Anneaux et Corps

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Introduction

Mon 21 Feb

1 Generalites

1.1 Definitions de base et exemples connus

Tous les anneaux ont des unites.

Exemple

— $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, M_n(\mathbb{R})$

Definition 1 (Sous-anneau)
Pour $B \subset A$, A un anneau, B est un sous-anneau ssi

— *B est stable pour l'addition et la multiplication*

— $1 \in B$

Definition 2 (Morphismes d'anneau)
$f : A \to B$ est un homomorphisme si

— *f preserve $+, \cdot$*

— $f(1) = 1$

Proposition 2
Si $f : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux, alors $Imf \subset B$ est un sous-anneau

Proposition 3
Si $f : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux, $B = 0 \implies \ker f \subset A$ n'est pas un sous-anneau.

Exemple

— *$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots, a_i \in A$ les series formelles sur A avec l'addition et la multiplication usuelle.*

— *Polynomes : serie formelle avec nb fini de coeff. non nuls*

Proposition 5 (Propriete universelle de l'anneau des polynomes)
ev_c est un homomorphisme et tout morphisme partant de A factorise a travers $A[t]$.

Definition 3 (Sous-anneau engendre)
Pour $f : A \to B$ une inclusion, l'image $Imev_c = A[c] \subset B$ est le plus petit sous-anneau de B engendre par A et c.

Exemple
$\mathbb{Z}[i] = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j i^j | a_j \in \mathbb{Z} \right\} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$

Exemple (Anneaux de groupes)
Soit G un groupe fini et A un anneau, alors on construit

$$AG = \left\{ \sum \lambda_g g | \lambda_g \in A \right\}$$

1.2 Anneaux integres et corps

Definition 4 (Diviseurs de 0)
Un element a est un diviseur de 0 si il existe b non nul tel que ab ou $ba = 0$

Definition 5 (Anneau integre)
Un anneaux est integre ssi $a \cdot b = 0 \implies a = 0$ ou $b = 0$

Lecture 2: Ideaux

Wed 23 Feb

Proposition 8
$a \in A$ inversible $\implies$ non diviseur de zero

Preuve
$c = 1 \cdot c = bac = 0$ □

Corollaire 9
$a \in A^{\times} \implies$ inverse est unique.

Definition 6
A est integre s'il est commutatif et sans diviseurs de 0

1.3 Corps des Fractions

Definition 7 (Corps de Fractions)
A integre, si $A \mapsto K$ est un sous-anneau d'un corps K tel que $\forall x \in K$, $\exists a \in A, b \in A \setminus \{0\}$ $x = \frac{a}{b}$.
Alors K est un corps de fractions.

Theorème 10
Pour chaque anneau integre, il existe un corps de fractions $A \to K$.

Preuve
$K = A \times A \setminus \{0\} / \sim$ avec $(a, b) \sim (a', b') \iff ab' = ba'$ □

Proposition 11 (Propriete universelle du corps des fractions)
Pour chaque morphisme $\iota : A \to L$ avec L un corps, ι factorise de maniere unique a travers $Frac(A)$

Car c'est un objet universel dans $* \downarrow U$, le corps des fractions est unique.

1.4 Ideaux et anneaux quotients

Soit $I \subset A$ un sous-ensemble.

Definition 8 (Ideal)
Un sous-ensemble I est un ideal si c'est un sous-groupe additif qui est stable par multiplication par les elements de A.