Série 3

David Wiedemann

9 octobre 2020

On utilisera sans preuve que la composition de deux injections et une injection, que la composition d'une bijection avec une injection est une injection, que la composition d'une injection avec une bijection est une injection et que la composition d'une bijection avec une bijection est une bijection.

Lemme 1.

1. *$|A| \leq |B|$ et $|B| \leq |C|$ implique $|A| \leq |C|$.*
2. *$|A| \leq |B|$ et $|B| = |C|$ implique $|A| \leq |C|$.*
3. *$|A| = |B|$ et $|B| = |C|$ implique $|A| = |C|$.*

Démonstration.

1. Si $|A| \leq |B|$ alors il existe une injection $\phi : A \to B$
   Si $|B| \leq |C|$, alors il existe une injection $\psi : B \to C$.
   Donc
   $$\psi \circ \phi : A \to C$$
   est une injection, et donc $|A| \leq |C|$.
2. Si $|A| \leq |B|$ alors il existe une injection $\phi : A \to B$
   Si $|B| = |C|$, alors il existe une injection $\psi : B \to C$.
   Donc
   $$\psi \circ \phi : A \to C$$
   est une injection, et donc $|A| \leq |C|$.
3. Si $|A| = |B|$, alors il existe une bijection $\phi : A \to B$ Si $|B| = |C|$, alors il existe une bijection $\psi : B \to C$.
   Alors
   $$\psi \circ \phi : A \to C$$
   est une bijection et donc $|A| = |C|$

□

Théorème 1. *Il existe une infinité de nombres premiers.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe un nombre fini de nombres premiers. Notons le nombre de nombres premiers K. On dénote par

$$p_1, \dots, p_K$$

les K nombres premiers.
Alors le nombre

$$N = \prod_{i=1}^{K} p_i + 1$$

est premier.
En effet, par l'unicité de la décomposition en nombres premiers, $\exists p_k$ tel que $p_k | N + 1$, or ceci implique que p_k divise 1 car $p_k | N$,[1] donc $p_k = 1$ ce donc p_k n'est pas premier.
Il existe donc un $K + 1$-ième nombre premier.

$\square$

1

On construit une bijection de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \phi \colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{N} \\ m &\to \begin{cases} 2m \text{ si } m \geq 0 \\ -2m + 1 \text{ si } m < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On considère que le nombre 0 est pair.
Pour vérifier que cette application définit une injection, on montre la surjectivité et l'injectivité.

Surjectivité

Soit $n \in \mathbb{N}$, si n pair, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Alors k est l'antécédent de n par ϕ.
Si n impair, $\exists j \in \mathbb{N}$ tel que $2j + 1 = n$, on pose $k = -j$, alors $-2k + 1 = n$ et k est l'antécédent de n.

Injectivité

Supposons $\exists k, j \in \mathbb{Z}$ tel que $\phi(k) = \phi(j)$. Si k et j sont de signe différent, alors soit $\phi(k)$ ou $\phi(j)$ est impair et donc l'égalité ne peut pas tenir.
Supposons donc $k, j > 0$, alors $\phi(k) = 2k$ et $\phi(j) = 2j$ donc $2k = 2j$ et

1. p_k est un des facteurs de N par définition

$j = k$.
Si $k, j < 0$, alors $\phi(k) = -2k+1$ et $\phi(j) = -2j+1$ donc $-2k+1 = -2j+1 \Rightarrow k = j$.

On en déduit que l'application ϕ est bijective et que $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

2

Par Cantor-Schroeder-Bernstein, il suffit de trouver une injection de $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ et de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$.

Injection de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$

Soit

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{N} &\to \mathbb{N}^n \\ k &\to (k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ fois}}) \end{aligned}$$

Cette application est clairement injective car $(m, 0, \dots, 0) = (j, 0, \dots, 0)$ implique $m = j$.

Injection de $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$

Soit

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{N}^n &\to \mathbb{N} \\ (a_1, \dots, a_n) &\to \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i} \end{aligned}$$

où $p_1, \dots, p_n$ sont les n premiers nombres premiers.
L'injectivité de cette application suit directement de l'unicité de la décomposition en nombres premiers.
En effet, si $(a_1, \dots, a_n) \neq (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^n$, alors l'unicité implique que

$$\prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i} \neq \prod_{i=1}^{n} p_i^{b_i}$$

et donc l'application ϕ est injective.

On conclut avec Cantor-Schroeder-Bernstein et on a que $|\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}|$

3

On utilise à nouveau Cantor-Schroeder-Bernstein.

Injection de $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

L'application

$$\begin{aligned} K : \mathbb{N} &\to \mathbb{Q} \\ n &\to n \end{aligned}$$

est une injection.

Injection de $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$

On montre un résultat préliminaire.

Théorème 2. *Si $A_1, \ldots, A_n$ n ensembles infini dénombrables, alors*

$$K = A_1 \times \ldots \times A_n \text{ est infini dénombrable.}$$

Démonstration. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in K$.
Par hypothèse, $\exists \phi_1, \ldots, \phi_n$ des bijections $\phi_i : A_i \to \mathbb{N}, 0 < i \leq n$. L'application

$$\begin{aligned} \Phi : K &\to \mathbb{N}^n \\ (a_1, \ldots, a_n) &\to (\phi_1(a_1), \ldots, \phi_n(a_n)) \end{aligned}$$

est une bijection.
En effet, soit $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{N}^n$, alors $(\phi^{-1}(b_1), \ldots, \phi^{-1}(b_n)) \in K$ est un antécédent, unique, de $(b_1, \ldots, b_n)$ et il existe $\forall b \in \mathbb{N}^n$.
Par la partie 2, on sait qu'il existe une bijection de $\Psi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ et donc

$$\Psi \circ \Phi$$

est une bijection de $K \to \mathbb{N}$. $\square$

On est pret à montrer l'injection de $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.
On construit d'abord une bijection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$.
Soit $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ la bijection définie dans la partie 1 et soit $t_1 : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ la bijection [2] :

$$t_1 : n \to n - 1$$

2. L'injectivité et la surjectivité de t_1 sont évidentes.

On peut donc, par le théorème 2, construire une bijection de $G : \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$.

On définit la surjection [3]

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} &\to \mathbb{Q} \\ (a, b) &\to \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Par l'exercice 5, de la série 2, on peut construire une injection F

$$F : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Et donc, par le lemme 1, on obtient que

$$\begin{aligned} |\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}| &= |\mathbb{N}| \\ &\Rightarrow |\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}| \end{aligned}$$

On conclut avec Cantor-Schroeder-Bernstein.

4

Théorème 3. *On montre que l'union infinie dénombrable d'ensembles finis est, au plus, infini dénombrable.*

Démonstration. Soit

$$K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$$

et soit $|E_i| < |\mathbb{N}|$.
Supposons que les ensembles E_k sont disjoints et qu'il sont tous non-vide.
On dénote par s_{ki} le k-ième élément de E_i.
Soit S l'application définie par

$$S : \begin{array}{l} K \mapsto \mathbb{N}^2 \\ s_{ki} \mapsto (k, i) \end{array}$$

Clairement, S est injective, car $k \leq |E_i|$ et E_i fini.
On a donc que

$$|K| \leq |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$$

et donc, par le lemme 1, que

$$|K| \leq |\mathbb{N}|$$

Supposons maintenant que l'intersection n'est pas nécessairement vide, alors, par l'algorithme suivant, on peut se ramener au cas ci-dessus.

3. La surjectivité suit du fait qu'à chaque fraction, on puisse assimiler un 2-uplet.

Pour i dans $\mathbb{N}$
  Pour k entre 1 et $|E_k|$
    Si s_{ki} apparait pour la deuxième fois
      Supprimer la valeur s_{ik} de tous les $E_n, n \geq i \in \mathbb{N}$
    Si $E_i = \emptyset$, alors supprimer E_i et réindexer.

Alors, on a

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i = K$$

Qui est une réunion infinie dénombrable d'ensembles finis.
Si on avait supprimé un nombre infini d'ensembles E_i et qu'il en restait un nombre fini, on aurait une union finie d'ensembles finis, auquel cas le résultat est évident.
Donc on a que

$$|\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i| \leq |\mathbb{N}|$$

□

On construit une injection de $\mathbb{Q}[t]$ vers $\mathbb{N}$ en passant par l'ensemble des suites de $\mathbb{Z}$ qu'on dénotera par $\mathbb{Z}^{\infty}$.
On montre d'abord que $|\mathbb{Q}[t]| = |\mathbb{Z}[t]|$ [4].
On construit à nouveau une injection dans les deux sens.
Soit l'injection

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[t] &\mapsto \mathbb{Q}[t] \\ a(t) &\mapsto a(t) \end{aligned}$$

On posera que

$$a(t) = \frac{q_{0a}}{b_{0a}} + \frac{q_{1a}}{b_{1a}}t^1 + \ldots + \frac{q_{na}}{b_{na}}, \text{ avec } q_{ia} \in \mathbb{Z} \text{ et } b_{na} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

n représent le degré de $a(t)$ Alors l'injection définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[t] &\mapsto \mathbb{Z}[t] \\ a(t) &\mapsto k \cdot a(t) \end{aligned}$$

avec $k = ((b_{0a}, c_{0a}), (b_{1a}, c_{1a}), \ldots, (b_{na}, c_{na}))$.
On sait, par définition, que

$$b|(b, c) \cdot c$$

donc tous les coefficients de $k \cdot a(t)$ sont entiers donc $k \cdot a(t)$ est bien dans $\mathbb{Z}[t]$.
On peut facilement trouv

4. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$

Car chaque polynôme dans $\mathbb{Z}[t]$ possède un nombre fini d'éléments.

$$\forall a(t) \in \mathbb{Z}[t] \exists N \text{ tel que } \forall n > N, \text{ le } n\text{-ième élément de } Q(a(t)) \text{ vaut } 0.$$

On dénote l'ensemble des suites satisfaisant ce critère par $\mathbb{Q}_0^\infty$.
On crée l'injection

$$M : \mathbb{Q}_0^\infty \mapsto \mathbb{N}$$
$$(a_0, a_1, \ldots, a_N, 0, \ldots) \mapsto \prod_{i=0}^{N} p_{i+1}^{a_i}$$

Où p_k dénote le k-ième nombre premier.
L'injectivité de cette application suit directement de l'unicité de la décomposition en nombres premiers et du theorème 1. On a donc que

$$|\mathbb{Q}[t]| \leq |\mathbb{Q}_0^\infty| \leq |\mathbb{N}|$$

Donc que

$$|\mathbb{Q}[t]| \leq |\mathbb{N}|$$

On peut également trouver une injection de $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}[t]$ définie par

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Q}[t]$$
$$n \to n$$

à nouveau, cette application est clairement injective.
On a donc que

$$|\mathbb{Q}[t]| \geq |\mathbb{N}|$$

On conclut avec Cantor-Schroeder-Bernstein, et on obtient que

$$|\mathbb{Q}[t]| = |\mathbb{N}|$$

On pose

$$A = \{z \in \mathbb{C} | z \text{ algébrique } \}$$

Soit $a(t) \in \mathbb{Q}[t]$, on dénote par $S_{a(t)}$, l'ensemble des solutions de l'équation $a(t) = 0$.
On veut montrer que

$$A = \bigcup_{a(t) \in \mathbb{Q}[t]} S_{a(t)}$$

On montre la double inclusion.
Soit $z \in A$, alors $\exists Z(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tel que $Z(a) = 0$, donc $z \in S_{Z(t)}$, donc

$$z \in \bigcup_{a(t) \in \mathbb{Q}[t]} S_{a(t)}.$$

Soit
$$z \in \bigcup_{a(t)\in\mathbb{Q}[t]} S_{a(t)}$$
donc $\exists b(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tel que $b(a) = 0$, donc a algébrique, donc $a \in A$.

Or $S_{a(t)}$ est fini $\forall a(t) \in \mathbb{Q}[t]$ et donc, par le théorème 3, on a que
$$|\bigcup_{a(t)\in\mathbb{Q}[t]} S_{a(t)}| = |\mathbb{N}|$$
Donc l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.