Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-04-26 au 2021-04-30

Série 17 du lundi 26 avril 2021

Exercice 1.

Déterminer les extrema – en précisant leur type – de la fonction f définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{xy} + x^2 + 2y^2. \tag{1}$$

Exercice 2.

Considérons la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dont les coefficients $(A_{ij})_{i,j=1}^{n}$ sont définis par

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } |i-j| \geqslant 2, \\ -1 \text{ si } |i-j| = 1, \\ 2 \text{ si } i = j. \end{cases} \tag{2}$$

Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$; définissons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ par :

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x}. \tag{3}$$

Démontrer que A est inversible et que f atteint son minimum en $\boldsymbol{a} \coloneqq A^{-1}\boldsymbol{b}$.

Exercice 3.

Considérons la fonction f définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2} - 8x^2 - 4y^4. \tag{4}$$

1) Caractériser les points stationnaires de f.
2) f a-t-elle un minimum global ?

Exercice 4.

Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ compact, convexe et non-vide, et $\boldsymbol{y} \in E^{\complement}$. Considérons la fonction $f_{\boldsymbol{y}} : E \to \mathbb{R}$, définie pour tout $\boldsymbol{x} \in E$ par $f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$.

1) Montrer qu'il existe un unique $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{y}} \in E$ tel que

$$\forall \boldsymbol{x} \in E, \quad f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{y}}) \leqslant f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}). \tag{5}$$

Montrer de plus que $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{y}} \in \partial E$.

2) Montrer que $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{y}}$ satisfait

$$\forall \boldsymbol{x} \in E, \quad \langle \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{y}} \rangle \leqslant 0, \tag{6}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque. Le point $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{y}}$ est appelé la « projection de $\boldsymbol{y}$ sur E ».