Série 8

David Wiedemann

27 avril 2021

1

Il suffit de montrer que

$$\nabla f(a) \cdot (\gamma'(0)) = 0$$

En effet, car l'image de γ est un sous-ensemble de Σ, on a

$$f(\gamma(x)) = 0$$

En dérivant par rapport à x, on trouve

$$f'(\gamma(x)) \cdot \gamma'(x) = 0$$

En substituant $x = 0$, on trouve

$$\nabla f(a) \cdot \gamma'(0) = 0$$

Ce qui montre l'égalité.

2

On montre la double inclusion des ensembles.

$T_a(\Sigma) \subset \Pi_a(\Sigma) - a$
Cette inclusion est immédiate par la partie 1, en effet, soit $z \in \mathbb{R}^n$ tel qu'il existe un chemin $\gamma :]-1, 1[\to \Sigma$ satisfaisant $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = z$.
Alors la partie 1 implique immédiatement que $\gamma'(0) \in \Pi_a(\Sigma) - a$ et donc que $z \in \Pi_a(\Sigma) - a$.
Ainsi, l'inclusion est démontrée.

$T_a(\Sigma) \supset \Pi_a(\Sigma) - a$
Pour alléger la notation, dans ce qui suit on utilisera la notation $\partial_i f(c) \coloneqq \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$.
Soit $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \Pi_a(\Sigma) - a$.

Sans perte de généralité, on va supposer que $\partial_n f(a) \neq 0$, dans le cas contraire, il suffirait d'échanger les indexes.
Ainsi, par le théorème de la fonction implicite, il existe une fonction implicite $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ qui satisfait les hypothèses du théorème de la fonction implicite, notamment qu'il existe un voisinage de $a : U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ tel que, $\forall x \in U, (x, \phi(x)) \in \Sigma$.
Soit $b \in U$ tel que $(b, \phi(b)) = a$. Définissons maintenant

$$z^* \coloneqq (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Calculons la dérivée directionelle selon z^* de ϕ :

$$\begin{aligned} D_{z^*}\phi(b) &= \nabla\phi(b) \cdot z^* \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{1}{\partial_n f(a)} \partial_i f(a) z_i \end{aligned}$$

En utilisant que

$$\begin{aligned} \nabla f(a) \cdot z &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i f(a) z_i &= -\partial_n f(a) z_n \end{aligned}$$

On trouve que

$$D_{z^*}\phi(b) = z_n$$

Considérons donc maintenant un chemin $\beta :]c, d[\to \mathbb{R}^n$ défini par

$$\beta(\lambda) = (\lambda z^* + b, \phi(\lambda z^* + b))$$

ou $c < 0 < d, \quad d, c \in [-1, 1]$ sont tels que $\lambda z^* + b \in U \forall \lambda \in]c, d[$, l'existence de c et d est donnée par le fait que U est ouvert et contient b. Notons que

$$\beta'(0) = (z^*, D_{z^*}\phi(b)) = z \text{ et } \beta(0) = (b, \phi(b)) = a$$

Ainsi, n'importe quel chemin $\gamma \in C^1(]-1, 1[, \Sigma)$ qui satisfait que $\gamma(\lambda) = \beta(\lambda) \forall \lambda \in]c, d[$ satisfait les conditions de l'ensemble $T_a(\Sigma)$.
On en déduit que $z \in T_a(\Sigma)$ et ainsi

$$T_a(\Sigma) = \Pi_a(\Sigma) - a.$$