# Théorie des Groupes

# David Wiedemann

# Table des matières

1		Introduction à la Théorie des Catégories Catégories	<b>2</b> 2
${f L}$	ist o	of Theorems	
	1	Definition (Graphe dirigé)	2
	2	Definition (Catégories)	2

#### Lecture 1: Introduction

Fri 10 Sep

## 1 Une Introduction à la Théorie des Catégories

#### Notion Fondamentale: la composition

- Composition d'applications
- l'exemple fondamental d'un groupe est donné par Aut(X), où la multiplication du groupe est donnée par la composition d'automorphismes.

#### 1.1 Catégories

#### Definition 1 (Graphe dirigé)

Un graphe dirigé G consiste en un couple de classes  $G_0$  et  $G_1$ , muni de deux applications

$$dom: G_1 \to G_0 \ et \ cod: G_1 \to G_0$$

appelées domaine et codomaine. On pense à  $G_0$  comme l'ensemble des sommests et  $G_1$  l'ensemble des arêtes de G.

Par exemple, si  $x, y \in G_0, f \in G_1$ , alors

$$dom(f) = x, \quad cod(f) = y$$

$$X \xrightarrow{f} Y$$

On introduit la notation

$$G(x,y) = \{ f \in G_1 | \operatorname{dom}(f) = x, \operatorname{cod}(f) = y \}$$

#### Exemple

Soit X un ensemble, et soit  $R \subset X \times X$  une relation sur X. Alors  $G_r = (X, R)$  est un graphe dirigé, où

$$dom: R \to X: (x_1, x_2) \to x_1 \ et \ cod: R \to X: (x_1, x_2) \to x_2$$

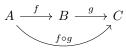
Observer que  $\forall x_1, x_2 \in X$ 

$$G_R(x_1, x_2) = \begin{cases} \{(x_1, x_2)\} : (x_1, x_2) \in R \\ \emptyset \ sinon \end{cases}$$

#### Definition 2 (Catégories)

Une catégorie C est un graphe dirigé  $(C_0, C_1)$  muni d'applications de composition

$$\gamma_{a,b,c}:C(a,b)\times C(b,c)\to C(a,c):(f,g)\to g\circ f$$



— ( Existence d'identités ) Il existe une application  $Id:C_0\to C_1:c\to Id_c$  tel que

$$f \circ \mathrm{Id}_a = f = \mathrm{Id}_b \circ f \forall f \in C_1(a,b), \forall a,b \in C_0$$

— (Associativité) Quelque soient  $a,b,c,d \in C_0$  et  $f \in C(a,b),g \in C(b,c)$  et  $h \in C(c,d)$ 

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \in C(a, d)$$

### Notation

On note

$$C_0 = \operatorname{Ob} C - \text{ les objets de } C$$

$$C_1 = \operatorname{Mor} C - \text{ les morphismes}$$

- Si C, Mor C sont des ensembles, alors C est petite.
- Si C(a,b) est un ensemble  $\forall a,b\in\operatorname{Ob} C$  , alors C est localement petite.