7.1. Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite de nombres réels positifs qui est <u>sous-additive</u> au sens que:

$$x_{n+m} \leq x_n + x_m, \qquad \forall m, n \in \mathbf{N}.$$

Démontrer que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge. Mais donner un exemple qui montre que $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ n'est pas nécessairement monotone!

7.2. 1.) Montrer que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par $x_0 = 0, x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n > 0$ est de Cauchy.

2.) Montrer que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par $x_n = (-1)^n$, $n \geq 0$ n'est pas de Cauchy.

3.) Montrer que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée récursivement par $x_{n+1} = \frac{x_n+1}{x_n+2}$, $n \geq 0,\ x_0 = 1$ est de Cauchy et calculer sa limite.

4.) On considère la suite donnée par $8, 8.8, 8.88, 8.888, 8.8888, \ldots$. Est-ce que cette suite converge et, si oui, quelle est sa limite? Justifier votre réponse.

7.3. Soit $x_n = \sqrt[n]{n}, n = 1, 2, \ldots,$ et $x_0 = 0$. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

<u>Indication:</u> Démontrer que $\forall \delta > 0$, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\delta)^n} = 0$ et conclure.