20.1. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction <u>convexe</u>, i.e., telle que $\forall a, b \in I$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, on a

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Montrer que si $x, y, z \in I$ sont tels que $x < y < z$, on a

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

<u>Indication</u>: Commencer par vérifier que $y = \frac{z-y}{z-x}\, x + \frac{y-x}{z-x}\, z$.

20.2. $(*)$ Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. Montrer que f est continue sur I et admet en tout $x \in I$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite en x.

<u>Indication</u>: Montrer, en utilisant l'exercice 1, que si $x, y, x_0 \in I$, $x \leq y$ et $x, y \neq x_0$, alors

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}.$$