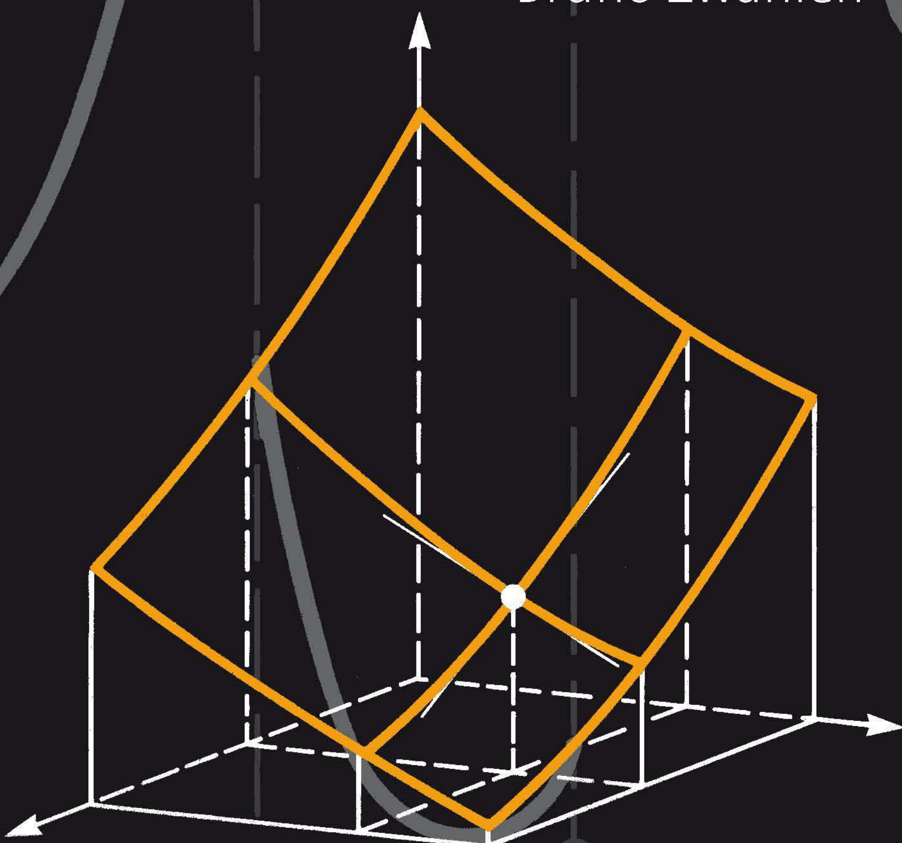
Enseignement des mathématiques

Calcul différentiel et intégral

Fonctions réelles d'une ou de plusieurs variables réelles

Jacques Douchet
Bruno Zwahlen



Presses polytechniques et universitaires romandes

Calcul différentiel et intégral

Enseignement des mathématiques

Calcul différentiel et intégral

Fonctions réelles d'une ou de plusieurs variables réelles

Jacques Douchet
Bruno Zwahlen

Presses polytechniques et universitaires romandes

L'auteur et l'éditeur remercient l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne dont le soutien financier a rendu possible la publication de cet ouvrage.

La collection «enseignement des mathématiques» est publiée
sous la direction du professeur R. Dalang

Analyse vol. 1 et 2
Receuil d'exercices et aide-mémoire
Jacques Douchet

Algèbre linéaire
Aide-mémoire, exercices et applications
Robert C. Dalang et Amel Chaabouni

Analyse avancée pour ingénieurs
Bernard Dacorogna, Chiara Tanteri

Algèbre linéaire
Renzo Cairoli

Dans la collection Metis LyonTech

Algèbre et analyse
Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés
Stéphane Balac, Frédéric Sturm

Analyse et algèbre
Cours de mathématiques de deuxième année avec exercices corrigés et illustrations avec Maple
Stéphane Balac, Laurent Chupin

Exercices d'algèbre et d'analyse
154 exercices corrigés de première année
Stéphane Balac, Frédéric Sturm

Les Presses polytechniques et universitaires romandes sont une fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des travaux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne ainsi que d'autres universités et écoles d'ingénieurs francophones.
Le catalogue de leurs publications peut être obtenu par courrier aux Presses polytechniques et universitaires romandes,
EPFL – Rolex Learning Center, CH-1015 Lausanne, par E-Mail à ppur@epfl.ch,
par téléphone au (0)21 693 41 40, ou par fax au (0)21 693 40 27.

www.ppur.org

Ouvrage précédemment parus en deux volumes :
Calcul différentiel et intégral volume 1 – *Fonctions réelles d'une variable réelle*
(© Presses polytechniques et universitaires romandes, 1999)
Calcul différentiel et intégral volume 2 – *Fonctions réelles de plusieurs variables réelles*
(© Presses polytechniques et universitaires romandes, 2004)

ISBN 978-2-88074-728-2
CH – 1015 Lausanne
Imprimé en Italie

Introduction

Cette réimpression réunit deux volumes parus à l'origine séparément sous le titre de «Calcul différentiel et intégral 1» et «Calcul différentiel et intégral 2».

Cet ouvrage de base a pour but d'exposer aussi simplement que possible, mais néanmoins de manière rigoureuse, les principaux résultats du calcul différentiel et intégral concernant les fonctions réelles d'une variable réelle (chap. 1 à 10) et les fonctions réelles de plusieurs variables réelles (chap. 11 à 14).

Ce livre est destiné avant tout aux étudiants du premier cycle universitaire. Toutefois, sa lecture ne supposant presque aucune connaissance préalable (un bref rappel des propriétés du corps des nombres réels est donné au premier chapitre pour les fonctions réelles d'une variable réelle et un rappel des principales propriétés de $\mathbb{R}^n$ est donné au chapitre 11 en ce qui concerne les fonctions réelles de plusieurs variables réelles), il s'adresse aussi à tous ceux qui ont le désir d'apprendre ou d'approfondir l'un ou l'autre des sujets traités. Il nous semble également utile de rappeler ici qu'une bonne connaissance du calcul différentiel et intégral est indispensable à toute personne qui veut entreprendre de façon constructive des études techniques ou scientifiques.

Pour en simplifier la lecture, de nombreux résultats sont donnés sous forme d'exemples. Il est donc vivement conseillé au lecteur de les étudier avec le plus grand soin. De même, il est recommandé de lire le plus attentivement possible toutes les remarques qui y sont contenues, car elles ont pour but de mettre en garde le lecteur contre d'éventuelles erreurs qu'il pourrait faire. Enfin, de nombreux exercices sont proposés à la fin de chaque chapitre pour que le lecteur puisse vérifier s'il a bien assimilé les différentes notions qu'il vient d'étudier. En outre deux volumes (Analyse – Recueil d'exercices et aide-mémoire) complètent avantageusement cet ouvrage.

CONVENTIONS

Le volume est partagé en chapitres (chap.) repérés par un nombre (chap. 12). Chaque chapitre est divisé en sections (sect.) repérées par deux nombres séparés par un point (sect. 12.3). Chaque section est divisée en paragraphes (§) repérés par trois nombres séparés par deux points (§ 12.3.13).

Un terme apparaît en italique la première fois qu'il est défini dans le texte. Un résultat important est mis en évidence en utilisant le caractère univers.

La fin d'un démonstration est signalée par un carré noir ■.

Les équations numérotées le sont continûment par chapitre; elles sont repérées par deux nombres placés entre parenthèses et séparés par un point (12.4). Les figures et les tableaux sont numérotés continûment par chapitre et repérés par deux nombres précédés de Fig. (Fig. 4.12) ou Tableau (Tableau 5.14).

Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont notés par une lettre en caractère gras ($\boldsymbol{x}$) ou encore par un n-tuple ordonné dont les composantes sont numérotées de 1 à n ($(x_1, ..., x_n)$). Les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont parfois notés par un couple ordonné dont les composantes ne sont pas nécessairement numérotées de 1 à 2 ((x, y)). De même, les éléments $\mathbb{R}^3$ sont parfois notés par un triplet ordonné dont les composantes ne sont pas nécessairement numérotées de 1 à 3 ((x, y, z)).

Les auteurs

Table des matières

10. Formulaire

II. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles

11. Espace $\mathbb{R}^n$

12. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles

13. Dérivées partielles

14. Intégrales multiples

I
Fonctions réelles d’une variable réelle

1. Corps des nombres réels

1.1 AXIOMES DES NOMBRES RÉELS

1.1.1 Rappels

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des *entiers naturels* $\{0, 1, 2, \ldots\}$, par $\mathbb{Z}$ l'anneau des *entiers relatifs* $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ et par $\mathbb{Q}$ le corps des *nombres rationnels* $\{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. On supposera que les principales propriétés de ces trois ensembles sont connues; comme par exemple celle du bon ordre dans $\mathbb{N}$: tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ contient un plus petit élément.

1.1.2 Exemple d'une équation n'admettant aucune solution dans $\mathbb{Q}$

L'équation $x^2 - 2 = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{Q}$.

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde et supposons que cette équation possède une solution dans $\mathbb{Q}$. Alors, il existe deux entiers p et q non nuls vérifiant la relation $(p/q)^2 - 2 = 0$ ou encore $p^2 - 2q^2 = 0$ et dont le plus grand commun diviseur est 1. On en déduit immédiatement que p^2 est un nombre pair; ce qui implique que p est pair. Par suite, il existe un entier $r > 0$ tel que $q^2 = 2r^2$. Par un raisonnement analogue, on démontre que q est aussi un nombre pair. On obtient ainsi une contradiction avec le fait que les deux entiers p et q sont premiers entre eux. D'où la conclusion. ■

1.1.3 Définition du corps des nombres réels

On est ainsi amené tout naturellement à définir un nouveau corps, appelé le *corps des nombres réels* qui aura la propriété de contenir le corps des rationnels et dans lequel l'équation $x^2 - 2 = 0$ admettra au moins une solution.

Le corps des nombres réels est un ensemble $\mathbb{R}$ pour lequel sont définies: deux applications $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto xy$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; une relation d'ordre $x \leqslant y$ (écrite aussi $y \geqslant x$) entre les éléments de $\mathbb{R}$, satisfaisant les trois axiomes suivants:

PREMIER AXIOME. $\mathbb{R}$ est un corps, en d'autres termes:

- pour tout triplet de nombres réels x, y et $z : x + (y + z) = (x + y) + z$
- pour tout couple de nombres réels x et $y : x + y = y + x$
- il existe dans $\mathbb{R}$ un élément noté 0 tel que pour tout $x \in \mathbb{R} : 0 + x = x$
- pour chaque élément x de $\mathbb{R}$, il existe un élément $-x \in \mathbb{R}$ tel que $x + (-x) = 0$
- pour tout triplet de nombres réels x, y et $z : x(yz) = (xy)z$
- pour tout couple de nombres réels x et $y : xy = yx$
- il existe un élément $1 \neq 0$ dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x$

– pour chaque élément $x \neq 0$ de $\mathbb{R}$, il existe un élément $x^{-1} \in \mathbb{R}$ (noté aussi $1/x$) tel que $x x^{-1} = 1$
– pour tout triplet de nombres réels x, y et z : $x(y+z) = xy + xz$.

DEUXIÈME AXIOME. $\mathbb{R}$ est un corps ordonné. Ce qui revient à dire que les assertions suivantes sont vérifiées :

– $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ impliquent $x \leqslant z$
– ($x \leqslant y$ et $y \leqslant x$) est équivalent à $x = y$
– pour tout couple de nombres réels x et y : ou bien $x \leqslant y$ ou bien $x \geqslant y$
– $x \leqslant y$ implique que pour tout élément z de $\mathbb{R}$, on a : $x + z \leqslant y + z$
– $0 \leqslant x$ et $0 \leqslant y$ impliquent $0 \leqslant xy$.

TROISIÈME AXIOME. A tout sous-ensemble S non vide de $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, on peut associer un nombre réel $a \geqslant 0$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

– si $x \in S$, alors $a \leqslant x$
– quel que soit le nombre réel $\epsilon > 0$, il existe un élément x_ϵ de S tel que $x_\epsilon - a \leqslant \epsilon$.

1.1.4 Remarques

Nous supposerons que les conséquences élémentaires qui résultent des deux premiers axiomes (théorie générale des corps ordonnés) sont connues.

Le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ vérifie les deux premiers axiomes, par contre il ne satisfait pas le troisième axiome. En effet, le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ se distingue de tous les autres corps ordonnés par le fait qu'il est le seul à vérifier ce dernier axiome.

1.1.5 Intervalles bornés de $\mathbb{R}$

La relation $x \leqslant y$ et $x \neq y$, s'écrit $x < y$ ou encore $y > x$. Pour tout couple $a < b$ de nombres réels, l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$ est appelé l'*intervalle ouvert et borné d'origine a et d'extrémité b*, et s'écrit $]a, b[$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout nombre réel $\delta > 0$, on désigne par $B(a, \delta)$ l'intervalle ouvert et borné $]a - \delta, a + \delta[$. Par définition, $B(a, \delta)$ est appelé la *boule ouverte de centre a et de rayon* δ. L'ensemble des nombres réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ est appelé l'*intervalle fermé et borné d'origine a et d'extrémité b*, et s'écrit $[a, b]$. L'ensemble des nombres réels x tels que $a < x \leqslant b$ (resp. $a \leqslant x < b$) est appelé l'*intervalle semi-ouvert et borné d'origine a et d'extrémité b, ouvert en a (resp. b), fermé en b (resp. a)* et s'écrit $]a, b]$ (resp. $[a, b[$). Dans le cas où $a = b$, l'intervalle fermé et borné $[a, a]$ représente l'ensemble réduit au seul point a, tandis que l'intervalle ouvert et borné $]a, a[$ représente l'*ensemble vide*, que l'on note par ϕ. D'autre part, l'origine et l'extrémité d'un intervalle borné sont aussi appelées les *extrémités* de l'intervalle ou encore les *bornes* de l'intervalle.

On désigne par $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des *nombres réels positifs* : $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, par $\mathbb{R}_-^*$ l'ensemble des *nombres réels négatifs* : $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ et par $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Par définition, on pose $\mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^* \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$ et $\mathbb{R}_- = \mathbb{R}_-^* \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 0\}$.

1.1.6 Inclusion de l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Pour démontrer que $\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{R}$, résultat qui n'est pas garanti par les axiomes de $\mathbb{R}$, considérons l'application $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\omega(n) = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}} \qquad \text{et} \qquad \omega(0) = 0$$

(où 1 est l'élément neutre multiplicatif dans $\mathbb{R}$. Puisque $1^2 = 1$, on a bien que $1 \in \mathbb{R}_+^*$). Nous pouvons d'abord prolonger cette application à l'anneau des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N} : \omega(-n) = -\omega(n)$; par suite, nous pouvons la prolonger au corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ en posant, pour tout nombre rationnel $r : \omega(r) = \omega(p) \cdot (\omega(q))^{-1}$ où $r = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$. On vérifie facilement que $\omega(\mathbb{Q})$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ isomorphe à $\mathbb{Q}$, et que l'application ω conserve la relation d'ordre (c'est-à-dire que: $r \geqslant r'$ implique que $\omega(r) \geqslant \omega(r')$). On peut, grâce à cet isomorphisme, identifier $\mathbb{Q}$ et $\omega(\mathbb{Q})$. Ainsi, dorénavant, nous considérons $\mathbb{Q}$ comme un sous-corps de $\mathbb{R}$; ce qui entraîne que tout nombre rationnel est un nombre réel particulier. Par définition, un nombre réel n'appartenant pas à l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dit *irrationnel.* Reste à démontrer qu'il existe de tels nombres. Pour cela, il suffit de prouver que l'équation $x^2 - 2 = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$, étant donné qu'elle n'en possède pas dans $\mathbb{Q}$; ce que nous ferons un peu plus tard.

1.2 BORNE SUPÉRIEURE ET BORNE INFÉRIEURE D'UN SOUS-ENSEMBLE DE $\mathbb{R}$

1.2.1 Définition d'un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$

Soit S un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. On dit que $b \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{R}$) est un *majorant* (resp. *minorant*) de S si la relation $x \in S$ implique $x \leqslant b$ (resp. $x \geqslant a$). Dans le cas où S admet un majorant (resp. minorant), on dit que S est *majoré* (resp. *minoré*). Lorsque S est à la fois majoré et minoré, on dit que S est *borné.*

Il sera toujours sous-entendu, lorsque l'on dit qu'un sous-ensemble S de $\mathbb{R}$ est majoré, minoré ou borné, que celui-ci n'est pas vide.

1.2.2 Définition de la borne supérieure et inférieure d'un ensemble

Soit S un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Un nombre réel b (resp. a) vérifiant les deux propriétés suivantes:

- pour tout élément x de $S : x \leqslant b$ (resp. $x \geqslant a$),
- quel que soit le nombre réel $\epsilon > 0$, il existe un élément x_ϵ de S tel que $b - x_\epsilon \leqslant \epsilon$ (resp. $x_\epsilon - a \leqslant \epsilon$),

est appelé la *borne supérieure* (resp. *inférieure*) ou encore le *supremum* (resp. l'*infimum*) de S.

1.2.3 Existence et unicité de la borne supérieure et de la borne inférieure

Pour qu'un sous-ensemble non vide S de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure (resp. inférieure) il faut et il suffit que S soit majoré (resp. minoré). De plus, si elle existe, la borne supérieure (resp. inférieure) est unique.

DÉMONSTRATION. La condition est nécessaire, car si S admet une borne supérieure b (resp. inférieure a), alors b (resp. a) est un majorant (resp. minorant) de S. D'où S est majoré (resp. minoré).

Supposons que S soit majoré. Alors, si b est un majorant de S, on obtient que $S_1 = \{b + 1 - y : y \in S\}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, grâce au troisième axiome que vérifie les nombres réels, on sait que S_1 possède une borne inférieure que l'on désigne par a_1. Il s'ensuit, comme on peut le vérifier aisément, que le nombre réel $b_1 = -a_1 + b + 1$ est bien une borne supérieure du sous-ensembe S.

Supposons à présent que S soit minoré et que a soit un minorant de S. Alors, le nombre réel $(-a)$ est un majorant du sous-ensemble $S_2 = \{-y : y \in S\}$ de $\mathbb{R}$; ce qui implique que S_2 admet une borne supérieure b_2. On en déduit immédiatement que $a_2 = -b_2$ est une borne inférieure de S.

On a ainsi démontré que la condition était nécessaire et suffisante. Reste à établir que de telles bornes sont uniques. Pour cela, supposons que $c_1 < c_2$ soient deux bornes supérieures de S. Alors, il existe un élément x de S tel que

$$c_2 - x \leqslant \frac{c_2 - c_1}{2}.$$

Autrement dit,

$$x \geqslant c_2 - \frac{c_2 - c_1}{2} = \frac{c_2 + c_1}{2} > c_1 \ ;$$

ce qui est en contradiction avec la définition de c_1. On a ainsi prouvé l'unicité de la borne supérieure. Par un raisonnement analogue, on démontre que la borne inférieure est unique. ■

1.2.4 Notations

Lorsque S est un sous-ensemble majoré (resp. minoré) de $\mathbb{R}$, on note sa borne supérieure (resp. inférieure) par $\operatorname{Sup} S$ (resp. $\operatorname{Inf} S$).

1.2.5 Caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure

Si S est un sous-ensemble majoré (resp. minoré) de $\mathbb{R}$, alors le nombre réel $\operatorname{Sup} S$ (resp. $\operatorname{Inf} S$) est le plus petit majorant (resp. le plus grand minorant) de S.

DÉMONSTRATION. Soit S un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$ et supposons que S possède un majorant b satisfaisant l'inégalité $b < \operatorname{Sup} S$. Alors, il découle immédiatement de la définition de la borne supérieure, qu'il existe un élément x de S tel que

$$(\operatorname{Sup} S - x) \leqslant \frac{1}{2}(\operatorname{Sup} S - b) = \epsilon > 0.$$

Autrement dit,

$$x \geqslant \frac{1}{2}(\operatorname{Sup} S + b) > b.$$

Ce dernier résultat n'étant pas compatible avec la définition de b, on en conclut que le nombre réel $\operatorname{Sup} S$ est bien le plus petit majorant de l'ensemble S.

Supposons à présent que S soit un sous-ensemble minoré de $\mathbb{R}$. Alors, si a est un minorant de S, on en déduit que $(-a)$ est un majorant de $S_1 = \{-y : y \in S\}$; par suite, on obtient que $-a \geqslant \operatorname{Sup} S_1 = -\operatorname{Inf} S$. D'où $a \leqslant \operatorname{Inf} S$. On a ainsi établi que $\operatorname{Inf} S$ est bien le plus grand minorant de l'ensemble S. ■

1.2.6. Remarque

Il est très important de remarquer que si l'un ou l'autre des deux nombres réels Sup S ou Inf S existe, il n'appartient pas obligatoirement à S. Par exemple, pour l'ensemble $S = [1,2[$: Inf $S = 1 \in S$, tandis que Sup $S = 2 \notin S$.

1.2.7 Théorème de Heine-Borel-Lebesgue

Soit $[a,b]$ un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$, A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et δ une application de A dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que

$$[a,b] \subset \bigcup_{x \in A} B(x,\delta(x)).$$

Alors, on peut extraire de l'ensemble A un sous-ensemble fini B de manière à avoir :

$$[a,b] \subset \bigcup_{x \in B} B(x,\delta(x)).$$

DÉMONSTRATION. Désignons par F l'ensemble des nombres réels y contenus dans l'intervalle fermé et borné $[a,b]$ pour lesquels il existe un sous-ensemble fini $D(y)$ de l'ensemble A tel que

$$[a,y] \subset \bigcup_{x \in D(y)} B(x,\delta(x)).$$

L'ensemble F n'est pas vide puisqu'il contient le nombre réel a et, d'autre part, il est majoré par b. Il possède donc une borne supérieure M; par suite, on obtient que $F = [a,M]$. Ainsi, pour démontrer le théorème de Heine-Borel-Lebesgue, il suffit de prouver que $M = b$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $M \neq b$. Etant donné que $M \in [a,b]$, il existe un élément z de A tel que $M \in B(z,\delta(z))$. D'où, en posant $d = \min\{b, z + \delta(z)\}$, on obtient que le nombre réel $c = (M+d)/2$ appartient à l'ensemble F et que $c > M$; ce qui contredit la définition de M. On en conclut que $M = b$. ■

1.2.8 Remarque

D'une manière générale, la conclusion du théorème de Heine-Borel-Lebesgue peut être mise en défaut pour des intervalles bornés mais non fermés. Par exemple, pour l'application $\delta : [0,1[\to \mathbb{R}_+^*$ définie par $\delta(x) = (1-x)/2$, l'ensemble

$$\bigcup_{x \in [0,1[} B(x,\delta(x))$$

contient l'intervalle semi-ouvert et borné $[0,1[$; mais par contre, il n'est pas possible de trouver un sous-ensemble fini B de $[0,1[$ de sorte que l'intervalle $[0,1[$ soit contenu dans

$$\bigcup_{x \in B} B(x,\delta(x)).$$

1.3 $\mathbb{Q}$ EST DENSE DANS $\mathbb{R}$

1.3.1 Introduction

Nous allons démontrer dans cette section que l'équation $x^2 - 2 = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$. Ce qui aura pour conséquence, de prouver que l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est strictement inclus dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

D'autre part, nous montrerons qu'entre deux nombres réels distincts, il existe toujours un nombre rationnel. Ce résultat très important se traduit dans le langage mathématique en disant que $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$. Comme corollaire de ce résultat, nous verrons qu'entre deux nombres rationnels distincts, il y a toujours un nombre irrationnel.

Avant d'être en mesure de justifier ces résultats, nous devons démontrer que $\mathbb{R}$ est un *corps archimédien*, autrement dit que $\mathbb{R}$ satisfait l'axiome d'Archimède.

1.3.2 Axiome d'Archimède

Pour tout couple de nombres réels $x > 0$ et $y \geqslant 0$, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $nx > y$.

DÉMONSTRATION. Supposons que ce résultat soit faux et qu'il existe deux nombres réels $x > 0$ et $y \geqslant 0$ tels que pour tout entier $n \geqslant 1$, on ait: $y \geqslant nx$. Alors, le sous-ensemble $S = \{nx : n \in \mathbb{N}^*\}$ de $\mathbb{R}$ admet y comme majorant; ce qui implique que le nombre réel Sup S existe. Il en résulte que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a: Sup $S \geqslant nx$. De sorte, que l'on a aussi: Sup $S \geqslant (m+1)x$ pour tout entier $m \geqslant 0$. Ainsi, le nombre réel (Sup $S - x$) est un majorant de S strictement plus petit que Sup S. Ce dernier résultat est impossible puisqu'il contredit le fait que Sup S est le plus petit majorant de l'ensemble S (§ 1.2.5). On en conclut donc que $\mathbb{R}$ est archimédien. ■

1.3.3 Partie entière d'un nombre réel

Pour tout nombre réel x, il existe un unique entier noté $[x]$ tel que $[x] \leqslant x < [x] + 1$. Cet entier $[x]$ est appelé la *partie entière* du nombre réel x.

DÉMONSTRATION. Par définition, si un tel nombre existe, il est obligatoirement unique. Montrons l'existence d'un tel entier. Pour cela, supposons d'abord que x soit un nombre réel positif ou nul. Du fait que $\mathbb{R}$ est archimédien, on sait que le sous-ensemble $\{n \in \mathbb{N} : n > x\}$ de $\mathbb{N}$ n'est pas vide; ce qui implique qu'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que: $m - 1 \leqslant x < m$. Il suffit donc de prendre $[x] = m - 1$.

Supposons à présent que x soit un nombre réel négatif. Alors, comme nous venons de le voir, il existe un entier naturel k pour lequel, on a: $k \leqslant -x < k + 1$. Ainsi, en posant

$$[x] = \begin{cases} -k & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -k-1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$$

on obtient que: $[x] \leqslant x < [x] + 1$. ■

1.3.4 Stricte inclusion de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

On sait d'après les résultats que nous avons obtenus aux paragraphes 1.1.2 et 1.1.6 que $\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{R}$ et que d'autre part, l'équation $x^2 - 2 = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{Q}$. Ainsi, pour démontrer que $\mathbb{Q}$ est strictement inclus dans $\mathbb{R}$, il nous suffit de prouver que l'équation $x^2 - 2 = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. Considérons le sous-ensemble $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant 2\}$ de $\mathbb{R}$. Cet ensemble n'est pas vide puisqu'il contient le nombre réel 1 et, de plus, il est majoré par 2. On en déduit donc que le nombre réel $c = \text{Sup } S$ existe et que $c \geqslant 1$. Nous allons maintenant démontrer que $c^2 = 2$. Pour cela il nous suffit de prouver, étant donné que $\mathbb{R}$ est un corps ordonné, que les deux autres cas possibles, à savoir $c^2 < 2$ et $c^2 > 2$, sont à exclure.

Supposons que $c^2 < 2$. $\mathbb{R}$ étant archimédien, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que

$$\frac{1}{n} < \frac{2-c^2}{2c+1},$$

ce qui entraîne que

$$\left(c+\frac{1}{n}\right)^2 = c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant c^2 + \frac{2c+1}{n} < 2;$$

de sorte que

$$c + \frac{1}{n} \in S.$$

Ce dernier résultat est incompatible avec la définition du nombre réel c. Ainsi, le cas $c^2 < 2$ est à exclure.

Supposons à présent que $c^2 > 2$. Alors, il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que

$$\frac{1}{m} < \frac{c^2-2}{2c}.$$

De plus, il découle de la définition de c qu'il existe un élément x de S pour lequel

$$0 \leqslant c - \frac{1}{m} \leqslant x.$$

Par suite, on obtient que

$$x^2 \geqslant \left(c - \frac{1}{m}\right)^2 = c^2 - \frac{2c}{m} + \frac{1}{m^2} > c^2 - \frac{2c}{m} > 2.$$

Ce dernier résultat est impossible, car $x \in S$. On en déduit donc que ce cas est aussi à exclure.

On a ainsi démontré que $c^2 = 2$, ce qui revient à dire que l'équation $x^2 - 2 = 0$ possède au moins une solution dans $\mathbb{R}$. ■

1.3.5 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Soit $x < y$ deux nombres réels. Alors, il existe un nombre rationnel r tel que $x < r < y$.

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, on a que $y - x > 0$; ce qui implique, du fait que $\mathbb{R}$ est archimédien, qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $n(y-x) > 1$ ou encore $(y-x) > 1/n$. Ainsi, en posant:

$$r = \frac{[nx]+1}{n},$$

on obtient que

$$x < r = \frac{[nx]+1}{n} = \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} \leqslant x + \frac{1}{n} < x + (y-x) = y. \quad ■$$

1.3.6 Corollaire

Soit $p<q$ deux nombres rationnels. Alors, il existe un nombre irrationnel z tel que $p<z<q$.

DÉMONSTRATION. Etant donné que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on sait qu'il existe un nombre rationnel $r \neq 0$ tel que

$$\frac{p}{c} < r < \frac{q}{c} \qquad \text{où } c = \operatorname{Sup}\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant 2\}.$$

Puisque c est un nombre irrationnel et positif, on en déduit immédiatement que le nombre irrationnel $z = rc$ satisfait la conclusion de ce corollaire. ■

1.4 VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE RÉEL

1.4.1 Définition de la valeur absolue d'un nombre réel

A tout nombre réel x, on associe le nombre réel positif ou nul $|x|$ défini par

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Ce nombre réel $|x|$ est appelé la *valeur absolue* du nombre réel x.

1.4.2 Propriétés de la valeur absolue d'un nombre réel

- $|x| = 0$ est équivalent à $x = 0$;
- soit a un nombre réel positif. Alors,
  $|x| < a$ est équivalent à $-a < x < a$
  $|x| \leqslant a$ est équivalent à $-a \leqslant x \leqslant a$
  $|x| > a$ est équivalent à $x < -a$ ou $x > a$
  $|x| \geqslant a$ est équivalent à $x \leqslant -a$ ou $x \geqslant a$;
- pour tout couple de nombres réels x et y : $|xy| = |x| \cdot |y|$;
- pour tout couple de nombres réels x et $y \neq 0$: $|x/y| = |x|/|y|$;
- pour tout nombre réel x : $|x| \geqslant x$ et $|x| \geqslant -x$.

1.4.3 Inégalité triangulaire

Pour tout couple de nombres réels x et y, on a: $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

DÉMONSTRATION. Si $x+y \geqslant 0$, alors $|x+y| = x+y \leqslant |x| + |y|$; de même si $x+y \leqslant 0$, on a : $|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) \leqslant |x| + |y|$. ■

1.4.4 Inégalité triangulaire inverse

Pour tout couple de nombres réels x et y, on a: $|x-y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$.

DÉMONSTRATION. On déduit de l'inégalité $|x| = |(x-y)+y| \leqslant |x-y| + |y|$ que $|x| - |y| \leqslant |x-y|$. De même, $|y| = |(y-x)+x| \leqslant |x-y| + |x|$ entraîne que $-|x-y| \leqslant |x| - |y|$. D'où $-|x-y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x-y|$ ou encore $|x-y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$. ■

1.4.5 Caractérisation du nombre réel zéro

Le nombre réel zéro se distingue de tous les autres éléments de $\mathbb{R}$ par le fait qu'il est le seul à être en valeur absolue aussi petit que l'on veut. Autrement dit, un nombre réel x est égal à zéro si et seulement si pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, on a : $|x| \leqslant \epsilon$.

1.4.6 Caractérisation d'un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$

Un sous-ensemble non vide S de $\mathbb{R}$ est borné si et seulement s'il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que la relation $x \in S$ implique $|x| \leqslant M$.

DÉMONSTRATION. Supposons que S soit un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$. Alors les deux nombres réels Sup S et Inf S existent. Par suite, en posant $M = \max\{|\text{Sup } S|, |\text{Inf } S|\}$, on obtient que pour tout $x \in S$: $-M \leqslant \text{Inf } S \leqslant x \leqslant \text{Sup } S \leqslant M$; ce qui revient à dire que $|x| \leqslant M$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que pour tout élément x de S : $|x| \leqslant M$. Alors, M est un majorant et $-M$ un minorant de l'ensemble S, de sorte que S est borné. ■

1.5 DROITE NUMÉRIQUE ACHEVÉE

1.5.1 Définition de la droite numérique achevée

On désigne par $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble obtenu par l'adjonction à $\mathbb{R}$ de deux éléments, notés $-\infty$ et $+\infty$. Ainsi, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$-\infty < +\infty$$

et pour tout nombre réel x,

$$-\infty < x < +\infty.$$

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ muni de cette relation d'ordre est appelé la *droite numérique achevée*. $\overline{\mathbb{R}}$ est donc un ensemble ordonné mais contrairement à $\mathbb{R}$ il admet un plus petit élément, à savoir $-\infty$ et un plus grand élément, à savoir $+\infty$.

1.5.2 Remarque

Contrairement à $\mathbb{R}$, l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ n'est muni d'aucune loi de composition interne $(+, \cdot)$. Par exemple, des expressions telles que

$$(-\infty) + (+\infty)$$

ou

$$0 \cdot (+\infty)$$

n'ont aucun sens.

1.5.3 Intervalles non bornés de $\mathbb{R}$

Pour tout nombre réel a, l'ensemble des x tel que $x > a$ (resp. $x \geqslant a$) est appelé l'*intervalle ouvert (resp. fermé) et non borné commençant en* a, on le note $]a, +\infty[$ (resp. $[a, +\infty[$). De même, l'ensemble des $x < b$ (resp. $x \leqslant b$) est appelé l'*intervalle* *ouvert (resp. fermé) et non borné finissant en* b, on le note $]-\infty, b[$ (resp. $]-\infty, b]$). L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est tout naturellement désigné par l'intervalle non borné $]-\infty, +\infty[$.

1.6 EXERCICES

1.6.1 Soit $x < y$ deux nombres réels. Montrer que pour tout nombre $z > 0$: $xz < yz$.

1.6.2 Montrer que pour tout nombre réel $x \neq 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$: $x^2 + y^2 > 0$.

1.6.3 Soit x et y deux nombres réels tels que $0 < x < y$. Montrer que pour tout entier $n > 0$: $x^n < y^n$.

1.6.4 Vérifier que pour tout nombre réel $x \neq 1$ et tout entier $n \geqslant 1$:

$$1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 2.$$

1.6.5 Trouver l'ensemble des nombres réels qui satisfont l'inégalité $(x+1)^2 - |x-2| \geqslant 0$.

1.6.6 Déterminer tous les nombres réels qui vérifient l'inégalité

$$\frac{x}{x+1} \geqslant \frac{x}{3x+2}.$$

1.6.7 Soit x un nombre réel positif et soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique entier relatif q tel que $y = qx + r$ avec $0 \leqslant r < x$.

1.6.8 Démontrer que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un nombre infini de rationnels et un nombre infini d'irrationnels.

1.6.9 Montrer qu'il n'existe aucun sous-ensemble fini B de $\mathbb{N}^*$ tel que

$$]0,1[\; = \bigcup_{n \in B} \;]1/n, 1[.$$

1.6.10 Soit S un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $\{|x| : x \in S\}$ admet le nombre réel $\max\{|\operatorname{Sup} S|, |\operatorname{Inf} S|\}$ pour borne supérieure.

1.6.11 Montrer que le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas le troisième axiome donné au paragraphe 1.1.3.

1.6.12 Soit A et B deux sous-ensembles disjoints non vides de $\mathbb{R}$ dont la réunion est $\mathbb{R}$ tout entier, et supposons que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait : $a < b$. Montrer qu'il existe un nombre réel c tel que les relations $a \in A$ et $b \in B$ impliquent $a \leqslant c \leqslant b$.

2. Suites de nombres réels

2.1 DÉFINITIONS

2.1.1 Définition d'une suite de nombres réels

Une *suite* de nombres réels est une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, qui, à tout entier naturel n, fait correspondre le nombre réel $f(n)$.

Le nombre réel $f(n)$ est appelé le *n-ième terme* de la suite et on le désigne par une lettre indexée en bas à droite par n, par exemple: x_n, y_n, u_n, v_n ou a_n. La suite elle-même étant alors désignée par (x_n), (y_n), (u_n), (v_n) ou (a_n). D'autre part, le sous-ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ est appelé l'ensemble des *éléments* de la suite. Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est inclus dans un ensemble E, on dit que (x_n) est une suite d'éléments de E.

2.1.2 Exemple

La suite $(x_n = \sqrt{n})$ est l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, qui, à tout entier naturel n, fait correspondre le nombre réel $\sqrt{n}$. L'ensemble des éléments de la suite est le sous-ensemble $\{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$, tandis que le nombre réel $\sqrt{n}$ en est le *n-ième* terme.

2.1.3 Remarques

Une suite (x_n) est entièrement définie lorsque l'on connaît son terme général x_n, qui peut être donné de différentes façons. Par exemple, par une formule explicite du genre $x_n = n^2$, ou bien par une formule récurrente de la forme $x_{n+1} = x_n^3 + 1$ et $x_0 = 1$, ou bien encore par l'intermédiaire d'une propriété plus ou moins explicite comme x_n est le $(n+1)$-ième nombre premier.

Par contre, une suite (x_n) ne peut être définie que par la seule donnée de l'ensemble de ses éléments $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Par exemple, le sous-ensemble $\{-1, 1\}$ de $\mathbb{R}$ peut tout aussi bien désigner l'ensemble des éléments de la suite (x_n) dont le terme général est $x_n = (-1)^n$, que celui de la suite (y_n) définie par: $y_0 = -1$ et $y_n = 1$ si $n \geqslant 1$.

2.1.4 Définition d'une suite bornée

Une suite (x_n) est dite *majorée* (resp. *minorée*), s'il existe un nombre réel M (resp. m) tel que la relation $n \in \mathbb{N}$ implique $x_n \leqslant M$ (resp. $x_n \geqslant m$). Le nombre réel M (resp. m) est appelé un *majorant* (resp. *minorant*) de la suite (x_n). Une suite qui est à la fois majorée et minorée est dite *bornée*.

2.1.5 Remarque

La terminologie employée au paragraphe 2.1.4 pour les suites est la même que celle utilisée pour les sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$. Ceci se justifie par le fait qu'une suite

(x_n) est respectivement majorée, minorée ou bornée si et seulement si l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de ses éléments est un sous-ensemble respectivement majoré, minoré ou borné de $\mathbb{R}$.

2.1.6 Caractérisation d'une suite bornée

Une suite (x_n) est bornée si et seulement s'il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que la relation $n \in \mathbb{N}$ implique $|x_n| \leqslant M$.

DÉMONSTRATION. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|x_n| \leqslant M$. Alors, M est un majorant et $-M$ un minorant de la suite (x_n). Autrement dit, la suite (x_n) est bornée.

Réciproquement, supposons que la suite (x_n) soit bornée. Alors, si a est un minorant et b un majorant de la suite (x_n), on obtient, en posant $M = \max\{|a|, |b|\}$, que pour tout entier $n \geqslant 0$: $|x_n| \leqslant M$. ■

2.1.7 Exemple

Considérons la suite (x_n) définie par

$$x_n = \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}.$$

Il est facile de vérifier que pour tout entier naturel n:

$$-1 \leqslant x_n = \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}} \leqslant 1.$$

Ainsi, cette suite est majorée par 1 et minorée par -1, elle est donc bornée. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien que $|x_n| \leqslant 1$.

2.2 RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

2.2.1 Introduction

Considérons la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} \quad \text{et} \quad x_0 = \frac{3}{2}.$$

On aimerait démontrer que cette suite est bornée. A priori, il n'est pas évident que l'on puisse trouver pour cette suite un minorant et un majorant. Par contre, en calculant les premiers termes de la suite, on s'aperçoit qu'ils admettent 1 comme minorant et 2 comme majorant. D'autre part, on remarque que pour tout entier naturel n, l'hypothèse $1 < x_n < 2$ implique $1 < x_{n+1} < 2$. Dès lors, peut-on conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}: 1 < x_n < 2$? La réponse à cette question est oui; c'est ce que nous allons démontrer dans notre prochain paragraphe.

2.2.2 Raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une relation dépendant d'un entier naturel n, telle que $P(n_0)$ soit vraie et que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $P(n)$ implique $P(n+1)$. Alors, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

DÉMONSTRATION. Soit $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0, P(n)$ n'est pas vraie$\}$. Supposons que cet ensemble A ne soit pas vide, alors il contient un plus petit élément m qui est strictement plus grand que n_0. Ainsi, $(m-1) \geqslant n_0$ et $(m-1) \notin A$; ce qui implique que $P(m-1)$ est vraie. D'où, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient que $P(m)$ est aussi vraie. Ce dernier résultat est en contradiction avec le fait que $m \in A$. On en conclut que l'ensemble A est vide; ce qui entraîne que pour tout entier $n \geqslant n_0$, la relation $P(n)$ est vraie. ■

2.2.3 Remarque

Le résultat obtenu au paragraphe 2.2.2 peut être mis en défaut si l'on ne vérifie pas que $P(n)$ est vraie pour n_0, même si pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $P(n)$ implique $P(n+1)$. Le contre-exemple qui suit va nous en donner la preuve. Soit (x_n) la suite définie par

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} \quad \text{et} \quad x_0 = 1,$$

et $P(n)$ la relation suivante: $1 < x_n < 2$. On vérifie facilement que pour tout entier $n \geqslant 1$, $P(n)$ implique $P(n+1)$. Mais par un simple calcul, on constate que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n = 1$. Ainsi, le résultat obtenu au paragraphe 2.2.2 n'est pas valable dans ce cas.

2.2.4 Exemples

En utilisant le raisonnement par récurrence, démontrons que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = 1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pour cela, considérons la relation $P(n)$ définie par

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

et supposons que $P(n)$ soit vraie. Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{(n+1)}{6}(2n^2+7n+6) = \frac{(n+1)}{6}((2n+3)(n+2)) \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.
\end{aligned}$$

On a ainsi démontré que pour tout entier $n \geqslant 1, P(n)$ implique $P(n+1)$. Comme de plus $P(1)$ est vraie, on en conclut que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a bien:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Considérons les deux suites (x_n) et (y_n) définies par

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \; y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad \text{et} \quad 0 < x_0 < y_0.$$

On veut démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la relation $P(n)$: $0 < x_{n-1} < x_n < y_n < y_{n-1}$ entre les éléments des deux suites est vraie. De l'hypothèse $0 < x_0 < y_0$ on déduit que

$$0 < x_0 < \sqrt{x_0 y_0} = x_1 < \frac{x_0 + y_0}{2} = y_1 < y_0 ;$$

ce qui revient à dire que $P(1)$ est vraie. Supposons à présent que $P(n)$ soit vraie. Alors de la même manière on obtient que

$$0 < x_n < \sqrt{x_n y_n} = x_{n+1} < \frac{x_n + y_n}{2} = y_{n+1} < y_n.$$

On a ainsi démontré que pour tout entier $n \geqslant 1, P(n)$ implique $P(n+1)$. Comme de plus $P(1)$ est vraie, on peut donc affirmer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$0 < x_{n-1} < x_n < y_n < y_{n-1}.$$

2.3 LIMITE D'UNE SUITE

2.3.1 Introduction

Soit (x_n) la suite définie par

$$x_n = 1 + \frac{1}{1+n}.$$

On s'aperçoit que plus n devient grand, moins les termes x_n de la suite s'écartent du nombre réel 1. On dit dans ce cas que la suite (x_n) converge vers 1 ou bien que le nombre réel 1 est la limite de la suite (x_n). Donnons à présent une définition précise de la limite d'une suite.

2.3.2 Définition de la limite d'une suite

On dit qu'une suite (x_n) de nombres réels est *convergente* et admet pour *limite* le nombre réel x, ou tout simplement que la suite (x_n) *converge vers* x si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel n_0 tel que la relation $n \geqslant n_0$ implique $|x_n - x| \leqslant \epsilon$. On écrit alors, $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$.

D'une manière générale, l'entier naturel n_0 dépend du nombre réel ϵ.

2.3.3 Définition d'une suite divergente

Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*. On dit aussi d'une telle suite qu'elle *diverge*.

2.3.4 Unicité de la limite d'une suite

Soit (x_n) une suite convergeant vers les nombres réels a et b. Alors, a et b sont égaux.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Etant donné que $a = \lim_{n \to +\infty} x_n$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$: $|x_n - a| \leqslant \epsilon/2$. De même, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geqslant m_0$: $|x_m - b| \leqslant \epsilon/2$. Ainsi, en posant $k = \max\{n_0, m_0\}$, on obtient en utilisant l'inégalité triangulaire que $|a - b| = |(a - x_k) + (x_k - b)| \leqslant |a - x_k| + |x_k - b| \leqslant \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. On en conclut, grâce au résultat obtenu au paragraphe 1.4.5, que $a = b$. ∎

2.3.5 Exemple d'une suite convergente

Montrons que la suite (x_n) définie par

$$x_n = 1 + \frac{1}{1+n}$$

converge vers 1. Pour cela, soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Alors, en posant $n_0 = [1/\epsilon]$, on obtient que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$|x_n - 1| = \frac{1}{1+n} \leqslant \epsilon.$$

D'où $\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$.

2.3.6 Remarque

Il ne faudrait pas déduire trop hâtivement de l'exemple donné au paragraphe 2.3.5 qu'il est toujours facile de trouver la limite d'une suite, même lorsque celle-ci existe. Dans certains cas, comme nous le verrons plus tard, il est possible de démontrer qu'une suite de nombres réels est convergente sans avoir à calculer ou à connaître sa limite. D'autre part, il est souvent plus commode de prouver qu'une suite est convergente que de trouver sa limite.

2.3.7 Exemple d'une suite divergente

La suite (x_n) définie par

$$x_n = n \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right),$$

diverge. Pour justifier cette affirmation, prenons $\epsilon = 1/2$ et supposons que la suite converge. Alors, il existe un nombre réel x et un entier $n_0 \geqslant 1$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$: $|x_n - x| \leqslant 1/2$. Par suite, en posant $p = 4n_0 + 1$ et $m = 4n_0 + 5$, on obtient, en utilisant l'inégalité triangulaire, que

$$4 = |x_p - x_m| = |(x_p - x) + (x - x_m)| \leqslant |x_p - x| + |x - x_m| \leqslant 1/2 + 1/2 = 1.$$

Ce résultat étant impossible, on en conclut que la suite (x_n) est divergente.

2.3.8 Remarque

On constate que la suite convergente donnée au paragraphe 2.3.5 est bornée, tandis que la suite divergente du paragraphe 2.3.7 est non bornée. D'une manière générale, une suite qui converge est bornée. Malheureusement, cette propriété n'est pas une conditions suffisante, car il exite des suites divergentes qui sont bornées; comme par exemple la suite $(x_n = (-1)^n)$.

2.3.9 Propriété des suites convergentes

Toute suite convergente est bornée.

DÉMONSTRATION. Soit (x_n) une suite qui converge vers x. Alors, pour $\epsilon = 1$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0 : |x_n - x| \leqslant 1$. Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire inverse, on obtient que pour tout $n \geqslant n_0 : |x_n| \leqslant 1 + |x|$. D'où, pour tout entier naturel n, on a: $|x_n| \leqslant \max \{|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|, 1 + |x|\}$; ce qui revient à dire que la suite (x_n) est bornée. ■

2.3.10 Opérations algébriques sur les suites

Considérons deux suites (x_n) et (y_n). On peut par addition, multiplication et division obtenir les nouvelles suites:

$$(z_n = x_n + y_n), \quad (u_n = x_n y_n) \quad \text{et} \quad \left(v_n = \frac{x_n}{y_n}\right).$$

Dans ce dernier cas, on suppose que pour tout entier naturel n, on a: $y_n \neq 0$. Supposons à présent que les deux suites (x_n) et (y_n) convergent respectivement vers x et y. Alors,

– la suite $(x_n + y_n)$ admet pour limite $x + y$.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Etant donné que la suite (x_n) converge vers x, il existe un entier naturel n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$: $|x_n - x| \leqslant \epsilon/2$. De même, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geqslant n_2 : |y_m - y| \leqslant \epsilon/2$. Ainsi, en posant $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, on obtient que pour tout entier $n \geqslant n_0$: $|(x_n + y_n) - (x + y)| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y| \leqslant \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. ■

– La suite $(x_n y_n)$ admet pour limite xy.

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que la suite (x_n) est bornée, ce qui entraîne qu'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que pour tout entier naturel $n : |x_n| \leqslant M$. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Alors, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant m_0$:

$$|x_n - x| \leqslant \frac{\epsilon}{2(1 + |y|)} \quad \text{et} \quad |y_n - y| \leqslant \frac{\epsilon}{2M}.$$

Il s'ensuit que pour tout $n \geqslant m_0 : |(x_n y_n) - (xy)| = |x_n(y_n - y) + y(x_n - x)| \leqslant |x_n|\,|y_n - y| + |y|\,|x_n - x| \leqslant M|y_n - y| + (1 + |y|)|x_n - x| \leqslant \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. ■

– Si de plus $y \neq 0$, la suite (x_n/y_n) admet pour limite (x/y).

DÉMONSTRATION. Etant donné que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = y \neq 0$, il existe un entier naturel k_1 tel que pour tout $n \geqslant k_1 : |y_n - y| \leqslant |y|/2$. Ainsi, on obtient que pour tout $n \geqslant k_1 : |y_n| \geqslant |y|/2$. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Alors, il existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant k_2$:

$$|y_n - y| \leqslant \frac{\epsilon y^2}{2};$$

ce qui implique que pour tout $n \geqslant k_0 = \max\{k_1, k_2\}$:

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{y_n - y}{y_n y} \right| \leqslant \epsilon.$$

On a ainsi démontré que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}.$$

D'où, en utilisant le résultat concernant le produit, on obtient que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \to +\infty} x_n \cdot \frac{1}{y_n} = \lim_{n \to +\infty} x_n \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{y_n} = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}. \quad \blacksquare$$

2.3.11 Linéarité de la limite d'une suite

Soit (x_n) et (y_n) deux suites qui convergent respectivement vers x et y. Alors, pour tout couple de nombres réels α et β, la suite $(\alpha x_n + \beta y_n)$ converge vers $\alpha x + \beta y$.

Ce résultat nous montre que l'application, qui, à toute suite convergente fait correspondre sa limite, est une application linéaire.

2.3.12 Remarques

Si (x_n) admet une limite différente de zéro, alors il existe un entier naturel m tel que la relation $n \geqslant m$ implique $x_n \neq 0$.

Supposons que la suite somme $(z_n = x_n + y_n)$ converge. Alors, ou bien les deux suites (x_n) et (y_n) convergent, ou bien elles divergent toutes les deux. Autrement dit, il n'est pas possible que l'une converge et que l'autre diverge. Par exemple; les deux suites $(x_n = 1 + n)$ et $(y_n = -n + (1/n))$ divergent, tandis que la suite $(z_n = x_n + y_n)$ converge vers 1.

Supposons que les deux suites $(u_n = x_n y_n)$ et (y_n) convergent et que de plus $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n \neq 0$. Alors, la suite (x_n) converge.

D'autre part, le produit de deux suites divergentes n'est pas forcément une suite divergente. Par exemple, les deux suites $(x_n = (-1)^n)$ et $(y_n = (-1)^n + 1/(n+1))$ divergent tandis que la suite $(u_n = x_n y_n)$ converge vers 1.

Supposons à présent que la suite (x_n) converge vers un nombre réel $x \neq 0$ et que la suite (y_n) diverge. Alors, la suite produit $(u_n = x_n y_n)$ diverge. Ce résultat peut être mis en défaut si $x = 0$. Par exemple, pour les deux suites $(x_n = 1/(n+1))$ et $(y_n = 2n)$, la suite produit $(u_n = x_n y_n)$ converge vers 2.

2.3.13 Limite du quotient de deux suites polynômiales

Soit (x_n) et (y_n) deux suites définies respectivement par

$$x_n = a_0 + a_1 n + \ldots + a_p n^p \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0$$

et

$$y_n = b_0 + b_1 n + \ldots + b_q n^q \quad \text{avec} \quad b_q \neq 0.$$

De plus, on suppose que pour tout entier naturel n, on a : $y_n \neq 0$. Alors,

– si $p < q$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$;

– si $p = q$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a_p}{b_q}$;

– si $p > q$, la suite $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ diverge.

DÉMONSTRATION. Considérons les trois suites auxiliaires (u_n), (v_n) et (z_n) définies respectivement par

$$u_n = \frac{a_0}{n^p} + \frac{a_1}{n^{p-1}} + \ldots + a_p \quad \text{et} \quad u_0 = a_0$$

$$v_n = \frac{b_0}{n^q} + \frac{b_1}{n^{q-1}} + \ldots + b_q \quad \text{et} \quad v_0 = b_0$$

$$z_n = n^{p-q} \quad \text{et} \quad z_0 = 1.$$

On obtient immédiatement que pour tout entier naturel n :

$$\frac{x_n}{y_n} = z_n \frac{u_n}{v_n}.$$

D'autre part,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a_p}{b_q} \neq 0.$$

On est maintenant en mesure de démontrer les résultats de ce paragraphe.

– Si $p < q$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$ et l'on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} z_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} z_n \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0;$$

– si $p = q$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 1$ et l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} z_n \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a_p}{b_q};$$

– si $p > q$, la suite (z_n) diverge. Comme d'autre part

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a_p}{b_q} \neq 0,$$

on obtient que la suite $(x_n/y_n = z_n\, u_n/v_n)$ diverge. ■

2.3.14 Conservation des relations d'ordre

Soit (x_n) et (y_n) deux suites qui convergent respectivement vers x et y et supposons qu'il existe un entier naturel n_0 tel que la relation $n \geqslant n_0$ implique $x_n \geqslant y_n$. Alors, $x \geqslant y$.

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde et supposons que $x < y$. Alors, le nombre réel $\epsilon = (y-x)/4$ est positif; par conséquent, il existe un entier $k > n_0$ tel que

$$x_k \leqslant x + \epsilon \quad \text{et} \quad y_k \geqslant y - \epsilon.$$

Ainsi,

$$x_k \leqslant x + \epsilon = x + (y-x)/4 < x + (y-x)/2 = (x+y)/2 = y - (y-x)/2$$
$$< y - (y-x)/4 = y - \epsilon \leqslant y_k.$$

Ce résultat est impossible puisque par hypothèse, on a: $x_k \geqslant y_k$. On en conclut que $x \geqslant y$. ■

2.3.15 Exemple

Dans cet exemple, nous allons donner une méthode que l'on utilise parfois pour trouver la limite d'une suite. Pour cela, considérons la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n} \quad \text{et} \quad x_0 = 2.$$

Un simple raisonnement par récurrence démontre que pour tout entier naturel $n : x_n \geqslant 2$. Il nous faut à présent trouver un candidat qui puisse être la limite de cette suite, sans pour autant savoir si cette limite existe ou non. Pour cette raison, supposons que la limite de cette suite existe et notons-la par x. Alors, x doit obligatoirement satisfaire les relations

$$x = 2 + \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad x \geqslant 2.$$

On obtient ainsi comme unique candidat le nombre réel $x = 1 + \sqrt{2}$. Reste à démontrer que la suite converge bien vers ce nombre. Dans ce but, remarquons d'abord que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|x_n - x| = \left|\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|x_{n-1} - x|}{x_{n-1}x} \leqslant \frac{|x_{n-1} - x|}{4} \leqslant \ldots \leqslant \frac{1}{4^n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Soit ϵ un nombre réel positif quelconque, et posons $n_0 = [1/\epsilon] + 1$. Ainsi, en utilisant l'inégalité ci-dessus, on obtient que pour tout $n \geqslant n_0 : |x_n - x| \leqslant \epsilon$. Ce dernier résultat nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x = 1 + \sqrt{2}$.

2.3.16 Remarques

La méthode utilisée au paragraphe 2.3.15, pour trouver un candidat comme limite d'une suite, ne peut pas s'appliquer à toutes les suites dont le terme général est donné par une formule récurrente. Pour s'en rendre compte, il suffit de considérer la suite (x_n) définie par

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}), \; x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = 1.$$

Néanmoins, cette suite est convergente (§ 2.7.2).

Par contre, la méthode donnée au paragraphe 2.3.15 peut, dans certains cas, être utilisée pour démontrer qu'une suite est divergente. Par exemple, la suite (x_n)

définie par

$$x_n = x_{n-1}^2 + 1 \quad \text{et} \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

diverge, puisque l'équation $x = x^2 + 1$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

2.3.17 Convergence de deux suites dont la différence converge vers zéro

Soit (x_n) et (y_n) deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - y_n) = 0$. Alors, ou bien les deux suites (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite, ou bien elles divergent toutes les deux.

DÉMONSTRATION. Deux cas seulement peuvent se présenter, ou bien les deux suites divergent, ou bien au moins une des deux suites converge. Supposons que l'on soit dans ce second cas et que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors, la suite $(y_n = x_n - (x_n - y_n))$ converge et de plus,

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} x_n - \lim_{n\to+\infty} (x_n - y_n) = x. \qquad \blacksquare$$

2.3.18 Exemple

Soit a un nombre réel positif. Alors, la suite (y_n) définie par

$$y_n = \sqrt[n]{a} \quad \text{et} \quad y_0 \text{ quelconque,}$$

converge vers 1. Pour démontrer ce résultat, nous allons considérer les trois cas suivants $a = 1$, $a > 1$ et $a < 1$.

Si $a = 1$, le résultat est évident.

Si $a > 1$, on obtient que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|1 - \sqrt[n]{a}| = \frac{|1 - a|}{1 + a^{1/n} + \ldots + a^{n-1/n}} \leqslant \frac{|1 - a|}{n}.$$

Soit ϵ un nombre réel positif quelconque, et posons

$$n_0 = [\,|1 - a|/\epsilon\,] + 1.$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité ci-dessus, on obtient que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$|1 - \sqrt[n]{a}| \leqslant \frac{|1 - a|}{n} \leqslant \epsilon.$$

On a ainsi démontré que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 1$.

Supposons à présent que $a < 1$. Alors, en posant

$$b = \frac{1}{a}$$

et en considérant la suite auxiliaire (u_n) définie par

$$u_n = \sqrt[n]{b} \quad \text{et} \quad u_0 = 1,$$

on obtient que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$. Etant donné que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$y_n = \frac{1}{u_n},$$

on en conclut immédiatement que $\lim_{n\to+\infty} y_n = 1$.

2.3.19 Convergence de la valeur absolue d'une suite

Soit (x_n) une suite qui converge vers x. Alors, la suite $(y_n = |x_n|)$ converge vers $|x|$.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer ce résultat, il suffit de remarquer que pour tout entier naturel n:

$$\big||x_n| - |x|\big| \leqslant |x_n - x|.$$ ■

2.3.20 Remarques

La réciproque du résultat obtenu au paragraphe 2.3.19 est généralement fausse. Par exemple, la suite $(x_n = (-1)^n)$ diverge tandis que la suite $(y_n = |x_n| = 1)$ converge vers 1.

Par contre, si la suite $(y_n = |x_n|)$ converge vers zéro, alors la suite (x_n) converge elle aussi vers zéro.

2.3.21 Théorème des deux gendarmes pour les suites

Soit (x_n), (u_n) et (v_n) trois suites satisfaisant les deux propriétés suivantes:

- $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = a$;
- il existe un entier naturel k tel que pour tout $n \geqslant k$: $u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$

Alors, la suite (x_n) converge vers a.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Etant donné que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = a$, il existe un entier $n_0 \geqslant k$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$: $v_n - a \leqslant \epsilon$ et $u_n - a \geqslant -\epsilon$. Ainsi, on obtient que pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$-\epsilon \leqslant u_n - a \leqslant x_n - a \leqslant v_n - a \leqslant \epsilon.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a.$$ ■

2.3.22 Exemple

Montrons que la suite (x_n) définie par

$$x_n = \frac{2^n}{n!} \quad \text{(par convention } 0! = 1\text{)},$$

admet le nombre réel zéro pour limite. Pour cela, considérons la suite auxiliaire (v_n)

définie par

$$v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ si } n \geqslant 3 \quad \text{et} \quad v_n = 2 \text{ si } n \in \{0,1,2\}.$$

En remarquant que pour tout entier $n \geqslant 3$: $n! \geqslant 3^{n-2}$, on obtient que pour tout $n \geqslant 3$:

$$0 \leqslant x_n \leqslant 9v_n.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, on en conclut, grâce au théorème des deux gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

2.3.23 Corollaire

Soit (x_n) une suite bornée et (y_n) une suite qui converge vers zéro. Alors, la suite produit $(u_n = x_n y_n)$ converge elle aussi vers zéro.

DÉMONSTRATION. Etant donné que la suite (x_n) est bornée, il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que pour tout entier naturel n: $|x_n| \leqslant M$. Ainsi, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant |u_n = x_n y_n| \leqslant M|y_n|.$$

On en déduit immédiatement, en utilisant le théorème des deux gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$; ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. ∎

2.3.24 Règle de d'Alembert pour les suites

Soit (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^*$ pour laquelle le nombre réel

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \quad \text{existe.}$$

Alors, si $\rho < 1$ la suite (x_n) converge vers zéro, tandis que si $\rho > 1$ elle diverge.

DÉMONSTRATION. Supposons que $\rho < 1$. Alors, $0 < (1+\rho)/2 < 1$; ce qui implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\rho}{2}\right)^n = 0.$$

Etant donné que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \rho,$$

il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant m$:

$$0 \leqslant |x_n| \leqslant \left(\frac{1+\rho}{2}\right)^{n-m} |x_m|.$$

Ainsi, en considérant la suite auxiliaire (y_n) définie par

$$y_n = \left(\frac{1+\rho}{2}\right)^{n-m} |x_m| \text{ si } n \geqslant m \quad \text{et} \quad y_n = |x_n| \text{ si } n \in \{0, \ldots, m-1\},$$

on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}: 0 \leqslant |x_n| \leqslant y_n$. Comme $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$, on en déduit, grâce au théorème des deux gendarmes, que $\lim_{n\to+\infty} |x_n| = 0$; ce qui revient à dire que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Supposons à présent que $\rho > 1$. De manière analogue, on démontre qu'il existe un entier naturel k tel que pour tout $n \geqslant k$:

$$|x_n| \geqslant \left(\frac{1+\rho}{2}\right)^{n-k} |x_k|.$$

Comme $|x_k| \neq 0$ et $(1+\rho) > 2$, la suite (x_n) n'est pas bornée; ce qui implique qu'elle est divergente. ■

2.3.25 Remarque

Si (x_n) est une suite de nombres réels non nuls telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n-1}}{x_n}\right| = 1,$$

on ne peut rien dire à priori sur sa convergence. Par exemple, la suite (y_n) définie par

$$y_n = \frac{1}{1+n}$$

converge vers zéro, tandis que la suite non bornée $(z_n = (n+1)^2)$ diverge.

2.3.26 Limites infinies

Parmi toutes les suites divergentes, nous distinguerons une espèce importante : nous dirons qu'une suite (x_n) *tend vers* $+\infty$ (resp. $-\infty$) si à tout nombre réel $A > 0$, on peut associer un entier $n_0 \geqslant 0$ tel que la relation $n \geqslant n_0$ implique $x_n \geqslant A$ (resp. $x_n \leqslant -A$). On écrit alors, $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).

D'une manière générale, l'entier naturel n_0 dépend du nombre réel A.

2.3.27 Opérations algébriques sur les limites infinies

Soit (x_n) et (y_n) deux suites de nombres réels :

- si $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) et si de plus la suite (y_n) est bornée, alors $\lim_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = +\infty$ (resp. $-\infty$) ;
- si $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) et s'il existe un entier naturel k tel que pour tout $n \geqslant k: y_n \geqslant x_n$ (resp. $y_n \leqslant x_n$), alors $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ (resp. $-\infty$);
- supposons que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ (resp. $-\infty$). S'il existe un nombre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et un entier $n_1 \geqslant 0$ tels que pour tout $n \geqslant n_1: y_n \geqslant \alpha$, alors $\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = +\infty$ (resp. $-\infty$). De même, s'il existe un nombre $\beta \in \mathbb{R}_-^*$ et un entier $n_2 \geqslant 0$ tels que pour tout $n \geqslant n_2: y_n \leqslant \beta$, alors $\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = -\infty$ (resp. $+\infty$);

– si la suite (x_n) est bornée et si de plus (y_n) est une suite de nombres réels non nuls telle que $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\lim_{n\to+\infty} x_n/y_n = 0$;
– supposons que $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$ et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ (resp. $\beta \in \mathbb{R}_-^*$) et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant n_1$: $x_n \geqslant \alpha$ (resp. $x_n \leqslant \beta$). Alors, si (y_n) est une suite de nombres réels positifs : $\lim_{n\to+\infty} x_n/y_n = +\infty$ (resp. $-\infty$). Par contre, si (y_n) est une suite de nombres réels négatifs : $\lim_{n\to+\infty} x_n/y_n = -\infty$ (resp. $+\infty$) ;
– si (x_n) est une suite de nombres réels non nuls tels que $\lim_{n\to+\infty} |x_{n+1}/x_n| = +\infty$, alors la suite (x_n) diverge.

2.3.28 Remarques

Lorsque $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = -\infty$, on ne peut rien dire à priori sur la limite de la suite $(z_n = x_n + y_n)$. Il faut étudier chaque cas séparément. Par exemple, pour les deux suites $(x_n = \sqrt{n})$ et $(y_n = -\sqrt{1+n})$ on obtient que $\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = 0$, tandis que pour les deux suites $(u_n = n + n^2)$ et $(v_n = -n^2)$: $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$. Par contre, pour les deux suites $(x_n = n + n\sin^2 n)$ et $(y_n = -n - n\cos^2 n)$, on montre que la suite $(x_n + y_n = -n\cos 2n)$ n'admet aucune limite finie ou infinie.

De même, si $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), on ne peut rien dire à priori sur la limite de la suite $(x_n y_n)$. Pour s'en convraincre donnons quelques exemples. Si

$$\left(x_n = \frac{1}{2n+1}\right) \quad \text{et} \quad (y_n = 2n)$$

alors $\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = 1$, tandis que si

$$\left(x_n = \frac{1}{\sqrt{1+n}}\right) \quad \text{et} \quad (y_n = -n-1)$$

on obtient que $\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = -\infty$. Par contre, pour les deux suites

$$\left(x_n = \frac{1+\cos n}{1+n}\right) \quad \text{et} \quad (y_n = 1+n),$$

la suite $(x_n y_n = 1 + \cos n)$ n'admet aucune limite finie ou infinie.

2.4 SUITES MONOTONES

2.4.1 Définition d'une suite monotone

Une suite (x_n) est dite *croissante* (resp. *strictement croissante*) si pour tout entier naturel n: $x_{n+1} \geqslant x_n$ (resp. $x_{n+1} > x_n$). De manière analogue, on dit qu'une suite (y_n) est *décroissante* (resp. *strictement décroissante*) si pour tout entier naturel n: $y_{n+1} \leqslant y_n$ (resp. $y_{n+1} < y_n$). Une suite (z_n) est dite *constante*, s'il existe un nombre réel a tel que pour tout entier $n \geqslant 0$: $z_n = a$.

Une suite est dite *monotone* si elle est croissante ou décroissante. De même, on dit qu'elle est *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

2.4.2 Convergence des suites monotones

- Toute suite croissante (resp. décroissante) qui est majorée (resp. minorée) converge;
- toute suite croissante (resp. décroissante) qui n'est pas majorée (resp. minorée) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

DÉMONSTRATION. Soit (x_n) une suite croissante et majorée, et soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Alors, si $x = \operatorname{Sup}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, on sait qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $0 \leqslant x - x_{n_0} \leqslant \epsilon$; ce qui implique, du fait que la suite (x_n) est croissante, que pour tout entier $n \geqslant n_0 : 0 \leqslant x - x_n \leqslant x - x_{n_0} \leqslant \epsilon$. On a ainsi démontré que la suite (x_n) converge vers x.

Soit (y_n) une suite décroissante et minorée. Alors, la suite $(z_n = -y_n)$ est une suite croissante et majorée, elle est donc convergente; ce qui entraîne que la suite (y_n) converge.

Soit (u_n) une suite croissante qui ne soit pas majorée, et soit A un nombre réel positif quelconque. Alors, il existe un entier $m_0 > 0$ tel que $u_{m_0} \geqslant A$; ce qui implique que pour tout entier $n \geqslant m_0$: $u_n \geqslant A$. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Soit (v_n) une suite décroissante qui ne soit pas minorée. Alors, la suite $(w_n = -v_n)$ est une suite croissante qui n'est pas majorée, elle tend donc vers $+\infty$; ce qui nous permet d'affirmer que la suite (v_n) tend vers $-\infty$. ∎

2.4.3 Définition du nombre réel irrationnel e

Considérons la suite (x_n) définie par

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad x_0 = 1.$$

Montrons que cette suite est majorée et croissante. En utilisant le binôme de Newton, on obtient que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\ &\quad + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\ &\leqslant 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots + \frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

En remarquant que pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}},$$

on en déduit que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \leqslant 3;$$

ce qui entraîne que la suite (x_n) est majorée par 3. Reste à démontrer qu'elle est croissante. En utilisant de nouveau la formule du binôme de Newton, on obtient que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$
\begin{aligned}
x_0 = 1 \leqslant x_n &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&\quad +\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&\leqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \\
&\quad +\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots \\
&\quad \left(1-\frac{n}{n+1}\right) = x_{n+1};
\end{aligned}
$$

ce qui implique que la suite (x_n) est croissante. On a ainsi démontré que la suite (x_n) est à la fois croissante et majorée, elle est donc convergente. Sa limite jouant un rôle très important en analyse, on la désigne par la lettre e. Le nombre réel e est un nombre irrationnel dont la valeur approchée est 2.71828... .

2.4.4 Exemple

Considérons la suite (x_n) définie par

$$x_n = \sqrt[n]{n} \quad \text{et} \quad x_0 = 2.$$

Montrons que cette suite admet le nombre réel 1 pour limite. On remarque d'abord que cette suite est minorée par 1. D'autre part, on vient de voir au paragraphe 2.4.3 que pour tout entier $n \geqslant 3$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3 \leqslant n.$$

Ainsi, en multipliant les deux membres de cette inégalité par n^n, on obtient que pour tout entier $n \geqslant 3$:

$$x_{n+1} = \sqrt[(n+1)]{n+1} = \sqrt[n(n+1)]{(n+1)^n} \leqslant \sqrt[n(n+1)]{n^{n+1}} = \sqrt[n]{n} = x_n.$$

On a ainsi démontré que la suite auxiliaire (y_n) définie par

$$y_n = x_n \text{ si } n \geqslant 3 \quad \text{et} \quad y_n = 2 \text{ si } n \in \{0, 1, 2\}$$

est une suite décroissante et minorée, elle est donc convergente. Comme d'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$, on obtient que la suite (x_n) converge. Reste à démontrer que la limite x de cette suite vaut bien 1. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $x \neq 1$. Alors $x > 1$, ce qui implique qu'il existe un nombre réel $h > 0$ et un entier $m \geqslant 3$ tels que pour tout $n \geqslant m$:

$$x_n = \sqrt[n]{n} \geqslant 1+h,$$

ou encore

$$n \geqslant (1+h)^n = 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\ldots+h^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2}h^2.$$

Ainsi, en divisant les deux membres de cette inégalité par n, on obtient que pour tout $n \geqslant m$:

$$1 \geqslant \left(\frac{n-2}{2}\right) h^2.$$

Ce dernier résultat étant une absurdité, on en conclut que $\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$.

2.4.5 Convergence de deux suites monotones dont la différence converge vers zéro

Soit (x_n) une suite croissante et (y_n) une suite décroissante telle que $\lim_{n \to +\infty} (x_n - y_n) = 0$. Alors,

- pour tout entier naturel $n: x_0 \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant y_{n+1} \leqslant y_n \leqslant y_0$;
- les deux suites (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite.

DÉMONSTRATION. Etant donné que pour tout entier naturel n:

$$(y_{n+1} - x_{n+1}) - (y_n - x_n) = (y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n) \leqslant 0,$$

la suite $(z_n = y_n - x_n)$ est une suite décroissante dont la limite vaut zéro; ce qui implique que pour tout entier $n \geqslant 0: z_n \geqslant 0$. Ainsi, la première assertion est vérifiée. On en déduit immédiatement que les deux suites (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite. ∎

2.4.6 Autre définition possible du nombre irrationnel e

Considérons la suite (y_n) définie par

$$y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad y_0 = 1.$$

Nous allons démontrer que cette suite converge vers le nombre irrationnel e. Pour cela, introduisons la suite auxiliaire (z_n) définie par

$$z_n = y_n + \frac{1}{n!} \quad \text{si } n \geqslant 1 \quad \text{et} \quad z_0 = 4.$$

On vérifie facilement que cette suite est décroissante. Comme d'autre part, la suite (y_n) est croissante et que $\lim_{n \to +\infty} (z_n - y_n) = 0$, on obtient que la suite (y_n) converge. De plus, on sait que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant y_n,$$

ce qui permet d'affirmer que $e \leqslant y = \lim_{n \to +\infty} y_n$. Reste à démontrer que $y \leqslant e$. Dans ce but, fixons-nous arbitrairement un entier $m > 1$. Ainsi, la suite (v_n) définie par

$$v_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)$$

et $v_0 = 1$, est une suite croissante qui converge vers y_m. En remarquant que pour tout $n \geqslant m$:

$$v_n \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e,$$

on obtient que $y_m \leqslant e$. Ce dernier résultat étant valable quel que soit l'entier $m > 1$, on en déduit que $y \leqslant e$. On a ainsi démontré que $\lim_{n \to +\infty} y_n = e$.

2.5 LIMITE SUPÉRIEURE ET LIMITE INFÉRIEURE D'UNE SUITE BORNÉE

2.5.1 Définition de la limite supérieure d'une suite bornée

Soit (x_n) une suite bornée. A partir de cette suite, on définit une nouvelle suite (y_n) en posant pour tout entier naturel n:

$$y_n = \operatorname{Sup}\{x_k : k \geqslant n\}.$$

La suite (y_n) ainsi obtenue est une suite décroissante et bornée, elle est donc convergente. Par définition, le nombre réel $y = \lim_{n\to+\infty} y_n$ est appelé la *limite supérieure* de la suite (x_n). On écrit alors, $y = \lim_{n\to+\infty} \sup x_n$.

2.5.2 Définition de la limite inférieure d'une suite bornée

De même, soit (x_n) une suite bornée. A partir de cette suite, on définit une nouvelle suite (z_n) en posant pour tout entier naturel n:

$$z_n = \operatorname{Inf}\{x_k : k \geqslant n\}.$$

La suite (z_n) ainsi obtenue est une suite croissante et bornée, elle est donc convergente. Par définition, le nombre réel $z = \lim_{n\to+\infty} z_n$ est appelé la *limite inférieure* de la suite (x_n). On écrit alors, $z = \lim_{n\to+\infty} \inf x_n$.

2.5.3 Remarque

Si (x_n) est une suite bornée, la suite $(y_n = -x_n)$ satisfait les deux relations suivantes:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup y_n = -\lim_{n\to+\infty} \inf x_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \inf y_n = -\lim_{n\to+\infty} \sup x_n.$$

2.5.4 Caractérisation des suites convergentes

Une suite (x_n) converge vers le nombre réel x si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \inf x_n = \lim_{n\to+\infty} \sup x_n = x$.

DÉMONSTRATION. Supposons que la suite (x_n) converge vers x et soit (y_n) la suite définie par

$$y_n = \operatorname{Inf}\{x_k : k \geqslant n\}.$$

On pose $y = \lim_{n\to+\infty} y_n$. Nous allons d'abord démontrer que $y = x$. Pour cela, soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Alors, on sait qu'il existe un entier naturel m tel que pour tout $n \geqslant m$:

$$|x_n - x| \leqslant \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad |y_n - y| \leqslant \frac{\epsilon}{4}.$$

D'autre part, il résulte de la définition du nombre réel y_m qu'il existe un entier $k \geqslant m$ tel que

$$|x_k - y_m| \leqslant \frac{\epsilon}{4},$$

ce qui implique que

$$|x_k - y| \leqslant |x_k - y_m| + |y_m - y| \leqslant \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Ainsi,

$$|x - y| \leqslant |x - x_k| + |x_k - y| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

On a ainsi démontré que pour tout nombre réel positif ϵ, on a: $|x - y| \leqslant \epsilon$; ce qui entraîne que $x = y$. De manière analogue, on montre que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup x_n$.

Maintenant, supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup x_n = x$. En posant pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$y_n = \operatorname{Inf}\{x_k : k \geqslant n\} \quad \text{et} \quad z_n = \operatorname{Sup}\{x_k : k \geqslant n\},$$

on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N} : y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$. Comme d'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = x$, on en conclut immédiatement, grâce au théorème des deux gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. ■

2.6 SOUS-SUITES

2.6.1 Définition d'une sous-suite

Une *sous-suite* d'une suite (x_n) est une suite $k \mapsto x_{n_k}$, où $k \mapsto n_k$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels.

Une sous-suite d'une suite (x_n) est aussi appelée une *suite partielle* ou encore une *suite extraite*. Par exemple, en posant $n_k = 2k$, on obtient que (x_{2k}) est une sous-suite de (x_n).

2.6.2 Convergence d'une sous-suite

Si (x_n) est une suite qui converge vers x, alors toute sous-suite (x_{n_k}) de la suite (x_n) converge vers x.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Etant donné que la suite (x_n) converge vers x, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0 : |x_n - x| \leqslant \epsilon$. En remarquant que la relation $k \geqslant n_0$ implique $n_k \geqslant n_0$, on obtient que pour tout entier $k \geqslant n_0 : |x_{n_k} - x| \leqslant \epsilon$. ■

2.6.3 Remarque

Considérons la suite $(x_n = (-1)^n)$. En posant $n_k = 2k + 1$, on obtient que la sous-suite (x_{n_k}) converge vers -1. Cet exemple nous montre qu'une suite divergente peut très bien posséder une sous-suite convergente. Ce résultat, comme nous allons le voir maintenant, est toujours vérifié lorsque la suite (x_n) est bornée. C'est le théorème de Bolzano-Weierstrass. Mais avant d'établir ce théorème, nous avons besoin d'un lemme.

2.6.4 Lemme

Soit (x_n) une suite bornée telle que pour tout nombre réel x, l'ensemble $F(x) = \{n \in \mathbb{N} : x_n = x\}$ ne contienne au plus qu'un nombre fini d'entiers naturels.

Alors, il existe un nombre réel a tel que pour chaque entier $m \geqslant 1$, l'ensemble

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cap B(a, 1/m)$$

possède un nombre infini d'éléments.

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde et supposons que la conclusion de ce lemme soit fausse. Alors, à chaque nombre réel x, on peut associer un entier $m(x) \geqslant 1$ tel que la boule ouverte $B(x, 1/m(x))$ ne possède qu'un nombre fini d'éléments de l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. D'autre part, la suite (x_n) étant bornée, il existe deux nombres réels c et d tels que

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [c, d] \subset \bigcup_{x \in \mathbb{R}} B(x, 1/m(x)).$$

Ainsi, grâce au théorème de Heine-Borel-Lebesgue, on sait qu'il existe un sous-ensemble fini A de $\mathbb{R}$ tel que

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [c, d] \subset \bigcup_{x \in A} B(x, 1/m(x)).$$

Il en résulte que l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ne peut contenir qu'un nombre fini d'éléments; ce qui entraîne l'existence de p nombres réels $y_1, \ldots, y_p$ tels que

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{y_i : i \in \mathbb{N}, 1 \leqslant i \leqslant p\}.$$

Par conséquent

$$\bigcup_{i=1}^{p} F(y_i) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} F(x) = \mathbb{N}.$$

Or, par hypothèse, chaque sous-ensemble $F(y_i)$ de $\mathbb{N}$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments; ce qui implique que l'ensemble

$$\bigcup_{i=1}^{p} F(y_i)$$

n'en contient lui-même qu'un nombre fini. D'où contradiction. Le lemme est ainsi démontré. ■

2.6.5 Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée (x_n), on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) qui converge.

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe un nombre réel x pour lequel l'ensemble $F(x) = \{n \in \mathbb{N} : x_n = x\}$ possède un nombre infini d'éléments. Alors, en posant $n_k = \min\{n \in F(x) : n > n_{k-1}\}$ avec n_0 pris arbitrairement dans $F(x)$, la suite $k \mapsto n_k$ est strictement croissante. Comme par construction, l'ensemble $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ est inclus dans $F(x)$, on en conclut immédiatement que la suite extraite (x_{n_k}) converge vers x.

Supposons à présent que les hypothèses du lemme donné au paragraphe 2.6.4 soient vérifiées. Alors, il existe un nombre réel a tel que pour chaque entier $m \geqslant 1$, la boule ouverte $B(a, 1/m)$ possède un nombre infini d'éléments de l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$; ce qui nous permet, en posant $n_0 = 0$ et $n_k = \min\{n \in \mathbb{N} : n > n_{k-1}, x_n \in B(a, 1/k)\}$, d'obtenir une suite $k \mapsto n_k$ strictement croissante telle que la suite extraite (x_{n_k}) converge vers a. Ainsi, s'achève la démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass. ■

2.6.6 Remarques

Le résultat du théorème de Bolzano-Weierstrass peut être mis en défaut si l'on ne suppose pas que la suite est bornée. Par exemple, la suite (x_n) définie par

$$x_n = (-1)^n n$$

n'admet aucune sous-suite convergente.

Néanmoins, une suite non bornée peut très bien posséder une sous-suite convergente. Pour s'en rendre compte, il suffit de considérer la suite non bornée (x_n) définie par

$$x_{2n} = n \quad \text{et} \quad x_{2n+1} = 0.$$

Cette suite admet la suite (x_{2k+1}) comme sous-suite convergente.

2.7 SUITES DE CAUCHY

2.7.1 Définition d'une suite de Cauchy

On dit qu'une suite (x_n) de nombres réels est une *suite de Cauchy* si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel n_0 tel que les relations $n \geqslant n_0$ et $m \geqslant n_0$ impliquent $|x_n - x_m| \leqslant \epsilon$.

D'une manière générale, l'entier naturel n_0 dépend du nombre réel ϵ.

2.7.2 Exemple

Considérons la suite (x_n) définie par la formule récurrente

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}), \; x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = 1.$$

Montrons que cette suite est une suite de Cauchy et qu'elle converge vers 2/3. En premier lieu, on constate par un simple raisonnement par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$x_n - x_{n-1} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}.$$

Il en résulte immédiatement que pour tout couple d'entiers p et q vérifiant $p > q \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} |x_p - x_q| &\leqslant |x_p - x_{p-1}| + |x_{p-1} - x_{p-2}| + \ldots + |x_{q+1} - x_q| \\ &\leqslant \frac{1}{2^{p-1}} + \ldots + \frac{1}{2^q} = \frac{1}{2^q}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-q-1}}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2^{q-1}} \leqslant \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Soit ϵ un nombre réel positif quelconque et posons

$$n_0 = [1/\epsilon] + 1.$$

Par suite, on obtient que pour tout couple d'entiers $p \geqslant n_0$ et $q \geqslant n_0$:

$$|x_p - x_q| \leqslant \max\{1/q, 1/p\} \leqslant \epsilon.$$

On a ainsi établi que la suite (x_n) est une suite de Cauchy. Reste à démontrer que sa limite vaut 2/3. En écrivant le terme général de la suite (x_n) de la manière suivante

$$\begin{aligned} x_n &= (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) + x_0 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right), \end{aligned}$$

on obtient immédiatement que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 2/3$.

Cet exemple n'est pas un cas particulier, comme nous allons le démontrer maintenant.

2.7.3 Caractérisation d'une suite de Cauchy

Une suite (x_n) est une suite de Cauchy si et seulement si elle est convergente.

DÉMONSTRATION. Supposons que (x_n) soit une suite de Cauchy. Alors, il existe un entier naturel r tel que pour tout $n \geqslant r$: $|x_n - x_r| \leqslant 1$; ainsi, on obtient que pour tout entier $n \geqslant 0$: $|x_n| \leqslant \max\{1 + |x_r|, |x_0|, \ldots, |x_{r-1}|\}$. Autrement dit, la suite (x_n) est bornée; ce qui nous permet, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, d'en extraire une sous-suite (x_{n_k}) qui converge. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque et posons $x = \lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k}$. Alors, il existe deux entiers naturels m_0 et j_0 tels que pour tout triplet d'entiers $p \geqslant m_0$, $q \geqslant m_0$ et $j \geqslant j_0$:

$$|x_p - x_q| \leqslant \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad |x_{n_j} - x| \leqslant \frac{\epsilon}{2}.$$

Ainsi, en posant $k_0 = \max\{m_0, j_0\}$ et en remarquant que $n_{k_0} \geqslant k_0$, on obtient que pour tout entier $n \geqslant k_0$:

$$|x_n - x| \leqslant |x_n - x_{n_{k_0}}| + |x_{n_{k_0}} - x| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

D'où la convergence de la suite (x_n).

Supposons à présent que la suite (x_n) converge vers le nombre réel x. Alors, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$|x_n - x| \leqslant \frac{\epsilon}{2};$$

ce qui implique que pour tout couple d'entiers $p \geqslant n_0$ et $q \geqslant n_0$,

$$|x_p - x_q| \leqslant |x_p - x| + |x - x_q| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Autrement dit, la suite (x_n) est une suite de Cauchy. ∎

2.7.4 Remarques

Le fait qu'une suite de Cauchy soit convergente, nous fournit un critère pour démontrer qu'une suite converge sans avoir à trouver sa limite.

Soit (x_n) une suite vérifiant la propriété suivante : pour tout entier naturel k fixé : $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_{n+k} - x_n) = 0$. Peut-on en conclure que cette suite est une suite de Cauchy?

La réponse à cette question est non. Pour la justifier, il nous suffit de considérer la suite (x_n) définie par : $x_n = \sqrt{n}$. Cette suite vérifie bien la propriété ci-dessus; mais n'étant pas bornée, elle diverge. Elle ne peut donc être une suite de Cauchy.

2.8 EXERCICES

2.8.1 En utilisant la définition de la limite d'une suite (§ 2.3.2), montrer que

$$1)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{3n^2+1} = 0 \qquad 2)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+1}{7n^2+5} = \frac{2}{7}$$

$$3)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n^2+3)}{\sqrt{n+1}} = 0 \qquad 4)\ \lim_{n\to+\infty} \left(n\cdot\sin\frac{1}{n^2}\right) = 0.$$

2.8.2 Calculer la limite des suites définies par

$$1)\ x_n = \frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n}}{2} \qquad 2)\ x_n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^n \text{ et } x_0 = 0$$

$$3)\ x_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \text{ et } x_0 = 0 \qquad 4)\ x_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \text{ et } x_0 = 1.$$

2.8.3 Montrer que pour tout entier $n \geqslant 4 : 2^n \geqslant n^3/24$. En déduire la limite de la suite (x_n) définie par $x_n = n^2/2^n$.

2.8.4 Soit (x_n) une suite convergeant vers l. Montrer que la suite (y_n) définie par

$$y_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k$$

converge elle aussi vers l. En donnant un contre-exemple, démontrer que la réciproque est fausse.

2.8.5 Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!\,.$$

2.8.6 Etudier la convergence de la suite (x_n) définie par

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad x_0 = 0.$$

2.8.7 Soit (x_n) une suite convergeant vers l. Montrer que la suite (y_n) définie par

$$y_n = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} kx_k \quad \text{et} \quad y_0 = 1$$

converge elle aussi vers l.

2.8.8 Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 1/2\sqrt{n}$. En déduire que la suite (x_n) définie par

$$x_n = -2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad x_0 = 0$$

est convergente.

2.8.9 Pour la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}, \; x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = 1,$$

montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$: $x_n = 2^n - 1$. En déduire que (x_n) diverge.

2.8.10 Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{3}{2}\, x_n - \frac{1}{2}\, x_{n-1}, \; x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = 1.$$

2.8.11 Discuter, en fonction des valeurs du nombre réel $a > 0$, la convergence de la suite (x_n) définie par $x_n = (2^n + a^n)^{1/n}$ et $x_0 = 1$. Lorsqu'elle converge, calculer sa limite.

2.8.12 Discuter, en fonction des valeurs du nombre réel $a > 0$, la convergence de la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$ et $x_0 = a$. Lorsqu'elle converge, calculer sa limite.

2.8.13 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{2x_n + 3} \quad \text{et} \quad x_0 = 1$$

converge. Calculer sa limite.

2.8.14 Montrer que la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = (x_n + 4)/3$ et $x_0 = 0$ converge. Calculer sa limite.

2.8.15 Discuter, en fonction des valeurs du nombre réel $a > 0$, la convergence de la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = x_n^2/2$ et $x_0 = a$. Lorsqu'elle converge, calculer sa limite.

2.8.16 Montrer que la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = (x_n^2 + 2)/2\sqrt{2}$ et $x_0 = 0$ est convergente. Calculer sa limite.

2.8.17 Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \quad \text{et} \quad x_0 > 0$$

converge. Calculer sa limite.

2.8.18 Soit (x_n) et (y_n) les deux suites définies par

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}, \quad x_0 > 0 \quad \text{et} \quad y_0 > 0.$$

Montrer qu'elles convergent toutes les deux vers $\sqrt{x_0 y_0}$.

2.8.19 Montrer que la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ et $x_0 = \sqrt{2}$ converge. Calculer sa limite.

2.8.20 Montrer que la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = (2 + \sqrt{x_n})^{1/2}$ et $x_0 = \sqrt{2}$ converge.

2.8.21 Soit a un nombre réel positif et (x_n) la suite définie par

$$x_n = n(\sqrt[n]{a} - 1) \quad \text{et} \quad x_0 = a.$$

1) Montrer que si $a > 1$, la suite (x_n) converge.
2) En déduire qu'elle converge pour $a > 0$.
3) En posant $l(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, montrer que tout couple de nombres réels positifs a et b : $l(ab) = l(a) + l(b)$.

2.8.22 Soit (x_n) une suite de nombres réels positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_{n+1}/x_n) = l$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

2.8.23 En utilisant l'exercice précédent, calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \quad \text{et} \quad x_0 = 1.$$

2.8.24 Soit (x_n) une suite bornée. Montrer que pour tout nombre réel $\lambda > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup(\lambda x_n) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} \sup x_n$.

2.8.25 Soit (x_n) et (y_n) deux suites bornées. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup(x_n + y_n) \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \sup x_n + \lim\limits_{n\to+\infty} \sup y_n$.

2.8.26 Soit (x_n) une suite bornée.
1) Montrer que $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{|x_n|} \leqslant 1$.
2) Si $L < 1$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.
3) Que peut-on dire si $L = 1$?

2.8.27 Soit (x_n) une suite de nombres réels non nuls pour laquelle le nombre

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \quad \text{existe.}$$

Si $\rho < 1$, montrer que
1) La suite (x_n) est bornée.
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{|x_n|} < 1$.

2.8.28 Montrer que de toute suite on peut extraire une sous-suite monotone.

2.8.29 Soit (x_n) une suite dont toutes les sous-suites convergent. Montrer que (x_n) converge.

2.8.30 Montrer que si les deux sous-suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers la même limite l, alors (x_n) converge vers l.

2.8.31 En utilisant l'exercice précédent, montrer que la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = \sqrt{2-x_n}$ et $x_0 = 2/3$ est convergente. Calculer sa limite.

2.8.32 Montrer que la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = (\cos x_n + 1)/2$ et $x_0 = 0$ est une suite de Cauchy.

3. Séries numériques

3.1 GÉNÉRALITÉS

3.1.1 Définition d'une série de terme général x_n

On appelle *série de terme général* x_n le couple constitué d'une suite (x_n) de nombres réels et de la suite (S_n) où, pour tout entier naturel n:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + x_1 + \ldots + x_n .$$

Le nombre réel x_n est appelé le *n-ième terme* et S_n la *n-ième somme partielle* de la série de terme général x_n.

3.1.2 Convergence d'une série

La série de terme général x_n est dite *convergente* si la suite (S_n) des somme partielles est convergente; la limite de cette suite s'appelle la *somme* de la série de terme général x_n, et se note $\Sigma_{k=0}^{+\infty} x_k$.

Dans le cas contraire, on dit que la série de terme général x_n est *divergente*. Dans le cas particulier où la suite des sommes partielles (S_n) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), on écrit $\Sigma_{k=0}^{+\infty} x_k = +\infty$ (resp. $-\infty$).

3.1.3 Série absolument convergente

Une série de terme général x_n est dite *absolument convergente* si la série de terme général $|x_n|$ est convergente.

Une série absolument convergente est convergente.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Etant donné que la série de terme général $|x_n|$ est convergente, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout couple d'entiers $m > n \geqslant n_0$: $\Sigma_{k=n+1}^{m} |x_k| \leqslant \epsilon$; ce qui implique que la suite (S_n) des sommes partielles est une suite de Cauchy. Autrement dit, la suite (S_n) converge. ■

3.1.4 Condition nécessaire pour qu'une série converge

Si la série de terme général x_n est convergente, alors la suite (x_n) converge vers zéro.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. La suite (S_n) des sommes partielles étant une suite de Cauchy, il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$: $|S_n - S_{n-1}| = |x_n| \leqslant \epsilon$. D'où $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$. ■

3.1.5 Divergence de la série harmonique

La série dont le terme général x_n est défini par

$$x_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad x_0 = 0,$$

est appelé la *série harmonique*. Cette série est divergente.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer que la série harmonique est divergente, il suffit de remarquer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|S_{2n} - S_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2};$$

ce qui revient à dire que la suite (S_n) des sommes partielles n'est pas une suite de Cauchy. Ce qui implique qu'elle diverge. ■

3.1.6 Remarque

Le fait qu'une suite (x_n) de nombres réels converge vers zéro, n'implique pas que la série de terme général x_n est convergente. C'est le cas de la série harmonique.

3.2 QUELQUES CRITÈRES DE CONVERGENCE

3.2.1 Critère de Cauchy

Une série de terme général x_n est convergente si et seulement si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel n_0 tel que les relations $n \geqslant n_0$ et $p \geqslant 0$ impliquent $|x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}| \leqslant \epsilon$.

DÉMONSTRATION. Ce critère est équivalent à la proposition suivante: la suite des sommes partielles (S_n) converge si et seulement si la suite (S_n) est une suite de Cauchy; que nous savons être vraie. ■

3.2.2 Critère de comparaison

Soit (x_n) et (y_n) deux suites de nombres réels et k un entier naturel tel que pour tout entier $n \geqslant k$: $0 \leqslant x_n \leqslant y_n$ (resp. $x_n \geqslant y_n \geqslant 0$). Alors, si la série de terme général y_n est convergente (resp. divergente), la série de terme général x_n est aussi convergente (resp. divergente).

DÉMONSTRATION. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $S_n = \Sigma_{j=0}^{n} x_j$ et $\bar{S}_n = \Sigma_{j=0}^{n} y_j$. En premier lieu, supposons que pour tout entier $n \geqslant k$: $0 \leqslant x_n \leqslant y_n$, et que la suite $(\bar{S}_n)$ converge. Alors, pour tout couple d'entiers $n \geqslant k$ et $p \geqslant 0$, on obtient que

$$0 \leqslant x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+p} \leqslant y_n + y_{n+1} + \ldots + y_{n+p}.$$

Etant donné que la suite $(\bar{S}_n)$ est une suite de Cauchy, on en déduit, grâce au critère de Cauchy, que la suite (S_n) converge.

Supposons à présent que pour tout entier $n \geqslant k$: $x_n \geqslant y_n \geqslant 0$, et que la suite $(\bar{S}_n)$ diverge. Alors, la suite (S_n) est non bornée; ce qui implique que la série de terme général x_n est divergente. ■

3.2.3 Exemple

Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Montrons que la série dont le terme général x_n est défini par

$$x_n = \frac{1}{n^p} \quad \text{et} \quad x_0 = 0,$$

converge.

Si $p = 2$, on obtient que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$1 \leqslant S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2;$$

ce qui entraîne que la suite (S_n) est bornée. Comme d'autre part elle est croissante, on en déduit qu'elle converge.

Supposons à présent que $p > 2$. Etant donné que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \frac{1}{n^p} \leqslant \frac{1}{n^2};$$

on en conclut, grâce au critère de comparaison, que la série du terme général x_n est convergente.

3.2.4 Critère des séries alternées

Soit (x_n) une suite de nombres réels vérifiant les deux propriétés qui suivent:

– il existe un entier naturel p tel que pour tout entier $n \geqslant p$: $|x_{n+1}| \leqslant |x_n|$ et $x_n x_{n+1} \leqslant 0$;

– $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$.

Alors, la série de terme général x_n est convergente.

DÉMONSTRATION. En premier lieu, on constate que pour tout couple d'entiers $n \geqslant p$ et $k \geqslant 1$:

$$x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+k} = \begin{cases} x_n + (x_{n+1} + x_{n+2}) + \ldots + (x_{n+k-1} + x_{n+k}) & \text{si } k \text{ est pair} \\ x_n + (x_{n+1} + x_{n+2}) + \ldots + (x_{n+k-2} + x_{n+k-1}) + x_{n+k} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

ou encore

$$x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+k} = \begin{cases} (x_n + x_{n+1}) + \ldots + (x_{n+k-2} + x_{n+k-1}) + x_{n+k} & \text{si } k \text{ est pair} \\ (x_n + x_{n+1}) + \ldots + (x_{n+k-1} + x_{n+k}) & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ainsi, grâce à la première propriété que vérifie la suite (x_n), on obtient que pour tout couple d'entiers $n \geqslant p$ et $k \geqslant 0$:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+k} \leqslant x_n & \text{si } x_n \geqslant 0 \\ x_n \leqslant x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+k} \leqslant 0 & \text{si } x_n \leqslant 0; \end{cases}$$

ce qui implique que $|x_n + \ldots + x_{n+k}| \leqslant |x_n|$. Etant donné que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$, on obtient, en utilisant le critère de Cauchy, que la suite (S_n) des sommes partielles converge. ■

3.2.5 Convergence de la série harmonique alternée

La série dont le terme général x_n est défini par

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{et} \quad x_0 = 0,$$

est appelée la *série harmonique alternée*. D'après le critère des séries alternées, cette série est convergente.

3.2.6 Série dont le terme général x_n garde un signe constant

Soit (x_n) une suite de nombres réels positifs ou nuls (resp. négatifs ou nuls). Alors, si la suite des sommes partielles $(S_n = \Sigma_{k=0}^{n} x_k)$ est bornée, la série de terme général x_n est convergente; sinon elle tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que la suite (S_n) est croissante (resp. décroissante) et d'appliquer le résultat obtenu au paragraphe 2.4.2. ∎

3.2.7 Critère de la limite supérieure

Soit (x_n) une suite bornée telle que

$$L = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1.$$

Alors, la série de terme général x_n est absolument convergente.

DÉMONSTRATION. Comme $L < 1$, il existe un entier $m > 0$ tel que pour tout $k \geqslant m$:

$$\sqrt[k]{|x_k|} \leqslant \frac{1+L}{2} < 1.$$

Ainsi, on obtient que pour tout entier $n \geqslant m$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} |x_k| &= \sum_{k=0}^{m-1} |x_k| + \sum_{k=m}^{n} |x_k| \\ &\leqslant \text{m.max}\,\{|x_k| : k \in \mathbb{N}, 0 \leqslant k \leqslant m-1\} + \sum_{k=m}^{n} \left(\frac{1+L}{2}\right)^k \\ &\leqslant \text{m.max}\,\{|x_k| : k \in \mathbb{N}, 0 \leqslant k \leqslant m-1\} + \frac{2}{1-L}\,; \end{aligned}$$

ce qui entraîne, d'après le résultat obtenu au paragraphe 3.2.6, que la série de terme général x_n est absolument convergente. ∎

3.2.8 Exemple

Montrons que pour la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}(1 + n x_n) \quad \text{et} \quad x_0 = 0,$$

la série de terme général x_n est convergente. Par un simple raisonnement par récurrence, on montre que pour tout entier naturel n:

$$0 \leqslant x_n \leqslant 1;$$

ce qui implique que le nombre réel $L = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$ existe et que pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{1+(n-1)x_{n-1}} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt[n]{n}.$$

Considérons à présent la suite auxiliaire (z_n) définie par

$$z_n = \sqrt[n]{n} \text{ si } n \geqslant 3 \quad \text{et} \quad z_n = 2 \text{ si } n \in \{0, 1, 2\}.$$

Etant donné que cette suite est décroissante, on obtient que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\operatorname{Sup}\{\sqrt[k]{|x_k|} : k \geqslant n\} \leqslant \frac{1}{2} z_n.$$

Comme d'autre part $\lim_{n\to+\infty} z_n = 1$, on en déduit que $L \leqslant 1/2$. Ainsi, grâce au critère de la limite supérieure, on peut affirmer que la série de terme général x_n est absolument convergente.

3.2.9 Critère de d'Alembert

Soit (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^*$ pour laquelle le nombre réel

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \text{ existe.}$$

Alors, si $\rho < 1$ la série de terme général x_n est absolument convergente, tandis que si $\rho > 1$ elle est divergente.

DÉMONSTRATION. En premier lieu, supposons que $\rho < 1$. Alors, il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant m$:

$$|x_n| \leqslant \left(\frac{1+\rho}{2}\right)^{n-m} |x_m|.$$

Ainsi, on obtient que pour tout entier $n \geqslant m$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} |x_k| &= \sum_{k=0}^{m-1} |x_k| + \sum_{k=m}^{n} |x_k| \\ &\leqslant \text{m.max}\{|x_k| : k \in \mathbb{N}, 0 \leqslant k \leqslant m-1\} + \frac{2|x_m|}{1-\rho};\end{aligned}$$

ce qui entraîne, d'après le résultat obtenu au paragraphe 3.2.6, que la série de terme général x_n est absolument convergente.

Supposons à présent que $\rho > 1$. Alors, il existe un entier naturel p tel que pour tout $n \geqslant p$: $|x_n| \geqslant |x_p| \neq 0$; ce qui implique que la suite (x_n) n'admet pas zéro pour limite. Il en résulte (§ 3.1.4) que la série de terme général x_n est divergente. ■

3.2.10 Exemple

Considérons la suite (x_n) définie par

$$x_n = \frac{n+1}{2^n}.$$

Etant donné que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{1}{2},$$

on peut affirmer, grâce au critère de d'Alembert, que la série de terme général x_n est absolument convergente.

3.2.11 Remarques

En désignant par (x_n) et (y_n) les deux suites définies par

$$x_n = (-1)^n, \quad y_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{et} \quad x_0 = y_0 = 0,$$

nous constatons que

$$L = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|y_n|} = 1$$

et

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{y_{n+1}}{y_n} \right| = 1.$$

Etant donné que la série de terme général x_n est divergente, tandis que celle de terme général y_n est convergente, ces deux exemples nous montrent que dans le cas où $L = 1$ et $\rho = 1$, on ne peut rien dire à priori concernant la convergence de la série étudiée.

Soit (x_n) une suite de nombres réels non nuls telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = +\infty.$$

Alors, la série de terme général x_n est divergente.

3.3 EXERCICES

3.3.1 Etudier la convergence et la convergence absolue des séries dont le terme général x_n est défini par

1) $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$ 2) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}\,\sqrt{n+2}\,\sqrt{n+3}\,\sqrt{n+4}}$

3) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ 4) $x_n = \dfrac{\cos(n!)}{(n+1)^2}$

5) $x_n = \dfrac{n^3}{4^n}$ 6) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^3}}{n^2+1}$

7) $x_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n+1}}$ 8) $x_n = \dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n+1)}{(n+1)!}$.

3.3.2 Calculer les sommes suivantes:

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{5^k}$ 2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+k)(a+1+k)}$ avec $a > 0$

3) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2k+3}{k(k-1)(k+2)}$ 4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$.

3.3.3 Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que $\Sigma_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty$. Montrer que la série de terme général $x_n = a_n/(1+a_n)$ diverge, tandis que la série de terme général $x_n = a_n/(1+n^2 a_n)$ converge.

3.3.4 Montrer, en les calculant, qu'il existe trois constantes a, b et c telles que pour tout entier $n \geqslant 3$:

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{a}{(n-1)!} + \frac{b}{(n-2)!} + \frac{c}{(n-3)!}.$$

En utilisant ce résultat trouver la somme de la série de terme général $x_n = n^3/n!$.

3.3.5 Discuter, en fonction des valeurs du nombre réel a et de l'entier relatif p, la convergence et la convergence absolue de la série de terme général $x_n = a^n/(n+1)^p$.

3.3.6 Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que la série de terme général $x_n = a_n$ converge. Montrer que la série de terme général $x_n = \sqrt{a_n}/(n+1)$ est convergente.

3.3.7 Soit $0 < a < 1$, et posons pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_n = 1 + 2a + 3a^2 + \dots + n a^{n-1}.$$

1) Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer: $a S_n - S_n$.
2) En déduire que la série de terme général $x_n = n a^{n-1}$ converge.
3) Calculer sa limite.

3.3.8 Discuter, selon les valeurs du nombre réel θ, la convergence et la convergence absolue de la série de terme général $x_n = (\sin\theta)^n / n+1$.

3.3.9 Soit (x_n) une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que $\Sigma_{k=0}^{+\infty} \sqrt{x_k} < +\infty$. Montrer que la suite (y_n) définie par

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\,(y_n + \sqrt{y_n^2 + x_n}) \quad \text{et} \quad y_0 = 0$$

est convergente.

3.3.10 Pour quelles valeurs du nombre réel $a \neq \pm 1$, la série de terme général $x_n = a^n/(a^{2n} - 1)$ converge-t-elle?

3.3.11 Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que $\Sigma_{k=0}^{+\infty} a_k < +\infty$. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$, la série de terme général $x_n = a_n^p$ converge.

3.3.12 Soit (a_n) une suite de nombres réels. Montrer que la série de terme général $x_n = a_n - a_{n+1}$ converge si et seulement si la suite (a_n) converge.

3.3.13 Soit (x_n) et (y_n) deux suites de nombres réels positifs, et supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \frac{y_{n+1}}{y_n}.$$

1) Montrer que si la série de terme général y_n converge, alors la série de terme général x_n converge aussi.
2) Montrer que si $\Sigma_{k=0}^{+\infty} x_k = +\infty$ alors $\Sigma_{k=0}^{+\infty} y_k = +\infty$.

3.3.14 Soit (x_n) une suite de nombres réels positifs pour laquelle le nombre

$$\alpha = \lim_{n \to +\infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \text{ existe.}$$

1) Montrer, en utilisant l'exercice précédent, que si $\alpha < 1$ la série de terme général x_n diverge.
2) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2k)} = +\infty.$$

3.3.15 Soit (x_n) une suite décroissante de nombres réels telle que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x_n \geqslant 1/n\}$ possède une infinité d'éléments.

1) Montrer que la série de terme général x_n diverge.
2) Que devient ce résultat si la suite (x_n) n'est pas supposée décroissante ?

4. Fonctions réelles d'une variable réelle

4.1 DÉFINITIONS

4.1.1 Définition d'une fonction réelle d'une variable réelle

Soit E et F deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ et G une partie du produit cartésien $E \times F$ telle que, pour tout élément x de E, il existe un élément y et un seul de F tel que le couple (x,y) appartienne à G. Alors, le triplet

$$f = (G, E, F)$$

s'appelle *fonction définie sur E à valeurs dans F*, ou encore *application de E dans F*. Ici, les mots application et fonction seront toujours considérés comme synonymes. On dit que G est le *graphe* de f et on le note par $G(f)$, que E est l'*ensemble de départ* ou le *domaine de définition* de f et on le désigne généralement par $D(f)$ et que F est l'*ensemble d'arrivée* de f. Le sous-ensemble $\{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in E$ tel que $f(x) = y\}$ de F est appelé l'*image de E par f* et est noté $\operatorname{Im} f$. L'unique élément y de F correspondant à l'élément x de E par f s'appelle l'*image de x par f* et se note $f(x)$, tandis que x est appelé la *variable indépendante*. La notation $f = (G, E, F)$ n'est pas utilisée en pratique, on lui préfère les notations suivantes:

$$f : E \to F \quad \text{et} \quad E \xrightarrow{f} F.$$

Pour montrer que $f(x)$ est l'élément de F associé à x, on emploie la notation

$$x \mapsto f(x).$$

4.1.2 Graphique d'une fonction

Soit f une fonction de E dans F et considérons le plan euclidien rapporté à deux axes de coordonnées $0x$ et $0y$ définis par deux vecteurs e_1 et e_2. Alors, à tout élément x de E on fait correspondre le point P du plan dont les coordonnées relativement aux deux axes $0x$ et $0y$ sont x et $y = f(x)$. L'ensemble de ces points est appelé le *graphique* de la fonction f relativement aux deux axes $0x$ et $0y$ (fig. 4.1 et 4.2).

En général l'axe $0x$ (resp. $0y$) est appelé l'*axe des abscisses* (resp. *ordonnées*), tandis que l'intersection 0 de ces deux axes est appelée l'*origine*.

Lorsque nous parlerons de représentation graphique d'une fonction, sans autre précision, nous supposerons toujours que les deux axes $0x$ et $0y$ sont perpendiculaires et que les vecteurs e_1 et e_2 sont de la même longueur. Ce choix est arbitraire, et dans la pratique, il est souvent recommandé de choisir une unité de longueur différente sur chacun des axes.

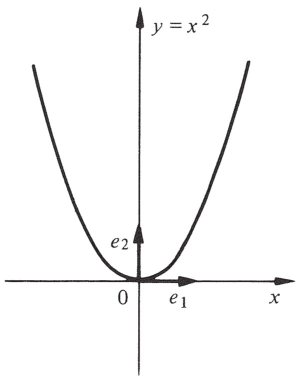


Fig. 4.1

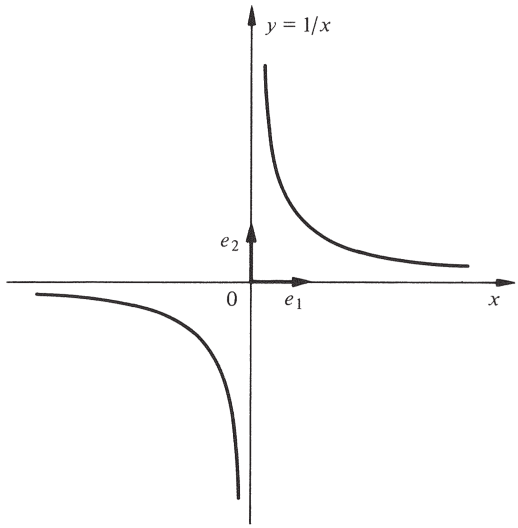


Fig. 4.2

4.1.3 Relations d'ordre pour les fonctions

Etant donné qu'il existe une relation d'ordre définie sur $\mathbb{R}$ (§ 1.1.3), cela nous permet de définir, pour les fonctions ayant le même domaine de défintion et le même ensemble d'arrivée, les relations d'ordre suivantes:

- deux fonctions f et g de E dans F sont dites ***égales*** et on écrit $f = g$ si pour tout $x \in E : f(x) = g(x)$;
- pour deux fonctions f et g de E dans F, on écrit que $f \leqslant g$ (resp. $f \geqslant g$) si pour tout $x \in E : f(x) \leqslant g(x)$ (resp. $f(x) \geqslant g(x)$).

4.1.4 Remarque

Les relations d'ordre que nous venons de définir entre des fonctions ayant le même domaine de définition et le même ensemble d'arrivée sont des relations d'ordre partiel; autrement dit, il n'est pas toujours possible de les comparer entre elles. Par exemple, les deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ ne sont pas comparables entre elles, puisque $f(-1) > g(-1)$ et $f(2) < g(2)$.

4.1.5 Définition d'une fonction surjective

Soit f une application de E dans F. Si tout élément de F est l'image par f d'au moins un élément de E, l'application est alors dite ***surjective***. On dit encore que c'est une ***surjection*** de E dans F.

Il découle de cette définition, qu'une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $F = \operatorname{Im} f$.

4.1.6 Définition d'une fonction injective

On sait d'après la définition d'une fonction qu'à tout élément x de E correspond un unique élément y de F; par contre y peut être l'image par f de plusieurs éléments de E. Si ce n'est pas le cas, c'est-à-dire si tout élément y de F est l'image par f d'au plus d'un seul élément de E, l'application f est dite *injective*. On dit encore que f est une injection de E dans F.

Il résulte de cette définition, qu'une application $f: E \to F$ est injective si et seulement si les relations $x_1, x_2 \in E$ et $f(x_1) = f(x_2)$ impliquent $x_1 = x_2$.

4.1.7 Définition d'une fonction bijective et de sa fonction réciproque.

Si une application f de E dans F est à la fois surjective et injective, elle est dite *bijective*; on dit aussi que c'est une *bijection* de E dans F.

Dans ce cas, on a que pour tout élément y de F l'équation $f(x) = y$ admet dans E une unique solution x. On est ainsi tout naturellement amené à définir une nouvelle application de F dans E, appelé *application réciproque* de f et notée f^{-1}, qui, à tout élément y de F, fait correspondre l'élément x de E solution unique de l'équation $f(x) = y$. Autrement dit, $x = f^{-1}(y)$.

Le graphique d'une fonction bijective et celui de son application réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

4.1.8 Opérations algébriques sur les fonctions

Soit f et g deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$. A partir de ces deux fonctions, on peut définir les nouvelles fonctions suivantes:

- si α et β sont deux nombres réels, on désigne par $\alpha f + \beta g$ la fonction de E dans $\mathbb{R}$, qui, à tout élément x de E, fait correspondre le nombre réel $\alpha f(x) + \beta g(x)$. Dans le cas particulier où $\alpha = \beta = 1$ (resp. $\alpha = 1$ et $\beta = -1$), la fonction $f + g$ (resp. $f - g$) est appelée la *somme* (resp. *différence*) des deux fonctions f et g;
- la fonction, qui, à tout élément x de E, fait correspondre le nombre réel $f(x) \cdot g(x)$, est appelée le *produit* des deux fonctions f et g et se note fg;
- si pour tout élément x de E : $g(x) \neq 0$, alors la fonction, qui, à tout $x \in E$, fait correspondre le nombre réel $f(x)/g(x)$, est appelée le *quotient* de la fonction f par la fonction g et se note f/g.

4.1.9 Image et image réciproque d'un sous-ensemble

Si A est un sous-ensemble non vide de E, l'ensemble des éléments y de F qui sont l'image par la fonction $f: E \to F$ d'au moins un élément x de A, s'appelle l'*image de A par f* et se note $f(A)$. Autrement dit, $f(A) = \{y \in F : \exists\, x \in A \text{ tel que } f(x) = y\}$.

Soit B un sous-ensemble non vide de F. On appelle *image réciproque de B par f*, l'ensemble des éléments x de E tels que $f(x) \in B$. On note cet ensemble $\overset{-1}{f}(B)$. Ainsi, $\overset{-1}{f}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$.

4.1.10 Remarque

Il est très important de ne pas confondre pour une fonction $f: E \to F$ donnée, les deux notations $\overset{-1}{f}(\{y\})$ et $f^{-1}(y)$ avec $y \in F$. La première ayant toujours un sens, tandis que la seconde peut très bien ne pas en avoir. Par exemple, si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $f(x) = \sin x$, la notation $f^{-1}(0)$ n'a pas de sens car f n'est pas bijective; par contre $\overset{-1}{f}(\{0\}) = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

4.1.11 Application identique

L'application de E dans lui-même, qui, à tout élément x de E, fait correspondre ce même élément, s'appelle l'*application identique* de E. On la note I_E. Son graphe est la diagonale de $E \times E$.

4.1.12 Composition de deux fonctions

Considérons deux fonctions $f: E \to F$ et $g: G \to H$ et supposons, de plus, que $f(E) \subset G$. Alors, on peut définir une nouvelle fonction: la *fonction composée* de f et g, qui, à tout élément x de E, fait correspondre l'élément $g(f(x))$ de H. On note cette fonction $g \circ f$.

Dans le cas particulier où f est une bijection de E dans F, la fonction composée $f^{-1} \circ f$ n'est autre que l'application I_E, tandis que la fonction composée $f \circ f^{-1} = I_F$. Cet exemple nous montre qu'en général $g \circ f \neq f \circ g$.

4.1.13 Valeur absolue d'une fonction

Soit f une fonction de E dans F. On appelle *valeur absolue* de la fonction f et on la désigne par $|f|$, la fonction de E dans $\mathbb{R}_+$, qui, à tout élément x de E, fait correspondre le nombre réel positif ou nul $|f(x)|$.

4.1.14 Fonction bornée

Soit A un sous-ensemble non vide de E. Une fonction $f: E \to F$ est dite *majorée* (resp. *minorée*) sur A si l'ensemble $f(A)$ est un sous-ensemble majoré (resp. minoré) de $\mathbb{R}$. Une fonction qui est à la fois majorée et minorée sur A est dite *bornée* sur A.

4.1.15 Caractérisation d'une fonction bornée

Soit A un sous-ensemble non vide de E. Une fonction $f: E \to F$ est bornée sur A si et seulement s'il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que la relation $x \in A$ implique $|f(x)| \leqslant M$.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer ce résultat, il suffit de remarquer que f est bornée sur A si et seulement si le sous-ensemble $\{f(x) : x \in A\}$ de $\mathbb{R}$ est bornée, et d'utiliser le résultat obtenu au paragraphe 1.4.6. ■

4.1.16 Borne inférieur et borne supérieure d'une fonction

Soit A un sous-ensemble non vide de E. Si $f: E \to F$ est une fonction majorée (resp. minorée) sur A, le nombre réel Sup $\{f(x) : x \in A\}$ (resp. Inf $\{f(x) : x \in A\}$) est appelé la *borne supérieure* (resp. *borne inférieure*) ou encore le *supremum* (resp. l'*infimum*) de la fonction f sur A et on le note $\sup\limits_{x \in A} f(x)$ (resp. $\inf\limits_{x \in A} f(x)$).

4.1.17 Caractérisation des bornes supérieure et inférieure d'une fonction

Soit A un sous-ensemble non vide de E et $f : E \to F$ une fonction majorée (resp. minorée) sur A. Alors, le nombre réel M (resp. m) est égal au supremum (resp. infimum) de la fonction f sur A si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées:

- pour tout élément x de A : $f(x) \leqslant M$ (resp. $f(x) \geqslant m$) ;
- quel que soit le nombre réel $\epsilon > 0$, il existe un élément x_ϵ de A tel que $M - f(x_\epsilon) \leqslant \epsilon$ (resp. $f(x_\epsilon) - m \leqslant \epsilon$).

DÉMONSTRATION. Cette caractérisation est une conséquence immédiate de la définition donnée au paragraphe 1.2.2. ■

4.1.18 Quelques résultats

- Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction majorée sur A, alors la fonction $-f$ est minorée sur A et l'on a:

$$\operatorname*{Sup}_{x \in A} f(x) = -\operatorname*{Inf}_{x \in A} (-f(x)) ;$$

- si $f : E \to F$ est une fonction majorée sur A, alors pour tout couple de nombres réels c et λ avec $\lambda \geqslant 0$, la fonction $\tilde{f} : E \to F$ définie par $\tilde{f}(x) = \lambda f(x) + c$ est aussi majoré sur A et, de plus, on a:

$$\operatorname*{Sup}_{x \in A} \tilde{f}(x) = c + \lambda \operatorname*{Sup}_{x \in A} f(x) ;$$

- si $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions majorées sur A, alors la fonction $h = f + g$ est majorée sur A et

$$\operatorname*{Sup}_{x \in A} h(x) \leqslant \operatorname*{Sup}_{x \in A} f(x) + \operatorname*{Sup}_{x \in A} g(x) ;$$

- si B est un sous-ensemble non vide de A et si $f : E \to F$ est une fonction majorée (resp. minorée) sur A, alors f est majorée (resp. minorée) sur B et, de plus, on a:

$$\operatorname*{Sup}_{x \in B} f(x) \leqslant \operatorname*{Sup}_{x \in A} f(x) \quad (\text{resp. } \operatorname*{Inf}_{x \in B} f(x) \geqslant \operatorname*{Inf}_{x \in A} f(x)).$$

4.1.19 Remarque

Si $f : E \to F$ est une fonction majorée (resp. minorée) sur A, le nombre réel $\operatorname*{Sup}_{x \in A} f(x)$ (resp. $\operatorname*{Inf}_{x \in A} f(x)$) n'appartient pas obligatoirement à l'ensemble $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. Par exemple, la fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$ admet 1 comme borne inférieure et 2 comme borne supérieure sur $]0,1[$, mais aucun de ces deux nombres n'appartient à $\{f(x) : x \in]0,1[\} =]1,2[$.

4.1.20 Maximum et minimum local d'une fonction

Soit f une fonction de E dans F et x_0 un élément de E. On dit que f admet un *maximum (resp. minimum) local* au point x_0 s'il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $x \in E$ et $|x - x_0| \leqslant \delta$ impliquent $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$).

D'autre part, nous dirons qu'une fonction admet un *extremum local* au point x_0 si cette fonction admet un maximum ou un minimum local en ce point.

4.1.21 Maximum et minimum d'une fonction

Soit f une fonction de E dans F et M (resp. m) un nombre réel vérifiant les deux propriétés suivantes:

— pour tout élément x de E : $f(x) \leqslant M$ (resp. $f(x) \geqslant m$);
— M (resp. m) appartient à l'ensemble $\operatorname{Im} f = \{f(x) : x \in E\}$.

Alors, le nombre réel M (resp. m) est appelé le *maximum* (resp. le *minimum*) de la fonction f sur E et on le note $\max\limits_{x \in E} f(x)$ (resp. $\min\limits_{x \in E} f(x)$).

D'autre part, si pour $x_0 \in E$: $f(x_0) = \max\limits_{x \in E} f(x)$ (resp. $f(x_0) = \min\limits_{x \in E} f(x)$), nous dirons que la fonction *f atteint son maximum* (resp. *minimum*) au point x_0.

4.1.22 Exemple

Considérons la fonction $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2(1-x)$. Cette fonction atteint son maximum pour $x = -1$ et son minimum pour $x = 2$. Elle admet aussi un maximum local aux points -1 et $2/3$, ainsi qu'un minimum local aux points 0 et 2 (fig. 4.3).

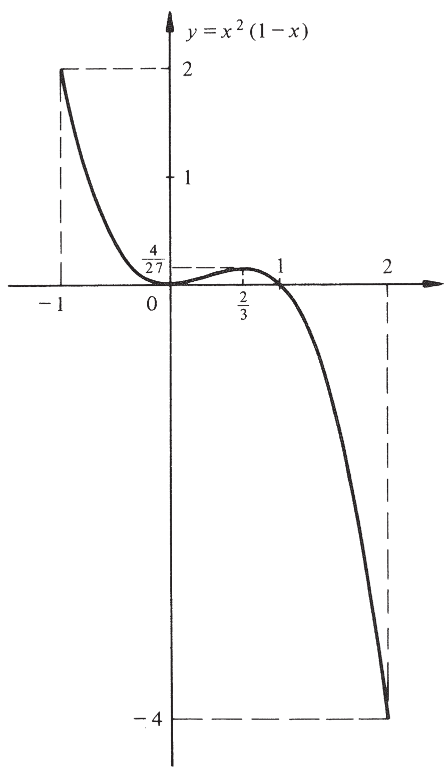


Fig. 4.3

4.1.23 Remarques

Supposons que pour une fonction $f: E \to F$, le nombre réel $\max_{x \in E} f(x)$ (resp. $\min_{x \in E} f(x)$) existe. Alors, cette fonction est majorée (resp. minorée) sur E et, de plus, on a :

$$\max_{x \in E} f(x) = \operatorname*{Sup}_{x \in E} f(x) \quad (\text{resp. } \min_{x \in E} f(x) = \operatorname*{Inf}_{x \in E} f(x)).$$

Par contre, une fonction $f: E \to F$ peut très bien être majorée (resp. minorée) sur E, sans pour autant que le maximum (resp. minimum) de cette fonction sur E existe. Pour s'en rendre compte, considérons la fonction $f: [0,1[\to \mathbb{R}$, qui, à tout élément x de $[0,1[$, fait correspondre le nombre réel x^3. Le supremum de cette fonction sur $[0,1[$ est 1, mais comme ce nombre n'appartient pas à l'ensemble $\operatorname{Im} f = \{f(x) = x^3 : x \in [0,1[\}$, on en déduit que le maximum de la fonction f sur $[0,1[$ n'existe pas.

Une fonction $f: E \to F$ peut atteindre son maximum (resp. minimum) en plusieurs points de E. Par exemple, la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$ atteint son maximum aux points $\{\pi/2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et son minimum aux points $\{3\pi/2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

4.1.24 Fonction monotone

Etant donné une fonction $f: E \to F$ et A un sous-ensemble non vide de E, on dit que la fonction f est *croissante* (resp. *strictement croissante*) sur A si pour tout couple d'éléments x_1, x_2 de A, la relation $x_1 > x_2$ implique $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$). De même, elle est dite *décroissante* (resp. *strictement décroissante*) sur A si pour tout couple d'élément x_1, x_2 de A, la relation $x_1 > x_2$ implique $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (resp. $f(x_1) < f(x_2)$). Elle est dite *constante* sur A, s'il existe un nombre réel c tel que pour tout élément x de A : $f(x) = c$.

Une fonction $f: E \to F$ est dite *monotone* sur E si elle est croissante ou décroissante sur E. Elle est dite *strictement monotone* sur E si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur E.

4.1.25 Fonction paire, fonction impaire

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ admettant zéro pour *centre de symétrie*, c'est-à-dire tel que $x \in E$ implique $-x \in E$. Une fonction $f: E \to F$ est dite *paire* (resp. *impaire*) si pour tout élément x de E: $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Le graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe $0y$, tandis que celui d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine 0.

4.1.26 Fonction périodique

Le nombre réel P est appelé une *période* de la fonction $f: \mathbb{R} \to F$ si pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x + P) = f(x)$.

D'autre part, une fonction $f: \mathbb{R} \to F$ est dite *périodique* si elle admet une période $P \neq 0$.

Si P est une période de f, alors pour tout entier n le nombre réel nP est aussi une période de cette fonction.

4.1.27 Exemple

L'ensemble des périodes de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

n'est autre que l'ensemble $\mathbb{Q}$.

4.1.28 Partie positive, négative d'une fonction

Soit f une fonction de E dans $\mathbb{R}$. La fonction $f^+ : E \to \mathbb{R}$ définie par $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ est appelée la *partie positive* de la fonction f. De même, la fonction $f^- : E \to \mathbb{R}$ définie par $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$ est appelée la *partie négative* de la fonction f.

On vérifie facilement que pour tout élément x de E:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad \text{et} \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

4.1.29 Prolongement et restriction d'une fonction

Si $f : E \to F$ et $g : A \to F$ sont des fonctions vérifiant les deux propriétés suivantes:

- $A \subset E$;
- pour tout élément x de A : $f(x) = g(x)$,

la fonction f est appelée un *prolongement* de la fonction g à E, tandis que g est appelée la *restriction* de f à A.

D'une manière générale, le prolongement d'une fonction à un domaine de définition plus grand n'est pas unique. Par contre, la restriction d'une fonction à un ensemble de départ plus petit l'est.

4.2 LIMITE D'UNE FONCTION

4.2.1 Fonction définie au voisinage d'un point

Nous dirons qu'une fonction $f : E \to F$ est *définie au voisinage de* x_0, s'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que

$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset E \cup \{x_0\}.$$

4.2.2 Remarque

Il est très important de remarquer que dans la définition donnée au paragraphe 4.2.1, une fonction peut très bien être définie au voisinage d'un point x_0 sans pour autant l'être en ce point. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}},$$

est définie au voisinage de zéro, mais ne l'est pas en ce point.

4.2.3 Définition de la limite d'une fonction

Nous dirons qu'une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage de x_0 admet pour *limite* le nombre réel l lorsque x tend vers x_0 si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $x \in E$ et $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ impliquent $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$ (fig. 4.4). On écrit alors, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend des nombres x_0 et ϵ.

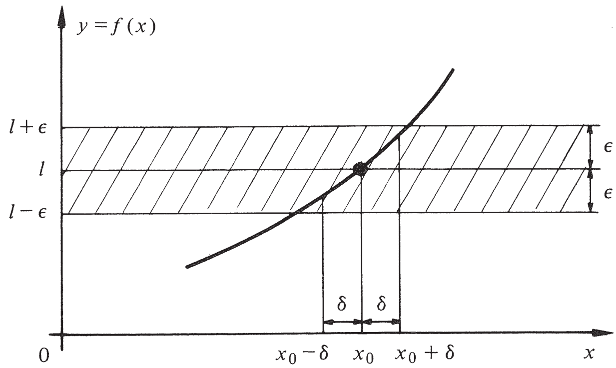


Fig. 4.4

4.2.4 Caractérisation de la limite d'une fonction à partir des suites

Une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage de x_0 admet pour limite le nombre réel l lorsque x tend vers x_0 si et seulement si pour toute suite (a_n) d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0, la suite $(f(a_n))$ converge vers l.

DÉMONSTRATION. En premier lieu, supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et que la suite (a_n) d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ converge vers x_0. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Etant donné que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout élément x de E vérifiant $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$: $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$. D'autre part, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = x_0$ avec $x_0 \notin \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, il existe aussi un entier $m_0 > 0$ tel que pour tout $n \geqslant m_0$: $0 < |a_n - x_0| \leqslant \delta$. Finalement, on obtient que pour tout $n \geqslant m_0$: $|f(a_n) - l| \leqslant \epsilon$. On a ainsi démontré que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = l$.

Réciproquement, supposons que pour toute suite (a_n) d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0, la suite $(f(a_n))$ converge vers l. Il nous faut à présent démontrer que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que le nombre réel l ne soit pas la limite de la fonction f lorsque x tend vers x_0; ce qui signifie qu'il existe un nombre réel $\epsilon > 0$ tel que pour tout entier naturel n, l'ensemble $\{x \in E : x \neq x_0, x \in B(x_0, 1/(n+1))\}$ contient un élément b_n pour lequel $|f(b_n) - l| > \epsilon$. On a ainsi construit une suite (b_n) d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0 et dont la suite des images $(f(b_n))$ ne converge pas vers l. Ce dernier résultat étant en contradiction avec l'hypothèse, on en déduit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$. ■

4.2.5 Corollaire

Soit $f: E \to F$ une fonction définie au voisinage de x_0 et supposons que pour toute suite (a_n) d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0, la suite $(f(a_n))$ converge. Alors, la fonction f admet une limite lorsque x tend vers x_0.

DÉMONSTRATION. Soit (a_n) et (b_n) deux suites d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui convergent vers x_0. Nous allons montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n)$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que ce dernier résultat ne soit pas vrai. Alors, en posant

$$c_n = \begin{cases} a_n & \text{si } n \text{ est pair} \\ b_n & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

on obtient que (c_n) est une suite d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0, mais dont la suite des images $(f(c_n))$ diverge. D'où contradiction. On a ainsi démontré que pour toute suite (a_n) d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0, le nombre réel $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)$ ne dépend pas de la suite (a_n) choisie. Ainsi, en utilisant le résultat obtenu au paragraphe 4.2.4, la conclusion de ce corollaire devient immédiate. ■

4.2.6 Unicité de la limite d'une fonction

Si l_1 et l_2 sont deux limites de la fonction $f: E \to F$ lorsque x tend vers x_0, alors $l_1 = l_2$.

DÉMONSTRATION. Soit (a_n) une suite d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0. Il découle du résultat obtenu au paragraphe 4.2.4, que $l_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)$ et $l_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)$; ce qui implique que $l_1 = l_2$. ■

4.2.7 Exemple

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$. Calculons sa limite lorsque x tend vers 2. Il nous faut d'abord trouver un candidat qui puisse être la limite de cette fonction lorsque x tend vers 2, sans savoir si cette limite existe ou non. Pour cette raison, supposons qu'elle existe et notons-la par l. Alors, en considérant la suite (a_n) définie par

$$a_n = 2 + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad a_0 = 2,$$

on obtient que $l = \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = 4$. Reste à démontrer que ce nombre est bien la limite de la fonction f lorsque x tend vers 2. Pour cela, il suffit de constater qu'en associant à tout nombre réel $\epsilon > 0$ le nombre

$$\delta = \min\{1, \epsilon/5\},$$

la relation $0 < |x-2| \leqslant \delta$ implique $|x^2 - 4| = |x-2|\,|x+2| \leqslant 5|x-2| \leqslant \epsilon$.

4.2.8 Remarque

La définition que nous avons donnée au paragraphe 4.2.3 nous permet de dire si un nombre réel l qui est supposé connu à priori est la limite d'une fonction f lorsque

x tend vers x_0; mais, malheureusement, elle ne nous permet pas de trouver cette limite. Or, contrairement à ce que pourrait suggérer l'exemple donné au paragraphe 4.2.7, il est souvent peu commode de trouver la limite d'une fonction f même lorsque celle-ci existe. Par contre, comme dans le cas des suites réelles, il est possible de démontrer qu'une fonction f admet une limite lorsque x tend vers x_0 sans pour autant connaître à priori la valeur de cette limite. Dans ce but, nous démontrerons par la suite quelques résultats très utiles; par exemples, le critère de Cauchy ou le théorème des deux gendarmes.

4.2.9 Critère de Cauchy pour les fonctions

Une fonction $f: E \to F$ définie au voisinage de x_0 admet une limite lorsque x tend vers x_0 si et seulement si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout couple d'éléments x_1, x_2 de $\{x \in E : 0 < |x - x_0| \leqslant \delta\}$, on ait: $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \epsilon$.

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend des nombres x_0 et ϵ.

DÉMONSTRATION. En premier lieu, supposons que le nombre réel $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et notons-le par l, et soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Alors, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout élément x de E vérifiant $0 < |x - x_0| \leqslant \delta : |f(x) - l| \leqslant \epsilon/2$. Ainsi, on obtient que pour tout couple d'éléments x_1, x_2 de $\{x \in E : 0 < |x - x_0| \leqslant \delta\}$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - l| + |f(x_2) - l| \leqslant \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Réciproquement, supposons qu'à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on puisse associer un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout couple d'éléments x_1, x_2 de $\{x \in E : 0 < |x - x_0| \leqslant \delta\}$, on ait: $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \epsilon$. Alors, si (a_n) est une suite d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0, la suite $(f(a_n))$ est une suite de Cauchy, donc convergente. Ainsi, grâce au corollaire 4.2.5, on sait que la fonction f admet une limite lorsque x tend vers x_0. ■

4.2.10 Opérations algébriques sur les limites

Soit f et g deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$. Alors,

- pour tout couple de nombres réels α et β, la limite de la fonction $\alpha f + \beta g$ lorsque x tend vers x_0 existe et est égale à $\alpha l_1 + \beta l_2$;
- la limite de la fonction fg lorsque x tend vers x_0 existe et est égale à $l_1 l_2$;
- si $l_2 \neq 0$, la limite de la fonction f/g lorsque x tend vers x_0 existe et est égale à l_1/l_2.

DÉMONSTRATION. Pour toute suite (a_n) d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0, les trois suites $(\alpha f(a_n) + \beta g(a_n))$, $(f(a_n)\, g(a_n))$ et $(f(a_n)/g(a_n))$ convergent respectivement vers $\alpha l_1 + \beta l_2$, $l_1 l_2$ et l_1/l_2. Pour conclure, il suffit d'utiliser le résultat obtenu au paragraphe 4.2.4. ■

4.2.11 Conservation des relations d'ordre

Soit f et g deux fonctions de E dans F vérifiant les deux propriétés suivantes:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$;
- il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $\{x \in E : 0 < |x - x_0| \leqslant \alpha\} : f(x) \geqslant g(x)$.

Alors, $l_1 \geqslant l_2$.

DÉMONSTRATION. Soit (a_n) une suite d'éléments de $\{x \in E : 0 < |x - x_0| \leqslant \alpha\}$ qui converge vers x_0. Ainsi, en utilisant les résultats obtenus aux paragraphes 2.3.14 et 4.2.4, on obtient que

$$l_1 = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) \geqslant \lim_{n \to +\infty} g(a_n) = l_2 . \qquad \blacksquare$$

4.2.12 Remarque

Si dans l'énoncé du paragraphe 4.2.11 on remplace $f(x) \geqslant g(x)$ par $f(x) > g(x)$, cela ne nous permet pas de conclure que $l_1 > l_2$. Par exemple, la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ ne prend que des valeurs positives sur son domaine de définition, mais par contre sa limite lorsque x tend vers zéro est nulle. (Ici, la fonction $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est la fonction identiquement nulle sur $]0, +\infty[$).

4.2.13 Limite de la valeur absolue d'une fonction

Soit $f : E \to F$ une fonction qui admet l pour limite lorsque x tend vers x_0. Alors, $\lim_{x \to x_0} |f|(x) = |l|$.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer ce résultat, il suffit de remarquer que pour tout $x \in E : \big||f(x)| - |l|\big| \leqslant |f(x) - l|$. ■

4.2.14 Remarques

La réciproque du résultat obtenu au paragraphe 4.2.13 est généralement fausse. Comme contre-exemple, considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} . \end{cases}$$

Etant donné que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout nombre réel $\alpha > 0$, l'intervalle ouvert et borné $]0, \alpha[$ contient obligatoirement un nombre rationnel $x_1(\alpha)$ et un nombre irrationnel $x_2(\alpha)$; ce qui implique que $|f(x_1(\alpha)) - f(x_2(\alpha))| = 2$. Le critère de Cauchy pour les fonctions n'étant pas vérifié, on en conclut que la fonction f n'admet aucune limite lorsque x tend vers zéro. Par contre, $\lim_{x \to 0} |f|(x) = 1$.

Néanmoins, si la valeur absolue d'une fonction $f : E \to F$ admet zéro pour limite lorsque x tend vers x_0, alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

4.2.15 Théorème des deux gendarmes pour les fonctions

Soit f, g et h trois fonctions de E dans F vérifiant les deux propriétés suivantes:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$;

— il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $\{x \in E : 0 < |x - x_0| \leqslant \alpha\} : f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$.

Alors, $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$.

DÉMONSTRATION. Soit (a_n) une suite arbitraire d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0. On déduit immédiatement de la deuxième propriété qu'il existe un entier naturel m tel que pour tout entier $n \geqslant m : f(a_n) \leqslant h(a_n) \leqslant g(a_n)$. D'autre part, grâce à la première propriété et au résultat obtenu au paragraphe 4.2.4, on a que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} g(a_n) = l$. D'où, en appliquant aux suites $(f(a_n))$, $(g(a_n))$ et $(h(a_n))$ le théorème des deux gendarmes pour les suites (§ 2.3.21), on obtient que $\lim\limits_{n \to +\infty} h(a_n) = l$. Ainsi, le résultat obtenu au paragraphe 4.2.4 nous permet de conclure que $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$. ■

4.2.16 Exemple

Montrons que la limite de la fonction $f :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

vaut 1 lorsque x tend vers zéro. D'une part, on a que pour tout $x \in]-\pi/2, 0[\cup]0, \pi/2[$:

$$\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1.$$

D'autre part, en remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|1 - \cos x| = 2\left|\sin^2 \frac{x}{2}\right| \leqslant \frac{x^2}{2},$$

on obtient que $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$. Ainsi, en utilisant le théorème des deux gendarmes, on peut affirmer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

4.2.17 Limite de la composée de deux fonctions

Soit f une fonction de E dans F telle que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ et soit g une fonction de G dans H telle que $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = l$. Supposons de plus que $f(E) \subset G$ et qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que les relations $x \neq x_0$ et $x \in B(x_0, \alpha)$ impliquent $f(x) \neq y_0$. Alors,

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = l.$$

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Etant donné que $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = l$, on sait qu'il existe un nombre réel $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $y \in G$ vérifiant $0 < |y - y_0| \leqslant \delta_1 : |g(y) - l| \leqslant \epsilon$. Comme d'autre part $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, il existe un nombre réel $\delta_2 > 0$ tel que pour tout élément x de E vérifiant $0 < |x - x_0| \leqslant \delta_2 : |f(x) - y_0| \leqslant \delta_1$. Ainsi, en posant $\delta = \min\{\alpha, \delta_2\}$, on obtient que pour tout x de E vérifiant $0 < |x - x_0| \leqslant \delta : 0 < |f(x) - y_0| \leqslant \delta_1$; ce qui entraîne, du fait que $f(E) \subset G$, que $|g(f(x)) - l| \leqslant \epsilon$. D'où le résultat. ■

4.2.18 Exemple

Calculons la limite lorsque x tend vers zéro de la fonction $h:]-1, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \frac{\sin(\sqrt{1+x}-1)}{x}.$$

Pour cela, considérons les deux fonctions auxiliaires $f:]-1, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}^*$ et $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1 \quad \text{et} \quad g(y) = \frac{\sin y}{y(y+2)}.$$

On constate immédiatement que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, que $\lim\limits_{y \to 0} g(y) = \frac{1}{2}$ et que $h = g \circ f$. Ainsi, en utilisant le résultat du paragraphe 4.2.17, on obtient que $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \frac{1}{2}$.

4.2.19 Remarque

Si dans l'énoncé du résultat donné au paragraphe 4.2.17, on omet de faire l'hypothèse qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que pour tout élément $x \neq x_0$ de $B(x_0, \alpha)$: $f(x) \neq y_0$, alors, on ne peut pas affirmer, sans autre, que $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = l$.
Par exemple, considérons les deux fonctions $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et

$$g(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, que $\lim\limits_{y \to 0} g(y) = 1$ et que pour tout élément t de $A = \{x \in \mathbb{R} : x = 1/k\pi,\ k \in \mathbb{Z}^*\}$: $f(t) = 0$. Mais étant donné que

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin A \\ 0 & \text{si } x \in A, \end{cases}$$

la fonction $g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'admet aucune limite lorsque x tend vers zéro.

4.2.20 Fonction définie au voisinage de l'infini

Nous dirons qu'une fonction $f: E \to F$ est *définie au voisinage de* $+\infty$ (resp. $-\infty$), s'il existe un nombre réel a tel que $]a, +\infty[\subset E$ (resp. $]-\infty, a[\subset E$).

4.2.21 Limite d'une fonction lorsque x tend vers l'infini

Nous dirons qu'une fonction $f: E \to F$ définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) admet pour *limite* le nombre réel l lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre réel α tel que les relation $x \in E$ et $x \geqslant \alpha$ (resp. $x \leqslant \alpha$) impliquent $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$. On écrit alors, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$).

D'une manière générale, le nombre réel α dépend du nombre ϵ. D'autre part, tous les résultats que nous avons obtenus sur les limites lorsque x tend vers un nombre réel x_0 restent valables lorsque x tend vers $\pm\infty$.

4.2.22 Limites infinies

On dit qu'une fonction $f: E \to F$ définie au voisinage de x_0 *tend vers* $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque x tend vers x_0 si à tout nombre réel $A>0$, on peut associer un nombre réel $\delta>0$ tel que les relations $x \in E$ et $0<|x-x_0|\leqslant\delta$ impliquent $f(x)\geqslant A$ (resp. $f(x)\leqslant -A$). On écrit alors, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$).

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend des nombres x_0 et A.

On dit qu'une fonction $f: E\to F$ définie au voisinage de $+\infty$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque x tend vers $+\infty$ si à tout nombre réel $A>0$, on peut associer un nombre réel α tel que les relations $x\in E$ et $x\geqslant\alpha$ impliquent $f(x)\geqslant A$ (resp. $f(x)\leqslant -A$). On écrit alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$).

D'une manière générale, le nombre réel α dépend du nombre A.

De même, on dit qu'une fonction $f: E\to F$ définie au voisinage de $-\infty$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque x tend vers $-\infty$ si à tout nombre réel $A>0$, on peut associer un nombre réel α tel que les relations $x\in E$ et $x\leqslant\alpha$ impliquent $f(x)\geqslant A$ (resp. $f(x)\leqslant -A$). On écrit alors, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$).

D'une manière générale, le nombre réel α dépend du nombre A.

4.2.23 Limite d'une fonction monotone lorsque x tend vers $+\infty$

Soit $f: E\to F$ une fonction croissante (resp. décroissante) sur E, définie au voisinage de $+\infty$. Alors, si f est majorée (resp. minorée) sur E :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup_{x\in E} f(x) \qquad \text{(resp. } \inf_{x\in E} f(x)\text{)},$$

sinon

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{(resp. } -\infty\text{)}.$$

DÉMONSTRATION. Pour la démonstration, faisons l'hypothèse que f est croissante sur E (l'autre cas se traitant de façon analogue). Supposons d'abord que f ne soit pas majorée sur E, et soit A un nombre réel positif choisi arbitrairement. Alors, il existe un nombre $\alpha\in E$ tel que $f(\alpha)\geqslant A$. Par suite, étant donné que la fonction f est croissante sur E, les relations $x\in E$ et $x\geqslant\alpha$ impliquent $f(x)\geqslant A$. D'où le résultat.

Supposons à présent que f soit majorée sur E; ce qui entraîne que le nombre réel $l=\sup\limits_{x\in E} f(x)$ existe. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Il résulte de la définition de l qu'il existe un nombre $\alpha\in E$ tel que $0\leqslant l-f(\alpha)\leqslant\epsilon$. Par suite, du fait que la fonction f est croissante sur E, les relations $x\in E$ et $x\geqslant\alpha$ impliquent $0\leqslant l-f(x)\leqslant\epsilon$. On a ainsi démontré que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$. ∎

4.2.24 Limite d'une fonction monotone lorsque x tend vers $-\infty$

Soit $f: E \to F$ une fonction croissante (resp. décroissante) sur E, définie au voisinage de $-\infty$. Alors, si f est minorée (resp. majorée) sur E:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \operatorname*{Inf}_{x \in E} f(x) \qquad (\text{resp. } \operatorname*{Sup}_{x \in E} f(x)),$$

sinon

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad (\text{resp. } +\infty).$$

4.2.25 Opérations algébriques sur les limites infinies

Soit f et g deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$ définies au voisinage de x_0.

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = +\infty$ (resp. $-\infty$) et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$);
- si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) et si g est une fonction bornée sur E, alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$);
- si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l \neq 0$, alors

$$\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = \begin{cases} +\infty \ (\text{resp. } -\infty) \text{ si } l > 0 \\ -\infty \ (\text{resp. } +\infty) \text{ si } l < 0; \end{cases}$$

- si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} (\frac{1}{f})(x) = 0$;
- si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ et si pour tout $x \in E: f(x) \neq 0$, alors

$$\lim_{x \to x_0} (\tfrac{1}{f})(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } f(x) > 0 \text{ dans } E \\ -\infty \text{ si } f(x) < 0 \text{ dans } E. \end{cases}$$

4.2.26 Formes indéterminées

Nous rencontrerons des cas où actuellement nous ne sommes pas toujours en mesure de conclure. Nous dirons alors que nous nous trouvons en présence d'une *forme indéterminée*. Enumérons ces différentes formes indéterminées. Pour cela, soit f et g deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$ définies au voisinage de x_0.

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$), les fonctions $f-g$ et f/g peuvent avoir tous les comportements possibles lorsque x tend vers x_0;
- si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$, la fonction fg peut avoir tous les comportements possibles lorsque x tend vers x_0;
- si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, la fonction f/g peut avoir tous les comportements possibles lorsque x tend vers x_0.

Par la suite, nous donnerons des méthodes qui nous permettrons dans certains cas de lever l'indétermination. En particulier, nous démontrerons la règle de Bernoulli-l'Hospital (§ 5.3.2).

4.2.27 Remarques

Les résultats obtenus au paragraphe 4.2.25 restent valables lorsque x tend vers $\pm\infty$.

De manière analogue, la notion de formes indéterminées donnée au paragraphe 4.2.26, lorsque x tend vers le nombre réel x_0, s'étend, sans autre, au cas où x tend vers $\pm\infty$.

4.2.28 Fonction définie à droite ou à gauche d'un point

Nous dirons qu'une fonction $f: E \to F$ est *définie à droite* (resp. *à gauche*) de x_0, s'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que l'intervalle ouvert $]x_0, x_0+\alpha[$ (resp. $]x_0-\alpha, x_0[$) soit inclus dans E.

4.2.29 Limite à droite, limite à gauche

Nous dirons qu'une fonction $f: E \to F$ définie à droite (resp. à gauche) de x_0 admet pour *limite à droite* (resp. *à gauche*) au point x_0 le nombre réel l si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $x \in E$ et $0 < x - x_0 \leqslant \delta$ (resp. $0 < x_0 - x \leqslant \delta$) impliquent $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$. On écrit alors, $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = l$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = l$).

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend des nombres x_0 et ϵ.

4.2.30 Limite à droite infinie, limite à gauche infinie

Nous dirons qu'une fonction $f: E \to F$ définie à droite de x_0 *tend à droite vers* $+\infty$ (resp. $-\infty$) au point x_0 si à tout nombre réel $A > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $x \in E$ et $0 < x - x_0 \leqslant \delta$ impliquent $f(x) \geqslant A$ (resp. $f(x) \leqslant -A$). On écrit alors, $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = -\infty$).

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend des nombres x_0 et A.

De même, nous dirons qu'une fonction $f: E \to F$ définie à gauche de x_0 *tend à gauche vers* $+\infty$ (resp. $-\infty$) au point x_0 si à tout nombre réel $A > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $x \in E$ et $0 < x_0 - x \leqslant \delta$ impliquent $f(x) \geqslant A$ (resp. $f(x) \leqslant -A$). On écrit alors, $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = -\infty$).

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend des nombres x_0 et A.

4.2.31 Relations entre les différentes limites

Soit f une fonction de E dans F.

- $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = l$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$;
- $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

4.2.32 Remarque

Tous les résultats que nous avons obtenus sur les limites restent valables pour les limites à droite (resp. à gauche).

4.2.33 Limite à gauche d'une fonction monotone

Soit $f: E \to F$ une fonction croissante (resp. décroissante) sur E, définie à gauche de x_0. Alors, si f est majorée (resp. minorée) sur E:

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \text{Sup}\{f(x): x \in E, x < x_0\} \text{ (resp. Inf } \{f(x): x \in E, x < x_0\}),$$

sinon

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = +\infty \text{ (resp. } -\infty).$$

DÉMONSTRATION. Elle est identique à celle donnée au paragraphe 4.2.23. ∎

4.2.34 Limite à droite d'une fonction monotone

Soit $f: E \to F$ une fonction croissante (resp. décroissante) sur E définie à droite de x_0. Alors, si f est minorée (resp. majorée) sur E:

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = \text{Inf}\{f(x): x \in E, x > x_0\} \text{ (resp. Sup } \{f(x): x \in E, x > x_0\}),$$

sinon

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = -\infty \quad \text{(resp. } +\infty).$$

4.2.35 Corollaire

Soit $f: E \to F$ une fonction croissante (resp. décroissante) sur E, définie au voisinage de x_0. Alors la fonction f admet une limite à droite et une limite à gauche au point x_0 et, de plus, on a:

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0 +} f(x) \qquad \text{(resp. } \lim_{x \to x_0 -} f(x) \geqslant \lim_{x \to x_0 +} f(x)).$$

4.3. FONCTIONS CONTINUES

4.3.1 Définition d'une fonction continue en un point

Une fonction $f: E \to F$ est dite *continue en un point* x_0 de son domaine de définition si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

4.3.2 Première définition équivalente

Une fonction $f: E \to F$ définie au voisinage d'un point x_0 de son domaine de définition est continue en x_0 si et seulement si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $x \in E$ et $|x - x_0| \leqslant \delta$ impliquent $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon$.

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend des nombres x_0 et ϵ.

4.3.3 Deuxième définition équivalente

Une fonction $f: E \to F$ définie au voisinage d'un point x_0 de son domaine de définition est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite (a_n) d'éléments de E qui converge vers x_0, la suite $(f(a_n))$ converge vers $f(x_0)$.

4.3.4 Critère de Cauchy pour les fonctions continues en un point

Une fonction $f: E \to F$ définie au voisinage d'un point x_0 de son domaine de définition est continue en x_0 si et seulement si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout couple d'éléments x_1, x_2 de $\{x \in E : |x - x_0| \leqslant \delta\}$, on ait : $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \epsilon$.

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend des nombres x_0 et ϵ.

4.3.5 Exemple d'une fonction continue

Montrons que la fonction $f:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est continue en tout point de son domaine de définition. Pour cela, fixons-nous arbitrairement un nombre réel $x_0 > 0$. Ainsi, en remarquant que pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leqslant \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}},$$

on obtient que pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, la relation $|x - x_0| \leqslant \epsilon \sqrt{x_0}$ implique $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon$. Autrement dit, la fonction f est continue en x_0. Ce résultat étant valable pour tout $x_0 > 0$, on en conclut que la fonction f est continue en tout point de son domaine de définition.

4.3.6 Opérations sur les fonctions continues

Soit f et g deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$ continues en x_0. Des résultats obtenus sur les limites (sect. 4.2), on déduit immédiatement les propriétés suivantes :

- pour tout couple de nombres réels α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ est continue en x_0 ;
- de même, les fonctions $fg, f/g$ et $|f|$ sont continues en x_0 ;
- les deux fonctions $h_1, h_2 : E \to \mathbb{R}$ définies respectivement par $h_1(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ et $h_2(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ sont également continues en x_0. Pour démontrer ce résultat, il suffit de remarquer que pour tout élément x de E :

  $$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$$

  et

  $$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|);$$
- une des conséquences directes du précédent résultat est que les fonctions f^+ et f^- sont aussi continues en x_0.

4.3.7 Définition d'une fonction discontinue en un point

Si une fonction $f: E \to F$ définie au voisinage d'un point x_0 de son domaine de définition n'est pas continue en x_0, on dit qu'elle est *discontinue* en ce point. On dit aussi que x_0 est un *point de discontinuité* de la fonction f.

4.3.8 Exemple d'une fonction discontinue

Montrons que la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$. Pour cela, soit x_0 un nombre réel arbitrairement choisi. Alors, à chaque entier naturel n, on est capable d'associer un nombre rationnel a_n et un nombre irrationnel b_n appartenant tous les deux à l'intervalle ouvert et borné $]x_0 - 1/(n+1), x_0 + 1/(n+1)[$. Les suites (a_n) et (b_n) ainsi obtenues convergent toutes les deux vers x_0, mais par contre $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$; ce qui entraîne que la fonction f est discontinue en x_0. Ce résultat étant vrai pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on en conclut que la fonction f est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

4.3.9 Continuité de la composée de deux fonctions continues

Soit $f: E \to F$ une fonction continue en x_0 et $g: G \to H$ une fonction continue en $f(x_0)$. Supposons de plus que $f(E) \subset G$. Alors, la fonction composée $g \circ f: E \to H$ est continue en x_0.

Contrairement à ce qu'on a fait au paragraphe 4.2.17, il n'est pas nécessaire ici de supposer qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que les relations $x \neq x_0$ et $x \in B(x_0, \alpha)$ impliquent $f(x) \neq y_0$, car ici $y_0 = f(x_0)$ et $l = g(y_0)$.

4.3.10 Remarque

Si la fonction composée $g \circ f: E \to H$ est continue en x_0, on ne peut pas en conclure à priori que la fonction f est continue en x_0 ou que la fonction g est continue en $f(x_0)$. Par exemple, considérons les deux fonctions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(x^2+1)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

Par construction, les deux fonctions f et g sont respectivement discontinues en $x_0 = 0$ et $y_0 = f(0) = 1$. Par contre, la fonction composée $g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 = 0$, car elle est identiquement nulle sur tout $\mathbb{R}$.

4.3.11 Prolongement par continuité d'une fonction en un point

Soit f une fonction de E dans $\mathbb{R}$ et c un nombre réel n'appartenant pas à E tels que la limite de la fonction f, lorsque x tend vers c, existe. Alors, la fonction $\hat{f}_c: E \cup \{c\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{f}_c(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ \lim_{y\to c} f(y) & \text{si } x = c, \end{cases}$$

est appelée le *prolongement par continuité* de la fonction f au point c.

Un tel prolongement, s'il existe, est unique. D'autre part, on déduit immédiatement de sa définition que $\hat{f}_c$ est une fonction continue en c.

4.3.12 Exemple

Soit $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = x \cos \frac{1}{x}.$$

Alors, la fonction $\hat{f}_0: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{f}_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de la fonction f au point $c = 0$.

4.3.13 Continuité à droite, continuité à gauche

Une fonction $f: E \to F$ est dite *continue à droite* (resp. *à gauche*) en un point x_0 de son domaine de définition si $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$).

4.3.14 Relation entre les différentes continuités

Une fonction $f: E \to F$ est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en x_0.

4.3.15 Remarque

Tous les résultats que nous avons obtenus sur les fonctions continues restent valables pour les fonctions continues à droite (resp. à gauche).

4.3.16 Fonction continue sur un intervalle ouvert ou fermé de $\mathbb{R}$

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Une fonction $f: I \to F$ est dite *continue sur I*, ou tout simplement qu'elle est continue si f est continue en tout point de I. On désigne par $C(I, F)$ l'ensemble des fonctions continues de I dans F.

Soit $a < b$ deux nombres réels. Une fonction $f: [a, b] \to F$ est dite *continue sur* $[a, b]$, ou tout simplement qu'elle est continue si f est continue en tout point de $]a, b[$, continue à droite en a, continue à gauche en b. On désigne par $C([a, b], F)$ l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans F.

4.3.17 Exemple

La fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}$, tandis que la fonction $g: [0,1] \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$g(x) = \sqrt{1 - x}$$

est continue sur $[0,1]$.

4.3.18 Définition de la continuité uniforme d'une fonction

Soit I un intervalle ouvert non vide (resp. un intervalle fermé et borné non réduit à un seul élément) de $\mathbb{R}$. Une fonction $f: I \to F$ est dite *uniformément continue* sur I si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout couple d'éléments x, y de I vérifiant la relation $|x-y| \leqslant \delta$, on ait: $|f(x)-f(y)| \leqslant \epsilon$.

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend du nombre ϵ.

4.3.19 Remarques

Dans la définition de la continuité uniforme, le nombre réel δ ne dépend que de ϵ, alors que dans la définition de la continuité (§ 4.3.2) il dépend aussi, en général, du point considéré x_0.

Une fonction $f: I \to F$ uniformément continue sur I est continue sur I (§ 4.3.2). La réciproque n'est pas forcément vraie. Par exemple, la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout nombre $\alpha > 0$ donné, la différence $(x+\alpha)^2 - x^2 = \alpha(2x+\alpha)$ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes.

4.3.20 Exemple

La fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout couple de nombres réels x et y:

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

ou encore

$$|\cos x - \cos y| \leqslant 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leqslant |x-y|.$$

Ainsi, il suffit de poser dans la définition de la continuité uniforme $\delta = \epsilon$.

4.3.21 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle fermé et borné

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f: [a,b] \to F$ une fonction continue. Alors,

- la fonction f est uniformément continue sur $[a,b]$;
- les deux nombres réels $\max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ et $\min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ existent.

DÉMONSTRATION. En premier lieu, montrons que f est uniformément continue sur $[a,b]$. Pour cela, soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Etant donné que f est continue sur $[a,b]$, il existe, pour chaque élément x de $[a,b]$, un nombre réel $\delta(x) > 0$ tel que pour tout $y \in [a,b] \cap B(x, \delta(x))$: $|f(x)-f(y)| \leqslant \epsilon/2$. D'autre part,

$$\bigcup_{x \in [a,b]} B(x, \tfrac{1}{2}\delta(x))$$

étant un recouvrement ouvert de $[a,b]$, on sait, d'après le théorème de Heine-Borel-Lebesgue (§ 1.2.7), qu'il existe un sous-ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\}$ d'éléments de $[a, b]$ tel que

$$[a,b] \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \tfrac{1}{2}\delta(x_j)).$$

Posons

$$\delta = \min \{\tfrac{1}{2}\delta(x_j) : j \in \{1, \ldots, n\}\},$$

et soit y, z deux éléments de $[a,b]$ vérifiant $|y-z| \leqslant \delta$. Alors, il existe un entier $r \in \{1, \ldots, n\}$ tel que

$$y \in B(x_r, \tfrac{1}{2}\delta(x_r)).$$

En remarquant que $z - x_r = (z-y) + (y-x_r)$, on obtient que

$$z \in B(x_r, \delta(x_r)).$$

D'où

$$|f(y)-f(z)| \leqslant |f(y)-f(x_r)| + |f(x_r)-f(z)| \leqslant \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

On a ainsi démontré que la fonction f est uniformément continue sur $[a,b]$.

Montrons à présent l'existence des deux nombres réels $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Mais d'abord, il nous faut démontrer que la fonction f est bornée sur $[a,b]$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que f ne soit pas bornée sur $[a,b]$. Alors, il existe une suite (x_n) d'éléments de $[a,b]$ telle que pour tout entier naturel $n : |f(x_n)| \geqslant n$. D'autre part, on sait, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (§ 2.6.5), que l'on peut extraire de la suite (x_n) une sous-suite (x_{n_j}) qui converge vers un élément x de $[a,b]$; ce qui implique, du fait de la continuité de f sur $[a,b]$, que $\lim\limits_{j\to+\infty} f(x_{n_j}) = f(x)$. Ce dernier résultat est impossible car, par construction, la suite $(f(x_{n_j}))$ n'est pas bornée. D'où contradiction. La fonction f est donc bornée sur $[a,b]$. En désignant par M le supremum et par m l'infimum de la fonction f sur $[a,b]$, on sait qu'il existe deux suites (c_n) et (d_n) d'éléments de $[a,b]$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(c_n) = m$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(d_n) = M$. Ainsi, en utilisant de nouveau le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire des suites (c_n) et (d_n) deux sous-suites (c_{n_j}) et (d_{n_j}) qui convergent respectivement vers les éléments c et d de $[a,b]$; ce qui implique, par la continuité de f sur $[a,b]$, que

$$M = \lim_{n\to+\infty} f(d_n) = \lim_{j\to+\infty} f(d_{n_j}) = f(d)$$

et

$$m = \lim_{n\to+\infty} f(c_n) = \lim_{j\to+\infty} f(c_{n_j}) = f(c).$$

D'où, par définition (§ 4.2.1),

$$M = \max_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad m = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$ ∎

4.3.22 Théorème de la valeur intermédiaire

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a,b] \to F$ une fonction continue. Alors, f atteint sa borne supérieure, sa borne inférieure et toute valeur comprise entre ces deux bornes. Autrement dit,

$$\operatorname{Im} f = f([a,b]) = [\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)].$$

Le théorème de la valeur intermédiaire implique, entre autres, que la fonction f prend toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

DÉMONSTRATION. Grâce aux résultats obtenus au paragraphe 4.3.21, nous savons qu'il existe deux nombres réels distincts c et d appartenant à $[a,b]$ tels que $f(c) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ et $f(d) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Posons $a_1 = \min\{c,d\}$ et $a_2 = \max\{c,d\}$, et soit y_0 un élément quelconque de $[f(c), f(d)]$. Ainsi, pour établir le théorème de la valeur intermédiaire, il nous suffit de démontrer que la fonction $g\colon [a_1,a_2] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - y_0$ s'annule au moins une fois dans $[a_1,a_2]$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que la fonction g ne s'annule pas dans $[a_1,a_2]$ et soit n un entier positif choisi arbitrairement. Etant donné que g est uniformément continue sur $[a_1,a_2]$, il existe un entier $k(n) > 1$ tel qu'en posant

$$x_p = a_1 + p\,\frac{a_2 - a_1}{k(n)},$$

on obtient que pour tout $k \in \{0,1, ..., k(n)-1\}$:

$$|g(x_{k+1}) - g(x_k)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

D'autre part, on déduit de l'inégalité $g(a_1)\,g(a_2) < 0$ qu'il existe un entier $r \in \{0,1, ..., k(n)-1\}$ tel que $g(x_{r+1})\,g(x_r) < 0$. Ainsi,

$$|g(x_r)| \leqslant |g(x_{r+1}) - g(x_r)| \leqslant \frac{1}{n}$$

ou encore

$$\left|\frac{1}{g(x_r)}\right| \geqslant n;$$

ce qui implique que la fonction $1/g$ n'est pas bornée sur $[a_1,a_2]$. Mais étant donné que la fonction g est continue et ne s'annule pas sur $[a_1,a_2]$, la fonction $1/g$ est aussi continue sur $[a_1,a_2]$; ce qui entraîne qu'elle est bornée. D'où contradiction. La fonction g s'annule donc sur $[a_1,a_2]$. Ainsi s'achève la démonstration du théorème de la valeur intermédiaire. ■

4.3.23 Corollaire

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f\colon [a,b] \to F$ une fonction continue telle que $f(a)\,f(b) \leqslant 0$. Alors, il existe au moins un élément c de $[a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

4.3.24 Critère pour qu'une fonction continue ait un point fixe

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f\colon [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Alors, l'équation $x - f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a,b]$.

Une telle solution est appelée un *point fixe* de f.

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction auxiliaire $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x - f(x)$, pour laquelle on vérifie facilement que $g(a)\,g(b) \leqslant 0$. Ainsi, grâce au corollaire 4.3.23, on sait qu'il existe un élément c de $[a,b]$ tel que $g(c) = 0$. D'où le résultat. ■

4.3.25 Image d'un intervalle ouvert par une fonction continue strictement monotone

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f: I \to F$ une fonction continue strictement monotone sur I. Alors, $f(I)$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. En premier lieu, montrons que $f(I)$ est un intervalle. Pour cela, soit $y_1 < y_2$ deux éléments de $f(I)$. Par suite, il existe deux éléments x_1 et x_2 de I tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Etant donné que f est une fonction continue strictement croissante (resp. décroissante) sur I, on obtient, en utilisant le théorème de la valeur intermédiaire, que $f([x_1, x_2]) = [y_1, y_2]$ (resp. $f([x_2, x_1]) = [y_1, y_2]$). Ainsi, on a démontré que pour tout couple d'éléments $y_1 < y_2$ de $f(I)$, l'intervalle fermé et borné $[y_1, y_2]$ est inclus dans $f(I)$; ce qui revient à dire que $f(I)$ est un intervalle.

D'autre part, soit y_0 un élément quelconque de $f(I)$. Alors, il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = y_0$. Par suite, I étant un intervalle ouvert, il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset I$; ce qui implique, du fait que f est une fonction continue strictement croissante (resp. décroissante) sur I, que

$$y_0 \in f(]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[) =]f(x_0 - \alpha), f(x_0 + \alpha)[\text{ (resp. }]f(x_0 + \alpha), f(x_0 - \alpha)[).$$

On a ainsi démontré qu'à tout élément y_0 de $f(I)$, on peut associer un intervalle ouvert $I(y_0)$ tel que

$$y_0 \in I(y_0) \subset f(I).$$

Cette dernière propriété et le fait que $f(I)$ soit un intervalle, nous permet d'affirmer que $f(I)$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. ■

4.3.26 Remarque

D'une manière générale, l'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue n'est pas obligatoirement un intervalle ouvert. Par exemple, pour la fonction continue $f:]-1, 2[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1, 0[\\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \in]1, 2[, \end{cases}$$

on obtient que $f(]-1,2[) = [0, 1]$.

4.3.27 Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone

Soit I un intervalle ouvert (resp. un intervalle fermé et borné non réduit à un seul élément), F un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $f: I \to F$ une fonction surjective strictement monotone sur I. Alors, f est continue sur I. De plus, f admet une fonction réciproque $f^{-1}: F \to I$ qui est continue strictement monotone sur F.

DÉMONSTRATION. Pour la démonstration, nous supposerons que I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (le cas où I est un intervalle fermé et borné non réduit à un seul élément se traitant de la même façon). En premier lieu, montrons que la fonction f est continue sur I. Pour cela, soit x_0 un élément arbitraire de I. L'intervalle I étant ouvert, il existe un nombre réel $\gamma > 0$ tel que

$$[x_0 - \gamma, x_0 + \gamma] \subset I.$$

Posons $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_0 - \gamma)$ et $y_2 = f(x_0 + \gamma)$. Etant donné que F est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que f est une fonction surjective strictement croissante (resp. décroissante) sur I, on peut donc affirmer que

$$f([x_0 - \gamma, x_0 + \gamma]) = [y_1, y_2] \text{ (resp. } [y_2, y_1]).$$

D'où, en posant $\alpha = \min\{|y_1 - y_0|, |y_2 - y_0|\}$, on obtient que

$$\alpha > 0 \quad \text{et} \quad [y_0 - \alpha, y_0 + \alpha] \subset F.$$

Soit ϵ un nombre réel positif quelconque et posons $\beta = \min\{\alpha, \epsilon\}$. Ainsi, les deux nombres réels $z_1 = y_0 - \beta$ et $z_2 = y_0 + \beta$ appartiennent à F; ce qui implique, f étant surjective, qu'il existe deux éléments x_1 et x_2 de I tels que $f(x_1) = z_1$ et $f(x_2) = z_2$. Posons $\delta = \min\{|x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|\}$. La fonction f étant strictement monotone sur I, on obtient que

$$\delta > 0 \quad \text{et} \quad f([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \subset [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon].$$

On a ainsi démontré que la fonction f est continue en x_0. L'élément x_0 de I ayant été choisi arbitrairement, on en conclut que f est une fonction continue sur I.

f étant surjective strictement monotone sur I, est donc bijective. Autrement dit, la fonction $f: I \to F$ admet une fonction réciproque $f^{-1}: F \to I$. D'autre part, on sait, grâce au résultat obtenu au paragraphe 4.3.25, que F est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et, de plus, on vérifie facilement que f^{-1} est strictement monotone sur F. Ainsi, $f^{-1}: F \to I$ est une fonction surjective strictement monotone sur un intervalle ouvert F; ce qui implique, d'après ce que nous venons de démontrer, que la fonction f^{-1} est continue sur F. ■

4.3.28 Monotonicité des fonctions continues et injectives

Soit I un intervalle ouvert (resp. un intervalle fermé et borné) de $\mathbb{R}$ et $f: I \to F$ une fonction injective continue sur I. Alors, f est strictement monotone sur I.

DÉMONSTRATION. Pour les besoins de la démonstration, nous supposerons que $I = [a, b]$ et que $f(a) < f(b)$ (les autres cas se déduisant facilement de ce cas particulier). Montrons à présent que f est strictement croissante sur I. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons le contraire. Alors, il existe deux éléments $x_1 < x_2$ de I tels que $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Par suite, le nombre réel $f(x_1)$ doit obligatoirement satisfaire une des deux possibilités suivantes, à savoir:

$$f(x_1) < f(b) \quad \text{ou} \quad f(x_1) > f(b).$$

Supposons d'abord que $f(x_1) < f(b)$. Alors, $f(x_2) \leqslant f(x_1) < f(b)$ et ainsi grâce au théorème de la valeur intermédiaire, on sait qu'il existe $y \in [x_2, b]$ tel que $f(y) = f(x_1)$. Etant donné que $y \neq x_1$ et que f est une fonction injective, ce cas est à exclure.

Supposons maintenant que $f(x_1) > f(b)$. Alors, $f(a) < f(b) < f(x_1)$ et par suite, il existe $z \in [a, x_1]$ tel que $f(z) = f(b)$. Du fait que $z \neq b$ et que f est injective, ce cas est aussi à exclure. D'où contradiction. On a ainsi démontré que la fonction f est strictement croissante sur I. ■

4.3.29 Corollaire

Soit I un intervalle ouvert (resp. un intervalle fermé et borné) de $\mathbb{R}$. Toute fonction $f: I \to F$ bijective continue sur I admet une fonction réciproque $f^{-1}: F \to I$ qui est continue strictement monotone sur F.

4.3.30 Fonction Arc sinus

La fonction $f: [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ définie par $f(x) = \sin x$ étant surjective strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$ (fig. 4.5) admet une fonction réciproque $f^{-1}: [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, appelée fonction *Arc sinus* et notée Arcsin (fig. 4.6). Ainsi, par définition, la relation $y = \operatorname{Arcsin} x$ est équivalente à : $x = \sin y$ et $y \in [-\pi/2, \pi/2]$.

La fonction $\operatorname{Arcsin}: [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est continue strictement croissante sur $[-1, 1]$.

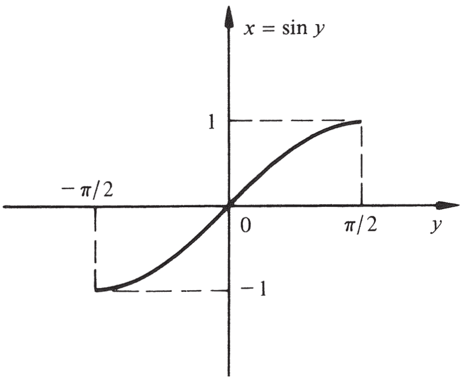


Fig. 4.5

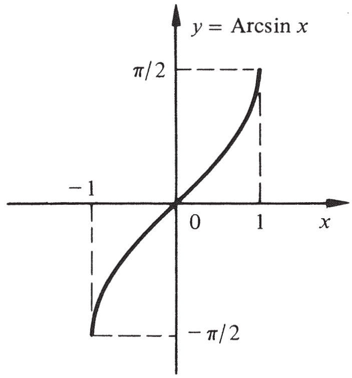


Fig. 4.6

4.3.31 Fonction Arc cosinus

La fonction $f: [0, \pi] \to [-1,1]$ définie par $f(x) = \cos x$ étant surjective strictement décroissante sur $[0, \pi]$ (fig. 4.7) admet une fonction réciproque $f^{-1}: [-1, 1] \to [0, \pi]$,

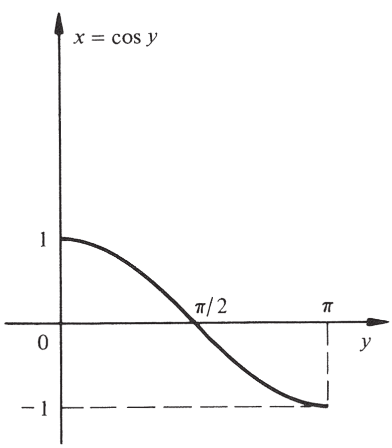


Fig. 4.7

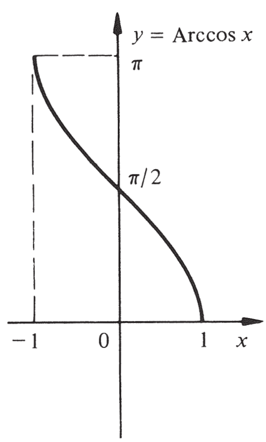


Fig. 4.8

appelée fonction *Arc cosinus* et notée Arccos (fig. 4.8). Ainsi, par définition, la relation $y = \operatorname{Arccos} x$ est équivalente à: $x = \cos y$ et $y \in [0, \pi]$.

La fonction $\operatorname{Arccos}: [-1, 1] \to [0, \pi]$ est continue strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

4.3.32 Fonction Arc tangente

La fonction $f:]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \operatorname{tg} x$ étant surjective strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$ (fig. 4.9) admet une fonction réciproque $f^{-1}: \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$, appelée fonction *Arc tangente* et notée Arctg (fig. 4.10). Ainsi, par définition, la relation $y = \operatorname{Arctg} x$ est équivalente à: $x = \operatorname{tg} y$ et $y \in]-\pi/2, \pi/2[$.

La fonction $\operatorname{Arctg}: \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

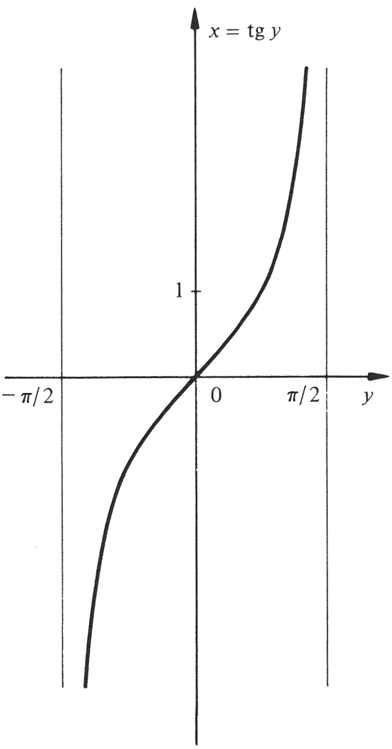


Fig. 4.9

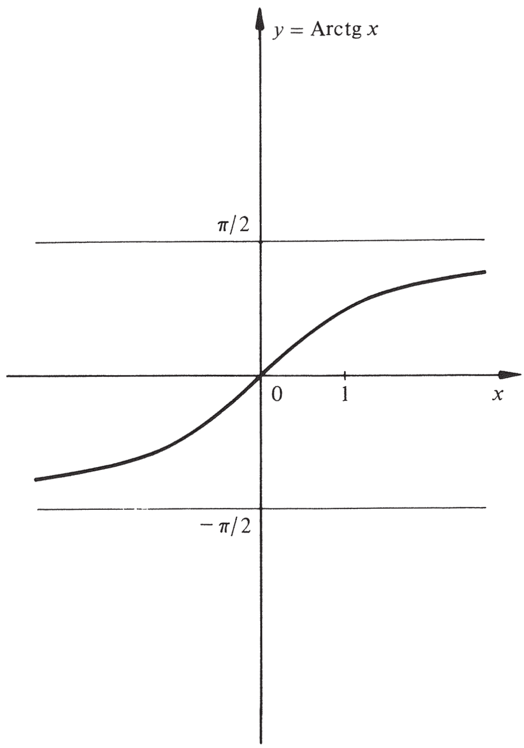


Fig. 4.10

4.3.33 Fonction Arc cotangente

La fonction $f:]0, \pi[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \operatorname{cotg} x$ étant surjective strictement décroissante sur $]0, \pi[$ (fig. 4.11) admet une fonction réciproque $f^{-1}: \mathbb{R} \to]0, \pi[$, appelée fonction *Arc cotangente* et notée Arccotg (fig. 4.12). Ainsi, par définition, la relation $y = \text{Arccotg}\, x$ est équivalente à : $x = \text{cotg}\, y$ et $y \in]0, \pi[$.

La fonction Arccotg: $\mathbb{R} \to]0, \pi[$ est continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

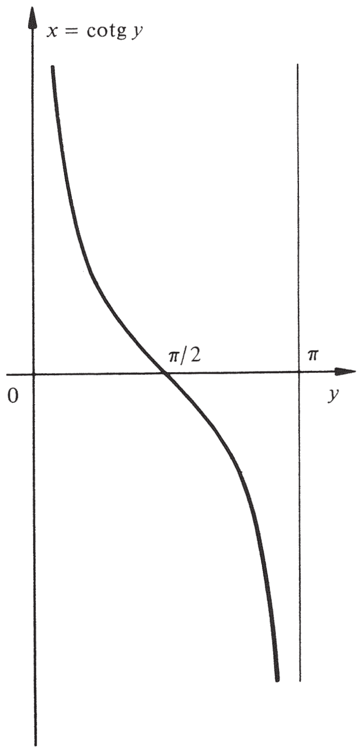


Fig. 4.11

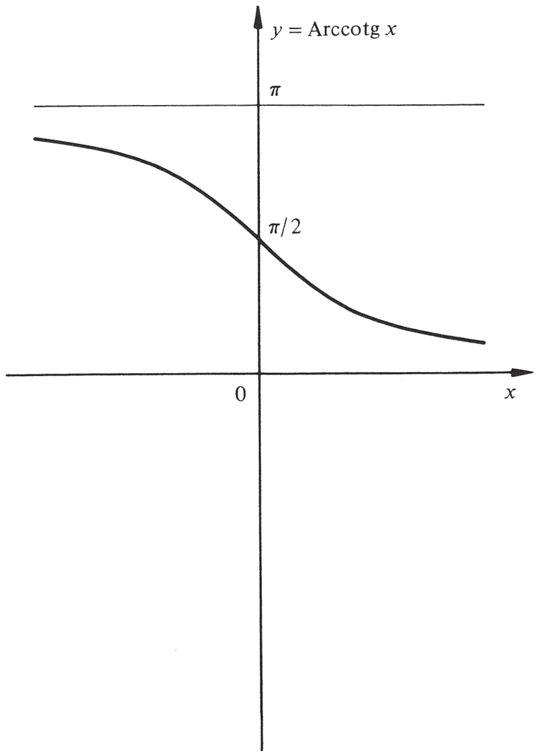


Fig. 4.12

4.3.34 Fonction continue et périodique

Supposons que f : $\mathbb{R} \to F$ soit une fonction périodique, non constante et continue. Alors, il existe un nombre réel $T > 0$ tel que les périodes de f sont les multiples entiers de T.

DÉMONSTRATION. Désignons par B l'ensemble des périodes positives de la fonction f. Etant donné que f est périodique, l'ensemble B n'est pas vide; ce qui implique que le nombre réel $T = \text{Inf}\, B$ existe. Il découle immédiatement de cette définition que $T \geqslant 0$ et qu'il existe une suite (T_n) d'éléments de B telle que $\lim_{n \to +\infty} T_n = T$. Montrons à présent que $T > 0$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $T = 0$. Du fait que f est une fonction non constante et périodique, on peut affirmer qu'il existe un nombre réel $a > 0$ tel que $f(a) \neq f(0)$. Ainsi, en posant

$$\epsilon = \frac{|f(a) - f(0)|}{2},$$

on obtient, grâce à la continuité de f en zéro, qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x| \leqslant \delta : |f(x) - f(0)| \leqslant \epsilon$. D'autre part, étant donné que $\lim_{n \to +\infty} T_n = 0$, il existe un entier $r > 0$ pour lequel $0 < T_r \leqslant \delta$; par suite, en désignant par k le plus petit élément de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : nT_r > a\}$, on obtient que $0 < kT_r - a \leqslant T_r$ ou encore $|a - kT_r| \leqslant \delta$; ce qui implique que

$$|f(a) - f(0)| = |f(a - kT_r) - f(0)| \leqslant \epsilon.$$

D'où contradiction. On a donc démontré que $T > 0$ et comme, de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x+T) = \lim_{n \to +\infty} f(x + T_n) = f(x);$$

on en conclut que T est bien la plus petite période positive de f.

D'autre part, on sait que tout multiple entier de T est une période de f. Montrons qu'il n'y en a pas d'autre. Pour cela, soit $P \neq 0$ une période de f. Alors, en désignant par q le plus petit élément de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}: nT > |P|\}$, on obtient que $qT - |P| \leqslant T$ et $(qT - |P|) \in B$; ce qui a pour conséquence que $qT - |P| = T$. Autrement dit, P est un multiple entier de T. ■

4.3.35 Défintion de la période d'une fonction continue

Si $f: \mathbb{R} \to F$ est une fonction périodique, non constante et continue, la plus petite période positive T de f est appelée *la période* de la fonction f.

4.3.36 Fonction lipschitzienne

Soit k un nombre réel positif. Une fonction $f: E \to F$ est dite *lipschitzienne dans le rapport* k, ou encore *k-lipschitzienne* si pour tout couple d'éléments x, y de E: $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.

4.3.37 Fonction contractante

Une fonction k-lipschitzienne où k est strictement inférieur à 1, est dite *contractante dans le rapport* k, ou encore *k-contractante.*

4.3.38 Théorème du point fixe de Banach

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k-contractante. Alors, l'équation $x - f(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. Considérons la suite (x_n) de nombres réels définie par

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{et} \quad x_0 = a \quad (a \text{ arbitrairement choisi dans } \mathbb{R}).$$

En premier lieu, on remarque que pour tout $n \geqslant 1$:

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leqslant k|x_n - x_{n-1}|;$$

ce qui implique que pour tout entier naturel n:

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant k^n |f(a) - a|.$$

Ainsi, on obtient que pour tout couple d'entiers naturels $m > n$:

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &\leqslant |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leqslant k^{m-1}|f(a) - a| + \ldots + k^n |f(a) - a| \\
&\leqslant k^n (1 + \ldots + k^{m-n-1})\, |f(a) - a| \\
&\leqslant \frac{k^n}{1-k}\, |f(a) - a|.
\end{aligned}$$

Il résulte immédiatement de cette inégalité que la suite (x_n) est une suite de Cauchy; ce qui implique qu'elle converge. Comme d'autre part f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, on obtient que

$$c = \lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(c).$$

Reste à démontrer l'unicité du point fixe c. Pour cela, supposons que pour les deux nombres réels c_1 et c_2 : $f(c_1) = c_1$ et $f(c_2) = c_2$. Alors,

$$|c_1 - c_2| = |f(c_1) - f(c_2)| \leqslant k|c_1 - c_2|.$$

Etant donné que $0 < k < 1$, ce dernier résultat n'est possible que si $c_1 = c_2$. ■

4.3.39 Remarque

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction k-lipschitzienne avec $k \geqslant 1$, on ne peut rien dire à priori sur l'existence ou l'unicité de ses points fixes. Par exemple, l'application identique de $\mathbb{R}$ admet une infinité de points fixes, tandis que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = x + 1$$

n'en admet aucun.

4.4 SUITES DE FONCTIONS

4.4.1 Définition d'une suite de fonctions

On désigne par $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des fonctions définies sur E à valeurs dans F. Une *suite* d'éléments de $\mathcal{F}(E,F)$ est une application de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ dans l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$. On note par f_n la *fonction image* de l'entier naturel n par cette application; la suite elle-même étant alors notée (f_n).

Nous allons étudier dans cette section, comme nous l'avons déjà fait pour les suites de nombres réels, la convergence des suites de fonctions. Principalement, nous étudierons deux sortes de convergence: la convergence simple qui est une convergence ponctuelle et la convergence uniforme qui est une convergence globale. Nous montrerons que la convergence uniforme entraîne la convergence simple, mais que la réciproque n'est pas vraie. D'autre part, nous verrons que l'intérêt de la convergence uniforme réside dans le fait qu'elle conserve certaines propriétés par passage à la limite, alors que ces propriétés ne sont pas nécessairement conservées dans le cas de la convergence simple; par exemple, la propriété de continuité.

4.4.2 Définition de la convergence simple

On dit qu'une suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{F}(E,F)$ *converge simplement* vers la fonction $f: E \to F$ si pour tout élément x de E, on a: $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.

Une telle fonction f étant unique, on dit que f est la *limite simple* de la suite (f_n).

4.4.3 Exemple

A chaque entier naturel n, associons la fonction $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = 1 - x^n$. On vérifie facilement que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ qui vaut 1 si $x \in [0,1[$ et zéro si $x = 1$.

Il découle immédiatement de cet exemple que la limite simple d'une suite de fonctions continues en un point n'est pas nécessairement continue en ce point. Nous verrons par la suite, qu'un tel résultat ne peut pas se produire lorsque la suite (f_n) converge uniformément vers f.

4.4.4 Définition de la convergence uniforme

On dit qu'une suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{F}(E,F)$ *converge uniformément* vers la fonction $f: E \to F$ si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel n_0 tel que la relation $n \geqslant n_0$ implique $\operatorname{Sup}\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon$ (fig. 4.13).

D'une manière générale, l'entier naturel n_0 dépend du nombre réel ϵ. Etant donné qu'une telle fonction f est unique, on dit que f est la *limite uniforme* de la suite (f_n). D'autre part, on vérifie facilement que si f est la limite uniforme d'une suite (f_n), elle en est aussi la limite simple. Autrement dit, si la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f, alors elle converge aussi simplement vers cette fonction.

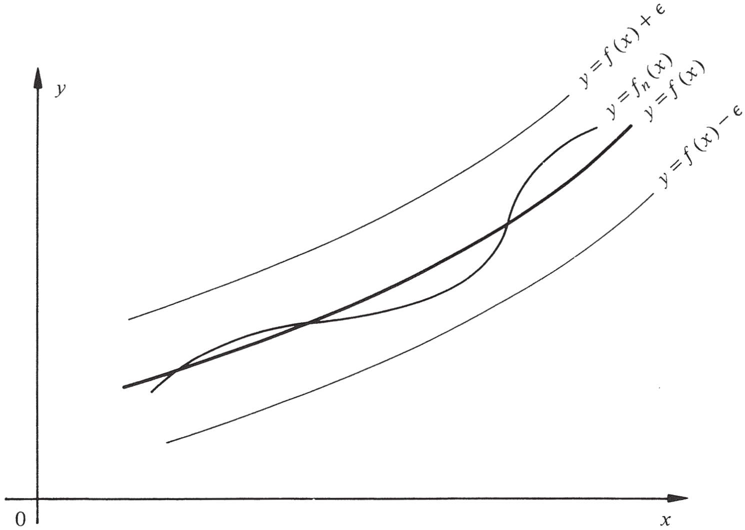


Fig. 4.13

4.4.5 Exemple

Associons à chaque entier naturel n, la fonction $f_n :]0,\frac{1}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1+x^n}{x}.$$

La suite (f_n) ainsi obtenue converge uniformément vers la fonction $f:]0,\frac{1}{2}[\to \mathbb{R}$, qui, à tout élément x de $]0,\frac{1}{2}[$, fait correspondre le nombre réel $1/x$. Ce résultat devient évident, lorsque l'on constate que pour tout $x \in]0,\frac{1}{2}[$ et tout entier $n \geqslant 2$:

$$|f_n(x) - f(x)| = x^{n-1} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \frac{1}{n}.$$

4.4.6 Linéarité de la convergence uniforme

Soit (f_n) et (g_n) deux suites d'éléments de $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ qui respectivement convergent uniformément vers les fonctions f et g. Alors, pour tout couple de nombres réels α et β, la suite $(\alpha f_n + \beta g_n)$ converge uniformément vers la fonction $\alpha f + \beta g$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que pour tout entier naturel n:

$$\operatorname*{Sup}_{X \in E} |(\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)) - (\alpha f(x) + \beta g(x))| \leqslant |\alpha| \operatorname*{Sup}_{X \in E} |f_n(x) - f(x)| + |\beta| \operatorname*{Sup}_{X \in E} |g_n(x) - g(x)|.$$

■

4.4.7 Continuité de la limite uniforme

Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{F}(E,F)$ convergeant uniformément vers la fonction f. On suppose, de plus, que toutes les fonctions f_n sont continues en x_0. Alors, la fonction f est continue en x_0.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Le fait que f soit la limite uniforme de la suite (f_n) implique qu'il existe un entier naturel p pour lequel

$$\operatorname*{Sup}_{y \in E} |f_p(y) - f(y)| \leqslant \frac{\epsilon}{3};$$

ce qui entraîne que pour tout élément y de E:

$$|f_p(y) - f(y)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

D'autre part, il résulte de la continuité de la fonction f_p en x_0, qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$ vérifiant $|x - x_0| \leqslant \delta$:

$$|f_p(x) - f_p(x_0)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

Ainsi, on obtient que pour tout élément x de E vérifiant $|x - x_0| \leqslant \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - f_p(x_0)| + |f_p(x_0) - f(x_0)| \leqslant \epsilon.$$

D'où le résultat. ■

4.4.8 Remarques

A chaque entier naturel n, associons la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)^2 x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n+1}\right] \\ -(n+1)^2 x + 2(n+1) & \text{si } x \in \left]\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{2}{n+1}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]\dfrac{2}{n+1}, +\infty\right[. \end{cases}$$

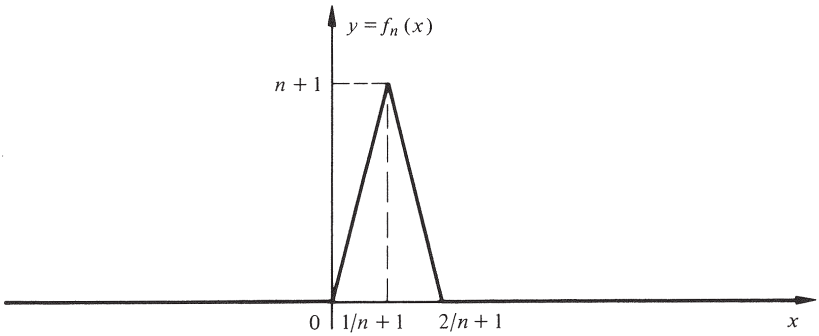


Fig. 4.14

Les fonctions f_n (fig. 4.14) sont continues sur $\mathbb{R}$ et, de plus, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vaut zéro sur tout $\mathbb{R}$. Par contre, la convergence n'est pas uniforme puisque

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = n + 1.$$

Cet exemple nous montre que même pour une suite (f_n) de fonctions continues dont la limite simple f est continue, la convergence simple n'entraîne pas obligatoirement la convergence uniforme. Néanmoins, il existe des cas où cela se produit, comme nous allons le voir dans notre prochain paragraphe avec le théorème de Dini.

Une fonction $f : E \to F$ continue en x_0 peut très bien être la limite uniforme d'une suite (f_n) de fonctions qui sont toutes discontinues en x_0. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vaut zéro sur $\mathbb{R}$ est la limite uniforme de la suite (f_n) définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

4.4.9 Théorème de Dini

Soit $a < b$ deux nombres réels. Toute suite croissante (resp. décroissante) (f_n) d'éléments de $C([a,b], F)$ convergeant simplement vers une fonction continue $f : [a,b] \to F$, converge uniformément vers f.

On rappelle que $C([a,b],F)$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans F. D'autre part, une suite de fonctions (f_n) est dite *croissante* (resp. *décroissante*) si pour tout entier $n \geqslant 0$: $f_{n+1} \geqslant f_n$ (resp. $f_{n+1} \leqslant f_n$).

DÉMONSTRATION. Pour la démonstration, faisons l'hypothèse que la suite (f_n) est croissante (l'autre cas se traitant de manière analogue). Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Etant donné que la suite croissante (f_n) converge simplement vers f, il est possible d'associer à tout $x \in [a,b]$ un entier naturel $p(x)$ tel que

$$0 \leqslant f(x) - f_{p(x)}(x) \leqslant \frac{\epsilon}{3};$$

par suite, il résulte de la continuité des fonctions f et $f_{p(x)}$ qu'il existe un nombre réel $\delta(x) > 0$ tel que pour tout élément y de $[a,b]$ vérifiant $|y-x| \leqslant \delta(x)$:

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{3} \quad \text{et} \quad |f_{p(x)}(y) - f_{p(x)}(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

D'autre part, comme

$$\bigcup_{x \in [a,b]} B(x, \delta(x))$$

est un recouvrement ouvert de $[a,b]$, il existe (§ 1.2.7) un sous-ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\}$ d'éléments de $[a,b]$ tel que

$$[a,b] \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \delta(x_j)).$$

Posons à présent $p_0 = \max\{p(x_j) : j \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$ et soit $x \in [a,b]$. Alors, il existe un entier $r \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|x - x_r| \leqslant \delta(x_r)$; ce qui entraîne que pour tout $p \geqslant p_0$:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant f(x) - f_p(x) \leqslant f(x) - f_{p(x_r)}(x) \leqslant |f(x) - f(x_r)| + \\ &|f(x_r) - f_{p(x_r)}(x_r)| + |f_{p(x_r)}(x_r) - f_{p(x_r)}(x)| \leqslant \epsilon. \end{aligned}$$

Ce résultat étant valable pour n'importe quel $x \in [a,b]$, on en conclut que la relation $p \geqslant p_0$ implique $\sup_{x \in [a,b]} |f_p(x) - f(x)| \leqslant \epsilon$. La démonstration du théorème de Dini est ainsi terminée. ■

4.4.10 Exemple

Considérons la suite de polynôme (P_n) définie sur l'intervalle $[0,1]$ par

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \tfrac{1}{2}(x - P_n^2(x)) \quad \text{et} \quad P_0(x) = 0.$$

En remarquant que pour tout entier naturel n et tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - P_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - P_n(x) - \tfrac{1}{2}(x - P_n^2(x)) \\ &= (\sqrt{x} - P_n(x))(1 - \tfrac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x))), \end{aligned}$$

on obtient, par un simple raisonnement par récurrence, que $0 \leqslant P_n(x) \leqslant \sqrt{x}$; ce qui entraîne que la suite (P_n) est croissante. Ainsi, pour tout élément x de $[0,1]$, la suite $(P_n(x))$ de nombres réels est croissante et bornée; ceci implique qu'elle converge vers un nombre réel $f(x)$ satisfaisant la relation

$$f(x) = f(x) + \tfrac{1}{2}(x - f^2(x)).$$

Puisque $f(x) \geqslant 0$, on déduit de cette égalité que $f(x) = \sqrt{x}$. Finalement, le théorème de Dini nous permet d'affirmer que dans l'intervalle $[0,1]$, la suite croissante de polynômes (P_n) converge uniformément vers la fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

4.4.11 Permutation des limites

Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{F}(E,F)$ qui converge uniformément vers une fonction f. De plus, on suppose que pour tout entier naturel n, la fonction f_n admet une limite lorsque x tend vers x_0. Alors, si la suite $(h_n(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x))$ est convergente, on obtient que

$$\lim_{n \to +\infty} (\lim_{x \to x_0} f_n(x)) = \lim_{x \to x_0} (\lim_{n \to +\infty} f_n(x)).$$

DÉMONSTRATION. Posons $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n(x_0) = h(x_0)$, et soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Alors, il existe un entier naturel m_0 tel que pour tout entier $n \geqslant m_0$:

$$|h_n(x_0) - h(x_0)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

D'autre part, étant donné que la suite (f_n) converge uniformément vers f, il existe un entier naturel k_0 tel que pour tout entier $n \geqslant k_0$:

$$\operatorname*{Sup}_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

Ainsi, en posant $n_0 = \max\{m_0, k_0\}$, on obtient que pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x_0)| &\leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - h_{n_0}(x_0)| + |h_{n_0}(x_0) - h(x_0)| \\ &\leqslant \frac{2\epsilon}{3} + |f_{n_0}(x) - h_{n_0}(x_0)|. \end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{x \to x_0} f_{n_0}(x) = h_{n_0}(x_0)$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout élément x de E vérifiant $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$:

$$|f_{n_0}(x) - h_{n_0}(x_0)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

Finalement, on obtient que les relations $x \in E$ et $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ impliquent $|f(x) - h(x_0)| \leqslant \epsilon$. On a ainsi démontré que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = h(x_0)$; ce qui revient à dire que

$$\lim_{n \to +\infty} (\lim_{x \to x_0} f_n(x)) = \lim_{x \to x_0} (\lim_{n \to +\infty} f_n(x)). \qquad \blacksquare$$

4.4.12 Remarque

A chaque entier naturel n, associons la fonction $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et, de plus, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vaut un si $x = 0$ et zéro si $x \in \mathbb{R}^*$. Etant donné que la fonction f est discontinue en $x = 0$, la convergence ne peut pas être uniforme. Par contre, on vérifie facilement que pour tout entier naturel n et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction f_n admet une limite lorsque x tend vers x_0 et que la suite $(h_n(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x))$ est convergente. Néanmoins,

$$\lim_{n \to +\infty} (\lim_{x \to 0} f_n(x)) = 1 \neq 0 = \lim_{x \to 0} (\lim_{n \to +\infty} f_n(x))$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} (\lim_{x \to 1} f_n(x)) = \lim_{x \to 1} (\lim_{n \to +\infty} f_n(x)) = 0.$$

Cet exemple nous montre que lorsque la convergence n'est pas uniforme, on ne peut rien dire à priori sur la légitimité de permuter les limites.

4.5 EXERCICES

4.5.1 Calculer les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1 + \cos^2 x}{x^2}$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x - 2}$

3) $\lim\limits_{x \to \pi/3} \dfrac{\sin(x - \pi/3)}{1 - 2\cos x}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x \operatorname{tg} 2x}$

5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{3}}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(\sqrt{1+x} - 1)}{x}$

7) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}$

8) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$

9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$

10) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos x}{x^2}$

11) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right)$

12) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

13) $\lim\limits_{x \to 2+} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 4}}$

14) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \left(\sqrt{\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)} - 1 \right).$

4.5.2 En utilisant la définition, montrer que

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2 + 1} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1} = +\infty.$

4.5.3 Pour les deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x \geqslant 1 \\ 1-x & \text{si } x < 1, \end{cases}$$

calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

4.5.4 Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions monotones. Montrer que la fonction composée $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est aussi monotone.

4.5.5 Soit $f :]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x}.$$

1) Déterminer $\operatorname{Im} f$.
2) Discuter la surjectivité et l'injectivité de la fonction f.

4.5.6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que si f est bijective, son application réciproque f^{-1} est aussi impaire.

4.5.7 Soit $f :]-1, 0[\to]0, 1[$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
1) Montrer que f est bijective.
2) Calculer f^{-1}.

4.5.8 Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux fonctions telles que pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, on ait : $f \circ g(y) = y$ et $g \circ f(x) = x$. Montrer que f est bijective et que $g = f^{-1}$.

4.5.9 Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies respectivement par

$$f(x) = [x] + (x - [x])^2 \quad \text{et} \quad g(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}.$$

1) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.
2) En déduire, à l'aide de l'exercice précédent, que f est bijective et que $g = f^{-1}$.

4.5.10 Trouver la période de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \operatorname{Arcsin}(\cos^2 x)$.

4.5.11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = l$.

4.5.12 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique.
1) Montrer que la fonction $|f|$ est aussi une fonction périodique.
2) La réciproque est-elle vraie ?

4.5.13 Montrer que toute fonction continue périodique est bornée.

4.5.14 Trouver l'ensemble des solutions de l'équation

$$\operatorname{Arcsin}(2x) - \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{3}) = \operatorname{Arcsin} x.$$

4.5.15 Trouver l'ensemble des solutions de l'équation

$$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 0.$$

4.5.16 Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$: $\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} 1/x = \pi/2$.

4.5.17 Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$: $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \pi/2$.

4.5.18 Etudier la fonction $f :]-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (1-x^2) \lim_{n \to +\infty} \frac{(1+x)^n - 1}{(1+x)^n + 1}.$$

Faire sa représentation graphique.

4.5.19 Etudier la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x - [1/x].$$

Faire sa représentation graphique.

4.5.20 Trouver le maximum et le minimum de la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x^2 - x| + |x|$.

4.5.21 Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} + [x].$$

Peut-on la prolonger par continuité au point $x = 0$?

4.5.22 Déterminer l'ensemble des points où la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\,[1/x] & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue.

4.5.23 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

est continue au point $x = 1/2$ et discontinue ailleurs.

4.5.24 Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + |\sin\frac{1}{x}|}}{|x| + 1}.$$

Montrer qu'il n'est pas possible de la prolonger par continuité au point $x = 0$.

4.5.25 Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout couple de nombres réels t et x: $f(tx) = tf(x)$. Montrer que f est continue.

4.5.26 Soit $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $x \in \mathbb{Q}$: $f(x) = g(x)$. Montrer que $f = g$.

4.5.27 Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout couple de nombres réels x et y : $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer qu'il existe une constante a telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = ax$.

4.5.28 Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante sur $]-\infty, 0[$, décroissante sur $]0, +\infty[$ et continue au point $x = 0$. Montrer que $f(0) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.

4.5.29 Soit $f: [0, +\infty[\to [0, 1[$ une fonction continue et (x_n) la suite définie par

$$x_{n+1} = x_n f(x_n) \quad \text{et} \quad x_0 = 1.$$

1) Montrer que la suite (x_n) converge.
2) Calculer sa limite.
3) Calculer la somme suivante: $\sum_{k=0}^{+\infty} (x_k(1 - f(x_k)))$.

4.5.30 Soit $f, g: [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f > g$. Montrer qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que pour tout $x \in [0,1]$, on ait: $f(x) < g(x) + \lambda$.

4.5.31 Soit $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x \to +\infty} (f(x+1) - f(x)) = l$. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} (f(x)/x) = l$.

4.5.32 Soit $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $[0, +\infty[$. Montrer qu'il existe deux constantes α et β telles que pour tout élément x de $[0, +\infty[$, on ait: $|f(x)| \leqslant \alpha x + \beta$.

4.5.33 Soit $a < b$ deux nombres réels et $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $]a, b[$. Montrer que la fonction f admet une limite à droite au point $x = a$ et une limite à gauche au point $x = b$.

4.5.34 Soit $f, g: [0, 1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f([0, 1]) \subset g([0, 1])$. Montrer qu'il existe au moins un élément c de $[0, 1]$ pour lequel on ait: $f(c) = g(c)$.

4.5.35 Soit $a < b$ deux nombres réels et $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'à tout couple de nombres réels positifs α et β, on peut associer un élément c de $[a, b]$ de sorte que $\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(c)$.

4.5.36 Soit $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue tel que $f(0) = f(2\pi)$. Montrer qu'il existe au moins un élément c de $[0, \pi]$ pour lequel on ait: $f(c) = f(c + \pi)$.

4.5.37 Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que la fonction f s'annule au moins une fois dans $\mathbb{R}$.

4.5.38 Soit $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \to a+} f(x) = l \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b-} f(x) = +\infty.$$

Montrer que pour tout nombre réel $\alpha > l$, l'équation $f(x) = \alpha$ possède au moins une solution dans $]a,b[$.

4.5.39 Pour quelles valeurs des nombres réels α et β, la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \alpha^2 x^3 + x + \beta$ s'annule-t-elle exactement une fois dans l'intervalle $[0, 1]$?

4.5.40 Soit $f: [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$. De plus, on suppose que pour tout couple d'éléments x, y de $[0,1]$: $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$.

1) Montrer que pour tout $a \in [0,1]$, la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{et} \quad x_0 = a$$

converge.

2) En déduire que pour tout $x \in [0,1]$: $f(x) = x$.

4.5.41 Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout nombre réel $x > 0$, on ait : $|f(x)| < x$.

1) Montrer que $f(0) = 0$.
2) Montrer qu'à tout couple de nombres réels $0 < a < b$, on peut associer un nombre $\rho \in]0,1[$ tel que pour tout $x \in]a,b[$: $|f(x)| < \rho x$.
3) Que devient ce résultat si $a = 0$?

4.5.42 A chaque entier naturel n, associons la fonction $f_n : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x^n + \sin\left(\frac{x}{n+1}\right).$$

1) Montrer que la suite (f_n) est uniformément convergente.
2) Calculer sa limite uniforme.

4.5.43 A chaque entier naturel n, associons la fonction $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}.$$

1) Calculer la limite simple de la suite (f_n).
2) La convergence est-elle uniforme?

4.5.44 A chaque entier naturel n, associons la fonction $f_n : [1,3] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x(1 + \sqrt[n]{nx}) \quad \text{et} \quad f_0(x) = 0.$$

1) En utilisant le théorème de Dini (§ 4.4.9), montrer que la suite (f_n) converge uniformément.
2) Monter que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lim\limits_{x\to 2} f_n(x)) = \lim\limits_{x\to 2} (\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x))$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

4.5.45 Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^{2n+1}-x^{2n+1}}{(x^2+1)^{n+1}-x^{2n+2}}\right).$$

Peut-on intervertir les deux limites?

5. Calcul différentiel

5.1. FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

5.1.1. Définition de la dérivée d'une fonction en un point

Une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage d'un point x_0 de son domaine de définition est dite *dérivable* en x_0 si le rapport

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

admet une limite lorsque x tend vers x_0. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée la *dérivée de la fonction f au point* x_0 et on la note $f'(x_0)$.

5.1.2 Exemples

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Alors, pour tout élément x_0 de $\mathbb{R}$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^2 + x_0 x + x_0^2) = 3x_0^2.$$

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \sin x$. Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin\left(\dfrac{x-x_0}{2}\right)}{\left(\dfrac{x-x_0}{2}\right)} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = \cos x_0.$$

Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $h(x) = \cos x$. Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-\sin\left(\dfrac{x-x_0}{2}\right)}{\left(\dfrac{x-x_0}{2}\right)} \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = -\sin x_0.$$

5.1.3 Fonction différentiable en un point

Une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage d'un point x_0 de son domaine de définition est dite *différentiable en* x_0 s'il existe un nombre réel a et une fonction $r : E \to F$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$;
- pour tout élément x de E : $f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)$.

5.1.4 Relation entre la dérivabilité et la différentiabilité d'une fonction

Une fonction $f : E \to F$ est différentiable en x_0 si et seulement si elle est dérivable en x_0.

DÉMONSTRATION. En premier lieu, supposons que f soit différentiable en x_0. Alors, il existe un nombre réel a et une fonction $r : E \to F$ tels que pour tout élément x de E :

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0.$$

Par suite, on obtient que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a;$$

ce qui implique que la fonction f est dérivable en x_0 et que sa dérivée $f'(x_0) = a$.

Réciproquement, supposons que la fonction f soit dérivable en x_0. Alors, pour tout élément x de E, on peut écrire :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)).$$

Etant donné que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0,$$

on en conclut que f est différentiable en x_0. ■

5.1.5 Remarques

Par la suite, les mots dérivable et différentiable seront toujours considérés comme synonymes.

Il est très important de remarquer que le nombre réel a défini au paragraphe 5.1.3 n'est rien d'autre que la dérivée de la fonction f au point x_0, soit $f'(x_0)$; ce qui implique, entre autres, que la fonction $r : E \to F$ est unique.

5.1.6 Fonction dérivée

Soit $D(f')$ l'ensemble des éléments de E où la fonction $f : E \to F$ est différentiable. Si cet ensemble n'est pas vide, l'application de $D(f')$ dans $\mathbb{R}$, qui, à tout élément de $D(f')$, fait correspondre le nombre réel $f'(x)$, est appelée la *fonction dérivée* de f, ou tout simplement *la dérivée* de f et se note f'.

5.1.7 Interprétation géométrique de la dérivée

Soit $f : E \to F$ une fonction différentiable en x_0 et C le graphique de cette fonction relativement à deux axes de coordonnées orthonormés $0x$ et $0y$. On désigne par P_0 le point de C ayant pour coordonnées $(x_0, y_0 = f(x_0))$ et par $P_1 \neq P_0$ le point de C ayant pour coordonnées $(x_1, y_1 = f(x_1))$ (fig. 5.1). Ainsi, la droite $d(P_1)$ passant par le point fixe P_0 et par le point P_1 a pour équation :

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

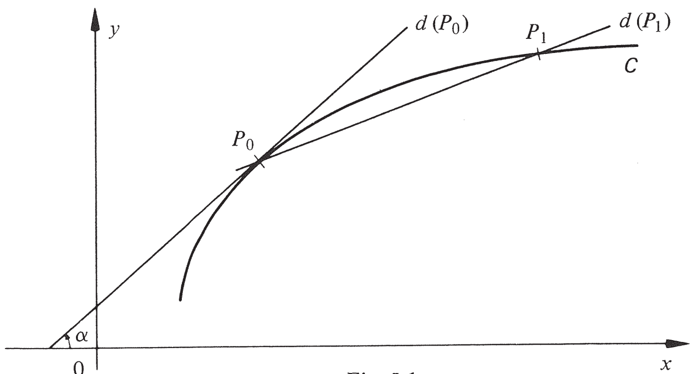


Fig. 5.1

En faisant tendre P_1 vers P_0, tout en restant sur la courbe C, on constate que la droite $d(P_1)$ tend vers une position limite définie par la droite $d(P_0)$ d'équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Par définition, la droite $d(P_0)$ est appelée la *tangente* à la courbe C au point P_0. La dérivée est donc la *pente* de cette tangente; par conséquent $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

5.1.8 Extension de la notion de dérivée

Si la fonction $g : E \to F$ est continue en x_0 et si le rapport

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers x_0, on convient de dire que la fonction g admet une *dérivée infinie* au point x_0. Dans ce cas, le graphique C de la fonction g admet, au point d'abscisse x_0, une *tangente verticale* (parallèle à l'axe 0y). Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{|x|} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0, \end{cases}$$

admet une dérivée infinie au point $x_0 = 0$ (fig. 5.2).

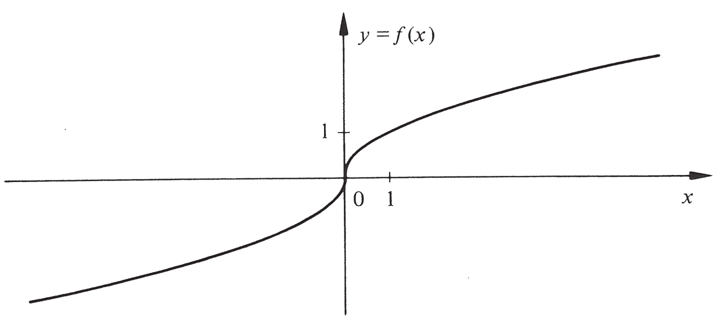


Fig. 5.2

5.1.9 Continuité d'une fonction différentiable

Une fonction $f : E \to F$ différentiable en x_0 est continue en ce point.

DÉMONSTRATION. Pour tout élément $x \neq x_0$ de E, on peut écrire

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Etant donné que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

on obtient que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; ce qui revient à dire que la fonction f est continue au point x_0. ■

5.1.10 Remarque

Une fonction peut très bien être continue en x_0 sans pour autant être différentiable en ce point. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ est continue en $x_0 = 0$, mais n'est pas différentiable en ce point.

5.1.11 Opérations algébriques sur les fonctions différentiables

Soit $f, g : E \to F$ deux fonctions différentiables en x_0. Alors,

– pour tout couple de nombres réels α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ est différentiable en x_0 et

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0);$$

– la fonction fg est différentiable en x_0 et

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0).$$

DÉMONSTRATION. Pour tout élément $x \neq x_0$ de E, on peut écrire

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

La fonction g étant différentiable en x_0, elle est continue en x_0; ce qui revient à dire que

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$

D'autre part,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0).$$

Ainsi, on obtient que

$$(fg)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$ ■

– Si pour tout élément x de E : $g(x) \neq 0$; alors la fonction (f/g) est différentiable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

DÉMONSTRATION. En remarquant que pour tout élément $x \neq x_0$ de E:

$$\frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

et que la fonction g est continue en x_0, on obtient que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Par suite,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

■

5.1.12 Exemples

Soit n un entier positif et $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = x^n$. Alors pour tout élément x_0 de $\mathbb{R}$, la fonction f_n est différentiable et

$$f_n'(x_0) = n x_0^{n-1}.$$

En effet,

$$f_n'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = n x_0^{n-1}.$$

Soit p un entier positif et $g_p : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g_p(x) = \frac{1}{x^p}.$$

Alors, pour tout nombre réel $x_0 \neq 0$, la fonction g_p est différentiable et

$$g_p'(x_0) = \frac{-p}{x_0^{p+1}}.$$

Pour vérifier ce résultat, considérons les deux fonctions auxiliaires $h, f_p : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définies respectivement par $h(x) = 1$ et $f_p(x) = x^p$. En remarquant que pour tout

$x \in \mathbb{R}^*$:

$$g_p(x) = \frac{h(x)}{f_p(x)},$$

on obtient que

$$g'_p(x_0) = \left(\frac{h}{f_p}\right)'(x_0) = \frac{-p x_0^{p-1}}{(x_0^p)^2} = \frac{-p}{x_0^{p+1}}.$$

Soit $f: E = \{x \in \mathbb{R}: x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \operatorname{tg} x$, et soit x_0 un élément quelconque de E. Alors, en considérant les deux fonctions auxiliaires $g, h: E \to F$ définies respectivement par $g(x) = \sin x$ et $h(x) = \cos x$, on obtient que

$$f'(x_0) = \left(\frac{g}{h}\right)'(x_0) = \frac{1}{\cos^2 x_0} = 1 + \operatorname{tg}^2 x_0.$$

5.1.13 Fonction réciproque d'une fonction différentiable

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f: I \to F$ une fonction bijective continue sur I. D'autre part, on suppose que f est différentiable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$. Alors, f admet une fonction réciproque $f^{-1}: F \to I$ qui est différentiable au point $y_0 = f(x_0)$. De plus, on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

DÉMONSTRATION. Le fait que I soit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ implique que F est aussi un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (§ 4.3.25 et 4.3.28). D'autre part, on sait que f admet une fonction réciproque $f^{-1}: F \to I$ qui est continue sur F (§ 4.3.29). D'où

$$x_0 = f^{-1}(y_0) = \lim_{y \to y_0} f^{-1}(y).$$

Ainsi, en remarquant que pour tout élément $y \neq y_0$ de F

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0}},$$

on obtient que

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad \blacksquare$$

5.1.14 Exemples

Considérons la fonction $f: \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ définie par $f(y) = \operatorname{Arctg} y$. Par définition, on sait que f est la fonction réciproque de la fonction continue $g:]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \operatorname{tg} x$. D'autre part, pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$: $g'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x \neq 0$. Ainsi, pour tout nombre réel y_0, la fonction f est différentiable en y_0. Par suite, en posant $x_0 = f(y_0)$, on obtient que

$$f'(y_0) = (g^{-1})'(y_0) = \frac{1}{g'(x_0)} = \frac{1}{1+tg^2 x_0} = \frac{1}{1+y_0^2}.$$

Soit n un entier positif et $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ la fonction définie par $f(y) = \sqrt[n]{y}$. f admet comme fonction réciproque, la fonction continue $g :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ définie par $g(x) = x^n$. Etant donné que pour tout $x \in]0,+\infty[: g'(x) = nx^{n-1} \neq 0$; on en déduit que pour tout nombre réel $y_0 > 0$, la fonction f est différentiable en y_0. Par suite, en posant $x_0 = f(y_0)$, on obtient que

$$f'(y_0) = (g^{-1})'(y_0) = \frac{1}{g'(x_0)} = \frac{1}{nx_0^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{y_0^{n-1}}}.$$

5.1.15 Différentiabilité de la composée de deux fonctions différentiables

Soit $f : E \to F$ une fonction différentiable en x_0 et $g : G \to H$ une fonction différentiable en $f(x_0)$. Supposons de plus que $f(E) \subset G$. Alors, la fonction composée $g \circ f : E \to H$ est différentiable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

DÉMONSTRATION. En remarquant que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ et que pour tout élément $x \neq x_0$ de E :

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) = f(x_0) \\ \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{si } f(x) \neq f(x_0), \end{cases}$$

on obtient que

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0)) f'(x_0). \qquad \blacksquare$$

5.1.16 Exemple

Soit p et q deux entiers positifs et $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction définie par $h(x) = \sqrt[q]{x^p}$. Par suite, en considérant les deux fonctions auxiliaires $f, g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définies respectivement par $f(x) = x^p$ et $g(y) = \sqrt[q]{y}$, on obtient que $h = g \circ f$. Ainsi, pour tout nombre réel $x_0 > 0$, la fonction h est différentiable en x_0 et

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0) = \frac{p}{q} \sqrt[q]{x_0^{p-q}}.$$

5.1.17 Dérivée à droite, dérivée à gauche

Une fonction $f : E \to F$ définie à droite (resp. à gauche) d'un point x_0 de son domaine de définition est dite *dérivable à droite* (resp. *à gauche*) en x_0 si le rapport

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

admet une limite à droite (resp. à gauche) au point x_0. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée la *dérivée à droite* (resp. *à gauche*) de la fonction f au point x_0 et on la note $f_d'(x_0)$ (resp. $f_g'(x_0)$).

5.1.18 Relation entre les différentes dérivées

Une fonction $f: E \to F$ admet une dérivée au point x_0 si et seulement si sa dérivée à droite et sa dérivée à gauche au point x_0 existent et sont égales.

5.1.19 Dérivée à droite infinie, dérivée à gauche infinie

Si la fonction $f: E \to F$ est continue à droite (resp. à gauche) en x_0 et si

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty \quad \left(\text{resp.} \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty\right),$$

on convient de dire que la fonction f admet au point x_0 une *dérivée à droite* (resp. *à gauche*) *infinie*.

5.1.20 Fonction différentiable sur un ensemble

Soit G un sous-ensemble non vide de E. Une fonction $f: E \to F$ est dite *différentiable sur G* si elle est différentiable en tout point de G.

5.1.21 Fonction n fois différentiable

Soit $f: E \to F$ une fonction différentiable sur E. Si la fonction $f': E \to \mathbb{R}$ est elle-même différentiable sur E, on note f'' sa fonction dérivée et elle est appelée la *dérivée seconde* de f. Plus généralement, les dérivées successives de f, si elles existent, seront notées $f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', f^{(3)}, \ldots, f^{(n)}$. Par convention, on pose $f^{(0)} = f$. La fonction $f^{(p)}$ étant alors appelée la *dérivée d'ordre p*, ou encore la *p-ième dérivée* de f.

Nous dirons que la fonction $f: E \to F$ est *n fois différentiable* sur E si elle admet une dérivée d'ordre n. D'autre part, lorsque f est p fois différentiable sur E pour tout entier naturel p, on dit que f est *indéfiniment différentiable* sur E.

5.1.22 Fonction n fois continûment différentiable

Une fonction $f: E \to F$ est dite *n fois continûment différentiable* sur E si elle admet une dérivée d'ordre n continue en tout point de E.

5.1.23 Notations

On désigne par $C^n(E,F)$ l'ensemble des fonctions de E dans F qui sont n fois continûment différentiables sur E. D'autre part, on désigne par $C^\infty(E,F)$ l'ensemble des fonctions de E dans F qui sont indéfiniment différentiables sur E.

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$C^\infty(E,F) \subset C^{n+1}(E,F) \subset C^n(E,F) \subset C^1(E,F).$$

5.1.24 Remarque

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En remarquant que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x} + \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

on obtient que f est différentiable sur $\mathbb{R}$, mais que sa dérivée $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est discontinue au point $x = 0$. Cet exemple nous montre qu'une fonction $f : E \to F$ peut être différentiable sur E sans pour autant être continûment différentiable sur E. Par contre, l'inverse est toujours vrai.

5.2. THÉORÈME DE ROLLE ET THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

5.2.1 Introduction

En donnant dans la section précédente les principales définitions et règles de calcul concernant les dérivées, nous sommes maintenant en mesure d'établir les propriétés les plus importantes que possèdent les fonctions différentiables. En particulier, nous allons démontrer les théorèmes de Rolle et des accroissements finis qui sont sans doute les deux théorèmes les plus utiles et les plus utilisés du calcul différentiel; nous pourrons le constater à de nombreuses occasions.

5.2.2 Condition nécessaire pour qu'une fonction ait un extremum local en un point

Si une fonction $f : E \to F$ différentiable en x_0 admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

DÉMONSTRATION. Supposons que la fonction f possède un maximum (resp. minimum) local au point x_0. Alors,

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0 \quad (\text{resp.} \geqslant 0)$$

et

$$f'(x_0) = f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \quad (\text{resp.} \leqslant 0);$$

ce qui implique que $f'(x_0) = 0$. ■

5.2.3 Remarque

Il faut remarquer que la dérivée d'une fonction f peut très bien s'annuler en un point x_0, sans pour autant que f possède un extremum local en ce point. Par exemple, la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ s'annule en zéro; mais par contre, cette fonction n'admet aucun extremum en ce point.

Au paragraphe 5.4.10, nous étudierons plus en détail cette question. Entre autres, nous verrons que si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$, la fonction admet un extremum local au point x_0.

5.2.4 Point stationnaire

Si $f : E \to F$ est une fonction différentiable en x_0 et si $f'(x_0) = 0$, on dit que x_0 est un *point stationnaire* de la fonction f.

5.2.5 Recherche des points où une fonction continue atteint ses extrema

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue. Grâce au résultat obtenu au paragraphe 4.3.21, nous savons que les deux ensembles

$$A = \{y \in [a, b] : f(y) = \max_{x \in [a,b]} f(x)\}$$

et

$$B = \{z \in [a, b] : f(z) = \min_{x \in [a,b]} f(x)\}$$

ne sont pas vides. D'autre part, on déduit de la condition nécessaire démontrée au paragraphe 5.2.2, que les éléments de A et de B se trouvent forcément parmi les points suivants:

- les bornes de l'intervalle $[a, b]$, à savoir a et b;
- les points stationnaires de la fonction f;
- les points de $]a, b[$ n'appartenant pas à $D(f')$.

5.2.6 Exemple

On se propose de trouver les points où la fonction $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x - 2)\sqrt[3]{x^2}$ atteint ses extrema. Pour cela, calculons sa dérivée

$$f'(x) = \frac{5x - 4}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Il résulte de ce calcul que $D(f') =]-1, 0[\cup]0, 2[$ et que l'unique point stationnaire de f est $x = 4/5$. La fonction f étant continue sur $[-1, 2]$, on sait (§ 5.2.5) que tous les points où f atteint son maximum ou son minimum sur $[-1, 2]$ se trouvent obligatoirement parmi les points suivants: $-1, 0, 4/5$ et 2. Par suite, en constatant que

$$f(-1) = -3, \quad f(0) = f(2) = 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}},$$

on obtient que la fonction f atteint son minimum au point $x = -1$ et son maximum aux points $x = 0$ et $x = 2$ (fig. 5.3).

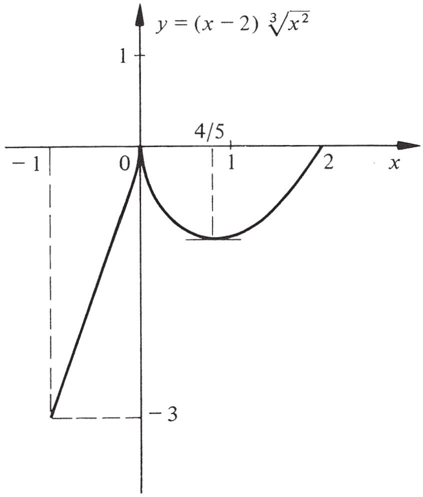


Fig. 5.3

5.2.7 Théorème de la valeur intermédiaire pour la dérivée

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to F$ une fonction différentiable sur $]a, b[$. De plus, on suppose que les deux nombres réels $f'_d(a)$ et $f'_g(b)$ existent et que $f'_d(a) < f'_g(b)$ (resp. $f'_d(a) > f'_g(b)$). Alors, à tout nombre réel α vérifiant $f'_d(a) < \alpha < f'_g(b)$ (resp. $f'_g(b) < \alpha < f'_d(a)$), on peut associer un élément c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = \alpha$.

DÉMONSTRATION. Pour la démonstration, supposons que $f'_d(a) < \alpha < f'_g(b)$ (l'autre cas se traitant de manière analogue) et soit $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par $h(x) = f(x) - \alpha x$. Cette fonction étant continue sur $[a, b]$, elle atteint son minimum en un point c de son domaine de définition. Etant donné que $h'_d(a) < 0$, il existe un élément x_1 de $[a, b]$ tel que $h(x_1) < h(a)$; ce qui implique que $c \neq a$. De même, puisque $h'_g(b) > 0$, il existe un élément x_2 de $[a, b]$ tel que $h(x_2) < h(b)$; ce qui entraîne que $c \neq b$. D'où $c \in\,]a, b[$. Par suite, en utilisant le résultat donné au paragraphe 5.2.2, on obtient que $h'(c) = 0$; ce qui revient à dire que $f'(c) = \alpha$. ■

5.2.8 Corollaire

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ une fonction dont la dérivée est monotone sur I. Alors, f' est continue sur I.

DÉMONSTRATION. Pour établir ce corollaire, faisons l'hypothèse que f' est croissante sur I (l'autre cas se traitant de manière analogue), et supposons que f' ne soit pas continue en un point x_0. Alors,

$$\alpha_1 = \text{Sup}\,\{f'(x) : x \in I, x < x_0\} < \text{Inf}\,\{f'(x) : x \in I, x > x_0\} = \alpha_2 .$$

Ce résultat implique que pour tout élément $\alpha \neq f'(x_0)$ de $]\alpha_1, \alpha_2[$, il n'existe aucun point c de I tel que $f'(c) = \alpha$; ce qui est en contradiction avec le théorème 5.2.7. D'où le résultat. ■

5.2.9 Théorème de Rolle

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue sur $[a, b]$, différentiable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe un élément c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

DÉMONSTRATION. Si la fonction f est constante sur $[a, b]$, le résultat est évident; puisque pour tout $x \in\,]a, b[$, on a $f'(x) = 0$. Supposons à présent que f ne soit pas constante sur $[a, b]$; ce qui implique, par la continuité de f sur $[a, b]$, qu'il existe deux éléments c_1 et c_2 de $[a, b]$ tels que

$$f(c_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \neq \max_{x \in [a,b]} f(x) = f(c_2).$$

Par suite, étant donné que $f(a) = f(b)$, on obtient que l'un au moins des deux nombres réels c_1 ou c_2 est strictement compris entre a et b; ce qui entraîne, d'après le résultat obtenu au paragraphe 5.2.2, que l'un au moins des deux nombres $f'(c_1)$ ou $f'(c_2)$ est nul. ■

5.2.10 Remarques

Soit C le graphique de la fonction $f : [a, b] \to F$. Alors le théorème de Rolle exprime qu'il existe au moins un point de C, distinct des extrémités, où la tangente à la courbe C en ce point est parallèle à l'axe $0x$ (fig. 5.4).

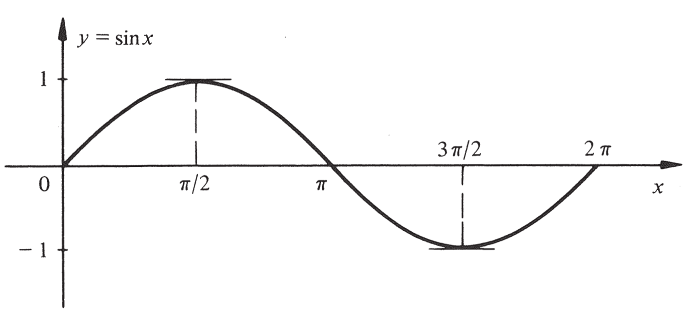


Fig. 5.4

Considérons la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ (fig. 5.5)

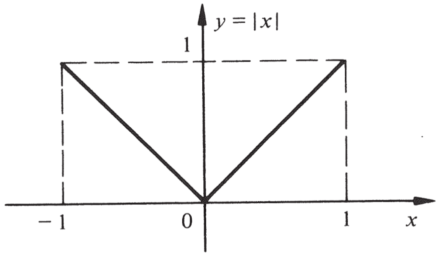


Fig. 5.5

Cette fonction satisfait toutes les hypothèses du théorème de Rolle, sauf la différentiabilité au point $x = 0$; c'est pourquoi, sa dérivée ne s'annule en aucun point de $]-1, 0[\cup]0, 1[$.

5.2.11 Extension du théorème de Rolle

Soit $f :]a, b[\to F$ une fonction différentiable sur $]a, b[$ telle que $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to b-} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$). Alors, il existe un élément c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

DÉMONSTRATION. Etant donné que $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to b-} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$), il existe un élément c de $]a, b[$ tel que

$$f(c) = \min_{x \in]a,b[} f(x) \qquad (\text{resp.}\, f(c) = \max_{x \in]a,b[} f(x)).$$

Par suite, f étant différentiable en c, on obtient que $f'(c) = 0$. ■

5.2.12 Théorème des accroissements finis

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue sur $[a, b]$, différentiable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors, il existe un élément c de $]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction auxiliaire $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Il découle des hypothèses faites sur f que la fonction g est continue sur $[a, b]$, différentiable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Comme de plus $g(a) = g(b)$, on peut lui appliquer le théorème de Rolle : il existe un élément c de $]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. En constatant que

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

on obtient que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. ■

5.2.13 Interprétation géométrique du théorème des accroissements finis

Soit C le graphique de la fonction $f : [a, b] \to F$. Alors, le théorème des accroissements finis exprime qu'il existe au moins un point de C, distinct des extrémités, où la tangente à la courbe C en ce point est parallèle à la corde joignant $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ (fig. 5.6).

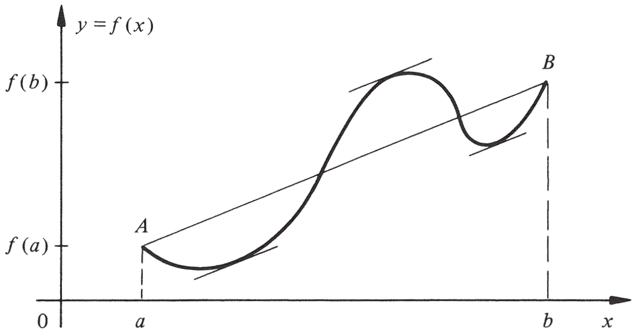


Fig. 5.6

5.2.14 Fonctions dont les dérivées sont égales

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f, g : [a, b] \to F$ deux fonctions continues ayant des dérivées égales en tout point de $]a, b[$. Alors, il existe une constante c telle que pour tout $x \in [a, b]$, on ait : $f(x) = g(x) + c$.

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction auxiliaire $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(x) - g(x)$. Il résulte des hypothèses faites sur f et g que h est une fonction continue sur $[a, b]$ dont la dérivée est nulle en tout point de $]a, b[$. Par suite, en utilisant le théorème des accroissements finis, on obtient que $h(x) - h(a) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$. D'où le résultat. ■

5.2.15 Remarque

Si dans l'énoncé du paragraphe 5.2.14, on ne suppose pas que le domaine de définition des fonctions f et g est un intervalle I, alors le résultat peut très bien cesser d'être vrai, même si les autres hypothèses sont vérifiées. Par exemple, les deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

ont des dérivées égales en tout point de $\mathbb{R}^*$; mais par contre, ces deux fonctions ne sont pas égales à une constante près.

5.2.16 Fonction différentiable et monotone

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue sur $[a, b]$, différentiable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors,

– f est croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$ si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$) pour tout $x \in]a, b[$;
– si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout $x \in]a, b[$, alors la fonction f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a, b]$.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser le théorème des accroissements finis. ■

5.2.17 Corollaire

Soit $a < c < b$ trois nombres réels et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue sur $[a, b]$, différentiable sur $]a, c[\cup]c, b[$ et telle que pour tout élément $x \neq c$ de $]a, b[$, on ait : $(x - c) f'(x) \leqslant 0$ (resp. $(x - c) f'(x) \geqslant 0$). Alors,

$$f(c) = \max_{x \in [a,b]} f(x) \qquad \text{(resp. } f(c) = \min_{x \in [a,b]} f(x)\text{)}.$$

5.2.18 Remarques

Une fonction peut très bien être strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a, b]$ sans pour autant avoir une dérivée positive (resp. négative) en tout point de $]a, b[$. Par exemple, la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $[-1, 1]$ et $f'(0) = 0$.

Considérons la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(\sin \dfrac{1}{x}\right)^2 & \text{si } x \in [-1, 0[\cup]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que f est différentiable sur $]-1, 1[$ et que $f(0) = \min_{x \in [-1,1]} f(x)$. Par contre, il n'existe aucun nombre réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que la fonction f soit décroissante sur $]-\alpha, 0[$ et croissante sur $]0, \alpha[$.

Si dans l'énoncé du paragraphe 5.2.16, on ne suppose pas que le domaine de définition de la fonction f est un intervalle, alors le résultat peut cesser d'être vrai. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$ admet en tout point de $\mathbb{R}^*$ une dérivée négative, mais il est facile de vérifier que cette fonction n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$. Par contre, elle est strictement décroissante sur chacun des intervalles ouverts $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

5.2.19 Critère assurant l'existence de la dérivée à droite ou à gauche

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to F$ une fonction continue sur $[a, b]$, différentiable sur $]a, b[$ et telle que $\lim_{x \to a+} f'(x) = l$ (resp. $\lim_{x \to b-} f'(x) = l$). Alors,

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a+} f'(x) \qquad \text{(resp. } f'_g(b) = \lim_{x \to b-} f'(x)\text{)}.$$

DÉMONSTRATION. Supposons que $\lim_{x \to a+} f'(x) = l$. Comme d'autre part, on sait d'après le théorème des accroissements finis, qu'à chaque élément x de $]a, b[$, on peut associer un nombre réel $c(x)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$a<c(x)<x \quad \text{et} \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c(x)),$$

on obtient que

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a+} f'(c(x)) = \lim_{x\to a+} f'(x) = l.$$

Si $\lim\limits_{x\to b-} f'(x)=l$, on démontre de façon analogue que $f'_g(b)=\lim\limits_{x\to b-} f'(x)=l$. ∎

5.2.20 Corollaire

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point x_0 et $f : I\to F$ une fonction continue sur I, différentiable sur $\{x\in I : x\neq x_0\}$, telle que $\lim\limits_{x\to x_0 -} f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0 +} f'(x)=l$. Alors, f est différentiable en x_0 et, de plus, on a : $f'(x_0)=l$.

5.2.21 Remarques

Si dans les hypothèses faites au paragraphe 5.2.19 on remplace l par $\pm\infty$ alors, la fonction f admet au point a (resp. b) une dérivée à droite (resp. à gauche) infinie.

De même, si dans l'énoncé du corollaire 5.2.20 on remplace l par $\pm\infty$ alors, la fonction f admet une dérivée infinie au point x_0.

D'autre part, considérons la fonction f : $[0, 1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x\in\,]0,1] \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$$

En remarquant que pour tout $x\in\,]0,1[$:

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

on constate que $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$ n'existe pas. Par contre $f'_d(0)=0$. Cet exemple nous montre que pour une fonction f : $[a,b]\to F$ continue sur $[a,b]$, différentiable sur $]a,b[$, le nombre réel $f'_d(a)$ peut très bien exister, même lorsque $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)$ n'existe pas.

5.3 RÈGLE DE BERNOULLI-L'HOSPITAL

5.3.1 Théorème des accroissements finis généralisé

Soit $a<b$ deux nombres réels et f,g : $[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$, différentiables sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Alors, si g' ne s'annule en aucun point de $]a,b[$, il existe un nombre réel $c\in\,]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

DÉMONSTRATION. L'hypothèse g' ne s'annule en aucun point de $]a, b[$ entraîne que $g(a) \neq g(b)$ (§ 5.2.12). Considérons à présent la fonction $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a)) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Cette fonction satisfait les hypothèses du théorème de Rolle, ce qui entraîne l'existence d'un nombre réel $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$. Par suite, en constatant que pour tout $x \in]a, b[$:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

on obtient que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

■

5.3.2 Règle de Bernoulli-L'Hospital

Soit $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables sur $]a, b[$ telles que g et g' ne s'annulent en aucun point de $]a, b[$ et supposons de plus que

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = \alpha \qquad \text{avec } \alpha = 0 \text{ ou } \pm \infty$$

et

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \qquad \text{avec } \mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Alors,

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu.$$

DÉMONSTRATION. En premier lieu, supposons que $\alpha = 0$ et que $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$. Ainsi, en utilisant le théorème des accroissements finis généralisé, on sait qu'à chaque élément x de $]a, b[$, on peut associer un nombre réel $c(x)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$a < c(x) < x \qquad \text{et} \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))};$$

ce qui implique que

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu.$$

Supposons maintenant que $\alpha = \pm \infty$ et que $\mu \in \mathbb{R}$, et soit ϵ un nombre réel quelconque. Etant donné que

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu,$$

il existe un élément x_0 de $]a,b[$ tel que pour tout $x \in]a,x_0[$, on ait :

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \mu \right| \leqslant \frac{\epsilon}{2}.$$

Par suite, grâce au théorème des accroissements finis généralisé, on peut écrire que pour tout $x \in]a,x_0[$:

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - \mu \right| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$

ou encore

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \right| \leqslant \frac{\epsilon + 2\,|\mu|}{2}.$$

D'autre part, puisque $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$, il existe un élément c de $]a,x_0[$ tel que pour tout $x \in]a,c[: f(x) \neq f(x_0)$ et $f(x) \neq 0$. Considérons à présent la fonction $h :]a,c[\to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}}.$$

En remarquant que $\lim\limits_{x \to a+} h(x) = 1$, on obtient l'existence d'un nombre réel $d \in]a,c[$ tel que pour tout $x \in]a,d[$:

$$|h(x) - 1| \leqslant \frac{\epsilon}{\epsilon + 2\,|\mu|}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]a,d[$:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \mu \right| &= \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\, h(x) - \mu \right| \\
&\leqslant \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \right| |h(x) - 1| + \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - \mu \right| \\
&\leqslant \left(\frac{\epsilon + 2\,|\mu|}{2} \right) \left(\frac{\epsilon}{\epsilon + 2\,|\mu|} \right) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,;
\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure que

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu.$$

Supposons pour finir que $\alpha = \pm\infty$ et que $\mu = \pm\infty$. Le cas $\mu = -\infty$ est impossible, il est donc à exclure.

Ainsi, les relations

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = \alpha,$$

impliquent qu'il existe un nombre réel $r \in]a, b[$ tel que f et f' ne s'annulent en aucun point de $]a, r[$. D'où, en utilisant les résultats obtenus pour $\mu \in \mathbb{R}$, on peut affirmer que

$$\lim_{x \to a+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0.$$

Par suite, en constatant que pour tout $x \in]a, r[$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0,$$

on peut conclure que

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

La règle de Bernoulli-L'Hospital est ainsi entièrement démontrée. ∎

5.3.3 Remarques

Si dans l'énoncé de la règle de Bernoulli-L'Hospital, on remplace $a+$ par $b-$ (resp. $-\infty$ ou $+\infty$), le résultat reste valable.

En considérant les deux fonctions $f, g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies respectivement par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ et $g(x) = x$, on s'aperçoit facilement que

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} g(x) = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

mais que, par contre, la fonction $f'/g' :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ n'admet pas de limite à droite au point $x_0 = 0$. Cet exemple nous montre, qu'en général, la non-existence de la limite à droite en un point de la fonction f'/g', n'entraîne pas obligatoirement la non-existence de la limite à droite en ce point de la fonction f/g. Cette remarque reste valable si l'on considère la limite à gauche ou la limite lorsque x tend vers l'infini.

5.3.4 Corollaire

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point x_0 et soit $f, g : I_0 = \{x \in I : x \neq x_0\} \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables sur I_0 telles que g et g' ne s'annulent en aucun point de I_0. De plus, supposons que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \alpha \qquad \text{avec } \alpha = 0 \text{ ou } \pm\infty$$

et

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \qquad \text{avec } \mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Alors,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu.$$

5.3.5 Exemple

Soit $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x$. Ainsi, en utilisant le corollaire 5.3.4, on obtient immédiatement que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

5.4 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET FORMULE DE TAYLOR

5.4.1 Définition du développement limité

Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage de a. S'il existe $(n + 1)$ constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ telles que, pour tout élément $x \neq a$ de E, on puisse écrire

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - a) + \ldots + a_n (x - a)^n + (x - a)^n \epsilon(x) \tag{5.1}$$

où ϵ est une fonction de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 0$, on dit que l'égalité (5.1) est un *développement limité d'ordre n* de la fonction f autour de a.

D'une manière générale, la fonction ϵ dépend aussi du nombre réel a. D'autre part, la fonction polynômiale $a_0 + a_1 (x - a) + \ldots + a_n (x - a)^n$ est appelée la *partie principale* du développement limité, tandis que le terme $(x - a)^n \epsilon(x)$ est appelé le *reste* du développement limité.

5.4.2 Unicité du développement limité

Si une fonction $f : E \to F$ admet un développement limité d'ordre n autour d'un point a, alors celui-ci est unique.

DÉMONSTRATION. Soit

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - a) + \ldots + a_n (x - a)^n + (x - a)^n \epsilon_1(x)$$

et

$$f(x) = b_0 + b_1 (x - a) + \ldots + b_n (x - a)^n + (x - a)^n \epsilon_2(x)$$

deux développements limités d'ordre n de la fonction f autour de a. Nous allons d'abord démontrer que $a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Soit k le plus petit entier naturel tel que $a_k \neq b_k$. Alors, pour tout élément $x \neq a$ de E, on peut écrire que

$$(a_k - b_k) + (a_{k+1} - b_{k+1})(x - a) + \ldots + (a_n - b_n)(x - a)^{n-k} +$$
$$(x - a)^{n-k} (\epsilon_1(x) - \epsilon_2(x)) = 0.$$

Par suite, en calculant la limite de cette expression lorsque x tend vers a, on obtient que

$$a_k = b_k;$$

ce qui est absurde. On a ainsi démontré que $a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n$. Il découle immédiatement de ce résultat que pour tout élément $x \neq a$ de E:

$$\epsilon_1(x) = \epsilon_2(x).$$

D'où l'unicité du développement limité. ■

5.4.3 Remarques

Supposons que $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x)$ soit le développement limité d'ordre n de la fonction $f: E \to F$ autour de a. Alors, pour tout entier naturel $p < n$, la fonction f admet un développement limité d'ordre p autour de a dont la partie principale est $a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_p(x-a)^p$.

Dans la définition du développement limité, la fonction f n'est pas supposée définie au point a, par contre $\lim_{x \to a} f(x) = a_0$. Si on suppose que $f(a) = a_0$ et $n \geqslant 1$, alors la fonction f est différentiable en a et, de plus, on a: $f'(a) = a_1$.

Lorsque $a \in E$, la valeur de la fonction ϵ en ce point ne joue aucun rôle dans la définition du développement limité; c'est pourquoi, nous supposerons toujours que $\epsilon(a) = 0$.

5.4.4 Condition suffisante pour qu'une fonction possède un développement limité

Soit $f: E \to F$ une fonction définie au voisinage de a. Alors, s'il existe $(n+1)$ constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ telles que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - (a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0,$$

la fonction f admet un développement limité d'ordre n autour de a dont la partie principale est $a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n$.

5.4.5 Développement limité d'une fonction paire ou impaire

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ayant zéro pour centre de symétrie (§ 4.1.25) et $f: E \to F$ une fonction admettant $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \epsilon(x)$ comme développement limité d'ordre n autour de zéro. Alors,

- si f est une fonction paire $(f(x) = f(-x))$, les coefficients $a_1, a_3, \ldots$ dont l'indice est impair sont tous nuls;
- si f est une fonction impaire $(f(x) = -f(-x))$, les coefficients $a_0, a_2, \ldots$ dont l'indice est pair sont tous nuls.

DÉMONSTRATION. Pour la démonstration, supposons que f soit une fonction paire (l'autre cas se traitant de manière analogue); ce qui implique que pour tout élément $x \neq 0$ de E:

$$f(x) = f(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \ldots + (-1)^n a_n x^n + x^n((-1)^n \epsilon(-x)).$$

Par suite, en constatant que $\lim_{x \to 0} (-1)^n \epsilon(-x) = 0$, on obtient, grâce à l'unicité du développement limité, que les coefficients $a_1, a_3, \ldots$ dont l'indice est impair sont tous nuls. ■

5.4.6 Opérations algébriques sur les développements limités

Soit $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant respectivement

$$f(x) = a_0 + a_1 (x-a) + \ldots + a_n (x-a)^n + (x-a)^n \epsilon_1 (x)$$

et

$$g(x) = b_0 + b_1 (x-a) + \ldots + b_n (x-a)^n + (x-a)^n \epsilon_2 (x)$$

comme développement limité d'ordre n autour de a. Alors,

- pour tout couple de nombres réels α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ admet un développement limité d'ordre n autour de a dont la partie principale est

  $$(\alpha a_0 + \beta b_0) + \ldots + (\alpha a_n + \beta b_n)(x-a)^n;$$

- la fonction fg admet un développement limité d'ordre n autour de a dont la partie principale s'obtient en effectuant le produit

  $$(a_0 + \ldots + a_n (x-a)^n)(b_0 + \ldots + b_n (x-a)^n)$$

  et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n;
- si $b_0 \neq 0$, la fonction f/g admet un développement limité d'ordre n autour de a dont la partie principale s'obtient en effectuant la division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre n de

  $(a_0 + \ldots + a_n (x-a)^n)$ par $(b_0 + \ldots + b_n (x-a)^n)$.

5.4.7 Exemple

Soit $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$j(x) = \frac{1+x^3}{1+x^2}.$$

On se propose de calculer la partie principale de son développement limité d'ordre 4 autour de zéro. Pour cela, considérons les trois fonctions auxiliaires f, g et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x) = 1 + x^3, \quad g(x) = 1 + x^2 \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Les fonctions f et g admettent chacune un développement limité d'ordre 4 autour de zéro dont la partie principale est respectivement $(1+x^3)$ et $(1+x^2)$. D'autre part, en utilisant la formule donnant la somme d'une progression géométrique, on obtient que la fonction h admet un développement limité d'ordre 4 autour de zéro dont la partie principale est $(1 - x^2 + x^4)$. Par suite, en constatant que

$$j = f\,h = f/g,$$

il résulte du paragraphe 5.4.6 que la fonction j admet un développement limité d'ordre 4 autour de zéro dont la partie principale peut être calculée :

– soit en effectuant le produit $(1+x^3)(1-x^2+x^4)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à 4; ce qui donne
$1-x^2+x^3+x^4$;

– soit en effectuant la division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 4 de $(1+x^3)$ par $(1+x^2)$; ce qui donne

$$
\begin{array}{llllll|l}
1 & + & & x^3 & & & 1+x^2 \\
1 & + x^2 & & & & & \hline 1-x^2+x^3+x^4 \\
\cline{1-3}
 & -x^2 & + & x^3 & & & \\
 & -x^2 & & & -x^4 & & \\
\cline{2-5}
 & & & x^3 & +x^4 & & \\
 & & & x^3 & & +x^5 & \\
\cline{4-6}
 & & & & x^4 & -x^5 & \\
 & & & & x^4 & & +x^6 \\
\cline{5-7}
 & & & & & -x^5 & -x^6
\end{array}
$$

– soit en utilisant la méthode des coefficients indéterminés. Pour cela, désignons par $j(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+x^4\,\epsilon(x)$ le développement limité d'ordre 4 de la fonction j autour de zéro. En remarquant que $f=jg$, on peut écrire, grâce à l'unicité du développement limité, que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$1+x^3=a_0+a_1x+(a_0+a_2)x^2+(a_1+a_3)x^3+(a_2+a_4)x^4$;
ce qui implique que
$a_0=a_1+a_3=1$ et $a_1=a_0+a_2=a_2+a_4=0$.
Par suite, en résolvant ce système, on obtient que
$a_0=1, a_1=0, a_2=-1, a_3=1$ et $a_4=1$.

5.4.8 Développement limité d'une fonction composée

Soit

$$f(x)=a_1(x-a)+\ldots+a_n(x-a)^n+(x-a)^n\,\epsilon_1(x)$$

le développement limité d'ordre n de la fonction $f: E \to F$ autour de a. D'autre part, soit G un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant zéro et

$$g(y)=g(0)+b_1y+\ldots+b_ny^n+y^n\,\epsilon_2(y)$$

le développement limité d'ordre n de la fonction $g: G \to H$ autour de zéro. Alors, si $f(E) \subset G$, la fonction composée $g \circ f: E \to H$ admet un développement limité d'odre n autour de a dont la partie principale est

$$g(0)+a_1b_1(x-a)+(a_2b_1+a_1^2b_2)(x-a)^2+(a_3b_1+2a_1a_2b_2$$
$$+a_1^3b_3)(x-a)^3+\ldots+(a_nb_1+\ldots+a_1^nb_n)(x-a)^n.$$

Comme nous allons pouvoir le constater dans la démonstration, la partie principale du développement limité de $g \circ f$ s'obtient en substituant, dans la partie principale du développement limité de g, y par la partie principale du développement de f et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

DÉMONSTRATION. Pour tout élément $x \neq a$ de E, on peut écrire

$$g(f(x)) = g(0) + b_1 f(x) + \ldots + b_n (f(x))^n + (f(x))^n \epsilon_2 (f(x))$$

ou encore

$$\begin{aligned} g(f(x)) = \; & g(0) + b_1 (a_1 (x-a) + \ldots + a_n (x-a)^n + (x-a)^n \epsilon_1 (x)) + \ldots \\ & + b_n (a_1 (x-a) + \ldots + a_n (x-a)^n + (x-a)^n \epsilon_1 (x))^n \\ & + (a_1 (x-a) + \ldots + a_n (x-a)^n + (x-a)^n \epsilon_1 (x))^n \epsilon_2 (a_1 (x-a) + \ldots \\ & + a_n (x-a)^n + (x-a)^n \epsilon_1 (x)); \end{aligned}$$

ce qui donne en développant

$$\begin{aligned} g(f(x)) = \; & g(0) + a_1 b_1 (x - \mathrm{a}) + (a_2 b_1 + a_1^2 b_2)(x-a)^2 + \ldots \\ & + (a_n b_1 + \ldots + a_1^n b_n)(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon_3 (x). \end{aligned}$$

Par suite, on vérifie facilement que $\lim_{x \to a} \epsilon_3 (x) = 0$. D'où le résultat. ■

5.4.9 Formule de Taylor

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a et $f : I \to F$ une fonction $(n+1)$ fois différentiable sur I. Alors, à tout élément x de I, on peut associer un nombre réel $0 < \theta_x < 1$ dépendant à la fois de a et de x tel que la relation suivante soit vérifiée :

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(p)}(a) \frac{(x-a)^p}{p!} + \ldots \\ + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(a + \theta_x (x-a)) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} . \end{aligned}$$

Cette relation est appelée la *formule de Taylor.* D'autre part, il est d'usage d'appeler *formule de MacLaurin* la formule obtenue en remplaçant a par zéro dans celle de Taylor.

DÉMONSTRATION. Soit $P_n : I \to \mathbb{R}$ la fonction polynômiale définie par

$$P_n (x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!},$$

et soit $y > a$ un élément de I. Considérons à présent la fonction auxiliaire $g : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - P_n (x) + \frac{P_n (y) - f(y)}{(y-a)^{n+1}} (x-a)^{n+1} .$$

On constate immédiatement que cette fonction est $(n+1)$ fois différentiable sur I et que

$$g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(n)}(a) = g(y) = 0.$$

Ainsi, nous pouvons appliquer le théorème de Rolle à la fonction g : il existe un nombre réel y_1 de $]a, y[$ tel que $g'(y_1) = 0$. Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de Rolle à la fonction g' : il existe un élément y_2 de $]a, y_1[$ donc de $]a, y[$, tel que $g'(y_2) = 0$. En continuant ainsi jusqu'à la dérivée d'ordre n, nous obtenons que la fonction $g^{(n)}$ s'annule en un point y_n de $]a, y[$. Par suite, en appliquant une dernière fois le théorème de Rolle à $g^{(n)}$, nous pouvons affirmer qu'il existe un nombre réel θ_y appartenant à l'intervalle ouvert $]0, 1[$ tel que

$$g^{(n+1)}(a+\theta_y(y-a)) = f^{(n+1)}(a+\theta_y(y-a)) + \frac{P_n(y)-f(y)}{(y-a)^{n+1}}(n+1)! = 0;$$

ce qui entraîne que

$$\frac{f(y)-P_n(y)}{(y-a)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta_y(y-a)).$$

Cette égalité n'est autre que la formule de Taylor pour $x = y$.

Si $y = a$, le résultat est évident. Si $y \in I$ et $y < a$, la formule de Taylor s'obtient par une démonstration en tout point identique à celle donnée ci-dessus. ∎

5.4.10 Condition suffisante pour qu'une fonction ait un extremum local en un point

Nous avons vu au paragraphe 5.2.2 que si une fonction différentiable f admet un extremum local en un point a, alors $f'(a) = 0$; mais nous savons que la réciproque n'est pas exacte. Par contre, lorsqu'une fonction est n fois différentiable, il est possible, grâce à la formule de Taylor, de préciser cette question de la façon suivante :

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a, n un entier naturel pair différent de zéro et $f : I \to F$ une fonction n fois différentiable sur I. De plus, on suppose que $f^{(n)}$ est continue en a, que $f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ et que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Alors,

– si $f^{(n)}(a) > 0$, la fonction f admet un minimum local au point a;
– si $f^{(n)}(a) < 0$, la fonction f admet un maximum local au point a.

DÉMONSTRATION. Supposons pour la démonstration que $f^{(n)}(a) > 0$ (l'autre cas se traitant de manière analogue); ce qui entraîne, puisque $f^{(n)}$ est continue en a, l'existence d'un nombre réel $\alpha > 0$ tel que les relations $y \in I$ et $|y-a| \leqslant \alpha$ impliquent $f^{(n)}(y) > 0$. D'autre part, compte tenu des hypothèses faites sur f, la formule de Taylor nous permet d'écrire que pour tout élément x de I:

$$f(x) - f(a) = f^{(n)}(a+\theta_x(x-a)) \frac{(x-a)^n}{n!} \qquad \text{avec } 0 < \theta_x < 1.$$

Ainsi, pour tout point x de I vérifiant $|x-a| \leqslant \alpha$, on obtient que $f(x) - f(a) \geqslant 0$. D'où la conclusion. ∎

5.4.11 Exemple

Soit α un nombre réel positif et soit $f :]a-\alpha, a+\alpha[\to F$ une fonction deux fois différentiable sur $]a-\alpha, a+\alpha[$ telle que $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$ (resp. $f''(a) < 0$). Alors, la fonction f admet un minimum (resp. maximum) local au point a. Cet exemple confirme le résultat obtenu au corollaire 5.2.17.

5.4.12 Définition d'un point d'inflexion

Soit $f : E \to F$ une fonction différentiable en a. En désignant par C le graphique de cette fonction relativement à deux axes orthonormés $0x$ et $0y$, on constate qu'il est possible, en étudiant le signe de la fonction $\psi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$, de connaître localement la position de la courbe C par rapport à sa tangente au point d'abscisse a. En particulier, nous dirons que le point $P = (a, f(a))$ est un *point d'inflexion* du graphique C de la fonction f, s'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ et une constante $c \neq 0$ tels que pour tout élément x de E vérifiant $0 < |x-a| \leqslant \alpha : c\,\psi(x)(x-a) > 0$ (fig. 5.7 et 5.8).

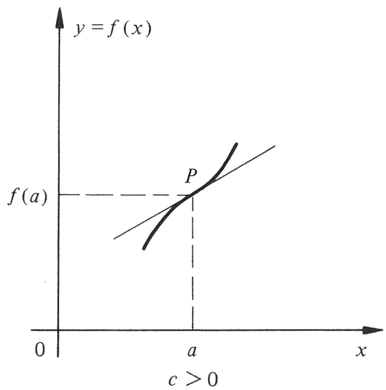


Fig. 5.7

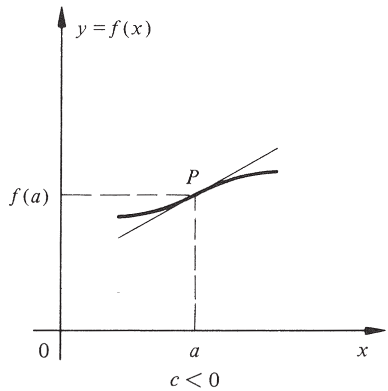


Fig. 5.8

5.4.13 Condition suffisante pour qu'une courbe ait un point d'inflexion

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a, n un entier naturel impair strictement supérieur à 1 et $f : I \to F$ une fonction n fois différentiable sur I. De plus, on suppose que $f^{(n)}$ est continue en a, que $f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ et que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Alors, le point $P = (a, f(a))$ est un point d'inflexion du graphique C de la fonction f.

DÉMONSTRATION. Supposons pour la démonstration que $f^{(n)}(a) > 0$ (l'autre cas se traitant de manière analogue); ce qui entraîne, du fait que $f^{(n)}$ est continue en a, l'existence d'un nombre réel $\alpha > 0$ tel que les relations $y \in I$ et $|y-a| \leqslant \alpha$ impliquent $f^{(n)}(y) > 0$. D'autre part, compte tenu des hypothèses faites sur f, la formule de Taylor nous permet d'écrire que pour tout élément x de I:

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = f^{(n)}(a + \theta_x(x-a))\,\frac{(x-a)^n}{n!}$$

avec $0 < \theta_x < 1$. Ainsi, pour tout point x de I vérifiant $0 < |x-a| \leqslant \alpha$, on obtient que $\psi(x)(x-a) > 0$. D'où le résultat. ■

5.4.14 Autre condition suffisante pour qu'une courbe ait un point d'inflexion

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a et $f : I \to F$ une fonction deux fois différentiable sur I. D'autre part, on suppose qu'il existe un nombre réel

$\alpha > 0$ et une constante $c \neq 0$ tels que pour tout élément x de I vérifiant $0 < |x - a| \leqslant \alpha$: $cf''(x)(x-a) > 0$. Alors, le point $P = (a, f(a))$ est un point d'inflexion du graphique C de la fonction f.

DÉMONSTRATION. On sait, grâce à la formule de Taylor, qu'à tout élément x de I, on peut associer un nombre réel $0 < \theta_x < 1$ tel que

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = f''(a + \theta_x(x-a)) \frac{(x-a)^2}{2} ;$$

ce qui implique, compte tenu des hypothèses faites sur f'', que pour tout élément x de I vérifiant $0 < |x-a| \leqslant \alpha$: $c\psi(x)(x-a) > 0$. D'où le résultat. ■

5.4.15 Exemple

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x$. Cette fonction est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}$ et, de plus, $xf''(x) = 6x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. D'où le point $(0,0)$ est un point d'inflexion du graphique C de la fonction f (fig. 5.9).

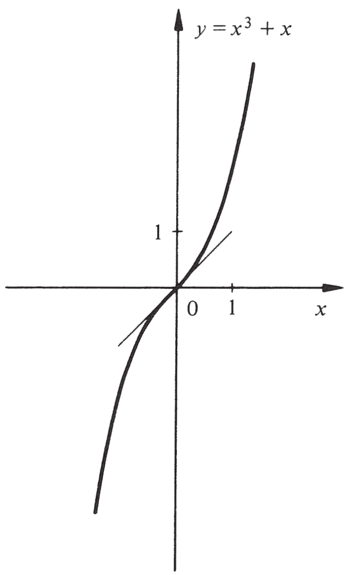


Fig. 5.9

5.4.16 Condition suffisante pour qu'un point ne soit pas un point d'inflexion

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a et $f : I \to F$ une fonction deux foix différentiable sur I. De plus, on suppose qu'il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que pour tout élément x de I vérifiant $0 < |x-a| \leqslant \beta$: $f''(x) > 0$ (resp. $f''(x) < 0$).

Alors, le point $P = (a, f(a))$ n'est pas un point d'inflexion du graphique C de la fonction f.

DÉMONSTRATION. I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a, il existe un nombre réel $0 < \alpha < \beta$ tel que $[a-\alpha, a+\alpha] \subset I$. Par suite, étant donné qu'à tout élément x de I vérifiant $0 < |x-a| \leqslant \alpha$, on peut associer un nombre réel $0 < \theta_x < 1$ tel que

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = f''(a + \theta_x(x-a))\frac{(x-a)^2}{2},$$

on obtient, compte tenu des hypothèses faites sur f'', que la fonction $\psi : I \to \mathbb{R}$ garde un signe constant dans $[a-\alpha, a[\cup]a, a+\alpha]$. D'où le résultat. ∎

5.4.17 Développement limité d'une fonction $(n+1)$ fois différentiable

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a et $f : I \to F$ une fonction $(n+1)$ fois différentiable sur I. De plus, on suppose qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ et une constante $M > 0$ tels que les relations $x \in I$ et $|x-a| \leqslant \alpha$ impliquent $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$. Alors, la formule de Taylor nous fournit le développement limité d'ordre n de la fonction f autour de a.

DÉMONSTRATION. La formule de Taylor étant applicable à la fonction f, on sait qu'à tout élément x de I, on peut associer un nombre réel $0 < \theta_x < 1$ tel que la relation suivante soit vérifiée :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$
$$+ f^{(n+1)}(a + \theta_x(x-a))\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Puisque pour tout $x \in I$ vérifiant $|x-a| \leqslant \alpha$:

$$|f^{(n+1)}(a + \theta_x(x-a))| \leqslant M,$$

on obtient en posant

$$\epsilon(x) = f^{(n+1)}(a + \theta_x(x-a))\frac{(x-a)}{(n+1)!}$$

que $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 0$. Ainsi,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + (x-a)^n \epsilon(x)$$

est bien le développement limité d'ordre n de la fonction f autour de a. ∎

5.4.18 Corollaire

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a et $f : I \to F$ une fonction $(n+1)$ fois continûment différentiable sur I. Alors, la formule de Taylor nous fournit le développement limité d'ordre n de la fonction f autour de a.

5.4.19 Exemples

En utilisant le corollaire 5.4.18, on obtient les développements limités suivants :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\,\epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\,\epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\,\epsilon(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} x^n + x^n\,\epsilon(x).$$

5.4.20 Remarques

Une fonction $f : I \to F$ peut très bien admettre un développement limité d'ordre n autour d'un point, sans pour autant que la formule de Taylor lui soit applicable. Par exemple, considérons les deux fonctions $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

et par $f(x) = 1 + x^2 + x^3\, g(x)$. La fonction f admet un développement limité d'ordre deux autour de zéro, mais la formule de MacLaurin ne lui est pas applicable, car la fonction f n'est pas différentiable pour $x \neq 0$.

En utilisant les résultats des paragraphes 5.4.5 et 5.4.18, on obtient l'assertion suivante: soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ admettant zéro pour centre de symétrie et $f : I \to F$ une fonction $(n+1)$ fois continûment différentiable sur I. Alors, si f est paire, toutes ses dérivées $f^{(1)}, f^{(3)}, \ldots$ d'ordre impair jusqu'à n s'annulent au point $x = 0$. De même, si f est impaire, toutes ses dérivées $f^{(2)}, f^{(4)}, \ldots$ d'ordre pair jusqu'à n s'annulent au point $x = 0$.

5.4.21 Utilisation du développement limité pour résoudre les formes indéterminées

En utilisant les développements limités, on se propose de calculer la limite, lorsque x tend vers zéro, de la fonction $f :]-\pi/2, 0\,[\, \cup\,]\,0, \pi/2\,[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sin^2 x - x^2 \cos x}{x^2\,(1 - \cos x)}$$

Pour cela, considérons les deux développements limités d'ordre 4 autour de zéro qui suivent :

$$\sin^2 x - x^2 \cos x = \frac{1}{6} x^4 + x^4\,\epsilon_1(x)$$

et

$$x^2\,(1 - \cos x) = \frac{1}{2} x^4 + x^4\,\epsilon_2(x).$$

Par suite,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos x}{x^2(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^4 + x^4 \epsilon_1(x)}{\frac{1}{2}x^4 + x^4 \epsilon_2(x)} = \frac{1}{3}.$$

Cet exemple nous montre que pour certaines formes indéterminées, l'utilisation du développement limité peut nous mener très rapidement à la solution. Ici, l'emploi de la règle de Bernoulli - L'Hospital nous aurait obligés à dériver quatre fois le numérateur et le dénominateur, ce qui nous aurait conduits à faire de longs calculs.

5.4.22 Détermination du développement limité d'une fonction à partir de celui de sa dérivée

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a et $f: I \to F$ une fonction $(n+1)$ fois continûment différentiable sur I. On sait, d'après le corollaire 5.4.18, que la fonction f admet un développement limité d'ordre n autour de a; ce qui implique que la fonction $f': I \to \mathbb{R}$ admet, quant à elle, un développement limité d'ordre $(n-1)$ autour de a. Supposons à présent que

$$f'(x) = b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_{n-1}(x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-1}\epsilon_1(x)$$

soit le développement limité d'ordre $(n-1)$ de la fonction f' autour de a. Alors,

$$f(x) = f(a) + b_0(x-a) + \frac{b_1}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{b_{p-1}}{p}(x-a)^p + \ldots$$

$$+ \frac{b_{n-1}}{n}(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon_2(x)$$

est le développement limité d'ordre n de la fonction f autour de a.

5.4.23 Exemple

De

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \ldots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon_1(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$$

on déduit, en remplaçant x par x^2, que

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n}\epsilon_2(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0.$$

Comme d'autre part, la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

est la dérivée de la fonction Arctg, on obtient que

$$\operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

est le développement limité d'ordre $(2n+1)$ de la fonction Arctg autour de zéro.

5.5 FONCTIONS CONVEXES

5.5.1 Définition d'une fonction convexe

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to F$ est dite *convexe* si pour tout couple d'éléments a, b de I et tout nombre réel $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

D'autre part, si on désigne par C le graphique de la fonction f relativement à deux axes de coordonnées perpendiculaires $0x$ et $0y$, la définition analytique de la convexité donnée ci-dessus peut s'énoncer géométriquement de la façon suivante : une fonction $f : I \to F$ est convexe si pour tout couple de points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ du graphique de f, tout point P de C dont l'abscisse x_0 est comprise entre a et b, est situé au-dessous de la corde AB (fig. 5.10).

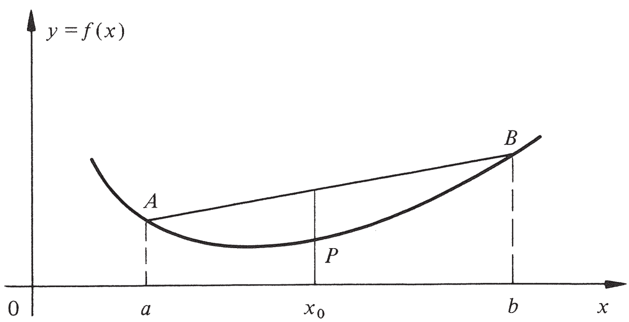


Fig. 5.10

5.5.2 Exemple

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est convexe. En effet, pour tout couple de nombres réels a, b et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) - (\lambda f(a) + (1-\lambda)(f(b)) = -\lambda(1-\lambda)(a-b)^2 \leqslant 0.$$

5.5.3 Caractérisation d'une fonction convexe

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to F$ est convexe si et seulement si pour tout n-tuple $x_1, \ldots, x_n$ d'éléments de I et tout n-tuple $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ d'éléments de $[0, 1]$ vérifiant $\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

DÉMONSTRATION. En premier lieu, supposons que f soit convexe. Il est évident que la propriété à démontrer est vraie pour $n = 1$. Supposons à présent qu'elle le soit pour $(n-1)$ et démontrons-la pour n. Pour cela, soit $x_1, \ldots, x_n$ un n-tuple d'éléments de I

et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ un n-tuple d'éléments de $[0, 1]$ vérifiant $\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et posons $\gamma = \Sigma_{i=1}^{n-1} \lambda_i$. Si $\gamma = 0$, le résultat est évident. Supposons donc que $\gamma \neq 0$ et posons

$$\beta_i = \frac{\lambda_i}{\gamma}.$$

Alors, on obtient que $\Sigma_{i=1}^{n-1} \beta_i = 1$ et que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \gamma\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i x_i\right) + \lambda_n x_n \qquad \text{avec } \gamma + \lambda_n = 1;$$

ce qui implique

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \gamma f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i x_i\right) + \lambda_n f(x_n).$$

Par suite, il résulte de l'hypothèse de récurrence que

$$f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f(x_i).$$

D'où

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

La propriété est donc vérifiée pour n. On a ainsi démontré, par induction sur n, que la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Pour démontrer la réciproque, il suffit de prendre $n = 2$ et de poser $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$.

■

5.5.4 Lemme

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ une fonction convexe. Alors, pour tout triplet d'éléments $x < y < z$ de I, on a :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $x < y < z$ trois éléments quelconques de I. Alors, en écrivant y sous la forme

$$y = \frac{z-y}{z-x}\, x + \frac{y-x}{z-x}\, z$$

et en utilisant la convexité de f, on obtient (§ 5.5.3) que

$$f(y) \leqslant \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z).$$

Par suite, en remarquant que

$$\frac{z-y}{(z-x)(y-x)} = \frac{1}{y-x} - \frac{1}{z-x} \quad \text{et} \quad \frac{y-x}{(z-x)(z-y)} = \frac{1}{z-y} - \frac{1}{z-x};$$

on déduit de cette inégalité que

$$\frac{f(y)}{y-x} \leqslant \frac{f(x)}{y-x} - \frac{f(x)}{z-x} + \frac{f(z)}{z-x}$$

et

$$\frac{f(y)}{z-y} \leqslant \frac{f(x)}{z-x} + \frac{f(z)}{z-y} - \frac{f(z)}{z-x}.$$

Ainsi,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

■

5.5.5 Dérivabilité et continuité des fonctions convexes

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ une fonction convexe. Alors, f est continue sur I et admet en tout point de cet intervalle une dérivée à droite et une dérivée à gauche. De plus, pour tout couple d'éléments $x_1 < x_2$ de I, on a :

$$f'_g(x_1) \leqslant f'_d(x_1) \leqslant f'_g(x_2) \leqslant f'_d(x_2).$$

DÉMONSTRATION. Soit $x_0 \in I$. Alors, d'après le lemme 5.5.4, on obtient que pour tout couple d'éléments $x \leqslant y$ de $\{x \in I : x \neq x_0\}$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}.$$

D'où, en utilisant le corollaire 4.2.35, on peut affirmer que les deux nombres réels $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ existent et que $f'_g(x_0) \leqslant f'_d(x_0)$.

Par suite, en remarquant que tout $x \neq x_0$ de I :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0),$$

il résulte de l'existence des nombres $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ que

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0);$$

ce qui entraîne que la fonction f est continue au point x_0.

A présent, supposons que $x_1 < x_2$ soient deux éléments de I. Alors, en utilisant de nouveau le lemme 5.5.4, on obtient que pour tout couple d'éléments x, y de I vérifiant $x_1 < x < y < x_2$:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(y)-f(x_2)}{y-x_2};$$

ce qui implique, du fait de l'existence des deux nombres $f'_d(x_1)$ et $f'_g(x_2)$, que $f'_d(x_1) \leqslant f'_g(x_2)$. ■

5.5.6 Critère de convexité pour une fonction continue

On vient de voir qu'une fonction convexe est continue; mais par contre, il est facile de vérifier que la réciproque n'est pas exacte. Néanmoins, il existe un critère nous permettant de savoir si une fonction continue est convexe. Ce critère est le suivant :

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ une fonction continue sur I telle que pour tout couple d'éléments x, y de I, on ait :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(f(x)+f(y)).$$

Alors, la fonction f est convexe.

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde et supposons que f ne soit pas convexe. Alors, il existe deux éléments $a < b$ de I et un nombre réel $\alpha \in]0, 1[$ tels que

$$f(\alpha a + (1-\alpha)b) > \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b).$$

Par suite, en posant

$$\lambda_1 = \operatorname{Sup}\{\lambda \in [0, \alpha[: f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\}$$

et

$$\lambda_2 = \operatorname{Inf}\{\lambda \in]\alpha, 1] : f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\}$$

on obtient, par la continuité de la fonction f sur $[a, b]$, que

$$\lambda_1 < \lambda_2$$
$$f(\lambda_1 a + (1-\lambda_1)b) = \lambda_1 f(a) + (1-\lambda_1)f(b)$$
$$f(\lambda_2 a + (1-\lambda_2)b) = \lambda_2 f(a) + (1-\lambda_2)f(b)$$

et que pour tout $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) > \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

Mais, en posant

$$x_1 = \lambda_1 a + (1-\lambda_1)b, \quad x_2 = \lambda_2 a + (1-\lambda_2)b \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2},$$

on obtient que

$$\beta f(a) + (1-\beta)f(b) = \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)) \geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = f(\beta a + (1-\beta)b).$$

On aboutit donc à une contradiction; ce qui nous permet de conclure que la fonction f est convexe. ■

5.5.7 Exemple

La fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = |x|$ est convexe; car pour tout couple de nombres réels x et y, on a :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{|x+y|}{2} \leqslant \frac{|x|}{2} + \frac{|y|}{2} = \frac{1}{2}(f(x)+f(y)).$$

5.5.8 Caractérisation d'une fonction différentiable et convexe

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ une fonction différentiable sur I. Alors, la fonction f est convexe si et seulement si f' est une fonction croissante sur I.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que f' soit croissante sur I et soit $a < b$ deux éléments de I et λ un nombre réel tel que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Ainsi, en posant

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b,$$

on obtient, en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f, qu'il existe deux nombres x_1 et x_2 tels que

$$f(a) = f(x) + (a-x)f'(x_1) \qquad \text{avec} \quad a \leqslant x_1 \leqslant x$$

et

$$f(b) = f(x) + (b-x)f'(x_2) \qquad \text{avec} \quad x \leqslant x_2 \leqslant b;$$

ceci entraîne, du fait que f' est croissante sur I, que

$$\begin{aligned}\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) &= f(\lambda a + (1-\lambda)b) + \lambda(1-\lambda)(b-a)(f'(x_2) - f'(x_1)) \\ &\geqslant f(\lambda a + (1-\lambda)b).\end{aligned}$$

On a ainsi démontré que f est convexe.

Réciproquement, supposons que f soit convexe. Alors, en utilisant le résultat démontré au paragraphe 5.5.5, on obtient que pour tout couple d'éléments $x < y$ de I :

$$f'(x) = f'_d(x) \leqslant f'_g(y) = f'(y);$$

ce qui revient à dire que la fonction f' est croissante sur I. ■

5.5.9 Corollaire

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ une fonction convexe, différentiable sur I. Alors, la fonction f' est continue sur I.

DÉMONSTRATION. La fonction f étant convexe et différentiable sur I, sa dérivée est croissante sur I; ce qui implique, d'après le corollaire 5.2.8, que f' est une fonction continue sur I. ■

5.5.10 Corollaire

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ une fonction deux fois différentiable sur I. Alors, la fonction f est convexe si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que f' est une fonction croissante sur I si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, et d'utiliser le résultat du paragraphe 5.5.8. ■

5.6 ÉTUDE DES FONCTIONS

5.6.1 Asymptotes

Soit f une fonction de E dans F et C le graphique de cette fonction relativement à deux axes de coordonnées perpendiculaires $0x$ et $0y$.

Si $\lim\limits_{x\to c-} f(x) = \pm\infty$ ou si $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = \pm\infty$, nous dirons que la droite d'équation $x = c$ est une *asymptote verticale* de C (fig. 5.11).

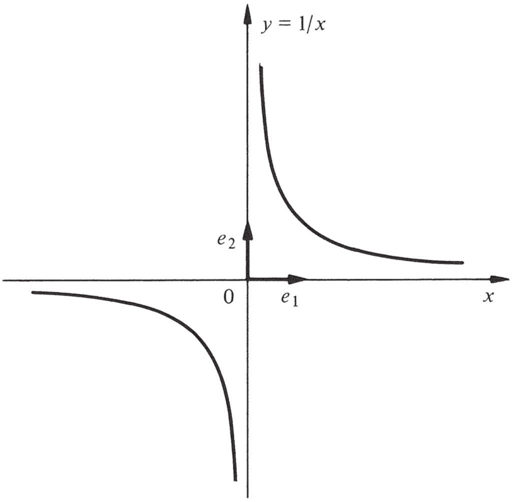


Fig. 5.11

Lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x))/x = a$, nous dirons que C admet la droite d'équation $y = ax$ pour *direction asymptotique.*

Si $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = 0$, nous dirons que la droite d'équation $y = ax + b$ est une *asymptote oblique* de C (fig. 5.12). Dans le cas particulier où $a = 0$, nous dirons que la droite d'équation $y = b$ est une *asymptote horizontale* de C (fig. 5.13). D'autre part, par un simple calcul, on obtient que

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{et} \qquad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax).$$

Géométriquement, dire que la droite d d'équation $y = ax + b$ est une *asymptote oblique* de C signifie que la distance du point $P_1 = (x, ax + b)$ au point $P_2 = (x, f(x))$ tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini.

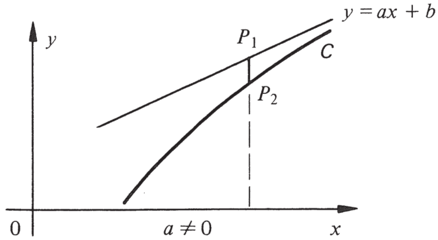


Fig. 5.12

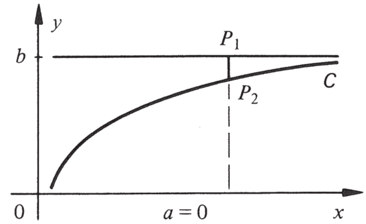


Fig. 5.13

Si $\lim_{x\to\infty} (f(x)/x) = a$ et si $\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, nous dirons que C possède une *branche parabolique* de direction asymptotique $y = ax$.

5.6.2 Remarque

Le graphique C de la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

admet la droite d'équation $y = 0$ pour asymptote horizontale. Etant donné que C coupe l'axe $0x$ aux points d'abscisse $x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, cet exemple nous montre qu'une courbe C peut très bien couper son asymptote un nombre infini de fois.

5.6.3 Schéma général de l'étude des fonctions

L'étude des fonctions se ramène généralement à déterminer :

- si la fonction f est paire, impaire ou périodique;
- les points de discontinuité de la fonction f;
- la limite de f aux points frontières de son domaine de définition ainsi qu'en ses points de discontinuité;
- la dérivée de f;
- le domaine de définition $D(f')$ de f';
- le signe de f';
- les points stationnaires de f;
- les points de discontinuité de f';
- la limite de f' aux points frontières de $D(f')$ ainsi qu'en ses points de discontinuité;
- les points d'inflexion du graphique de f;
- les asymptotes du graphique de f;
- le tableau de variations de f.

Cette étude permet de tracer le graphique C de la fonction f.

5.6.4 Exemple

En suivant le schéma donné au paragraphe 5.6.3, nous allons étudier la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}.$$

Cette fonction n'est ni paire, ni impaire et ni périodique. Par contre, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} = \frac{x^3 - 2}{x^3}\ ; \qquad D(f') = \mathbb{R}^*$$

Si $x \in]-\infty, 0[\cup]\sqrt[3]{2}, +\infty[: f'(x) > 0$

Si $x \in]0, \sqrt[3]{2}[: f'(x) < 0$

L'unique point stationnaire de f est $x = \sqrt[3]{2}$.

$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0-} f'(x) = +\infty, \lim_{x \to 0+} f'(x) = -\infty$$

Etant donné que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f''(x) = \frac{6}{x^4} > 0,$$

le graphique C de la fonction f ne possède aucun point d'inflexion (§ 5.4.16). La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale de C. La droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de C.

x	$-\infty$		0			$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	1	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Tableau 5.14

$$m = f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

La fonction f admet un minimum local au point $x = \sqrt[3]{2}$.

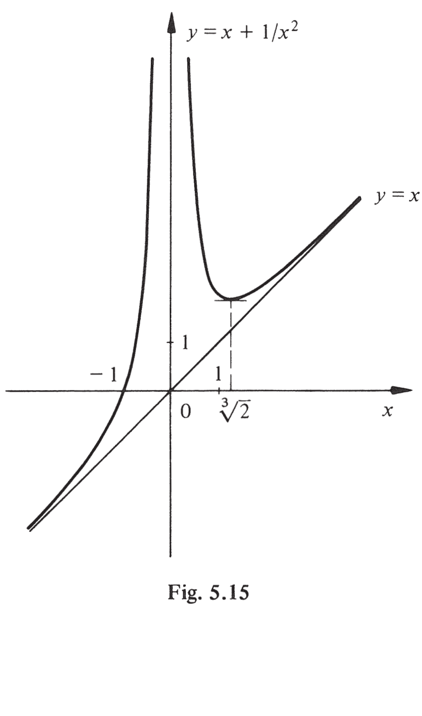


Fig. 5.15

5.7 EXERCICES

5.7.1 Calculer les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 5x} - \dfrac{1}{5}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right)^2}{x\cos x - \sin x}$ 4) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1})$.

5.7.2 Trouver l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = \operatorname{Arctg}(\sqrt{x^2+1})$ au point d'abscisse $x = 0$.

5.7.3 Pour quelles valeurs de l'entier relatif p, la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^p \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

admet-elle une dérivée au point $x = 0$?

5.7.4 Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que la fonction $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est différentiable sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(0)$.

5.7.5 Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable au point $x = 0$ et qu'elle est discontinue en tout autre point.

5.7.6 Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable au point $x = 0$.
1) Montrer que $f'(0) = \lim\limits_{n\to +\infty} n(f(1/n) - f(0))$.
2) En donnant un contre-exemple, montrer que l'existence de cette limite n'implique pas nécessairement l'existence de $f'(0)$.

5.7.7 Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}$. Montrer que
1) f paire implique f' impaire.
2) f impaire entraîne f' paire.
3) f périodique implique f' périodique.

5.7.8 Soit n un entier positif et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois différentiable sur $\mathbb{R}$.
1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \right) f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x).$$

(Cette égalité est appelée la *formule de Leibniz*).
2) En prenant $f(x) = g(x) = x^n$, démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \right)^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

5.7.9 Montrer que l'équation

$$\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-2)^5} = 0$$

possède exactement une solution dans $\mathbb{R}$.

5.7.10 Trouver le maximum et le minimum de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/(1+x^2)$.

5.7.11 Calculer le maximum et le minimum de la fonction $f : [\pi/2, 2\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin(1/x)$.

5.7.12 A chaque entier naturel n, associons la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n(1-x)$. Montrer que la suite (f_n) est uniformément convergente.

5.7.13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout couple de nombres réels x et y: $|f(x) - f(y)| \leqslant (x-y)^2$. Montrer que la fonction f est constante.

5.7.14 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}$ telle que $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| < 1$.
1) Montrer que la fonction f possède un unique point fixe.
2) Que devient ce résultat si $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| = 1$?

5.7.15 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 < m \leqslant f'(x) \leqslant M < +\infty$. En utilisant l'exercice précédent et le théorème du point fixe de Banach (§ 4.3.38), montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{M} f(x_n) \quad \text{et} \quad x_0 = 0$$

converge vers l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$.

5.7.16 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) \cdot f'(1) < 0$. Montrer que la fonction f' s'annule au moins une fois dans l'intervalle ouvert $]0,1[$.

5.7.17 Soit $a_0, \ldots, a_{n-1}$ n nombres réels et soit $c_1, \ldots, c_p$ les racines réelles (toutes distinctes) du polynôme $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Montrer que $p \leqslant n$.

5.7.18 Soit $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et bornée sur $]0,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=l$. Montrer que $l=0$.

5.7.19 Soit $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $]0,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

5.7.20 Soit $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $]0,+\infty[$.
1) En supposant que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)/x)=0$.
2) En déduire que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=l$ avec $l>0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)/x)=l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

5.7.21 Soit $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $]-1,1[$ telle que $f(0)=0$. De plus, on suppose que pour tout $x\in]-1,0[\cup]0,1[: f'(x)\neq 0$. Montrer que si $\lim\limits_{x\to 0} (f(x)/f'(x))=l$, alors $l=0$.

5.7.22 Soit $f:]-2,2[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment différentiable sur $]-2,2[$ telle que $f(0)=0$. Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad x_0 = 0.$$

5.7.23 Soit $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment différentiable sur $]-1,1[$ telle que $f''(0)\neq 0$, et soit $\theta:]-1,1[\to]0,1[$ une fonction pour laquelle, pour tout $x\in]-1,1[$, on puisse écrire l'égalité suivante : $f(x)=f(0)+x\,f'(x\theta(x))$. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \theta(x)=1/2$.

5.7.24 Soit $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=2x+\operatorname{Arccos}(x^2)$. Trouver son développement limité d'ordre 10 autour de zéro.

5.7.25 Soit $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=1/(1+x^2)$. Trouver son développement limité d'ordre n autour de zéro.

5.7.26 Montrer que pour tout $x\in[-1,1]: 1-\dfrac{x^2}{2!}\leqslant \cos x\leqslant 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}$.

5.7.27 Montrer que pour tout $x\in[0,\pi/2]: x-\dfrac{x^3}{3!}\leqslant \sin x\leqslant x-\dfrac{x^3}{3!}\cos x$.

5.7.28 Montrer que pour tout $x\geqslant 0: 1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}\leqslant\sqrt{1+x}\leqslant 1+\dfrac{x}{2}$.

5.7.29 Soit $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$ une fonction quatre fois continûment différentiable sur $]-1,1[$ telle que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin x - x} = 1.$$

Trouver son développement limité d'ordre 3 autour de zéro.

5.7.30 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes.
1) Montrer que la fonction $f+g$ est convexe.
2) Obtient-on le même résultat pour la fonction fg ?

5.7.31 Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. Montrer que si g est croissante sur $\mathbb{R}$, alors la fonction composée $g \circ f$ est convexe.

5.7.32 Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe, croissante et non constante. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

5.7.33 Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $\lim_{x \to +\infty} (f(x)/x) = l$ avec $l \leqslant 0$. Montrer que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

5.7.34 Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x^4(x-1))^{1/5}$. Faire sa représentation graphique.

5.7.35 Etudier la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \operatorname{Arccos}(4x^3 - 3x)$. Faire sa représentation graphique.

6. Fonction exponentielle et fonction logarithme

6.1 FONCTION EXPONENTIELLE

6.1.1 Définition du nombre réel e^x

En utilisant le critère de d'Alembert (§ 3.2.9), on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $x^n/n!$ est absolument convergente; ce qui nous autorise à définir le nombre réel e^x en posant

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (\text{par convention } 0^0 = 0! = 1).$$

Il découle immédiatement de cette définition et des résultats obtenus aux paragraphes 2.4.3 et 2.4.6, que

$$e^1 = e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\ldots .$$

6.1.2 Propriétés du nombre réel e^x

– Pour tout couple de nombres réels x et y : $e^{x+y} = e^x\, e^y$;

– pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ et $e^x > 0$.

DÉMONSTRATION. Nous allons d'abord démontrer que $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$. Dans ce but, considérons pour tout $z \in \mathbb{R}$ la suite auxiliaire $(\beta_n(z))$ définie par

$$\beta_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}.$$

Ainsi, en regroupant les termes, on obtient que

$$\beta_n(x)\,\beta_n(y) = \sum_{m=0}^{2n} \left(\sum_{\substack{k+p=m \\ 0 \leqslant k,\, p \leqslant n}} \frac{x^k}{k!}\,\frac{y^p}{p!} \right).$$

Par conséquent, comme

$$\sum_{\substack{k+p=m \\ k,\, p \geqslant 0}} \frac{x^k}{k!}\,\frac{y^p}{p!} = \frac{1}{m!} \sum_{\substack{k+p=m \\ k,\, p \geqslant 0}} \frac{m!}{k!\,p!}\, x^k\, y^p = \frac{1}{m!}\,(x+y)^m ,$$

on peut écrire

$$\beta_n(x)\beta_n(y) = \sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{\substack{k+p=m\\ k,p\geqslant 0}} \frac{x^k}{k!}\,\frac{y^p}{p!}\right) + \sum_{m=n+1}^{2n}\left(\sum_{\substack{k+p=m\\ 0\leqslant k,p\leqslant n}} \frac{x^k}{k!}\,\frac{y^p}{p!}\right)$$

$$= \beta_n(x+y) + \sum_{m=n+1}^{2n}\left(\sum_{\substack{k+p=m\\ 0\leqslant k,p\leqslant n}} \frac{x^k}{k!}\,\frac{y^p}{p!}\right).$$

De nouveau, en utilisant la formule du binôme de Newton, on a:

$$\left|\sum_{\substack{k+p=m\\ 0\leqslant k,p\leqslant n}} \frac{x^k}{k!}\,\frac{y^p}{p!}\right| \leqslant \sum_{\substack{k+p=m\\ k,p\geqslant 0}} \frac{|x|^k}{k!}\,\frac{|y|^p}{p!} = \frac{1}{m!}\,(|x|+|y|)^m\,;$$

ce qui implique que

$$\left|\sum_{m=n+1}^{2n}\left(\sum_{\substack{k+p=m\\ 0\leqslant k,p\leqslant n}} \frac{x^k}{k!}\,\frac{y^p}{p!}\right)\right| \leqslant \beta_{2n}(|x|+|y|) - \beta_n(|x|+|y|).$$

Finalement, comme la suite $(\beta_n(|x|+|y|))$ converge, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{m=n+1}^{2n}\left(\sum_{\substack{k+p=m\\ 0\leqslant k,p\leqslant n}} \frac{x^k}{k!}\,\frac{y^p}{p!}\right) = 0\,;$$

ceci nous permet de conclure que

$$e^x e^y = \lim_{n\to+\infty}(\beta_n(x)\,\beta_n(y)) = \lim_{n\to+\infty}\beta_n(x+y) = e^{x+y}.$$

La première propriété est ainsi démontrée. Pour établir la seconde, il suffit de constater que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$1 = e^0 = e^{x-x} = e^x \cdot e^{-x}$$

et

$$e^x = e^{(x/2+x/2)} = (e^{x/2})^2\,.$$

■

6.1.3 Définition de la fonction exponentielle

La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, notée exp, qui, à tout élément x de $\mathbb{R}$, fait correspondre le nombre réel positif e^x, est appelée fonction *exponentielle* (fig. 6.1).

6.1.4 Continuité et dérivabilité de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est différentiable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(\exp)'(x) = \exp(x)$.

DÉMONSTRATION. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < |x - x_0| < 1$, on obtient :

$$\left| \left(\frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} \right) - 1 \right| \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|x-x_0|^{k-1}}{k!} \leqslant e \cdot |x - x_0|;$$

ce qui implique que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = 1.$$

D'où

$$(\exp)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0}.$$

■

6.1.5 Corollaire

La fonction exponentielle est un élément de l'ensemble $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$.

6.1.6 Propriétés de la fonction exponentielle

- $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$;
- la fonction exponentielle est convexe strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

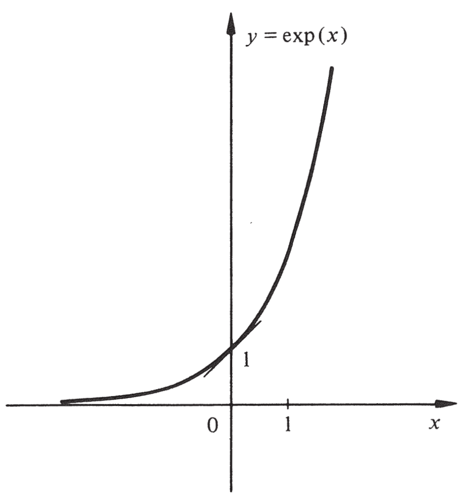


Fig. 6.1

DÉMONSTRATION. En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout entier $p > 0$:

$$e^x = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \geqslant \frac{x^p}{p!},$$

on obtient que $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$; ce qui implique que

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = \lim_{x \to +\infty} \exp(-x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0.$$

D'autre part, puisque pout tout $x \in \mathbb{R}$: $(\exp)'(x) = (\exp)''(x) = e^x > 0$, la fonction exponentielle est convexe strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (§ 5.2.16 et 5.5.10); ce qui entraîne, du fait de sa continuité sur tout $\mathbb{R}$, qu'elle est injective et que $\exp(\mathbb{R})$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}_+^*$ (§ 4.3.25). Comme, de plus, $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$, on peut affirmer que $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$; ce qui revient à dire que la fonction exponentielle est surjective. D'où le résultat. ∎

6.2 FONCTION LOGARITHME

6.2.1 Fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle, étant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, admet une fonction réciproque, appelée fonction *logarithme népérien* et notée Log (fig. 6.2). Ainsi, par définition, la relation $y = \operatorname{Log} x$ est équivalente à : $x = e^y$.

En utilisant les résultats obtenus aux paragraphes 4.3.27 et 5.1.13, on peut affirmer que la fonction Log est différentiable strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par suite, en remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$x = e^{\operatorname{Log} x},$$

on obtient que

$$(\operatorname{Log})'(x) = \frac{1}{e^{\operatorname{Log} x}} = \frac{1}{x}.$$

Il est facile de déduire de cette égalité, que la fonction Log est un élément de l'ensemble $C^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

6.2.2 Propriétés de la fonction Log

- $\operatorname{Log} 1 = 0$ et $\operatorname{Log} e = 1$;
- pour tout couple x, y de nombres réels positifs:

  $$\operatorname{Log}(xy) = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y \quad \text{et} \quad \operatorname{Log}\left(\frac{x}{y}\right) = \operatorname{Log} x - \operatorname{Log} y\,;$$
- $\lim_{x \to 0+} \operatorname{Log} x = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{Log} x = +\infty$.

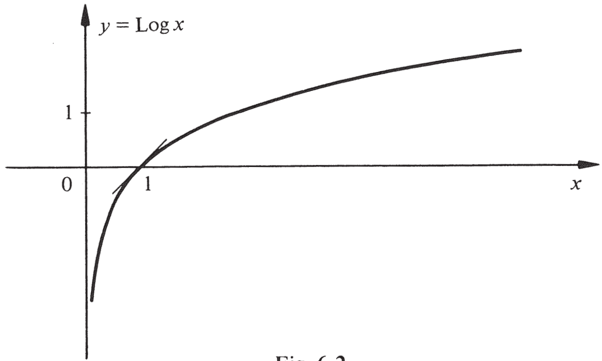


Fig. 6.2

DÉMONSTRATION. Posons $a = \text{Log}\ 1$ et $b = \text{Log}\ e$. Alors, $e^a = 1$ et $e^b = e$; ce qui entraîne que $a = 0$ et $b = 1$.

Soit x, y deux nombres réels positifs quelconques et posons $c = \text{Log}\, x + \text{Log}\, y$. Alors,

$$e^c = e^{(\text{Log}\, x + \text{Log}\, y)} = e^{\text{Log}\, x} \cdot e^{\text{Log}\, y} = xy \ ;$$

ce qui implique que $c = \text{Log}(xy)$. D'autre part, en remarquant que

$$0 = \text{Log}\ 1 = \text{Log}\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = \text{Log}\, y + \text{Log}\, \frac{1}{y} \ ,$$

on obtient que

$$\text{Log}\left(\frac{1}{y}\right) = -\text{Log}\, y.$$

D'où

$$\text{Log}\left(\frac{x}{y}\right) = \text{Log}\, x + \text{Log}\, \frac{1}{y} = \text{Log}\, x - \text{Log}\, y.$$

Pour démontrer que $\lim\limits_{x \to 0+} \text{Log}\, x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Log}\, x = +\infty$, il suffit de constater que la fonction Log n'est ni minorée, ni majorée sur $\mathbb{R}_+^*$ et d'utiliser les résultats obtenus aux paragraphes 4.2.23 et 4.2.34. ∎

6.2.3 Fonction logarithme de base $a > 0, a \neq 1$.

Pour tout nombre réel positif $a \neq 1$, la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, notée Log_a, qui, à tout élément x de $\mathbb{R}_+^*$, fait correspondre le nombre réel

$$\frac{\text{Log}\, x}{\text{Log}\, a} \ ,$$

est appelée fonction *logarithme de base a* (fig. 6.3 et 6.4).

Il découle immédiatement de cette définition que la fonction Log_a est un élément de l'ensemble $C^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(\text{Log}_a)'(x) = \frac{1}{x\, \text{Log}\, a} \ ;$$

ce qui implique que si $0<a<1$ (resp. $a>1$), la fonction Log_a est strictement décroissante (resp. strictement croissante) sur $\mathbb{R}_+^*$. D'autre part, les propriétés de la fonction Log_a sont identiques à celles de la fonction Log, à savoir :

– $\mathrm{Log}_a\, 1 = 0$ et $\mathrm{Log}_a\, a = 1$;

– pour tout couple x, y de nombres réels positifs :

$$\mathrm{Log}_a\,(xy) = \mathrm{Log}_a\, x + \mathrm{Log}_a\, y \quad \text{et} \quad \mathrm{Log}_a\left(\frac{x}{y}\right) = \mathrm{Log}_a\, x - \mathrm{Log}_a\, y\ ;$$

– si $0<a<1$: $\lim\limits_{x\to 0+} \mathrm{Log}_a\, x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Log}_a\, x = -\infty$;

– si $a>1$: $\lim\limits_{x\to 0+} \mathrm{Log}_a\, x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Log}_a\, x = +\infty$.

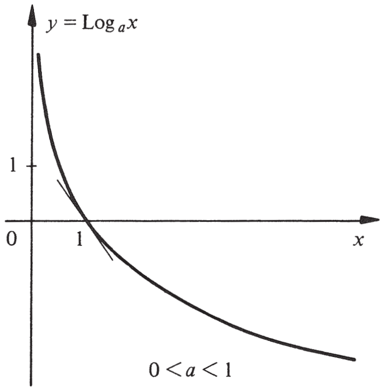


Fig. 6.3

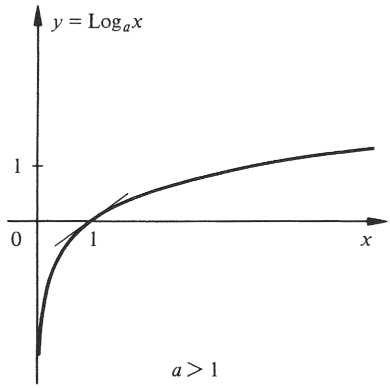


Fig. 6.4

6.2.4 Remarque

La fonction logarithme de base e n'est autre que la fonction logarithme népérien.

6.3 FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE $a>0$

6.3.1 Définition du nombre réel a^x

Soit a un nombre réel positif. En remarquant que pour tout nombre rationnel r :

$$a^r = e^{r\,\mathrm{Log}\,a},$$

on est amené tout naturellement à prolonger la notion de puissance à exposant rationnel à celle de puissance à exposant réel x, en posant par définition :

$$a^x = e^{x\,\mathrm{Log}\,a}.$$

6.3.2 Propriétés du nombre réel a^x

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors,

– pour tout $x \in \mathbb{R}$: $a^x > 0$ et $\mathrm{Log}\, a^x = x\,\mathrm{Log}\, a$;

– pour tout couple de nombres réels x et y :

$$a^{x+y} = a^x\, a^y \quad \text{et} \quad (a^x)^y = a^{xy}\,;$$

– si $b \in \mathbb{R}_+^*$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(ab)^x = a^x\, b^x \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}\,.$$

DÉMONSTRATION. Soit x, y deux nombres réels quelconques. Alors,

$$a^{x+y} = e^{(x+y)\operatorname{Log} a} = e^{(x \operatorname{Log} a + y \operatorname{Log} a)} = e^{x \operatorname{Log} a}\, e^{y \operatorname{Log} a} = a^x\, a^y\,.$$

D'autre part, en remarquant que

$$\operatorname{Log} a^x = \operatorname{Log} e^{x \operatorname{Log} a} = x \operatorname{Log} a\,,$$

on obtient que

$$(a^x)^y = e^{y \operatorname{Log} a^x} = e^{(xy)\operatorname{Log} a} = a^{xy}\,.$$

Supposons à présent que $b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$(ab)^x = e^{x \operatorname{Log}(ab)} = e^{x(\operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b)} = e^{x \operatorname{Log} a} . e^{x \operatorname{Log} b} = a^x\, b^x$$

et

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = e^{x \operatorname{Log}(a/b)} = e^{x(\operatorname{Log} a - \operatorname{Log} b)} = e^{x \operatorname{Log} a}\, \frac{1}{e^{x \operatorname{Log} b}} = \frac{a^x}{b^x}\,. \qquad \blacksquare$$

6.3.3 Fonction exponentielle de base $a > 0$

Pour tout nombre réel $a > 0$, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, notée $\exp_a$, qui, à tout élément x de $\mathbb{R}$, fait correspondre le nombre réel positif a^x, est appelée fonction *exponentielle de base a* (fig. 6.5 et 6.6).

Il découle immédiatement de cette définition, que la fonction $\exp_a$ est un élément de l'ensemble $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\exp_a)'(x) = a^x \operatorname{Log} a\,;$$

ce qui implique que, si $0 < a < 1$ (resp. $a > 1$), la fonction $\exp_a$ est strictement décroissante (resp. strictement croissante) sur $\mathbb{R}$.

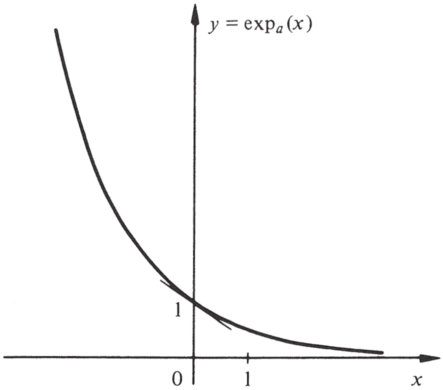
D'autre part, si $a \neq 1$, on constate que la relation $a^x = y$ est équivalente à : $x = \operatorname{Log}_a y$; ce qui revient à dire que $\exp_a$ n'est rien d'autre que la fonction réciproque de Log_a.

Les propriétés de la fonction $\exp_a$ sont identiques à celles de la fonction exp, à savoir :

– la fonction $\exp_a$ est convexe ;

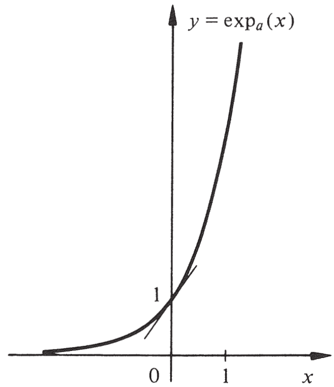
– si $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp_a(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp_a(x) = 0$;

– si $a > 1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp_a(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp_a(x) = +\infty$.



$0 < a < 1$

Fig. 6.5



$a > 1$

Fig. 6.6

6.3.4 Autre expression du nombre réel e^x

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

DÉMONSTRATION. Soit x un nombre réel donné et considérons la fonction auxiliaire $f_x :]\,|x|+1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_x(t) = \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t = e^{t \operatorname{Log}(1 + x/t)}.$$

En utilisant la règle de Bernoulli-L'Hospital, on obtient que

$$\lim_{t \to +\infty} t \operatorname{Log}\left(1 + \frac{x}{t}\right) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\operatorname{Log}(1 + x/t)}{(1/t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{x}{1 + x/t} = x.$$

D'où

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} f_x(n) = \lim_{t \to +\infty} f_x(t) = e^x. \qquad \blacksquare$$

6.4 FONCTION PUISSANCE

6.4.1 Fonction puissance

Soit α un nombre réel donné. Alors, la fonction f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, qui, à tout élément x de $\mathbb{R}_+^*$, fait correspondre le nombre réel $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} x}$, est appelé fonction *puissance* (fig. 6.7).

Il découle immédiatement de cette définition que la fonction puissance est un élément de l'ensemble $C^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1};$$

ce qui implique que si $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$), la fonction puissance est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $\mathbb{R}_+^*$.

6.4.2 Propriétés de la fonction puissance

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors,

– pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $x^\alpha > 0$ et $\operatorname{Log} x^\alpha = \alpha \operatorname{Log} x$;

– pour tout couple de nombres réels α et β :

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \quad \text{et} \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} ;$$

– si $y \in \mathbb{R}_+^*$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad \text{et} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}.$$

De plus,

– si $\alpha \leqslant 0$ ou $\alpha \geqslant 1$, la fonction puissance est convexe ;

– si $\alpha < 0$: $\lim\limits_{x \to 0+} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$;

– si $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x \to 0+} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$.

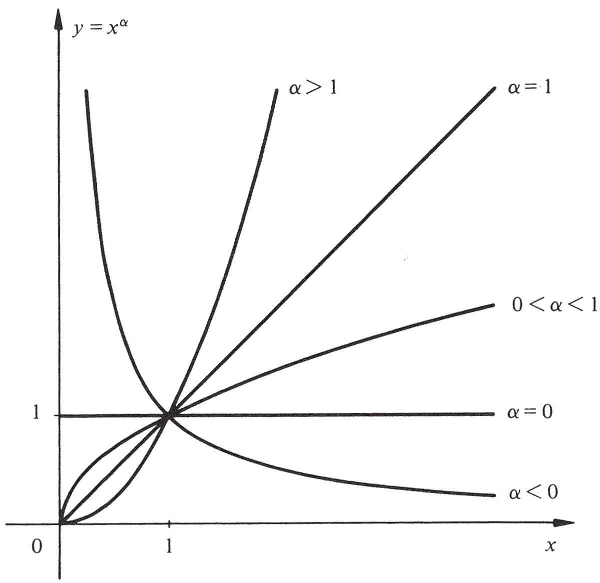


Fig. 6.7

6.4.3 Croissance comparée des fonctions exponentielle, logarithme et puissance

Soit α un nombre réel positif. Alors,

– si $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = 0$;

– si $a > 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$;

– $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{Log}_a x}{x^\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0+} x^\alpha \operatorname{Log}_a x = 0$.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que $a > 1$. Le corps des nombres réels étant archimédien, on sait qu'il existe un entier naturel n tel que $n > \alpha$; ce qui implique que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{n-\alpha} = +\infty$. Par suite, en remarquant que pour tout $x > 1$:

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x \operatorname{Log} a)^k}{k!} \geqslant \frac{(\operatorname{Log} a)^n}{n!} \frac{x^n}{x^\alpha} = \frac{(\operatorname{Log} a)^n}{n!} x^{n-\alpha},$$

on obtient que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

Supposons à présent que $0 < a < 1$. Alors, en posant $b = 1/a$, on a:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{b^x\, x^\alpha} = 0.$$

Les deux premiers résultats sont ainsi démontrés. Pour établir les deux suivants, nous allons utiliser la règle de Bernoulli-L'Hospital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{Log}_a x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha \operatorname{Log} a} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0.$$

et

$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha \operatorname{Log}_a x = \lim_{x \to 0+} \frac{\operatorname{Log}_a x}{(1/x^\alpha)} = \frac{-1}{\alpha \operatorname{Log} a} \lim_{x \to 0+} x^\alpha = 0.$$ ■

6.4.4 Inégalité de Hölder

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ $(2n)$ nombres réels positifs. Alors, pour tout couple p, q de nombres réels positifs vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

on a :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{1/q}.$$

Cette relation est appelée l'*inégalité de Hölder*. Lorsque $p = q = 2$, il est d'usage de l'appeler l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*.

DÉMONSTRATION. Etant donné que $p > 1$, la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^p$ est convexe. Ainsi, en posant dans la formule donnée au paragraphe 5.5.3:

$$x_i = a_i\, b_i^{-q/p} \quad \text{et} \quad \lambda_i = \frac{b_i^q}{\sum_{j=1}^n b_j^q},$$

et en tenant compte que $1/p + 1/q = 1$, on obtient que

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i\, b_i}{\sum_{j=1}^n b_j^q}\right)^p = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{b_i^q}{\sum_{j=1}^n b_j^q}\right) a_i\, b_i^{-q/p}\right)^p$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^n \left(\frac{b_i^q}{\sum_{j=1}^n b_j^q}\right) (a_i\, b_i^{-q/p})^p = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

D'où

$$\sum_{i=1}^n a_i\, b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right) \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{i=1}^n b_i^q}\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}. \qquad \blacksquare$$

6.4.5 Inégalité de Minkowski

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ $(2n)$ nombres réels positifs. Alors, pour tout nombre réel $p > 1$, on a:

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}.$$

Cette relation est appelée l'*inégalité de Minkowski*.

DÉMONSTRATION. En utilisant l'inégalité de Hölder avec $q = p/(p-1)$, on obtient les deux inégalités suivantes:

$$\sum_{i=1}^n a_i\,(a_i + b_i)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{(p-1)/p}$$

et

$$\sum_{i=1}^n b_i\,(a_i + b_i)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{(p-1)/p};$$

ce qui entraîne que

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p = \sum_{i=1}^{n} a_i (a_i+b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i (a_i+b_i)^{p-1}$$

$$\leqslant \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p\right)^{(p-1)/p}.$$

Par suite, en divisant les deux membres de cette dernière inégalité par $(\Sigma_{i=1}^n (a_i + b_i)^p)^{(p-1)/p}$, on obtient l'inégalité de Minkowski. ■

6.5 FONCTIONS HYPERBOLIQUES

6.5.1 Définitions

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

- $\operatorname{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\operatorname{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\operatorname{th}x = \dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- $\operatorname{coth}x = \dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x} = \dfrac{1}{\operatorname{th}x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ si $x \neq 0$.

Il résulte immédiatement de ces définitions que pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch}x \geqslant 1, \quad |\operatorname{th}x| < 1 \quad \text{et } |\operatorname{coth}x| > 1.$$

6.5.2 Fonctions sinus hyperbolique

La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée sh, qui, à tout élément x de $\mathbb{R}$, fait correspondre le nombre réel $\operatorname{sh}x$, est appelée fonction *sinus hyperbolique* (fig. 6.8).

Il découle immédiatement de la définition que

- sh est une fonction impaire ;
- $\operatorname{sh} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(\operatorname{sh})'(x) = \operatorname{ch}x$.

De cette dernière propriété et de l'inégalité $\operatorname{ch}x \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on déduit que la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme, de plus,

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty,$$

on peut affirmer que la fonction sinus hyperbolique est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. D'autre part, son graphique admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 0$.

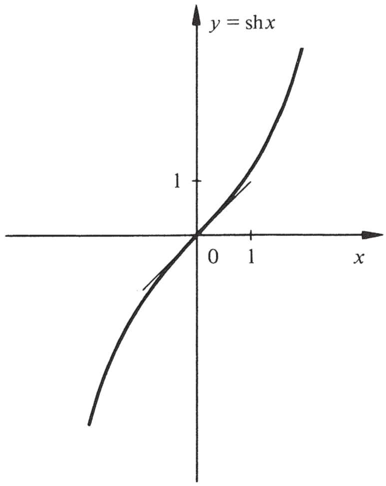


Fig. 6.8

6.5.3 Fonction cosinus hyperbolique

La fonction de $\mathbb{R}$ dans $[1, +\infty[$, notée ch, qui, à tout élément x de $\mathbb{R}$, fait correspondre le nombre réel $\operatorname{ch} x$, est appelée fonction *cosinus hyperbolique* (fig. 6.9).

Il résulte immédiatement de la définition que

- ch est une fonction paire ;
- $\operatorname{ch} \in C^\infty(\mathbb{R}, [1, +\infty[)$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(\operatorname{ch})'(x) = \operatorname{sh} x$;
- $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$.

Ainsi, grâce à la troisième propriété, la fonction cosinus hyperbolique est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; ce qui implique qu'elle atteint son minimum au point $x = 0$.

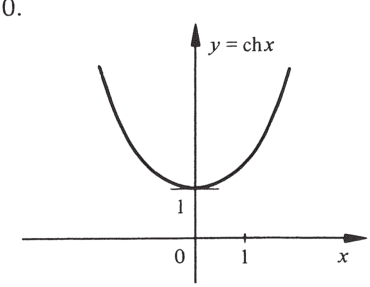


Fig. 6.9

6.5.4 Fonction tangente hyperbolique

La fonction de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$, notée th, qui, à tout élément x de $\mathbb{R}$, fait correspondre le nombre réel $\operatorname{th} x$, est appelée fonction *tangente hyperbolique* (fig. 6.10).

Il découle immédiatement de la définition que

- th est une fonction impaire ;
- $\operatorname{th} \in C^\infty(\mathbb{R},]-1,1[)$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(\operatorname{th})'(x) = 1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

De cette dernière propriété, on déduit que la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme, de plus,

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = 1,$$

on peut affirmer que la fonction tangente hyperbolique est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. D'autre part, son graphique admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 0$.

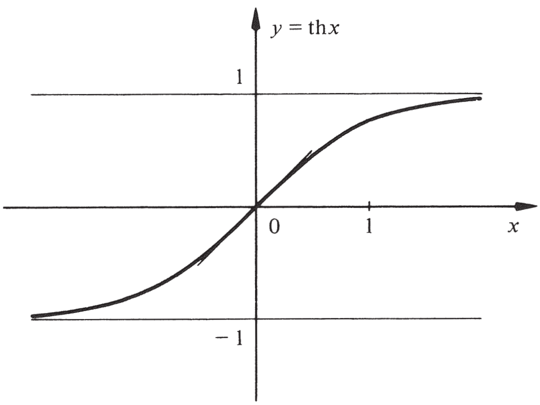


Fig. 6.10

6.5.5 Fonction cotangente hyperbolique

La fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $F =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, notée coth, qui, à tout élément x de $\mathbb{R}$, fait correspondre le nombre réel $\operatorname{coth} x$, est appelée fonction *cotangente hyperbolique* (fig. 6.11).

Il résulte immédiatement de la définition que

- coth est une fonction impaire ;
- $\operatorname{coth} \in C^\infty(\mathbb{R}^*, F)$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $(\operatorname{coth})'(x) = 1 - \operatorname{coth}^2 x = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

De cette dernière propriété, on déduit que la fonction coth est strictement décroissante sur chacun des intervalles ouverts $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Comme, de plus,

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{coth} x = -1, \quad \lim_{x \to 0-} \operatorname{coth} x = -\infty, \quad \lim_{x \to 0+} \operatorname{coth} x = +\infty \quad \text{et} \lim_{x \to +\infty} \operatorname{coth} x = 1,$$

on peut affirmer que la fonction contangente hyperbolique est une bijection de $\mathbb{R}^*$ dans F.

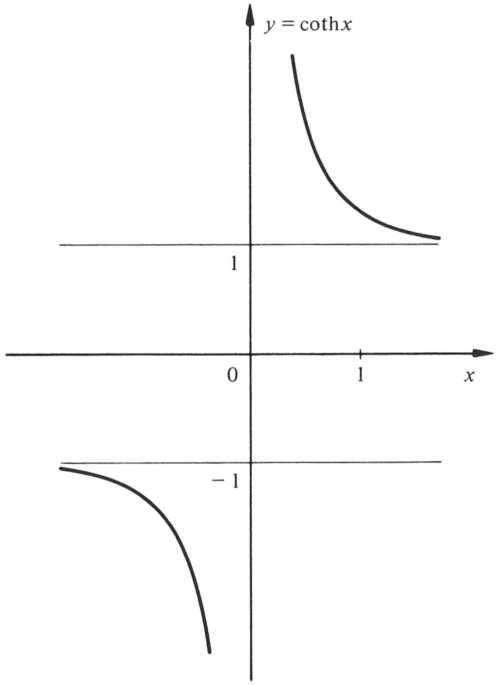


Fig. 6.11

6.6 FONCTIONS HYPERBOLIQUES RÉCIPROQUES

6.6.1 Fonction argument sinus hyperbolique

La fonction sh, étant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admet une fonction réciproque, appelée fonction *argument sinus hyperbolique* et notée Argsh (fig. 6.12). Ainsi, par définition, la relation $y = \text{Argsh}x$ est équivalente à : $x = \text{sh}y$; ce qui entraîne que la fonction Argsh est impaire.

En utilisant le résultat obtenu au paragraphe 5.1.13, on obtient que la fonction Argsh est différentiable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\text{Argsh})'(x) = \frac{1}{\text{ch}y} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{avec } y = \text{Argsh}x.$$

Il est facile de déduire de cette égalité que la fonction Argsh est un élément de l'ensemble $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; ce qui implique (§ 4.2.23 et § 4.2.24) que

$$\lim_{x\to-\infty} \text{Argsh}x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \text{Argsh}x = +\infty.$$

De plus, son graphique admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 0$ (§ 5.4.14).

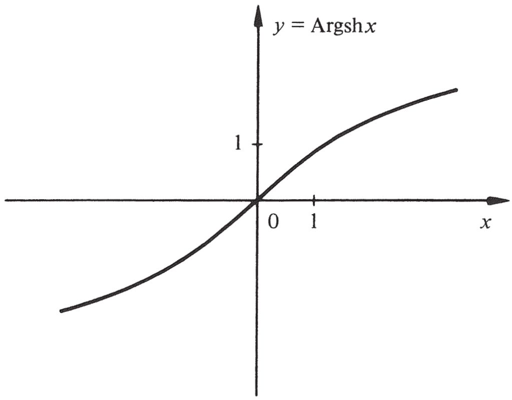


Fig. 6.12

6.6.2 Fonction argument cosinus hyperbolique

La fonction f : $[0, +\infty[\ \to [1, +\infty[$ définie par $f(x) = \text{ch}\,x$, étant surjective strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, admet une fonction réciproque f^{-1} : $[1, +\infty[\to[0, +\infty[$, appelée fonction *argument cosinus hyperbolique* et notée Argch (fig. 6.13). Ainsi, par définition, la relation $y = \text{Argch}x$ est équivalente à : $x = \text{ch}\,y$ et $y \geqslant 0$.

En utilisant le résultat obtenu au paragraphe 5.1.13, on obtient que la fonction Argch est différentiable sur $]1, +\infty[$ et que pour tout $x \in\ ]1, +\infty[$:

$$(\text{Argch})'(x) = \frac{1}{\text{sh}\,y} = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{avec} \quad y = \text{Argch}x$$

On déduit immédiatement de cette égalité que la fonction argument cosinus hyperbolique est strictement croissante sur $[1, +\infty[$; ce qui implique (§ 4.2.23) que $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Argch}x = +\infty$.

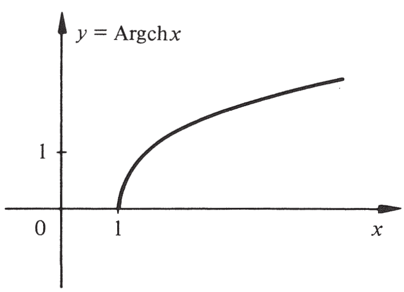


Fig. 6.13

6.6.3 Fonction argument tangente hyperbolique

La fonction th, étant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$, admet une fonction réciproque, appelée fonction *argument tangente hyperbolique* et notée Argth (fig. 6.14). Ainsi, par définition, la relation $y = \operatorname{Argth} x$ est équivalente à : $x = \operatorname{th} y$; ce qui entraîne que la fonction Argth est impaire.

En utilisant le résultat du paragraphe 5.1.13, on obtient que la fonction Argth est différentiable sur $]-1,1[$ et que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(\operatorname{Argth})'(x) = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1-x^2} \qquad \text{avec } y = \operatorname{Argth} x.$$

Il est facile de déduire de cette égalité que la fonction Argth est un élément de l'ensemble $C^\infty(]-1,1[, \mathbb{R})$ et qu'elle est strictement croissante sur $]-1,1[$; ce qui implique (§ 4.2.33 et § 4.2.34)

$$\lim_{x \to -1+} \operatorname{Argth} x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 1-} \operatorname{Argth} x = +\infty.$$

De plus, son graphique admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 0$ (§ 5.4.14).

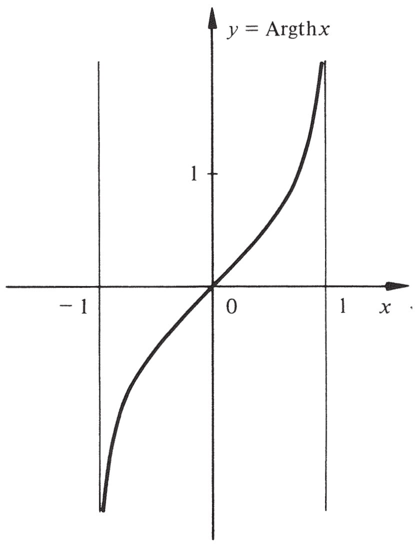


Fig. 6.14

6.6.4 Fonction argument cotangente hyperbolique

La fonction coth, étant une bijection de $\mathbb{R}^*$ dans $F =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, admet une fonction réciproque, appelée fonction *argument cotangente hyperbolique* et notée Argcoth (fig. 6.15). Ainsi, par définition, la relation $y = \operatorname{Argcoth} x$ est équivalente à : $x = \operatorname{coth} y$; ce qui entraîne que la fonction Argcoth est impaire.

En utilisant le résultat obtenu au paragraphe 5.1.13, on obtient que la fonction Argcoth est différentiable sur F et que pour tout $x \in F$:

$$(\text{Argcoth})'(x) = \frac{1}{1-\coth^2 y} = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{avec } y = \text{Argcoth} x.$$

On déduit facilement de cette égalité que la fonction Argcoth est un élément de l'ensemble $C^{\infty}(F, \mathbb{R}^*)$ et qu'elle est strictement décroissante sur chacun des intervalles ouverts $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$. De plus,

$$\lim_{x \to -\infty} \text{Argcoth} x = 0, \quad \lim_{x \to -1-} \text{Argcoth} x = -\infty, \quad \lim_{x \to 1+} \text{Argcoth} x = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} \text{Argcoth} x = 0.$$

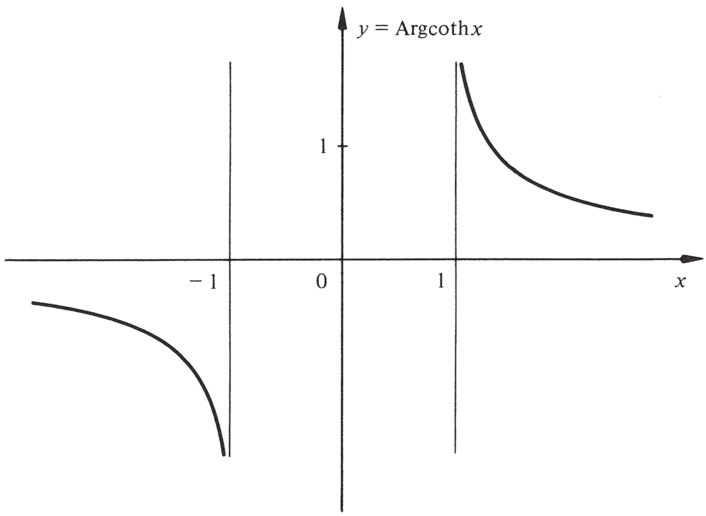


Fig. 6.15

6.6.5 Autre expression des fonctions hyperboliques réciproques

– pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{Argsh} x = \text{Log}\,(x + \sqrt{x^2+1})$$

– pour tout nombre réel $x \geqslant 1$:

$$\text{Argch} x = \text{Log}\,(x + \sqrt{x^2-1})$$

– pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\text{Argth} x = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+x}{1-x}$$

– pour tout nombre réel vérifiant $|x| > 1$:

$$\text{Argcoth} x = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{x+1}{x-1}.$$

DÉMONSTRATION. Nous nous contenterons d'établir la première de ces égalités, les trois autres s'obtenant de manière analogue.

Etant donné que la relation $y = \operatorname{Argsh} x$ est équivalente à

$$x = \operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{(e^y)^2 - 1}{2\,e^y},$$

on obtient, en multipliant les deux membres de cette égalité par $2\,e^y$, que e^y est la solution positive de l'équation $t^2 - 2xt - 1 = 0$. D'où

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1};$$

ce qui entraîne que

$$y = \operatorname{Log}(x + \sqrt{x^2 + 1}). \qquad \blacksquare$$

6.7 EXERCICES

6.7.1 Calculer les limites suivantes:

1) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x + 2^x)^{1/x}$

2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Argth} x - \operatorname{Arctg} x}{\operatorname{sh} x - x}$

3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Log}(1 + \sin x) - x + x^2/2}{\operatorname{tg} x - \sin x}$

4) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(2/\sqrt{x})}{\operatorname{Log}(\sqrt{x} - 1) - \operatorname{Log}\sqrt{x}}$

5) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2^{1/x} + 3^{1/x} + 4^{1/x}}{3}\right)^x$

6) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}}$

7) $\displaystyle\lim_{x \to 0+} x^{\sin x}$

8) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Arctg}(x^2 - x^2 \cos x)}{(1 - \sqrt{\cos x}) \operatorname{Log}(\sin x / x)}$

9) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\operatorname{Log} x)^{1/x}$

10) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - \sqrt[3]{x^3 + 1})^x$.

6.7.2 Trouver l'ensemble des solutions de l'équation

$$2^{4x-2} - 2^{2x} - 3 = 0.$$

6.7.3 Pour quelles valeurs du nombre réel a, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + 2e^x + a$ s'annule-t-elle dans l'intervalle ouvert $]0,1[$?

6.7.4 Résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ \operatorname{Log} x^2 + \operatorname{Log} y^2 = 2 \operatorname{Log} 6. \end{cases}$$

6.7.5 Résoudre le système

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^3 = y^2. \end{cases}$$

6.7.6 Soit a un élément de $]1, e[$. Montrer que l'équation $a \operatorname{Log} x = x \operatorname{Log} a$ admet une et une seule solution dans l'intervalle ouvert $]e, +\infty[$.

6.7.7 Montrer que pour tout $x \in]0,1]$: $|\operatorname{Log} x| \leqslant 2/\sqrt{x}$.

6.7.8 Montrer que pour tout $x \geqslant 1$: $\operatorname{Log} x \leqslant 2\sqrt{x}$.

6.7.9 Montrer que pour tout couple de nombres réels x et y, on a:

1) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$ 2) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.

6.7.10 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

6.7.11 Comment faut-il choisir le nombre réel α pour que la fonction $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Log}(1+x) - \operatorname{Log}(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

soit continue au point $x = 0$?

6.7.12 Montrer que la fonction $f : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ définie par

$$f(x) = \frac{2e^{2x}}{1+e^x}$$

est bijective. Calculer f^{-1}.

6.7.13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Trouver son développement limité d'ordre n autour de zéro.

6.7.14 Soit $f :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (\cos x)^{1+\sin x}$. Trouver son développement limité d'ordre 4 autour de zéro.

6.7.15 Etudier la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^x$. Faire sa représentation graphique.

6.7.16 Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (e^{|x|} - 2)^3$. Faire sa représentation graphique.

6.7.17 Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $]0, +\infty[$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + f'(x)) = l$ avec $l > 0$, et soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = e^x f(x)$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. 2) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

6.7.18 Soit $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = -\operatorname{Log}(\operatorname{Log} x)$.
1) Montrer que f est convexe.
2) En déduire que pour tout couple d'éléments x, y de $]1, +\infty[$:

$$\operatorname{Log}\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\operatorname{Log} x \cdot \operatorname{Log} y}.$$

6.7.19 Soit l'équation $2^x + 3^x = n^x$.
1) Montrer que pour tout entier $n > 3$, cette équation admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.
2) En désignant par x_n cette solution, démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$.

6.7.20 Soit $f :]-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \operatorname{Log}(x+2) - x$.
1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, et que $-2 < \alpha < 0 < \beta$.
2) En déduire que la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \operatorname{Log}(2 + x_n) \quad \text{et} \quad x_0 = 0$$

converge vers β.

6.7.21 Montrer que pour tout entier $n > 0 : 1/(n+1) < \operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log} n < 1/n$. En déduire que la série harmonique (§ 3.1.5) est divergente.

6.7.22 En utilisant l'exercice précédent, montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_n = -\operatorname{Log} n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad x_0 = 0$$

converge.

6.7.23 Déterminer l'ensemble des nombres réels α pour lesquels on ait :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1+2+3+\dots+k}{3+5+7+\dots+(2k+1)} \cdot k^{\alpha} < +\infty.$$

6.7.24 Montrer que pour tout entier $k > 0 : (1 + 1/k)^k < e < (1 + 1/k)^{k+1}$.

6.7.25 En utilisant l'exercice précédent, montrer que pour tout entier $n > 1$:
1) $n^{n-1}/(n-1)! < e^{n-1} < n^n/(n-1)!$.
2) $n^n e^{1-n} < n! < n^{n+1} e^{1-n}$.

7. Calcul intégral

7.1 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET SES PROPRIÉTÉS

7.1.1 Définition d'une subdivision

Soit $a < b$ deux nombres réels. Le sous-ensemble fini et ordonné $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ est appelé une *subdivision* de $[a, b]$ si

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

En particulier,

$$\left\{a, a + \frac{b-a}{n}, \ldots, a + k\,\frac{b-a}{n}, \ldots, b\right\}$$

est appelée la *subdivision régulière d'ordre n* de $[a, b]$.

D'autre part, si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisons de $[a, b]$, on note par $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ la nouvelle subdivision de $[a, b]$ obtenue par la réunion des deux subdivisons σ_1 et σ_2.

7.1.2 Pas d'une subdivision

Soit $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$. Alors, le nombre réel positif

$$\mathcal{P}(\sigma) = \max \{x_j - x_{j-1} : j \in \mathbb{N}, 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

est appelé le *pas* de la subdivison σ.

7.1.3 Fonction définie et continue sur $[a, b]$

Soit $a < b$ deux nombres réels. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite *définie et continue* sur $[a, b]$ si les deux propriétés suivantes sont vérifiées:

- $[a, b] \subset E$;
- f est continue en tout point de $]a, b[$, continue à droite en a, continue à gauche en b.

7.1.4 Sommes de Darboux

Soit $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ et f une fonction définie et continue sur $[a,b]$. Alors, le nombre réel

$$\overline{S}_\sigma(f) = \sum_{j=1}^{n} M_j\,(x_j - x_{j-1}) \quad \text{avec } M_j = \max_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$$

est appelé la *somme de Darboux supérieure* de la fonction f relativement à la subdivision σ, tandis que le nombre réel

$$\underline{S}_\sigma(f) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) \quad \text{avec } m_j = \min_{x\in[x_{j-1},\, x_j]} f(x)$$

est appelé la *somme de Darboux inférieure* de la fonction f relativement à la subdivision σ.

Etant donné que pour toute subdivision σ de $[a, b]$:

$$m(b-a) \leqslant \underline{S}_\sigma(f) \leqslant \overline{S}_\sigma(f) \leqslant M(b-a)$$

où m (resp. M) est le minimum (resp. maximum) de la fonction f sur $[a, b]$, on peut affirmer que les deux nombres réels

$$\overline{S}(f) = \operatorname{Inf}\{\overline{S}_\sigma(f) : \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\}$$

et

$$\underline{S}(f) = \operatorname{Sup}\{\underline{S}_\sigma(f) : \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\}$$

existent. Démontrons à présent qu'ils sont égaux.

7.1.5 Lemme

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Alors, $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. La fonction f étant uniformément continue sur $[a, b]$ (§ 4.3.21), il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision σ de $[a, b]$ vérifiant l'inégalité $\mathcal{P}(\sigma) \leqslant \delta$, on ait :

$$\overline{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f) \leqslant \epsilon/3.$$

D'autre part, il résulte de la définition des nombres réels $\overline{S}(f)$ et $\underline{S}(f)$ qu'il existe deux subdivisions σ_1 et σ_2 de $[a, b]$ vérifiant $\mathcal{P}(\sigma_1) \leqslant \delta$ et $\mathcal{P}(\sigma_2) \leqslant \delta$ telles que

$$\overline{S}_{\sigma_1}(f) - \overline{S}(f) \leqslant \epsilon/3 \quad \text{et} \quad \underline{S}(f) - \underline{S}_{\sigma_2}(f) \leqslant \epsilon/3.$$

Ainsi, en posant $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, on obtient que

$$\mathcal{P}(\sigma) \leqslant \delta, \quad \overline{S}_\sigma(f) \leqslant \overline{S}_{\sigma_1}(f) \quad \text{et} \quad \underline{S}_\sigma(f) \geqslant \underline{S}_{\sigma_2}(f).$$

Par conséquent

$$\overline{S}_\sigma(f) - \overline{S}(f) \leqslant \epsilon/3 \quad \text{et} \quad \underline{S}(f) - \underline{S}_\sigma(f) \leqslant \epsilon/3.$$

D'où

$$|\overline{S}(f) - \underline{S}(f)| \leqslant |\overline{S}(f) - \overline{S}_\sigma(f)| + |\overline{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f)| + |\underline{S}_\sigma(f) - \underline{S}(f)|$$
$$\leqslant \epsilon.$$

On a ainsi démontré que pour tout nombre réel $\epsilon > 0$:

$$|\overline{S}(f) - \underline{S}(f)| \leqslant \epsilon;$$

ce qui implique (§ 1.4.5) que $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$. ■

7.1.6 Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b]$

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$.

Par définition, le nombre réel $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$ (lemme 7.1.5) est appelé l'*intégrale* de la fonction f sur $[a, b]$ et on écrit

$$\overline{S}(f) = \underline{S}(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Le nombre réel a étant alors appelé la *borne inférieure* de l'intégrale, tandis que b est appelé la *borne supérieure* de l'intégrale. D'autre part, l'intervalle fermé et borné $[a, b]$ est appelé l'*intervalle d'intégration* et x la *variable d'intégration*.

Lorsque nous avons défini la notion d'intégrale, nous avons supposé que $a < b$. Dans le cas contraire où $b < a$, on posera, par définition, que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Enfin, si $a = b$, on posera, par définition, que

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

7.1.7 Remarque

Il est bon de noter que l'intégrale d'une fonction ne dépend pas de la variable d'intégration choisie. Il nous est donc possible, sans changer la valeur de l'intégrale, de remplacer la lettre x par n'importe quelle autre lettre. Par exemple,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \dots = \int_a^b f(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

7.1.8 Calcul de l'intégrale à partir des suites

Soit (σ_n) une suite de subdivisions de $[a, b]$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{P}(\sigma_n) = 0$ et soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Alors,

$$\lim_{n \to +\infty} \overline{S}_{\sigma_n}(f) = \lim_{n \to +\infty} \underline{S}_{\sigma_n}(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. La fonction f étant uniformément continue sur $[a, b]$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision σ de $[a, b]$ vérifiant $\mathcal{P}(\sigma) \leqslant \delta$, on ait :

$$0 \leqslant \overline{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f) \leqslant \epsilon.$$

Comme d'autre part $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{P}(\sigma_n) = 0$, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait : $\mathcal{P}(\sigma_n) \leqslant \delta$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$0 \leqslant \overline{S}_{\sigma_n}(f) - \underline{S}_{\sigma_n}(f) \leqslant \epsilon \quad \text{et} \quad \underline{S}_{\sigma_n}(f) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{S}_{\sigma_n}(f)\ ;$$

ce qui implique que

$$\left| \overline{S}_{\sigma_n}(f) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \epsilon \quad \text{et} \quad \left| \underline{S}_{\sigma_n}(f) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \epsilon.$$

D'où le résultat. ∎

7.1.9 Exemple

Considérons la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$. Si σ_n est la subdivision régulière d'ordre n de $[a, b]$, on peut écrire

$$\underline{S}_{\sigma_n}(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)} = \left(\frac{b-a}{n}\right) e^a \frac{1-e^{b-a}}{1-e^{\left(\frac{b-a}{n}\right)}}.$$

Par suite, en constatant que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{\left(\frac{b-a}{n}\right)}}{\left(\frac{b-a}{n}\right)} = \lim_{x\to 0+} \frac{1-e^x}{x} = -1,$$

on obtient (§ 7.1.8) que

$$\int_a^b e^x\,dx = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}_{\sigma_n}(f) = e^b - e^a.$$

7.1.10 Propriété relative à l'intervalle d'intégration

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Alors, pour tout élément c de $[a, b]$, on a:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

DÉMONSTRATION. Si $c = a$ ou b, le résultat est évident. Pour cette raison, nous supposerons que $c \neq a$ ou b. Ainsi, en associant, à chaque entier $n > 0$, la subdivision

$$\beta_n = \left\{a, a+\frac{c-a}{n}, \ldots, a+k\frac{c-a}{n}, \ldots, c\right\} \text{ de } [a, c]$$

et la subdivision

$$\alpha_n = \left\{c, c+\frac{b-c}{n}, \ldots, c+p\,\frac{b-c}{n}, \ldots, b\right\} \text{ de } [c, b],$$

on obtient que $\sigma_n = \beta_n \cup \alpha_n$ est une subdivision de $[a, b]$ et que

$$\underline{S}_{\sigma_n}(f) = \underline{S}_{\beta_n}(f) + \underline{S}_{\alpha_n}(f).$$

D'où, en passant à la limite (§ 7.1.8), on peut écrire

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

7.1.11 Théorème de la moyenne

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Alors, il existe un élément c de $[a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a).$$

DÉMONSTRATION. En posant

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x),$$

il résulte de la définition de l'intégrale que

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

ou encore

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{(b-a)} \leqslant M.$$

La fonction f étant continue sur $[a, b]$, elle prend toute valeur comprise entre m et M (§ 4.3.22); ce qui revient à dire qu'il existe un nombre réel $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{(b-a)}.$$

D'où le résultat. ■

7.1.12 Définition d'une primitive

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Alors, nous dirons qu'une fonction continue $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une *primitive* de la fonction f sur $[a, b]$ si pour tout $x \in \,]a, b[$:

$$G'(x) = f(x).$$

En utilisant le résultat obtenu au paragraphe 5.2.14, on peut énoncer la proposition suivante: Si G et H sont deux primitives de la fonction f sur $[a, b]$, alors les deux fonctions G et H sont égales à une constante additive près; ceci revient à dire qu'il existe un nombre réel c tel que pour tout $x \in [a, b]$, on ait:

$$G(x) = H(x) + c.$$

7.1.13 Lemme

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Alors, la fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$$

est une primitive de la fonction f sur $[a, b]$.

DÉMONSTRATION. En premier lieu, montrons que pour tout $x \in]a,b[$: $F'(x) = f(x)$. Pour cela, fixons-nous arbitrairement un élément x_0 de $]a,b[$. Alors, à chaque élément $x \neq x_0$ de $]a,b[$, on peut associer un nombre réel $c(x)$ compris entre x et x_0 (§ 7.1.11) tel que

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t = f(c(x)) ;$$

ce qui implique, par la continuité de la fonction f au point x_0, que

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(c(x)) = f(x_0).$$

Montrons à présent que F est continue à droite au point a. En effet, étant donné qu'à chaque élément x de $]a, b]$, on peut associer un nombre réel $d(x) \in [a, x]$ tel que

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t = f(d(x))(x - a) ;$$

on obtient, du fait que la fonction f est bornée sur $[a, b]$, que

$$\lim_{x \to a+} F(x) = 0 = F(a).$$

Reste à démontrer que la fonction F est continue à gauche au point b. Puisqu'à chaque élément $x \in [a, b[$, on peut associer un élément $r(x) \in [x, b]$ tel que

$$F(x) = F(b) - \int_x^b f(t)\, \mathrm{d}t = F(b) - f(r(x))(b - x),$$

on peut donc affirmer, compte tenu que la fonction f est bornée sur $[a, b]$, que

$$\lim_{x \to b-} F(x) = F(b).$$

Ainsi s'achève la démonstration de ce lemme. ■

7.1.14 Intégrale fonction de ses bornes

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $g, h : I \to [a, b]$ deux fonctions différentiables sur I. Alors, la fonction $K : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$K(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\, \mathrm{d}t$$

est différentiable sur I. De plus, pour tout $x \in I$, on a:

$$K'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x).$$

DÉMONSTRATION. Considérons les deux fonctions auxiliaires $\tilde{f}, F : [a-1, b+1] \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a) & \text{si } t \in [a-1, a] \\ f(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ f(b) & \text{si } t \in [b, b+1] \end{cases} \qquad \text{et} \quad F(x) = \int_{a-1}^{x} \tilde{f}(t)\, \mathrm{d}t.$$

En constatant que

$$K = F \circ g - F \circ h,$$

on obtient (voir § 5.1.15 et 7.1.13) que la fonction K est différentiable sur I, et que pour tout élément x de I:

$$\begin{aligned} K'(x) &= \tilde{f}(g(x)) \cdot g'(x) - \tilde{f}(h(x)) \cdot h'(x) \\ &= f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x). \end{aligned}$$

■

7.1.15 Théorème fondamental du calcul intégral

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Alors, si la fonction $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une primitive de la fonction f sur $[a, b]$, on a l'égalité suivante:

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = G(b) - G(a).$$

DÉMONSTRATION. Etant donné que la fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$$

est une primitive de la fonction f sur $[a, b]$ (lemme 7.1.13), on sait (§ 7.1.12) qu'il existe une constante c telle que pour tout $x \in [a, b]$, on ait:

$$F(x) = G(x) + c.$$

D'où

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$$

■

7.1.16 Notation

Nous utiliserons très souvent la notation suivante :

$$f(b)-f(a) = f(x)\Big|_a^b .$$

7.1.17 Exemple

On se propose de calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \quad \text{et} \quad x_0 = 0.$$

Pour cela, considérons la fonction auxiliaire f: $[0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ainsi, en remarquant que cette fonction est décroissante sur $[0,1]$, on obtient que pour tout entier $n > 0$:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(k/n)^2} = \underline{S}_{\sigma_n}(f)$$

où σ_n est la subdivision régulière d'ordre n de $[0,1]$; ce qui entraîne (§ 7.1.8) que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}_{\sigma_n}(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Finalement, étant donné que la fonction G : $[0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \operatorname{Arctg} x$ est une primitive de la fonction f sur $[0,1]$, on obtient (§ 7.1.15) que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \operatorname{Arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

7.1.18 Linéarité de l'intégrale

Soit $a < b$ deux nombres réels et f, g : $[a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors, pour tout couple de nombres réels α et β, on peut écrire l'égalité suivante :

$$\int_a^b (\alpha f+\beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction continue K : $[a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$K(x) = \int_a^x (\alpha f+\beta g)(t)\,\mathrm{d}t - \alpha\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \beta\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En la dérivant, on obtient que pour tout $x \in\,]a, b[$:

$$K'(x) = 0\,;$$

ceci implique, du fait que $K(a)=0$, que pour tout $x \in [a, b]$ (§ 5.2.14):

$$K(x) = 0.$$

D'où, en posant $x=b$, on obtient bien

$$\int_a^b (\alpha f+\beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$ ■

7.1.19 Propriétés de l'intégrale d'une fonction positive ou nulle

Soit $a<b$ deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ telle que pour tout élément x de $[a, b]$, on ait : $f(x) \geqslant 0$. Alors,

– pour tout $c \in [a, b] : 0 \leqslant \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;

– $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

DÉMONSTRATION. Considérons la primitive $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, pour tout $x \in \,]a, b[$:

$$F'(x) = f(x) \geqslant 0 ;$$

ce qui implique que la fonction F est croissante sur $[a, b]$ (§ 5.2.16). Donc, pour tout $c \in [a, b]$:

$$0 = F(a) \leqslant F(c) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Supposons à présent que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Alors, pour tout $x \in [a, b]$:

$$F(x) = 0 ;$$

ce qui entraîne que pour tout $x \in \,]a, b[$:

$$F'(x) = f(x) = 0.$$

Etant donné que la fonction est continue sur $[a, b]$, on obtient finalement que $f(x) = 0$ sur tout $[a, b]$. La réciproque est évidente. ■

7.1.20 Corollaire

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout élément x de $[a, b]$, on ait : $f(x) \leqslant g(x)$. Alors,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. En considérant la fonction auxiliaire $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(x) - f(x)$, on obtient que pour tout $x \in [a, b] : h(x) \geqslant 0$. Ainsi, en utilisant les résultats des paragraphes 7.1.18 et 7.1.19, on peut écrire

$$0 \leqslant \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

ce qui implique

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

7.1.21 Intégrale de la valeur absolue d'une fonction

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Alors,

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. $\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_a^b (f^+ - f^-)(x)\,\mathrm{d}x \right|$

$$= \left| \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x$$

$= \int_a^b (f^+ + f^-)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ (les fonctions f^+ et f^- ont été définies au paragraphe 4.1.28).

■

7.1.22 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors,

$$\left(\int_a^b f(x) g(x)\,\mathrm{d}x \right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \right) \left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Cette relation est appelée l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*.

DÉMONSTRATION. Nous ferons l'hypothèse supplémentaire que la fonction f n'est pas identiquement nulle sur $[a, b]$, car sinon le résultat devient évident. Alors, pour tout nombre réel λ, on a :

$$\int_a^b (\lambda f+g)^2 (x)\,dx = \lambda^2 \int_a^b f^2 (x)\,dx + 2\lambda \int_a^b f(x) g(x)\,dx$$

$$+\int_a^b g^2 (x)\,dx \geqslant 0.$$

et

$$\int_a^b f^2 (x)\,dx \neq 0 \quad (\S\ 7.1.19).$$

Cette inégalité ayant lieu pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le discriminant de cette équation du second degré en λ est négatif ou nul; ce qui revient à dire que

$$\left(\int_a^b f(x) g(x)\,dx\right)^2 - \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right) \leqslant 0$$

ou encore

$$\left(\int_a^b f(x) g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2 (x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2 (x)\,dx\right). \qquad \blacksquare$$

7.1.23 Théorème de la convergence uniforme

Soit $a < b$ deux nombres réels et (f_n) une suite d'éléments de $C([a, b], \mathbb{R})$ qui converge uniformément vers la fonction f. Alors,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

DÉMONSTRATION. En premier lieu, on constate que la fonction f est continue sur $[a, b]$ (§ 4.4.7); ce qui implique que le nombre réel

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

est bien défini et soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Du fait que la convergence est uniforme, on sait qu'il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\operatorname*{Sup}_{x \in [a,b]} |f_n (x) - f(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on obtient (§ 7.1.20 et 7.1.21) que

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \epsilon.$$

D'où le résultat. ■

7.1.24 Remarque

Si dans l'énoncé du résultat donné au paragraphe 7.1.23, on ne suppose pas que la convergence est uniforme, alors le résultat peut très bien cesser d'être vrai. Par exemple, la suite (f_n) définie, pour chaque entier naturel n, par

$$f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$$

et

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)^2 x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n+1}\right] \\ -(n+1)^2 x + 2(n+1) & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{2}{n+1}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\dfrac{2}{n+1}, 2\right], \end{cases}$$

converge simplement (§ 4.4.8) vers la fonction f : $[0,2] \to \mathbb{R}$ qui vaut zéro sur tout $[0,2]$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1 \neq 0 = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Néamoins, on peut très bien avoir l'égalité sans pour autant que la convergence soit uniforme. C'est le cas de la suite (f_n) définie, pour chaque entier naturel n, par

$$f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$$

et

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)^3 x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{(n+1)^2}\right] \\ -(n+1)^3 x + 2(n+1) & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{(n+1)^2}, \dfrac{2}{(n+1)^2}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\dfrac{2}{(n+1)^2}, 2\right]. \end{cases}$$

7.1.25 Théorème de la convergence monotone

Soit $a < b$ deux nombres réels et (f_n) une suite croissante (resp. décroissante) d'éléments de $C([a,b], \mathbb{R})$ qui converge simplement vers la fonction continue f : $[a,b] \to \mathbb{R}$. Alors,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. Grâce au théorème de Dini (§ 4.4.9), nous savons que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f. Il nous suffit donc d'appliquer le résultat obtenu au paragraphe 7.1.23. ■

7.1.26 Formule du changement de variable

Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. D'autre part, soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ deux éléments de I et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable sur I telle que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$. Alors,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par définition, la transformation

$$x = \varphi(t) \quad \text{avec} \quad t \in I$$

est appelée un *changement de variable*.

DÉMONSTRATION. Considérons les deux fonctions continues $G, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$G(x) = \int_{a}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

Ainsi, en constatant que pour tout $x \in]\alpha, \beta[$ (§ 7.1.14):

$$G'(x) = g(x),$$

on obtient que G est une primitive de la fonction g sur $[\alpha, \beta]$; ce qui nous permet d'écrire (§ 7.1.15) que

$$G(\beta) - G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} g(t)\,\mathrm{d}t$$

ou encore

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$ ■

7.1.27 Exemple

Calculons l'intégrale

$$J = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

Pour cela, considérons le changement de variable suivant:

$$x = \varphi(t) = \operatorname{tg} t \quad \text{avec} \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

D'où, en utilisant la formule démontrée au paragraphe 7.1.26, on obtient que

$$J = \int_0^{\pi/4} \frac{1 + tg^2 t}{(1 + tg^2 t)\sqrt{1 + tg^2 t}}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \cos t \,\mathrm{d}t = \sin t \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

7.1.28 Intégrale d'une fonction périodique

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Si le nombre $T > 0$ est une période de la fonction f, alors pour tout couple de nombres réels $a < b$, on obtient que

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

DÉMONSTRATION. Considérons le changement de variable suivant:

$$x = t + T \qquad \text{avec} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Alors, en utilisant la formule démontrée au paragraphe 7.1.26, on peut écrire

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t+T)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$ ■

7.1.29 Formule d'intégration par parties

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a < b$ deux éléments de I et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continûment différentiables sur I. Alors,

$$\int_a^b f(x) g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\, g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. En remarquant que pour tout $x \in [a, b]$:

$$f(x)\, g'(x) = (fg)'(x) - f'(x)\, g(x)\,,$$

on obtient, en intégrant, que

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (fg)'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f'(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x$$

ou encore

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\, g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x.$$ ■

7.1.30 Exemple

Soit x un nombre réel quelconque et n un entier positif. On va établir une formule récurrente nous permettant de calculer l'intégrale suivante :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} .$$

Dans ce but, considérons les deux fonctions auxiliaires $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(t) = \frac{1}{(t^2+1)^n} \qquad \text{et} \qquad h(t) = t.$$

Ainsi, en remarquant que

$$I_n(x) = \int_0^x f(t)\, h'(t)\, \mathrm{d}t,$$

on obtient, en utilisant la formule d'intégration par parties, que

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \left.\frac{t}{(t^2+1)^n}\right|_0^x + 2n \int_0^x \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int_0^x \frac{(t^2+1)-1}{(t^2+1)^{n+1}}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} - 2n \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{n+1}} ; \end{aligned}$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$2n\, I_{n+1}(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)\, I_n(x).$$

Sachant que

$$I_1(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)} = \operatorname{Arctg} x,$$

cette formule récurrente nous permet de calculer, de proche en proche, les intégrales $I_n(x)$. En particulier,

$$I_2(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{(x^2+1)} + \operatorname{Arctg} x\right).$$

7.1.31 Formule de Taylor avec le reste sous la forme d'une intégrale

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant le point a et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$ fois continûment différentiable sur I. Alors, pour tout élément x de I, on peut écrire l'égalité suivante:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + f^{(p)}(a)\frac{(x-a)^p}{p\,!} + \dots$$

$$+ f^{(n)}(a)\,\frac{(x-a)^n}{n\,!} + \frac{1}{n\,!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

DÉMONSTRATION. Soit x un élément quelconque de I. D'une part, en intégrant par parties, on obtient que pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\int_a^x (x-t)^{k-1} f^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{k}(x-t)^k f^{(k)}(t)\Big|_a^x + \frac{1}{k}\int_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= f^{(k)}(a)\,\frac{(x-a)^k}{k} + \frac{1}{k}\int_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'autre part, on sait, d'après le théorème fondamental du calcul intégral (§ 7.1.15), que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, en utilisant ces deux résultats, on peut écrire successivement que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t) f''(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2\,!} + \frac{1}{2!}\int_a^x (x-a)^2 f^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\vdots$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + f^{(p)}(a)\,\frac{(x-a)^p}{p!} + \dots$$

$$+ f^{(n)}(a)\,\frac{(x-a)^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \blacksquare$$

7.2 APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE L'INTÉGRALE

7.2.1 Longueur d'un arc de courbe

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a < b$ deux éléments de I et f une fonction continûment différentiable sur I et soit C la partie du graphique de cette fonction compris entre les points d'abscisse $x = a$ et $x = b$ (fig. 7.1).

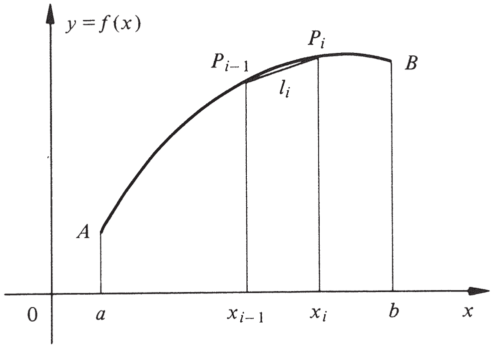


Fig. 7.1

Alors, si $\sigma_n = \{x_0 = a, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b\}$ est la subdivision régulière d'ordre n de $[a, b]$, on désigne par P_i le point de C dont l'abscisse est x_i et par l_i la longueur de la corde $P_{i-1}P_i$. On obtient ainsi une ligne polygonale $AP_1 \ldots P_{n-1}B$ inscrite dans l'arc AB et dont la longueur est

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} l_i.$$

D'autre part, en utilisant le théorème des accroissements finis (§ 5.2.12), on sait, qu'à tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$, on peut associer un nombre réel $\beta_i \in]x_{i-1}, x_i[$ tel que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\beta_i)(x_i - x_{i-1});$$

ce qui nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned} l_i^2 &= (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2 \\ &= (1 + (f'(\beta_i))^2)\ (x_i - x_{i-1})^2 \end{aligned}$$

ou encore

$$l_i = \sqrt{1 + (f'(\beta_i))^2}\ (x_i - x_{i-1}).$$

Par conséquent

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{1 + (f'(\beta_i))^2}\ (x_i - x_{i-1})).$$

Par suite, en constatant que pour tout entier $n > 0$:

$$\underline{S}_{\sigma_n}(\sqrt{1 + (f')^2}) \leqslant L_n \leqslant \overline{S}_{\sigma_n}(\sqrt{1 + (f')^2}),$$

on obtient (§ 2.3.21 et 7.1.8) que

$$\lim_{n \to +\infty} L_n = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

Par définition, cette limite est appelée la *longueur de l'arc AB*.

7.2.2 Aire d'une surface plane

Soit $f:\ [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x \in [a, b]$, on ait: $f(x) \geqslant 0$ et soit C le graphique de cette fonction.

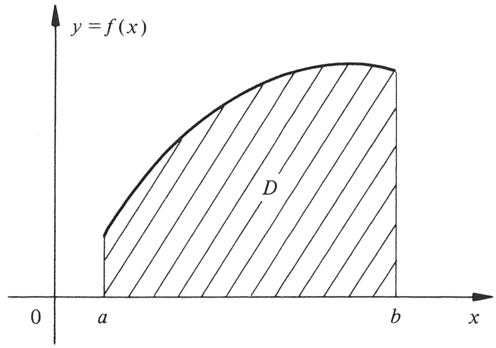


Fig. 7.2

D'autre part, désignons par D le domaine du plan délimité par la courbe C, l'axe $0x$ et par les deux droites verticales d'équation respective $x = a$ et $x = b$ (fig. 7.2). Alors, si σ_n est la subdivision régulière d'ordre n de $[a, b]$, on obtient que $\underline{S}_{\sigma_n}(f)$ mesure l'aire d'un domaine formé d'une somme de rectangles et inscrit dans D, tandis que $\overline{S}_{\sigma_n}(f)$ mesure l'aire d'un domaine formé lui aussi d'une somme de rectangles mais circonscrit à D. La limite commune de ces deux aires, lorsque n tend vers l'infini, sera appelée, par définition, l'*aire du domaine D*; ce qui revient à dire que l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

est, par définition, l'aire du domaine D. Cette définition correspond bien à la notion usuelle d'aire plane que l'on apprend dans les cours de géométrie élémentaire. De plus, grâce aux propriétés de l'intégrale, elle en possède toutes les caractéristiques.

Supposons à présent que la fonction f change un nombre fini de fois de signe sur $[a, b]$ (fig. 7.3).

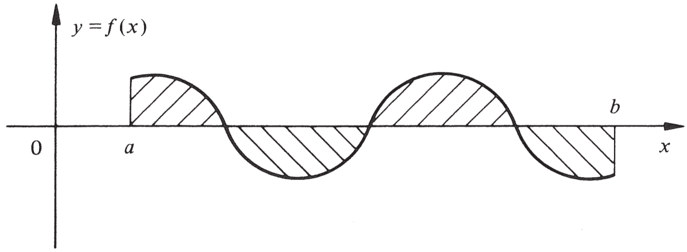


Fig. 7.3

Pour obtenir l'*aire totale A du domaine D* au sens traditionnel de la géométrie élémentaire, il nous suffit d'additionner l'aire A_1 de la partie du domaine D qui se trouve au-dessus de l'axe $0x$ et l'aire A_2 de la partie du domaine D qui se trouve au-dessous de l'axe $0x$. Autrement dit,

$$A = A_1 + A_2.$$

Or,

$$A_1 = \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x$$

et, par symétrie par rapport à $0x$:

$$A_2 = \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

ce qui entraîne que l'aire totale du domaine D est égale à

$$A = \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f^+ + f^-)(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

7.2.3 Exemple

Calculons l'aire A du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ y = \sin x\}$. Par définition,

$$A = \int_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\cos x\,\Big|_0^{\pi} + \cos x\,\Big|_{\pi}^{2\pi} = 2 + 2 = 4.$$

7.2.4 Aire enfermée dans une boucle

Soit $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $x \in [a, b]$, on ait : $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ (fig. 7.4). Alors, l'aire A du domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\}$$

est égale à

$$A = \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x.$$

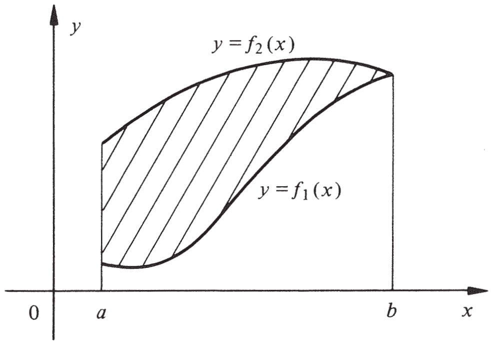


Fig. 7.4

7.2.5 Lemme

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a < b$ deux éléments de I et f une fonction continûment différentiable sur I. D'autre part, soit $\sigma_n = \{x_0 = a, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b\}$ la subdivision régulière d'ordre n de $[a, b]$ et $y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_n$ $(2n)$ éléments de $[a, b]$ vérifiant les inégalités suivantes:

$$a = x_0 \leqslant y_1 \leqslant x_1 \leqslant ... \leqslant x_{i-1} \leqslant y_i \leqslant x_i \leqslant ... \leqslant x_{n-1} \leqslant y_n \leqslant x_n = b$$

et

$$a = x_0 \leqslant z_1 \leqslant x_1 \leqslant ... \leqslant x_{i-1} \leqslant z_i \leqslant x_i \leqslant ... \leqslant x_{n-1} \leqslant z_n \leqslant x_n = b.$$

Alors, en posant pour tout entier $n > 0$:

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} (f(y_i)\sqrt{1 + (f'(z_i))^2} \ (x_i - x_{i-1})),$$

on obtient que

$$\lim_{n \to +\infty} B_n = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

DÉMONSTRATION. En premier lieu, posons

$$M_1 = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \quad \text{et} \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Pour les besoins de la démonstration, faisons l'hypothèse supplémentaire que $M_1 \neq 0$, car, dans le cas contraire, le résultat est évident. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Les fonctions f et $\sqrt{1 + (f')^2}$ étant uniformément continues sur $[a, b]$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $x, y \in [a, b]$ et $|x - y| \leqslant \delta$ impliquent

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\epsilon}{2M_2(b-a)}$$

et

$$|\sqrt{1 + (f'(x))^2} - \sqrt{1 + (f'(y))^2}| \leqslant \frac{\epsilon}{2M_1(b-a)}.$$

D'autre part, on sait (§ 4.3.21) qu'à tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$, on peut associer un élément

$$f(\xi_i)\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2} = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}).$$

D'où , en posant

$$n_0 = \left[\frac{b-a}{\delta}\right] + 1,$$

on obtient que pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$|B_n - \overline{S}_{\sigma_n}(f \cdot \sqrt{1+(f')^2})| = \Bigg| \sum_{i=1}^{n} (f(y_i)\sqrt{1+(f'(z_i))^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

$$-f(\xi_i)\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\,(x_i - x_{i-1}))\Bigg| \leqslant \sum_{i=1}^{n} (|f(y_i)|\,|\sqrt{1+(f'(z_i))^2}$$

$$-\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\,|\,|x_i - x_{i-1}|) + \sum_{i=1}^{n} (|f(y_i) - f(\xi_i)|\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}$$

$$|x_i - x_{i-1}|) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_1\left(\frac{\epsilon}{2M_1(b-a)} \cdot \frac{(b-a)}{n}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\epsilon}{2M_2(b-a)} \cdot M_2 \cdot \frac{(b-a)}{n}\right)$$

$$= \epsilon.$$

On a ainsi démontré que

$$\lim_{n \to +\infty} (B_n - \overline{S}_{\sigma_n}(f\sqrt{1+(f')^2})) = 0.$$

Finalement, puisque

$$\lim_{n \to +\infty} \overline{S}_{\sigma_n}(f \cdot \sqrt{1+(f')^2}) = \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

on peut affirmer (§ 2.3.17) que

$$\lim_{n \to +\infty} B_n = \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \qquad \blacksquare$$

7.2.6 Aire d'une surface de révolution

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a < b$ deux éléments de I et f une fonction continûment différentiable sur I telle que pour tout $x \in [a, b]$, on ait: $f(x) \geqslant 0$, et soit C la partie du graphique de cette fonction compris entre les points d'abscisse $x = a$ et $x = b$. D'autre part, on désigne par Σ la surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe C autour de l'axe $0x$ (fig. 7.5 et 7.6).

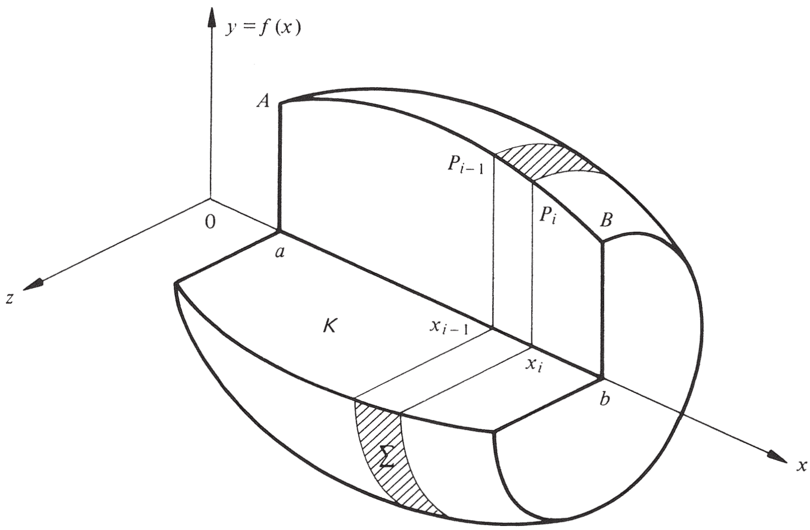


Fig. 7.5

Alors, si $\sigma_n = \{x_0 = a, x_1, ..., x_n = b\}$ est la subdivision régulière d'ordre n de $[a, b]$, on désigne par P_i le point de C dont l'abscisse est x_i et par l_i la longueur de la corde $P_{i-1}P_i$. Dans sa rotation autour de l'axe $0x$, cette corde engendre un tronc de cône dont l'aire latérale est égale à

$$A_i = 2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} l_i .$$

Par suite, en utilisant le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe un élément z_i de $]x_{i-1}, x_i[$ tel que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(z_i)(x_i - x_{i-1});$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} l_i^2 &= (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2 \\ &= (1 + (f'(z_i))^2)(x_i - x_{i-1})^2 \end{aligned}$$

ou encore

$$l_i = \sqrt{1 + (f'(z_i))^2}\,(x_i - x_{i-1}).$$

Par conséquent

$$A_i = \pi(f(x_i) + f(x_{i-1}))\sqrt{1 + (f'(z_i))^2}\,(x_i - x_{i-1}).$$

Ainsi, l'aire de la surface de révolution obtenue en faisant tourner la ligne polygonale $AP_1 \dots P_{n-1}B$ autour de l'axe $0x$ est égale à

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} A_i = \pi \sum_{i=1}^{n} ((f(x_i) + f(x_{i-1}))\sqrt{1 + (f'(z_i))^2}\,(x_i - x_{i-1}));$$

et l'on a (lemme 7.2.5) que

$$\lim_{n \to +\infty} B_n = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx .$$

Par définition, cette limite est appelée l'*aire de la surface de révolution* Σ.

7.2.7 Volume d'un corps de révolution

Soit f : $[a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x \in [a, b]$, on ait : $f(x) \geqslant 0$, et soit C le graphique de cette fonction. D'autre part, on désigne par K le corps de révolution obtenu en faisant tourner la courbe C autour de l'axe $0x$ (fig. 7.5 et 7.6).

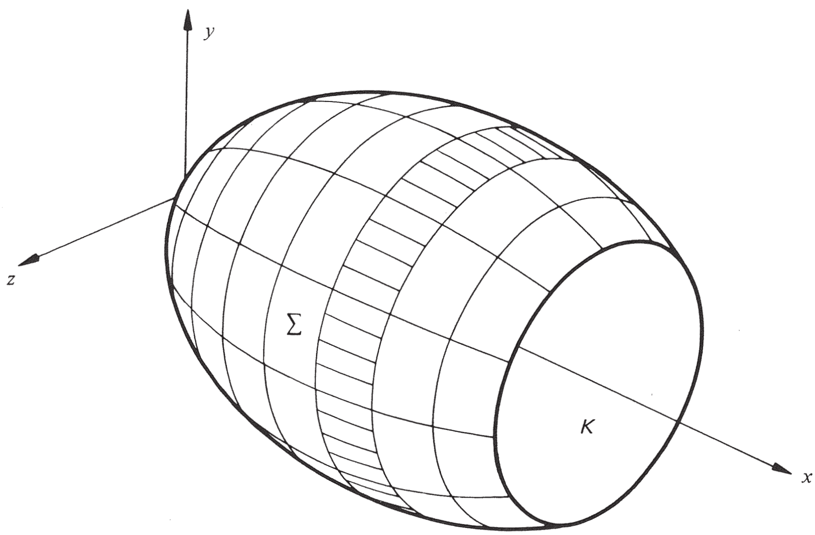


Fig. 7.6

Alors, si σ_n est la subdivision régulière d'ordre n de $[a, b]$, on obtient que $\pi \underline{S}_{\sigma_n}(f^2)$ mesure le volume d'un corps de révolution formé d'une somme de cylindres et inscrit dans K, tandis que $\pi \overline{S}_{\sigma_n}(f^2)$ mesure le volume d'un corps de révolution formé lui aussi d'une somme de cylindres mais circonscrit à K. La limite commune de ces deux volumes, lorsque n tend vers l'infini, sera appelée, par définition, le *volume du corps de révolution* K ; ce qui revient à dire que l'intégrale

$$\pi \int_a^b f^2(x) \, dx$$

est, par définition, le volume du corps de révolution K.

7.3 INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES ET SES APPLICATIONS

7.3.1 Méthode générale pour calculer l'intégrale d'une fonction rationnelle

Soit $a < b$ deux nombres réels et soit $P(x)$, $Q(x)$ deux polynômes ayant les propriétés suivantes:

- $P(x)$ et $Q(x)$ n'ont aucun diviseur commun;
- $Q(x)$ est un polynôme unitaire; ce qui revient à dire que le coefficient du monôme du plus haut degré est égal à 1;
- pour tout $x \in [a, b] : Q(x) \neq 0$.

Ainsi, la fonction *rationnelle* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = P(x) / Q(x)$ est continue, donc intégrable. Nous allons à présent montrer que l'intégrale

$$\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx$$

peut se calculer à l'aide de fonctions élémentaires, en utilisant, pour cela, la décomposition en *éléments simples* du quotient $P(x) / Q(x)$.

Soit $a_1, \ldots, a_n$ l'ensemble des racines réelles (toutes distinctes) du polynôme $Q(x)$, et soit $(x^2 + 2b_1x + c_1), \ldots, (x^2 + 2b_mx + c_m)$ l'ensemble des diviseurs irréductibles (tous distincts avec $b_i^2 < c_i$) du second degré de $Q(x)$. Le théorème fondamental de l'algèbre nous dit qu'il existe $(n + m)$ entiers positifs

$$k_1, \ldots, k_n, l_1, \ldots, l_m$$

tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \ldots (x - a_n)^{k_n} (x^2 + 2b_1x + c_1)^{l_1} \ldots (x^2 + 2b_mx + c_m)^{l_m}.$$

Par suite, le théorème de la décomposition en éléments simples du quotient $P(x) / Q(x)$, nous permet d'écrire que pour tout $x \in [a, b]$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \sum_{j=1}^{k_1} \frac{\alpha_{1j}}{(x - a_1)^j} + \ldots + \sum_{j=1}^{k_n} \frac{\alpha_{nj}}{(x - a_n)^j} + \sum_{j=1}^{l_1} \frac{\beta_{1j}x + \gamma_{1j}}{(x^2 + 2b_1x + c_1)^j}$$
$$+ \ldots + \sum_{j=1}^{l_m} \frac{\beta_{mj}x + \gamma_{mj}}{(x^2 + 2b_mx + c_m)^j}$$

où les α_{ij}, β_{ij} et γ_{ij} sont des constantes et où $R(x)$ est un polynôme, quotient dans la division suivant les puissances décroissantes de $P(x)$ par $Q(x)$ (si $\deg P(x) < \deg Q(x)$ alors $R(x) = 0$); ce qui entraîne que

$$\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx = \int_a^b R(x) \, dx + \sum_{j=1}^{k_1} \left(\int_a^b \frac{\alpha_{1j}}{(x - a_1)^j} \, dx \right) + \ldots + \sum_{j=1}^{k_n} \left(\int_a^b \frac{\alpha_{nj}}{(x - a_n)^j} \, dx \right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{l_1} \left(\int_a^b \frac{\beta_{1j}x + \gamma_{1j}}{(x^2 + 2b_1x + c_1)^j} \, dx \right) + \ldots + \sum_{j=1}^{l_m} \left(\int_a^b \frac{\beta_{mj}x + \gamma_{mj}}{(x^2 + 2b_m x + c_m)^j} \, dx \right).$$

Ce résultat n'a de sens que si l'on sait calculer les intégrales des éléments simples. Comme nous allons le voir dans les deux paragraphes qui suivent, leurs calculs ne posent pas trop de difficultés. D'autre part, étant donné que $R(x)$ est un polynôme, le calcul de la première intégrale ne présente, lui aussi, aucun problème.

7.3.2 Intégration des éléments simples du premier degré

Soit d un nombre réel n'appartenant pas à l'intervalle fermé et borné $[a, b]$. Alors,

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-d)} = \operatorname{Log}|x-d|\Big|_a^b .$$

D'autre part, pour tout entier $p > 1$:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-d)^p} = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{(x-d)^{p-1}}\Big|_a^b .$$

7.3.3 Intégration des éléments simples du second degré

Soit r, s deux nombres réels vérifiant l'inégalité $s - r^2 > 0$. Alors,

$$\int_a^b \frac{\beta x+\gamma}{(x^2+2rx+s)}\,\mathrm{d}x = \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{Log}|x^2+2rx+s|\Big|_a^b + \frac{\gamma - r\beta}{\sqrt{s-r^2}} \operatorname{Arctg}\left(\frac{x+r}{\sqrt{s-r^2}}\right)\Big|_a^b .$$

D'autre part, pour tout entier $p > 1$:

$$\int_a^b \frac{\beta x+\gamma}{(x^2+2rx+s)^p}\,\mathrm{d}x = \frac{\beta}{2(1-p)} \cdot \frac{1}{(x^2+2rx+s)^{p-1}}\Big|_a^b + \frac{\gamma - r\beta}{(s-r^2)^{p-(1/2)}} \int_{\frac{a+r}{\sqrt{s-r^2}}}^{\frac{b+r}{\sqrt{s-r^2}}} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^p} .$$

Pour calculer cette dernière intégrale, il nous suffit d'utiliser le résultat de l'exemple 7.1.30, à savoir : pour tout entier $n > 0$:

$$2n\,I_{n+1}(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)\,I_n(x)$$

ou

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} .$$

D'autre part, l'inégalité $s - r^2 > 0$ nous assure que le polynôme du second degré $(x^2 + 2rx + s)$ est irréductible sur $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. En constatant que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\beta x + \gamma = \frac{\beta}{2}(2x+2r) + (\gamma - r\beta),$$

on peut écrire, grâce à la linéarité de l'intégrale, que

$$\int_a^b \frac{\beta x+\gamma}{(x^2+2rx+s)^p}\,\mathrm{d}x = \frac{\beta}{2}\int_a^b \frac{2x+2r}{(x^2+2rx+s)^p}\,\mathrm{d}x + (\gamma - r\beta)\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2rx+s)^p}.$$

Calculons d'abord la première intégrale :

$$\int_a^b \frac{2x+2r}{(x^2+2rx+s)^p}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \operatorname{Log}|x^2+2rx+s|\Big|_a^b & \text{si } p=1 \\ \dfrac{1}{(1-p)}\cdot\dfrac{1}{(x^2+2rx+s)^{p-1}}\Big|_a^b & \text{si } p>1. \end{cases}$$

Calculons à présent la seconde intégrale :

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2rx+s)^p} = \frac{1}{(s-r^2)^p}\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(((x+r)/\sqrt{s-r^2})^2+1)^p}.$$

Ainsi, en faisant le changement de variable

$$x = t\cdot\sqrt{s-r^2}-r \quad \text{avec} \quad t\in\mathbb{R},$$

on obtient que

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2rx+s)^p} = \frac{\sqrt{s-r^2}}{(s-r^2)^p}\int_{\frac{a+r}{\sqrt{s-r^2}}}^{\frac{b+r}{\sqrt{s-r^2}}} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^p}.$$

D'où le résultat. ■

7.3.4 Exemple

Calculons l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant la décomposition en éléments simples, on obtient que pour tout nombre réel $x \neq -1$:

$$\frac{x^4}{x^3+1} = x + \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1};$$

ce qui implique, en réduisant au même dénominateur, que

$$\frac{x^4}{x^3+1} = \frac{x(x^3+1)+a(x^2-x+1)+(x+1)(bx+c)}{x^3+1}$$

ou encore que

$$\frac{x^4}{x^3+1} = \frac{x^4+(a+b)x^2+(1-a+b+c)x+(a+c)}{x^3+1}.$$

Cette dernière égalité ne peut avoir lieu, pour tout nombre réel $x \neq 1$, que si le système d'équations

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ 1-a+b+c = 0 \\ a+c = 0 \end{cases}$$

est vérifié; ce qui est le cas lorsque $a = -b = -c = 1/3$.
Ainsi, pour tout $x \neq -1$:

$$\frac{x^4}{x^3+1} = x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x+1}{x^2-x+1}.$$

Finalement, en intégrant, on obtient que

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 \frac{x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 + \frac{1}{3} \cdot \operatorname{Log}|x+1|\Big|_0^1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{Arctg}\left(\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \operatorname{Log} 2 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

7.3.5 Définition

Soit $P(x_1, ..., x_n)$, $Q(x_1, ..., x_n)$ deux polynômes à n variables réelles. Pour tout n-tuple $(x_1, ..., x_n)$ de nombres réels tels que $Q(x_1, ..., x_n) \neq 0$, on pose

$$R(x_1, ..., x_n) = \frac{P(x_1, ..., x_n)}{Q(x_1, ..., x_n)}.$$

Alors, si $u_1, ..., u_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont n fonctions continues telles que pour tout $x \in [a, b]$, on ait:

$$Q(u_1(x), ..., u_n(x)) \neq 0 \quad (\text{ici } x_k = u_k(x)),$$

la fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, qui, à tout élément x de $[a, b]$ fait correspondre le nombre réel $R(u_1(x), ..., u_n(x))$ est continue, donc intégrable sur $[a, b]$.

Nous allons, à présent, montrer qu'il est possible, pour des fonctions particulières $u_1, ..., u_n$, de transformer l'intégrale

$$\int_a^b R(u_1(x), ..., u_n(x))\,\mathrm{d}x$$

en une intégrale d'une fonction rationnelle.

7.3.6 Intégration d'une fonction du type $R\,(e^x, \mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x)$

En posant $u_1(x) = e^x, u_2(x) = \mathrm{sh}x$ et $u_3(x) = \mathrm{ch}x$ et en faisant le changement de variable

$$x = \mathrm{Log}\, t \quad \text{avec} \quad t > 0,$$

on obtient que

$$\int_a^b R(e^x, \mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x)\,\mathrm{d}x = \int_{e^a}^{e^b} R\left(t, \frac{t^2-1}{2t}, \frac{t^2+1}{2t}\right) \cdot \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t;$$

ce qui nous ramène à l'intégrale d'une fonction rationnelle que l'on sait calculer.

Par exemple, calculons l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}x}.$$

En utilisant la transformation ci-dessus, on peut donc écrire

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}x} = \int_1^e \frac{2t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 2\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\,\mathrm{Arctg}\, t\,\Big|_1^e$$

$$= 2\,\mathrm{Arctg}\, e - \frac{\pi}{2}.$$

7.3.7 Intégration d'une fonction du type $R\,(\sin x, \cos x)$

Soit $-\pi < a < b < \pi$ deux nombres réels. En effectuant le changement de variable

$$x = 2\,\mathrm{Arctg}\, t \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R},$$

on transforme l'intégrale

$$\int_a^b R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{tg}\frac{a}{2}}^{\mathrm{tg}\frac{b}{2}} R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

en une intégrale d'une fonction rationnelle que l'on sait calculer.

Calculons l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Pour cela, utilisons la transformation ci-dessus; ce qui donne

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2-\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)}{2+\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\int_0^1 \frac{1-t+t^2}{(1+t^2)(3+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{2t}{3+t^2}\,\mathrm{d}t + 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2}$$

$$= \mathrm{Log}\left(\frac{3+t^2}{1+t^2}\right)\Bigg|_0^1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{t}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1$$

$$= \mathrm{Log}\,\frac{2}{3} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

7.3.8 Intégration d'une fonction du type $R\,(\sin^2 x, \cos^2 x)$

Soit $-\pi/2 < a < b < \pi/2$ deux nombres réels. En utilisant le changement de variable

$$x = \mathrm{Arctg}\,t \qquad \text{avec} \qquad t \in \mathbb{R},$$

on transforme l'intégrale

$$\int_a^b R\,(\sin^2 x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{tg}\,a}^{\mathrm{tg}\,b} R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right) \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

en une intégrale d'une fonction rationnelle que l'on sait calculer.

Par exemple, calculons l'intégrale

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}\,.$$

En utilisant la transformation ci-dessus, on obtient que

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int_{\sqrt{3}/3}^{1} \frac{1}{\dfrac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{3}/3}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

$$= -\frac{1}{t}\Bigg|_{\sqrt{3}/3}^{1} = -1+\sqrt{3}.$$

7.3.9 Intégration d'une fonction du type $R\left(x, x^{1/k_1}, \ldots, x^{1/k_n}\right)$

Soit k le plus petit commun multiple des n entiers positifs $k_1, \ldots, k_n$. Alors, en faisant le changement de variable

$$x = t^k \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R},$$

on transforme l'intégrale

$$\int_a^b R\left(x, x^{\frac{1}{k_1}}, \ldots, x^{\frac{1}{k_n}}\right) \mathrm{d}x = \int_{\sqrt[k]{a}}^{\sqrt[k]{b}} R\left(t^k, t^{\frac{k}{k_1}}, \ldots, t^{\frac{k}{k_n}}\right) k t^{k-1}\, \mathrm{d}t$$

en une intégrale d'une fonction rationnelle que l'on sait calculer.

Par exemple, calculons l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\, \mathrm{d}x.$$

En posant $x = t^6$, on obtient que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\, \mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{t^3}{t^2+1}\, 6t^5\, \mathrm{d}t = 6 \int_0^1 \frac{t^8}{t^2+1}\, \mathrm{d}t \\
&= 6 \int_0^1 (t^6 - t^4 + t^2 - 1)\, \mathrm{d}t + 6 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= 6\left(\frac{1}{7} t^7 - \frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 - t\right)\Bigg|_0^1 + 6 \operatorname{Arctg} t \,\Big|_0^1 \\
&= -\frac{152}{35} + \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

7.3.10 Intégration d'une fonction du type $R\left(x, \sqrt[m]{(\alpha x+\beta)/(\gamma x+\delta)}\right)$

Soit α, β, γ et δ quatre nombres réels vérifiant la relation $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ et soit m un entier positif. En effectuant le changement de variable

$$x = \frac{-\delta t^m + \beta}{\gamma t^m - \alpha} \quad \left(\text{ce qui donne que } t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right),$$

on transforme l'intégrale

$$\int_a^b R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) \mathrm{d}x = \int_{\sqrt[m]{\frac{\alpha a+\beta}{\gamma a+\delta}}}^{\sqrt[m]{\frac{\alpha b+\beta}{\gamma b+\delta}}} R\left(\frac{-\delta t^m+\beta}{\gamma t^m-\alpha}, t\right) \frac{m t^{m-1}(\alpha\delta-\beta\gamma)}{(\gamma t^m-\alpha)^2}\, \mathrm{d}t$$

en une intégrale d'une fonction rationnelle que l'on sait calculer.

Par exemple, calculons l'intégrale suivante

$$\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Ici, $\alpha = \beta = \delta = 1$, $\gamma = 0$ et $m = 2$. D'où, en utilisant la formule ci-dessus, on peut écrire que

$$\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{t}{t^2-1}\,2t\,\mathrm{d}t = 2\int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_2^3 \mathrm{d}t + \int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = 2t\Big|_2^3 + \mathrm{Log}\left|\frac{t-1}{t+1}\right|_2^3$$

$$= 2 + \mathrm{Log}\,\frac{3}{2}.$$

7.3.11 Intégration d'une fonction du type $R\,(x, \sqrt{\beta^2\,x^2 + \alpha^2}\,)$

Soit α, β deux nombres réels positifs. En effectuant le changement de variable

$$x = \frac{\alpha}{\beta}\,\mathrm{sh}\,t \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R},$$

on transforme l'intégrale

$$\int_a^b R\,(x, \sqrt{\beta^2 x^2 + \alpha^2}\,)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{Argsh}\left(\frac{\beta a}{\alpha}\right)}^{\mathrm{Argsh}\left(\frac{\beta b}{\alpha}\right)} R\left(\frac{\alpha}{\beta}\,\mathrm{sh}\,t, \alpha\,\mathrm{ch}\,t\right)\frac{\alpha}{\beta}\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t$$

en une intégrale que l'on sait calculer (§ 7.3.6).

Par exemple, calculons l'intégrale

$$J = \int_0^1 \sqrt{\beta^2 x^2 + \alpha^2}\,\mathrm{d}x$$

En utilisant la transformation ci-dessus, on obtient que

$$J = \int_0^{\mathrm{Argsh}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} \alpha\,\mathrm{ch}\,t\,\frac{\alpha}{\beta}\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha^2}{\beta}\int_0^{\mathrm{Argsh}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} \mathrm{ch}^2\,t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\alpha^2}{\beta}\int_0^{\mathrm{Argsh}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} \frac{1}{2}(\mathrm{ch}2t+1)\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha^2}{2\beta}\,(\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t + t)\Big|_0^{\mathrm{Argsh}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2+\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{2\beta}\,\mathrm{Argsh}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

7.3.12 Intégration d'une fonction du type $R\,(x, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}\,)$

Soit α, β deux nombres réels positifs et $a < b$ deux éléments de $[-\alpha/\beta, \alpha/\beta]$. Alors, en faisant le changement de variable

$$x = \frac{\alpha}{\beta} \sin t \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R},$$

on transforme l'intégrale

$$\int_a^b R\,(x, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}\,)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{Arcsin}\left(\frac{\beta a}{\alpha}\right)}^{\mathrm{Arcsin}\left(\frac{\beta b}{\alpha}\right)} R\left(\frac{\alpha}{\beta} \sin t, \alpha \cos t\right) \frac{\alpha}{\beta} \cos t \,\mathrm{d}t$$

en une intégrale que l'on sait calculer (§ 7.3.7).

Calculons l'intégrale

$$J = \int_{-\alpha/\beta}^{\alpha/\beta} \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pour cela, utilisons la transformation ci-dessus; ce qui donne

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \alpha \cos t \,\frac{\alpha}{\beta} \cos t \,\mathrm{d}t = \frac{\alpha^2}{\beta} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{\alpha^2}{\beta} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\alpha^2}{2\beta} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\alpha^2 \pi}{2\beta}.$$

7.3.13 Intégration d'une fonction du type $R\,(x, \sqrt{\beta^2 x^2 - \alpha^2}\,)$

Soit α, β deux nombres réels positifs. Alors, si $b > a \geqslant \alpha/\beta$, le changement de variable

$$x = \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{ch} t \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

transforme l'intégrale

$$\int_a^b R\,(x, \sqrt{\beta^2 x^2 - \alpha^2}\,)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{Argch}\left(\frac{\beta a}{\alpha}\right)}^{\mathrm{Argch}\left(\frac{\beta b}{\alpha}\right)} R\left(\frac{\alpha}{\beta} \operatorname{ch} t, \alpha \operatorname{sh} t\right) \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh} t \,\mathrm{d}t$$

en une intégrale que l'on sait calculer (§ 7.3.6). Tandis que, si $a < b \leqslant -\alpha/\beta$, c'est le changement de variable

$$x = -\frac{\alpha}{\beta} \operatorname{ch} t \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

qui transforme l'intégrale

$$\int_a^b R\left(x, \sqrt{\beta^2 x^2 - \alpha^2}\right) \mathrm{d}x = \int_{\mathrm{Argch}\left(\frac{-\beta a}{\alpha}\right)}^{\mathrm{Argch}\left(\frac{-\beta b}{\alpha}\right)} R\left(\frac{-\alpha}{\beta} \operatorname{ch} t, \alpha \operatorname{sh} t\right) \frac{-\alpha}{\beta} \operatorname{sh} t \, \mathrm{d}t$$

en une intégrale connue (§ 7.3.6).

Par exemple, calculons l'intégrale suivante

$$\int_1^2 \sqrt{x^2 - 1} \, \mathrm{d}x.$$

Ici, $\alpha = \beta = 1$ et $b = 2 > a = 1 \geqslant \alpha/\beta = 1$. D'où, en utilisant la première formule, on peut écrire que

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{x^2 - 1} \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\mathrm{Argch}\,2} \operatorname{sh}^2 t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{Argch}\,2} \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2t - 1) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - t) \Big|_0^{\mathrm{Argch}2} = \sqrt{3} - \frac{1}{2} \mathrm{Argch}\,2\,.\end{aligned}$$

7.4 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX ET SES PROPRIÉTÉS

7.4.1 Définition d'une fonction continue par morceaux

Soit $a < b$ deux nombres réels. Une fonction $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite *continue par morceaux* s'il existe n éléments de $[a, b]$

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$$

et n fonctions continues $f_i : [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{R}$ telles que pour tout entier $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout élément x de $]a_{i-1}, a_i[$, on ait : $f_i(x) = f(x)$ (fig. 7.7).

D'une manière générale, le choix de la subdivision $\{a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b\}$ de $[a,b]$ n'est pas unique; mais néanmoins, lorsque ce choix a été fait, les fonctions continues f_i sont univoquement déterminées. D'autre part, une fonction continue $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ est, par définition, continue par morceaux, car il suffit de prendre $a_0 = a, a_1 = b$ et $g_1 = g$.

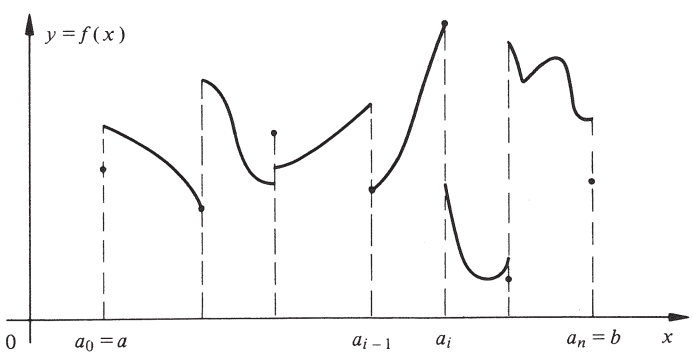


Fig. 7.7

7.4.2 Propriétés élémentaires des fonctions continues par morceaux

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux. Alors,

- pour tout couple de nombres réels α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ est continue par morceaux ;
- de même, les fonctions fg et $|f|$ sont continues par morceaux.

7.4.3 Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Alors, il existe une subdivision $\{a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b\}$ de $[a, b]$ et n fonctions continues $f_i : [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{R}$ telles que pour tout entier $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout élément x de $]a_{i-1}, a_i[$, on ait : $f_i(x) = f(x)$. On constate, grâce au résultat obtenu au paragraphe 7.1.10, que la somme

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i\,(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

est indépendante du choix de la subdivision $\{a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b\}$ considérée; cette somme est, par définition, appelée l'*intégrale* de la fonction f sur $[a, b]$ et on la note

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi, par définition,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Pour définir la notion d'intégrale d'une fonction continue par morceaux, nous avons supposé que $a < b$. Dans le cas contraire où $b < a$, on posera, par définition que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = - \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Enfin, si $a = b$, on posera, par définition, que

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Toutes ces notations sont cohérentes, car la définition de l'intégrale que nous venons de donner ci-dessus généralise, à des fonctions continues par morceaux, la notion d'intégrale donnée au paragraphe 7.1.6 pour des fonctions continues.

7.4.4 Principales propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $a < b$ deux nombres réels et soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux. Alors,

— pour tout couple de nombres réels α et β, on peut écrire l'égalité suivante :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx\,;$$

— pour tout élément c de $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

De plus, si pour tout $x \in [a, b] : f(x) \geqslant 0$, on obtient que

$$0 \leqslant \int_a^c f(x)\, dx \leqslant \int_a^b f(x)\, dx\,;$$

— si pour tout $x \in [a, b] : f(x) \leqslant g(x)$, on peut écrire l'inégalité suivante :

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b g(x)\, dx\,;$$

— $$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

7.4.5 Remarque

En regardant les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux données au paragraphe 7.4.4, il ne faudrait pas en conclure, trop hâtivement, que toutes les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue restent valables lorsque cette fonction n'est que continue par morceaux. Pour nous en convaincre, considérons la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 9 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \in]0, 1]. \end{cases}$$

Cette fonction est continue par morceaux; mais, par contre, il n'existe aucun élément c de $[-1,1]$ tel que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0 = f(c).$$

Cet exemple nous montre, qu'en général, le théorème de la moyenne (§ 7.1.11) n'est pas valable pour une fonction qui est seulement continue par morceaux. Néamoins, certains résultats obtenus dans la section 7.1 restent en partie valables; nous pourrons le constater en comparant les résultats du lemme 7.1.13 avec ceux de la proposition 7.4.6.

7.4.6 Proposition

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Alors, la fonction $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est continue. D'autre part, F est différentiable en tout point x_0 de $]a, b[$ où la fonction f est continue et, de plus, on a : $F'(x_0) = f(x_0)$.

DÉMONSTRATION. Puisque pour tout couple $x < y$ d'éléments de $[a, b]$:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M(y - x)$$

où $M = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$, on a bien que la fonction F est continue sur $[a, b]$.

D'autre part, étant donné que la fonction $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, on sait qu'il existe une subdivision $\{a = a_0, a_1, ..., a_n = b\}$ de $[a, b]$ et n fonctions continues $f_i : [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{R}$ telles que pour tout entier $i \in \{1, ..., n\}$ et tout élément x de $]a_{i-1}, a_i[$, on ait : $f_i(x) = f(x)$. Ainsi, en faisant l'hypothèse supplémentaire que $x_0 \notin \{a_0, a_1, ..., a_n\}$, on peut affirmer qu'il existe un entier $p \in \{1, ..., n\}$ tel que $x_0 \in]a_{p-1}, a_p[$. Par suite, en remarquant que pour tout élément x de $]a_{p-1}, a_p[$:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{p-1} \left(\int_{a_{i=1}}^{a_i} f_i(t)\,\mathrm{d}t \right) + \int_{a_{p-1}}^{x} f_p(t)\,\mathrm{d}t,$$

on obtient (lemme 7.1.13) que

$$F'(x_0) = f_p(x_0) = f(x_0).$$

Supposons à présent que $x_0 \in \{a_0, a_1, ..., a_n\}$. Alors, les deux assertions : $x_0 \in]a, b[$ et f continue en x_0, impliquent qu'il existe un entier $k \in \{1, ..., n-1\}$ tel que $x_0 = a_k$ et $f_k(x_0) = f_{k+1}(x_0) = f(x_0)$; ce qui a pour conséquence que la fonction $g: [a_{k-1}, a_{k+1}] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} f_k(x) & \text{si } x \in [a_{k-1}, a_k] \\ f_{k+1}(x) & \text{si } x \in [a_k, a_{k+1}] \end{cases}$$

est continue. Finalement, en constatant que pour tout $x \in]a_{k-1}, a_{k+1}[$:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\,\mathrm{d}t \right) + \int_{a_{k-1}}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t,$$

on obtient immédiatement que

$$F'(x_0) = g(x_0) = f(x_0).$$

■

7.5 EXERCICES

7.5.1 Calculer les intégrales suivantes:

1) $\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}}\,dx$

2) $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{1+\cos x + \operatorname{tg}^2 x}\,dx$

3) $\int_0^1 e^{-2x}\cos(2\pi x)\,dx$

4) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}\,(\sqrt{x+1}+1)}$

5) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}+1}\,dx$

6) $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+2)^3}$

7) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$

8) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos 2x\,dx$

9) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$

10) $\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x}}$

11) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,dx$

12) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$

13) $\int_7^{26} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}\,dx$

14) $\int_0^{\pi/3} \cos^5 x \sin x\,dx$

15) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$

16) $\int_2^3 \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2}\,dx$

17) $\int_1^2 \frac{x^2 \operatorname{Log} x}{(x^3+1)^3}\,dx$

18) $\int_0^1 \frac{dx}{2\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x + 1}$

19) $\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

20) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(x^3-1)^2}$.

7.5.2 Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2\sqrt[3]{n^3+k^3}}\,.$$

7.5.3 Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_n = \int_0^n \frac{t}{(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)^n} \, dt.$$

7.5.4 Soit (x_n) la suite définie par

$$x_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt.$$

1) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt$.

2) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$.

3) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$: $x_n = \dfrac{n-1}{n} x_{n-2}$.

4) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{x_{2n}}{x_{2n+1}} = 1$.

7.5.5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable sur $\mathbb{R}$ et soit (α_n) une suite de nombres réels positifs telle que $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = l > 0$.
Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t) \sin(n \alpha_n t) \, dt = 0.$$

7.5.6 Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [\, a, b \,] \to]\, 0, +\infty \,[$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b (f(t))^n \, dt \right)^{1/n} = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

7.5.7 Calculer

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+tx}}}{t}.$$

7.5.8 Trouver le maximum et le minimum de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_x^{x+\pi/2} (1 + \cos^2 t) \, dt.$$

7.5.9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = e^{-x} \int_0^{x^2} e^{-t-t^2}\, dt.$$

1) Calculer $f(0), f'(0)$ et $f''(0)$.

2) La fonction f admet-elle un extremum local au point $x = 0$?

7.5.10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^x e^{\sin^2 t}\, dt.$$

Trouver son développement limité d'ordre 5 autour de zéro.

7.5.11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. En désignant par le nombre T une période de la fonction f, montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^T f(t)\, dt = \int_a^{a+T} f(t)\, dt.$$

7.5.12 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective et continûment différentiable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout couple de nombres réels $a < b$:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\, dt = (bf(b) - af(a)) - \int_a^b f(t)\, dt.$$

7.5.13 Soit $a < b$ deux nombres réels et $f, g : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(x) g(x)\, dx\right)^2 = \left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\, dx\right)$$

si et seulement si les deux fonctions f et g sont linéairement dépendantes (§ 9.3.3).

7.5.14 Montrer que toute fonction continue $f : [\,0,1\,] \to \,]\,0, +\infty\,[$ vérifie l'inégalité suivante:

$$\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)\left(\int_0^1 \frac{dx}{f(x)}\right) \geqslant 1.$$

Pour quelles fonctions a-t-on l'égalité?

7.5.15 Soit $f, g : [\,0,1\,] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues croissantes sur $[\,0,1\,]$. Montrer que

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

7.5.16 Soit $a < b$ deux nombres réels et $f, g : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. En supposant que $g([\,a, b\,]) \subset [\,0, +\infty\,[$, montrer qu'il existe au moins un élément c de $[\,a, b\,]$ pour lequel on ait :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

7.5.17 Calculer

$$\lim_{x \to 0+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

7.5.18 Calculer la longueur de l'arc de la chaînette d'équation $y = \operatorname{ch} x$ compris entre les points d'abscisse $x = 0$ et $x = 1$.

7.5.19 Déterminer l'aire du domaine compris entre la parabole d'équation $y = 2x^2$ et une de ses cordes.

7.5.20 Soit T le tore engendré par la rotation du cercle d'équation $x^2 + (y-2)^2 = 1$ autour de l'axe $0x$.

1) Calculer l'aire de la surface de T.

2) Calculer le volume de T.

7.5.21 Calculer les intégrales suivantes (§ 1.3.3) :

1) $\displaystyle\int_0^2 x\,[\,x^2]\,\mathrm{d}x$ 2) $\displaystyle\int_{1/7}^1 [1/x]\,\mathrm{d}x.$

7.5.22 A chaque entier $n \geqslant 1$, associons la fonction $g_n : [\,0,1\,] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [\,0,1/n] \\ 0 & \text{si } x \in]\,1/n, 1\,]. \end{cases}$$

En supposant que $f : [\,0,1\,] \to \mathbb{R}$ soit une fonction continue, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t)g_n(t)\,\mathrm{d}t = f(0).$$

8. Intégrales généralisées

8.1 CONVERGENCE DES INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES DÉFINIES SUR UN INTERVALLE BORNÉ

8.1.1 Définition d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert et borné

Soit $a < b$ deux nombres réels. Une fonction $f\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ (resp. $f\colon]a, b] \to \mathbb{R}$) est dite *continue* si elle est continue en tout point de $]a, b[$, continue à droite en a (resp. à gauche en b).

8.1.2 Définition d'une intégrale généralisée convergente

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Considérons la fonction continue $F\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Si la fonction F admet une limite à gauche au point b, on dit que l'*intégrale généralisée*

$$\int_a^{b-} f(t)\,dt$$

existe ou *converge* et l'on pose, par définition, que

$$\int_a^{b-} f(t)\,dt = \lim_{x \to b-} F(x).$$

Dans le cas contraire, lorsque F ne possède pas de limite à gauche au point b, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(t)\,dt$$

n'existe pas ou encore qu'elle *diverge*.

8.1.3 Relation entre les différentes intégrales

Soit $f\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite à gauche au point b. Alors, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(x)\,dx$$

existe et, de plus, on a :

$$\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b} \hat{f}_b(x)\,\mathrm{d}x$$

où $\hat{f}_b$: $[a, b] \to \mathbb{R}$ est la fonction continue définie par

$$\hat{f}_b(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, b[\\ \lim\limits_{x \to b-} f(x) & \text{si } x = b. \end{cases}$$

Ce résultat nous montre que si une fonction continue sur $[a, b[$ peut être prolongée par continuité au point b, la notion d'intégrale généralisée et la notion d'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b]$ (§ 7.1.6) se confondent.

8.1.4 Exemple

Soit $\alpha \neq 1$ un nombre réel. Alors, en remarquant que pour tout $a \leqslant x < b$:

$$F(x) = \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha} = -\left.\frac{(b-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_a^x ,$$

on obtient que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$$

converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geqslant 1$. De plus, pour tout $\alpha < 1$:

$$\int_a^{b-} \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} .$$

Grâce à cet exemple, on voit qu'une fonction f : $[a, b[\to \mathbb{R}$ n'a pas besoin d'être bornée pour que son intégrale généralisée existe (fig. 8.1).

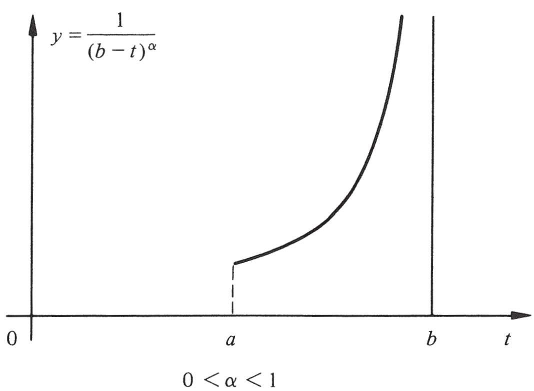


Fig. 8.1

8.1.5 Linéarité de l'intégrale généralisée

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que les deux intégrales généralisées

$$\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^{b-} g(x)\,\mathrm{d}x$$

existent. Alors, pour tout couple de nombres réels α et β, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x$$

converge et, de plus, on a:

$$\int_a^{b-} (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^{b-} f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^{b-} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser la linéarité de la limite d'une fonction (§ 4.2.10). ∎

8.1.6 Propriété relative à l'intervalle d'intégration

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que son intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

existe. Alors, pour tout élément c de $[a, b[$, l'intégrale généralisée

$$\int_c^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge et, de plus, on a:

$$\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. En remarquant que pour tout $x \in [a, b[$:

$$\int_c^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{c} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

on obtient, en passant à limite, que

$$\int_c^{b-} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{b-} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{c} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par conséquent

$$\int_a^{b-} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{b-} f(t)\,\mathrm{d}t.$$ ∎

8.1.7 Conservation des relations d'ordre

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $x \in [a, b[$, on ait : $f(x) \leqslant g(x)$. Alors, si les deux intégrales généralisées

$$\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^{b-} g(x)\,\mathrm{d}x$$

convergent, on peut écrire que

$$\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^{b-} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. En remarquant que pour tout $x \in [a, b[$:

$$\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{x} g(t)\,\mathrm{d}t,$$

on obtient, en passant à limite, que

$$\int_a^{b-} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{b-} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

■

8.1.8 Intégrale généralisée d'une fonction positive ou nulle

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $t \in [a, b[$, on ait : $f(t) \geqslant 0$. Alors, s'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que pour tout élément x de $[a, b[$:

$$\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M,$$

l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge,}$$

sinon

$$\lim_{x \to b-} \int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

DÉMONSTRATION. Etant donné que $f \geqslant 0$, la fonction continue $F : [a, b[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est croissante. D'où, en utilisant les assertions données au paragraphe 4.2.33, on obtient immédiatement les résultats énoncés ci-dessus. ■

8.1.9 Critère de comparaison

Soit $f, g : [a, b[\rightarrow$ deux fonctions continues et supposons qu'il existe un élément c de $[a, b[$ tel que pour tout $x \in [c, b[$, on ait :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x).$$

Alors,

– l'hypothèse que $\int_a^{b-} g(x)\,dx$ converge entraîne que $\int_a^{b-} f(x)\,dx$ converge ;

– l'hypothèse que $\int_a^{b-} f(x)\,dx$ diverge entraîne que $\int_a^{b-} g(x)\,dx$ diverge.

DÉMONSTRATION. En premier lieu, supposons que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} g(t)\,dt$$

existe. Alors, l'intégrale généralisée (§ 8.1.6)

$$\int_c^{b-} g(t)\,dt$$

converge. Ainsi, en remarquant que pour tout $x \in [c, b[$:

$$0 \leqslant \int_c^{x} f(t)\,dt \leqslant \int_c^{x} g(t)\,dt \leqslant \int_c^{b-} g(t)\,dt = M < +\infty$$

et

$$\int_a^{x} f(t)\,dt = \int_a^{c} f(t)\,dt + \int_c^{x} f(t)\,dt,$$

on obtient (§ 8.1.8) que l'intégrale généralisée

$\int_a^{b-} f(t)\,dt$ converge.

Supposons à présent que l'intégrale généralisée

$$J = \int_a^{b-} f(t)\,dt$$

diverge. Alors, $J = +\infty$. Par suite, étant donné que pour tout $x \in [a, b[$:

$$\int_a^{x} g(t)\,dt = \int_a^{c} g(t)\,dt + \int_c^{x} g(t)\,dt \geqslant \int_a^{c} g(t)\,dt - \int_a^{c} f(t)\,dt$$

$$+ \int_a^{x} f(t)\,dt,$$

on peut affirmer que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge.}$$

■

8.1.10 Critère de convergence

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. D'autre part, supposons qu'il existe un élément α de $\mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \to b-} (b-x)^{\alpha} f(x) = l \neq 0.$$

Alors, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geqslant 1$.

DÉMONSTRATION. Pour établir ce critère, faisons l'hypothèse que $l > 0$ (l'autre cas s'obtenant en remplaçant f par $-f$). Ainsi, le fait que

$$\lim_{x \to b-} (b-x)^{\alpha} f(x) = l > 0,$$

implique qu'il existe un élément c de $[a, b[$ tel que pour tout $x \in [c, b[$, on ait :

$$\frac{1}{2} l \leqslant (b-x)^{\alpha} f(x) \leqslant 2l$$

ou encore

$$\frac{l}{2(b-x)^{\alpha}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2l}{(b-x)^{\alpha}}.$$

D'où, en utilisant les résultats obtenus aux paragraphes 8.1.4 et 8.1.9, on peut affirmer que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geqslant 1$. ■

8.1.11 Exemple

Soit $f\colon [0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}.$$

Le fait que

$$\lim_{x \to 1-} \sqrt{1-x}\; f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

implique (§ 8.1.10) que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{1-} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^3}}$$

est convergente.

8.1.12 Définition d'une intégrale généralisée absolument convergente

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est *absolument convergente* si l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

est convergente.

8.1.13 Lemme

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que son intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

soit absolument convergente. Alors, les deux intégrales généralisées

$$\int_a^{b-} f^+(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^{b-} f^-(x)\,\mathrm{d}x$$

sont convergentes.

DÉMONSTRATION. Par définition, pour tout $x \in [a, b[$:

$$0 \leqslant f^+(x) \leqslant |f(x)|$$

et

$$0 \leqslant f^-(x) \leqslant |f(x)|.$$

Ainsi, en utilisant le critère de comparaison donné au paragraphe 8.1.9, on obtient que la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

entraîne celle des deux intégrales généralisées

$$\int_a^{b-} f^+(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^{b-} f^-(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

8.1.14 Relation entre les différentes convergences

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(x)\,dx$$

est absolument convergente, alors elle est convergente.

DÉMONSTRATION. Il résulte du lemme 8.1.13 que les deux intégrales généralisées

$$\int_a^{b-} f^+(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^{b-} f^-(x)\,dx$$

sont convergentes. Comme, d'autre part, pour tout $x \in [a, b[$:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x),$$

on obtient, grâce au résultat donné au paragraphe 8.1.5, que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(x)\,dx$$

est convergente. ■

8.1.15 Convergence de l'intégrale généralisée d'une fonction continue et bornée

Soit $a < b$ deux nombres réels. Si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée, alors son intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} f(x)\,dx$$

est absolument convergente.

DÉMONSTRATION. En posant $M = \operatorname{Sup}_{x \in [a,b[} |f(x)|$, on obtient que pour tout élément x de $[a, b[$:

$$\int_a^{x} |f(t)|\,dt \leqslant M(b-a);$$

ce qui implique (§ 8.1.8) que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b-} |f(t)|\,dt$$

converge. D'où le résultat. ■

8.1.16 Exemple

Montrons que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{1-} \frac{1}{1-x} \sin\left(\frac{1}{1-x}\right) dx$$

converge. Pour cela, considérons la fonction auxiliaire $f:]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Cette fonction étant continue et bornée sur $[0,1[$, son intégrale généralisée

$$\int_0^{1-} \cos\left(\frac{1}{1-x}\right) \mathrm{d}x$$

converge et, de plus,

$$\lim_{x \to 1-} (1-x) \cos\left(\frac{1}{1-x}\right) = 0.$$

D'autre part, en remarquant que pour tout élément x de $]-\infty, 1[$:

$$f'(x) = \frac{-1}{(1-x)^2} \sin\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

on obtient, en intégrant par parties, que pour tout $t \in [0,1[$:

$$\int_0^t \frac{1}{1-x} \sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \mathrm{d}x = -(1-x) \cos\left(\frac{1}{1-x}\right)\Big|_0^t - \int_0^t \cos\left(\frac{1}{1-x}\right) \mathrm{d}x;$$

ce qui implique, le second membre de cette égalité possédant une limite à gauche lorsque t tend vers b, que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{1-} \frac{1}{1-x} \sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \mathrm{d}x$$

converge.

8.1.17 Exemple

Montrons que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{1-} \frac{1}{1-x} \sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \mathrm{d}x$$

n'est pas absolument convergente. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons le contraire. Alors, il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que

$$M = \lim_{x \to 1-} \int_0^x \frac{1}{1-t} \left|\sin\left(\frac{1}{1-t}\right)\right| \mathrm{d}t.$$

D'autre part, en posant pour tout entier $k \geqslant 0$:

$$a_k = 1 - \frac{3}{(6k+1)\pi} \qquad \text{et} \qquad b_k = 1 - \frac{3}{(6k+2)\pi},$$

on obtient que pour tout $t \in [a_k, b_k]$:

$$\left|\sin\left(\frac{1}{1-t}\right)\right| \geqslant \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, on peut écrire que

$$M \geqslant \int_0^{b_n} \frac{1}{1-t}\left|\sin\left(\frac{1}{1-t}\right)\right| \mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=0}^{n}\left(\int_{a_k}^{b_k} \frac{1}{1-t}\left|\sin\left(\frac{1}{1-t}\right)\right| \mathrm{d}t\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{a_k}^{b_k}\frac{\mathrm{d}t}{1-t}\right) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(b_k-a_k)}{1-a_k}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{6k+2} \geqslant \frac{1}{12}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+(1/3)} \geqslant \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Etant donné (§ 3.1.5 et 3.2.6) que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = +\infty,$$

ce résultat est impossible. D'où contradiction. On a ainsi démontré que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{1-}\frac{1}{1-t}\left|\sin\left(\frac{1}{1-t}\right)\right|\mathrm{d}t$$

diverge.

8.1.18 Remarque

Les exemples 8.1.16 et 8.1.17 nous montrent qu'une intégrale généralisée peut très bien être convergente sans pour autant être absolument convergente.

8.1.19 Intégrale généralisée par rapport à sa borne inférieure

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Considérons la fonction continue $G :]a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$G(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si la fonction G admet une limite à droite au point a, on dit que l'*intégrale généralisée*

$$\int_{a+}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$$

existe ou *converge* et l'on pose, par définition, que

$$\int_{a+}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a+} G(x).$$

Dans le cas contraire, lorsque la fonction G ne possède pas de limite à droite au point a, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$$

n'existe pas ou encore qu'elle *diverge*.

De même, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est *absolument convergente* si l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

est convergente.

8.1.20 Remarque

Tous les résultats que nous avons obtenus concernant une intégrale généralisée du type

$$\int_{a}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

restent valables pour une intégrale généralisée du type

$$\int_{a+}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

8.1.21 Exemple

En constatant que pour tout $x \in]0,1]$:

$$|\operatorname{Log} x| \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}},$$

on obtient que l'intégrale généralisée

$$\int_{0+}^{1} \frac{\operatorname{Log} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

est absolument convergente, donc convergente.

8.1.22 Intégrale d'une fonction définie sur un intervalle ouvert et borné

Soit $a < b$ deux nombres réels, $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a, b[$ et c un élément de $]a, b[$. Si les deux intégrales généralisées

$$\int_{a+}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{c}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

convergent, on dit que l'*intégrale généralisée*

$$\int_{a+}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

existe ou *converge* et l'on pose, par définition, que

$$\int_{a+}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans le cas contraire, lorsque l'une ou l'autre des deux intégrales généralisées

$$\int_{a+}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad \int_{c}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

n'existe pas, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

n'existe pas ou encore qu'elle *diverge*.

De même, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est *absolument convergente* si l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b-} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

est convergente.

Il faut, par souci de cohérence, vérifier que les définitions données ci-dessus sont indépendantes du choix du nombre réel c. Pour cela, considérons un autre élément d de $]a, b[$. Ainsi, en constatant que l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\text{resp.} \int_{c}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

converge si et seulement si l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\text{resp.} \int_{d}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

converge et que, lorsqu'il y a convergence,

$$\begin{aligned}\int_{a+}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{a+}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{d}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{a+}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{d}^{b-} f(x)\,\mathrm{d}x;\end{aligned}$$

on peut affirmer que les définitions données ci-dessus sont indépendantes du nombre réel c choisi.

8.1.23 Exemple

Soit r, s deux nombres réels. En utilisant le critère de convergence (§ 8.1.10), on obtient que les intégrales généralisées

$$\int_{0+}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x^r(1-x)^s} \quad \text{et} \quad \int_{1/2}^{1-} \frac{\mathrm{d}x}{x^r(1-x)^s}$$

convergent si $r < 1$ et $s < 1$ et que l'une au moins diverge si $r \geqslant 1$ ou $s \geqslant 1$; ceci implique que l'intégrale généralisée

$$\int_{0+}^{1-} \frac{\mathrm{d}x}{x^r(1-x)^s}$$

n'existe que lorsque r et s vérifient à la fois:

$$r < 1 \quad \text{et} \quad s < 1.$$

8.2 CONVERGENCE DES INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES DÉFINIES SUR UN INTERVALLE NON BORNÉ

8.2.1 Définition d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert non borné

Soit a, b deux nombres réels. Une fonction $f: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ (resp. $f:]-\infty, b] \to \mathbb{R}$) est dite *continue* si elle est continue en tout point de $]a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, b[$), continue à droite en a (resp. à gauche en b).

8.2.2 Définition d'une intégrale généralisée convergente

Soit $f: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Considérons la fonction continue $F: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si la fonction F admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$, on dit que l'*intégrale généralisée*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

existe ou *converge* et l'on pose, par définition:

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} F(x).$$

Dans le cas contraire, lorsque F ne possède pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

n'existe pas ou encore qu'elle *diverge*.

8.2.3 Exemple

Soit $\beta \neq 1$ un nombre réel. Alors, en remarquant que pour tout $x \geqslant a > 0$:

$$F(x) = \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\beta} = \left.\frac{t^{1-\beta}}{1-\beta}\right|_a^x,$$

on obtient que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\beta}$$

converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta \leqslant 1$. De plus, pour tout $\beta > 1$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\beta} = \frac{1}{(\beta-1)\,a^{\beta-1}}.$$

8.2.4 Propriétés des intégrales généralisées convergentes

Soit $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que les deux intégrales généralisées

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$$

existent. Alors,

– pour tout couple de nombres réels α et β, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x$$

converge et, de plus, on a:

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x;$$

– pour tout nombre réel $c > a$, l'intégrale généralisée

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge et, de plus, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

– si pour tout $x \in [a, +\infty[\, : f(x) \leqslant g(x)$, on peut écrire l'inégalité suivante :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de réécrire les démonstrations données aux paragraphes 8.1.5, 8.1.6 et 8.1.7 en remplaçant $b-$ par $+\infty$. ■

8.2.5 Intégrale généralisée d'une fonction positive ou nulle

Soit $f : [a, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $t \geqslant a$, on ait : $f(t) \geqslant 0$. Alors, s'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que pour tout élément x de $[a, +\infty[$:

$$\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M,$$

l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge},$$

sinon

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

DÉMONSTRATION. Même démonstration que celle donnée au paragraphe 8.1.8 à condition de remplacer $b-$ par $+\infty$ et d'utiliser les résultats du paragraphe 4.2.23 au lieu de ceux du paragraphe 4.2.33. ■

8.2.6 Critère de comparaison

Soit $f, g : [a, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et supposons qu'il existe un élément c de $[a, +\infty[$ tel que pour tout $x \geqslant c$, on ait :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x).$$

Alors,

– l'hypothèse que $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge entraîne que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge ;

– l'hypothèse que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge entraîne que $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

DÉMONSTRATION. Identique à celle donnée au paragraphe 8.1.9 à condition de remplacer $b-$ par $+\infty$. ■

8.2.7 Corollaire

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant les deux propriétés suivantes :

- l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge ;
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Alors, $l = 0$.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer que $l = 0$, il nous suffit de prouver que les deux autres cas possibles, à savoir $l < 0$ et $l > 0$, sont à exclure.

Supposons que $l > 0$. Alors, il existe un élément c de $[a, +\infty[$ tel que pour tout $x \geqslant c$, on ait :

$$0 < \frac{l}{2} \leqslant f(x);$$

ce qui implique, grâce au critère de comparaison (§ 8.2.6), que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$$

diverge. Ce cas est donc à exclure.

Supposons à présent que $l < 0$. En remplaçant f par $-f$, on démontre de la même manière que ce cas est aussi à exclure. D'où le résultat. ∎

8.2.8 Remarque

Contrairement à ce que pourrait faire croire le corollaire 8.2.7, une fonction $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ dont l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$$

converge, n'est pas obligatoirement bornée. Dans le but de donner un exemple d'une telle fonction, considérons la suite (f_n) d'éléments de $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ définie, pour chaque entier $n > 1$, par

$$f_n(t) = \begin{cases} n^4\left(t - \left(n - \dfrac{1}{n^3}\right)\right) & \text{si } t \in \left[n - \dfrac{1}{n^3}, n\right] \\ -n^4\left(t - \left(n + \dfrac{1}{n^3}\right)\right) & \text{si } t \in \left[n, n + \dfrac{1}{n^3}\right] \\ 0 & \text{si } t \in \left\{ y \in \mathbb{R}_+ : y < n - \dfrac{1}{n^3} \right. \\ & \qquad \left. \text{ou } y > n + \dfrac{1}{n^3} \right\} \end{cases}$$

et

$$f_0(t) = f_1(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geqslant 0 \text{ (fig. 8.2).}$$

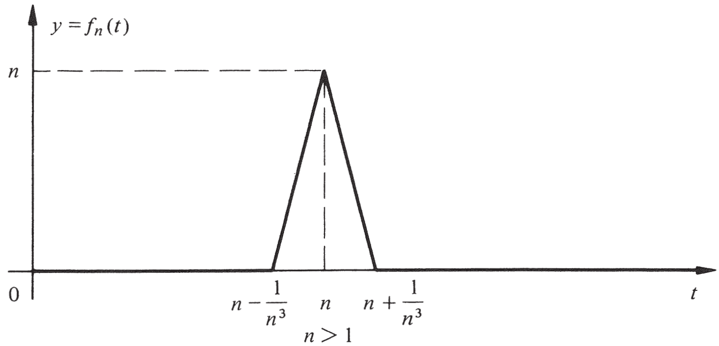


Fig. 8.2

Ainsi, la fonction continue $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \sum_{n=1}^{[t]+1} f_n(t)$$

n'est pas bornée; mais, par contre, en remarquant que pour tout $x \geqslant 0$:

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{[x]+1} \int_0^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{[x]+1} \frac{1}{k^2} \leqslant M = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty,$$

on obtient (§ 8.2.5) que son intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge.

8.2.9 Critère de convergence

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons qu'il existe un nombre réel β tel que

$$\lim_{x \to +\infty} x^\beta f(x) = l \neq 0.$$

Alors, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta \leqslant 1$.

DÉMONSTRATION. Même démonstration que celle donnée au paragraphe 8.1.10 à condition de remplacer $b-$ par $+\infty$ et d'utiliser les résultats des paragraphes 8.2.3 et 8.2.6 au lieu de ceux des paragraphes 8.1.4 et 8.1.9. ■

8.2.10 Exemple

En remarquant, grâce à la règle de Bernoulli-l'Hospital, que

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \operatorname{Arctg} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{Arctg} 1/x^2}{1/x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{1+x^4} = 1,$$

on peut affirmer (§ 8.2.9) que l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{Arctg} \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t$$

converge.

8.2.11 Définition d'une intégrale généralisée absolument convergente

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$$

est *absolument convergente* si l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

est convergente.

8.2.12 Propriétés des intégrales généralisées absolument convergentes

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue dont l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$$

est absolument convergente. Alors,

– les deux intégrales généralisées

$$\int_a^{+\infty} f^+(x) \, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_a^{+\infty} f^-(x) \, \mathrm{d}x$$

sont convergentes;

– l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$$

est convergente.

DÉMONSTRATION. Il suffit de réécrire les démonstrations données aux paragraphes 8.1.13 et 8.1.14 en remplaçant $b-$ par $+\infty$. ■

8.2.13 Remarque

En intégrant par parties, il est facile de vérifier que l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$$

est convergente; mais, par contre, on peut démontrer (exemple 8.1.17) qu'elle n'est pas absolument convergente. Cet exemple nous permet donc d'affirmer qu'une intégrale généralisée peut très bien être convergente sans pour autant être absolument convergente.

8.2.14 Intégrale d'une fonction définie sur un intervalle ouvert non borné

Soit $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et c un élément de $]a, +\infty[$. Si les deux intégrales généralisées

$$\int_{a+}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

convergent, on dit que l'*intégrale généralisée*

$$\int_{a+}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

existe ou *converge* et l'on pose, par définition, que

$$\int_{a+}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans le cas contraire, lorsque l'une ou l'autre des deux intégrales généralisées

$$\int_{a+}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

n'existe pas, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

n'existe pas ou encore qu'elle *diverge*.

De même, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est *absolument convergente* si l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

est convergente.

On vérifie facilement que les définitions données ci-dessus sont indépendantes du nombre réel c choisi (§ 8.1.22).

8.2.15 Exemple

D'une part, en remarquant que pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$0 \leqslant \operatorname{Log} x \leqslant 2\sqrt{x}$, on obtient que l'intégrale généralisée

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$$

converge. D'autre part, on sait (exemple 8.1.21) que l'intégrale généralisée

$$\int_{0+}^{1} \frac{\operatorname{Log} x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$$

existe. Ainsi, par définition, l'intégrale généralisée

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$$

est convergente. De plus, en effectuant le changement de variable

$$x = \frac{1}{t} \quad \text{avec} \quad t > 0,$$

on obtient que

$$\int_{0+}^{1} \frac{\operatorname{Log} x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = -\int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} t}{1+t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Par conséquent

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \int_{0+}^{1} \frac{\operatorname{Log} x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x + \int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = 0.$$

8.2.16 Intégrale d'une fonction définie sur un intervalle non borné inférieurement

Par analogie, toutes les définitions et tous les résultats de cette section concernant une intégrale généralisée du type

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x \quad \left(\text{resp.} \int_{a+}^{+\infty} g(x)\, \mathrm{d}x\right)$$

s'appliquent, sans autre, à une intégrale généralisée du type

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x \quad \left(\text{resp.} \int_{-\infty}^{b-} g(x)\, \mathrm{d}x\right).$$

D'autre part, si la fonction $h :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue, toutes les définitions données au paragraphe 8.2.14, à condition de remplacer $a+$ par $-\infty$, sont applicables à l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, \mathrm{d}x.$$

8.2.17 Exemple

Soit

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2 + \sin x}.$$

Alors, en effectuant le changement de variable

$$x = 2 \text{ Arctg } t \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R},$$

on obtient que pour tout $z \in \,]0, \pi[$:

$$\int_{-z}^{z} \frac{dx}{2 + \sin x} = \int_{-\operatorname{tg}\frac{z}{2}}^{\operatorname{tg}\frac{z}{2}} \frac{dt}{t^2 + t + 1};$$

ce qui implique, en passant à la limite, que

$$J = \lim_{z \to \pi-} \int_{-\operatorname{tg}\frac{z}{2}}^{\operatorname{tg}\frac{z}{2}} \frac{dt}{t^2 + t + 1}.$$

Ainsi, en remarquant que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + t + 1}$$

converge et que $\lim\limits_{z \to \pi-} \operatorname{tg}(z/2) = +\infty$, on peut affirmer que

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + t + 1}.$$

D'où

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t + 1/2)^2 + 3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ Arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

8.3 EXERCICES

8.3.1 Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes:

1) $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x + 1)}$ 2) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{-x} \operatorname{Log} x \, dx$

3) $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \, dx$ 4) $\displaystyle\int_{0+}^{\pi/2} \operatorname{Log}(\sin x) \, dx.$

8.3.2 Calculer les intégrales généralisées suivantes:

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$ 2) $\displaystyle\int_{0+}^{1} \operatorname{Log} x \, dx$

3) $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{3x-x^2}}$ 4) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Log}x}{x^2}\,dx$

5) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}\sin x\,dx$ 6) $\displaystyle\int_{0+}^{\pi/2-} \mathrm{Log}(\mathrm{tg}x)\,dx$

8.3.3 Discuter, en fonction des valeurs du nombre réel $\alpha \geqslant 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

1) $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{x^\alpha}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}\,dx$

3) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^\alpha+1}}\,dx$ 4) $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^\alpha(2+\sin\sqrt{x})}\,dx$

5) $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{x^\alpha(\sqrt{x}+\mathrm{ch}^2 x)}\,dx$ 6) $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x(\mathrm{Log}x)(\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}x)^\alpha}.$

8.3.4 Discuter, en fonction des valeurs des deux nombres réels $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

1) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1+\alpha e^{-x}}{1+\beta e^{x}}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{x^\alpha}{(\sqrt{1-x^2})^\beta}\,dx$

3) $\displaystyle\int_{2+}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(x^3+1)^\alpha(x^2-4)^\beta}\,dx$ 4) $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{x^\alpha+(\mathrm{th}x)^\beta}\,dx$

5) $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{(\mathrm{Log}x)^\alpha}{e^{\beta x}(x-1)}\,dx$ 6) $\displaystyle\int_{0+}^{1/2} x^\alpha\left(\mathrm{Log}\frac{1}{x}\right)^\beta dx.$

8.3.5 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2x\cos x^4$.

1) Montrer que f n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$.

2) Démontrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente.

8.3.6 Calculer

$$\lim_{x\to 1+}\left(\int_{1+}^{x-} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(x-t)}}\right).$$

8.3.7 Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_n = \int_1^n \left(\frac{\sin nt}{nt}\right) dt \quad \text{et} \quad x_0 = 0.$$

8.3.8 Soit a un nombre réel positif ou nul et $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction décroissante sur $[a, +\infty[$. Montrer que si l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge (resp. diverge), alors la série de terme général $x_n = f(n)$ converge (resp. diverge).

8.3.9 Soit α un nombre réel strictement supérieur à 1. Montrer, en utilisant l'exercice précédent, que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} k}{k^\alpha} < +\infty.$$

8.3.10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique telle que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$.

8.3.11 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{\operatorname{Log}(1+x)} - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in]0, 1]. \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur l'intervalle fermé $[0, 1]$.

2) Pour quelles valeurs du nombre réel α, l'intégrale généralisée

$$\int_{0+}^{1} \frac{x^\alpha}{\operatorname{Log}(1+x)}\,dx$$

est-elle convergente?

3) Calculer

$$\lim_{\alpha \to 0+} \left(\alpha \cdot \int_{0+}^{1} \frac{x^\alpha}{\operatorname{Log}(1+x)}\,dx \right).$$

8.3.12 Soit n un entier positif.

1) Montrer que pour tout $x \in]0, \pi]$:

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2} + \cos x + \ldots + \cos nx.$$

2) En déduire que

$$\int_{0+}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

8.3.13 Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2\sin\frac{1}{2}x} - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in]0, \pi]. \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur l'intervalle fermé $[0, \pi]$.
2) Démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} f(x) \sin\left(n + \tfrac{1}{2}\right) x \, dx = 0.$$

3) En utilisant l'exercice 8.3.12, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{0+}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

4) En déduire que

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

8.3.14 Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} \, dt \right)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2 + 1} \, dt.$$

1) Montrer, en calculant $g'(x)$, que la fonction g est différentiable sur $\mathbb{R}$.
2) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) + g'(x) = 0$.
3) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) + g(x) = \pi/4$.
4) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

9. Equations différentielles

9.1 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À VARIABLES SÉPARÉES

9.1.1 Définitions

On appelle *équation différentielle à variables séparées* une équation de la forme

$$f(u(t))\, u'(t) = g(t) \tag{9.1}$$

où $f : I_1 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle ouvert I_1 et $g : I_2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle ouvert I_2.

Une fonction $v : J \to I_1$ continûment différentiable sur l'intervalle ouvert $J \subset I_2$, est dite *solution* de l'équation différentielle (9.1) si pour tout $t \in J$:

$$f(v(t))\, v'(t) = g(t).$$

9.1.2 Théorème d'existence et d'unicité locale

Soit $f : I_1 \to \mathbb{R}$ une fonction continue ne s'annulant pas sur l'intervalle ouvert I_1 et soit $g : I_2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle ouvert I_2. Alors, pour tout couple de nombres $x_0 \in I_1$ et $t_0 \in I_2$, l'équation à variables séparées (9.1) admet une solution $v : J \to I_1$ vérifiant la ***condition initiale*** $v(t_0) = x_0$. De plus, si $v_1 : J_1 \to I_1$ et $v_2 : J_2 \to I_1$ sont deux solutions de l'équation différentielle (9.1) telles que $v_1(t_0) = v_2(t_0) = x_0$, alors $v_1(t) = v_2(t)$ pour tout $t \in J_1 \cap J_2$.

DÉMONSTRATION. Soit $F : I_1 \to \operatorname{Im} F$ la fonction définie par

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\, \mathrm{d}s.$$

Etant donné que la fonction f est continue et ne s'annule pas sur I_1, on sait, d'après le théorème de la valeur intermédiaire (§ 4.3.22), que la fonction f garde un signe constant sur I_1; ceci implique que F est une fonction strictement monotone sur I_1. De ce résultat, on déduit que F est bijective et que $\operatorname{Im} F$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant l'origine (§ 4.3.25); ce qui a pour conséquence, entre autres, qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que $]-\alpha, \alpha[\subset \operatorname{Im} F$. Par suite, la continuité de la fonction $G : I_2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\, \mathrm{d}s,$$

entraîne l'existence d'un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in J =]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$: $-\alpha < G(t) < \alpha$. Considérons à présent la fonction $v : J \to I_1$ définie par

$$v(t) = F^{-1}(G(t)).$$

Ainsi, pour tout $t \in J$, on peut écrire que

$$F(v(t)) = G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$$

ou encore, en dérivant les deux membres de cette dernière égalité par rapport à t,

$$v'(t)\, f(v(t)) = g(t).$$

Finalement, comme $F(x_0) = 0$, la fonction $v: J \to I_1$ est une solution de l'équation différentielle (9.1) vérifiant la condition initiale $v(t_0) = x_0$.

Supposons maintenant que $v_1 : J_1 \to I_1$ et $v_2 : J_2 \to I_1$ soient deux solutions de l'équation différentielle (9.1) telles que $v_1(t_0) = v_2(t_0) = x_0$. Alors, en intégrant, on obtient que pour tout $t \in J_1 \cap J_2$:

$$F(v_1(t)) = \int_{v_1(t_0)}^{v_1(t)} f(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(v_1(s))\, v_1'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$$

et

$$F(v_2(t)) = \int_{v_2(t_0)}^{v_2(t)} f(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(v_2(s))\, v_2'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds.$$

Par conséquent, pour tout $t \in J_1 \cap J_2$:

$$v_1(t) = v_2(t) = F^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds\right).$$

D'où l'unicité locale. ■

9.1.3 Remarque

Si dans l'énoncé du théorème 9.1.2, on omet de faire l'hypothèse que la fonction f ne s'annule pas sur I_1, alors le résultat peut très bien cesser d'être vrai. Par exemple, l'équation différentielle

$$u(t)\, u'(t) = 1$$

n'admet aucune solution vérifiant la condition initiale $u(0) = 0$, tandis que pour cette même condition initiale, l'équation différentielle

$$u(t)\, u'(t) = t$$

en admet plusieurs.

9.1.4 Existence d'une solution maximale

Soit $f : I_1 \to \mathbb{R}$ une fonction continue ne s'annulant pas sur l'intervalle ouvert I_1 et soit $g : I_2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle ouvert I_2. Alors, pour tout couple de nombres $x_0 \in I_1$ et $t_0 \in I_2$, il existe une unique solution $\hat{v} : \hat{J} \to I_1$ de l'équation différentielle (9.1) satisfaisant $\hat{v}(t_0) = x_0$ telle que, pour toute solution $v: J \to I_1$ de l'équation différentielle (9.1) vérifiant la condition initiale $v(t_0) = x_0$, la restriction de $\hat{v}$ à J soit v.

Cette solution $\hat{v}: \hat{J} \to I_1$ est appelée la *solution maximale* de l'équation différentielle (9.1) pour la *condition initiale* $u(t_0) = x_0$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de poser $\hat{J}$ comme étant la réunion de tous les intervalles ouverts J pour lesquels il existe une solution $v : J \to I_1$ de l'équation différentielle (9.1) vérifiant $v(t_0) = x_0$ et d'utiliser le théorème 9.1.2. ■

9.1.5 Exemple

Soit n un entier strictement supérieur à 1, $a < b$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ (§ 1.5.1) et $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Trouver la solution maximale de l'équation différentielle à variables séparées

$$\frac{u'(t)}{u^n(t)} = g(t)$$

pour la condition initiale $u(t_0) = x_0 \neq 0$. En intégrant, on obtient que pour tout $t \in \hat{J}$:

$$(\hat{v}(t))^{1-n} = (1-n) \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s + x_0^{1-n},$$

ce qui donne, puisque pour tout $t \in \hat{J} : \hat{v}(t) \cdot x_0 > 0$,

$$\hat{v}(t) = x_0 \cdot \left(1 + (1-n)\, x_0^{n-1} \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s\right)^{1/1-n}.$$

Ainsi, en posant

$$t_1 = \begin{cases} \operatorname{Sup} I_- & \text{si } I_- \neq \phi \\ a & \text{si } I_- = \phi \end{cases} \quad \text{et } t_2 = \begin{cases} \operatorname{Inf} I_+ & \text{si } I_+ \neq \phi \\ b & \text{si } I_+ = \phi \end{cases}$$

où

$$I_- = \left\{ t \in]a, t_0[\; : 1 + (1-n)\, x_0^{n-1} \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s = 0 \right\}$$

$$I_+ = \left\{ t \in]t_0, b[\; : 1 + (1-n)\, x_0^{n-1} \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s = 0 \right\},$$

on obtient que

$$\hat{J} =]t_1, t_2[.$$

Par suite, on vérifie facilement que si $t_1 \neq a$ (resp. $t_2 \neq b$) :

$$\lim_{t \to t_1+} \hat{v}(t) = \infty \qquad (\text{resp. } \lim_{t \to t_2-} \hat{v}(t) = \infty).$$

9.1.6 Remarque

Considérons l'équation différentielle à variables séparées suivante :

$$\frac{u'(t)}{u^2(t)} = 1.$$

Nous savons (§ 9.1.5) que pour la condition initiale $u(0) = x_0 \neq 0$, la solution maximale est définie par

$$\hat{v}(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t} \quad \text{et} \quad \hat{J} = \begin{cases}]-\infty, 1/x_0[& \text{si } x_0 > 0 \\ ]1/x_0, +\infty[& \text{si } x_0 < 0 \end{cases}$$

(fig. 9.1 et 9.2). Cet exemple nous montre, qu'en général, $\hat{J} \neq I_2$ (ici $I_2 = \mathbb{R}$).

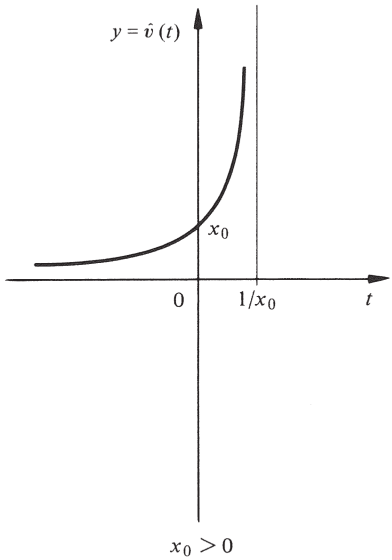


Fig. 9.1

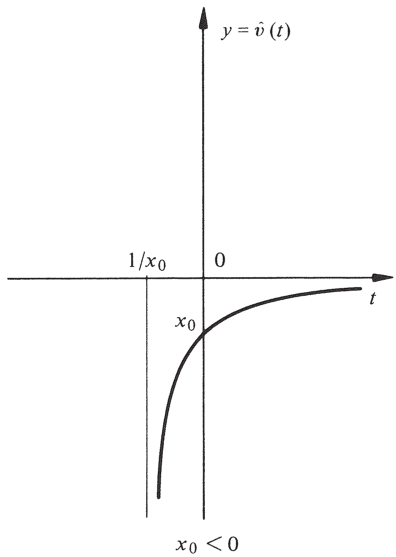


Fig. 9.2

9.1.7 Equation de Bernoulli

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et n un entier strictement supérieur à 1. On appelle *équation de Bernoulli* une équation de la forme

$$u'(t) + p(t)\, u(t) = f(t)\, u^n(t) \tag{9.2}$$

où $p, f : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues.

Soit $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^*$. En posant

$$u(t) = \tilde{u}(t)\, w(t) \quad \text{avec} \quad w(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds},$$

l'équation de Bernouilli (9.2) se transforme (à condition que $u(t) \neq 0$) en l'équation différentielle à variables séparées

$$\frac{\tilde{u}'(t)}{\tilde{u}^n(t)} = f(t)\, w^{n-1}(t),$$

dont la solution maximale (§ 9.1.5) pour la condition initiale $\tilde{u}(t_0) = u(t_0) = x_0$ est donnée par

$$\hat{v}(t) = x_0 \left(1 + (1-n)\, x_0^{n-1} \int_{t_0}^{t} f(s)\, w^{n-1}(s)\, ds \right)^{1/1-n}$$

(pour la définition de $\hat{J}$, se référer au paragraphe 9.1.5). Par conséquent, la fonction $v : \hat{J} \to \mathbb{R}$ définie par

$$v(t) = \hat{v}(t)\, w(t) = x_0\, w(t) \left(1 + (1-n)\, x_0^{n-1} \int_{t_0}^{t} f(s)\, w^{n-1}(s)\, ds\right)^{1/1-n}$$

vérifie l'équation de Bernoulli (9.2) pour tout $t \in \hat{J}$ et, de plus, $v(t_0) = x_0$.

Réciproquement, par un raisonnement analogue, on démontre que si une fonction $u : J \to \mathbb{R}$ $(J \subset I)$ vérifiant $u(t_0) = x_0 \neq 0$ satisfait l'équation de Bernoulli (9.2) pour tout $t \in J$, les fonctions u et v coïncident sur J.

Ainsi, tout naturellement, la fonction $v : \hat{J} \to \mathbb{R}$ définie par

$$v(t) = x_0\, w(t) \left(1 + (1-n)\, x_0^{n-1} \int_{t_0}^{t} f(s)\, w^{n-1}(s)\, ds\right)^{1/1-n}$$

est appelée la *solution* de l'équation de Bernoulli (9.2) pour la condition initiale $u(t_0) = x_0$.

9.1.8 Exemple

La fonction $v : \hat{J} \to \mathbb{R}$ définie par

$$v(t) = 2\, e^{-\int_0^t 2s\, ds} \left(1 - 2 \int_0^t \left(e^{s^2} \cdot e^{-\int_0^s 2r\, dr}\right) ds\right)^{-1}$$

$$= 2\, e^{-t^2} (1-2t)^{-1} = \frac{2e^{-t^2}}{(1-2t)}$$

et

$$\hat{J} = \left]-\infty, \tfrac{1}{2}\right[,$$

est la solution de l'équation de Bernoulli

$$u'(t) + 2t\, u(t) = e^{t^2}\, u^2(t)$$

pour la condition initiale $u(0) = 2$.

9.1.9 Equation différentielle homogène

On appelle *équation différentielle homogène* une équation de la forme

$$u'(t) = h\left(\frac{u(t)}{t}\right) \tag{9.3}$$

où $h : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle ouvert I.

En supposant que pour tout $x \in I : h(x) \neq x$, les solutions de l'équation différentielle homogène (9.3) se déduisent des solutions de l'équation à variables séparées

$$\frac{1}{h(\tilde{u}(t)) - \tilde{u}(t)}\, \tilde{u}'(t) = \frac{1}{t}$$

en posant $u(t) = t\, \tilde{u}(t)$.

9.2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

9.2.1 Définitions

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* une équation de la forme

$$u'(t) + p(t)\,u(t) = f(t) \tag{9.4}$$

où $p, f : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues.

Une fonction $v : I \to \mathbb{R}$ continûment différentiable sur I est dite *solution* de l'équation différentielle (9.4) si pour tout $t \in I$:

$$v'(t) + p(t)\,v(t) = f(t).$$

9.2.2 Solution générale de l'équation différentielle (9.5)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, t_0 un élément quelconque de I et $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Toute solution $v : I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle (dite *sans second membre*)

$$u'(t) + p(t)\,u(t) = 0 \tag{9.5}$$

est de la forme

$$v(t) = c\,e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}. \tag{9.6}$$

Par définition, l'expression (9.6) est appelé la *solution générale* de l'équation différentielle (9.5).

DÉMONSTRATION. Supposons que $v : I \to \mathbb{R}$ soit une solution de l'équation différentielle (9.5), et considérons la fonction auxiliaire $\bar{v} : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\bar{v}(t) = v(t)\,e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Alors, pour tout $t \in I$:

$$\bar{v}'(t) = 0;$$

ce qui entraîne que la fonction $\bar{v} : I \to \mathbb{R}$ est constante sur I. Par conséquent, il existe un nombre réel c telle que pour tout élément t de I :

$$v(t) = c\,e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s}.$$

La réciproque est évidente. ∎

9.2.3 Existence d'une solution pour l'équation différentielle (9.4)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, t_0 un élément quelconque de I et $f, p : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On se propose de trouver une fonction $c : I \to \mathbb{R}$ de sorte que l'application $v_0 : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$v_0(t) = c(t)\,w(t) \quad \text{avec} \quad w(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s}$$

soit une solution de l'équation différentielle (9.4). Pour cela, il faut et il suffit que pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} v_0'(t) + p(t)\, v_0(t) &= c'(t)\, w(t) + c(t)\, w'(t) + p(t)\, c(t)\, w(t) \\ &= c'(t)\, w(t) + c(t)\,(w'(t) + p(t)\, w(t)) \\ &= c'(t)\, w(t) = f(t), \end{aligned}$$

ou encore, en intégrant, que

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)}{w(s)}\, ds + c.$$

Par conséquent, en posant $c = 0$, on obtient que la fonction $v_0 : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$v_0(t) = w(t) \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)}{w(s)}\, ds \tag{9.7}$$

est une *solution particulière* de l'équation différentielle (9.4).

9.2.4 Principe de superposition des solutions

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f_1, f_2 et $p : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions continues et $\bar{v} : I \to \mathbb{R}$ (resp. $\tilde{v} : I \to \mathbb{R}$) une solution particulière de l'équation différentielle

$$u'(t) + p(t)\, u(t) = f_1(t) \qquad \text{(resp. } f_2(t)\text{)}.$$

Alors, la fonction $v : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$v(t) = \bar{v}(t) + \tilde{v}(t)$$

est une solution particulière de l'équation différentielle

$$u'(t) + p(t)\, u(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

9.2.5 Solution générale de l'équation différentielle (9.4)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, t_0 un élément quelconque de I et $f, p : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. De plus, supposons que $v_0 : I \to \mathbb{R}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (9.4). Toute solution $v : I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$u'(t) + p(t)\, u(t) = f(t)$$

est de la forme

$$v(t) = v_0(t) + c\, e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}. \tag{9.8}$$

Par définition, l'expression (9.8) est appelée la *solution générale* de l'équation différentielle (9.4).

DÉMONSTRATION. Supposons que $v : I \to \mathbb{R}$ soit une solution de l'équation différentielle (9.4), et considérons la fonction auxiliaire $\bar{v} : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\bar{v}(t) = v(t) - v_0(t).$$

Par construction, $\bar{v} : I \to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle (9.5); ce qui entraîne (§ 9.2.2) l'existence d'une constante c telle que pour tout $t \in I$:

$$\bar{v}(t) = c\, e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}.$$

Donc pour tout élément t de I :

$$v(t) = v_0(t) + \bar{v}(t) = v_0(t) + c\, e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}.$$

La réciproque est évidente. ■

9.2.6 Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$u'(t) + \cos t\, u(t) = \sin 2t + \cos t.$$

Etant donné que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{-\int_0^t \cos s\,ds} = e^{-\sin t},$$

on sait, en utilisant la formule (9.7), que la fonction $\bar{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\bar{v}(t) = e^{-\sin t} \int_0^t e^{\sin s} \sin 2s\,ds = 2(\sin t - 1) + 2\,e^{-\sin t}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle

$$u'(t) + \cos t\, u(t) = \sin 2t,$$

tandis que la fonction $\tilde{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{v}(t) = e^{-\sin t} \int_0^t e^{\sin s} \cos s\,ds = 1 - e^{-\sin t}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle

$$u'(t) + \cos t\, u(t) = \cos t.$$

Par conséquent, (§ 9.2.4 et 9.2.5), la fonction $v_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$v_0(t) = \bar{v}(t) + \tilde{v}(t) - e^{-\sin t} = 2\sin t - 1$$

est une solution particulière de l'équation différentielle

$$u'(t) + \cos t\, u(t) = \sin 2t + \cos t.$$

Finalement, on obtient, en utilisant la formule (9.8) que

$$v(t) = (2\sin t - 1) + c\, e^{-\sin t}$$

est la solution générale de l'équation différentielle

$$u'(t) + \cos t\, u(t) = \sin 2t + \cos t.$$

9.3 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

9.3.1 Définitions

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre* une équation de la forme

$$u''(t) + p(t)\,u'(t) + q(t)\,u(t) = f(t) \tag{9.9}$$

où p, q et $f : I \to \mathbb{R}$ sont trois fonctions continues.

Une fonction $v : I \to \mathbb{R}$ deux fois continûment différentiable sur I est dite *solution* de l'équation différentielle (9.9) si pour tout $t \in I$:

$$v''(t) + p(t)\,v'(t) + q(t)\,v(t) = f(t).$$

De même, une fonction $v : I \to \mathbb{R}$ deux fois continûment différentiable sur I est dite *solution* de l'équation différentielle (9.9) *sans second membre* si pour tout $t \in I$:

$$v''(t) + p(t)\,v'(t) + q(t)\,v(t) = 0.$$

9.3.2 Théorème d'existence et d'unicité

Soit $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Alors, pour tout élément t_0 de I et tout couple de nombres réels α et β, l'équation différentielle

$$u''(t) + p(t)\,u'(t) + q(t)\,u(t) = 0 \tag{9.10}$$

admet une et une seule solution $v : I \to \mathbb{R}$ telle que $v(t_0) = \alpha$ et $v'(t_0) = \beta$.

DÉMONSTRATION. Il n'est pas possible, dans le cadre de ce livre, de donner une démonstration de ce théorème. ■

9.3.3 Fonctions linéairement indépendantes

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Deux fonctions $u_1 : I \to \mathbb{R}$ et $u_2 : I \to \mathbb{R}$ sont dites *linéairement dépendantes* s'il existe une constante c telle que pour tout $t \in I : u_1(t) = c\,u_2(t)$. Si une telle constante n'existe pas, les deux fonctions u_1 et u_2 sont dites *linéairement indépendantes*.

9.3.4 Recherche de deux solutions linéairement indépendantes de (9.10)

Une des conséquences immédiates du théorème 9.3.2 est que l'équation différentielle (9.10) possède au moins deux solutions linéairement indépendantes. Malheureusement, il n'existe pas, en général, de formule permettant de les calculer explicitement. Par contre, si on connaît une solution $v_1 : I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle (9.10) qui ne s'annule en aucun point de I, il est toujours possible de trouver une fonction non constante $c : I \to \mathbb{R}$ de sorte que l'application $v_2 : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$v_2(t) = c(t)\,v_1(t)$$

soit une seconde solution de l'équation différentielle (9.10). Pour cela, il suffit que pour tout $t \in I$:

$$c'(t) \neq 0$$

et

$$v_2''(t)+p(t)v_2'(t)+q(t)v_2(t) = c''(t)v_1(t)+c'(t)(2v_1'(t)+$$
$$+p(t)v_1(t))+c(t)(v_1''(t)+p(t)v_1'(t)+q(t)v_1(t))=$$
$$= c''(t)v_1(t)+c'(t)(2v_1'(t)+p(t)v_1(t)) = 0,$$

ou encore, en intégrant, que

$$c(t) = c_1 \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-\int_{t_0}^{s} p(r)\,dr}}{v_1^2(s)}\,ds + c_2 \quad \text{et} \quad c_1 \neq 0$$

(t_0 étant un élément quelconque de I). Par conséquent, en posant $c_1 = 1$ et $c_2 = 0$, on peut affirmer que la fonction $v_2 : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$v_2(t) = v_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-\int_{t_0}^{s} p(r)\,dr}}{v_1^2(s)}\,ds \tag{9.11}$$

est une solution de l'équation différentielle (9.10), et que les fonctions v_1 et v_2 sont linéairement indépendantes.

9.3.5 Définition du wronskien de deux fonctions

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si $u_1, u_2 : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions différentiables sur I, la fonction $W[u_1, u_2] : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$W[u_1, u_2](t) = u_1(t)\,u_2'(t) - u_1'(t)\,u_2(t)$$

est appelée le *wronskien* de u_1 et u_2.

9.3.6 Caractérisation de deux solutions linéairement indépendantes de (9.10)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation différentielle

$$u''(t)+p(t)\,u'(t)+q(t) = 0.$$

Alors, les deux fonctions v_1 et v_2 sont linéairement indépendantes si et seulement si leur wronskien ne s'annule en aucun point de I.

DÉMONSTRATION. Soit v_1 et v_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle (9.10). Montrons que pour tout $t \in I : W\,[v_1, v_2](t) \neq 0$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un élément t_0 de I pour lequel $W\,[v_1, v_2](t_0) = 0$. Alors, il existe deux constantes c_1 et c_2, non toutes les deux nulles, telles que

$$\begin{cases} c_1\,v_1(t_0) + c_2\,v_2(t_0) = 0 \\ c_1\,v_1'(t_0) + c_2\,v_2'(t_0) = 0. \end{cases}$$

Considérons maintenant la fonction auxiliaire $v : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$v(t) = c_1\,v_1(t) + c_2\,v_2(t).$$

Par construction, on a que pour tout $t \in I$:

$$v''(t)+p(t)\,v'(t)+q(t)\,v(t) = 0.$$

Comme d'autre part $v(t_0) = v'(t_0) = 0$, on obtient, d'après le théorème 9.3.2, que pour tout $t \in I : v(t) = 0$. De ce résultat, on déduit que les deux fonction v_1 et v_2 sont linéairement dépendantes. D'où contradiction. On a ainsi montré que si v_1 et v_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle (9.10), leur wronskien ne s'annule en aucun point de I.

Pour démontrer la réciproque de cette assertion, raisonnons de nouveau par l'absurde et supposons qu'il existe une constante c telle que $v_1 = cv_2$. Alors, pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} W[v_1, v_2](t) &= v_1(t)\, v_2'(t) - v_1'(t)\, v_2(t) \\ &= c\, v_2(t)\, v_2'(t) - c\, v_2'(t)\, v_2(t) = 0. \end{aligned}$$

D'où contradiction. Par conséquent, les deux fonctions sont bien linéairement indépendantes. ■

9.3.7 Solution générale de l'équation différentielle (9.10)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}, p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle (9.10). Toute solution $v : I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$u''(t) + p(t)\, u'(t) + q(t)\, u(t) = 0$$

est de la forme

$$v(t) = c_1\, v_1(t) + c_2\, v_2(t) \quad \text{avec} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{9.12}$$

Par définition, l'expression (9.12) est appelée la *solution générale* de l'équation différentielle (9.10).

DÉMONSTRATION. Soit $v : I \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle (9.10) et t_0 un élément quelconque de I. Comme $W[v_1, v_2](t_0) \neq 0$ (§ 9.3.6), on sait qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que

$$\begin{cases} c_1\, v_1(t_0) + c_2\, v_2(t_0) = v(t_0) \\ c_1\, v_1'(t_0) + c_2\, v_2'(t_0) = v'(t_0). \end{cases}$$

Ainsi, la fonction $\bar{v} : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\bar{v}(t) = c_1\, v_1(t) + c_2\, v_2(t)$$

est une solution de l'équation différentielle (9.10) satisfaisant les deux conditions initiales :

$$\bar{v}(t_0) = v(t_0) \quad \text{et} \quad \bar{v}'(t_0) = v'(t_0).$$

Par conséquent, en utilisant le théorème 9.3.2, on peut affirmer que pour tout $t \in I$:

$$v(t) = \bar{v}(t) = c_1\, v_1(t) + c_2\, v_2(t).$$

La réciproque est évidente. ■

9.3.8 Existence d'une solution pour l'équation différentielle (9.9)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, t_0 un élément quelconque de I et p, q et $f : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions continues. De plus, supposons que $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ soient deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle (9.10). On se propose de trouver deux fonctions $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}$ de sorte que l'application $v_0 : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$v_0(t) = c_1(t)\, v_1(t) + c_2(t)\, v_2(t)$$

soit une solution de l'équation différentielle (9.9). Pour cela, il suffit que pour tout $t \in I$:

$$c_1'(t)\, v_1(t) + c_2'(t)\, v_2(t) = 0$$

et

$$v_0''(t) + p(t)\, v_0'(t) + q(t)\, v_0(t) = c_1'(t)\, v_1'(t) + c_2'(t)\, v_2'(t) + \\ + c_1(t)\,(v_1''(t) + p(t)\, v_1'(t) + q(t)\, v_1(t)) + c_2(t)\,(v_2''(t) + p(t)\, v_2'(t) + \\ + q(t)\, v_2(t)) = c_1'(t)\, v_1'(t) + c_2'(t)\, v_2'(t) = f(t).$$

Ainsi, en résolvant ce système, on obtient que pour tout élément t de I :

$$c_1'(t) = -\frac{f(t)\, v_2(t)}{W[v_1, v_2](t)} \quad \text{et} \quad c_2'(t) = \frac{f(t)\, v_1(t)}{W[v_1, v_2](t)},$$

ou encore, en intégrant, que

$$c_1(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{f(s)\, v_2(s)}{W[v_1, v_2](s)}\, \mathrm{d}s + c_1$$

et

$$c_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)\, v_1(s)}{W[v_1, v_2](s)}\, \mathrm{d}s + c_2.$$

Par conséquent, en posant $c_1 = c_2 = 0$, on peut affirmer que la fonction $v_0 : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$v_0(t) = -v_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)\, v_2(s)}{W[v_1, v_2](s)}\, \mathrm{d}s + v_2(t) \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)\, v_1(s)}{W[v_1, v_2](s)}\, \mathrm{d}s \qquad (9.13)$$

est une *solution particulière* de l'équation différentielle (9.9).

La méthode utilisée ici pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (9.9) est connue sous le nom de *méthode de la variation des constantes*.

9.3.9 Principe de superposition des solutions

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, p, q, f_1 et $f_2 : I \to \mathbb{R}$ quatre fonctions continues et $\bar{v} : I \to \mathbb{R}$ (resp. $\tilde{v} : I \to \mathbb{R}$) une solution particulière de l'équation différentielle

$$u''(t) + p(t)\, u'(t) + q(t)\, u(t) = f_1(t) \quad (\text{resp. } f_2(t)).$$

Alors, la fonction $v : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$v(t) = \bar{v}(t) + \tilde{v}(t)$$

est une solution particulière de l'équation différentielle

$$u''(t) + p(t)\, u'(t) + q(t)\, u(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

9.3.10 Solution générale de l'équation différentielle (9.9)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, p, q et $f : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions continues et $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle

$$u''(t) + p(t)\, u'(t) + q(t)\, u(t) = 0.$$

De plus, supposons que $v_0 : I \to \mathbb{R}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (9.9). Toute solution $v : I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$u''(t) + p(t)\, u'(t) + q(t)\, u(t) = f(t)$$

est de la forme

$$v(t) = v_0(t) + c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t) \quad \text{avec} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{9.14}$$

Par définition, l'expression (9.14) est appelée la *solution générale* de l'équation différentielle (9.9).

DÉMONSTRATION. Supposons que $v : I \to \mathbb{R}$ soit une solution de l'équation différentielle (9.9), et considérons la fonction auxiliaire $\bar{v} : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\bar{v}(t) = v(t) - v_0(t).$$

Par construction, $\bar{v} : I \to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle (9.10); ce qui entraîne (§ 9.3.7) l'existence de deux constantes c_1 et c_2 telles que pour tout $t \in I$:

$$\bar{v}(t) = c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t).$$

Ainsi, pour tout élément t de I :

$$v(t) = v_0(t) + \bar{v}(t) = v_0(t) + c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t).$$

La réciproque est évidente. ■

9.3.11 Exemple

Pour $t > 0$, trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$u''(t) + \frac{1}{t} u'(t) - \frac{1}{t^2} u(t) = \operatorname{Log} t \tag{9.15}$$

sachant que la fonction $v_1 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$v_1(t) = t$$

est une solution de cette équation différentielle sans second membre.

En vertu de la formule (9.11), on sait que la fonction $\bar{v}_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\bar{v}_2(t) = t \int_1^t \frac{e^{-\int_1^s (1/r)\,dr}}{s^2}\, ds = -\frac{1}{2t} + \frac{t}{2}$$

est une seconde solution de l'équation différentielle (9.15) sans second membre. Par suite, la fonction $v_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$v_2(t) = -2\bar{v}_2(t) + v_1(t) = \frac{1}{t}$$

est, elle aussi, une solution de l'équation différentielle (9.15) sans second membre (§ 9.3.7). De plus, pour tout élément t de I, on a :

$$W[v_1, v_2](t) = -\frac{2}{t} \neq 0 \,;$$

ce qui implique (§ 9.3.6) que les deux fonctions v_1 et v_2 sont linéairement indépendantes. Par conséquent, grâce à la formule (9.13), on sait que la fonction $v_0 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$v_0(t) = \frac{t}{2}\int_1^t \operatorname{Log} s \, ds - \frac{1}{2t}\int_1^t s^2 \operatorname{Log} s \, ds = \frac{t^2}{9}(3\operatorname{Log} t - 4) + \frac{t}{2} - \frac{1}{18t}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle (9.15). Finalement, on obtient, en utilisant la formule (9.14), que pour $t > 0$:

$$v(t) = \frac{t^2}{9}(3\operatorname{Log} t - 4) + c_1 t + \frac{c_2}{t}$$

est la solution générale de l'équation différentielle (9.15).

9.4 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

9.4.1 Définitions

On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants* une équation de la forme

$$u''(t) + a u'(t) + b u(t) = f(t) \tag{9.16}$$

où a, b sont deux constantes et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Une fonction $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}$ est dite *solution* de l'équation différentielle (9.16) si pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$v''(t) + a v'(t) + b v(t) = f(t).$$

9.4.2 Remarque

L'équation différentielle (9.16) n'étant qu'un cas particulier de l'équation différentielle (9.9), tous les résultats que nous avons obtenus dans la section 9.3 lui sont applicables.

9.4.3 Solution générale de l'équation différentielle (9.16)

Notre but dans ce paragraphe est de donner explicitement la solution générale de l'équation différentielle (9.16).

Premier cas: supposons que $a^2 - 4b > 0$. Alors, en posant

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

on vérifie facilement que les deux fonctions $v_1, v_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$v_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad \text{et} \quad v_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle

$$u''(t) + a u'(t) + b u(t) = 0. \tag{9.17}$$

Par suite, en utilisant les formules (9.13) et (9.14), on obtient que

$$v(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \int_0^t \frac{e^{\lambda_1 (t-s)} - e^{\lambda_2 (t-s)}}{\lambda_1 - \lambda_2} f(s)\,\mathrm{d}s$$

est la *solution générale* de l'équation différentielle (9.16).

Deuxième cas : supposons à présent que $a^2 - 4b = 0$. Alors, il est facile de vérifier que les deux fonctions $v_1, v_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$v_1(t) = e^{-\frac{a}{2}t} \qquad \text{et} \qquad v_2(t) = t\,e^{-\frac{a}{2}t}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle (9.17). D'où, en utilisant les formules (9.13) et (9.14), on obtient que

$$v(t) = e^{-\frac{a}{2}t}\,(c_1 + c_2\,t) + \int_0^t (t-s)\,e^{-\frac{a}{2}(t-s)}\,f(s)\,\mathrm{d}s$$

est la *solution générale* de l'équation différentielle (9.16).

Troisième cas : pour finir, supposons que $a^2 - 4b < 0$. Alors, en posant

$$\lambda = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2},$$

on vérifie aisément que les deux fonctions $v_1, v_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$v_1(t) = e^{-\frac{a}{2}t} \cos \lambda t \qquad \text{et} \qquad v_2(t) = e^{-\frac{a}{2}t} \sin \lambda t$$

sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle (9.17). Par conséquent, en utilisant les formules (9.13) et (9.14), on obtient que

$$v(t) = e^{-\frac{a}{2}t}\,(c_1 \cos\lambda t + c_2 \sin\lambda t) + \frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{-\frac{a}{2}(t-s)} \sin(\lambda(t-s))\,f(s)\,\mathrm{d}s$$

est la *solution générale* de l'équation différentielle (9.16).

9.5 EXERCICES

9.5.1 Pour chacune des équations différentielles à variables séparées ci-dessous, trouver la solution maximale pour la condition initiale $u(t_0) = x_0$.

1) $u'(t) \cos u(t) = t$ — $t_0 = 0$, $x_0 = 0$
2) $u'(t) = \sin u(t)$ — $t_0 = 0$, $x_0 = \pi/2$
3) $u(t)\,u'(t) + t\,u^2(t) + t = 0$ — $t_0 = 0$, $x_0 = 1$
4) $t^2 u'(t) - u^2(t) = 1$ — $t_0 = 4/\pi$, $x_0 = -1$
5) $u'(t) = u(t) - 2u^2(t)$ — $t_0 = 0$, $x_0 = 1$
6) $u'(t) = t\,u^3(t)$ — $t_0 = 0$, $x_0 = 2$
7) $u'(t) = (t^3 - t)\,e^{-u(t)}$ — $t_0 = 0$, $x_0 = 0$
8) $\dfrac{u'(t)}{\sqrt{1 - u^2(t)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$ — $t_0 = 0$, $x_0 = 1/2$.

9.5.2 Pour chacune des équations de Bernoulli ci-dessous, trouver la solution pour la condition initiale $u(t_0) = x_0$.

1) $u'(t) + u(t) = u^3(t)$ $\qquad t_0 = 0, \qquad x_0 = 1$

2) $u'(t) - \dfrac{1}{t} u(t) + t^3 u^4(t) = 0$ $\qquad t_0 = 1, \qquad x_0 = 1$

3) $u(t) u'(t) - u^2(t) = t^2 u^3(t)$ $\qquad t_0 = 0, \qquad x_0 = -1/2$

4) $u'(t) + \dfrac{1}{t} u(t) = \operatorname{Log} t\, u^2(t)$ $\qquad t_0 = 1, \qquad x_0 = 1.$

9.5.3 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit p, q et $f : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions continues. Montrer que les solutions de l'*équation de Ricatti*

$$u'(t) = p(t) u^2(t) + q(t) u(t) + f(t) \tag{9.18}$$

se déduisent des solutions de l'équation de Bernoulli

$$\tilde{u}'(t) - (2p(t) v_0(t) + q(t)) \tilde{u}(t) = p(t) \tilde{u}^2(t)$$

en posant $u(t) = \tilde{u}(t) + v_0(t)$, $v_0 : I \to \mathbb{R}$ étant une solution particulière de l'équation différentielle (9.18).

9.5.4 En utilisant l'exercice précédent, trouver la solution de l'équation de Ricatti

$$u'(t) = u^2(t) + \frac{1}{t} u(t) - \frac{3}{t^2}$$

qui vérifie la condition initiale $u(1) = 2$.

9.5.5 Pour chacune des équations différentielles homogènes ci-dessous, trouver la solution pour la condition initiale $u(t_0) = x_0$.

1) $u'(t) = 2 + \dfrac{u(t)}{t}$ $\qquad t_0 = 1, \qquad x_0 = 0$

2) $u^2(t) u'(t) = t^2$ $\qquad t_0 = 1, \qquad x_0 = -1$

3) $u(t) + u'(t)(t - u(t)) = 0$ $\qquad t_0 = 1, \qquad x_0 = 1/2$

4) $t u'(t) = t e^{-u(t)/t} + u(t)$ $\qquad t_0 = 1, \qquad x_0 = 0$

5) $t u'(t) = u(t) + \sqrt{t^2 + u^2(t)}$ $\qquad t_0 = 1, \qquad x_0 = 0$

6) $t u'(t) = u(t) + t \operatorname{tg}\left(\dfrac{u(t)}{t}\right)$ $\qquad t_0 = 1, \qquad x_0 = \pi/6.$

9.5.6 Soit l'équation différentielle

$$u'(t) = \frac{a_1 t + b_1 u(t) + c_1}{a_2 t + b_2 u(t) + c_2} \tag{9.19}$$

où a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 et c_2 sont des constantes.

1) En supposant que $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, montrer qu'il existe deux nombres réels $\tilde{t}$ et $\tilde{u}$ de sorte que la substitution

$$t = T + \tilde{t}, \quad u(t) = U(t) + \tilde{u}$$

transforme l'équation différentielle (9.19) en une équation différentielle homogène.

2) Etudier l'équation différentielle (9.19) lorsque $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$.

9.5.7 En utilisant l'exercice précédent, trouver la solution de l'équation différentielle

$$u'(t) = -\frac{2t + u(t) + 1}{t + u(t) + 2}$$

qui vérifie la condition initiale $u(2) = -3$.

9.5.8 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Montrer que si une fonction $v \in C^2(I, \mathbb{R})$ est solution de l'*équation de Clairaut*

$$u(t) = t\,u'(t) + f(u'(t)) \tag{9.20}$$

alors, pour tout $t \in I$, on a: $v''(t)\,(t + f'(v'(t))) = 0$.

9.5.9 En utilisant l'exercice précédent, trouver toutes les fonctions $v \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui sont solutions de l'équation de Clairaut

$$u(t) = t\,u'(t) + (u'(t))^2.$$

9.5.10 Trouver la fonction $v : \,]0, +\infty[\, \to [\,0, +\infty[$ qui est solution de l'équation différentielle

$$u'(t) = \frac{4u(t)}{t} + t\sqrt{u(t)}$$

et qui vérifie la condition initiale $v(1) = 1$.

9.5.11 Trouver la fonction $v : \,]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ qui est solution de l'équation différentielle

$$u'(t) = \sqrt{u(t) + \sin t} - \cos t$$

et telle que $\lim_{t \to 0+} v(t) = 0$.

9.5.12 Trouver la solution générale des équations différentielles linéaires suivantes:

1) $u'(t) + u(t) = e^{2t} + e^t + 3\sin t \qquad , t \in \mathbb{R}$
2) $t\,u'(t) - (1+t)\,u(t) + e^t(1+t^2) = 0 \qquad , t > 0$
3) $(t\cos t)\,u'(t) + (\cos t + t\sin t)\,u(t) = 1 \qquad , t \in \,]0, \pi/2[$
4) $(1 - t^2)\,u'(t) - 2t\,u(t) = t^2 \qquad , t \in \,]-1, 1[\,.$

9.5.13 Trouver la solution générale des équations différentielles linéaires suivantes:

1) $u''(t) - 4u'(t) + 3u(t) = t^2 e^t + t e^{2t} \cos t \quad , t \in \mathbb{R}$

2) $u''(t) - 2u'(t) + u(t) = t e^t \quad , t \in \mathbb{R}$

3) $u''(t) - 4u'(t) + 5u(t) = t^2 + e^{2t} \sin t \quad , t \in \mathbb{R}.$

9.5.14 Trouver la solution générale des équations différentielles linéaires suivantes:

1) $(t^2 + 1)u''(t) - 2tu'(t) + 2u(t) = 6(t^2+1)^2, \quad t \in \mathbb{R}$

2) $tu''(t) - (1+t)u'(t) + u(t) = \left(\frac{3}{t^2} - \frac{1}{t}\right)e^t \quad , \quad t > 0$

3) $t^2 u''(t) - 3tu'(t) - 5u(t) = \frac{1}{t^2} \quad , \quad t > 0$

4) $(t^2 u''(t) + 4tu'(t) + 2u(t)) - t^2 u(t) = t + 1 \; , \quad t > 0.$

9.5.15 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}, p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation différentielle

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0.$$

Montrer que pour tout $t \in I$:

$$W[v_1, v_2](t) = W[v_1, v_2](t_0)\, e^{-\int_{t_0}^t p(s)\,ds}$$

où t_0 est un élément quelconque de I.

9.5.16 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}, p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0.$$

1) Montrer que pour tout $t \in I$: $v_1^2(t) + v_2^2(t) \neq 0$.

2) En supposant que $t_1 < t_2$ soient deux éléments de I pour lesquels la fonction v_1 s'annule, montrer que la fonction v_2 s'annule au moins une fois dans l'intervalle ouvert $]t_1, t_2[$.

3) Dans le cas où $E = \{x \in I : v_1(x) = 0\} \neq \phi$, montrer qu'à chaque élément x de E, on peut associer un nombre réel $\delta(x) > 0$ de sorte que

$$]x - \delta(x), x + \delta(x)[\cap E = \{x\}.$$

10. Formulaire

Tableau 10.1 Dérivées – Primitives.

$f(x) = F'(x)$	$f'(x)$	$F(x)$	Conditions
a	0	ax	
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1,\ x > 0$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$\operatorname{Log}\lvert x\rvert$	$x \neq 0$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{-2x}{(a^2+x^2)^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{Arctg}\dfrac{x}{a}$	$a \neq 0$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$\dfrac{2x}{(a^2-x^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a}\operatorname{Log}\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert$	$a \neq 0,\ x \neq \pm a$
$\dfrac{1}{x^2-a^2}$	$\dfrac{-2x}{(x^2-a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a}\operatorname{Log}\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert$	$a \neq 0,\ x \neq \pm a$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{a^2}{2}\operatorname{Log}(x+\sqrt{x^2+a^2})$	$a \neq 0$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \dfrac{a^2}{2}\operatorname{Log}\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert$	$a \neq 0,\ \lvert x\rvert > \lvert a\rvert$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2}\operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{a}$	$a > 0,\ \lvert x\rvert < a$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\dfrac{-x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$	$\operatorname{Log}(x+\sqrt{x^2+a^2})$	$a \neq 0$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\dfrac{-x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$	$\operatorname{Log}\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert$	$a \neq 0,\ \lvert x\rvert > \lvert a\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\dfrac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$	$\operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{a}$	$a > 0,\ \lvert x\rvert < a$
e^x	e^x	e^x	
a^x	$a^x \operatorname{Log} a$	$\dfrac{a^x}{\operatorname{Log} a}$	$a > 0,\ a \neq 1$
$\operatorname{Log} x$	$\dfrac{1}{x}$	$x(\operatorname{Log} x - 1)$	$x > 0$
$\operatorname{Log}_a x$	$\dfrac{1}{x \operatorname{Log} a}$	$x(\operatorname{Log}_a x - \operatorname{Log}_a e)$	$a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$

Tableau 10.1 Dérivées – Primitives (*suite*).

$f(x)=F'(x)$	$f'(x)$	$F(x)$	Conditions
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$1+\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-\operatorname{Log}\lvert\cos x\rvert$	$x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotg} x$	$-(1+\operatorname{cotg}^2 x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{Log}\lvert\sin x\rvert$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$	$\operatorname{Log}\left\lvert\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right\rvert$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\operatorname{Log}\left\lvert\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{Arcsin} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{Arccos} x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \operatorname{Arccos} x - \sqrt{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{Arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \operatorname{Arctg} x - \operatorname{Log}\sqrt{1+x^2}$	
$\operatorname{Arccotg} x$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$	$x \operatorname{Arccotg} x + \operatorname{Log}\sqrt{1+x^2}$	
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x$	
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x$	
$\operatorname{th} x$	$1-\operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{Log}\operatorname{ch} x$	
$\operatorname{coth} x$	$1-\operatorname{coth}^2 x = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\operatorname{Log}\lvert\operatorname{sh} x\rvert$	$x \neq 0$
$\operatorname{Argsh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \operatorname{Argsh} x - \sqrt{x^2+1}$	
$\operatorname{Argch} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \operatorname{Argch} x - \sqrt{x^2-1}$	$x > 1$
$\operatorname{Argth} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$x \operatorname{Argth} x + \operatorname{Log}\sqrt{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{Argcoth} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$x \operatorname{Argcoth} x + \operatorname{Log}\sqrt{x^2-1}$	$\lvert x\rvert > 1$

Tableau 10.2 Développements limités.

$f(x)$	**Partie principale du développement limité de f autour du zéro**
e^x	$1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$
$\sin x$	$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cos x$	$1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\mathrm{Arcsin}\, x$	$x + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\dfrac{x^5}{5} + \ldots + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)}\,\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$
$\mathrm{Arctg}\, x$	$x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$
$\mathrm{sh}\, x$	$x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\mathrm{ch}\, x$	$1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\mathrm{Argsh}\, x$	$x - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\dfrac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \dfrac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)}\,\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$
$\mathrm{Argth}\, x$	$x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$
$\dfrac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n$
$\dfrac{1}{(1+x)^2}$	$1 - 2x + 3x^2 + \ldots + (-1)^n (n+1) x^n$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2\cdot 4}x^2 + \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)}\, x^n$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$	$1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \ldots + (-1)^n \dfrac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)}\, x^n$
$\mathrm{Log}\,(1+x)$	$x - \dfrac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}$
$\mathrm{Log}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$	$2\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$

II
Fonctions réelles de plusieurs variables réelles

11. Espace $\mathbb{R}^n$

11.1 NORME EUCLIDIENNE

11.1.1 Définition de $\mathbb{R}^n$

On désigne par $\mathbb{R}^n$ l'ensemble constitué de tous les n-tuples ordonnés $(x_1, ..., x_n)$ de nombres réels. Par la suite, les éléments de $\mathbb{R}^n$ seront notés indifféremment $\boldsymbol{x}$ ou $(x_1, ..., x_n)$.

On munit $\mathbb{R}^n$ des deux opérations suivantes: pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_n)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

et

$$\lambda \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n).$$

Avec ces deux opérations on vérifie immédiatement que $\mathbb{R}^n$ est un *espace vectoriel* sur $\mathbb{R}$ de dimension n (fig. 11.1 et 11.2).

11.1.2 Définition de la norme euclidienne

Soit $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Le nombre réel positif ou nul $\|\boldsymbol{x}\|$ défini par

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

est appelé la *norme euclidienne* de $\boldsymbol{x}$.

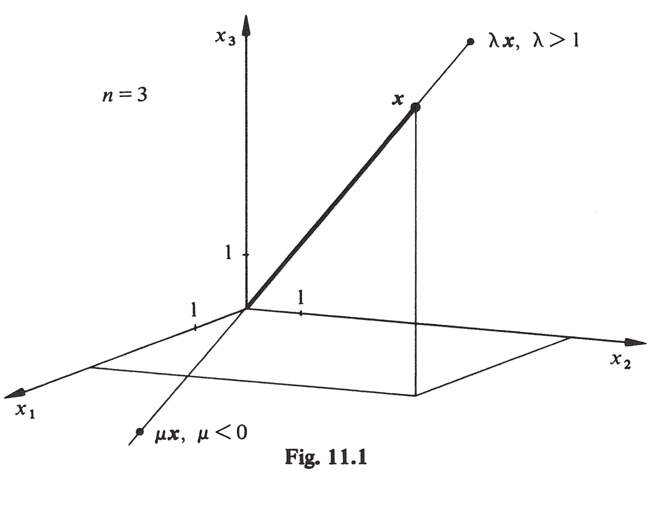


Fig. 11.1

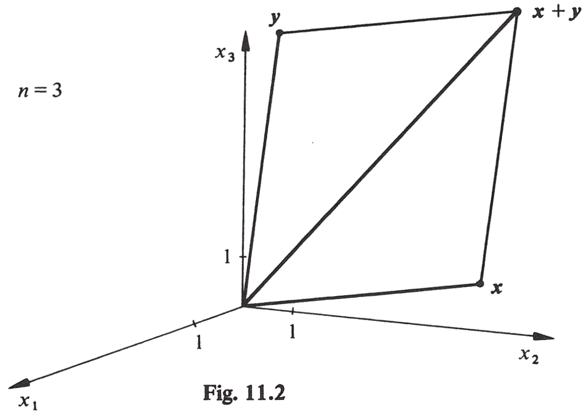


Fig. 11.2

11.1.3 Propriétés de la norme euclidienne

- $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ est équivalent à $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} = (0, ..., 0)$;
- pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$;
- pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$: $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (inégalité triangulaire);
- pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$: $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \geqslant \big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\big|$ (inégalité triangulaire inverse).

DÉMONSTRATION. Les deux premières propriétés découlent immédiatement de la définition de la norme euclidienne. Montrons donc la troisième propriété. Comme

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

on obtient, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (§ 6.4.4):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} (|x_i| \cdot |y_i|) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2},$$

que

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 \leqslant \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}\right)^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2.$$

Par conséquent $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (fig. 11.3).

Montrons à présent la quatrième propriété. On déduit de l'inégalité $\|\boldsymbol{x}\| = \|(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|$, que $\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$. De même, $\|\boldsymbol{y}\| = \|(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}\| \leqslant \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}\|$ entraîne que $-\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|$. D'où $-\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ ou encore $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \geqslant \big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\big|$. ∎

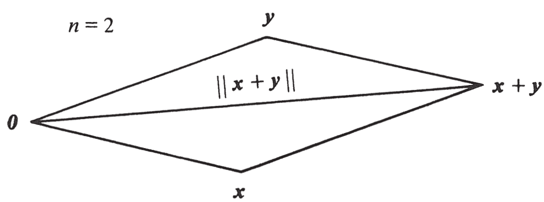


Fig. 11.3

11.2 SUITES DANS $\mathbb{R}^n$

11.2.1 Définition d'une suite dans $\mathbb{R}^n$

Une *suite* d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^n$, qui, à tout entier naturel k, fait correspondre l'élément $f(k)$ de $\mathbb{R}^n$.

L'élément $f(k)$ de $\mathbb{R}^n$ est appelé le *k-ième terme* de la suite et on le désigne par une lettre indexée en bas à droite par k, par exemple: $x_k = (x_{1,k}, ..., x_{n,k})$, la suite elle-même étant alors désignée par (x_k). Le sous-ensemble $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}^n$ est appelé l'ensemble des *éléments* de la suite. Si $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ est inclus dans un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$, on dit que (x_k) est une suite d'éléments de E.

11.2.2 Définition d'une suite bornée

Une suite (x_k) est dite *bornée* s'il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N} : \|x_k\| \leqslant M$.

11.2.3 Caractérisation d'une suite bornée

Une suite $(x_k = (x_{1,k}, ..., x_{n,k}))$ est bornée si et seulement si les n suites numériques $(x_{1,k}), ..., (x_{n,k})$ sont bornées.

DÉMONSTRATION. Supposons que la suite (x_k) soit bornée. Alors, il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que pour tout couple d'entiers $1 \leqslant j \leqslant n$ et $k \geqslant 0$:

$$|x_{j,k}| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,k}^2\right)^{1/2} = \|x_k\| \leqslant M\,;$$

ce qui entraîne que les n suites numériques $(x_{1,k}), ..., (x_{n,k})$ sont bornées.

Réciproquement, supposons que les n suites numériques $(x_{1,k}), ..., (x_{n,k})$ soient bornées. Alors, il existe n nombres réels positifs ou nuls $M_1, ..., M_n$ tels que pour tout couple d'entiers $1 \leqslant j \leqslant n$ et $k \geqslant 0 : |x_{j,k}| \leqslant M_j$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\|x_k\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,k}^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} M_i^2\right)^{1/2}\,;$$

ce qui revient à dire que la suite (x_k) est bornée. ■

11.2.4 Définition d'une suite convergente

On dit qu'une suite (x_k) d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est *convergente* et admet pour *limite* $x \in \mathbb{R}^n$ si, à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel k_0 tel que la relation $k \geqslant k_0$ implique $\|x_k - x\| \leqslant \epsilon$. On écrit alors $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = x$, et on dit que la suite (x_k) *converge* vers x.

D'une manière générale, l'entier naturel k_0 dépend du nombre réel ϵ.

11.2.5 Définition d'une suite divergente

Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*. On dit aussi d'une telle suite qu'elle *diverge*.

11.2.6 Caractérisation des suites convergentes

Une suite $(\boldsymbol{x}_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}))$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ converge vers $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ si et seulement si pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$, la suite numérique $(x_{j,k})$ converge vers x_j.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Si la suite $(\boldsymbol{x}_k)$ converge vers $\boldsymbol{x}$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$: $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| \leqslant \epsilon$. Comme pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$|x_{j,k} - x_j| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (x_{i,k} - x_i)^2\right)^{1/2} = \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| \leqslant \epsilon,$$

on peut conclure que $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{j,k} = x_j$.

Réciproquement, supposons que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$: $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{j,k} = x_j$. Alors, à chaque entier $1 \leqslant j \leqslant n$, on peut associer un entier naturel k_j tel que pour tout $k \geqslant k_j$: $|x_{j,k} - x_j| \leqslant \epsilon/\sqrt{n}$. Ainsi, en posant $k_0 = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$, on obtient que la relation $k \geqslant k_0$ implique

$$\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_{i,k} - x_i)^2\right)^{1/2} \leqslant \epsilon.$$

D'où le résultat. ∎

11.2.7 Unicité de la limite

La limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$, si elle existe, est unique.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser les résultats obtenus aux paragraphes 2.3.4 et 11.2.6. ∎

11.2.8 Exemple d'une suite convergente

Le résultat du paragraphe 11.2.6 nous permet d'affirmer, sans autre, que la suite $(\boldsymbol{x}_k = (e^{-k}, 1))$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$ converge vers $\boldsymbol{x} = (0,1)$ (fig. 11.4).

11.2.9 Propriété des suites convergentes

Toute suite convergente est bornée.

DÉMONSTRATION. Soit $(\boldsymbol{x}_k)$ une suite qui converge vers $\boldsymbol{x}$. Alors, pour $\epsilon = 1$, il existe un entier naturel k_0 tel que pour tout $k \geqslant k_0$: $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| \leqslant 1$. Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire inverse (§ 11.1.3), on obtient que pour tout $k \geqslant k_0$: $\|\boldsymbol{x}_k\| \leqslant 1 + \|\boldsymbol{x}\|$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a: $\|\boldsymbol{x}_k\| \leqslant \max\{\|\boldsymbol{x}_1\|, \ldots, \|\boldsymbol{x}_{k_0-1}\|, 1 + \|\boldsymbol{x}\|\}$; ce qui revient à dire que la suite $(\boldsymbol{x}_k)$ est bornée. ∎

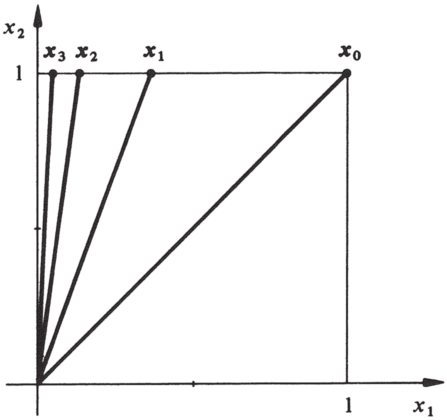


Fig. 11.4

11.2.10 Propriété de la limite d'une suite convergente

Soit (x_k) une suite qui converge vers x et supposons qu'il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que pour $k \in \mathbb{N}$: $\|x_k\| \leqslant M$. Alors, $\|x\| \leqslant M$.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Alors, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$:

$$\|x\| - \|x_k\| \leqslant \|x - x_k\| \leqslant \epsilon ;$$

ce qui entraîne que

$$\|x\| \leqslant \|x_k\| + \epsilon \leqslant M + \epsilon.$$

Cette dernière inégalité étant vérifiée quel que soit $\epsilon > 0$, on peut conclure que $\|x\| \leqslant M$. ■

11.2.11 Opérations algébriques sur les suites

Considérons deux suites (x_k) et (y_k). On peut par addition et multiplication par un scalaire λ obtenir les nouvelles suites suivantes:

$$(u_k = x_k + y_k) \quad \text{et} \quad (v_k = \lambda x_k).$$

Supposons à présent que les deux suites (x_k) et (y_k) convergent respectivement vers x et y. Alors,

– la suite $(x_k + y_k)$ admet pour limite $x + y$.

  DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Etant donné que la suite (x_k) converge vers x, il existe un entier naturel k_1 tel que pour tout $m \geqslant k_1$: $\|x_m - x\| \leqslant \epsilon/2$. De même, il existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant k_2$: $\|y_p - y\| \leqslant \epsilon/2$. Ainsi, en posant $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$, on obtient que pour tout $k \geqslant k_0$: $\|(x_k + y_k) - (x + y)\| \leqslant \|x_k - x\| + \|y_k - y\| \leqslant \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. ■

— la suite $(\lambda \boldsymbol{x}_k)$ admet pour limite $\lambda \boldsymbol{x}$.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque et supposons que $\lambda \neq 0$ (dans le cas contraire, le résultat est évident). Puisque la suite $(\boldsymbol{x}_k)$ converge vers $\boldsymbol{x}$, il existe un entier naturel k_0 tel que pour tout $k \geqslant k_0$: $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| \leqslant \epsilon/|\lambda|$; ce qui entraîne que $\|\lambda \boldsymbol{x}_k - \lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k\| \leqslant \epsilon$. ■

11.2.12 Définition d'une suite de Cauchy

On dit qu'une suite $(\boldsymbol{x}_k)$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une *suite de Cauchy* si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel k_0 tel que les relations $k \geqslant k_0$ et $l \geqslant k_0$ impliquent $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_l\| \leqslant \epsilon$.

D'une manière générale, l'entier naturel k_0 dépend du nombre réel ϵ.

11.2.13 Caractérisation d'une suite de Cauchy

Une suite $(\boldsymbol{x}_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}))$ est une suite de Cauchy si et seulement si les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont des suites de Cauchy.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Si la suite $(\boldsymbol{x}_k)$ est une suite de Cauchy, il existe un entier naturel k_0 tel que pour tout couple d'entiers $k \geqslant k_0$ et $l \geqslant k_0$: $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_l\| \leqslant \epsilon$. Comme pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$|x_{j,k} - x_{j,l}| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (x_{i,k} - x_{i,l})^2 \right)^{1/2} = \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_l\| \leqslant \epsilon,$$

on peut conclure que les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont des suites de Cauchy.

Réciproquement, supposons que les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ soient des suites de Cauchy. Alors, à chaque entier $1 \leqslant j \leqslant n$, on peut associer un entier naturel k_j tel que pour tout couple d'entiers $k \geqslant k_j$ et $l \geqslant k_j$: $|x_{j,k} - x_{j,l}| \leqslant \epsilon/\sqrt{n}$. Ainsi, en posant $k_0 = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$, on obtient que les relations $k \geqslant k_0$ et $l \geqslant k_0$ impliquent

$$\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_l\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_{i,k} - x_{i,l})^2 \right)^{1/2} \leqslant \epsilon.$$

D'où le résultat. ■

11.2.14 Propriété caractéristique des suites de Cauchy

Une suite $(\boldsymbol{x}_k)$ est une suite de Cauchy si et seulement si elle est convergente.

DÉMONSTRATION. Si $(\boldsymbol{x}_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}))$ est une suite de Cauchy, les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont des suites de Cauchy (§ 11.2.13), donc convergentes (§ 2.7.3); ce qui implique (§ 11.2.6) que la suite $(\boldsymbol{x}_k)$ converge.

Réciproquement, si $(\boldsymbol{x}_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}))$ est une suite convergente, les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont convergentes (§ 11.2.6), donc de Cauchy (§ 2.7.3); ce qui implique (§ 11.2.13) que la suite $(\boldsymbol{x}_k)$ est une suite de Cauchy. ■

11.2.15 Définition d'une sous-suite

Une *sous-suite* d'une suite (x_k) est une suite $p \mapsto x_{k(p)}$, où $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Une sous-suite d'une suite (x_k) est aussi appelée une *suite partielle* ou encore une *suite extraite* de (x_k).

11.2.16 Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée (x_k) on peut extraire une sous-suite $(x_{k(p)})$ qui converge.

DÉMONSTRATION. Comme la suite $(x_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}))$ est bornée et que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$|x_{j,k}| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,k}^2 \right)^{1/2} = \|x_k\|,$$

on peut affirmer que les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont bornées (§ 11.2.3). Ainsi, en utilisant le théorème 2.6.5, on sait que de la suite $(x_{1,k})$ on peut extraire une sous-suite $(x_{1,k(p_1)})$ qui converge. En utilisant de nouveau le théorème 2.6.5, on peut extraire de la suite $(y_{p_1} = x_{2,k(p_1)})$ une sous-suite $(y_{p_1(p_2)})$ qui converge. Il en résulte puisque l'application $k_1 = k \circ p_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, que $(x_{1,k_1(p_2)})$ et $(x_{2,k_1(p_2)})$ sont deux sous-suites qui convergent. En répétant n fois ce procédé, on obtient finalement une application $k_{n-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que les n sous-suites numériques $(x_{1,k_{n-1}(p_n)}), \ldots, (x_{n,k_{n-1}(p_n)})$ convergent; ce qui a pour conséquence (§ 11.2.6) que la sous-suite $(x_{k_{n-1}(p_n)} = (x_{1,k_{n-1}(p_n)}, \ldots, x_{n,k_{n-1}(p_n)}))$ est convergente. ■

11.3 TOPOLOGIE DE $\mathbb{R}^n$

11.3.1 Définition d'une boule ouverte

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, on pose $B(x,\delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \delta\}$. Par définition, $B(x,\delta)$ est appelée la *boule ouverte de centre x et de rayon δ* (fig. 11.5).

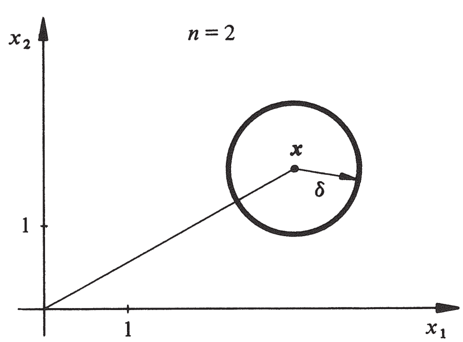


Fig. 11.5

11.3.2 Définition de l'intérieur d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Un point x est dit *intérieur* à E s'il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(x,\delta) \subset E$.

L'ensemble des points intérieurs à E est appelé *l'intérieur* de E et est noté $\overset{\circ}{E}$.

11.3.3 Définition d'un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$

On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est *ouvert* s'il est vide ou s'il ne contient que des points intérieurs.

11.3.4 Caractérisation d'un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ est ouvert si et seulement si $E = \overset{\circ}{E}$.

11.3.5 Propriétés des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$

- Toute réunion quelconque de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$;
- toute intersection finie de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

DÉMONSTRATION. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$. Montrons que

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i$$

est ouvert. En effet, si $x\in A$, il existe au moins un $j\in I$ tel que $x\in A_j$. Puisque A_j est ouvert, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(x,\delta) \subset A_j \subset A$.

Supposons à présent que $(B_i)_{i\in\{1, \dots, m\}}$ soit une famille finie de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ et montrons que

$$B = \bigcap_{i=1}^{m} B_i$$

est ouvert. En effet, si $x\in B$, alors x appartient à tous les B_i. Puisque tous les B_i sont ouverts, il existe m nombres réels positifs $\delta_1, \dots, \delta_m$ tels que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant m : B(x,\delta_j) \subset B_j$. Ainsi, en posant $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$, on obtient que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant m : B(x,\delta) \subset B(x,\delta_j) \subset B_j$; ce qui entraîne que $B(x,\delta) \subset B$. ■

11.3.6 Exemples de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$

Pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, la boule ouverte $B(x,\delta)$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. En effet, pour tout $y\in B(x,\delta)$, la boule ouverte de centre y et de rayon $r = \delta - \|y - x\|$ est incluse dans $B(x,\delta)$ (fig. 11.6).

Pour tout sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$, $\overset{\circ}{E}$ est ouvert. C'est même le plus grand sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ qui soit contenu dans E. Autrement dit, si A est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans E, alors $A \subset \overset{\circ}{E}$.

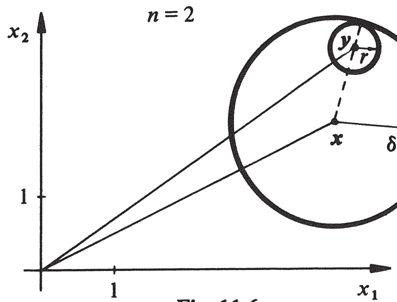


Fig. 11.6

11.3.7 Remarque

En général, une intersection infinie de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ n'est pas un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. Par exemple, l'intersection de toutes les boules ouvertes de la forme $B(\mathbf{0}, 1/k)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ réduit au seul point $\mathbf{0}$, et celui-ci n'est pas ouvert.

11.3.8 Définition d'un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$

On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est *fermé* si son complémentaire $\complement E = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \notin E\}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ (fig. 11.7).

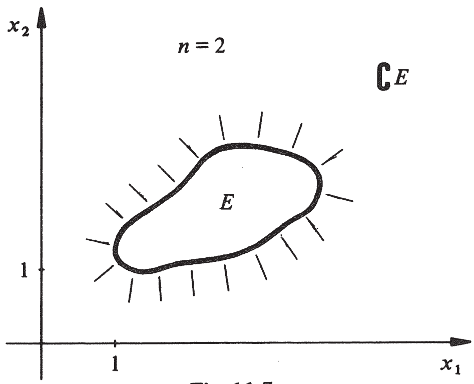


Fig. 11.7

11.3.9 Caractérisation d'un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si toute suite d'éléments de E qui converge, converge vers un élément de E.

DÉMONSTRATION. Supposons que E soit fermé et que $(\boldsymbol{x}_k)$ soit une suite d'éléments de E qui converge vers $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Montrons que $\boldsymbol{x} \in E$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $\boldsymbol{x} \notin E$. Alors, $\boldsymbol{x} \in \complement E$. Comme $\complement E$ est ouvert, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset \complement E$; ce qui entraîne que $\{\boldsymbol{x}_k : k \in \mathbb{N}\} \cap B(\boldsymbol{x}, \delta) = \phi$. Ce résultat est impossible car $\boldsymbol{x}$ est la limite de la suite $(\boldsymbol{x}_k)$. D'où contradiction. Par conséquent $\boldsymbol{x} \in E$.

Réciproquement, supposons que toute suite d'éléments de E qui converge, converge vers un élément de E. Montrons que E est fermé. Pour cela, raisonnons de nouveau par l'absurde et supposons que E ne soit pas fermé. Alors $\complement E$ n'est pas ouvert; ce qui implique l'existence d'un élément $\boldsymbol{x}$ de $\complement E$ tel que pour tout entier $k > 0$: $B(\boldsymbol{x}, 1/k) \cap E \neq \phi$. Ainsi, à tout entier $k > 0$, on peut associer un élément $\boldsymbol{x}_k$ de E vérifiant l'inégalité $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| < 1/k$. On a donc construit une suite $(\boldsymbol{x}_k)$ d'éléments de E qui converge vers $\boldsymbol{x} \in \complement E$. D'où contradiction; ce qui nous permet de conclure que E est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. ∎

11.3.10 Sous-ensembles ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$

L'ensemble vide ϕ et $\mathbb{R}^n$ sont les deux seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ qui soient à la fois ouverts et fermés.

DÉMONSTRATION. Il résulte de la définition d'un ouvert que $\mathbb{R}^n$ et ϕ sont deux ouverts. Puisque l'un est le complémentaire de l'autre, ils sont aussi fermés.

Supposons à présent qu'il existe un autre sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui soit à la fois ouvert et fermé. Désignons-le par E. Puisque E et $\complement E$ ne sont pas vides, ils contiennent chacun au moins un élément, à savoir $\boldsymbol{a} \in E$ et $\boldsymbol{b} \in \complement E$. Posons $I_1 = \{\lambda \in [0,1] : \lambda \boldsymbol{b} + (1-\lambda)\boldsymbol{a} \in E\}$. Comme $0 \in I_1$, le nombre réel $\beta = \operatorname{Sup} I_1$ exsite. De la définition de β, on déduit l'existence d'une suite (λ_k) d'éléments de I_1 telle que $\lim\limits_{k \to +\infty} \lambda_k = \beta$; ce qui entraîne, entre autres, que la suite $(\boldsymbol{x}_k = \lambda_k \boldsymbol{b} + (1-\lambda_k)\boldsymbol{a})$ d'éléments de E converge vers $\beta \boldsymbol{b} + (1-\beta)\boldsymbol{a}$. Etant donné que E est fermé, on peut affirmer (§ 11.3.9) que $\beta \boldsymbol{b} + (1-\beta)\boldsymbol{a} \in E$. Comme $\boldsymbol{b} \notin E$, on a aussi que $0 \leqslant \beta < 1$. Ainsi, en posant $\alpha_k = \beta + (1-\beta)/k$ et $\alpha_0 = 1$, on obtient que $(\boldsymbol{y}_k = \alpha_k \boldsymbol{b} + (1-\alpha_k)\boldsymbol{a})$ est une suite d'éléments de $\complement E$ ($\alpha_k \notin I_1$ car $\alpha_k > \beta = \operatorname{Sup} I_1$) qui converge vers $\beta \boldsymbol{b} + (1-\beta)\boldsymbol{a}$. Puisque $\complement E$ est fermé, on peut écrire que $\beta \boldsymbol{b} + (1-\beta)\boldsymbol{a} \in \complement E$. Ainsi, $\beta \boldsymbol{b} + (1-\beta)\boldsymbol{a}$ appartient à la fois à E et à $\complement E$; ce qui est une absurdité. On peut donc conclure qu'un tel sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ n'existe pas. D'où le résultat. ∎

11.3.11 Remarque

Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ peut très bien n'être ni ouvert ni fermé. C'est le cas de l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, y = 0\}$.

11.3.12 Propriétés des sous-ensembles fermés

- Toute intersection quelconque de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$;
- toute réunion finie de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

DÉMONSTRATION. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$. Montrons que

$$A = \bigcap_{i \in I} A_i$$

est fermé. En effet, puisque

$$\complement A = \bigcup_{i \in I} \complement A_i$$

et que tous les $\complement A_i$ sont ouverts, on obtient (§ 11.3.5) que $\complement A$ est ouvert.

Supposons à présent que $(B_i)_{i \in \{1, ..., m\}}$ soit une famille finie de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ et montrons que

$$B = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$$

est fermé. En effet, comme

$$\complement B = \bigcap_{i=1}^{m} \complement B_i$$

et que tous les $\complement B_i$ sont ouverts, on peut affirmer (§ 11.3.5) que $\complement B$ est ouvert. ■

11.3.13 Définition de l'adhérence d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Puisque tout sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est contenu dans $\mathbb{R}^n$, qui est un fermé, on peut poser la définition suivante : l'intersection de tous les fermés contenant E est appelée l'*adhérence* de E et est notée $\bar{E}$.

De cette définition, il résulte immédiatement (§ 11.3.12) que $\bar{E}$ *est le plus petit fermé qui contienne E.*

11.3.14 Caractérisation d'un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si $E = \bar{E}$.

11.3.15 Caractérisation de l'adhérence d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour que $\boldsymbol{x} \in \bar{E}$ il faut et il suffit que $\boldsymbol{x}$ soit la limite d'une suite d'éléments de E.

DÉMONSTRATION. Montrons que cette condition est nécessaire. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $\bar{E}$ possède un élément $\boldsymbol{x}$ qui ne soit la limite d'aucune suite d'éléments de E. Alors, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap E = \phi$. Par conséquent, $E \subset \complement B(\boldsymbol{x}, \delta)$. Comme $\complement B(\boldsymbol{x}, \delta)$ est fermé et que $\boldsymbol{x} \notin \complement B(\boldsymbol{x}, \delta)$, on obtient que $\bar{E} \cap \complement B(\boldsymbol{x}, \delta)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ strictement inclus dans $\bar{E}$ et qui contient E ; ce qui est en contradiction avec la définition de $\bar{E}$. On a ainsi démontré que la condition était nécessaire.

Reste à montrer qu'elle est suffisante. En effet, si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ est la limite d'une suite d'éléments de E, $\boldsymbol{x}$ est aussi la limite d'une suite d'éléments de $\bar{E}$. Comme $\bar{E}$ est fermé, on peut conclure (§ 11.3.9) que $\boldsymbol{x} \in \bar{E}$. ■

11.3.16 Définition d'une boule fermée

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, l'adhérence de la boule ouverte de centre x et de rayon δ est égale à $\{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leqslant \delta\}$. Autrement dit, $\overline{B(x,\delta)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leqslant \delta\}$.

Par définition, $\overline{B(x,\delta)}$ est appelée la ***boule fermée de centre x et de rayon*** δ.

DÉMONSTRATION. Posons $A = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leqslant \delta\}$. Montrons que $\overline{B(x,\delta)} \subset A$. En effet, si $z \in \overline{B(x,\delta)}$ il existe une suite (z_k) d'éléments de $B(x,\delta)$ qui converge vers z (§ 11.3.15); ce qui entraîne que la suite $(z_k - x)$ converge vers $z - x$. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N} : \|z_k - x\| < \delta$, on obtient (§ 11.2.10) que $\|z - x\| \leqslant \delta$ ou encore $z \in A$.

Montrons à présent que $A \subset \overline{B(x,\delta)}$. En effet, si $v \in A$, la suite (v_k) définie par

$$v_k = x + \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)(v - x)$$

converge vers v. Comme de plus, pour tout $k \in \mathbb{N} : v_k \in B(x,\delta)$, on obtient (§ 11.3.15) que $v \in \overline{B(x,\delta)}$. ∎

11.3.17 Définition de la frontière d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Un point x est dit *point frontière* de E si toute boule ouverte de centre x contient au moins un point de E et au moins un point de $\complement E$.

L'ensemble des points frontières de E est appelé la *frontière* ou encore le *bord* de E et est noté ∂E.

Il résulte immédiatement de cette définition que

- $x \in \partial E$ si et seulement si x est la limite d'une suite d'éléments de E et d'une suite d'éléments de $\complement E$;
- $\partial E \cap \mathring{E} = \phi$;
- $\bar{E} = \mathring{E} \cup \partial E$;
- $\partial E = \bar{E} \cap \complement \mathring{E} = \{x \in \bar{E} : x \notin \mathring{E}\}$;
- ∂E est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

11.3.18 Propriété de la frontière

Pour tout sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$, on a : $\partial \bar{E} \subset \partial E$.

DÉMONSTRATION. Soit $x \in \partial \bar{E}$ et soit δ un nombre réel positif quelconque. Alors, $B(x,\delta) \cap \bar{E}$ contient au moins un élément, à savoir y. Comme $y \in \bar{E}$, on sait que $B(y, \delta - \|y - x\|) \cap E \neq \phi$. Par suite, en constatant que $B(y, \delta - \|y - x\|) \subset B(x,\delta)$, on peut affirmer que $B(x,\delta) \cap E \neq \phi$. D'autre part, puisque $B(x,\delta) \cap \complement \bar{E} \neq \phi$ et $\complement \bar{E} \subset \complement E$, on peut écrire que $B(x,\delta) \cap \complement E \neq \phi$. On a ainsi démontré que pour tout nombre réel $\delta > 0 : B(x,\delta) \cap E \neq \phi$ et $B(x,\delta) \cap \complement E \neq \phi$; ce qui implique que $x \in \partial E$. Ce résultat étant vrai quel que soit x appartenant à $\partial \bar{E}$, on peut conclure que $\partial \bar{E} \subset \partial E$. ∎

11.3.19 Frontière de la boule ouverte

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, la frontière de la boule ouverte $B(x, \delta)$ est égale à $\{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| = \delta\}$. Autrement dit, $\partial B(x,\delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| = \delta\}$.

De même, $\partial \overline{B(x,\delta)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| = \delta\}$.

DÉMONSTRATION. Le fait que $B(x,\delta)$ soit un ouvert entraîne que $\partial B(x,\delta) = \overline{B(x,\delta)} \cap \complement B(x,\delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leqslant \delta\} \cap \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \geqslant \delta\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| = \delta\}$.

Montrons à présent que $\partial \overline{B(x,\delta)} = \partial B(x,\delta)$. Puisque $\partial \overline{B(x,\delta)} \subset \partial B(x,\delta)$ (§ 11.3.18), il suffit de démontrer que $\partial B(x,\delta) \subset \partial \overline{B(x,\delta)}$. En effet, si $z \in \partial B(x,\delta)$, la suite $(z_k = x + (1 + 1/(k+1))(z - x))$ d'éléments de $\complement\, \overline{B(x,\delta)}$ converge vers z et comme de plus $z \in \overline{B(x,\delta)}$, on peut écrire que $z \in \partial \overline{B(x,\delta)}$. ■

11.3.20 Remarque

On sait (§ 11.3.18) que pour tout sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$: $\partial \overline{E} \subset \partial E$. Mais contrairement à ce que pourrait laisser faire croire le résultat du paragraphe 11.3.19 où $\partial B(x,\delta) = \partial \overline{B(x,\delta)}$, la frontière de E n'est généralement pas incluse dans celle de $\overline{E}$. Par exemple, pour $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$, on a: $\partial E = \mathbb{R}^2$, tandis que $\partial \overline{E} = \phi$.

11.3.21 Définition d'un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$ est dit *borné* s'il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in E$: $\|x\| \leqslant M$.

11.3.22 Définition d'un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ est dit *compact* s'il est à la fois fermé et borné.

11.3.23 Adhérence d'un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$

L'adhérence de tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ est compacte.

DÉMONSTRATION. Soit E un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ et M un nombre réel positif ou nul tel que la relation $x \in E$ implique $\|x\| \leqslant M$. Soit $y \in \overline{E}$. Alors, il existe une suite (y_k) d'éléments de E qui converge vers y. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\|y_k\| \leqslant M$, on obtient (§ 11.2.10) que $\|y\| \leqslant M$. Par conséquent $\overline{E}$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$. Comme de plus $\overline{E}$ est fermé, on peut affirmer que $\overline{E}$ est compact. ■

11.3.24 Exemple d'un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, la boule fermée $\overline{B(x,\delta)}$ est compacte.

11.3.25 Caractérisation d'un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de E, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de E.

DÉMONSTRATION. Supposons que E soit compact et soit (x_k) une suite d'éléments de E. Puisque E est borné, on peut en extraire (§ 11.2.16) une sous-suite $(x_{k(p)})$ qui converge vers un élément x de $\mathbb{R}^n$. Comme de plus E est fermé, on sait (§ 11.3.9) que $x \in E$.

Réciproquement, supposons que de toute suite d'éléments de E, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de E. Le résultat obtenu au paragraphe 11.3.9 implique que E est fermé. Reste à démontrer que E est borné. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il ne le soit pas. Alors, à chaque entier naturel k, on peut associer un élément y_k de E tel que $\|y_k\| > k$. Par conséquent, si $(y_{k(p)})$ est une sous-suite de (y_k), on obtient que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\|y_{k(p)}\| > k(p) \geqslant p$; ce qui entraîne que $(y_{k(p)})$ n'est pas bornée, donc pas convergente. Ainsi, de (y_k) on ne peut extraire aucune sous-suite qui converge; ce qui contredit l'hypothèse faite sur la suite (y_k). D'où E est borné. ∎

11.3.26 Lemme

Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ constituant un recouvrement de E (c'est-à-dire tel que $E \subset \bigcup_{i \in I} A_i$). Alors, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, la boule ouverte $B(x, \delta)$ est contenue dans au moins un des A_i.

DÉMONSTRATION. Pour cela raisonnons par l'absurde et supposons qu'un tel nombre δ n'existe pas. Alors, à chaque entier $k > 0$, on peut associer un élément x_k de E tel que la boule $B(x_k, 1/k)$ ne soit contenue dans aucun des A_i. De la suite (x_k), on peut extraire une sous-suite $(x_{k(p)})$ qui converge vers un élément x de E (§ 1.3.25). Puisque x appartient à un certain A_j et que A_j est ouvert, il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que $B(x, \beta) \subset A_j$. D'autre part, comme $\lim\limits_{p \to +\infty} x_{k(p)} = x$, il existe un entier $p_0 > 2/\beta$ tel que $x_{k(p_0)} \in B(x, \beta/2)$. Ainsi, en constatant que pour tout $y \in B(x_{k(p_0)}, 1/k(p_0))$:

$$\|y - x\| \leqslant \|y - x_{k(p_0)}\| + \|x_{k(p_0)} - x\| < \frac{1}{k(p_0)} + \frac{\beta}{2} \leqslant \frac{1}{p_0} + \frac{\beta}{2} < \beta,$$

on obtient que $B(x_{k(p_0)}, 1/k(p_0)) \subset B(x, \beta) \subset A_j$; ce qui est absurde. D'où le lemme. ∎

11.3.27 Théorème de Heine-Borel-Lebesgue

Un sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute famille de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ constituant un recouvrement de E, on peut extraire une famille finie qui est un recouvrement de E.

DÉMONSTRATION. Pour commencer, supposons que de toute famille de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ constituant un recouvrement de E, on peut extraire une famille finie qui est un recouvrement de E, et soit $(\boldsymbol{a}_k)$ une suite quelconque d'éléments de E. Montrons que de $(\boldsymbol{a}_k)$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de E. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons le contraire. Alors, à chaque élément $\boldsymbol{x}$ de E, on peut associer un nombre réel $\delta(\boldsymbol{x}) > 0$ tel que l'ensemble

$$F(\boldsymbol{x}) = \{k \in \mathbb{N} : \boldsymbol{a}_k \in B(\boldsymbol{x}, \delta(\boldsymbol{x}))\}$$

ne contienne au plus qu'un nombre fini d'entiers naturels. Comme

$$E \subset \bigcup_{\boldsymbol{x} \in E} B(\boldsymbol{x}, \delta(\boldsymbol{x})),$$

on peut affirmer l'existence de p éléments $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p$ de E tels que

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{p} B(\boldsymbol{x}_j, \delta(\boldsymbol{x}_j));$$

ce qui implique, entre autres, que

$$\bigcup_{j=1}^{p} F(\boldsymbol{x}_j) = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in E} F(\boldsymbol{x}) = \mathbb{N}.$$

Ce résultat est impossible car $\cup_{j=1}^{p} F(\boldsymbol{x}_j)$ ne contient au plus qu'un nombre fini d'éléments. D'où contradiction. Par conséquent, de la suite $(\boldsymbol{a}_k)$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de E. Ainsi, la caractérisation donnée au paragraphe 11.3.25 nous permet de conclure que E est compact.

Montrons à présent la réciproque. Pour cela, supposons que E soit compact, et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$E \subset \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Ainsi, grâce au lemme 11.3.26, on sait qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout $\boldsymbol{x} \in E$, la boule ouverte $B(\boldsymbol{x}, \delta)$ est contenue dans au moins un des A_i. Soit $\boldsymbol{b}_1 \in E$. Alors, il existe $i_1 \in I$ tel que $B(\boldsymbol{b}_1, \delta) \subset A_{i_1}$. Si A_{i_1} contient E, il n'y a rien à démontrer. Si A_{i_1} ne contient pas E, le sous-ensemble $\{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \notin A_{i_1}\}$ contient au moins un élément, à savoir $\boldsymbol{b}_2$. De plus, il existe $i_2 \in I$ tel que $B(\boldsymbol{b}_2, \delta) \subset A_{i_2}$. Si $A_{i_1} \cup A_{i_2}$ contient E, il n'y a plus rien à démontrer. Sinon, on recommence en prenant un élément $\boldsymbol{b}_3$ de $\{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \notin A_{i_1} \cup A_{i_2}\}$ et ainsi de suite... Après un nombre fini de fois, ce processus s'arrête, car sinon on obtiendrait une suite $(\boldsymbol{b}_k)$ d'éléments de E telle que pour tout couple d'entiers $r \neq s$: $\|\boldsymbol{b}_r - \boldsymbol{b}_s\| > \delta$; ce qui serait en contradiction avec le fait que E est compact (§ 13.2.25). Par conséquent, il existe un entier $l > 0$ tel que

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{l} A_{i_k}.$$

Ainsi, s'achève la démonstration du théorème de Heine-Borel-Lebesgue. ■

11.3.28 Définition d'un chemin

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. On appelle *chemin* de E une application $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) : [0,1] \to E$ dont les n fonctions $\gamma_1, \ldots, \gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont continues. Les points $\boldsymbol{\gamma}(0)$ et $\boldsymbol{\gamma}(1)$ sont appelés respectivement l'*origine* et l'*extrémité* de ce chemin.

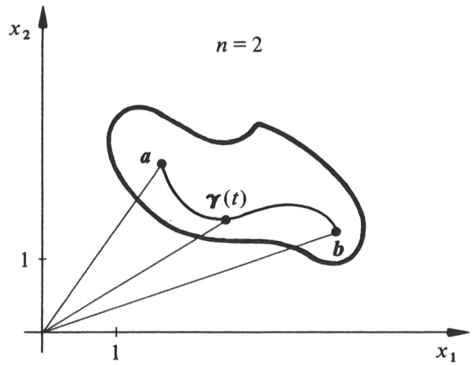


Fig. 11.8

On dit que deux points $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de E peuvent être *joints par un chemin* s'il existe un chemin de E d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{b}$ (fig. 11.8).

11.3.29 Définition d'un sous-ensemble connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$ est dit *connexe par arcs* si deux points quelconques de E peuvent être joints par un chemin de E.

11.3.30 Connexité par arcs de la boule ouverte

Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, la boule ouverte $B(\boldsymbol{x}, \delta)$ est connexe par arcs. De même, la boule fermée $\overline{B(\boldsymbol{x}, \delta)}$ est connexe par arcs.

DÉMONSTRATION. Soit $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux éléments quelconques de $B(\boldsymbol{x}, \delta)$. Puisque pour tout $t \in [0,1] : t\boldsymbol{b} + (1-t)\boldsymbol{a} \in B(\boldsymbol{x}, \delta)$, l'application $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to B(\boldsymbol{x}, \delta)$ définie par $\boldsymbol{\gamma}(t) = t\boldsymbol{b} + (1-t)\boldsymbol{a}$ est un chemin de $B(\boldsymbol{x}, \delta)$ d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{b}$. Ce résultat étant valable pour tout couple d'éléments $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ de $B(\boldsymbol{x}, \delta)$, on peut conclure que $B(\boldsymbol{x}, \delta)$ est connexe par arcs.

De façon analogue, on démontre que $\overline{B(\boldsymbol{x}, \delta)}$ est aussi connexe par arcs. ∎

11.3.31 Réunion d'une famille de sous-ensembles connexes par arcs de $\mathbb{R}^n$

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles connexes par arcs de $\mathbb{R}^n$ ayant une intersection non vide. Alors,

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

est connexe par arcs.

DÉMONSTRATION. Comme

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \phi ,$$

cette intersection contient au moins un élément, à savoir $\boldsymbol{x}_0$. Soit $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ une paire d'éléments quelconques de A. Alors, il existe deux indices $i_1, i_2 \in I$ tels que $\boldsymbol{a} \in A_{i_1}$ et $\boldsymbol{b} \in A_{i_2}$. Montrons que $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ peuvent être joints par un chemin de A. Puisque A_{i_1} et A_{i_2} sont connexes par arcs, les points $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{x}_0$ peuvent être joints par un chemin $\boldsymbol{\gamma}_1 : [0,1] \to A_{i_1}$, tandis que les points $\boldsymbol{x}_0$ et $\boldsymbol{b}$ peuvent être joints par un chemin $\boldsymbol{\gamma}_2 : [0,1] \to A_{i_2}$. Par conséquent, l'application $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to A$ définie par

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_1(2t) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ \boldsymbol{\gamma}_2(2t-1) & \text{si } t \in]1/2,1] \end{cases}$$

est un chemin de A d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{b}$. D'où le résultat. ■

11.3.32 Remarque

D'une manière générale, si E_1 et E_2 sont deux ensembles connexes par arcs disjoints, on ne peut rien dire a priori concernant la connexité par arcs de leur réunion $E_1 \cup E_2$. Par exemple, la réunion des deux connexes par arcs $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ et $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 2\}$ n'est pas connexe par arcs (fig. 11.9), tandis que la réunion des deux connexes par arcs $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0\}$ et $B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ est connexe par arcs.

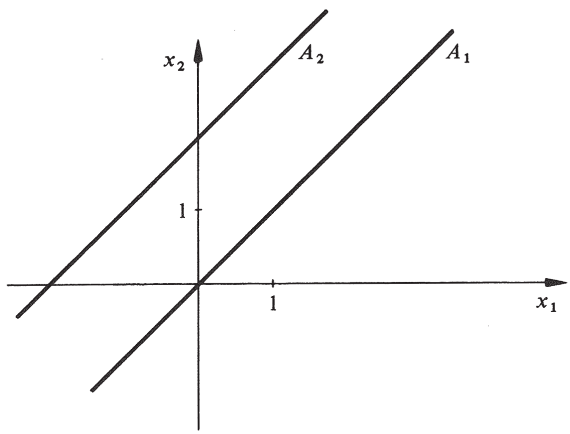


Fig. 11.9

11.3.33 Exemple d'un sous-ensemble connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$

Le sous-ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \geqslant 0\}$ de $\mathbb{R}^2$ est connexe par arcs (fig. 11.10).

11.3.34 Lemme

Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{a}$ un élément de E. Alors, $E_1 = \{\boldsymbol{x} \in E :$ il existe un chemin de E d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{x}\}$ et $E_2 = \{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \notin E_1\}$ sont deux sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$.

DÉMONSTRATION. Soit $\boldsymbol{x}$ un élément quelconque de E_1. Par hypothèse, il existe un chemin $\boldsymbol{\gamma}_1 : [0,1] \to E$ d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{x}$. De plus, E étant ouvert, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{x},\delta) \subset E$. Montrons que $B(\boldsymbol{x},\delta) \subset E_1$. En effet, si $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x},\delta)$, l'application $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to E$ définie par

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\gamma}(2t) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ (2t-1)\boldsymbol{y} - 2(t-1)\boldsymbol{x} & \text{si } t \in \,]1/2,1] \end{cases}$$

est un chemin de E d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{y}$; ce qui entraîne que $\boldsymbol{y} \in E_1$.

Montrons à présent que E_2 est aussi ouvert. Si $E_2 = \phi$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $E_2 \neq \phi$, et soit $\boldsymbol{z}$ un élément quelconque de E_2. Puisque E est ouvert, il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{z},\beta) \subset E$. Comme $\boldsymbol{z} \notin E_1$, on peut affirmer que $B(\boldsymbol{z},\beta) \cap E_1 = \phi$ (car sinon on pourrait relier $\boldsymbol{z}$ à $\boldsymbol{a}$); ce qui implique que $B(\boldsymbol{z},\beta) \subset E_2$. ∎

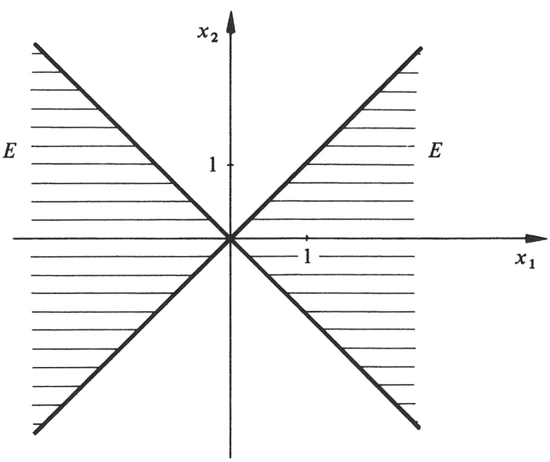


Fig. 11.10

11.3.35 Caractérisation d'un sous-ensemble ouvert et connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$

Soit E un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour que E soit connexe par arcs il faut et il suffit qu'il ne soit pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints.

DÉMONSTRATION. Montrons que la condition est suffisante. Soit $\boldsymbol{a} \in E$. On sait, d'après le lemme 11.3.34, que $E_1 = \{\boldsymbol{x} \in E :$ il existe un chemin de E d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{x}\}$ et $E_2 = \{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \notin E_1\}$ sont deux sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$. Puisque $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \phi$ et $E_1 \neq \phi$, il résulte de l'hypothèse que $E_2 = \phi$. D'où $E_1 = E$. Comme par construction E_1 est connexe par arcs, E l'est aussi.

Montrons à présent que la condition est nécessaire. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux ouverts non vides disjoints A_1 et A_2 tels que $E = A_1 \cup A_2$. Soit $\boldsymbol{a}_1 \in A_1$ et $\boldsymbol{a}_2 \in A_2$. Puisque E est connexe par arcs, il existe un chemin $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to E$ d'origine $\boldsymbol{a}_1$ et d'extrémité $\boldsymbol{a}_2$. Posons $B = \{t \in [0,1] : \boldsymbol{\gamma}(t) \in A_1\}$.

Comme $\boldsymbol{\gamma}(0) \in A_1$, le nombre réel $s = \operatorname{Sup} B$ existe; ce qui entraîne l'existence d'une suite (t_k) d'éléments de B qui converge vers s. D'autre part, en constatant que $s \in [0,1]$ et que $\boldsymbol{\gamma}(1) \notin A_1$, la suite (r_k) définie par

$$r_k = s + \frac{1-s}{1+k}$$

est une suite d'éléments de $[0,1] \cap \complement B$ qui converge elle aussi vers s. Ainsi, la définition d'un chemin nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{k \to +\infty} \boldsymbol{\gamma}(t_k) = \lim\limits_{k \to +\infty} \boldsymbol{\gamma}(r_k) = \boldsymbol{\gamma}(s)$; ce qui implique (§ 11.3.15) que $\boldsymbol{\gamma}(s) \in \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$. Comme de plus $\boldsymbol{\gamma}(s) \in E = A_1 \cup A_2$ et $A_1 \cap A_2 = \phi$, on aboutit à l'alternative suivante: ou bien $\boldsymbol{\gamma}(s) \in A_1 \cap \partial A_2$ ou bien $\boldsymbol{\gamma}(s) \in \partial A_1 \cap A_2$. Supposons d'abord que $\boldsymbol{\gamma}(s) \in A_1 \cap \partial A_2$. Le sous-ensemble A_1 de $\mathbb{R}^n$ étant ouvert, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{\gamma}(s), \delta) \subset A_1$; ce qui entraîne, puisque $A_1 \cap A_2 = \phi$, que $B(\boldsymbol{\gamma}(s), \delta) \cap A_2 = \phi$. Ce résultat contredit le fait que $\boldsymbol{\gamma}(s) \in \partial A_2$. D'où $\boldsymbol{\gamma}(s) \notin A_1 \cap \partial A_2$. De manière analogue, on démontre que $\boldsymbol{\gamma}(s) \notin \partial A_1 \cap A_2$. On obtient ainsi une contradiction. Par conséquent, la condition est nécessaire. ∎

11.4 EXERCICES

11.4.1 Soit A, B et C trois sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

1) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
2) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

11.4.2 Soit A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

11.4.3 Soit A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$.
1) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.
2) Peut-on inverser l'inclusion?

11.4.4 Montrer que l'adhérence de tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ est bornée.

11.4.5 Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathring{E} = \bar{E}$. Montrer que $E = \mathbb{R}^n$.

11.4.6 Soit $a < b$ deux nombres réels et $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que $E = \{(x, f(x)) : a \leqslant x \leqslant b\}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$.

11.4.7 Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin 1/x\}$. Montrer que

$$\bar{E} = E \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, -1 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

11.4.8 Soit $E = \{(m + 1/p, n + 1/q) : m,n \in \mathbb{Z}, p,q \in \mathbb{N} - \{0,1\}\}$.
1) E est-il un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$?
2) E est-il un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$?
3) Calculer $\bar{E}$ et ∂E.

11.4.9 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathring{E} \neq \phi$. Montrer que $\partial \mathring{E} \subset \partial E$.

11.4.10 Soit E un sous-ensemble non vide strictement inclus dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\partial E = \partial \complement E$.

11.4.11 Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ tel que $\partial E = \phi$. Montrer que $E = \mathbb{R}^n$.

11.4.12 Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\boldsymbol{x} \in \partial E$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de E et une suite d'éléments de $\complement E$ qui convergent vers $\boldsymbol{x}$.

11.4.13 Soit A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$ tels que $\bar{A} \cap \bar{B} = \phi$. Montrer que $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

11.4.14 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Un élément $\boldsymbol{a}$ de $\mathbb{R}^n$ est appelé un *point d'accumulation* de E si pour tout nombre réel $\delta > 0$, l'intersection $E \cap B(\boldsymbol{a}, \delta)$ contient au moins un élément autre que $\boldsymbol{a}$.

1) Montrer que tous les points d'accumulation d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ appartiennent à son adhérence. En donnant un contre-exemple, montrer que la réciproque est fausse.
2) Démontrer que tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui admet un point d'accumulation possède une infinité d'éléments.
3) Montrer que tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ qui n'admet pas de point d'accumulation ne possède qu'un nombre fini d'éléments. Que devient ce résultat si le sous-ensemble n'est pas borné ?
4) Démontrer qu'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement s'il contient tous ses points d'accumulation.

11.4.15 Soit $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ p éléments distincts de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $E = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p\}$ est compact.

11.4.16 Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'adhérence de tout sous-ensemble non vide de E est compacte.

11.4.17 Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ inclus dans E telle que pour tout sous-ensemble fini I_0 de I : $\bigcap_{i \in I_0} F_i \neq \phi$. Montrer que

$$\bigcap_{i \in I} F_i \neq \phi.$$

11.4.18 Soit $(\boldsymbol{x}_k)$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers $\boldsymbol{x}$. Montrer que la suite numérique $(\|\boldsymbol{x}_k\|)$ converge vers $\|\boldsymbol{x}\|$.

11.4.19 Soit A un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et B un sous-ensemble non vide et fermé de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $\boldsymbol{a} \in A$ et $\boldsymbol{b} \in B$ tels que

$$\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\| = \operatorname{Inf}\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| : \boldsymbol{x} \in A,\ \boldsymbol{y} \in B\}.$$

11.4.20 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{\gamma}: [0,1] \to E$ un chemin de E. Montrer que $\boldsymbol{\gamma}([0,1]) = \{\boldsymbol{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\}$ est connexe par arcs.

11.4.21 Soit A et B deux sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ tels que l'union $A \cup B$ et l'intersection $A \cap B$ sont connexes par arcs. En déduire que A et B sont connexes par arcs.

11.4.22 Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin 1/x\}$. Montrer que E est connexe par arcs, tandis que $\bar{E}$ (exercice 11.4.7) ne l'est pas.

11.4.23 Soit $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|}{1+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|}.$$

Montrer que pour tout triplet $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$ de $\mathbb{R}^n$:

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leqslant f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

11.4.24 Soit p un nombre réel strictement supérieur à 1 et $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, par

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

(Pour $p = 2$, on obtient la norme euclidienne définie au paragraphe 11.1.2). Montrer que pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p.$$

11.4.25 (*Produit scalaire*). Soit $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et tout $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, par

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

1) Montrer que pour tout triplet $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$ de $\mathbb{R}^n$ et tout couple de nombres réels α et β :

$$\langle \lambda \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \beta \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle.$$

2) En déduire que pour tout couple d'éléments $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$:

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 \qquad (\textit{égalité de Pythagore}).$$

3) Montrer que pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| \qquad (\textit{inégalité de Cauchy-Schwarz } (\S\ 6.4.4)).$$

12. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles

12.1 DÉFINITIONS

12.1.1 Définition d'une fonction réelle de plusieurs variables réelles

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ et G une partie du produit cartésien $E \times \mathbb{R}$ telle que, pour tout élément $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de E, il existe un nombre réel y et un seul tel que le couple $(\boldsymbol{x}, y)$ appartienne à G. Alors, le triplet

$$f = (G, E, \mathbb{R})$$

s'appelle *fonction* définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou encore *application* de E dans $\mathbb{R}$. Ici, les mots application et fonction seront toujours considérés comme synonymes. On dit que G est le *graphe* de f et on le note par $G(f)$, que E est l'*ensemble de départ* ou le *domaine de définition* et on le désigne généralement par $D(f)$. Le sous-ensemble $\{y \in \mathbb{R} : \exists\, \boldsymbol{x} \in E \text{ tel que } f(\boldsymbol{x}) = y\}$ de $\mathbb{R}$ est appelé l'*image* de E par f et est noté *Im f*. L'unique nombre réel y correspondant à l'élément $\boldsymbol{x}$ de E par f s'appelle l'*image de* $\boldsymbol{x}$ *par* f et se note $f(\boldsymbol{x})$, tandis que $\boldsymbol{x}$ est appelé la *variable indépendante*. La notation $f = (G, E, \mathbb{R})$ n'est pas utilisée en pratique, on lui préfère les notations suivantes :

$$f : E \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad E \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Pour montrer que $f(\boldsymbol{x})$ est le nombre réel associé à $\boldsymbol{x}$, on emploie la notation

$$\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}).$$

12.1.2 Graphique d'une fonction de deux variables

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$. Considérons à présent l'espace euclidien rapporté à trois axes de coordonnées $0x$, $0y$ et $0z$ définis par les trois vecteurs e_1, e_2 et e_3. Alors, à tout élément (x, y) de E, on fait correspondre le point P de l'espace dont les coordonnées relativement aux trois axes $0x$, $0y$ et $0z$ sont x, y et $z = f(x, y)$. L'ensemble de ces points est appelé le *graphique* de la fonction f relativement aux trois axes $0x$, $0y$ et $0z$ (fig. 12.1 et 12.2).

En général l'axe $0x$ est appelé l'*axe des abscisses*, $0y$ l'*axe des ordonnées* et $0z$ l'*axe des cotes*. L'intersection 0 de ces trois axes est appelée l'*origine*.

12.1.3 Fonction bornée

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite *bornée* s'il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que la relation $\boldsymbol{x} \in E$ implique $|f(\boldsymbol{x})| \leqslant M$.

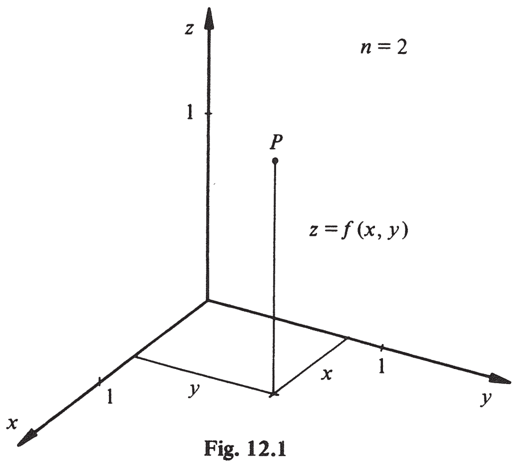


Fig. 12.1

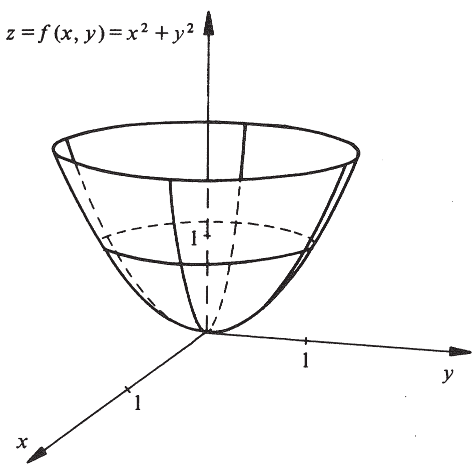


Fig. 12.2

12.2 LIMITES

12.2.1 Fonction définie au voisinage d'un point

Nous dirons qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est *définie au voisinage de* $\boldsymbol{x}_0$ si $\boldsymbol{x}_0$ est un point intérieur à $E \cup \{\boldsymbol{x}_0\}$.

12.2.2 Définition de la limite d'une fonction

Nous dirons qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\boldsymbol{x}_0$ admet pour *limite* le nombre réel l lorsque $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{x}_0$ si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $\boldsymbol{x} \in E$ et $0 < \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \| \leqslant \delta$ impliquent $| f(\boldsymbol{x}) - l | \leqslant \epsilon$. On écrit alors, $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = l$.

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend de $\boldsymbol{x}_0$ et de ϵ.

12.2.3 Caractérisation de la limite d'une fonction à partir des suites

Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\boldsymbol{x}_0$ admet pour limite le nombre réel l lorsque $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{x}_0$ si et seulement si pour toute suite $(\boldsymbol{a}_k)$ d'éléments de $\{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0\}$ qui converge vers $\boldsymbol{x}_0$, la suite $(f(\boldsymbol{a}_k))$ converge vers l.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que $\lim\limits_{x \to x_0} f(\boldsymbol{x}) = l$ et que la suite $(\boldsymbol{a}_k)$ d'éléments de $\{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0\}$ converge vers $\boldsymbol{x}_0$. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Etant donné que $\lim\limits_{x \to x_0} f(\boldsymbol{x}) = l$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que les relations $\boldsymbol{x} \in E$ et $0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \delta$ impliquent $|f(\boldsymbol{x}) - l| \leqslant \epsilon$. D'autre part, puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{x}_0$ et $\boldsymbol{x}_0 \notin \{\boldsymbol{a}_k : k \in \mathbb{N}\}$, il existe un entier $k_0 > 0$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$: $0 < \|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \delta$. Finalement, on peut écrire que pour tout $k \geqslant k_0 : |f(\boldsymbol{a}_k) - l| \leqslant \epsilon$.

Réciproquement, supposons que pour toute suite $(\boldsymbol{a}_k)$ d'éléments de $\{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0\}$ qui converge vers $\boldsymbol{x}_0$, la suite $(f(\boldsymbol{a}_k))$ converge vers l. Montrons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(\boldsymbol{x}) = l$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que ce résultat soit faux. Alors, il existe un nombre réel $\epsilon > 0$ tel que pour tout entier $k \geqslant 0$, l'ensemble $\{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, 1/(k+1))\}$ contient au moins un élément $\boldsymbol{b}_k$ pour lequel $|f(\boldsymbol{b}_k) - l| > \epsilon$. Ainsi, par construction, $(\boldsymbol{b}_k)$ est une suite d'éléments de $\{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0\}$ qui converge vers $\boldsymbol{x}_0$ et dont la suite des images $(f(\boldsymbol{b}_k))$ ne converge pas vers l. D'où contradiction; ce qui nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{x \to x_0} f(\boldsymbol{x}) = l$. ■

12.2.4 Unicité de la limite d'une fonction

Si l_1 et l_2 sont deux limites de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ lorsque $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{x}_0$, alors $l_1 = l_2$.

DÉMONSTRATION. Soit $(\boldsymbol{a}_k)$ une suite d'éléments de $\{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0\}$. Alors, $l_1 = \lim\limits_{k \to +\infty} f(\boldsymbol{a}_k)$ et $l_2 = \lim\limits_{k \to +\infty} f(\boldsymbol{a}_k)$ (§ 12.2.3). Par conséquent $l_1 = l_2$ (§ 2.3.4). ■

12.2.5 Opérations algébriques sur les limites

Soit f et g deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x \to x_0} f(\boldsymbol{x}) = l_1$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(\boldsymbol{x}) = l_2$. Alors,

- pour tout couple de nombres réels α et β, la limite de la fonction $\alpha f + \beta g$ lorsque $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{x}_0$ existe et est égale à $\alpha l_1 + \beta l_2$;
- la limite de la fonction fg lorsque $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{x}_0$ existe et est égale à $l_1 \, l_2$;
- si $l_2 \neq 0$, la limite de la fonction f/g lorsque $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{x}_0$ existe et est égale à l_1/l_2.

DÉMONSTRATION. Pour toute suite $(\boldsymbol{a}_k)$ d'éléments de $\{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0\}$ qui converge vers $\boldsymbol{x}_0$, les trois suites $(\alpha f(\boldsymbol{a}_k) + \beta g(\boldsymbol{a}_k))$, $(f(\boldsymbol{a}_k) g(\boldsymbol{a}_k))$ et $(f(\boldsymbol{a}_k) / g(\boldsymbol{a}_k))$ convergent respectivement vers $\alpha l_1 + \beta l_2$, $l_1 \, l_2$ et l_1 / l_2 (§ 2.3.10). Pour conclure, il suffit d'utiliser le résultat obtenu au paragraphe 12.2.3. ■

12.2.6 Limite d'une fonction composée

Soit $a \in \mathbb{R}$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{(x_1, \ldots, x_n) \to (b_1, \ldots, b_n)} f(x_1, \ldots, x_n) = l$ et soit $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n fonctions telles que $\lim_{t \to a} g_1(t) = b_1, \ldots, \lim_{t \to a} g_n(t) = b_n$. Supposons de plus qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que la relation $0 < |t - a| \leqslant \alpha$ implique $(g_1(t), \ldots, g_n(t)) \neq (b_1, \ldots, b_n)$. Alors, $\lim_{t \to a} f((g_1(t), \ldots, g_n(t))) = l$.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. D'une part, puisque $\lim_{(x_1, \ldots, x_n) \to (b_1, \ldots, b_n)} f(x_1, \ldots, x_n) = l$, il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que la relation $0 < (\Sigma_{i=1}^n (x_i - b_i)^2)^{1/2} \leqslant \beta$ implique $|f(x_1, \ldots, x_n) - l| \leqslant \epsilon$. D'autre part, comme $\lim_{t \to a} g_1(t) = b_1, \ldots, \lim_{t \to a} g_n(t) = b_n$, il existe n nombres réels positifs $\delta_1, \ldots, \delta_n$ tels que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$, la relation $0 < |t - a| \leqslant \delta_j$ implique $|g_j(t) - b_j| \leqslant \beta/\sqrt{n}$. Ainsi, en posant $\delta = \min\{\alpha, \delta_1, \ldots, \delta_n\}$, on obtient que pour tout $0 < |t - a| \leqslant \delta$: $0 < (\Sigma_{i=1}^n (g_i(t) - b_i)^2)^{1/2} \leqslant \beta$; ce qui entraîne que $|f(g_1(t), \ldots, g_n(t)) - l| \leqslant \epsilon$. D'où le résultat. ■

12.2.7 Remarque

Si dans l'énoncé du paragraphe 12.2.6, on omet de faire l'hypothèse qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que la relation $0 < |t - a| \leqslant \alpha$ implique $(g_1(t), \ldots, g_n(t)) \neq (b_1, \ldots, b_n)$, alors le résultat peut très bien cesser d'être vrai. Par exemple, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et si $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les deux fonctions définies respectivement par

$$g_1(t) = \begin{cases} t \sin \dfrac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases} \qquad \text{et } g_2(t) = 0,$$

on a $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 1$ et $\lim_{t \to 0} g_1(t) = 0$. Néanmoins, puisque

$$f(g_1(t), g_2(t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \{s \in \mathbb{R} : s = 1/k\pi, k \in \mathbb{Z}^*\} \\ 1 & \text{si } t \notin \{s \in \mathbb{R} : s = 1/k\pi, k \in \mathbb{Z}^*\}, \end{cases}$$

on obtient que $\lim_{t \to 0} f(g_1(t), g_2(t))$ n'existe pas.

12.2.8 Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calculons sa limite lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$. En utilisant le résultat obtenu au paragraphe 12.2.6 (avec $g_1(t) = g_2(t) = t$, $\boldsymbol{b} = (0,0)$ et $a = 0$), on sait que si cette limite existe elle doit être égale à $\lim\limits_{t \to 0} f(t,t) = 0$. Reste à démontrer que zéro est bien la limite de f lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$. En effet, en associant à tout nombre réel $\epsilon > 0$ le nombre $\delta = \epsilon/3$, la relation $0 < \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \delta$ implique bien

$$|f(x,y)| = \frac{|x+y|\,|x^2-xy+y^2|}{x^2+y^2} \leqslant |x+y| \left(1 + \frac{|xy|}{x^2+y^2}\right)$$
$$\leqslant \frac{3}{2}(|x| + |y|) \leqslant 3\sqrt{x^2+y^2} \leqslant \epsilon.$$

12.2.9 Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction (fig. 12.3) définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

En remarquant que $\lim\limits_{t \to 0} f(t,t) = 1/2 \neq 0 = \lim\limits_{t \to 0} f(t,0)$, on peut affirmer (§ 12.2.6) que la fonction f n'admet pas de limite lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$.

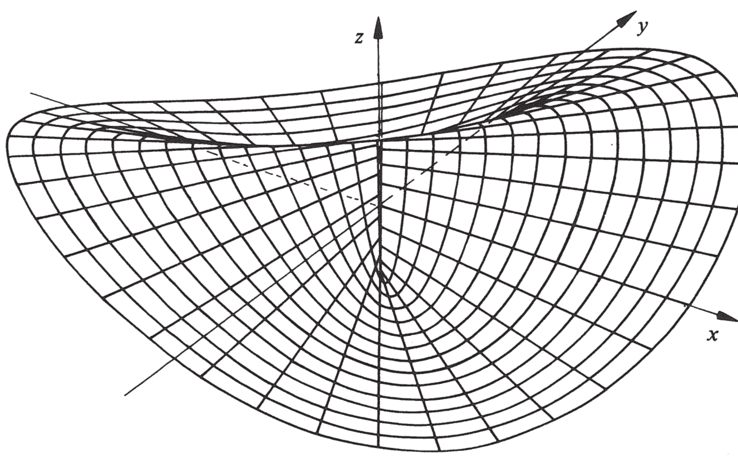


Fig. 12.3

12.2.10 Permutation des limites

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$. Supposons, de plus, que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ existe et que pour tout $y \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ existe. Alors,

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) = l.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = \lim\limits_{y\to b} f(x,y)$. De même, pour tout $y \in \mathbb{R}$, posons $h(y) = \lim\limits_{x\to a} f(x,y)$. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Puisque $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que la relation $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leqslant \delta$ implique $|f(x,y) - l| \leqslant \epsilon$. Ainsi, pour tout $0 < |x-a| \leqslant \delta/2 : |g(x) - l| = \lim\limits_{y\to b} |f(x,y) - l| \leqslant \epsilon$ et pour tout $0 < |y-b| \leqslant \delta/2 : |h(y) - l| = \lim\limits_{x\to a} |f(x,y) - l| \leqslant \epsilon$.

Ces deux résultats étant vrais quel que soit le nombre réel $\epsilon > 0$, on peut conclure que $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ et $\lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right) = \lim\limits_{y\to b} h(y) = l.$ ■

12.2.11 Remarques

D'une part, le fait que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe n'entraîne pas, en général, que l'une ou l'autre des deux limites suivantes $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ existe. Par exemple, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$f(x,y) = x\,h(y) + y\,h(x) \qquad \text{avec } h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } t \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

on a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Par contre, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ n'existe pas et pour tout $y \in \mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ n'existe pas.

D'autre part, le fait que $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right) = l$ n'implique pas a priori que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe. Par exemple, pour la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

on sait (§ 12.2.9) que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas. Néanmoins, il est facile de vérifier que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$.

12.2.12 Théorème des deux gendarmes

Soit f, g et h trois fonctions de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

– $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$;
– il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $\{x \in E : 0 < \| x - x_0 \| \leqslant \alpha\} : f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$.

Alors, $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$.

DÉMONSTRATION. Soit (a_k) une suite arbitraire d'éléments de $\{x \in E : x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0. De la deuxième propriété, on déduit qu'il existe un entier $k_0 > 0$ tel que pour tout $k \geqslant k_0 : f(a_k) \leqslant h(a_k) \leqslant g(a_k)$. Comme $\lim\limits_{k \to +\infty} f(a_k) = \lim\limits_{k \to +\infty} g(a_k) = l$ (§ 12.2.3), on peut affirmer (§ 2.3.21) que $\lim\limits_{k \to +\infty} h(a_k) = l$. Ainsi, le résultat démontré au paragraphe 12.2.3 nous permet de conclure que $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$. ∎

12.2.13 Exemple

Montrons que la limite de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (fig. 12.4) définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{Log}(|x| + |y|) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

vaut zéro lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$. D'une part, pour tout élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < 1$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |f(x,y)| &= |xy \operatorname{Log}(|x| + |y|)| \\ &\leqslant |(|x| + |y|) \operatorname{Log}(|x| + |y|)|. \end{aligned}$$

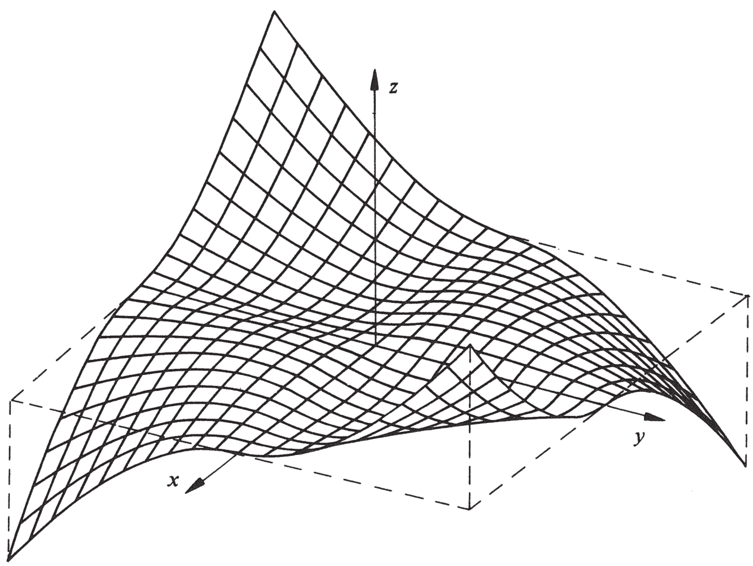


Fig. 12.4

D'autre part, puisque $\lim\limits_{t \to 0+} t \operatorname{Log} t = 0$ et $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} (|x| + |y|) = 0$, on a : $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} |(|x| + |y|) \operatorname{Log}(|x| + |y|)| = 0$. Ainsi, en utilisant le théorème des deux gendarmes, on obtient que $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} |f(x,y)| = 0$; ce qui entraîne que $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$.

12.3 FONCTIONS CONTINUES

12.3.1 Définition d'une fonction continue en un point

Soit $\boldsymbol{x}_0$ un point intérieur à E. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite *continue en* $\boldsymbol{x}_0$ si $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$.

12.3.2 Première définition équivalente

Soit $\boldsymbol{x}_0$ un point intérieur à E. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est continue en $\boldsymbol{x}_0$ si et seulement si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $\boldsymbol{x} \in E$ et $\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \| \leqslant \delta$ impliquent $| f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) | \leqslant \epsilon$.

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend de $\boldsymbol{x}_0$ et de ϵ.

12.3.3 Deuxième définition équivalente

Soit $\boldsymbol{x}_0$ un point intérieur à E. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est continue en $\boldsymbol{x}_0$ si et seulement si pour toute suite $(\boldsymbol{a}_k)$ d'éléments de E qui converge vers $\boldsymbol{x}_0$, la suite $(f(\boldsymbol{a}_k))$ converge vers $f(\boldsymbol{x}_0)$.

12.3.4 Remarque

Si une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est continue au point $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, les n fonctions d'une variable $f_1, \ldots, f_n$ définies par

$$\begin{aligned} f_j : \{x \in \mathbb{R} : \ (a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in E\} &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f_j(x) &= f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

sont respectivement continues en $a_1, \ldots, a_n$; autrement dit f est continue par rapport à chacune de ses variables.

En général, la réciproque est fausse; c'est-à-dire que la continuité des n fonctions d'une variable $f_1, \ldots, f_n$ respectivement en $a_1, \ldots, a_n$ n'entraîne pas nécessairement la continuité de la fonction f au point $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

n'est pas continue au point $(0,0)$ (§ 12.2.9). Par contre, les deux fonctions $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par $f_1(x) = f(x,0)$ et $f_2(y) = f_2(0,y)$ sont continues en $x = 0$ et $y = 0$.

12.3.5 Remarque

Soit $l \in \mathbb{R}$. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \to 0} f(x, \alpha x) = l$, peut-on en conclure que f est continue au point $(0,0)$? La réponse à cette question est non. En effet, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (fig. 12.5) définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2y^4}{x^2 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

vérifie la propriété ci-dessus; mais, comme $\lim_{t \to 0} f(t^2, t) = 1 \neq 0 = \lim_{t \to 0} f(t, 0)$, elle n'est pas continue au point $(0,0)$ (§ 12.2.6).

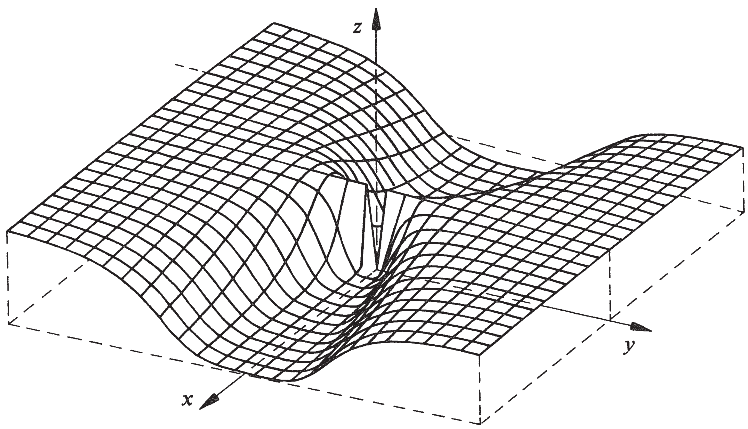


Fig. 12.5

12.3.6 Opérations algébriques sur les fonctions continues

Soit f et g deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$ continues en $\boldsymbol{x}_0$. Alors,

- pour tout couple de nombres réels α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ est continue en $\boldsymbol{x}_0$;
- de même, les fonctions fg, f/g (avec $g(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$), et $|f|$ sont continues en $\boldsymbol{x}_0$.

12.3.7 Continuité d'une fonction composée

D'une part, soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $g_1, \ldots, g_p : A \to \mathbb{R}$ p fonctions continues au point $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. D'autre part, soit B un sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$ contenant $\{(g_1(\boldsymbol{y}), \ldots, g_p(\boldsymbol{y})) : \boldsymbol{y} \in A\}$ et $f : B \to \mathbb{R}$ une fonction continue au point

$\boldsymbol{b} = (g_1(\boldsymbol{a}), \ldots, g_p(\boldsymbol{a}))$. Alors la fonction $F: A \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(y_1, \ldots, y_n) = f(x_1 = g_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_p = g_p(y_1, \ldots, y_n))$$

est continue au point $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.

DÉMONSTRATION. Soit $(\boldsymbol{z}_k)$ une suite d'éléments de A qui converge vers $\boldsymbol{a}$. Alors, les p suites numériques $(g_1(\boldsymbol{z}_k)), \ldots, (g_p(\boldsymbol{z}_k))$ convergent respectivement vers $g_1(\boldsymbol{a}), \ldots, g_p(\boldsymbol{a})$; ce qui implique (§ 11.2.6) que la suite $(g_1(\boldsymbol{z}_k), \ldots, g_p(\boldsymbol{z}_k))$ converge vers $\boldsymbol{b} = (g_1(\boldsymbol{a}), \ldots, g_p(\boldsymbol{a}))$. Par conséquent, la continuité de la fonction f au point $\boldsymbol{b}$ nous permet d'écrire que $\lim\limits_{k \to +\infty} F(\boldsymbol{z}_k) = F(\boldsymbol{a})$. D'où le résultat. ■

12.3.8 Exemple

Montrons que la fonction $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = -\sin xy$ est continue au point $(0, 0)$. Pour cela, considérons les deux fonctions auxiliaires $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par $g(x, y) = xy$ et $f(t) = -\sin t$. Puisque g est continue en $(0, 0)$ et que f est continue en $g(0, 0)$, on peut conclure (§ 12.3.7) que la fonction F est continue au point $(0, 0)$ (fig. 12.6).

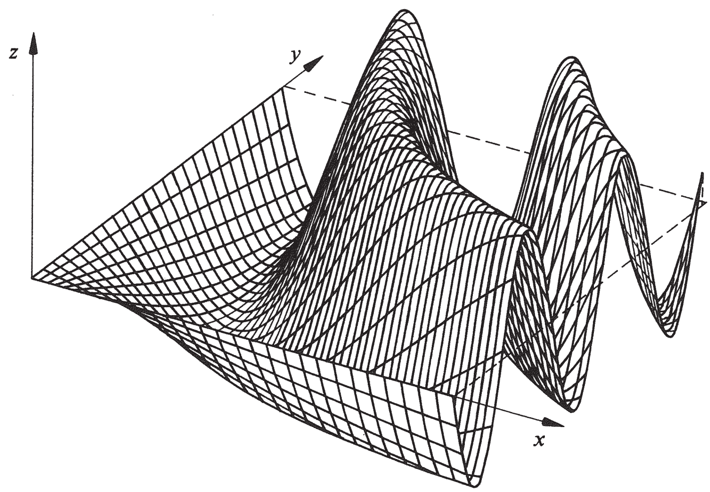


Fig. 12.6

12.3.9 Exemple d'une fonction continue

Démontrons que la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$ (fig. 12.7).

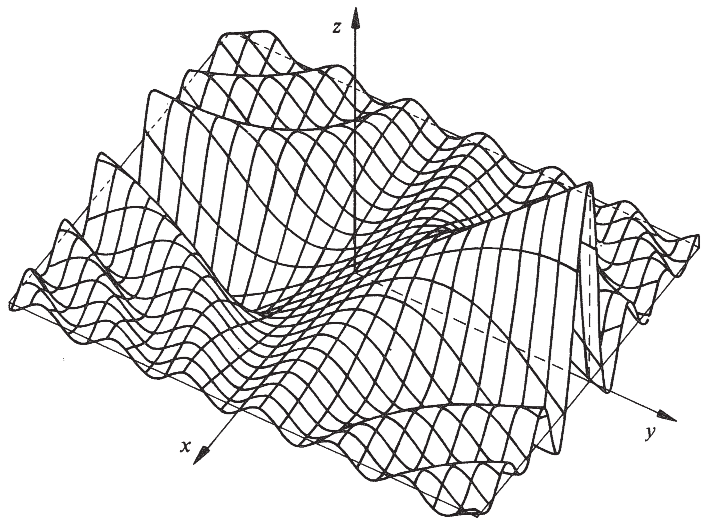


Fig. 12.7

De sa définition, on déduit que f est continue en tout point de l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

Montrons à présent qu'elle est continue au point $(0, 0)$. En effet, puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |f(x,y) - f(0,0)| \leqslant |y|$, on a bien $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

Reste à démontrer que f est continue en tout point de l'ensemble $\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$. Pour cela, soit $y_0 \neq 0$ et ϵ un nombre réel positif quelconque. D'une part, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|f(x,y) - f(0,y_0)| = |f(x,y) - y_0| = \begin{cases} \left|\dfrac{\sin xy}{x} - y_0\right| & \text{si } x \neq 0 \\ |y - y_0| & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

D'autre part, comme $y_0 \neq 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout $y \in [y_0 - \alpha, y_0 + \alpha] : 0 < |y| \leqslant 2|y_0|$; ce qui entraîne que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times [y_0 - \alpha, y_0 + \alpha]$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\sin xy}{x} - y_0\right| &= \left|\frac{\sin xy}{xy} y - y_0\right| = \left|\left(\frac{\sin xy}{xy} y - y\right) + (y - y_0)\right| \\ &\leqslant \left|\frac{\sin xy}{xy} - 1\right| |y| + |y - y_0| \\ &\leqslant 2|y_0| \left|\frac{\sin xy}{xy} - 1\right| + |y - y_0|. \end{aligned}$$

De plus, puisque $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$, il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que pour tout $0 < |t| \leqslant \beta$:

$$\left|\frac{\sin t}{t} - 1\right| \leqslant \frac{\epsilon}{4|y_0|}.$$

Ainsi, en posant

$$\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{2}, \frac{\beta}{2|y_0|}, \alpha\right\},$$

on obtient que pour tout $(x,y)\in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\sqrt{x^2+(y-y_0)^2} \leqslant \delta$:

$$|f(x,y) - f(0,y_0)| \leqslant \epsilon.$$

D'où le résultat.

12.3.10 Fonction continue sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite *continue sur E*, ou tout simplement qu'elle est *continue* si à tout élément $(\boldsymbol{x}_0, \epsilon)\in E \times \mathbb{R}^*_+$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $\boldsymbol{x} \in E$ et $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \delta$ impliquent $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| \leqslant \epsilon$.

D'une manière générale, le nombre δ dépend de $\boldsymbol{x}_0$ et de ϵ.

L'ensemble des fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$ est noté $C(E, \mathbb{R})$.

12.3.11 Propriété des fonctions continues sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est continue sur E si et seulement si pour tout $\boldsymbol{x}_0 \in E$ et toute suite $(\boldsymbol{a}_k)$ d'éléments de E qui converge vers $\boldsymbol{x}_0$, la suite $(f(\boldsymbol{a}_k))$ converge vers $f(\boldsymbol{x}_0)$.

12.3.12 Remarques

Soit r un nombre réel positif et $f : \overline{B(\mathbf{0}, r)} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Cette fonction est continue sur $\overline{B(\mathbf{0}, r)}$, ainsi qu'en tout point de $B(\mathbf{0}, r)$. Par contre, si $\boldsymbol{x}_0 \in \partial B(\mathbf{0}, r)$, la fonction f n'est pas continue en $\boldsymbol{x}_0$, car $\boldsymbol{x}_0$ n'est pas un point intérieur à $\overline{B(\mathbf{0}, r)}$. Cet exemple nous montre qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ peut très bien être continue sur E sans pour autant être continue en tout point de E.

Pour $n = 1$, la définition du paragraphe 12.3.10 généralise à des sous-ensembles quelconques de $\mathbb{R}$ la notion de continuité donnée aux paragraphes 4.3.16, 8.1.1 et 8.2.1 pour les intervalles.

12.3.13 Relation entre les différentes continuités

Pour qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ continue sur E soit continue en un point $\boldsymbol{x}_0$ de E il faut et il suffit que $\boldsymbol{x}_0$ soit un point intérieur à E.

Par conséquent, pour qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ continue sur E soit continue en tout point de E il faut et il suffit que E soit ouvert.

12.3.14 Définition de la continuité uniforme d'une fonction

Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite *uniformément continue* sur E si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout couple d'éléments $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ de E vérifiant la relation $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leqslant \delta$, on ait : $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leqslant \epsilon$.

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend du nombre ϵ mais pas de $\boldsymbol{x}$ ou de $\boldsymbol{y}$.

12.3.15 Exemple

Il résulte de l'inégalité triangulaire inverse (§ 11.1.3) que pour tout sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$, la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$ est uniformément continue sur E (fig. 12.8).

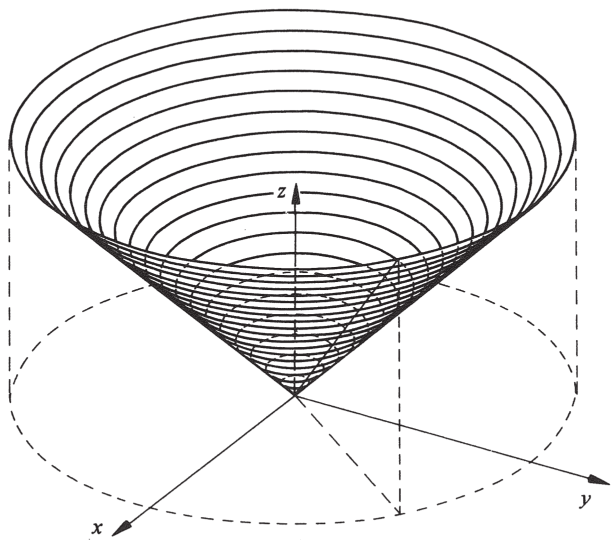


Fig. 12.8

12.3.16 Remarques

Dans la définition de la continuité uniforme, le nombre δ ne dépend que de ϵ, alors que dans la définition de la continuité (§ 12.3.10) il dépend, en général, aussi du point considéré $\boldsymbol{x}_0$.

Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ uniformément continue sur E est continue sur E. La réciproque n'est pas toujours vraie. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^2$ puisque pour tout nombre $\alpha > 0$ donné, la différence $|f(x + \alpha, y) - f(x, y)| = \alpha\,|2x + \alpha|$ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes.

12.3.17 Maximum et minimum d'une fonction

Soit f une fonction de E dans $\mathbb{R}$ et M (resp. m) un nombre réel vérifiant les deux propriétés suivantes :

- pour tout élément $\boldsymbol{x}$ de $E : f(\boldsymbol{x}) \leqslant M$ (resp. $f(\boldsymbol{x}) \geqslant m$);
- M (resp. m) appartient à l'ensemble $\operatorname{Im} f = \{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in E\}$.

Alors, le nombre réel M (resp. m) est appelé le *maximum* (resp. le *minimum*) de la fonction f sur E et est noté $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})$ (resp. $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})$).

D'autre part, si pour $\boldsymbol{x}_0 \in E : f(\boldsymbol{x}_0) = \max\limits_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})$ (resp. $f(\boldsymbol{x}_0) = \min\limits_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})$), nous dirons que la fonction *f atteint son maximum* (resp. *minimum*) au point $\boldsymbol{x}_0$.

12.3.18 Propriétés des fonctions continues sur un compact

Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,

- la fonction f est uniformément continue sur E;
- les deux nombres réels $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})$ et $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})$ existent.

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que f est uniformément continue sur E. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle ne le soit pas. Alors, il existe un nombre réel $\epsilon > 0$ et deux suites $(\boldsymbol{x}_k)$ et $(\boldsymbol{y}_k)$ d'éléments de E tels que pour tout entier $k > 0$: $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{y}_k\| \leqslant 1/k$ et $|f(\boldsymbol{x}_k) - f(\boldsymbol{y}_k)| > \epsilon$. De la suite $(\boldsymbol{x}_k)$ on peut extraire une sous-suite $(\boldsymbol{x}_{k(p)})$ qui converge vers un élément $\boldsymbol{x}$ de E (§ 11.3.25). De même, de la suite $(\boldsymbol{z}_p = \boldsymbol{y}_{k(p)})$ on peut extraire une sous-suite $(\boldsymbol{z}_{p(q)})$ qui converge vers un élément $\boldsymbol{y}$ de E. Ainsi, puisque l'application $r = k \circ p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, on peut affirmer que $(\boldsymbol{x}_{r(q)})$ et $(\boldsymbol{y}_{r(q)} = \boldsymbol{z}_{p(q)})$ sont deux sous-suites qui convergent respectivement vers $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. Par conséquent, comme f est une fonction continue sur E et que pour tout entier $q > 0$: $\|\boldsymbol{x}_{r(q)} - \boldsymbol{y}_{r(q)}\| \leqslant 1/q$ et $|f(\boldsymbol{x}_{r(q)}) - f(\boldsymbol{y}_{r(q)})| > \epsilon$, on obtient, par passage à la limite, la contradiction suivante: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ et $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \geqslant \epsilon > 0$. D'où f est uniformément continue sur E.

Montrons à présent la deuxième propriété. Mais d'abord, il nous faut démontrer que la fonction f est bornée sur E. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que f ne soit pas bornée sur E. Alors, il existe une suite $(\boldsymbol{x}_k)$ d'éléments de E telle que pour tout entier $k \geqslant 0 : |f(\boldsymbol{x}_k)| \geqslant k$. De la suite $(\boldsymbol{x}_k)$, on peut extraire une sous-suite $(\boldsymbol{x}_{k(p)})$ qui converge vers un élément $\boldsymbol{x}$ de E; ce qui implique, du fait de la continuité de f sur E, que $\lim\limits_{p\to+\infty} f(\boldsymbol{x}_{k(p)}) = f(\boldsymbol{x})$. Ce dernier résultat est impossible car, par construction, la suite $(f(\boldsymbol{x}_{k(p)}))$ n'est pas bornée. D'où contradiction. Par conséquent, la fonction f est bornée sur E. En désignant par $M = \operatorname{Sup}\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in E\}$ et par $m = \operatorname{Inf}\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in E\}$, on sait qu'il existe deux suites $(\boldsymbol{a}_k)$ et $(\boldsymbol{b}_k)$ d'éléments de E telles que $\lim\limits_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{a}_k) = m$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{b}_k) = M$. Des suites $(\boldsymbol{a}_k)$ et $(\boldsymbol{b}_k)$ on peut extraire deux sous-suites $(\boldsymbol{a}_{k(p)})$ et $(\boldsymbol{b}_{k(p)})$ qui convergent respectivement vers les éléments $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de E; ce qui entraîne, par la continuité de f sur E que $m = \lim\limits_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{a}_k) = \lim\limits_{p\to+\infty} f(\boldsymbol{a}_{k(p)}) = f(\boldsymbol{a})$ et $M = \lim\limits_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{b}_k) = \lim\limits_{p\to+\infty} f(\boldsymbol{b}_{k(p)}) = f(\boldsymbol{b})$. D'où $m = \min\limits_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})$ et $M = \max\limits_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})$.

■

12.3.19 Théorème de la valeur intermédiaire

Soit E un sous-ensemble compact et connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$ et $f: E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f atteint sa borne supérieure, sa borne inférieure et toute valeur comprise entre ces deux bornes. Autrement dit,

$$\operatorname{Im} f = [\min_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x}), \max_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})].$$

DÉMONSTRATION. Puisque f est continue sur un compact, nous savons (§ 12.3.18) qu'il existe deux éléments $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de E tels que $f(\boldsymbol{a}) = \min_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})$ et $f(\boldsymbol{b}) = \max_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})$. De plus, comme E est connexe par arcs, il existe un chemin $\boldsymbol{\gamma}: [0,1] \to E$ tel que $\boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{\gamma}(1) = \boldsymbol{b}$. Ainsi, grâce à la continuité de la fonction $f \circ \boldsymbol{\gamma}: [0,1] \to \mathbb{R}$, on obtient (§ 4.3.22) que

$$f \circ \boldsymbol{\gamma}([0,1]) = [\min_{t\in[0,1]} f(\boldsymbol{\gamma}(t)), \max_{t\in[0,1]} f(\boldsymbol{\gamma}(t))] = [f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})];$$

ce qui entraîne que

$$\operatorname{Im} f = [\min_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x}), \max_{\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})]. \qquad \blacksquare$$

12.3.20 Continuité d'une intégrale qui dépend d'un paramètre

Soit $a < b$ deux nombres réels, I un intervalle et $f: [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, la fonction $g: I \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

est continue.

DÉMONSTRATION. Pour les besoins de la démonstration, nous supposerons que $I = [c,d]$ (les autres cas se déduisant facilement de ce cas particulier). Soit ϵ un nombre réel positif et y_0 un élément quelconque de $[c,d]$. Puisque $[a,b] \times [c,d]$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^2$, la fonction f est uniformément continue sur $[a,b] \times [c,d]$. Par conséquent, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in [c,d]$ vérifiant $|y - y_0| \leqslant \delta$, on ait :

$$|f(x,y) - f(x,y_0)| \leqslant \frac{\epsilon}{b-a}$$

quel que soit $x \in [a,b]$; ce qui entraîne, entre autres, que

$$\begin{aligned} |g(y) - g(y_0)| &= \left| \int_a^b (f(x,y) - f(x,y_0))\,\mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(x,y) - f(x,y_0)|\,\mathrm{d}x \leqslant \epsilon. \end{aligned}$$

D'où le résultat. $\blacksquare$

12.3.21 Remarque

Soit $f : [0, +\infty[\times]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $f(x,y) = y^2 e^{-xy^2}$ (fig. 12.9). Puisque l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

converge quel que soit $y \in \mathbb{R}$, on peut considérer la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Par suite, en constatant que

$$g(y) = \int_0^{+\infty} y^2\, e^{-xy^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{cases}$$

on obtient que la fonction g n'est pas continue au point $y = 0$.

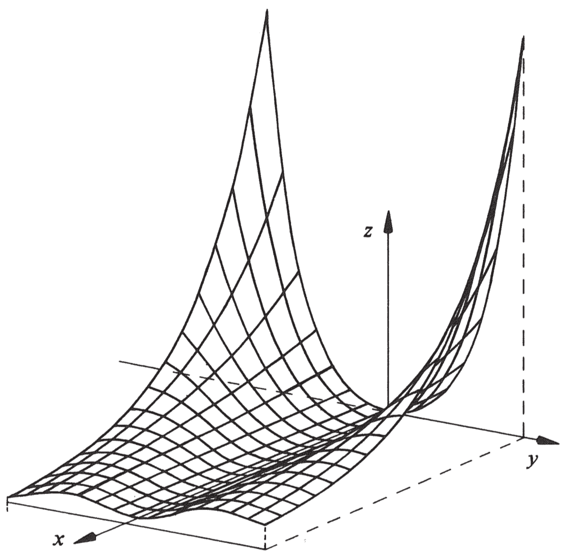


Fig. 12.9

Cet exemple nous montre, qu'en général, le résultat obtenu au paragraphe 12.3.20 n'est pas valable pour les intégrales généralisées. Néanmoins, sous certaines hypothèses, il peut être valable (§ 12.3.22).

12.3.22 Continuité d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre

Soit $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle et $f : [a, +\infty[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que que pour tout $y \in I$, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

converge. De plus, on suppose qu'à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre $\alpha > a$ (indépendant de y) tel que pour tout $y \in I$:

$$\left| \int_\alpha^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \epsilon.$$

Alors, la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

est continue.

DÉMONSTRATION. Soit $y_0 \in I$ et ϵ un nombre réel positif quelconque. D'une part, il existe un nombre $\alpha > a$ (indépendant de y) tel que pour tout $y \in I$:

$$\left| \int_\alpha^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

D'autre part, puisque la fonction $h : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(y) = \int_a^{\alpha} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

est continue (§ 12.3.20), il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $y \in I$ et $|y - y_0| \leqslant \delta$ impliquent

$$\left| \int_a^{\alpha} (f(x,y) - f(x,y_0))\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

Ainsi, pour tout $y \in I$ vérifiant $|y - y_0| \leqslant \delta$, on a :

$$\begin{aligned} |g(y) - g(y_0)| &= \left| \int_a^{\alpha} (f(x,y) - f(x,y_0))\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_\alpha^{+\infty} f(x,y_0)\,\mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant \left| \int_a^{\alpha} (f(x,y) - f(x,y_0))\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_\alpha^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_\alpha^{+\infty} f(x,y_0)\,\mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ∎

12.3.23 Exemple

Soit $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et $f : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $f(x,y) = e^{-xy}\, h(x)$ (fig. 12.10). Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. D'une part, si $y > 0$, on a que pour tout $x \geqslant 1$: $| e^{-xy}\, h(x) | \leqslant 1/yx^2$; ce qui implique (§ 8.2.6) que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\, \mathrm{d}x$$

converge. D'autre part, on sait (§ 8.2.13) que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(x,0)\, \mathrm{d}x$$

converge. De plus, en intégrant par parties, on obtient que pour tout $y \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \int_{2/\epsilon}^{+\infty} f(x,y)\, \mathrm{d}x &= \int_{2/\epsilon}^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x \\ &= -e^{-xy} \frac{\cos x}{x} \Bigg|_{2/\epsilon}^{+\infty} - \int_{2/\epsilon}^{+\infty} \frac{(1+xy)\, e^{-xy}}{x^2} \cos x\, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

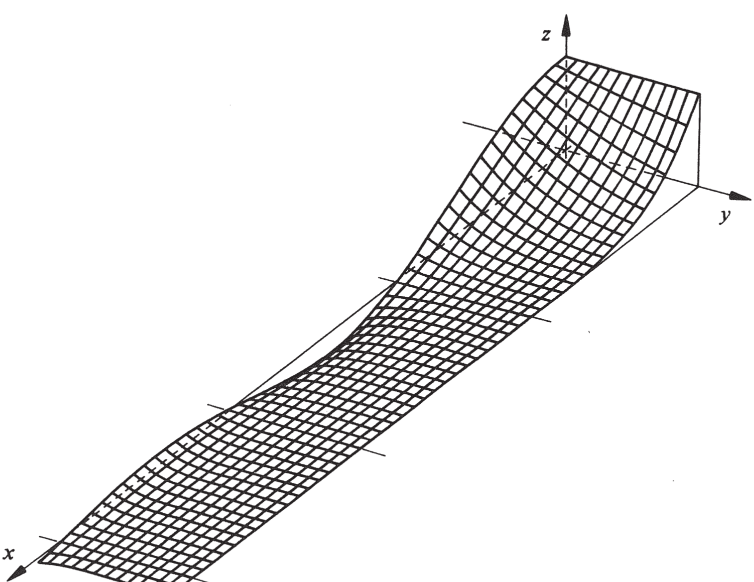


Fig. 12.10

ce qui donne, puisque pour tout $t \geqslant 0 : 1 + t \leqslant e^t$, que

$$\left| \int_{2/\epsilon}^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \int_{2/\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \epsilon.$$

On a ainsi démontré que f vérifie les hypothèses du paragraphe 12.3.22; ce qui nous permet de conclure que la fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_0^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\, h(x)\,dx$$

est continue.

12.4 THÉORÈMES DE PROLONGEMENT

12.4.1 Prolongement des fonctions uniformément continues

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur E. Alors, il existe une unique fonction continue $g : \overline{E} \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec f dans E. De plus, g est uniformément continue sur $\overline{E}$.

DÉMONSTRATION. Soit $\boldsymbol{x} \in \overline{E}$. Alors, il existe une suite $(\boldsymbol{x}_k)$ d'éléments de E (§ 11.3.15) qui converge vers $\boldsymbol{x}$. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. D'une part, la continuité uniforme de f sur E implique l'existence d'un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout couple d'éléments $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de E vérifiant $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| \leqslant \delta : |f(\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{v})| \leqslant \epsilon$. D'autre part, puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$, il existe un entier $k_0 > 0$ tel que pour tout couple d'entiers $k \geqslant k_0$ et $l \geqslant k_0 : \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_l\| \leqslant \delta$. Par conséquent, pour tout couple d'entiers $k \geqslant k_0$ et $l \geqslant k_0$, on a : $|f(\boldsymbol{x}_k) - f(\boldsymbol{x}_l)| \leqslant \epsilon$. Ce résultat étant valable quel que soit le nombre réel $\epsilon > 0$, on peut affirmer que $(f(\boldsymbol{x}_k))$ est une suite de Cauchy, donc convergente. Posons $\lim\limits_{k \to +\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = g(\boldsymbol{x})$ et montrons que cette limite est indépendante du choix de la suite $(\boldsymbol{x}_k)$. En effet, soit $(\boldsymbol{a}_k)$ et $(\boldsymbol{b}_k)$ deux suites d'éléments de E qui convergent vers $\boldsymbol{x}$, et soit $(\boldsymbol{c}_k)$ la suite définie par

$$\boldsymbol{c}_k = \begin{cases} \boldsymbol{a}_k & \text{si } k \text{ est pair} \\ \boldsymbol{b}_k & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Par construction, $(\boldsymbol{c}_k)$ est une suite d'éléments de E qui converge vers $\boldsymbol{x}$. Ainsi, d'après ce qui précède, les trois suites numériques $(f(\boldsymbol{a}_k))$, $(f(\boldsymbol{b}_k))$ et $(f(\boldsymbol{c}_k))$ sont convergentes; ce qui nous permet d'écrire, entre autres, que

$$\lim_{k \to +\infty} f(\boldsymbol{a}_k) = \lim_{k \to +\infty} f(\boldsymbol{a}_{2k}) = \lim_{k \to +\infty} f(\boldsymbol{c}_{2k}) = \lim_{k \to +\infty} f(\boldsymbol{c}_k)$$

et

$$\lim_{k \to +\infty} f(\boldsymbol{b}_k) = \lim_{k \to +\infty} f(\boldsymbol{b}_{2k+1}) = \lim_{k \to +\infty} f(\boldsymbol{c}_{2k+1}) = \lim_{k \to +\infty} f(\boldsymbol{c}_k).$$

D'où

$$\lim_{k \to +\infty} f(\boldsymbol{a}_k) = \lim_{k \to +\infty} f(\boldsymbol{b}_k).$$

Montrons à présent que g est uniformément continue sur $\overline{E}$. Pour cela, soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Puisque f est uniformément continue sur E, on sait qu'il existe un nombre $\beta > 0$ tel que les relations $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E$ et $\| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \| \leqslant \beta$ impliquent $| f(\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{v}) | \leqslant \epsilon$. Posons $\delta = \beta/3$, et soit $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ deux éléments quelconques de $\overline{E}$ vérifiant l'inégalité $\| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} \| \leqslant \delta$. Alors, il existe deux suites $(\boldsymbol{y}_k)$ et $(\boldsymbol{z}_k)$ d'éléments de E qui convergent respectivement vers $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$; ce qui entraîne l'existence d'un entier $k_1 > 0$ tel que pour tout $k \geqslant k_1$:

$$\| \boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y} \| \leqslant \delta \quad \text{et} \quad \| \boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{z} \| \leqslant \delta.$$

Ainsi, en constatant que pour tout entier $k \geqslant k_1$:

$$\| \boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{z}_k \| \leqslant \| \boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y} \| + \| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} \| + \| \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_k \| \leqslant \beta,$$

on peut écrire que pour tout $k \geqslant k_1$:

$$| f(\boldsymbol{y}_k) - f(\boldsymbol{z}_k) | \leqslant \epsilon$$

ou encore, par passage à la limite, que

$$| g(\boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{z}) | \leqslant \epsilon.$$

Pour finir, montrons l'unicité de la fonction g. Dans ce but, supposons que $h : \overline{E} \to R$ soit une fonction continue qui coïncide avec f dans E, et soit $\boldsymbol{x}$ un élément quelconque de $\overline{E}$. Alors, il existe une suite $(\boldsymbol{x}_k)$ d'éléments de E qui converge vers $\boldsymbol{x}$. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N} : g(\boldsymbol{x}_k) = f(\boldsymbol{x}_k) = h(\boldsymbol{x}_k)$, on obtient, grâce à la continuité des deux fonctions g et h sur $\overline{E}$, que

$$g(\boldsymbol{x}) = \lim_{k \to +\infty} g(\boldsymbol{x}_k) = \lim_{k \to +\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = \lim_{k \to +\infty} h(\boldsymbol{x}_k) = h(\boldsymbol{x}).$$

D'où l'unicité de la fonction g. ∎

12.4.2 Distance d'un point à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors, le nombre réel positif ou nul $d(\boldsymbol{x}, E)$ défini par

$$d(\boldsymbol{x}, E) = \operatorname{Inf} \{ \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \| : \boldsymbol{y} \in E \}$$

est appelé la *distance du point* $\boldsymbol{x}$ *au sous-ensemble* E.

12.4.3 Propriétés

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors,

- $d(\boldsymbol{x}, E) = 0$ si et seulement si $\boldsymbol{x} \in \overline{E}$;
- la fonction $d(\cdot, E)$, qui, à tout élément $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^n$, fait correspondre le nombre réel $d(\boldsymbol{x}, E)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.

DÉMONSTRATION. Pour commencer, supposons que $d(\boldsymbol{x}, E) = 0$. Alors, il existe une suite $(\boldsymbol{y}_k)$ d'éléments de E telle que $\lim_{k \to +\infty} \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_k \| = 0$; ce qui implique, entre autres, que la suite (y_k) converge vers x. Par conséquent $x \in \bar{E}$ (§ 11.3.15). Réciproquement, si $x \in \bar{E}$, il existe une suite (x_k) d'éléments de E qui converge vers x; ce qui entraîne que $\lim\limits_{k \to +\infty} \| x - x_k \| = 0$. De ce résultat on déduit immédiatement que $d(x, E) = 0$.

Montrons à présent que la fonction $d(\cdot, E) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$. En effet, soit x et y deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^n$. Puisque, pour tout $z \in E$:

$$\| x - z \| \leqslant \| x - y \| + \| y - z \|,$$

on peut écrire que

$$d(x, E) \leqslant \| x - y \| + d(y, E)$$

ou encore

$$d(x, E) - d(y, E) \leqslant \| x - y \|.$$

De même, on montre que

$$d(y, E) - d(x, E) \leqslant \| x - y \|.$$

D'où

$$| d(x, E) - d(y, E) | \leqslant \| x - y \|.$$

■

12.4.4 Théorème de Tietze-Urysohn

Soit E un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue pour laquelle il existe deux nombres réels α et β tels que pour tout $x \in E$: $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$. Alors, il existe une fonction continue $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec f dans E et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: $\alpha \leqslant g(x) \leqslant \beta$.

DÉMONSTRATION. Pour les besoins de la démonstration, faisons les hypothèses supplémentaires que $\alpha < \beta$ et que $E \neq \mathbb{R}^n$ (pour $\alpha = \beta$ ou pour $E = \mathbb{R}^n$, le théorème est évident), et soit $f_1 : E \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_1(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} (f(x) - 2\alpha + \beta).$$

Cette fonction est continue et, de plus, pour tout $x \in E$: $1 \leqslant f_1(x) \leqslant 2$. Montrons à présent que la fonction $g_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$g_1(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in E \\ \dfrac{\operatorname{Inf}\{f_1(y) \cdot \| x - y \| : y \in E\}}{d(x, E)} & \text{si } x \in \complement E \end{cases}$$

est continue; ce qui revient ici à démontrer que g_1 est continue en chaque point de $\mathbb{R}^n$. Pour cela, soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et ϵ un nombre réel positif quelconque. Si $x_0 \in \mathring{E}$, la continuité de la fonction f_1 sur E entraîne celle de la fonction g_1 au point x_0. Supposons maintenant que $x_0 \in \complement E$. Puisque la fonction $d(\cdot, E) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas sur l'ouvert $\complement E$ (§ 12.4.3), il nous suffit de vérifier que la fonction $h : \complement E \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(\boldsymbol{x}) = \operatorname{Inf}\{f_1(\boldsymbol{y}) \cdot \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| : \boldsymbol{y} \in E\}$$

est continue au point $\boldsymbol{x}_0$. En effet, soit $\boldsymbol{x}$ un élément quelconque de $\complement E$ vérifiant l'inégalité $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\| \leqslant \frac{1}{2}\min\{d(\boldsymbol{x}_0, E), \epsilon\}$. Alors, pour tout $\boldsymbol{y} \in E$, on obtient que

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{y}) \cdot \|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}\| &\leqslant f_1(\boldsymbol{y}) \cdot (\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|) \\ &\leqslant \epsilon + f_1(\boldsymbol{y}) \cdot \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{y}) \cdot \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| &\leqslant f_1(\boldsymbol{y}) \cdot (\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\| + \|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}\|) \\ &\leqslant \epsilon + f_1(\boldsymbol{y}) \cdot \|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}\|; \end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$h(\boldsymbol{x}_0) \leqslant \epsilon + h(\boldsymbol{x}) \quad \text{et} \quad h(\boldsymbol{x}) \leqslant \epsilon + h(\boldsymbol{x}_0)$$

ou encore

$$|h(\boldsymbol{x}) - h(\boldsymbol{x}_0)| \leqslant \epsilon.$$

Enfin, supposons que $\boldsymbol{x}_0 \in \partial E$. Puisque f_1 est une fonction continue sur E, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout $\boldsymbol{x} \in E \cap B(\boldsymbol{x}_0, \delta)$:

$$|g_1(\boldsymbol{x}) - g_1(\boldsymbol{x}_0)| = |f_1(\boldsymbol{x}) - f_1(\boldsymbol{x}_0)| \leqslant \epsilon.$$

Posons $E_1 = E \cap B(\boldsymbol{x}_0, \delta)$ et $E_2 = E \cap \complement E_1$, et soit $\boldsymbol{z}$ un élément quelconque de $\complement E$ vérifiant l'inégalité $\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}_0\| \leqslant \delta/4$. Alors, en constatant que pour $\boldsymbol{y} \in E_2$ (§ 11.1.3) :

$$\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\| \geqslant \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0\| - \|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{z}\| \geqslant \frac{3\delta}{4},$$

on obtient que

$$\operatorname{Inf}\{f_1(\boldsymbol{y}) \cdot \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\| : \boldsymbol{y} \in E_2\} \geqslant \frac{3\delta}{4};$$

ce qui implique, du fait que $f_1(\boldsymbol{x}_0) \cdot \|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{z}\| \leqslant 2\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{z}\| \leqslant \delta/2$, que

$$\operatorname{Inf}\{f_1(\boldsymbol{y}) \cdot \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\| : \boldsymbol{y} \in E\} = \operatorname{Inf}\{f_1(\boldsymbol{y}) \cdot \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\| : \boldsymbol{y} \in E_1\}.$$

Par suite, puisque pour tout $\boldsymbol{y} \in E_1$:

$$f_1(\boldsymbol{x}_0) - \epsilon \leqslant f_1(\boldsymbol{y}) \leqslant f_1(\boldsymbol{x}_0) + \epsilon$$

et

$$d(\boldsymbol{z}, E) = d(\boldsymbol{z}, E_1),$$

on peut écrire que

$$\begin{aligned} (f_1(\boldsymbol{x}_0) - \epsilon) d(\boldsymbol{z}, E) &\leqslant \operatorname{Inf}\{f_1(\boldsymbol{y}) \cdot \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\| : \boldsymbol{y} \in E\} \\ &\leqslant (f_1(\boldsymbol{x}_0) + \epsilon) d(\boldsymbol{z}, E) \end{aligned}$$

ou encore

$$|g_1(z) - g_1(x_0)| = |g_1(z) - f_1(x_0)| \leqslant \epsilon.$$

Ainsi s'achève la démonstration de la continuité de la fonction g_1 sur $\mathbb{R}^n$.

Considérons à présent la fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = (\beta - \alpha) g_1(x) + 2\alpha - \beta.$$

La continuité de la fonction g_1 sur $\mathbb{R}^n$ et le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: $1 \leqslant g_1(x) \leqslant 2$, nous permettent d'affirmer que g est une fonction qui vérifie les conclusions du théorème de Tietze - Urysohn. ■

12.4.5 Corollaire

Soit A et B deux sous-ensembles fermés non vides et disjoints de $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une fonction continue $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes :

- pour tout $x \in A$: $g(x) = 0$;
- pour tout $x \in B$: $g(x) = 1$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$.

DÉMONSTRATION. Posons $E = A \cup B$, et soit $f : E \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Puisque E est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$, le théorème de Tietze - Urysohn nous assure l'existence d'une fonction continue $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec f dans E et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$. ■

12.5 EXERCICES

12.5.1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} (\lim\limits_{y \to 0} f(x,y)) = \lim\limits_{y \to 0} (\lim\limits_{x \to 0} f(x,y)) = 0$.

2) Peut-on déduire que $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$?

12.5.2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \cos \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

Montrer que $\lim\limits_{y\to 0}\,(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$ et $\lim\limits_{x\to 0}\,(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$ n'existent pas, mais que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

12.5.3 Soit $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1,\ldots,x_n)=g(x_1)$ est continue.

12.5.4 Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

12.5.5 Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2xy}{x^2\sin^2 t + y^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

12.5.6 Comment faut-il choisir le nombre réel α pour que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

soit continue au point $(0,0)$?

12.5.7 Montrer qu'il n'existe aucun nombre réel α de sorte que la fonction $f:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>y \text{ ou } x=y=0\}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{si } x>y \\ \alpha & \text{si } x=y=0 \end{cases}$$

soit continue.

12.5.8 Déterminer l'application $g :]0,1]\to\mathbb{R}$ de sorte que la fonction $f:]0,1]\times[-1,1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y\,\mathrm{cotg}\,(y\sqrt{x}) & \text{si } x\in]0,1] \text{ et } y\in[-1,0[\,\cup\,]0,1] \\ g(x) & \text{si } x\in]0,1] \text{ et } y=0 \end{cases}$$

soit continue.

12.5.9 Montrer que

$$\lim_{y \to +\infty} \int_0^1 2xy\, e^{-x^2 y}\, dx \neq \int_0^1 \left(\lim_{y \to +\infty} 2xy\, e^{-x^2 y}\right) dx.$$

12.5.10 Soit $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})\}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

12.5.11 Soit $f, g : \overline{E} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que si elles coïncident sur E, elles coïncident sur $\overline{E}$.

12.5.12 Soit $f, g : \overline{E} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $\boldsymbol{x} \in E$: $f(\boldsymbol{x}) \leqslant g(\boldsymbol{x})$. Montrer que cette inégalité reste vraie sur $\overline{E}$.

12.5.13 Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : \bigcup_{i \in I} A_i \to \mathbb{R}$ une fonction dont la restriction à chaque A_i est continue. Montrer que f est continue.

12.5.14 Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ et $f : \bigcup_{i \in I} B_i \to \mathbb{R}$ une fonction dont la restriction à chaque B_i est continue. Peut-on conclure que f est continue ?

12.5.15 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{x}) \in I\}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

12.5.16 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Montrer que $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{x}) \in I\}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

12.5.17 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout nombre réel α, les deux sous-ensembles $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{x}) < \alpha\}$ et $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{x}) > \alpha\}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f est continue.

12.5.18 Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$.

12.5.19 Soit E un sous-ensemble connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue ne s'annulant pas. Montrer que pour tout couple d'éléments $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de E : $f(\boldsymbol{a}) f(\boldsymbol{b}) > 0$.

12.5.20 Soit E un sous-ensemble connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que s'il existe deux éléments $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de E pour lesquels $f(\boldsymbol{a}) f(\boldsymbol{b}) \leqslant 0$, la fonction f s'annule au moins une fois dans E.

12.5.21 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré zéro (§ 13.1.21). Montrer que si f est continue au point $(0,\ldots, 0)$ alors elle est constante.

12.5.22 Soit A et B deux sous-ensembles fermés non vides et disjoints de $\mathbb{R}^n$. Trouver une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes : $f(x) = -1$ si $x \in A, f(x) = 1$ si $x \in B$ et $-1 < f(x) < 1$ si $x \in \complement A \cap \complement B$.

13. Dérivées partielles

13.1 DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

13.1.1 Définition d'une dérivée partielle

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction et $(x_1, ..., x_n)$ un élément de E. Si la fonction d'une variable $f_i : \{x \in \mathbb{R} : (x_1, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_n) \in E\} \to \mathbb{R}$ définie par $f_i(x) = f(x_1, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_n)$ admet une dérivée au point x_i, on dit que la fonction f admet une *dérivée partielle par rapport à* x_i au point $(x_1, ..., x_n)$ et on écrit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = f_i'(x_i)$$

ou encore

$$f'_{x_i}(x_1, ..., x_n) = f_i'(x_i).$$

Ainsi, par définition,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = f'_{x_i}(x_1, ..., x_n) =$$

$$= \lim_{x \to x_i} \frac{f(x_1, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{x - x_i}.$$

Voir la figure 13.1.

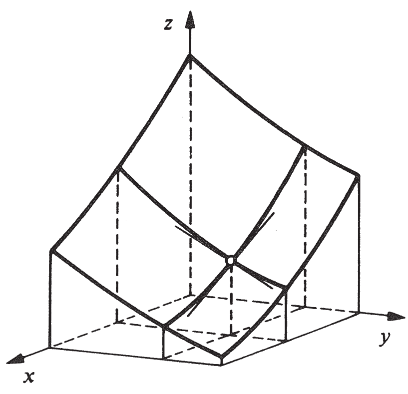


Fig. 13.1

13.1.2 Remarque

Une dérivée partielle peut se calculer au moyen des techniques déjà vues à la section 5.1 pour les dérivées des fonctions réelles d'une variable réelle; pour cela, il suffit de considérer comme constantes les variables autres que celle par rapport à laquelle on dérive.

13.1.3 Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Alors, pour tout élément $(x,y) \neq (0,0)$ de $\mathbb{R}^2$, on a:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

De plus,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0.$$

13.1.4 Remarque

Nous avons vu au paragraphe 12.2.9 que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

n'est pas continue au point $(0,0)$. Cependant, elle admet des dérivées partielles en ce point, à savoir $\partial f/\partial x\,(0,0) = \partial f/\partial y\,(0,0) = 0$. Cet exemple nous montre qu'une fonction peut très bien posséder des dérivées partielles en un point, sans pour autant être continue en ce point. Par contre, si une fonction a toutes ses dérivées partielles continues en un point, alors elle est continue en ce point (§ 13.1.6).

13.1.5 Fonction dérivée partielle

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction telle que sa dérivée partielle par rapport à x_i existe en tout point de E. Alors, l'application de E dans $\mathbb{R}$, qui, à tout élément $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ de E fait correspondre le nombre réel $\partial f/\partial x_i\,(x_1, ..., x_n)$, est appelée la *dérivée partielle* de f par rapport à x_i et se note $\partial f/\partial x_i$ ou encore f'_{x_i}.

13.1.6 Condition suffisante pour qu'une fonction soit continue en un point

Soit $f: E \to \mathbb{R}$ une fonction telle que les n fonctions $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n : E \to \mathbb{R}$ soient continues au point $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Alors, f est aussi continue en ce point.

DÉMONSTRATION. Puisque $\boldsymbol{a}$ est un point intérieur de E, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{a}, \delta) \subset E$. Ainsi, grâce au théorème des accroissements finis (§ 5.2.12), à tout élément $(x_1, \ldots, x_n)$ de $B(\boldsymbol{a}, \delta)$, on peut associer n éléments $\theta_1, \ldots, \theta_n$ de $]0,1[$ tels que

$$
\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_n) &= f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} (f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, \ldots, x_n) \\
&\qquad - f(a_1, \ldots, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)) \\
&= f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + \theta_i (x_i - a_i), \right. \\
&\qquad \left. x_{i+1}, \ldots, x_n) \cdot (x_i - a_i) \right) ;
\end{aligned}
$$

ce qui entraîne, du fait de la continuité des n fonctions $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$ au point $(a_1, \ldots, a_n)$, que $\lim\limits_{(x_1, \ldots, x_n) \to (a_1, \ldots, a_n)} f(x_1, \ldots, x_n) = f(a_1, \ldots, a_n)$. Autrement dit, la fonction f est continue au point $(a_1, \ldots, a_n)$. ∎

13.1.7 Fonction de classe C^1

Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f: E \to \mathbb{R}$ est dite de *classe* C^1 si les n fonctions $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n : E \to \mathbb{R}$ existent et sont continues.

Toute fonction de classe C^1 est continue (§ 13.1.6).

13.1.8 Dérivée d'une intégrale qui dépend d'un paramètre

Soit $a < b$ deux nombres réels, I un intervalle ouvert et $f: [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue dont la dérivée partielle par rapport à y est continue. Alors, la fonction $g: I \to \mathbb{R}$ définie par

$$
g(y) = \int_a^b f(x,y)\, dx
$$

est continûment différentiable sur I et, de plus, pour tout $y \in I$, on a:

$$
g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx .
$$

DÉMONSTRATION. Soit $y_0 \in I$ et ϵ un nombre réel positif quelconque. D'une part, I étant un intervalle ouvert, il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que $[y_0 - \beta, y_0 + \beta] \subset I$; ce qui entraîne puisque $\partial f/\partial y$ est uniformément continue sur $[a,b] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$

(§ 12.3.18), l'existence d'un nombre $0<\delta<\beta$ tel que pour tout $(x,z)\in[a,b]\times[y_0-\delta, y_0+\delta]$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,z)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right|\leqslant\frac{\epsilon}{b-a}.$$

D'autre part, d'après le théorème des accroissements finis (§ 5.2.12), on sait qu'à tout élément $(x,y)\in[a,b]\times[y_0-\delta, y_0+\delta]$, on peut associer un nombre $\theta\in\,]0,1[$ tel que

$$f(x,y)-f(x,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0+\theta(y-y_0))\cdot(y-y_0).$$

Ainsi, pour tout $y\in I$ vérifiant $0<|y-y_0|\leqslant\delta$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}-\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0+\theta(y-y_0))-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right)\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant\int_a^b\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0+\theta(y-y_0))-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right|\mathrm{d}x\leqslant\epsilon.\end{aligned}$$

Ce résultat étant valable pour tout $y_0\in I$ et tout nombre réel $\epsilon>0$, il nous permet de conclure que la fonction $g: I\to\mathbb{R}$ est différentiable sur I et que pour tout $y\in I$:

$$g'(y) = \int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Pour finir, remarquons que la continuité de la fonction $g': I\to\mathbb{R}$ découle de celle de la fonction $\partial f/\partial y: [a,b]\times I\to\mathbb{R}$ (§ 12.3.20). ■

13.1.9 Exemple

Soit $g:]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(y) = \int_0^{\pi/2}\mathrm{Log}(y^2\cos^2 x+\sin^2 x)\,\mathrm{d}x.$$

Puisque pour tout $y\in\,]0,+\infty[$ (§ 13.1.8):

$$g'(y) = \int_0^{\pi/2}\frac{2y\cos^2 x}{y^2\cos^2 x+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{2y}{(1+z^2)(y^2+z^2)}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{1+y},$$

on obtient que

$$g(y) = g(y)-g(1) = \int_1^y\frac{\pi}{1+t}\,\mathrm{d}t = \pi\,\mathrm{Log}\left(\frac{1+y}{2}\right);$$

ce qui entraîne

$$\lim_{y \to 0+} g(y) = -\pi \operatorname{Log} 2 .$$

D'autre part, comme l'intégrale généralisée

$$\int_{0+}^{\pi/2} \operatorname{Log} \sin^2 x \, \mathrm{d}x$$

converge et que pour tout $y \in]0, +\infty[$:

$$0 \leqslant g(y) - \int_{0+}^{\pi/2} \operatorname{Log} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \int_{0+}^{\pi/2} \operatorname{Log}(1 + y^2 \operatorname{cotg}^2 x) \, \mathrm{d}x$$

$$= y \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}(1+z^2)}{y^2+z^2} \, \mathrm{d}z \qquad (\text{avec } z = y \operatorname{cotg} x)$$

$$\leqslant y \int_0^1 \frac{z^2}{y^2+z^2} \, \mathrm{d}z + y \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} 2z^2}{z^2} \, \mathrm{d}z$$

$$\leqslant y + y(2 + \operatorname{Log} 2),$$

on peut aussi écrire (§ 4.2.15) que

$$\lim_{y \to 0+} g(y) = \int_{0+}^{\pi/2} \operatorname{Log} \sin^2 x \, \mathrm{d}x .$$

D'où

$$\int_{0+}^{\pi/2} \operatorname{Log} \sin x \, \mathrm{d}x = -\pi \operatorname{Log} \sqrt{2} .$$

De ce résultat, on déduit immédiatement la valeur des deux intégrales suivantes:

$$\int_0^{\pi/2-} \operatorname{Log} \cos x \, \mathrm{d}x = -\pi \operatorname{Log} \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \int_{0+}^{\pi/2-} \operatorname{Log} \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = 0 .$$

13.1.10 Exemple

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par

$$f(y) = \left(\int_0^y e^{-x^2} \, \mathrm{d}x \right)^2 \quad \text{et} \quad g(y) = \int_0^1 \frac{e^{-y^2(x^2+1)}}{x^2+1} \, \mathrm{d}x .$$

Puisque pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f'(y) = 2\,e^{-y^2}\int_0^y e^{-x^2}\,dx$$

et (§ 13.1.8)

$$g'(y) = -2\,e^{-y^2}\int_0^1 y\,e^{-(yx)^2}\,dx = -2\,e^{-y^2}\int_0^y e^{-x^2}\,dx,$$

on obtient que

$$f'(y) + g'(y) = 0$$

ou encore

$$f(y) + g(y) = f(0) + g(0) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}.$$

D'autre part, en constatant que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$0 \leqslant g(y) = e^{-y^2}\int_0^1 \frac{e^{-(xy)^2}}{x^2+1}\,dx \leqslant e^{-y^2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}e^{-y^2},$$

on peut conclure, grâce au théorème des deux gendarmes, que $\lim_{y\to+\infty} f(y) = \pi/4$; ce qui entraîne que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

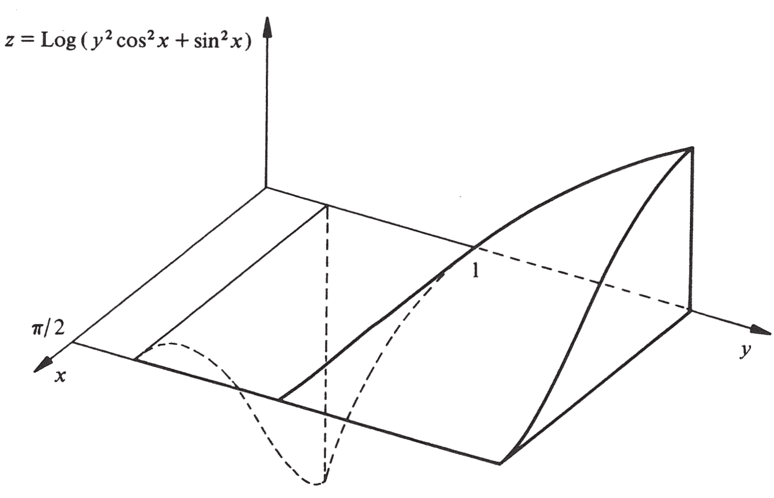


Fig. 13.2

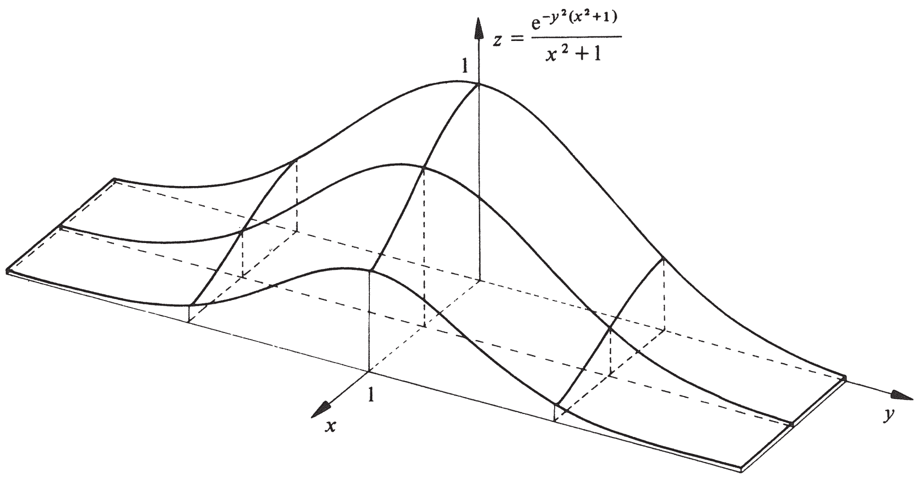


Fig. 13.3

13.1.11 Lemme

Soit a un nombre réel, I un intervalle ouvert et $h : [a, +\infty[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant les deux propriétés suivantes:

– pour tout $y \in I$, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} h(x, y)\, \mathrm{d}x$$

converge;

– à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un nombre $\alpha > a$ (indépendant de y) tel que les relations $t \geqslant \alpha$ et $y \in I$ impliquent

$$\left| \int_t^{+\infty} h(x, y)\, \mathrm{d}x \right| \leqslant \epsilon .$$

Alors, la fonction $H : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(y) = \int_a^{+\infty} h(x, y)\, \mathrm{d}x$$

est continue et, de plus, pour tout couple d'éléments y_1, y_2 de I, on a:

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_a^t h(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_a^{+\infty} h(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

DÉMONSTRATION. La continuité de la fonction $H : I \to \mathbb{R}$ découle immédiatement des propriétés de la fonction h (§ 12.3.22). Ce résultat nous permet, en outre, de considérer l'intégrale

$$\int_{y_1}^{y_2}\left(\int_a^{+\infty} h(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

où y_1 et y_2 sont deux éléments quelconques de I.

Pour démontrer que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{y_1}^{y_2}\left(\int_a^{t} h(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{y_1}^{y_2}\left(\int_a^{+\infty} h(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,$$

il suffit de constater que pour tout $t>a$:

$$\left|\int_{y_1}^{y_2}\left(\int_a^{t} h(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y - \int_{y_1}^{y_2}\left(\int_a^{+\infty} h(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant \left|\int_{y_1}^{y_2}\left|\int_t^{+\infty} h(x,y)\,\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}y\right|$$

et d'utiliser la deuxième propriété que vérifie la fonction h. ∎

13.1.12 Dérivée d'une intégrale généralisée qui dépend d'un paramètre

Soit a un nombre réel, I un intervalle ouvert et $f:[a,+\infty[\times I\to\mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant les trois propriétés suivantes:

- f admet une dérivée partielle par rapport à y continue;
- pour tout $y\in I$, les deux intégrales généralisées

  $$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \quad\text{et}\quad \int_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x$$

  convergent;
- à tout nombre réel $\epsilon>0$, on peut associer un nombre $\alpha>a$ (indépendant de y) tel que les relations $t\geqslant\alpha$ et $y\in I$ impliquent

  $$\left|\int_t^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\epsilon.$$

Alors, la fonction $g:I\to\mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

est continûment différentiable sur I et, de plus, pour tout $y\in I$, on a:

$$g'(y) = \int_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. Soit $F :]a, +\infty[\times I \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$F(t, y) = \int_a^t f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

et t_0 un élément quelconque de $]a, +\infty[$. Ainsi, grâce à la première propriété que vérifie f, on sait (§ 13.1.8) que pour tout $y \in I$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t_0, y) = \int_a^{t_0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Soit $c \in I$. Puisque la fonction $\partial F / \partial y\,(t_0, \cdot) : I \to \mathbb{R}$ est continue (§ 12.3.20), on déduit du théorème fondamental du calcul intégral (§ 7.1.15), que pour tout $y \in I$:

$$F(t_0, y) - F(t_0, c) = \int_c^y \frac{\partial F}{\partial y}(t_0, s)\,\mathrm{d}s$$

ou encore

$$F(t_0, y) = \int_a^{t_0} f(x, c)\,\mathrm{d}x + \int_c^y \left(\int_a^{t_0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, s)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s.$$

Ce résultat étant valable quel que soit $t_0 \in]a, +\infty[$, on peut écrire que pour tout $(t, y) \in]a, +\infty[\times I$:

$$F(t, y) = \int_a^t f(x, c)\,\mathrm{d}x + \int_c^y \left(\int_a^t \frac{\partial f}{\partial y}(x, s)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s.$$

Par suite, du fait que la fonction $\partial f / \partial y : [a, +\infty[\times I \to \mathbb{R}$ vérifie toutes les hypothèses du lemme 13.1.11, on obtient que la fonction $\tilde{g} : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{g}(s) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, s)\,\mathrm{d}x$$

est continue et que pour tout $y \in I$:

$$g(y) = \lim_{t \to +\infty} F(t, y) = \int_a^{+\infty} f(x, c)\,\mathrm{d}x + \int_c^y \tilde{g}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Par conséquent, pour tout $y \in I$: $g'(y) = \tilde{g}(y)$. D'où le résultat. ∎

13.1.13 Exemple

Soit $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On sait (§ 12.3.23) que la fonction $g: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} h(x)\, dx$$

est continue. De plus, en constatant que pour tout $(x, y) \in [1, +\infty[\times]0, +\infty[$:

$$|e^{-xy} \sin x| \leqslant e^{-xy} \leqslant \frac{2}{x^2 y^2},$$

on obtient (§ 8.2.6 et 8.2.12) que quel que soit $y \in]0, +\infty[$, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} -e^{-xy} \sin x\, dx$$

converge. Par suite, puisque pour tout nombre réel $\epsilon > 0$ et tout $y \in]0, +\infty[$, les relations $t \geqslant 8/\epsilon y^2$ et $z > y/2$ impliquent

$$\left| \int_t^{+\infty} -e^{-xz} \sin x\, dx \right| \leqslant \int_t^{+\infty} e^{-xz}\, dx \leqslant \int_t^{+\infty} \frac{2}{x^2 z^2}\, dx = \frac{2}{tz^2} \leqslant \epsilon,$$

on peut affirmer (§ 13.1.12) que pour tout $y \in]0, +\infty[$:

$$g'(y) = \int_0^{+\infty} -e^{-xy} \sin x\, dx = \frac{-1}{1+y^2}.$$

Ainsi, grâce à la continuité de la fonction g sur $[0, +\infty[$, on a que pour tout $y \in [0, +\infty[$:

$$g(y) = c - \operatorname{Arctg} y$$

où c est une constante. Calculons à présent cette constante. D'une part,

$$\lim_{y \to +\infty} g(y) = \lim_{y \to +\infty} (c - \operatorname{Arctg} y) = c - \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part, pour tout $y \in]0, +\infty[$:

$$|g(y)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-xy} h(x)\, dx \right| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dx = \frac{1}{y};$$

ce qui entraîne que

$$\lim_{y \to +\infty} g(y) = 0.$$

De ces deux résultats, on déduit que $c = \pi/2$. Par conséquent

$$g(0) = \int_0^{+\infty} h(x)\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

D'où

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

13.1.14 Dérivées partielles d'une fonction composée

D'une part, soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $g_1, \dots, g_p : A \to \mathbb{R}$ p fonctions continues au point $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$ telles que pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$, les p fonctions $\partial g_1/\partial y_i, \dots, \partial g_p/\partial y_i : A \to \mathbb{R}$ existent. D'autre part, soit B un sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$ contenant $\{(g_1(\boldsymbol{y}), \dots, g_p(\boldsymbol{y})) : \boldsymbol{y} \in A\}$ et $f : B \to \mathbb{R}$ une fonction admettant pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant p$ une dérivée partielle $\partial f/\partial x_j : B \to \mathbb{R}$ qui soit continue au point $\boldsymbol{b} = (g_1(\boldsymbol{a}), \dots, g_p(\boldsymbol{a}))$. Alors, pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$, la fonction $F : A \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(y_1, \dots, y_n) = f(x_1 = g_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_p = g_p(y_1, \dots, y_n))$$

possède une dérivée partielle par rapport à y_i au point $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$ et, de plus, on a:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(g_1(a_1, \dots, a_n), \dots, g_p(a_1, \dots, a_n)) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial y_i}(a_1, \dots, a_n) \right).$$

DÉMONSTRATION. Comme $\boldsymbol{a}$ est un point intérieur à A et $\boldsymbol{b}$ un point intérieur à B, on sait qu'il existe deux nombres réels positifs α et β tels que $B(\boldsymbol{a}, \alpha) \subset A$ et $B(\boldsymbol{b}, \beta) \subset B$. Par suite, puisque les p fonctions $g_1, \dots, g_p$ sont toutes continues au point $\boldsymbol{a}$, il existe p éléments $\delta_1, \dots, \delta_p$ de $]0, \alpha[$ tels que pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant p$ et tout $\boldsymbol{z} \in B(\boldsymbol{a}, \delta_k)$: $|g_k(\boldsymbol{z}) - g_k(\boldsymbol{a})| \leqslant \beta/2\sqrt{p}$. Ainsi, en posant $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_p\}$, on obtient que

$$\{(g_1(\boldsymbol{z}), \dots, g_p(\boldsymbol{z})) : \boldsymbol{z} \in B(\boldsymbol{a}, \delta)\} \subset B(\boldsymbol{b}, \beta).$$

A présent, fixons-nous arbitrairement un entier i compris entre 1 et p. Alors, grâce au théorème des accroissements finis (§ 5.2.12), à tout $y \in]a_i - \delta, a_i + \delta[$, on peut associer p éléments $\theta_1, \dots, \theta_p$ de $]0,1[$ tels que

$$\begin{aligned}
F(\bar{\boldsymbol{y}}) - F(\boldsymbol{a}) &= f(g_1(\bar{\boldsymbol{y}}), \dots, g_p(\bar{\boldsymbol{y}})) - f(g_1(\boldsymbol{a}), \dots, g_p(\boldsymbol{a})) \\
&= \sum_{j=1}^{p} (f(g_1(\boldsymbol{a}), \dots, g_{j-1}(\boldsymbol{a}), g_j(\bar{\boldsymbol{y}}), \dots, g_p(\bar{\boldsymbol{y}})) \\
&\qquad - f(g_1(\boldsymbol{a}), \dots, g_j(\boldsymbol{a}), g_{j+1}(\bar{\boldsymbol{y}}), \dots, g_p(\bar{\boldsymbol{y}}))) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(g_1(\boldsymbol{a}), \dots, g_{j-1}(\boldsymbol{a}), \right. \\
&\qquad g_j(\boldsymbol{a}) + \theta_j(g_j(\bar{\boldsymbol{y}}) - g_j(\boldsymbol{a})), \\
&\qquad \left. g_{j+1}(\bar{\boldsymbol{y}}), \dots, g_p(\bar{\boldsymbol{y}})) \cdot (g_j(\bar{\boldsymbol{y}}) - g_j(\boldsymbol{a})) \right),
\end{aligned}$$

où $\bar{\boldsymbol{y}} = (a_1, \dots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \dots, a_n)$; ce qui entraîne, du fait de la continuité des fonctions $g_1, \dots, g_p$ au point $\boldsymbol{a}$ et des fonctions $\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_p$ au point $\boldsymbol{b} = (g_1(\boldsymbol{a}), \dots, g_p(\boldsymbol{a}))$, que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y_i}(\boldsymbol{a}) &= \lim_{y \to a_i} \frac{F(\bar{\boldsymbol{y}}) - F(\boldsymbol{a})}{y - a_i} \\
&= \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(g_1(\boldsymbol{a}), \dots, g_p(\boldsymbol{a})) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial y_i}(\boldsymbol{a}) \right).
\end{aligned}$$

■

13.1.15 Corollaire

D'une part, soit I un intervalle ouvert et $g_1, ..., g_p : I \to \mathbb{R}$ p fonctions continûment différentiables sur I. D'autre part, soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $\{(g_1(t), ..., g_p(t)) : t \in I\}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Alors, la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = f(x_1 = g_1(t), ..., x_p = g_p(t))$$

est continûment différentiable sur I et, de plus, pour tout $t \in I$, on a :

$$F'(t) = \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} (g_1(t), ..., g_p(t)) \cdot g_j'(t) \right) .$$

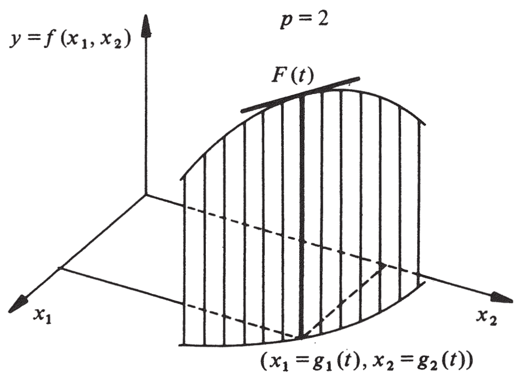


Fig. 13.4

13.1.16 Remarque

Si dans l'énoncé du paragraphe 13.1.14, on ne suppose pas que les fonctions $\partial f / \partial x_1, ..., \partial f / \partial x_p$ sont toutes continues au point $\boldsymbol{b} = (g_1(\boldsymbol{a}), ..., g_p(\boldsymbol{a}))$, alors le résultat peut très bien cesser d'être vrai. Par exemple, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les deux fonctions continues définies respectivement par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et

$$F(t) = f(x=t, y=t) = \frac{t}{2},$$

on vérifie facilement, puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

que les deux fonctions $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ ne sont pas continues au point $(0,0)$ et que

$$F'(0) = \frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0).$$

13.1.17 Exemple

On se propose de trouver toutes les fonctions $f: E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui, sur E, vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = kf(x,y)$$

où k est une constante. Pour cela, supposons que f soit une telle fonction et considérons les deux fonctions auxiliaires $g_1, g_2 :]0,+\infty[\times]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ définies respectivement par $g_1(r,\theta) = r\cos\theta$ et $g_2(r,\theta) = r\sin\theta$. Alors, si $F:]0,+\infty[\times]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $F(r,\theta) = f(x = g_1(r,\theta), y = g_2(r,\theta))$, on obtient (§ 13.1.14) que pour tout $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\pi/2,\pi/2[$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(r,\theta), g_2(r,\theta))\frac{\partial g_1}{\partial \theta}(r,\theta) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(r,\theta), g_2(r,\theta))\frac{\partial g_2}{\partial \theta}(r,\theta) \\ &= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ &\quad + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = kF(r,\theta); \end{aligned}$$

ce qui donne, en intégrant par rapport à θ (§ 9.2.2), que

$$F(r,\theta) = h(r)e^{k\theta}$$

où $h:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable sur $]0,+\infty[$. De plus, la continuité de la fonction $\partial f/\partial x$ entraîne celle de la fonction h', car pour tout $r \in]0,+\infty[$:

$$h'(r) = \frac{\partial F}{\partial r}(r,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(r,0).$$

Par conséquent, toutes les fonctions $f: E \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = h(\sqrt{x^2+y^2})\,e^{k\,\mathrm{Arctg}(y/x)} \quad \text{avec } h \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}).$$

13.1.18 Lemme

Soit I_1, I_2 deux intervalles ouverts et $h : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, si $a \in I_1$, la fonction $g : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(r, s) = \int_a^r h(x, s)\, \mathrm{d}x$$

est continue.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif et (r_0, s_0) un élément quelconque de $I_1 \times I_2$. D'une part, I_1 et I_2 étant deux intervalles ouverts, il existe trois nombres réels positifs α_1, α_2 et α_3 tels que

$$a \in [r_0 - \alpha_1, r_0 + \alpha_2] \subset I_1 \quad \text{et} \quad [s_0 - \alpha_3, s_0 + \alpha_3] \subset I_2 ;$$

ce qui entraîne, puisque (§ 12.3.18) la fonction h est uniformément continue sur $E = [r_0 - \alpha_1, r_0 + \alpha_2] \times [s_0 - \alpha_3, s_0 + \alpha_3]$, l'existence d'un nombre $0 < \delta_1 < \alpha_3$ tel que pour tout $(x, s) \in [r_0 - \alpha_1, r_0 + \alpha_2] \times [s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_1]$:

$$|h(x, s) - h(x, s_0)| \leqslant \frac{\epsilon}{2(1 + |r_0 - a|)}.$$

D'autre part, comme h est bornée sur E (§ 12.3.18), il existe un nombre réel $M > 0$ tel que pour tout $(x, s) \in E$:

$$|h(x, s)| \leqslant M.$$

Ainsi, en posant

$$\delta = \min\left\{\alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \frac{\epsilon}{2M}\right\},$$

on obtient que pour tout $(r, s) \in I_1 \times I_2$ vérifiant $\sqrt{(r - r_0)^2 + (s - s_0)^2} \leqslant \delta$:

$$|g(r,s) - g(r_0, s_0)| = |(g(r,s) - g(r_0, s)) + (g(r_0, s) - g(r_0, s_0))|$$

$$\leqslant \left|\int_{r_0}^{r} h(x,s)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^{r_0} (h(x,s) - h(x, s_0))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

D'où le résultat. ∎

13.1.19 Formule générale donnant la dérivée d'une intégrale qui dépend d'un paramètre

D'une part, soit I_1, I_2 deux intervalles ouverts et $f : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une dérivée partielle par rapport à y qui soit continue. D'autre part, soit I un intervalle ouvert et $g, h, k : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions continûment différentiables sur I telles que $\{(g(t), h(t), k(t)) : t \in I\}$ soit inclus dans $I_1 \times I_1 \times I_2$. Alors, la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \int_{h(t)}^{g(t)} f(x, k(t))\, \mathrm{d}x$$

est continûment différentiable sur I et, de plus, pour tout $t \in I$, on a :

$$F'(t) = f(g(t), k(t))\, g'(t) - f(h(t), k(t))\, h'(t) + k'(t) \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, k(t))\, \mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. Soit $a \in I_1$ et $G: I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$G(r,s) = \int_a^r f(x,s)\, \mathrm{d}x.$$

Alors, pour tout $t \in I$:

$$F(t) = G(r = g(t), s = k(t)) - G(r = h(t), s = k(t)).$$

De plus, puisque pour tout $(r,s) \in I_1 \times I_2$:

$$\frac{\partial G}{\partial r}(r,s) = f(r,s) \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial s}(r,s) = \int_a^r \frac{\partial f}{\partial y}(x,s)\, \mathrm{d}x,$$

les deux fonctions $\partial G / \partial r$ et $\partial G / \partial s$ sont continues (lemme 13.1.18). Ainsi, grâce au corollaire 13.1.15, on sait que la fonction F est continûment différentiable sur I et que pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial G}{\partial r}(g(t), k(t))\, g'(t) + \frac{\partial G}{\partial s}(g(t), k(t))\, k'(t) - \frac{\partial G}{\partial r}(h(t), k(t))\, h'(t) \\ &\quad - \frac{\partial G}{\partial s}(h(t), k(t))\, k'(t) \\ &= f(g(t), k(t))\, g'(t) - f(h(t), k(t))\, h'(t) + k'(t) \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, k(t))\, \mathrm{d}x. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

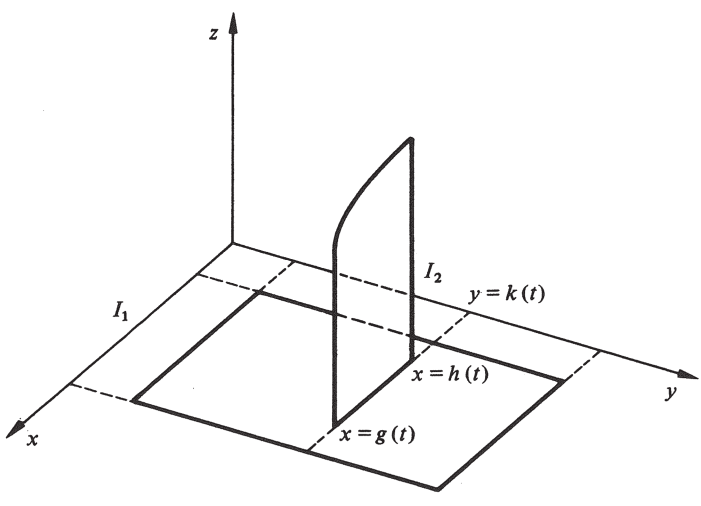


Fig. 13.5

13.1.20 Exemple

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $V_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$V_0(t) = \int_0^t W(x) \sin a(t-x)\, \mathrm{d}x.$$

Alors, en remarquant que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} V_0'(t) &= W(t) \sin a(t-t) + a \int_0^t W(x) \cos a(t-x)\, \mathrm{d}x \\ &= a \int_0^t W(x) \cos a(t-x)\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_0''(t) &= a\, W(t) \cos a(t-t) - a^2 \int_0^t W(x) \sin a(t-x)\, \mathrm{d}x \\ &= a\, W(t) - a^2\, V_0(t), \end{aligned}$$

on obtient que V_0 est une solution particulière de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$u''(t) + a^2 u(t) = a\, W(t).$$

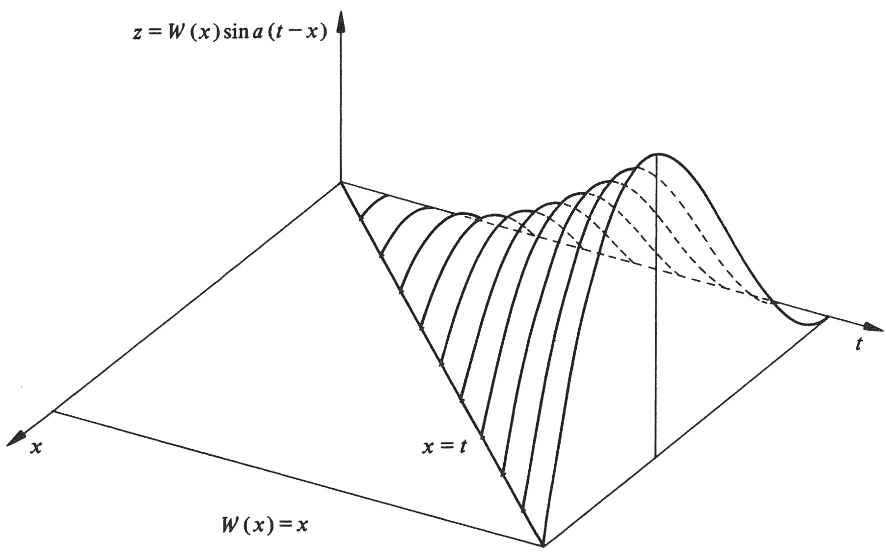


Fig. 13.6

13.1.21 Définition d'une fonction homogène

Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite *homogène de degré* $\alpha \in \mathbb{R}$ si pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E$ et tout nombre réel $t > 0$:

$$(t x_1, \ldots, t x_n) \in E \quad \text{et} \quad f(t x_1, \ldots, t x_n) = t^\alpha f(x_1, \ldots, x_n).$$

13.1.22 Propriété des fonctions homogènes

Soit $f: E \to \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré α admettant une dérivée partielle par rapport à x_i. Alors, la fonction $\partial f / \partial x_i : E \to \mathbb{R}$ est homogène de degré $\alpha - 1$.

DÉMONSTRATION. Soit t un nombre réel positif quelconque. Puisque pour tout $(x_1, ..., x_n) \in E$:

$$f(tx_1, ..., tx_n) = t^\alpha f(x_1, ..., x_n),$$

on obtient que

$$t \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, ..., tx_n) = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n)$$

ou encore

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, ..., tx_n) = t^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n).$$ ■

13.1.23 Théorème d'Euler

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ tel que les relations $(x_1, ..., x_n) \in E$ et $t \in]0, +\infty[$ impliquent $(tx_1, ..., tx_n) \in E$. Alors, une fonction $f: E \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est homogène de degré α si et seulement si pour tout $(x_1, ..., x_n) \in E$:

$$\alpha f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) \right).$$

Cette égalité est appelée la *relation d'Euler.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que f soit homogène de degré α et soit $(a_1, ..., a_n)$ un élément quelconque de E. Alors, en désignant par $g:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(t) = f(ta_1, ..., ta_n) = t^\alpha f(a_1, ..., a_n),$$

on obtient, grâce au corollaire 13.1.15, que pour tout nombre réel $t > 0$:

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(ta_1, ..., ta_n)) = \alpha t^{\alpha-1} f(a_1, ..., a_n);$$

ce qui donne, en posant $t = 1$, la relation d'Euler.

Réciproquement, supposons que pour tout $(x_1, ..., x_n) \in E$:

$$\alpha f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) \right)$$

et soit $(b_1, ..., b_n)$ un élément quelconque de E. Alors, si $h:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$h(t) = f(tb_1, ..., tb_n),$$

on peut écrire, en utilisant de nouveau le corollaire 13.1.15, que pour tout nombre réel $t > 0$:

$$t\,h'(t) = \sum_{i=1}^{n} \left((t b_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(t b_1, \ldots, t b_n)\right) = \alpha\, h(t);$$

ce qui entraîne (§ 9.2.2) que $h(t) = t^{\alpha} h(1)$. Comme $h(1) = f(b_1, \ldots, b_n)$, on obtient finalement que pour tout $t \in]0, +\infty[$:

$$f(t b_1, \ldots, t b_n) = t^{\alpha} f(b_1, \ldots, b_n).$$ ∎

13.1.24 Exemple

On se propose de trouver toutes les fonctions $f : E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \to \mathbb{R}$ qui sont homogènes de degré zéro et de classe C^1. D'après le théorème d'Euler, ce problème revient à déterminer toutes les fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui, sur E, vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Pour cela, supposons que f soit une telle fonction. Alors, si $F :]0, +\infty[\times]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $F(r, \theta) = f(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$, on obtient (§ 13.1.14) que pour tout $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\pi/2, \pi/2[$:

$$r \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = (r\cos\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + (r\sin\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0;$$

ce qui donne, en intégrant par rapport à r, que

$$F(r, \theta) = h(\theta)$$

où $h :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable sur $]-\pi/2, \pi/2[$. De plus, le fait que f soit de classe C^1 entraîne que h' est continue, car pour tout $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$:

$$h'(\theta) = \frac{\partial F}{\partial \theta}(1, \theta) = -\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(\cos\theta, \sin\theta) + \cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(\cos\theta, \sin\theta).$$

Par conséquent, toutes les fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x, y) = h\left(\operatorname{Arctg} \frac{y}{x}\right) \quad \text{avec} \quad h \in C^1(]-\pi/2, \pi/2[, \mathbb{R}),$$

ou plus simplement

$$f(x, y) = k\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{avec} \quad k \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

13.2. DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR À UN

13.2.1 Définitions

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $f: E \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une dérivée partielle par rapport à x_i. Si la fonction $\partial f / \partial x_i : E \to \mathbb{R}$ admet à son tour une dérivée partielle par rapport à x_j, on aura la fonction $\partial/\partial x_j (\partial f/\partial x_i) : E \to \mathbb{R}$ que nous noterons plus simplement

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} \quad \text{ou encore} \quad f''_{x_i x_j}.$$

Les fonctions $\partial^2 f / \partial x_i \, \partial x_j : E \to \mathbb{R}$ sont appelées les *dérivées partielles secondes* (ou d'*ordre 2*) de la fonction f.

De proche en proche, on peut définir ainsi, lorsqu'elles existent, les *dérivées partielles d'ordre p* de la fonction f. Par exemple, la dérivée partielle d'ordre p de la fonction f par rapport aux variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}$ (prises dans cet ordre) sera notée

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_p}} \quad \text{ou encore} \quad f^{(p)}_{x_{i_1} \ldots x_{i_p}}.$$

13.2.2 Fonctions de classe C^p

Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et p un entier positif. Une fonction $f: E \to \mathbb{R}$ est dite de *classe C^p* si toutes ses dérivées partielles d'ordre p existent et sont continues.

Une fonction $g: E \to \mathbb{R}$ est dite de *classe C^∞* si pour tout entier $p > 0$, elle est de classe C^p.

13.2.3 Propriété des fonctions de classe C^p

Si $f: E \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^p, alors toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 à p existent et sont continues. Autrement dit, pour tout entier $0 < k \leqslant p$, la fonction f est de classe C^k. De plus, la fonction f est continue.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser la condition suffisante démontrée au paragraphe 13.1.6. ■

13.2.4 Exemple

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x \sin xy$. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sin xy + xy \cos xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 \cos xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y\cos xy - xy^2 \sin xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = 2x\cos xy - x^2 y \sin xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = 2x\cos xy - x^2 y \sin xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^3 \sin xy.$$

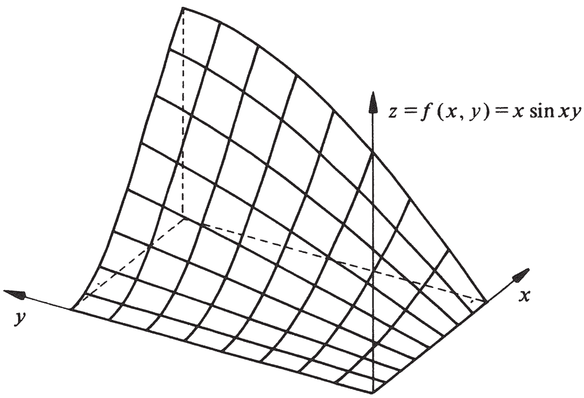


Fig. 13.7

13.2.5 Remarque

De l'exemple 13.2.4, il ne faudrait pas conclure trop hâtivement que l'égalité $\partial^2 f/\partial x\,\partial y\,(x,y) = \partial^2 f/\partial y\,\partial x\,(x,y)$ a toujours lieu. Ainsi, pour la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(fig. 13.8), on a $\partial^2 f/\partial x\,\partial y\,(0,0) = 1 \neq 0 = \partial^2 f/\partial y\,\partial x\,(0,0)$. Néanmoins, si les deux fonctions $\partial^2 f/\partial x_i\,\partial x_j$ et $\partial^2 f/\partial x_j\,\partial x_i$ sont continues en $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_n)$, alors elles sont égales en ce point. C'est le *théorème de Schwarz*.

13.2.6 Théorème de Schwarz

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_n)$ un élément de E et $f: E \to \mathbb{R}$ une fonction dont les deux dérivées partielles secondes $\partial^2 f/\partial x_i\,\partial x_j$ et $\partial^2 f/\partial x_j\,\partial x_i$ existent et sont continues au point $\boldsymbol{a}$. Alors, on a l'égalité:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a_1, ..., a_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(a_1, ..., a_n).$$

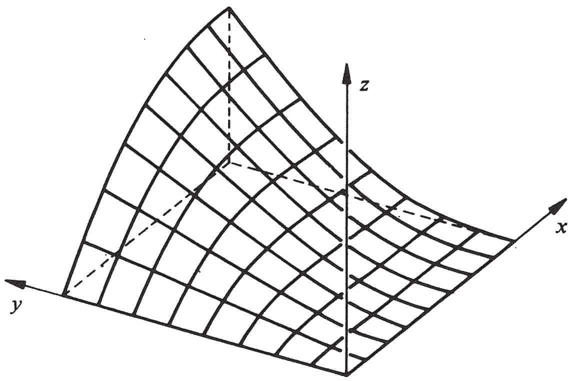


Fig. 13.8

DÉMONSTRATION. Nous supposerons que $i \neq j$ (car sinon le résultat est évident) et désignons par $\boldsymbol{a}(x,y)$ l'élément de $\mathbb{R}^n$ obtenu à partir de $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_n)$ en remplaçant a_i par x et a_j par y. Posons $\boldsymbol{b} = (a_i, a_j) \in \mathbb{R}^2$. Puisque $\boldsymbol{a}$ est un point intérieur de E, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que la relation $(x,y) \in B(\boldsymbol{b}, 2\delta)$ implique $\boldsymbol{a}(x,y) \in E$. Considérons à présent la fonction auxiliaire $W: B(\boldsymbol{b}, 2\delta) \to \mathbb{R}$ définie par $W(x,y) = f(\boldsymbol{a}(x,y))$. De cette définition, on déduit immédiatement que pour tout $(x,y) \in B(\boldsymbol{b}, 2\delta)$:

$$\frac{\partial W}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}(x,y)), \quad \frac{\partial W}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}(x,y))$$

et

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}(x,y)), \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a}(x,y)).$$

Soit k un entier quelconque supérieur à $k_0 = [1/\delta] + 1$. Alors, pour tout $(x,y) \in B(\boldsymbol{b}, \delta)$, on a:

$$\left\| \left(x + \frac{1}{k}, y\right) - (a_i, a_j) \right\| \leqslant \left\| \left(x + \frac{1}{k}, y\right) - (x,y) \right\| + \|(x,y) - (a_i,a_j)\| < \frac{1}{k} + \delta < 2\delta$$

et

$$\left\| \left(x, y + \frac{1}{k}\right) - (a_i, a_j) \right\| \leqslant \left\| \left(x, y + \frac{1}{k}\right) - (x,y) \right\| + \|(x,y) - (a_i,a_j)\| < \frac{1}{k} + \delta < 2\delta;$$

ce qui entraîne que

$$\left(x + \frac{1}{k}, y\right) \in B(\boldsymbol{b}, 2\delta) \quad \text{et} \quad \left(x, y + \frac{1}{k}\right) \in B(\boldsymbol{b}, 2\delta).$$

Ce résultat nous permet de considérer les deux fonctions $g_k, h_k: B(\boldsymbol{b}, \delta) \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$g_k(x,y) = W\left(x + \frac{1}{k}, y\right) - W(x,y) \quad \text{et} \quad h_k(x,y) = W\left(x, y + \frac{1}{k}\right) - W(x,y).$$

Puisque

$$g_k\left(a_i,a_j+\frac{1}{k}\right)-g_k(a_i,a_j) = h_k\left(a_i+\frac{1}{k},a_j\right)-h_k(a_i,a_j),$$

nous obtenons, grâce au théorème des accroissements finis (§ 5.2.12), l'existence de deux éléments θ_1 et θ_2 de $]0,1[$ tels que

$$\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial g_k}{\partial y}\left(a_i,a_j+\frac{\theta_1}{k}\right) = \frac{1}{k}\cdot\frac{\partial h_k}{\partial x}\left(a_i+\frac{\theta_2}{k},a_j\right)$$

ou encore

$$\frac{\partial W}{\partial y}\left(a_i+\frac{1}{k},a_j+\frac{\theta_1}{k}\right)-\frac{\partial W}{\partial y}\left(a_i,a_j+\frac{\theta_1}{k}\right)$$

$$= \frac{\partial W}{\partial x}\left(a_i+\frac{\theta_2}{k},a_j+\frac{1}{k}\right)-\frac{\partial W}{\partial x}\left(a_i+\frac{\theta_2}{k},a_j\right).$$

De nouveau, en utilisant le théorème des accroissements finis, nous pouvons affirmer l'existence de deux éléments θ_3 et θ_4 de $]0,1[$ tels que

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial x}\left(a_i+\frac{\theta_3}{k},a_j+\frac{\theta_1}{k}\right) = \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\left(a_i+\frac{\theta_2}{k},a_j+\frac{\theta_4}{k}\right).$$

Cette égalité étant valable quel que soit l'entier $k > k_0$, la continuité des fonctions $\partial^2 W/\partial y\,\partial x$ et $\partial^2 W/\partial x\,\partial y$ au point $\boldsymbol{b} = (a_i, a_j)$, nous permet de conclure que

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial x}(a_i,a_j) = \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}(a_i,a_j)$$

ou encore

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(a_1,\ldots,a_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a_1,\ldots,a_n). \qquad \blacksquare$$

13.2.7 Corollaire

Soit $f: E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p et k un entier compris entre 1 et p. Si deux k-tuples ordonnés $(i_1, \ldots, i_k)$ et $(j_1, \ldots, j_k)$ sont égaux à une permutation près alors, pour tout élément $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ de E, on peut écrire

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(a_1,\ldots,a_n) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_k}}(a_1,\ldots,a_n).$$

13.2.8 Exemple : équation d'onde

On se propose de trouver toutes les fonctions $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-a^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

où a est une constante positive. Pour cela, supposons que f soit une telle fonction et considérons la fonction auxiliaire $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u,v) = f\left(x = \frac{u-v}{2a},\ y = \frac{u+v}{2}\right).$$

Alors, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{2a}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u-v}{2a}, \frac{u+v}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u-v}{2a}, \frac{u+v}{2}\right)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u,v) &= \frac{1}{2a}\left(\frac{-1}{2a}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u-v}{2a}, \frac{u+v}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{u-v}{2a}, \frac{u+v}{2}\right)\right)\\ &\quad + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2a}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{u-v}{2a}, \frac{u+v}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{u-v}{2a}, \frac{u+v}{2}\right)\right)\\ &= \frac{-1}{4a^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u-v}{2a}, \frac{u+v}{2}\right) - a^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{u-v}{2a}, \frac{u+v}{2}\right)\right) = 0;\end{aligned}$$

ce qui donne, en intégrant d'abord par rapport à v et ensuite par rapport à u, que

$$F(u,v) = g(u) + h(v)$$

où $g,h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions deux fois continûment différentiables sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = g(ax+y) + h(-ax+y) \quad \text{avec} \quad g,h \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

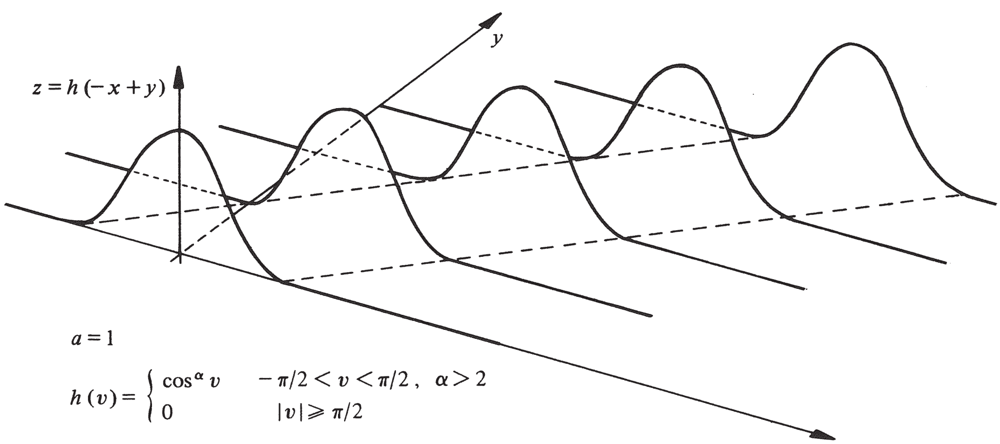


Fig. 13.9

13.2.9 Fonctions de classe C^p sur un sous-ensemble

Soit A un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ inclus dans E. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite de *classe C^p sur A* si sa restriction à A est de classe C^p.

13.2.10 Fonctions de classe C^p au voisinage d'un point

Soit $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_n)$ un point intérieur à E. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite de *classe C^p au voisinage de $\boldsymbol{a}$* s'il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que f soit de classe C^p sur $B(\boldsymbol{a}, \delta)$.

13.2.11 Formule de Taylor

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{p+1} au voisinage de $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_n)$. Alors, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel qu'à tout élément $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ de $B(\boldsymbol{a}, \delta)$, on peut associer un nombre $0 < \theta < 1$ de sorte que l'on ait l'égalité suivante (dite formule de Taylor) :

$$f(\boldsymbol{x}) = F(0) + F'(0) + ... + F^{(p)}(0)\frac{1}{p!} + F^{(p+1)}(\theta)\frac{1}{(p+1)!}$$

où $F :]-2, 2[\to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $F(t) = f(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}))$.

En particulier pour $n = 2$ et $p = 1$, on obtient que

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))(x-a)^2\right. \\ & + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))(x-a)(y-b) \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))(y-b)^2\right). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Comme f est de classe C^{p+1} au voisinage de $\boldsymbol{a}$, il existe un nombre réel $\delta_1 > 0$ tel que f soit de classe C^{p+1} sur $B(\boldsymbol{a}, \delta_1)$. Posons $\delta = \delta_1/2$ et soit $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta)$. Puisque $\{\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) : -2 < t < 2\}$ est inclus dans $B(\boldsymbol{a}, \delta_1)$, la fonction $F :]-2, 2[\to \mathbb{R}$ est bien définie, et de plus elle est $(p+1)$ fois continûment différentiable sur $]-2, 2[$ (§ 13.1.15); ce qui entraîne, entre autres, que la formule de Taylor (§ 5.4.9) donnée dans le cadre d'une fonction d'une variable réelle lui est applicable. Par conséquent, il existe un nombre réel $0 < \theta < 1$ tel que

$$f(\boldsymbol{x}) = F(1) = F(0) + F'(0) + ... + F^{(p)}(0)\frac{1}{p!} + F^{(p+1)}(\theta)\frac{1}{(p+1)!}.$$

Pour établir la formule de Taylor pour $n = 2$ et $p = 1$, il suffit de constater que pour tout $t \in]-2, 2[$:

$$\begin{aligned} F'(t) = {} & \frac{\partial f}{\partial x}(a + t(x-a), b + t(y-b))(x-a) \\ & + \frac{\partial f}{\partial y}(a + t(x-a), b + t(y-b))(y-b) \end{aligned}$$

et

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+t(x-a), b+t(y-b))(x-a)^2$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+t(x-a), b+t(y-b))(x-a)(y-b)$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+t(x-a), b+t(y-b))(y-b)^2,$$

et d'utiliser la formule obtenue ci-dessus. ■

13.3 FORMES DIFFÉRENTIELLES

13.3.1 Définitions

Soit $a<b$ et $c<d$ quatre éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ (§ 1.5.1) et $M, N:]a,b[\times]c,d[\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors, l'équation

$$M(x,y)+N(x,y)y' = 0 \tag{13.1}$$

est appelée une *forme différentielle*. De plus, lorsque les deux fonctions M et N sont de classe C^1 et que pour tout $(x,y)\in]a,b[\times]c,d[$:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y), \tag{13.2}$$

on dit que la forme différentielle (13.1) est *exacte*.

Une fonction $y: I\to]c,d[$ continûment différentiable sur l'intervalle ouvert $I\subset]a,b[$ est dite *solution* de la forme différentielle (13.1) si pour tout $x\in I$:

$$M(x,y(x))+N(x,y(x))y'(x) = 0.$$

13.3.2 Théorème

Soit $a<b$ et $c<d$ quatre éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, $(x_0,y_0)\in]a,b[\times]c,d[$ et $M,N:]a,b[\times]c,d[\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 vérifiant, pour tout $(x,y)\in]a,b[\times]c,d[$, l'égalité (13.2). D'autre part, soit $\chi:]a,b[\times]c,d[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\chi(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors, pour qu'une fonction $y: I\to]c,d[$ continûment différentiable sur l'intervalle ouvert $I\subset]a,b[$ soit solution de la forme différentielle exacte (13.1) il faut et il suffit qu'il existe une constante α telle que pour tout $x\in I$: $\chi(x,y(x))=\alpha$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que si $y: I\to]c,d[$ est une fonction continûment différentiable sur l'intervalle ouvert $I\subset]a,b[$ alors, pour tout $x\in I$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{\partial \chi}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial \chi}{\partial y}(x, y(x))\, y'(x) \\ &= M(x, y(x)) + N(x, y(x))\, y'(x) \end{aligned}$$

où $G : I \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $G(x) = \chi(x, y(x))$. ∎

13.3.3 Remarque

Dans l'énoncé du théorème 13.3.2, le choix des deux nombres réels $x_0 \in \,]a, b[$ et $y_0 \in \,]c, d[$ est totalement arbitraire. Dans la pratique, ce choix est fait de façon à simplifier le plus possible les calculs.

13.3.4 Exemple

Résoudre la forme différentielle exacte

$$(x+y) + (x-y)\, y' = 0.$$

D'une part, en prenant $x_0 = y_0 = 0$, on obtient que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\chi(x, y) = \int_0^x (t+y)\, \mathrm{d}t + \int_0^y -t\, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{2} y^2 + xy.$$

D'autre part, en utilisant le théorème 13.3.2, on sait que les solutions de la forme différentielle exacte $(x+y) + (x-y)\, y' = 0$ s'obtiennent en exprimant y par rapport à x dans l'expression

$$\tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{2} y^2 + xy = \alpha$$

où α est une constante. Par conséquent,

- si $\alpha < 0$, il y a deux solutions, à savoir: les deux fonctions $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

  $$y_1(x) = x + \sqrt{2(x^2 - \alpha)} \quad \text{et} \quad y_2(x) = x - \sqrt{2(x^2 - \alpha)}\,;$$

- si $\alpha = 0$, il y a aussi deux solutions, à savoir: les deux fonctions $\bar{y}_1, \bar{y}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

  $$\bar{y}_1(x) = (1 + \sqrt{2})\, x \quad \text{et} \quad \bar{y}_2(x) = (1 - \sqrt{2})\, x\,;$$

- si $\alpha > 0$, il y a quatre solutions, à savoir: les quatre fonctions $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 : \,]-\infty, -\sqrt{\alpha}[\, \to \mathbb{R}$ et $\tilde{y}_3, \tilde{y}_4 : \,]\sqrt{\alpha}, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ définies par

  $$\tilde{y}_1(x) = \tilde{y}_3(x) = x + \sqrt{2(x^2 - \alpha)} \quad \text{et} \quad \tilde{y}_2(x) = \tilde{y}_4(x) = x - \sqrt{2(x^2 - \alpha)}.$$

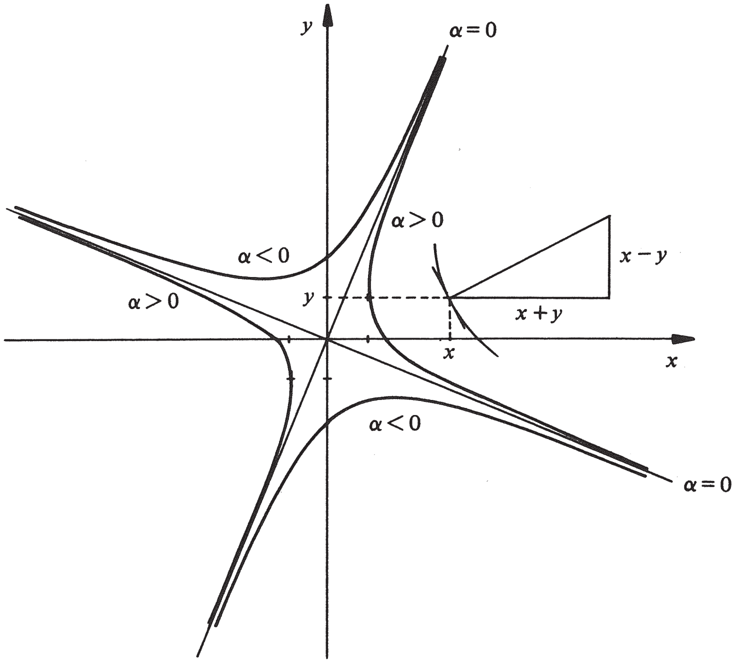


Fig. 13.10

13.3.5 Facteur intégrant

Soit $a<b$ et $c<d$ quatre éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et M,N: $]a,b[\times]c,d[\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Une fonction μ: $]a,b[\times]c,d[\to\mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifie les deux propriétés suivantes:

– pour tout $(x,y)\in]a,b[\times]c,d[: \mu(x,y)\neq 0$;
– la forme différentielle

$$\mu(x,y)M(x,y)+\mu(x,y)N(x,y)y' = 0 \tag{13.3}$$

est exacte,

est appelée un *facteur intégrant* de la forme différentielle (13.1).

Lorsqu'une forme différentielle (13.1) possède un facteur intégrant, ses solutions coïncident avec celles de la forme différentielle exacte (13.3).

Pour finir, remarquons que même lorsqu'une forme différentielle possède un facteur intégrant, il n'est généralement pas facile de le trouver. Cependant, il existe des cas particuliers (§ 13.3.7 et 13.3.8) pour lesquels il est possible d'en calculer au moins un.

13.3.6 Caractérisation d'un facteur intégrant

Soit $a<b$ et $c<d$ quatre éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et M,N: $]a,b[\times]c,d[\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Pour qu'une fonction μ: $]a,b[\times]c,d[\to\mathbb{R}$ de classe C^1 qui ne s'annule pas sur $]a,b[\times]c,d[$ soit un facteur intégrant de la forme différentielle (13.1) il

faut et il suffit que pour tout $(x,y) \in]a,b[\times]c,d[$, on ait :

$$M(x,y)\,\frac{\partial \operatorname{Log}|\mu|}{\partial y}(x,y) - N(x,y)\,\frac{\partial \operatorname{Log}|\mu|}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y). \tag{13.4}$$

DÉMONSTRATION. Pour que $\mu :]a,b[\times]c,d[\to \mathbb{R}$ soit un facteur intégrant de la forme différentielle (13.1) il faut et il suffit que pour tout $(x,y) \in]a,b[\times]c,d[$:

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \mu N}{\partial x}(x,y)$$

c'est-à-dire

$$M(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) - N(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y) = \mu(x,y)\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right)$$

ou encore, en divisant les deux membres de cette égalité par $\mu(x,y)$, que

$$M(x,y)\,\frac{\partial \operatorname{Log}|\mu|}{\partial y}(x,y) - N(x,y)\,\frac{\partial \operatorname{Log}|\mu|}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y).$$

■

13.3.7 Facteur intégrant ne dépendant que de x

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et $M, N :]a,b[\times]c,d[\to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 vérifiant les deux propriétés suivantes :

- pour tout $(x,y) \in]a,b[\times]c,d[: N(x,y) \neq 0$;
- pour tout $(x,y) \in]a,b[\times]c,d[$ l'expression

  $$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{N(x,y)}$$

  ne dépend pas de y mais seulement de x.

Alors, en désignant par $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{N(x,y)}$$

on obtient que la fonction $\mu :]a,b[\times]c,d[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\mu(x,y) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt}$$

où x_0 est un élément quelconque de $]a,b[$, est un facteur intégrant de la forme différentielle (13.1).

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que μ vérifie l'égalité (13.4) et d'utiliser le résultat du paragraphe 13.3.6. ■

13.3.8 Facteur intégrant ne dépendant que de y

Soit $a<b$ et $c<d$ quatre éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et $M,N\colon]a,b[\times]c,d[\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 vérifiant les deux propriétés suivantes:

- pour tout $(x,y)\in]a,b[\times]c,d[$: $M(x,y)\neq 0$;
- pour tout $(x,y)\in]a,b[\times]c,d[$ l'expression

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{M(x,y)}$$

ne dépend pas de x mais seulement de y.

Alors, en désignant par $g\colon]c,d[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(y) = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{M(x,y)}$$

on obtient que la fonction $\mu\colon]a,b[\times]c,d[\to\mathbb{R}$ définie par

$$\mu(x,y) = e^{\int_{y_0}^{y} g(t)dt}$$

où y_0 est un élément quelconque de $]c,d[$, est un facteur intégrant de la forme différentielle (13.1).

13.3.9 Exemple

Pour $(x,y)\in]-\infty,+\infty[\times]0,+\infty[$, résoudre la forme différentielle

$$(3x^2+y^2)y+x(y^2-x^2)y' = 0. \tag{13.5}$$

En constatant que pour tout $(x,y)\in]-\infty,+\infty[\times]0,+\infty[$:

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{M(x,y)} = -\frac{2}{y};$$

on sait (§ 13.3.8) que la fonction $\mu\colon]-\infty,+\infty[\times]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par

$$\mu(x,y) = e^{\int_1^y \frac{-2}{t}dt} = \frac{1}{y^2}$$

est un facteur intégrant de la forme différentielle (13.5). Ainsi, en prenant $x_0=0$, on obtient que pour tout $(x,y)\in]-\infty,+\infty[\times]0,+\infty[$:

$$\chi(x,y) = \int_0^x \left(\frac{3t^2}{y}+y\right)\mathrm{d}t = \frac{x^3}{y}+xy;$$

ce qui entraîne, d'après le théorème 13.3.2, que les solutions de la forme différentielle

(13.5) s'obtiennent en exprimant y (avec $y > 0$) par rapport à x dans l'expression

$$\frac{x^3}{y} + xy = \alpha$$

où α est une constante. Par conséquent,

– si $\alpha < 0$, il y a deux solutions, à savoir : les deux fonctions

$$y_1, y_2 : \left]-\sqrt{\frac{-\alpha}{2}}\,,\ 0\right[\to]0, +\infty[$$

définies respectivement par

$$y_1(x) = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4x^4}}{2x} \quad \text{et} \quad y_2(x) = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4x^4}}{2x}\ ;$$

– si $\alpha = 0$, il n'y a aucune solution;
– si $\alpha > 0$, il y a de nouveau deux solutions, à savoir : les deux fonctions

$$\bar{y}_1, \bar{y}_2 : \left]0, \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right[\to]0, +\infty[$$

définies respectivement par

$$\bar{y}_1(x) = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4x^4}}{2x} \quad \text{et} \quad \bar{y}_2(x) = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4x^4}}{2x}.$$

13.4 EXTREMA D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES

13.4.1 Définition d'un point stationnaire

On dit que $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in E$ est un *point stationnaire* de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ si

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

13.4.2 Maximum et minimum local d'une fonction

Soit $\boldsymbol{a}$ un élément de E. On dit que la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ admet un *maximum (resp. minimum) local* au point $\boldsymbol{a}$ s'il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $\boldsymbol{x} \in E$ et $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta)$ impliquent $f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{a})$ (resp. $f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{a})$).

D'autre part, nous dirons qu'une fonction admet un *extremum local* au point $\boldsymbol{a}$ si cette fonction admet un maximum ou un minimum local en ce point.

13.4.3 Remarque

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant la propriété suivante : la restriction de f à toute droite passant par le point (a, b) possède un extremum local en ce point. Peut-on déduire que f admet un extremum local au point (a, b)? La réponse à cette question est non. Par exemple, soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Il est facile de vérifier que la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ possède un minimum local en ce point. Par contre, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f\left(x, \frac{3x^2}{2}\right) = -\frac{x^4}{4} < f(0,0) = 0 < \frac{3x^4}{4} = f\left(x, \frac{x^2}{2}\right),$$

la fonction f n'admet pas d'extremum local au point $(0,0)$.

13.4.4 Condition nécessaire pour qu'une fonction possède un extremum en un point

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un extremum local au point $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ et telle que pour chaque entier $1 \leqslant i \leqslant n$, sa dérivée partielle par rapport à x_i au point $\boldsymbol{a}$ existe. Alors, $\boldsymbol{a}$ est un point stationnaire de f. Autrement dit,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Soit i un entier quelconque compris entre 1 et n, et $f_i : \{x \in \mathbb{R} : (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in E\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_i(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Puisque f_i est différentiable en a_i et admet un extremum local en ce point, on sait (§ 5.2.2) que $f_i'(a_i) = 0$. D'où le résultat. ∎

13.4.5 Remarque

La condition démontrée au paragraphe 13.4.4 n'est pas suffisante, car $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ peut très bien être un point stationnaire de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ sans pour autant que f possède un extremum local en ce point. Par exemple, soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = xy$. Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

$(0,0)$ est un point stationnaire de f. Par contre, f n'admet pas d'extremum local en ce point.

13.4.6 Recherche des points où une fonction atteint ses extrema

Il résulte immédiatement de la condition nécessaire démontrée au paragraphe 13.4.4, que si la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ admet un extremum local au point $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, alors $\boldsymbol{a}$ se trouve obligatoirement parmi les points suivants :

- les points stationnaires de la fonction f;
- les points de E où une au moins des dérivées partielles de f n'existe pas.

13.4.7 Exemple

Soit $A=(7,1)$, $B=(x,-x)$, $C=(y,y)$ et $D=(8,4)$ quatre points de $\mathbb{R}^2$. Comment faut-il choisir x et y pour que la somme des distances de A à B, de B à C et de C à D soit minimale ? Ce problème revient à trouver un point de $\mathbb{R}^2$ pour lequel la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sqrt{(x-7)^2+(-x-1)^2}+\sqrt{(x-y)^2+(-x-y)^2}+\sqrt{(y-8)^2+(y-4)^2} \\ &= \sqrt{2}\,(\sqrt{x^2-6x+25}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2-12y+40}) \end{aligned}$$

atteint son minimum. Il nous faut d'abord démontrer qu'un tel point existe. Pour cela, posons $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 10^3\}$. Puisque f est continue sur E et que E est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^2$, on sait (§ 12.3.18) qu'il existe un élément (a,b) de E tel que $f(a,b)=\min\limits_{(x,y)\in E} f(x,y)$. Par suite, en constatant que pour tout $(x,y)\notin E$:

$$f(x,y)\geqslant\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} > \sqrt{2}\sqrt{1000} > \sqrt{2}\,(5+\sqrt{40}) = f(0,0)\geqslant f(a,b),$$

on peut écrire

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y).$$

Puisque l'unique point stationnaire de f est $(1,2)$ et que

$$f(1,2) = 5\sqrt{10} < \sqrt{2}\,(5+\sqrt{40}) = f(0,0),$$

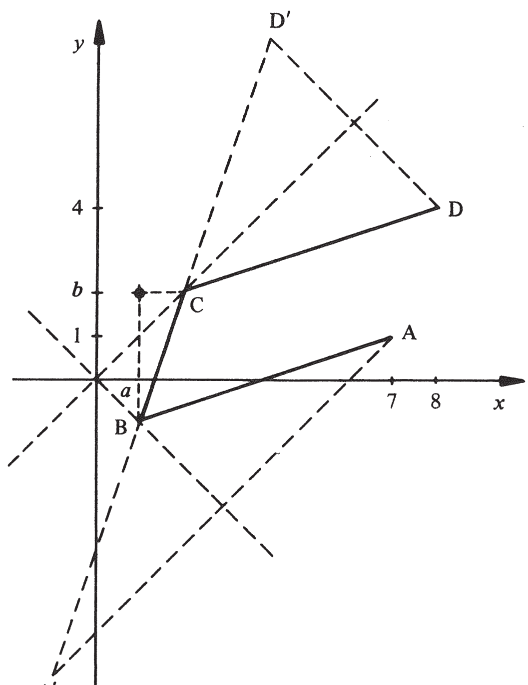


Fig. 13.11

on peut affirmer (§ 13.4.6) que $(a,b)=(1,2)$. Par conséquent, les deux points de $\mathbb{R}^2$ cherchés sont

$$B = (1,-1) \quad \text{et} \quad C = (2,2).$$

La figure 13.11 donne la solution géométrique de ce problème.

13.4.8 Condition suffisante pour qu'une fonction possède un extremum local en ce point

Soit $f: E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 au voisinage de (a,b) où (a,b) est un point stationnaire de f et posons

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b).$$

Alors,

- si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$, la fonction f admet un minimum local au point (a,b);
- si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$, la fonction f admet un maximum local au point (a,b);
- si $s^2 - rt > 0$, la fonction f n'admet pas d'extremum local au point (a,b).

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$. Puisque f est de classe C^2 au voisinage de $\boldsymbol{c} = (a,b)$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ pour lequel la formule de Taylor (§ 13.2.11) est valable et tel que pour tout $(a_1,b_1) \in B(\boldsymbol{c},\delta)$:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1,b_1)\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1,b_1) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1,b_1) < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1,b_1) > 0.$$

Soit $(x,y) \neq (a,b)$ un élément quelconque de $B(\boldsymbol{c},\delta)$. Alors, en utilisant la formule de Taylor (§ 13.2.11), on sait qu'il existe un nombre $\theta \in\,]0,1[$ dépendant de (x,y) tel que

$$f(x,y) - f(a,b) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{a},\bar{b})(x-a)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{a},\bar{b})(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{a},\bar{b})(y-b)^2\right)$$

où $\bar{a} = a + \theta\,(x-a)$ et $\bar{b} = b + \theta\,(y-b)$. Ainsi, en posant

$$\bar{r} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{a},\bar{b}), \quad \bar{s} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{a},\bar{b}) \quad \text{et} \quad \bar{t} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{a},\bar{b}),$$

on obtient que

$$f(x,y) - f(a,b) = \frac{1}{2}\,\bar{r}\left(\left((x-a) + \frac{\bar{s}}{\bar{r}}(y-b)\right)^2 - \frac{(y-b)^2}{\bar{r}^2}(\bar{s}^2 - \bar{r}\,\bar{t})\right) > 0.$$

D'où la pemière assertion.

Supposons à présent que $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$. Alors, la fonction $-f$ vérifie les hypothèses de la première assertion; ce qui nous permet d'affirmer que $-f$ admet un minimum local au point (a,b). Par conséquent, f possède un maximum local au point (a,b).

Pour finir, supposons que $s^2 - rt > 0$. Alors, il existe deux nombres réels non nuls λ_1 et λ_2 tels que

$$r\lambda_1^2 + 2s\lambda_1 + t < 0 \quad \text{et} \quad r\lambda_2^2 + 2s\lambda_2 + t > 0.$$

D'autre part, puisque f est de classe C^2 au voisinage de $\boldsymbol{c} = (a,b)$, il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que f soit de classe C^2 sur $B(\boldsymbol{c},\beta)$; ce qui nous permet, entre autres, de considérer les deux fonctions auxiliaires $g,h : B(\boldsymbol{c},\beta) \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$g(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\lambda_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)\lambda_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

et

$$h(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\lambda_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)\lambda_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

Par suite, en utilisant de nouveau la formule de Taylor, il est possible de trouver un entier $k_0 > 0$ tel qu'à tout $k \geqslant k_0$, on peut associer deux éléments θ_k et $\bar{\theta}_k$ de $]0,1[$ de sorte que l'on ait :

$$f\left(a+\frac{\lambda_1}{k}\,,\,b+\frac{1}{k}\right) - f(a,b) = \frac{1}{2k^2}\,g\left(a+\frac{\lambda_1\theta_k}{k}\,,\,b+\frac{\theta_k}{k}\right)$$

et

$$f\left(a+\frac{\lambda_2}{k}\,,\,b+\frac{1}{k}\right) - f(a,b) = \frac{1}{2k^2}\,h\left(a+\frac{\lambda_2\bar{\theta}_k}{k}\,,\,b+\frac{\bar{\theta}_k}{k}\right)$$

Finalement, en constatant que g et h sont continues au point (a,b) et que $g(a,b) < 0$ et $h(a,b) > 0$, on peut affirmer qu'il existe un entier $k_1 \geqslant k_0$ tel que pour tout $k \geqslant k_1$:

$$f\left(a+\frac{\lambda_1}{k}\,,\,b+\frac{1}{k}\right) - f(a,b) < 0 \quad \text{et} \quad f\left(a+\frac{\lambda_2}{k}\,,\,b+\frac{1}{k}\right) - f(a,b) > 0\,;$$

ce qui revient à dire que la fonction f n'admet pas d'extremum local au point (a,b). ■

13.4.9 Corollaire

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 au voisinage de (a,b) et admettant en ce point un maximum (resp. un minimum) local. Alors, pour tout $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$r w_1^2 + 2s\,w_1 w_2 + t\,w_2^2 \leqslant 0 \quad (\text{resp.} \geqslant 0)$$

où

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a,b) \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b).$$

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que $s^2 - rt \neq 0$. Alors, $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$ (resp. $r > 0$) (§ 13.4.8); ce qui implique que pour tout $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$r w_1^2 + 2s\,w_1 w_2 + t\,w_2^2 = r\left(\left(w_1 + \frac{s}{r}w_2\right)^2 - \frac{w_2^2}{r^2}(s^2 - rt)\right) \leqslant 0 \;(\text{resp.} \geqslant 0).$$

Supposons à présent que $s^2 - rt = 0$. Si $r = t = 0$, il n'y a strictement rien à démontrer. Faisons donc l'hypothèse supplémentaire que $r \neq 0$ (le cas $r = 0$ et $t \neq 0$ se traitant de manière analogue). La fonction f étant de classe C^2 au voisinage de (a, b), il existe un nombre réel $\delta > 0$ de sorte que la fonction $g :]a - \delta, a + \delta[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x, b)$ soit deux fois continûment différentiable sur $]a - \delta, a + \delta[$. Puisque g admet un maximum (resp. minimum) local au point a et que $g''(a) = r \neq 0$, il résulte du paragraphe 5.4.10 que $r < 0$ (resp. $r > 0$). Par conséquent, pour tout $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$r w_1^2 + 2s\, w_1 w_2 + t\, w^2{}_2 = r \left(w_1 + \frac{s}{r} w_2 \right)^2 \leqslant 0 \text{ (resp. } \geqslant 0). \qquad \blacksquare$$

13.4.10 Remarque

Les deux fonctions $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies respectivement par $g(x, y) = x^3 + x^2 + y^3$ et $h(x, y) = x^4 + y^4$ admettent $(0, 0)$ comme point stationnaire et vérifient

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x\, \partial y} (0,0) \right)^2 - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (0,0) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} (0,0) = 0$$

et

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x\, \partial y} (0,0) \right)^2 - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} (0,0) \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} (0,0) = 0.$$

Puisque la fonction g ne possède pas d'extremum local au point $(0, 0)$, tandis que la fonction h en admet un, il résulte de cet exemple, que pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 au voisinage de (a, b) qui vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial x} (a,b) = \frac{\partial f}{\partial y} (a,b) = 0$$

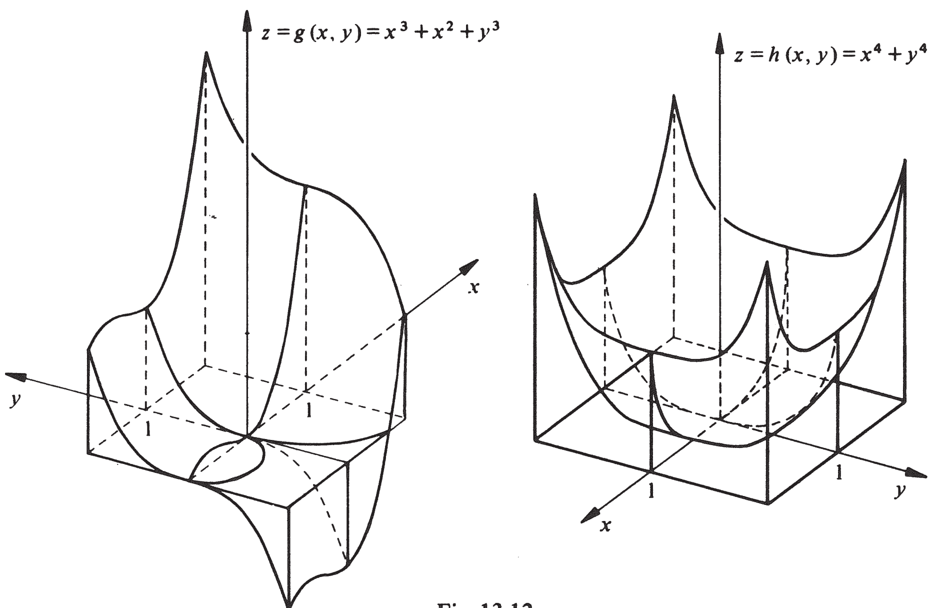


Fig. 13.12

et

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(a,b)\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = 0,$$

il n'est généralement pas possible a priori de savoir si elle admet un extremum local au point (a,b).

13.4.11 Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = y^3 + 3y^2 - 4xy + x^2$. Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -4y + 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + 6y - 4x$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x,y) = -4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6(y+1),$$

on obtient que les points stationnaires de la fonction f sont $(0,0)$ et $(4/3,\ 2/3)$ et qu'en ces points

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0)\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 4 > 0$$

et

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right) = -4 < 0.$$

Par conséquent (§ 13.4.8), la fonction f admet un minimum local au point $(4/3,\ 2/3)$, tandis qu'au point $(0,0)$ elle ne possède pas d'extremum local.

13.4.12 Définition d'une fonction harmonique

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ et δ un nombre réel positif. Une fonction continue $f : \overline{B(\boldsymbol{a},\delta)} \to \mathbb{R}$ est dite *harmonique* si elle vérifie les deux propriétés suivantes:

- f est de classe C^2 sur $B(\boldsymbol{a},\delta)$;
- pour tout $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a},\delta)$:

$$\Delta f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{13.6}$$

Par définition, le nombre réel $\Delta f(\boldsymbol{x})$ est appelé le *laplacien* de la fonction f au point $\boldsymbol{x}$, et l'équation (13.6) l'*équation de Laplace*.

13.4.13 Principe du maximum et du minimum des fonctions harmoniques

Soit $a \in \mathbb{R}^2$, δ un nombre réel positif et $f : \overline{B(a,\delta)} \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Alors, il existe deux éléments a_1 et a_2 de $\partial B(a,\delta)$ tels que

$$f(a_1) = \max_{x \in \overline{B(a,\delta)}} f(x) \quad \text{et} \quad f(a_2) = \min_{x \in \overline{B(a,\delta)}} f(x).$$

DÉMONSTRATION. Puisque la fonction f est continue sur $\overline{B(a,\delta)}$, les deux nombres réels $M = \max_{x \in \overline{B(a,\delta)}} f(x)$ et $\bar{M} = \max_{x \in \partial B(a,\delta)} f(x)$ existent. Montrons que $M = \bar{M}$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $M - \bar{M} > 0$. Alors, il existe $c \in B(a,\delta)$ tel que $f(c) = M$, et soit $g : \overline{B(a,\delta)} \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$g(x) = f(x) + \frac{M - \bar{M}}{4\delta^2} \| x - c \|^2.$$

Du fait que cette fonction est continue sur $\overline{B(a,\delta)}$, on sait qu'il existe $c_1 \in \overline{B(a,\delta)}$ tel que $g(c_1) = \max_{x \in \overline{B(a,\delta)}} g(x)$. De plus, en constatant que

$$g(c_1) \geqslant g(c) = f(c) = M$$

et que pour tout $x \in \partial B(a,\delta)$:

$$\begin{aligned} g(x) = f(x) + \frac{M - \bar{M}}{4\delta^2} \| x - c \|^2 &\leqslant f(x) + \frac{M - \bar{M}}{4\delta^2} (\| x - a \| + \| a - c \|)^2 \\ &< \bar{M} + (M - \bar{M}) = M, \end{aligned}$$

on obtient que $c_1 \in B(a,\delta)$. Par suite, comme la fonction g est de classe C^2 sur $B(a,\delta)$ et qu'elle admet un maximum local au point c_1, le corollaire 13.4.9 nous permet d'écrire que pour tout $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$r\, w_1^2 + 2s\, w_1 w_2 + t\, w_2^2 \leqslant 0$$

où

$$r = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(c_1), \quad s = \frac{\partial^2 g}{\partial x\, \partial y}(c_1) \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(c_1).$$

De cette inégalité, on déduit que $r + 2s + t \leqslant 0$ $(w_1 = w_2 = 1)$ et $r - 2s + t \leqslant 0$ $(w_1 = -w_2 = 1)$; ce qui donne, en les additionnant, que $r + t \leqslant 0$. Finalement, puisque

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c_1) + \frac{M - \bar{M}}{2\delta^2} \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c_1) + \frac{M - \bar{M}}{2\delta^2},$$

on obtient que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c_1) = (r + t) + \frac{\bar{M} - M}{\delta^2} < 0.$$

Ce dernier résultat est impossible, car f est harmonique. D'où contradiction. Par conséquent $M = \bar{M}$; ce qui revient à dire qu'il existe au moins un élément a_1 de $\partial B(a,\delta)$ tel que

$$f(a_1) = \max_{x \in \overline{B(a,\delta)}} f(x).$$

La fonction $-f : \overline{B(\boldsymbol{a},\delta)} \to \mathbb{R}$ étant harmonique, on sait, d'après ce que l'on vient de démontrer, qu'il existe $\boldsymbol{a}_2 \in \partial B(\boldsymbol{a},\delta)$ tel que $-f(\boldsymbol{a}_2) = \max\limits_{\boldsymbol{x} \in \overline{B(\boldsymbol{a},\delta)}} -f(\boldsymbol{x})$; ce qui entraîne que $f(\boldsymbol{a}_2) = \min\limits_{\boldsymbol{x} \in \overline{B(\boldsymbol{a},\delta)}} f(\boldsymbol{x}) = m$. ■

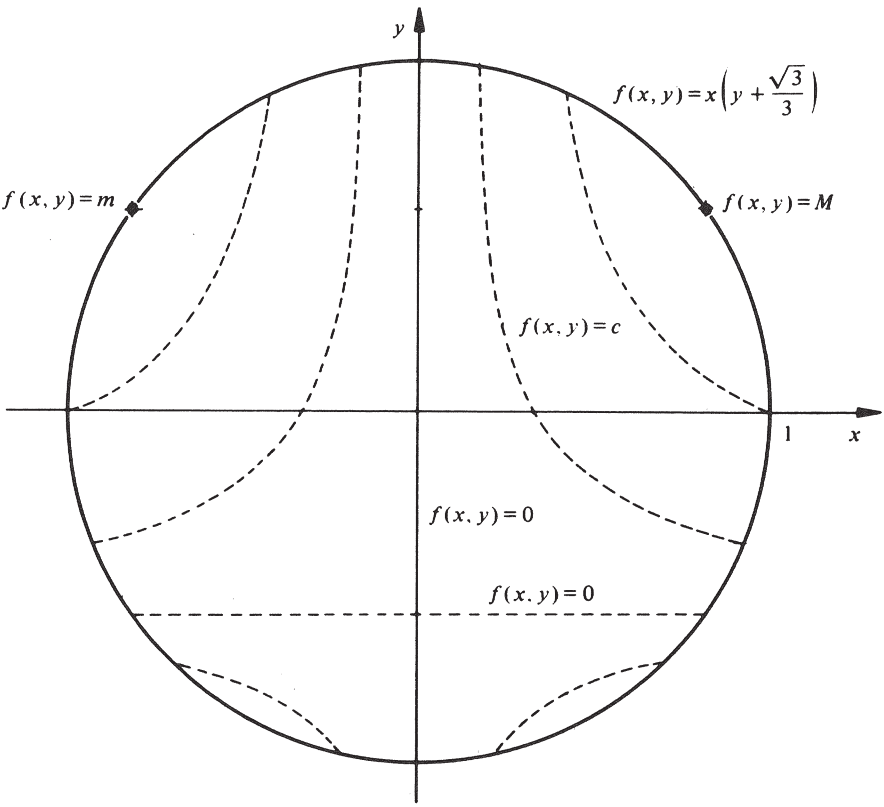


Fig. 13.13

13.4.14 Corollaire

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2, \delta$ un nombre réel positif et $f,g : \overline{B(\boldsymbol{a},\delta)} \to \mathbb{R}$ deux fonctions harmoniques telles que pour tout $\boldsymbol{x} \in \partial B(\boldsymbol{a},\delta) : f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$. Alors, pour tout $\boldsymbol{x} \in \overline{B(\boldsymbol{a},\delta)}$: $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$.

DÉMONSTRATION. Soit $h : \overline{B(\boldsymbol{a},\delta)} \to \mathbb{R}$ la fonction harmonique définie par $h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})$. D'où, en utilisant le principe du maximum et du minimum des fonctions harmoniques démontré au paragraphe 13.4.13, on sait qu'il existe deux éléments $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_2$ de $\partial B(\boldsymbol{a},\delta)$ tels que pour tout $\boldsymbol{x} \in \overline{B(\boldsymbol{a},\delta)}$: $h(\boldsymbol{a}_1) \leqslant h(\boldsymbol{x}) \leqslant h(\boldsymbol{a}_2)$; ce qui implique, puisque $h(\boldsymbol{a}_1) = h(\boldsymbol{a}_2) = 0$, que pour tout $\boldsymbol{x} \in \overline{B(\boldsymbol{a},\delta)}$: $h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}) = 0$ ou encore $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$. ■

13.5 FONCTIONS IMPLICITES – EXTREMA LIÉS

13.5.1 Théorème des fonctions implicites

Soit un entier $n \geqslant 2$, E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 au voisinage de $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_n)$ telle que

$$f(a_1, ..., a_n) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, ..., a_n) \neq 0 .$$

Alors, il existe un nombre réel $\delta > 0$ et une application $\varphi : B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 où $\underline{\boldsymbol{a}} = (a_1, ..., a_{n-1})$ vérifiant les deux propriétés suivantes:

- $a_n = \varphi(a_1, ..., a_{n-1})$;
- pour tout $(x_1, ..., x_{n-1}) \in B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta)$: $f(x_1, ..., x_{n-1}, \varphi(x_1, ..., x_{n-1})) = 0$.

DÉMONSTRATION. Pour les besoins de la démonstration, nous supposerons que $\partial f / \partial x_n(\boldsymbol{a}) > 0$ (l'autre cas se traitant de façon analogue). Pour commencer, montrons l'existence du nombre réel $\delta > 0$ et de la fonction φ. En effet, puisque f est une fonction de classe C^1 au voisinage de $\boldsymbol{a}$, on sait qu'il existe un nombre $\beta > 0$ tel que f soit de classe C^1 sur $B(\boldsymbol{a}, \beta)$ et que pour tout $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \beta)$: $\partial f / \partial x_n(\boldsymbol{x}) > 0$. Ainsi, en posant $\alpha = \beta / 2\sqrt{n}$, on obtient que le sous-ensemble

$$A = [a_1 - \alpha, a_1 + \alpha] \times ... \times [a_n - \alpha, a_n + \alpha]$$

de $\mathbb{R}^n$ est inclus dans $B(\boldsymbol{a}, \beta)$ et que pour tout $\boldsymbol{x} \in A$: $\partial f / \partial x_n(\boldsymbol{x}) > 0$. Considérons à présent la fonction auxiliaire $g : [a_n - \alpha, a_n + \alpha] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(a_1, ..., a_{n-1}, t)$. Cette fonction est continue et, du fait que pour tout $t \in]a_n - \alpha, a_n + \alpha[$:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, ..., a_{n-1}, t) > 0,$$

elle est aussi strictement croissante sur $[a_n - \alpha, a_n + \alpha]$ (§ 5.2.16); ce qui entraîne, puisque $g(a_n) = f(a_1, ..., a_n) = 0$, que

$$f(a_1, ..., a_{n-1}, a_n - \alpha) = g(a_n - \alpha) < 0$$

et

$$f(a_1, ..., a_{n-1}, a_n + \alpha) = g(a_n + \alpha) > 0.$$

Par suite, la continuité de la fonction f sur A, nous permet d'affirmer qu'il existe un nombre $0 < \delta < \alpha$ tel que pour tout $(x_1, ..., x_{n-1}) \in B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta)$.

$$f(x_1, ..., x_{n-1}, a_n - \alpha) < 0 \quad \text{et} \quad f(x_1, ..., x_{n-1}, a_n + \alpha) > 0.$$

Soit $(b_1, ..., b_{n-1})$ un élément quelconque de $B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta)$ et soit $h : [a_n - \alpha, a_n + \alpha] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(t) = f(b_1, ..., b_{n-1}, t)$. Puisque cette fonction est continue et que pour tout $t \in]a_n - \alpha, a_n + \alpha[$:

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(b_1, ..., b_{n-1}, t) > 0,$$

elle est aussi strictement croissante sur $[a_n - \alpha, a_n + \alpha]$. Comme de plus

$$h(a_n - \alpha) = f(b_1, ..., b_{n-1}, a_n - \alpha) < 0 \quad \text{et} \quad h(a_n + \alpha) = f(b_1, ..., b_{n-1}, a_n + \alpha) > 0,$$

on peut conclure que la fonction h s'annule une et une seule fois sur l'intervalle fermé $[a_n - \alpha, a_n + \alpha]$. De ce résultat et du choix arbitraire de l'élément $(b_1, ..., b_{n-1})$ de $B(\underline{a}, \delta)$, on déduit l'existence d'une fonction $\varphi : B(\underline{a}, \delta) \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétés suivantes:

- pour tout $(x_1, ..., x_{n-1}) \in B(\underline{a}, \delta)$: $f(x_1, ..., x_{n-1}, \varphi(x_1, ..., x_{n-1})) = 0$;
- pour tout $(x_1, ..., x_{n-1}) \in B(\underline{a}, \delta)$: $|\varphi(x_1, ..., x_{n-1}) - a_n| < \alpha$;
- les relations $(x_1, ..., x_{n-1}, y) \in B(\underline{a}, \delta) \times [a_n - \alpha, a_n + \alpha]$ et $f(x_1, ..., x_{n-1}, y) = 0$ impliquent $y = \varphi(x_1, ..., x_{n-1})$.

Cette dernière propriété implique, entre autres, que $a_n = \varphi(a_1, ..., a_{n-1})$.

Montrons à présent la continuité de la fonction φ. En effet, il résulte de l'étude précédente que pour tout nombre $0 < \beta_1 < \beta$, il existe un nombre réel $0 < \delta_1 < \delta$ tel que pour tout $(x_1, ..., x_{n-1}) \in B(\underline{a}, \delta_1)$:

$$|\varphi(x_1, ..., x_{n-1}) - a_n| = |\varphi(x_1, ..., x_{n-1}) - \varphi(a_1, ..., a_{n-1})| < \beta_1 ;$$

ce qui entraîne que la fonction φ est continue au point $\underline{a} = (a_1, ..., a_{n-1})$. Supposons maintenant que $\underline{c} = (c_1, ..., c_{n-1})$ soit un élément quelconque de $B(\underline{a}, \delta)$ différent de $\underline{a}$. Alors, la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 au voisinage de $\boldsymbol{c} = (c_1, ..., c_{n-1}, \varphi(c_1, ..., c_{n-1}))$ et de plus

$$f(\boldsymbol{c}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{c}) > 0.$$

Par conséquent, en utilisant les résultats déjà démontrés, on sait qu'il existe un nombre réel $\delta_2 > 0$ (choisi de sorte que $B(\underline{c}, \delta_2)$ soit incluse dans $B(\underline{a}, \delta)$) et une application $\varphi_1 : B(\underline{c}, \delta_2) \to \mathbb{R}$ continue au point $\underline{c}$ tels que pour tout $(x_1, ..., x_{n-1}) \in B(\underline{c}, \delta_2)$, on ait:

$$f(x_1, ..., x_{n-1}, \varphi_1(x_1, ..., x_{n-1})) = 0, \quad \varphi_1(c_1, ..., c_{n-1}) = \varphi(c_1, ..., c_{n-1})$$

et

$$|\varphi_1(x_1, ..., x_{n-1}) - \varphi_1(c_1, ..., c_{n-1})| < (\alpha - |\varphi(c_1, ..., c_{n-1}) - a_n|).$$

Par suite, en remarquant que pour tout $(x_1, ..., x_{n-1}) \in B(\underline{c}, \delta_2)$:

$$\begin{aligned}|\varphi_1(x_1, ..., x_{n-1}) - a_n| &\leqslant |\varphi_1(x_1, ..., x_{n-1}) - \varphi_1(c_1, ..., c_{n-1})| \\ &\quad + |\varphi_1(c_1, ..., c_{n-1}) - a_n| < \alpha,\end{aligned}$$

on peut affirmer que φ_1 n'est rien d'autre que la restriction de φ à $B(\underline{c}, \delta_2)$. D'où la continuité de la fonction φ au point $\underline{c} = (c_1, ..., c_{n-1})$.

Pour finir, montrons que φ est de classe C^1. Pour cela, soit $\underline{d} = (d_1, ..., d_{n-1})$ un élément quelconque de $B(\underline{a}, \delta)$ et p un entier compris entre 1 et $n-1$. Posons

$$D = \{t \in \mathbb{R} : (d_1, ..., d_{p-1}, t, d_{p+1}, ..., d_{n-1}) \in B(\underline{a}, \delta)\}.$$

Dans la suite, pour simplifier l'écriture, nous utiliserons les notations suivantes:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (d_1, ..., d_{p-1}, x, d_{p+1}, ..., d_{n-1})$$

et

$$(\bar{\boldsymbol{x}}, z) = (d_1, ..., d_{p-1}, x, d_{p+1}, ..., d_{n-1}, z).$$

Puisque f est de classe C^1 sur $B(\underline{\boldsymbol{a}},\delta) \times]a_n-\alpha, a_n+\alpha[$, on sait, d'après le théorème des accroissements finis (§ 5.2.12), qu'à tout élément $x \neq d_p$ de D, on peut associer deux nombres $\theta_1, \theta_2 \in]0,1[$ de sorte que l'on ait :

$$\begin{aligned}
0 &= f(\bar{\boldsymbol{x}},\varphi(\bar{\boldsymbol{x}}))-f(\underline{\boldsymbol{d}},\varphi(\underline{\boldsymbol{d}}))\\
&= (f(\bar{\boldsymbol{x}},\varphi(\bar{\boldsymbol{x}}))-f(\bar{\boldsymbol{x}},\varphi(\underline{\boldsymbol{d}})))+(f(\bar{\boldsymbol{x}},\varphi(\underline{\boldsymbol{d}}))-f(\underline{\boldsymbol{d}},\varphi(\underline{\boldsymbol{d}})))\\
&= \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{\boldsymbol{x}},\varphi(\underline{\boldsymbol{d}})+\theta_1(\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})-\varphi(\underline{\boldsymbol{d}})))\cdot(\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})-\varphi(\underline{\boldsymbol{d}}))\\
&\quad+\frac{\partial f}{\partial x_p}(d_1,\dots,d_{p-1},d_p+\theta_2(x-d_p),d_{p+1},\dots,d_{n-1},\varphi(\underline{\boldsymbol{d}}))\cdot(x-d_p),
\end{aligned}$$

ou encore (car $\partial f/\partial x_n(\bar{\boldsymbol{x}},\varphi(\underline{\boldsymbol{d}})+\theta_1(\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})-\varphi(\underline{\boldsymbol{d}}))) > 0$)

$$\frac{\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})-\varphi(\underline{\boldsymbol{d}})}{x-d_p} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_p}(d_1,\dots,d_{p-1},d_p+\theta_2(x-d_p),d_{p+1},\dots,d_{n-1},\varphi(\underline{\boldsymbol{d}}))}{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{\boldsymbol{x}},\varphi(\underline{\boldsymbol{d}})+\theta_1(\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})-\varphi(\underline{\boldsymbol{d}})))};$$

ce qui entraîne, du fait que f est de classe C^1 sur $B(\underline{\boldsymbol{a}},\delta)\times]a_n-\alpha,a_n+\alpha[$, φ continue au point $\underline{\boldsymbol{d}}$ et $\partial f/\partial x_n(\underline{\boldsymbol{d}},\varphi(\underline{\boldsymbol{d}}))>0$, que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_p}(\underline{\boldsymbol{d}}) = \lim_{x\to d_p}\frac{\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})-\varphi(\underline{\boldsymbol{d}})}{x-d_p} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_p}(\underline{\boldsymbol{d}},\varphi(\underline{\boldsymbol{d}}))}{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{\boldsymbol{d}},\varphi(\underline{\boldsymbol{d}}))}.$$

Ainsi, se termine la démonstration du théorème des fonctions implicites. ■

13.5.2 Remarque

Si dans l'énoncé du théorème des fonctions implicites, on ne suppose pas que $\partial f/\partial x_n(a)\neq 0$, alors le résultat peut très bien cesser d'être vrai, même si les autres hypothèses sont vérifiées. Par exemple, c'est le cas de la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^2+y^2$ pour $\boldsymbol{a}=(0,0)$.

13.5.3 Exemple

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=1-y\,e^x+x\,e^y$. Puisque $f(0,1)=0$ et $\partial f/\partial y(0,1)=-1$, on sait, grâce au théorème des fonctions implicites, qu'il existe un nombre réel $\delta>0$ et une fonction continûment différentiable $\varphi:]-\delta,\delta[\to\mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes:

- $\varphi(0)=1$;
- pour tout $x\in]-\delta,\delta[: f(x,\varphi(x))=0$.

Par suite, la formule donnée au paragraphe 13.1.15 nous permet d'écrire que

$$\varphi'(0) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)} = -1+e.$$

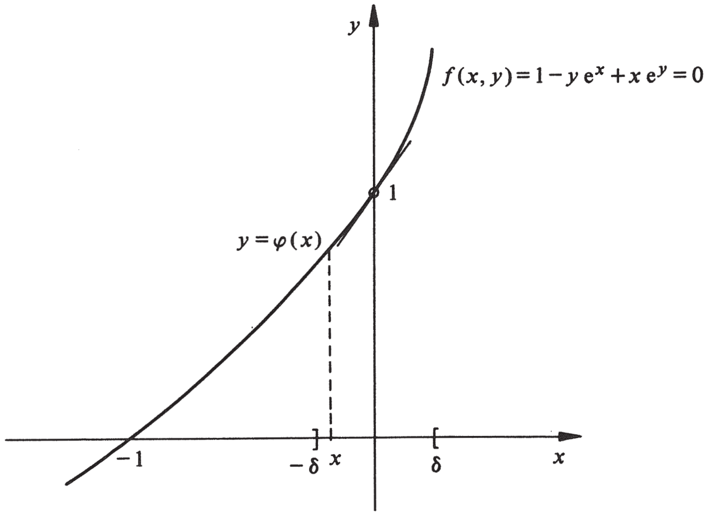


Fig. 13.14

13.5.4 Définition du Jacobien

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{p+n} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ et $f_1, \ldots, f_n : E \to \mathbb{R}$ n fonctions de classe C^1 au voisinage de $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_{p+n})$. Alors, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{p+n}}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{p+1}}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{p+n}}(\boldsymbol{a}) \end{vmatrix}$$

est appelé le *Jacobien* des n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ au point $\boldsymbol{a}$ et est noté

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_{p+1}, \ldots, x_{p+n})}(\boldsymbol{a}).$$

13.5.5 Généralisation du théorème des fonctions implicites

Soit p et n deux entiers positifs, E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{p+n} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ et $f_1, \ldots, f_n : E \to \mathbb{R}$ n fonctions de classe C^1 au voisinage de $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_{p+n})$

telles que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n : f_j(\boldsymbol{a}) = 0$. De plus, on suppose que

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_{p+1}, \ldots, x_{p+n})}(\boldsymbol{a}) \neq 0 .$$

Alors, il existe un nombre réel $\delta > 0$ et n applications $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 où $\underline{\boldsymbol{a}} = (a_1, \ldots, a_p)$ vérifiant les deux propriétés suivantes:

– pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n : \varphi_i(a_1, \ldots, a_p) = a_{p+i}$;
– pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta)$ et tout entier $1 \leqslant j < n$:
$f_j(x_1, \ldots, x_p, \varphi_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_p)) = 0$.

DÉMONSTRATION. Pour établir ce théorème, nous allons raisonner par récurrence sur n (l'entier $p > 0$ étant fixe). Ce théorème ayant été démontré pour $n = 1$ (§ 13.5.1), il nous suffit donc de montrer que s'il est vrai pour $n - 1$ (avec $n > 1$), alors il est vrai pour n. En effet, puisque

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_{p+1}, \ldots, x_{p+n})}(\boldsymbol{a}) \neq 0 ,$$

il existe au moins un entier k compris entre 1 et n pour lequel $\partial f_k / \partial x_{p+n}(\boldsymbol{a}) \neq 0$. Ainsi, en considérant les n fonctions auxiliaires $h_1, \ldots, h_n : E \to \mathbb{R}$ définies par $h_j = f_j$ si $j \neq k$ ou n, $h_k = f_n$ et $h_n = f_k$, on obtient que

$$\frac{\partial h_n}{\partial x_{p+n}}(\boldsymbol{a}) \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{D(h_1, \ldots, h_n)}{D(x_{p+1}, \ldots, x_{p+n})}(\boldsymbol{a}) \neq 0 .$$

Dans la suite, pour simplifier l'écriture, nous utiliserons les notations suivantes:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (x_1, \ldots, x_{p+n-1}) \quad \text{et} \quad (\bar{\boldsymbol{x}}, z) = (x_1, \ldots, x_{p+n-1}, z).$$

Comme $h_n(\boldsymbol{a}) = 0$ et $\partial h_n / \partial x_{p+n}(\boldsymbol{a}) \neq 0$, on sait, d'après le théorème 13.5.1, qu'il existe un nombre réel $\delta_1 > 0$ et une fonction $\varphi : B(\bar{\boldsymbol{a}}, \delta_1) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant les deux propriétés suivantes:

– $a_{p+n} = \varphi(\bar{\boldsymbol{a}})$;
– pour tout $\bar{\boldsymbol{x}} \in B(\bar{\boldsymbol{a}}, \delta_1) : h_n(\bar{\boldsymbol{x}}, \varphi(\bar{\boldsymbol{x}})) = 0$;

ce qui implique, entre autres (§ 13.1.14), que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n - 1$:

$$\frac{\partial h_n}{\partial x_{p+j}}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial h_n}{\partial x_{p+n}}(\boldsymbol{a}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_{p+j}}(\bar{\boldsymbol{a}}) = 0. \tag{13.6}$$

Considérons à présent les $n - 1$ fonctions $g_1, \ldots, g_{n-1} : B(\bar{\boldsymbol{a}}, \delta_1) \to \mathbb{R}$ définies par $g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) = h_i(\bar{\boldsymbol{x}}, \varphi(\bar{\boldsymbol{x}}))$. Alors, en posant pour tout couple d'entiers $1 \leqslant i, j \leqslant n - 1$:

$$\beta_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_{p+j}}(\bar{\boldsymbol{a}}) = \frac{\partial h_i}{\partial x_{p+j}}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial h_i}{\partial x_{p+n}}(\boldsymbol{a}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_{p+j}}(\bar{\boldsymbol{a}}),$$

on obtient que

$$\frac{D(g_1, \ldots, g_{n-1})}{D(x_{p+1}, \ldots, x_{p+n-1})}(\bar{a}) = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n-11} & \cdots & \beta_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{D(h_1, \ldots, h_{n-1})}{D(x_{p+1}, \ldots, x_{p+n-1})}(a) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{p+1}}(\bar{a}) \cdot \frac{D(h_1, \ldots, h_{n-1})}{D(x_{p+n}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+n-1})}(a)$$

$$+ \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{p+n-1}}(\bar{a}) \cdot \frac{D(h_1, \ldots, h_{n-1})}{D(x_{p+1}, \ldots, x_{p+n-2}, x_{p+n})}(a);$$

ce qui donne, en utilisant les relations (13.6), que

$$\frac{\partial h_n}{\partial x_{p+n}}(a) \cdot \frac{D(g_1, \ldots, g_{n-1})}{D(x_{p+1}, \ldots, x_{p+n-1})}(\bar{a})$$

$$= \frac{\partial h_n}{\partial x_{p+n}}(a) \cdot \frac{D(h_1, \ldots, h_{n-1})}{D(x_{p+1}, \ldots, x_{p+n-1})}(a)$$

$$- \frac{\partial h_n}{\partial x_{p+1}}(a) \cdot \frac{D(h_1, \ldots, h_{n-1})}{D(x_{p+n}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+n-1})}(a) - \ldots$$

$$- \frac{\partial h_n}{\partial x_{p+n-1}}(a) \cdot \frac{D(h_1, \ldots, h_{n-1})}{D(x_{p+1}, \ldots, x_{p+n-2}, x_{p+n})}(a)$$

$$= \frac{D(h_1, \ldots, h_n)}{D(x_1, \ldots, x_{p+n})}(a) \neq 0 .$$

De ce résultat, on déduit immédiatement que

$$\frac{D(g_1, \ldots, g_{n-1})}{D(x_{p+1}, \ldots, x_{p+n-1})}(\bar{a}) \neq 0.$$

Ainsi, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on peut affirmer qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$ et $n-1$ fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} : B(\underline{a}, \delta) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant les deux propriétés suivantes:

- pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n-1 : \varphi_i(a_1, \ldots, a_p) = a_{p+i}$;
- pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in B(\underline{a}, \delta)$ et tout entier $1 \leqslant j \leqslant n-1$:
  $g_j(x_1, \ldots, x_p, \varphi_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_p)) = 0$.

Par suite, en désignant par $\varphi_n : B(\underline{a}, \delta) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi_n(x_1, \ldots, x_p) = \varphi(x_1, \ldots, x_p, \varphi_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_p)),$$

on obtient que les n applications $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : B(\underline{a}, \delta) \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1 et qu'elles possèdent les propriétés demandées. D'où le théorème. ■

13.5.6 Extrema liés – Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Soit p et n deux entiers positifs, E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{p+n} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ et $f, g_1, ..., g_n : E \to \mathbb{R}$ $n+1$ fonctions de classe C^1 au voisinage de $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_p, a_{p+1}, ..., a_{p+n})$ telles que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n : g_j(\boldsymbol{a}) = 0$. De plus, on suppose que

$$\frac{D(g_1, ..., g_n)}{D(x_{p+1}, ..., x_{p+n})}(\boldsymbol{a}) \neq 0,$$

et soit

$$E_1 = \bigcap_{j=1}^{n} \{\boldsymbol{x} \in E : g_j(\boldsymbol{x}) = 0\}.$$

Alors, pour que la restriction de la fonction f à E_1 atteigne un extremum local au point $\boldsymbol{a}$ il faut qu'il existe n nombres réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n+p$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{a})\right) = 0.$$

Par définition, les n nombres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont appelés les *multiplicateurs de Lagrange.*

DÉMONSTRATION. Pour commencer, nous supposerons que l'entier k est compris entre 1 et p. Les hypothèses du théorème des fonctions implicites (§ 13.5.5) étant vérifiées pour les fonctions $g_1, ..., g_n$, il existe donc un nombre réel $\delta > 0$ ainsi que n applications

$$\varphi_1, ..., \varphi_n : B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta) \to \mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ où } \underline{\boldsymbol{a}} = (a_1, ..., a_p)$$

possédant les deux propriétés suivantes:

- pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n : \varphi_i(a_1, ..., a_p) = a_{p+i}$;
- pour tout $(x_1, ..., x_p) \in B(\underline{\boldsymbol{a}}, \delta)$ et tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$g_j(x_1, ..., x_p, \varphi_1(x_1, ..., x_p), ..., \varphi_n(x_1, ..., x_p)) = 0;$$

ce qui nous permet d'écrire, entre autres, que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_{p+i}}(\boldsymbol{a}) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(\underline{\boldsymbol{a}})\right) = 0. \tag{13.7}$$

Par suite, puisque

$$\frac{D(g_1, ..., g_n)}{D(x_{p+1}, ..., x_{p+n})}(\boldsymbol{a}) \neq 0,$$

la matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_{p+1}}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_{p+n}}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial x_{p+1}}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial x_{p+n}}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

est inversible. Ainsi, en désignant par

$$\begin{pmatrix} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{n1} & \cdots & \mu_{nn} \end{pmatrix}$$

la matrice inverse, on obtient que pour tout couple d'entiers $1 \leqslant r, s \leqslant n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\mu_{ri} \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_{p+s}}(a) \right) = \delta_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{si } r = s \\ 0 & \text{si } r \neq s. \end{cases} \tag{13.8}$$

De plus, des relations (13.7) on déduit que pour tout entier $1 \leqslant r \leqslant n$:

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_k}(\underline{a}) = -\sum_{i=1}^{n} \left(\mu_{ri} \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(a) \right). \tag{13.9}$$

Considérons à présent la fonction auxiliaire $h : B(\underline{a}, \delta) \to \mathbb{R}$ définie par $h(x_1, ..., x_p) = f(x_1, ..., x_p, \varphi_1(x_1, ..., x_p), ..., \varphi_n(x_1, ..., x_p))$. Puisque la restriction de f à E_1 atteint un extremum local au point a, on peut affirmer que h atteint un extremum local au point $\underline{a}$; ce qui entraîne (§ 13.4.4) que

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(\underline{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{p+r}}(a) \cdot \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_k}(\underline{a}) \right) = 0$$

ou encore, en utilisant (13.9), que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{p+r}}(a) \cdot \left(-\sum_{i=1}^{n} \left(\mu_{ri} \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(a) \right) \right) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_k}(a) \cdot \left(-\sum_{r=1}^{n} \left(\mu_{ri} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_{p+r}}(a) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Ainsi, en posant pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\lambda_i = -\sum_{r=1}^{n} \left(\mu_{ri} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_{p+r}}(a) \right),$$

on obtient finalement que

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(a) \right) = 0.$$

Supposons à présent que l'entier k soit compris entre $p+1$ et $p+n$. Alors, en utilisant (13.8), on peut écrire que

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)+\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i\cdot\frac{\partial g_i}{\partial x_k}(a)\right)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_k}(a)\cdot\left(-\sum_{r=1}^{n}\left(\mu_{ri}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_{p+r}}(a)\right)\right)\right)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)-\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{p+r}}(a)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_{ri}\cdot\frac{\partial g_i}{\partial x_k}(a)\right)\right)\right)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)-\sum_{r=1}^{n}\left(\delta_{rk-p}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_{p+r}}(a)\right)$$

$$=0.$$

D'où le résultat. ∎

13.5.7 Exemple

On se propose de démontrer que pour tout n-tuple $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ de nombres réels positifs

$$\sqrt[n]{\alpha_1 \dots \alpha_n} \leqslant \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n}.$$

Autrement dit, que la moyenne géométrique d'un nombre fini d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ n'est jamais supérieure à la moyenne arithmétique de ces mêmes nombres. En effet, soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ un n-tuple quelconque de nombres réels positifs et soit $f, g : E = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, ..., x_n \geqslant 0\} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par $f(x_1, ..., x_n) = \sqrt[n]{x_1, \dots x_n}$ et $g(x_1, ..., x_n) = x_1 + \dots + x_n - \beta$ où $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Comme $E_1 = \{(x_1, ..., x_n) \in E : g(x_1, ..., x_n) = 0\}$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et que f est continue, il existe au moins un élément $a = (a_1, ..., a_n)$ de E_1 où la restriction de f à E_1 atteint son maximum (§ 12.3.18). D'autre part, en constatant que $(\beta/n, ..., \beta/n) \in E_1$ et que $f(\beta/n, ..., \beta/n) > 0$, on peut affirmer que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n : a_j > 0$. Comme de plus $\partial g/\partial x_n(a_1, ..., a_n) = 1$, la méthode des multiplicateurs de Lagrange nous assure l'existence d'un nombre réel λ tel que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)+\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(a) = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}{a_1} + \lambda = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)+\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x_n}(a) = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}{a_n} + \lambda = 0. \end{cases}$$

Ainsi, en résolvant ce système et en tenant compte de l'égalité $a_1 + \dots + a_n = \beta$, on obtient immédiatement que

$$a_1 = \ldots = a_n = \frac{\beta}{n}.$$

Finalement, puisque $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_1$, on peut écrire que

$$\sqrt[n]{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = f(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant f(\boldsymbol{a}) = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = \frac{\beta}{n} = \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n}.$$

13.6 EXERCICES

13.6.1 Calculer

$$\lim_{x \to 0} \int_0^x \frac{(x-t)\, e^{-t^2}}{\sin^2 x}\, \mathrm{d}t.$$

13.6.2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (t-x)^2 f(t)\, \mathrm{d}t}{x^3}.$$

13.6.3 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{Log}(|x| + |y|) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est de classe C^1.

13.6.4 Soit $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ trois fonctions de classe C^2. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{g(x)} k(t, h(x))\, \mathrm{d}t$$

est de classe C^2 en calculant f' et f''.

13.6.5 En effectuant le changement de variables $u = x - y$ et $v = x + y$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui sont solutions de l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

13.6.6 En effectuant le changement de variables $u = x$, $v = y - x$ et $w = z - x$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui sont solutions de l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0\,.$$

13.6.7 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ et $f: E \to \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré α qui soit de classe C^2. Montrer que pour tout $(x,y) \in E$:

$$\alpha(\alpha-1)f(x,y) = x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)+y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,.$$

13.6.8 En effectuant le changement de variables $x=u$ et $y=uv$, trouver toutes les fonctions $f: \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}\to\mathbb{R}$ de classe C^2 qui sont solutions de l'équation aux dérivées partielles:

$$x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)+y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0\,.$$

13.6.9 En utilisant les exercices 13.6.7 et 13.6.8, trouver toutes les fonctions $f: \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}\to\mathbb{R}$ qui sont homogènes de degré 1 et de classe C^2.

13.6.10 Soit a, b et c trois constantes vérifiant $a \neq 0$ et $b^2-ac>0$. En posant

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}$$

et en effectuant le changement de variables $u=\alpha x+y$ et $v=\beta x+y$, trouver toutes les fonctions $f: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^2 qui sont solutions de l'équation aux dérivées partielles:

$$a\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2b\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)+c\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0\,.$$

13.6.11 (*Laplacien en coordonnées polaires*). Soit $f: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $g: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $g(r,\theta)=f(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta)$. Montrer que pour tout couple (r,θ) de $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)+\frac{1}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\,.\end{aligned}$$

13.6.12 (*Laplacien en coordonnées cylindriques*). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(r,\theta,z) = f(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z)$. Montrer que pour tout $(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\sin\theta, r\sin\theta, z)\\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(r\sin\theta, r\sin\theta, z)\\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta,z) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta,z) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,z)\\ &\quad + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(r,\theta,z).\end{aligned}$$

13.6.13 (*Laplacien en coordonnées sphériques*). Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(r,\beta,\theta) = f(x = r\sin\beta\cos\theta, y = r\sin\beta\sin\theta, z = r\cos\beta)$. Montrer que pour tout $(r,\beta,\theta) \in \mathbb{R}^* \times \{t \in \mathbb{R} : t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\Delta f(r\sin\beta\cos\theta, r\sin\beta\sin\theta, r\cos\beta) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\sin\beta\cos\theta, r\sin\beta\sin\theta, r\cos\beta)\\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\sin\beta\cos\theta, r\sin\beta\sin\theta, r\cos\beta)\\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(r\sin\beta\cos\theta, r\sin\beta\sin\theta, r\cos\beta)\\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\beta,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \beta^2}(r,\beta,\theta) + \frac{1}{r^2\sin^2\beta}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\beta,\theta)\\ &\quad + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\beta,\theta) + \frac{\operatorname{cotg}\beta}{r^2}\frac{\partial g}{\partial \beta}(r,\beta,\theta).\end{aligned}$$

13.6.14 Ecrire la formule de Taylor (§ 13.2.11) pour $n = 3$.

13.6.15 Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ et δ un nombre réel positif. Trouver toutes les fonctions harmoniques $f : \overline{B(\boldsymbol{a},\delta)} \to \mathbb{R}$ qui s'annulent sur le bord $\partial B(\boldsymbol{a},\delta)$.

13.6.16 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $f_1, \ldots, f_n : E \to \mathbb{R}$ n fonctions de classe C^1 au voisinage de $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ telles que

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(\boldsymbol{a}) \neq 0.$$

Montrer qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$ et n applications $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : B(\boldsymbol{b},\delta) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 où $\boldsymbol{b} = (f_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, f_n(a_1, \ldots, a_n))$ vérifiant les deux propriétés suivantes:

– pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$: $\varphi_i(\boldsymbol{b}) = a_i$;
– pour tout $(y_1, ..., y_n) \in B(\boldsymbol{b}, \delta)$ et tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$:
$f_j(x_1 = \varphi_1(y_1, ..., y_n), ..., x_n = \varphi_n(y_1, ..., y_n)) = y_j$.

13.6.17 Soit $a < b$ et $c < d$ quatre éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et supposons que pour $(x, y) \in]a, b[\times]c, d[$, la forme différentielle $M(x, y) + N(x, y)\, y' = 0$ soit exacte.

1) Montrer que pour tout $(x, y) \in]a, b[\times]c, d[$:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \chi}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

où χ est la fonction définie au paragraphe 13.3.2.

2) En déduire qu'il existe deux fonctions continûment différentiables $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ et $g :]c, d[\to \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in]a, b[\times]c, d[$:

$$\chi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y)\, \mathrm{d}t + g(y) = \int_{y_0}^{y} N(x, t)\, \mathrm{d}t + f(x)$$

où $(x_0, y_0) \in]a, b[\times]c, d[$.

13.6.18 Résoudre les deux formes différentielles exactes suivantes:

1) $2x + e^x y + (e^x - 2y)\, y' = 0$ pour $]-\infty, +\infty[\times]-\infty, +\infty[$;
2) $\operatorname{Arctg}(y/x) + \operatorname{Log}\sqrt{x^2 + y^2}\, y' = 0$ pour $]0, +\infty[\times]-\infty, +\infty[$.

13.6.19

1) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 de sorte que la forme différentielle

$$(y^2 + 1) \sin x + f(x)\, y y' = 0$$

soit exacte.

2) Parmi toutes ces fonctions, déterminer celle qui satisfait la condition initiale $f(0) = 4$.
3) Pour cette fonction particulière, résoudre la forme différentielle.

13.6.20 Pour $(x, y) \in]0, +\infty[\times]-\infty, +\infty[$, résoudre la forme différentielle

$$x^2 - 3y^2 + 2xyy' = 0.$$

(Indication: faire le changement de variable $u = y/x$).

13.6.21 Pour $(x, y) \in]-\infty, +\infty[\times]0, +\infty[$, résoudre la forme différentielle

$$-2xy + (y^2 + x^2 + 3)\, y' = 0$$

sachant qu'il existe un facteur intégrant ne dépendant que de y.

13.6.22 Pour $(x, y) \in]0, +\infty[\times]-\infty, +\infty[$, résoudre la forme différentielle

$$(x^4 + y^2) + xy(x^2 - 1)\, y' = 0$$

sachant qu'il existe un facteur intégrant ne dépendant que de x.

13.6.23 Pour $(x,y) \in]-\infty, +\infty[\times]0, +\infty[$, résoudre la forme différentielle

$$x(2\sqrt{x^2+y^2}+1)+yy' = 0$$

au moyen d'un facteur intégrant fonction de x^2+y^2.

13.6.24 Pour $(x,y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, résoudre la forme différentielle

$$(-y^3+xy^2+x^2y)+x(y^2+xy-x^2)y' = 0$$

au moyen d'un facteur intégrant fonction de xy.

13.6.25 Soit $M,N: E =]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions homogènes de degré α et de classe C^1 telles que pour tout $(x,y) \in E: xM(x,y)+yN(x,y) \neq 0$.

1) En utilisant le théorème d'Euler (§ 13.1.23), montrer que la fonction $\mu: E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xM(x,y)+yN(x,y)}$$

est un facteur intégrant de la forme différentielle $M(x,y)+N(x,y)y'=0$.

2) Pour $(x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, résoudre la forme différentielle

$$\sqrt{xy}+xy' = 0.$$

13.6.26 Soit $p,f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continûment différentiables et m un entier strictement supérieur à 1.

1) Montrer qu'il existe une fonction $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de sorte que l'application $\mu:]-\infty,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\mu(x,y) = y^{-m}h(x)$ soit un facteur intégrant de la forme différentielle

$$(p(x)y-f(x)y^m)+y' = 0.$$

2) Résoudre cette équation pour la condition initiale $y(x_0) = y_0 > 0$, et comparer la solution avec celle obtenue au paragraphe 9.1.7.

3) En déduire la solution de l'équation de Bernoulli

$$y'+y = xy^3$$

pour la condition initiale $y(0) = \sqrt{2}$.

13.6.27 Trouver les extrema de la fonction $f: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 1\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}.$$

13.6.28 Trouver les extrema de la fonction $f: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant x\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x+y}.$$

13.6.29 Déterminer les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \cos x + \cos y + \sin(x+y).$$

13.6.30 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1.$$

En quels points de $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 3\}$, la fonction f atteint-elle son maximum ou son minimum?

13.6.31 Trouver les points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = y^3 + x^2 - 4xy + 3y^2$$

et étudier leur nature.

13.6.32 Trouver les points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = y^2 + y\cos x - \sin x - 2$$

et étudier leur nature.

13.6.33 Comment faut-il choisir le nombre réel α de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{1 + \alpha^2 x^2 + y^2}$$

possède un minimum local au point $(0,0)$?

13.6.34 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Trouver les extrema de f sous la condition $3x^2 + 2xy + 5y^2 - 72 = 0$.

13.6.35 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Trouver les extrema de f sous la condition $5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 1 = 0$.

13.6.36 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Déterminer le minimum de f sous les deux conditions $x + y + z = 1$ et $xy = 1$.

13.6.37 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = xyz.$$

Trouver les extrema de f sous les deux conditions $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ et $1 - 2\sin(x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

13.6.38 Minimiser la distance de P_1 à P_2 où P_1 est un point de l'ellipsoïde d'équation $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 8 = 0$ et P_2 un point du plan d'équation $x + y + z - 10 = 0$.

13.6.39 Trouver les valeurs extrêmes de z sur la surface d'équation

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12xy + 4xz - 35 = 0.$$

13.6.40 Déterminer les axes de l'ellipse d'équation $2x^2 + xy + 2y^2 - 1 = 0$.

13.6.41 Trouver les axes de l'ellipse déterminée par l'intersection du cylindre d'équation $x^2 + y^2 - 4 = 0$ et du plan d'équation $x + y + 2z - 2 = 0$.

13.6.42 Déterminer parmi les triangles rectangles ayant la même aire, celui qui a la plus petite hypoténuse.

13.6.43 Déterminer à l'intérieur d'un triangle dont l'aire est connue, le point dont le produit des distances aux trois côtés est maximum.

13.6.44 Déterminer parmi les triangles ayant le même périmètre $2p$, celui dont l'aire est maximale.

14. Intégrales multiples

14.1 INTÉGRALE DOUBLE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN RECTANGLE FERMÉ

14.1.1 Introduction

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre nombres réels et $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, les deux fonctions $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ et $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

et

$$h(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

sont continues (§ 12.3.20). Ainsi, les deux nombres

$$\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

et

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

sont bien définis. Montrons à présent qu'ils sont égaux.

14.1.2 Théorème de Fubini pour les rectangles

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre nombres réels et $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,.$$

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Puisque la fonction $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ est continue, elle est uniformément continue sur $[a,b] \times [c,d]$ (§ 12.3.18); ce qui implique l'existence d'une subdivision (§ 7.1.1) de $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = b$ et d'une subdivision de $[c,d]$: $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_p = d$ telles que pour tout couple d'entiers $1 \leqslant i, j \leqslant p$:

$$M_{ij} - m_{ij} \leqslant \epsilon$$

où

$$M_{ij} = \max_{(x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f(x,y)$$

et

$$m_{ij} = \min_{(x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f(x,y).$$

Considérons à présent la fonction $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

En constatant que pour tout $y \in [c,d]$:

$$g(y) = \sum_{i=1}^{p} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

et que

$$\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{j=1}^{p} \int_{y_{j-1}}^{y_j} g(y)\,\mathrm{d}y,$$

on peut écrire

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \sum_{j=1}^{p} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\sum_{i=1}^{p} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

ou encore

$$\sum_{i,j=1}^{p} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \leqslant \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{p} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

De façon analogue, on a:

$$\sum_{i,j=1}^{p} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \leqslant \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{p} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Ainsi,

$$\left| \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y - \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \right|$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{p} (M_{ij} - m_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \leqslant \epsilon(b-a)(d-c).$$

Ce résultat étant valable quel que soit le nombre réel $\epsilon > 0$, on peut donc conclure que

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x .$$

D'où le théorème de Fubini. ∎

14.1.3 Définition de l'intégrale double d'une fonction continue sur un rectangle

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre nombres réels et $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, le nombre réel

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

est appelé l'*intégrale double* de la fonction f sur le rectangle fermé $D = [a,b] \times [c,d]$, et est noté $I_D(f)$.

Par convention, on écrira:

$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$$

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

et

$$I_D(f) = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

14.1.4 Exemple

Soit $D = [0,\pi] \times [0,1]$ et $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $f(x,y) = x \sin xy$. Alors,

$$I_D(f) = \int_0^\pi \mathrm{d}x \int_0^1 x \sin xy\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi (1 - \cos x)\,\mathrm{d}x = (x - \sin x)\Big|_0^\pi = \pi.$$

14.1.5 Aire d'un rectangle fermé

Soit $a<b$ et $c<d$ quatre nombres réels et D le rectangle fermé $[a,b]\times[c,d]$. Puisque

$$\iint_D 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d \mathrm{d}y = (b-a)(d-c).$$

on peut écrire

$$\text{Aire}\,(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

14.1.6 Linéarité de l'intégrale double

Soit $a<b$ et $c<d$ quatre nombres réels et $f,g : D=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors, pour tout couple de nombres réels α et β, on a :

$$\iint_D (\alpha f+\beta g)(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \beta\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

DÉMONSTRATION. La linéarité de l'intégrale simple (§ 7.1.18) nous permet d'écrire que pour tout $y\in[c,d]$:

$$\int_a^b (\alpha f+\beta g)(x,y)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x,y)\,\mathrm{d}x$$

et que

$$\begin{aligned}\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b (\alpha f+\beta g)(x,y)\,\mathrm{d}x &= \int_c^d \left(\alpha\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= \alpha\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x + \beta\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b g(x,y)\,\mathrm{d}x. \;\blacksquare\end{aligned}$$

14.1.7 Intégrale double de la valeur absolue d'une fonction

Soit $a<b$ et $c<d$ quatre nombres réels et $f : D=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

DÉMONSTRATION. En effet, ce résultat étant vrai pour les intégrales simples (§ 7.1.20 et 7.1.21), on peut écrire

$$\begin{aligned}\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| &= \left|\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant \int_c^d \left|\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}y \\ &\leqslant \int_c^d \left(\int_a^b |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

14.1.8 Propriétés de l'intégrale double d'une fonction positive ou nulle

Soit $a<b$ et $c<d$ quatre nombres réels et $f: D=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout élément (x,y) de D, on ait : $f(x,y)\geqslant 0$. Alors,

– $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant 0$;

– $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$ si et seulement si $f(x,y) = 0$ pour tout $(x,y)\in D$.

DÉMONSTRATION. Les propriétés de l'intégrale simple d'une fonction positive ou nulle (§ 7.1.19) nous autorisent à écrire que pour tout $y\in[c,d]$:

$$\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

et que

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \geqslant 0.$$

Supposons à présent que

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0;$$

ce qui entraîne (§ 7.1.19) que pour tout $y\in[c,d]$:

$$\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Il s'ensuit que pour tout $(x,y)\in D$: $f(x,y)=0$. La réciproque est évidente. $\blacksquare$

14.1.9 Corollaire

Soit $a<b$ et $c<d$ quatre nombres réels et $f,g: D=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout élément (x,y) de D, on ait : $f(x,y)\leqslant g(x,y)$. Alors,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction auxiliaire $h: D\to\mathbb{R}$ définie par $h(x,y)=g(x,y)-f(x,y)$. Ainsi, en constatant que pour tout $(x,y)\in D: h(x,y)\geqslant 0$, on obtient (§ 14.1.6 et 14.1.8) que

$$0 \leqslant \iint_D h(x,y)\,dx\,dy = \iint_D (g-f)(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_D g(x,y)\,dx\,dy - \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

ou encore

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$$ ■

14.1.10 Théorème de la moyenne

Soit $a<b$ et $c<d$ quatre nombres réels et $f: D=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, il existe un élément (x_0,y_0) de D tel que

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(x_0,y_0)\cdot \text{Aire}(D).$$

DÉMONSTRATION. D'une part, puisque la fonction f est continue et que D est compact, les deux nombres réels $m=\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ et $M=\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ existent (§ 12.3.18); ce qui entraîne (corollaire 14.1.9) que

$$m\cdot\text{Aire}(D) \leqslant \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leqslant M\cdot \textit{Aire}\,(D)$$

ou encore

$$m \leqslant \frac{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{\text{Aire}\,(D)} \leqslant M.$$

D'autre part, comme D est aussi connexe par arcs, la fonction f atteint toute valeur comprise entre m et M (§ 12.3.19). Par conséquent, il existe un élément (x_0,y_0) de D pour lequel

$$\frac{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{\text{Aire}\,(D)} = f(x_0,y_0).$$

D'où le théorème de la moyenne. ■

14.2. INTÉGRALE DOUBLE D'UNE FONCTION CONTINUE ET BORNÉE SUR UN SOUS-ENSEMBLE OUVERT BORNÉ DE $\mathbb{R}^2$

14.2.1 Définition d'un ensemble dénombrable

Un ensemble non vide A est dit *dénombrable* s'il existe une injection de A dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

Il résulte de cette définition qu'un ensemble dénombrable peut être fini ou infini.

14.2.2 Propriété des ensembles infinis dénombrables

Soit A un ensemble infini dénombrable. Alors, il existe une bijection de A dans $\mathbb{N}$.

Cette propriété implique, entre autres, que les éléments de tout ensemble infini dénombrable A peuvent être numérotés par l'ensemble $\mathbb{N}$ tout entier. En d'autres termes, que A peut s'écrire sous la forme $A = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

DÉMONSTRATION. D'une part, puisque A est dénombrable, il existe une injection φ_1 de A dans $\mathbb{N}$. D'autre part, comme A est infini, $\varphi_1(A)$ est un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$; ce qui nous permet de définir la bijection $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \varphi_1(A)$ en posant

$$\varphi_2(k) = \min\{r \in \varphi_1(A) : r \neq \varphi_2(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant k-1\}$$

et

$$\varphi_2(0) = \min_{a \in A} \varphi_1(a).$$

Ainsi, l'application composée $\varphi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ est une bijection de A dans $\mathbb{N}$. ■

14.2.3 Sous-ensemble d'un ensemble dénombrable

Soit A un ensemble dénombrable et B un sous-ensemble non vide de A. Alors, B est dénombrable.

DÉMONSTRATION. Désignons par I_B l'injection canonique de B dans A (c'est-à-dire telle que pour tout $b \in B : I_B(b) = b$) et par φ l'injection de A dans $\mathbb{N}$. Alors, l'application composée $\varphi \circ I_B$ est une injection de B dans $\mathbb{N}$. ■

14.2.4 Dénombrabilité de l'ensemble $\mathbb{N}^2$

L'ensemble $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer que la fonction $\beta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par (fig. 14.1)

$$\beta(r,s) = \frac{(r+s)(r+s+1)}{2} + s$$

est injective. En effet, soit (r_1, s_1) et (r_2, s_2) deux éléments distincts de $\mathbb{N}^2$. Alors, si $k = r_1 + s_1 < r_2 + s_2$, on obtient que $s_1 \leqslant k$ et que

$$\beta(r_1, s_1) = \frac{k(k+1)}{2} + s_1 < \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$< \frac{(r_2+s_2)(r_2+s_2+1)}{2} \leqslant \frac{(r_2+s_2)(r_2+s_2+1)}{2} + s_2 = \beta(r_2, s_2).$$

De même, si $r_1 + s_1 > r_2 + s_2$, on démontre que $\beta(r_1, s_1) > \beta(r_2, s_2)$. Supposons pour finir que $r_1 + s_1 = r_2 + s_2$. Alors, $\beta(r_1, s_1) - \beta(r_2, s_2) = s_1 - s_2$; ce qui implique, puisque $(r_1, s_1) \neq (r_2, s_2)$, que $\beta(r_1, s_1) \neq \beta(r_2, s_2)$. D'où l'injectivité de β. ∎

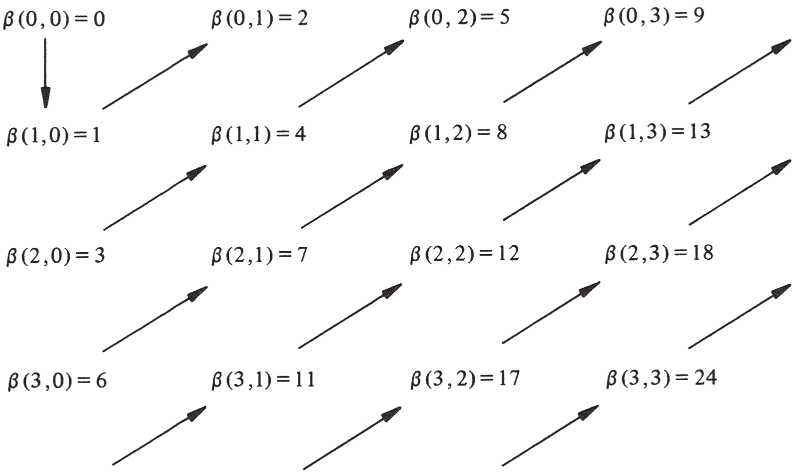


Fig. 14.1

14.2.5 Corollaire

Toute réunion d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

DÉMONSTRATION. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable d'ensembles dénombrables. Alors, I est dénombrable et tous les A_i sont dénombrables. Désignons par g l'injection de I dans $\mathbb{N}$ et par h_i l'injection de A_i dans $\mathbb{N}$. Posons $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ et soit $\varphi : A \to \mathbb{N}^2$ l'injection définie par $\varphi(a) = (g(i(a)), h_{i(a)}(a))$ où $i(a)$ est l'unique élément de I tel que $g(i(a)) = \min \{g(i) : i \in I, a \in A_i\}$. Pour conclure, il suffit de constater que l'application composée $\beta \circ \varphi : A \to \mathbb{N}$ (où β est l'injection définie au § 14.2.4) est injective. ∎

14.2.6 Corollaire

Soit A_1 et A_2 deux ensembles dénombrables. Alors, l'ensemble $A_1 \times A_2$ est dénombrable.

DÉMONSTRATION. Désignons par φ_1 l'injection de A_1 dans $\mathbb{N}$ et par φ_2 l'injection de A_2 dans $\mathbb{N}$. Alors, la fonction $\varphi : A_1 \times A_2 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $\varphi(x,y) = (\varphi_1(x), \varphi_2(y))$ est injective; ce qui entraîne que l'application composée $\beta \circ \varphi : A_1 \times A_2 \to \mathbb{N}$ (où β est l'injection définie au § 14.2.4) est injective. ■

14.2.7 Exemple

Puisque la fonction $\varphi_1 : A_1 = \{x/y : x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}^*, pgcd(x,y) = 1\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $\varphi_1(x/y) = (x,y)$ est injective, et que la fonction $\varphi_2 : A_2 = \{-x/y : x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}^*, pgcd(x,y) = 1\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par $\varphi_2(-x/y) = (x,y)$ est aussi injective, les deux fonctions composées $\beta \circ \varphi_1 : A_1 \to \mathbb{N}$ et $\beta \circ \varphi_2 : A_2 \to \mathbb{N}$ (où β est l'injection définie au § 14.2.4) sont injectives. Par suite, la dénombrabilité des deux ensembles A_1 et A_2 entraîne celle de l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = A_1 \cup A_2 \cup \{0\}$ (corollaire 14.2.5) qui entraîne elle-même celle de l'ensemble produit $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (corollaire 14.2.6). Il en résulte immédiatement (§ 14.2.3) que $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est aussi dénombrable.

14.2.8 Définition d'une famille de rectangles quasi-disjoints

Un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ est appelé un *rectangle* s'il existe deux intervalles bornés I_1 et I_2 de $\mathbb{R}$ vérifiant $\overset{\circ}{I_1} \neq \phi$ et $\overset{\circ}{I_2} \neq \phi$ tels que $D = I_1 \times I_2$.

Nous dirons que $(D_i)_{i \in I}$ est une famille de rectangles *quasi-disjoints* si pour tout couple d'éléments $i \neq j$ de I : $\overset{\circ}{D_i} \cap \overset{\circ}{D_j} = \phi$.

14.2.9 Propriété des rectangles de $\mathbb{R}^2$

Tout rectangle de $\mathbb{R}^2$ est la réunion d'une famille dénombrable de rectangles fermés quasi-disjoints.

DÉMONSTRATION. Montrons cette propriété pour les rectangles ouverts (les autres cas se déduisant facilement de ce cas particulier). Pour cela, considérons le rectangle ouvert $E =]a,b[\times]c,d[$ et soit (α_k) et (λ_k) les deux suites numériques définies respectivement par

$$\alpha_k = \sum_{r=1}^{k} \frac{b-a}{2^{r+1}} \quad \text{et} \quad \alpha_0 = 0,$$

$$\lambda_p = \sum_{s=1}^{p} \frac{d-c}{2^{s+1}} \quad \text{et} \quad \lambda_0 = 0.$$

Alors, en posant pour tout couple d'entiers naturels (k,p):

$$A_{k,p} = \left[\frac{b+a}{2} - \alpha_{k+1}, \frac{b+a}{2} - \alpha_k\right] \times \left[\frac{d+c}{2} - \lambda_{p+1}, \frac{d+c}{2} - \lambda_p\right]$$

$$B_{k,p} = \left[\frac{b+a}{2} - \alpha_{k+1}, \frac{b+a}{2} - \alpha_k\right] \times \left[\frac{d+c}{2} + \lambda_p, \frac{d+c}{2} + \lambda_{p+1}\right]$$

$$C_{k,p} = \left[\frac{b+a}{2} + \alpha_k, \frac{b+a}{2} + \alpha_{k+1}\right] \times \left[\frac{d+c}{2} - \lambda_{p+1}, \frac{d+c}{2} - \lambda_p\right]$$

$$D_{k,p} = \left[\frac{b+a}{2} + \alpha_k, \frac{b+a}{2} + \alpha_{k+1}\right] \times \left[\frac{d+c}{2} + \lambda_p, \frac{d+c}{2} + \lambda_{p+1}\right],$$

on obtient que chacun des quatre ensembles suivants:

$$A = \bigcup_{k,p\in\mathbb{N}} A_{k,p} = \left]a, \frac{b+a}{2}\right] \times \left]c, \frac{d+c}{2}\right]$$

$$B = \bigcup_{k,p\in\mathbb{N}} B_{k,p} = \left]a, \frac{b+a}{2}\right] \times \left[\frac{d+c}{2}, d\right[$$

$$C = \bigcup_{k,p\in\mathbb{N}} C_{k,p} = \left[\frac{b+a}{2}, b\right[\times \left]c, \frac{d+c}{2}\right]$$

$$D = \bigcup_{k,p\in\mathbb{N}} D_{k,p} = \left[\frac{b+a}{2}, b\right[\times \left[\frac{d+c}{2}, d\right[$$

est la réunion d'une famille dénombrable (§ 14.2.4) de rectangles fermés quasi-disjoints; ce qui entraîne, puisque E est la réunion des quatre rectangles quasi-disjoints A, B, C et D, que E est la réunion d'une famille dénombrable de rectangles fermés quasi-disjoints.

■

14.2.10 Propriété des ouverts non vides de $\mathbb{R}^2$

Tout sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ est la réunion d'une famille infinie dénombrable de rectangles fermés quasi-disjoints.

DÉMONSTRATION. Soit E un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. Pour commencer, supposons que $E = \mathbb{R}^2$. Alors, en constatant que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{k,p\in\mathbb{Z}} ([k,k+1]\times[p,p+1]),$$

on peut affirmer, sans autre, que $\mathbb{R}^2$ est la réunion d'une famille infinie dénombrable (§ 14.2.7) de rectangles fermés quasi-disjoints.

Supposons à présent que $E \neq \mathbb{R}^2$ et désignons par $\{\boldsymbol{q}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ le sous-ensemble infini dénombrable $E \cap \mathbb{Q}^2$ (§ 14.2.2, 14.2.3 et 14.2.7). A chaque $\boldsymbol{q}_j$ associons le nombre $l_j = \operatorname{Sup}\{\delta > 0 : B(\boldsymbol{q}_j, \delta) \subset E\}$. Puisque E est ouvert, $l_j > 0$. Soit K_j le carré ouvert défini par

$$K_j = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - q_{1,j}| < \frac{l_j}{\sqrt{2}}, |y - q_{2,j}| < \frac{l_j}{\sqrt{2}}\right\}$$

où $\boldsymbol{q}_j = (q_{1,j}, q_{2,j})$. Comme pour chaque $j \in \mathbb{N}$: $K_j \subset B(\boldsymbol{q}_j, l_j) \subset E$, on peut écrire

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j \subset E.$$

L'inclusion inverse est aussi vraie. En effet, soit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ un élément quelconque de E. D'une part, puisque E est ouvert, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que $B(\boldsymbol{x}, \alpha) \subset E$. D'autre part, grâce à la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (§ 1.3.5), il existe un $\boldsymbol{q}_{j_0} = (q_{1,j_0}, q_{2,j_0})$ tel que

$$|x_1 - q_{1,j_0}| < \frac{\alpha}{4} \quad \text{et} \quad |x_2 - q_{2,j_0}| < \frac{\alpha}{4}.$$

Ainsi, en constatant que pour tout $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{q}_{j_0}, \alpha/2)$:

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}_{j_0}\| + \|\boldsymbol{q}_{j_0} - \boldsymbol{y}\| < \alpha,$$

on obtient que

$$B(\boldsymbol{q}_{j_0}, \alpha/2) \subset B(\boldsymbol{x}, \alpha) \subset E.$$

De ce résultat, on déduit immédiatement que $\alpha/2 < l_{j_0}$ ou encore $\alpha/4 < l_{j_0}/\sqrt{2}$; ce qui nous permet d'écrire que $\boldsymbol{x} \in K_{j_0}$. D'où

$$E \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j.$$

On a ainsi démontré que

$$E = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j.$$

Par conséquent (§ 14.2.5 et 14.2.9) E est la réunion d'une famille $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de rectangles fermés. Puisque les éléments de cette famille ne sont pas forcément quasi-disjoints, considérons la nouvelle famille $(E'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définie par

$$E'_i = \{\boldsymbol{z} \in E_i : \boldsymbol{z} \notin E_l,\ 0 \leqslant l \leqslant i-1\} \quad \text{et} \quad E'_0 = E_0.$$

Alors, en posant pour tout $i \in \mathbb{N}$: $F_i = \overline{E'_i}$ (les F_i ne sont pas nécessairement des rectangles), on obtient que

$$E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$$

et que chaque F_i est, soit vide, soit la réunion d'une famille finie de rectangles fermés quasi-disjoints; ce qui entraîne que E est la réunion d'une famille dénombrable de rectangles fermés quasi-disjoints. Par suite, le fait que E soit distinct de ϕ et de $\mathbb{R}^2$, nous permet de conclure que cette famille est infinie (car sinon E serait à la fois ouvert et fermé (§ 11.3.12); ce qui est impossible (§ 11.3.10)). ■

14.2.11 Convergence des séries

Soit D un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^2$, $(D_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une famille de rectangles fermés quasi-disjoints dont la réunion est D et $f: D \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors, la série numérique

$$\sum_{j=0}^{+\infty} I_{D_j}(f)$$

est absolument convergente.

DÉMONSTRATION. Puisque la fonction f est bornée sur D, il existe un nombre réel $M > 0$ tel que pour tout $\boldsymbol{x} \in D$: $|f(\boldsymbol{x})| \leqslant M$. Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on peut écrire (§ 14.1.7 et 14.1.9)

$$|I_{D_j}(f)| = \left| \iint_{D_j} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right| \leqslant \iint_{D_j} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\leqslant M \iint_{D_j} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = M \cdot \text{Aire}\,(D_j).$$

D'autre part, comme D est borné, le nombre réel positif $r = \operatorname{Sup}\{\|\boldsymbol{x}\| : \boldsymbol{x} \in D\}$ existe. D'où

$$D \subset [-2r, 2r] \times [-2r, 2r];$$

ce qui entraîne que pour tout entier $p > 0$:

$$\sum_{j=0}^{p} \text{Aire}\,(D_j) \leqslant 16r^2$$

(car $\bigcup_{j=0}^{p} D_j \subset [-2r, 2r] \times [-2r, 2r]$). Finalement, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{j=0}^{p} |I_{D_j}(f)| \leqslant 16Mr^2;$$

ce qui nous permet de conclure (§ 3.2.6) que la série de terme général $I_{D_j}(f)$ est absolument convergente. ■

14.2.12 Lemme

Soit $D = [a,b] \times [c,d]$ un rectangle fermé et $(D_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de rectangles fermés quasi-disjoints dont la réunion est D. Alors, pour toute fonction $f: D \to \mathbb{R}$ continue, on a :

$$I_D(f) = \sum_{i\in I} I_{D_i}(f).$$

DÉMONSTRATION. Pour commencer, supposons que D soit un rectangle fermé quadrillé (fig. 14.2), à savoir :

$$D = \bigcup_{(r,s)\in I} ([a_r, b_r] \times [c_s, d_s])$$

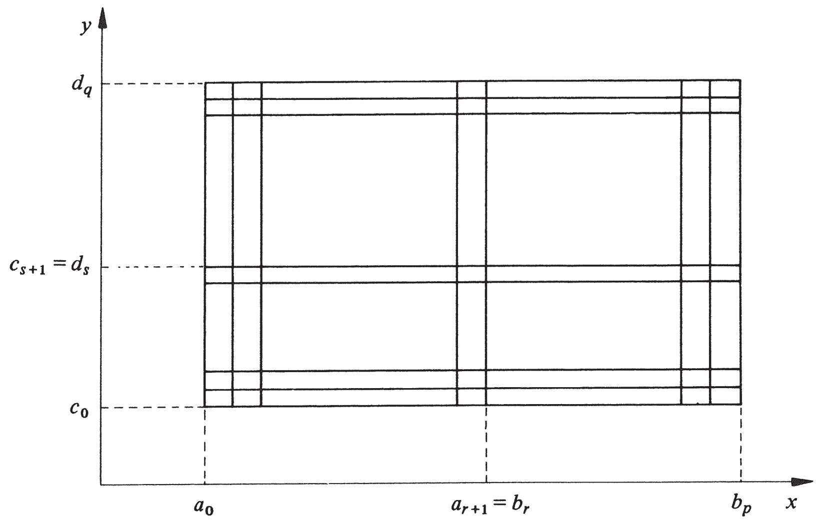


Fig. 14.2

où $I = \{(r,s) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leqslant r \leqslant p, 0 \leqslant s \leqslant q, p,q \in \mathbb{N}\}$ avec pour tout $0 \leqslant r \leqslant p-1$ et tout $0 \leqslant s \leqslant q-1$: $b_r = a_{r+1}$ et $d_s = c_{s+1}$. Ainsi, en utilisant les propriétés des intégrales simples, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
I_D(f) &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_c^d \left(\sum_{r=0}^{p} \int_{a_r}^{b_r} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \sum_{r=0}^{p} \left(\int_c^d \left(\int_{a_r}^{b_r} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) = \sum_{r=0}^{p} \left(\sum_{s=0}^{q} \left(\int_{c_s}^{d_s} \left(\int_{a_r}^{b_r} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \right) \\
&= \sum_{(r,s)\in I} \int_{c_s}^{d_s} \mathrm{d}y \int_{a_r}^{b_r} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \sum_{(r,s)\in I} I_{D_{r,s}}(f)
\end{aligned}
$$

où $D_{r,s} = [a_r, b_r] \times [c_s, d_s]$.

Supposons à présent que

$$
D = \bigcup_{i=0}^{k} ([a_i, b_i] \times [c_i, d_i])
$$

(fig. 14.3) et posons

$$
\{a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_k\} = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_m\} \quad \text{avec} \quad \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_m
$$

et

$$
\{c_0, \ldots, c_k, d_0, \ldots, d_k\} = \{\beta_0, \ldots, \beta_n\} \quad \text{avec} \quad \beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_n .
$$

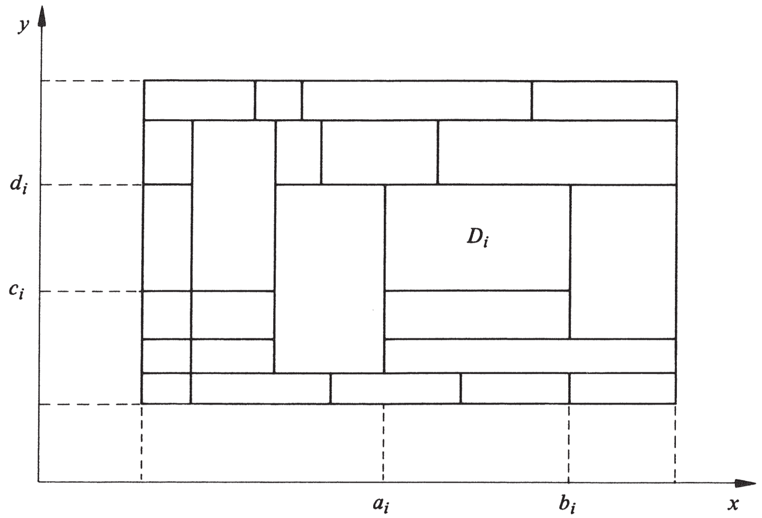


Fig. 14.3

Alors,

$$D = \bigcup_{(r,s)\in J} ([\alpha_r, \alpha_{r+1}] \times [\beta_s, \beta_{s+1}])$$

où $J = \{(r,s) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leqslant r \leqslant m-1, 0 \leqslant s \leqslant n-1\}$. D'une part, en utilisant le résultat concernant les rectangles fermés quadrillés, on sait que

$$I_D(f) = \sum_{(r,s)\in J} I_{D'_{r,s}}(f)$$

où $D'_{r,s} = [\alpha_r, \alpha_{r+1}] \times [\beta_s, \beta_{s+1}]$. D'autre part, à chaque entier $0 \leqslant i \leqslant k$, on peut associer un sous-ensemble J_i de J tel que

$$D_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i] = \bigcup_{(r,s)\in J_i} ([\alpha_r, \alpha_{r+1}] \times [\beta_s, \beta_{s+1}]);$$

ce qui implique, en utilisant de nouveau le résultat concernant les rectangles fermés quadrillés, que

$$I_{D_i}(f) = \sum_{(r,s)\in J_i} I_{D'_{r,s}}(f).$$

Puisque $(D_i)_{i\in I}$ est une famille de rectangles fermés quasi-disjoints dont la réunion est D, la famille $(J_i)_{i\in I}$ est une réunion de sous-ensembles disjoints de J dont la réunion est J. Par conséquent

$$\sum_{i=0}^{k} I_{D_i}(f) = \sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{(r,s)\in J_i} I_{D'_{r,s}}(f) \right) = \sum_{(r,s)\in J} I_{D'_{r,s}}(f).$$

D'où

$$I_D(f) = \sum_{i=0}^{k} I_{D_i}(f).$$

Pour finir la démonstration de ce lemme, il nous faut encore étudier le cas où

$$D = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} ([a_i, b_i] \times [c_i, d_i]).$$

Pour cela, faisons l'hypothèse supplémentaire que $f \geqslant 0$ et posons

$$M = 1 + \operatorname{Sup}\{f(x,y) : (x,y) \in D\}.$$

Puisque la série de terme général $I_{D_i}(f)$ (où $D_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$) est absolument convergente (§ 14.2.11), posons

$$\mu(f) = \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f).$$

Ainsi, du fait que pour tout entier $l \geqslant 0$:

$$\sum_{i=0}^{l} I_{D_i}(f) \leqslant I_D(f)$$

(cette inégalité est une conséquence de ce lemme pour I fini), on obtient, par passage à la limite (§ 2.3.14), que

$$\mu(f) \leqslant I_D(f).$$

Montrons que l'on a aussi l'inégalité inverse. Pour cela, soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Considérons à présent la famille $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de rectangles fermés définie par

$$E_i = [a_i - \lambda_i, b_i + \lambda_i] \times [c_i - \lambda_i, d_i + \lambda_i]$$

où

$$\lambda_i = \min \left\{ \frac{(b_i - a_i) + (d_i - c_i)}{2}, \frac{2^{-i}\epsilon}{4M((b_i - a_i) + (d_i - c_i))} \right\}$$

et soit $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction qui coïncide avec f sur D et telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \hat{f}(x,y) \leqslant M$ (l'existence d'une telle fonction nous est garantie par le théorème de Tietze-Urysohn (§ 12.4.4)). Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_{E_i}(\hat{f}) - I_{D_i}(\hat{f}) &\leqslant M(\operatorname{Aire}(E_i) - \operatorname{Aire}(D_i)) \\ &= 2M\lambda_i((b_i - a_i) + (d_i - c_i) + 2\lambda_i) \leqslant \frac{\epsilon}{2^i}\,; \end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$\mu(f) = \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(\hat{f}) \geqslant \sum_{i=0}^{+\infty} I_{E_i}(\hat{f}) - \epsilon \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i} = \sum_{i=0}^{+\infty} I_{E_i}(\hat{f}) - 2\epsilon.$$

D'autre part, puisque D est compact et que

$$D \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathring{E}_i,$$

on sait, d'après le théorème de Heine-Borel-Lebesgue (§ 11.3.27), qu'il existe un sous-ensemble fini P de $\mathbb{N}$ tel que

$$D \subset \bigcup_{i \in P} \mathring{E}_i.$$

De plus, en constatant que pour tout $i \in P$:

$$I_{E_i}(\hat{f}) \geqslant I_{E_i'}(f)$$

où $E_i' = E_i \cup D$, on peut écrire

$$\sum_{i=0}^{+\infty} I_{E_i}(\hat{f}) \geqslant \sum_{i \in P} I_{E_i}(\hat{f}) \geqslant \sum_{i \in P} I_{E_i'}(f) \geqslant I_D(f)$$

ou encore

$$\mu(f) \geqslant \sum_{i=0}^{+\infty} I_{E_i}(\hat{f}) - 2\epsilon \geqslant I_D(f) - 2\epsilon.$$

Cette inégalité étant valable quel que soit le nombre réel $\epsilon > 0$, on peut donc affirmer que

$$\mu(f) \geqslant I_D(f).$$

On a ainsi démontré que pour toute fonction $f \geqslant 0$:

$$I_D(f) = \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f).$$

Ce résultat s'étend à une fonction f ne satisfaisant pas nécessairement la condition supplémentaire $f \geqslant 0$. En effet, en écrivant f sous la forme $f = (f+A) - A$ où $A = \text{Sup}\,\{|f(x,y)| : (x,y) \in D\}$, on obtient (§ 14.1.6) que

$$\begin{aligned} I_D(f) &= I_D(f+A) - I_D(A) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f+A) - \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(A) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f) + \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(A) \right) - \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f). \end{aligned}$$

D'où le lemme. ■

14.2.13 Corollaire

Soit $D = [a,b] \times [c,d]$ un rectangle fermé et $(D_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable de rectangles fermés quasi-disjoints vérifiant

$$]a,b[\times]c,d[\subset \bigcup_{i \in I} D_i \subset [a,b] \times [c,d].$$

Alors, pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ continue, on a :

$$I_D(f) = \sum_{i \in I} I_{D_i}(f).$$

DÉMONSTRATION. Pour commencer, supposons que I soit finie. Alors,

$$D = \bigcup_{i \in I} D_i ;$$

ce qui entraîne, d'après le lemme 14.2.12, que

$$I_D(f) = \sum_{i \in I} I_{D_i}(f).$$

Supposons à présent que $I = \mathbb{N}$ et faisons l'hypothèse supplémentaire que $f \geqslant 0$. Soit $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui coïncide avec f sur D et telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \hat{f}(x, y) \leqslant M = \operatorname{Sup}\{f(x, y) : (x, y) \in D\}$ (l'existence d'une telle fonction nous est garantie par le théorème de Tietze-Urysohn (§12.4.4)). D'une part, du fait que pour tout nombre réel $\epsilon > 0$ (lemme 14.2.12):

$$I_D(f) \leqslant I_{D_\epsilon}(\hat{f}) \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f) + 2M\epsilon(d-c+2\epsilon) + 2M\epsilon(b-a)$$

où $D_\epsilon = [a-\epsilon, b+\epsilon] \times [c-\epsilon, d+\epsilon]$, on peut affirmer que

$$I_D(f) \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f).$$

D'autre part, en utilisant de nouveau le lemme 14.2.12, on peut écrire que pour tout entier $l > 0$:

$$\sum_{i=0}^{l} I_{D_i}(f) \leqslant I_D(f)$$

ou encore, par passage à la limite, que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f) \leqslant I_D(f).$$

On a ainsi démontré que pour toute fonction $f \geqslant 0$:

$$I_D(f) = \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f).$$

Ce résultat s'étend à une fonction ne satisfaisant pas nécessairement la condition supplémentaire $f \geqslant 0$. En effet, en écrivant f sous la forme $f = (f+A) - A$ où $A = \operatorname{Sup}\{|f(x, y)| : (x, y) \in D\}$, on obtient que

$$\begin{aligned} I_D(f) &= I_D(f+A) - I_D(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f+A) - \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(A) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f) + \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(A)\right) - \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f). \end{aligned}$$

D'où le corollaire. ■

14.2.14 Corollaire

Soit $D = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle fermé et $(D_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable de rectangles fermés (non nécessairement quasi-disjoints) vérifiant

$$]a, b[\times]c, d[\subset \bigcup_{i \in I} D_i \subset [a, b] \times [c, d].$$

Alors, pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ continue, on a :

$$I_D(|f|) \leqslant \sum_{i \in I} I_{D_i}(|f|).$$

(La somme de droite peut être infinie).

DÉMONSTRATION. Puisque la famille $(D_i)_{i \in I}$ n'est pas supposée être formée des rectangles fermés quasi-disjoints, considérons la nouvelle famille $(D_i')_{i \in I}$ définie par

$$D_i' = \{(x,y) \in D_i : (x,y) \notin D_k\,, 0 \leqslant k \leqslant i-1\} \quad \text{et} \quad D_0' = D_0\,.$$

Alors, en posant pour tout $i \in I : E_i = \bar{D}_i'$, on obtient que

$$]a,b[\times]c,d[\subset \bigcup_{i \in I} E_i \subset [a,b]\times[c,d]$$

(car $\bigcup_{i \in I} E_i = \bigcup_{i \in I} D_i$) et que chaque E_i est, soit vide, soit une réunion finie de rectangles fermés quasi-disjoints; ce qui entraîne l'existence d'une famille dénombrable $(K_j)_{j \in J}$ de rectangles fermés quasi-disjoints vérifiant

$$]a,b[\times]c,d[\subset \bigcup_{j \in J} K_j \subset [a,b]\times[c,d]$$

(car $\bigcup_{j \in J} K_j = \bigcup_{i \in I} E_i$) et telle qu'à tout $i \in I$, on puisse associer un sous-ensemble fini J_i de J pour lequel on ait :

$$\bigcup_{j \in J_i} K_j = D_i\,.$$

Ainsi, grâce au corollaire 14.2.13, on peut écrire

$$\sum_{i \in I} I_{D_i}(|f|) = \sum_{i \in I}\left(\sum_{j \in J_i} I_{K_j}(|f|)\right) \geqslant \sum_{j \in J} I_{K_j}(|f|) = I_D(|f|)$$

(la dernière inégalité découle du fait qu'à chaque élément j_0 de J, on peut associer au moins un $i_0 \in I$ tel que $j_0 \in J_{i_0}$). ∎

14.2.15 Théorème

Soit D un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors, si $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(D_j')_{j \in \mathbb{N}}$ sont deux familles de rectangles fermés quasi-disjoints dont la réunion de chacune est D, on a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f) = \sum_{j=0}^{+\infty} I_{D_j'}(f).$$

DÉMONSTRATION. Faisons l'hypothèse supplémentaire que $f \geqslant 0$ et posons pour tout $(i,r) \in \mathbb{N}^2 : D_{i,r} = D_i \cap D_r'$ et tout $i \in \mathbb{N} : A_i = \{r \in \mathbb{N} : \mathring{D}_{i,r} \neq \phi\}$. Ainsi, puisque pour $i \in \mathbb{N} : (D_{i,r})_{r \in A_i}$ est une famille dénombrable de rectangles fermés quasi-disjoints vérifiant

$$\mathring{D}_i \subset \bigcup_{r \in A_i} D_{i,r} \subset D_i\,,$$

on obtient, grâce au corollaire 14.2.13, que pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$I_{D_i}(f) = \sum_{r=0}^{+\infty} J_{D_{i,r}}(f)$$

où

$$J_{D_{i,r}}(f) = \begin{cases} I_{D_{i,r}}(f) & \text{si } r \in A_i \\ 0 & \text{si } r \notin A_i . \end{cases}$$

Soit à présent ϵ un nombre réel positif quelconque. D'une part, la convergence de la série de terme général $I_{D_i}(f)$ (§ 14.2.11) entraîne l'existence d'un entier $k > 0$ tel que

$$\sum_{i=0}^{k} I_{D_i}(f) \geqslant \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f) - \epsilon ;$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f) - \epsilon \leqslant \sum_{i=0}^{k} I_{D_i}(f) = \sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{r=0}^{+\infty} J_{D_{i,r}}(f) \right) = \sum_{r=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} J_{D_{i,r}}(f) \right) .$$

D'autre part, puisque pour tout r fixé:

$$\bigcup_{i \in B_r} D_{i,r} \subset D'_r$$

où $B_r = \{i \in \mathbb{N} : 0 \leqslant i \leqslant k, \mathring{D}_{i,r} \neq \phi\}$, on peut aussi écrire, en utilisant le lemme 14.2.12 et le fait que $f \geqslant 0$, que pour tout $r \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{k} J_{D_{i,r}}(f) \leqslant I_{D'_r}(f).$$

Par conséquent

$$\sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f) - \epsilon \leqslant \sum_{r=0}^{+\infty} I_{D'_r}(f) ;$$

ce qui entraîne, puisque cette inégalité est valable quel que soit $\epsilon > 0$, que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f) \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} I_{D'_j}(f).$$

De façon analogue, en échangeant dans le raisonnement précédent le rôle des familles $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(D'_j)_{j \in \mathbb{N}}$, on montre que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} I_{D'_j}(f) \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f).$$

On a ainsi démontré que pour toute fonction $f \geqslant 0$:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f) = \sum_{j=0}^{+\infty} I_{D'_j}(f).$$

Ce résultat s'étend à une fonction ne satisfaisant pas nécessairement la condition supplémentaire $f \geqslant 0$. En effet, en écrivant f sous la forme $f = (f + M) - M$ ou

$M = \text{Sup}\,\{|f(x,y)| : (x,y) \in D\}$, on obtient que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f) = \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f+M) - \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(M)$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} I_{D'_j}(f+M) - \sum_{j=0}^{+\infty} I_{D'_j}(M) = \sum_{j=0}^{+\infty} I_{D'_j}(f). \qquad \blacksquare$$

14.2.16 Définition de l'intégrale double d'une fonction continue et bornée sur un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$

Soit D un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Par définition le nombre réel

$$\sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f)$$

où $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille de rectangles fermés quasi-disjoints dont la réunion est D, est appelé l'*intégrale double* de la fonction f sur D et est noté

$$I_D(f) = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f).$$

Cette définition a bien un sens, car la série de terme général $I_{D_i}(f)$ est convergente (§ 14.2.11) et sa somme est indépendante du choix de la famille $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ considérée (théorème 14.2.15).

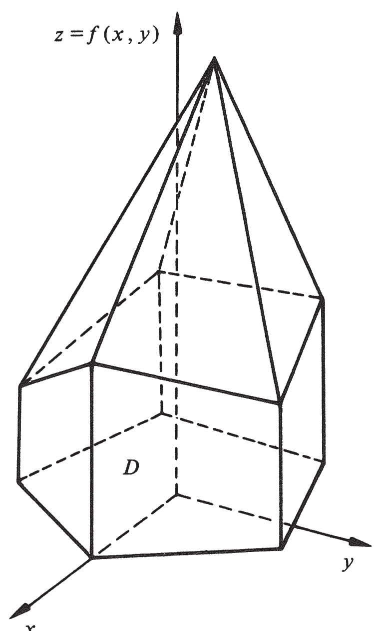


Fig. 14.4

D'autre part, si $D =]a,b[\times]c,d[$, il résulte du corollaire 14.2.13 que pour toute fonction $f : \bar{D} = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continue:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\bar{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Enfin, par analogie à l'interprétation géométrique de l'intégrale simple (§ 7.2.2), on voit que si $f \geqslant 0$, l'intégrale double $I_D(f)$ mesure le volume du cylindre droit limité par le plan $z = 0$ et la surface $z = f(x,y)$, la directrice étant la frontière de D (fig. 14.4).

14.2.17 Définition de l'aire d'un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$

Soit D un sous-ensemble ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^2$. Alors, le nombre réel positif $I_D(1)$ est appelé l'*aire* de D et est noté Aire(D). Autrement dit,

$$\text{Aire}(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

De cette définition, on déduit immédiatement que pour toute famille $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de rectangles fermés quasi-disjoints dont la réunion est D:

$$\text{Aire}(D) = \sum_{i=0}^{+\infty} \text{Aire}(D_i):$$

ce qui implique (corollaire 14.2.13) que si $D =]a,b[\times]c,d[$:

$$\text{Aire}(D) = \iint_{\bar{D}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b \mathrm{d}x = (b-a)(d-c).$$

D'autre part, cette définition n'a de sens que si elle généralise à des sous-ensembles ouverts bornés non vides de $\mathbb{R}^2$ la notion d'aire d'une surface plane donnée aux paragraphes 7.2.2 et 7.2.4; ce que nous pourrons vérifier grâce au corollaire 14.3.2.

14.2.18 Linéarité de l'intégrale double

Soit D un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Alors, pour tout couple de nombres réels α et β, on a:

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \beta \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

DÉMONSTRATION. Soit $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de rectangles fermés quasi-disjoints dont la réunion est D. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (§ 14.1.6):

$$\sum_{i=0}^{k} I_{D_i}(\alpha f + \beta g) = \sum_{i=0}^{k} (\alpha I_{D_i}(f) + \beta I_{D_i}(g)) = \alpha \sum_{i=0}^{k} I_{D_i}(f) + \beta \sum_{i=0}^{k} I_{D_i}(g);$$

ce qui donne, par passage à la limite, que

$$\iint_D (\alpha f+\beta g)(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\beta\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \quad \blacksquare$$

14.2.19 Intégrale double de la valeur absolue d'une fonction

Soit D un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $f: D \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors,

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

DÉMONSTRATION. Soit $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de rectangles fermés quasi-disjoints dont la réunion est D. Alors, puisque pour tout $k\in\mathbb{N}$ (§ 14.1.7):

$$\left|\sum_{i=0}^{k} I_{D_i}(f)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{k} |I_{D_i}(f)| \leqslant \sum_{i=0}^{k} I_{D_i}(|f|);$$

on obtient, par passage à la limite, que

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \quad \blacksquare$$

14.2.20 Propriétés de l'intégrale double d'une fonction positive ou nulle

Soit D un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $f: D \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée telle que pour tout élément (x,y) de D, on ait: $f(x,y)\geqslant 0$. Alors,

- $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant 0;$
- $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$ si et seulement si $f(x,y)=0$ pour tout $(x,y)\in D$.

DÉMONSTRATION. Soit $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de rectangles fermés quasi-disjoints dont la réunion est D. Puisque pour tout entier naturel i (§ 14.1.8): $I_{D_i}(f)\geqslant 0$, on peut écrire

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f) \geqslant 0.$$

Pour établir la seconde propriété, il suffit de constater que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f) = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

si et seulement si $I_{D_i}(f)=0$ pour tout $i\in\mathbb{N}$ et d'utiliser le résultat obtenu au paragraphe 14.1.8. $\blacksquare$

14.2.21 Corollaire

Soit D un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $f,g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées telles que pour tout $(x,y) \in D$, on ait : $f(x,y) \leqslant g(x,y)$. Alors,

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction auxiliaire $h : D \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = g(x,y) - f(x,y)$. Par suite, en constatant que pour tout $(x,y) \in D : h(x,y) \geqslant 0$, on obtient (§ 14.2.18 et 14.2.20) que

$$0 \leqslant \iint_D h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ou encore

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$ ■

14.2.22 Bornes de l'intégrale double

Soit D un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors,

$$m \cdot \text{Aire}(D) \leqslant \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant M \cdot \text{Aire}(D)$$

où $m = \text{Inf}\,\{f(x,y) : (x,y) \in D\}$ et $M = \text{Sup}\,\{f(x,y) : (x,y) \in D\}$.

DÉMONSTRATION. Puisque pour tout $(x,y) \in D : f(x,y) \geqslant m$ et $f(x,y) \leqslant M$, on peut écrire (§ 14.2.18 et 14.2.21) que

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant \iint_D m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = m \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = m \cdot \text{Aire}(D)$$

et

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_D M\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = M \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = M \cdot \text{Aire}(D).$$

D'où le résultat. ■

14.2.23 Convention

Soit p un nombre réel positif. Par convention, on pose $0^p = 0$. Ainsi, grâce à cette convention, la fonction $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^p & \text{si } x \in \,]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue (§ 6.4.1).

14.2.24 Lemme

Soit a, b deux nombres réels positifs ou nuls. Alors, pour tout couple de nombres réels $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

on a l'inégalité suivante:

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

DÉMONSTRATION. Puisque pour $ab = 0$ le résultat est évident, nous supposerons que $ab \neq 0$ et soit $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par (fig. 14.5)

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} x - x^{1/p} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ainsi, puisque pour tout $x > 0$:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{p}(1 - x^{(1-p)/p}),$$

on obtient que

$$\varphi'(x) < 0 \quad \text{si } x \in]0,1[$$

et

$$\varphi'(x) > 0 \quad \text{si } x \in]1, +\infty[;$$

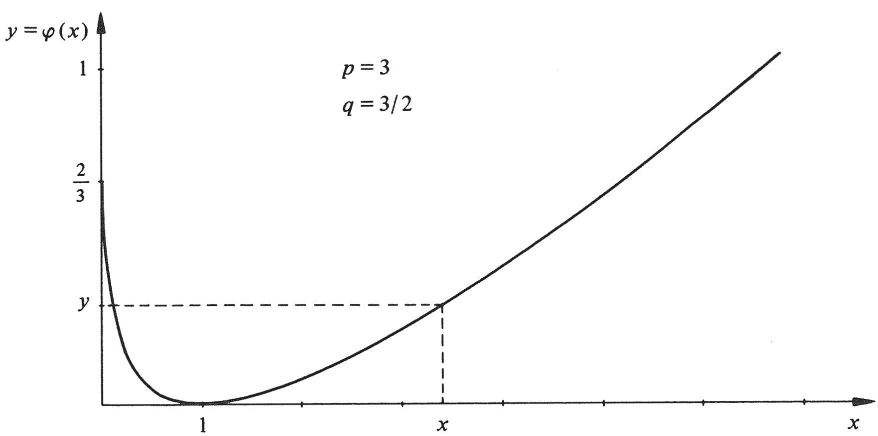


Fig. 14.5

ce qui nous permet d'affirmer que φ atteint son minimum au point $x_0 = 1$. Par conséquent

$$0 = \varphi(1) \leqslant \varphi\left(\frac{a^p}{b^q}\right) = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \cdot \frac{a^p}{b^q} - \frac{a}{b^{q/p}}$$

$$= \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \cdot \frac{a^p}{b^q} - \frac{ab}{b^q} \left(\text{car } \frac{q}{p} = q\left(1 - \frac{1}{q}\right) = q - 1\right)$$

$$= \frac{1}{b^q}\left(\frac{b^q}{q} + \frac{a^p}{p} - ab\right).$$

D'où le lemme. ∎

14.2.25 Inégalité de Hölder

Soit D un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Alors, pour tout couple de nombres réels $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

on a :

$$\iint_D |fg|(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \left(\iint_D |f|^p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/p} \cdot \left(\iint_D |g|^q(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/q}$$

Cette relation est appelée l'*inégalité de Hölder*. Lorsque $p = q = 2$, il est d'usage de l'appeler l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*.

DÉMONSTRATION. Faisons l'hypothèse supplémentaire que ni f ni g ne soit la fonction identiquement nulle sur D (dans le cas contraire, le résultat est évident). Puisque (§ 14.2.20)

$$\iint_D |f|^p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y > 0$$

et

$$\iint_D |g|^q(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y > 0,$$

on peut considérer les deux fonctions auxiliaires $f_1, g_1 : D \to \mathbb{R}$ définies respectivement par :

$$f_1(x,y) = \frac{|f(x,y)|}{(\iint_D |f|^p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)^{1/p}}$$

et

$$g_1(x,y) = \frac{|g(x,y)|}{(\iint_D |g|^q(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)^{1/q}}.$$

Ainsi, en utilisant le lemme 14.2.24, on obtient que pour tout $(x, y) \in D$:

$$(f_1 \cdot g_1)(x, y) \leqslant \frac{f_1^p(x, y)}{p} + \frac{g_1^q(x, y)}{q};$$

ce qui donne en intégrant (corollaire 14.2.21) que

$$\iint_D (f_1 \cdot g_1)(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

D'où l'inégalité de Hölder. ∎

14.2.26 Inégalité de Minkowski

Soit D un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Alors, pour tout nombre réel $p \geqslant 1$, on a :

$$\left(\iint_D |f+g|^p (x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y\right)^{1/p} \leqslant \left(\iint_D |f|^p (x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y\right)^{1/p} + \left(\iint_D |g|^p (x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y\right)^{1/p}.$$

Cette relation est appelée l'*inégalité de Minkowski.*

DÉMONSTRATION. Pour commencer, supposons que $p = 1$. Alors, pour tout $(x,y) \in D$:

$$|f+g|(x,y) \leqslant |f(x,y)| + |g(x,y)|;$$

ce qui entraîne (§ 14.2.18 et 14.2.21) que

$$\begin{aligned}\iint_D |f+g|(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &\leqslant \iint_D (|f| + |g|)(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \iint_D |f(x,y)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \iint_D |g(x,y)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Supposons à présent que $p > 1$ et faisons l'hypothèse supplémentaire que $f+g$ n'est pas la fonction identiquement nulle sur D (dans le cas contraire, le résultat est évident). Alors, puisque pour tout $(x,y) \in D$:

$$|f+g|^p (x,y) \leqslant (|f| \cdot |f+g|^{p-1})(x,y) + (|g| \cdot |f+g|^{p-1})(x,y);$$

on peut écrire, en posant $q = p/(p-1)$ dans l'inégalité de Hölder (§ 14.2.25), que

$$\begin{aligned}\iint_D |f+g|^p (x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \leqslant &\left(\iint_D |f|^p (x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y\right)^{1/p} \\ &\cdot \left(\iint_D |f+g|^p (x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y\right)^{(p-1)/p} + \left(\iint_D |g|^p (x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y\right)^{1/p} \\ &\cdot \left(\iint_D |f+g|^p (x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y\right)^{(p-1)/p}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour obtenir l'inégalité de Minkowski, il suffit de diviser les deux membres de cette inégalité par le nombre positif (§ 14.2.20)

$$\left(\iint_D |f+g|^p (x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{(p-1)/p}. \qquad \blacksquare$$

14.2.27 Additivité de l'intégrale double

Soit D un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $(D_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de sous-ensembles ouverts non vides et disjoints de $\mathbb{R}^2$ dont la réunion est D. Alors, pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a :

$$I_D(f) = \sum_{i\in I} I_{D_i}(f).$$

DÉMONSTRATION. Pour commencer, supposons que $I=\{1,2\}$ et soit $(D_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ (resp. $(D_{2,k})_{k\in\mathbb{N}}$) une famille de rectangles fermés quasi-disjoints dont la réunion est D_1 (resp. D_2). Considérons à présent la nouvelle famille $(D'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de rectangles fermés définie par $D'_{2k}=D_{1,k}$ et $D'_{2k+1}=D_{2,k}$. Puisque $D=D_1\cup D_2$ et que $D_1\cap D_2=\phi$, $(D'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille de rectangles fermés quasi-disjoints dont la réunion est D. Par conséquent

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{+\infty} I_{D'_k}(f).$$

Finalement, en constatant que pour tout entier $p>0$:

$$\sum_{k=0}^{2p+1} I_{D'_k}(f) = \sum_{k=0}^{p} I_{D_{1,k}}(f) + \sum_{k=0}^{p} I_{D_{2,k}}(f)$$

et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} I_{D_{1,k}}(f) = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} I_{D_{2,k}}(f) = \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(ces deux égalités sont valables car la fonction $f : D\to\mathbb{R}$ est continue et bornée sur les deux sous-ensembles ouverts bornés D_1 et D_2), on obtient que

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{+\infty} I_{D'_k}(f) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{2p+1} I_{D'_k}(f)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} I_{D_{1,k}}(f) + \sum_{k=0}^{+\infty} I_{D_{2,k}}(f)$$

$$= \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Maintenant supposons que $I=\{1, 2,\dots, q\}$. Alors, en utilisant ce qui vient d'être démontré, on peut écrire

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\bigcup_{l=2}^{q} D_l} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \dots = \sum_{i=1}^{q} \iint_{D_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Pour finir, supposons que $I=\mathbb{N}$. Alors, à chaque D_i, on peut associer une famille $(D_{i,r})_{r\in\mathbb{N}}$ de rectangles fermés quasi-disjoints dont la réunion est D_i. Puisque $D=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i$ et que pour tout couple d'entiers naturels $i\neq j$: $D_i\cap D_j=\phi$, $(D_{\varphi(s)})_{s\in\mathbb{N}}$ est une famille de rectangles fermés quasi-disjoints dont la réunion est D (φ étant une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (§ 14.2.2)). Par conséquent

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{s=0}^{+\infty} I_{D\varphi(s)}(f).$$

Faisons l'hypothèse supplémentaire que $f\geqslant 0$ et montrons que

$$\sum_{s=0}^{+\infty} I_{D_{\varphi(s)}}(f) = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{r=0}^{+\infty} I_{D_{i,r}}(f)\right).$$

En effet, à tout entier $p>0$, on peut associer deux entiers positifs $i(p)$ et $r(p)$ tels que

$$\{\varphi(s) : s\in\mathbb{N}, 0\leqslant s\leqslant p\}\subset\{(i,r)\in\mathbb{N}^2 : 0\leqslant i\leqslant i(p), 0\leqslant r\leqslant r(p)\};$$

ce qui nous permet d'écrire, puisque $f\geqslant 0$ (§ 14.2.20), que pour tout entier $p>0$:

$$\sum_{s=0}^{p} I_{D_{\varphi(s)}}(f) \leqslant \sum_{i=0}^{i(p)}\left(\sum_{r=0}^{r(p)} I_{D_{i,r}}(f)\right) \leqslant \sum_{i=0}^{i(p)}\left(\sum_{r=0}^{+\infty} I_{D_{i,r}}(f)\right)$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{r=0}^{+\infty} I_{D_{i,r}}(f)\right)$$

ou encore, par passage à la limite, que

$$\sum_{s=0}^{+\infty} I_{D_{\varphi(s)}}(f) \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{r=0}^{+\infty} I_{D_{i,r}}(f)\right).$$

Pour montrer l'inégalité inverse, il suffit de constater qu'à tout couple d'entiers positifs α et β, on peut associer un entier $s(\alpha,\beta) > 0$ tel que

$$\{(i,r)\in \mathbb{N}^2 : 0\leqslant i\leqslant \alpha, 0\leqslant r\leqslant \beta\} \subset \{\varphi(s) : s\in\mathbb{N}, 0\leqslant s\leqslant s(\alpha,\beta)\}.$$

Ainsi,

$$\sum_{s=0}^{+\infty} I_{D_{\varphi(s)}}(f) \geqslant \sum_{s=0}^{s(\alpha,\beta)} I_{D_{\varphi(s)}}(f) \geqslant \sum_{i=0}^{\alpha}\left(\sum_{r=0}^{\beta} I_{D_{i,r}}(f)\right).$$

Cette inégalité étant vraie pour tout entier $\beta > 0$, par passage à la limite, on obtient que pour tout $\alpha > 0$:

$$\sum_{s=0}^{+\infty} I_{D_{\varphi(s)}}(f) \geqslant \sum_{i=0}^{\alpha}\left(\sum_{r=0}^{+\infty} I_{D_{i,r}}(f)\right)$$

ou encore

$$\sum_{s=0}^{+\infty} I_{D_{\varphi(s)}}(f) \geqslant \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{r=0}^{+\infty} I_{D_{i,r}}(f)\right).$$

On a ainsi démontré que pour toute fonction $f \geqslant 0$:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f).$$

Ce résultat s'étend à une fonction f ne satisfaisant pas nécessairement la condition supplémentaire $f \geqslant 0$. En effet, en écrivant f sous la forme $f = (f+M) - M$ où $M = \operatorname{Sup}\{|f(x,y)| : (x,y)\in D\}$, on obtient que

$$\begin{aligned} I_D(f) &= I_D(f+M) - I_D(M) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f+M) - \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(M) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f) + \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(M)\right) - \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(M) = \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(f). \end{aligned}$$ ■

14.2.28 Intégrale double sur des ouverts non disjoints

Soit D un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $(D_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de sous-ensembles ouverts non vides (non nécessairement disjoints) de $\mathbb{R}^2$ dont la réunion est D. Alors, pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a :

$$I_D(|f|) \leqslant \sum_{i\in I} I_{D_i}(|f|).$$

(La somme de droite peut être infinie).

DÉMONSTRATION. Pour les besoins de la démonstration, nous supposerons que $\Sigma_{i\in I} I_{D_i}(|f|) < +\infty$ (dans le cas contraire, le résultat est évident). A chaque D_i associons une famille $(D_{i,r})_{r\in\mathbb{N}}$ de rectangles fermés quasi-disjoints dont la réunion est D_i. Puisque $D = \cup_{i\in I} D_i$, $(D_{\varphi(s)})_{s\in\mathbb{N}}$ est une famille de rectangles fermés dont la réunion est D (φ étant une bijection de $\mathbb{N}$ dans $I\times\mathbb{N}$ (§ 14.2.2)). Soit à présent $(D_j')_{j\in\mathbb{N}}$ une famille de rectangles fermés quasi-disjoints dont la réunion est D et posons pour tout $(j,s)\in\mathbb{N}^2$: $D_{j,s}' = D_j' \cap D_{\varphi(s)}$ et tout $j\in\mathbb{N}$: $A_j = \{s\in\mathbb{N} : \mathring{D}_{j,s}' \neq \phi\}$. Ainsi, puisque pour tout $j\in\mathbb{N}$: $(D_{j,s}')_{s\in A_j}$ est une famille dénombrable de rectangles fermés vérifiant

$$\mathring{D}_j' \subset \bigcup_{s\in A_j} D_{j,s}' \subset D_j',$$

on obtient, grâce au corollaire 14.2.14, que pour tout $j\in\mathbb{N}$:

$$I_{D_j'}(|f|) \leqslant \sum_{s=0}^{+\infty} J_{D_{j,s}'}(|f|)$$

où

$$J_{D_{j,s}'}(|f|) = \begin{cases} I_{D_{j,s}'}(|f|) & \text{si } s\in A_j \\ 0 & \text{si } s\notin A_j ; \end{cases}$$

ce qui implique, puisque $(D_j')_{j\in\mathbb{N}}$ est une famille de rectangles fermés quasi-disjoints dont la réunion est D, que

$$I_D(|f|) = \sum_{j=0}^{+\infty} I_{D_j'}(|f|) \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{s=0}^{+\infty} J_{D_{j,s}'}(|f|)\right) = \sum_{s=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} J_{D_{j,s}'}(|f|)\right)$$

$$\leqslant \sum_{s=0}^{+\infty} I_{D_{\varphi(s)}}(|f|) \leqslant \sum_{i\in I} I_{D_i}(|f|)$$

(la dernière inégalité découle du fait que pour tout entier $p > 0$:

$$\sum_{s=0}^{p} I_{D_{\varphi(s)}}(|f|) \leqslant \sum_{i\in I} I_{D_i}(|f|)).$$

■

14.2.29 Intégrale double sur un sous-ensemble

Soit D un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors, pour tout sous-ensemble ouvert non vide D' de D, on a:

$$\iint_{D'} |f(x,y)|\, dx\, dy \leqslant \iint_{D} |f(x,y)|\, dx\, dy.$$

DÉMONSTRATION. Soit $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(D'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ deux familles de rectangles fermés quasi-disjoints dont la réunion donne respectivment D et D' et posons pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$: $D_{i,j}=D_i\cap D'_j$ et tout $j\in\mathbb{N}$: $A_j=\{i\in\mathbb{N} : \overset{\circ}{D}_{i,j}\neq\phi\}$. Ainsi, puisque pour tout $j\in\mathbb{N}$: $(D_{i,j})_{i\in A_j}$ est une famille dénombrable de rectangles fermés quasi-disjoints vérifiant

$$\overset{\circ}{D'_j}\subset \bigcup_{i\in A_j} D_{i,j}\subset D'_j,$$

on obtient, grâce au corollaire 14.2.13, que pour tout $j\in\mathbb{N}$:

$$I_{D'_j}(|f|) = \sum_{i=0}^{+\infty} J_{D_{i,j}}(|f|)$$

où

$$J_{D_{i,j}}(|f|) = \begin{cases} I_{D_{i,j}}(|f|) & \text{si } i\in A_j \\ 0 & \text{si } i\notin A_j; \end{cases}$$

ce qui entraîne, puisque $(D'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une famille de rectangles fermés quasi-disjoints dont la réunion est $D'\subset D$, que

$$I_{D'}(|f|) = \sum_{j=0}^{+\infty} I_{D'_j}(|f|) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} J_{D_{i,j}}(|f|)\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} J_{D_{i,j}}(|f|)\right) \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} I_{D_i}(|f|) = I_D(|f|)$$

(la dernière inégalité découle du fait que pour tout entier $p>0$:

$$\sum_{j=0}^{p} J_{D_{i,j}}(|f|) \leqslant I_{D_i}(|f|)).$$ ■

14.3 CALCUL DES INTÉGRALES DOUBLES

14.3.1 Théorème

Soit a et b deux nombres réels, $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $x\in\,]a,b[\, : \varphi_1(x)<\varphi_2(x)$ et D le sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a<x<b,\ \varphi_1(x)<y<\varphi_2(x)\}$$

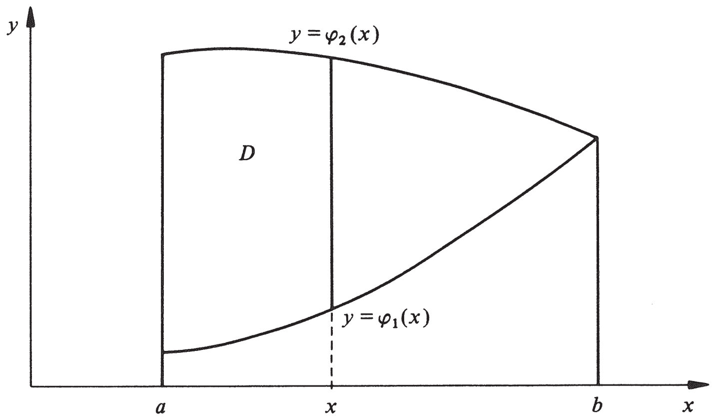


Fig. 14.6

(fig. 14.6). Alors, pour toute fonction continue $f : \bar{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\} \to \mathbb{R}$, on a :

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION. Faisons l'hypothèse supplémentaire que $f \geqslant 0$ et soit ϵ un nombre réel quelconque compris strictement entre zéro et $(b-a)/4$. Puisque le nombre $d = \min\{\varphi_2(x) - \varphi_1(x) : x \in [a_1, b_1]\}$ où $a_1 = a + \epsilon$ et $b_1 = b - \epsilon$ est positif, le nombre $\epsilon' = \min\{\epsilon, d/10\}$ est positif; ce qui entraîne, du fait que les deux fonctions φ_1 et φ_2 sont uniformément continues sur $[a_1, b_1]$, l'existence d'un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout couple d'éléments (r,s) de $[a_1, b_1]$ vérifiant $|r-s| \leqslant \delta$, on ait: $|\varphi_1(r) - \varphi_1(s)| \leqslant \epsilon'$ et $|\varphi_2(r) - \varphi_2(s)| \leqslant \epsilon'$. Considérons à présent la subdivision régulière $a_1 = x_0 < x_1 = < \ldots < x_p = b_1$ d'ordre $p = [(b-a)/\delta] + 1$ de $[a_1, b_1]$ (§ 1.3.3 et 7.1.1). Alors, en posant pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant p-1$: $M_{1,k} = \max\limits_{x \in [x_k, x_{k+1}]} \varphi_1(x)$ et $m_{2,k} = \min\limits_{x \in [x_k, x_{k+1}]} \varphi_2(x)$, on obtient que

$$M'_{1,k} = M_{1,k} + \epsilon' < m'_{2,k} = m_{2,k} - \epsilon'$$

ou encore

$$E_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}, M'_{1,k} \leqslant y \leqslant m'_{2,k}\}$$

est un rectangle fermé inclus dans D. Ainsi, en désignant par $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de rectangles fermés quasi-disjoints dont la réunion est l'ouvert borné

$$F = D \cap \complement\left(\bigcup_{k=0}^{p-1} E_k\right)$$

(donc $D = \left(\bigcup_{k=0}^{p-1} E_k\right) \cup F$), on peut écrire

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{p-1} I_{E_k}(f) + \sum_{i=0}^{+\infty} I_{F_i}(f).$$

Par suite, en constatant que pour tout entier $l > 0$:

$$0 \leqslant \sum_{i=0}^{l} I_{F_i}(f) \leqslant 2\,A\,(M_2 - m_1)\,\epsilon + 4\,A\,(b-a)\,\epsilon' \leqslant K\,\epsilon$$

où $A = \operatorname{Sup}\{f(x,y) : (x,y) \in D\}$, $m_1 = \min_{x \in [a,b]} \varphi_1(x)$, $M_2 = \max_{x \in [a,b]} \varphi_2(x)$ et $K = 2\,A\,(M_2 - m_1) + 4\,A\,(b-a)$, on obtient, par passage à la limite, que

$$0 \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} I_{F_i}(f) \leqslant K\,\epsilon.$$

Par conséquent

$$0 \leqslant \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \sum_{k=0}^{p-1} I_{E_k}(f) \leqslant K\,\epsilon.$$

Considérons à présent la fonction continue (§ 12.3.7 et 13.1.18) $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Alors, puisque pour tout $x \in [x_k, x_{k+1}]$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant F(x) - \int_{M'_{1,k}}^{m'_{2,k}} f(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_{\varphi_1(x)}^{M'_{1,k}} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{m'_{2,k}}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant 4\,A\,\epsilon' \leqslant 4A\,\epsilon, \end{aligned}$$

on obtient que

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{p-1} I_{E_k}(f) \\ &\leqslant \int_a^{a+\epsilon} F(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b-\epsilon}^{b} F(x)\,\mathrm{d}x + 4\,A\,(b-a)\,\epsilon \\ &\leqslant 2\,A\,(M_2 - m_1)\,\epsilon + 4\,A\,(b-a)\,\epsilon = K\,\epsilon. \end{aligned}$$

Finalement

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \sum_{k=0}^{p-1} I_{E_k}(f)\right|$$

$$+\left|\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{p-1} I_{E_k}(f)\right| \leqslant 2K\epsilon.$$

Ce résultat étant valable quel que soit le nombre réel $\epsilon \in]0, (b-a)/4[$, on a ainsi démontré que pour toute fonction $f \geqslant 0$:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Ce résultat s'étend à une fonction f ne satisfaisant pas nécessairement la condition supplémentaire $f \geqslant 0$. En effet, en écrivant f sous la forme $f = (f+B) - B$ où $B = \mathrm{Sup}\{|f(x,y)| : (x,y) \in D\}$, on obtient que

$$\begin{aligned} I_D(f) &= I_D(f+B) - I_D(B) \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (f+B)(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x - \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} B\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

■

14.3.2 Corollaire

Soit $a < b$ deux nombres réels, $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $x \in]a,b[$: $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ et D le sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}.$$

Alors,

$$\mathrm{Aire}(D) = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\,\mathrm{d}x.$$

(Voir la remarque faite au paragraphe 14.2.17).

14.3.3 Exemple

Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<1, 0<y<1-x\}$ (fig. 14.7) et $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction continue et bornée définie par $f(x,y)=6^x\, 2^y$. Alors,

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 6^x\left(\int_0^{1-x} 2^y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Log}\,2}\int_0^1 (2e^{x\,\mathrm{Log}3} - e^{x\,\mathrm{Log}6})\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Log}\,2}\left(\frac{4}{\mathrm{Log}\,3} - \frac{5}{\mathrm{Log}\,6}\right).$$

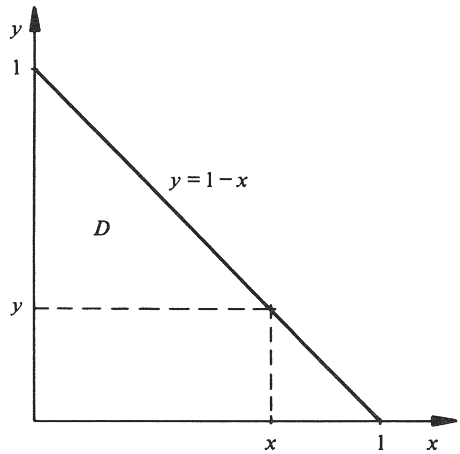


Fig. 14.7

14.3.4 Exemple

Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<y<2x, x^2+y^2>4, xy<4\}$ (fig. 14.8) et $f : D\to\mathbb{R}$ la fonction continue et bornée définie par $f(x,y)=xy$. Alors, en désignant par $\varphi_1, \varphi_2 : [2/\sqrt{5}, 2]\to\mathbb{R}$ les deux fonctions continues définies respectivement par

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & \text{si } x\in[2/\sqrt{5},\sqrt{2}] \\ x & \text{si } x\in[\sqrt{2},2] \end{cases}$$

et

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x\in[2/\sqrt{5},\sqrt{2}] \\ 4/x & \text{si } x\in[\sqrt{2},2] \end{cases}$$

on obtient que $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2/\sqrt{5}<x<2, \varphi_1(x)<y<\varphi_2(x)\}$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{2/\sqrt{5}}^{2}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{2/\sqrt{5}}^{\sqrt{2}}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{2/\sqrt{5}}^{\sqrt{2}} x\left(\int_{\sqrt{4-x^2}}^{2x} y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^{2} x\left(\int_{x}^{4/x} y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{2/\sqrt{5}}^{\sqrt{2}}(5x^3-4x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\frac{16}{x}-x^3\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}x^4-2x^2\right)\Bigg|_{2/\sqrt{5}}^{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\left(16\,\mathrm{Log}\,x-\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2} \\
&= -\frac{3}{5}+4\,\mathrm{Log}\,2.
\end{aligned}$$

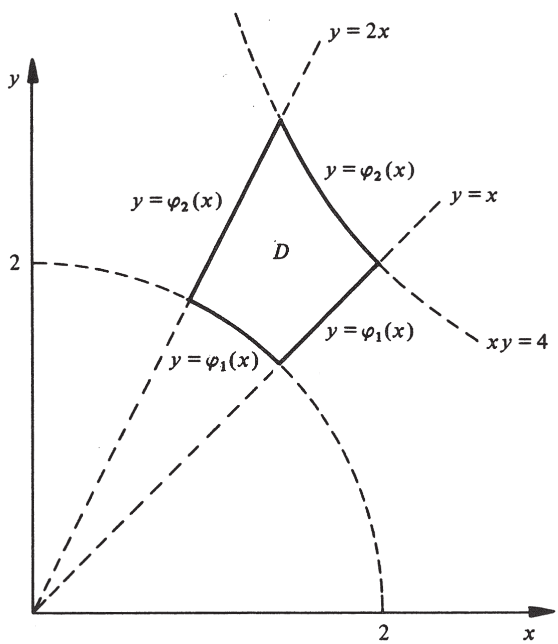


Fig. 14.8

14.3.5 Théorème

Soit $c < d$ deux nombres réels, $\Psi_1, \Psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $y \in]c,d[: \Psi_1(y) < \Psi_2(y)$ et D le sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \Psi_1(y) < x < \Psi_2(y), c < y < d\}$$

(fig. 14.9). Alors, pour toute fonction continue $f : \bar{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \Psi_1(y) \leqslant x \leqslant \Psi_2(y), c \leqslant y \leqslant d\} \to \mathbb{R}$, on a :

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de recopier la démonstration du théorème 14.3.1 en remplaçant x par y et y par x. ■

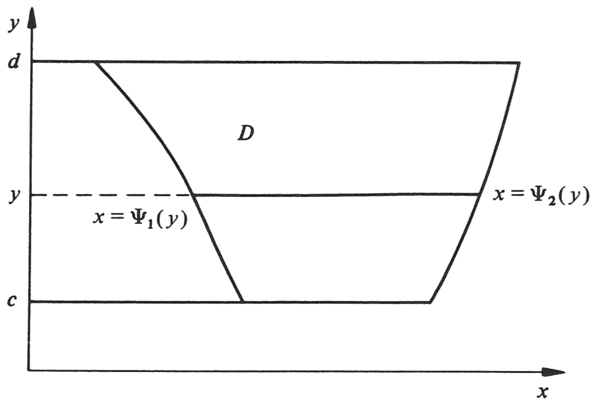


Fig. 14.9

14.3.6 Exemple

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrons que

$$\int_a^b (x-a) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_y^b f(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Pour cela, considérons le sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, a < y < x\}$$

(fig. 14.10). Ainsi, en utilisant les théorèmes 14.3.1 et 14.3.5, on peut écrire successivement :

$$\int_a^b \left(\int_y^b f(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \iint_D f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b (x-a) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

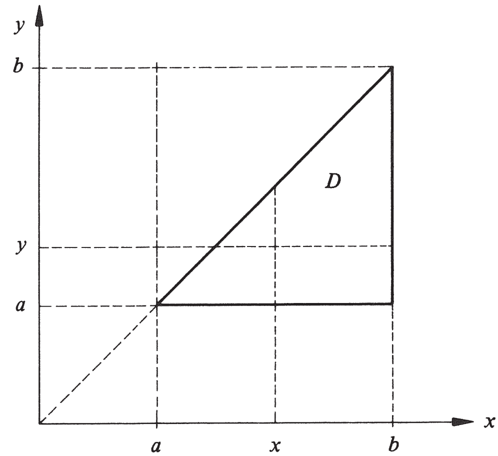


Fig. 14.10

14.4 CHANGEMENT DE VARIABLES DANS UNE INTÉGRALE DOUBLE

14.4.1 Théorème

Soit D et E deux sous-ensembles ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$ et (φ, Ψ) une bijection de E dans D. De plus, on suppose que les deux fonctions $\varphi, \Psi : E \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1. Alors, pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_E f(x = \varphi(u,v), y = \Psi(u,v)) \left| \frac{D(\varphi,\Psi)}{D(u,v)}(u,v) \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

DÉMONSTRATION. Il n'est pas possible, dans le cadre de ce livre, de donner une démonstration de ce théorème. ■

14.4.2 Exemple

On se propose de calculer l'intégrale double suivante:

$$\iint_D e^{x^2+xy+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 < 1, y > 0\}$. Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x^2 + xy + y^2 = (x + \tfrac{1}{2}y)^2 + \tfrac{3}{4}y^2,$$

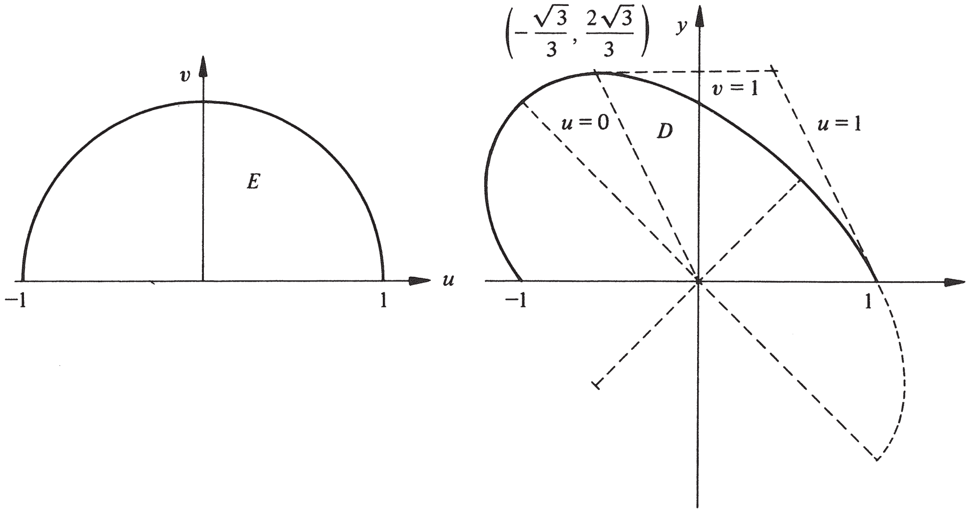


Fig. 14.11

on obtient que l'application $(\varphi, \Psi): E = \{(u,v) \in B(\mathbf{0},1): v > 0\} \to D$ définie par

$$\varphi(u,v) = u - \frac{1}{\sqrt{3}} v$$

et

$$\Psi(u,v) = \frac{2}{\sqrt{3}} v$$

est une bijection de E dans D. Ainsi, du fait que pour tout $(u,v) \in E$:

$$\frac{D(\varphi,\Psi)}{D(u,v)}(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} > 0,$$

on obtient, grâce au théorème 14.4.1, que

$$\iint_D e^{x^2+xy+y^2}\, dx\, dy = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_E e^{u^2+v^2}\, du\, dv.$$

D'autre part, comme l'application $(\varphi_1, \Psi_1): F = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \pi\} \to E$ définie par $\varphi_1(\rho,\theta) = \rho\cos\theta$ et $\Psi_1(\rho,\theta) = \rho\sin\theta$ (coordonnées polaires) est une bijection de F dans E et que pour tout $(\rho,\theta) \in F$:

$$\frac{D(\varphi_1,\Psi_1)}{D(\rho,\theta)}(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho > 0,$$

on peut écrire, en utilisant les théorèmes 14.3.5 et 14.4.1, que

$$\iint_E e^{u^2+v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_F e^{\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi}\left(\int_0^1 \rho\,e^{\rho^2}\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}(e-1).$$

D'où

$$\iint_D e^{x^2+xy+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{\sqrt{3}}(e-1).$$

14.4.3 Exemple

Soit r un nombre réel positif quelconque et E_s, D_s ($s = r$ ou $2r$) et F_r les trois sous-ensembles ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$ définis respectivement par (fig. 14.12)

$$E_s = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < s,\ 0 < \theta < \pi/2\},$$
$$D_s = \{(x,y) \in B(\mathbf{0}, s) : x > 0,\ y > 0\}$$

et

$$F_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < r,\ 0 < y < r\}$$

et soit (φ,Ψ) la bijection de E_s dans D_s définie par $\varphi(\rho,\theta) = \rho\cos\theta$ et $\Psi(\rho,\theta) = \rho\sin\theta$ (coordonnées polaires). D'une part, puisque pour tout $(\rho,\theta) \in E_s$:

$$\frac{D(\varphi,\Psi)}{D(\rho,\theta)}(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho > 0,$$

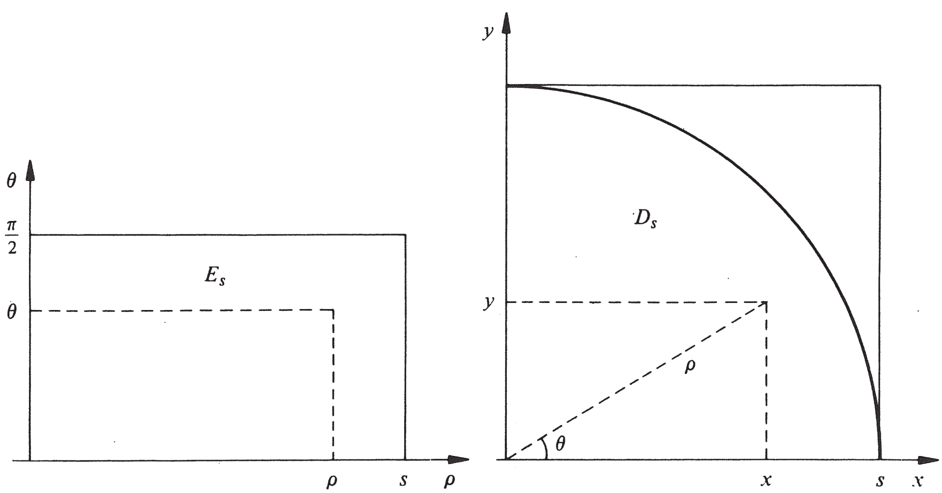


Fig. 14.12

on peut écrire, grâce aux théorèmes 14.3.5 et 14.4.1, que

$$\iint\limits_{D_s} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{E_s} e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^s \rho\,e^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}(1-e^{-s^2}).$$

D'autre part, en utilisant le théorème 14.3.1, on constate que

$$\iint\limits_{F_r} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_0^r e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$$

Finalement, comme $D_r \subset F_r \subset D_{2r}$, on obtient (§ 14.2.29) que

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-r^2}) \leqslant \left(\int_0^r e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{\pi}{4}(1-e^{-4r^2}).$$

Ce résultat étant valable quel que soit le nombre réel $r > 0$, on peut donc affirmer, grâce au théorème des deux gendarmes (§ 4.2.15), que

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 = \lim_{r\to+\infty}\left(\int_0^r e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

14.4.4 Intégrale double d'une fonction continue et bornée sur une boule

Soit $\boldsymbol{c} = (a,b)$ un élément de $\mathbb{R}^2$, r un nombre réel positif et $f : B(\boldsymbol{c},r) \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors,

$$\iint\limits_{B(\boldsymbol{c},r)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^r f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^r\left(\int_0^{2\pi} f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\rho.$$

DÉMONSTRATION. Faisons l'hypothèse supplémentaire que $f \geqslant 0$ et soit k un entier positif quelconque. Soit D_k, E_k et F_k les trois sous-ensembles ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$ définis respectivement par

$$D_k = \{(x,y) \in B(\boldsymbol{c},r) : (x,y) \notin \{(a+\delta\cos\alpha, b+\delta\sin\alpha) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \delta \leqslant r, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1/k\}\},$$

$$E_k = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < r,\ 1/k < \theta < 2\pi\}$$

et

$$F_k = \{(x,y) \in B(\boldsymbol{c},r) : |y-b| < r\sin 1/k\}$$

et (φ,Ψ) la bijection de E_k dans D_k définie par $\varphi(\rho,\theta) = a+\rho\cos\theta$ et $\Psi(\rho,\theta) = b+\rho\sin\theta$. D'une part, puisque

$$D_k \subset B(\boldsymbol{c},r) \subset G_k = D_k \cup F_k$$

et que pour tout $(\rho,\theta)\in E_k$:

$$\frac{D(\varphi,\Psi)}{D(\rho,\theta)}(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho > 0,$$

on peut écrire (§ 14.2.28, 14.2.29, 14.3.5 et 14.4.1)

$$\int_{1/k}^{2\pi}\left(\int_0^r f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta \leqslant \iint_{B(\boldsymbol{c},r)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \int_{1/k}^{2\pi}\left(\int_0^r f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta + \iint_{F_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

D'autre part, en constatant que pour tout entier $k>0$:

$$0 \leqslant \int_0^{2\pi}\left(\int_0^r f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta$$

$$-\int_{1/k}^{2\pi}\left(\int_0^r f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{1/k}\left(\int_0^r f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta \leqslant \frac{Mr^2}{2k}$$

et

$$0 \leqslant \iint_{F_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant M\cdot\mathrm{Aire}(F_k) \leqslant \frac{4Mr^2}{k}$$

où $M = \mathrm{Sup}\,\{f(x,y) : (x,y) \in B(\boldsymbol{c},r)\}$, on obtient que

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{1/k}^{2\pi}\left(\int_0^r f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^r f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta$$

et

$$\lim_{k\to+\infty}\iint_{F_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Ainsi, grâce aux théorèmes des deux gendarmes (§ 2.3.21) et de Fubini (§ 14.1.2), on peut conclure que pour toute fonction $f \geqslant 0$:

$$\iint_{B(c,r)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^r f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^r\left(\int_0^{2\pi} f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta.$$

Ce résultat s'étend à une fonction ne satisfaisant pas nécessairement la condition supplémentaire $f \geqslant 0$. En effet, il suffit d'écrire f sous la forme $f = f^+ - f^-$ où $f^+, f^- : B(\boldsymbol{c}, r) \to \mathbb{R}$ sont les deux fonctions continues et bornées définies respectivement par

$$f^+(x,y) = \tfrac{1}{2}(f(x,y) + |f(x,y)|)$$

et

$$f^-(x,y) = -\tfrac{1}{2}(f(x,y) - |f(x,y)|)$$

et d'utiliser la linéarité des intégrales doubles. ■

14.4.5 Aire d'une boule

Pour tout $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ et tout nombre réel $r > 0$:

$$\text{Aire}(B(\boldsymbol{c}, r)) = \iint_{B(c,r)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^r \rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta = \pi r^2.$$

14.4.6 Intégrale double d'une fonction continue et bornée sur une couronne

Soit $\boldsymbol{c} = (a,b)$ un élément de $\mathbb{R}^2$, $r_1 < r_2$ deux nombres réels positifs et E le sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = a+\rho\cos\theta, y = b+\rho\sin\theta, r_1 < \rho < r_2, 0 \leqslant \theta < 2\pi\}.$$

Alors, pour toute fonction $f: E \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a:

$$\iint_E f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_{r_1}^{r_2} f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{r_1}^{r_2}\left(\int_0^{2\pi} f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit, dans la démonstration donnée au paragraphe 14.4.4, de remplacer $0 < \rho < r$ par $r_1 < \rho < r_2$. ■

14.5 INTÉGRALE DOUBLE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR $\mathbb{R}^2$

14.5.1 Définition d'un recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$

Une famille $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$ est appelée un *recouvrement régulier* de $\mathbb{R}^2$ si les deux propriétés suivantes sont vérifiées:

- $D_0 \subset D_1 \subset \ldots \subset D_{k-1} \subset D_k \subset D_{k+1} \subset \ldots$;
- à tout nombre réel $r > 0$, on peut associer un entier $k(r) \geqslant 0$ tel que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant r, |y| \leqslant r\} \subset D_{k(r)}$.

14.5.2 Lemme

Soit $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(D'_p)_{p \in \mathbb{N}}$ deux recouvrements réguliers de $\mathbb{R}^2$. Alors, à chaque entier $p \geqslant 0$, on peut associer un entier $k(p) \geqslant 0$ tel que

$$D'_p \subset D_{k(p)}.$$

DÉMONSTRATION. D'une part, puisque D'_p est borné, il existe un nombre réel $r_p > 0$ tel que

$$D'_p \subset E_p = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant r_p, |y| \leqslant r_p\}.$$

D'autre part, le fait que $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit un recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$ entraîne l'existence d'un entier $k(p) \geqslant$ tel que

$$E_p \subset D_{k(p)}.$$

D'où le lemme. ∎

14.5.3 Théorème

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x,y) \geqslant 0$ et soit $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(D'_p)_{p \in \mathbb{N}}$ deux recouvrements réguliers de $\mathbb{R}^2$. Alors, ou bien les deux suites numériques (d_k) et (d'_p) définies respectivement par

$$d_k = \iint_{D_k} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

et

$$d'_p = \iint_{D'_p} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

convergent vers la même limite ou bien elles divergent.

DÉMONSTRATION. Pour établir ce théorème, il suffit de démontrer que si la suite (d_k) converge vers d alors, la suite (d'_p) converge vers d' et que $d' \leqslant d$. En effet, puisqu'à tout $p \in \mathbb{N}$, on peut associer un entier $k(p) \geqslant 0$ (lemme 14.5.2) tel que

$$D'_p \subset D_{k(p)},$$

on obtient, du fait que $f \geqslant 0$, que

$$d'_p = \iint_{D'_p} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{D_{k(p)}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = d_{k(p)} \leqslant d.$$

Comme de plus (d'_p) est une suite croissante, on peut affirmer que (d'_p) converge et que sa limite est inférieure ou égale à d. ■

14.5.4 Définition de l'intégrale double d'une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}^2$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x,y) \geqslant 0$ et soit $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$. Si la suite numérique (d_k) définie par

$$d_k = \iint_{D_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

converge, sa limite est appelée l'*intégrale double* de f sur $\mathbb{R}^2$ et on écrit

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{k\to+\infty} d_k = \lim_{k\to+\infty} \iint_{D_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Cette définition a bien un sens, car cette limite est indépendante du choix du recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$ considéré (théorème 14.5.3).

14.5.5 Exemple

Calculons

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Pour cela, considérons le recouvrement régulier $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D_k = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|<k, |y|<k\} \text{ et } D_0 = D_1.$$

Alors, en constatant que pour tout entier $k > 0$:

$$\iint_{D_k} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)} = \left(\int_{-k}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)}\right)^2 = 4\,(\mathrm{Arctg}\,k)^2,$$

on obtient, par passage à la limite, que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)} = \pi^2.$$

14.5.6 Critère de comparaison

Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on ait : $0 \leqslant f(x,y) \leqslant g(x,y)$. Alors, si l'intégrale double

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

existe, l'intégrale double

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

existe également et

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

DÉMONSTRATION. Soit $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$. Puisque pour tout entier $k \geqslant 0$:

$$d_k = \iint\limits_{D_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_{D_k} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

la suite (d_k) est bornée supérieurement. Comme de plus elle est croissante (§ 14.2.29), elle converge; ce qui implique que l'intégrale double

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

existe. D'autre part, le fait que la suite (d_k) soit bornée supérieurement par

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

nous permet aussi d'écrire que

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad \blacksquare$$

14.5.7 Remarque

Pour une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ quelconque, la convergence de la suite (d_k) peut très bien dépendre du choix du recouvrement régulier $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ considéré. En effet, soit $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(D'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ les deux recouvrements réguliers de $\mathbb{R}^2$

définis respectivement par

$$D_k = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : |x|<k, |y|<k\} \text{ et } D_0 = D_1$$

et

$$D'_k = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : |x|<2k, |y|<k\} \text{ et } D'_0 = D'_1$$

et soit f la fonction continue, qui, à tout élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$, fait correspondre le nombre réel $x^2 - y^2$. Alors, puisque pour tout entier $k>0$:

$$d_k = \iint_{D_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

et

$$d'_k = \iint_{D'_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 8k^4,$$

on voit que la suite (d_k) converge vers zéro, tandis que la suite (d'_k) diverge.

Néanmoins, si on fait l'hypothèse supplémentaire que l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

existe, la suite (d_k) converge et sa limite est indépendante du choix du recouvrement régulier $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ considéré. C'est ce que nous allons démontrer à présent grâce au théorème 14.5.8.

14.5.8 Théorème

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

existe. Alors, la suite (d_k) définie par

$$d_k = \iint_{D_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

converge et sa limite est indépendante du choix du recouvrement régulier $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ considéré.

DÉMONSTRATION. Soit $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les deux fonctions auxiliaires définies respectivement par

$$g(x,y) = 2f^+(x,y) = |f(x,y)| + f(x,y)$$

et

$$h(x,y) = 2f^-(x,y) = |f(x,y)| - f(x,y)$$

et soit (d'_k) la suite numérique définie par

$$d'_k = \iint_{D_k} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Alors, en constatant que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $g(x,y) \geqslant 0$ et $h(x,y) \geqslant 0$, on obtient que pour tout couple d'entiers naturels $m > n$ (§ 14.2.29) :

$$d'_n + d_n = \iint_{D_n} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{D_m} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = d'_m + d_m$$

et

$$d'_n - d_n = \iint_{D_n} h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{D_m} h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = d'_m - d_m$$

ou encore

$$|d_m - d_n| \leqslant d'_m - d'_n = |d'_m - d'_n|\,;$$

ce qui entraîne, puisque la suite (d'_k) est de Cauchy, que la suite (d_k) est aussi de Cauchy donc convergente.

Reste à démontrer que la limite de la suite (d_k) est indépendante du recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$ choisi. En effet, soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux recouvrements réguliers quelconques de $\mathbb{R}^2$. D'une part, d'après ce qui vient d'être démontré, on sait que les deux suites (a_k) et (b_k) définies respectivement par

$$a_k = \iint_{A_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

et

$$b_k = \iint_{B_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

sont convergentes; posons

$$a = \lim_{k \to +\infty} a_k \quad \text{et} \quad b = \lim_{k \to +\infty} b_k.$$

D'autre part, en utilisant le lemme 14.5.2, il est possible d'extraire de la suite (k) une sous-suite $(k(p))$ telle que

$$A_{k(0)} \subset B_{k(0)} \subset A_{k(1)} \subset \ldots \subset A_{k(p)} \subset B_{k(p)} \subset A_{k(p+1)} \subset \ldots \ .$$

Ainsi, en posant

$$D_q = \begin{cases} A_{k(p)} & \text{si } q = 2p \\ B_{k(p)} & \text{si } q = 2p+1 \end{cases}$$

($(D_q)_{q\in \mathbb{N}}$ est un recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$), on obtient, du fait que la suite (d_q) définie par

$$d_q = \iint_{D_q} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

converge, que.

$$a = \lim_{p\to+\infty} a_{k(p)} = \lim_{p\to+\infty} d_{2p} = \lim_{p\to+\infty} d_{2p+1} = \lim_{p\to+\infty} b_{k(p)} = b.$$

D'où le théorème. ■

14.5.9 Définition de l'intégrale double d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

existe. Alors, la limite de la suite numérique (d_k) définie par

$$d_k = \iint_{D_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

où $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$ est appelée l'*intégrale double* de f sur $\mathbb{R}^2$ et on écrit :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{k\to+\infty} d_k = \lim_{k\to+\infty} \iint_{D_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Cette définition a bien un sens, car cette limite existe et ne dépend pas du choix du recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$ considéré (théorème 14.5.8).

14.5.10 Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)$. D'une part, puisque pour tout entier $k \geqslant 0$ (§ 14.2.21 et 14.4.4) :

$$d_k = \iint_{B(0,k+1)} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \iint_{B(0,k+1)} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{k+1} e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta \leqslant \pi,$$

la suite (d_k) est bornée supérieurement par π. Comme de plus elle est croissante (§ 14.2.29), elle converge; ce qui implique que l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\, dx\, dy$$

existe (§ 14.5.4). D'autre part, du fait que pour tout entier $k \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\iint_{B(\mathbf{0},k+1)} f(x,y)\, dx\, dy &= \iint_{B(\mathbf{0},k+1)} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2)\, dx\, dy \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{k+1} \rho e^{-\rho^2} \cos \rho^2\, d\rho \right) d\theta \\
&= \pi \int_0^{(k+1)^2} e^{-t} \cos t\, dt = -\frac{\pi}{2} e^{-t} (\cos t - \sin t) \Big|_0^{(k+1)^2} \\
&= \frac{\pi}{2} (1 - e^{-(k+1)^2} (\cos (k+1)^2 - \sin (k+1)^2)),
\end{aligned}$$

on obtient

$$\lim_{k \to +\infty} \iint_{B(\mathbf{0},k+1)} f(x,y)\, dx\, dy = \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent (§ 14.5.9), on a :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2)\, dx\, dy = \frac{\pi}{2}.$$

14.5.11 Linéarité d'une intégrale double définie sur $\mathbb{R}^2$

Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que les intégrales doubles

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\, dx\, dy$$

et

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |g(x,y)|\, dx\, dy$$

existent. Alors, pour tout couple de nombres réels α et β, on a :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (\alpha f + \beta g)(x,y)\, dx\, dy = \alpha \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dx\, dy + \beta \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\, dx\, dy.$$

DÉMONSTRATION. Soit $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$. Puisque pour tout $(x,y)\in D$:

$$|\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)| \leqslant |\alpha|\,|f(x,y)| + |\beta|\,|g(x,y)|,$$

on peut écrire (corollaire 14.2.21) que pour tout entier $k \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} d_k &= \iint_{D_k} |\alpha f+\beta g|(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant |\alpha| \iint_{D_k} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + |\beta| \iint_{D_k} |g(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant |\alpha| \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + |\beta| \iint_{\mathbb{R}^2} |g(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y; \end{aligned}$$

ce qui revient à dire que la suite (d_k) est bornée supérieurement. Comme de plus elle est croissante (§ 14.2.29), elle converge. Par conséquent, l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |\alpha f+\beta g|(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

existe. Ainsi, en constatant que pour tout entier $k \geqslant 0$:

$$\iint_{D_k} (\alpha f+\beta g)(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha \iint_{D_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \beta \iint_{D_k} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

on obtient (§ 14.5.9) que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (\alpha f+\beta g)(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \beta \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \blacksquare$$

14.5.12 Lemme

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'à tout nombre réel $\alpha > 0$, on puisse associer une fonction continue $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- pour tout $|y| \leqslant \alpha$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $|f(x,y)| \leqslant F_\alpha(x)$;
- l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

est absolument convergente. De plus, la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

est continue.

DÉMONSTRATION. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$ et posons $\alpha_0 = |y_0| + 1$. Alors, puisque pour tout nombre réel $z > 0$:

$$\int_{-z}^{0} |f(x,y_0)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-z}^{0} F_{\alpha_0}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\alpha_0}(x)\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int_{0}^{z} |f(x,y_0)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{0}^{z} F_{\alpha_0}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\alpha_0}(x)\,\mathrm{d}x,$$

on peut affirmer (§ 8.2.5) que les deux intégrales généralisées

$$\int_{-\infty}^{0} |f(x,y_0)|\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{0}^{+\infty} |f(x,y_0)|\,\mathrm{d}x$$

convergent; ce qui nous permet de conclure que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y_0)\,\mathrm{d}x$$

est absolument convergente, donc convergente. Ce résultat étant valable quel que soit $y_0 \in \mathbb{R}$, on peut donc considérer la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Montrons à présent qu'elle est continue. En effet, soit $b \in \mathbb{R}$ et ϵ un nombre réel positif quelconque. Posons $\alpha_1 = |b| + 1$. Puisque l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{\alpha_1}(x)\,\mathrm{d}x$$

converge, il existe un nombre $c > 0$ tel que

$$\int_{-\infty}^{-c} F_{\alpha_1}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\epsilon}{6} \quad \text{et} \quad \int_{c}^{+\infty} F_{\alpha_1}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\epsilon}{6}.$$

Considérons à présent la fonction auxiliaire $g_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g_c(y) = \int_{-c}^{c} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

D'une part, pour tout $r \in \mathbb{R}$ vérifiant $|r-b| \leqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}|g(r)-g_c(r)| &= \left|\int_{-\infty}^{-c} f(x,r)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x,r)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{-c} |f(x,r)|\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} |f(x,r)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{-c} F_{\alpha_1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} F_{\alpha_1}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\epsilon}{3}.\end{aligned}$$

D'autre part, la fonction g_c étant continue (§ 12.3.20), il existe un nombre réel $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $s \in \mathbb{R}$ vérifiant $|s-b| \leqslant \delta_1$:

$$|g_c(s)-g_c(b)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

Ainsi, en posant $\delta = \min\{1, \delta_1\}$, on obtient que pour tout $y \in \mathbb{R}$ vérifiant $|y-b| \leqslant \delta$:

$$\begin{aligned}|g(y)-g(b)| &= |(g(y)-g_c(y)) + (g_c(y)-g_c(b)) + (g_c(b)-g(b))| \\ &\leqslant |g(y)-g_c(y)| + |g_c(y)-g_c(b)| + |g_c(b)-g(b)| \leqslant \epsilon.\end{aligned}$$

D'où le lemme. ∎

14.5.13 Théorème des intégrations successives

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'à tout nombre réel $\alpha > 0$, on puisse associer une fonction continue $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes

- pour tout $|y| \leqslant \alpha$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $|f(x,y)| \leqslant F_\alpha(x)$;
- l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

De plus, on suppose que l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

existe. Alors,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

DÉMONSTRATION. Pour commencer, faisons l'hypothèse supplémentaire que $f \geqslant 0$. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque et fixons-nous un nombre $t > 0$. Alors, il existe une fonction continue $F_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $|y| \leqslant t$ et tout $x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant f(x,y) \leqslant F_t(x)$ et dont l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_t(x)\,\mathrm{d}x$$

converge; ce qui entraîne, entre autres, l'existence d'un nombre réel $a > 0$ tel que

$$\int_{-\infty}^{-a} F_t(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\epsilon}{4t} \quad \text{et} \quad \int_{a}^{+\infty} F_t(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\epsilon}{4t}.$$

Considérons à présent la fonction continue (lemme 14.5.12) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi, en constatant que pour tout $|y| \leqslant t$:

$$0 \leqslant g(y) - \int_{-a}^{a} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+a} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{-a} F_t(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} F_t(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\epsilon}{2t},$$

on obtient que

$$\int_{-t}^{t} g(y)\,\mathrm{d}y \leqslant \int_{-t}^{t}\left(\int_{-a}^{a} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \epsilon \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \epsilon.$$

Ce résultat étant valable quel que soit le nombre réel $\epsilon > 0$, on a donc démontré que pour tout nombre $t > 0$:

$$\int_{-t}^{t} g(y)\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

De cette inégalité et du fait que $g \geqslant 0$, on peut déduire que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,\mathrm{d}y$$

converge (§ 8.2.5) et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Montrons à présent que l'on a aussi l'inégalité inverse. En effet, soit $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ le recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D_k = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|<k, |y|<k\} \qquad \text{et} \qquad D_0 = D_1.$$

Puisque pour tout entier $k>0$:

$$\int_{-k}^{k} f(x,y)\,\mathrm{d}x \leqslant g(y),$$

on peut écrire

$$d_k = \iint_{D_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \int_{-k}^{k} g(y)\,\mathrm{d}y \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,\mathrm{d}y;$$

ce qui implique que la suite (d_k) est bornée supérieurement. Comme de plus elle est croissante, elle converge et l'on a :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \lim_{k\to+\infty} d_k \\ &= \lim_{k\to+\infty} \iint_{D_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

On a ainsi démontré le théorème pour $f \geqslant 0$, à savoir :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Ce résultat s'étend à une fonction ne satisfaisant pas nécessairement la condition supplémentaire $f \geqslant 0$. En effet, en écrivant f sous la forme $f = f^+ - f^-$ où $f^+, f^- : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont les deux fonctions continues définies respectivement par

$$f^+(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x,y) + |f(x,y)|\right)$$

et

$$f^-(x,y) = -\frac{1}{2}\left(f(x,y) - |f(x,y)|\right)$$

et en constatant que $f^+ \geqslant 0$ et $f^- \geqslant 0$ et qu'elles vérifients les hypothèses du théorème, on peut écrire, grâce à la linéarité des intégrales, que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} f^+(x,y)\,dx\,dy - \iint_{\mathbb{R}^2} f^-(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^+(x,y)\,dx\right)dy - \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^-(x,y)\,dx\right)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^+(x,y)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f^-(x,y)\,dx\right)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f^+-f^-)(x,y)\,dx\right)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

■

14.5.14 Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$f(x,y) = \frac{1+y^2}{(1+y^4)(1+(1+y^2)^2x^2)}.$$

D'une part, à tout nombre réel $\alpha > 0$ associons la fonction continue $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F_\alpha(x) = \frac{1+\alpha^2}{1+x^2}.$$

Alors, pour tout $|y| \leqslant \alpha$ et tout $x \in \mathbb{R} : |f(x,y)| \leqslant F_\alpha(x)$ et l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha(x)\,dx = \pi(1+\alpha^2)$$

converge. D'autre part, soit $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ le recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < k\ ,\ \ |y| < k\} \quad \text{et} \quad D_0 = D_1.$$

Puisque, pour tout entier $k > 0$:

$$d_k = \iint_{D_k} |f(x,y)|\,dx\,dy = \int_{-k}^{k}\left(\int_{-k}^{k} \frac{1+y^2}{(1+y^4)(1+(1+y^2)^2x^2)}\,dx\right)dy$$

$$= 2\int_{-k}^{k} \frac{\operatorname{Arctg}(k(1+y^2))}{1+y^4}\,dy$$

$$\leqslant \pi\int_{-k}^{k} \frac{dy}{1+y^4} \leqslant \pi\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4},$$

la suite (d_k) est bornée supérieurement. Comme de plus elle est croissante, elle converge; ce qui entraîne (§ 14.5.4) que l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

existe. On a ainsi démontré que la fonction f vérifie les hypothèses du théorème 14.5.13. Par conséquent

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+y^2}{(1+y^4)(1+(1+y^2)^2 x^2)} \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$= \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{1+y^4} = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} .$$

14.5.15 Exemple

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ et $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $F(x) = e^{-x^2}$. Pour tout nombre réel $\alpha > 0$, posons $F_\alpha = F$. Alors, pour tout $|y| \leqslant \alpha$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $|f(x,y)| \leqslant F_\alpha(x)$ et l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha(x) \, \mathrm{d}x$$

converge. D'autre part, puisque pour tout entier $k > 0$ (§ 14.4.4):

$$d_k = \iint_{B(0,k)} |f(x,y)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^k \rho e^{-\rho^2} \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta = \pi(1-e^{-k^2}) \leqslant \pi ,$$

la suite (d_k) est bornée supérieurement. Comme de plus elle est croissante, elle converge; ce qui entraîne (§ 14.5.4) que l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

existe. On a ainsi démontré que la fonction f vérifie les hypothèses du théorème 14.5.13. Par conséquent

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t \right)^2 .$$

Ainsi, puisque

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \lim_{k \to +\infty} d_k = \lim_{k \to +\infty} \pi(1-e^{-k^2}) = \pi ,$$

on obtient que

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \pi$$

ou encore

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

De ce résultat et du fait que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

on déduit immédiatement que

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

14.6 INTÉGRALES MULTIPLES

14.6.1 Avertissement

Dans cette section, nous supposerons toujours que $n \geqslant 2$. D'autre part, les résultats seront donnés sans démonstration, car il suffit très souvent de recopier la démonstration qui a été donnée dans le cadre des intégrales doubles.

14.6.2 Définitions et résultats

Un sous-ensemble P de $\mathbb{R}^n$ est appelé un *pavé fermé* (dans $\mathbb{R}^2$, on parle de *rectangle fermé*), s'il peut s'écrire sous la forme

$$P = [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n]$$

où les $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sont $2n$ nombres réels vérifiant pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n : a_i < b_i$.

Nous dirons que $(P_i)_{i \in I}$ est une famille de pavés fermés *quasi-disjoints* si pour tout couple d'éléments $i \neq j$ de $I : \overset{\circ}{P_i} \cap \overset{\circ}{P_j} = \phi$.

Soit $P = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$ et $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors le nombre réel

$$\int_{a_n}^{b_n}\left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\left(\cdots\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\right)\cdots\right)\mathrm{d}x_{n-1}\right)\mathrm{d}x_n$$

est appelé l'*intégrale multiple* (si $n = 2$, on parle d'*intégrale double* et si $n = 3$ d'*intégrale triple*) de la fonction f sur le pavé P et est noté $I_p(f)$. Ce nombre ne dépend pas de l'ordre d'intégration (théorème de Fubini 14.1.2). D'autre part, le nombre réel positif

$$V(P) = I_P(1)$$

est appelé le *volume* du pavé fermé P (dans $\mathbb{R}^2$, on parle d'*aire*).

A présent, soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une famille $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de pavés fermés quasi-disjoints dont la réunion est D (§ 14.2.10). De plus, si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée, la série numérique

$$\sum_{i=0}^{+\infty} I_{P_i}(f)$$

est absolument convergente (§ 14.2.11) et sa somme ne dépend pas de la famille $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ choisie (théorème 14.2.15). Par définition, cette somme est appelée l'*intégrale multiple* (si $n = 2$, on parle d'*intégrale double* et si $n = 3$ d'*intégrale triple*) de la fonction f sur D et on écrit

$$I_D(f) = \int_D \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \sum_{i=0}^{+\infty} I_{P_i}(f).$$

D'autre part, le nombre réel positif

$$V(D) = I_D(1)$$

est appelé le *volume* de D (dans $\mathbb{R}^2$, on parle d'*aire*).

Maintenant, supposons que $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit un *recouvrement régulier* de $\mathbb{R}^n$ (§ 14.5.1) et que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ soit une fonction continue. Alors, si la suite $(I_{D_k}(|f|))$ converge, la suite $(I_{D_k}(f))$ converge aussi et sa limite ne dépend pas du choix du recouvrement régulier de $\mathbb{R}^n$ considéré (théorème 14.5.8). Par définition, cette limite est appelée l'*intégrale multiple* (si $n = 2$, on parle d'*intégrale double* et si $n = 3$ d'*intégrale triple*) de f sur $\mathbb{R}^n$ et on écrit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \lim_{k\to+\infty} I_{D_k}(f).$$

Pour finir, notons que tous les résultats donnés dans ce livre concernant les intégrales doubles restent valables pour les intégrales multiples.

14.6.3 Coordonnées cylindriques

Soit $r \in]0, +\infty[$, $h_1 < h_2$ deux nombres réels et D le cylindre défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < r^2,\ h_1 < z < h_2\}.$$

Alors, pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a:

$$\iiint_D f(x,y,z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \left(\int_{h_1}^{h_2} \left(\int_0^r f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\, \rho\, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\theta$$

(cette égalité reste valable si on permute l'ordre des intégrations). En particulier,

$$V(D) = \iiint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\left(\int_{h_1}^{h_2}\left(\int_0^r \rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\theta = \pi r^2(h_2 - h_1).$$

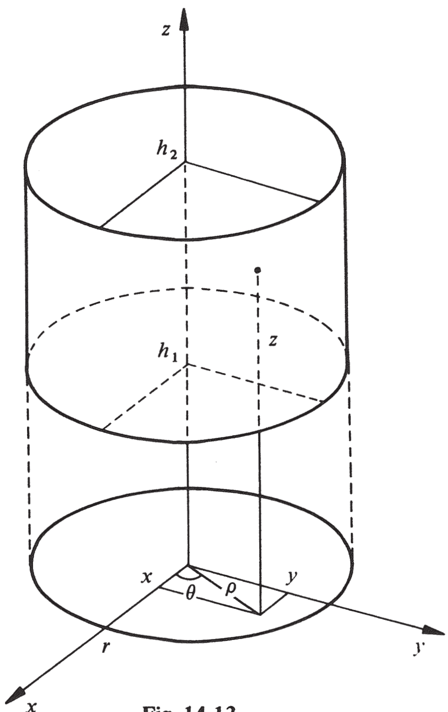


Fig. 14.13

14.6.4 Coordonnées sphériques

Soit r un nombre réel positif et $f : B(\mathbf{0},r) \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors,

$$\iiint\limits_{B(\mathbf{0},r)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^r f(\rho\sin\beta\cos\theta, \rho\sin\beta\sin\theta, \rho\cos\beta)\,\rho^2\sin\beta\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\beta\right)\mathrm{d}\theta$$

(cette égalité reste valable si on permute l'ordre des intégrations). En particulier,

$$V(B(\mathbf{0},r)) = \iiint\limits_{B(\mathbf{0},r)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^r \rho^2\sin\beta\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\beta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{4\pi r^3}{3}.$$

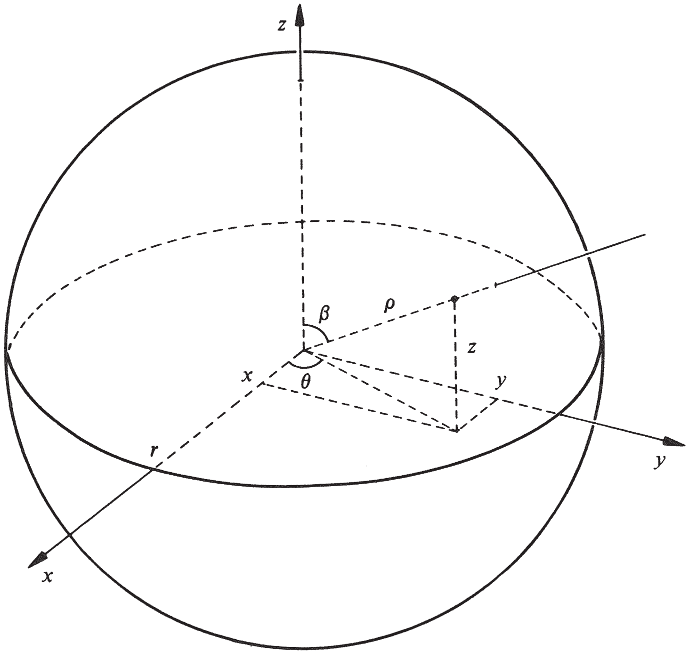


Fig. 14.14

14.6.5 Volume d'un ellipsoïde

Soit a, b, c trois nombres réels positifs et D l'ellipsoïde défini par

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1\right\}.$$

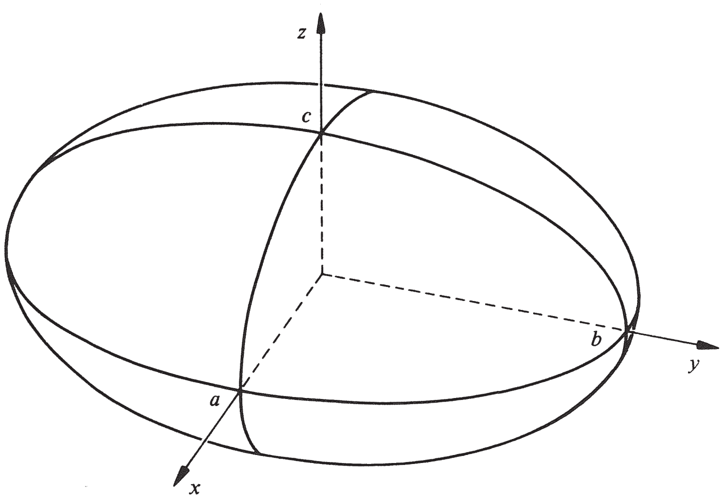


Fig. 14.15

Alors,

$$V(D) = \iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-a}^{a}\left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-a}^{a}\left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-a}^{a}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}x$$

$$\left(\text{avec } y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sin\theta\right)$$

$$= 2bc\left(\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right) = \frac{4\pi abc}{3}.$$

14.6.6 Volume de la boule dans $\mathbb{R}^n$

Soit r un nombre réel positif et désignons par $V_n(r)$ le volume de la boule $B_n(\mathbf{0},r) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} < r\}$. Puisque $V_2(r) = \pi r^2$ (§ 14.4.5) et $V_3(r) = 4\pi/3r^3$ (§ 14.6.4), il semblerait que $V_n(r) = \alpha_n r^n$ avec $\alpha_n \in]0, +\infty[$. En effet, supposons le résultat vrai pour un entier $n \geqslant 2$. Alors,

$$V_{n+1}(r) = \int\!\!\cdots\!\!\int_{B_{n+1}(\mathbf{0},r)} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n+1}$$

$$= \int_{-r}^{r}\left(\int\!\!\cdots\!\!\int_{B_n(\mathbf{0},\sqrt{r^2-x_{n+1}^2})} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n\right)\mathrm{d}x_{n+1}$$

$$= \int_{-r}^{r} \alpha_n (r^2 - x_{n+1}^2)^{n/2}\,\mathrm{d}x_{n+1}$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \alpha_n r^{n+1}\cos^{n+1}\theta\,\mathrm{d}\theta \quad (\text{avec } x_{n+1} = r\sin\theta)$$

$$= \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \alpha_n \cos^{n+1}\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\cdot r^{n+1} = \alpha_{n+1} r^{n+1}.$$

Puisque le résultat est vrai pour $n = 2$, on a ainsi démontré, par récurrence, qu'à tout entier $n \geqslant 2$, on peut associer un nombre réel $\alpha_n > 0$ tel que $V_n(r) = \alpha_n r^n$. De plus, pour tout $n \geqslant 3$, on a :

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \theta \, d\theta .$$

On se propose à présent de calculer les α_n. Pour cela, considérons la suite (β_n) définie par

$$\beta_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \theta \, d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \, d\theta .$$

On sait, d'après l'exercice 7.5.4, que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\beta_n = \frac{n-1}{n} \beta_{n-2} ;$$

ce qui implique, du fait que $\beta_0 = \pi$ et $\beta_1 = 2$, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\beta_n \beta_{n-1} = \frac{2\pi}{n} .$$

De ce résultat, on déduit que pour tout entier $n \geqslant 4$:

$$\alpha_n = \frac{2\pi}{n} \alpha_{n-2} .$$

Finalement, puisque $\alpha_2 = \pi$ et $\alpha_3 = 4\pi/3$, on obtient que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\alpha_n = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{n} \cdot \dfrac{2\pi}{n-2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2\pi}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\[2ex] \dfrac{2\pi}{n} \cdot \dfrac{2\pi}{n-2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2\pi}{3} \cdot 2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

14.7 EXERCICES

14.7.1 Calculer

1) $\displaystyle\iint_D x^2 y \, dx \, dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 2x, x^2 + y^2 > 4, xy < 4\}$

2) $\displaystyle\iint_D xy \, dx \, dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1, x - y > 0, 4(x-1)^2 + 9(y-1)^2 < 36\}$

3) $\displaystyle\iint_D \frac{dx \, dy}{\sqrt{xy}}$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2, 4 < xy < 8, 4x - y - 4 < 0\}$

4) $\displaystyle\iint_D (x^3 + y^3) \, dx \, dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2, x^2 < y < 2x^2\}$

5) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^3}$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1,\ y > 1,\ (x+y) < 3\}$

6) $\displaystyle\iint_D \cos(x^2+y^2-4x+4)\,dx\,dy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0,$
$1 < (x-2)^2+y^2 < 4\}$

7) $\displaystyle\iint_D |(x-y)(x+y-2)|\,dx\,dy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x,\ x+y-2 < 0\}$

8) $\displaystyle\iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{2+\cos(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 4\}$.

9) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(\frac{1}{3}+x^2+y^2)^{3/2}}$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \sqrt{2},\ 0 < y < \sqrt{\tfrac{2}{3}}\}$.

14.7.2 Calculer

1) $\displaystyle\int_4^6 \left(\int_1^{x/2} \frac{dy}{\sqrt{(8-x)(x-y)}} \right) dx$

2) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\int_y^{\sqrt{1-y^2}} \operatorname{Log}(1+x^2+y^2)\,dx \right) dy$.

14.7.3 Calculer

1) $\displaystyle\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2+y^2+z^2 < 4\}$

2) $\displaystyle\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^2}$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x>0,\ y>0,\ z>0,\ x+y+z<1\}$

3) $\displaystyle\iiint_D dx\,dy\,dz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0<z<4-x^2-y^2\}$

4) $\displaystyle\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}}$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2<4\}$

5) $\displaystyle\iiint_D z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0<z<3,\ x^2+y^2<z^2\}$

6) $\displaystyle\iiint_D z\,dx\,dy\,dz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z>0,\ x^2+y^2<1,\ x^2+y^2+z^2<4\}$

7) $\displaystyle\iiint_D (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2<2z,\ x^2+y^2+z^2<3\}$

8) $\displaystyle\iiint_D e^x\,dx\,dy\,dz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2<4,\ x^2+z^2<4\}$.

14.7.4 En effectuant le changement de variables $x = u^2$ et $y = v/u$, calculer

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x)(1+xy^2)} \quad \text{où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}.$$

14.7.5 En effectuant le changement de variables $u = x+y$ et $v = x-y$, calculer

$$\iint_D e^{(x-y/x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ \tfrac{1}{2} < x+y < 1\}.$$

14.7.6 En effectuant le changement de variables $x = u$ et $y = u\,\mathrm{tg}\theta$, calculer

$$\lim_{t \to 0+} \int_t^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

14.7.7 Trouver l'aire du domaine délimité par la cardioïde $\varphi(\theta) = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$.

14.7.8 Calculer l'aire du domaine délimité par la lemniscate $\varphi^2(\theta) = a^2 \cos 2\theta$, $a > 0$.

14.7.9 Soit D un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Montrer que

$$\iint_D fg(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\iint_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right)^{1/2} \cdot \left(\iint_D g^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right)^{1/2}$$

si et seulement si f et g sont linéairement dépendantes (§ 9.3.3).

14.7.10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) > 0$. Calculer

$$\iint_D \frac{2f(x) + 5f(y)}{f(x) + f(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}.$$

14.7.11 Soit $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et paire (c'est-à-dire telle que $f(-t) = f(t)$). Montrer que

$$\iint_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2 \int_0^2 (2-t) f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1,\ |y| < 1\}.$$

14.7.12 Soit $f : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x,y) = \int_0^x \left(\int_0^y f(r,s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}r.$$

Calculer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y)$.

14.7.13 Calculer

1) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

2) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{(1+x^4)(1+y^4)}$

3) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-x^2}}{1+y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

4) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\operatorname{Log}(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$

14.7.14 Calculer le volume de la boule $B_n(\mathbf{0}, r)$ pour $n = 4$ et $n = 5$.

Bibliographie

1. J. Bass, *Cours de mathématiques*, tome 2, Masson, Paris 1971.
2. Ch. Blanc, *Calcul différentiel et intégral*, EPFL, Lausanne 1970.
3. L. Chambadal, J.L. Ovaert, *Cours de mathématiques*, tomes 1 et 2, Gauthier-Villars, Paris 1966.
4. B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, *Cours d'analyse*, tomes 1 à 5, collection U, Armand Colin, Paris 1976.
5. R. Couty, J. Ezra, *Analyse*, tomes 1 et 2, collection U, Armand Colin, Paris 1967.
6. J. Dieudonné, *Eléments d'analyse*, tome 1, cahiers scientifiques, fascicule XXVIII, Gauthier-Villars, Paris 1972.
7. J. Dixmier, *Cours de mathématiques du premier cycle*, tomes 1 et 2, Gauthier-Villars, Paris 1969.
8. W.A. Granville, P.F. Smith, W.R. Longley, *Eléments de caclul différentiel et intégral*, Vuibert, Paris 1970.
9. N. Piskounov, *Calcul différentiel et intégral*, tomes 1 et 2, mir, Moscou 1980.
10. E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales*, tomes 3 et 4, Masson, Paris 1976.
11. V. Smirnov, *Cours de mathématiques*, tomes 1 et 2, Mir, Moscou 1969
12. G. Valiron, *Cours d'analyse mathématique : théorie des fonctions*, Masson, Paris 1966.
13. J. Douchet, *Analyse : Recueil d'exercices et aide-mémoire*, volumes 1 et 2, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne 2005.

Index analytique

Les références sont celles des pages

Glossaire

Les références sont celles des pages

I. Fonctions réelles d'une variable réelle

II. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles

Les auteurs tiennent à remercier
les personnes suivantes de l'aide et des conseils
qu'elles ont bien voulu leur accorder:

Pour la partie I

Philippe Blanc : critique du manuscrit
Gabriel Caloz : critique du manuscrit
Jean Descloux : critique du manuscrit
Andreas Duppenthaler : dessin
Allen Kilner : mise en page et montage
Mauricette Martin : dactylographie du manuscrit
Renée Pittet : composition du texte et des équations
Judith vioulac : composition du texte et des équations
Ida Wegmüller : montage du lettrage

Pour la partie II

Claude El-Hayek : critique du manuscrit
Christian Khanmy : exercices
Allen Kilner : mise en page et montage
Alexandre Lew : dessins
Renée Pittet : composition du texte et des équations
Geneviève Rime : dactylographie du manuscrit
Germain Rojas : critique du manuscrit
Klaus-Dieter Semmler : dessins