19 Mars 2021 *Sophie Gorno*

Série 4

Exercice 1: Analyse dimensionnelle

Une méthode très importante en physique est l'analyse dimensionnelle. Nous exprimons les lois de la physique sous forme d'une équation :

$$Membre\ de\ gauche \ = \ Membre\ de\ droite$$

Une telle égalité implique que :
— Les deux membres sont de même nature c'est-à-dire qu'ils sont les deux soit des scalaires, soit des vecteurs, soit des tenseurs de même ordre.
— Leurs dimensions sont identiques.

Assurez-vous que la formule $\vec{f} = -\nabla p$ vérifie ces deux conditions, avec $\vec{f}$ une densité de force.

Exercice 2: Théorème de la Divergence

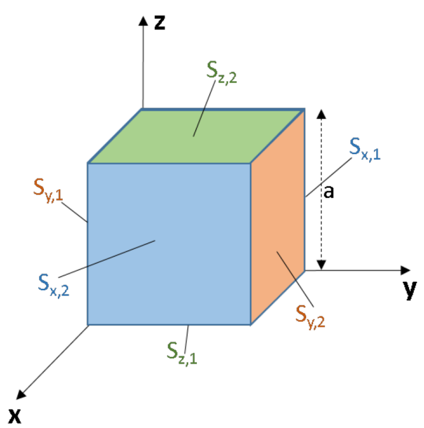
(a) Soit un champ vectoriel $\vec{\mathbf{u}}$ définit dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repére orthonormé O_{xyz} : $\vec{\mathbf{u}}(\vec{\mathbf{r}}) = (u_x, u_y, u_z)$ avec $(u_x, u_y, u_z) = (1, 0, 0)$ $\forall(x, y, z)$. Dessinez le champ vectoriel dans le plan z = 0. Que vaut la divergence $\nabla \cdot \vec{\mathbf{u}}$?

(b) Soit un cube d'arête a, surface S et volume V. Deux sommets sont en $(0, 0, 0)$ et $(a, 0, 0)$. Calculez

$$\int_S \vec{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{S}}$$

et vérifiez que le résultat est équivalent à

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{\mathbf{u}})\, dV$$

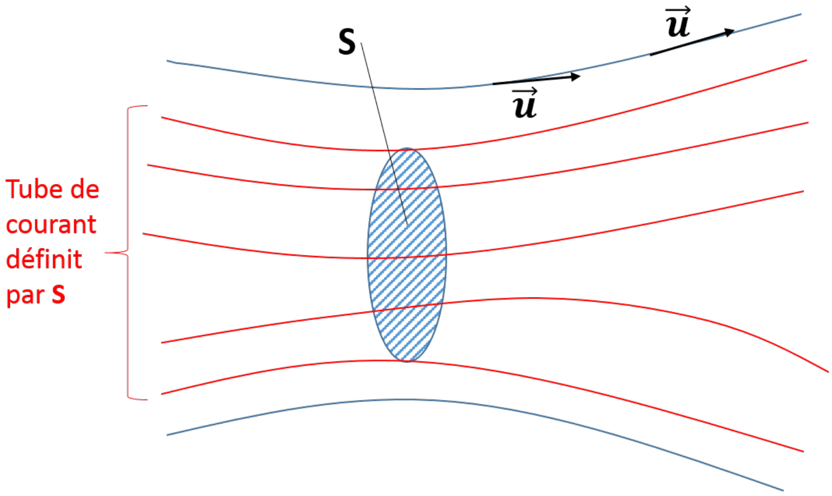


(c) Refaites le calcul de $\int_S \vec{u} \cdot d\vec{S}$ pour $\vec{u} = (x, 0, 0)$ et vérifiez que le résultat est équivalent à

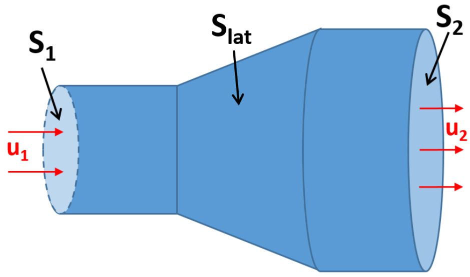
$$\int_V (\nabla \cdot \vec{\mathbf{u}})\, dV$$

Exercice 3: Tube de flux

On considère un écoulement avec $\frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} = 0$. Dans ce cas, les lignes de courant ne changent pas au cours du temps et sont égales au trajectoires des éléments fluides. Un "tube de courant" est défini comme l'ensemble des lignes de courant qui passent à travers une surface S :



On considère maintenant le tube de courant montré ci-dessous. Il est défini par la surface S_1. Plus loin le long du tube, il est définit par la surface S_2. On suppose que $\vec{u}$ est perpendiculaire à S_1 et constante à travers S_1, de norme u_1. $\vec{\mathbf{u}}$ est aussi perpendiculaire à S_2 et constante à travers S_2, de norme u_2.



Pour le cas que $\nabla \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0$, montrez qu'on a :

$$u_1 S_1 = u_2 S_2$$

Exercice 4: Lignes de courant et trajectoires des éléments fluides

On considère l'écoulement d'un fluide incompressible avec le champ de vitesse suivant :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = u_0 \vec{e}_x + u_0 \sin(x - u_0 t) \vec{e}_y$$

où u_0 est une constante positive.

(a) Indiquer, dans le plan xy, en faisant un dessin, le vecteur $\vec{u}$ à $t = 0$ et aux points suivants :

$$\begin{array}{llll} (x,y) = (0,0) & (x,y) = (\pi/2,0) & (x,y) = (\pi,0) & (x,y) = (3\pi/2,0) \\ (x,y) = (0,1) & (x,y) = (\pi/2,1) & (x,y) = (\pi,1) & (x,y) = (3\pi/2,1) \\ (x,y) = (0,2) & (x,y) = (\pi/2,2) & (x,y) = (\pi,2) & (x,y) = (3\pi/2,2) \end{array}$$

Ensuite, à partir de votre dessin, deviner la forme de la ligne de courant passant par le point $(x,y) = (0,0)$ et l'ajouter au dessin.

(b) Refaire les mêmes étapes que dans la partie a), mais pour le temps $t = \pi/(2u_0)$.

(c) Démontrez que les trajectoires des éléments fluides sont données par

$$\vec{r}_f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 t + x_0 \\ u_0 \sin(x_0) t + y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

où (x_0, y_0, z_0) est la position de l'élément fluide à $t = 0$.
Indication : il suffit de montrer que le $\vec{r}_f(t)$ donné satisfait l'équation

$$\frac{d\vec{r}_f}{dt} = \vec{u}(\vec{r}_f(t), t)$$

(d) Quelle est la forme des trajectoires $\vec{r}_f(t)$? Est-ce que les lignes de courant et la trajectoire des éléments fluides sont identiques pour cet écoulement ? Justifiez votre réponse.

Exercice 5: Champ de Vitesse

Nous considérons l'écoulement d'un fluide parfait et incompressible ($\rho = \rho_0 = const.$) avec le champ de vitesse suivant :

$$\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}, t) = -\omega y \overrightarrow{e_x} + \omega x \overrightarrow{e_y}$$

ω est une constante positive.

(a) Indiquer, dans le plan xy, le vecteur $\overrightarrow{u}$ aux points suivants :
$(x, y) = (1, 0); (x, y) = (2, 0); (x, y) = (0, 1); (x, y) = (0, 2);$
$(x, y) = (-1, 0); (x, y) = (-2, 0); (x, y) = (0, -1); (x, y) = (0, -2)$

(b) Déterminez l'accélération d'un élément fluide en un point (x, y) arbitraire. Combien vaut $\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t}$?

(c) Démontrez que ce champ de vitesse satisfait l'équation de continuité.

(d) Utiliser l'équation d'Euler pour déterminer l'expression du champ scalaire de pression $p(\overrightarrow{r}, t)$. Négliger la force de gravité dans l'équation d'Euler et supposer que $p = p_0$ à $x = y = 0$.

Exercice 6: Dérivation de l'équation de continuité (description Lagrangienne)

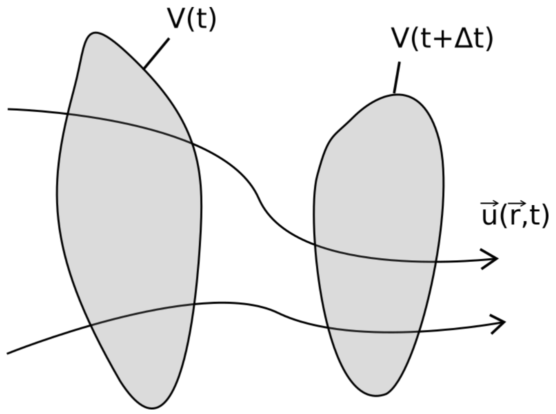
(a) Soit $f(\vec{r}, t)$ un champ scalaire et $V(t)$ un volume qui se déplace avec le champ vectoriel de vitesse $\vec{u}(r, t)$. A partir de la règle de Leibniz, donnée ci-dessous :

$$\frac{d}{dt} \iiint\limits_{V(t)} f dV = \iiint\limits_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint\limits_{S(t)} f \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

avec $S(t)$ la surface entourant le volume $V(t)$, démontrez la relation suivante :

$$\frac{d}{dt} \iiint\limits_{V(t)} f dV = \iiint\limits_{V(t)} \frac{D}{Dt} f + f(\nabla \cdot \vec{u}) dV$$

où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)$ dans l'intégrale du membre de droite est la dérivée convective.



(b) Dans le cours, on a dérivé l'équation de continuité $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$ en appliquant le principe de la conservation de masse à un volume V fixé dans le temps (description Eulérienne) et en l'absence de toute source/perte.

Dérivez l'équation de continuité en considérant un volume $V(t)$ qui se déplace avec l'écoulement (description Lagrangienne).