Série 1

David Wiedemann

25 février 2021

1

Faisons d'abord l'observation que pour tout $\gamma > 0$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\gamma} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\gamma x^{\gamma - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\gamma x^\gamma} = 0$$

Où on a utilisé la règle de Bernoulli-L'Hospital.
Notons donc maintenant que pour tout $\alpha > 1$, il existe, par densité des réels un $\beta \in \mathbb{R}$ qui satisfait $\alpha > \beta > 1$. En Choisissant un β satisfaisant cette propriété, on trouve que

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-\alpha} \ln(x) x^\beta = 0$$

Ainsi, par un théorème du cours, l'intégrale doit exister.

On procède par intégration par parties pour trouver le résultat, on a ainsi

$$\int_1^\infty x^{-\alpha} \ln(x) dx = \left[\frac{1}{-\alpha + 1} x^{-\alpha + 1} \ln(x) \right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{1}{-\alpha + 1} x^{-\alpha + 1} \frac{1}{x} dx$$

Le premier terme vaut 0, on a ainsi que

$$\begin{aligned} \int_1^\infty x^{-\alpha} \ln(x) dx &= - \int_1^\infty \frac{1}{-\alpha + 1} x^{-\alpha} dx \\ &= \frac{1}{(\alpha - 1)^2} \end{aligned}$$

2

Considérons la fonction $f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = k^{-\alpha} \ln(k) \text{ si } x \in [k, k+1[$$

Notons maintenant que

$$\sum_{k=1}^N k^{-\alpha} \ln(k) = \int_1^N g(x) dx$$

pour $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Notons que la fonction $x^{-\alpha}\ln(x)$ satisfait

$$x^{-\alpha}\ln(x) \geq g(x) \forall x \in]1, \infty[$$

Ainsi, on a, pour tout $X \in]1, +\infty[$

$$\int_1^X g(x)dx \leq \int_1^X x^{-\alpha}\ln(x)dx$$

Par le critère de comparaison, on en déduit que

$$\int_1^\infty g(x)dx$$

converge, car majorée par une fonction dont l'intégrale converge et minorée par 0(la fonction est strictement positive sur l'intervalle considéré).
On finit la preuve en notant que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-\alpha}\ln(k) = \int_1^\infty f(x)dx$$

Et ainsi la série converge.

3

Pour la suite posons $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$.
On fait d'abord l'observation que

$$f'(x) = x^{-\alpha-1}(1 - \alpha\ln(x))$$

Ainsi on a, par un théorème d'analyse I, que l'extremum local se situe en

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \alpha\ln(x) = 0 \Rightarrow x = e^{\frac{1}{\alpha}}$$

Ou l'on ne considére pas la solution $x = 0$ car elle n'appartient pas à l'ensemble de définition.
De plus, on note que $1 - \alpha\ln(x) < 0 \quad \forall x > e^{\frac{1}{\alpha}}$ et $1 - \alpha\ln(x) > 0 \quad \forall x \in [1, e^{\frac{1}{\alpha}}[$ et ainsi $x = e^{\frac{1}{\alpha}}$ est un extremum global[1].
Par hypothèse, $\alpha > 1$, et ainsi la position de l'extremum global est constamment plus petit que $e^{\frac{1}{1}} = 1$.
On peut donc considèrer un encadrement à partir de $x = 3$.
Avant de l'expliciter, on constate que

$$f(x-1) \geq g(x) \geq f(x)$$

1. Ces deux propriétés suivent de $\ln(x)$ étant une fonction strictement croissante

L'inégalité $f(x-1) \geq f(x)$ suit du théorème des accroissements finis, en effet, pour tout $m > 3$, on a l'existence d'un $c \in [m, m+1]$ satisfaisant

$$0 > f'(c) = f(m+1) - f(m) \text{ impliquant } f(m+1) < f(m)$$

Les égalités $f(x-1) \geq g(x)$ et $g(x) \geq f(x)$ suivent immédiatement de f étant décroissante $\forall x > 3$.

Etant donné que, par la section 2, $\int_3^{+\infty}$ converge, on a, par un théorème du cours

$$\int_3^{+\infty} f(x-1)dx \geq \int_3^{+\infty} g(x)dx = \sum_{k=3}^{\infty} k^{-\alpha} \ln(\alpha) \geq \int_3^{\infty} f(x)dx$$

En évaluant les integrales, on trouve ainsi que

$$\frac{4^{1-\alpha}(\alpha-1)\log(4)+1}{(\alpha-1)^2} \geq \sum_{k=3}^{\infty} k^{-\alpha} \ln(k) \geq \frac{3^{1-\alpha}(\alpha-1)\log(3)+1}{(\alpha-1)^2}$$

Finalement, en ajoutant les deux premiers termes de la somme on trouve

$$2^{-\alpha}\ln(2)+\frac{4^{1-\alpha}(\alpha-1)\log(4)+1}{(\alpha-1)^2} \geq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} \ln(k) \geq 2^{-\alpha}\ln(2)+\frac{3^{1-\alpha}(\alpha-1)\log(3)+1}{(\alpha-1)^2}$$