EPFL - Automne 2020	Prof. Z. Patakfalvi
Structures Algébriques	**Exercices**
Série 14	18 décembre 2020

Exercice 1.
Considérons les sous-groupes $F = \langle \sigma^3 \rangle$ et $H = \langle \sigma^2, \tau \rangle$ du groupe diédral D_{12} à 12 éléments (ici σ est d'ordre 6 et τ est d'ordre 2 comme dans les notes de cours).

Montrez que F et H sont normaux dans D_{12}, que $H \cap F = \{e\}$ et que $|H| = 6, |F| = 2$.

Déduire que

$$D_{12} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times S_3 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \left(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right).$$

Indication : l'exemple 3.8.14 donne directement un isomorphisme $H \cong S_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, *où* $\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ *est l'unique morphisme non-trivial.*

Remarque : notez que ce même exemple 3.8.14 donne une autre description de D_{12}, *à savoir*

$$D_{12} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rtimes_\psi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\right) \rtimes_\psi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Exercice 2.
Soient p un nombre premier et $n \geq 1$ un entier. On considère le groupe additif $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^n := \underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \cdots \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{n \text{ fois}}$.
Montrez que son groupe d'automorphisme vaut $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$, en montrant que l'homomorphisme "naturel"

$$\gamma : \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{Aut}\left(\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^n\right)$$

est un isomorphisme (voir l'exemple 3.8.19.(2)).

Exercice 3.
Considérons deux groupes F, H, un morphisme $\phi : F \to \mathrm{Aut}(H)$ ainsi que $\alpha \in \mathrm{Aut}(F)$ et $\beta \in \mathrm{Aut}(H)$. Définissons $\phi' : F \to \mathrm{Aut}(H)$ par

$$\phi'_f := \beta \circ \phi_{\alpha(f)} \circ \beta^{-1} \qquad (\forall f \in F)$$

(ici, on utilise les abréviations $\phi'(f) = \phi'_f$ et $\phi_f = \phi(f)$ pour alléger les notations).

1. Démontrez que $\phi' : F \to \mathrm{Aut}(H)$ est bien défini et que c'est un homomorphisme de groupes.

2. Démontrez que l'application

$$\begin{array}{rrcl} \tau : & H \rtimes_\phi F & \longrightarrow & H \rtimes_{\phi'} F \\ & (h,f) & \longmapsto & \big(\beta(h)\ ,\ \alpha^{-1}(f)\big) \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

Exercice 4.

Soit k un corps tel que $k \neq \mathbb{F}_2$. Considérons $G = \mathrm{GL}(2,k)$ et le sous-groupe $T = T(2,k)$.

1. Montrez que le normalisateur du tore $T(2,k) \leq \mathrm{GL}(2,k)$ vaut

$$N_G(T) \ = \ T(2,k) \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \ : \ a, b \in k^\times \right\}$$

2. À l'aide du théorème 3.8.13, démontrez qu'on a un isomorphisme

$$N_G(T) \cong T \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

où ϕ est le morphisme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(T)$ tel que $\phi_{[1]}$ est la conjugaison par la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.

1. (a) Soient $\phi, \phi' : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$ deux homomorphismes non-triviaux. Montrez qu'il existe $\beta \in \mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$ tel que $\phi'_f = \beta \circ \phi_f \circ \beta^{-1}$ pour tout $f \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
Indications : l'exercice 2 ci-dessus, l'exemple 3.8.19 (1) ainsi que l'exercice 4.2 de la série 8 pourront vous être utiles.

   (b) En déduire que tous les produits semi-directs non-triviaux

$$\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right) \rtimes_\phi \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

sont isomorphes. Dans ce qui suit, on désigne ce groupe par G.
Indications : le but est d'appliquer l'exercice 3 ci-dessus.

2. Montrez que $A_4 \cong G$.

Indication : utilisez le théorème 3.8.13 ainsi que l'exercice 7.3 de la série 8.

3. Considérons les matrices $A := \begin{pmatrix} [0]_3 & [1]_3 \\ [2]_3 & [0]_3 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} [1]_3 & [1]_3 \\ [1]_3 & [2]_3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} [1]_3 & [1]_3 \\ [0]_3 & [1]_3 \end{pmatrix}$ dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_3)$. Définissons les sous-groupes $H := \langle [A], [B] \rangle$ et $F := \langle [C] \rangle$ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_3)$.

   (a) Montrez qu'on a des égalités $[A] \cdot [B] = [B] \cdot [A]$ et $[A]^2 = [B]^2 = [I_2]$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_3)$, pour en déduire que $H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

   (b) Vérifiez que $F \subset N_{\mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_3)}(H)$.

   (c) En conclure que
   $$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_3) \cong G \cong A_4.$$

   Indication : appliquer le théorème 3.8.13 aux sous-groupes H et F, en utilisant l'exercice 2.5 de la série 12.

Exercice 6.

1. À l'aide de l'exercice 3 ci-dessus, démontrez que tous les produits semi-directs non-triviaux
$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\phi (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$
sont isomorphes. Dans ce qui suit, on désigne ce groupe par G'.

2. Prouvez que $D_{12} \cong G'$ (ceci nous donne une troisième description de D_{12} en tant que produit semi-direct, en plus de celles données dans l'exercice 1 !).

   Indication : utilisez le théorème 3.8.13 ainsi que l'exemple 3.8.6.

3. Montrez que le sous-groupe de Borel $B(2, \mathbb{F}_3)$ est isomorphe à G'.

   Indication : faites appel à l'exercice 2.3 de la série 13.

Exercice 7.

1. Montrez que tous les produits semi-directs non-triviaux
$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
sont isomorphes. On désigne par G'' ce groupe.

2. En utilisant le théorème 3.8.13, prouvez que $U(3, \mathbb{F}_2) \cong G''$.

   Indication : montrez que $N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ b, c \in \mathbb{F}_2 \right\}$ *est un sous-groupe normal de* $U(3, \mathbb{F}_2)$.

   Remarques : l'exemple 3.8.19.(3) donne aussi que $D_8 \cong G''$. *Notez que l'exemple 3.8.14 prouve qu'on a également un isomorphisme* $D_8 \cong {}^{\mathbb{Z}}\!/_{4\mathbb{Z}} \rtimes_\psi {}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}$ *(cela n'est pas en contradiction avec le fait que* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *et* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ *ne sont pas isomorphes !).*