Série 9

David Wiedemann, Matteo Mohammedi, Nino Courtecuisse

2 mai 2022

a)

Etant donné un groupe G, on construit une présentation de la manière suivante.

— On choisit un ensemble de générateurs A pour G, ceci est toujours possible, quitte à prendre l'ensemble G tout entier.

— On construit le groupe libre à A générateurs $F(A)$.

— On définit l'application $\phi : F(A) \to G$ en envoyant chaque générateur sur l'élément associé.

— En tant que relateurs, on choisit $I = \ker \phi$.

On prétend alors que $\langle A|I \rangle$ est une présentation de G.
En effet, I étant déjà un groupe normal, la présentation $\langle A, I \rangle$ est isomorphe (par définition) à ${F(A)}/{I}$ et le premier théorème d'isomorphisme implique que ${F(A)}/{I} \simeq G$.

On montre que ${\mathbb{Z}}/{5\mathbb{Z}} = \langle a|a^5 \rangle$.
En effet, le groupe $G = \langle a|a^5 \rangle$ a précisément 5 éléments, puisque 5 est un nombre premier, on en déduit l'isomorphisme ci-dessus.
De plus $D_{10} = \langle a, b|a^2, b^5, abab \rangle$.
En effet, utilisons la définition de groupe dihédral (démontrée en structures algébriques je crois) $D_{2n} = C_n \rtimes C_2$ ou l'action de C_2 sur C_n est donnée par l'inversion d'éléments.
Alors posons $G = \langle a, b|a^2, b^5, abab \rangle$ et définissons l'application $\phi : F(a, b) \to D_{10}$ qui envoie a sur $(0, 1)$ et b sur $(1, 0)$.
Alors ϕ passe au quotient de G et induit une application $\overline{\phi} : G \to D_{10}$, cette application est surjective puisque ϕ l'est.
De plus, on vérifie facilement que G possède 10 éléments (chaque mot a un représentant de la forme $a^k b^j$ avec $0 \leq k \leq 2$ et $0 \leq j \leq 5$), ainsi $\overline{\phi}$ est un morphisme surjective entre deux ensembles de même cardinalité, ie. un isomorphisme.

b)

On montre le résultat pour un ensemble de générateurs arbitraires et de relateurs finis.
Soit G un groupe, A un ensemble de générateurs et I un ensemble de relateurs finis tel que $G = \langle A | I \rangle$.
On procède par induction, sur le nombre de générateurs.
Si $|I| = 0$, le résultat est immédiat en prenant $X = \vee_A S^1$ qui aura comme groupe fondamental le groupe libre à A générateurs, ie., G.
Supposons donc maintenant le résultat démontré pour $|I| = n$ et montrons le résultat pour $n + 1$ relateurs.
Soient $r_1, \ldots, r_{n+1}$ nos $n+1$ relateurs, par hypothese de récurrence, on peut construire un espace dont le groupe fondamental est donné par la présentation $\langle A | r_1, \ldots, r_n \rangle$, appelons cet espace X.
De par notre construction inductive, on sait que X contiendra toujours un sous-espace homéomorphe à $\vee_A S^1$.
On construit maintenant le pushout suivant :

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\tilde{r}_{n+1}} & X \\ \iota \big\downarrow & & \big\downarrow \\ e^2 & \longrightarrow & X' \end{array}$$

Ou ι est l'inclusion triviale et $\tilde{r}_{n+1}$ est une application ayant le même type d'homotopie que le mot donné par r_{n+1} dans $\vee_A S^1 \subset X$.
Etant donné que X' est obtenu comme attachement cellulaire, le corrolaire de Seifert-Van Kampen vu en cours s'applique et on obtient un pushout de groupes donné par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\tilde{r}_{n+1}} & \langle A | r_1, \ldots, r_n \rangle \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(X') \end{array}$$

Et ainsi, $\pi_1(X')$ admet la présentation $\langle A | r_1, \ldots, r_{n+1} \rangle$

c)

Espace avec $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ comme Groupe Fondamental

Etant donné que $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ admet la présentation $\langle a|a^5\rangle$, l'espace obtenu par le pushout suivant

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "r_5"] \arrow[d, "\iota"] & S^1 \arrow[d] \\ e^2 \arrow[r] & S_1 \cup_5 e^2 \end{tikzcd}$$

Où ι est l'inclusion et r_5 est une quelconque application de degre 5.
De par la partie b), on sait que cet espace aura $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ comme groupe fondamental

Espace avec D_{10} comme Groupe Fondamental

On utilise la présentation $\langle \tau, \sigma | \tau^5, \sigma^2, \sigma\tau\sigma\tau\rangle$.
On notera S^1_σ, S^1_τ pour deux copies distinctes de S^1.
Fixons $T : S^1 \to S^1_\sigma \vee S^1_\tau$ l'inclusion de S^1 dans la copie S^1_τ du wedge et $\Sigma : S^1 \to S^1_\sigma \vee S^1_\tau$ l'inclusion de S^1 dans la copie S^1_σ du wedge.
On construit alors les pushouts consécutifs suivants :

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "T^5"] \arrow[d, "\iota"] & S^1_\sigma \vee S^1_\tau \arrow[d] \\ e^2 \arrow[r] & (S^1_\sigma \vee S^1_\tau) \cup_{\tau^5} e^2 \end{tikzcd}$$

Ou T^5 est le lacet T concaténé 5 fois avec lui même.

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "\Sigma^2"] \arrow[d, "\iota"] & (S^1_\sigma \vee S^1_\tau) \cup_{\tau^5} e^2 \arrow[d] \\ e^2 \arrow[r] & ((S^1_\sigma \vee S^1_\tau) \cup_{\tau^5} e^2) \cup_{\sigma^2} e^2 \end{tikzcd}$$

Où Σ^2 est la concaténation de Σ avec soi-même.
Et finalement, on construit le pushout

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "S*T*S*T"] \arrow[d, "\iota"] & \big((S^1_\sigma \vee S^1_\tau) \cup_{\tau^5} e^2\big) \cup_{\sigma^2} e^2 \arrow[d] \\
e^2 \arrow[r] & \Big(\big((S^1_\sigma \vee S^1_\tau) \cup_{\tau^5} e^2\big) \cup_{\sigma^2} e^2\Big) \cup_{\sigma\tau\sigma\tau} e^2 = X
\end{tikzcd}$$

De par la partie b, l'espace X ainsi obtenu aura bien $\langle \sigma, \tau | \sigma^2, \tau^5, \sigma\tau\sigma\tau \rangle = D_{10}$ comme groupe fondamental.