Analyse I

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Introduction

Mon 14 Sep

1 Introduction

1.1 Buts du Cours

<u>**Officiel :**</u>
Suites, series, fonctions, derivees, integrales , ...

<u>**Secrets :**</u>
Apprendre le raisonnement rigoureux
Creativite
Esprit Critique
Ne croyez rien tant que c'est pas prouve

On construit sur ce qu'on a fait, on recommence pas toujours a 0, par rapport a d'autres domaines(lettres par exemple)

Theorème 1 (env. -400)
Il n'existe aucin nombre (fraction) x tel que $x^2 = 2$.

Ca contredit pythagore nn?
On va demontrer le theoreme. [1]

Lemme 2 (Lemme)
Soit $n \in \mathbb{N}$ Alors n pair $\iff$ n^2 pair.

Preuve
$\Rightarrow$ Si n pair $\Rightarrow n^2$ pair.
Hyp. $n = 2m(m \in \mathbb{N})$
Donc $n^2 = 4m^2$, pair.

Par l'absurde, n impair. $n = 2k + 1(k \in \mathbb{N})$.

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

impair. Donc si n est impair, alors n^2 est forcement impair. Absurde. $\square$

Preuve
Supposons par l'absurde $\exists x$ t.q. $x^2 = 2$ et $x = \frac{a}{b}(a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$.
On peut supposer a et b non tous pairs.(sinon reduire).

$$x^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$$

1. On demontre d'abord un lemme

pair.
Lemme : a pair, i.e. $a = 2n (n \in \mathbb{N})$.

$$a^2 = 4n^2 = 2b^2 \Rightarrow 2n^2 = b^2, i.e. b^2 pair.$$

Lemme : b pair.
Donc a et b sont les deux pairs, on a une contradiction.
$\lightning$ $\square$

En conclusion, le theoreme est bel et bien vrai, et contredit donc pythagore. Donc les fractions ($\mathbb{Q}$) ne suffisent pas a decrire/mesurer les longueurs geometriques. Il faut les nombres reels, on les comprends seulement vraiment depuis 2 siecles.
C'est important de chercher ce genre d'erreurs.
Prochain but : definir les nombres reels ($\mathbb{R}$). L'interaction entre les fractions et les nombres reels.

2 Definir $\mathbb{R}$

On commence avec la definition axiomatique des nombres reels.

Axiom 3 (Nombres Reels)
$\mathbb{R}$ est un corps, en d'autres termes :
Ils sont munis de deux operations : plus et fois.

- *Associativite* $x + (y + z) = (x + y) + z (x, y, z \in \mathbb{R})$ [2]

- *Commutativite* $x + y = y + x$.

- *Il existe un element neutre* 0 *t.q.* $0 + x = x, x \in \mathbb{R}$. [3]
- *Distributivite* $x(yz) = (xy)z$

- *Il existe un element inverse, unique* $-x \in \mathbb{R}$ *t.q.* $x + (-x) = 0$

Remarque : Il existe beaucoup d'autres corps que $\mathbb{R}$, par exemple $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\{0, 1, 2\} \mod 3$

Attention : $\{0, 1, 2, 3\} \mod 4$ n'est pas un corps !
Presque tous marchent, ils satisfont 8 des 9 axiomes.

---

2. L'associativite n'est pas forcement vraie(octonions)
3. Il y a aucune difference entre les regles pour l'addition que pour la multiplication.

Lemme 4 (Theorem name)
$\forall x \exists ! y$ *t.q.* $x+y=0$.

Preuve
Supposons $x+y=0=x+y'$
A voir : $y=y'$.

$$\begin{aligned} y &= y+0 = y+(x+y') = (y+x)+y' \\ &= (x+y)+y' = 0+y' = y' \end{aligned}$$

CQFD. □

<u>Exercice</u>
Demontrer que 0 est unique.

Proposition 5 (Annulation de l'element neutre)
$0 \cdot x = 0$

Preuve

$$x = x \cdot 1 = x(1+0) = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$$

$$0 = x + (-x) = x + (-x) + x \cdot 0$$ □

$\Rightarrow 0 = x \cdot 0$
[4]

Corollaire 6 (x fois moins 1 egale -x)

$$x + x \cdot (-1) = 0$$

Preuve
A voir : $x \cdot (-1)$ *satisfait les proprietes de* $-x$.
Or

$$x + x(-1) = x(1-1) = x \cdot 0 = 0.$$ □

<u>Exercice</u>
Montrer que $\forall x : -(-x) = x$ et que ceci implique $(-a)(-b) = ab$.

Rien de tout ca n'a quelque chose a voir avec $\mathbb{R}$.
Il nous faut plus d'axiomes !!

4. $a - b = a + (-b)$

Axiom 7 (Nombres Reels II)
$\mathbb{R}$ est un corps ordonne. Ce qui revient a dire que les assertions suivantes sont verifiees.
- *$x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$*

- *$(x \leq yety \leq x) \Rightarrow x = y$*
- *pour tout couple de nombres reels x et y : ou bien $x \leq y$ ou bien $x \geq y$.*

Exemple de corps ordonnnes :
(1) $\mathbb{R}$, (2) $\mathbb{Q}$, (3) $\{0,1,2\} \mod 3$ n'est pas un corps ordonne.
Exercice
$x \leq y \iff -x \geq -y$ **Exercice**
$x \leq y$ et $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$
$x \leq y$ et $z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz$.

Il nous manque encore un axiome, et c'est le dernier : pour mercredi !

Lecture 2: Cours Mercredi

Wed 16 Sep

2.1 Exemple d'utilisation

Definition 1 (valeur absolue)

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Proposition 8 (Inegalite du triangle)
Elle dit que
$$\forall x, y : |x + y| \leq |x| + |y|$$

Preuve
Cas $x, y \geq 0$: alors $x + y \geq 0$

$$\iff x + y \leq x + y$$

Ce qui est toujours vrai.
Cas $x \geq 0$ et $y < 0$.
Si $x + y \geq 0$, alors

$$\iff |x + y| \leq x - y$$
$$\iff x + y \leq x - y$$
$$y \leq -y$$

c'est vrai car $y < 0$.
Si $x + y < 0$, alors

$$\iff -x - y \leq x - y \qquad \square$$

Donc $-x \leq x$ vrai car $x \geq 0$.

Definition 2 (Bornes)
Terminologie : Soit $A \subseteq E$, E corps ordonne.

- *Une borne superieure (majorant) pour A et un nombre b tq*

$$a \leq b \forall a \in A.$$

- *Une borne inferieure (minorant) pour A et un nombre b tq*

$$a \geq b \forall a \in A.$$

On dira que l'ensemble A est borne si il admet une borne.

Axiom 9 (Axiome de completude)

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \neq \emptyset$$

et majoree $\exists s \in \mathbb{R}$ t.q

1. *s est un majorant pour A.*
2. *$\forall$ majorant b de A, $b \geq s$.*

Cet axiome finis la partie axiomatique du cours.

Remarque

1. *$\forall s' < s \exists a \in A : a > s'$.*
2. *s est unique.*

Definition 3 (Supremum)
Ce s s'appelle le supremum de A, note $sup(A)$.

Remarque
$\exists$ (pour A minore et $\neq \emptyset$) une borne inferieure plus grande que toutes les autres, notee $inf(A)$ (infimum).

$$\inf(A) = -\sup(-A)$$

Remarque
Si $\sup(A) \in A$, on l'appelle le maximum.

Remarque
Si $\inf(A) \in A$, on l'appelle le minimum.

Proposition 14
$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x.$

Preuve
Par l'absurde,
Alors

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : n < x$$

$\Rightarrow \mathbb{N}$ *borne et* $\neq \emptyset \Rightarrow \exists s = \sup(\mathbb{N})$

$$s - \frac{1}{2} < s \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > s - \frac{1}{2}$$

$n + 1 \in \mathbb{N}$ *et* $n + 1 > s - \frac{1}{2} + 1 = s + \frac{1}{2}$
donc $n + 1 > s$ *absurde.* □

Corollaire 15 (Propriete archimedienne)

1. $\forall x \forall y > 0 \exists n \in \mathbb{N} : ny > x.$

2. $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon$

Preuve
Pour 2, appliquer la proposition a $x = \frac{1}{\epsilon} \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{1}{\epsilon}$
Alors

$$\Rightarrow \epsilon > \frac{1}{n}$$

Pour montrer le 1.
Considerer $\frac{x}{y}$ □

On peut maintenant montrer que la racine de deux existe.

Theorème 16 (La racine de deux existe)

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

Preuve

$$A := \{y | y^2 < 2\}$$

Clairement $A \neq \emptyset$ *car* $1 \in A$. *De plus, A est majore :* 2 *est une borne. (si* $y > 2, y^2 > 4 > 2 \Rightarrow y \notin A$*).*
Donc $\exists x = \sup(A)$
Supposons (par l'absurde) que $x^2 < 2$

Soit $0 < \epsilon < 1, \frac{2-x^2}{4x}$.
Clairement, par hypothese $2 - x^2 > 0$ *et idem pour* $4x$ *car* $x \geq 1$. *Soit* $y = x + \epsilon$, *alors*

$$y^2 = x^2 + 2\epsilon x + \epsilon^2 < x^2 + \frac{2-x^2}{2} + \frac{2-x^2}{2} = 2$$

$\Rightarrow y \in A$ *Mais* $y = x+\epsilon > x$. *Absurde car* $x = \sup(A)$. *Donc* $x^2 \geq 2$. *Deuxiemement, supposons (absurde)* $x^2 > 2$.
Soit $0 < \epsilon < \frac{x^2-2}{2x} > 0$.
Posons $b = x - \epsilon$.

$$\begin{aligned} b < x \Rightarrow \exists y \in A : y > b \\ \Rightarrow y^2 > b^2 = x^2 - 2\epsilon x + \epsilon^2 > x^2 - \underbrace{2\epsilon x}_{<x^2-2} \\ > x^2 - (x^2 - 2) = 2. \end{aligned}$$

Conclusion : $y^2 > 2$ *contredit* $y \in a$.
Donc $x^2 = 2$. □

Remarque
Preuve similaire :

$$\forall y > 0 \exists! x > 0 : x^2 = y$$

Proposition 18 ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$)

$$\forall x < y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y$$

Lemme 19

$$\forall x \exists n \in \mathbb{Z} : |n - x| \leq \frac{1}{2}$$

Ou encore :

$$\forall x \exists [x] \in \mathbb{Z} tq$$

$$\begin{cases} [x] \leq x \\ [x] + 1 > x \end{cases}$$

Preuve

$$\exists n \in \mathbb{Z} : n > x (Archimede).$$

Soit $[x] = \inf\{n \in \mathbb{Z} : n > x\} - 1$ □

Preuve (Preuve de la densite)
Archimede : $\exists q \in \mathbb{N} : q > \frac{1}{y-x}$.
Donc

$$\begin{aligned} qy - qx > 1. \\ \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : qx < p < qy \end{aligned}$$

par exemple :

$$p = [qy]$$

si $qy \notin \mathbb{Z}$ *ou bien*

$$p = qy - 1$$

si $qy \in \mathbb{Z}$ □

Lecture 3: Suites

Wed 23 Sep

$$\begin{aligned} 0,999 \\ 0,9 \\ 0.99 \\ 0.999 \\ 0.9999 \\ \vdots \end{aligned}$$

> **Proposition 20 (Densite des irrationnels)**
> $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *les irrationnels sont dense dans* $\mathbb{R}$.

Preuve
Soit $x < y$ *(dans* $\mathbb{R}$*).*
Cherche $z \notin \mathbb{Q}$ *tq* $x < z < y$.

$$\exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} tq x < \frac{p}{q} < y$$

Propr. archimedienne $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\underbrace{\frac{p}{q} + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{n}}_{:=z} < y$$

car

$$\exists n : \frac{1}{n} < \underbrace{y - \frac{1}{q}}_{>0} / \sqrt{2}$$

Il reste a voir que : $z = \frac{p}{q} + \sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$

$$\sqrt{2} = n(z - \frac{p}{q})$$
$$z \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \lightning$$

□

3 Suites et limites

Definition 4 (Suite)
Une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est une application* (*=fonction*) $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Remarque
Suite $(x_n) \neq$ *ensemble* $\{x_n\}$ *Il arrive qu'on indice* x_n *par une partie de* $\mathbb{N}$*. Mais suite* $=$ *suite infinie*

Exemple
$x_n = \frac{1}{n}(n = 1, 2, \ldots)$
$x_n = (-1)^n; x_n = n!; F_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$
$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415$

3.1 Convergence

Definition 5 (Convergence de suites)
L'expression $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$ *signifie :*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$$

On dit alors que (x_n) *converge (vers* l*). Sinon,* (x_n) *diverge.*

Lemme 23 (Unicite de la limite)
Si (x_n) *converge, il existe un unique* $l \in \mathbb{R}$ *tq* $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$

Preuve
Supposons l, l' *limites. Si* $l \neq l'$*, alors* $|l - l'| > 0$ *Donc* $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \frac{|l-l'|}{2}$
De meme $\exists n_1 \forall n > n_1 : |x_n - l'| < \frac{|l-l'|}{2}$
Soit $n > n_0, n_1$ *Alors :*

$$|l - l'| = |l - x_n + x_n - l'| \leq \underbrace{|l - x_n|}_{<|l-l'|/2} + \underbrace{|x_n - l'|}_{|x_n - l'|}$$

Donc

$$|l - l'| < 2 \cdot \frac{|l - l'|}{2}$$

$\lightning$ □

Exemple

1. *Si* (x_n) *est constante (* $\exists a \forall n : x_n = a$*) alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ *(Archimede)*

Definition 6
Terminologie :
(x_n) *est bornee, majoree, minoree, rationnelle, ... etc si l'ensemble* $\{x_n\}$ *l'est.*
La suite (x_n) *est croissante si* $x_n \leq x_{n+1} \forall n$ *Idem decroissante Dans les deux cas, on dit que la suite* (x_n) *est monotone*

Lemme 25
Toute suite convergente est bornee.

Preuve
Posons $\epsilon = 7$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |x_n - l| < 7 \qquad \square$$

Soit $B_1 \geq |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|$
Posons $B = max(B_1, |l| + 7)$ *Alors* $|x_n| \leq B \forall n$.

Attention la reciproque n'est pas vraie!!

Exemple
$x_n = (-1)^n$ *definit une suite bornee non convergente.*

Preuve
Supposons $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n = l$.
Posons $\epsilon = \frac{1}{10}$ *alors* $\exists n_0 \forall n > n_0 : |(-1)^n - l| < \frac{1}{10}$
$n > n_0$ *pair* $\Rightarrow |1 - l| < \frac{1}{10}$
$n > n_0$ *impair* $\Rightarrow |-1 - l| < \frac{1}{10}$
ceci implique

$$\Rightarrow |1 - (-1)| \leq |1 - l| + |-1 - l| < \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \qquad \square$$

Proposition 27
Supposons $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$ *et* $\lim_{n\to+\infty} x'_n = l'$
Alors 1. : $\lim_{n\to+\infty}(x_n + x'_n) = l + l'$*, et* 2. : $\lim_{n\to+\infty} x_n \cdot x'_n = l \cdot l'$

Preuve
1 :
Soit $\epsilon > 0$ *Cherche* n_0 *tq* $\forall n > n_0 : |x_n + x'_n - (l + l')| < \epsilon$.
Appliquons les deux hypothese a $\frac{\epsilon}{2}$: $\exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ *et*

$\frac{\epsilon}{2}$: $\exists N' \forall n > N' : |x'_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ *Posons* $n_0 = \max(N, N')$
Si $n > n_0$*, alors*

$$|x_n + x'_n - (l + l')| \leq |x_n - l| + |x'_n - l'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

2 :
Par le lemme, $\exists B$ *tq.* $|x_n|, |x'_n| < B \forall n$.
Soit $\epsilon > 0$*. Appliquons les hypotheses a* $\frac{\epsilon}{2B}$.

$$\exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2B}$$

Si $n > n_0 := \max(N, N')$:

$$\begin{aligned} |x_n x'_n - ll'| &\leq |x_n x'_n - x_n l'| + |x_n l' - ll'| \\ &= \underbrace{|x_n|}_{<B} \cdot \underbrace{|x'_n - l'|}_{<\frac{\epsilon}{2B}} + \underbrace{|l'|}_{<B} \cdot \underbrace{|x_n - l|}_{<\frac{\epsilon}{2B}} < \epsilon \end{aligned}$$ □

> **Lemme 28**
> *On a utilise : lemme Si* $x_n \leq B \forall n$ *et* $\lim_{n \to +\infty} x_n = l$ *alors* $l \leq B$

Preuve
Par l'absurde :
Si $l > B$*, posons* $\epsilon = l - B > 0$
$\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$
en particulier $x_n > l - \epsilon = B$ ↯ □

Lecture 4: lundi

Mon 28 Sep

Remarque

— $\lim_{n \to +\infty} |x_n| = |\lim_{n \to +\infty} x_n|$*, ce qui est sous-entendu ici est que la limite existe.*

— $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *convergence et limite sont inchangees si on modifie un nombre fini de termes.*
En particulier $(x_n)_{n=17}^{\infty}$*, rien ne change.*
— $x_n \to l$ ($n \to \infty$)*, equivalent a* $\lim_{n \to +\infty} x_n = l$
— *On dit que* (x_n) *converge vers* $+\infty$ *et on note* $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$*, si* (x_n) *diverge de la facon suivante :*

$$\forall R \in \mathbb{R}, \exists n_0 \forall n > n_0 : x_n > R$$

La definition est la meme si x_n *converge vers* $-\infty$

Proposition 30 (Inversion d'une limite)
Supposons que (x_n) *converge vers* $l \neq 0$*, alors* $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{l}$

Corollaire 31
Si (x_n) *converge vers* l *et*
Si (y_n) *converge vers* $m \neq 0$ *alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{l}{m}$$

Car $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$

Lemme 32
Sous les hypotheses de la proposition,

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n \neq 0$$

Preuve
Appliquons la convergence a $\epsilon = \frac{|l|}{2}$ *(car* $l \neq 0$*)*

$$|x_n - l| < \epsilon \Rightarrow x_n \neq 0 \qquad \square$$

Preuve
Preuve de la proposition
Soit $\epsilon > 0$*.*
On veut estimer

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{l} \right| = \underbrace{\frac{|l - x_n|}{|x_n - l|_{\geq \frac{|l|}{2}|l|}} <?\epsilon}$$

pour n *comme dans le lemme. On veut donc*

$$|l - x_n| < \epsilon \frac{|l|^2}{2}$$

Donc $\exists n_1 \forall n \geq n_1$*, on a bien* $|l - x_n| < \epsilon$ $\square$

Exemple
On peut a present calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_d n^d}{b_0 + \ldots + b_f n^f}$$

$a_d \neq 0, b_f \neq 0$
Si $d > f$ *alors* $lim = \pm\infty$
Si $d < f$ *alors* $lim = 0$

Si $d = f$*, alors* $lim = \frac{a_d}{b_f}$
Justification
La suite peut s'ecrire

$$\frac{a_d + a^{d-1}\frac{1}{n} + \ldots + a_0 \frac{1}{n^{d-1}}}{b_0 \frac{1}{n^d + \ldots + b_f n^{f-d}}}$$

Si $f = d, \to \frac{a_d}{b_f}$

Si $f > d, \to 0$
Si $f < d, \to \pm\infty$*, selon signe de* $\frac{a_d}{b_f}$

Proposition 34
Soit $a \in \mathbb{R}$ *avec* $|a| < 1$*, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$$

Proposition 35
Si (x_n) *est monotone et bornee, alors elle converge.*

Preuve
Soit (x_n) *croissante. Affirmation,* $x_n \to s := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$
Soit $\epsilon > 0$, $\exists n : x_n > s - \epsilon$ *(def. de sup)*
$\forall n \geq n_0 : s - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq s \Rightarrow |x_n - s| < \epsilon$
Idem, si elle etait decroissante. □

Preuve
Remarque : $(x_n) \to 0 \iff (|x_n| \to 0)$.

$$\ldots |x_n - 0| < \epsilon$$

Donc on va traiter le cas $a > 0$*, alors* $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ *est decroissante.*
Bornee (par zero et 1*)* $\Rightarrow$ *elle admet une limite* l*.*
Or $\lim_{n\to+\infty} a^n = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} a^{n+1}}_{a \cdot \lim_{n\to+\infty} a^n}$ *Donc* $l = al$*. Si* $l \neq 0$*,* $1 = a$ *absurde, donc* l *nul.* □

Exemple
Def (x_n)*en posant* $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$
Observons que $x_n \geq 2 > 0 \forall n$
Si (x_n) *converge, alors*

$$l = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}(2 + \frac{1}{x_n}) = 2 + \frac{1}{l}$$

Donc

$$l^2 - 2l - 1 = 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{1+1} = l$$

Or $l \geq 2 \Rightarrow l = 1+\sqrt{2}$ si l existe.
A present, estimons $|x_n - l|$:

$$\left|x_n - 1 - \sqrt{2}\right| = \left|2 + \frac{1}{x_{n-1}} = (2+\frac{1}{l})\right| = \frac{|l - x_{n-1}|}{x_{n-1}l} \leq \frac{|x_{n-1}-l|}{4}$$

$$\leq \ldots \leq \frac{|x_{n-2}-l|}{4^2} \leq \frac{|2-l|}{4^n} \to 0$$

car $\frac{1}{4^n} \to 0$

Lemme 37 (Deux gendarmes)
Soit $(x_n), (y_n), (z_n)$ trois suites avec

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l = \lim_{n\to+\infty} z_n$$

si $x_n \leq y_n \leq z_n \forall n$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = l$$

Preuve
repose sur le fait que

$$|x_n - l|, |z_n - l| < \epsilon \Rightarrow l - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \epsilon$$

montre $|y_n - l| < \epsilon$ □

4 Limsup et liminf

Definition 7 (Limsup et liminf)
Soit (x_n) une suite quelconque.
On definit la limite superieure par :

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \inf_n \sup\{x_k, k \geq n\}$$

Attention : Ici on convient que

$$\sup(A) = +\infty$$

si A non majore

$$\inf(A) = -\infty$$

si A non minore

On definit la limite superieure par :

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \sup_n \inf\{x_k, k \geq n\}$$

Notez : $z_n := \sup\{x_k : k \geq n\}$

Cela definit une suite decroissante et donc (z_n) converge vers son inf.
Conclusion : $\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} z + n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} x_k$

Lecture 5: mercredi 30

Wed 30 Sep

Theorème 38
(x_n) converge $\iff$ $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$ Dans ce cas, la limite prend cette meme valeur.

Preuve
$\Leftarrow$:
Soit $z_n = \sup\{x_p : p \geq n\}$,

$$y_n = \inf\{x_p : p \geq n\}$$

Rappel : $(z_n) \to LS$ et $(y_n) \to LI$
Or, $y_n \leq x_n \leq z_n$. Donc par les 2 gendamrmes

$$\Rightarrow (x_n) \to LS = LI$$

$\Rightarrow$:
Hypothese : $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$.
A voir : $LS = LI = l$.
Montrons par exemple que

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = l$$

(i.e. $LS = l$)
Soit $\epsilon > 0$.

$$\exists N \forall n \geq N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$
$$\text{et } \forall n \geq N : |z_n - LS| < \frac{\epsilon}{4}$$

Def. de $z_N \Rightarrow \exists p \geq N : |x_p| > z_N - \frac{\epsilon}{4}$
A present

$$|LS - l| \leq \underbrace{|LS - z_N|}_{<\frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|z_n - x_p|}_{<\frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|x_p - l|}_{<\frac{\epsilon}{2}}$$

avec $p \geq N$ et $N \geq N$ Donc $\forall \epsilon > 0$:

$$|LS - l| < \epsilon$$

Donc $LS = l$ ∎

Theorème 39 (Premiere regle de d'Alembert)
Supposons $x_n \neq 0 \forall n$
Supposons que $\rho = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ existe
Si $\rho < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$
Si $\rho > 1$, alors (x_n) diverge.

Remarque
Si $\rho = 1$, on ne peut rien concluer

Exemple

— $x_n = n$ *diverge, mais* $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$
— $x_n = \frac{1}{n}$ *converge mais* $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$

Preuve
Supposons $\rho < 1$.
A voir : $x_n \to 0$.
Soit $\rho < r < 1$. *Convergence pour* $\epsilon = r - \rho$: $\left|\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - \rho\right| < r - \rho$

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < r$$

i.e. $|x_{n+1}| < r\,|x_n|$ *de meme* $|x_{n+2}| < r\,|x_{n+1}| < r^2\,|x_n|$

Conclusion $\forall m \geq n_0 : |x_m| < r^{m-n_0}\,|x_{n_0}|$
Donc

$$\forall m \geq n_0 : |x_m| < r^m\,|x_{n_0}|\,r^{-n_0}$$

Onn sait que $\lim_{m\to+\infty} r^m = 0$ *donc*

$$0 \leq |x_m| \leq r^m c$$

avec c constante Cas $\rho > 1$.
On va montrer que $|x_n|$ *est non bornee.*
Soit $1 < r < \rho$.

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |x_{n+1}/x_n| > r$$

Donc

$$|x_{n+1}| > r\,|x_n|$$

comme avant :

$$x_m > r^{m-n_0}\,|x_{n_0}|$$ □

Remarque
Si $r > 1$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} r^n = +\infty$ r^n *est croissante donc il suffit de montrer que la suite est non bornee.*
Si elle etait bornee, soit $l = \lim_{n\to+\infty} r^n \in \mathbb{R}$
Mais $l = \lim_{n\to+\infty} r^{n+1} = rl$
Donc $l \neq 0 \Rightarrow 1 = r$ *absurde.*

Definition 8 (Sous-suite)
Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *une suite.*
Une sous-suite de (x_n) *est une suite de la forme* $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, *ou* $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ *est une suite strictement croissante de* N.

Exemple
Si (x_n) *est une suite, considerer :*

$$x_2, x_3, x_5, x_7, x_{11}, x_{13}, \ldots$$

Ici, $n_k = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$

Proposition 44
Si x_n *converge, alors toute sous-suite converge vers la meme limite.*

Preuve
Soit $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$. *Soit* $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ *une sous-suite et* $\epsilon > 0$.
A voir : $\exists k_0 \forall k > k_0 : |x_{n_k} - l| < \epsilon$
Or $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$.
Donc il suffit de choisir k_0 *tq* $n_{k_0} \geq n_0$.
(puisque la suite (n_k) *est croissante.)* □

Theorème 45 (Bolzano-Weierstrass)
Toute suite bornee admet une sous-suite convergente

Preuve
On va construire une sous-suite qui converge vers $s := \limsup_{n\to\infty} x_n$
Ici, (x_n) *est la suite en question et on pose*

$$z_n = \sup\{x_p : p \geq n\}$$

Par recurrence, n_1 *quelconque.*
Supposons n_{k-1} *construit et construisons* n_k *:*

$$\exists N \forall n \geq N : |z_n - s| < \frac{1}{k}$$

Choisissons un $n \geq N$, $n_{k-1} + 1$

$$\exists p \geq n \text{ t.q. } x_p > z_n - \frac{1}{k}$$

On definit $n_k = p$ $(\, n_k > n_{k-1})$
Or, $\underbrace{|x_{n_k} - s|}_{<\frac{1}{k}} \leq \underbrace{|x_{n_k} - z_n|}_{<\frac{1}{k}} + \underbrace{|z_n - s|}_{<\frac{1}{k}}$
Donc $(x_{n_k} \to s(k \to \infty)$ □

Definition 9 (Point d'accumulation)
x est un point d'accumulation de la suite x_n *s'il existe une sous-suite qui converge vers* x.

Exemple

$$x = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

$$x = \liminf_{n\to\infty} x_n$$

4.1 Suites de Cauchy

Definition 10 (Suites de Cauchy)
La suite (x_n) est dire de Cauchy si

$$\forall\epsilon > 0 \exists N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < \epsilon$$

Attention :
Il ne suffit pas de comparer x_n et x_{n+k} pour k fixe.

Exemple
$x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

Cauchy $\iff \forall\epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall k \in \mathbb{N} : |x_n - x_{n+k}| < \epsilon$

Lemme 48
Si (x_n) converge, elle est de Cauchy.

Preuve
Soit $\epsilon > 0$, soit l la limite.
Hypothese :
avec $\frac{\epsilon}{2}$: $\exists N \forall n \geq N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$
Si $n, n' \geq N$

$$|x_n - x_{n'}| \leq |x_n - l| + |x_{n'} - l| < \epsilon$$

□

Theorème 49 (Convergence des suites de Caucjy)
Toute suite de Cauchy converge

Preuve
Soit (x_n) de Cauchy.

Lemme 50
(x_n) est bornee.

Preuve
Soit $\epsilon = 10$

$$\forall N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < 10$$

Donc $|(x_n)|$ est bornee par

$$\max(|x_N| + 10, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|)$$

□

Appliquer Bolzano-Weierstrass

$$\exists \text{ sous-suite } (x_{n_k})$$

qui converge, soit l sa limite. A voir (x_n) converge vers l.
soit $\epsilon > 0 \exists k_0 \forall k \geq k_0 \, |x_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2}$

$$\exists N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < \frac{\epsilon}{2}$$

Si $n \geq N, n_{k_0}$ alors

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < \epsilon$$ □

Lecture 6: lundi

Mon 05 Oct

Remarque

Ecriture decimale : $3.1415\ldots$ ou encore $0.333\ldots$ veut dire

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \ldots$$

une somme infinie de fractions. La difference entre le n ieme terme et le n' ieme terme :

$$\leq 10^{-n} \to 0 \Rightarrow \text{ Cauchy}$$

Cette limite est une "somme infinie".

5 Series

But : definir les "sommes infinies" .

$$\to \begin{cases} \text{Existe ?} \\ \text{Valeur ?} \end{cases}$$

Exemple

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$$

ou encore

$$\exp(x) = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots$$

ou

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

Definition 11 (Serie)

Le symbole $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ représente

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots \text{ et est défini par}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k$$

On appelle

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

une série et on dit qu'elle converge/diverge lorsque la suite $s_n := x_0 + \ldots + x_n$ le fait.

Corollaire 53
Si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *existent, alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

Preuve

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} s_n, s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} t_n, t_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n, \text{ où}$$

$$u_n = (x_0 + y_0) + \ldots + (x_n + y_n) = s_n + t_n$$

Donc la limite

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(s_n + t_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

□

Corollaire 54
Pour $a \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} a x_n = a \sum_{n=0}^{\infty} x_n$*, si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

existe.

Sans preuve.

Corollaire 55

$$\sum_{n=n_0}^{ify} x_n \textit{ existe si } \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

existe et vaut

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n - (x_0 + x_1 + \ldots + x_{n_0-1})$$

n

Corollaire 56 (Critere de Cauchy pour les séries)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n converge \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : \left| \sum_{p=N}^{n} x_p \right| < \epsilon$$

(Dans ce cas, $|\sum_{n=N}^{\infty} x_n| \leq \epsilon$*)*

Preuve
Appliquer Cauchy à la suite s_n *:*

$$\exists n_0 \forall n, n' > n_0 : |s_n - s_{n'}| < \epsilon$$

Alors

$$\left| \sum_{p=n'+1}^{n} x_p \right| < \epsilon$$

Exemple
Ecriture decimale,

Proposition 58
Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge, alors

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$$

Preuve
Appliquer Cauchy à $\left| \underbrace{s_n - s_{n-1}}_{=x_n} \right|$
Attention, la réciproque est FAUSSE. □

Proposition 59 (Serie Geometrique)
Soit $r \in \mathbb{R}$ avec $|r| < 1$, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Preuve
Soit

$$s_n = r^0 + r^1 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r^n}$$

Or

$$\lim_{n \to +\infty} r^{n+1} = 0 \qquad \square$$

Donc $s_n \to \frac{1}{1-r}$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1$$

Proposition 60 (Série Harmonique)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \textit{ diverge (vers } +\infty)$$

Preuve
Considérons

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \underbrace{\frac{1}{2^n + 1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{2^{n+1} - 2^n = 2^n \textit{ termes.}} + \ldots$$

Tous ces termes sont $\geq \frac{1}{2^{n+1}}$
Cette somme est :

$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} \geq 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \qquad \square$$

Contredit Cauchy pour $\epsilon = \frac{1}{2}$.

Astuce utile :

$$\sum_{n=}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1$$

Preuve

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \qquad \square$$

Donc ca converge.
C'est une série téléscopique

Proposition 61 (Critère de Comparaison)
Supposons $0 \leq x_n \leq y_n$.
Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \textit{ converge, alors } \sum_{n=0}^{\infty} x_n \textit{ aussi .}$$

Preuve

$$s_n = x_0 + \ldots + x_n$$

est croissante. Donc converge $\iff (s_n)$ *bornée.*
Mais $y_0 + \ldots + y_n$ *converge* $\Rightarrow$ *bornée et* $s_n \leq y_0 + \ldots + y_n \Rightarrow (s_n)$ *bornée* $\square$

Remarque
De plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

Si, par contre,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \textit{ diverge } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n \textit{ diverge}$$

Corollaire 63

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge.

Preuve
$\forall n \geq 2 : \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$
Or

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \textit{ converge.}$$

Donc, par comparaison, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge*

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge .}$$

□

Lecture 7: mercredi

Wed 07 Oct

Definition 12 (Séries Alternées)
(x_n) *est alternée si* $x_n \cdot x_{n+1} \leq 0 \forall n$

Theorème 64
Soit (x_n) *alternée,* $|x_n|$ *décroissante, et*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ converge.}$$

Exemple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge. (série harmonique alternée) [5]

Preuve
On utilise cauchy.
Soit $n, m \in \mathbb{N}$.

$$\underbrace{x_n + x_{n+1}}_{\geq 0} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m-1} + x_{n+m}$$

Cas $x_n \geq 0$ *:*
Cas où n *pair*

$$0 \leq \sum_{p=n}^{n_m} x_p \leq x_n$$

Si m *impair :*
idem
Que n *soit pair ou impair*

$$\left| \sum_{p=n}^{n+m} x_p \right| \leq |x_n|$$

5. En fait la série converge vers $-\log 2$

Or, soit $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \Rightarrow$$

$\exists N \forall n > N| \, |x_n| \leq \epsilon.$

Donc $\forall n > N, m|$

$$|x_n + \ldots + x_{n+m}| < \epsilon$$

□

5.0.1 Un calcul naif (avec la série harmonique alternée)

Soit $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, existe par le théorème.
Note : $S < 0$.

$$s_n = \underbrace{-1 + \frac{1}{2}}_{=-\frac{1}{2}} \underbrace{-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{<0} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n}$$

$s_n < -\frac{1}{n}, \forall n$ pair $\Rightarrow S \leq -\frac{1}{2}$

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$$

à chaque terme x_n, on associe x_{2n}

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \ldots$$
$$= \frac{1}{2}(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots) = \frac{1}{2}S$$

Donc $S = \frac{1}{2}S \Rightarrow S = 0$ Faux!
Conclusion :
On ne peut pas permuter (en général) les termes d'une série convergente (somme infinie)

Definition 13
On dit que la somme de

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge absolument si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

converge.
Note : la valeur

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

ne nous intéresse pas

Remarque
Si $x_n \geq 0 \forall n$, aucune différence entre "convergence" et "convergence absolue".

Exemple

— *La série harmonique alternée converge, mais pas absolument.*

Lemme 68
Convergence absolue implique la convergence.

Preuve
$\forall n : 0 \leq x_n + |x_n| \leq 2|x_n|$
Donc convergence absolue $\Rightarrow$

$$\sum (x_n + |x_n|)$$

converge.
Or $-\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ *converge .*
Somme des deux sommes ci-dessus, implique que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

□

Theorème 69
Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge absolument, alors toute permutation converge vers la même somme.

Exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Clarification :
Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$, i.e. bijection.
La nouvelle série sera

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \textit{ pour } y_n = x_{\sigma(n)}$$

Notons $s_n = x_0 + \ldots + x_n$ et

$$t_n = y_0 + \ldots + y_n = x_{\sigma(0)} + \ldots + x_{\sigma(n)}$$

Le théorème dit : si $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ existe, alors $\lim s_n = \lim t_n$.

Preuve
1er cas "facile" .
Supposons $x_n \geq 0 \forall n$.
Alors $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sup \{s_n | n \in \mathbb{N}\}$
On va montrer que $\underbrace{\sup_n s_n}_{=:s} \geq \underbrace{\sup_n t_n}_{=:t}$ *et que* $\sup_n s_n \leq \sup_n t_n$
Pour $s \geq t$ *:*
Soit $\epsilon > 0$. *Or , par déf,* $\exists n t_n > t - \epsilon$
ie

$$y_0 + \ldots + y_n > t - \epsilon$$

ie

$$x_{\sigma(0)} + \ldots + x_{\sigma(n)} > t - \epsilon$$

Soit $m = max_{i=0,\ldots,n}\sigma(i)$, *alors*

$$s_m \geq t - \epsilon$$

donc

$$s = \sup s_n > t - \epsilon$$

vrai $\forall \epsilon > 0 \Rightarrow s \geq t$
En considérant σ^{-1}, *on obtient de même* $t \geq s \Rightarrow s = t$, *donc le théorème vrai SI* $x_n \geq 0$.
2ème cas : $x_n \leq 0 \forall n$, *idem*
Cas général :
Posons $x_n = x'_n + x''_n$, *ou* $x'_n = \max(x_n, 0)$ *et* $x''_n = \min(x_n, 0)$, *alors*

$$x_{\sigma(n)} = x'_{\sigma(n)} + x''_{\sigma(n)}$$

On conclut en appliquant le cas (1) a x'_n *et (2) ou* x''_n □

Theorème 71
Supposons que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge, mais pas absolument.
$\forall l \in \mathbb{R} \exists$ *permutation* σ *t.q.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = l.$$

Lecture 8: Series fin

Mon 12 Oct

Theorème 72 (Critere de d'Alembert 2)
Supposons que $\lim_{n\to+\infty}|\frac{x_{n+1}}{x_n}| = \rho$ *existe.*
Si $\rho < 1$ *alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

converge absolument.
Si $\rho > 1$*, alors elle diverge.*

Preuve
Si $\rho > 1$, x_n *diverge donc ne converge pas vers 0, donc* $\sum x_n$ *diverge.*
Supposons $\rho < 1$. $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{\rho+1}{2}$.
On déduit que

$$|x_n| \leq \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^{n-n_0} |x_{n_0}|$$

Donc

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|$$

peut etre comparee à

$$|x_{n_0}| \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^{n-n_0}$$

Or la série ci-dessus est une série géometrique avec $\frac{\rho+1}{2} < 1$*, donc elle converge.*
Donc

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|$$

converge car la série géometrique converge, il suit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge absolument. □

Exemple
Soit $x \in \mathbb{R}$*. Alors* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *converge absolument.*

Preuve
$x_n = \frac{x^n}{n!}$*, alors*

$$|\frac{x_{n+1}}{x_n}| = |\frac{x}{n+1}| \to 0$$

□

Exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$x_n = \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Alors

$$|\frac{x_{n+1}}{x_n}| = |\frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)}| \to 0$$

Remarque
Si $\rho = 1$ on ne peut rien conclure.

Exemple

$$\sum \frac{1}{n} \text{ diverge, or } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$$

Idem pour

$$\sum n$$

Exemple

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge, or

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

Proposition 78
On admet que

$$\forall x \geq 0 \exists! x^{\frac{1}{n}} : (x^{\frac{1}{n}})^n = x$$

Alors

$$\lim_{n \to +\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

Preuve
Posons $\epsilon_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$, (a voir : $\epsilon_n \to 0$).

$$\begin{aligned} n = ((1+\epsilon_n)^{\frac{1}{n}})^n &= 1 + n\epsilon_n + \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 \underbrace{\ldots}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}\epsilon_n^2 \\ \Rightarrow \epsilon_n &\leq \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

□

Theorème 79 (Critere de la racine)
Soit $L = \limsup_{n\to\infty}(|x_n|)^{\frac{1}{n}}$.
Si $L < 1$, *alors* $\sum x_n$ *converge absolument*
Si $L > 1$, *alors* $\sum x_n$ *diverge.*

Exemple
Soit

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} \text{ si } n \text{ pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Exemple

1.
$$\sum \frac{x_n}{n!}, alors$$
$$|x_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n!}^{\frac{1}{n}} \text{ donc } |x_n| \to 0(\text{ exo })$$

2.
$$\sum n \text{ diverge }, n^{\frac{1}{n}} \to 1$$

3.
$$\sum \frac{1}{n^2}$$
converge, or
$$\frac{1}{n^2}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} \to 1$$

Preuve
Si $L > 1$,
alors $\lim_{n\to+\infty} \sup \left\{|x_k|^{\frac{1}{k}} : k \geq n\right\}$. *Donc* $\exists n_0 \forall n > n_0 : z_n > 1$, *i.e.*

$$\exists k \geq n : |x_k| > 1^k = 1$$

x_n *ne converge pas vers zero* $\implies$ *la série ne converge pas.*
Si $L < 1$,
$\exists n_0 \forall n > n_0 : z_n; \frac{1+L}{2}$, *or*

$$|x_n| \leq z_n^n < \left(\frac{1+L}{2}\right)^n$$

On conclut par converge avec la série géometrique. □

Exemple
Posons $x_0 = 0$, *et* $x_{n+1} = \frac{1+nx_n}{2^{n+1}}$
Notons (exo par récurrence)

$$\forall n \leq 2^n$$

Donc

$$0 \leq x_n \leq 1$$

On a

$$x_n^{\frac{1}{n}} = \frac{(n+1)^{\frac{1}{n}}}{2 \cdot 2^{\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{2}$$

Le critère s'applique : $L < 1$.

Lemme 83
$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$

Preuve
A voir : $(\sqrt[n]{n!})^2 \to +\infty$.
Or $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n \geq \frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1) \cdot \ldots n$
Si n *pair.*

$$\begin{aligned} &\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1) \cdot \ldots n \\ &\qquad \geq (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Donc $\sqrt[n]{(n!)^2} \geq \sqrt[n]{(\frac{n}{2}^n)} = \frac{n}{2} \to \infty$ □

6 Fonctions

En général, fonctions = applications = map.

En analyse I, fonction = fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ou sur une partie $A \subseteq \mathbb{R}$.
En analyse II, on ira de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Lecture 9: mercredi

Wed 14 Oct

Definition 14
On dit qu'une fonction f *est définie au voisinage de* $x \in \mathbb{R}$, *si* $\exists \epsilon > 0 : f$ *définie sur*

$$]x-\epsilon, x[\text{ et }]x, x+\epsilon[$$

Exemple
$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$ *défini au voisinage de 0.*

Definition 15
Soit f définie au voisinage de x_0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

signifie

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Theorème 85
Soit f définie au voisinage de x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \text{ suite } (a_n)_{n=1}^{\infty}$$

qui converge vers x_0 et $a_n \neq x_0, \forall n$, on a

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

Remarque
A priori, f n'est pas définie en a_n, mais $\exists n_0, \forall n > n_0 : a_n \in$ domaine de définition car f définie au voisinage de x_0

Preuve
$\Rightarrow$
Soit $a_n \neq x_0$, une suite convergent vers x_0. A voir : Soit $\epsilon > 0$, cherche $n_0 \forall n > n_0$: $|f(a_n) - l| < \epsilon$.
Par hypothese, $\exists \delta > 0 \forall x$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \quad (1)$$

Appliquer $\lim a_n = x_0$ à δ :

$$\exists n_0, \forall n > n_0 : |a_n - x_0| < \delta$$

Appliquer à présent 1 à $x = a_n$
$\Leftarrow$
Soit $\epsilon > 0$, on cherche $\delta > 0$
Supposons par l'absurde qu'aucun δ satisfait la définition.
En particulier, $\delta = \frac{1}{n}$

$$\exists x_n : 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - l| \geq \epsilon$$

Or

$$x_n \neq x_0 \text{ et } (x_n) \to x_0$$

Par hypothèse

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$$

En particulier, pour ϵ,

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : |f(x_n) - l| < \epsilon$$

□

Corollaire 87
Si $\lim_{x\to x_0} l$ et $\lim_{x\to x_0} f'(x) = l'$, alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + f'(x) = l + l'$$

Idem pour produit.

Corollaire 88
Si $f(x) \geq a, \quad \forall x$ au voisinage de x_0 et

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l, \text{ alors } l \geq a$$

Corollaire 89
Si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

Alors

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$$

Corollaire 90
Pour

$$\lim \frac{g(x)}{f(x)}$$

il suffit de traiter $\lim \frac{1}{f(x)}$.

Lemme 91
Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \neq 0$, alors

$$\exists \epsilon > 0 \forall x \in]x_0 - \epsilon, x_0[\cup]x_0, x_0 + \epsilon[$$

tel que $f(x) \neq 0$

Preuve

$$|f(x) - l| < \frac{|l|}{2}$$

dans un voisingae de x_0, alors $f(x) \neq 0$

□

Corollaire 92
Si $\lim f(x) = l = \lim g(x)$ *et*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \forall x \text{ au voisinage de } x_0$$

Alors

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

Corollaire 93 (Cauchy)
Soit f définie au voisinage de x_0, alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existe } \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \text{ avec}$$

$$0 < |x_i - x_0| < \delta \quad (i = 1, 2)$$

on a

$$|f(x_i) - f(x_2)| < \epsilon$$

Lemme 94
Si $\lim f(a_n)$ *existe* $\forall$ *suite* ($a_n \neq x_0$) *convergeant vers* x_0,*alors*

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

existe

Preuve
Il suffit de montrer que toutes ces limites $f(a_n)$ ont la même valeur.
En effet, on peut alors appliquer le théorème et $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
Sinon, $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l \neq l' = \lim_{n \to +\infty} f(a'_n)$ *pour deux telles suites a_n et a'_n.*
A présent

$$b_n = \begin{cases} a_n \text{ si } a \text{ pair} \\ a'_n \text{ si } a \text{ impair} \end{cases}$$

□

or $f(b_n)$ converge absurde car elle admet deux sous-suites avec limites distinctes l, l'.

Preuve
Preuve du corollaire ci-dessus.
Grace au lemme, il suffit de montrerr que $\forall$ suite $a_n \to x_0$, la suite $f(a_n)$ est de Cauchy.
Par hypothèse, $\exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 : 0 < |x_i - x_0| < \delta$ *implique*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Or, $\exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - x_0| < \delta$.
Applique $a_n = x_1$ et $a_m = x_2$ donne que $f(a_n)$ est de cauchy. □

Corollaire 95
Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ *et* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l'$, *alors* $l = l'$.

Remarque
On a implicitement utilisé les concept de $+, \cdot, \leq$ *sur les fonctions.*

Ce n'est pourtant pas un corps.
Par exemple, $\forall x, y \in$ *corps*

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$$

Les fonctions ont une opération supplémentaire

$$f \circ g$$

est définie par

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

Soit $g : A \to B$ des parties de $\mathbb{R}$, et $f : B \to \mathbb{R}$ avec g défini au voisinage de x_0 et f au voisinage de g_0.

Proposition 97
Supposons $g(x) \neq g_0 \forall x$ *au voisinage de* x_0
Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$ *et* $\lim_{y\to y_0} f(y) = l$, *alors*

$$\lim_{x\to x_0} f \circ g(x) = l$$

Preuve
Soit $\epsilon > 0$, *à voir* $\exists \delta > 0 \forall x$:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - l| < \epsilon$$

2eme hup nous dit

$$\exists \eta > 0 \forall y : |y - y_0| < \eta \Rightarrow |f(y) - l| < \epsilon$$

Idee : appliquer la premiere hypothèse à η *et poser* $y = g(x)$.
Ca marche, tant que $y \neq y_0$. □

Exemple
Exemple délicat :
Soit

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Clairement $\lim_{x\to 0} = 0$.
On pose que

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ } si \text{ } x \neq 0 \\ 1 \text{ } si \text{ } x = 0 \end{cases}$$

On voit que $\lim_{y\to 0} f(y) = 0$.
Or

$$\lim_{x\to 0} f(g(x))$$

n'existe pas.

Lecture 10: fonctions

Mon 19 Oct

6.1 Continuité

Definition 16
Soit f définie au voisinage de x_0.
Alors f est dite continue en x_0 si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Donc f continue (en x_0) si on peut "sortir f de la limite" (en x_0)

Proposition 99
f continue en x_0 $\iff$ toute suite a_n tendant vers x_0, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

Preuve
Théorème de traduction pour $l = f(x_0)$ □

Remarque
Pour parler de continuité en x_0, il faut que f soit définie en x_0 et au voisinage de x_0

Corollaire 101
Si f et g sont continues en x_0, alors $f + g$ et $f \cdot g$ aussi.

Preuve
Idem que avant □

Corollaire 102
Si de plus $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est cont. en x_0.

Remarque
On a montré que alors dans ce cas il existe un voisinage de x_0 où $g(x) \neq 0$

Proposition 104
Soit g continue en x_0 et f continue en $g(x_0)$, alors $f \circ g$ est continue en x_0.

Preuve
Ecrivons la définition de g continue en x_0 :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$$

Soit $\epsilon > 0$. Cherche $\eta > 0$ tq $\forall x$:

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(\underbrace{g(x)}_{=y}) - f(g(x_0))| < \epsilon$$

Continuité de f en $g(x_0)$ appliquée à ϵ donne $\theta > 0$ tq $\forall y$

$$|y - g(x_0)| \Rightarrow |f(y) - f(g(x_0))| < \epsilon$$

continuité de g en x_0 appliquée à θ

$$\exists \eta > 0 \forall x \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \theta \qquad \square$$

Pour $y = g(x)$ on a montré ce qu'il fallait.

Definition 17 (Terminologie Supplémentaire)
f est définie au voisinage à gauche de x_0 si $\exists \epsilon > 0$ tq f est définie sur $]x_0 - \epsilon, x_0[$.
De même à droite : $]x_0, x_0 + \epsilon[$

Definition 18
Soit f définie au voisinage à droite de x_0

$$\lim_{x \to x_0 >} = l$$

signifie

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x > x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

La limite à gauche est définie de la même manière.

Definition 19
f est continue à droite en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0 >} f(x) = f(x_0)$$

Idem à gauche.

Exercice 105

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existe} \iff \text{les limites à gauche et à droite existent et coincident.}$$

Definition 20
f est continue sur $[a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$ et continue à droite en a, à gauche en b.

Definition 21 (Notation)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

si

$$\forall R \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > R$$

Idem pour $-\infty$

Definition 22 (Notation)

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$$

signifie

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall x > n_0 : |f(x) - l| < \epsilon$$

On note $C([a,b])$ ou parfois $C^0([a,b])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$

> **Theorème 106**
> *Toute fonction continue sur $[a,b]$ est bornée.*

Preuve
Supposons par l'absurde f non-bornée (disons sans perte de généralité non majorée).
Donc $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n : f(x_n) > n$.
On a une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de $[a,b]$
Par Bolzano-Weierstrass implique qu'on a une sous-suite x_{n_k} qui converge vers $x \in [a,b]$
f continue en $x \iff f(x) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k})$ $\square$

> **Theorème 107**
> *Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue atteint son $\sup$ donc max.*

Preuve
On sait déjà que f est bornée, soit donc $s := \sup\{f(x)|x \in [a,b]\}$
Si par l'absurde $f(x) \neq s \forall x \in [a,b]$ posons

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - s}$$

g est continue et donc g est bornée, disons par B.
Absurde car implique $|f(x) - s| > \frac{1}{B}$. $\square$

Proposition 108
Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I.
Soit $A \subseteq I$ une partie dense. Si

$$f|_A = g|_A$$

Alors $f = g$ sur tout I

Preuve
Soit $x \in I$. Par densité,

$$\exists (a_n)$$

suite de A avec $\lim_{n\to+\infty} a_n = x$.

$$\textit{Continuité } f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} g(a_n) = g(x)$$

□

Lecture 11: limites de fonctions

Wed 21 Oct

Comment définir 3^{π} ?

Exemple
Supposons que f soit définie et continue sur $I \setminus \{x_0\}$, où I est un intervalle ouvert et $x_0 \in I$.
Si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe, on obtient une fonction continue sur I en définissant $f(x_0) := \lim_{x\to x_0} f(x)$.
Ca s'appelle le "prolongement par continuité".

Un exemple de preuve de continuité :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ sur }]0, +\infty[$$

Soit $\epsilon > 0$, cherche δ
Veut : $\forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon$.
Or, $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \epsilon$ si $\delta = \sqrt{x_0}\epsilon > 0$

Remarque
Ce δ montre la continuité en $y \forall y \geq x_0$

Definition 23
f est dite uniformément continue sur I (où I est un intervalle ou plus généralement $I \subseteq \mathbb{R}$) si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x_0 \in I$:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Comparer à f continue sur I :

$$\forall x_0 \in I \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x :$$
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Le point clé est que le delta dépend que de ϵ et pas de x_0.

Exemple
$f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1, +\infty[$
Et aussi sur $[\frac{1}{100}, +\infty[$.

Exemple
$f(x) = x^2$ non uniformément continu sur $[0, +\infty[$. Considérons

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|(x + x_0)$$

> **Proposition 113**
> *Si f et g sont uniformément continues sur I, alors $f + g$ aussi.kéw Attention : Faux pour $f.g$ et pour $\frac{1}{f}$.*

Exercice 114
Supposons f uniformément continue sur $[a, b]$ et $[b, c]$, alors f uniformément continue sur $[a, c]$

> **Theorème 115**
> *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$*

Remarque
Donc $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$.

Preuve
Si, par l'absurde, f n'est pas uniformément continue, alors :

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, x_0 :$$
$$|x - x_0| < \delta \textit{ mais } |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on applique ca à $\delta = \frac{1}{n}$, alors

$$\Rightarrow \exists y_n, z_n : |y_n - z_n| < \frac{1}{n}; |f(y_n) - f(z_n)| \geq \epsilon$$

Car y_n suite de $[a, b]$, par Bolzano-Weierstrass $\Rightarrow \exists$ sous-suite y_{n_k} convergente.
Alors $\lim_{k \to +\infty} z_{n_k} = y$ car $|z_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$.
Le théorème de traduction implique

$$\lim_{k \to +\infty} f(y_{n_k}) = f(y) = \lim_{k \to +\infty} f(z_{n_k})$$

Mais $|f(y_{n_k} - f(z_{n_k})) \geq \epsilon$.
↯ □

Theorème 117 (Théorème de la valeur intermédiaire (TVI))
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue.*
$\forall c$ *entre* $f(a)$ *et* $f(b)$, $\exists x \in [a, b] : f(x) = c$.

Preuve
Sans perte de géneralité, $f(a) < c < f(b)$*; et* $c = 0$ *(sinon remplacer* f *par* $f - c$*).*
Supposons par l'absurde $f(a) < 0 < f(b)$ *mais* $f(x) \neq 0 \forall x$.
Alors $\frac{1}{f}$ *est continue. Donc bornée. Donc* $\exists \alpha > 0$ *tq* $|f(x)| \geq \alpha \forall x$.
On sait que f *est uniformément continue sur* $[a, b]$.
Appliquer à α.
Donc, $\exists \delta > 0 \forall y, z : |y - z| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| < \alpha$.
Prenons $n \in \mathbb{N}$ *avec* $\frac{b-a}{n} < \delta$ *(Archimède)*
Posons $a_i = a + i\frac{b-a}{n} (i = 0, 1, \ldots, n)$.
Domc $\forall i \forall y, z \in [a_i, a_{i+1}]$

$$|f(y) - f(z)| < \alpha$$

□

Donc $\forall i$*, soit* f *est* $\leq -\alpha$ *sur tout* $[x_i, x_{i+1}]$ *soit* $\geq \alpha$ *pour tout* $[x_i, x_{i+1}]$.

Or $f(a) < 0$ *donc* $\leq -\alpha$ *Donc* $f \leq -\alpha$ *sur* $[a_0, a_1]$
Or $f(a) < 0$ *donc* $\leq -\alpha$ *Donc* $f \leq -\alpha$ *sur* $[a_1, a_2]$*, etc.*
Or $f(a_n) = b$*, donc* $\lightning$

Lecture 12: Fonctions

Mon 26 Oct

Corollaire 118
$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \geq 0 : \exists y \geq 0 : y^n = x$
Comme ce y *est unique (axiome de* $<$*) on peut donc définir* $\sqrt[n]{x} = y$

Preuve
Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(y) = y^n$.
f *est continu,* $f(0) = 0, \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Rappel : i.e.

$$\exists y_0 \forall y \geq y_0 : f(y) \geq x$$

TVI pour $[0, y]$ *:* $\exists z$ *tq* $f(z) = x$. □

Rappel

- $ax + b = 0$ adment une solution (en x) si $a \neq 0$
- $ax^2 + bx + c$ admet parfois une solution
- $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ admet une solution ($a \neq 0$)
- degré 4 admet parfois une solution
- degré 5 : pas de formule avec "juste" des racines.

Corollaire 119
Tout polynôme de degré impair admet des racines.

Preuve

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

n *impair,* $a_n \neq 0$
Or $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (*si* $a_n > 0$ $-\infty$ *si* $a_n < 0$)
En effet

$$a_n x^n (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{-1} + \ldots)$$

Donc $\exists x_1 : f(x_1) > 0$ (*resp.*< 0).
De même, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (*resp* $+\infty$).
Donc

$$\exists x_2 : f(x_2) < 0$$

□

TVI sur $[x_2, x_1] \Rightarrow \exists x : f(x) = 0$

Corollaire 120
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue.*
$f([a, b]) = [m, M]$ *où* $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$*et* $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$

Proposition 121 (1er theoreme de la fonction implicite)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue, strictement monotone.*
Donc (corrolaire précédent) , f *est bijective*

$$f : [a, b] \to [m, M]$$

i.e. $\exists f^{-1} : [m, M] \to [a, b]$
Alors f^{-1} *est continue*

Preuve
Sans perte de géneralité, f *strictement croissante.*

Lemme 122
Soit $g : [m, M] \to [a, b]$ *surjective et strictement croissante.*
Alors g *est continue*

Preuve
En x_0
Soit $\epsilon > 0 : \exists x_1 : g(x_1) > g(x_0) - \epsilon$
De même, $\exists x_2 : g(x_2) < g(x_0) + \epsilon$.
Donc sur $[x_1, x_2]$ f *prend des valeurs entre* $g(x_0) - \epsilon$ *et* $g(x_0) + \epsilon$ □

Appliquer à $g = f^{-1}$.
C'est surjectif, par définition du domaine de f^{-1}, i.e. l'image de f.

Corollaire 123
Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue.
Alors $\exists x \in [a, b] : f(x) = x$.

Preuve
Considérer g

$$g : [a, b] \to \mathbb{R}$$

avec

$$g(x) = x - f(x)$$

Donc

$$g(a) = a - f(a) \leq 0$$
$$g(b) = b - f(b) \geq 0$$

TVI $\Rightarrow \quad \exists x : g(x) = 0$ *i.e.* $f(x) = x$ $\square$

7 Suites de Fonctions

But : donner un sens à

"f_n converge vers une fonction f"

Definition 24
(f_n) converge ponctuellement vers f si

$$\forall x : \quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

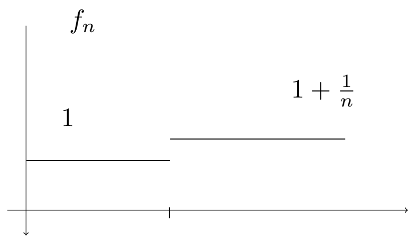

FIGURE 1 – fonction1

Exemple

—

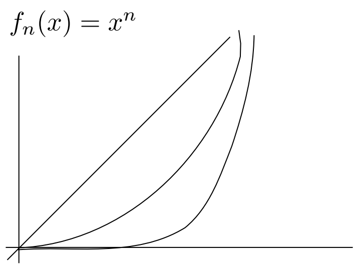

FIGURE 2 – fonction2

— *Ponctuellement,* $f_n \to f$ *où*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < 1 \\ 1 \; si \; x = 1 \end{cases}$$

Remarque

$$\lim_{x \to 1} f_n(x) = 1$$

On pourrait donc prendre

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to 1} f_n(x) = 1$$

Par contre

$$\lim_{\underbrace{x \to 1}_{<}} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$$

Donc, attention à la continuité !

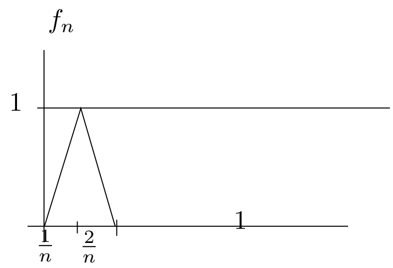

FIGURE 3 – fonction3

— f_n *est continue pour tout* n*,*

$$\max f_n = 1$$

Or $f_n \to 0$ *ponctuellement.*

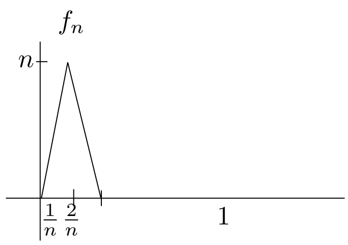

Figure 4 – fonction4

— *Or, à nouveau,* $f_n \to f = 0$

Definition 25 (Convergence uniforme de fonctions)
Une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformément sur* $A \subseteq \mathbb{R}$ *sur* f *si :*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Lecture 13: Suites de Fonctions 2

Wed 28 Oct

Remarque
La convergence uniforme implique la convergence ponctuelle

Proposition 127
Soit (f_n) *une suite de fonctions qui converge uniformément.*
Supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\lim_{x\to x_0} f_n(x)}_{=l_n}$$

existe.
Alors

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

Preuve
Soit f *la limite de* (f_n)*.*
Hyp : $\forall n : l_n = \lim_{x\to x_0} f_n(x)$*existe et* $l = \lim_{n\to+\infty} l_n$*.*
But : $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$*.*
Soit donc $\epsilon > 0$*, alors*

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |l_n - l| < \frac{\epsilon}{3}$$

De plus, par convergence uniformee

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 \begin{cases} |l_n - l| < \frac{\epsilon}{3} \\ \forall x : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \end{cases}$$

Donc

$$\exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - l_{n_0}| < \frac{\epsilon}{3}$$

Soit $0 < |x - x_0| < \delta$*, on veut*

$$|f(x) - l| < \epsilon$$

Or

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - l_{n_0}| + |l_{n_0} - l| < \epsilon \qquad \square$$

Theorème 128
Toute limite uniforme de fonctions continues est continue.

Preuve
Soit f *la limite uniforme de* (f_n)*,* f_n *est continue* $\forall n$*.*
Soit x_0 *avec* f_n *définie au voisinage de* x_0*.*
A voir : f *continue en* x_0*, i.e.*

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = f(x_0) \qquad \square$$

Theorème 129 (Dini)
Soit (f_n) *une suite décroissante de fonctions continues.*
Si (f_n) *converge ponctuellement vers* f *continue, alors* f_n *converge uniformément vers* f *sur* $[a, b]$*.*

Exercice 130
Trouver un contre exemple sans l'hypothèse décroissante.

Preuve
Par l'absurde,

$$\exists \epsilon > 0 \forall n_0 \exists n \geq n_0 \exists x_n : |f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$$

Par Bolzano-Weierstrass $\Rightarrow$

$$(x_{n_k}) \text{ qui converge vers } x$$

et tel que

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \epsilon$$

Convergence de $f_n(x)$ *implique*

$$\exists k : |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Continuité de f_{n_k} et de f en x

$$\exists \delta > 0 \forall y : |x - y| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \\ |f_{n_k}(y) - f_{n_k}(x)| < \frac{\epsilon}{3} \end{cases}$$

Choisir un k' tel que $|x_{n'_k} - x| < \delta$
Comme

— $|f(x) - f(x_{n_k})| < \frac{\epsilon}{3}$
— $|f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_{n'_k})| < \frac{\epsilon}{3}$
— $f \leq f_{n'_k} \leq f_{n_k}$

Donc

$$|f_{n'_k}(x_{n'_k}) - f(x_{n'_k})| < \epsilon$$ □

Absurde.

8 Dérivation

Definition 26
Soit f définie au voisinage de x_0.
On dit que f est dérivable en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe.
Alors cette limite s'appelle la dérivée de f en x_0, notée $f'(x_0)$.

Remarque
Si f est dérivable partout, alors on obtient une fonction f'.
On définit de même la dérivée gauche et droite.

Proposition 132
Si f et g sont dérivables en x_0, alors $f + g$ aussi et

$$(f + g)' = f' + g'$$

Preuve

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) + g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$ □

Proposition 133
Soit f définie au voisinage de x_0. Alors

f dérivable en x_0 $\iff$ $\exists a \in \mathbb{R} \exists$ fonction r au voisinage de x_0 tel que

1. $f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)$
2. $\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$

Dans ce cas, $a = f'(x_0)$

Lecture 14: Derivees

Mon 02 Nov

Corollaire 134
f *dérivable en* x_0 *implique* f *continue en* x_0.

Preuve

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{continue pour tout } x} + \underbrace{r(x)}_{\text{continu en } x_0}$$

□

Proposition 135
Soient f, g *dérivables en* x_0

— $f + g$ *est dérivable en* x_0 *et* $(f + g)' = f' + g'$

— fg *est dérivable en* x_0 *et*

$$(fg)' = f'g + fg' \text{ (règle de Leibnitz)}$$

— *Si* $g(x_0) \neq 0$, *alors* $\frac{f}{g}$ *est dérivable en* x_0 *et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Preuve

— *Somme est déja faite*

— *Produit :*

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)} + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)}
\end{aligned}$$

— *Quotient :*
Il suffit d'appliquer Leibnitz à f *et* $\frac{1}{g}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)'$$

Il suffit de montrer que

$$\left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{g'}{g^2}$$

Soit donc $g(x_0) \neq 0$.

$$\frac{\frac{1}{g(x) - \frac{1}{g(x_0)}}}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \qquad \square$$

Exemple
Soit $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, $f(x) = x^n = \frac{1}{x^{|n|}}$ Donc

$$(x^{|n|})' = |n|x^{|n|-1}$$

Donc, par la proposition

$$f'(x) = \frac{-|n|x^{|n|-1}}{x^{2|n|}}$$

Or $|n| = -n$, alors

$$f'(x) = nx^{-n-1+2n} = nx^{n-1}$$

Proposition 137
Donc, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Attention, ne pas écrire $(x^n)'$

Theorème 138 (Chain Rule)

$$(f \circ g)' = (f' \circ g).g'$$

Soit g dérivable en x_0 et f en $g(x_0)$, alors $f \circ g$ esst dérivable en x_0 avec la formule ci-dessus.

Preuve
Definissons h par

$$h(y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} \text{ si } y \neq g(x_0) \\ f'(g(x_0)) \text{ si } y = g(x_0) \end{cases}$$

Alors h est continue en $g(x_0)$ (par définition de f dérivable en $g(x_0)$).

On a alors

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} h(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \end{aligned} \qquad \square$$

Theorème 139
Soit $f :]a, b[\to]c, d[$ *bijective, continue.*
Si f *est dérivable en* x_0 *et* $f'(x_0) \neq 0$*, alors* f^{-1} *est dérivable en* $y_0 = f(x_0)$ *et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Preuve

$$\begin{aligned} L &= \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\ &= \left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - x_0} \right)^{-1} \end{aligned}$$

En posant $x = f^{-1}(y)$*, on obtient*

$$\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)^{-1}$$

Or, f^{-1} *est continue, donc quand* $y \to y_0$*, on a que* $x \to x_0$*.*
Donc, la limite pour $y \to y_0$ *de L est*

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)^{-1} = \frac{1}{f'(x_0)}$$ □

Lecture 15: Derivees

Wed 04 Nov

Exemple
Soit $f(x) = \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$.
Donc la dérivée est

$$f'(x) = \frac{1}{q(x^{\frac{1}{q}})^{q-1}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}$$

On sait donc dériver des puissances rationelles quelconques

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} = g(h(x))$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= p(x^{\frac{1}{q}})^{p-1} \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} \\ &= \frac{p}{q} x^{\frac{p-1}{q} + \frac{1}{q} - 1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} \end{aligned}$$

8.1 Applications de la dérivée

8.1.1 Recherche d'extremums

Definition 27 (Point Critique)
x est un point critique de f si f est dérivable en x et $f'(x) = 0$.

Remarque
Bien que $x = 0$ *soit un point critique de* $f(x) = x^3$*, cette fonction est strictement croissante.*

Definition 28
x *est un maximum local de* f *si il existe un voisinage de* x *sur lequel* x *est un (vrai) maximum.*

La définition pour les minimas est équivalente.
Plus généralement, on parlera d'extremums.

Proposition 142
Soit f *dérivable en* x_0 *(donc définie dans son voisinage).*
Si x_0 *est un extremum local de* f*, alors c'est un point critique.*

Remarque

1. *La réciproque est fausse.*
2. *Si* f *n'est pas dérivable, on peut très bien avoir un max / min.*
3. *Dérivable à droite (gauche) pas suffisant.*

Preuve
Sans perte de géneralité, x_0 *est un max local de* f.
Dérivée à gauche :

$$\lim_{x \to x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

De même, dérivée à droite

$$\lim_{x \to x_0 +} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Donc, $f'(x_0) = 0$. □

Proposition 144 (Méthode de recherche d'extremum)
Pour $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$.
Les candidats sont

1. *Les points critiques dans* $]a, b[$
2. *Les points non-différentiables*
3. *Les bornes :* a, b

Theorème 145 (theoreme de Rolle)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continnue et dérivable sur* $]a, b[$. *Si* $f(a) = f(b)$ *alors* $\exists x \in]a, b[: f'(x) = 0$

Preuve
$\exists x_1 \in [a, b] : \sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_1)$.
Si $x_1 \in]a, b[$*, alors* $f'(x_1) = 0$ *par la proposition.*

Cas restant : $x_1 = a$ *ou* b*.*

$$\exists x_2 \in [a, b] \; min \; : \inf_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_2)$$

Le seul cas restant est donc :

$$\max \textit{ et } \min \textit{ atteints en } a \textit{ ou } b.$$

Or $f(a) = f(b)$*, donc* $\max f = \min f$*, donc* f *constante.* □

Theorème 146 (théorème des accroissements finis TAF)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue et dérivable sur* $]a, b[$*.*
Alors $\exists x \in]a, b[$*:* $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$*.*

Preuve
Posons $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ *g est aussi continue dérivable.*
Or

$$g(a) = f(a) \textit{ et } g(b) = f(a)$$

Donc g *satisfait l'hypothèse de rolle.*
Donc, par Rolle

$$\exists x \in]a, b[\text{: } g'(x) = 0$$

Or

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

□

Corollaire 147
Si $f' = 0$*, alors* f *constante.*
Plus précisément :
Soit

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

continue dérivable sur $]a, b[$ *tel que* $f'(x) = 0 \forall x \in]a, b[$*, alors* f *est constante sur* $[a, b]$

Preuve
Si, par l'absurde, il existe $x, y \in [a, b]$ *avec* $f(x) \neq f(y)$*.*
Par TAF pour $[x, y]$*, il existe* $z \in]x, y[$ *:*

$$f'(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \neq 0$$

Absurde. □

Corollaire 148
$f' > 0$ (sur un intervalle) implique f strictement croissante.

Preuve
Soit $x < y$, à voir $f(x) < f(y)$.
Or, par TAF $\Rightarrow \exists z \in]x, y[$

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0$$

□

Corollaire 149
$f' \geq 0$ (sur un intervalle) $\iff$ f croissante (pas forcément strictement)

Preuve
$\Leftarrow$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$\Rightarrow$:
Par l'absurde :

$$\exists x < y \text{ tel que } f(x) > f(y)$$

Par TAF $\Rightarrow \exists z \in]x, y[$ tel que

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < 0$$

□

Ce qui est absurde.

Lecture 16: Lundi 09

Mon 09 Nov

Definition 29 (Fonctions Lipschitzienne)
La fonction f est Lipschitz sur un intervalle I si il existe l tel que $\forall x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq l \cdot |x - y|$$

Remarque
Si f est Lipschitz, f est continue, même uniformément continue sur I, poser $\delta = \frac{\epsilon}{l}$.
On dit aussi "L-lipschitz".

Corollaire 151
Si f est dérivable et $|f'| \leq L$ sur I, alors f est L-lipschitz sur I

Preuve
TAF sur $[x, y]$, donc

$$\exists z \in]x, y[\colon f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$$

□

Remarque
$f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0,1]$ est uniformément continue, mais sa dérivée est non-bornée sur $]0,1[$.

Corollaire 153 (Théorème de Darboux)
Soit f continu en x_0. Si f est dérivable au voisinage de x_0 et si

$$\lim_{x \to x_0} f'(x)$$

existe, alors f est dérivable en x_0.

Preuve
TAF sur $[x_0, x]$.
Donc il existe $z \in]x_0, x[$ tel que

$$f'(z) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Posons $l = \lim_{x \to x_0} f'(x)$, donc

$$l = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Donc $f'(x_0)$ existe et est égal à l. □

Remarque
Nous avons prouvé que $f'(x_0)$ existe et de plus $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$.
Donc la dérivée est continue.

Theorème 155 (Theoreme de Cauchy)
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a,b[$.
Supposns que g' ne s'annule pas sur $[a,b]$, alors

$$\exists c \in]a,b[\text{ tel que } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Preuve
Considérons

$$h(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a)) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

On a

$$h(a) = 0$$
$$h(b) = 0$$

Rolle (pour h) implique $\exists c \in]a,b[$ tel que

$$h'(c) = 0$$

Or
$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)$$
□

i.e. $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

8.2 Principe de Bernoulli-L'Hospital

Idée :
Calculer des limites du type $\frac{0}{0}$.

Theorème 156 (Bernoulli-L'Hospital)
Soient $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ *dérivables avec*
$$\lim_{x \to a+} f(x) = 0 = \lim_{x \to a+} g(x)$$
Supposons
$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
existe et $g'(x) \neq 0$ *au voisinage à droite de* a.
Alors
$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Preuve
On étend f *et* g *par continuité sur* $[a, b[$ *en posant* $f(a) = 0 = g(a)$.
Soit $a < x < b$. *Appliquons Cauchy sur* $[a, x]$.
Donc $\exists c \in]a, x[$ *tel que* $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$.
Par hypothèse, la limite
$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$
existe. □

Theorème 157 (BH pour l'infini)
Soient $f, g :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *dérivable.*
Supposons $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} g(x)$ *Si* $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe, alors*
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Preuve
Sans perte de géneralité $a > 0$.
On définit $\phi, \psi :]0, \frac{1}{a}[\to \mathbb{R}$ *par*
$$\phi(x) = f(\frac{1}{x}), \psi(x) = g(\frac{1}{x})$$

BH pour $\frac{\phi}{\psi}$ *sur* $]0, \frac{1}{a}$

$$\lim_{x \to 0+} = \lim_{x \to 0+} \frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}$$ □

Lecture 17: BH

Wed 11 Nov

8.3 Bernoulli-L'hospital pour infini sur infini

Theorème 158
Soient $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ *derivables tel que*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = +\infty = \lim_{x \to a+} g(x)$$

Si $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe, alors* $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *existe aussi, avec la meme valeur*

Preuve
Le principe est que pour calculer la limite d'une expression A *(pour* $x \to a$*), on peut remplacer* A *par*

$$ABC$$

pour autant que $\lim_{x \to a+} BC = 1$.
Soit $\epsilon > 0$. *Posons* $l = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *A montrer : Pour* x *suffisamment proche de* a

$$|\frac{f(x)}{g(x)} - l| < \epsilon$$

On sait que $\exists y \forall a < c < y$

$$|\frac{f'(c)}{g'(c)} - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

Par Cauchy sur $[x, y]$, *on a*

$$\forall a < x < y : |\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

Ecrivons donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \frac{f(x)}{f(x) - f(y)} \frac{g(x) - g(y)}{g(x)}$$

En effet, pour notre y *:*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{f(x) - f(y)} = \lim_{x \to a+} \frac{1}{1 - \frac{g(y)}{f(x)}} = 1$$ □

9 Polynome de Taylor et developpements limites

But : Approximer des fonctions par polynomes.

Definition 30 (Polynome de Taylor)
Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ n fois derivable.
Le polynome de Taylor de f en a et d'ordre n est

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

Theorème 159 (Formule de Taylor)
Supposons f $n+1$ fois derivable

$$\forall x \exists t \in]a, x[\text{ tel que}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-a)^{n+1}$$

Remarque
Excellent si f raisonnable car $\frac{1}{(n+1)!}$ tres petit.

Preuve
On note $T(y)$ pour le polynome de taylor.
Soit

$$g(y) = f(y) - T(y) + \frac{T(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}}(y-a)^{n+1}$$

On remarque que

$$g^{(k)}(a) = \text{ cst. } (n+1)(n) \dots (n+1-k)(y-a)^{n+1-k} = 0$$

Or, $g(x) = 0$.
On applique donc Rolle a g sur $[a, x]$ Par Rolle, $\exists x_1 \in]a, x[$ tel que $g'(x_1) = 0$.
Rolle pour g' sur $[a, x_1]$.

$$\exists x_2 \in]a, x_1[\text{ tel que } g''(x_2) = 0$$

etc...
Rolle pour $g^{(n)}$ sur $[a, x_n]$, donc

$$\exists t \in]a, x_n[\text{ tel que } g^{(n+1)}(t) = 0$$

Donc

$$0 = g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) + \frac{T(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}}(n+1)!$$

Donc

$$-T(x) + f(x) = f^{(n+1)}(t)(x-a)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}$$

□

Lecture 18: Developpements Limites

Mon 16 Nov

De maniere generale, si

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$$

Alors

$$P^{(k)}(a) = k! c_k$$

Definition 31 (Developpement limite)
Soit f une fonction definie au voisinage de a.
Un developpement limit (DL) d'ordre n pour f en a est la donnee d'un polynome

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (x-a)^j$$

(la partie principale) et d'une fonction r (le reste) tel que

1. $f(x) = \sum a_j (x-a)^j + r(x)$
2. $\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n}$

Remarque
Le cas $n = 1$ correspond a notre critere de differentiabilite de f en a.
Admettre un DL d'ordre 1 en $a \iff f$ derivable en a.

Remarque
Admettre un DL d'ordre 0 en $a \iff \lim_{x \to a} f(x)$ existe.

Remarque
Si on note $r(x) = \epsilon(x)(x-a)^n$, on obtient

1. $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j (x-a)^j + \epsilon(x)(x-a)^n$
2. $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$

Ceci montre que si f admet un DL d'ordre n, alors $\forall k \leq n$

$$f^{(k)}(a) = k! a_k$$

Proposition 164
Si un DL d'ordre n existe, il est unique.

Preuve
Suffit de montrer l'unicite de la partie principale. Or, les coefficients a_j sont determines par les derivees de f,

$$f^{(k)}(a)(k \leq n)$$

qui existent bel et bien par la remarque precedente. □

Proposition 165
Si f admet un DL d'ordre n en a, elle adment aussi un DL d'ordre $m \leq n$ en a.

Preuve
On a qu'a tronquer la partie principale de la somme. $\square$

Theorème 166
Soit $f \in C^{n+1}(I)$, I intervalle ouvert, $a \in I$.
Alors f admet un DL d'ordre n en a, et la partie principale est le polynome de Taylor.

Preuve
On va juste utiliser que $f^{(n+1)}$ est bornee sur un voisinage de a.
A voir :

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{n+1!} f^{(n+1)(t)(x-a)^{n+1}}}{(x-a)^n} = 0$$ $\square$

Exercice 167
Si f et g admettent des DL d'ordre n en a, alors $f+g$, $f \cdot g$ et $f \circ g$(ici : f admet DL en $g(a)$) aussi.
Les parties principales seront la somme, respectivement produit, resp. composition des parties principales.

Exemple (Un Bel Exemple)
Soit

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \exp(-\frac{1}{x^2}) \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

On voit que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Lemme 169
$f^{(k)} = f.\frac{P}{Q}$, pour deux polynomes P, Q.

Conclusion :
f est une fonction C^{∞} avec $f^{(k)}(0) = 0 \forall k$.
Tous les polynomes de Taylor de f en 0 sont nuls,

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} 0(x-a)^k = 0$$

f admet un DL d'ordre n en zero $\forall n$, partie principale 0.

Lecture 19: Developpements Limites

Wed 18 Nov

9.1 Utilisations de la 2eme derivee

Proposition 170
Soit f deux fois derivable et a un point critique (i.e. $f'(a) = 0$)
Si $f''(a) < 0$, alors a est un maximum local strict.
Idem pour $f''(a) > 0$.
Attention la reciproque fausse

Preuve
f' est strictement decroissante sur un voisinage de a. □

9.2 Convexite, Concavite

Definition 32 (Convexe)
Une fonction f est convexe, si $\forall x < y \forall \lambda \in [0, 1]$

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Proposition 171
f convexe $\iff$

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1] \text{ avec}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

$\forall x_1, \ldots, x_n$

Preuve
$\Rightarrow$
La convexite correspond au cas $n = 2$
Supposons vrai pour $n-1$ ($k \geq 3$) Ecrivons

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = (1-\lambda_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i + \lambda_n x_n$$

Par Hypothese de recurrence

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq (1-\lambda_n) f(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i) + \lambda_n f(x_n)$$ □

Theorème 172
Si f est derivable et f' est croissante, alors f est convexe.

Corollaire 173
Si f est deux fois derivable et $f'' \geq 0$, alors f est convexe.

Preuve
f' existe, croissante.
A montrer.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

sans perte de géneralité $a < b$
Posons $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ TAF sur $[a,x]$ et $[x,b]$:

$$\exists a < x_1 < x < x_2 < b \text{ tel que}$$

$$f(x) - f(a) = f'(x_1)(x-a)$$

de meme

$$f(b) - f(x) = f'(x_2)(b-x)$$

On a donc

$$\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b) = \lambda(f(x)-f'(x_1)(x-a))+(1-\lambda)\left(f(x) + f'(x_2)(\lambda(b-a))\right) = f(x)+(b-a)\lambda(1-\lambda)f'(x_2)-(b$$

Or f' croissant. □

Lecture 20: Series Entieres

Mon 23 Nov

10 Series Entieres

But :
Etudier des fonctions du type

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Motivations :

- Fonctions familiaires,utiles du type $\sin, \cos, \exp, \ldots$
- polynomes de Taylor $\to$ serie de Taylor ?

Remarque
Nous travaillons surtout avec $x_0 = 0$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
Pour retrouver le cas general : se ramener a $f(x-x_0)$.

Definition 33
On dit qu'un serie de fonctions

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformement absolument sur I vers f si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$$

converge uniformement, i.e.

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall x \in I :$$
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |f_n(x)| < \epsilon$$

Theorème 175
Supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ converge pour $y \neq 0$.
Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge $\forall x \in]-|y|, |y|[$.
De plus, pour tout $0 < r < |y|$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformement et absolument sur $[-r, r]$

Preuve
Il suffit de montrer le deuxieme point.
Puisque $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ converge, on sait que $(a_n y_n) \to 0$ et donc $a_n y^n$ est bornee. Donc $\exists B > 0 \forall n : |a_n y_n| \leq B$.
Fixons $0 < r < |y|$ et considerons $x \in [-r, r]$.
Remarque :
$|a_n x^n| = |a_n y^n||\frac{x}{y}|^n \leq B(\frac{r}{|y|})^n$.
Pour convergence absolue, par comparaison, on etudie

$$\sum_{n=0}^{\infty} B(\frac{r}{|y|})^n$$

Converge, car c'est une serie geometrique de raison $\frac{r}{|y|} < 1$ □

Corollaire 176
$\forall 0 < r < |y|$. *On obtient une fonction continue $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de $x \in [-r, r]$*

Remarque
Bien que $f(y)$ existe par hypothese, l'existence et la continuite en $\pm y$ peut etre problematique.

Considerons $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Definition 34
Le rayon de convergence de cette serie entiere est

$$R := \sup \left\{ |y| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \text{ converge} \right\}$$

Corollaire 178

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

est une fonction continue (et qui existe) sur $]-R, R[$.
De plus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *diverge* $\forall x$ *avec* $|x| > R$

Remarque

1. *Pour* $|x| = R$*, tout peut arriver*
2. *Pour* $\sum a_n (x - x_0)^n$*, on obtient un intervalle de convergence* $]x_0 - R, x_0 + R[$.

Corollaire 180

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

, avec $R = +\infty$ *si* $\limsup = 0$

Preuve
Critere de la racine pour $|x| < R$ *:*

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \text{ converge}$$

□

Theorème 181
Soit $f(x) = \sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* $R \neq 0$.

1. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ *a le meme rayon de convergence* R.
2. f *est derivable sur* $]-R, R[$ *et sa derivee est* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

Preuve
On fixe $0 < r < R$ *et on travaille sur* $[-r, r]$.
Pour tout n, *appliquer Taylor a la fonction* x^n *au point* x_0.
Donc $\exists t$ (*entre* x_0 *et* x) *tel que*

$$x^n = x_0^n + nx_0^{n-1}(x - x_0) + \frac{1}{2!}n(n-1)t^{n-2}(x - x_0)^2(x - x_0)$$

On trouve

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = nx_0^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)t^{n-2}$$

On s'interesse a $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} na_n x_0^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}n(n-1)(x - x_0)t_{x,n}^{n-2}$$

Il reste a demontrer

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} a_n t^{n-2}$$

converge et reste borne sur $[-r, r]$.
Alors

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} a_n t^{n-1} = 0$$

Rappel : t se trouve entre x *et* x_0, *en particulier dans* $[-r, r]$, *donc*

$$|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} a_n t^{n-2}| \leq \frac{1}{2} |\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) r^{n-2} a_n|$$

Il suffit donc de prouver que cette derniere serie converge, donc de montrer

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n|a_n|r^n < +\infty$$

□

Donc il suffit de montrer que r *est dans le rayon de convergence.*
Or $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n(n-1)} = 1$. *Donc le rayon de convergence est* R.

Lecture 21: Series de Taylor

Wed 25 Nov

Remarque
Si f *est* C^∞, *on peut definir sa serie de Taylor en* x_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

C'est donc une serie entiere.

Attention, en general, cette serie n'est pas f !
En revanche, si f est definie par une serie entiere $\sum a_n x^n$, alors sa serie de Taylor est elle-meme $\sum a_n x^n$.

Corollaire 183
Soit $f(x) = \sum a_n x^n$ *et soit* R *son rayon de convergence.*
Alors f *est* C^∞ *sur* $]-R, R[$

Preuve
Par recurrence, puisque la derivee est a nouveau une serie entiere, il suffit de montrer le cas $n = 1$.

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 1.a_1$$

□

Proposition 184

1. $\exp(x) > 0 \forall x$
2. $\exp$ *est croissante et convexe*
3. $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$
4. $\exp(x+y) = \exp x \exp y$
5. $\exp -x = \frac{1}{\exp x}$

Preuve
Derivons $x \mapsto \exp x \exp -x$, *on a*

$$\exp' x \exp -x + \exp x \exp' -x - 1 = 0$$

De plus

$$\exp 0 \exp -0 = 1$$

Donc $\exp x \neq 0 \forall x$ *et* $\exp -x = \frac{1}{\exp x}$ *Fixons* y. *Derivons* $x \mapsto \frac{\exp x+y}{\exp x}$, *on trouve*

$$\frac{\exp x + y - \exp x + y \exp x}{\exp x} = 0$$

Donc la fonction est constante. De plus, en $x = 0$, *on trouve* $\exp y$, *donc* $\forall x$

$$\exp y \exp x = \exp x + y$$

On a

$$\exp x = \exp \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = \left(\exp \frac{x}{2}\right)^2 > 0$$

On a finalement

$$\exp x \geq x$$

pour $x \geq 0$, *de meme*

$$\exp -x = \frac{1}{\exp x}$$

□

il en suit les deux limites.

Corollaire 185
exp *est une bijection entre les reels et les reels strictements positifs et admet donc un inverse* C^{∞} *notee* log

Theorème 186 (Lemme d'Abel)
Soit $f(x) = \sum a_n x^n$.
On suppose $R \neq 0$.
Si $\sum a_n R^n$ *converge, alors* f *est continue (a gauche) en* R.[a]

[a]. Meme theoreme en $-R$

Preuve
On suppose que $f(R)$ *converge.*
Spg $f(R) = 0$.
Notons $b_n = a_n R^n$ *et* $g(w) = \sum b_n w^n$
Donc, il s'agit de prouver :

$$\lim_{w \to 1-} g(w) = 0.$$

Soit $s_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$*, donc* $s_n \to 0$.
Pour $g(w) = \sum b_n w^n$*, or*

$$b_0 + b_1 w + \ldots b_n w^n = s_0 + (s_1 - s_0)w + \ldots + (s_n - s_{n-1})w^n$$

Or

$$= s_0(1-w) + s_1 w(1-2) + \ldots s_{n-1} w^{n-1}(1-w) + s_n w^n$$

Donc $g(w) = (1-w)\sum s_n w^n$
Il suffit donc de prouver que

$$\sum s_n w^n$$

converge et reste bornee independamant de $\omega \in [0,1]$.
Or s_n *converge.*

$$|\sum_{n=n_0}^{\infty} s_n w^n| \leq \epsilon \sum w^n = \epsilon w^{n_0} \frac{1}{1-w}$$

Or

$$|g(w)| \leq (1-w)\left\{ |\sum^{n_0-1} s_n w^n| + \epsilon w^{n_0} \frac{1}{1-w} \right\}$$

□

Donc $g(w)$ *converge vers 0.*