

# Topologie

David Wiedemann

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Quotients topologiques</b>	<b>4</b>
1.1	La topologie quotient . . . . .	4
1.2	Relations d'équivalence . . . . .	5
1.3	Séparation et quotients . . . . .	6
1.4	Conditions de séparation du quotient . . . . .	6
1.5	Quotients par des actions de groupe . . . . .	9
1.6	$SO(n)$ . . . . .	10
1.7	Recollements . . . . .	10
1.8	Attachement de cellules . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Homotopies et Groupe Fondamental</b>	<b>13</b>
2.1	Homotopie . . . . .	13
2.2	Attachement de cellules . . . . .	14
2.3	Homotopie et $\pi_0$ . . . . .	15
2.4	Invariance Homotopique . . . . .	15
2.5	Groupe Fondamental . . . . .	16
2.6	Surfaces . . . . .	18
2.7	Bouteille de Klein . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Théorie Combinatoire des Groupes</b>	<b>19</b>
3.1	Groupes libres . . . . .	19
3.2	Présentations . . . . .	20
3.3	Graphes de Cayley . . . . .	20
3.4	Produits libres . . . . .	21
3.5	Pushouts de groupes . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Seifert-van Kampen</b>	<b>22</b>
4.1	Groupe fondamental d'un recollement . . . . .	22

## List of Theorems

1	Definition (Topologie quotient) . . . . .	4
---	---	---

3	Proposition . . . . .	4
4	Proposition . . . . .	4
5	Proposition . . . . .	4
6	Theorème . . . . .	4
7	Proposition . . . . .	4
8	Proposition . . . . .	5
2	Definition . . . . .	5
9	Proposition (Propriétés universelles) . . . . .	5
3	Definition . . . . .	5
4	Definition (Réunion disjointe) . . . . .	6
5	Definition . . . . .	6
6	Definition . . . . .	6
11	Proposition . . . . .	6
12	Proposition . . . . .	6
13	Proposition . . . . .	7
14	Corollaire . . . . .	8
7	Definition (Espaces projectifs) . . . . .	8
17	Proposition . . . . .	8
8	Definition (Espace projectif complexe) . . . . .	8
9	Definition (Groupe topologique) . . . . .	9
20	Lemme . . . . .	9
10	Definition . . . . .	9
11	Definition . . . . .	9
22	Proposition . . . . .	9
23	Proposition . . . . .	10
12	Definition (Recollement) . . . . .	10
26	Proposition . . . . .	11
27	Lemme . . . . .	11
28	Lemme . . . . .	11
29	Proposition . . . . .	12
31	Proposition . . . . .	12
13	Definition (Suspension) . . . . .	13
14	Definition (Homotopie entre applications) . . . . .	13
32	Proposition . . . . .	13
15	Definition (Classes d'homotopie) . . . . .	14
16	Definition (Espaces Homotopes) . . . . .	14
33	Proposition . . . . .	14
35	Proposition . . . . .	15
36	Corollaire . . . . .	15
37	Corollaire . . . . .	15
38	Proposition . . . . .	15

39	Proposition . . . . .	16
40	Corollaire . . . . .	16
17	Definition (Pinch and Fold) . . . . .	16
18	Definition (Fold) . . . . .	17
41	Proposition . . . . .	17
42	Proposition . . . . .	18
19	Definition (Surface) . . . . .	18
20	Definition (Somme connexe) . . . . .	18
21	Definition (Groupe libre) . . . . .	19
47	Proposition . . . . .	19
48	Lemme . . . . .	20
22	Definition . . . . .	20
23	Definition (Graphe de Cayley) . . . . .	20
50	Proposition . . . . .	21
24	Definition (Pushout) . . . . .	21
52	Proposition . . . . .	21
53	Lemme . . . . .	22

## 1 Quotients topologiques

Un espace topologique  $(X, \tau)$  est écrit  $X$  si la topologie est claire.

Le singleton  $\{*\}$  est noté  $*$ .

La boule unité de  $\mathbb{R}^n$  est notée  $D^n$  et la version ouverte sera  $\text{int}(D)^n$ .

### 1.1 La topologie quotient

But : Construire de nouveaux espaces à l'aide d'espaces connus en identifiant des points.

Soit  $X$  un espace,  $Y$  un ensemble et  $q : X \rightarrow Y$  surjective.

**Definition 1 (Topologie quotient)**

*La topologie quotient sur  $Y$  est la topologie des  $V \subset Y$  tel que  $q^{-1}(V)$  est ouvert dans  $X$ .*

**Remarque**

*$q$  est alors continue et on vérifie que c'est une topologie.*

**Exemple**

$X = [0, 1]$  et  $Y = (0, 1) \cup \{*\}$  et  $q$  l'application qui envoie 0 et 1 sur  $*$ .

Alors  $q$  est surjective et donc  $Y$  peut être muni de la topologie quotient et est homéomorphe à un cercle.

On définit  $f : S^1 \rightarrow Y : e^{2\pi it} \mapsto t$  si  $0 < t < 1$  et  $*$  sinon.

**Proposition 3**

Soit  $q : X \rightarrow Y$  une application continue, surjective et ouverte, alors  $q$  est un quotient.

**Proposition 4**

Soit  $V \subset Y$  un sous-ensemble tel que  $q^{-1}(V)$  est ouverte dans  $X$ . Comme  $q$  est surjective, alors  $V = q(q^{-1}(V))$  et c'est un ouvert car  $q$  envoie les ouverts sur les ouverts.

**Proposition 5**

Une composition de quotients est un quotient.

**Theorème 6**

*La topologie quotient est la plus fine qui rend  $q$  continue. De plus, pour  $g : Y \rightarrow Z$ ,  $g$  est continue si et seulement si  $g \circ q$  est continue.*

**Proposition 7**

Si  $q : X \rightarrow Y$  est continue, la preimage d'un ouvert de  $Y$  est ouvert dans  $X$ .

La topologie quotient est celle qui contient le plus d'ouvert possibles.

Clairement, si  $g$  est continue, alors  $g \circ q$  l'est aussi.

Si  $g \circ q$  est continue, soit  $W \subset Z$  un ouvert, alors  $(g \circ q)^{-1}(W) = q^{-1}(g^{-1}(W))$  est ouvert et par définition  $g^{-1}(W)$  est ouvert dans  $Y$ .

**Proposition 8**

Le quotient d'un compact est compact

**Preuve**

L'image d'un compact est compacte. □

**1.2 Relations d'équivalence**

Si  $q : X \rightarrow Y$  est un quotient, on définit sur  $X$  une relation d'équivalence  $\sim$  par  $x \sim x'$  ssi  $q(x) = q(x')$ , alors les points de  $Y$  sont les classes d'équivalence  $[x]$ .

**Definition 2**

Si  $\simeq$  est une relation d'équivalence sur  $X$ , alors  $X/\sim$  est l'espace quotient des classes d'équivalence.

**Proposition 9 (Propriétés universelles)**

Soit  $\sim$  une relation d'équivalence sur  $X$  et  $f : X \rightarrow Z$  tel que  $x \sim x' \implies f(x) = f(x')$ , alors il existe un unique  $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Z$  tel que  $\bar{f} \circ q = f$

**Preuve**

Pour que le triangle commute, on doit poser  $\bar{f}([x]) = f(x)$  et l'application est bien définie par hypothèse et donc unique.

On sait que  $\bar{f}$  est continue ssi  $\bar{f} \circ q$  l'est. □

**Definition 3**

Si  $A \subset X$ , on pose  $x \sim x' \iff x = x'$  ou  $x, x' \in A$ . Le collapse  $X/A$  est l'espace quotient  $X/\sim$

Par exemple  $I/\{0, 1\}$ .

**Exemple**

$$D^n/\partial D^n = D^n/S^{n-1} = S^n$$

Pour deux espaces bien connus, pointés  $(X_1, x_1)$  et  $(X_2, x_2)$ , on peut construire un nouvel espace en identifiant  $x_1$  et  $x_2$ .

**Definition 4 (Reunion disjointe)**

Soit  $I$  un ensemble,  $X_\alpha$  un espace pour chaque  $\alpha \in I$ .

La reunion disjointe  $\bigcup X_\alpha$  est l'ensemble  $\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \times \{\alpha\}$  dont la topologie est engendree par les sous-ensemble de la forme  $U_\alpha \times \{\alpha\}$

**Definition 5**

Soit  $I$  un ensemble et pour tout  $\alpha \in I$ ,  $(X_\alpha, x_\alpha)$  un espace pointe.

Le wedge  $\bigvee_\alpha X_\alpha$  est le collapse de la reunion disjointe ou on identifie les points de base

**Definition 6**

Soit  $X$  un espace. Le cylindre  $Cyl(X)$  est  $X \times I$  et le cone  $CX$  est le collapse du cylindre a la base.

**1.3 Separation et quotients**

On definit sur  $\mathbb{R} \times \{0;1\}$  une relation d'equivalence  $\sim$  par  $(x,0) \sim (x,1)$  si  $x \neq 0$ .

Le quotient est la droite a deux origines dont on ne peut separer les deux origines  $(0,1)$  et  $(0,0)$  par des ouverts.

Regardons le graphe de  $\sim$  dans  $\mathbb{R} \times \{0;1\} \times (\mathbb{R} \times \{0,1\})$  ( ie. une copie de 4 plans)

**Proposition 11**

Si  $X/\sim$  est separe, alors le graphe de  $\sim$  dans  $X \times X$  est ferme.

**Preuve**

La preimage de  $\Delta \subset X/\sim \times X/\sim$  par  $q \times q$  est  $\Gamma_\sim$ .

Comme  $\Delta$  est ferme, sa preimage aussi. □

**Lecture 2: Conditions de Separation**

Sat 26 Feb

**1.4 Conditions de separation du quotient**

On donne une condition necessaire et une condition suffisante pour que le quotient soit separe

**Proposition 12**

Soit  $\sim$  une relation d'equivalence sur un espace  $X$ . Si  $X/\sim$  est separe, le graphe  $\Gamma$  de la relation est ferme dans  $X \times X$

**Preuve**

Si  $X/\sim$  est separe, par un lemme, la diagonale  $\Delta \subset X/\sim \times X/\sim$  est ferme.

Considerons  $q \times q : X \times X \rightarrow X/\sim \times X/\sim$ . Cette application est continue et donc  $(q \times q)^{-1}(\Delta)$  est un ferme de  $X \times X$ . Or cette preimage est l'ensemble des paires de points  $(x, y) \in X \times X$  tq  $q(x) = q(y) \iff x \sim y$ .  $\square$

On donne maintenant une condition suffisante permettant de conclure qu'un quotient est separe.

### Proposition 13

Soit  $\sim$  une relation d'equivalence sur un espace  $X$  separe. Si  $q^{-1}(q(x))$  est compact pour tout point  $x \in X$  et de plus que pour  $F \subset X$  ferme  $q^{-1}(q(F))$  est ferme, alors le quotient est separe.

#### Preuve

Soit  $\bar{x} = q(x)$  et  $\bar{y} = q(y)$  deux points distincts de  $X/\sim$ .

Les saturations  $q^{-1}(\bar{x}), q^{-1}(\bar{y})$  sont des compacts par hypothese.

Comme  $X$  est separe, on peut separer des compacts avec des ouverts disjoints  $U$  et  $V$ .

On a donc

$$q^{-1}(\bar{x}) \subset U, q^{-1}(\bar{y}) \subset V \text{ et } U \cap V = \emptyset$$

Posons  $E = X \setminus U, F = X \setminus V$  deux fermes de  $X$ .

Par hypothese, les saturations  $q^{-1}(q(E))$  et  $q^{-1}(q(F))$  sont fermes. Ainsi  $U' = X \setminus q^{-1}(q(E))$  et  $V' = X \setminus q^{-1}(q(F))$  sont des ouverts. On observe que  $E \subset q^{-1}(q(E)), F \subset q^{-1}(q(F))$ , alors  $U' \subset U, V' \subset V$ .

De plus  $q^{-1}(q(x)) \subset U'$  et  $q^{-1}(q(y)) \subset V'$ .

Il reste a montrer que  $q(U')$  et  $q(V')$  sont ouverts dans  $X/\sim$  et disjoints.

Pour le premier point, il suffit de verifier que  $q^{-1}(q(U'))$  est ouvert dans  $X$ .

On pretend que  $q^{-1}(q(U')) = U'$ .

En effet,  $U' \subset q^{-1}(q(U'))$  est toujours vrai, il faut donc montrer l'inclusion inverse.

Soit  $u \in q^{-1}(q(U'))$ , donc  $q(u) \in q(U')$ . Donc  $q(u) \notin q(E)$  et donc  $u \in U'$

Le meme resultat est vrai pour  $V'$ .

Il faut donc finalement encore montrer que  $q(U')$  et  $q(V')$  sont des voisinages ouverts, de  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  disjoints.

Supposons qu'il existe  $u' \in U', v' \in V'$  tel que  $q(u') = q(v')$ . Alors  $u' \in q^{-1}(q(v')) \subset q^{-1}(q(V')) = V'$ .

Donc  $U' \cap V' \neq \emptyset$ , contradiction.  $\square$

### Lecture 3: Groupes topologiques

Mon 28 Feb

#### Corollaire 14

Soit  $A \subset X$  un sous-espace compact d'un espace  $X$  separe. Alors le collapse  $\mathfrak{X}A$  est separe.

#### Preuve

Il suffit de verifier les proprietes du theoreme.

Soit  $\bar{x} \in \mathfrak{X}A$ .

Si  $x \in A$ ,  $q^{-1}(x) = A$  est compact. Si  $x \notin A$ ,  $q^{-1}(\bar{x}) = \{x\}$  qui est compact.

Soit  $F$  un ferme de  $X$ , alors si  $F \cap A = \emptyset$ , on a que  $q^{-1}(q(F)) = F$  ferme, sinon  $F \cap A \neq \emptyset$  et alors

$$q^{-1}(q(F)) = F \cup A$$

Comme  $A$  est compact et  $X$  separe, alors  $A$  ferme.  $\square$

#### Exemple

Soit  $\sim$  une relation d'equivalence sur  $\mathbb{R}^2$  defini par  $(x, y) \sim (x', y') \iff (x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2$ .

Alors

$$\mathbb{R}^2 \sim$$

est un tore, separe, or la proposition ne s'applique pas car  $q^{-1}(0, 0) = \mathbb{Z}^2$ .

#### Definition 7 (Espaces projectifs)

L'espace projectif reel  $\mathbb{R}P^n$  est le quotient de  $S^n$  par la relation antipodale  $x \sim y \iff x = \pm y$  pour  $x, y \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

#### Exemple

—  $\mathbb{R}P^0 = \mathfrak{S}^0 \sim = *$ ,  $\mathbb{R}P^1 = \mathfrak{S}^1 \sim \simeq S^1$ .

— De plus  $\mathbb{R}P^2 = S^2 / \sim$  est le plan projectif

#### Proposition 17

$\mathbb{R}P^n$  est compact et separe

Suit immediatement des propositions.

L'analogue complexe donne

#### Definition 8 (Espace projectif complexe)

L'espace projectif complexe  $\mathbb{C}P^n$  est le quotient de  $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  par la relation  $x \sim y \iff \exists \alpha \in S^1$  tel que  $x = \alpha y$ .

De meme, pour les quaternions  $\mathbb{H}$ , on peut definir  $\mathbb{H}P^n$ , pour les octonions



on peut construire  $\mathbb{O}P^0, \mathbb{O}P^1 \simeq S^8, \mathbb{C}P^2$

## 1.5 Quotients par des actions de groupe

### Definition 9 (Groupe topologique)

Un groupe topologique est un groupe  $G$  tel que les applications de multiplication  $\mu : G \times G \rightarrow G$  et l'inverse  $\iota : G \rightarrow G$  sont continues.

Tout groupe peut être vu comme un groupe topologique discret.

### Exemple

Le cercle unité  $S^1 \subset \mathbb{C}$  muni de la multiplication complexe est un groupe topologique

### Remarque

Les seules sphères qui sont des groupes topologiques sont  $S^0, S^1, S^3$

### Lemme 20

Si  $H < G$  est un sous-groupe d'un groupe topologique  $G$ , la topologie induite en fait un groupe topologique.

### Definition 10

Une action d'un groupe topologique  $G$  sur un espace  $X$  est une application  $\mu : X \times G \rightarrow X$  telle que

$$\mu(x, 1_G) = x \forall x \in X \text{ et } \mu(x, gg') = \mu(\mu(x, g), g')$$

### Definition 11

Soit  $\mu$  une action de  $G$  sur  $X$ , l'espace des orbites  $\mathfrak{X}G$  et l'espace quotient de  $X$  par la relation  $x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tel que } y = \mu(x, g)$

### Remarque

Si  $H < G$  est un groupe topologique, alors  $H$  agit sur  $G$  par multiplication à droite et  $\mathfrak{S}H$  est l'espace des orbites  $gH$ . Si  $H$  est un sous-groupe normal, ce quotient est un groupe.

### Proposition 22

Soit  $\mu$  une action d'un groupe topologique  $G$  sur un espace  $X$ , alors

1.  $q : X \rightarrow \mathfrak{X}G$  est ouverte
2. Si  $X$  est compact, le quotient est compact
3. Si  $X$  et  $G$  sont compact et séparés, alors  $\mathfrak{X}G$  aussi.

### Preuve

Soit  $U \subset X$  ouvert,  $q(U)$  est ouvert car  $q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{g \in G} U \cdot g$  et  $U \cdot g$  est ouvert car la translation est continue et est même un homeomorphisme.

La propriété 2 est immédiate.

On considère  $X \times X \times G \rightarrow X \times X$  en envoyant  $(x, y, g) \mapsto (x, yg)$ , cette application est continue.

Le graphe  $\Gamma$  de la relation définie par  $\mu$  est l'image de  $\Delta \times G$ .

Comme  $X$  est séparé,  $\Delta$  est fermé donc compact et  $G$  est compact.

Ainsi  $\Gamma$  est compact dans  $X \times X$  séparé donc  $\Gamma$  est fermé.

Soient  $xG$  et  $yG$  deux orbites différentes, ie.  $(x, y) \notin \Gamma$ .

Il existe donc des ouverts  $U, V$  tels que  $U \times V \cap \Gamma = \emptyset$ .

Comme  $q$  est ouverte,  $q(U), q(V)$  sont des voisinages ouverts des orbites  $xG$  et  $yG$  respectivement. On conclut en remarquant que ces images sont disjointes.

Sinon on aurait  $zG$  commun, ie.  $zg \in U, zg' \in V$  pour  $g, g' \in G$  et alors  $(zg, zgg^{-1}g') \in \Gamma \cap (U \times V)$   $\square$

## 1.6 $SO(n)$

### Proposition 23

Soit  $G$  compact et  $X$  séparé. Soit  $\mu$  une action transitive de  $G$  sur  $X$ .

Alors, si  $G_x$ , alors

$$\mathfrak{S}G_x = X$$

pour tout  $x \in X$ .

### Preuve

On définit  $\mu_x : G \rightarrow X$  envoyant  $g \mapsto xg$ , continue.

On observe que  $\mu_x$  envoie  $G_x$  sur  $x$  et par transitivité,  $\mu_x$  est surjective.

Par la propriété universelle du quotient,  $\mu_x$  passe au quotient.

$\bar{\mu}_x$  est une bijection continue. C'est un homeo car  $\mathfrak{S}G_x$  est compact,  $X$  séparé.  $\square$

## Lecture 4: Attachements de Cellules

Mon 07 Mar

### 1.7 Recollements

On construit de nouveaux espaces à l'aide de pièces plus simples.

On se donne  $f : A \rightarrow X, g : A \rightarrow Y$  deux applications. On recolle  $X$  et  $Y$  le long de  $A$

#### Definition 12 (Recollement)

Le recollement de  $X$  et  $Y$  le long de  $A$  est le quotient de  $X \amalg Y$  par la relation d'équivalence engendrée par  $f(a) \sim g(a) \forall a \in A$

**Remarque**

Il ne suffit pas d'identifier  $f(a) \sim g(a)$  pour que la relation soit une relation d'équivalence.

Pour garantir la transitivité, on a des zigzags d'équivalence  $f(a) \sim g(a) = g(b) \sim f(b) = f(c) \sim g(c) \dots$

**Exemple**

Si  $A = *$ ,  $f(*) = x_0 \in X$ ,  $g(*) = y_0 \in Y$ , alors le recollement  $X \cup_* Y$  est le wedge  $X \vee Y$

On notera le recollement  $X \cup_A Y$ .

Si  $q : X \amalg Y \rightarrow X \cup_A Y$  est le quotient, alors l'inclusion  $i_1 : X \rightarrow X \amalg Y$  induit  $i = q \circ i_1 : X \rightarrow X \cup_A Y$  et de même pour l'inclusion de  $Y$ .

**Proposition 26**

Le recollement  $X \cup_A Y$  est le pushout de  $Y \leftarrow A \rightarrow X$ .

**Preuve**

On doit montrer l'existence et l'unicité de  $\theta$ .

Puisque chaque élément de  $X \cup_A Y$  admet un représentant dans  $X$  ou  $Y$ , on doit poser  $\theta([x]) = \alpha(x) \forall x \in X$  et  $\theta([y]) = \beta(y) \forall y \in Y$ .

On montre l'existence.

Posons  $\Theta : X \amalg Y \rightarrow Z$  l'application déterminée par  $\alpha$  et  $\beta$ .

On vérifie que  $\Theta$  est compatible avec  $\sim$ . Soit  $a \in A$ , alors  $\Theta(f(a)) = \alpha(f(a)) = \beta(g(a)) = \Theta(g(a))$ .

Ainsi  $\Theta$  passe au quotient et induit  $\theta$ , qui est donc bien continue.  $\square$

Des maintenant, on suppose que  $g : A \subset Y$  est l'inclusion d'un sous-espace fermé.

**Lemme 27**

Soit  $C \subset Y$ , alors la saturation de  $C$  est

$$f(C \cap A) \amalg (C \cup f^{-1} \circ f(C \cap A))$$

**Preuve**

On va regarder ce qui se passe pour tout  $c \in C$ .

Si  $c \notin A$ , alors  $q^{-1}(q(c)) = \{c\}$ , sinon  $q^{-1}(q(c))$  contient  $f(c) \in X$  et  $f^{-1}(f(c)) \subset Y$   $\square$

**Lemme 28**

Si  $C \subset X$ ,  $q^{-1}(q(C)) = C \amalg f^{-1}(C) \subset X \amalg Y$

**Preuve**

Comme ci-dessus, si  $c \in C$  n'est pas dans l'image de  $f$ , on a  $q^{-1}(q(c)) = \{c\}$ , sinon on a  $c \in X$  et  $f^{-1}(c) \subset A \subset Y$   $\square$

**Proposition 29**

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces separes,  $g : A \subset Y$  l'inclusion d'un compact, alors  $X \cup_A Y$  est separe.

**Preuve**

On observe que  $X \coprod Y$  est separe. Avant d'appliquer le critere de separabilite, on montre que l'application quotient est fermee. Comme un ferme de  $X \coprod Y$  est la reunion disjointe de deux fermes on a deux cas.

Si  $C \subset X$  ferme, alors  $q(C)$  est ferme  $\iff q^{-1}(q(C))$  est fermee. Par le lemme ci-dessus,

$$q^{-1}(q(C)) = C \coprod f^{-1}(C)$$

qui sont fermes.

Si  $C \subset Y$ , alors  $q^{-1}(q(C)) = f(C \cap A) \coprod (C \cup f^{-1}(f(C \cap A)))$   $\square$

On a  $f(C \cap A)$  compact et donc ferme puisque  $Y$  est separe.

Pour conclure, on verifie les deux conditions du critere.

Pour conclure, on verifie les deux conditions du critere, la saturation d'un ferme est fermee grace aux preparatifs.

Soit  $z \in X \coprod Y$ , on doit montrer que  $q^{-1}(q(z))$  est compact, les lemmes ci-dessus permettent de conclure parce que si  $z = a \in A$ ,  $f^{-1}(f(a))$  est un ferme d'un compact et est donc compacte.

**1.8 Attachement de cellules**

Ici  $g : A \subset CA = A \times I / A \times 1$ .

Soit  $f : A \rightarrow X$ , le recollement  $X \cup_A CA$  aussi note  $X \cup_f CA$  est appele attachement d'une  $A$ -cellule sur  $X$  le long de  $f$ .

Si  $A = S^{n-1}$  alors cet attachement est celui d'une  $n$ -cellule

**Remarque**

$CS^{n-1} \simeq D^n$ , on note  $X \cup_f CS^{n-1} = X \cup_f e^n$  ou  $X \cup_f D^n$  et on appelle  $e^n \simeq D^n$  une  $n$ -cellule (fermee.)

**Proposition 31**

Si  $X$  est separe et  $A$  est compact et separe, alors  $X \cup_f CA$  est separe.

Si en plus  $X$  est compact

**Preuve**

Le premier point suit de la proposition precedente car  $CA$  est separe, le 2eme point suit du critere de compacite car  $X \coprod Ca$  est compact.  $\square$

**Definition 13 (Suspension)**

La suspension de  $A$  est le quotient  $A \times I / (a, 0) \sim (a', 0)$  et  $(a, 1) \sim (a', 1)$

**Lecture 5: Homotopies et groupe fondamental**

Sat 12 Mar

**2 Homotopies et Groupe Fondamental****2.1 Homotopie****Definition 14 (Homotopie entre applications)**

Soient  $f, g : X \rightarrow Y$  des applications. On dit que  $f$  et  $g$  sont homotopes et on note  $f \simeq g$  s'il existe une application  $H : X \times I \rightarrow Y$  tel que  $H(-, 0) = f$  et  $H(-, 1) = g$ .

On appelle  $H$  une homotopie.

**Proposition 32**

La relation  $\simeq$  est une relation d'équivalence.

**Preuve****Reflexivite**

Suit du fait qu'on peut définir une homotopie constante.

$$H : X \times I \rightarrow Y : (x, t) \mapsto f(x)$$

**Symetrie**

La symetrie suit du fait qu'on peut parcourir une homotopie dans l'autre sens.

Ainsi, soit  $H : X \times I \rightarrow Y$  une homotopie entre  $f$  et  $g$ . On pose

$$G : X \times I \rightarrow Y : (x, t) \mapsto H(x, 1 - t)$$

**Transitivite**

Supposons que  $H : X \times I \rightarrow Y, G : X \times I \rightarrow Y$  sont des homotopies,  $f \simeq g \simeq h$ . On construit une homotopie  $K : X \times I \rightarrow Y$  entre  $f$  et  $h$

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

On voit que  $K$  est continue et montre que  $f \simeq h$ . □

**Definition 15 (Classes d'homotopie)**

On note  $[X, Y]$  l'ensemble des classes d'homotopies d'applications  $f : X \rightarrow Y$ .  
C'est donc  $C(X, Y) / \simeq$ .

**Lecture 6: Homotopies**

Mon 14 Mar

**Definition 16 (Espaces Homotopes)**

Deux espaces  $X$  et  $Y$  sont homotopes ou homotopiquement équivalents, note  $X \simeq Y$ , s'il existe  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  tel que

$$g \circ f \simeq \text{Id}_X \text{ et } f \circ g \simeq \text{Id}_Y$$

On dit que  $f$  et  $g$  sont des équivalences homotopiques et qu'elles sont inverses homotopiques l'une de l'autre.

**Proposition 33**

$$CX \simeq *$$

**Preuve**

Posons  $CX = X \times I / X \times 0$ .

On pose  $f : * \rightarrow CX$  par  $f(*) = [x, 1]$  et on prend  $g : CX \rightarrow *$ .

On a  $g \circ f = \text{Id}_*$ , il reste à voir que  $f \circ g \simeq \text{Id}_{CX}$ . On construit une homotopie  $H : CX \times I \rightarrow CX$ , défini par

$$H([x, t], s) \mapsto [x, ts]$$

C'est une application ( trivialement bien définie) et c'est une homotopie entre  $f \circ g \simeq \text{Id}_{CX}$  □

**Remarque**

Si  $f$  et  $g$  sont des applications pointées  $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  qui sont homotopes au sens non pointé, il est faux en général que  $f \simeq_* g$  au sens pointé.

Par exemple  $f, g : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ ,  $f$  est donnée par  $a$  et  $g$  est donnée par  $b \star a \star b^{-1}$  (concatenation).

On a que  $f \simeq g$  pour  $f_t : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$  donnée par  $b|_{[1-t, 1]} \star a \star \bar{b}|_{[0, t]}$

**2.2 Attachement de cellules**

But :  $f \simeq g : A \rightarrow X$ , alors

$$X \cup_f CA \simeq X \cup_G CA$$

**Proposition 35**

Si  $f, g : A \rightarrow X$  sont homotopes, alors  $X \cup_f CA \simeq X \cup_g CA$

**Preuve**

Pour comparer les deux espaces  $Y = X \cup_f CA$  et  $Y' = X \cup_g CA$ , on construit des applications  $h : Y \rightarrow Y'$  et  $k : Y' \rightarrow Y$ .

On définit  $h : Y \rightarrow Y'$  par la propriété universelle du pushout.

On choisit  $\iota' : X \rightarrow Y'$  l'application donnée par la construction de  $Y'$ .

On pose

$$\alpha : CA \rightarrow Y'[a, t] \mapsto \begin{cases} H(a, 2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ [a, 2t - 1] & \text{si } t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si  $t = 0$ , alors  $H(a, 0) = f(a)$  donc le diagramme commute.

Si  $t = \frac{1}{2}$ ,  $H(a, 1) = g(a)$ . On construit  $k$  comme  $h$ , mais avec  $H(-, 1 - t)$ .

On doit montrer que  $k \circ h \simeq \text{Id}_Y$  (et de même  $h \circ k \simeq \text{Id}_{Y'}$ )  $\square$

**Corollaire 36**

Si  $f, g : S^{n-1} \rightarrow X$  et  $f \simeq g$ , alors  $X \cup_f e^n \simeq X \cup_g e^n$ .

**Corollaire 37**

Si  $f : A \rightarrow X$  est homotope à  $c_x$  constante, alors  $X \cup_f CA \simeq X \vee \sum A$

**2.3 Homotopie et  $\pi_0$** 

Soit  $S_0 = \{\pm 1\}$  sphere unite de  $\mathbb{R}$ .

On étudie les applications pointées de  $(S_0, 1) \rightarrow (X, x_0)$ . Ainsi  $f(1) = x_0$  et  $f(-1) = x$  arbitraire.

Deux telles applications  $f$  donnée par  $x$  et  $f'$  donnée par  $x'$  sont homotopes (au sens pointé) s'il existe une homotopie pointée

$$H : S^0 \times I \rightarrow X$$

$H$  est donc simplement donnée par  $H(-1, t)$ , un chemin dans  $X$  de  $x$  vers  $x'$ .

Donc  $x$  et  $x'$  sont dans la même composante connexe par arcs.

**Proposition 38**

L'ensemble  $\pi_0 X$  des composantes connexes par arcs est en bijection avec  $[S_0, X]_*$

**2.4 Invariance Homotopique**

Soit  $f : X \rightarrow Y$ , elle induit une application

$$f_* : [A, X] \rightarrow [A, Y]$$

$$[g] \mapsto [f \circ g]$$

**Preuve**

On veut montrer que l'application ci-dessus est bien définie.

Si  $g \sim g'$  via l'homotopie  $G$ , alors  $f \circ g \simeq f \circ g'$  via  $f \circ G$  □

**Proposition 39**

Si  $f \simeq f' : X \rightarrow Y$ , alors  $f_* = f'_*$ .

**Preuve**

On choisit  $H : X \times I \rightarrow Y$  une homotopie entre  $H(-, 0) = f$  et  $H(-, 1) = f'$ .

On veut montrer que  $f \circ g \simeq f' \circ g$ .

On construit  $G : A \times I \rightarrow X \times I \rightarrow Y$  en envoyant

$$(a, t) \mapsto (g(a), t) \mapsto H(g(a), t)$$

□

**Corollaire 40**

Si  $X \simeq Y$ , alors  $[A, X] \simeq [A, Y]$  comme ensembles.

**Preuve**

On a  $f : X \rightarrow Y$  et  $f' : Y \rightarrow X$  inverses homotopes l'une de l'autre. Alors

$[A, X] \rightarrow [A, Y] \rightarrow [A, X]$  □

## Lecture 7: Groupe Fondamental

Mon 21 Mar

### 2.5 Groupe Fondamental

Un lacet

$$\alpha : I \rightarrow X$$

est une application satisfaisant  $\alpha(0) = x_0 = \alpha(1)$  ce qui signifie qu'il existe une application induite

$$\bar{\alpha} : S^1 \rightarrow X$$

Et on note alors

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1 X = [(S^1, 1), (X, x_0)]$$

$\pi_1 X$  a une structure de groupe donnée par la concaténation de lacets  $\alpha \star \beta$

**Definition 17 (Pinch and Fold)**

L'application pinch

$$pinch : \sum A = A \times I / \sim \rightarrow \sum A /_{A \times \frac{1}{2}} \simeq \sum A \vee \sum A$$



**Definition 18 (Fold)***Le pliage est une application*

$$\nabla : X \vee X \rightarrow X$$

*definie par la propriete universelle du pushout du diagramme  $X \leftarrow * \rightarrow X$  avec le cone  $\text{Id}_X : X \rightarrow X$*

La concatenation de deux lacets  $\alpha, \beta : S^1 \rightarrow X$  est representee par

$$\alpha * \beta : S^1 \xrightarrow{\text{pinch}} S^1 \vee S^1 \xrightarrow{\alpha \vee \beta} X \vee X \xrightarrow{\nabla} X$$

On a vu que la concatenation equipe  $[S^1, X]_*$  d'une structure de groupe.

L'associativite du groupe fondamental revient a dire que le diagramma suivant commute : A REMPLIR

En fait le groupe fondamental  $\pi_1$  est un foncteur  $\mathbb{T}_* \rightarrow \text{Gr}$ , des espaces pointes vers les groupes

**Proposition 41**

*Une application pointee  $f : X \rightarrow Y$  induit un homomorphisme de groupes  $f_* : \pi_1 X \rightarrow \pi_1 Y$*

**Preuve**

*On sait que la postcomposition avec  $f$  induit une application  $f_* : [S^1, X]_* \rightarrow [S^1, Y]_*$ .*

*On montre que c'est un homomorphisme.*

*Soient  $\alpha, \beta : S^1 \rightarrow X$ , pointees, alors le diagramme suivant commute A REMPLIR*

*On a que 1 et 2 commutent et 3 commute aussi par la propriete universelle  $\square$*

On souhaite calculer  $\pi_1(X \times Y)$ , on note  $C_*(S^1, X)$  l'ensemble des applications pointees  $\alpha : S^1 \rightarrow X$ .

Le groupe  $\pi_1(X)$  en est un quotient  $[S^1, X]_* = C_*(S^1, X) / \simeq$ .

La propriete universelle du produit est qu'une application  $\omega : S^1 \rightarrow X \times Y$  est donnee par ses projections  $p_1 \circ \omega$  et  $p_2 \circ \omega$ , ie.

$$\begin{aligned} F : C_*(S^1, X) \times C_*(S^1, Y) &\rightarrow C_*(S^1, X \times Y) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (\omega : S^1 \rightarrow X \times Y) \end{aligned}$$

est une bijection d'inverse

$$G : C_*(S^1, X \times Y) \rightarrow C_*(S^1, X) \times C_*(S^1, Y)$$

donne par la projection.

### Proposition 42

Le foncteur  $\pi_1$  preserve les produits.

#### Preuve

Les bijections  $F$  et  $G$  passent au quotient.

On montre que si  $\alpha \simeq \alpha', \beta \simeq \beta'$ , alors  $F(\alpha, \beta) \simeq F(\alpha', \beta')$  et de meme, si  $\omega \simeq \omega'$ , alors la postcomposition par  $p_i$  donne des applications homotopes.

La compatibilite avec la structure de groupes vient du fait que  $G$  est definie par  $(p_1)_*$  et  $(p_2)_*$  sur les deux composantes.  $\square$

## 2.6 Surfaces

### Definition 19 (Surface)

Une surface  $S$  est un espace topologique connexe par arcs, compact, sans bord tel que tout point  $s \in S$  admet un voisinage ouvert  $U$  homeomorphe a  $D^2$  avec  $\partial U \simeq S^1$

### Definition 20 (Somme connexe)

Soient  $S$  et  $T$  deux surfaces, la somme connexe  $S \# T$  est la surface obtenue en choisissant  $s \in S, t \in T$ , des voisinages  $s \in U \simeq D^2$  et  $t \in V$  et un homeomorphisme  $f : \partial U \rightarrow S^1 \rightarrow \partial V$  et en recollant

$$S \# T = (S \setminus U) \amalg_{f(x) \simeq f(x)} \quad \forall x \in \partial U$$

### Remarque

$S \# T$  est bien defini ( sans preuve), de plus

$$T \# S^2 \simeq T$$

### Exemple

$T^2 \# T^2$  est une surface de genre 2, un tore a deux trous.

## Lecture 8: Tore a deux trous

Mon 28 Mar

### Exemple

Posons  $T = S = T^2$ , on construit  $T^2 \# T^2$ , un tore a deux trous.

$$T^2 = I \times I / \sim = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2.$$

On va choisir des points  $s, t$  dans  $S$  et  $T$  respectivement de coordonnees  $(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$  et  $(\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$ .

On choisit  $U$  et  $V$  comme deux gouttes autour de  $s$  respectivement  $V$ .

Le quotient du pentagone par  $A \sim A'$  donne un espace homeomorphe a  $I \times I \setminus U$ .

## Lecture 9: Theorie combinatoire des groupes

Mon 28 Mar

### 2.7 Bouteille de Klein

Soit  $K$  la bouteille de Klein, quotient de  $I^2$ .  
On comprend que  $K$  s'écrit comme

$$K = (S_a^1 \vee S_b^1) \cup_{abab^{-1}} e^2$$

On découpe  $I \times I$  le long de deux segments verticaux le long de  $(\frac{1}{3}, t)$  et  $(\frac{2}{3}, t)$   
Ainsi,  $K$  est un quotient de trois bandes verticales, et aussi de deux bandes  $A_2$   
et  $A_1 \amalg A_3/b' \sim b''$ .

## 3 Theorie Combinatoire des Groupes

But : Decrire et manipuler des groupes de maniere agreable pour pouvoir construire des pushouts.

### 3.1 Groupes libres

#### Exemple

Le groupe ayant un seul generateur  $a$ , sujet a aucune relation autre que les axiomes de groupe est le groupe  $\{a^n | n \in \mathbb{Z}\} / a^0 = 1 \simeq \mathbb{Z}$ .

On observe que pour tout groupe  $G$   $\text{hom}_{\text{Gr}}(F(a), G) \simeq \text{hom}_{\text{Set}}(\{a\}, UG)$ .

#### Definition 21 (Groupe libre)

Soit  $I$  un ensemble, le groupe libre  $F(I)$  a  $I$  generateur est obtenu en associant a chaque indice  $\alpha \in I$  un generateur  $x_\alpha \in F(I)$ .

Tous les mots sont obtenus par concatenation de  $x_\alpha^n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$  avec les identifications  $x_\alpha^0 = 1, 1 \cdot x_\alpha = x_\alpha = x_\alpha \cdot 1$  et  $x_\alpha x_\alpha^{-1} = 1$

De la construction de  $F(I)$ , on comprend qu'un homomorphisme  $\phi : F(I) \rightarrow G$  est determine et meme equivalent a la donnee des images  $g_\alpha = \phi(x_\alpha)$ .

Ces isomorphismes etant naturels, on a que

#### Proposition 47

Le foncteur  $F(-)$  est adjoint a gauche de  $U$ .

Le groupe libre abelien est un quotient de  $F(a, b)$  via  $\phi : F(a, b) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  determine par  $\phi(a) = (1, 0)$  et  $\phi(b) = (0, 1)$ .

$\ker \phi$  contient  $aba^{-1}b^{-1} = [a, b]$ , ainsi, il contient aussi  $[a, b]^n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$  qui forment un sous-groupe cyclique infini dans  $F(a, b)$ .

Cependant, ce sous-groupe n'est pas normal et en fait  $\ker \phi$  est le sous-groupe

normal engendre par  $[a, b]$ .

### 3.2 Presentations

#### Lemme 48

*Tout groupe est quotient d'un groupe libre.*

#### Preuve

Soit  $G$  un groupe et  $\{g_\alpha | \alpha \in I\}$  un ensemble de generateurs ( par exemple tous les  $g \in G$  ).

On definit  $\phi : F(I) \rightarrow G : x_\alpha \mapsto g_\alpha$ , alors  $\phi$  est surjective.  $\square$

#### Definition 22

Soit  $\phi : F(I) \rightarrow G$  un homomorphisme surjectif. Un element de  $\ker \phi$  represente par un mot  $r_\beta$  en les generateurs  $x_\alpha$  est un relateur.

Pour un choix de generateurs,  $\beta \in J$  de  $\ker \phi$  comme sous-groupe normal de  $F(I)$  on appelle  $\langle x_\alpha, \alpha \in I | r_\beta, \beta \in J \rangle$  une presentation de  $G$ .

Chaque relateur correspond a une relation  $r_\beta = 1$  dans le quotient de  $F(I)$

Autrement dit  $G$  est isomorphe a ce quotient.

### 3.3 Graphes de Cayley

On cherche a represente geometriquement un groupe donne par une presentation.

#### Definition 23 (Graphe de Cayley)

Soit  $G = \langle x_\alpha | r_\beta \rangle$ , le graphe de Cayley  $\Gamma(G, \{x_\alpha\})$  est le graphe oriente et colore dont les sommets sont  $g \in G$  et les aretes relient  $g$  et  $gx_\alpha$ , oriente de  $g$  vers  $gx_\alpha$ , de couleur  $\alpha$ .

#### Remarque

Comme espace topologique, ce graphe est un quotient d'intervalles, un pour chaque arete, et on identifie les sommets a l'element du groupe voulu.

## Lecture 10: Amalgamations

Mon 04 Apr

### 3.4 Produits libres

Soit  $G = \langle x_\alpha | r_\beta \rangle$  et  $H = \langle y_\gamma | s_\delta \rangle$ , on forme le produit libre

$$G * H = \langle x_\alpha, y_\gamma | r_\beta, s_\delta \rangle$$

#### Proposition 50

Le produit libre  $G * H$  est le coproduit de  $G$  et  $H$  dans la catégorie des groupes, ie.  $\text{hom}(G * H, M) \simeq \text{hom}(G, M) \times \text{hom}(H, M)$  pour tout groupe  $M$ .

##### Preuve

Soit  $G \hookrightarrow G * H \hookleftarrow H$ .

Soit  $\omega : G * H \rightarrow M$ , alors on peut lui associer  $\omega \circ \iota$  et  $\omega \circ j$ .

Conversement, étant donné  $\phi : G \rightarrow M$  et  $\psi : H \rightarrow M$ , montrons que  $\exists ! \omega : G * H \rightarrow M$  tel que  $\omega \circ \iota = \phi$  et  $\omega \circ j = \psi$ .

Pour l'existence, on définit  $\tilde{\omega} : F(x_\alpha, y_\gamma) \rightarrow M$ .

Comme  $\phi(r_\beta) = 1 = \psi(s_\delta)$ ,  $\tilde{\omega}$  passe au quotient et induit une application  $\omega : G * H \rightarrow M$ .

L'unicité de  $\omega$  suit du fait que ce soit une colimite.  $\square$

#### Remarque

On définit de la même façon un produit libre d'un nombre arbitraire de groupes.

### 3.5 Pushouts de groupes

Soient  $\alpha : K \rightarrow G$  et  $\beta : K \rightarrow H$  deux homomorphismes, on veut construire le pushout de  $G \leftarrow K \rightarrow H$

#### Definition 24 (Pushout)

Le pushout ou amalgame  $G *_K H$  est le quotient de  $G * H$  par le sous-groupe normal engendré par les éléments de la forme  $\iota(\alpha(x))j(\beta(x)^{-1})$

On appelle aussi  $i$  et  $j$  les compositions  $G \rightarrow G * H \rightarrow G *_K H$  et  $H \rightarrow G * H \rightarrow G *_K H$ .

On a ainsi un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\alpha} & G \\ \beta \downarrow & & \downarrow \iota \\ H & \xrightarrow{j} & G *_K H \end{array}$$

#### Proposition 52

Le pushout est un pushout.

## Preuve

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \xrightarrow{\alpha} & G & & \\
 \beta \downarrow & & \downarrow \iota & \searrow \phi & \\
 H & \xrightarrow{j} & G *_K H & \xrightarrow{\exists! \omega} & M \\
 & \searrow \psi & & & 
 \end{array}$$

On construit  $\tilde{\omega} : G *_K H \rightarrow M$  par la propriété universelle du produit libre (à l'aide de  $\phi$  et  $\psi$ ).

Cet homomorphisme  $\tilde{\omega}$  passe au quotient parce que  $\tilde{\omega}(\iota(\alpha(x))j(\beta(x))^{-1}) = \psi(\alpha(x))\psi(\beta(x))^{-1} = 1$  et on a une application induite  $\omega : G *_K H \rightarrow M$ .

L'unicité est immédiate.  $\square$

## 4 Seifert-van Kampen

On souhaite calculer le groupe fondamental d'un pushout d'espaces et l'identifier.

### 4.1 Groupe fondamental d'un recollement

Soient  $A, B \subset X$ ,  $X = A \cup B$ , deux sous-espaces ouverts tels que  $C = A \cap B$  est connexe par arcs.

On choisit  $x_0 \in C$  comme point de base pour  $C, A, B$  et  $X$ .

On appelle  $\iota : A \subset X, j : B \subset X, \alpha : C \subset A, \beta : C \subset B$ .

On obtient alors un pushout :

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\alpha} & A \\
 \beta \downarrow & & \downarrow \iota \\
 B & \xrightarrow{j} & X
 \end{array}$$

On va montrer que

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(C, x_0) & \xrightarrow{\alpha_*} & \pi_1(A, x_0) \\
 \beta_* \downarrow & & \downarrow \iota_* \\
 \pi_1(B, x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_1(X, x_0)
 \end{array}$$

est un pushout.

Par la propriété universelle du pushout, ce carré nous fournit  $\phi : \pi_1(A, x_0) *_{\pi_1(A, x_0)} \pi_1(B, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$

### Lemme 53

$\phi$  est surjectif.

### Preuve

Soit  $\gamma : I \rightarrow X$  un lacet base en  $x_0$ .

Le recouvrement de  $X$  par  $A$  et  $B$  donne un recouvrement ouvert  $\gamma^{-1}(A), \gamma^{-1}(B)$  de l'intervalle  $I$ , un espace metrique compact.

donc il existe un nombre de lebesgue  $\delta > 0$  tel que tout sous-ensemble de  $I$  de diametre  $< \delta$  est contenu dans  $\gamma^{-1}(A)$  ou  $\gamma^{-1}(B)$  ( ou les deux.)

On choisit donc  $n > \frac{1}{\delta}, n \in \mathbb{N}$  de sorte que  $\gamma|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}$  est un chemin dans  $A$  ou dans  $B$ .

Pour alterner les images dans  $A$  et dans  $B$ , on concatene les chemins qui se suivent dans le meme ouvert pour choisir  $s_0 = 0 < s_1 = \frac{k_1}{n} < \dots < \frac{k_r}{n} = 1$  de telle sorte que  $\gamma$  envoie  $[s_0, s_1]$  dans ( disons)  $A$ ,  $[s_1, s_2]$  dans  $B$  etc.

On definit  $\gamma_i = \gamma|_{[s_{i-1}, s_i]}$ .

Comme  $C$  est connexe par arcs, il existe des chemins  $\gamma^i$  dans  $C$ , allant de  $x_0$  a  $\gamma(s_i)$ .

On decompose a homotopie pres, le chemin  $\gamma$  en concatenation de lacets ( d'abord des chemins) .

$$\begin{aligned} \gamma &\simeq \gamma_1 \star \gamma_2 \star \dots \star \gamma_r \\ &\simeq \gamma_1 \star \overline{\gamma^1} \star \gamma^1 \star \dots \\ &\simeq \underbrace{(\gamma_1 \star \overline{\gamma^1})}_{\omega_1} \star \underbrace{(\gamma^1 \star \gamma_2 \star \overline{\gamma^2})}_{\omega_2} \star \dots \end{aligned} \quad \square$$

ou  $\omega_1$  est un lacet base en  $x_0$  et entierement contenu dans  $A$  ou dans  $B$ .

Alors  $[\gamma] = [\omega_1] \cdot \dots \cdot [\omega_r] = i_*(\omega_1)j_*(\omega_2) \dots$

Pour montrer que  $\phi$  est un isomorphisme, on cherche a identifier le noyau de  $\pi_1 A * \pi_1 B \rightarrow \pi_1 A *_{\pi_1} C \pi_1 B \rightarrow \pi_1 X$ .

Soit  $\gamma$  la concatenation de lacets  $\gamma_1 * \dots * \gamma_r$ , avec  $\gamma_{2i+1}$  dans  $A$ , et  $\gamma_{2i}$  dans  $B$ . On suppose que  $[\gamma] = 1$  dans  $\pi_1 X$ , ie. que  $\gamma \simeq c_{x_0} \iff \exists H : I^2 \rightarrow X$  entre  $\gamma$  et  $c_{x_0}$ .

Par le meme argument de nombre de lebesgue, on decoupe le carre en rectangles que  $H$  envoie entierement dans  $A$  ou dans  $B$ .