Analyse I

David Wiedemann

Table des matières

1 Introduction **5**
1.1 Buts du Cours 5

2 Definir $\mathbb{R}$ **6**
2.1 Exemple d'utilisation 8

3 Suites et limites **13**
3.1 Convergence 13

4 Limsup et liminf **18**
4.1 Suites de Cauchy 22

5 Series **23**
5.0.1 Un calcul naif (avec la série harmonique alternée) . . . 29

6 Fonctions **35**
6.1 Continuité 40

7 Suites de Fonctions **47**

8 Dérivation **52**
8.1 Applications de la dérivée 55
8.1.1 Recherche d'extremums 55
8.2 Principe de Bernoulli-L'Hospital 60

List of Theorems

1 Theorème (env. -400) 5
2 Lemme (Lemme) 5
3 Axiom (Nombres Reels) 6
4 Lemme (Theorem name) 7
5 Proposition (Annulation de l'element neutre) 7
6 Corollaire (x fois moins 1 egale -x) 7

7	Axiom (Nombres Reels II)	8
1	Definition (valeur absolue)	8
8	Proposition (Inegalite du triangle)	8
2	Definition (Bornes)	9
9	Axiom (Axiome de completude)	9
3	Definition (Supremum)	9
14	Proposition	10
15	Corollaire (Propriete archimedienne)	10
16	Theorème (La racine de deux existe)	10
18	Proposition ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$)	11
19	Lemme	11
20	Proposition (Densite des irrationnels)	12
4	Definition (Suite)	13
5	Definition (Convergence de suites)	13
23	Lemme (Unicite de la limite)	13
6	Definition	14
25	Lemme	14
27	Proposition	14
28	Lemme	15
30	Proposition (Inversion d'une limite)	16
31	Corollaire	16
32	Lemme	16
34	Proposition	17
35	Proposition	17
37	Lemme (Deux gendarmes)	18
7	Definition (Limsup et liminf)	18
38	Theorème	19
39	Theorème (Premiere regle de d'Alembert)	19
8	Definition (Sous-suite)	20
44	Proposition	21
45	Theorème (Bolzano-Weierstrass)	21
9	Definition (Point d'accumulation)	21
10	Definition (Suites de Cauchy)	22
48	Lemme	22
49	Theorème (Convergence des suites de Caucjy)	22
50	Lemme	22
11	Definition (Serie)	23
53	Corollaire	24
54	Corollaire	24
55	Corollaire	25
56	Corollaire (Critere de Cauchy pour les séries)	25

58 Proposition 25
59 Proposition (Serie Geometrique) 26
60 Proposition (Série Harmonique) 26
61 Proposition (Critère de Comparaison) 27
63 Corollaire 27
12 Definition (Séries Alternées) 28
64 Theorème 28
13 Definition 29
68 Lemme 30
69 Theorème 30
71 Theorème 31
72 Theorème (Critere de d'Alembert 2) 32
78 Proposition 33
79 Theorème (Critere de la racine) 34
83 Lemme 35
14 Definition 35
15 Definition 36
85 Theorème 36
87 Corollaire 37
88 Corollaire 37
89 Corollaire 37
90 Corollaire 37
91 Lemme 37
92 Corollaire 38
93 Corollaire (Cauchy) 38
94 Lemme 38
95 Corollaire 39
97 Proposition 39
16 Definition 40
99 Proposition 40
101 Corollaire 40
102 Corollaire 40
104 Proposition 41
17 Definition (Terminologie Supplémentaire) 41
18 Definition 41
19 Definition 41
20 Definition 42
21 Definition (Notation) 42
22 Definition (Notation) 42
106 Theorème 42
107 Theorème 42

108 Proposition 43
23 Definition 43
113 Proposition 44
115 Theorème 44
117 Theorème (Théorème de la valeur intermédiaire (TVI)) 45
118 Corollaire 45
119 Corollaire 46
120 Corollaire 46
121 Proposition (1er theoreme de la fonction implicite) 46
122 Lemme 46
123 Corollaire 47
24 Definition 47
25 Definition (Convergence uniforme de fonctions) 50
127 Proposition 50
128 Theorème 51
129 Theorème (Dini) 51
26 Definition 52
132 Proposition 52
133 Proposition 52
134 Corollaire 53
135 Proposition 53
137 Proposition 54
138 Theorème (Chain Rule) 54
139 Theorème 55
27 Definition (Point Critique) 55
28 Definition 56
142 Proposition 56
144 Proposition (Méthode de recherche d'extremum) 56
145 Theorème (theoreme de Rolle) 56
146 Theorème (théorème des accroissements finis TAF) 57
147 Corollaire 57
148 Corollaire 58
149 Corollaire 58
29 Definition (Fonctions Lipschitzienne) 58
151 Corollaire 58
153 Corollaire (Théorème de Darboux) 59
155 Theorème (Theoreme de Cauchy) 59
156 Theorème (Bernoulli-L'Hospital) 60
157 Theorème (BH pour l'infini) 60

Lecture 1: Introduction

Mon 14 Sep

1 Introduction

1.1 Buts du Cours

Officiel :
Suites, series, fonctions, derivees, integrales , ...

Secrets :
Apprendre le raisonnement rigoureux
Creativite
Esprit Critique
Ne croyez rien tant que c'est pas prouve

On construit sur ce qu'on a fait, on recommence pas toujours a 0, par rapport a d'autres domaines(lettres par exemple)

Theorème 1 (env. -400)
Il n'existe aucin nombre (fraction) x tel que $x^2 = 2$.

Ca contredit pythagore nn ?
On va demontrer le theoreme. [1]

Lemme 2 (Lemme)
Soit $n \in \mathbb{N}$ *Alors* n *pair* $\iff$ n^2 *pair.*

Preuve
$\Rightarrow$ *Si n pair* $\Rightarrow n^2$ *pair.*
Hyp. $n = 2m(m \in \mathbb{N})$
Donc $n^2 = 4m^2$, *pair.*

Par l'absurde, n *impair.* $n = 2k + 1(k \in \mathbb{N})$.

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

impair. Donc si n *est impair, alors* n^2 *est forcement impair. Absurde.* □

Preuve
Supposons par l'absurde $\exists x$ *t.q.* $x^2 = 2$ *et* $x = \frac{a}{b}(a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$.
On peut supposer a *et* b *non tous pairs.(sinon reduire).*

$$x^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$$

1. On demontre d'abord un lemme

pair.
Lemme : a pair, i.e. $a = 2n(n \in \mathbb{N})$.

$$a^2 = 4n^2 = 2b^2 \Rightarrow 2n^2 = b^2, i.e. b^2 pair.$$

Lemme : b pair.
Donc a *et* b *sont les deux pairs, on a une contradiction.*
$\lightning$ $\square$

En conclusion, le theoreme est bel et bien vrai, et contredit donc pythagore. Donc les fractions ($\mathbb{Q}$) ne suffisent pas a decrire/mesurer les longueurs geometriques. Il faut les nombres reels, on les comprends seulement vraiment depuis 2 siecles.
C'est important de chercher ce genre d'erreurs.
Prochain but : definir les nombres reels ($\mathbb{R}$). L'interaction entre les fractions et les nombres reels.

2 Definir $\mathbb{R}$

On commence avec la definition axiomatique des nombres reels.

Axiom 3 (Nombres Reels)
$\mathbb{R}$ est un corps, en d'autres termes :
Ils sont munis de deux operations : plus et fois.
- *Associativite* $x + (y + z) = (x + y) + z(x, y, z \in \mathbb{R})$ [2]

- *Commutativite* $x + y = y + x$.

- *Il existe un element neutre* 0 *t.q.* $0 + x = x, x \in \mathbb{R}$. [3]
- *Distributivite* $x(yz) = (xy)z$

- *Il existe un element inverse, unique* $-x \in \mathbb{R}$ *t.q.* $x + (-x) = 0$

Remarque : Il existe beaucoup d'autres corps que $\mathbb{R}$, par exemple $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\{0, 1, 2\} \mod 3$

Attention : $\{0, 1, 2, 3\} \mod 4$ n'est pas un corps !
Presque tous marchent, ils satisfont 8 des 9 axiomes.

---

2. L'associativite n'est pas forcement vraie(octonions)
3. Il y a aucune difference entre les regles pour l'addition que pour la multiplication.

Lemme 4 (Theorem name)
$\forall x \exists ! y$ *t.q.* $x + y = 0$.

Preuve
Supposons $x + y = 0 = x + y'$
A voir : $y = y'$.

$$\begin{aligned} y &= y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' \\ &= (x + y) + y' = 0 + y' = y' \end{aligned}$$

CQFD. □

Exercice
Demontrer que 0 est unique.

Proposition 5 (Annulation de l'element neutre)
$0 \cdot x = 0$

Preuve

$$x = x \cdot 1 = x(1 + 0) = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$$
$$0 = x + (-x) = x + (-x) + x \cdot 0$$ □

$\Rightarrow 0 = x \cdot 0$
[4]

Corollaire 6 (x fois moins 1 egale -x)

$$x + x \cdot (-1) = 0$$

Preuve
A voir : $x \cdot (-1)$ *satisfait les proprietes de* $-x$.
Or
$$x + x(-1) = x(1 - 1) = x \cdot 0 = 0.$$ □

Exercice
Montrer que $\forall x : -(-x) = x$ et que ceci implique $(-a)(-b) = ab$.

Rien de tout ca n'a quelque chose a voir avec $\mathbb{R}$.
Il nous faut plus d'axiomes!!

4. $a - b = a + (-b)$

Axiom 7 (Nombres Reels II)
$\mathbb{R}$ est un corps ordonne. Ce qui revient a dire que les assertions suivantes sont verifiees.

— $x \leq y$ *et* $y \leq z$ *impliquent* $x \leq z$

— $(x \leq yety \leq x) \Rightarrow x = y$

— *pour tout couple de nombres reels x et y : ou bien $x \leq y$ ou bien $x \geq y$.*

Exemple de corps ordonnnes :
(1) $\mathbb{R}$, (2) $\mathbb{Q}$, (3) $\{0, 1, 2\} \mod 3$ n'est pas un corps ordonne.

<u>Exercice</u>

$x \leq y \iff -x \geq -y$ **<u>Exercice</u>**
$x \leq y$ et $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$
$x \leq y$ et $z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz$.

Il nous manque encore un axiome, et c'est le dernier : pour mercredi !

Lecture 2: Cours Mercredi

Wed 16 Sep

2.1 Exemple d'utilisation

Definition 1 (valeur absolue)

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Proposition 8 (Inegalite du triangle)
Elle dit que

$$\forall x, y : |x + y| \leq |x| + |y|$$

Preuve
Cas $x, y \geq 0$: alors $x + y \geq 0$

$$\iff x + y \leq x + y$$

Ce qui est toujours vrai.
Cas $x \geq 0$ et $y < 0$.
Si $x + y \geq 0$, alors

$$\iff |x + y| \leq x - y$$
$$\iff x + y \leq x - y$$
$$y \leq -y$$

c'est vrai car $y < 0$.
Si $x + y < 0$, alors

$$\iff -x - y \leq x - y \qquad \square$$

Donc $-x \leq x$ vrai car $x \geq 0$.

Definition 2 (Bornes)
Terminologie : Soit $A \subseteq E$, E corps ordonne.

- *Une borne superieure (majorant) pour A et un nombre b tq*

$$a \leq b \forall a \in A.$$

- *Une borne inferieure (minorant) pour A et un nombre b tq*

$$a \geq b \forall a \in A.$$

On dira que l'ensemble A est borne si il admet une borne.

Axiom 9 (Axiome de completude)

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \neq \emptyset$$

et majoree $\exists s \in \mathbb{R}$ t.q

1. *s est un majorant pour A.*

2. *$\forall$ majorant b de A, $b \geq s$.*

Cet axiome finis la partie axiomatique du cours.

Remarque

1. *$\forall s' < s \exists a \in A : a > s'$.*

2. *s est unique.*

Definition 3 (Supremum)
Ce s s'appelle le supremum de A, note $sup(A)$.

Remarque
$\exists$ (pour A minore et $\neq \emptyset$) une borne inferieure plus grande que toutes les autres, notee $inf(A)$ (infimum).

$$\inf(A) = -\sup(-A)$$

Remarque
Si $\sup(A) \in A$, on l'appelle le maximum.

Remarque
Si $\inf(A) \in A$, on l'appelle le minimum.

Proposition 14
$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x.$

Preuve
Par l'absurde,
Alors

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : n < x$$

$\Rightarrow \mathbb{N}$ *borne et* $\neq \emptyset \Rightarrow \exists s = \sup(\mathbb{N})$

$$s - \frac{1}{2} < s \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > s - \frac{1}{2}$$

$n + 1 \in \mathbb{N}$ *et* $n + 1 > s - \frac{1}{2} + 1 = s + \frac{1}{2}$
donc $n + 1 > s$ *absurde.* □

Corollaire 15 (Propriete archimedienne)
1. $\forall x \forall y > 0 \exists n \in \mathbb{N} : ny > x.$
2. $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon$

Preuve
Pour 2, appliquer la proposition a $x = \frac{1}{\epsilon} \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{1}{\epsilon}$
Alors

$$\Rightarrow \epsilon > \frac{1}{n}$$

Pour montrer le 1.
Considerer $\frac{x}{y}$ □

On peut maintenant montrer que la racine de deux existe.

Theorème 16 (La racine de deux existe)

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

Preuve

$$A := \{y | y^2 < 2\}$$

Clairement $A \neq \emptyset$ *car* $1 \in A$. *De plus,* A *est majore :* 2 *est une borne. (si* $y > 2, y^2 > 4 > 2 \Rightarrow y \notin A$*).*
Donc $\exists x = \sup(A)$
Supposons (par l'absurde) que $x^2 < 2$

Soit $0 < \epsilon < 1, \frac{2-x^2}{4x}$.
Clairement, par hypothese $2 - x^2 > 0$ *et idem pour* $4x$ *car* $x \geq 1$. *Soit* $y = x + \epsilon$, *alors*

$$y^2 = x^2 + 2\epsilon x + \epsilon^2 < x^2 + \frac{2-x^2}{2} + \frac{2-x^2}{2} = 2$$

$\Rightarrow y \in A$ *Mais* $y = x+\epsilon > x$. *Absurde car* $x = \sup(A)$. *Donc* $x^2 \geq 2$. *Deuxiemement, supposons (absurde)* $x^2 > 2$.
Soit $0 < \epsilon < \frac{x^2-2}{2x} > 0$.
Posons $b = x - \epsilon$.

$$\begin{aligned} b < x \Rightarrow \exists y \in A : y > b \\ \Rightarrow y^2 > b^2 = x^2 - 2\epsilon x + \epsilon^2 > x^2 - \underbrace{2\epsilon x}_{<x^2-2} \\ > x^2 - (x^2 - 2) = 2. \end{aligned}$$

Conclusion : $y^2 > 2$ *contredit* $y \in a$.
Donc $x^2 = 2$. □

Remarque
Preuve similaire :

$$\forall y > 0 \exists ! x > 0 : x^2 = y$$

Proposition 18 ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$)

$$\forall x < y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y$$

Lemme 19

$$\forall x \exists n \in \mathbb{Z} : |n - x| \leq \frac{1}{2}$$

Ou encore :

$$\forall x \exists [x] \in \mathbb{Z} tq$$

$$\begin{cases} [x] \leq x \\ [x] + 1 > x \end{cases}$$

Preuve

$$\exists n \in \mathbb{Z} : n > x (Archimede).$$

Soit $[x] = \inf\{n \in \mathbb{Z} : n > x\} - 1$ □

Preuve (**Preuve de la densite**)
Archimede : $\exists q \in \mathbb{N} : q > \frac{1}{y-x}$.
Donc

$$\begin{aligned} qy - qx > 1. \\ \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : qx < p < qy \end{aligned}$$

par exemple :

$$p = [qy]$$

si $qy \notin \mathbb{Z}$ *ou bien*

$$p = qy - 1$$

si $qy \in \mathbb{Z}$ □

Lecture 3: Suites

Wed 23 Sep

$$\begin{aligned} 0,999 \\ 0,9 \\ 0.99 \\ 0.999 \\ 0.9999 \\ \vdots \end{aligned}$$

Proposition 20 (**Densite des irrationnels**)
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*, les irrationnels sont dense dans* $\mathbb{R}$.

Preuve
Soit $x < y$ *(dans* $\mathbb{R}$*).*
Cherche $z \notin \mathbb{Q}$ *tq* $x < z < y$.

$$\exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} tq x < \frac{p}{q} < y$$

Propr. archimedienne $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\underbrace{\frac{p}{q} + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{n}}_{:=z} < y$$

car

$$\exists n : \frac{1}{n} < \underbrace{y - \frac{1}{q}}_{>0} / \sqrt{2}$$

Il reste a voir que : $z = \frac{p}{q} + \sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$

$$\sqrt{2} = n(z - \frac{p}{q})$$
$$z \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \lightning$$

□

3 Suites et limites

Definition 4 (Suite)
Une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est une application* ($=$*fonction*) $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Remarque
Suite $(x_n) \neq$ *ensemble* $\{x_n\}$ *Il arrive qu'on indice* x_n *par une partie de* $\mathbb{N}$. *Mais suite* $=$ *suite infinie*

Exemple
$x_n = \frac{1}{n}(n = 1, 2, \ldots)$
$x_n = (-1)^n; x_n = n!; F_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$
$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415$

3.1 Convergence

Definition 5 (Convergence de suites)
L'expression $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$ *signifie :*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$$

On dit alors que (x_n) *converge (vers* l*). Sinon,* (x_n) *diverge.*

Lemme 23 (Unicite de la limite)
Si (x_n) *converge, il existe un unique* $l \in \mathbb{R}$ *tq* $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$

Preuve
Supposons l, l' *limites. Si* $l \neq l'$, *alors* $|l - l'| > 0$ *Donc* $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \frac{|l-l'|}{2}$
De meme $\exists n_1 \forall n > n_1 : |x_n - l'| < \frac{|l-l'|}{2}$
Soit $n > n_0, n_1$ *Alors :*

$$|l - l'| = |l - x_n + x_n - l'| \leq \underbrace{|l - x_n|}_{<|l-l'|/2} + \underbrace{|x_n - l'|}_{|x_n - l'|}$$

Donc
$$|l - l'| < 2 \cdot \frac{|l - l'|}{2}$$

$\lightning$ □

Exemple

1. *Si* (x_n) *est constante (* $\exists a \forall n : x_n = a$) *alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2. $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ (*Archimede*)

Definition 6
Terminologie :
(x_n) *est bornee, majoree, minoree, rationnelle, ... etc si l'ensemble* $\{x_n\}$ *l'est.*
La suite (x_n) *est croissante si* $x_n \leq x_{n+1} \forall n$ *Idem decroissante Dans les deux cas, on dit que la suite* (x_n) *est monotone*

Lemme 25
Toute suite convergente est bornee.

Preuve
Posons $\epsilon = 7$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |x_n - l| < 7 \qquad \square$$

Soit $B_1 \geq |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|$
Posons $B = max(B_1, |l| + 7)$ *Alors* $|x_n| \leq B \forall n$.

Attention la reciproque n'est pas vraie!!

Exemple
$x_n = (-1)^n$ *definit une suite bornee non convergente.*

Preuve
Supposons $\lim_{n \to +\infty} (-1)^n = l$.
Posons $\epsilon = \frac{1}{10}$ *alors* $\exists n_0 \forall n > n_0 : |(-1)^n - l| < \frac{1}{10}$
$n > n_0$ *pair* $\Rightarrow |1 - l| < \frac{1}{10}$
$n > n_0$ *impair* $\Rightarrow |-1 - l| < \frac{1}{10}$
ceci implique

$$\Rightarrow |1 - (-1)| \leq |1 - l| + |-1 - l| < \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \qquad \square$$

Proposition 27
Supposons $\lim_{n \to +\infty} x_n = l$ *et* $\lim_{n \to +\infty} x'_n = l'$
Alors 1. : $\lim_{n \to +\infty} (x_n + x'_n) = l + l'$, *et* 2. : $\lim_{n \to +\infty} x_n \cdot x'_n = l \cdot l'$

Preuve
1 :
Soit $\epsilon > 0$ *Cherche* n_0 *tq* $\forall n > n_0 : |x_n + x'_n - (l + l')| < \epsilon$.
Appliquons les deux hypothese a $\frac{\epsilon}{2}$: $\exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ *et*

$\frac{\epsilon}{2}$: $\exists N' \forall n > N' : |x'_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ *Posons* $n_0 = \max(N, N')$
Si $n > n_0$, *alors*

$$|x_n + x'_n - (l + l')| \leq |x_n - l| + |x'_n - l'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

2 :
Par le lemme, $\exists B$ *tq.* $|x_n|, |x'_n| < B \forall n$.
Soit $\epsilon > 0$. *Appliquons les hypotheses a* $\frac{\epsilon}{2B}$.

$$\exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2B}$$

Si $n > n_0 := \max(N, N')$:

$$\begin{aligned} |x_n x'_n - ll'| &\leq |x_n x'_n - x_n l'| + |x_n l' - ll'| \\ &= \underbrace{|x_n|}_{<B} \cdot \underbrace{|x'_n - l'|}_{<\frac{\epsilon}{2B}} + \underbrace{|l'|}_{<B} \cdot \underbrace{|x_n - l|}_{<\frac{\epsilon}{2B}} < \epsilon \end{aligned}$$

□

Lemme 28
On a utilise : lemme Si $x_n \leq B \forall n$ *et* $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$ *alors* $l \leq B$

Preuve
Par l'absurde :
Si $l > B$, *posons* $\epsilon = l - B > 0$
$\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$
en particulier $x_n > l - \epsilon = B$ ↯

□

Lecture 4: lundi

Mon 28 Sep

Remarque

— $\lim_{n\to+\infty} |x_n| = |\lim_{n\to+\infty} x_n|$, *ce qui est sous-entendu ici est que la limite existe.*

— $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *convergence et limite sont inchangees si on modifie un nombre fini de termes.*
En particulier $(x_n)_{n=17}^{\infty}$, *rien ne change.*

— $x_n \to l$ ($n \to \infty$), *equivalent a* $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$

— *On dit que* (x_n) *converge vers* $+\infty$ *et on note* $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, *si* (x_n) *diverge de la facon suivante :*

$$\forall R \in \mathbb{R}, \exists n_0 \forall n > n_0 : x_n > R$$

La definition est la meme si x_n *converge vers* $-\infty$

Proposition 30 (Inversion d'une limite)
Supposons que (x_n) *converge vers* $l \neq 0$*, alors* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{l}$

Corollaire 31
Si (x_n) *converge vers* l *et*
Si (y_n) *converge vers* $m \neq 0$ *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{l}{m}$$

Car $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$

Lemme 32
Sous les hypotheses de la proposition,

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n \neq 0$$

Preuve
Appliquons la convergence a $\epsilon = \frac{|l|}{2}$ *(car* $l \neq 0$*)*

$$|x_n - l| < \epsilon \Rightarrow x_n \neq 0$$

□

Preuve
Preuve de la proposition
Soit $\epsilon > 0$*.*
On veut estimer

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{l}\right| = \underbrace{\frac{|l - x_n|}{|x_n - l|_{\geq \frac{|l|}{2}|l|}} <?\epsilon}$$

pour n *comme dans le lemme. On veut donc*

$$|l - x_n| < \epsilon \frac{|l|^2}{2}$$

Donc $\exists n_1 \forall n \geq n_1$*, on a bien* $|l - x_n| < \epsilon$ □

Exemple
On peut a present calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_d n^d}{b_0 + \ldots + b_f n^f}$$

$a_d \neq 0, b_f \neq 0$
Si $d > f$ *alors* $lim = \pm\infty$
Si $d < f$ *alors* $lim = 0$

Si $d = f$, *alors* $lim = \frac{a_d}{b_f}$
Justification
La suite peut s'ecrire

$$\frac{a_d + a^{d-1}\frac{1}{n} + \ldots + a_0\frac{1}{n^{d-1}}}{b_0\frac{1}{n^d + \ldots + b_f n^{f-d}}}$$

Si $f = d, \to \frac{a_d}{b_f}$

Si $f > d, \to 0$
Si $f < d, \to \pm\infty$, *selon signe de* $\frac{a_d}{b_f}$

Proposition 34
Soit $a \in \mathbb{R}$ *avec* $|a| < 1$, *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$$

Proposition 35
Si (x_n) *est monotone et bornee, alors elle converge.*

Preuve
Soit (x_n) *croissante. Affirmation,* $x_n \to s := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$
Soit $\epsilon > 0, \exists n : x_n > s - \epsilon$ (*def. de sup*)
$\forall n \geq n_0 : s - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq s \Rightarrow |x_n - s| < \epsilon$
Idem, si elle etait decroissante. □

Preuve
Remarque : $(x_n) \to 0 \iff (|x_n| \to 0)$.

$$\ldots |x_n - 0| < \epsilon$$

Donc on va traiter le cas $a > 0$, *alors* $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ *est decroissante.*
Bornee (*par zero et* $1) \Rightarrow$ *elle admet une limite* l.
Or $\lim_{n\to+\infty} a^n = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} a^{n+1}}_{a\cdot\lim_{n\to+\infty} a^n}$ *Donc* $l = al$. *Si* $l \neq 0$, $1 = a$ *absurde, donc* l *nul.* □

Exemple
Def (x_n)*en posant* $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$
Observons que $x_n \geq 2 > 0 \forall n$
Si (x_n) *converge, alors*

$$l = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}(2 + \frac{1}{x_n}) = 2 + \frac{1}{l}$$

Donc

$$l^2 - 2l - 1 = 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{1+1} = l$$

Or $l \geq 2 \Rightarrow l = 1 + \sqrt{2}$ si l existe.
A present, estimons $|x_n - l|$:

$$\left|x_n - 1 - \sqrt{2}\right| = \left|2 + \frac{1}{x_{n-1}} = (2 + \frac{1}{l})\right| = \frac{|l - x_{n-1}|}{x_{n-1}l} \leq \frac{|x_{n-1} - l|}{4}$$
$$\leq \ldots \leq \frac{|x_{n-2} - l|}{4^2} \leq \frac{|2 - l|}{4^n} \to 0$$

car $\frac{1}{4^n} \to 0$

Lemme 37 (Deux gendarmes)
Soit $(x_n), (y_n), (z_n)$ trois suites avec

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l = \lim_{n\to+\infty} z_n$$

si $x_n \leq y_n \leq z_n \forall n$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} y_n = l$$

Preuve
repose sur le fait que

$$|x_n - l|, |z_n - l| < \epsilon \Rightarrow l - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \epsilon$$

montre $|y_n - l| < \epsilon$ □

4 Limsup et liminf

Definition 7 (Limsup et liminf)
Soit (x_n) une suite quelconque.
On definit la limite superieure par :

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \inf_n \sup \{x_k, k \geq n\}$$

Attention : Ici on convient que

$$\sup(A) = +\infty$$

si A non majore
$$\inf(A) = -\infty$$

si A non minore

On definit la limite superieure par :

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \sup_n \inf \{x_k, k \geq n\}$$

Notez : $z_n := \sup \{x_k : k \geq n\}$

Cela definit une suite decroissante et donc (z_n) converge vers son inf.
Conclusion : $\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} z + n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} x_k$

Lecture 5: mercredi 30

Wed 30 Sep

Theorème 38
(x_n) converge $\iff$ $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$ Dans ce cas, la limite prend cette meme valeur.

Preuve

$\Leftarrow$:

Soit $z_n = \sup\{x_p : p \geq n\}$,

$$y_n = \inf\{x_p : p \geq n\}$$

Rappel : $(z_n) \to LS$ et $(y_n) \to LI$

Or, $y_n \leq x_n \leq z_n$. Donc par les 2 gendamrmes

$$\Rightarrow (x_n) \to LS = LI$$

$\Rightarrow$:

Hypothese : $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$.

A voir : $LS = LI = l$.

Montrons par exemple que

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = l$$

(i.e. $LS = l$)

Soit $\epsilon > 0$.

$$\exists N \forall n \geq N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$
$$\text{et } \forall n \geq N : |z_n - LS| < \frac{\epsilon}{4}$$

Def. de $z_N \Rightarrow \exists p \geq N : |x_p| > z_N - \frac{\epsilon}{4}$

A present

$$|LS - l| \leq \underbrace{|LS - z_N|}_{<\frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|z_n - x_p|}_{<\frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|x_p - l|}_{<\frac{\epsilon}{2}}$$

avec $p \geq N$ et $N \geq N$ Donc $\forall \epsilon > 0$:

$$|LS - l| < \epsilon$$

Donc $LS = l$ □

Theorème 39 (Premiere regle de d'Alembert)
Supposons $x_n \neq 0 \forall n$
Supposons que $\rho = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ existe
Si $\rho < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$
Si $\rho > 1$, alors (x_n) diverge.

Remarque
Si $\rho = 1$*, on ne peut rien concluer*

Exemple

- $x_n = n$ *diverge, mais* $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$
- $x_n = \frac{1}{n}$ *converge mais* $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$

Preuve
Supposons $\rho < 1$.
A voir : $x_n \to 0$.
Soit $\rho < r < 1$*. Convergence pour* $\epsilon = r - \rho$: $\left|\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - \rho\right| < r - \rho$

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < r$$

i.e. $|x_{n+1}| < r\,|x_n|$ *de meme* $|x_{n+2}| < r\,|x_{n+1}| < r^2\,|x_n|$

Conclusion $\forall m \geq n_0 : |x_m| < r^{m-n_0}\,|x_{n_0}|$
Donc

$$\forall m \geq n_0 : |x_m| < r^m\,|x_{n_0}|\,r^{-n_0}$$

Onn sait que $\lim_{m\to+\infty} r^m = 0$ *donc*

$$0 \leq |x_m| \leq r^m c$$

avec c constante Cas $\rho > 1$.
On va montrer que $|x_n|$ *est non bornee.*
Soit $1 < r < \rho$.

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |x_{n+1}/x_n| > r$$

Donc

$$|x_{n+1}| > r\,|x_n|$$

comme avant :

$$x_m > r^{m-n_0}\,|x_{n_0}|$$

□

Remarque
Si $r > 1$*, alors* $\lim_{n\to+\infty} r^n = +\infty$ r^n *est croissante donc il suffit de montrer que la suite est non bornee.*
Si elle etait bornee, soit $l = \lim_{n\to+\infty} r^n \in \mathbb{R}$
Mais $l = \lim_{n\to+\infty} r^{n+1} = rl$
Donc $l \neq 0 \Rightarrow 1 = r$ *absurde.*

Definition 8 (Sous-suite)
Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *une suite.*
Une sous-suite de (x_n) *est une suite de la forme* $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$*, ou* $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ *est une suite strictement croissante de* N.

Exemple
Si (x_n) *est une suite, considerer :*

$$x_2, x_3, x_5, x_7, x_{11}, x_{13}, \ldots$$

Ici, $n_k = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$

Proposition 44
Si x_n *converge, alors toute sous-suite converge vers la meme limite.*

Preuve
Soit $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$. *Soit* $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ *une sous-suite et* $\epsilon > 0$.
A voir : $\exists k_0 \forall k > k_0 : |x_{n_k} - l| < \epsilon$
Or $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$.
Donc il suffit de choisir k_0 *tq* $n_{k_0} \geq n_0$.
(puisque la suite (n_k) *est croissante.)* □

Theorème 45 (Bolzano-Weierstrass)
Toute suite bornee admet une sous-suite convergente

Preuve
On va construire une sous-suite qui converge vers $s := \limsup_{n\to\infty} x_n$
Ici, (x_n) *est la suite en question et on pose*

$$z_n = \sup\{x_p : p \geq n\}$$

Par recurrence, n_1 *quelconque.*
Supposons n_{k-1} *construit et construisons* n_k *:*

$$\exists N \forall n \geq N : |z_n - s| < \frac{1}{k}$$

Choisissons un $n \geq N$, $n_{k-1} + 1$

$$\exists p \geq n \text{ t.q. } x_p > z_n - \frac{1}{k}$$

On definit $n_k = p$ ($n_k > n_{k-1}$)
Or, $\underbrace{|x_{n_k} - s|}_{<\frac{1}{k}} \leq \underbrace{|x_{n_k} - z_n|}_{<\frac{1}{k}} + \underbrace{|z_n - s|}_{<\frac{1}{k}}$
Donc $(x_{n_k} \to s(k \to \infty)$ □

Definition 9 (Point d'accumulation)
x *est un point d'accumulation de la suite* x_n *s'il existe une sous-suite qui converge vers* x.

Exemple

$$x = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

$$x = \liminf_{n\to\infty} x_n$$

4.1 Suites de Cauchy

Definition 10 (Suites de Cauchy)
La suite (x_n) est dire de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < \epsilon$$

Attention :
Il ne suffit pas de comparer x_n et x_{n+k} pour k fixe.

Exemple
$x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

$$\text{Cauchy} \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall k \in \mathbb{N} : |x_n - x_{n+k}| < \epsilon$$

Lemme 48
Si (x_n) converge, elle est de Cauchy.

Preuve
Soit $\epsilon > 0$, soit l la limite.
Hypothese :
avec $\frac{\epsilon}{2}$: $\exists N \forall n \geq N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$
Si $n, n' \geq N$

$$|x_n - x_{n'}| \leq |x_n - l| + |x_{n'} - l| < \epsilon$$ □

Theorème 49 (Convergence des suites de Caucjy)
Toute suite de Cauchy converge

Preuve
Soit (x_n) de Cauchy.

Lemme 50
(x_n) est bornee.

Preuve
Soit $\epsilon = 10$

$$\forall N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < 10$$

Donc $|(x_n)|$ est bornee par

$$\max(|x_N| + 10, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|)$$ □

Appliquer Bolzano-Weierstrass

$$\exists \text{ sous-suite } (x_{n_k})$$

qui converge, soit l sa limite. A voir (x_n) converge vers l.
soit $\epsilon > 0 \exists k_0 \forall k \geq k_0 \; |x_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2}$

$$\exists N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < \frac{\epsilon}{2}$$

Si $n \geq N, n_{k_0}$ alors

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < \epsilon \qquad \square$$

Lecture 6: lundi

Mon 05 Oct

Remarque
Ecriture decimale : $3.1415\ldots$ ou encore $0.333\ldots$ veut dire

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \ldots$$

une somme infinie de fractions. La difference entre le n ieme terme et le n' ieme terme :

$$\leq 10^{-n} \to 0 \Rightarrow \text{ Cauchy}$$

Cette limite est une "somme infinie".

5 Series

But : definir les “sommes infinies” .

$$\to \begin{cases} \text{Existe ?} \\ \text{Valeur ?} \end{cases}$$

Exemple

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$$

ou encore

$$\exp(x) = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots$$

ou

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

Definition 11 (Serie)
Le symbole $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ représente

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots \text{ et est défini par}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k$$

On appelle

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

une série et on dit qu'elle converge/diverge lorsque la suite $s_n := x_0 + \ldots + x_n$ le fait.

Corollaire 53
Si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *existent, alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

Preuve

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} s_n, s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} t_n, t_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n, \text{ où}$$

$$u_n = (x_0 + y_0) + \ldots + (x_n + y_n) = s_n + t_n$$

Donc la limite

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(s_n + t_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

□

Corollaire 54
Pour $a \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} ax_n = a\sum_{n=0}^{\infty} x_n$*, si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

existe.

Sans preuve.

Corollaire 55

$$\sum_{n=n_0}^{ify} x_n \text{ existe si } \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

existe et vaut

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n - (x_0 + x_1 + \ldots + x_{n_0-1})$$

n

Corollaire 56 (Critere de Cauchy pour les séries)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n converge \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : \left| \sum_{p=N}^{n} x_p \right| < \epsilon$$

(Dans ce cas, $|\sum_{n=N}^{\infty} x_n| \leq \epsilon$*)*

Preuve

Appliquer Cauchy à la suite s_n *:*

$$\exists n_0 \forall n, n' > n_0 : |s_n - s_{n'}| < \epsilon$$

Alors

$$\left| \sum_{p=n'+1}^{n} x_p \right| < \epsilon$$

Exemple

Ecriture decimale,

Proposition 58

Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge, alors

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$$

Preuve

Appliquer Cauchy à $\left| \underbrace{s_n - s_{n-1}}_{=x_n} \right|$

Attention, la réciproque est FAUSSE. □

Proposition 59 (Serie Geometrique)
Soit $r \in \mathbb{R}$ avec $|r| < 1$, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Preuve
Soit

$$s_n = r^0 + r^1 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r^n}$$

Or

$$\lim_{n \to +\infty} r^{n+1} = 0 \qquad \square$$

Donc $s_n \to \frac{1}{1-r}$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1$$

Proposition 60 (Série Harmonique)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge (vers } +\infty)$$

Preuve
Considérons

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \underbrace{\frac{1}{2^n + 1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{2^{n+1} - 2^n = 2^n \text{ termes.}} + \ldots$$

Tous ces termes sont $\geq \frac{1}{2^{n+1}}$
Cette somme est :

$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} \geq 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \qquad \square$$

Contredit Cauchy pour $\epsilon = \frac{1}{2}$.

Astuce utile :

$$\sum_{n=}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1$$

Preuve

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \qquad \square$$

Donc ca converge.
C'est une série téléscopique

Proposition 61 (Critère de Comparaison)
Supposons $0 \leq x_n \leq y_n$.
Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ converge, alors } \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ aussi .}$$

Preuve

$$s_n = x_0 + \ldots + x_n$$

est croissante. Donc converge $\iff$ (s_n) *bornée.*
Mais $y_0 + \ldots + y_n$ *converge* $\Rightarrow$ *bornée et* $s_n \leq y_0 + \ldots + y_n \Rightarrow (s_n)$ *bornée* $\square$

Remarque
De plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

Si, par contre,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ diverge}$$

Corollaire 63

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge.

Preuve
$\forall n \geq 2 : \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$
Or

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \text{ converge.}$$

Donc, par comparaison, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge*

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge .}$$

□

Lecture 7: mercredi

Wed 07 Oct

Definition 12 (Séries Alternées)
(x_n) *est alternée si* $x_n \cdot x_{n+1} \leq 0 \forall n$

Theorème 64
Soit (x_n) *alternée,* $|x_n|$ *décroissante, et*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ converge.}$$

Exemple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge. (série harmonique alternée) [5]

Preuve
On utilise cauchy.
Soit $n, m \in \mathbb{N}$.

$$\underbrace{x_n + x_{n+1}}_{\geq 0} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m-1} + x_{n+m}$$

Cas $x_n \geq 0$ *:*
Cas où n *pair*

$$0 \leq \sum_{p=n}^{n_m} x_p \leq x_n$$

Si m *impair :*
idem
Que n *soit pair ou impair*

$$\left| \sum_{p=n}^{n+m} x_p \right| \leq |x_n|$$

5. En fait la série converge vers $-\log 2$

Or, soit $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \Rightarrow$$

$\exists N \forall n > N| \, |x_n| \leq \epsilon.$

Donc $\forall n > N, m|$

$$|x_n + \ldots + x_{n+m}| < \epsilon \qquad \square$$

5.0.1 Un calcul naif (avec la série harmonique alternée)

Soit $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, existe par le théorème.
Note : $S < 0$.

$$s_n = \underbrace{-1 + \frac{1}{2}}_{=-\frac{1}{2}} \underbrace{-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{<0} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n}$$

$s_n < -\frac{1}{n}, \forall n$ pair $\Rightarrow S \leq -\frac{1}{2}$

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$$

à chaque terme x_n, on associe x_{2n}

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \ldots$$
$$= \frac{1}{2}(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots) = \frac{1}{2}S$$

Donc $S = \frac{1}{2}S \Rightarrow S = 0$ Faux !
Conclusion :
On ne peut pas permuter (en général) les termes d'une série convergente (somme infinie)

Definition 13
On dit que la somme de

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge absolument si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

converge.
Note : la valeur

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

ne nous intéresse pas

Remarque
Si $x_n \geq 0 \forall n$, aucune différence entre "convergence" et "convergence absolue".

Exemple

— *La série harmonique alternée converge, mais pas absolument.*

Lemme 68
Convergence absolue implique la convergence.

Preuve
$\forall n : 0 \leq x_n + |x_n| \leq 2|x_n|$
Donc convergence absolue $\Rightarrow$

$$\sum (x_n + |x_n|)$$

converge.
Or $-\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ *converge .*
Somme des deux sommes ci-dessus, implique que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

$\square$

Theorème 69
Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge absolument, alors toute permutation converge vers la même somme.

Exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Clarification :
Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$, i.e. bijection.
La nouvelle série sera

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ pour } y_n = x_{\sigma(n)}$$

Notons $s_n = x_0 + \ldots + x_n$ *et*

$$t_n = y_0 + \ldots + y_n = x_{\sigma(0)} + \ldots + x_{\sigma(n)}$$

Le théorème dit : si $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ *existe, alors* $\lim s_n = \lim t_n$.

Preuve
1er cas "facile" .
Supposons $x_n \geq 0 \forall n$.
Alors $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sup \{s_n | n \in \mathbb{N}\}$
On va montrer que $\underbrace{\sup_n s_n}_{=:s} \geq \underbrace{\sup_n t_n}_{=:t}$ *et que* $\sup_n s_n \leq \sup_n t_n$
Pour $s \geq t$ *:*
Soit $\epsilon > 0$. *Or , par déf,* $\exists n t_n > t - \epsilon$
ie

$$y_0 + \ldots + y_n > t - \epsilon$$

ie

$$x_{\sigma(0)} + \ldots + x_{\sigma(n)} > t - \epsilon$$

Soit $m = max_{i=0,\ldots,n} \sigma(i)$, *alors*

$$s_m \geq t - \epsilon$$

donc

$$s = \sup s_n > t - \epsilon$$

vrai $\forall \epsilon > 0 \Rightarrow s \geq t$
En considérant σ^{-1}, *on obtient de même* $t \geq s \Rightarrow s = t$, *donc le théorème vrai SI* $x_n \geq 0$.
2ème cas : $x_n \leq 0 \forall n$, *idem*
Cas général :
Posons $x_n = x'_n + x''_n$, *ou* $x'_n = \max(x_n, 0)$ *et* $x''_n = \min(x_n, 0)$, *alors*

$$x_{\sigma(n)} = x'_{\sigma(n)} + x''_{\sigma(n)}$$

On conclut en appliquant le cas (1) a x'_n *et (2) ou* x''_n □

Theorème 71
Supposons que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge, mais pas absolument.
$\forall l \in \mathbb{R} \exists$ *permutation* σ *t.q.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = l.$$

Lecture 8: Series fin

Mon 12 Oct

Theorème 72 (Critere de d'Alembert 2)
Supposons que $\lim_{n\to+\infty}|\frac{x_{n+1}}{x_n}| = \rho$ *existe.*
Si $\rho < 1$ *alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

converge absolument.
Si $\rho > 1$*, alors elle diverge.*

Preuve
Si $\rho > 1$, x_n *diverge donc ne converge pas vers 0, donc* $\sum x_n$ *diverge.*
Supposons $\rho < 1$. $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{\rho+1}{2}$.
On déduit que

$$|x_n| \leq \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^{n-n_0} |x_{n_0}|$$

Donc

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|$$

peut etre comparee à

$$|x_{n_0}| \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^{n-n_0}$$

Or la série ci-dessus est une série géometrique avec $\frac{\rho+1}{2} < 1$*, donc elle converge.*
Donc

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|$$

converge car la série géometrique converge, il suit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge absolument. $\square$

Exemple
Soit $x \in \mathbb{R}$*. Alors* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *converge absolument.*

Preuve
$x_n = \frac{x^n}{n!}$*, alors*

$$|\frac{x_{n+1}}{x_n}| = |\frac{x}{n+1}| \to 0$$

$\square$

Exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$x_n = \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Alors

$$|\frac{x_{n+1}}{x_n}| = |\frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)}| \to 0$$

Remarque

Si $\rho = 1$ on ne peut rien conclure.

Exemple

$$\sum \frac{1}{n} \text{ diverge, or } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$$

Idem pour

$$\sum n$$

Exemple

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge, or

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

Proposition 78

On admet que

$$\forall x \geq 0 \exists ! x^{\frac{1}{n}} : (x^{\frac{1}{n}})^n = x$$

Alors

$$\lim_{n \to +\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

Preuve

Posons $\epsilon_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$, (a voir : $\epsilon_n \to 0$).

$$\begin{aligned} n = ((1+\epsilon_n)^{\frac{1}{n}})^n &= 1 + n\epsilon_n + \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 \underbrace{\dots}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}\epsilon_n^2 \\ \Rightarrow \epsilon_n &\leq \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

□

Theorème 79 (Critere de la racine)
Soit $L = \limsup_{n\to\infty}(|x_n|)^{\frac{1}{n}}$.
Si $L < 1$, *alors* $\sum x_n$ *converge absolument*
Si $L > 1$, *alors* $\sum x_n$ *diverge.*

Exemple
Soit

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} \text{ si } n \text{ pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Exemple

1.
$$\sum \frac{x_n}{n!}, alors$$
$$|x_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n!}^{\frac{1}{n}} \text{ donc } |x_n| \to 0(\text{ exo })$$

2.
$$\sum n \text{ diverge }, n^{\frac{1}{n}} \to 1$$

3.
$$\sum \frac{1}{n^2}$$
converge, or
$$\frac{1}{n^2}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} \to 1$$

Preuve
Si $L > 1$,
alors $\lim_{n\to+\infty} \sup\left\{|x_k|^{\frac{1}{k}} : k \geq n\right\}$. *Donc* $\exists n_0 \forall n > n_0 : z_n > 1$, *i.e.*

$$\exists k \geq n : |x_k| > 1^k = 1$$

x_n *ne converge pas vers zero* $\implies$ *la série ne converge pas.*
Si $L < 1$,
$\exists n_0 \forall n > n_0 : z_n; \frac{1+L}{2}$, *or*

$$|x_n| \leq z_n^n < \left(\frac{1+L}{2}\right)^n$$

On conclut par converge avec la série géometrique. □

Exemple
Posons $x_0 = 0$, *et* $x_{n+1} = \frac{1+nx_n}{2^{n+1}}$
Notons (exo par récurrence)

$$\forall n \leq 2^n$$

Donc

$$0 \leq x_n \leq 1$$

On a

$$x_n^{\frac{1}{n}} = \frac{(n+1)^{\frac{1}{n}}}{2 \cdot 2^{\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{2}$$

Le critère s'applique : $L < 1$.

Lemme 83
$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$

Preuve
A voir : $(\sqrt[n]{n!})^2 \to +\infty$.
Or $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n \geq \frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1) \cdot \ldots n$
Si n *pair.*

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1) \cdot \ldots n \\ \geq (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Donc $\sqrt[n]{(n!)^2} \geq \sqrt[n]{(\frac{n}{2}^n)} = \frac{n}{2} \to \infty$ □

6 Fonctions

En général, fonctions = applications = map.

En analyse I, fonction = fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ou sur une partie $A \subseteq \mathbb{R}$.
En analyse II, on ira de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Lecture 9: mercredi

Wed 14 Oct

Definition 14
On dit qu'une fonction f *est définie au voisinage de* $x \in \mathbb{R}$, *si* $\exists \epsilon > 0 : f$ *définie sur*

$$]x - \epsilon, x[\text{ et }]x, x + \epsilon[$$

Exemple
$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$ *défini au voisinage de 0.*

Definition 15
Soit f définie au voisinage de x_0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

signifie

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Theorème 85
Soit f définie au voisinage de x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \textit{ suite } (a_n)_{n=1}^{\infty}$$

qui converge vers x_0 et $a_n \neq x_0, \forall n$, on a

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

Remarque
A priori, f n'est pas définie en a_n, mais $\exists n_0, \forall n > n_0 : a_n \in$ domaine de définition car f définie au voisinage de x_0

Preuve
$\Rightarrow$
Soit $a_n \neq x_0$, une suite convergent vers x_0. A voir : Soit $\epsilon > 0$, cherche $n_0 \forall n > n_0$: $|f(a_n) - l| < \epsilon$.
Par hypothese, $\exists \delta > 0 \forall x$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \quad (1)$$

Appliquer $\lim a_n = x_0$ à δ :

$$\exists n_0, \forall n > n_0 : |a_n - x_0| < \delta$$

Appliquer à présent 1 à $x = a_n$
$\Leftarrow$
Soit $\epsilon > 0$, on cherche $\delta > 0$
Supposons par l'absurde qu'aucun δ satisfait la définition.
En particulier, $\delta = \frac{1}{n}$

$$\exists x_n : 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \textit{ et } |f(x_n) - l| \geq \epsilon$$

Or

$$x_n \neq x_0 \textit{ et } (x_n) \to x_0$$

Par hypothèse

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$$

En particulier, pour ϵ,

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : |f(x_n) - l| < \epsilon$$

□

Corollaire 87

Si $\lim_{x\to x_0} l$ *et* $\lim_{x\to x_0} f'(x) = l'$, *alors*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + f'(x) = l + l'$$

Idem pour produit.

Corollaire 88

Si $f(x) \geq a, \quad \forall x$ *au voisinage de* x_0 *et*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l, \text{ alors } l \geq a$$

Corollaire 89

Si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

Alors

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$$

Corollaire 90

Pour

$$\lim \frac{g(x)}{f(x)}$$

il suffit de traiter $\lim \frac{1}{f(x)}$.

Lemme 91

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \neq 0$, *alors*

$$\exists \epsilon > 0 \forall x \in]x_0 - \epsilon, x_0[\cup]x_0, x_0 + \epsilon[$$

tel que $f(x) \neq 0$

Preuve

$$|f(x) - l| < \frac{|l|}{2}$$

dans un voisingae de x_0, *alors* $f(x) \neq 0$

□

Corollaire 92
Si $\lim f(x) = l = \lim g(x)$ *et*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \forall x \text{ au voisinage de } x_0$$

Alors

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

Corollaire 93 (Cauchy)
Soit f *définie au voisinage de* x_0*, alors*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existe } \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \text{ avec}$$

$$0 < |x_i - x_0| < \delta \quad (i = 1, 2)$$

on a

$$|f(x_i) - f(x_2)| < \epsilon$$

Lemme 94
Si $\lim f(a_n)$ *existe* $\forall$ *suite* ($a_n \neq x_0$) *convergeant vers* x_0*,alors*

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

existe

Preuve
Il suffit de montrer que toutes ces limites $f(a_n)$ *ont la même valeur.*
En effet, on peut alors appliquer le théorème et $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
Sinon, $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l \neq l' = \lim_{n \to +\infty} f(a'_n)$ *pour deux telles suites* a_n *et* a'_n.
A présent

$$b_n = \begin{cases} a_n \text{ si a pair} \\ a'_n \text{ si a impair} \end{cases}$$

□

or $f(b_n)$ *converge absurde car elle admet deux sous-suites avec limites distinctes* l, l'.

Preuve
Preuve du corollaire ci-dessus.
Grace au lemme, il suffit de montrerr que $\forall$ *suite* $a_n \to x_0$*, la suite* $f(a_n)$ *est de Cauchy.*
Par hypothèse, $\exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 : 0 < |x_i - x_0| < \delta$ *implique*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Or, $\exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - x_0| < \delta$.
Applique $a_n = x_1$ *et* $a_m = x_2$ *donne que* $f(a_n)$ *est de cauchy.* □

Corollaire 95
Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ *et* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l'$, *alors* $l = l'$.

Remarque
On a implicitement utilisé les concept de $+, \cdot, \leq$ *sur les fonctions.*

Ce n'est pourtant pas un corps.
Par exemple, $\forall x, y \in$ *corps*

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$$

Les fonctions ont une opération supplémentaire

$$f \circ g$$

est définie par

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

Soit $g : A \to B$ des parties de $\mathbb{R}$, et $f : B \to \mathbb{R}$ avec g défini au voisinage de x_0 et f au voisinage de g_0.

Proposition 97
Supposons $g(x) \neq g_0 \forall x$ *au voisinage de* x_0
Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$ *et* $\lim_{y\to y_0} f(y) = l$, *alors*

$$\lim_{x\to x_0} f \circ g(x) = l$$

Preuve
Soit $\epsilon > 0$, *à voir* $\exists \delta > 0 \forall x$:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - l| < \epsilon$$

2eme hup nous dit

$$\exists \eta > 0 \forall y : |y - y_0| < \eta \Rightarrow |f(y) - l| < \epsilon$$

Idee : appliquer la premiere hypothèse à η *et poser* $y = g(x)$.
Ca marche, tant que $y \neq y_0$. $\square$

Exemple
Exemple délicat :
Soit

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Clairement $\lim_{x\to 0} = 0$.
On pose que

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

On voit que $\lim_{y\to 0} f(y) = 0$.
Or

$$\lim_{x\to 0} f(g(x))$$

n'existe pas.

Lecture 10: fonctions

Mon 19 Oct

6.1 Continuité

Definition 16
Soit f définie au voisinage de x_0.
Alors f est dite continue en x_0 si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Donc f continue (en x_0) si on peut "sortir f de la limite" (en x_0)

Proposition 99
f continue en $x_0 \iff$ toute suite a_n tendant vers x_0, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

Preuve
Théorème de traduction pour $l = f(x_0)$ □

Remarque
Pour parler de continuité en x_0, il faut que f soit définie en x_0 et au voisinage de x_0

Corollaire 101
Si f et g sont continues en x_0, alors $f + g$ et $f \cdot g$ aussi.

Preuve
Idem que avant □

Corollaire 102
Si de plus $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est cont. en x_0.

Remarque
On a montré que alors dans ce cas il existe un voisinage de x_0 où $g(x) \neq 0$

Proposition 104
Soit g continue en x_0 et f continue en $g(x_0)$, alors $f \circ g$ est continue en x_0.

Preuve
Ecrivons la définition de g continue en x_0 :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$$

Soit $\epsilon > 0$. Cherche $\eta > 0$ tq $\forall x$:

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(\underbrace{g(x)}_{=y}) - f(g(x_0))| < \epsilon$$

Continuité de f en $g(x_0)$ appliquée à ϵ donne $\theta > 0$ tq $\forall y$

$$|y - g(x_0)| \Rightarrow |f(y) - f(g(x_0))| < \epsilon$$

continuité de g en x_0 appliquée à θ

$$\exists \eta > 0 \forall x \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \theta \qquad \square$$

Pour $y = g(x)$ on a montré ce qu'il fallait.

Definition 17 (Terminologie Supplémentaire)
f est définie au voisinage à gauche de x_0 si $\exists \epsilon > 0$ tq f est définie sur $]x_0 - \epsilon, x_0[$.
De même à droite : $]x_0, x_0 + \epsilon[$

Definition 18
Soit f définie au voisinage à droite de x_0

$$\lim_{x \to x_0 >} = l$$

signifie

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x > x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

La limite à gauche est définie de la même manière.

Definition 19
f est continue à droite en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0 >} f(x) = f(x_0)$$

Idem à gauche.

Exercice 105

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existe} \iff \text{les limites à gauche et à droite existent et coincident.}$$

Definition 20
f est continue sur $[a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$ et continue à droite en a, à gauche en b.

Definition 21 (Notation)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

si

$$\forall R \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > R$$

Idem pour $-\infty$

Definition 22 (Notation)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

signifie

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall x > n_0 : |f(x) - l| < \epsilon$$

On note $C([a,b])$ ou parfois $C^0([a,b])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$

> **Theorème 106**
> *Toute fonction continue sur $[a,b]$ est bornée.*

Preuve
Supposons par l'absurde f non-bornée (disons sans perte de généralité non majorée).
Donc $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n : f(x_n) > n$.
On a une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de $[a,b]$
Par Bolzano-Weierstrass implique qu'on a une sous-suite x_{n_k} qui converge vers $x \in [a,b]$
f continue en $x \iff f(x) = \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k})$ □

> **Theorème 107**
> *Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue atteint son $\sup$ donc max.*

Preuve
On sait déjà que f est bornée, soit donc $s := \sup\{f(x) | x \in [a,b]\}$
Si par l'absurde $f(x) \neq s \forall x \in [a,b]$ posons

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - s}$$

g est continue et donc g est bornée, disons par B.
Absurde car implique $|f(x) - s| > \frac{1}{B}$. □

Proposition 108
Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I.
Soit $A \subseteq I$ une partie dense. Si

$$f|_A = g|_A$$

Alors $f = g$ sur tout I

Preuve
Soit $x \in I$. Par densité,

$$\exists (a_n)$$

suite de A avec $\lim_{n \to +\infty} a_n = x$.

$$\text{Continuité } f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim_{n \to +\infty} g(a_n) = g(x)$$ □

Lecture 11: limites de fonctions

Wed 21 Oct

Comment définir 3^π ?

Exemple
Supposons que f soit définie et continue sur $I \setminus \{x_0\}$, où I est un intervalle ouvert et $x_0 \in I$.
Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe, on obtient une fonction continue sur I en définissant $f(x_0) := \lim_{x \to x_0} f(x)$.
Ca s'appelle le "prolongement par continuité".

Un exemple de preuve de continuité :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ sur }]0, +\infty[$$

Soit $\epsilon > 0$, cherche δ
Veut : $\forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon$.
Or, $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \epsilon$ si $\delta = \sqrt{x_0}\epsilon > 0$

Remarque
Ce δ montre la continuité en $y \forall y \geq x_0$

Definition 23
f est dite uniformément continue sur I (où I est un intervalle ou plus généralement $I \subseteq \mathbb{R}$) si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x_0 \in I$:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Comparer à f continue sur I :

$$\forall x_0 \in I \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x :$$
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Le point clé est que le delta dépend que de ϵ et pas de x_0.

Exemple
$f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1, +\infty[$
Et aussi sur $[\frac{1}{100}, +\infty[$.

Exemple
$f(x) = x^2$ non uniformément continu sur $[0, +\infty[$. Considérons

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|(x + x_0)$$

> **Proposition 113**
> *Si f et g sont uniformément continues sur I, alors $f + g$ aussi.kéw Attention : Faux pour $f.g$ et pour $\frac{1}{f}$.*

Exercice 114
Supposons f uniformément continue sur $[a, b]$ et $[b, c]$, alors f uniformément continue sur $[a, c]$

> **Theorème 115**
> *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$*

Remarque
Donc $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$.

Preuve
Si, par l'absurde, f n'est pas uniformément continue, alors :

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, x_0 :$$
$$|x - x_0| < \delta \text{ mais } |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on applique ca à $\delta = \frac{1}{n}$, alors

$$\Rightarrow \exists y_n, z_n : |y_n - z_n| < \frac{1}{n}; |f(y_n) - f(z_n)| \geq \epsilon$$

Car y_n suite de $[a, b]$, par Bolzano-Weierstrass $\Rightarrow \exists$ sous-suite y_{n_k} convergente.
Alors $\lim_{k \to +\infty} z_{n_k} = y$ car $|z_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$.
Le théorème de traduction implique

$$\lim_{k \to +\infty} f(y_{n_k}) = f(y) = \lim_{k \to +\infty} f(z_{n_k})$$

Mais $|f(y_{n_k} - f(z_{n_k})) \geq \epsilon$.
$\lightning$ $\square$

Theorème 117 (Théorème de la valeur intermédiaire (TVI))
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue.*
$\forall c$ *entre* $f(a)$ *et* $f(b)$, $\exists x \in [a, b] : f(x) = c$.

Preuve
Sans perte de géneralité, $f(a) < c < f(b)$*; et* $c = 0$ *(sinon remplacer* f *par* $f - c$*).*
Supposons par l'absurde $f(a) < 0 < f(b)$ *mais* $f(x) \neq 0 \forall x$.
Alors $\frac{1}{f}$ *est continue. Donc bornée. Donc* $\exists \alpha > 0$ *tq* $|f(x)| \geq \alpha \forall x$.
On sait que f *est uniformément continue sur* $[a, b]$.
Appliquer à α.
Donc, $\exists \delta > 0 \forall y, z : |y - z| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| < \alpha$.
Prenons $n \in \mathbb{N}$ *avec* $\frac{b-a}{n} < \delta$ *(Archimède)*
Posons $a_i = a + i\frac{b-a}{n}(i = 0, 1, \ldots, n)$.
Domc $\forall i \forall y, z \in [a_i, a_{i+1}]$
$$|f(y) - f(z)| < \alpha$$
□

Donc $\forall i$*, soit* f *est* $\leq -\alpha$ *sur tout* $[x_i, x_{i+1}]$ *soit* $\geq \alpha$ *pour tout* $[x_i, x_{i+1}]$.

Or $f(a) < 0$ *donc* $\leq -\alpha$ *Donc* $f \leq -\alpha$ *sur* $[a_0, a_1]$
Or $f(a) < 0$ *donc* $\leq -\alpha$ *Donc* $f \leq -\alpha$ *sur* $[a_1, a_2]$*, etc.*
Or $f(a_n) = b$*, donc* $\lightning$

Lecture 12: Fonctions

Mon 26 Oct

Corollaire 118
$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \geq 0 : \exists y \geq 0 : y^n = x$
Comme ce y *est unique (axiome de* $<$*) on peut donc définir* $\sqrt[n]{x} = y$

Preuve
Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(y) = y^n$.
f *est continu,* $f(0) = 0, \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Rappel : i.e.
$$\exists y_0 \forall y \geq y_0 : f(y) \geq x$$
TVI pour $[0, y]$ *:* $\exists z$ *tq* $f(z) = x$.
□

Rappel

- $ax + b = 0$ adment une solution (en x) si $a \neq 0$
- $ax^2 + bx + c$ admet parfois une solution
- $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ admet une solution ($a \neq 0$)
- degré 4 admet parfois une solution
- degré 5 : pas de formule avec "juste" des racines.

Corollaire 119
Tout polynôme de degré impair admet des racines.

Preuve

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

n *impair,* $a_n \neq 0$
Or $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (*si* $a_n > 0$ $-\infty$ *si* $a_n < 0$)
En effet

$$a_n x^n (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{-1} + \ldots)$$

Donc $\exists x_1 : f(x_1) > 0$ (*resp.*< 0).
De même, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (*resp* $+\infty$).
Donc

$$\exists x_2 : f(x_2) < 0$$

□

TVI sur $[x_2, x_1] \Rightarrow \exists x : f(x) = 0$

Corollaire 120
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue.*
$f([a, b]) = [m, M]$ *où* $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$*et* $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$

Proposition 121 (1er theoreme de la fonction implicite)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue, strictement monotone.*
Donc (corrolaire précédent) , f *est bijective*

$$f : [a, b] \to [m, M]$$

i.e. $\exists f^{-1} : [m, M] \to [a, b]$
Alors f^{-1} *est continue*

Preuve
Sans perte de géneralité, f *strictement croissante.*

Lemme 122
Soit $g : [m, M] \to [a, b]$ *surjective et strictement croissante.*
Alors g *est continue*

Preuve
En x_0
Soit $\epsilon > 0 : \exists x_1 : g(x_1) > g(x_0) - \epsilon$
De même, $\exists x_2 : g(x_2) < g(x_0) + \epsilon$.
Donc sur $[x_1, x_2]$ f *prend des valeurs entre* $g(x_0) - \epsilon$ *et* $g(x_0) + \epsilon$ □

Appliquer à $g = f^{-1}$.
C'est surjectif, par définition du domaine de f^{-1}, i.e. l'image de f.

Corollaire 123
Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue.
Alors $\exists x \in [a, b] : f(x) = x$.

Preuve
Considérer g

$$g : [a, b] \to \mathbb{R}$$

avec

$$g(x) = x - f(x)$$

Donc

$$g(a) = a - f(a) \leq 0$$
$$g(b) = b - f(b) \geq 0$$

TVI $\Rightarrow \quad \exists x : g(x) = 0$ *i.e.* $f(x) = x$ $\square$

7 Suites de Fonctions

But : donner un sens à

"f_n converge vers une fonction f"

Definition 24
(f_n) converge ponctuellement vers f si

$$\forall x : \quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

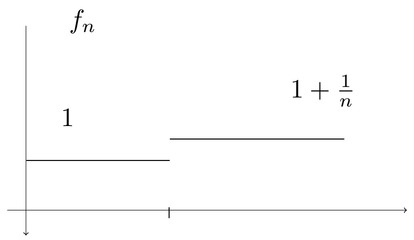

FIGURE 1 – fonction1

Exemple

—

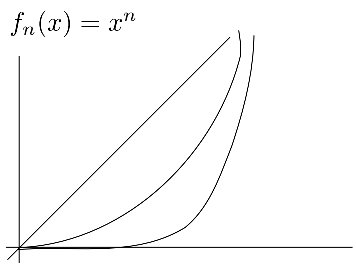

FIGURE 2 – fonction2

— *Ponctuellement*, $f_n \to f$ *où*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < 1 \\ 1 \; si \; x = 1 \end{cases}$$

Remarque

$$\lim_{x \to 1} f_n(x) = 1$$

On pourrait donc prendre

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 1} f_n(x) = 1$$

Par contre

$$\lim_{\underbrace{x \to 1}_{<}}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$

Donc, attention à la continuité !

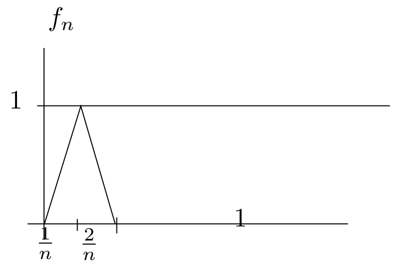

FIGURE 3 – fonction3

— f_n *est continue pour tout* n*,*

$$\max f_n = 1$$

Or $f_n \to 0$ *ponctuellement.*

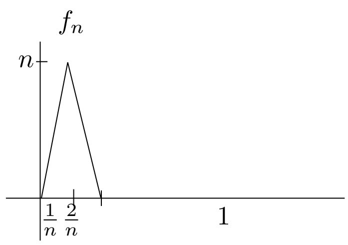

FIGURE 4 – fonction4

— *Or, à nouveau,* $f_n \to f = 0$

Definition 25 (Convergence uniforme de fonctions)
Une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformément sur* $A \subseteq \mathbb{R}$ *sur* f *si :*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Lecture 13: Suites de Fonctions 2

Wed 28 Oct

Remarque
La convergence uniforme implique la convergence ponctuelle

Proposition 127
Soit (f_n) *une suite de fonctions qui converge uniformément.*
Supposons que

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\lim_{x \to x_0} f_n(x)}_{=l_n}$$

existe.
Alors

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

Preuve
Soit f *la limite de* (f_n)*.*
Hyp : $\forall n : l_n = \lim_{x \to x_0} f_n(x)$*existe et* $l = \lim_{n \to +\infty} l_n$*.*
But : $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$*.*
Soit donc $\epsilon > 0$*, alors*

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |l_n - l| < \frac{\epsilon}{3}$$

De plus, par convergence uniformee

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 \begin{cases} |l_n - l| < \frac{\epsilon}{3} \\ \forall x : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \end{cases}$$

Donc

$$\exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - l_{n_0}| < \frac{\epsilon}{3}$$

Soit $0 < |x - x_0| < \delta$*, on veut*

$$|f(x) - l| < \epsilon$$

Or

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - l_{n_0}| + |l_{n_0} - l| < \epsilon \qquad \square$$

Theorème 128
Toute limite uniforme de fonctions continues est continue.

Preuve
Soit f *la limite uniforme de* (f_n)*,* f_n *est continue* $\forall n$*.*
Soit x_0 *avec* f_n *définie au voisinage de* x_0*.*
A voir : f *continue en* x_0*, i.e.*

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = f(x_0) \qquad \square$$

Theorème 129 (Dini)
Soit (f_n) *une suite décroissante de fonctions continues.*
Si (f_n) *converge ponctuellement vers* f *continue, alors* f_n *converge uniformément vers* f *sur* $[a, b]$*.*

Exercice 130
Trouver un contre exemple sans l'hypothèse décroissante.

Preuve
Par l'absurde,

$$\exists \epsilon > 0 \forall n_0 \exists n \geq n_0 \exists x_n : |f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$$

Par Bolzano-Weierstrass $\Rightarrow$

$$(x_{n_k}) \text{ qui converge vers } x$$

et tel que

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \epsilon$$

Convergence de $f_n(x)$ *implique*

$$\exists k : |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Continuité de f_{n_k} et de f en x

$$\exists \delta > 0 \forall y : |x-y| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \\ |f_{n_k}(y) - f_{n_k}(x)| < \frac{\epsilon}{3} \end{cases}$$

Choisir un k' tel que $|x_{n'_k} - x| < \delta$
Comme

— $|f(x) - f(x_{n_k})| < \frac{\epsilon}{3}$
— $|f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_{n'_k})| < \frac{\epsilon}{3}$
— $f \leq f_{n'_k} \leq f_{n_k}$

Donc

$$|f_{n'_k}(x_{n'_k}) - f(x_{n'_k})| < \epsilon$$ □

Absurde.

8 Dérivation

Definition 26
Soit f définie au voisinage de x_0.
On dit que f est dérivable en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe.
Alors cette limite s'appelle la dérivée de f en x_0, notée $f'(x_0)$.

Remarque
Si f est dérivable partout, alors on obtient une fonction f'.
On définit de même la dérivée gauche et droite.

Proposition 132
Si f et g sont dérivables en x_0, alors $f+g$ aussi et

$$(f+g)' = f' + g'$$

Preuve

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) + g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$ □

Proposition 133
Soit f définie au voisinage de x_0. Alors

$$f \text{ dérivable en } x_0 \iff \exists a \in \mathbb{R} \exists \text{ fonction } r \text{ au voisinage de } x_0 \text{ tel que}$$

1. $f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)$
2. $\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$

Dans ce cas, $a = f'(x_0)$

Lecture 14: Derivees

Mon 02 Nov

Corollaire 134
f dérivable en x_0 implique f continue en x_0.

Preuve
$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{continue pour tout } x} + \underbrace{r(x)}_{\text{continu en } x_0}$$
□

Proposition 135
Soient f, g dérivables en x_0

- *$f + g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)' = f' + g'$*
- *fg est dérivable en x_0 et*

$$(fg)' = f'g + fg' \text{ (règle de Leibnitz)}$$

- *Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Preuve

- *Somme est déja faite*
- *Produit :*

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)} + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)}
\end{aligned}$$

- *Quotient :*
  Il suffit d'appliquer Leibnitz à f et $\frac{1}{g}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)'$$

  Il suffit de montrer que

$$\left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{g'}{g^2}$$

Soit donc $g(x_0) \neq 0$.

$$\frac{\frac{1}{g(x) - \frac{1}{g(x_0)}}}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \qquad \square$$

Exemple
Soit $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, $f(x) = x^n = \frac{1}{x^{|n|}}$ Donc

$$(x^{|n|})' = |n| x^{|n|-1}$$

Donc, par la proposition

$$f'(x) = \frac{-|n|x^{|n|-1}}{x^{2|n|}}$$

Or $|n| = -n$, alors

$$f'(x) = nx^{-n-1+2n} = nx^{n-1}$$

Proposition 137
Donc, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Attention, ne pas écrire $(x^n)'$

Theorème 138 (Chain Rule)

$$(f \circ g)' = (f' \circ g).g'$$

Soit g dérivable en x_0 et f en $g(x_0)$, alors $f \circ g$ esst dérivable en x_0 avec la formule ci-dessus.

Preuve
Definissons h par

$$h(y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} \text{ si } y \neq g(x_0) \\ f'(g(x_0)) \text{ si } y = g(x_0) \end{cases}$$

Alors h est continue en $g(x_0)$ (par définition de f dérivable en $g(x_0)$).

On a alors

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} h(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \end{aligned} \qquad \square$$

Theorème 139
Soit $f :]a,b[\to]c,d[$ *bijective, continue.*
Si f *est dérivable en* x_0 *et* $f'(x_0) \neq 0$*, alors* f^{-1} *est dérivable en* $y_0 = f(x_0)$ *et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Preuve

$$\begin{aligned} L &= \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\ &= \left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - x_0} \right)^{-1} \end{aligned}$$

En posant $x = f^{-1}(y)$*, on obtient*

$$\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)^{-1}$$

Or, f^{-1} *est continue, donc quand* $y \to y_0$*, on a que* $x \to x_0$*.*
Donc, la limite pour $y \to y_0$ *de L est*

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)^{-1} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

Lecture 15: Derivees

Wed 04 Nov

Exemple
Soit $f(x) = \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$*.*
Donc la dérivée est

$$f'(x) = \frac{1}{q(x^{\frac{1}{q}})^{q-1}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}$$

On sait donc dériver des puissances rationelles quelconques

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} = g(h(x))$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= p(x^{\frac{1}{q}})^{p-1} \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} \\ &= \frac{p}{q} x^{\frac{p-1}{q} + \frac{1}{q} - 1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} \end{aligned}$$

8.1 Applications de la dérivée

8.1.1 Recherche d'extremums

Definition 27 (Point Critique)
x *est un point critique de* f *si* f *est dérivable en* x *et* $f'(x) = 0$*.*

Remarque
Bien que $x = 0$ soit un point critique de $f(x) = x^3$, cette fonction est strictement croissante.

Definition 28
x est un maximum local de f si il existe un voisinage de x sur lequel x est un (vrai) maximum.

La définition pour les minimas est équivalente.
Plus généralement, on parlera d'extremums.

Proposition 142
Soit f dérivable en x_0 (donc définie dans son voisinage).
Si x_0 est un extremum local de f, alors c'est un point critique.

Remarque

1. *La réciproque est fausse.*
2. *Si f n'est pas dérivable, on peut très bien avoir un max / min.*
3. *Dérivable à droite (gauche) pas suffisant.*

Preuve
Sans perte de géneralité, x_0 est un max local de f.
Dérivée à gauche :

$$\lim_{x \to x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

De même, dérivée à droite

$$\lim_{x \to x_0 +} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Donc, $f'(x_0) = 0$. □

Proposition 144 (Méthode de recherche d'extremum)
Pour $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$.
Les candidats sont

1. *Les points critiques dans $]a, b[$*
2. *Les points non-différentiables*
3. *Les bornes : a, b*

Theorème 145 (theoreme de Rolle)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continnue et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors $\exists x \in]a, b[: f'(x) = 0$

Preuve
$\exists x_1 \in [a, b] : \sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_1)$.
Si $x_1 \in]a, b[$, alors $f'(x_1) = 0$ par la proposition.

Cas restant : $x_1 = a$ *ou* b*.*

$$\exists x_2 \in [a,b] \; min \; : \inf_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_2)$$

Le seul cas restant est donc :

$$\max \textit{ et } \min \textit{ atteints en } a \textit{ ou } b.$$

Or $f(a) = f(b)$*, donc* $\max f = \min f$*, donc* f *constante.* □

> **Theorème 146 (théorème des accroissements finis TAF)**
> *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue et dérivable sur* $]a,b[$*.*
> *Alors* $\exists x \in]a,b[$*:* $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$*.*

Preuve
Posons $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ g *est aussi continue dérivable.*
Or

$$g(a) = f(a) \textit{ et } g(b) = f(a)$$

Donc g *satisfait l'hypothèse de rolle.*
Donc, par Rolle

$$\exists x \in]a,b[: g'(x) = 0$$

Or

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

□

> **Corollaire 147**
> *Si* $f' = 0$*, alors* f *constante.*
> *Plus précisément :*
> *Soit*
>
> $$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$
>
> *continue dérivable sur* $]a,b[$ *tel que* $f'(x) = 0 \forall x \in]a,b[$*, alors* f *est constante sur* $[a,b]$

Preuve
Si, par l'absurde, il existe $x, y \in [a,b]$ *avec* $f(x) \neq f(y)$*.*
Par TAF pour $[x,y]$*, il existe* $z \in]x,y[$ *:*

$$f'(x) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \neq 0$$

Absurde. □

Corollaire 148
$f' > 0$ (sur un intervalle) implique f strictement croissante.

Preuve
Soit $x < y$, à voir $f(x) < f(y)$.
Or, par TAF $\Rightarrow \exists z \in]x, y[$

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0 \qquad \square$$

Corollaire 149
$f' \geq 0$ (sur un intervalle) $\iff$ f croissante (pas forcément strictement)

Preuve
$\Leftarrow$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$\Rightarrow$:
Par l'absurde :

$$\exists x < y \text{ tel que } f(x) > f(y)$$

Par TAF $\Rightarrow \exists z \in]x, y[$ tel que

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < 0 \qquad \square$$

Ce qui est absurde.

Lecture 16: Lundi 09

Mon 09 Nov

Definition 29 (Fonctions Lipschitzienne)
La fonction f est Lipschitz sur un intervalle I si il existe l tel que $\forall x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq l \cdot |x - y|$$

Remarque
Si f est Lipschitz, f est continue, même uniformément continue sur I, poser $\delta = \frac{\epsilon}{l}$.
On dit aussi "L-lipschitz".

Corollaire 151
Si f est dérivable et $|f'| \leq L$ sur I, alors f est L-lipschitz sur I

Preuve
TAF sur $[x, y]$, donc

$$\exists z \in]x, y[: f(x) - f(y) = f'(z)(x - y) \qquad \square$$

Remarque
$f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0,1]$ est uniformément continue, mais sa dérivée est non-bornée sur $]0,1[$.

Corollaire 153 (Théorème de Darboux)
Soit f continu en x_0. Si f est dérivable au voisinage de x_0 et si

$$\lim_{x\to x_0} f'(x)$$

existe, alors f est dérivable en x_0.

Preuve
TAF sur $[x_0, x]$.
Donc il existe $z \in]x_0, x[$ tel que

$$f'(z) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Posons $l = \lim_{x\to x_0} f'(x)$, donc

$$l = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Donc $f'(x_0)$ existe et est égal à l. □

Remarque
Nous avons prouvé que $f'(x_0)$ existe et de plus $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$.
Donc la dérivée est continue.

Theorème 155 (Theoreme de Cauchy)
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a,b[$.
Supposns que g' ne s'annule pas sur $[a,b]$, alors

$$\exists c \in]a,b[\text{ tel que } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Preuve
Considérons

$$h(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a))\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

On a

$$h(a) = 0$$
$$h(b) = 0$$

Rolle (pour h) implique $\exists c \in]a,b[$ tel que

$$h'(c) = 0$$

Or
$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)$$
□

i.e. $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

8.2 Principe de Bernoulli-L'Hospital

Idée :
Calculer des limites du type $\frac{0}{0}$.

Theorème 156 (Bernoulli-L'Hospital)
Soient $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ *dérivables avec*
$$\lim_{x \to a+} f(x) = 0 = \lim_{x \to a+} g(x)$$
Supposons
$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
existe et $g'(x) \neq 0$ *au voisinage à droite de* a.
Alors
$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Preuve
On étend f *et* g *par continuité sur* $[a, b[$ *en posant* $f(a) = 0 = g(a)$.
Soit $a < x < b$. *Appliquons Cauchy sur* $[a, x]$.
Donc $\exists c \in]a, x[$ *tel que* $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$.
Par hypothèse, la limite
$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$
existe. □

Theorème 157 (BH pour l'infini)
Soient $f, g :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *dérivable.*
Supposons $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} g(x)$ *Si* $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe, alors*
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Preuve
Sans perte de géneralité $a > 0$.
On définit $\phi, \psi :]0, \frac{1}{a}[\to \mathbb{R}$ *par*
$$\phi(x) = f(\frac{1}{x}), \psi(x) = g(\frac{1}{x})$$

BH pour $\frac{\phi}{\psi}$ *sur* $]0, \frac{1}{a}$

$$\lim_{x \to 0+} = \lim_{x \to 0+} \frac{\phi'(x)}{\psi'(x)} \qquad \square$$