Série 05 du lundi 8 mars 2021

Exercice 1.

1) Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et $F \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé, tous deux non-vides et tels que $E \cap F = \varnothing$. Montrer qu'il existe $\boldsymbol{a} \in E$ et $\boldsymbol{b} \in F$ tels que
$$\inf\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| : \boldsymbol{x} \in E, \boldsymbol{y} \in F\} = \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\| > 0. \tag{1}$$
2) En utilisant le point précédent, montrer que si E est un sous-ensemble strict (i.e. $E \subsetneq \mathbb{R}^n$) non-vide, alors sa frontière ∂E n'est pas vide.

Solution :

1) Notons $\sigma := \inf\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| : \boldsymbol{x} \in E, \boldsymbol{y} \in F\} \geq 0$. Il existe deux suites $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ et $(\boldsymbol{y}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset F$ telles que
$$\sigma = \lim_{k\to+\infty} \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{y}_k\|. \tag{2}$$
D'une part, E étant compact, de la suite $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers un point $\boldsymbol{a} \in E$. Notons l'extracteur [1] r : $\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}_{r(k)} = \boldsymbol{a}$. D'autre part, la suite $(\boldsymbol{y}_{r(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée car $\|\boldsymbol{y}_{r(k)}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}_{r(k)}\| + \|\boldsymbol{x}_{r(k)} - \boldsymbol{y}_{r(k)}\|$. On peut en extraire une sous-suite qui converge vers un point $\boldsymbol{b}$. Notons l'extracteur s : $\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{y}_{s(r(k))} = \boldsymbol{b}$. Comme F est fermé, $\boldsymbol{b} \in F$.
De $\boldsymbol{a} \in E$ et $\boldsymbol{b} \in F$, on déduit $\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\| \geq \sigma$. De plus
$$\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\| \leq \left\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}_{s(r(k))}\right\| + \left\|\boldsymbol{x}_{s(r(k))} - \boldsymbol{y}_{s(r(k))}\right\| + \left\|\boldsymbol{y}_{s(r(k))} - \boldsymbol{b}\right\| \xrightarrow{k\to+\infty} \sigma \tag{3}$$
et donc $\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\| = \sigma$. Comme $E \cap F = \varnothing$, on a $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$ et $\sigma > 0$.
2) Considérons l'ensemble $\overline{E}$. Si $\overline{E} = \mathbb{R}^n$, alors $\varnothing \neq E^{\complement} = \overline{E} \setminus E \subset \partial E$ et on a fini. Si $\overline{E} \neq \mathbb{R}^n$, alors il existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{E}$. Vu que $\{\boldsymbol{x}\}$ est compact et $\overline{E}$ est fermé, il existe un point a de $\overline{E}$ qui réalise l'infimum
$$\sigma = \inf\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| : \boldsymbol{y} \in \overline{E}\} > 0. \tag{4}$$
En particulier $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{x}$. Montrons que $\boldsymbol{a} \in \partial E$. On doit montrer que pour tout $\delta > 0$, on a $\mathrm{B}(\boldsymbol{a},\delta) \cap E \neq \varnothing$ et $\mathrm{B}(\boldsymbol{a},\delta) \cap E^{\complement} \neq \varnothing$. Sans perte de généralité, considérons $\delta \in]0,\sigma[$. Que $\mathrm{B}(\boldsymbol{a},\delta) \cap E \neq \varnothing$ suit du fait que $\boldsymbol{a} \in \overline{E}$. Pour montrer que la deuxième intersection est non-vide, considérons le point
$$\boldsymbol{z} := \boldsymbol{a} + \frac{\delta}{2} \times \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|}. \tag{5}$$
Alors $\boldsymbol{z} \in \mathrm{B}(\boldsymbol{a},\delta) \cap E^{\complement}$, car (I) $\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{a}\| = \delta/2$ et (II) $\boldsymbol{z}$ ne peut pas être dans $\overline{E}$ car $\boldsymbol{a}$ réalise la distance minimale à $\boldsymbol{x}$.

1. Fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

Exercice 2.

Notons $E = \{(x, \sin {}^1\!/x) : x \in]0, +\infty[\}$.

1) Montrer que E est connexe par arcs.
2) Donner une description explicite de $\overline{E}$.
3) Montrer que $\overline{E}$ n'est pas connexe par arcs.

Solution :

1) Montrons que E est connexe par arcs. Soient $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in E$ et $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2) \in E$. l'application $\gamma : [0, 1] \to E$ définie par

$$\gamma(t) = \left(a_1 + t(b_1 - a_1), \sin \frac{1}{a_1 + t(b_1 - a_1)}\right) \tag{6}$$

est un chemin de E d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{b}$.

2) Montrons que $\overline{E} = E \cup A$ où $A := \{0\} \times [-1, 1]$. Pour cela, notons $F := E \cup A$ et montrons les deux inclusions.

$F \subset \overline{E}$. Puisque $E \subset \overline{E}$ il suffit de montrer $A \subset \overline{E}$. Soit $(0, b) \in A$. La suite $(\boldsymbol{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\boldsymbol{x}_k = \left(\frac{1}{\arcsin b + 2(k + 1)\pi},\ b\right) \tag{7}$$

est une suite d'éléments de E qui converge vers $(0, b)$. Pour le prouver, notons $\forall k \in \mathbb{N}$, $z_k := \arcsin b + 2(k + 1)\pi$. La fonction arcsin étant définie de $[-1, 1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $z_k \geqslant \pi > 0$. De plus, $\sin z_k = b$ et $\lim_{k \to +\infty} {z_k}^{-1} = 0$. On en conclut que $(0, b) \in \overline{E}$ et donc que $F \subset \overline{E}$.

$\overline{E} \subset F$. Soit $(c, d) \in \overline{E}$. Il existe une suite $(c_k, \sin(c_k^{-1}))_{k \in \mathbb{N}} \subset E$ qui converge vers (c, d), i.e.

$$\lim_{k \to +\infty} c_k = c \geqslant 0, \qquad \lim_{k \to +\infty} \sin \frac{1}{c_k} = d. \tag{8}$$

Par conséquent, ou bien $c > 0$ et $d = \sin(c^{-1})$, ou bien $c = 0$ et $d \in [-1, 1]$; donc $(c, d) \in F$. Ceci prouve que $\overline{E} \subset F$.

Remarque. « $\lim_{k \to +\infty} \sin(c_k^{-1}) = d$ » ne contredit pas le fait que $x \mapsto \sin(x^{-1})$ n'a pas de limite en 0.

3) Raisonnons par contradiction : supposons que $\overline{E}$ est connexe par arcs. Il existe donc un chemin continu $\boldsymbol{\gamma} := (\gamma_1, \gamma_2) : [0, 1] \to \overline{E}$ d'origine $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0, 1)$ et d'extrémité $\boldsymbol{\gamma}(1) = (1, \sin 1)$. On remarque que pour tout $t \in [0, 1]$ tel que $\gamma_1(t) > 0$, on a nécessairement $\gamma_2(t) = \sin(\gamma_1(t)^{-1})$ car il y a un seul point dans $\overline{E}$ d'abscisse $\gamma_1(t)$ si $\gamma_1(t) \in]0, 1]$. Puisque $\gamma_1(1) = 1 > 0$ et γ_1 continue, il existe $s \in [0, 1]$ tel que, $\forall t \in [s, 1]$, $\gamma_1(t) > 0$. On peut alors définir $\alpha := \inf\{r \in [0, 1] : \forall t \in [r, 1], \gamma_1(t) > 0\}$; bien sûr, $\alpha \geqslant 0$. Ainsi, sur l'intervalle $]\alpha, 1]$ le chemin reste sur E et on a

$$\lim_{t \to \alpha^+} \gamma_1(t) = \gamma_1(\alpha) = 0, \tag{9}$$

ce qui amène

$$\lim_{t \to \alpha^+} \gamma_2(t) = \lim_{t \to \alpha^+} \sin \frac{1}{\gamma_1(t)}. \tag{10}$$

Le membre de droite de (10) n'existe pas, or la continuité de γ_2 en α implique $\lim_{t\to\alpha^+}\gamma_2(t) = \gamma_2(\alpha)$. Ceci contredit l'hypothèse de départ : il n'existe pas de chemin continu d'origine $(0,1)$ et d'extrémité $(1, \sin 1)$.

Exercice 3.

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2} e^{-y/x^2} \text{ si } x \neq 0, \\ \qquad\qquad 0 \text{ si } x = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 0$.

Solution :

On considère la fonction

$$g(x,y) := \frac{x^2}{y} e^{\frac{y}{x^2}} \tag{12}$$

définie pour (x,y) tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on a bien sûr $\frac{1}{f(x,y)} = g(x,y)$.

Soit $C > 0$.

— Puisque $\lim_{s\to 0^+} se^{1/s} = +\infty$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$se^{1/s} \geq C, \ \forall s \in]0, \varepsilon]. \tag{13}$$

— Il existe $\delta \in \,]0,1[$ tel que $0 \leqslant \frac{x^2}{y} \leqslant \varepsilon$ si $|x| \leqslant \delta$ et $|y-1| \leqslant \delta$. Par exemple $\delta = \min\{1/2, \sqrt{\varepsilon/2}\}$.

— Ainsi, si $0 < |x| \leqslant \delta$ et $|y-1| \leqslant \delta$, on obtient $g(x,y) \geq C$ et $0 \leqslant f(x,y) \leqslant 1/C$. Comme $f(0,y) = 0$, ceci prouve que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 0. \tag{14}$$

Exercice 4.

Montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(\frac{1+x^4+y^4}{1+x^2+y^2}\right)}{\sin(x^2+y^2)} = -1. \tag{15}$$

Solution :

Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, on note $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ et $\|\boldsymbol{x}\| := \|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. On a

$$\frac{\ln\left(\frac{1+x_1^4+x_2^4}{1+\|\boldsymbol{x}\|^2}\right)}{\sin(\|\boldsymbol{x}\|^2)} = \frac{\ln(1+x_1^4+x_2^4)}{\sin(\|\boldsymbol{x}\|^2)} - \frac{\ln(1+\|\boldsymbol{x}\|^2)}{\sin(\|\boldsymbol{x}\|^2)}. \tag{16}$$

Étudions ces deux limites séparément. D'une part,

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to 0} \frac{\ln(1+\|\boldsymbol{x}\|^2)}{\sin(\|\boldsymbol{x}\|^2)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\ln(1+r^2)}{\sin(r^2)} = \lim_{s\to 0^+} \frac{\ln(1+s)}{\sin s} = 1. \tag{17}$$

D'autre part, pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathrm{B}(0, \sqrt{\pi}) \setminus \{0\}$,

$$0 \leqslant \frac{\ln(1+x_1^4+x_2^4)}{\sin(\|\boldsymbol{x}\|^2)} \leqslant \frac{\ln(1+\|\boldsymbol{x}\|^4)}{\sin(\|\boldsymbol{x}\|^2)} \xrightarrow{\boldsymbol{x}\to 0} 0. \tag{18}$$

Ainsi, en utilisant le théorème des deux gendarmes dans (18),

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{\ln\left(\frac{1+x_1^4+x_2^4}{1+\|\boldsymbol{x}\|^2}\right)}{\sin(\|\boldsymbol{x}\|^2)} = -1. \tag{19}$$