Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-05-17 au 2021-05-21

Série 23 du 2021-05-17

Exercice 1.

Notons $D \coloneqq \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 : \|v\| \in \,]1,2[\}$. Calculer

$$\iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{2+\cos(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

Exercice 2.

Notons $D \coloneqq \{(x,y) \in \,]0,+\infty[^2 : 9x^2+4y^2 < 36\}$. Calculer

$$\iint_D x^2y^4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Exercice 3.

Soit $a \in \,]0,1[$; notons $D(a) \coloneqq [0,a]^2$. En utilisant le changement de variables $x \coloneqq u-v$, $y \coloneqq u+v$, exprimer l'intégrale

$$I(a) = \iint_{D(a)} \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{3}$$

à l'aide d'intégrales de la forme $\int_{\cdots}^{\cdots} \ldots \,\mathrm{d}u$. Montrer ensuite que $\lim_{a\to 1^-} I(a) = \frac{\pi^2}{6}$. La fonction $f : [0,1]^2 \setminus \{(1,1)\} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{1-xy}$ est-elle absolument intégrable sur $[0,1]^2 \setminus \{(1,1)\}$?

Rappel 1. Soit $u \in \,]-1,1[$.

$$\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \arcsin u \tag{4}$$

et

$$\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin u. \tag{5}$$

On peut démontrer (5) en dérivant le membre de gauche et le membre de droite.