Analyse III

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Introduction Thu 23 Sep

1 Rappels

Theorème 1 (de la fonction inverse)
Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tel que $Df|_x$ est inversible. Alors il existe un voisinage V de x, un voisinage W de $f(x)$ tel que f est une bijection de V a W et dont l'inverse est aussi derivable. De plus $Df^{-1}|_{f(x)} = (Df|_x)^{-1}$

Theorème 2 (de la fonction implicite)
Soit $U \subset \mathbb{R}^n, W \subset \mathbb{R}^p$ et $f : U \times W \to \mathbb{R}^n$ une fonction C^1 et $(x, z) \in U \times W$ tel que

$$Df|_{(x,z)} = \left[Dxf|_{(x,z)}|D_z f_{(x,z)}\right]$$

est telle que $D_x f|_{(x,z)}$ est inversible.
Alors si $f(x, z) = 0$, il existe un voisinage Z de z et une fonction $g : Z \to V$ tel que $f(g(\tilde{z}, \tilde{z})) = 0$ et

$$Dg|_z = -(D_x f|_{(x,z)})^{-1} D_z f|_{(x,z)}$$

2 Nombres Complexes

De meme que $\mathbb{R}$ est obtenu a partir de $\mathbb{Q}$ en faisant une operation de completion (topologique).
$\mathbb{C}$ est obtenu a partir de $\mathbb{R}$ en faisant une operation de completion algebrique ; on requiert simplement qu'il existe une solution a $x^2 + 1 = 0$.

Lecture 2: Intro Complexes Mon 27 Sep

3 Nombres Complexes

Si on veut etendre $\mathbb{R}$ en un corps qui contienne i, on obtient $\mathbb{C}$.
On perd la relation d'ordre sur les complexes.
Geometriquement, on represente les nombres complexes dans le plan.

Remarque
L'argument d'un nombre complexe n'est defini que modulo 2π.
La representation polaire est particulierement pertinente pour la multiplication

$$|zw| = |z||w| \text{ et } arg(zw) = arg(z) + arg(w)$$

Ce sera prouve de maniere elegante plus tard, mais on pourrait le verifier avec les formules trigonometriques.

C'est consistant avec la notation $z = re^{i\theta}$. Un choix frequent pour θ est de definir arg sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ en le prenant dans $(-\pi, \pi)$.

Solutions de $z^n = w$

pour $n \in \mathbb{N}^*, w \in \mathbb{C}^*$, il existe n solutions

$$\left\{ |\omega|^{\frac{1}{n}} e^{i(arg(w)+2k\pi)/n} | k \in \mathbb{Z} \right\}$$

3.1 Topologie sur $\mathbb{C}$

Comme en analyse reelle, l'outil principal est $|\cdot|$ complexe.
Les objets de choix pour parler de convergence sont $(x-r, x+r)$ et $[x-r, x+r]$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ leurs analogues sont $D(z,r) = \{\omega \in \mathbb{C} | |z - w| < r\}$.
On a $\partial D(z,r) = \overline{D}(z,r) \setminus D(z,r)$ est le cercle de rayon r centre en z.
Un ensemble $U \subset \mathbb{C}$ est dit ouvert si $\forall z \in U \exists \delta > 0$ tel que $D(z, \delta) \subset U$.
Un domaine est un ouvert connexe.

3.2 Echange de sommes

— Sur $\mathbb{R}$, si $a_{n,m} \geq 0$ on peut toujours dire

$$\sum_n \sum_m a_{n,m} = \sum_m \sum_n a_{n,m}$$

— Idem si la somme converge absolument.

Theorème 4 (fondamental de l'algebre)
Si P est un polynome de degre ≥ 1, alors $\exists z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$

Corollaire 5
Tous les polynomes peuvent etre factorise.

4 Analyse Complexe

4.1 Fonctions analytiques complexes

But : aller plus loin que les polynomes.
On considere des series entieres

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_*)^n$$

Les fonctions analytiques sont les fonctions definies par des series entieres convergentes.

Definition 1 (Serie entiere)
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_*^n)$ *une serie entiere centree en* z_*

Definition 2 (Convergence de series entieres)
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$ *si* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k(z - z_*)^k$ *existe.*

Definition 3 (Convergence uniforme)
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$ *converge uniformement sur* $K \subset \mathbb{C}$ *si elle converge sur* K *et si*

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k(z - z_*)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_*)^k \right\|_{\infty,K} = 0$$

Definition 4 (Convergence d'une suite de fonctions)
Si $f_k : K \to \mathbb{C}$ *est une suite de fonctions tel que* $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty,K} < +\infty$, *on dit que* $\sum f_k$ *converge normalement.*

Lemme 6
La convergence normale implique la convergence uniforme.

Lecture 3: fonctions complexes

Thu 30 Sep

4.2 Rayon de Convergence

Definition 5 (Rayon de convergence)
Le rayon de convergence de $\sum_n a_n(z - z_*)^n$ *est*

$$\rho = \sup \left\{ r \geq 0 : \sum a_n(z - z_*)^n \text{ converge sur } D(z^*, r) \right\}$$

On a $\rho \in [0, \infty]$.
Ou de maniere equivalent

$$\sup \left\{ r \geq 0 : \sum |a_n||r|^n \text{ converge } \right\}$$

Lemme 7
Si $\sum a_n z^n$ *a rayon de convergence* ρ, *alors la serie converge normalement sur* $D(0, \rho)$

Lemme 8
Si $\limsup |a_k|\rho^k < \infty$, *alors le rayon de convergence est* $\geq \rho$.

Lemme 9
Si

$$|\frac{a_{k+1}}{a_k}|$$

converge quand $k \to \infty$ alors $|\frac{a_{K+1}}{a_k} \to \rho^{-1}$

$$\rho^{-1} = \limsup(|a_n|)^{\frac{1}{n}}$$

Lemme 10
$\sum a_k z^k, \sum b_n z^n$ *convergent, alors*

$$\sum (a_k + b_k) z^k$$

converge et vaut $\sum a_k z^k + \sum b_k z^k$.
Et si on pose $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

converge et vaut le produit.

4.3 Analyticite et recentrage

Definition 6
Si f est donnee par une serie entiere $\sum a_n z^n$.
On definit les series entieres "derivees" par

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

ou les series derivees ont le meme rayon de convergence que la serie de base car

$$\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup(n^k |a_n|)^{\frac{1}{n}}$$

Lemme 11 (Lemme de recentrage)
Soit $f : D(0,r) \to \mathbb{C}$ *donnee par* $\sum a_n z^n$ *avec rauon de convergence* r.
Soit $z_* \in D(0,r)$. *On a que la serie*

$$\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_*)(z - z_*)^n$$

converge avec rayon de convergence $\geq r - |z_*|$ *ou* f^n *est la derivee formelle de f definie ci-dessus.*

Preuve

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum a_n z^n \\ &= \sum a_n (z - z_* + z_*)^n \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z - z_*)^k z_*^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} z_*^{n-k} (z - z_*)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!} n(n-1)\dots(n-k+1) z_*^{n-k} (z - z_*) k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_*)}{k!} (z - z_*)^k$$

Si on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 1_{k \leq n} |a_n| \binom{n}{k} |z_*^{n-k}| |z - z_*|^k < \infty \qquad \square$$

or ceci converge car $z_* \in D(0, r)$ en effet $\exists \epsilon > 0$ tel que $|z_*| + \epsilon < r$

4.4 Zeros isoles

Proposition 12
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ analytique, non nulle, alors l'ensemble

$$\{z \in U : f(z) = 0\}$$

ne contient pas de points d'accumulation dans U.

Preuve
Supposons $z_* \in U$ un point d'accumulation.
Par le lemme de recentrage $\exists \epsilon > 0$ tel que $f(z) = \sum a_n (z - z_*)^n$.
Par hypothese $\exists m$ tel que $a_m \neq 0$.
Soit n le plus petit tel entier

$$f(z) = (z - z^*)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - z_*)^n \qquad \square$$

Donc il existe un voisinage de z^* ou f est continue (parce que la serie converge uniformement sur les compacts).

Lecture 4: Series entieres suite

Mon 04 Oct

Corollaire 13
Une fonction analytique $f : U \to \mathbb{C}$ a un unique developpement en serie entiere au voisinage de chaque $z_* \in U$.

Preuve
Sans perte de géneralité $z_* = 0$.
Si on a deux developpements en serie $\sum a_n z^n$ *et* $\sum \tilde{a}_n z^n$ *qui definissent la meme fonction, donc*

$$\sum (a_n - \tilde{a}_n) z^n$$

s'annule au voisinage de 0, *donc* $a_n = \tilde{a}_n$. □

> **Corollaire 14**
> *Soient* $f, g : U \to \mathbb{C}$ *analytiques.*
> *Si* f *et* g *coincident sur un ensemble avec un point d'accumulation dans* Σ, *alors* $f(z) = g(z) \forall z \in \Sigma$.

Preuve
Montrons d'abord que si z_* *est un point d'accumulation de* Σ, *alors* $z_* \in \Sigma$ *et* $\exists r > 0$ *tel que* $\Sigma \ni D(z_*, r)$.
On developpe $f - g$ *en serie au voisinage de* z^* *et on obtient une serie nulle au voisinage de* z_* .
Pour conclure que $\Sigma = U$, *on utilise un argument de connexite.*
Soit $z' \in U$, *comme* U *est un domaine,* $\exists \gamma : [0, 1] \to U$ *allant de* $z_* \in \Sigma$ *a* z'.
Soit $s \geq 0$ *defini par* $s = \sup \{S \geq 0 | f(\gamma(t)) = g(\gamma(t)) \forall t \in [0, S]\}$.
Si on a que $s = 1$, *on a fini.*
Si on avait $s < 1$, *on sait que* $s > 0$ *car* z_* *est un point d'accumulation.* $\gamma(s)$ *est donc un point d'accumulation de* Σ, *donc*

$$\exists r > 0 \text{ tel que } f - g$$

s'annule sur $D(\gamma(s), r)$ *mais du coup on a que* $f(\gamma(t)) = g(\gamma(t))$ *pour* $t \in [0, s]$.□

5 Fonctions $\exp, \log, \sin, \cos, \sinh, \cosh$

5.1 $\exp$

Definition 7 (Exponentielle)
$\exp(z)$ *aussi note* e^z *est la fonction analytique definie par*

$$\sum \frac{z^n}{n!}$$

La propriete fondamentale est qu'elle transforme l'addition en multiplication

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$$

En effet

$$\exp(z + w) = \sum_n \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{n!} \binom{n}{k}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{n}\sum_{k} 1_{k\leq n}\frac{z^k}{k!}\frac{w^n}{n!} \\
&= \sum_{k}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\frac{z^k}{k!} \\
&= \exp(w)\exp(z)
\end{aligned}
$$

L'echange est justifie car la serie converge absolument.
Car $\exp > 0$, et $\exp' > 0$, exp est strictement croissante sur $[0, \infty)$ et de meme (car $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$) , elle envoie $(-\infty, 0]$ sur $(0, 1]$ bijectivement.
Pour $t \in \mathbb{R}$, on definit $\cos(t) = \mathrm{Re}(\exp(it))$ et $\sin(t) = \mathrm{Im}(\exp(it))$.
Sur $i\mathbb{R}$, on a $\bar{e^{it}} = e^{-it}$ (on regarde le developpement en serie), on en deduit

$$|e^{it}| = \sqrt{e^{it}\bar{e^{it}}} = \sqrt{1}$$

Et donc

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \text{ et } \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

On peut maintenant etendre ces definitions a tout $z \in \mathbb{C}$, en posant

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ et } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

De meme, on pose

$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \text{ et } \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

exp **sur** $i\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \to S^1 \quad t \mapsto e^{it} := \cos t + i \sin t$$

Comme on a le developpement en serie de sin et cos, on a

$$\sin' t = \cos t \text{ et } \cos'(t) = -\sin(t)$$

On sait donc qu'il existe un point t^* tel que $\cos(t^*) = 0$(sinon cos serait borne inferieurement, et sin grandirait a l'infini).
exp est periodique dans la direction imaginaire, montrons que 2π est la plus petite periode possible, cad que $\forall t \in (0, 2\pi)$.
Pour cela, notons que sur $(0, \frac{\pi}{2})$ cos et sin sont strictements positifs.
Posons $t = 4s, s \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$e^{it} = (e^{is})^4 = (u + iv)^4, u, v > 0$$

Donc

$$e^{it} = (u + iv)^4 = u^4 + v^4 - 6u^2v^2 + 4i(u^2 - v^2)$$

Si on veut $e^{it} = 0$, alors $u^2 - v^2 = 0 \Rightarrow u^2 = v^2$ donc $u^2 = v^2 = 1$, mais alors

$$u^4 + v^4 - 6u^2v^2 \neq 0$$

Contradicition

Lecture 5: ...

Thu 07 Oct

5.2 Logarithme

Moralement, on aimerait definir le logarithme comme "l'inverse" de l'exponentielle.
Dans les reel, c'est ainsi qu'on avait procede, mais la difference, c'etait que la fonction exponentielle etait bijective.
Ici, on a que la fonction exponentielle $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective.
Du coup on aurait envie de definir le log sur $\mathbb{C}^*$, mais la fonction exponentielle n'est pas injective.
En fait, cela fait qu'on ne peut pas definir une fonction log qui soit continue sur $\mathbb{C}^*$. Si on essaie de poser

$$\log \exp(a + ib) = a + ib$$
$$\log e^a e^{ib} = \log |w| + i \arg w$$

Comment choisir $\arg w$.

Definition 8
Une determination du logarithme est une fonction

$$L : U \to \mathbb{C}$$

ou U est un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $e^{L(z)} = z$

Remarque
Sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a une determination de l'argument et du log : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on prend $argw$ dans $(-\pi, \pi)$.

Proposition 16
Il n'existe pas de determination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$

Preuve
Tous les problemes viennent du fait qu'on fait un tour autour de l'origine.
Montrons qu'il n'en existe pas sur $\mathbb{S}^1$.
Supposons qu'on ait une telle determination du log.
Posons $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definie par $u^\theta = f(e^{i\theta})$. On a $u(\theta) - \theta = 2\pi in\theta$ puisque

$e^{u(\theta)} - \theta$
Donc

$$\operatorname{Im} u(\theta) = \arg(e^{i\theta}) + 2\pi\mathbb{Z}$$

Cependant

$$u(\theta + 2\pi) = \theta + 2\pi + n = u(\theta)$$ □

6 Fonctions holomorphes

On souhaite generaliser la notion de derivee aux fonctions complexes.
Une possibilite est de voir le plan $\mathbb{R}^2$ et en utilisant les notions de calcul differentiel sur $\mathbb{R}^2$
La notion d'holomorphie, c'est celle d'etre derivable au sens d'une variable complexe, et on verra que c'est une notion beaucoup plus forte que celle d'etre differentiable au sens de $\mathbb{R}^2$, mais suffisamment naturelle pour etre verifiee dans beaucoup de cas

Definition 9 (Fonction Holomorphe)
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ ou U est un domaine de $\mathbb{C}$. On dit que f est holomorphe en $z \in U$ s'il existe une limite notee $f'(z) \in \mathbb{C}$ si la limite suivante existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

ou la limite est prise au sens complexe.
Formellement, cela veut dire $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que si $h \in D(0, \delta) \setminus \{0\}$ on a

$$\left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z)\right| \leq \epsilon$$

Une autre maniere d'ecrire cela

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(h)$$

ou $o(h)$ est telle que $|o(h)/h| \to 0$.

Comment comprendre ca en termes de derivees partielles en faisant l'identification $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$?
Dire que la fonction a un developpment de Taylor au 1er ordre pour une fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1+h_1, x_2+h_2) \\ f_2(x_1+h_1, x_2+h_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_1, x_2) & \partial_2 f_1(x_1, x_2) \\ \partial_1 f_2(x_1, x_2) & \partial_2 f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(h_1, h_2)$$

Donc la matrice Df_{x_1,x_2} doit etre la matrice de la composition d'une rotation et d'une homothetie. Donc la contrainte d'etre differentiable au sens complexe est equivalence a celle de demander d'etre differentiable au sens de deux variables relles et d'avoir que la jacobienne soit de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

donc

$$\partial_1 \operatorname{Re} f = \partial 2 \operatorname{Im} f \text{ et } \partial_1 \operatorname{Im} f = -\partial 2 \operatorname{Re} f$$

Definition 10

On dit que f satisfait les equations de Cauchy-Riemann si

$$\partial_1 \operatorname{Re} f = \partial 2 \operatorname{Im} f \text{ et } \partial_1 \operatorname{Im} f = -\partial 2 \operatorname{Re} f$$

Proposition 17

f est holomorphe en $z = x_1 + ix_2 \iff f$ est derivable au sens de $\mathbb{R}^2$ et satisfait les equations de Cauchy-Riemann.

Definition 11

On dit que f est holomorphe sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ si elle est C^1 (au sens de $\mathbb{R}^2$) et qu'elle est holomorphe en tout point de U

6.1 Analytique $\Rightarrow$ Holomorphe

Proposition 18

Si

$$f(z) = \sum a_k (z - z_*)^k$$

a comme rayon de convergence ρ , alors f est holomorphe sur $D(z_*, \rho)$ et f' est donee par la serie entiere

$$f'(z) = \sum k a_k (z - z_*)^{k-1}$$

qui a aussi comme rayon de convergence ρ.

Preuve

La serie qui donne la derivee converge avec rayon de convergence ρ. Maintenat, ce qu'il nous faut, c'est de montrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - hf'(z)}{h} = 0$$

Supposons $z_* = 0$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k (z+h)^k - a_k z^k}{h} - hkz^{k-1} \to 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k[(z+h)^k - z^k - khz^{k-1}]}{h}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k[h[(z+h^{k-1}) + (z+h)^{k-2} + \ldots + z^{k-1}]] - khz^{k-1}}{h}$$

On va montrer que $\forall \epsilon > 0$, on peut rendre la queue de la serie plus petite que $\frac{\epsilon}{2}$ en allant assez loin dans la serie et qu'ensuite, pour le N fixe qui sortira, on pourra prendre h assez petit pour que les N premieres termes soient plus petits que $\frac{\epsilon}{2}$.
Notons que pour mh suffisamment petit (il existe $\delta_1 > 0$ tel que si $h \in D(0, \delta_1), z + h \in D(0, \rho)$) et du coup on aura la convergence de

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k[[|z+h|^{k-1} + \ldots + |z^{k-1}|] + k|z|^{k-1}]$$

vu que

$$[|z+h|^{k-1} + \ldots] \leq k(|z| + |h|)^k$$

□

Lecture 6: ...

Mon 11 Oct

Corollaire 19
Si f est analytique, f est infiniment derivable au sens complexe.

Preuve
f' est analytique, donc holomorphe, avec derivee f'', elle meme aussi analytique □

Definition 12 (Operateurs de Wirtinger)
Pour $f : U \to \mathbb{C}$, C^1 vue comme $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$.
On note

$$\partial_z f = \partial f = \frac{1}{2} (\partial_x - i\partial_y)$$

et

$$\partial_{\overline{z}} f = \frac{1}{2} (\partial_x + i\partial_y)$$

7 Integration Complexe

But : Trouver l'operation "inverse" de la derivation complexe.

Definition 13 (Chemin)
Un chemin de a a b dans $U \subset \mathbb{C}$ est une fonction continue $\gamma : [0, 1] \to U$ C^1 par morceaux, avec derivee bornee, avec $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$

Definition 14
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ continue et $\gamma : [0,1] \to U$ un chemin.
On definit

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Remarque
L'integrale complexe $\int_\gamma f(z)dz$ depend en general du chemin de γ mais pas de sa parametrisation.
Si $\phi : [0,1] \to [0,1]$ est bijective, croissante, derivable sur $(0,1)$ et $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ alors

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz$$

Preuve
Formule de changement de variable.
En supposant γ C^1 (pas par morceaux)

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt &= \int_0^1 f(\gamma(\phi(s)))\gamma'(\phi(s))\phi'(s)ds \\ &= \int_0^1 f(\tilde{\gamma})\tilde{\gamma}'(s)\end{aligned}$$ □

Definition 15 (Longueur)
Pour γ un chemin, sa longueur est donnee par

$$l(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|dt$$

Definition 16 (Lacet)
Si $\gamma(0) = \gamma(1)$, γ est un lacet.

Propriete de l'integration complexe

- Si $\gamma : [0,1] \to U$ et $\ominus\gamma : [0,1] \to U$ est defini par $\ominus\gamma(s) = \gamma(1-s)$

$$\int_{\ominus\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$$

- Si $\gamma, \tilde{\gamma} : [0,1] \to U$ avec $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(0)$, alors

$$\gamma \oplus \tilde{\gamma} : [0,1] \to U$$

  est defini par

$$\gamma \oplus \tilde{\gamma}(s) = \begin{cases} \gamma(2s) \text{ si } s \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{\gamma}(2s-1) \text{ si } s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

  et on a

$$\int_{\gamma\oplus\tilde{\gamma}} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz$$

— Si $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe

$$\int_\gamma f'(\zeta)d\zeta = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

Lecture 7: Integration Complexe

Thu 14 Oct

Preuve

Considerons la fonction

$$t \mapsto f'(\gamma(t))\gamma'(t)$$

est la derivee (au sens reel) de

$$t \mapsto f(\gamma(t))$$

et on peut donc y appliquer le theoreme fondamental du CDI. □

Proposition 21 (Integration par parties)
Soient $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorphes et $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un chemin, alors

$$\int_\gamma f'g = f(\gamma(x))g(\gamma(x))\big|_0^1 - \int_\gamma fg'$$

Preuve

$$(fg)' = f'g + fg'$$

et on integre. □

Proposition 22
Si $f : U \to \mathbb{C}$ continue, $\gamma : [0,1] \to U$, alors

$$|\int_\gamma f(z)dz| \leq l(\gamma) \max_\gamma |f(z)|$$

Preuve

Suit de

$$\int_0^1 g(t)dt \leq \max g$$

pour les integrales reels. □

8 Holomorphie et deformation de Contours

But : Savoir dans quelle mesure

$$\int_\gamma f(z)dz$$

depend de γ. L'astuce est de deformer progressivement le chemin.
Si $\gamma, \tilde{\gamma} : [0,1] \to U$ avec $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$ et $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$, on a que $\gamma \ominus \tilde{\gamma}$ est un lacet.

8.1 Integration sur un petit carre

Si $f : U \to \mathbb{C}$ est C^1, avec $\partial Q(z,\epsilon) \subset U$.
Calculons

$$\oint_{\partial Q(z,\epsilon)} f(z)dz = (\int_b + \int_d + \int_g + \int_h)(f(z)dz)$$

On va supposer $z = 0$

$$\begin{aligned} b(t) &= -\frac{\epsilon}{2} + (t - \frac{1}{2})\epsilon \\ d(t) &= \frac{\epsilon}{2} + i(t - \frac{1}{2})\epsilon \\ h(t) &= \frac{i\epsilon}{2} + (t - \frac{1}{2})\epsilon \\ g(t) &= \frac{\epsilon}{2} + (t - \frac{1}{2})\epsilon \end{aligned}$$

Donc

$$\int_b f(z)dz = \int_0^1 f(\frac{\epsilon i}{2} + (t - \frac{1}{2}\epsilon))\epsilon dt$$

et

$$\int_d f(z) = \int_0^1 f(\frac{\epsilon}{2} + i(t - \frac{1}{2})\epsilon)\epsilon dt$$

Comme f est C^1

$$f(-\frac{i\epsilon}{2} + (t - \frac{1}{2})\epsilon) = f(0) - \frac{\epsilon}{2}\partial_x f(0) + (t - \frac{1}{2})\epsilon\partial_y f(0) + o(\epsilon)$$

Si on somme les 4 termes multiplie par leur facteur, on obtient $\epsilon^2(i\partial_1 f(0) - \partial_2 f(0)) + o(\epsilon^2)$.
Si on integre sur un carre de cote 1, le nombre de carres est d'ordre $\frac{1}{\epsilon^2}$, si f est holomorphe, la somme sur ces contributions tend vers 0.

8.2 Deformations

On a envie de montrer que pour une deformation locale d'un contour qui ne change pas les extremites, l'integrale de contour de f holomorphe ne change pas.

Definition 17 (Homotopie)
Un lacet γ est dit homotope a un autre lacet $\tilde{\gamma}$ s'il existe une fonction

$$F : [0,1] \times [0,1] \to U$$

tel que $f(\cdot, 0) = \gamma, F(\cdot, 1) = \tilde{\gamma}$

et $\forall s \in [0,1], F(\cdot, s)$ est un lacet.

Definition 18 (Contractable)
Un lacet est contractible s'il est homotope au lacet trivial.

Definition 19
Un ouvert est dit simplement connexe si tout lacet dans U est contractible, et il est dit etoile par rapport a $z^* \in U$ si $\forall w \in U$ le segment $[z^*, w] \in U$

Lecture 8: Integration complexe suite

Mon 18 Oct

Proposition 23
U etoile $\Rightarrow U$ simplement connexe

Preuve
On prend l'homotopie de retraction $\Gamma(s,t) = sz_* + (1-s)\gamma(t) \in U$ □

Proposition 24
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe et γ un contour contractible tel que $\Gamma(s,t) = sz_* + (1-s)\gamma(t) \in U$.
Alors $\int_\gamma f(z)dz = 0$

Preuve
Posons $I(s) = \int_{\gamma_s} f(z)dz$.
On a

$$I(0) = \int_\gamma f(z)dz \quad I(1) = 0$$

Calculons $\frac{\partial}{\partial s} I(s) = \int_0^1 f((1-s)\gamma(t) + sz_*)(1-s)\gamma'(t)$.
En permutant, on trouve

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^1 f((1-s)\gamma(t) + sz_*)\gamma'(t)dt \\
&+ (1-s)\int_0^1 f'((1-s)\gamma(t) + sz_*)(-\gamma(t) + z_*)\gamma'(t)dt \\
&= -\int_\gamma g_s(z)dz + \int_\gamma g_s'(z)(z_* - z)dz \\
&= -\int_\gamma g_s(z)dz - \int_\gamma g_s(z)dz = 0
\end{aligned}$$

Avec

$$g_s(z) = f((1-s)z + sz_*)$$

et

$$g_s'(z) = f'((1-s)z + sz_*)(1-s)$$ □

Theorème 25
Soit f une courbe holomorphe et $\gamma : [0,1] \to U$ un contour contractible dans U alors

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Preuve
On peut ecrire $\int_\gamma f(z)dz$ comme

$$\sum_i \int_{\gamma_i} f(z)dz$$

ou les γ_i sont retractables. □

Corollaire 26
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\gamma, \tilde{\gamma}$ deux contours avec memes extremites homotopes.

Preuve
$\gamma \ominus \tilde{\gamma}$ *est contractible.* □

8.3 Existence de primitives holomorphes

On a deja vu que $\int_\gamma f'(z)dz = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$ et donc pour un lacet $\int_\gamma f'(z)dz = 0$.
Est-ce que si $\int_\gamma f'(z)dz = 0$ pour tout γ, alors $f = F'$ pour F holomorphe.

Definition 20
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On dit que f a une primitive holomorphe F si $F' = f$.

Comment construire F, si elle existe ?
On aimerait prendre $z_* \in U$ et poser $F(z) = \int_{z_*}^z f(\zeta)d\zeta$, mais poour que ca soit bien defini, il faut que l'integrale ne depende pas du choix du chemin de z_* a z.
Cela motive la definition suivante : On dit que $f : U \to \mathbb{C}$ continue satisfait la condition de Morera si pour tout lacet γ : $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Definition 21
Si f satisfait la condition de Morera, on definit

$$\int_{z_*}^z f(\zeta)d\zeta$$

comme la valeur commune de $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta$.

Theorème 27
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ continue. Alors f a une primitive holomorphe si et seulement si f satisfait la condition de Morera.

Preuve
Si f a une primitive holomorphe, alors $\int_\gamma F' = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0$ pour tout lacet γ.
Posons $z_* \in U$ et $F(z) = \int_{z_*}^{z} f(\zeta) d\zeta$, montrons que

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} \to f(z)$$

On a

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta$$

On a

$$\frac{F(z+h) - F(z) - hf(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta$$

En choisissant $\gamma(t) = z + th$, on a

$$\leq |\frac{F(z+h) - F(z) - hf(z)}{h} \leq \frac{1}{|h|} l(\gamma) \max_{\zeta \in [z, z+h](f(\zeta) - f(z))} \square \to 0$$

Corollaire 28
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe avec U simplement connexe.
Alors f a une primitive holomorphe.

Preuve
Comme tout lacet γ est contractible, $\int_\gamma f(z) dz = 0$ $\square$

Remarque
On aimerait definir $\log$ comme $\int_1^z \frac{1}{\zeta} d\zeta$ mais ce n'est pas possible sur $\mathbb{C}^*$

8.4 Indice d'un lacet

L'indice d'un lacet autour d'un point.
Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un lacet et soit $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Im} \gamma$, on definit l'indice $\operatorname{Ind}(\gamma, z)$ comme

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

Proposition 30
$\operatorname{Ind}(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$

Lecture 9: ...

Thu 21 Oct

Theorème 31
$\text{Ind}(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$

Preuve
Montrons que

$$\exp\left(\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}\right) = 1$$

Posons $\phi(t) = \exp(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} ds)$

On a donc

$$\partial_t \log \phi(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$$

De meme

$$\partial_t \log(\gamma(t) - z) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$$

Donc

$$\partial_t \log\left(\frac{\phi(t)}{\gamma(t) - z}\right) = 0$$

Si γ *n'est pas derivable sur un ensemble* $S \subset [0,1]$ *fini, la conclusion est la meme car si* $f'(t) = 0 \forall t \in [0,1] \setminus S$ *35* S *fini,* f *constante.* □

8.5 log et racines

Proposition 32
Soit U *un domaine simplement connexe qui ne contient pas 0 et* $z_* \in U$ *et* W_* *tel que* $e^{W_*} = z_*$.
Alors la fonction $L : U \to \mathbb{C}$ *definie par*

$$L(z) = W_* + \int_{z_*}^{z} \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

est telle que

$$\exp(L(z)) = z \forall z \in U$$

Preuve
En z_* *, c'est bon.*
On va essaier de montrer que sur un petit voisinage de W_*, $L \circ \exp = \text{Id}$.
On a

$$(L(e^z))' = \frac{1}{e^z} e^z = 1$$

Si w *est dans un petit voisinage de* W_*.
Donc,

$$\exp(L(\exp(w))) = \exp(w)$$

Comme $\exp$ *est bijective dans un petit voisinage de* W_**, on a* $\exp \circ \log = \mathrm{Id}$.
Dans la section suivante, on verra que holomorphe implique analytique et le principe des zeros isoles s'applique donc a la fonction $\exp \circ \log - \mathrm{Id} = 0$ $\square$

Avec un log on peut definir des racines.
Soit U simplement connexe qui ne contient pas 0, alors pour tout n, il existe n fonctions holomorphes $r_n : U \to \mathbb{C}$ tel que

$$(r_n)^n(z) = z$$

Preuve
Prendre $\exp \frac{1}{n} L(z)$ $\square$

Proposition 33
Soit U *simplement connexe et* $f : U \to \mathbb{C}$*, avec* $f(z) \neq 0 \forall z$*, alors il existe* $L_f : U \to \mathbb{C}$ *holomorphe tel que*

$$\exp(L_f) = f(z)$$

et soit $z_* \in U$ *et* l_* *tel que* $e^{l_*} = z_*$

Preuve
On pose

$$L_f(z) = l_* + \int_{z_*}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$$

$\square$

Remarque
Cela couvre des cas ou $f(U)$ *pourrait ne pas etre simplement connexe.*

Lecture 10: ...

Mon 25 Oct

9 Formule de Cauchy

Donne les valeurs d'une fonction holomorphe a l'interieur d'un lacet en terme des valeurs sur le lacet.

Theorème 35 (Formule de Cauchy)
Soit $f : D(z, \rho) \to \mathbb{C}$ *holomorphe.*
Soit $\gamma : [0, 1] \to D(z, \rho)$ *un lacet homotope dans* $D(z, \rho) \setminus \{z\}$ *a* $\partial D(z, \epsilon)$ *pour* $\epsilon > 0$*, oriente dans le sens trigonometrique.*
Alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Corollaire 36

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe et γ un lacet homotope dans $U \setminus z$ a $\partial D(z,\epsilon)$ dans $z \in U$, alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Preuve

Par hypothese sur γ et par holomorphie de f

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(z,\epsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

pour tout $\epsilon \in (0, \rho)$.

Faisons tendre $\epsilon \to 0$, on utilise

$$f(\zeta) = f(z) + f'(z)(\zeta - z) + o(\zeta - z)$$

On a donc

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(z,\epsilon)} \frac{f(z) + f'(z)(\zeta - z) + o(\zeta - z)}{\zeta - z} d\zeta \\ =&f(z) + f'(z)\oint 1 d\zeta + \oint o(1) d\zeta \\ =&f(z) + 0 + o(\epsilon) \end{aligned}$$

Consequences

1. *Analyticite*

Theorème 37

Soit $f : D(z_*, \rho) \to \mathbb{C}$ holomorphe, alors f est analytique, donnee par

$$f(z) = \sum a_n (z - z_*)^n$$

de rayon de convergence $\geq \rho$ avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_*)^{n+1}} d\zeta$$

Preuve

Supposons $z_* = 0$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Comme

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta^n} z^n$$

On a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial D(0,\rho)} \sum \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta) z^n \end{aligned}$$

□

2. *Ainsi, f holomorphe implique f' holomorphe.*

Theorème 38 (Morera)
Si $f : U \to \mathbb{C}$ continue satisfait $\forall \gamma$ contractible

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

Alors f est analytique.

Preuve
Soit $z_* \in U$ et $\epsilon > 0$ tq $D(z_*, \epsilon) \subset U$.
Comme tout lacet est contractible dans $D(z_*, \epsilon)$, et ainsi f analytique. La condition de Morera dans $D(z, \epsilon)$ est satisfaite. □

Lecture 11: Liouville

Thu 28 Oct

9.1 Applications de Morera

Theorème 39
Soit $f_n : U \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur tous les compacts de U vers $f : U \to \mathbb{C}$.
Alors f est holomorphe.

Preuve
f est continue, et pour tout $\gamma : [0, 1] \to U$ contractible (dans U), on a

$$\oint_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to+\infty} \oint_\gamma f_n(z)dz$$

car γ est compact. □

Corollaire 40
Si $\sum f_n$ avec f_n holomorphe et pour tout compact $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, alors la serie converge vers une fonction holomorphe.

10 Applications de la formule de Cauchy

Theorème 41 (Inegalites de Cauchy)
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe, $z \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z, r) \subset U$ et soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta - z)^n$ le developpement de f en z.
Alors

$$|a_n| \leq r^{-n} \max_{\zeta \in \partial D(z,r)} |f(\zeta)|$$

Preuve
Par la formule de Cauchy, on a

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \\
|a_n| &\leq |\frac{1}{2\pi i}| \mathcal{L}(\partial D(z, r)) \max_{\zeta \in \partial D(z,r)} \frac{|f(\zeta)|}{(\zeta - z)^{n+1}} \\
&= r^{-n} \max_{\zeta \in \partial D(z,r)} |f(\zeta)|
\end{aligned}$$

□

Theorème 42 (Formule de Parseval)
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe, $z \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z, r) \subset U$.
Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta} + z)|^2 d\theta$$

Preuve
Supposons $z = 0$.

$$\begin{aligned}
f(re^{i\theta}) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \\
\overline{f}(re^{i\theta}) &= \sum_{n=0}^{\infty} r\overline{a_n} e^{-in\theta}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2(re^{i\theta}) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n,m} r^{n+m} a_n \overline{a_m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\
&= \sum r^{2n} |a_n|^2
\end{aligned}$$

□

Theorème 43 (Principe du maximum)
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe et $z \in U$.
Alors si $|f|$ atteint un max local en z, f est constante.

Preuve
Ecrivons $f(\zeta) = \sum a_n(\zeta - z)^n$.
Si $|f|$ *a un max, alors il existe* $r > 0$ *tel que* $\overline{D}(z,r) \subset U$ *et*

$$|f(z)|^2 \geq \max_{\zeta \in \partial D(z,r)} |f(\zeta)|^2$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z+re^{i\theta})|^2 - f(z)d\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} - |a_0|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq 0 \end{aligned}$$ □

Donc $a_n = 0 \ \forall n \geq 1$.
Donc f *constante sur* $\partial D(z,r)$ *et donc sur tout* U.

Theorème 44 (Theoreme de Liouville)
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorphe.*
Alors si $|f|$ *est bornee,* f *est constante.*

Preuve
Par les inegalites de Cauchy, appliquees a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,

$$|a_n| \leq \frac{1}{r} \max |f(\zeta)|$$ □

Lecture 12: Singularites

Mon 01 Nov

Proposition 45
Soit f *entiere non constante.*
Alors $f(\mathbb{C})$ *est dense dans* $\mathbb{C}$

Preuve
Par l'absurde, sinon $\exists w \in \mathbb{C}$, $\exists \delta > 0$ *tel que* $\forall \zeta \in f(\mathbb{C}), |\zeta - w| \geq \delta$.
Donc $z \mapsto \frac{1}{f(z)-w}$ *est bornee, donc constante, donc* f *est constante.* □

Theorème 46 (Theoreme de l'application ouverte)
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ *holomorphe non-constante, alors* $\forall$ *ouvert* $V \subset U, f(V)$ *est un ouvert.*

Preuve
Il faut montrer que l'image de tout voisinage de $z \in U$ *est un voisinage de* $f(z) \in V$.

Si $f'(z) \neq 0$ *, evident, par le theoreme de la fonction inverse.*
Supposons que $z = 0$ *et* $f(z) = 0$*, alors on peut ecrire*

$$f(\zeta) = \sum_{n=k} a_n \zeta^k$$

Ce qui donne

$$f(\zeta) = \zeta^k g(\zeta), g(\zeta) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \zeta^{n-k}$$

Dans un voisinage de 0 *, on peut ecrire*

$$\begin{aligned} f(\zeta) = \phi^k(\zeta), \ \ ou \\ \phi(\zeta) = \zeta\left(g(\zeta)\right)^{\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

Maintenant $\phi'(0) \neq 0$.
Donc ϕ *envoie un voisinage de* 0 *vers un voisinage de* 0 *.*
Maintenant $w \mapsto w^k$ *envoie ce voisinage de* 0 *vers un autre voisinage de* 0 □

Proposition 47 (Limite de fonctions holomorphes)
Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite* $f_n : U \to \mathbb{C}$ *de fonctions holomorphes qui converge uniformement sur les compacts vers* $f : U \to \mathbb{C}$*.*
Alors f *est holomorphe et de plus* $\forall k \geq 1$

$$f_n^{(k)} \to f^{(k)}$$

uniformement sur les compacts.

Preuve
Montrons que pour tout $z \in U \exists \delta > 0$ *tel que* $f_n^{(k)}|_{\overline{D}(z,\delta)} \to f^{(k)}$.
Soit $z_* \in U$ *et* $\delta > 0$ *tel que* $\overline{D}(z_*, 2\delta) \subset U$.
Pour $z \in \overline{D}(z_*, \delta)$ *on a*

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\overline{D}(z_*,2\delta)} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

on a que

$$\zeta \mapsto \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} = g_n(\zeta)$$

Converge uniformement par rapport a z *quand* $n \to \infty$ *et aussi uniformement par rapport a* ζ*.*
Donc

$$\oint g_n(\zeta) d\zeta$$ □

converge uniformement quand $n \to \infty$

11 Singularites

On aimerait pouvoir considerer pour f holomorphe $\frac{1}{f}$, sans se poser la question de savoir $f \neq 0$.
Comme les 0 de f sont isoles, on devrait pouvoir donner un sens a cela.

11.1 Series de Laurent

Pour $z_* \in \mathbb{C}, \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_*)^n$ est ce qu'on appelle une serie de Laurent. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_*)^n$ est appelee partie reguliere et $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_*)^n$ partie singuliere.
On dit que la serie converge si la partie reguliere converge et $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{-1} a_n(z-z_*)^n$.
Pour une serie de Laurent, son anneau de convergence

$$A(z_*, r, R) = D(z_*, R) \setminus \overline{D}(z_*, r) etr = \frac{1}{\rho}$$

ou

$$\rho = \text{ rayon de convergence de } \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$$

> **Proposition 48 (Formule de Cauchy sur l'anneau)**
> *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe et $z_* \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{A}(z_*, r, R) \subset U$.*
> *Alors $\forall z \in A(z_*, r, R)$*
>
> $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_*,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_*,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

Lecture 13: Series de Laurent

Thu 04 Nov

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe avec $U \supset \overline{A}(z_*, r, R)$, est-ce que $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_*)^n$ sur $\overline{A}(z_*, r, R)$?
Oui !

> **Theorème 49 (Formule de Cauchy generalisee)**
> *Pour $z \in A(z_*, r, R)$*
>
> $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial} D(z_*, R) \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial} D(z_*, r) \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Preuve
Comme f est holomorphe sur un voisinage de z, $\exists \delta$ tel que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z,\delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

On deforme $\partial D(z,\delta)$ dans $\overline{A}(z_*,r,R)\setminus\{z\}$ jusqua obtenir un contour entourant les deux bords de $\overline{A}(z_*,r,R)$.
On a donc

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(z_*,R)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(z_*,r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \qquad \square$$

Theorème 50 (Developpement en serie de Laurent)
Soit $f:U\to\mathbb{C}$ holomorphe avec $U\supset\overline{A}(z_*,r,R)$ Alors

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_*)^n$$

sur $\overline{A}(z_*,r,R)$ ou

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(z,R)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_*)^{n+1}}d\zeta\forall n\in\mathbb{Z}$$

avec convergence uniforme sur les compacts

Preuve
On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta-z}&=\frac{1}{\zeta(1-\frac{z}{\zeta})}\\&=\frac{1}{\zeta}\sum(\frac{z}{\zeta})^n \text{ si } |z|<|\zeta|\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta-z}&=\frac{-1}{z}(\frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}})\\&=-\frac{1}{z}\sum\left(\frac{\zeta}{z}\right)^n\end{aligned}$$

On peut supposer $z_*=0$ en posant $g(z)=f(z_*+z)$.
Montrons que $g(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$.
On a

$$\begin{aligned}g(z)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(R)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\\&=\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C(R)}g(\zeta)\frac{1}{\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^n}-\oint_{C(r)}g(\zeta)\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{z^n}\right]\\&=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\oint\frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta z^n\end{aligned} \qquad \square$$

Corollaire 51
Si $f : U \to \mathbb{C}$ *holomorphe et* $U \supset \overline{A}(z_*, r, R)$ *alors*

$$f = f_{int} + f_{ext}$$

Ou f_{int} *est holomorphe sur* $D(z, r)$ *et* f_{ext} *est holomorphe sur* $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(z, r)$

11.2 Singularites

Si $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe avec $U \supset A(z_*, 0, R)$, on dit que f a une singularite en z_*.
A partir des resultats ci-dessus, f est donnee par $\sum_{n=\infty}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$ ou la serie converge sur les compacts de $A(z_*, 0, R)$.

Definition 22
Si f *a une singularite en* z_**, on dit qu'elle est est effacable ou illusoire si* $a_n = 0 \forall n \leq -1$.
On dit qu'elle est d'ordre fini $n \geq 1$ *ou dotee d'un pole d'ordre* $n \geq 1$ *si* $a_{-n} \neq 0$ *et* $a_k = 0 \forall k < -n$.
On dit qu'elle a une singularite essentielle si

$$\{n \leq -1 | a_n \neq 0\}$$

est infini.

Definition 23 (Valuation)
On note $v_{z_*}(f)$ *la valuation de* f *en* z_* *defini comme*

$$\inf \{n : a_n \neq 0\}$$

Remarque
Si on a une singularite effacable en z_**,* f *est bornee au voisinage de* z_* *(et peut etre etendue par* a_0 *en* z_* *).*
Reciproquement, si f *est bornee au voisinage de* z_**, pour* $n \leq -1$*,* $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_*)^{n+1}}$ *est bornee au voisinage de* z_* *et donc* $a_n = 0$

Theorème 53 (Casorati-Weierstrass)
Soit f *avec une singularite essentielle en* z_**. Alors* $\forall w \in \mathbb{C}, \exists (z_n)_{n \geq 0}$*,* $z_n \in U$ *tel que* $f(z_n) \to w$.
En d'autres termes, l'image de tout voisinage de z_* *est dense dans* $\mathbb{C}$.

Preuve
Par l'absurde, supposons qu'il existe un $w \in \mathbb{C}$ *non approchable par des suites* $f(z_n)$.

On aurait donc $|f(z) - w| \geq \epsilon$ *pour* $\epsilon > 0$ *dans un voisinage de* z_*.
Mais alors $\frac{1}{f(z)-w}$ *est borne au voisinage de* z_*, *donc elle aurait une singularite effacable.*

$$\frac{1}{f(z) - w} = \sum_{k=n}^{\infty} b_k (z - z_*)^k$$

Donc quand $z \to z_*$ $f(z-w) = O(\frac{1}{|z-z_*|^n})$, *ce qui contredit l'hypothese que c'est une singularite essentielle.* $\square$