Fluides et Electromagnetisme

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Introduction

Tue 23 Feb

1 Notations du cours et maths necessaires

1.1 Scalaires et Vecteurs

On distingue les quantites scalaires (pression, masse, la charge electrique) et les quantites vectorielles (vitesse, force) .
Dans un repere 3D, les vecteurs de base unitaires e_x, e_y, e_z
On definit un champ scalaire(resp. vectoriel) par une fonction $p(\overrightarrow{r}, t)$ qui depend de la position et du temps.

1.2 L'operateur ∇ (nabla) et la definition du gradient, de la divergence et du rotationnel

En coordonnes cartesiennes, on a

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

On note

$$\frac{\partial p}{\partial x}(\overrightarrow{r}, t) = \lim_{h \to 0} \frac{p(x+h, y, z, t) - p(x, y, z, t)}{h}$$

— Le gradient, note ∇f d'un champ scalaire $f(\overrightarrow{r}, t)$ est un champ vectoriel donne par

$$\nabla f(\overrightarrow{r}, t) = e_x \frac{\partial f}{\partial x} + e_y \frac{\partial f}{\partial y} + e_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

— La divergence, notee $\nabla \cdot \overrightarrow{u}$ d'un champ vectoriel $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}, t)$ est un champ scalaire donne par

$$\nabla \cdot \overrightarrow{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

— Le rotationnel $\nabla \times \overrightarrow{u}$ d'un champ vectoriel est un champ vectoriel donne par

$$\nabla \times \overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}, t) = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \times (u_x, u_y, u_z)$$

Remarque
On peut utiliser ∇ comme un vecteur, mais il faut faire attention a ce que les operations sont pas commutatives.

Remarque
Souvent, on ecrit ∂_x pour $\frac{\partial}{\partial x}$

Remarque
Les expressions du gradient, divergence, rotationel sont independantes du systeme de coordonnees

1.3 Formules d'integration

Theorème 4 (Theoreme du gradient)
Soit un volume V quelconque dans l'espace et soit S la surface fermee limitant le volume V (on note $S = \partial V$).
A chaque element de la surface, on assimile un vecteur orthogonal a la surface en ce point. On le note $d\overrightarrow{S}$ et il represente le "petit element" de surface.
Alors on a

$$\int\int_S f d\overrightarrow{S} = \int\int\int_V \nabla f dV$$

Theorème 5 (Theoreme de La divergence(de Gauss))
Le flux d'un champ vectoriel $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}, t)$ au travers d'une surface S :

$$\phi = \int\int_S \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Soit une surface fermee $S = \partial V$ et $d\overrightarrow{S}$ qui point vers l'exterieur de V, alors on a

$$\int\int_S \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{S} = \int\int\int_V (\nabla \cdot \overrightarrow{A}) dV$$

Theorème 6 (Theoreme de Stokes)
On definit la circulation d'un champ vectoriel $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}, t)$ le long d'une courbe fermee Γ :

$$\Sigma = \oint_\Gamma \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{l}$$

Dans ce cas la, on a

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{dl} = \int\int_S (\nabla \times \overrightarrow{A}) \cdot \overrightarrow{dS}$$

L'orientation relative de $\overrightarrow{dl}$ et $\overrightarrow{dS}$ est donnee par la regle de la main droite.

2 Fluides au repos

2.1 Introduction

On appelle un fluide un corps qui est a l'etat liquide, gazeux, ou plasma, systeme d'un grand nombre de particules qui est susceptible de s'ecouler facilement.
Autrement dit, un corps deformable/qui n'a pas de forme propre.

Pour beaucoup d'applications : un fluide est decrit par sa densite de masse $\rho(\overrightarrow{r}, t)$, la pression ($p(\overrightarrow{r}, t)$) et la vitesse $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}, t)$
Dans ce chapitre, on suppose $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}, t) = 0$,$\rho(\overrightarrow{r}, t) = \rho(\overrightarrow{r})$ et $p(\overrightarrow{r}, t) = p(\overrightarrow{r})$

2.2 Densite de fluide

Supposons un recipient avec un fluide dedans et un systeme de coordonnees. On note

$$\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

pour la densite moyenne.
On prend ensuite la limite $\Delta V \to dV$ et on obtient ainsi

$$\rho(\overrightarrow{r}, t) = \lim_{\Delta V \to dV} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Lecture 2: Pression dans un fluide

Fri 26 Feb

3 Pression dans un fluide

La pression dans un fluide est definie par la force par unite de surface exercee par le fluide sur une paroi ou sur une autre partie du fluide. Cette force sera perpendiculaire a la surface. On note

$$\overrightarrow{dF} \left[\frac{N}{m^2} = \text{ Pascal } = \text{ Pa} \right] = p\overrightarrow{dS}$$

La pression est donnee par un champ scalaire.
L'isotropie de la pression suit naturellement dans le cas ou il n'y a pas de forces de cisaillement(= forces tangentielles a la surface)

3.1 Pression hydrostatique

On veut determiner $p(\overrightarrow{r})$ pour un fluide au repos.
On supposera un fluide incompressible (la densite est constante).
On considere un recipient contenant un fluide et un pave droit de dimension dy, dx et $z_2 - z_1$.
On utilise

$$\sum_i \overrightarrow{F}_i = 0$$

selon z.
On a donc une force F_1 s'appliquant en haut et F_2 s'appliquant en bas et finalement F_g, on a donc

$$F_1 + F_g - F_2 = 0$$

$$p(z_1)dxdy + \rho dxdy(z_2 - z_1)g - p(z_2)dxdy = 0$$
$$p(z_2) = p(z_1) + \rho g(z_2 - z_1)$$

pour z_1 et $z_2 = h$, on trouve

$$p(h) = p(0) + \rho gh = p_0 + \rho gh$$

Ainsi, la variation d'un fluide au repos ne depend que de la profondeur, mais est independante de la forme du fluide et ne varie pas perpendiculairement a la pesanteur.

Lecture 3: Hydrostatique

Tue 02 Mar

3.2 Densite de force associee a la pression

Calculons la force exercee sur un volume de fluide infinitesimal du a la pression.
On suppose qu'on connait $p(\overrightarrow{r})$.

$$\overrightarrow{F}_1 = p(\overrightarrow{r}(-\frac{dx}{2}, 0, 0))dydz\overrightarrow{e}_x$$

Donj

$$\sum_{i=1}^{6} \overrightarrow{F}_i = (-p(\frac{dx}{2}, 0, 0) - p(-\frac{dx}{2}, 0, 0)/dx)dxdydz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV\overrightarrow{e}_x + \ldots = -\nabla p dV$$

donc la densite de force associee a la pression est $-\nabla p$.

3.3 Poussee d'Archimede

Tout corps plonge dans un fluide recoit de la part de celui-ci une poussee verticale egale au poids du fluide deplace

3.4 Tension superficielle

Experience :
On a des tubes de largeurs differentes, ouverts en haut et plonge dans l'eau.
On note que le niveau d'eau monte a un niveau de $h\alpha\frac{1}{r}$
Semble etre une contradiction de la pression hydrostatique.
On verra que ce phenomene est du a la tension superficielle. La loi $p(h) = p_0 + \rho gh$ reste valable dans le fluide, mais pas necessairement a la surface.

3.4.1 Origine et definition de la tension superficielle

On considere a nouveau un fluide, il est constitue de particules ayant des interactions entre elles (inter moleculaires, etc)

Il y a moins de telles liaisons pour une molecule a la surface du fluide. Pour amener cette molecule la-bas et pour augmenter la surface, il faut faire un travail.
Experience :
Soit un film de liquide (eau savonneuse) tendu dans un cadre ABCD.
Si on tend le cadre, il ya une force qui s'y oppose.
Le travail est donc proportionel au changement de surface

$$\Delta W = \gamma \Delta S = \gamma BC \Delta k \cdot 2$$

Le 2 apparait parce que il y a 2 surfaces (liquide/gaz)
Donc on a

$$F = 2F_\gamma = 2BC\gamma$$

L'interface liquide/gaz est un peu comme une membrane elastique, mais la force est independante de la deformation.
Experience
Mesure de γ On plonge un cylindre attache a un newton metre dans le liquide. On mesure la force necessaire pour faire apparaitre un film lie au cylindre et on prend la difference entre cette force et la force F_G.

3.4.2 Quelques consequences immediates de la tension superficielle

Les bulles de savon minimisent leur surface et c'est pour cela qu'elles sont spheriques.
Meme chose pour les bulles d'eau en apesanteur.
Meme chose pour les cheveux mouilles qui collent.
Certains objets (trombone, punaises) ou des insectes qui flottent (qui marchent sur la surface)

Lecture 4: Interfaces solide/liquide

Fri 05 Mar

3.5 Interface solide/liquide/gaz

On considere une goutte sur une surface.
En equilibre la somme des forces sur la ligne tripe est nulle.
Selon l'axe horizontal, on trouve

$$\gamma_{sg} = \gamma_{sl} + \cos\theta \gamma_{lg}$$

Cette propriete s'appelle la loi de Young. Si $0 < \theta < 90$, on a un bon mouillage.
Si $\gamma_{sg} - \gamma_{sl} > \gamma_{lg}$, on a $\cos\theta > 1$, cette situation est non-stationnaire. On parle alors de mouillage total.
Si $-\gamma_{lg} < \gamma_{sg} - \gamma_{sl} < 0$, alors $-1 < \cos\theta < 0$ et donc $90 < \theta < 180$, $\Rightarrow$ mauvais mouillage.

Si $\gamma_{sq} - \gamma_{sl} < -\gamma_{lg}$, alors $\cos\theta < -1$, on parle alors de super-hydrophobie ou effet lotus.

3.6 Loi de laplace

Notons qu'a l'interieur d'un ballon, il y a une surpression.
Et a l'interieur d'une goutte d'eau, d'une bulle de savon, ... ?
On suppose une goutte de liquide spherique en apesanteur. Les forces s'appliquant sur la goutte donnent

$$\sum F_i^{ext} = 0 = \vec{F}_{p_2} + \underbrace{\vec{F}_{p_1}}_{=\pi R^2 p_1 \vec{e}_z} + \underbrace{\vec{F}_\gamma}_{=-2\pi R\gamma \vec{e}_z}$$

Pour $\vec{F}_{p_2}$, on a

$$\vec{F}_{p_2} = \int\int -p_2 \vec{dS} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -p_2 \vec{e}_r R^2 \sin\theta d\theta d\phi = \vec{e}_z \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -p_2 R^2 \sin\theta\cos\theta d\theta d\phi = -\pi R^2 p_2 \vec{e}_z$$

Donc

$$\sum F^{ext} = -2\pi R\gamma \vec{e}_z + \pi R^2 p_1 \vec{e}_z$$

Et donc

$$p_1 - p_2 = \frac{2\gamma}{R}$$

Lecture 5: Hydrostatique continuation

Tue 09 Mar

Exemple (Bulle de Savon-deux interfaces)

On note p_1 la pression interne, p_2 la pression externe et p_0 la pression dans l'interface, on a donc

$$p_0 = p_2 + \frac{2\gamma}{R_e} \text{ et } p_1 = p_0 + \frac{2\gamma}{R_i}$$

$$p_1 = p_2 + \frac{2\gamma}{R_i} + \frac{2\gamma}{R_e}$$

comme $R_i = R_e = R$, $p_1 = p_2 + \frac{4\gamma}{R}$

Exemple (Capilarite)

On considere $h >> l$ et que l'interface liquide/gaz est quasiment spherique.
On a $p_1 = p_2 + 2\frac{\gamma}{R}$ et $p_3 = p_2 + \rho g h$.

$$p_1 = p_3 = p_{atm}$$

On trouve que $\frac{2\gamma}{R} = \rho g h$ et donc

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g R} = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r} = \alpha\frac{1}{r}$$

4 Dynamique des fluides

On considere des fluides decris par

$$\rho(\overrightarrow{r}, t), p(\overrightarrow{r}, t), \overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}, t)$$

Vitesse d'un element fluide infinitesimal(vitesse moyenne de toutes les particules dans cet element) .

4.1 Types d'ecoulement

- $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}, t) = 0$, ecoulement statique
- $\partial_t \overrightarrow{u} = 0, \partial_t \rho = 0, \partial_t p = 0$, ecoulement stationnaire
- Ecoulement laminaire "couches successive de fluide se deplacent doucement et regulierement l'un a cote de l'autre. (a basse vitesse)
- Ecoulement turbulent s i non-laminaire.
  Mouvement irregulier et chaotique. (typiquement a haute vitesse d'ecoulement)

4.2 Derivee convective

Attention

$\partial_t \overrightarrow{u} =$ variation de $\overrightarrow{u}$ par unite de temps a un endroit fixe $\neq$ acceleration de l'element fluide a $(\overrightarrow{r}, t)$

On considere la trajectoire d'un element fluide au cours du temps.
On veut connaitre la variation temporelle de p au long de la trajectoire.

au temps t :, $p(\overrightarrow{r}, t)$
au temps $t + dt$: position $\overrightarrow{r} + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}, t)dt$, pression $p(\overrightarrow{r} + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}, t)dt, t + dt)$

$$\begin{aligned}
&= p(x + u_x dt, y + u_y dt, z + u_z dt, t + dt) \\
&= p(x, y, z, t) + \partial_x p u_x dt + \partial_y p u_y dt + \partial_z p u_z dt + \partial_t p dt \\
&= p(\overrightarrow{r}, t) + (\overrightarrow{u} \cdot \nabla) p dt + \partial_t p dt
\end{aligned}$$

On appelle $(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \nabla)p := \frac{D}{Dt}p$
De meme, la variation temporelle de $\overrightarrow{u}$ le long de la trajectoire (= l'acceleration)

$$\overrightarrow{a} = \frac{D\overrightarrow{u}}{Dt}$$

4.3 Equations fluides

Pour determiner l'evolution des cinq fonctions $\rho, p, \overrightarrow{u}$ il faut 5 equations.

4.3.1 Equations de continuite(description Eulerienne)

Principe de conservation de masse en absence de sources/pertes. On considere un volume V fixe dans notre liquide, il definit une surface S fermee.

$$\text{variation de masse dans } V = \text{ Flux de masse a travers } S$$

On a

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_V \rho(\overrightarrow{r},t)dV = -\int\int_S \rho(\overrightarrow{r},t)\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r},t)d\overrightarrow{S}$$

Lecture 6: Equations de continuite

Fri 12 Mar

On a trouve que

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_V \rho(\overrightarrow{r},t)dV = \int\int\int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho(\overrightarrow{r},t)$$

Pour la partie de droite, on a

$$-\int\int_S \rho(\overrightarrow{r},t)\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r},t)\overrightarrow{dS} = -\int\int\int_V \nabla(\rho\overrightarrow{u})dV$$

Donc

$$\int\int\int_V \frac{\partial}{\partial t} + \nabla(\rho\overrightarrow{u}dV) = 0$$

Pour tout volume V

Et donc

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{u}) = 0$$

4.4 Equation d'Euler

On fait un bilan de la quantite de mouvement. On considere un fluide parfait (pas de frottement interne).
La quantite de mouvement dans $V(t)$, on a

$$\overrightarrow{p} = \int\int\int_{V(t)} \rho\overrightarrow{u}dV$$

Seconde loi de newton :

$$\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \sum \text{ forces externes sur la partie du fluide contenue dans } V(t)$$

On va montrer que

$$\frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = \int\int\int_{V(t)} \frac{D}{Dt}(\rho\overrightarrow{u}) + \rho\overrightarrow{u}(\nabla\cdot\overrightarrow{u})dV$$

$$= \int\int\int_{V(t)} \rho\overrightarrow{g}dV - \int\int_{S(t)} p\overrightarrow{dS}$$

$$= \int\int\int_{V(t)} \rho \overrightarrow{g} dV - \int\int\int_{V(t)} \nabla p dV$$

Donc

$$\frac{D}{Dt}(\rho \overrightarrow{u}) + \rho \overrightarrow{u}(\nabla \cdot \overrightarrow{u}) = \rho \overrightarrow{g} - \nabla p$$

$$\begin{aligned} &\rho \frac{D}{Dt}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}\frac{D}{Dt}\rho + \rho \overrightarrow{u}(\nabla \cdot \overrightarrow{u}) \\ &= \rho \frac{D}{Dt}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}(\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \overrightarrow{u})) \end{aligned}$$

Le dernier terme est nul par l'equation de continuite, et on trouve

$$\rho \frac{\overrightarrow{Du}}{Dt} = \rho \overrightarrow{g} - \nabla p$$

Remarque

En general, les fluides ont de la viscosite.
De plus, tout comme l'equation de continuite, l'equation d'Euler est non-lineaire, la solution a l'equation differentielle est generalement extremement complique.

4.5 Equation d'etat

equations :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{u}) = 0$$

$$\rho \frac{D\overrightarrow{u}}{Dt} = \rho \overrightarrow{g} - \nabla p$$

Il nous manque encore une equation pour decrire un fluide en mouvement : l'equation d'etat, qui depend du type de fluide.

$$\frac{D}{Dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0$$

ou γ est l'indice d'adiabicite.

Lecture 7: Theoreme de Bernoulli

Tue 16 Mar

4.6 Theoreme de Bernoulli

On considere un ecoulement laminaire au travers d'un tube

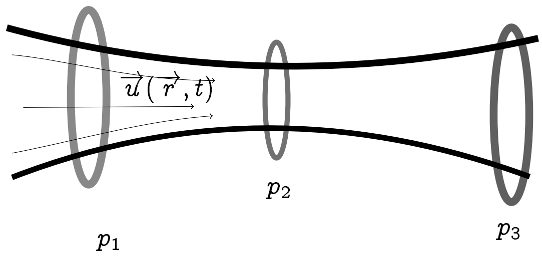

FIGURE 1 – tube 2

On s'interesse a la pression au travers du tube.
On remarque que la pression a diminue dans la partie etroite du tube si $\overrightarrow{u} \neq 0$.
On explique ce phenome par la theoreme de Bernoulli.
On considere un fluide parfait(pas de viscosite), on considere aussi qu'il est incompressible, et qu'il est en ecoulement stationnaire (toutes les derivees partielles sont egales a 0), dans un champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ constant.

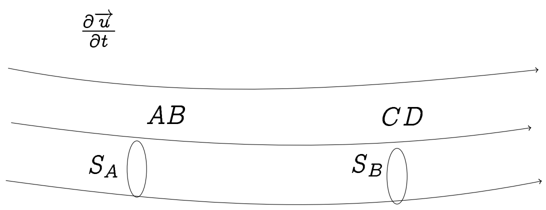

FIGURE 2 – tube de courant

On considere un tube de courant dans ce fluide et on le suit.
A $t = t_0$: on a une section $ABCD$, en $t = t_0 + \Delta t$: $A'B'C'D'$. On choisint S_A et Δt tres petit, donc la distance entre AB et $A'B' \approxeq \overrightarrow{u}_A \Delta t$.

On utilise maintenant que

$$\text{Masse de } ABCD = \text{ Masse de } A'B'C'D',$$

$$m_{A'B'C'D'} = m_{ABCD} - S_A u_A \Delta t \rho + S_C u_c \Delta t \rho$$
$$S_A u_A \Delta t \rho = S_C u_c \Delta t \rho$$

Donc si la section diminue, la vitesse augmente. On definit

$$V_{ABA'B'} = S_A u_A \Delta t = V_{CDC'D'} =: \Delta V$$

Vu qu'on considere un fluide parfait, pour notre tube de courant, on a

$$\Delta E_{cin} + \Delta E_{pot} = \Delta W$$

Le changement d'energie cinetique est donne par

$$\Delta E_{cin} = \frac{1}{2}\rho u_c^2 \Delta V - \frac{1}{2}\rho u_A^2 \Delta V$$

Et pour l'energie potentielle

$$\Delta E_{pot} = \rho \Delta V g z_z - \rho \Delta V z_A g$$

Le travail ΔW est du au travail des forces de pression ($\Delta W = \overrightarrow{F} \cdot \Delta \overrightarrow{x}$)

Donc

$$\Delta W = p_A S_A u_A \Delta t - p_C S_C u_C \Delta t$$

Donc

$$\Delta W = (p_A - p_C)\Delta V$$

Donc

$$\frac{1}{2}\rho u_C^2 - \frac{1}{2}\rho u_A^2 + \rho g z_c - \rho g z_A = p_A - p_C$$

Et donc

Theorème 10 (Theoreme de Bernoulli)

$$\frac{1}{2}\rho u_A^2 + \rho g z_A + p_A = \frac{1}{2}\rho u_C^2 + \rho g z_c + p_c$$

Ce qui implique que $\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z + p$ est constant le long d'une ligne de courant.

4.7 Applications de Bernoulli

La difference de pression entre le point 1 et 2 permet de mesure la vitesse.

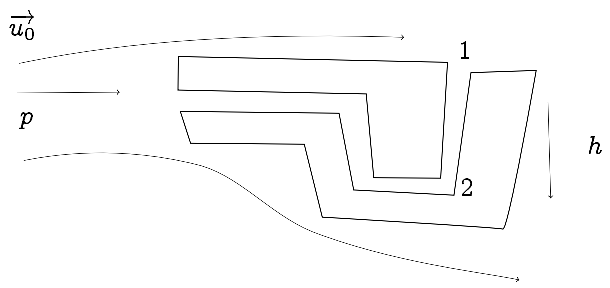

FIGURE 3 – Tube de Pitot

Lecture 8: Ecoulement d'un fluide visqueux

Fri 19 Mar

4.8 Ecoulement d'un fluide visqueux

On se restreins au cas des fluides incompressibles.

4.8.1 Definition de la viscosite

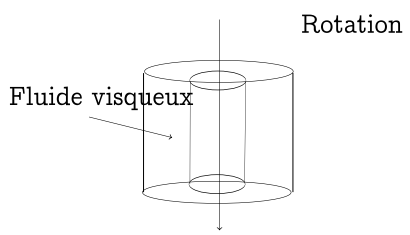

FIGURE 4 – viscosimetre

Exemple (Viscosimetre de Couette)
Observation :

Pour la meme frequence angulaire, le moment de force necessaire pour faire tourne le cylindre depend du type de fluide.

Imaginons l'experience suivante ("Ecoulement de Couette"), on a

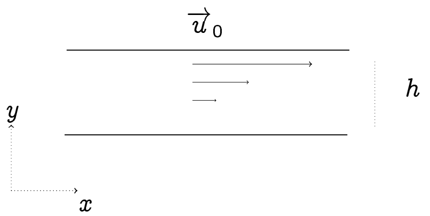

FIGURE 5 – ecoulement de couette

Il nous faut une force externe (force de cisaillement), on remarque que

$$F_{ext} \propto S\frac{u_0}{h}$$

On definit η par

$$F_{ext} = \eta S\frac{u_0}{h}$$

η s'appelle le coefficient de viscosite dynamique ($[\eta] = \frac{N}{m^2}s = Pa \cdot s$).
On a

$$F_{ext} = \eta S\frac{u_0}{h} = \eta S\frac{\partial u}{\partial y}$$

Les fluides qui obeissent cette loi s'appellent les fluides Newtoniens.

4.8.2 Force de viscosite par unite de volume et equation de Navier-Stokes incompressible

Supposons $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}, t) = u_x(y)\overrightarrow{e}_x$

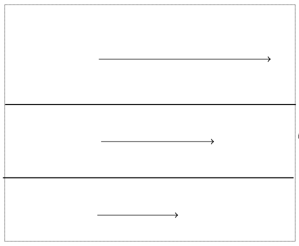

FIGURE 6 – viscosite par volume

La force de viscosite sur un elelement

$$\begin{aligned} F_{visc} &= -\eta S \frac{\partial u_x}{\partial y}(y) e_x + \eta S \frac{\partial u_x}{\partial y}(y+dy) e_x \\ &= \eta S dy \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}(y+dy) - \frac{\partial u_x}{\partial y}}{dy} e_x \\ &= dV \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} e_x \end{aligned}$$

Et donc le terme

$$\eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

est la force par unite de volume.
Dans le cas general, pour un fluide incompressible (sans preuve) est donne par

$$\eta (\frac{del^2}{\partial x^2} + \frac{del^2}{\partial y^2} + \frac{del^2}{\partial z^2}) \overrightarrow{u} = \eta \Delta \overrightarrow{u}$$

Les equations pour un fluide incompressible et visqueux sont donc :

$$\rho = \text{ const}$$
$$\nabla \cdot \overrightarrow{u} = 0$$
$$\rho \frac{D\overrightarrow{u}}{Dt} = \rho \overrightarrow{g} - \nabla p + \eta \Delta \overrightarrow{u} \rightarrow \text{ Navier-Stokes incompressible}$$

Les conditions de bords sont donnees par

$$\overrightarrow{u} = 0$$

a l'interface avec des parois immobile.

4.8.3 Resolution Navier-Stokes avec l'ecoulement de Poiseuille

Ecoulement laminaire dans un tube

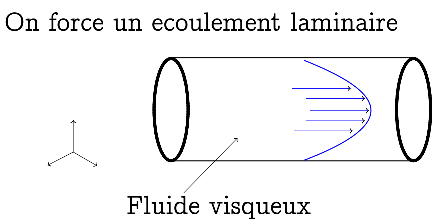

Figure 7 – glicerine dans un tube

Dans un cas plus simple

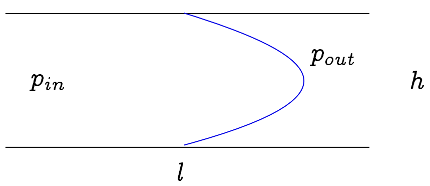

Figure 8 – ecoulement plaques

On suppose ρ constant, on neglige la pesanteur et on pose

$$\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{u}_x(y)\overrightarrow{e}_x$$

Lecture 9: Resolution Ecoulement de Poiseuille

Tue 23 Mar

Verifions que l'equation de continuite est satisfaite.

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Ceci est clair par hypothese.
De manierege generale

$$\rho \frac{D\overrightarrow{u}}{Dt} = \rho\overrightarrow{g} - \nabla p + eta\Delta\overrightarrow{u}$$

$$\frac{D\overrightarrow{u}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_x(y)\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u_x(y) \\ 0 \\ 0 \uparrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $0 = -\nabla p + \eta\Delta\overrightarrow{u}$, et donc selon y.

$$0 = \frac{-\partial p}{\partial y} \Rightarrow p = f(x,z)$$

de meme selon z, et donc la pression depend seulement de x.
Ainsi

$$0 = \underbrace{\frac{-\partial p}{\partial x}}_{\text{depend de } x} + \underbrace{\eta\frac{\partial^2}{\partial y^2}u_x(y)}_{\text{une fonction de } y}$$

Donc $p(x) = f(x) = -c_1 x + c_2$
Donc

$$p = p_{in} - \frac{p_{in} - p_{out}}{l}x = p_in - \frac{\Delta P}{l}x$$

Determinons $u_x(y)$

$$\eta\frac{\partial^2}{\partial y^2}u_x = \frac{\partial p}{\partial x} = -c_1$$

Et donc

$$u_x = -\frac{c_1}{2\eta}y^2 + ay + b$$

Les conditions de bord donnent

$$u(-\frac{h}{2}) = -\frac{c_1}{2\eta}\frac{h^2}{4} - a\frac{h}{2} + b = 0$$

$$u(-\frac{h}{2}) = -\frac{c_1}{2\eta}\frac{h^2}{4} + a\frac{h}{2} + b = 0$$

Donc

$$u_x(y) = \frac{c_1}{2\eta}(\frac{h^2}{4} - y^2) = \frac{\Delta p}{2\eta l}(\frac{h^2}{4} - y^2)$$

Calculons le debit volumique D de l'ecoulement

$$D = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy \int_0^{s_z} dz u_x(y)$$
$$= \frac{\Delta p s_z h^3}{12\eta l}$$

5 Phenomenes Ondulatoires

5.1 Onde transverse et longitudinale et l'equation d'onde

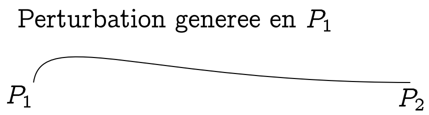

FIGURE 9 – corde suspendue

Exemple (Corde tendue avec extremites fixees)

La perturbation se fait presque sans perturbation.
On definit la perturbation par $y_0(x,t)$.
En $t = 0$, on a $y_0(x,0) = f(x)$.

Si la propagation se deplace juste, on a

$$y_0(x,t) = f(x - ct)$$

Si le maximum de $f(x)$ se trouve en x_0, le maximum de $f(x - ct)$ se trouve en $x = x_0 + ct$.
c s'appelle la vitesse de propagation de l'onde.
Description mathematique pour des petites perturbations : On va montrer que

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2}$$

Etant donne que c'est une equation differentierlle lineaire, si f et g sont une solution, alors $f + g$ le sont aussi.

5.2 Ondes sinusoidales

Cas particulier des ondes sont les ondes de la forme

$$y_0(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi)$$

5.3 Ondes stationnaires

Notons que

$$A\cos(\omega t - kx + \phi)$$

ne respecte pas les conditions de bord.
Comme les ondes sont reflechies, on cherche une solution de la forme

$$y_0(x,t) = \tilde{A}_1 e^{i(\omega t - kx)} + \tilde{A}_2 e^{i(\omega t + kx)}$$

Lecture 10: Ondes Stationnaires

Fri 26 Mar

Une onde stationnaire est de la forme

$$y_0(x,t) = d\sin(\frac{\pi n}{l}x)\cos(\frac{\pi c}{n}t + \phi)$$

la frequence est donnee par

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{cn}{2\lambda}$$

Ici, c est la vitesse de l'onde ($c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$) Le mouvement arbitraire de la corde est une somme infine des modes normaux

5.4 Ondes en $3D$

En 3 dimensions, l'equation d'onde devient

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} = c^2 \Delta y_0$$

Les ondes sinusoidales deviennent des ondes sinusoidales planes

$$y_0 * (\overrightarrow{r}, t) = Ae^{i(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r})}$$

ou $\overrightarrow{k}$ est le vecteur d'ondes.
Une surface equiphase est definie par

$$\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r} = \text{ const}$$

On peut choisir $e_x || \overrightarrow{k}$ et alors on a

$$\omega t - \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \omega t - kx$$

Et donc

$$x = \frac{\omega}{k}t - \frac{\phi_0}{k}$$

Donc les surfaces equiphases sont des plans et donc l'onde (et les surfaces equiphases) se deplacent selon $\overrightarrow{k}$, avec la vitesse $\frac{\omega}{k} = c$

5.5 Quelques consequences du principe de superposition

Superposition de deux ondes de frequence $\omega + \Delta\omega$ et $\omega - \Delta\omega$, de vecteurs d'onde $k + \Delta k$ et $k - \Delta k$ et de dephasage ϕ_1 et ϕ_2, de meme amplitude.

$$y_0 = Ae^{i(\omega+\Delta\omega)t-(k+\Delta k)x+\phi_1} + Ae^{i(\omega-\Delta\omega)t-(k-\Delta k)x+\phi_2}$$

Alors on a

$$Ae^{i(\omega t-kx)}(e^{i(\phi_1-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}+\Delta\omega t-\Delta kx)} + e^{i(\phi_2-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}-\Delta\omega t+\Delta kx)})$$

$$= 2Ae^{i(\omega t-kx+\frac{\phi_1+\phi_2}{2})}(e^{i(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}+\Delta\omega t-\Delta kx)} + e^{i(-\frac{\phi_1-\phi_2}{2}-\Delta\omega t+\Delta kx)})$$

$$= 2Ae^{i(\omega t-kx+\frac{\phi_1+\phi_2}{2})}cos((\frac{\phi_1-\phi_2}{2}+\Delta\omega t-\Delta kx))$$

La partie reelle est donc donne par

$$y_0 = 2A\cos(\omega t - kx + \frac{\phi_1+\phi_2}{2})\cos(\frac{\phi_1-\phi_2}{2} + \Delta\omega t - \Delta kx)$$

Dans le cas $\Delta\omega = 0 \Rightarrow \Delta k = 0$ et donc

$$y_0 = 2A\cos(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\cos(\omega t - kx + \frac{\phi_1+\phi_2}{2}))$$

5.6 Vitesse de phase et de groupe

$\Delta\omega \neq 0$ mais $\Delta\omega << \omega$.
La vitesse de l'enveloppe V_G est appelee la vitesse de groupe

$$v_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \simeq \frac{d\omega}{dk}$$

pour $\omega = ck$ on a une onde sans dispersion.
Pour une onde avec dispersion ($\frac{\omega}{k} \neq$ const.) on a la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$ on a en general

$$v_G = .\frac{d\omega}{dk}$$

Lecture 11: Phenomenes ondulatoires II

Tue 30 Mar

- Une onde sinuisoidale se deplace avec une vitesse de phase $v = \frac{\omega}{k}$
- Une pule (superposition d'ondes sinuisoidales) se deplace avec une vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$, donc "l'information" se deplace avec v_g

Exemple

Dans une corde, on a

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{\mu}}k$$

Alors la vitesse de phase est la vitesse de groupe.
Dans le cas d'une vague sur l'eau, alors

$$\omega = \sqrt{gk\tanh(kh)}$$

6 Ondes dans les milieux fluides

6.1 Ondes dans un fluide uniforme

Equations de continuite	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{u}) = 0$
Equations d'Euler	$\rho(\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + (\overrightarrow{u} \cdot \nabla)\overrightarrow{u}) = -\nabla p$
Equations d'Etat	$\frac{D}{Dt}(\frac{p}{\rho^0}) = 0$

En equilibre, on a

$$\rho = \rho_0 = \text{ constant}$$

On considere des "petites" perturbations $\rho_1, \overrightarrow{u}_1, p_1(\rho_1 << \rho_0, p_1 << p_0, \overrightarrow{u_1} <<$?) *On pose* $\rho = \rho_0 + \rho_1, \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1}, p = p_0 + p_1$.
En considerant des "petites" perturbations, on peut negliger les termes quadratiques et d'ordre superieur en ρ_1, u_1 *et* p_1 *et leurs derivees.*
Ainsi, on linearise les equations.
L'equation de continuite implique

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} + \nabla(\rho_0 u_1 + \rho_1 \overrightarrow{u_1}) = 0$$
$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \overrightarrow{u_1} = 0$$

L'equation d'Euler :

$$(\rho_0 + \rho_1)\left(\frac{\partial \overrightarrow{u_1}}{\partial t} + (\overrightarrow{u_1} \cdot \nabla)\overrightarrow{u_1}\right) = -\nabla(p_0 + p_1)$$
$$\rho_0 \frac{\partial \overrightarrow{u_1}}{\partial t} = -\nabla p_1$$

L'equation de continuite donne

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\overrightarrow{u_1} \cdot \nabla)\right)\left(\frac{p_0 + p_1}{(\rho_0 + \rho_1)^\gamma}\right) = 0$$

en exercice, on montrera que apres linearisation, on a

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial t} = 0$$

A partir de ces equations, on peut deriver des equations d'onde pour ρ_1, $\overrightarrow{u}_1, p_1$ *(Villard, III, chap. 2) .*
On cherche des solutions d'onde planes sinusoidales complexes se propageant au long de $\overrightarrow{k}$, *ses solutions ont la forme*

$$\rho_1(\overrightarrow{r}, t) = \tilde{\rho_1} e^{i(\omega tTHE - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})}$$
$$u_1(\overrightarrow{r}, t) = \tilde{\overrightarrow{u_1}} e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})}$$
$$p_1(\overrightarrow{r}, t) = \tilde{p_1} e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})}$$

Les equations differentielles etant lineaires, si f *etait une solution complexe,* $Re(f)$ *serait une solution reelle. En substituant ces solutions dans les equations, on trouve*

$$i\omega\tilde{\rho_1} e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})} + \rho_0(-i)\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{u} e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})} = 0$$
$$i\omega\tilde{\rho_1} - i\rho_0\overrightarrow{k}\cdot\tilde{\overrightarrow{u}} = 0$$

De meme

$$i\omega\rho_0\tilde{\overrightarrow{u_1}} - i\overrightarrow{k}\tilde{p_1} = 0$$

et finalement

$$i\omega\tilde{p_1} - \gamma\frac{p_0}{\rho_0} i\omega\tilde{\rho_1} = 0$$

Donc

$$\tilde{\rho_1} = \frac{\rho_0}{\gamma p_0}\tilde{p_1}$$
$$\tilde{\overrightarrow{u_1}} = \frac{1}{\omega\rho_0}\overrightarrow{k}\tilde{p_1}$$

Ainsi, $\tilde{\overrightarrow{u_1}}$ *est parallele a* $\overrightarrow{k}$. *Choisissans* $\overrightarrow{e_z}||\overrightarrow{k}$ *, donc* $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{e_z}$, *et donc*

$$\tilde{\overrightarrow{u_1}} = \tilde{u}_1 e_z$$

On a donc

$$\rho_1(\overrightarrow{r}, t) = \frac{\rho_0}{\gamma p_0}\tilde{p_1} e^{i(\omega t - kz)}$$
$$u_1(\overrightarrow{r}, t) = \frac{k}{\omega\rho_0}\tilde{p_1} e^{i(\omega t - kz)}$$
$$p_1(\overrightarrow{r}, t) = \tilde{p_1} e^{i(\omega t - kz)}$$

En introduisant les equations d'avant, on trouve

$$i\omega\frac{\rho_0}{\gamma p_0}\tilde{p_1} = i\rho_0\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{k}\frac{1}{\omega\rho_0}\tilde{p_1}$$
$$\omega^2 = \gamma\frac{p_0}{\rho_0}k^2$$

Et donc

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\gamma\frac{p_0}{\rho_0}}$$

Quelle est la condtion sur la vitesse pour des petites perturbations de $\overrightarrow{u_1}$

On a suppose qu'on peut negliger $(\overrightarrow{u_1} \cdot \nabla)\overrightarrow{u_1} << \frac{\partial \overrightarrow{u_1}}{\partial t}$.
En choisissant nos coordonnees tel que $\overrightarrow{k}||\overrightarrow{e_z}$, *alors*

$$\overrightarrow{u_1}(\overrightarrow{r}, t) = |\tilde{\overrightarrow{u_1}}| \cos(\omega t - kz + \phi)\overrightarrow{e_z}$$

Donc

$$|\tilde{\overrightarrow{u_1}}|k| \cos(\omega t - kz + \phi) \cdot \sin(\omega t - kz + \phi)| << \frac{\partial \overrightarrow{u_1}}{\partial t} = |\tilde{\overrightarrow{u_1}}|\omega| \sin(\omega t - kz + \phi)|$$

Donc, on trouve que

$$|\tilde{\overrightarrow{u_1}} << \frac{\omega}{k} = c$$

6.2 Tuyaux d'orgues

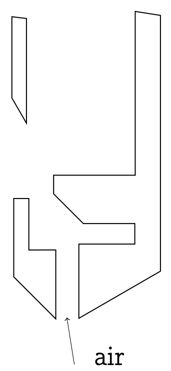

FIGURE 10 – Tuyau d'orgue

La longueur d'onde est donnee par

$$l = \frac{\lambda}{2} \text{ et } \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2l}$$

C'esty la frequence fondamentale qui determine la note, les deuxiemes, troisiemes,... harmoniques determinent le timbre.