Série 1

David Wiedemann

26 septembre 2020

Lemme 1. *On montre d'abord que :*

$$\forall a(t), b(t) \in \mathbb{R}[t], \deg(ab) = \deg(a) + \deg(b)$$

Démonstration. Pour alléger la notation, on pose que : $\deg(a(t)) = A$ et $\deg(b(t)) = B$.

$$\begin{aligned} a(t) \cdot b(t) &= \left(\sum_{i=0}^{A} a_i t^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{B} b_j t^j \right) \\ &= a_A b_B t^A t^B \\ &+ a_A t^A \sum_{j=0}^{B-1} b_j t^j \\ &+ b_B t^B \sum_{i=0}^{A-1} a_i t^i \\ &+ \left(\sum_{i=0}^{A-1} a_i t^i \right) \left(\sum_{j=0}^{B-1} b_j t^j \right) \end{aligned}$$

Ici, on peut clairement voir que le terme $a_A b_B t^A t^B = a_A b_B t^{A+B}$ est du plus haut degré, et donc le lemme est prouvé. □

Lemme 2. *Soit* $a(t), b(t) \in \mathbb{R}[t]$ *et* $\deg(a(t)) \geq \deg(b(t))$ *alors* $\deg(a(t) + b(t)) \leq \deg(a(t))$.

Démonstration. Il suffit à nouveau de développer la somme du polynôme. On posera de plus que si $j > \deg(b(t))$, alors $b_j = 0$.

$$\begin{aligned} a(t) + b(t) &= \sum_{i=0}^{\deg(a(t))} a_i t^i + \sum_{j=0}^{\deg(b(t))} b_j t^j \\ &= \sum_{k=0}^{\deg(a(t))} (a_k + b_k) t^k \end{aligned}$$

On voit clairement que le terme de plus haut degre est le terme $t^{\deg(a(t))}$.
On distingue deux cas :

— Si $a_A \neq -b_A$, alors $\deg(a(t) + b(t)) = \deg(a(t))$.

— Si $a_A + b_A = 0$, on a $\deg(a(t) + b(t)) < \deg(a(t))$

□

Lemme 3. *Soit* $a(t), b(t) \in \mathbb{R}[t]$, *alors*

$$a(t) \cdot b(t) = 0$$

implique $a(t) = 0$ *ou* $b(t) = 0$.

Démonstration. On utilisera le lemme 1.
Par l'absurde, assumons que $a(t) \neq 0$ et $b(t) \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \deg(a(t) \cdot b(t)) &= \deg(a(t)) + \deg(b(t)) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Contradiction, car $\deg(0) = -\infty$.
Donc $a(t) = 0$ ou $b(t) = 0$

□

On peut donc finalement montrer que la division Euclidienne dans $\mathbb{R}[t]$ existe et est unique.

Démonstration.
Unicité
Supposons que $\exists b, r, b', r' \in \mathbb{R}[t]$ et $\deg(r'), \deg(r) < \deg(q)$, tel que :

$$\begin{aligned} a(t) &= q(t) \cdot b(t) + r(t) \\ &= q(t)b'(t) + r'(t) \\ 0 &= q(t)(b(t) - b'(t)) + \underbrace{(r(t) - r'(t))}_{:=r''} \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, on peut également assumer que $\deg(r) \geq \deg(r')$.
On utilise maintenant le lemme 2 pour remarquer que

$$\deg(r''(t)) \leq \deg(r(t)) < \deg(q(t))$$

Par le lemme 2 et le lemme 1, on a que

$$q(t)(b(t) - b'(t)) = 0$$

Finalement par le lemme 3, $q(t) = 0$ ou $b(t) - b'(t) = 0$.
Par hypothèse, $q(t) \neq 0$, et donc $b(t) = b'(t)$, donc $b(t)$ est unique.
Pour prouver l'unicité de $r(t)$, on utilise l'unicité de $b(t)$.

$$\begin{aligned} q(t)(b(t) - b'(t)) + (r'(t) - r(t)) &= 0 \\ \overset{b(t)=b'(t)}{\Rightarrow} r'(t) - r(t) &= 0 \end{aligned}$$

Et donc $r'(t) = r(t)$.
Donc $b(t)$ et $r(t)$ sont uniques.

Existence
On procède par induction sur le degré de $a(t)$.
On vérifie d'abord le cas $\deg(a(t)) = 0$.
On peut distinguer deux cas :

— Si $\deg(q(t)) = 0$, alors $a(t) = k_1 \in \mathbb{R}$ et $q(t) = k_2 \in \mathbb{R}$, alors

$$b(t) = \frac{k_1}{k_2} \text{ et } r(t) = 0 \Rightarrow a(t) = b(t) \cdot q(t) + r(t).$$

— Si $\deg(q(t)) > 0$, alors

$$b(t) = 0 \text{ et } r(t) = a(t) \Rightarrow a(t) = q(t) \cdot b(t) + r(t).$$

On remarque que ceci résout également le cas $a(t) = 0$.
Par recurrence, supposons que le cas $\deg(a(t)) = n$ est vrai et montrons pour $\deg(a(t)) = n + 1$.
Posons que $a(t) = a'(t) + a_{n+1}t^{n+1}$, avec $\deg(a'(t)) \leq n$, et que $q(t) = q'(t) + q_m t^m$, avec $\deg(q(t)) \leq m$ et $\deg(q'(t)) = m - 1$.
On distingue à nouveau 2 cas :

— Si, $\deg(q(t)) > \deg(a(t))$, dans ce cas, il suffit de poser que $b(t) = 0$ et que $r(t) = a(t)$, alors

$$a(t) = q(t) \cdot b(t) + r(t)$$

— Supposons donc que $\deg(a(t)) \geq \deg(q(t))$, on peut ecrire :

$$\begin{aligned} a(t) &= a_{n+1}t^{n+1} + a'(t) \\ &= a_{n+1}t^{n+1} \left(\frac{q_m t^m}{q_m t^m} \right) + a'(t) \\ &= a_{n+1}t^{n+1} \left(\frac{q(t) - q'(t)}{q_m t^m} \right) + a'(t) \\ &= \underbrace{a_{n+1}t^{n+1} \frac{q(t)}{q_m t^m}}_{\text{degré : } n+1} - \underbrace{a_{n+1}t^{n+1} \frac{q'(t)}{q_m t^m}}_{\text{degré } \leq n} + \underbrace{a'(t)}_{\text{degré } \leq n} \end{aligned}$$

Donc le terme $-\frac{a_{n+1}}{q_m}t^{n-m+1}q'(t)$, admet, par hypothèse de récurrence, $\exists c(t)$ et $r_c(t)$ tel que

$$-\frac{a_{n+1}}{q_m}t^{n-m+1}q'(t) = c(t) \cdot q(t) + r_c(t)$$

Le degré de $a'(t)$ est aussi inférieur à $n+1$, et donc, par hypothèse de récurrence, $\exists d(t), r_d(t)$ tel que $a'(t) = q(t) \cdot d(t) + r_d(t)$.
On a donc

$$\begin{aligned}
a(t) &= \frac{a_{n+1}}{q_m}t^{n+1-m}q(t) - \frac{a_{n+1}}{q_m}t^{n-m+1}(q'(t)) + a'(t) \\
&= \frac{a_{n+1}}{q_m}t^{n+1-m}q(t) - c(t) \cdot q(t) - r_c(t) + q(t) \cdot d(t) + r_d(t) \\
&= q(t)\left(\frac{a_{n+1}}{q_m}t^{n+1-m} - c(t) + d(t)\right) - r_c(t) + r_d(t)
\end{aligned}$$

On a donc trouvé une formulation pour $a(t)$ tel que $a(t) = b(t) \cdot q(t) + r(t)$.

$\square$