

Analyse III

David Wiedemann

Table des matières

1	Rappels	5
2	Nombres Complexes	5
3	Nombres Complexes	5
3.1	Topologie sur \mathbb{C}	6
3.2	Echange de sommes	6
4	Analyse Complexe	6
4.1	Fonctions analytiques complexes	6
4.2	Rayon de Convergence	7
4.3	Analyticite et recentrage	8
4.4	Zeros isolés	9
5	Fonctions exp, log, sin, cos, sinh, cosh	10
5.1	exp	10
5.2	Logarithme	12
6	Fonctions holomorphes	13
6.1	Analytique \Rightarrow Holomorphe	14
7	Integration Complexe	15
8	Holomorphie et deformation de Contours	17
8.1	Integration sur un petit carre	18
8.2	Deformations	18
8.3	Existence de primitives holomorphes	20
8.4	Indice d'un lacet	21
8.5	log et racines	22
9	Formule de Cauchy	23
9.1	Applications de Morera	25
10	Applications de la formule de Cauchy	25

11 Singularites	29
11.1 Series de Laurent	29
11.2 Singularites	31
12 Fonctions Meromorphes	32
12.1 Zeros, poles et derivees logarithmique	32
12.2 Sphere de Riemann	33
13 Theoreme des residus	33
13.1 Calcul des residus	35
13.2 2 classes d'integrales souvent calculables par des residus	35

List of Theorems

1	Theorème (de la fonction inverse)	5
2	Theorème (de la fonction implicite)	5
4	Theorème (fondamental de l'algebre)	6
5	Corollaire	6
1	Definition (Serie entiere)	7
2	Definition (Convergence de series entieres)	7
3	Definition (Convergence uniforme)	7
4	Definition (Convergence d'une suite de fonctions)	7
6	Lemme	7
5	Definition (Rayon de convergence)	7
7	Lemme	7
8	Lemme	7
9	Lemme	7
10	Lemme	8
6	Definition	8
11	Lemme (Lemme de recentrage)	8
12	Proposition	9
13	Corollaire	9
14	Corollaire	10
7	Definition (Exponentielle)	10
8	Definition	12
16	Proposition	12
9	Definition (Fonction Holomorphe)	13
10	Definition	14
17	Proposition	14
11	Definition	14
18	Proposition	14
19	Corollaire	15

12	Definition (Operateurs de Wirtinger)	15
13	Definition (Chemin)	15
14	Definition	16
15	Definition (Longueur)	16
16	Definition (Lacet)	16
21	Proposition (Integration par parties)	17
22	Proposition	17
17	Definition (Homotopie)	18
18	Definition (Contractable)	19
19	Definition	19
23	Proposition	19
24	Proposition	19
25	Theorème	20
26	Corollaire	20
20	Definition	20
21	Definition	20
27	Theorème	21
28	Corollaire	21
30	Proposition	21
31	Theorème	22
32	Proposition	22
33	Proposition	23
35	Theorème (Formule de Cauchy)	23
36	Corollaire	24
37	Theorème	24
38	Theorème (Morera)	25
39	Theorème	25
40	Corollaire	25
41	Theorème (Inegalites de Cauchy)	26
42	Theorème (Formule de Parseval)	26
43	Theorème (Principe du maximum)	26
44	Theorème (Theoreme de Liouville)	27
45	Proposition	27
46	Theorème (Theoreme de l'application ouverte)	27
47	Proposition (Limite de fonctions holomorphes)	28
48	Proposition (Formule de Cauchy sur l'anneau)	29
49	Theorème (Formule de Cauchy generalisee)	29
50	Theorème (Developpement en serie de Laurent)	30
51	Corollaire	31
22	Definition	31
23	Definition (Valuation)	31

53	Theorème (Casorati-Weierstrass)	31
24	Definition	32
54	Lemme	32
56	Lemme	33
57	Proposition	33
58	Theorème (Theoreme des Residus)	34
59	Lemme	34
60	Corollaire	35
61	Corollaire	35
62	Corollaire (Comptage des zeros)	35
64	Lemme	35
65	Proposition	36
67	Proposition	36

1 Rappels

Theorème 1 (de la fonction inverse)

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tel que $Df|_x$ est inversible. Alors il existe un voisinage V de x , un voisinage W de $f(x)$ tel que f est une bijection de V à W et dont l'inverse est aussi dérivable. De plus $Df^{-1}|_{f(x)} = (Df|_x)^{-1}$

Theorème 2 (de la fonction implicite)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^p$ et $f : U \times W \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction C^1 et $(x, z) \in U \times W$ tel que

$$Df|_{(x,z)} = [D_x f|_{(x,z)} | D_z f|_{(x,z)}]$$

est telle que $D_x f|_{(x,z)}$ est inversible.

Alors si $f(x, z) = 0$, il existe un voisinage Z de z et une fonction $g : Z \rightarrow U$ tel que $f(g(\tilde{z}), \tilde{z}) = 0$ et

$$Dg|_z = -(D_x f|_{(x,z)})^{-1} D_z f|_{(x,z)}$$

2 Nombres Complexes

De même que \mathbb{R} est obtenu à partir de \mathbb{Q} en faisant une opération de complétion (topologique).

\mathbb{C} est obtenu à partir de \mathbb{R} en faisant une opération de complétion algébrique ; on requiert simplement qu'il existe une solution à $x^2 + 1 = 0$.

Lecture 2: Intro Complexes

3 Nombres Complexes

Si on veut étendre \mathbb{R} en un corps qui contienne i , on obtient \mathbb{C} .

On perd la relation d'ordre sur les complexes.

Géométriquement, on représente les nombres complexes dans le plan.

Remarque

L'argument d'un nombre complexe n'est défini que modulo 2π .

La représentation polaire est particulièrement pertinente pour la multiplication

$$|zw| = |z||w| \text{ et } \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

Ce sera prouvé de manière élégante plus tard, mais on pourrait le vérifier avec les formules trigonométriques.

C'est consistant avec la notation $z = re^{i\theta}$. Un choix frequent pour θ est de definir \arg sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ en le prenant dans $(-\pi, \pi)$.

Solutions de $z^n = w$

pour $n \in \mathbb{N}^*, w \in \mathbb{C}^*$, il existe n solutions

$$\left\{ |\omega|^{\frac{1}{n}} e^{i(\arg(w) + 2k\pi)/n} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

3.1 Topologie sur \mathbb{C}

Comme en analyse reelle, l'outil principal est $|\cdot|$ complexe.

Les objets de choix pour parler de convergence sont $(x-r, x+r)$ et $[x-r, x+r]$ sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} leurs analogues sont $D(z, r) = \{\omega \in \mathbb{C} \mid |z - \omega| < r\}$.

On a $\partial D(z, r) = \overline{D}(z, r) \setminus D(z, r)$ est le cercle de rayon r centre en z .

Un ensemble $U \subset \mathbb{C}$ est dit ouvert si $\forall z \in U \exists \delta > 0$ tel que $D(z, \delta) \subset U$.

Un domaine est un ouvert connexe.

3.2 Echange de sommes

— Sur \mathbb{R} , si $a_{n,m} \geq 0$ on peut toujours dire

$$\sum_n \sum_m a_{n,m} = \sum_m \sum_n a_{n,m}$$

— Idem si la somme converge absolument.

Theorème 4 (fondamental de l'algebre)

Si P est un polynome de degre ≥ 1 , alors $\exists z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$

Corollaire 5

Tous les polynomes peuvent etre factorise.

4 Analyse Complexe

4.1 Fonctions analytiques complexes

But : aller plus loin que les polynomes.

On considere des series entieres

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_*)^n$$

Les fonctions analytiques sont les fonctions definies par des series entieres convergentes.

Definition 1 (Serie entiere)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$ une serie entiere centree en z_*

Definition 2 (Convergence de series entieres)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k(z - z_*)^k$ existe.

Definition 3 (Convergence uniforme)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$ converge uniformement sur $K \subset \mathbb{C}$ si elle converge sur K et si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{k=0}^n a_k(z - z_*)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_*)^k \right\|_{\infty, K} = 0$$

Definition 4 (Convergence d'une suite de fonctions)

Si $f_k : K \rightarrow \mathbb{C}$ est une suite de fonctions tel que $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty, K} < +\infty$, on dit que $\sum f_k$ converge normalement.

Lemme 6

La convergence normale implique la convergence uniforme.

Lecture 3: fonctions complexes

Thu 30 Sep

4.2 Rayon de Convergence**Definition 5 (Rayon de convergence)**

Le rayon de convergence de $\sum_n a_n(z - z_*)^n$ est

$$\rho = \sup \left\{ r \geq 0 : \sum a_n(z - z_*)^n \text{ converge sur } D(z^*, r) \right\}$$

On a $\rho \in [0, \infty]$.

Ou de maniere equivalent

$$\sup \left\{ r \geq 0 : \sum |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$$

Lemme 7

Si $\sum a_n z^n$ a rayon de convergence ρ , alors la serie converge normalement sur $D(0, \rho)$

Lemme 8

Si $\limsup |a_k| \rho^k < \infty$, alors le rayon de convergence est $\geq \rho$.

Lemme 9

Si

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

converge quand $k \rightarrow \infty$ alors $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \rightarrow \rho^{-1}$

$$\rho^{-1} = \limsup (|a_n|)^{\frac{1}{n}}$$

Lemme 10

$\sum a_k z^k, \sum b_n z^n$ convergent, alors

$$\sum (a_k + b_k) z^k$$

converge et vaut $\sum a_k z^k + \sum b_k z^k$.

Et si on pose $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

converge et vaut le produit.

4.3 Analyticite et recentrage

Definition 6

Si f est donnee par une serie entiere $\sum a_n z^n$.

On definit les series entieres "derivees" par

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

ou les series derivees ont le meme rayon de convergence que la serie de base car

$$\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup (n^k |a_n|)^{\frac{1}{n}}$$

Lemme 11 (Lemme de recentrage)

Soit $f : D(0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ donnee par $\sum a_n z^n$ avec rayon de convergence r .

Soit $z_* \in D(0, r)$. On a que la serie

$$\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_*) (z - z_*)^n$$

converge avec rayon de convergence $\geq r - |z_*|$ ou f^n est la derivee formelle de f definie ci-dessus.

Preuve

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum a_n z^n \\ &= \sum a_n (z - z_* + z_*)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (z - z_*)^k z_*^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} z_*^{n-k} (z - z_*)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!} n(n-1) \dots (n-k+1) z_*^{n-k} (z - z_*)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_*)}{k!} (z - z_*)^k
\end{aligned}$$

Si on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n 1_{k \leq n} |a_n| \binom{n}{k} |z_*^{n-k}| |z - z_*|^k < \infty \quad \square$$

or ceci converge car $z_* \in D(0, r)$ en effet $\exists \epsilon > 0$ tel que $|z_*| + \epsilon < r$

4.4 Zeros isolés

Proposition 12

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytique, non nulle, alors l'ensemble

$$\{z \in U : f(z) = 0\}$$

ne contient pas de points d'accumulation dans U .

Preuve

Supposons $z_* \in U$ un point d'accumulation.

Par le lemme de recentrage $\exists \epsilon > 0$ tel que $f(z) = \sum a_n (z - z_*)^n$.

Par hypothèse $\exists m$ tel que $a_m \neq 0$.

Soit n le plus petit tel entier

$$f(z) = (z - z_*)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - z_*)^n \quad \square$$

Donc il existe un voisinage de z_* où f est continue (parce que la série converge uniformément sur les compacts).

Lecture 4: Series entieres suite

Mon 04 Oct

Corollaire 13

Une fonction analytique $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ a un unique développement en série entière au voisinage de chaque $z_* \in U$.

Preuve

Sans perte de généralité $z_* = 0$.

Si on a deux développements en série $\sum a_n z^n$ et $\sum \tilde{a}_n z^n$ qui définissent la même fonction, donc

$$\sum (a_n - \tilde{a}_n) z^n$$

s'annule au voisinage de 0, donc $a_n = \tilde{a}_n$. □

Corollaire 14

Soient $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques.

Si f et g coïncident sur un ensemble avec un point d'accumulation dans Σ , alors $f(z) = g(z) \forall z \in \Sigma$.

Preuve

Montrons d'abord que si z_* est un point d'accumulation de Σ , alors $z_* \in \Sigma$ et $\exists r > 0$ tel que $\Sigma \ni D(z_*, r)$.

On développe $f - g$ en série au voisinage de z_* et on obtient une série nulle au voisinage de z_* .

Pour conclure que $\Sigma = U$, on utilise un argument de connexité.

Soit $z' \in U$, comme U est un domaine, $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow U$ allant de $z_* \in \Sigma$ à z' .

Soit $s \geq 0$ défini par $s = \sup \{S \geq 0 \mid f(\gamma(t)) = g(\gamma(t)) \forall t \in [0, S]\}$.

Si on a que $s = 1$, on a fini.

Si on avait $s < 1$, on sait que $s > 0$ car z_* est un point d'accumulation. $\gamma(s)$ est donc un point d'accumulation de Σ , donc

$$\exists r > 0 \text{ tel que } f - g$$

s'annule sur $D(\gamma(s), r)$ mais du coup on a que $f(\gamma(t)) = g(\gamma(t))$ pour $t \in [0, s]$. □

5 Fonctions exp, log, sin, cos, sinh, cosh

5.1 exp

Definition 7 (Exponentielle)

$\exp(z)$ aussi noté e^z est la fonction analytique définie par

$$\sum \frac{z^n}{n!}$$

La propriété fondamentale est qu'elle transforme l'addition en multiplication

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$$

En effet

$$\exp(z + w) = \sum_n \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{n!} \binom{n}{k}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_n \sum_k 1_{k \leq n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^n}{n!} \\
&= \sum_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \frac{z^k}{k!} \\
&= \exp(w) \exp(z)
\end{aligned}$$

L'échange est justifié car la série converge absolument.

Car $\exp > 0$, et $\exp' > 0$, \exp est strictement croissante sur $[0, \infty)$ et de même (car $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$), elle envoie $(-\infty, 0]$ sur $(0, 1]$ bijectivement.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit $\cos(t) = \operatorname{Re}(\exp(it))$ et $\sin(t) = \operatorname{Im}(\exp(it))$.

Sur $i\mathbb{R}$, on a $e^{\bar{it}} = e^{-it}$ (on regarde le développement en série), on en déduit

$$|e^{it}| = \sqrt{e^{it} e^{\bar{it}}} = \sqrt{1}$$

Et donc

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \text{ et } \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

On peut maintenant étendre ces définitions à tout $z \in \mathbb{C}$, en posant

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ et } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

De même, on pose

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \text{ et } \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

exp sur $i\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \rightarrow S^1 \quad t \mapsto e^{it} := \cos t + i \sin t$$

Comme on a le développement en série de \sin et \cos , on a

$$\sin' t = \cos t \text{ et } \cos'(t) = -\sin(t)$$

On sait donc qu'il existe un point t^* tel que $\cos(t^*) = 0$ (sinon \cos serait borné inférieurement, et \sin grandirait à l'infini).

\exp est périodique dans la direction imaginaire, montrons que 2π est la plus petite période possible, c'est-à-dire que $\forall t \in (0, 2\pi)$.

Pour cela, notons que sur $(0, \frac{\pi}{2})$ \cos et \sin sont strictement positifs.

Posons $t = 4s, s \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$e^{it} = (e^{is})^4 = (u + iv)^4, u, v > 0$$

Donc

$$e^{it} = (u + iv)^4 = u^4 + v^4 - 6u^2v^2 + 4i(u^2 - v^2)$$

Si on veut $e^{it} = 0$, alors $u^2 - v^2 = 0 \Rightarrow u^2 = v^2$ donc $u^2 = v^2 = 1$, mais alors

$$u^4 + v^4 - 6u^2v^2 \neq 0$$

Contradiction

Lecture 5: ...

Thu 07 Oct

5.2 Logarithme

Moralement, on aimerait définir le logarithme comme "l'inverse" de l'exponentielle.

Dans les reel, c'est ainsi qu'on avait procede, mais la difference, c'était que la fonction exponentielle etait bijective.

Ici, on a que la fonction exponentielle $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective.

Du coup on aurait envie de définir le log sur \mathbb{C}^* , mais la fonction exponentielle n'est pas injective.

En fait, cela fait qu'on ne peut pas définir une fonction log qui soit continue sur \mathbb{C}^* . Si on essaie de poser

$$\begin{aligned}\log \exp(a + ib) &= a + ib \\ \log e^a e^{ib} &= \log |w| + i \arg w\end{aligned}$$

Comment choisir $\arg w$.

Definition 8

Une determination du logarithme est une fonction

$$L : U \rightarrow \mathbb{C}$$

ou U est un ouvert de \mathbb{C} tel que $e^{L(z)} = z$

Remarque

Sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a une determination de l'argument et du log : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on prend $\arg w$ dans $(-\pi, \pi)$.

Proposition 16

*Il n'existe pas de determination continue du logarithme sur \mathbb{C}^**

Preuve

Tous les problemes viennent du fait qu'on fait un tour autour de l'origine.

Montrons qu'il n'en existe pas sur \mathbb{S}^1 .

Supposons qu'on ait une telle determination du log.

Posons $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definie par $u^\theta = f(e^{i\theta})$. On a $u(\theta) - \theta = 2\pi i n\theta$ puisque

$$e^{u(\theta)} - \theta$$

Donc

$$\operatorname{Im} u(\theta) = \arg(e^{i\theta}) + 2\pi\mathbb{Z}$$

Cependant

$$u(\theta + 2\pi) = \theta + 2\pi + n = u(\theta) \quad \square$$

6 Fonctions holomorphes

On souhaite generaliser la notion de derivee aux fonctions complexes.

Une possibilite est de voir le plan \mathbb{R}^2 et en utilisant les notions de calcul differentiel sur \mathbb{R}^2

La notion d'holomorphic, c'est celle d'etre derivable au sens d'une variable complexe, et on verra que c'est une notion beaucoup plus forte que celle d'etre differentiable au sens de \mathbb{R}^2 , mais suffisamment naturelle pour etre verifiee dans beaucoup de cas

Definition 9 (Fonction Holomorphe)

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ou U est un domaine de \mathbb{C} . On dit que f est holomorphe en $z \in U$ s'il existe une limite notee $f'(z) \in \mathbb{C}$ si la limite suivante existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

ou la limite est prise au sens complexe.

Formellement, cela veut dire $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que si $h \in D(0, \delta) \setminus \{0\}$ on a

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| \leq \epsilon$$

Une autre maniere d'ecrire cela

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(h)$$

ou $o(h)$ est telle que $|o(h)/h| \rightarrow 0$.

Comment comprendre ca en termes de derivees partielles en faisant l'identification $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$?

Dire que la fonction a un developpement de Taylor au 1er ordre pour une fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \\ f_2(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_1, x_2) & \partial_2 f_1(x_1, x_2) \\ \partial_1 f_2(x_1, x_2) & \partial_2 f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(h_1, h_2)$$

Donc la matrice Df_{x_1, x_2} doit etre la matrice de la composition d'une rotation et d'une homothetie. Donc la contrainte d'etre differentiable au sens complexe est

equivalence a celle de demander d'être différentiable au sens de deux variables réelles et d'avoir que la jacobienne soit de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

donc

$$\partial_1 \operatorname{Re} f = \partial_2 \operatorname{Im} f \text{ et } \partial_1 \operatorname{Im} f = -\partial_2 \operatorname{Re} f$$

Definition 10

On dit que f satisfait les équations de Cauchy-Riemann si

$$\partial_1 \operatorname{Re} f = \partial_2 \operatorname{Im} f \text{ et } \partial_1 \operatorname{Im} f = -\partial_2 \operatorname{Re} f$$

Proposition 17

f est holomorphe en $z = x_1 + ix_2 \iff f$ est dérivable au sens de \mathbb{R}^2 et satisfait les équations de Cauchy-Riemann.

Definition 11

On dit que f est holomorphe sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ si elle est C^1 (au sens de \mathbb{R}^2) et qu'elle est holomorphe en tout point de U

6.1 Analytique \Rightarrow Holomorphe

Proposition 18

Si

$$f(z) = \sum a_k (z - z_*)^k$$

avec comme rayon de convergence ρ , alors f est holomorphe sur $D(z_*, \rho)$ et f' est donnée par la série entière

$$f'(z) = \sum k a_k (z - z_*)^{k-1}$$

qui a aussi comme rayon de convergence ρ .

Preuve

La série qui donne la dérivée converge avec rayon de convergence ρ . Maintenant, ce qu'il nous faut, c'est de montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z) - hf'(z)}{h} = 0$$

Supposons $z_* = 0$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k (z+h)^k - a_k z^k}{h} - hf'(z) \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k[(z+h)^k - z^k - khz^{k-1}]}{h} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k[h[(z+h^{k-1}) + (z+h)^{k-2} + \dots + z^{k-1}]] - khz^{k-1}}{h} \end{aligned}$$

On va montrer que $\forall \epsilon > 0$, on peut rendre la queue de la serie plus petite que $\frac{\epsilon}{2}$ en allant assez loin dans la serie et qu'ensuite, pour le N fixe qui sortira, on pourra prendre h assez petit pour que les N premieres termes soient plus petits que $\frac{\epsilon}{2}$.

Notons que pour mh suffisamment petit (il existe $\delta_1 > 0$ tel que si $h \in D(0, \delta_1), z+h \in D(0, \rho)$) et du coup on aura la convergence de

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k[|z+h|^{k-1} + \dots + |z|^{k-1}] + k|z|^{k-1}]$$

vu que

$$[|z+h|^{k-1} + \dots] \leq k(|z| + |h|)^k \quad \square$$

Lecture 6: ...

Mon 11 Oct

Corollaire 19

Si f est analytique, f est infiniment derivable au sens complexe.

Preuve

f' est analytique, donc holomorphe, avec derivatee f'' , elle meme aussi analytique \square

Definition 12 (Operateurs de Wirtinger)

Pour $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, C^1 vue comme $f : S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$.

On note

$$\partial_z f = \partial f = \frac{1}{2} (\partial_x - i\partial_y)$$

et

$$\partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2} (\partial_x + i\partial_y)$$

7 Integration Complexe

But : Trouver l'operation "inverse" de la derivation complexe.

Definition 13 (Chemin)

Un chemin de a a b dans $U \subset \mathbb{C}$ est une fonction continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ C^1 par morceaux, avec derivatee bornee, avec $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$

Definition 14

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continue et $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ un chemin.

On definit

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Remarque

L'integrale complexe $\int_{\gamma} f(z)dz$ depend en general du chemin de γ mais pas de sa parametrisation.

Si $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est bijective, croissante, derivable sur $(0, 1)$ et $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ alors

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz$$

Preuve

Formule de changement de variable.

En supposant γ C^1 (pas par morceaux)

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt &= \int_0^1 f(\gamma(\phi(s)))\gamma'(\phi(s))\phi'(s)ds \\ &= \int_0^1 f(\tilde{\gamma})\tilde{\gamma}'(s)ds \end{aligned}$$

□

Definition 15 (Longueur)

Pour γ un chemin, sa longueur est donnee par

$$l(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|dt$$

Definition 16 (Lacet)

Si $\gamma(0) = \gamma(1)$, γ est un lacet.

Propriete de l'integration complexe

— Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ et $\ominus\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ est defini par $\ominus\gamma(s) = \gamma(1 - s)$

$$\int_{\ominus\gamma} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz$$

— Si $\gamma, \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U$ avec $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(0)$, alors

$$\gamma \oplus \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U$$

est defini par

$$\gamma \oplus \tilde{\gamma}(s) = \begin{cases} \gamma(2s) & \text{si } s \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{\gamma}(2s - 1) & \text{si } s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

et on a

$$\int_{\gamma \oplus \tilde{\gamma}} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz$$

— Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe

$$\int_{\gamma} f'(\zeta) d\zeta = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

Lecture 7: Integration Complexe

Thu 14 Oct

Preuve

Considerons la fonction

$$t \mapsto f'(\gamma(t))\gamma'(t)$$

est la dérivée (au sens réel) de

$$t \mapsto f(\gamma(t))$$

et on peut donc y appliquer le théorème fondamental du CDI. \square

Proposition 21 (Integration par parties)

Soient $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes et $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin, alors

$$\int_{\gamma} f'g = f(\gamma(x))g(\gamma(x))\Big|_0^1 - \int_{\gamma} fg'$$

Preuve

$$(fg)' = f'g + fg'$$

et on intègre. \square

Proposition 22

Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continue, $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$, alors

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq l(\gamma) \max_{\gamma} |f(z)|$$

Preuve

Suit de

$$\int_0^1 g(t) dt \leq \max g$$

pour les intégrales réelles. \square

8 Holomorphie et déformation de Contours

But : Savoir dans quelle mesure

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

depend de γ . L'astuce est de déformer progressivement le chemin.

Si $\gamma, \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U$ avec $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$ et $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$, on a que $\gamma \ominus \tilde{\gamma}$ est un lacet.

8.1 Integration sur un petit carre

Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est C^1 , avec $\partial Q(z, \epsilon) \subset U$.

Calculons

$$\oint_{\partial Q(z, \epsilon)} f(z) dz = \left(\int_b + \int_d + \int_g + \int_h \right) (f(z) dz)$$

On va supposer $z = 0$

$$\begin{aligned} b(t) &= -\frac{\epsilon}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\epsilon \\ d(t) &= \frac{\epsilon}{2} + i\left(t - \frac{1}{2}\right)\epsilon \\ h(t) &= \frac{i\epsilon}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\epsilon \\ g(t) &= \frac{\epsilon}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\epsilon \end{aligned}$$

Donc

$$\int_b f(z) dz = \int_0^1 f\left(\frac{\epsilon i}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\epsilon\right) \epsilon dt$$

et

$$\int_d f(z) dz = \int_0^1 f\left(\frac{\epsilon}{2} + i\left(t - \frac{1}{2}\right)\epsilon\right) \epsilon dt$$

Comme f est C^1

$$f\left(-\frac{i\epsilon}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\epsilon\right) = f(0) - \frac{\epsilon}{2} \partial_x f(0) + \left(t - \frac{1}{2}\right)\epsilon \partial_y f(0) + o(\epsilon)$$

Si on somme les 4 termes multiplie par leur facteur, on obtient $\epsilon^2(i\partial_1 f(0) - \partial_2 f(0)) + o(\epsilon^2)$.

Si on integre sur un carre de cote 1, le nombre de carres est d'ordre $\frac{1}{\epsilon^2}$, si f est holomorphe, la somme sur ces contributions tend vers 0.

8.2 Deformations

On a envie de montrer que pour une deformation locale d'un contour qui ne change pas les extremités, l'integrale de contour de f holomorphe ne change pas.

Definition 17 (Homotopie)

Un lacet γ est dit homotope a un autre lacet $\tilde{\gamma}$ s'il existe une fonction

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$$

tel que $f(\cdot, 0) = \gamma, F(\cdot, 1) = \tilde{\gamma}$

et $\forall s \in [0, 1], F(\cdot, s)$ est un lacet.

Definition 18 (Contractable)

Un lacet est contractible s'il est homotope au lacet trivial.

Definition 19

Un ouvert est dit simplement connexe si tout lacet dans U est contractible, et il est dit étoile par rapport à $z^* \in U$ si $\forall w \in U$ le segment $[z^*, w] \in U$

Lecture 8: Integration complexe suite

Mon 18 Oct

Proposition 23

U étoile $\Rightarrow U$ simplement connexe

Preuve

On prend l'homotopie de retraction $\Gamma(s, t) = sz_* + (1 - s)\gamma(t) \in U$

□

Proposition 24

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et γ un contour contractible tel que $\Gamma(s, t) = sz_* + (1 - s)\gamma(t) \in U$.

Alors $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$

Preuve

Posons $I(s) = \int_{\gamma_s} f(z)dz$.

On a

$$I(0) = \int_{\gamma} f(z)dz \quad I(1) = 0$$

Calculons $\frac{\partial}{\partial s} I(s) = \int_0^1 f((1 - s)\gamma(t) + sz_*)(1 - s)\gamma'(t)dt$.

En permutant, on trouve

$$\begin{aligned} &= - \int_0^1 f((1 - s)\gamma(t) + sz_*)\gamma'(t)dt \\ &+ (1 - s) \int_0^1 f'((1 - s)\gamma(t) + sz_*)(-\gamma(t) + z_*)\gamma'(t)dt \\ &= - \int_{\gamma} g_s(z)dz + \int_{\gamma} g'_s(z)(z_* - z)dz \\ &= - \int_{\gamma} g_s(z)dz - \int_{\gamma} g_s(z)dz = 0 \end{aligned}$$

Avec

$$g_s(z) = f((1 - s)z + sz_*)$$

et

$$g'_s(z) = f'((1 - s)z + sz_*)(1 - s)$$

□

Theorème 25

Soit f une courbe holomorphe et $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ un contour contractible dans U alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Preuve

On peut écrire $\int_{\gamma} f(z) dz$ comme

$$\sum_i \int_{\gamma_i} f(z) dz$$

ou les γ_i sont retractables. □

Corollaire 26

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\gamma, \tilde{\gamma}$ deux contours avec memes extremités homotopes.

Preuve

$\gamma \ominus \tilde{\gamma}$ est contractible. □

8.3 Existence de primitives holomorphes

On a déjà vu que $\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$ et donc pour un lacet $\int_{\gamma} f'(z) dz = 0$.

Est-ce que si $\int_{\gamma} f'(z) dz = 0$ pour tout γ , alors $f = F'$ pour F holomorphe.

Definition 20

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On dit que f a une primitive holomorphe F si $F' = f$.

Comment construire F , si elle existe ?

On aimerait prendre $z_* \in U$ et poser $F(z) = \int_{z_*}^z f(\zeta) d\zeta$, mais pour que ca soit bien défini, il faut que l'intégrale ne dépende pas du choix du chemin de z_* à z . Cela motive la définition suivante : On dit que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continue satisfait la condition de Morera si pour tout lacet $\gamma : \int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Definition 21

Si f satisfait la condition de Morera, on définit

$$\int_{z_*}^z f(\zeta) d\zeta$$

comme la valeur commune de $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$.

Theorème 27

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Alors f a une primitive holomorphe si et seulement si f satisfait la condition de Morera.

Preuve

Si f a une primitive holomorphe, alors $\int_{\gamma} F' = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0$ pour tout lacet γ .

Posons $z_* \in U$ et $F(z) = \int_{z_*}^z f(\zeta) d\zeta$, montrons que

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} \rightarrow f(z)$$

On a

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta$$

On a

$$\frac{F(z+h) - F(z) - hf(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta$$

En choisissant $\gamma(t) = z + th$, on a

$$\leq \left| \frac{F(z+h) - F(z) - hf(z)}{h} \right| \leq \frac{1}{|h|} l(\gamma) \max_{\zeta \in [z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)| \rightarrow 0$$

Corollaire 28

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe avec U simplement connexe. Alors f a une primitive holomorphe.

Preuve

Comme tout lacet γ est contractible, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ □

Remarque

On aimerait définir \log comme $\int_1^z \frac{1}{\zeta} d\zeta$ mais ce n'est pas possible sur \mathbb{C}^*

8.4 Indice d'un lacet

L'indice d'un lacet autour d'un point.

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet et soit $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Im } \gamma$, on définit l'indice $\text{Ind}(\gamma, z)$ comme

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

Proposition 30

$\text{Ind}(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$

Lecture 9: ...

Thu 21 Oct

Theorème 31

$$\text{Ind}(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$$

Preuve

Montrons que

$$\exp\left(\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}\right) = 1$$

Posons $\phi(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds\right)$

On a donc

$$\partial_t \log \phi(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$$

De meme

$$\partial_t \log(\gamma(t) - z) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$$

Donc

$$\partial_t \log\left(\frac{\phi(t)}{\gamma(t) - z}\right) = 0$$

Si γ n'est pas derivable sur un ensemble $S \subset [0, 1]$ fini, la conclusion est la meme car si $f'(t) = 0 \forall t \in [0, 1] \setminus S$ 35 S fini, f constante. \square

8.5 log et racines

Proposition 32

Soit U un domaine simplement connexe qui ne contient pas 0 et $z_* \in U$ et W_* tel que $e^{W_*} = z_*$.

Alors la fonction $L : U \rightarrow \mathbb{C}$ definie par

$$L(z) = W_* + \int_{z_*}^z \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

est telle que

$$\exp(L(z)) = z \forall z \in U$$

Preuve

En z_* , c'est bon.

On va essayer de montrer que sur un petit voisinage de W_* , $L \circ \exp = \text{Id}$.

On a

$$(L(e^z))' = \frac{1}{e^z} e^z = 1$$

Si w est dans un petit voisinage de W_* .

Donc,

$$\exp(L(\exp(w))) = \exp(w)$$

Comme \exp est bijective dans un petit voisinage de W_* , on a $\exp \circ \log = \text{Id}$.
 Dans la section suivante, on verra que holomorphe implique analytique et le principe des zeros isolés s'applique donc à la fonction $\exp \circ \log - \text{Id} = 0$ \square

Avec un \log on peut définir des racines.

Soit U simplement connexe qui ne contient pas 0, alors pour tout n , il existe n fonctions holomorphes $r_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ tel que

$$(r_n)^n(z) = z$$

Preuve

Prendre $\exp \frac{1}{n} L(z)$ \square

Proposition 33

Soit U simplement connexe et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, avec $f(z) \neq 0 \forall z$, alors il existe $L_f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe tel que

$$\exp(L_f) = f(z)$$

et soit $z_* \in U$ et l_* tel que $e^{l_*} = z_*$

Preuve

On pose

$$L_f(z) = l_* + \int_{z_*}^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$$

\square

Remarque

Cela couvre des cas où $f(U)$ pourrait ne pas être simplement connexe.

Lecture 10: ...

Mon 25 Oct

9 Formule de Cauchy

Donne les valeurs d'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un lacet en terme des valeurs sur le lacet.

Theorème 35 (Formule de Cauchy)

Soit $f : D(z, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe.

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow D(z, \rho)$ un lacet homotope dans $D(z, \rho) \setminus \{z\}$ à $\partial D(z, \epsilon)$ pour $\epsilon > 0$, orienté dans le sens trigonométrique.

Alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Corollaire 36

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et γ un lacet homotope dans $U \setminus z$ à $\partial D(z, \epsilon)$ dans $z \in U$, alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Preuve

Par hypothèse sur γ et par holomorphie de f

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z, \epsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

pour tout $\epsilon \in (0, \rho)$.

Faisons tendre $\epsilon \rightarrow 0$, on utilise

$$f(\zeta) = f(z) + f'(z)(\zeta - z) + o(\zeta - z)$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z, \epsilon)} \frac{f(z) + f'(z)(\zeta - z) + o(\zeta - z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= f(z) + f'(z) \oint 1 d\zeta + \oint o(1) d\zeta \\ &= f(z) + 0 + o(\epsilon) \end{aligned}$$

Conséquences*1. Analyticité***Théorème 37**

Soit $f : D(z_*, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, alors f est analytique, donnée par

$$f(z) = \sum a_n (z - z_*)^n$$

de rayon de convergence $\geq \rho$ avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_*)^{n+1}} d\zeta$$

Preuve

Supposons $z_* = 0$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Comme

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta^n} z^n$$

On a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D(0,\rho)} \sum \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right) z^n \end{aligned} \quad \square$$

2. Ainsi, f holomorphe implique f' holomorphe.

Theorème 38 (Morera)

Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continue satisfait $\forall \gamma$ contractible

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Alors f est analytique.

Preuve

Soit $z_* \in U$ et $\epsilon > 0$ tq $D(z_*, \epsilon) \subset U$.

Comme tout lacet est contractible dans $D(z_*, \epsilon)$, et ainsi f analytique. La condition de Morera dans $D(z, \epsilon)$ est satisfaite. \square

Lecture 11: Liouville

Thu 28 Oct

9.1 Applications de Morera

Theorème 39

Soit $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur tous les compacts de U vers $f : U \rightarrow \mathbb{C}$.

Alors f est holomorphe.

Preuve

f est continue, et pour tout $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ contractible (dans U), on a

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma} f_n(z) dz$$

car γ est compact. \square

Corollaire 40

Si $\sum f_n$ avec f_n holomorphe et pour tout compact $\sum \|f_n\|_{\infty}$ converge, alors la série converge vers une fonction holomorphe.

10 Applications de la formule de Cauchy

Theorème 41 (Inegalites de Cauchy)

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $z \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z, r) \subset U$ et soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta - z)^n$ le developpement de f en z .

Alors

$$|a_n| \leq r^{-n} \max_{\zeta \in \partial D(z, r)} |f(\zeta)|$$

Preuve

Par la formule de Cauchy, on a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \\ |a_n| &\leq \left| \frac{1}{2\pi i} \mathcal{L}(\partial D(z, r)) \right| \max_{\zeta \in \partial D(z, r)} \frac{|f(\zeta)|}{(\zeta - z)^{n+1}} \\ &= r^{-n} \max_{\zeta \in \partial D(z, r)} |f(\zeta)| \end{aligned} \quad \square$$

Theorème 42 (Formule de Parseval)

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $z \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z, r) \subset U$.

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta} + z)|^2 d\theta$$

Preuve

Supposons $z = 0$.

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \\ \overline{f}(re^{i\theta}) &= \sum_{n=0}^{\infty} r \overline{a_n} e^{-in\theta} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2(re^{i\theta}) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n,m} r^{n+m} a_n \overline{a_m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\ &= \sum r^{2n} |a_n|^2 \end{aligned} \quad \square$$

Theorème 43 (Principe du maximum)

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et $z \in U$.

Alors si $|f|$ atteint un max local en z , f est constante.

Preuve

Ecrivons $f(\zeta) = \sum a_n(\zeta - z)^n$.

Si $|f|$ a un max, alors il existe $r > 0$ tel que $\overline{D}(z, r) \subset U$ et

$$|f(z)|^2 \geq \max_{\zeta \in \partial D(z, r)} |f(\zeta)|^2$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})|^2 - |f(z)|^2 d\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} - |a_0|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq 0 \end{aligned} \quad \square$$

Donc $a_n = 0 \ \forall n \geq 1$.

Donc f constante sur $\partial D(z, r)$ et donc sur tout U .

Theorème 44 (Theoreme de Liouville)

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe.

Alors si $|f|$ est bornee, f est constante.

Preuve

Par les inegalites de Cauchy, appliquees a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,

$$|a_n| \leq \frac{1}{r} \max_{\zeta \in \partial D(z, r)} |f(\zeta)| \quad \square$$

Lecture 12: Singularites

Mon 01 Nov

Proposition 45

Soit f entiere non constante.

Alors $f(\mathbb{C})$ est dense dans \mathbb{C}

Preuve

Par l'absurde, sinon $\exists w \in \mathbb{C}, \exists \delta > 0$ tel que $\forall \zeta \in f(\mathbb{C}), |\zeta - w| \geq \delta$.

Donc $z \mapsto \frac{1}{f(z) - w}$ est bornee, donc constante, donc f est constante. \square

Theorème 46 (Theoreme de l'application ouverte)

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe non-constante, alors \forall ouvert $V \subset U, f(V)$ est un ouvert.

Preuve

Il faut montrer que l'image de tout voisinage de $z \in U$ est un voisinage de $f(z) \in V$.

Si $f'(z) \neq 0$, evident, par le theoreme de la fonction inverse.

Supposons que $z = 0$ et $f(z) = 0$, alors on peut ecrire

$$f(\zeta) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \zeta^n$$

Ce qui donne

$$f(\zeta) = \zeta^k g(\zeta), g(\zeta) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \zeta^{n-k}$$

Dans un voisinage de 0, on peut ecrire

$$f(\zeta) = \phi^k(\zeta), \text{ ou } \phi(\zeta) = \zeta (g(\zeta))^{\frac{1}{k}}$$

Maintenant $\phi'(0) \neq 0$.

Donc ϕ envoie un voisinage de 0 vers un voisinage de 0.

Maintenant $w \mapsto w^k$ envoie ce voisinage de 0 vers un autre voisinage de 0 \square

Proposition 47 (Limite de fonctions holomorphes)

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ de fonctions holomorphes qui converge uniformement sur les compacts vers $f : U \rightarrow \mathbb{C}$.

Alors f est holomorphe et de plus $\forall k \geq 1$

$$f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$$

uniformement sur les compacts.

Preuve

Montrons que pour tout $z \in U \exists \delta > 0$ tel que $f_n^{(k)}|_{\overline{D}(z, \delta)} \rightarrow f^{(k)}$.

Soit $z_* \in U$ et $\delta > 0$ tel que $\overline{D}(z_*, 2\delta) \subset U$.

Pour $z \in \overline{D}(z_*, \delta)$ on a

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \overline{D}(z_*, 2\delta)} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

on a que

$$\zeta \mapsto \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} = g_n(\zeta)$$

Converge uniformement par rapport a z quand $n \rightarrow \infty$ et aussi uniformement par rapport a ζ .

Donc

$$\oint g_n(\zeta) d\zeta$$

\square

converge uniformement quand $n \rightarrow \infty$

11 Singularites

On aimerait pouvoir considerer pour f holomorphe $\frac{1}{f}$, sans se poser la question de savoir $f \neq 0$.

Comme les 0 de f sont isoless, on devrait pouvoir donner un sens a cela.

11.1 Series de Laurent

Pour $z_* \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$ est ce qu'on appelle une serie de Laurent. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$ est appelee partie reguliere et $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_*)^n$ partie singuliere.

On dit que la serie converge si la partie reguliere converge et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^{-1} a_n(z - z_*)^n$.

Pour une serie de Laurent, son anneau de convergence

$$A(z_*, r, R) = D(z_*, R) \setminus \overline{D}(z_*, r) \text{ et } r = \frac{1}{\rho}$$

ou

$$\rho = \text{rayon de convergence de } \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$$

Proposition 48 (Formule de Cauchy sur l'anneau)

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et $z_* \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{A}(z_*, r, R) \subset U$.

Alors $\forall z \in A(z_*, r, R)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_*, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_*, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

Lecture 13: Series de Laurent

Thu 04 Nov

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe avec $U \supset \overline{A}(z_*, r, R)$, est-ce que $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$ sur $\overline{A}(z_*, r, R)$?

Oui!

Theoreme 49 (Formule de Cauchy generalisee)

Pour $z \in A(z_*, r, R)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_*, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_*, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Preuve

Comme f est holomorphe sur un voisinage de z , $\exists \delta$ tel que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z, \delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

On déforme $\partial D(z, \delta)$ dans $\overline{A}(z_*, r, R) \setminus \{z\}$ jusqu'à obtenir un contour entourant les deux bords de $\overline{A}(z_*, r, R)$.

On a donc

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_*, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_*, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \square$$

Theorème 50 (Développement en série de Laurent)

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe avec $U \supset \overline{A}(z_*, r, R)$ Alors

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_*)^n$$

sur $\overline{A}(z_*, r, R)$ ou

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z, R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_*)^{n+1}} d\zeta \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

avec convergence uniforme sur les compacts

Preuve

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta(1 - \frac{z}{\zeta})} \\ &= \frac{1}{\zeta} \sum \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n \quad \text{si } |z| < |\zeta| \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{-1}{z} \left(\frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} \right) \\ &= -\frac{1}{z} \sum \left(\frac{\zeta}{z} \right)^n \end{aligned}$$

On peut supposer $z_* = 0$ en posant $g(z) = f(z_* + z)$.

Montrons que $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$.

On a

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_{C(R)} g(\zeta) \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^n} - \oint_{C(r)} g(\zeta) \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^n} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oint \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta z^n \quad \square \end{aligned}$$

Corollaire 51

Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et $U \supset \overline{A}(z_*, r, R)$ alors

$$f = f_{int} + f_{ext}$$

Ou f_{int} est holomorphe sur $D(z, r)$ et f_{ext} est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(z, r)$

11.2 Singularites

Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe avec $U \supset A(z_*, 0, R)$, on dit que f a une singularite en z_* .

A partir des resultats ci-dessus, f est donnee par $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$ ou la serie converge sur les compacts de $A(z_*, 0, R)$.

Definition 22

Si f a une singularite en z_* , on dit qu'elle est effacable ou illusoire si $a_n = 0 \forall n \leq -1$.

On dit qu'elle est d'ordre fini $n \geq 1$ ou dotee d'un pole d'ordre $n \geq 1$ si $a_{-n} \neq 0$ et $a_k = 0 \forall k < -n$.

On dit qu'elle a une singularite essentielle si

$$\{n \leq -1 | a_n \neq 0\}$$

est infini.

Definition 23 (Valuation)

On note $v_{z_*}(f)$ la valuation de f en z_* defini comme

$$\inf \{n : a_n \neq 0\}$$

Remarque

Si on a une singularite effacable en z_* , f est bornee au voisinage de z_* (et peut etre etendue par a_0 en z_*).

Reciproquement, si f est bornee au voisinage de z_* , pour $n \leq -1$, $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_*)^{n+1}}$ est bornee au voisinage de z_* et donc $a_n = 0$

Theoreme 53 (Casorati-Weierstrass)

Soit f avec une singularite essentielle en z_* . Alors $\forall w \in \mathbb{C}, \exists (z_n)_{n \geq 0}, z_n \in U$ tel que $f(z_n) \rightarrow w$.

En d'autres termes, l'image de tout voisinage de z_* est dense dans \mathbb{C} .

Preuve

Par l'absurde, supposons qu'il existe un $w \in \mathbb{C}$ non approchable par des suites $f(z_n)$.

On aurait donc $|f(z) - w| \geq \epsilon$ pour $\epsilon > 0$ dans un voisinage de z_* .
 Mais alors $\frac{1}{f(z)-w}$ est borné au voisinage de z_* , donc elle aurait une singularité effaçable.

$$\frac{1}{f(z) - w} = \sum_{k=n}^{\infty} b_k (z - z_*)^k$$

Donc quand $z \rightarrow z_*$ $f(z - w) = O(\frac{1}{|z - z_*|^n})$, ce qui contredit l'hypothèse que c'est une singularité essentielle. \square

Lecture 14: Fonctions méromorphes

Mon 08 Nov

12 Fonctions Méromorphes

Definition 24

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert.

On dit qu'une fonction f est méromorphe sur U si c'est une fonction holomorphe $U \setminus K \rightarrow \mathbb{C}$ ou K est fait de points isolés de U et f a comme singularités aux points de K soit des singularités effaçables soit des pôles.

Lemme 54

Soient f et g deux fonctions méromorphes sur $U \subset \mathbb{C}$ non identiquement nulles alors $f + g$, fg et $\frac{f}{g}$ sont méromorphes.

Les pôles de $\frac{1}{f}$ correspondent aux zéros de f et vice-versa.

Preuve

Pour $f + g$, rien à faire.

Pour fg , rien à faire.

Pour $\frac{f}{g}$, les pôles sont soit hérités de f soit ils viennent des zéros de g .

En ces zéros, on a

$$v_{z_*}\left(\frac{f}{g}\right) = v_{z_*}(f) - v_{z_*}(g)$$

\square

Remarque

On peut montrer que l'ensemble des fonctions holomorphes sur un domaine U est un anneau intègre et que son corps des fractions est l'ensemble des fonctions méromorphes.

12.1 Zéros, pôles et dérivées logarithmique

Si f est méromorphe, f' aussi et $\frac{f'}{f}$ aussi.

Lemme 56

Les poles et zeros de f correspondent a des poles d'ordre 1 de $\frac{f'}{f}$ et le residu de $\frac{f'}{f}$ en un tel point z_* sera $v_{z_*}(f)$

Preuve

Si f a un zero d'ordre $n \geq 1$ en z_*

$$f(z) = (z - z_*)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_*)^k$$

$$f'(z) = n(z - z_*)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_*)^k \right) + (z - z_*)^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} k (z - z_*)^{k-1} \right)$$

Donc

$$\frac{f'}{f} = \frac{n}{z - z_*} + \frac{\dots}{\dots}$$

De meme, si f a un pole d'ordre n , on a

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_*)^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_{-n+k} (z - z_*)^k$$

Et on trouve

$$f'/f = \frac{-n}{z - z_*} + \frac{\dots}{\dots}$$

□

12.2 Sphere de Riemann

On va identifier $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}}$ avec la sphere $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ par projection stereographique en identifiant \mathbb{C} avec le plan $\{(u, v, -1), u, v \in \mathbb{R}\}$ par la fonction

$$(x, y, z) \mapsto \frac{x + iy}{1 - z} \text{ et } (0, 0, +1) \mapsto \infty$$

$\hat{\mathbb{C}}$ est muni de la topologie induite

Proposition 57

Soit f une fonction meromorphe sur U , alors f s'etend en une fonction continue $U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$

Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est telle que $kU \supset \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, r)$ pour $r \geq 0$ on dit qu'elle est definie au voisinage de l'infini si $f(\frac{1}{w})$ est definie au voisinage de 0 et on parlera de singularites effacables, de poles ou de singularites essentielles selon le pole de $f(\frac{1}{w})$

13 Theoreme des residus

Theorème 58 (Theoreme des Residus)

Soit U simplement connexe, $F \subset U$ fini, $f : U \setminus F \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ un lacet. Alors

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{z_* \in K} \text{res}_{z_*}(f) \text{Ind}_{z_*}(\gamma)$$

Lecture 15: Residus

Thu 11 Nov

Lemme 59

Le residu de f en $z_* \in U$ est l'unique $A \in \mathbb{C}$ tel que

$$z \mapsto f(z) - \frac{A}{z - z_*}$$

ait localement une primitive autour de z_*

Preuve

Si on prend $A = \text{res}_{z_*}(f)$, alors $z \mapsto f(z) - \frac{A}{z - z_*}$ a comme developpement en serie de Laurent

$$\sum_{k=-\infty}^{-2} a_k (z - z_*)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_*)^k$$

qui a comme primitive

$$\sum_{k=-\infty, k \neq -1}^{\infty} \frac{a_k (z - z_*)^{k+1}}{k+1}$$

□

Comme $\frac{1}{z - z_*}$ n'a pas de primitive autour de z_* , ce A est l'unique qui convient.

Theoreme des Residus**Preuve**

Posons $g : U \setminus F \rightarrow \mathbb{C}$

$$g(z) = f(z) - \sum \text{res}_{z_*}(f) \frac{1}{z - z_*}$$

Par construction g a localement une primitive autour de chaque $z_* \in U$.

On peut donc deformar γ au travers de chaque point de F sans changer l'integrale.

Donc

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint \sum_{z_* \in F} \frac{\text{res}_{z_*}(f)}{z - z_*} dz = \sum_{z_* \in F} \text{res}_{z_*}(f) 2\pi \text{ind}_{z_*}(f)$$

□

Corollaire 60

Si $\gamma = \partial\Omega$ ou Ω est simplement connexe

$$\oint_{\partial\Omega} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_* \in F \cap \Omega} \text{res}_{z_*}(f)$$

Corollaire 61

Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, U simplement connexe et $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ un lacet, alors $\forall z \in U \setminus \gamma([0, 1])$

$$f(z) \text{ind}_z(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Corollaire 62 (Comptage des zeros)

Soit f une fonction meromorphe sur U et $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ un contour qui ne touche ni les zeros ni les poles de f .

Alors

$$\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{z_* \in \text{Zeros et poles de } f} v_{z_*}(f) \text{Ind}_{z_*}(f)$$

13.1 Calcul des residus**Exemple**

Si $f(z) = \frac{\text{res}_{z_*}(f)}{z - z_*} + \text{partie reg}(z)$.

On regarde $z \mapsto (z - z_*)f(z)$ et on prend la limite $z \rightarrow z_*$

De maniere generale :

Lemme 64

Si f a un pole d'ordre n en z_*

$$\text{res}_{z_*}(f) = \lim_{z \rightarrow z_*} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_*)^n f(z) \right) \frac{1}{(n-1)!}$$

Lecture 16: Applications du theoreme des residus

Mon 15 Nov

13.2 2 classes d'integrales souvent calculables par des residus

— Transformee de Fourier :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

— Integrales de la forme

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sin(x), \cos(x)) dx$$

Motivation de la transformee de Fourier

Il y a un theoreme qui dit que si f est raisonnable

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi$$

Comment calculer une transformee de Fourier

Idee : Calculer pour un lacet demi-cercle de rayon R .

Avec un peu de chance, la partie $[-R, R]$ quand $R \rightarrow \infty$ devrait nous donner $\int_{-\infty}^{\infty} \dots$ et avec un peu de chance l'integrale sur le demi-cercle $\rightarrow 0$.

Proposition 65

Si f meromorphe sur \mathbb{C} avec un nombre fini de poles et $f(z) = O(\frac{1}{z})$ quand $|z| \rightarrow \infty$, alors pour $\xi > 0$, alors

$$\hat{f}(\xi) = i \sum_{z_* \in \text{poles inferieur}} \text{res}_{z_*}(e^{-i\xi z} f(z))$$

et on somme sur les singularites du plan inferieur si $\xi < 0$

Remarque

Si $f(z) = o(\frac{1}{z})$ marche aussi pour $\xi = 0$

Proposition 67

Si on souhaite integrer $\int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$, on a

$$\int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{z \in D(0,1), \text{ poles}} \text{res}_{z_*}(f)$$

ou $f(z) = R(\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}))$