GEOM DIFF

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Intro

Wed 22 Sep

1 Rappels de geometrie euclidienne

Definition 1 (Espace Euclidien)
Un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel $\mathbb{E}^n$ sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ symmetrique, defini positif.

Le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ est $\langle x, y = \sum_i x_i y_i (\langle e_i, e_j = \delta_{ij})$.

Proposition 1 (Cauchy-Schwartz)
$\forall x, y \in \mathbb{E}^n, \langle x, y \leq \|x\| \, \|y\|$.

Remarque
La norme determine le produit scalaire via les formules de polarisation

$$\langle x, y = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

1.1 Proprietes de la norme

— $\|x\| \geq 0 \forall x \in \mathbb{E}^n$
— $\|x\| = 0 \iff x = 0$
— $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
— $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Definition 2
— *Si $x, y \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}$, on definit l'angle $\theta \in [0, \pi]$ par $\cos\theta = \langle x, y_{\overline{\|x\|\|y\| \in [-1,1]}}$ (par Cauchy-Schwarz) .*

On a $\langle x, y = \|x\| \, \|y\| \cos\theta$

La distance entre $x, y \in \mathbb{E}^n$ est $d(x, y) = \|y - x\|$ $(\mathbb{E}^n, d)$ est un espace metrique.
Les proprietes suivantes sont equivalentes

— $x \perp y$
— $\theta = \frac{\pi}{2}$
— $\|x - y\| = \|x + y\|$
— $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$

2 Isometries et Similitudes

Definition 3 (similitude)
Une application $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ est une similitude de rapport $\lambda > 0$ si f est bijective et

$$d(f(x), f(y)) = \lambda d(x, y)$$

Si $\lambda = 1$, on dit que f est une isometrie.

Theorème 3
Si $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *est une similitude, alors il existe* $b \in \mathbb{E}^n$ *et* $g : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *lineaire tel que*

$$f(x) = g(x) + b$$

Remarque
$b = f(0)$ *et* f *lineaire* $\iff f(0) = 0$

Preuve
On utilisera le theoreme fondamental de la geometrie affine :
Soit V *un espace vectoriel de dimension finie sur* $\mathbb{R}$ *et* $f : V \to V$ *une application bijective.*
Alors f *est affine si et seulement si* f *preserve les droites.*
On ne donne pas la preuve mais une intuition : on pose $g(x) = f(x) - b(b = f(0))$ *, donc* $g(0) = 0$ *et* g *preserve les droites.*
Soit $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *une similitude de* $\mathbb{E}^n$*. On affirme que* f *preserve les droites*

$$x, y, z \in \mathbb{E}^n \Rightarrow f(x), f(y), f(z)$$

quitte a renommer les points x, y, z*, on a*

$$x, y, z \text{ alignes } \iff d(x,z) = d(x,y) + d(y,z) \iff d(f(x), f(z)) = d(f(x), f(y)) + d(f(y), f(z))$$

Donc f *affine implique* $f(x) = g(x) + b$ *(* $b = f(0), g$ *lineaire).*
Il reste a voir que g *est une* λ*-similitude* $\Rightarrow$ *immediat a verifier.* $\square$

Corollaire 5
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est une similitude de rapport* $\lambda > 0$ *si et seulement si il existe* $b \in \mathbb{R}^n$ *et* $A \in M_n(\mathbb{R}), A^T \cdot A = I$ *tel que*

$$f(x) = \lambda A x + b$$

Preuve

$$\begin{aligned} \langle g(e_i), g(e_j) &= \frac{1}{4} \|g(e_i) + g(e_j)\|^2 - \|g(e_i) - g(e_j)\|^2 && \textit{dotted} \\ &= \frac{1}{4}(\|g(e_i + e_j)\|^2 - \|g(e_i - e_j)\|^2) \\ &= \lambda^2 \langle e_i, e_j = \lambda^2 \delta_{ij} && \textit{dotted} \end{aligned}$$

Soit A *la matrice de* g*, alors* $g(x) = Ax$ *, on a*

$$\lambda^2 \delta_{ij} = \langle A e_i, A e_j \qquad \textit{dotted}$$

$$= \langle \sum_i a_{ij} e_i, \sum_i a_{ij} e_i \qquad \textit{dotted}$$

$$= \sum_i \sum_j a_{ir} a_{js} \delta_{rs} = \sum_r a_{ir} a_{jr} \qquad \square$$

2.1 Proprietes de base des matrices orthogonales O_n

Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ les proprietes suivantes sont equivalentes

— $A \in O_n$

— A inversible avec $A^{-1} = A^T$

— Les collonnes/lignes de A forment une base orthonormee.

— $\langle Ax, Ay = \langle x, y$

— $\|Ax\| = \|x\|$

— $f(x) = Ax + b$ est une isometrie pour l'espace euclidien pour tout b

Remarque

Si $A \in O_n \Rightarrow \det A = \pm 1$ *et* $\det : O_n \to \{\pm 1\}$

Definition 4 (Groupe special orthogonal)

On definit

$$SO(n) = O_n \cap SL_n(\mathbb{R})$$

Definition 5

Une transformation affine $f : V \to V$ *,* V *un* $\mathbb{R}$ *-ev est directe (ou qu'elle preserve l'orientation) si son determinant est positif (ou le determinant de la partie lineaire de* f *.) Une isometrie directe s'appelle un deplacement de* $\mathbb{E}^n$ *si* $f(x) = Ax + b, A \in SO(n)$

Remarque

$$SE(n) = SO(n) \rtimes \mathbb{R}^n$$

2.2 Etude de O_2

Proposition 8

Une matrice $A \in O_2$ *s'ecrit*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

si $\det A = 1,$ *ou*

$$S_\phi = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}$$

Preuve
$A \in O_2$ si et seulement siles colonnes de A forment une base orthonormee. Donc il existe θ tel que la 1ere colonne est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ *et la forme de la 2eme colonne en suit.* □

2.3 Etude de O_3

Theorème 9 (Theoreme d'Euler)
Tout deplacement (isometrie qui preserve l'orientation) qui fixe un point, fixe un axe et c'est une rotation autour de cet axe.

Preuve
On identifie l'espace euclidien a $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, qui fixe un point on suppose que $f(0) = 0$.
On a $f(x) = Ax$.
On affirme qu'il existe $U \in \mathbb{R}^3, U \neq 0$ tel que $Au = u$.
En effet 1 est valeur propre de A car $\det(A - \mathrm{Id}) = 0$ *parce que*

$$\det(A - \mathrm{Id}) = \det(A^T)\det(A - \mathrm{Id}) = \det(\mathrm{Id} - A^T) = \det(\mathrm{Id} - A) = (-1)^3 \det(A - \mathrm{Id})$$

□