Série 7

David Wiedemann

15 avril 2021

1

Pour montrer que f est un difféomorphisme global, il faut montrer que $f^{-1} \in C^1$ (l'existence de f^{-1} est donnée par hypothèse).
Par hypothèse, en tout point $x \in E$, $f \in C^1$ et f^{-1} est C^1 dans un voisinage de $f(x)$ et donc en particulier au point $f(x)$.
Ainsi, $\forall y \in F$, f^{-1} est continument différentiable en y et donc $f^{-1} \in C^1$.
Ainsi, f est une bijection de $E \to F$ qui est C^1 et l'inverse de f est également C^1, donc f est un difféomorphisme.

2

Montrons d'abord que f_ϵ est bijective.
Soit $y \in \mathbb{R}^n$, montrons que y possède un unique antécédent par f_ϵ.
Soit

$$\begin{aligned} g_y \colon \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto y - \epsilon \cdot h(x) \end{aligned}$$

Nous allons montrer que g_y possède un unique point fixe en montrant que g_y satisfait les hypothèses du théorème du point fixe de Banach.
Etant donné que $\mathbb{R}^n$ est fermé, il est clair que $g_y(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n$, il suffit donc de montrer que g_y est contractante.
Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} \|g_y(x_2) - g(x_1)\| &= \|\epsilon h(x_1) - \epsilon h(x_2)\| \\ &= \|\epsilon \left(Dh(z)(x_1 - x_2)\right)\| \\ &\leq |||\epsilon Dh(z)||| \, \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

Où z est donné par le théorème des accroissements finis.
Et car $\epsilon < M^{-1}$, on a $\epsilon M < 1$ et donc $|||\epsilon Dh(z)||| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$.
Ainsi g_y est contractante et possède un point fixe, ie. il existe x tel que

$$x = y - \epsilon \cdot h(x)$$

Ou encore

$$y = x + \epsilon \cdot h(x)$$

Et donc x est l'inverse unique de y par f_ϵ.
Montrons maintenant que f_ϵ est un difféomorphisme local en tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
Pour montrer ceci, on va montrer que la matrice $Df_\epsilon(x_0)$ est inversible.
Supposons par l'absurd que $Df_\epsilon(x_0)$ n'est pas inversible, alors il existe $v, w \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs linéairement indépendants satisfaisant

$$\begin{aligned} Df_\epsilon(x_0) \cdot v &= Df_\epsilon(x_0) \cdot w \\ v + \epsilon Dh(x_0) \cdot v &= w + \epsilon Dh(x_0) \cdot w \\ v - w &= -\epsilon Dh(x_0) \cdot (v - w) \, \|v - w\| \quad = \|\epsilon Dh(x_0)(v - w)\| \end{aligned}$$

Or

$$\|\epsilon Dh(x_0)(v - w)\| \leq |||\epsilon Dh(x_0)||| \, \|v - w\| < \|v - w\|$$

Et donc

$$\|v - w\| < \|v - w\|$$

Ce qui est une contradiction.
Ainsi, $Df_\epsilon(x_0)$ est inversible et donc la jacobienne de f_ϵ est inversible en tout point $x \in \mathbb{R}^n$, et donc f_ϵ est un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^n$.
On conclut par la partie 1 et donc f_ϵ est un difféomorphisme global.