Analyse avancée II | Semaine du 2021-04-19 au 2021-04-23
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

# Série 15 du lundi 19 avril 2021

## Exercice 1.

Notons $U := \mathbb{R}_+^* \times ]0,\pi[ \times ]0,2\pi[$ ; on considère l'application $\boldsymbol{f} : U \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1) $\boldsymbol{f}$ est-elle un difféomorphisme local ?
2) Trouver, si elle est définie, l'application réciproque de $\boldsymbol{f}$.
3) Donner l'ensemble $\boldsymbol{f}^{-1}(]0,+\infty[^3)$ et calculer la matrice jacobienne de $\boldsymbol{f}^{-1}$. Trouver le jacobien de $\boldsymbol{f}^{-1}$ en fonction du jacobien de $\boldsymbol{f}$.

*Solution :*

1) La matrice jacobienne de $\boldsymbol{f}$ est

$$\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Donc

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(r,\theta,\phi)) &= r\cos(\theta)\cos(\phi) r\sin(\theta)\cos(\phi)\cos(\theta) \\ &\quad + r\sin(\theta)\sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\phi) r\sin(\theta) \\ &\quad + r\sin(\theta)\sin(\phi) r\cos(\theta)\sin(\phi)\cos(\theta) \\ &\quad + \sin(\theta)\cos(\phi) r\sin(\theta)\cos(\phi) r\sin(\theta) && (3) \\ &= r^2\sin(\theta)\big(\cos^2(\phi)\cos^2(\theta) + \sin^2(\phi)\sin^2(\theta) \\ &\qquad + \sin^2(\phi)\cos^2(\theta) + \cos^2(\phi)\sin^2(\theta)\big) && (4) \\ &= r^2\sin(\theta) \neq 0. && (5) \end{aligned}$$

Alors $\boldsymbol{f}$ est un difféomorphisme local en tout point $(r,\theta,\phi) \in \mathbb{R}_+^* \times ]0,\pi[ \times ]0,2\pi[$.

2) Nous pouvons définir la fonction réciproque $\boldsymbol{f}^{-1} : V \to U$ avec $V := \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$ : on supprime le demi-plan fermé qui n'est pas dans l'image de $\boldsymbol{f}$. Pour tout $(x,y,z) \in V$, on définit

$$\boldsymbol{f}^{-1}(x,y,z) := \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

La fonction $f_3$ peut-être définie par morceaux, comme suit :

$$f_3(x,y,z) := \begin{cases} \arcsin \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ \arcsin \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\pi & \text{si } x \geqslant 0,\ y \leqslant 0, \\ \pi - \arcsin \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases} \tag{7}$$

3) Nous trouvons aisément $\boldsymbol{f}^{-1}(]0,+\infty[^3) = \mathbb{R}_+^* \times ]0,\frac{\pi}{2}[ \times ]0,\frac{\pi}{2}[$. Pour calculer la matrice jacobienne de $\boldsymbol{f}^{-1}$, notons $s := \sqrt{x^2+y^2}$ et $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ :

$$\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}^{-1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x/r & y/r & z/r \\ zx/r^2 s & zy/r^2 s & -s/r^2 \\ -y/s^2 & x/s^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

et $\det(\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}^{-1}(x,y,z)) = 1/rs$. Ce dernier résultat peut également être obtenu à partir du jacobien de $\boldsymbol{f}$ :

$$\det(\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}^{-1}(x,y,z)) = \det(\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(r,\theta,\phi))^{-1} = \frac{1}{r^2\sin(\theta)} = \frac{1}{rs}. \tag{9}$$

## Exercice 2.

Considérons l'équation

$$1 - y^2 + x^2 y \mathrm{e}^y = 0. \tag{10}$$

1) Montrer que (10) définit dans un voisinage du point $x = 0$ une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 1$.
2) Montrer que $\phi$ admet un minimum local en 0.

### *Solution :*

1) Notons $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 1 - y^2 + x^2 y \mathrm{e}^y$. Nous avons $f(0,y) = 1 - y^2$ et ainsi $f(0,1) = f(0,-1) = 0$. Le point $(0,1)$ est donc solution de $f(x,y) = 0$. Par ailleurs,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y + x^2\mathrm{e}^y + x^2 y \mathrm{e}^y \tag{11}$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -2 \neq 0. \tag{12}$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe $\delta > 0$ et $\phi : ]-\delta,+\delta[ \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x,\phi(x)) = 0 \quad \text{et} \quad \phi(0) = 1. \tag{13}$$

Puisque $f \in \mathrm{C}^\infty$, $\phi$ est également de classe $\mathrm{C}^\infty$.

2) En dérivant $x \mapsto f(x, \phi(x))$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x)) + \phi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) = 0, \tag{14}$$

ce qui implique

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) + \phi'(0)\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 0. \tag{15}$$

Or $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) \neq 0$, donc $\phi'(0) = 0$. Si on dérive encore une fois la relation (14), on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \phi(x)) + 2\phi'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, \phi(x)) + \phi'(x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, \phi(x)) + \phi''(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) = 0. \tag{16}$$

Or $\phi'(0) = 0$, donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1) + \phi''(0)\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 0. \tag{17}$$

Ainsi $2\mathrm{e} - 2\phi''(0) = 0$, ce qui montre que $\phi''(0) = \mathrm{e} > 0$. En conclusion, $\phi$ atteint un minimum local en 0.

## Exercice 3.

Soit $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Supposons qu'il existe une fonction $y \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x, y(x)) = 0. \tag{18}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ ; notons $b := y(a)$. Supposons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0, \quad \text{et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) > 0. \tag{19}$$

Montrer que $y$ atteint un maximum local en $a$.

*Solution :*

Dérivons la relation (18) pour obtenir, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))\, y'(x) = 0. \tag{20}$$

Avec les hypothèses (19), on obtient $y'(a) = 0$ : $a$ est un point stationnaire de $y$.

Dérivons la relation (20).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y(x)) + 2y'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y(x)) + y'(x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y(x)) + y''(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) = 0. \tag{21}$$

En évaluant cette relation pour $x = a$, avec $y'(a) = 0$ et les hypothèses (19), nous obtenons $y''(a) < 0$. La fonction $y$ atteint donc bien un maximum local en $a$.