantes

- $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0,\ d(x, y) = 0 \iff x = y$
- *La distance est symmetrique*
- $\forall x, y, z \in V, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Un espace X muni d'une distance est appele un espace metrique et est note (X, d).

On peut toujours definir une distance sur un espace vectoriel norme, defini par

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

On appelle cette distance, la distance induite par la norme.
Tout espace vectoriel norme est aussi un espace metrique.

Definition 9 (Produit Scalaire)
Soit V un espace vectoriel.
Un produit scalaire est une application $b : V \times V \to \mathbb{R}$ qui satisfait les proprietes suivantes

- $\forall x, y \in V, b(x, y) = b(y, x)$
- $\forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x, z) + \beta b(y, z)$
- $\forall x \in V, b(x, x) \geq 0, b(x, x) = 0 \iff x = 0$

Theorème 9 (Inegalite de Cauchy-Schwarz)
Soit V un espace vectoriel et $b : V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire. Alors

$$\forall x, y \in V | b(x, y) \leq \sqrt{b(x, x) b(y, y)}$$

Preuve
$\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.

$$0 \leq b(\alpha x + y, \alpha x + y) = \alpha^2 b(x, x) + 2\alpha b(x, y) + b(y, y)$$

Donc on a

$$\Delta = b(x, y)^2 - b(x, x) b(y, y)$$

□

Theorème 10
Soit $b : V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire, alors l'application $x \to \sqrt{b(x, x)} = \|x\|_b$ est une norme sur V.

Donc, si V est muni d'un produit scalairel, alors V est un espace norme et donc V est un espace metrique pour la distance induite par le produit scalaire.

2.2 Normes sur R^n

- La norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
- Norme "max" $\|x\|_\infty = \max |x_i|$
- Norme 1 : $\|x\|_1 = \sum |x_i|$
- Normes $p \in [1, +\infty[$ $\|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
  Pour p infinie, on retrouve la norme infinie

On montre en exercices que toutes les normes p sont equivalentes.
De meme, on montre que toutes les normes sur R^n sont equivalentes. Par contre, seulement la norme 2 est deduite d'un produit scalaire.

Definition 10 (Suites convergentes)
Soit $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$.
On dit que cette suite converge s'il existe $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k \to +\infty} \left\| x^{(k)} - x \right\| = 0$$

Lecture 4: Boules sur R^n

Wed 03 Mar

2.3 Suites sur R^n

Remarque
Supposons que $\{x^{(k)}\} \to \overrightarrow{x}$ *par rapport a la norme euclidienne. Et oit* $|||\cdot|||$ *une autre norme sur* $\mathbb{R}^n$. *Puisque toutes les normes sont equivalentes sur* $\mathbb{R}^n$ $|||\overrightarrow{x}||| \leq c||\overrightarrow{x}||_2$ *Donc toutes les suites converge peu importe la norme.*

En particulier, on peut choisir la norme infinie.

Lemme 12
Une suite $\{x^{(k)}\}$ *converge si et seulement si toutes les composantes convergent.*

Definition 11 (Suites de Cauchy)
On dit qu'une suite $\{x^{(k)}\}$ *est de Cauchy si*

$$\forall \epsilon > 0 \exists N > 0 : \forall k, l \geq N \left\| x^{(k)} - x^{(l)} \right\| \leq \epsilon$$

Theorème 13
Une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Preuve
Si la suite $x^{(k)}$ *converge* $\iff$ $\left\{x_i^{(k)}\right\}$ *converge pour tout* $i = 1, \ldots, n$ *donc toutes ces suites sont de Cauchy et donc* $x^{(k)}$ *converge.* $\square$

Theorème 14 (Bolzano-Weierstrass)
Soit $\left\{x^{(k)}\right\}$ *une suite bornee.*
Alors il existe une sous-suite $\left\{x^{(k_j)}\right\}$ *qui converge*

Preuve
Si $\left\{x^{(k)}\right\}$ *est bornee, en particulier chaque suite* $x^{(k)_i}$ *sera bornee.*
En $i = 1$*, la suite* $x^{(k)}$ *est bornee, donc il existe une sous-suite convergente vers une valeur* x_1*.*
On considere les index de cette sous-suite et on reapplique l'argument ci-dessus en $i = 2$*, etc.* $\square$

2.4 Topologie de $\mathbb{R}^n$

Definition 12 (Boule)
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $\delta > 0$*, la boule ouverte centree en* x *et de rayon* δ

$$B(x,\delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \delta\}$$

La boule fermee

$$\overline{B}(x,\delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \delta\}$$

La sphere centree en x *et de rayon* δ

$$S(x,\delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| = \delta\}$$

2.5 Classification des points d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$

Le complementaire de E est

$$E^c = \{y \in \mathbb{R}^n, y \notin E\}$$

On dit que x est un point interieur de E si $\exists \delta : B(x,\delta) \subset E$, on dit que x est un point frontiere de E si $\forall \delta B(x,\delta) \cap E \neq \emptyset$ et $B(x,\delta) \cap E^c \neq \emptyset$ On dit que E^o est l'ensemble des points interieurs de E, E^o est appele l'interieur de E.

On note ∂E l'ensemble des points frontieres, appele la frontiere ou le bord de E.
On dit que x est un point adherent de E si $\forall \delta > 0, B(x,\delta) \cap E \neq \emptyset$ On note $\bar{E}$ l'ensemble des points adherents de E, appele l'adherence de E.
On a $\bar{E} = E \cup \partial E$
On dit que x est un point isole si

$$\exists \delta > 0 B(x,\delta) \cap E = \{x\}$$

On dit que x est un point d'accumulation de E, si $\forall \delta > 0$

$$B(x,\delta) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Donc, en particulier, si on prend $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$

$$\exists x^{(k)} \in E, \text{ tel que } \left\| x^{(k)} - x \right\| \leq \frac{1}{k}$$

La suite $x^{(k)}$ converge vers x.

Definition 13

Soit E un ensemble de $\mathbb{R}^n$, on dit que E est ouvert si tous ses points sont interieurs

Definition 14

E est ferme si E^c est ouvert.

Lecture 5: Ensembles compacts/connexes par arcs

Mon 08 Mar

2.6 Caracterisation des ensembles ouverts

- $\overset{\circ}{E}$ est toujours ouvert.
- E est ouvert si et seulement si $E = \overset{\circ}{E}$
- L'union (meme infinie) d'ensembles ouverts est ouverte.
  Soit $E = \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$ et K_α sont ouverts.
  Alors $\forall x \in E$, $x \in K_\alpha$ et donc il existe une boule ouverte centree en x et contenue dans K_α.
- L'intersection finie d'ensembles ouverts est ouverte.
  Soit $E = \bigcap K_i$, alors $\forall x \in E, x \in K_i \forall i$, mais chaque K_i est ouvert, donc en prendant $\delta = \min \{\delta_1, \ldots\}$, $B(x, \delta) \in E$ et donc E est ouvert.

2.7 Caracterisation des ensembles fermes

- $\mathbb{R}^n \setminus \overline{E} = \overset{\circ}{E}, \overline{E^c} = \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{E}$
- $\overline{E}$ est toujours ferme.
- L'intersection (meme infinie) d'ensembles fermes est fermee.
- L'union finie d'ensembles fermes est fermee.
- E est ferme si et seulement si toute suite $\left\{x^{(k)}\right\}$ convergente, converge vers un element $x \in E$.

  Preuve

  Soit E ferme et $\left\{x^{(k)}\right\}$ une suite convergente vers $x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon$: $\forall k > N_\epsilon, \left\|x - x^{(k)}\right\| \leq \epsilon$.
  Donc $\forall \epsilon B(x, \epsilon) \cap E \neq \emptyset$, donc $x \in \overline{E} = E$.
  Supposons que E n'est pas ferme, donc E^c n'est pas ouvert. Donc $\exists x \in E^c : \forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$.
  Si on prend $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \exists x^{(k)} \in B(x, \delta) \cap E$ et $\left\{x^{(k)}\right\}$ converge vers x, donc $x \in E$ ↯ $\square$

2.8 Ensembles compacts

Definition 15 (Ensemble compact)
On dit que E est compact si E est a la fois ferme et borne.

Theorème 15 (Caracterisation par sous-suites convergentes)
Un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute suite $\left\{x^{(k)}\right\} \subset E$ on peut extraire une sous-suite convergente vers un element $x \in E$

Theorème 16 (Caracterisation par recouvrements finis)
Un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute famille $\{K_\alpha, \alpha \in A\}$ d'ouverts tel que $E \subset K_\alpha$, on peut extraire une sous-famille finie qui est encore un recouvrement de E.

Definition 16 (Chemin dans *E*)
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. On appelle chemin de E une application $\gamma : [0,1] \to E$, $\gamma(t) = (\gamma_1, \ldots)$, tel que γ_i est continu pour tout i.
E

Definition 17 (Ensembles connexes par arcs)
Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est connexe par arcs si $\forall x, y \in E$, il existe un chemin γ tel que $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

3 Fonctions de plusieurs variables

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. On appelle fonction sur E a valeurs reelles une application $f : E \to \mathbb{R}$

$$\forall x \in E, x \to f(x) \subset \mathbb{R}^n$$

On note $D(f)$ le domaine de f, $\operatorname{Im} f$ l'image, $g(f)$ le graphe .

3.1 Notion de limite

Definition 18 (Limite)
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E. On dit que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta$$

Alors

$$\|f(x) - l\| < \epsilon$$

Theorème 17 (Des deux gendarmes)
Soit $f, g, h : E \to \mathbb{R}^n$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *un point d'accumulation de* E.
Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$ *et* $\exists \alpha > 0$

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) 0 < \|x - x_0\| \leq \alpha$$

Alors $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existe et est egale a* l.

Lecture 6: Fonctions continues

Wed 10 Mar

3.2 Caracterisation de limite par suites

Theorème 18 (Limites/Suites)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *un point d'accumulation de* E. *La limite* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ *si et seulement si pour toute suite suite* $\left\{x^{(k)}\right\} \subset E$ *qui converge vers* x_0, *on a* $\lim_{k\to+\infty} f(x^{(k)}) = l$.

Preuve
Soit $\left\{x^{(k)} : \lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = x_0\right\}$, *on sait que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ *donc*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in E, \|x - x_0\| < \delta, |f(x) - l| < \epsilon$$

il existe N *tq* $\forall k > n$ *tq* $\left\|x^{(k)} - x_0\right\| < \delta$
Si la limite $\lim_{k\to+\infty} f(x^{(k)}) = l$ *pour toute suite* $x^{(k)}$.
Par l'absurde, supposons que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *n'existe pas.*

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E, x \neq x_0 : \|x - x_0\| < \delta$$

et

$$|f(x) - l| \geq \epsilon$$

□

Si on prend $\delta = \frac{1}{k}$, *alors* $\exists x^{(k)} \neq x_0 : \left\|x^{(k)} - x_0\right\| < \frac{1}{k}$ *tel que* $|f(x^{(k)}) - l| \geq \epsilon$.
Or cette suite $x^{(k)}$ *converge vers* x_0, $\lightning$

3.3 Proprietes de l'operation de limite

Soit $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E et $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$, alors l'operation de limite est lineaire, respecte les regles de multiplication.

Theorème 19 (Critere de Cauchy)
Idem qu'en analyse I.

3.4 Fonctions a valeurs dans R^m

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Definition 19 (Limite)
On dit que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \overrightarrow{l} \in \mathbb{R}^m$ *existe si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E \setminus \{x_0\}, 0 < \|x - x_0\| < \delta$$

on a

$$\|f(x) - l\| < \epsilon$$

De plus, chaque composante de f *converge vers la composante correspondante de la limite.*

4 Fonctions continues

Definition 20 (Continuite en un point)
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ *non vide,* $f : E \to \mathbb{R}^m$*, et* $x_0 \in E$*.*
Si x_0 *est un point d'accumulation de* E*, on dit que* f *est continue en* x_0 *si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$*.*
Si x_0 *est un point isole, on admet que* f *est continue en* x_0

4.0.1 Definitions Equivalentes

- $\forall \epsilon > 0, \exists \delta : \forall x \in E, \|x - x_0\|, \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$
- pour toute suite $x^{(k)} \subset E$ qui converge vers x_0 on a que $\lim_{k \to +\infty} f(x^{(k)}) = f(x_0)$

Definition 21 (Continuite sur *E*)
On dit que $f : E \to \mathbb{R}^m$ *est continue sur* E *si elle est continue en tout point* $x \in E$*.*
Dans ce cas, on note $f \in C^0(E)$

Definition 22 (continuite uniforme sur *E*)
On dit que f *est uniformement continue sur* E *si* $\forall \epsilon$*,* $\exists \delta$ *tel que* $\forall x \in E, \forall y \in E$ $\|y - x\| < \delta$*, on a* $\|f(y) - f(x)\| < \epsilon$

Evidemment, la continuite uniforme implique la continuite.

Lecture 7: Prolongement par continuite

Mon 15 Mar

4.1 Prolongement par continuite

Definition 23 (Prolongement par continuite)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *continue, avec* $E \neq \overline{E}$*, soit* $x_0 \in \overline{E} \setminus E$*. Une fonction* $\tilde{f} : E \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}^m$ *est appellee un prolongement si* $\tilde{f}$ *est continue en* x_0 *et*

coincide avec f sur E.

Le prolongement par continuite est uniquement defini par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in E$ et $\tilde{f}(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$ si la limite existe.

> **Theorème 20 (Prolongement par continuite sur l'adherence)**
> *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et $f : E \to \mathbb{R}^n$ continue sur E. Supposons que $\forall x \in \overline{E} \setminus E$ la limite $\lim_{y \to x} f(y)$ existe. Alors on peut definir un prolongement $\tilde{f} : \overline{E} \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{f}(x) = f(x) \forall x \in E$ et $\tilde{f}(x) = \lim_{y \to x} f(y)$ sinon, de plus $\tilde{f}$ est continue sur $\overline{E}$.*

Preuve
Si $x \in E$, $f(x)$ est continue en x donc $\tilde{f}(x) = f(x)$ est continue en x. On a

$$\tilde{f}(x) = \lim_{y \to x, y \in E} f(y) = \lim_{y \to x, y \in E} \tilde{f}(y)$$

Pour montrer que $\tilde{f}$ est continue en x, il faut montrer que $\tilde{f}(x) = \lim_{y \to x, y \in \overline{E}} \tilde{f}(y)$
Il faut montrer que pour toute suite $x^{(k)} \subset \overline{E}$ convergeant en $x \in \overline{E} \setminus E$ on a

$$\lim_{k \to +\infty} \tilde{f}(x^{(k)}) = \tilde{f}(x)$$

On construit une deuxieme suite $y^{(k)}$ convergent vers x.
Si $x^{(k)} \in E$, alors $y^{(k)} = x^{(k)}$.
Si $x^{(k)} \in \overline{E} \backslash E$ on peut toujours trouver une valeur $y^{(k)} \in E$ tel que $\left\| y^{(k) - x^{(k)}} \right\| \leq 2^{-k}$, $\left\| f(y^{(k)} - \tilde{f}(x^{(k)})) \right\| \leq 2^{-k}$.
On aura donc

$$\left\| y^{(k)} - x \right\| \leq \left\| y^{(k)} - x^{(k)} \right\| + \left\| x^{(k)} - x \right\|$$

Ainsi $y^{(k)} \subset E$ converge vers x, et ainsi

$$\lim_{k \to +\infty} \tilde{f}(x^{(k)}) = \lim_{k \to +\infty} (\tilde{f}(x^k) - \tilde{f}(y^k)) + \lim_{k \to +\infty} \tilde{f}(y^{(k)}) = \lim_{k \to +\infty} \tilde{f}(y^{(k)}) \qquad \square$$

> **Theorème 21**
> *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide $f : E \to \mathbb{R}^n$ uniformement continue. Alors f peut etre prolongee par continuite sur $\overline{E}$ et le prolongement $\tilde{f} : \overline{E} \to \mathbb{R}^m$ est uniformement continu.*

Definition 24
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, $f : E \to \mathbb{R}$ Si $\sup f = \infty$ on dit que f n'est pas bornee superieurement.
Si $M < \infty$ on appelle M la borne superieure de f.
S'il existe $x_M \in E, f(x_M) = M$ alors on dit que M est le maximum de f sur E et x_M est un point maximum de f. Meme definition pour borne inferieure.

Theorème 22
Soit E non vide et compact, $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint son maximum et son minimum sur E.

Preuve
Par l'absurde f n'est pas bornee, il existe $x^{(k)}$ tel que $|f(x^{(k)})| > k$
Mais E est compact, donc il existe une sous-suite $x^{(k_i)}$ qui converge, or f est continue, donc

$$\lim_{i\to+\infty} f(x^{(k_i)}) = f(x) < \infty \lightning$$

Supposons que f n'atteint pas ses bornes
Il existe $x^{(k)}$ qui converge vers le sup, or E est ferme. $\square$

Theorème 23
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, compact, connexe par arcs, et $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint toutes les valeurs entre son minimum et maximum.

Preuve
f est continue sur un compact donc f atteint son min et son max.
Puisque E est connexe, il existe γ un chemin du minimum au maximum. On conclut par TVI sur la fonctionm $f \circ \gamma$ $\square$

Theorème 24
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et compact avec $f : E \to \mathbb{R}^m$ continue. Alors f est uniformement continue sur E.

Lecture 8: Derivee partielles et directionnelle

Wed 17 Mar

5 Derivees de fonctions a plusieurs variables

5.1 Derivees Directionelles

Definition 25 (Derivees directionnelle)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{x_0} \in \overset{\circ}{E}$ et $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur arbitraire.
On dit que f est derivable dans la direction $\overrightarrow{v}$, au point x_0, si

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

existe et on note $D_v f(x_0)$.

Si on prend $\|\overrightarrow{v}\|$ (norme euclidienne) , alors on appelle $D_v f(x_0)$ la derivee directionnelle de f dans la direction $\overrightarrow{v}$ au point x_0.
en particulier, on peut prendre $\overrightarrow{v} = e_i$, dans ce cas on utilise la notation

$$D_{e_i} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$$

et on appelle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ la i-eme derivee partielle de f au point x_0.

Definition 26 (Gradient)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x_0 \in \overset{\circ}{E}$.
Si toutes les derivees partielles de f *en* x_0 *existent, alors on appelle le vecteur gradient*

$$\nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^n, \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Definition 27 (Matrice Jacobienne)
On appelle matrice Jacobienne $Df(x_0) \in \mathbb{R}^{1\times n}$

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

5.2 Fonctions Differentiables

Definition 28 (Differentiabilite)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \overset{\circ}{E}$. *On dit que* f *est differentiable (ou derivable) en* x_0 *si il existe une application lineaire* $L_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et une fonction* $g : E \to \mathbb{R}$ *tel que*

$$f(x) = f(x_0) + L_{x_0}(x - x_0) + g(x) \forall x \in E$$

et $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\|x-x_0\|} = 0$.

Theorème 25
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *differentiable en* $x_0 \in \overset{\circ}{E}$, *alors*

- *Toutes les derivees partielles de* f *en* x_0 *existent.*
- *On a*

$$L_{x_0}(x - x_0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - x_0) = Df(x_0)(x - x_0)$$

- *Toutes les derivees directioneelles existent et*

$$D_v f(x_0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) v_i = \nabla f(x_0)^T \overrightarrow{v} = Df(x_0)\overrightarrow{v}$$

- f *est continue en* x_0.

Preuve

- *On a*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0) + L_{x_0}(x_0 + te_i - x_0) + g(x_0 + te_i)}{t} \end{aligned}$$

$$= L_{x_0}(e_i) + \lim_{t \to 0} \frac{g(x_0 + te_i)}{t}$$

$$= L_{x_0} a_i$$

— *On a*

$$f(x) = f(x_0) + L_{x_0}(x - x_0) + g(x)$$

Donc

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \to x_0} L_{x_0}(x - x_0) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0)$$

—

$$\begin{aligned} D_v f(x_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{Df(x_0)tv + g(x_0 + tv)}{t} \\ &= Df(x_0)\vec{v} \end{aligned}$$

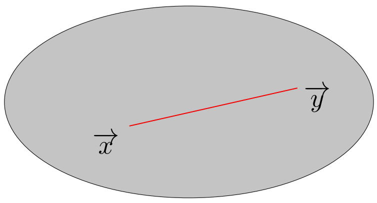
□

Lecture 9: Derivees secondes

Wed 24 Mar

Cas scalaire :

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $x, y \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ derivable sur E.



On denote par $[x, y]$ le segment (ferme) entre x et y et $]x, y[$ le segment ouvert entre x et y.

Theorème 26 (Theoreme des accroissements finis dans $\mathbb{R}^n$)
Soit $x, y \in E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$, alors il existe $z \in [x, y]$ tel que

$$f(y) - f(x) = \nabla f(z)^T (y - x) = Df(z)(y - x)$$

Preuve
Soit $g(t) = f(x + t(y - x))$ pour $t \in [0, 1]$.
On a alors

$$g'(t) = \frac{d}{dt} g(t) = \frac{d}{dt} f(\phi(t))$$

ou $phi(t) = x + t(y - x)$.
Puisque f et ϕ sont derivables, on conclut que g est aussi derivable.
Donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= Df(\phi(t)) \cdot D\phi(t) \\ &= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t(y - x))(y_i - x_i) \\ &= \nabla f(x + t(y - x))^T (y - x) = Df(x + t(y - x))(y - x) \end{aligned}$$

Le taf applique a g donne $\exists s \in]0, 1[$ tel que

$$g(1) - g(0) = g'(s)$$

Donc

$$f(y) - f(x) = Df(x + s(y - x))(y - x)$$

□

On conclut en posant $z = x + s(y - x)$.

Le cas vectoriel :

Theorème 27 (Taf dans le cas vectoriel)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
On essaie de representer $f(y) - f(x)$ a l'aide des derivees de f.
On peut ecrire TAF pour chaque composante, mais les z_k ne sont en general pas les memes.
Cependant, on peut toujours ecrire pour $f \in C^1(E)$

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 Df(x + s(y - x))(y - x) ds$$

5.3 Derivees d'ordre superieur

Definition 29 (Derivees partielles secondes (cas scalaire))
Soit $f : E \to \mathbb{R}$, E ouvert.
Supposons que pour un indice $i = \{1, \ldots n\}$ fixe, la derivee partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existe $\forall x \in E$.

Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admet la derivee partielle selon x_j, alors on dit que f a une derivee partielle seconde en x et on note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(x)$$

Definition 30 (Matrice hessienne)
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tel que toutes les derivees partielles existent que toutes les derivees secondes existent

$$H_f(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_1})(y) & \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_2})(y) & \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_1})(y) & \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_2})(y) & \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_3}(\frac{\partial f}{\partial x_1})(y) & \frac{\partial}{\partial x_3}(\frac{\partial f}{\partial x_2})(y) & \dots \end{pmatrix}$$

Definition 31 (Espace $C^2(E)$)
On dit que $f : E \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 si toutes les derivees partielles secondes sont continues.

Definition 32 (Derivees directionnelles secondes)
Soit $v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$. Alors, etant donne $D_v f : E \to \mathbb{R}$, on peut essayer de calculer la derivee directionnelle de $D_v f$ dans la direction $w \in \mathbb{R}^n$.
Si une telle derivee exise, on dit que f admet une derivee directionnelle seconde dans les directions v et w au point x et on note

$$D_{wv} f(x) = D_w(D_v f)(x)$$

Lemme 28
Soit $f \in C^2(E)$, E ouvert et $v, w \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\| = \|w\| = 1$.
Alors $D_{wv} f$ existe en tout $x \in E$ et

$$\begin{aligned} D_{wv} f(x) &= w^T H_f(x) v \\ &= \sum_{i=1}^n w_i (\sum_{j=1}^n H_f(x)_{ij} v_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) w_i v_j \end{aligned}$$

Preuve
Si $f \in C^2$ alors $f \in C^1$, alors $D_v f(x) = \nabla f(x)^T v = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i$.
Mais puisque $f \in C^2$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^1 \forall i$, donc

$$\begin{aligned} D_w(D_v f)(x) = \nabla(D_v f)^T w &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(D_v f) w_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)) v_j w_i \end{aligned}$$ □

Ce qui donne le resultat desire.

Theorème 29 (Theoreme de Schwarz)
Soit $f : E \to \mathbb{R}$. Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ fixes.
Supposons que $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent sur E et sont continues en $x \in E$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

Lecture 10: Derivees d'ordre superieur

Mon 29 Mar

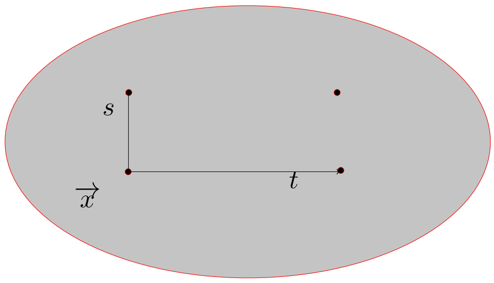


Figure 1 – thmschwarz

Preuve
Soit $s, t > 0$ suffisamment petit tel que

$$x + se_i, x + te_j, x + se_i + te_j \in E$$

Posons

$$\begin{aligned}
\Delta(s,t) &= f(x + se_i + te_j) - f(x + se_i) - f(x + te_j) + f(x) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + se_i)t - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)t \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j} st \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} f(x + te_j)s - \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)s
\end{aligned}$$

Plus formellement, on peut ecrire

$$\Delta(s,t) = (f(x + se_i + te_j) - f(x + se_i)) - (f(x + te_j) - f(x))$$

On definit

$$g(\xi) = f(x + \xi e_i + te_j) - f(x + \xi e_i)$$

et donc

$$\Delta(s,t) = g(s) - g(0)$$

et g est derivable car f est derivable

$$g'(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \xi e_i + te_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \xi e_i)$$

par le TAF, on a

$$\begin{aligned} g(s) - g(0) &= g'(\tilde{s})s \\ &= (\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \tilde{s}e_i + te_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \tilde{s}e_i))s \end{aligned}$$

On definit maintenant

$$\phi(y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \tilde{s}e_i + ye_j)$$

Alors on a

$$\Delta(s,t) = (\phi(t) - \phi(0))s$$

A nouveau, ϕ est derivabe, et donc on a

$$\begin{aligned} \Delta(s,t) &= \phi'(\tilde{t})ts \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}(x + \tilde{s}e_i + \tilde{t}e_j)ts \end{aligned}$$

Si on prend $t = s$, on a

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2}\Delta(s,s) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\left(x + \tilde{s} + \tilde{t}e_j\right)s^2\right)$$

On peut appliquer exactement le meme raisonnement dans l'autre sens, et on obtient le resultat desire. □

5.4 Derivees d'ordre superieur

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, $f : E \to \mathbb{R}$ et on fixe $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$. On definit la derivee partielle par rapport aux variables $x_{i_1}, \dots, x_{i_p}$, on note alors

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_p}}(\dots(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}})))(x)$$

Corollaire 30

Soit $i_1, \dots, i_p$ fixe et σ une permutation des nombres $\{1, \dots, p\}$.
Si $\frac{\partial^p}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}}$ et $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_{\sigma(p)}} \dots \partial x_{i_{\sigma(1)}}}$ existent et sont continues en x pour toute permutation alors ils sont egaux

5.5 Developpement limite et formule de Taylor

On veut generaliser la definition pour la dimension 1, on veut un polynome de degre p dans les variables $(x_1, \dots, x_n)$, en utilisant la notation multi-entiers, on note

$$p(x) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n),|\alpha|\leq 2} c_\alpha x^\alpha$$

De maniere generale, on peut donc ecrire

$$q(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,|\alpha|\leq p} c_\alpha x^\alpha$$

Le developpement limite d'ordre p d'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ autour d'un point $x \in \mathring{E}$, aura donc la forme

$$f(y) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,|\alpha|\leq p} c_\alpha (y-x)^\alpha + R_p(y)$$

Ou R_p satisfait

$$\lim_{y\to x} \frac{R_p(y)}{\|y-x\|^p} = 0$$

Soit $f : E \to \mathbb{R}$, $f \in C^{p+1}(E)$, E un ouvert non vide et soient $x, y \in E$ tel que $[x.y] \in E$, soit $g(t) = f(x+t(y-x))$, pour $t \in [0,1]$, on voit que $g \in C^{p+1}([0,1])$. On peut donc ecrire

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \dots + \frac{g^p(0)}{p!}t^p + R_p(y)$$

On a donc

$$g'(t) = \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x_t)\frac{d(x_t)i_1}{dt} = \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(xt)(y_{i_1} - x_{i_1}) = \sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(y-x)^\alpha$$

De meme, on trouve

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}f(x_t)) \\ &= \sum_{|\alpha|=2} \frac{2!}{\alpha!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha}(x_t)(y-x)^\alpha \end{aligned}$$

La formule de Taylor s'ecrit donc

$$\begin{aligned} f(y) = g(1) &= \sum_{k=0}^{p} \frac{g^k(0)}{k!} t + R_p(y) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{k!} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(x)(y-x)^\alpha + R_p(1) \end{aligned}$$

La formule de lagrange donne

$$R_p(1) = \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x + \theta(y-x))(y-x)^\alpha$$

Lecture 11: Integrales qui dependent de parametres

Wed 31 Mar

6 Integrales qui dependent de parametres

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$, soit $f : I \times E \to \mathbb{R}$, $t \in I$ et $x = (x_1, \ldots)$ tel que $\forall x \in E$ $\int_I f(t, \overrightarrow{x}) dt$ existe.
On peut definir la fonction $g : E \to \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{x} \to g(x) = \int_I f(t, \overrightarrow{x}) dt$$

— Si f est continue sur $I \times E$ est-ce que g est continue ? Autrement dit, pour $x_0 \in E$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \int_I f(t, \overrightarrow{x}) dt \underbrace{=}_{?} \int_i \lim_{x \to x_0} f(t, x) dt = g(x_0)$$

— Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe sur $I \times E$ est-ce que $\frac{\partial}{\partial x_i} g$ existe sur E et

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \underbrace{=}_{?} \int_I \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x) dt$$

Exemple
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t, x) \to x^2 e^{-x^2 t}$
Soit

$$g(x) = \int_0^\infty x^2 e^{-x^2 t} dt$$

Pour $x = 0$, $f(t, 0) = 0 \forall t$, $g(0) = 0$, *pour* $x \neq 0$,

$$g(x) = (-e^{-x^2 t})|_{t=0}^{\infty} = 1$$

ainsi, g *n'est pas continue.*

6.1 Integrales sur un intervalle ferme borne

Theorème 32
Soit $E \in \mathbb{R}^n$ ouvert et

$$f : [a, b] \times E \to \mathbb{R}$$

continue.
Alors la fonction $g : E \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_a^b f(t, x)dt$$

est bien definie $\forall x \in E$ et est continue sur E..

Preuve
Pour tout $x \in E$, la fonction $t \to f_x(t)$ est continue et donc integrable.
Montrons que g est continue sur E.
Fixons $x_0 \in E$, $\exists \eta > 0 \overline{B}(x_0, \eta) \subset E$.
Alors la restriction de f a $A = [a, b] \times \overline{B}(x_0, \eta)$.
Donc A est compact, et donc $f|_A$ est uniformement continue.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta \in]0, \eta] : \forall (s, y), (t, x) \in A, |s - t| \leq \delta, \|y - x\| \leq \delta$$

On a

$$|f(s, y) - f(t, x)| \leq \epsilon$$

En particulier, on peut choisir $s = t, y = x_0$, alors

$$\begin{aligned}|g(x) - g(x_0)| &= |\int_a^b f(t, x) - f(t, x_0)dt| \\ &\leq \int_a^b |f(t, x) - f(t, x_0)|dt \\ &\leq \epsilon(b - a)\end{aligned}$$

Remarque

— *Le theoreme est valable aussi si l'ensemble E est ferme, il suffit de considerer $\overline{B}(x, \delta) \cap E$ et meme pour n'importe quel sous-ensemble E.*

Theorème 34
Soit a, b fini, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, et $f : [a, b] \times E \to \mathbb{R}$ continue tel que, pour i fixe

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : [a, b] \times E \to \mathbb{R}$$

existe et est continue.

Alors $g(x) = \int_a^b f(t,x)dt$ *existe pour tout* x *et* $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$ *existe pour tout* x *et*

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} f(t,x)dt$$

Preuve

Soit $x_0 \in E$ *et* $\eta > 0 : \overline{B}(x_0, \eta) \subset E$, *on definit*

$$A = [a,b] \times \overline{B}(x_0,\eta) \text{ un compact}$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_A$ *est uniformement continue.*
On a donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in]0,\eta] : \forall t \in [a,b], \forall x \in \overline{B}(x_0,\delta)$$
$$|\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$$

On veut montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{s\to 0} \frac{g(x_0+se_i) - g(x_0)}{s}$$

existe et est egal a

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0)dt$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&|\frac{g(x_0+se_i)-g(x_0)}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0)dt| \\
&= |\frac{1}{s}\int_a^b f(t,x_0+se_i) - f(t,x_0)dt - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0)dt| \\
&= |\int_a^b \frac{1}{s}\int_0^s \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x-+\sigma e_i)d\sigma - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0)dt| \\
&= |\int_a^b \frac{1}{s}\int_0^s \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0+\sigma e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0)d\sigma dt| \\
&\leq \int_a^b \frac{1}{|s|}\int_0^s \underbrace{|\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0+\sigma e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0)}_{\leq \frac{\epsilon}{b-a}}|d\sigma dt \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

□

6.2 Integrales avec des bornes variables

Soit

$$g(x) = \int_{a)(x)}^{b(x)} f(t,x)dt$$

On suppose que

$$f :]\alpha,\beta[\times E \to \mathbb{R}$$

et que

$$a, b : E \to]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$$

Theorème 35
Soit E un ouvert non vide et supposons que tutes les derivees partielles de x_i existent et sont continues pour tout i, de plus supposons que a, b sont $C^1(E)$, alors $g \in C^1(E)$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial b}{\partial x_i}(x) f(b(x), x) - \frac{\partial a}{\partial x_i} f(a(x), x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) dt$$

Sans preuve.

Idee de la demonstration : Reecrire

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{a(x)}^{c} f(t, x) dt + \int_{c}^{b(x) f(t,x)} dt \\ &= G(b(x), x) - G(a(x), x), \text{ avec } G(s, x) = \int_{c}^{s} f(t, x) dt \end{aligned}$$

On montre que $G \in C^1$, alors $g \in C^1$ et donc

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} G(b(x), x) - \frac{\partial}{\partial x_i} G(a(x), x)$$

6.3 Integrales generalisees

Cas $I = [a, b[$ En general, on a pas la continuite de $g(x)$.

Definition 33
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et $f : [a, b[\times E \to \mathbb{R}$ continue. On dit que $\int_a^b f(t, x) dt$ converge uniformement sur E si $\int_a^b f(t, x) dt$ existe $\forall x$ et $\forall \epsilon > 0 \exists \bar{c} \in]a, b[$ (independant de x) tel que

$$\forall c \in [\bar{c}, b[\text{ et } \forall x \in E, |\int_c^b f(t, x) dt| \leq \epsilon$$

Theorème 36
Soit $f : [a, b] \times E \to \mathbb{R}$ continue et l'integrale $\int_a^b f(t, x) dt$ converge uniformement sur E. Alors la fonction $g(x) = \int_a^b f(t, x) dt$ existe $\forall x \in E$ et est continue sur E.
De plus si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe, et est continue sur $[a, b[\times E$, et $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) dt$ converge uniformement, alors $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ existe et est continue sur E.

L'idee de la demonstration est

$$\begin{aligned}|g(x)-g(x_0)| &= |\int_a^b (f(t,x)-f(t,x_0))dt| \\ &\leq \int_a^{\overline{c}} |f(t,x)-f(t,x_0)|dt + \int_{\overline{c}}^b |f(t,x)-f(t,x_0)|dt \\ &\leq \int_a^{\overline{c}} |f(t,x)-f(t,x_0)|dt + 2\epsilon\end{aligned}$$

Et on s'est ramene au cas d'un intervalle ferme.

Remarque

Si il existe $h : [a,b[\to \mathbb{R}$ integrable et telle que

$$|f(t,\overrightarrow{x})| \leq h(t)$$

Alors f est uniformement integrable.

Lecture 12: Fonctions Bijectives et diffeomorphismes

Mon 12 Apr

7 Fonctions Bijectives

Soit $\overrightarrow{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to F \subset \mathbb{R}^n$.
Si $\overrightarrow{f}$ est une bijection entre E et F alors $\forall \overrightarrow{y} \in F, \exists! \overrightarrow{x} \in E : f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y}$
On peut donc definir une application inverse $\overrightarrow{g} : F \to E$ tel que $\forall \overrightarrow{y} \in F, f(g(\overrightarrow{y})) = \overrightarrow{y}$ et de maniere equivalente, $\forall x \in E, g(f(x)) = x$

Pourquoi etudier les bijections ?

— **Exemple 1**
  On souhaite resoudre le probleme $f(x) = y$ pour un $y \in F$ donne. Si f est une bijection, on sait qu'il existe une solution.

— **Changement de variable**
  Soit $f : E \to F$ bijective et $\phi : F \to \mathbb{R}$.
  On peut reecrire ϕ en fonction de variables $x \in E$, $\tilde{\phi} = \phi \circ f$, donc $x \mapsto \tilde{\phi}(x) = \phi(f(x)), \forall x \in E$.
  Vice versa etant donne $\tilde{\phi} : E \to \mathbb{R}, \overrightarrow{x} \mapsto \tilde{\phi}(x)$.
  On peut la reecrire en fonction de $y \in F$.
  On aura donc

$$\phi(y) = \tilde{\phi}(g(y))$$

  On utilise ceci, en partie pour les coordonnees polaires.

Definition 34 (Homeomorphisme)

Soit $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non-vides. On dit que $f : E \to F$ est un homeomorphisme si elle est bijective et f et son inverse $g : F \to E$ sont continues.

Definition 35 (Diffeomorphisme)
Soit $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non-vides. On dit que $f : E \to F$ est un diffeomorphisme global si elle est bijective et f et son inverse $g : F \to E$ sont C^1.
De maniere plus generale, on dit que f est un $k-$diffeomorphisme si f et son inverse sont de classe C^k.

Definition 36 (Diffeomorphisme local)
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide et $x_0 \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.
On dit que f est un diffeomorphisme local en x_0, si il existe un ouvert $U \subset E$ contenant x_0 et un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ contenant $y_0 \in f(x_0)$ tel que $\overrightarrow{f} : U \to V$ est un diffeomorphisme.

Clairement, si f est un diffeomorphisme global, c'est en particulier un diffeomorphisme local en tout point $x \in E$, mais la reciproque n'est pas vraie en general. On a toutefois le resultat suivant

Theorème 38
Soit $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non vides et $f : E \to F$ bijective et un diffeomorphisme local en tout point $x \in E$. Alors, f est un diffeomorphisme global.

Question

Sous quelles conditions, $\overrightarrow{f}$ est elle un diffeomorphisme local en $x \in E$.
Dans le cas $n = 1$, f est un diffeomorphisme local en $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction affine

$$\overrightarrow{f}(x) = Ax + b$$

Quand est-ce que f est inversible, ou, etant donne $y \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = y$ a une solution unique, si et seulement si $\det A \neq 0$

De maniere plus generale, vu que f est C^1, on a

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + R_f(\overrightarrow{x})$$

Autour de x_0, on a donc

$$f(x) \approx f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$$

et donc f est un diffeormorphisme local si et seulement si $\det(Df(x_0)) \neq 0$

Theorème 39 (Condition necessaire d'inversion locale)
Soit $f : E subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, avec E ouvert non vide, un diffeomorphisme local en x_0. Alors, $\det(Df(x_0)) \neq 0$.

Preuve

Par definition de diffeomorphisme local, il existe un ouvert $U \subset E$ contenant x_0 et un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ contenant $y_0 = f(x_0)$ tel que $f : U \to V$ est une bijection et soit $g : V \to U$ la fonction inverse de classe C^1 par hypothese.
Puisque $g(f(x)) = x \forall x \in U$, on a

$$D(g(f(x))) = Dg(f(x))Df(x) = \mathrm{Id} \qquad \square$$

Et donc $Df(x_0)$ est inversible.

Theorème 40
Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ ferme et $\phi : K \to \mathbb{R}^n$ telle que
- $\phi(K) \subset K$
- *Il existe $\rho \in]0,1[$ tel que $\forall x, y \in K$*

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \rho \|x - y\|$$

(dans ce cas, on dit que l'application est contractante)
Alors ϕ possede un unique point fixe $\exists! v \in K$ tel que $v = \phi(v)$

Definition 37 (Norme spectrale)
On definit

$$|||A||| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\|$$

Definition 38 (Norme de frobenius)
On note

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2}$$

Lemme 41
Soit a, b finis et $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continue. Alors

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| \, dt$$

Theorème 42 (Condition suffisante d'inversion locale)
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide, $f : E \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $x_0 \in E$. Si $\det Df(x_0) \neq 0$, alors f est un diffeomorphisme local en x_0. De plus si $g : V \to U$ est un inverse local, avec $U \subset E$ un ouvert contenant x_0 et V

un ouvert contenant $y_0 = f(x_0)$, on a

$$Dg(f(x)) = Df(x)^{-1} \forall x \in U$$

On va utiliser le theoreme du point fixe de Banach.

Preuve
On montre l'existence d'un inverse local.
Par hypothese $x \to Df(x)$ est continue. Donc

$$\exists r_1, \det(Df(x_0)) \neq 0 \forall x \in B(x_0, r) \cap E$$

Considerons

$$x \to \operatorname{Id} - Df(x_0)^{-1} Df(x) =: A(x)$$

On a a nouveau que $A(x)$ est continue et $A(x_0) = 0$.
Donc, il existe $r_2 > 0$ tel que $\forall x \in B(x_0, r_2) \cap E \frac{-1}{2n} \leq A_{ij}(x) \leq \frac{1}{2n}$ Donc $\forall x \in B(x_0, r_2) \cap E \, |||A(x)||| \leq \|A(x)\|_F = \sqrt{\sum_{ij} A_{ij}(x)^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j} \frac{1}{4n^2}} = \frac{1}{2}$.
Donc il existe $r \leq \min\{r_1, r_2\}$ tel que

- $B(x_0, r) \subset E$
- $\det Df(x) \neq 0 \forall x \in B(x_0, r)$
- $|||A(x)||| \leq \frac{1}{2} \forall x \in B(x0, r)$

On veut montrer que f est localement inversible, donc $\forall y \in V \exists! x \in U : f(x) = y$.
On a

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff 0 = y - f(x) \\ &\iff 0 = Df(x_0)^{-1}(y - f(x)) \\ &\iff x = x + Df(x_0)^{-1}(y - f(x)) \end{aligned}$$

On a

$$D\phi^y(x) = D^y(x - Df(x_0)^{-1}(f(x) - y)) = A(x)$$

On montre donc que ϕ^y est contractante, donc

$$\forall x_1, x_2 \in \overline{B}(x_0, r)$$

On veut calculer

$$\begin{aligned} \|\phi^y(x_1) - \phi^y(x_2)\| &= \left\| \int_0^1 D\phi^y(x_1 + t(x_2 - x_1))(x_2 - x_1) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|D\phi^y(\ldots)(x_2 - x_1) dt\| \\ &\leq \int_0^1 |||D\phi^y(\ldots)||| \, \|x_2 - x_1\| \, dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\| \end{aligned}$$

□

Donc ϕ^y est contractante sur $B(x_0, r)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.
Il nous faut encore montrer que $\phi^y(\overline{B}(x_0, r)) \subset \overline{B}(x_0, r)$

Lecture 13: theoreme d'inversion locale

Wed 14 Apr

Preuve

On a montre l'existence d'une fonction inverse en trouvant un point fixe de la fonction

$$\phi^y(x) = x - (Df(x_0))^{-1}(f(x) - y)$$

Il existe $r > 0$ tel que

- $\overline{B}(x_0) \subset E$
- $|||D\phi^y(x)||| \leq \frac{1}{2}$
- $\det(Df(x)) \neq 0 \forall x \in \overline{B}(x_0, r)$

On a montre que pour tout point $y \in \mathbb{R}^n, \phi^y$ est contractante sur $\overline{B}(x_0, r)$ et que $\phi^y(\overline{B}(x_0, r)) \subset B(x_0, r)$ pour un $y \in B(y_0, \tilde{r})$.
On a donc l'existence d'un unique point $x \in B(x_0, r) : x = \phi^y(x) \iff f(x) = y$, ou encore

$$\forall y \in B(y_0, r) =: V \exists! x \in B(x_0, r) \cap f^{-1}(V) : f(x) = y$$

Or $B(x_0, r) \cap f^{-1}(V) =: U$ est un ouvert, et donc $f : U \to V$ est inversible et on peut donc definir une fonction inverse g.
Montrons maintenant que g est continue en montrant qu'elle est Lipschitz sur V. On veut montrer qu'il existe $L > 0$ tel que $\forall y_1, y_2 \in V$

$$\|g(y_1) - g(y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|$$

En notant $\|x_1 - x_2\|$ les preimages, on peut reecrire

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_2\| &= \|\phi^{y_1}(x_1) - \phi^{y_2}(x_2)\| \\
&\leq \|\phi^{y_1}(x_1) - \phi^{y_1}(x_2)\| + \|\phi^{y_1}(x_2) - \phi^{y_2}(x_2)\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| + \left\|Df(x_0)^{-1}(y_2 - y_1)\right\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| + \left|\left|\left|Df(x_0)^{-1}\right|\right|\right| \|y_2 - y_1\|
\end{aligned}$$

Et donc on a

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2 \left|\left|\left|Df(x_0)^{-1}\right|\right|\right| \|y_1 - y_2\|$$

On montre que g est de classe C^1 (en utilisant le fait que f est de classe C^1).
Soit $y, y_1 \in V$ et $x = g(y), x_1 = g(y_1)$.
On veut montrer que g est differentiable en y. On essaie d'ecrire un developpement limite de g en y.
On a

$$\underbrace{f(x_1)}_{y_1} = \underbrace{f(x)}_{y} + Df(x)(x_1 - x) + R_f(x_1)$$

$$Df(x)(x_1 - x) = y_1 - y - R_f(x_1)$$

$$x_1 - x = Df(x)^{-1}(y_1 - y) - Df(x)^{-1}Rf(x_1)$$

$$g(y_1) - g(y) = Df(x)^{-1}(y_1 - y) - \underbrace{Df(x)^{-1}R_f(x_1)}_{R_g(y_1)}$$

On veut montrer que $\lim_{y_1 \to y} \frac{R_g(y_1)}{\|y_1 - y\|} = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{y_1 \to y} \frac{R_g(y_1)}{\|y_1 - y\|} &\leq \lim_{y_1 \to y} \frac{|||Df(x)^{-1}||| \, \|R_f(x_1)\|}{\|y_1 - y\|} \\ &= \lim_{y_1 \to y} |||Df(x)^{-1}||| \frac{\|x_1 - x\|}{\|y_1 - y\|} \frac{\|R_f(x_1)\|}{\|x_1 - x\|} \\ &= \lim_{y_1 \to y} |||Df(x)^{-1}||| \, 2 \, |||Df(x_0)^{-1}||| \frac{\|R_f(x_1)\|}{\|x_1 - x\|} \end{aligned}$$

Donc g *est differentiable en* $y \in V$ *et*

$$Dg(y) = Df(x)^{-1} \ \textit{ou} \ x = g(y)$$

□

7.1 Fonctions Implicites et Hypersurfaces de $\mathbb{R}^n$

Considerons une fonction $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

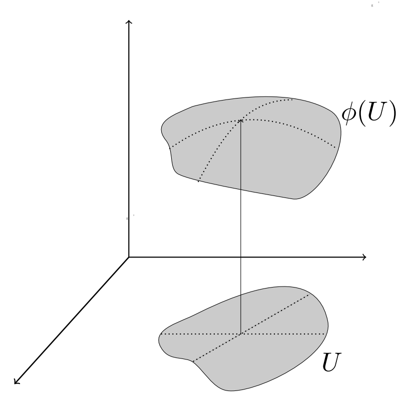


Figure 2 – hypersurfaces

En particulier si ϕ est differentiable en $x_0 \in U$, alors

$$\phi(x) = \underbrace{\phi(x_0) + D\phi(x_0)(x - x_0)}_{T^1_\phi(x) \text{ fonction affine en } x} + R_\phi(x)$$

Donc le graphe $G(T^1_{\phi,x_0}) = \left\{z \in \mathbb{R}^{n+1}, z = (x,y), x \in \mathbb{R}^n, y \in T^1_{\phi,x_0}\right\}$ se reecrit comme l'ensemble

$$\left\{z \in \mathbb{R}^{n+1} : y - y_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi(x_0)}{\partial x_i}(x - x_0) = 0\right\}$$

En definissant

$$v = (-\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_0), \dots, 1), z = (x_1, x_2, \dots, x_n, y)$$

On peut ecrire

$$G(T^1_{\phi,x_0}) = \left\{z \in \mathbb{R}^{n+1} : v \cdot (z - z_0) = 0\right\}$$

Ce graphe definit un hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ appele l'hyperplan tangent au graphe de ϕ en $z_0 = (x_0, y_0)$ On essaie de resoudre le probleme inverse, ie. decrire le plan d'une surface comme le plan d'une fonction.

Definition 39 (Hypersurfaces de classe C^k)
On dit que $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est une hypersurface de classe C^k autour de z_0 si elle est le graphe d'une fonction de classe C^k autour de z_0, cad, qu'il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contenant z_0, un indice $i \in \{1, \dots, n+1\}$, un ouvert $U \in \mathbb{R}^n$ et une fonction $\phi : U \to \mathbb{R}$ tel que

$$\Sigma \cap V = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i = \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})\right\}$$

En particulier, on considere des surfaces definies par

$$\Sigma = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = 0\right\}$$

On se demande quand est-ce que Σ est une hypersurface (au moins localement autour d'un point z_0).
Si Σ est une hypersurface autour d'un point $z_0 \in \Sigma$, il existe $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contenant z_0 et $\phi : U \to \mathbb{R}$ tel que

$$\Sigma \cap V = \{x : x_i = \phi(x_{ni})\}$$

Alors on dit que la fonction ϕ est definie implicitement par la relation $f(x) = 0$.

Lecture 14: Fonctions Implicites

Mon 19 Apr

Definition 40 (Fonction Implicite)
Soit $f : E \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, avec E un ouvert non vide.
On definit $\Sigma = \left\{z \in \mathbb{R}^{n+1}, f(z) = 0\right\}$, et soit $z_0 = (z_{0,1}, \dots, z_{0,n+1}) \in \Sigma$.
On dit que f definit implicitement une fonction autour de z_0 si il existe un ouvert $V \subset E$ contenant z_0, un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et un indice $i \in \{1, \dots, n+\}$ et une fonction $\phi : U \to \mathbb{R}$ tel que

—

$$z_{0,i} = \phi(z_{0,1}, \ldots, z_{0,i-1}, z_{0,i+1}, \ldots, z_{0,n+1})$$

— $\forall x \in \Sigma \cap V, x_i = \phi(x_{ni})$ [1]

Alors le graphe $G(\phi) = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i = \phi(x_{ni})\right\} = \Sigma \cap V$

Questions

1. Quand est-ce que $f(x) = 0$ definit une fonction implicite ?
2. Si f definit une fonction implicite, que peut-on dire sur ϕ ?

Commencons par le deuxieme point.
Supposons que f definit une fonction implicite $\phi : U \to \mathbb{R}$. Supposons aussi que $f, \phi \in C^k$.

7.1.1 Cas $n = 2$

Soit $f = f(x, y)$ et soit

$$\Sigma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\right\}$$

et $(x_0, y_0) \in \Sigma$

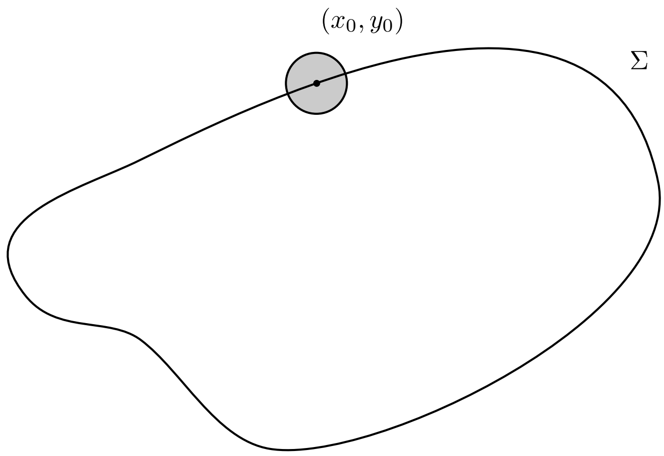


Figure 3 – voisinage

Supposons qu'il existe $\phi :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[= U \to \mathbb{R}$ tel que

$$G(\phi) = \Sigma \cap V$$

1. Avec la notation $z_{ni} = (z_{0,1}, \ldots, z_{0,i-1}, z_{0,i+1}, \ldots, z_{0,n+1})$

$$\forall x \in U : f(x, \phi(x)) = 0$$
$$y = \phi(x)$$

On note $\tilde{f}(x) = f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in U$, donc

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{f}' &= \frac{d}{dx}(f(x, \phi(x))) \\ &= \frac{df}{\partial x}(x, \phi(x)) + \frac{df}{\partial y}(x, \phi(x)) \cdot \phi'(x) \end{aligned}$$

En particulier, en $(x_0, y_0 = \phi(x_0))$, on peut ecrire que

$$\frac{df}{\partial y}(x_0, y_0)\phi'(x_0) = -\frac{df}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Donc, si $\frac{df}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, alors

$$\phi'(x_0) \coloneqq -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

De plus, pour tout x suffisamment proche de x_0

$$\phi'(x) \coloneqq -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}$$

par le theoreme de la valeur intermediaire (la derivee partielle selon y) ne s'annulera pas.
On peut iterer l'argument, et donc, si f, ϕ sont de classe C^2, on peut ecrire

$$0 = \tilde{f}''(x) = \frac{d}{dx}(\tilde{f}'(x))$$

Apres developpement, on remarque que, si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, on peut encore calculer la derivee seconde de f :

$$\phi''(x) = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \phi(x)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, \phi(x))\phi'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, \phi(x))(\phi'(x))^2\right)$$

Donc, meme sans connaitre ϕ explicitement, on peut construire un developpement limite de ϕ.
Graphiquement

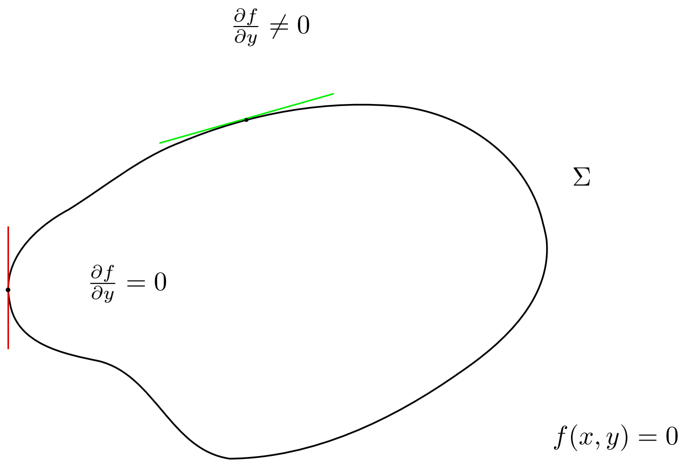


FIGURE 4 – courbe implicite

Theorème 43 (Fonction implicite en dimension 2)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, E ouvert non vide, de classe C^1, $\Sigma = \{(x,y) \in E : f(x,y) = 0\}$ et $(x_0, y_0) \in Sigma$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.
Alors il existe un $\delta > 0$, un ouvert $V \subset E$ contenant (x_0, y_0) et une unique fonction $\phi : U =]x_0 - \delta, x - +\delta[\to \mathbb{R}$ tel que
- $y_0 = \phi(x_0)$
- $f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in U$
- $G(\phi) = \Sigma \cap V$

On peut facilement generaliser ce theoreme,

7.1.2 Cas $n > 1$

soit $f : E \subset R^{n+1} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction implicite definie par f (aussi de classe C^1) autour du point $z_0 = (x, y), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}$, cad $f = f(x, y)$

$$f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in U$$

Soit $f(x) = f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in 0$, on a alors

$$0 = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \phi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)$$

Donc, si $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \neq 0$, alors pour x suffisamment proche de x_0, on peut ecrire

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}$$

Theorème 44
Soit $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *ouvert non vide,*
$f : E \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1, $\Sigma = \{z \in E, f(z) = 0\}$ *et* $z = (x_0, y_0)$ *tel que* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, *Alors il existe* $\delta > 0$, *un ouvert* $V \subset E$ *contenant* z_0 *et une unique fonction* $\phi : U = B(x_0, \delta) \to \mathbb{R} \in C^1$ *tel que*

- $y_0 = \phi(x_0)$
- $\forall x \in U, f(x, \phi(x)) = 0$
- $G(\phi) = \Sigma \cap V$

De plus, si f *est de classe* C^k, *alors* ϕ *est de classe* C^k

Exemple
Soit $f(x,y) = x^2 - y, \Sigma = \big\{(x,y) : x^2 - y = 0\big\}$, *alors*

$$y = x^2 = \phi(x)$$

f *definit une fonction implicite* $y = x^2 \forall x \in \mathbb{R}$.
On peut essayer d'ecrire $x = \phi(y)$

$$x^2 = y \implies x = \pm\sqrt{y}$$

Notons que, dans un voisinage de 0, *on ne peut pas decrire* Σ *comme une fonction de* y.

Exemple
Posons maintenant $f(x,y) = xe^y + ye^x$ *et* $\Sigma = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$.
Notons que $(x,y) = (0,0)$, *et que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \textit{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$$

On peut donc expliciter y *en fonction de* x, $y = \phi(x)$ *m et on a que*

$$\phi'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = -1$$

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $\Sigma = \{z \in E, f(z) = 0\}$, $z_0 \in \Sigma$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \neq 0$.
Alors on sait qu'il existe une fonction implicite $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \quad G(\phi) = \Sigma \cap V$

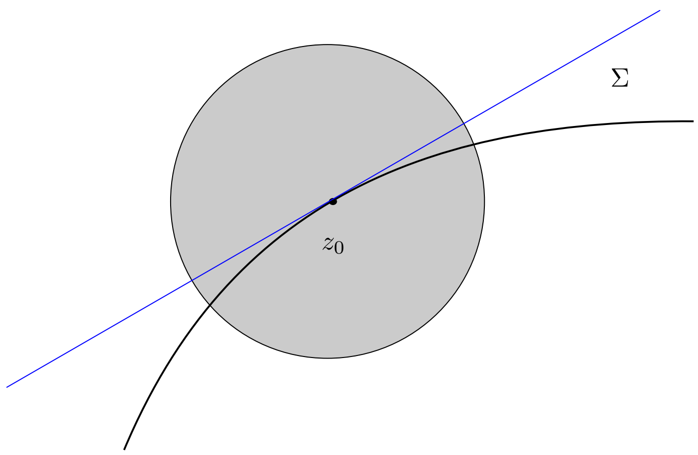


FIGURE 5 – voisinage de z_0

Alors, on peut construire l'hyperplan tangent au graphe $G(\phi)$ en z_0 qui est aussi l'hyperplan tangent a Σ en z_0.

$$\begin{aligned}
\Pi_{\phi,z_0} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = \phi(x_0) + D\phi(x_0)(x-x_0)\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{0i})\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = y_0 + \sum_{i=1}^{n} -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}(x_i - x_{0i})\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0,y_0)(x_i - x_{0i} = 0)\right\} \\
&= \left\{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \frac{\partial f}{\partial z_i}(z_0)(z_i - z_{0i} = 0)\right\} \\
&= \left\{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \nabla f(z_0) \cdot (z - z_0) = 0\right\}
\end{aligned}$$

Donc l'hyperplan tangent a Σ en z_0 est l'ensemble des point $z \in \mathbb{R}^{n+1}$: $z - z_0 \perp \nabla f$.
Si ∇f est nul, on ne peut pas definir l'hyperplan tangent, et donc on appelle ces points les points critiques de f.

Lecture 15: fonctions implicites-cas vectoriel

Wed 21 Apr

7.2 Cas Vectoriel

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, avec

$$f(z) = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix}$$

et soit $\Sigma = \{z \in E : f(z) = 0\}$, on peut reecrire ceci comme

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{z \in E : f_i(z) = 0\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{m} \Sigma_i \end{aligned}$$

ou $\Sigma_i = \{z \in E : f_i(z) = 0\}$.

Exemple
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, defini par

$$f(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} f_1(z_1, z_2, z_3) \\ f_2(z_1, z_2, z_3) \end{pmatrix}$$

Alors

$$\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{(z_1, z_2, z_3) \in Eh : f_1(z_1, z_2, z_3) = 0\} \cap \{(z_1, z_2, z_3) \in E : f_2(z_1, z_2, z_3) = 0\}$$

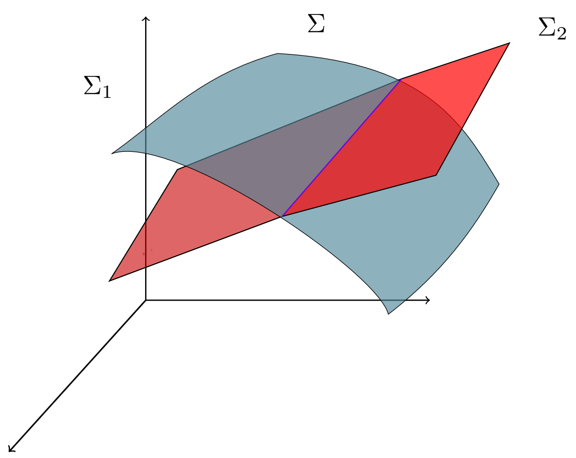


Figure 6 – surfaces intersection

Peut on representer Σ comme le graphe d'une fonction de n variables ? Pour $z = (x, y), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$, on veut ecrire

$$y = \phi(x) : G(\phi) = \Sigma \cap V$$

On etudie d'abord le cas d'une fonction affine, soit

$$f_a : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$$

une fonction affine, on peut donc ecrire

$$f_a(z) = Az + b, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n+m}, b \in \mathbb{R}^m$$

$$Az + b = [A_1 | A_2] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_1 x + A_2 y + b$$

On considere maintenant

$$\begin{aligned} \Sigma &= \left\{ z \in \mathbb{R}^{n+m} : f_a(z) = 0 \right\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : A_1 x + A_2 y + b = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : A_2 y = -(b + A_1 x)\} \end{aligned}$$

Si A_2 est inversible, on peut ecrire y comme fonction unique de x

$$= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : y = -(A_2)^{-1}(b + A_1 x) \right\}$$

Dans le cas general, pour $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ de classe $C1$.

$$\Sigma = \{z \in E : f(z) = 0\},$$

On ecrit

$$\begin{aligned} f(z) &= \underbrace{f(z_0) + Df(z_0) \cdot (z - z_0)}_{:= f_a(z)} + R_f(z) \\ &= f(z_0) + [D_x f(z_0) | D_y f(z_0)] \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + R_f(z) \end{aligned}$$

La matrice $D_x f(z_0)$ est de taille $m \times n$ et $D_y f(z_0)$ est de taille $m \times m$, on peut donc ecrire

$$f(z) \approx f_a(z) = f(z_0) + D_x f(z_0)(x - x_0) + D_y f(z_0)(y - y_0)$$

En posant $f_a(z) = 0$, on s'attend a ce que $f(z) = 0$ definit une fonction implicite $y = \phi(x)$ si $\det(D_y) f(z_0)$

Theorème 48 (Fonctions Implicites - Cas vectoriel)
Soit $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *ouvert non vide,* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *de classe* C^1, $\Sigma = \{z \in E : f(z) = 0\}$, $z_0 \in \Sigma$.
Si $\det(D_y f(z_0)) \neq 0$*, alors il existe un ouvert* $V \subset E$ *contenant* z_0*, un ouvert* $U \subset \mathbb{R}^n$*, et une fonction* $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ *de classe* C^1 *tel que*

- $\phi(x_0) = y_0$
- $\forall x \in U, (x, \phi(x)) \subset V, f(x, \phi(x)) = 0$
- $G(\phi) = \Sigma \cap V$
- $\det(D_y f(x, \phi(x))) \neq 0 \forall x \in U$

$$D\phi(x) = -D_y f(x, \phi(x))^{-1} D_x f(x, \phi(x))$$

- *Si* f *est de classe* C^k*, alors* ϕ *est aussi de classe* C^k.

Preuve
On construit la fonction $F : E \to \mathbb{R}^{n+m}$*, avec*

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

On veut montrer que f *est un diffeomorphisme local autour de* $z_0 = (x_0, y_0)$ *:*

$$DF(x_0, y_0) = D \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D)xf(z_0) & D_y f(z_0) \end{pmatrix}$$

On a

$$\det DF(z_0) = \det D_y f(z_0) \neq 0$$

par hypothese.
Donc F *est un diffeomorphisme local.*
Il existe donc $V' \subset E$ *contenant* $z_0 = (x_0, y_0)$ *et un ouvert* $U' \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *contenant* $(x_0, 0)$ *tel que* $F : V' \to U'$ *est un diffeomorphisme*

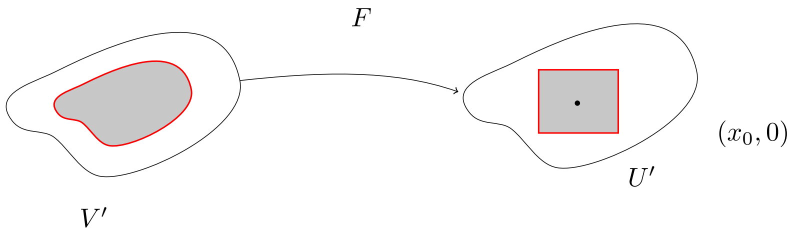


Figure 7 – V' vers U'

Il existe $\delta, \tilde{\delta} > 0$ *tel que* $\hat{U} = \left\{(x, y) : x \in B(x_0, \delta), y \in B(0, \tilde{\delta})\right\} \subset U'$.
Soit $V = F^{-1}(\hat{U})$ *et on considere la restriction* $f : V \to \hat{U}$*, d'inverse* $G : \hat{U} \to V$

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

On peut donc reecrire ceci comme

$$\begin{cases} x = u \\ y = \psi(u, w) = \psi(x, w) \end{cases}$$

L'existence de $\psi : \hat{U} \to \mathbb{R}^m$ *est donnee par hypothese. Donc la fonction implicitge cherchee est* $\phi(x) \coloneqq \psi(x, 0)$*.* ϕ *est definie sur le voisinage de* x *:*

$$\phi : U = B(x_0, \delta) \to \mathbb{R}^m$$

En effet, on veut verifier que $f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in U$*, donc*

$$(x, 0) = F \circ G(x, 0) = F(G(x, 0)) = F(x, \psi(x, 0)) = (x, f(x, \phi(x)))$$

Et donc $f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in U$*.*
On verifie encore que $\Sigma \cap V \subset G(\phi)$*.*
En effet

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \Sigma \cap V \\ (x, y) = (G \circ F)(x, y) = G(F(x, yt)) \\ = G(x, f(x, y)) = G(x, 0) = (x, \psi(x, 0)) = (x, \phi(x)) \end{aligned}$$

Donc $(x,y) \in G(\phi)$.
ϕ *est de classe* C^1 *par la composition de fonctions de classe* C^1.
Puisque F *est un diffeomorphisme sur* V*, il s'ensuit que* $\det DF(x,y) \neq 0 \forall (x,y) \in V$*, donc en particulier, on a que*

$$\det D_y f(x, \phi(x)) \neq 0 \forall x \in U$$

On pose

$$\tilde{f}(x) = f(x, \phi(x)) = 0$$

Etant donne que

$$\begin{aligned} f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in U, \ \textit{avec } f, \phi \in C^1 \\ 0 = Df(x, \phi(x)) \\ 0 = D_x f(x, \phi(x)) + D_y f(x, \phi(x)) D\phi(x) \end{aligned}$$

□

On en deduit l'egalite

Lecture 16: Extremas de fonctions

Mon 26 Apr

8 Extremas de fonctions

Definition 41 (Extremum d'une fonction)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* $x^* \in E$.
On dit que f *admet au point* x^* *un maximum global (ou absolu) si* $\forall x \in E, f(x) \leq f(x^*)$
On dit que le maximum global est strict si $\forall x \in f(x) < f(x^*) \forall x \in E \setminus \{x\}$.
Le maximum est local si $\exists \delta > 0 : \forall x \in B(x^*, \delta) \cap E, f(x) \leq f(x^*)$.
Le maximum local est strict si $\exists \delta > 0 \forall x \in B(x^*, \delta) \cap E \setminus x^*, f(x) < f(x^*)$.
Les definitions sont les memes pour un minimum.
Par extremum local/global on etend un minimum ou un maximum de la fonction.

8.1 Extremas libres

Si l'ensemble E est ouvert

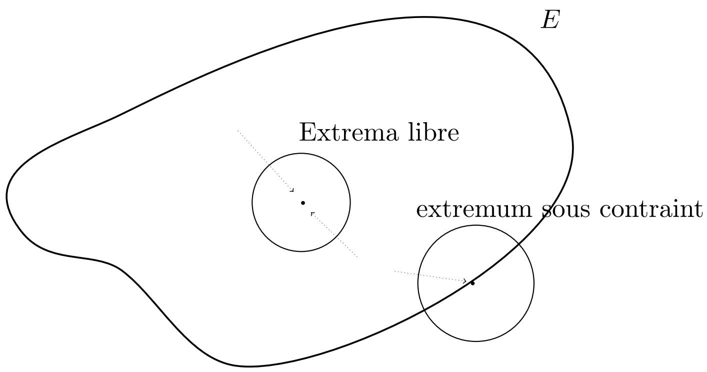


FIGURE 8 – extremum libre et extremum sous contraint

Soit x^* un point d'extremum pour f. On dit que x^* est libre si $x^* \in \mathring{E}$ et x^* est sous-contraint si $x^* \in \partial E$.

Rappel cas $n = 1$

Soit $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I ouvert

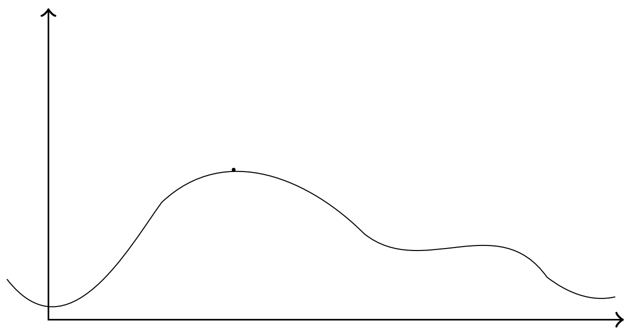


FIGURE 9 – fonction avec extremas

— Si f est derivable en x^* et x^* est un point d'extremum local de f, alors $f'(x^*) = 0$. (condition necessaire du premier ordre) .

— Si f est deux fois derivable qen x^* et x^* est minimum local de f, alors $f'(x^*) = 0, f''(x^*) \geq 0$ (condition necessaire du second ordre)

— Si f est deux fois differentiable sur I, $x^* \in I$ tel que $f'(x^*) = 0$ et $f''(x^*) > 0$, alors x^* est un point minimum local de f (condition suffisante du second ordre).

— Cas difficile a traiter : $f'(x^*) = 0, f''(x^*) = 0$.
On peut soit regarder les derivees d'ordre superieur ou bien etudier le signe de $g(x) = f(x) - f(x^*)$.

8.1.1 Cas $n > 1$

Soit $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, E un ouvert non vide.

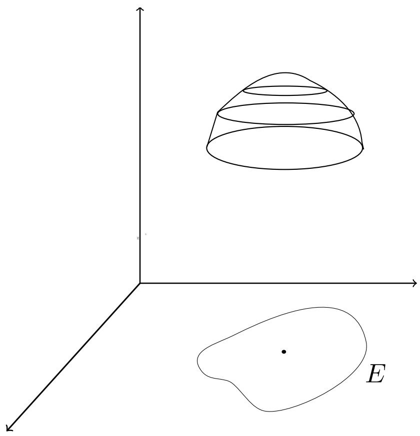


FIGURE 10 – fonctions deux variables extremas

Soit $v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$. Soit x^* un point de maximum local de f, i.e.

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in B(x^*, \delta) \cap E, f(x) \leq f(x^*)$$

On peut considerer

$$g_v(t) - f(x^* + tv), \quad t \in]-\delta, \delta[$$

Si f admet un maximum local en x^*, alors $g_v(t)$ admet un maximum local en $t = 0$.
Si f est differentiable en x^*, alors g_v est derivable en $t = 0$, donc $g_v'(0) = 0$.
Mais $g_v'(0) = D_v f(x^*) = \nabla f(x^*) \cdot v = 0 \forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$.
Donc $\nabla f(x^*) = 0$
Donc la condition necessaire du premier ordre est $\nabla f(x^*) = 0$.

Definition 42
Soit $f : E \to \mathbb{R}$, E ouvert, differentiable en $x^* \in E$. On dit que x^* est un point stationnaire si $\nabla f(x^*) = 0$.

De plus, si f est deux fois differentiable en x^*, alors g_v est aussi deux fois fois differentiable en $t = 0$, donc $g_v''(0) \leq 0$.
Mais $g_v''(0) = D_{vv}f(x^*) = v^T H_f(x^*)v \leq 0 \forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$ Donc la condition necessaire du second ordre est donc que $v^T H_f(x^*)v \leq 0 \forall v \in \mathbb{R}^n$(pour que $f(x^*)$ soit un maximum local) .

Theorème 49 (Condition suffisant du second ordre)
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, $f : E \to \mathbb{R}$ admettant un extremum local en $x^* \in E$.
Si f est (une fois) differentiable en x^*, alors $\nabla f(x^*) = 0$.
Si f est deux fois differentiable en x^* et
- *x^* est un point de maximum local, alors $v^T H_f(x^*)v \leq 0 \forall v \in \mathbb{R}^n$.*
- *Si x^* est un point de minimum local alors $v^T H_f(x^*)v \geq 0 \forall v \in \mathbb{R}^n$.*

Definition 43 (Matrices definies postives)
Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, on dit que
- *A est definie positive si $x^T Ax > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*
- *A est semi-definie positive si $x^T Ax \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$*
- *memes definitions pour A (semi-) negative*
- *A est indefinie si $\exists x, y : x^T Ax > 0, y^T Ay \leq 0$*

A toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, on peut associer une forme quadratique $Q_A(x) = x^T Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n$

Lemme 50
Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est definie positive si et seulement si $\exists c > 0$: $x^T Ax \geq c \|x\| \forall x \in \mathbb{R}^n$

Lemme 51
Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A est definie positive si et seulement si toutes les valeurs propres sont positives.
De plus c du lemme precedent est la valeur propre minimale.

Theorème 52 (Condition suffisante d'extremas)
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, $f : E \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur E, $x^* \in E$ un point stationnaire de f. (cad $\nabla f(x^* = 0)$). Si $H_f(x^*)$ est definie positive, alors x^* est un minimum local de f.
Si $H_f(x^*)$ est definie negative, alors $f(x^*)$ est un maximum local de f.

Preuve
Puisque $f \in C^2(E)$, on peut ecrire un developpement limite de f.

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f(x^*) \cdot (x - x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T H_f(x^*)(x - -x^*) + R_f(x) \forall x \in E.$$

Alors, il existe $\delta > 0$ tel que $\frac{\|R_f(x)\|}{\|x-x^*\|} \leq \frac{c}{4} \forall x \in B(x,\delta) \cap E, x \neq x^*$.
Donc $f(x) \geq f(x^*) + \frac{1}{2}c\|x-x^*\|^2 - \frac{c}{4}\|x-x^*\|^2$

$$= f(x^*) + \frac{c}{4}\|x-x^*\|$$

□

Donc x^* est un minimum local strict de f.

Lecture 17: Extremas lies

Wed 28 Apr

8.2 Extremas lies

Exemple
Parmi tous les cylindres d'un volume donne $\overline{V}$, on cherche celui qui a une surface minimale. On a $S(R,H) = 2\pi RH + 2\pi R^2$ et $V(R,H) = \pi R^2 H$, on cherche

$$\min_{R>0,H>0} S(R,H)$$

sous la contrainte $V(R,H) = \overline{V}$

Formulation du probleme

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, E ouvert non vide, $f : E \to \mathbb{R}$ de classe C^1.
$g : E \to \mathbb{R}$ de classe C^1, on cherche

$$\min_{x\in E} f(x) \text{ sous la contrainte } g(x) = 0$$

De facon equivalent, si on pose $\Sigma_g = \{x \in E : g(x) = 0\}$,

$$\min_{x\in\Sigma_g} f(x)$$

Exemple
On cherche

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x^2 + y^2$$

tel que $x + y - 1 = 0$.
Les courbes de niveau de f sont $f(x,y) = c \iff x^2+y^2 = c$, sous la contrainte $g(x,y) = 0 \iff y = 1-x$.
Si (x^*,y^*) est le point de minimum sous-contrainte, alors on a

$$\nabla f(x^*,y^*) \parallel \nabla g(x^*,y^*)$$

Donc $\nabla g(x^*,y^*)$ est un vecteur orthogonal a Σ_g en (x^*,y^*) (vecteur orthogonal a l'hyperplan tangent a Σ_g en (x^*,y^*)) .
$\nabla f(x^*,y^*)$ est un vecteur normal a la courbe de niveau $f(x,y) = f(x^*,y^*)$.
Cette affirmation est equivalent a

$$\exists\lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(x^*,y^*) = \lambda\nabla g(x^*,y^*)$$

Theorème 55 (Condition necessaire pour extremas lies)
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide ($n \geq 2$), $f, g : E \to \mathbb{R}$ de classe C^1, $z^* \in \Sigma_g$ un point d'extremum local lie. Si $\nabla g(z^*) \neq 0$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(z^*) = \lambda \nabla g(z^*).$$

Preuve
Puisque le gradient $\nabla g(z^*) \neq 0$, on peut utiliser le theoreme des fonctions implicites.

$$\nabla g(z^*) \neq 0 \Rightarrow \exists i \in [n] : \frac{\partial g}{\partial z_i}(z^*) \neq 0$$

Supposons $i = n$, on note $y = z_n$, $x = (z_1, \ldots, z_{n-1})$.
Grace au theoreme des fonctions implicites, on sait qu'il existe un ouvert $V \subset E$ contenant z^*, un $\delta > 0$ et $\phi : B(x^*, \delta) \to \mathbb{R}$ tel que
— $\phi(x^*) = y^*$
— $\forall x \in B(x^*, \delta), (x, \phi(x)) \in V$, *et* $g(x, \phi(x)) = 0$.
— $G(\phi) = \Sigma_g \cap V$

On a

$$g(x, y) = 0 \iff y = \phi(x) \forall x \in B(x^*, \delta)$$

On definit $\tilde{f}(x) = f(x, \phi(x))$.
Si z^* est un point d'extremum local lie de f sur Σ_g, alors x^* est un point d'extremum libre libre de $\tilde{f}$ sur $B(x^*, \delta)$.
Donc, $\nabla_x \tilde{f}(x^*) = 0$, donc

$$\iff 0 = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x^*) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x^*)$$

Mais

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x^*) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^*, y^*)}{\frac{\partial g}{\partial y} * x^*, y^*}$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(z^*) - \frac{\partial f}{\partial g}(z^*) \frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}}{\frac{\partial g}{\partial y}(z^*)} = 0$$

On pose

$$\lambda = \frac{\partial_y f}{\partial_y g}(z^*) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(z^*) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(z^*)$$

Donc toutes les composantes sont proportionnelles et on a

$$\nabla f(z^*) = \lambda \nabla g(z^*)$$

Remarque
Si z^* est un extremum local lie de f sur Σ_g et $\nabla g(z^*) \neq 0$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \nabla f(z^*) = \lambda \nabla g(z^*) \\ g(z^*) = 0 \end{cases}$$

Ensemble, ceci forme un systeme de $n+1$ equations.
λ est appele multiplicateur de Lagrange

On definit la fonction de Lagrange (ou le lagrangien)

$$\mathcal{L} : E \times \mathbb{R} \qquad \to \mathbb{R}\mathcal{L}(z, \lambda) = f(z) - \lambda g(z)$$

On a que

$$\nabla_{(z,\lambda)} \mathcal{L}(z, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla_z \mathcal{L} \\ \dots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \end{pmatrix}$$

□

Donc, si z^* est un extremum local de f sur Σ_g, alors il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}$: $\nabla \mathcal{L}(z^*, \lambda^*)$.

Lecture 18: Extremas sous contraintes multiples

Mon 03 May

8.3 Extremas sous contraintes multiples

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, et

$$f, g_1, \dots, g_m : E \to \mathbb{R}$$

On impose $m < n$, pour que le probleme ne soit pas surdetermine.
On cherche donc

$$\min_{z \in E} f(z) \text{ sous les contraintes } g_i(z) = 0 \forall 1 \leq i \leq m$$

Soit $g = (g_1, \dots, g,m) : E \to \mathbb{R}^m$, et on definit l'ensemble faisable

$$\Sigma_g = \{z \in E : g(z) = 0\}$$

On cherche donc

$$\min_{z \in \Sigma_g} f(z)$$

Theorème 57 (Conditions necessaires d'optimalite)
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide, $f, g_1, \dots, g_m : E \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $z^* \in \Sigma_g$.
Si $Rang(Dg(z^*)) = m$ (cad. les vecteurs $\nabla g_1(z^*), \dots, \nabla g_m(z^*)$ sont lineairement independants) .

Alors il existe $\overrightarrow{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ *tel que*

$$\nabla f(z^*) = \sum_i \lambda_i^* \nabla g_i(z^*)$$

Donc, (z^*, λ^*) *satisfait le systeme*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z_1}(z^*) = \lambda_1^* \frac{\partial g_1}{\partial z_1} + \lambda_2^* \frac{\partial g_2}{\partial z_1}(z^*) + \ldots \\ \frac{\partial f}{\partial z_2}(z^*) = \lambda_1^* \frac{\partial g_1}{\partial z_2} + \lambda_2^* \frac{\partial g_2}{\partial z_2}(z^*) + \ldots \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial z_n}(z^*) = \lambda_1^* \frac{\partial g_1}{\partial z_n} + \lambda_2^* \frac{\partial g_2}{\partial z_n}(z^*) + \ldots \\ g_1(z^*) = 0 \\ \vdots \\ g_m(z^*) = 0 \end{cases}$$

Il y a donc $n + m$ *equations avec* $n + m$ *inconnues.*
On peut definir un probleme equivalent, en passant par la fonction lagrangienne, notamment (z^*, λ^*) *est un point stationnaire de la fonction de Lagrange :*

$$\mathcal{L} : E \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

definie par

$$\mathcal{L}(z, \lambda) = f(z) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(z) = f(z) - \lambda \cdot g(z)$$

8.4 Condition suffisante pour extremas locaux lies

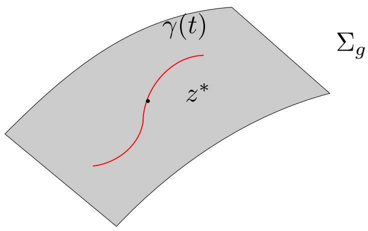


Figure 11 – extrema local lie

Soit $\gamma(t)$ un chemin sur $\Sigma_g, \gamma(0) = z^*$, et

$$\tilde{f}(t) = f \circ \gamma(t) = f(\gamma(t))$$

si $\tilde{f}''(0) > 0$ pour tout chemin alors z^* est un point de minimum local de f sur Σ_g.
On considere

$$w^T(H_f(z^*))w = D_{ww}f(z^*)\forall w \in T_z(\Sigma_g) = \{v \in \mathbb{R}^n : Dg(z^*) \cdot v = 0\}$$

Si on cherche un minimum on s'attend a ce que

$$D_{ww}f(z^*) > 0$$

Sauf qu'il faut corriger le fait que le chemin puisse etre courbe, donc la condition devient :
Soit $z^* \in \Sigma_g$ qui satisfait la condition necessaire, si

$$w^T(H_f(z^*) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* H_{g_i}(z^*))w > 0$$

Alors z^* est un point de minimum local de f sur Σ_g (lieu aux contraintes $g_i = 0 \forall 1 \leq i \leq n$).

9 Integrales multiples au sens de Riemann

But : Etant donne

— Un sousensemble borne $E \subset \mathbb{R}^n$ et
— une fonction bornee $f : E \to \mathbb{R}$

Comme definir
$$\int_E f(x)dx$$
On va d'abord definir l'integrale sur un pave de $\mathbb{R}^n$, cad un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ de la forme
$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$
ou on suppose $a_i \leq b_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$
Le volume de R est defini comme
$$Vol(R) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$$
On dit que R est un pave degenere s'il existe $k \in [n]$ tel que $a_k = b_k$.
Dans ce cas, on aura $Vol(R) = 0$.

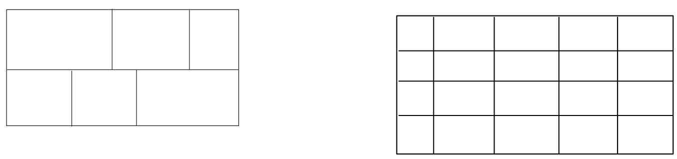


FIGURE 12 – exemple de partition

Definition 44 (Partition)
On appelle partition d'un pave $R \subset \mathbb{R}^n$ une collection finie P de paves tel que
— $\bigcup_{Q \in P} Q = R$
— $\forall Q, Q' \in PQ \neq Q', \overset{\circ}{Q} \cap \overset{\circ}{Q'} = \emptyset$

Definition 45 (Partition tensorielle)
Une partition P d'un pave R est dite tensorielle s'il existe pour tout $1 \leq j \leq n$.
$$a_j = t_j^0 \leq t_j^1 \leq \ldots, t_j^{N_j} = b_j$$

tel que

$$P = \left\{[t_1^{\alpha_1}, t_1^{\alpha_1+1}] \times [t_1^{\alpha_2}, t_1^{\alpha_2+1}] \times \ldots \times [t_1^{\alpha_n}, t_1^{\alpha_n+1}]\right\} \quad 1 \leq \alpha_i \leq N_i$$

On note alors

$$P = (t_1^0, \ldots, t_1^{N_1}) \otimes (t_2, \ldots, t_2^{N_2}) \otimes \ldots \otimes (t_n^0, \ldots, t_n^{N_n})$$

Definition 46 (Raffinement d'une partition)
Le raffinement d'une partition P d'un pave R.

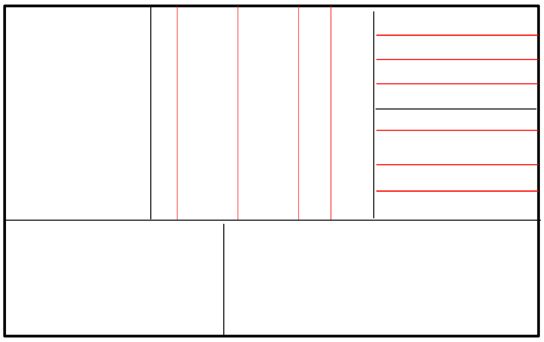


FIGURE 13 – raffinement d'une partition

Soit P et P' deux partitions d'un pave R
On dit que P' est un raffinement de P si pour tout $Q \in P$, la collection

$$P'_Q = \{Q' \in P' : Q' \subset Q\}$$

est une partition du pave Q.

Remarque
Soit P' un raffinement de P.
Si $Q' \in P'$ n'est inclus dans aucun $Q \in P$, alors $vol(R) = 0$

Remarque
P' est un raffinement de P si et seulement si

$$\forall Q' \in P' \textit{ non degenere } \exists Q \in P : Q' \subset Q$$

Remarque
Si P' est un raffinement tensoriel de P, alors pour tout $Q \in P$, la collection

$$P'_Q = \{Q' \in P' : Q' \subset Q\}$$

est un raffinement tensoriel de Q.

Lemme 61
Soit P, P' deux partitions d'un pave $R \subset \mathbb{R}^n$, alors il existe toujours un raffinement tensoriel P'' de P et P'

Preuve
Pour $P = \left\{[a_1^{i,b_1^i}] \times \ldots, i = 1, \ldots, k\right\}$ *et*

$$P' = \left\{[c_1^j, d_1^j] \times \ldots, j = 1, \ldots, k'\right\}$$

Prenons l'ensemble

$$\left\{a_l^1, b_l^1, \ldots, a_l^k, b_l^k, c_l^1, d_l^1, \ldots c_l^{k'}, d_l^{k'}\right\}$$
$$= \left\{t_l^0, t_l^1, \ldots, t_l^{k+k'}\right\} \text{ tel que } t_l^0 \leq t_l^1 \leq \ldots \leq t_l^{k+k'}$$

Alors

$$P'' = (t_1^0, \ldots, t_2^{k+k'}) \otimes (t_2^0, \ldots, t_2^{k+k'}) \otimes \ldots$$

est une partition tensorielle qui raffine a la fois P et P' □

Lemme 62
Soit P une partition d'un pave $R \subset \mathbb{R}^n$.
Alors

$$vol(R) = \sum_{Q \in P} vol(Q).$$

Lecture 19: integrales multiples

Wed 05 May

Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pave ($R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$) et

$$f : R \to \mathbb{R}$$

borne.

Definition 47 (Somme de Darboux)
Soit P une partition du pave R, alors on definit les sommes inferieures $\underline{S}(f, P) = \sum_{Q \in P} \inf_{x \in Q} f(x) Vol(Q)$.
On peut definir les sommes superieures $\overline{S}(f, P) = \sum_{Q \in P} \sup_{x \in Q} f(x) Vol(Q)$

Lemme 63
Soit P une partition de R et P'' un raffinement de P, alors

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, P'') \leq \overline{S}(f, P'') \leq \overline{S}(f, P)$$

Pour toute partition P, P' de R on a toujours

$$\underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P')$$

Preuve
Puisque P'' est un raffinement de P,

$$\forall Q \in P \quad Q = \bigcup_{\substack{Q'' \in P'' \\ Q'' \subset Q}} Q'' \quad Vol(Q) = \sum_{\substack{Q'' \in P'' \\ Q'' \subset Q}} Vol(Q'')$$

On a

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f,P) &= \sum_{Q \in P} \inf_{x \in Q} f(x) Vol(Q) \\
&= \sum_{Q \in P} \inf_{x \in Q} f(x) \sum_{\substack{Q'' \in P'' \\ Q'' \subset Q}} Vol(Q'') \\
&\leq \sum_{Q \in P} \sum_{\substack{Q'' \in P'' \\ Q'' \subset Q}} \inf_{x \in Q''} f(x) Vol(Q'') \\
&= \sum_{Q'' \in P''} \inf_{x \in Q''} f(x) Vol(Q'') = \underline{S}(f,P'')
\end{aligned}$$

L'inegalite intermediaire est evidennte, et la troisieme se demontre de la meme maniere.
Il suffit de remarquer que tout couple P, P' de partitions de R admet un raffinement commun, nommons le P'', alors on a

$$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P'') \leq \overline{S}(f,P') \qquad \square$$

Definition 48 (Fonction integrable au sens de Riemann)
Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pave et $f : R \to \mathbb{R}$ bornee. On appelle integrale de Riemann inferieure $\underline{\int}_R f(x)dx = \sup\{\underline{S}(f,P) : P \text{ partition de } R\}$.
On definit de maniere analogue l'integrale de Riemannn superieure

$$\overline{\int}_R f(x)dx = \inf\left\{\overline{S}(f,P) : P \text{ partition de } R\right\}$$

Une fonction f est dite integrable au sens de Riemann si

$$\overline{\int}_R f(x)dx = \underline{\int}_R f(x)dx$$

dans ce cas, on note

$$\int_R f(x)dx$$

On note $\mathcal{R}(R)$ l'ensemble des fonctions $f : R \to \mathbb{R}$ bornees et Riemann integrables..

Remarque
Pour toute fonction $f : R \to \mathbb{R}$ bornee,

$$\underline{\int}_R f(x)dx \ et \ \overline{\int}_R f(x)dx$$

sont bien definies.
Enn effet, $\forall P, P'$ des partitions de R, on a

$$-\infty < \underline{S}(f,P) \leq \underline{\int}_R f(x)dx \leq \overline{\int}_R f(x)dx \leq \overline{S}(f,P') < +\infty$$

9.1 Caracterisation equivalente de fonctions integrables

Lemme 65
Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ et $f : R \to \mathbb{R}$ bornee.
f est Riemann-inntegrable si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, il existe une partition P_ϵ

$$\overline{S}(f,P_\epsilon) - \underline{S}(f,P_\epsilon) < \epsilon$$

Preuve
f integrable implique qu'il existe une partition P_ϵ tel que ...

$$\int_R f(x) = \underline{\int}_R f(x)dx = \sup_{P \ partition \ de \ R} \underline{S}(f,P)$$

Alors

$$\exists P'_\epsilon : \underline{S}(f,P'_\epsilon) \geq \underline{\int}_R f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} = \int_R f(x)dx - \frac{\epsilon}{2}$$

et

$$\int_R f(x)dx = \overline{\int}_R f(x)dx = \inf_{P \ partition \ de \ R} \overline{S}(f,P)$$

et donc

$$\exists P''_\epsilon : \overline{S}(f,P''_\epsilon) \leq \int_R f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$$

Soit maintenant P_ϵ un raffinement commun de P'_ϵ et P''_ϵ, alors

$$\overline{S}(f,P_\epsilon) \leq \overline{S}(f,P''_\epsilon) \leq \int_R f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$$

et

$$\underline{S}(f,P_\epsilon) \geq \underline{S}(f,P_\epsilon) \geq \int_R f(x)dx - \frac{\epsilon}{2}$$

On montre la direction inverse

$$\overline{\int}_R f(x)dx \leq \overline{S}(f,P_\epsilon)$$
$$\underline{\int}_R f(x)dx \geq \underline{S}(f,P_\epsilon)$$

$$\overline{\int}_R f(x)dx - \underline{\int}_R f(x)dx \leq \overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) \leq \epsilon$$

Puise que ϵ est arbitraire, on a que $\overline{\int}_R f(x)dx = \underline{\int}_R f(x)dx$ donc f est Riemann integrable. $\square$

> **Theorème 66**
> *Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pave et $f : R \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*
> *Alors f est Riemann-integrable.*

Preuve
R est compact, donc f est uniformement continue

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall x, y \in R, \|x - y\| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

On peut toujours construire une partition P de R tel que

$$\forall Q \in P, \forall x, y \in Q : \|x - y\| < \delta_\epsilon$$

On pose P une partition tensorielle $\forall Q$ a des cotes de longueur h, alors

$$\forall x, y \in Q : \|x - y\| = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} \leq h\sqrt{n} < \delta_\epsilon$$

Il suffit donc de prendre $h < \frac{\delta_\epsilon}{\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_{Q \in P} (\sup_{x \in Q} f(x) - \inf_{x \in Q} f(x)) Vol(Q) &= \sum_{Q \in P} (\max_{x \in Q} f(x) - \min_{x \in Q} f(x)) Vol(Q) \\ &= \sum_{Q \in P} (f(\overline{x}_Q) - f(\underline{x}_Q)) Vol(Q) \\ &< \sum_{Q \in P} \epsilon Vol(Q) = \epsilon Vol(Q)\end{aligned}$$

Donc $\forall \epsilon > 0$, on a trouve une partition P_ϵ tel que

$$\overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) < \epsilon$$ $\square$

Donc f est Riemann-integrable.

Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pave et $\hat{R} \subset \mathbb{R}^n$ un autre apve tel que $R \subset \overset{\circ}{\hat{R}}$.
Soit $f : R \to \mathbb{R}$ bornee et considerons le prolongement par 0 de f sur $\hat{R}$: $\hat{f} : \hat{R} \to \mathbb{R}$.
Alors, f est Riemann integrable sur R si et seulement si $\hat{f}$ est Riemann-integrable sur $\hat{R}$.

9.2 Formule d'integrales iterees

Soit $R \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $\forall z \in R : z = (\underbrace{z_1, \ldots, z_n}_{x \in \mathbb{R}^n}, \underbrace{z_{n+1}, \ldots, z_{n+m}}_{y \in \mathbb{R}^m})$.
Notons $R = \underbrace{[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]}_{R^{(1)}} \times \underbrace{[a_{n+1}, b_{n+1}] \times \ldots \times [a_{n+m}, b_{n+m}]}_{R^{(2)}}$

Theorème 67 (de Fubini)
Soit $f : R \to \mathbb{R}$ une fonction bornee et Riemann-integrable,

$$f(x, y), x \in R^{(1)}, y \in R^{(2)}.$$

Si $\forall y \in R^{(2)}$ la fonction $f(\cdot, y) : R^{(1)} \to \mathbb{R}$ est Riemann-integrable, alors la fonction

$$y \mapsto G(y) = \int_{R^{(1)}} f(x, y)dx : R^{(2)} \to \mathbb{R}$$

est aussi Riemann-integrable sur $R^{(2)}$ et

$$\int_R f(z)dz = \int_{R^{(2)}} G(y)dy = \int_{R^{(2)}} (\int_{R^{(1)}} f(x, y)dx)dy$$

Corollaire 68
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors

$$\int_R f(z)dz = \int_{R^{(1)}} (\int_{R^{(2)}} f(x, y)dy)dx = \int_{R^{(2)}} (\int_{R^{(1)}} f(x, y)dx)dy$$

Lecture 20: Proprietes de l'integrale de Riemann

Mon 10 May

9.3 Integrabilite sur un domaine quelconque

Definition 49
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ borne et $f : E \to \mathbb{R}$ bornee.
Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pave contenant E et $\tilde{f} : R \to \mathbb{R}$ le prolongement de f par au dehors de E,

$$\tilde{f}(x) = f(x), x \in E, \tilde{f}(x) = 0 si x \in R \setminus E$$

On dit que f est integrable au sens de Riemann sur E, si $\tilde{f} \in \mathcal{R}(R)$ (est Riemann-integrable sur R) .
Dans ce cas, on note

$$\int_E f(x)dx = \int_R \tilde{f}(x)dx$$

Remarque
Cette definition de depend pas du choix de R.

9.4 Proprietes de l'integrale de Riemann

— Linearite : $\forall f, g \in \mathcal{R}(E), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

Il s'ensuit que $\mathcal{R}(E)$ est un espace vectoriel

— Monotonie : $\forall f, g \in \mathcal{R}(E)$, si $f(x) \leq g(x) \forall x \in E$, alors

$$\int_E f(x)dx \leq \int_E g(x)dx$$

— Si $f \in \mathcal{R}(E)$, alors $|f| \in \mathcal{R}(E), f_+ = \max\{f, 0\} \in \mathcal{R}(E), f_- = \max\{-f, 0\} \in \mathcal{R}(E)$ On montre d'abord que $f \in \mathcal{R}(E) \Rightarrow f_+ \in \mathcal{R}(E)$.
$f \in \mathcal{R}(E) \Rightarrow \exists R \subset \mathbb{R}^n$ contenant E et $\tilde{f} \in \mathcal{R}(R)$.
Donc $\forall \epsilon$, il existe une partition P_ϵ de R tel que

$$\overline{S}(\tilde{f}, P_\epsilon) - \underline{S}(\tilde{f}, P_\epsilon) < \epsilon$$

$$\forall Q \in P_e \text{ on a } \sup_Q \tilde{f}_+ - \inf_Q \tilde{f}_+ \leq \sup_Q \tilde{f} - \inf_Q \tilde{f}$$

Si $\sup \tilde{f} \geq \inf_Q \tilde{f} \geq 0$, alors $\tilde{f}_+ = f$ sur Q, et on a egalite.
Si $\inf_Q \tilde{f} \leq \sup_Q \tilde{f} \leq 0$, alors $\tilde{f}_+ = 0$, et on a l'inegalite.
Si $\sup_Q \tilde{f} \geq 0 \geq \inf_Q \tilde{f}$, alors $\sup_Q \tilde{f}_+ - \underbrace{\inf_Q \tilde{f}_+}_{=0} = \sup_Q \tilde{f} \leq \sup_Q \tilde{f} - \inf_Q \tilde{f}$
Ce qui montre l'inegalite, et ce qui implique que $\tilde{f}_+$ est integrable.
Mais alors f_- est integrable et $|f| = f_+ - f_{\in}\mathcal{R}(E)$

— Si $f \in \mathcal{R}(E)$, alors $|\int_E f(x)dx| \leq \int_E |f(x)|dx$ En effet, on a

$$f \in \mathcal{R}(E) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}(E), \text{ de plus}$$
$$f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow \int_E f(x)dx \leq \int_E |f(x)|dx$$
$$-f(x) \leq |f| \forall x \in E \Rightarrow -\int_E f(x)dx \leq \int_E |f(x)|dx$$

— Si $f, g \in \mathcal{R}(E)$, alors $fg \in \mathcal{R}(E)$ Si $f, g \in \mathcal{R}(E), f, g$ sont bornes.
Soit $M \geq 0 : f(x) \leq M, g(x) \leq M \forall x \in E$, alors $\forall \epsilon > 0$, il existe un pave $R \subset \mathbb{R}^n$ contenant E et une partition P_ϵ de R tel que

$$\overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2M}$$
$$\overline{S}(g, P_\epsilon) - \underline{S}(g, P_\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2M},$$

Maintenant, $\forall Q \in P_\epsilon$, alors

$$\sup Q fg - \inf_Q fg \leq \sup_Q f \sup_Q g - \inf_Q \inf_g$$
$$\leq \underbrace{\sup f}_{\leq M}(\sup g - \inf g) + \underbrace{\inf g}_{\leq M}(\sup f - \inf f)$$

9.5 Ensembles mesurables au sens de Jordan

Definition 50 (Ensemble mesurable au sens de Jordan)
On dit que $E \subset \mathbb{R}^n$ *borne est mesurable au sens de Jordan (ou Jordan-mesurable) si la fonction* $\mathbb{I}_E : E \to \mathbb{R}$, $\mathbb{I}_E(x) = 1 \forall x \in E$ *est integrable sur* E *au sens de Riemann.*
Dans ce cas, on pose $\mathrm{Vol}(E) = \int_E \mathbb{I}_E(x)dx$.
On dit que E *est negligeable si* E *est Jordan mesurable et* $\mathrm{Vol}(E) = 0$.

9.5.1 Caracterisation des ensembles

Ensembles mesurables

E mesurable $\iff \int_E \mathbb{I}_E(x)dx$ existe $\mathbb{I}_E \in \mathcal{R}(E)$, donc, $\forall \epsilon > 0$, il existe un pave $R \subset \mathbb{R}^n$ contenant E et une partition P_ϵ de R tel que

$$\begin{aligned}
&\overline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) - \underline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) < \epsilon \\
&\overline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) - \underline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) = \sum_{Q \in P_\epsilon} (\sup_Q \mathbb{I}_E - \inf_Q \mathbb{I}_E) Vol(Q) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; = \sum_{\substack{Q \in P_\epsilon \\ Q \cap E \neq \emptyset \\ Q \cap R \setminus E \neq \emptyset}} Vol(Q)
\end{aligned}$$

Lemme 70
Soit $e \subset \mathbb{R}^n$ *borne et* $R \subset \mathbb{R}^n$ *un pave contenant.*
Alors E *est mesurable au sens de Jordan si et seulement si* $\forall \epsilon > 0$, *il existe une partition* P_ϵ *de* R *tel que*

$$\sum_{\substack{Q \in P_\epsilon \\ Q \cap E \neq \emptyset \\ Q \cap R \setminus E \neq \emptyset}} Vol(Q) < \epsilon$$

Ensembles negligeables

Lemme 71
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ *borne,* E *est negligeable si et seulement si* $\forall \epsilon > 0$, *il existe* $K \in \mathbb{N}^*$ *et une collection de paves tel que* $E \subset \bigcup_{i=1}^{L} Q_i$ *et* $\sum_{i=1}^{L} \mathrm{Vol}(Q_i) \leq \epsilon$

Preuve
E mesurable $\Rightarrow \exists \{Q_1, \ldots, Q_L\} : E \subset \bigcup Q_i, \sum \mathrm{Vol}(Q_i) < \epsilon$
Donc E mesurable $\iff \mathbb{I}_E \in \mathcal{R}(E)$ *et* $\int_E \mathbb{I}_E dx = 0$.
Soit R *un pave contenant* E, $\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon$ *de* R.

$$\overline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) - \underline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) \leq \epsilon$$

Donc, il faut que $\mathbb{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) < \epsilon$

$$\mathbb{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) = \sum_{Q \cap E \neq \emptyset} \operatorname{Vol} Q < \epsilon$$

Supposons que $\forall \epsilon > 0$*, il existe une collection* $\{Q_1, \ldots, Q_L\}$ *telle que* $E \subset \bigcup Q_i, \sum_i \operatorname{Vol}(Q_i) < \epsilon$
Il existe toujours une partition tensorielle P *tel que*

$$Q_i = \bigcup_{\substack{Q \in P \\ Q \in Q_i}} Q$$

$$\underline{S}(\mathbb{I}_E, P) \geq 0$$

$$\mathbb{S}(\mathbb{I}_E, P) = \sum_{\substack{Q \in P \\ Q \cap E \neq \emptyset}} \operatorname{Vol} Q = \sum_{i=1}^{L} \sum_{\substack{Q \in P_\epsilon \\ Q \subset Q_i}} \operatorname{Vol}(Q) < \epsilon$$

Donc

$$\overline{S}(\mathbb{I}_E, P) - \underline{S}(\mathbb{I}_E, P) < \epsilon$$
$$\overline{S}(\mathbb{I}_E, P) < \epsilon \Rightarrow$$

□

Theorème 72
Un ensemble borne $E \subset \mathbb{R}^n$ *est mesurable si et seulement si* ∂E *est negligeable.*

Corollaire 73
Soient $E, F \subset \mathbb{R}^n$ *borne et mesurables, alors*
— $E \cap F, E \cup F, E \setminus F, \mathring{E}, \overline{E}$ *sont mesurables.*

Preuve
— $\mathbb{I}_{E \cap F} = \mathbb{I}_E \mathbb{I}_F$*, idem pour le reste.* □

Lecture 20: Proprietes de l'integrale de Riemann

Mon 10 May

9.6 Integrabilite sur un domaine quelconque

Definition 51
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ *borne et* $f : E \to \mathbb{R}$ *bornee.*
Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ *un pave contenant* E *et* $\tilde{f} : R \to \mathbb{R}$ *le prolongement de* f *par au dehors de* E*,*

$$\tilde{f}(x) = f(x), x \in E, \tilde{f}(x) = 0 six \in R \setminus E$$

On dit que f est integrable au sens de Riemann sur E, si $\tilde{f} \in \mathcal{R}(R)$ (est Riemann-integrable sur R) .
Dans ce cas, on note

$$\int_E f(x)dx = \int_R \tilde{f}(x)dx$$

Remarque
Cette definition de depend pas du choix de R.

9.7 Proprietes de l'integrale de Riemann

— Linearite : $\forall f, g \in \mathcal{R}(E), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

Il s'ensuit que $\mathcal{R}(E)$ est un espace vectoriel

— Monotonie : $\forall f, g \in \mathcal{R}(E)$, si $f(x) \leq g(x) \forall x \in E$, alors

$$\int_E f(x)dx \leq \int_E g(x)dx$$

— Si $f \in \mathcal{R}(E)$, alors $|f| \in \mathcal{R}(E), f_+ = \max\{f, 0\} \in \mathcal{R}(E), f_- = \max\{-f, 0\} \in \mathcal{R}(E)$ On montre d'abord que $f \in \mathcal{R}(E) \Rightarrow f_+ \in \mathcal{R}(E)$.
$f \in \mathcal{R}(E) \Rightarrow \exists R \subset \mathbb{R}^n$ contenant E et $\tilde{f} \in \mathcal{R}(R)$.
Donc $\forall \epsilon$, il existe une partition P_ϵ de R tel que

$$\overline{S}(\tilde{f}, P_\epsilon) - \underline{S}(\tilde{f}, P_\epsilon) < \epsilon$$

$$\forall Q \in P_e \text{ on a } \sup_Q \tilde{f}_+ - \inf_Q \tilde{f}_+ \leq \sup_Q \tilde{f} - \inf_Q \tilde{f}$$

Si $\sup \tilde{f} \geq \inf_Q \tilde{f} \geq 0$, alors $\tilde{f}_+ = f$ sur Q, et on a egalite.
Si $\inf_Q \tilde{f} \leq \sup_Q \tilde{f} \leq 0$, alors $\tilde{f}_+ = 0$, et on a l'inegalite.
Si $\sup_Q \tilde{f} \geq 0 \geq \inf_Q \tilde{f}$, alors $\sup_Q \tilde{f}_+ - \underbrace{\inf_Q \tilde{f}_+}_{=0} = \sup_Q \tilde{f} \leq \sup_Q \tilde{f} - \inf_Q \tilde{f}$
Ce qui montre l'inegalite, et ce qui implique que $\tilde{f}_+$ est integrable.
Mais alors f_- est integrable et $|f| = f_+ - f_{\in}\mathcal{R}(E)$

— Si $f \in \mathcal{R}(E)$, alors $|\int_E f(x)dx| \leq \int_E |f(x)|dx$ En effet, on a

$$f \in \mathcal{R}(E) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}(E), \text{ de plus}$$
$$f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow \int_E f(x)dx \leq \int_E |f(x)|dx$$
$$-f(x) \leq |f| \forall x \in E \Rightarrow -\int_E f(x)dx \leq \int_E |f(x)|dx$$

— Si $f, g \in \mathcal{R}(E)$, alors $fg \in \mathcal{R}(E)$ Si $f, g \in \mathcal{R}(E)$, f, g sont bornes.
Soit $M \geq 0 : f(x) \leq M, g(x) \leq M \forall x \in E$, alors $\forall \epsilon > 0$, il existe un pave $R \subset \mathbb{R}^n$ contenant E et une partition P_ϵ de R tel que

$$\overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2M}$$
$$\overline{S}(g, P_\epsilon) - \underline{S}(g, P_\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2M},$$

Maintenant, $\forall Q \in P_\epsilon$, alors

$$\begin{aligned}\sup Q fg - \inf_Q fg &\leq \sup_Q f \sup_Q g - \inf_Q \inf_g \\ &\leq \underbrace{\sup f}_{\leq M}(\sup g - \inf g) + \underbrace{\inf g}_{\leq M}(\sup f - \inf f)\end{aligned}$$

9.8 Ensembles mesurables au sens de Jordan

Definition 52 (Ensemble mesurable au sens de Jordan)
On dit que $E \subset \mathbb{R}^n$ borne est mesurable au sens de Jordan (ou Jordan-mesurable) si la fonction $\mathbb{I}_E : E \to \mathbb{R}$, $\mathbb{I}_E(x) = 1 \forall x \in E$ est integrable sur E au sens de Riemann.
Dans ce cas, on pose $\mathrm{Vol}(E) = \int_E \mathbb{I}_E(x)dx$.
On dit que E est negligeable si E est Jordan mesurable et $\mathrm{Vol}(E) = 0$.

9.8.1 Caracterisation des ensembles

Ensembles mesurables

E mesurable $\iff \int_E \mathbb{I}_E(x)dx$ existe $\mathbb{I}_E \in \mathcal{R}(E)$, donc, $\forall \epsilon > 0$, il existe un pave $R \subset \mathbb{R}^n$ contenant E et une partition P_ϵ de R tel que

$$\begin{aligned}&\overline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) - \underline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) < \epsilon \\ &\overline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) - \underline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) = \sum_{Q \in P_\epsilon} (\sup_Q \mathbb{I}_E - \inf_Q \mathbb{I}_E) Vol(Q) \\ &\qquad = \sum_{\substack{Q \in P_\epsilon \\ Q \cap E \neq \emptyset \\ Q \cap R \setminus E \neq \emptyset}} Vol(Q)\end{aligned}$$

Lemme 75
Soit $e \subset \mathbb{R}^n$ borne et $R \subset \mathbb{R}^n$ un pave contenant.
Alors E est mesurable au sens de Jordan si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, il existe

une partition P_ϵ de R tel que

$$\sum_{\substack{Q\in P_\epsilon\\ Q\cap E\neq\emptyset\\ Q\cap R\setminus E\neq\emptyset}} Vol(Q) < \epsilon$$

Ensembles negligeables

Lemme 76
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ borne, E est negligeable si et seulement si $\forall\epsilon > 0$, il existe $K \in \mathbb{N}^*$ et une collection de paves tel que $E \subset \bigcup_{i=1}^{L} Q_i$ et $\sum_{i=1}^{L} \mathrm{Vol}(Q_i) \leq \epsilon$

Preuve
E mesurable $\Rightarrow \exists\{Q_1,\ldots,Q_L\} : E \subset \bigcup Q_i, \sum \mathrm{Vol}(Q_i) < \epsilon$
Donc E mesurable $\iff \mathbb{I}_E \in \mathcal{R}(E)$ et $\int_E \mathbb{I}_E dx = 0$.
Soit R un pave contenant E, $\forall\epsilon > 0, \exists P_\epsilon$ de R.

$$\overline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) - \underline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) \leq \epsilon$$

Donc, il faut que $\mathbb{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) < \epsilon$

$$\mathbb{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) = \sum_{Q\cap E\neq\emptyset} \mathrm{Vol}\, Q < \epsilon$$

Supposons que $\forall\epsilon > 0$, il existe une collection $\{Q_1,\ldots,Q_L\}$ telle que $E \subset \bigcup Q_i, \sum_i \mathrm{Vol}(Q_i) < \epsilon$
Il existe toujours une partition tensorielle P tel que

$$Q_i = \bigcup_{\substack{Q\in P\\ Q\in Q_i}} Q$$

$$\underline{S}(\mathbb{I}_E, P) \geq 0$$
$$\mathbb{S}(\mathbb{I}_E, P) = \sum_{\substack{Q\in P\\ Q\cap E\neq\emptyset}} \mathrm{Vol}\, Q = \sum_{i=1}^{L} \sum_{\substack{Q\in P_\epsilon\\ Q\subset Q_i}} \mathrm{Vol}(Q) < \epsilon$$

Donc

$$\overline{S}(\mathbb{I}_E, P) - \underline{S}(\mathbb{I}_E, P) < \epsilon$$
$$\overline{S}(\mathbb{I}_E, P) < \epsilon \Rightarrow$$

□

Theorème 77
Un ensemble borne $E \subset \mathbb{R}^n$ est mesurable si et seulement si ∂E est negligeable.

Corollaire 78
Soient $E, F \subset \mathbb{R}^n$ borne et mesurables, alors

— $E \cap F, E \cup F, E \setminus F, \mathring{E}, \overline{E}$ *sont mesurables.*

Preuve

— $\mathbb{I}_{E \cap F} = \mathbb{I}_E \mathbb{I}_F$, *idem pour le reste.* □

Lecture 21: caracterisation des fonctions integrables

Wed 12 May

Theorème 79
Un ensemble borne $E \subset \mathbb{R}^n$ est mesurable au sens de Jordan si et seulement si ∂E est negligeable.

Preuve
"$\Rightarrow$" E mesurable implique ∂E negligeable.
Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pave contenant E, alors $\mathbb{I}_E \subset \mathcal{R}(R)$, donc $\forall \epsilon > 0$, il existe une partition P_ϵ du pave R telle que

$$\overline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) - \underline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) = \sum_{Q \in P_\epsilon} \operatorname{Vol} Q < \epsilon$$

Soit $\mathcal{E} = \{Q \in P_\epsilon : Q \cap E \neq \emptyset, Q \cap R \setminus E \neq \emptyset\}$.
Par hypothese,

$$\sum_{Q \in \mathcal{E}} \operatorname{Vol} Q < \epsilon$$

De plus, si $\forall x \in \partial E$, il existe au moins un $Q \in P_\epsilon$ qui le contient. Alors soit $x \in \mathring{Q}$, soit $x \in \partial Q$.
Si $x \in \mathring{Q} \Rightarrow Q \in \mathcal{E}$.

$$\partial E \subset \underbrace{\bigcup_{Q \in \mathcal{E}} Q}_{A} \cup \underbrace{\bigcup_{Q \in P_\epsilon} \partial Q}_{B}$$

Notons que $\forall Q \in P_\epsilon, \partial Q = \bigcup_{i=1}^{2n} R_i, \operatorname{Vol} R_i = 0$.
Donc on a recouvert ∂E par un nombre fini de paves et

$$\operatorname{Vol}(A \cup B) = \operatorname{Vol} A + \operatorname{Vol} B \leq \epsilon$$

Donc ∂E est negligeable.
$\Leftarrow \partial E \Rightarrow E$ mesurable.

∂E negligeable $\Rightarrow \mathbb{I}_{\partial E} \in \mathcal{R}(R)$ et $\int_R \mathbb{I}_{\partial E}$.
$\forall \epsilon > 0$, $\exists P_\epsilon$ une partition de R telle que

$$\overline{S}(\mathbb{I}_{\partial E}, P_\epsilon) = \sum_{\substack{Q \in P_\epsilon \\ Q \cap \partial E \neq \emptyset}} \operatorname{Vol} Q$$

Remarque
Si $Q \in \mathcal{E}$, alors $Q \cap \partial E \neq \emptyset$

Ainsi

$$\overline{S}(\mathbb{I}_{\partial E}, P_\epsilon) - \underline{\mathbb{I}_E, P_\epsilon} = \sum_{Q \in \mathcal{E}} \operatorname{Vol} Q \leq \sum_{\substack{Q \in P_\epsilon \\ Q \cap \partial E \neq \emptyset}} \operatorname{Vol} Q < \epsilon$$

9.9 Caracterisation des fonctions integrables

Theorème 81
Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pave et $f : R \to \mathbb{R}$ bornee tel que l'ensemble des points de discontinuite de f dans R soit negligeable. Alors $f \in \mathcal{R}(R)$.

Preuve
Soit N l'ensemble des points de discontinuite de f dans R et $M = \sup_{x \in R} |f(x)|$.
N negligeable implique que $\forall \epsilon > 0$, il existe une partition P_ϵ de R telle que $\mathbb{I}_N \in \mathcal{R}(R)$et $\int_R \mathbb{I}_N = 0$.
Donc $\overline{S}(\mathbb{I}_N, P_\epsilon) < \frac{\epsilon}{1+2M}$.
Soit $K = \bigcup_{\substack{Q \in P_\epsilon \\ Q \cap N = \emptyset}} Q$, une union finie de paves compacts, donc K est compact.
De plus, f est uniformement continue sur K.
Donc $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon : \forall x, y \in K, \|x - y\| < \delta_\epsilon$, on a que $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{1+2\operatorname{Vol}(R)}$.
On peut toujours raffiner la partition

$$P_K = \{Q \in P_\epsilon, Q \subset K\}$$

de telle sorte que $\forall Q \in P_K, \forall x, y \in Q \; \|x - y\| < \delta_\epsilon$.
Ainsi , soit $P'_\epsilon = \{Q \in P_\epsilon, Q \cap N \neq \emptyset\} \cup P_K$

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) &= \sum_{Q \in P_K} (\sup f - \inf f) \operatorname{Vol} Q + \sum_{Q \in P_\epsilon, Q \cap N \neq \emptyset} (\sup f - \inf f) \operatorname{Vol} Q \\ &\leq \frac{\epsilon}{1 + 2 \operatorname{Vol} R} \sum_{Q \in P_K} + 2M \sum_{Q \in P_\epsilon, Q \cap N \neq \emptyset} \operatorname{Vol} Q < \epsilon\end{aligned}$$

□

Corollaire 82
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ borne et mesurable et $f : E \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathring{E}$ et bornee.

Alors $f \in \mathcal{R}(E)$.

Preuve
Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pave contenant E, etudions

$$\tilde{f} : R \to \mathbb{R}^n$$

le prolongement par 0 de f sur R.
L'ensemble $\tilde{N}$ des points de discontinuite de $\tilde{f}$ est surement contenu dans ∂E qui est negligeable, donc $\tilde{f} \in \mathcal{R}(R) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(E)$. $\square$

Corollaire 83
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ est borne, mesurable et ferme (compact) et $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Alors $f \in \mathcal{R}(E)$.

9.10 Proprietes de l'integrale de Riemann

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ borne mesurable et $f : E \to \mathbb{R}$ integrable. Alors

$$\inf_{x \in E} f(x) \operatorname{Vol} E \leq \int_E f(x)dx \leq \sup_{x \in E} f(x) \operatorname{Vol} E$$

Preuve
$f(x) \leq \sup_{x \in E} f(x) \forall x \in E$, et la fonction constante $= \sup_{y \in E} f(y)$ est integrable, donc

$$\int_E f(x)dx \leq \int_E (\sup_{y \in E} f(y))dy$$

$\square$

Si $E \subset \mathbb{R}^n$ est borne, mesurable, compact et connexe par arcs et $f \in C^0(E)$, alors

$$\exists x_0 \in E : \int_E f(x)dx = f(x_0) \operatorname{Vol} E$$

Preuve
Par le resultat precedent. on a que

$$\min_f \operatorname{Vol} E \leq \int_E f(x)dx \leq \max_E f \operatorname{Vol} E$$

Puisque f prend toutes les valeurs entre $\min_E f$ et $\max_E f$.
Donc $\exists x_0 \in E : f(x_0) \operatorname{Vol} E = \int_E f$. $\square$

Soit $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ bornes tel que $E_1 \cap E_2$ est negligeable.
Soit $f : E_1 \cup E_2 \to \mathbb{R}$ borne.
Si $f|_{E_1} \in \mathcal{R}(E_1)$ et $f|_{E_2} \in \mathcal{R}(E_2)$, alors $f \in \mathcal{R}(E_1 \cup E_2)$, alors

$$\int_{E_1 \cup E_2} f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx$$

De plus, si E_1, E_2, E sont mesurables, alors $f|_{E_1} \in \mathcal{R}(E_1)$, $f|_{E_2} \in \mathcal{R}(E_2)$ et on a a nouveau

$$\int_{E_1 \cup E_2} f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx$$

9.11 Formule des integrales iterees

Definition 53 (Domaine simple)
Soit $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $z = (x, y), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}$.
On dit que E est un domaine simple par rapport a y s'il existe un compact mesurable $K \subset \mathbb{R}^n$ ($K \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$) et deux fonctions $g, h \in K \to \mathbb{R}$ tellles que

$$g(x) \leq h(x) \forall x \in K$$

et E a la forme

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : g(x) \leq y \leq h(x), x \in K\right\}$$

Theorème 84
Soit $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un domaine simple de la forme $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}, g(x) \leq y \leq h(x)\right\}, x \in K$, ou $K \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ et $g, h \in C^0(K)$.
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue.
Alors $f \in \mathcal{R}(E)$, et

$$\int_E f(x, y)dxdy = \int_K \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)dy\right) dx$$

En particulier, E est mesurable.

Lecture 22: Changements de variable

Mon 17 May

9.12 Formule de changement de variables

En dimension $n = 1$:
Soit $F = [\alpha, \beta], -\infty < \alpha, \beta < \infty$ et $f : F \to \mathbb{R}$ continue.
On souhaite calculer $\int_F f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx$
Soit alors $E = [a, b]$ et $\psi : E \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(E)$ et telle que $\psi(a) = \alpha, \psi(b) = \beta$. Alors on a

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_a^b f(\psi(u))\psi'(u)du$$

Pour generaliser a $n > 1$, on se restreint a des bijections de classe C^1, voir a des diffeomorphismes.
Soit ψ un diffeomorphisme entre $E = [a, b]$ et $F = [\alpha, \beta]$.
Puisque ψ est un diffeomorphisme, on a que $\psi' \neq 0$ sur E.
Soit $\psi' > 0$ sur E, alors ψ est strictement croissante sur E, et donc

$$\int_E f = \int_a^b f(\psi(u))|\psi'(u)|du$$

Si $\psi' < 0$ sur E, alors ψ est strictement decroissante, alors

$$\begin{aligned}\int_F f(x)dx &= \int_\alpha^\beta f(x)dx \\ &= \int_{\psi(b)}^{\psi(b)} \\ &= \int_a^b f(\psi(u))|\psi'(u)|du\end{aligned}$$

Donc peu importante le signe de ψ', on a

$$\int_F f = \int_E \tilde{f}(u)|\psi'(u)|du$$

Considerons maintenant $n > 1$:
On considere une transformation affine ψ de $\mathbb{R}^n$.
Donc on peut ecrire

$$x = \psi(u) = Au$$

Alors si on considere un petit carre centre en (u_1, u_2), il sera transforme en un parallelepipede centre en $A(u_1, u_2)$.

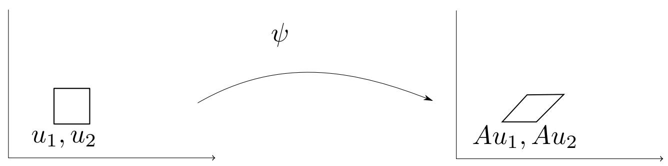


FIGURE 14 – transformation affine

Donc on peut calculer

$$\operatorname{Vol} F = v_1] \times v_2 = (r, Ae_1) \times (r_2 Ae_2) = r_1 r_2 |a_1 \times a_2| = r_1 r_2 |\det A| = \operatorname{Vol} E |\det A|$$

Pour une transformation quelconque, on peut toujours l'ecrire localement comme une transformation lineaire., ie

$$x = \psi(u_0) + D\psi(u - u_0) + R(u) = D\psi(u_0)u + \psi(u_0) - D\psi(u_0) + R(u)$$

Donc on a "en gros" que

$$\text{“}|dx| = |\det D\psi(u_0)||du|\text{''}$$

Theorème 85
Soit $U, V \subset \mathbb{R}^n$ ouvertes et $\psi : U \to V$ tel que

- *ψ est un diffeomorphisme entre U et V*
- *U et V soient mesurables.*
- *Pour tout $r > 0$, $U \cap B(0, r)$ et $V \cap B(0, r)$ soient mesurables.*
- *Toutes les composantes de $D\psi$ sont bornees sur tout sous-ensemble borne.*

Soit encore $E \subset U$ borne non-vide et $F = \psi(E) \subset V$ (aussi un sous-ensemble borne) .
Alors

1. *E est mesurable (au sens de Jordan) si et seulement si $F = \psi(E)$ est mesurable.*
2. *Si E est mesurable et $f : F = \psi(E) \to \mathbb{R}$ est continue et bornee sur F, alors $f \in \mathcal{R}(F)$ et*

$$\int_F f(x)dx = \int_E f(\psi(u))|\det D\psi(u)|du$$

9.13 Quelques applications

Exemple (1)
Soit $F = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$.

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

On veut calculer $\int_F f(x, y)dxdy$.
On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} : U =]0, = \infty[\times] - \pi, \pi[\to V = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0, x \leq 0\}$$

On a bien que $E = [1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}] = \psi^{-1}(F)$, mesurable et borne.
Toute composante de ψ et $D\psi$ est bornee sur E.
On a

$$|\det D\psi| = \left|\det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & +\rho\cos\theta \end{pmatrix}\right| = |\rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta| = \rho$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_F f(x,y)dxdy &= \int_F \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy \\
&= \int_E \frac{1}{1+\rho^2}|\det D\psi(\rho,\theta)d\rho d\theta \\
&= \int_{[1,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{1}{1+\rho^2}\rho d\rho d\theta \\
&= \int_1^2 \frac{\pi}{2}\frac{\rho}{1+\rho^2}d\rho
\end{aligned}$$

Exemple (2)

$F = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ et $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$.
Changement en coordonnees polaires.
f est continue sur F donc $f \in \mathcal{R}(F)$.
Soit $\tilde{F} = F \setminus \{y = 0, x \leq 0\}$.
Puisque $F \cap \{y = 0, x \leq 0\}$ est un ensemble de mesure nulle, alor $\tilde{F}$ est mesurable et

$$\int_{\tilde{F}} f(x,y)dxdy = \int_F f(x,y)dxdy$$

Donc

$$\int_F f(x,y)dxdy = \int_{\tilde{F}} f(x,y)dxdy = \int_{\tilde{E}} \frac{1}{1+\rho^2}\rho d\rho d\theta = \int_0^1 (\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho}{1+\rho^2})d\theta d\rho$$

9.14 Integrales generalisees

Definition 54 (Fonction absolument integrable)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide (pas forcement borne) et $f : E \to \mathbb{R}$ (pas forcement borne).
Soit $\{K_j, j \in \mathbb{N}\}$ une suite de sous-ensembles de E tel que

- *K_j est borne, compact et mesurable*
- *$K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$*
- *$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j = E$*

Soit f borne et integrable sur chaque K_j.
On dit que f est absolument integrable sur E si

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{K_j} |f(x)|dx$$

existe (finie) .

Dans ce cas, on pose que $\int_E f(x)dx = \lim_{j\to+\infty} \int_{K_j} f(x)dx$ On peut montrer que si f est absolument integrable sur E, alors $\int_E f(x)dx$ ne depend pas du choix de la suite $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.