Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-05-31 au 2021-06-04

Série 27 du mercredi 2 juin 2021

Exercice 1.

Trouvez toutes les fonctions w telles que

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad tw''(t) - w'(t) + (1-t)w(t) = 0. \tag{1}$$

Détaillez votre raisonnement.

Indication. La fonction exponentielle est une solution de (1).

Exercice 2.

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et a, $b \in \mathrm{C}^0(I)$. Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\forall t \in I, \quad u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = 0. \tag{2}$$

Soient u_1, u_2 deux solutions linéairement indépendantes de (2).

1) Montrer que les zéros de u_1 sont distincts des zéros de u_2.
2) Justifier que les ensembles des zéros de u_1 et de u_2 sont discrets.
3) Prouver qu'entre deux zéros consécutifs de u_1 existe exactement un zéro de u_2, et vice-versa.

Exercice 3.

Soient α, $\omega \in \mathbb{R}$. Trouver la solution générale de l'équation différentielle du 2^{nd} ordre suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + 2y'(t) + \alpha y(t) = \cos(\omega t). \tag{3}$$

Exercice 4.

Soit $f \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\exists M \in]0, +\infty[, \, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant M|x|. \tag{4}$$

Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $u \in \mathrm{C}^1([a, b[)$ telle que

$$\forall t \in [a, b[, \quad u'(t) = f(u(t)). \tag{5}$$

Montrer soigneusement l'existence de $\lim_{b^-} u$.

Indication. Le lemme de Grönwall peut être utile (cf. série 26, exercice 3). Montrer que u est uniformément continue sur $[a, b[$.