Université Paul Sabatier **Année 2021-2022**
L2-Mathématiques, Physique

Partiel : Algèbre 3 Correction

Les calculettes ne sont pas autorisées. On demande de justifier toutes les réponses et la rédaction sera prise en compte.
Barème indicatif : exercice 1, 9 points, exercice 2, 5 points et exercice 3, 7 points.

Exercice 1 On note f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

.

1. Donner une base de $\mathrm{Ker} f$ et une base de $\mathrm{Im} f$. A-t-on $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

   On résout, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$AX = 0 \iff \begin{cases} x & & +z & = & 0 \\ -x & +2y & +z & = & 0 \\ 2x & -2y & & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z & = & -x \\ y & = & x \\ x & \in & \mathbf{R} \end{cases}$$

   On trouve donc :

$$\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Ensuite, on a $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbf{R}^3$. On lit sur les colonnes de A :

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   En lisant les calculs pour le noyau, on obtient $f(e_3) - f(e_2) = f(e_1)$. Ainsi, on peut extraire la famille $(f(e_2), f(e_3))$ de sorte que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_2), f(e_3))$. Or, par le théorème du rang, puisque $\dim \mathrm{Ker} f = 1$, on obtient $\dim \mathrm{Im} f = 2$, à savoir que l'on a obtenu une base.

   Finalement, on peut, par exemple, calculer le déterminant suivant :

$$\det(u, f(e_2), f(e_3)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

   où l'on a posé $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}(u)$. Ainsi, la famille $u, f(e_2), f(e_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$, ce qui prouve que $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.

2. L'endomorphisme f est-il injectif, surjectif, bijectif ?

   On a vu $\mathrm{Ker} f \neq \{0\}$, donc f n'est pas injectif. De plus, $\mathrm{rg} f = 2 \neq 3$, donc f n'est pas non plus surjectif. En particulier, f n'est pas bijectif.

3. Calculer le déterminant de A et retrouver le résultat de la deuxième question.

   On développe par rapport à la troisième colonne :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\times(-2) - 2\times 2 - (1\times(-2) - 2\times 0) = 0.$$

   On trouve donc que f n'est pas bijectif, et donc (puisqu'il s'agit d'un endomorphisme) qu'il n'est ni injectif, ni surjectif.

4. On considère les vecteurs $v_1 = (1,1,-1)$, $v_2 = (1,1,0)$ et $v_3 = (1,0,1)$. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbf{R}^3$.

   On pourrait encore regarder le déterminant de la famille (v_1, v_2, v_3). Sinon, il suffit de montrer que la famille est libre ; supposons que $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, où $a, b, c \in \mathbf{R}$. On a alors :

$$\begin{cases} a & +b & +c & = & 0 \\ a & +b & & = & 0 \\ -a & & +c & = & 0 \end{cases}$$

   On tire $c = a$ et $b = -a$ des deux dernières lignes, puis $a = 0$ de la première. Ainsi, (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de $3 = \dim \mathbf{R}^3$ vecteurs, donc c'est une base.

5. Calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$ en fonction de v_1, v_2 et v_3.

   Calcul direct :

$$f(v_1) = 0, \qquad f(v_2) = v_2, \qquad f(v_3) = 2v_3.$$

6. Donner la matrice B de f dans la base (v_1, v_2, v_3).

   On a alors :

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3) et la relation liant A, P et B.

   La matrice de passage est la donnée, en colonnes, des vecteurs de la nouvelle base exprimés dans l'ancienne :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   La relation liant A, P et B est donnée par le théorème de changement de base :

$$A = PBP^{-1}.$$

Exercice 2 On considère l'application φ de $\mathbf{R}_3[X]$ dans $\mathbf{R}^4$ définie par :

$$\varphi(P) = (P(0), P'(0), P(1), P'(1)).$$

1. Montrer que φ est linéaire.

$$\begin{aligned}
\varphi(P+\lambda Q) &= \big((P+\lambda Q)(0), (P+\lambda Q)'(0), (P+\lambda Q)(1), (P+\lambda Q)'(1)\big) \\
&= \big(P(0)+\lambda Q(0), P'(0)+\lambda Q'(0), P(1)+\lambda Q(1), P'(1)+\lambda Q'(1)\big) \\
&= \big(P(0), P'(0), P(1), P'(1)\big) + \lambda\big(Q(0), Q'(0), Q(1), Q'(1)\big) \\
&= \varphi(P) + \lambda\varphi(Q).
\end{aligned}$$

2. Donner la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbf{R}_3[X]$ et $\mathbf{R}^4$.

   On calcule :

$$\varphi(1) = (1,0,1,0), \quad \varphi(X) = (0,1,1,1), \quad \varphi(X^2) = (0,0,1,2), \quad \varphi(X^3) = (0,0,1,3).$$

   On a donc :

$$\mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer $\mathrm{Ker}\varphi$.

   Méthode 1 :

   Soit $P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3$. On a :

$$P \in \mathrm{Ker}\varphi \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} a & & & & = & 0 \\ & b & & & = & 0 \\ a & +b & +c & +d & = & 0 \\ & b & +2c & +3d & = & 0 \end{cases}$$

   Les deux premières lignes donnent $a = b = 0$, et les deux dernières donnent également $c = d = 0$. Ainsi, on a $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$.

   Méthode 2 : (sans calculs)

   Si $P \in \ker\varphi$, alors P admet 0 et 1 comme racines doubles. Or, un polynôme P admet au plus $\deg P$ racines, comptées avec multiplicités. Ainsi, nécessairement, P est le polynôme nul, puisqu'ici $p \in \mathbf{R}_3[X] \implies \deg P \leqslant 3$.

4. En déduire que φ est un isomorphisme.

   φ est donc injectif, et puisque l'on a $\dim \mathbf{R}_3[X] = 4 = \dim \mathbf{R}^4$, c'est alors un isomorphisme.

Exercice 3 On dit qu'une matrice $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ de $M_3(\mathbf{R})$ est magique si la somme des éléments sur chaque ligne, chaque colonne, la diagonale principale et la deuxième diagonale est égale à une constante que l'on nommera $\omega(M)$, i.e

$$m_{11}+m_{12}+m_{13}=m_{21}+m_{22}+m_{23}=m_{31}+m_{32}+m_{33}=m_{11}+m_{21}+m_{31}$$

$$=m_{12}+m_{22}+m_{32}=m_{13}+m_{23}+m_{33}=m_{11}+m_{22}+m_{33}=m_{13}+m_{22}+m_{31}=\omega(M).$$

On note $\mathcal{M}$ le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbf{R})$ formé des matrices magiques.

1. Montrer que si M est magique alors ${}^tM$ aussi (où ${}^tM$ désigne la transposée de M).

   En notant $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ et ${}^tM = (m'_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$, on a les relations :

   $$\forall 1\leqslant i,j\leqslant 3,\ m'_{ij}=m_{ji}.$$

   Ainsi, on peut réordonner les relations toutes égales à $\omega(M)$ pour obtenir que ${}^tM$ est magique avec $\omega({}^tM)=\omega(M)$.

2. Supposons M magique et antisymétrique : ${}^tM = -M$.

   a) Que vaut $\omega(M)$?

   On note au passage que $\omega(M) = \mathrm{Tr}(M)$, que M soit antisymétrique ou non. Or, si M est antisymétrique, alors $m'_{ij} = m_{ji} = -m_{ij}$, donc sur la diagonale $i = j$, on obtient $m_{ii} = -m_{ii}$, i.e $m_{ii} = 0$. Ainsi, on a $\mathrm{Tr}(M) = \omega(M) = 0$.

   b) Donner une base du sous-espace vectoriel formé des matrices magiques antisymétriques.

   La diagonale d'une matrice magique antisymétrique est donc fixée à zéro. Il reste donc 6 choix de coefficients :

   $$\begin{pmatrix} 0 & \bullet & \bullet \\ \bullet & 0 & \bullet \\ \bullet & \bullet & 0 \end{pmatrix}.$$

   Le choix d'un seul de ces coefficients fixe les autres coefficients. Par exemple, si on fixe le coefficient $m_{12} = \alpha \in \mathbf{R}$, alors, on obtient en ligne 1 et colonne 2, par $\omega(M) = 0$:

   $$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & -\alpha \\ \bullet & 0 & \bullet \\ \bullet & -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

   En continuant la procédure, on obtient alors que M est de la forme :

   $$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

   De plus, une matrice de cette forme est effectivement antisymétrique. Ainsi, l'ensemble des matrices magiques antisymétriques est inclus dans l'ensemble des matrices de cette forme. Réciproquement, toute matrice de cette forme convient. On a donc :

   $$\mathcal{M}\cap\mathcal{A}_3(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha\in\mathbf{R} \right\}.$$

Il s'agit d'un espace de dimension 1, engendré par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Supposons M magique et symétrique : ${}^tM = M$.

   a) Trouver toutes les matrices symétriques de $\mathcal{M}$ vérifiant $\omega(M) = 0$.

   On note E l'ensemble recherché.

   Par un raisonnement similaire à la question précédente, supposons qu'un coefficient de M est fixé (là encore, le raisonnement marche quelque soit ce coefficient choisi). Disons que $m_{11} = \alpha$. On peut alors poser $m_{22} = \beta$, et obtenir :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \bullet & \bullet \\ \bullet & \beta & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}.$$

   Puisque $\omega(M) = 0$ par hypothèse, on peut compléter le coefficient $m_{33} = -\alpha - \beta$. Là, on peut fixer un troisième coefficient, disons $m_{12} = \gamma$, et compléter :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & -\alpha-\gamma \\ \gamma & \beta & -\beta-\gamma \\ -\alpha-\gamma & -\beta-\gamma & -\alpha-\beta \end{pmatrix},$$

   et cette matrice est bien symétrique. En revanche, pour que cette matrice soit magique, il faut que la troisième colonne vérifie $\omega(M) = 0$, donc on doit avoir $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Cela fixe donc en réalité le choix de γ à $\gamma = -\alpha - \beta$. On aboutit alors à :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha-\beta & \beta \\ -\alpha-\beta & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & -\alpha-\beta \end{pmatrix}.$$

   En observant l'anti-diagonale, on lit $3\beta = \omega(M) = 0$, donc $\beta = 0$ nécessairement, ce qui conduit à :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix}.$$

   On a donc l'inclusion, puis l'égalité suivante, puisque toute matrice de cette forme convient :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbf{R} \right\}.$$

   En notant :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

   on obtient alors $E = \mathrm{Vect}(B)$.

b) En se ramenant à la question $3a$), donner une base du sous-espace vectoriel formé des matrices magiques symétriques.

On définit la matrice suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors on a :

$$M \in \mathcal{M} \cap \mathcal{S}_3(\mathbf{R}) \iff M - \frac{\omega(M)}{3} J \in E.$$

Ainsi, on obtient :

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{S}_3(\mathbf{R}) = E \oplus \mathrm{Vect}(J) = \mathrm{Vect}(B, J).$$

4. Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{M}$.

On rappelle la décomposition en somme directe $\mathcal{M}_3(\mathbf{R}) = \mathcal{S}_3(\mathbf{R}) \oplus \mathcal{A}_3(\mathbf{R})$, donnée par :

$$M = \frac{M + {}^tM}{2} + \frac{M - {}^tM}{2}.$$

D'après la première question, on obtient que si M est magique, alors $\frac{M+{}^tM}{2}$ est magique symétrique et $\frac{M-{}^tM}{2}$ est magique antisymétrique. La réciproque est vraie aussi, puisque la somme de deux matrices magiques est alors magique. Ainsi, on a la décomposition en somme directe $\mathcal{M} = \mathcal{M} \cap \mathcal{S}_3(\mathbf{R}) \oplus \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_3(\mathbf{R})$ donnée également par $M = \frac{M+{}^tM}{2} + \frac{M-{}^tM}{2}$. On obtient alors :

$$\mathcal{M} = \mathrm{Vect}(A) \oplus \mathrm{Vect}(B, J) = \mathrm{Vect}(A, B, J).$$

En particulier, (A, B, J) est une base de $\mathcal{M}$, et donc $\dim \mathcal{M} = 3$.