Analyse avancée II — Semaine du 2021-05-03 au 2021-05-07
Mathématiques 1ère année
Enseignant : Fabio Nobile

Série 19 du lundi 3 mai 2021

Exercice 1.

1) Calculer

$$\min\{\|\boldsymbol{x}\|^2 : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\} \tag{1}$$

par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

2) Vérifier le résultat en exprimant x_1 et x_2 comme des fonctions de x_3 qui satisfont les deux contraintes.

Exercice 2.

Soient $f, g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Notons $\Sigma_g := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : g(\boldsymbol{x}) \geqslant 0\}$. Supposons que (I) $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, $g(\boldsymbol{v}) = 0 \implies \nabla g(\boldsymbol{v}) \neq 0$; (II) f ait un minimum local sur Σ_g, et notons $\boldsymbol{x}^* \in \Sigma_g$ un argument de ce minimum local. Pour tout $(\boldsymbol{x}, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, définissons $\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \lambda) := f(\boldsymbol{x}) - \lambda g(\boldsymbol{x})$, la fonction lagrangienne.

Montrer qu'il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \nabla_{\boldsymbol{x}} \mathcal{L}(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*) = 0, \\ \lambda^* \geqslant 0, \\ \lambda^* g(\boldsymbol{x}^*) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Les conditions (2) sont connues comme les conditions de Karush–Kuhn–Tucker (KKT).

Exercice 3.

Soient $f, g \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Notons $\Sigma_g := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$, supposé non vide. Soit $(x^*, y^*) \in \Sigma_g$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\nabla g(x^*, y^*) \neq 0 \ ; \tag{3}$$

$$\exists \lambda^* \in \mathbb{R}, \quad \nabla f(x^*, y^*) = \lambda^* \nabla g(x^*, y^*) \ ; \tag{4}$$

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{v} \cdot \nabla g(x^*, y^*) = 0 \implies \boldsymbol{v}^\top \big(H_f(x^*, y^*) - \lambda^* H_g(x^*, y^*)\big) \boldsymbol{v} > 0. \tag{5}$$

Montrer que $f(x^*, y^*)$ est un minimum local lié de f sur Σ_g.