

# Algebre Lineaire II

David Wiedemann

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Polynomes</b>	<b>5</b>
1.1	Division avec reste . . . . .	7
1.2	Factorisation des polynomes sur un corps . . . . .	8
1.3	Factorisation des polynomes sur un corps . . . . .	9
1.4	Diviseurs Communs le plus grand . . . . .	9
1.5	Factorisation en elements irreductibles . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Valeurs et Vecteurs Propres</b>	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>Le polynome caracteristique</b>	<b>14</b>
3.1	Theoreme de Cayley-Hamilton . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Formes Bilineaires</b>	<b>17</b>
4.1	Orthogonalite . . . . .	19
4.2	Orthogonalite . . . . .	19
4.3	Matrices congruentes . . . . .	20
4.4	Formes Bilineaires symmetriques definies positives . . . . .	21
4.5	La methode de Gram Schmidt . . . . .	23
4.6	La methode des moindres carres . . . . .	25
4.7	Formes sesquilineaires et produits hermitiens . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Formes quadratiques reelles et matrices symmetriques reelles</b>	<b>29</b>
5.1	Decomposition en valeurs singulieres . . . . .	33
5.2	Pseudo-inverse d'une matrice . . . . .	34
5.3	Encore des systemes d'equation . . . . .	36
5.4	Le meilleur sous-espace approximatif . . . . .	36
5.4.1	$k = 1$ . . . . .	37

## List of Theorems

1	Definition (Centre d'un anneau) . . . . .	5
2	Definition (Diviseurs de 0) . . . . .	5

3	Definition (Anneau integre) . . . . .	5
1	Theorème . . . . .	5
4	Definition (Polynome) . . . . .	5
2	Theorème . . . . .	5
5	Definition (Degre d'un polynome) . . . . .	6
3	Theorème . . . . .	6
4	Theorème . . . . .	6
5	Theorème . . . . .	7
6	Corollaire . . . . .	7
7	Theorème . . . . .	7
6	Definition (Diviseurs de polynomes) . . . . .	8
7	Definition (Racine) . . . . .	8
8	Theorème . . . . .	8
8	Definition (Multiplicite d'une racine) . . . . .	9
9	Theorème (Theoreme fondamental de l'algebre) . . . . .	9
9	Definition (Polynome irreductible) . . . . .	9
10	Theorème . . . . .	9
11	Theorème . . . . .	9
10	Definition (Polynome Unitraire) . . . . .	9
11	Definition (Diviseur Commun) . . . . .	10
12	Theorème . . . . .	10
12	Definition (PGCD) . . . . .	10
13	Theorème (Algorithme d'Euclide) . . . . .	10
14	Theorème . . . . .	11
15	Theorème (La factorisation est unique) . . . . .	11
16	Corollaire . . . . .	12
13	Definition (Vecteur propre) . . . . .	12
17	Lemme . . . . .	12
14	Definition . . . . .	12
18	Corollaire . . . . .	13
15	Definition (Matrices semblables) . . . . .	13
16	Definition (Sous-espace propre) . . . . .	13
19	Lemme . . . . .	13
20	Corollaire . . . . .	14
17	Definition (Multiplicite algebrique) . . . . .	15
21	Proposition . . . . .	15
22	Theorème (Theoreme de diagonalisation) . . . . .	15
23	Theorème (Evaluation d'une matrice dans un polynome) . . . . .	16
24	Theorème (Cayley-Hamilton) . . . . .	16
18	Definition (Polynome minimal) . . . . .	16
25	Corollaire . . . . .	17

19	Definition (Forme Bilineaire) . . . . .	17
26	Proposition . . . . .	18
20	Definition (Orthogonalite) . . . . .	19
21	Definition (Complement orthogonal) . . . . .	19
27	Proposition . . . . .	19
28	Lemme . . . . .	19
22	Definition (Matrices Congruentes) . . . . .	19
23	Definition (Base orthogonale) . . . . .	19
29	Lemme . . . . .	19
30	Theorème . . . . .	20
31	Lemme . . . . .	21
24	Definition (Formes Bilineaires definies positives) . . . . .	21
25	Definition (Norme d'un vecteur) . . . . .	21
26	Definition . . . . .	21
32	Proposition . . . . .	22
33	Theorème (Theoreme de Pythagore) . . . . .	22
34	Proposition (Regle du parallelogramme) . . . . .	22
35	Theorème (Inegalite Cauchy-Schwarz) . . . . .	22
36	Theorème (Inegalite triangulaire) . . . . .	23
37	Lemme . . . . .	23
38	Corollaire . . . . .	24
27	Definition . . . . .	25
39	Corollaire . . . . .	25
40	Theorème . . . . .	25
41	Theorème . . . . .	26
28	Definition (Produit Hermitien) . . . . .	26
29	Definition (Matrice hermitienne) . . . . .	26
42	Proposition . . . . .	27
30	Definition (Matrices Complexes congruentes) . . . . .	27
43	Theorème . . . . .	27
44	Theorème (Theoreme Spectral) . . . . .	27
45	Lemme . . . . .	27
46	Corollaire . . . . .	28
31	Definition (Sphere) . . . . .	29
32	Definition (Forme Quadratique) . . . . .	29
47	Lemme . . . . .	29
33	Definition (Matrice Symmetrique definie positive/negative) . . . .	30
48	Theorème . . . . .	30
34	Definition (k-mineur principal) . . . . .	30
49	Theorème . . . . .	31
50	Theorème (Theoreme spectral reel) . . . . .	31

35	Definition . . . . .	32
51	Theorème . . . . .	32
52	Theorème . . . . .	32
53	Theorème (Theoreme Min-Max) . . . . .	33
54	Theorème (Decomposition en valeurs singulieres) . . . . .	33
36	Definition (Pseudo inerse) . . . . .	34
56	Theorème . . . . .	35
57	Theorème . . . . .	35
58	Theorème . . . . .	36
37	Definition (Norme de Frobenius) . . . . .	38
38	Definition (Trace) . . . . .	38
59	Lemme . . . . .	38
60	Lemme . . . . .	38
39	Definition . . . . .	39
61	Lemme . . . . .	39
62	Theorème . . . . .	40

# 1 Polynomes

## Definition 1 (Centre d'un anneau)

Le centre  $Z(R)$  est l'ensemble des elements  $x$  satisfaisant

$$\{x \in R \mid ra = ar \forall a \in R\}$$

## Definition 2 (Diviseurs de 0)

$a$  est un element non nul d'un anneau  $R$  satisfaisant qu'il existe  $b \in R$  tel que  $ab = 0$  ou  $ba = 0$ .

## Definition 3 (Anneau integre)

Si un anneau est commutatif et n'a pas de diviseurs de 0, alors l'anneau est integre.

### Theorème 1

Soit  $R$  un anneau, alors il existe un anneau  $S \supseteq R$  ( $R$  est un sous-anneau)

et  $\exists x \in S \setminus R$  tel que

- $ax = xa, \forall a \in R$
- Si  $a_0 + \dots + a_n x^n = 0$  et  $a_i \in R \forall i$  alors  $a_i = 0 \forall i$

Cet  $x$  est appele indeterminee ou variable.

## Definition 4 (Polynome)

Un polynomer sur  $R$  est une expression de la forme

$$p(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$$

ou  $a_i$  est le  $i$ -eme coefficient de  $p(x)$ .

$R[x]$  est l'ensemble des polynomes sur  $R$ .

### Theorème 2

$R[X]$  est un sous-anneau.  $R$  est sans diviseurs de 0  $\Rightarrow R[X]$  est sans diviseurs de 0.

De meme, si  $R$  est commutatif,  $R[x]$  aussi.

## Preuve

Soit  $f(x) = \sum a_i x_i, g(x) = \sum b_i x^i$  de degre  $n$  resp.  $m$ .

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=1}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) x^i$$

De meme, on a

$$f(x) \cdot g(x) = a_0 b_0 + \dots = \sum_{k=0}^{m+n} \left( \sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k$$

Donc  $R[X]$  est stable pour  $+$ ,  $\cdot$  et donc immédiatement pour  $-$ , donc  $R[X]$  est un sous-anneau de  $S$ .

Soient  $f(x), g(x) \neq 0$  et  $n = \max\{i : a_i = 0\}$ , le  $m + n$ -ième coefficient de  $f(x)g(x)$  est  $a_n b_m$  et donc si  $R$  est intègre,  $R[x]$  l'est aussi.  $\square$

**Définition 5 (Degré d'un polynôme)**

Soit  $f(x) = a_0 + \dots \in R[X]$ ,  $f(x) \neq 0$ . On définit

$$\deg(f) = \max\{i : a_i \neq 0\}$$

Ce dernier terme s'appelle le coefficient dominant de  $f$ , de plus on définit

$$f(x) = 0 : \deg(f) = -\infty$$

Si  $\deg(f) = 0$ , alors  $f$  est une constante.

**Théorème 3**

Soit  $R$  un anneau,  $f, g \in R[X] \neq 0$  tel que au moins un de leur coefficients dominants de  $f$  ou de  $g$  ne sont pas des diviseurs de 0. Alors  $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$

**Preuve**

Soit  $f(x) = a_0 + \dots, g(x) = b_0 + \dots, \deg f = n, \deg g = m$ . Le  $n + m$  ième coefficient de  $f \cdot g = a_n \cdot b_m \neq 0$   $\square$

Soit  $p(x) \in R[x]$ , ce polynôme induit une application  $f_p : R \rightarrow R$ , on écrit aussi  $p(r)$

**Théorème 4**

Soit  $K$  un corps et  $r_0, r_1, \dots, r_n \in K$  des éléments distincts et soient  $g_0, \dots, g_n \in K$ .

Il existe un seul polynôme  $f \in K[x]$  tel que

1.  $\deg f \leq n$
2.  $f(r_i) = g_i$

**Preuve**

On cherche  $a_0, \dots, a_n$  tel que

$$a_0 + a_1 r_i + \dots + a_n r_i^n = g_i$$

Donc, on cherche

$$\begin{pmatrix} 1 & r_0 & \dots & r_0^n \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Il faut donc montrer que la matrice ci-dessus a un déterminant non nul.

On le montre par induction sur  $n$ .

Dans le cas  $n = 0$ , le déterminant vaut trivialement 1. Dans le cas  $n > 0$ , on a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 1(r_1 - r_0) & \dots & \\ \dots & \ddots & \\ 1(r_n - r_0) & \dots & \end{pmatrix} = (r_1 - r_0)(r_2 - r_0) \dots \det(V(r_1, \dots, r_n)) \neq 0 \quad \square$$

## Lecture 2: Polynomes

Wed 24 Feb

### Theorème 5

Soit  $K$  un corps fini de caractéristique  $q$ , alors  $K \supseteq \mathbb{Z}_q$ .

De plus  $K$  est un espace vectoriel de  $\mathbb{Z}_q$  de dimension finie.

### Corollaire 6

Soit  $K$  un corps infini. Deux polynomes sont égaux si et seulement si leurs évaluations sont les memes.

### Preuve

Une direction est triviale.

L'autre suit immédiatement du theoreme 1.6 □

## 1.1 Division avec reste

### Theorème 7

Soit  $R$  un anneau,  $f, g \in R[x]$ ,  $g \neq 0$  et soit le coefficient de  $g \in R^*$

Il existe  $q, r \in R[x]$  uniques tel que

1.  $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$
2.  $\deg r < \deg g$

### Preuve

Si  $\deg f < \deg g$ , on a fini.

Soit donc  $\deg f \geq \deg g$ , donc

$$f(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$$

et

$$g(x) = b_0 + \dots + b_m x^m$$

et  $b_m^{-1}$  existe.

On procede par induction sur  $n$ .

Si  $n = m$  :

On note que

$$f(x) - \frac{a_n}{b_m}g(x)$$

est un polynome de degre  $< n$  Si  $n > m$  :

On note que

$$f(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)$$

est un polynome de degre  $< n$ .

Par hypothese d'induction il existe  $q(x), r(x)$  tel que

- $f(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x) + r(x)$
- $\deg r < \deg g$

et donc on a fini de montrer l'existence.

Supposons maintenant qu'il existe  $r'$  et  $q'$  satisfaisant les memes proprietes que  $q$  et  $g$ , alors on a

$$q(x)g(x) + r(x) = q'(x)g(x) + r'(x)$$

Donc

$$r' \neq r \text{ et } q' \neq q$$

□

en comparant les degre, on a une contradiction.

## 1.2 Factorisation des polynomes sur un corps

### Definition 6 (Diviseurs de polynomes)

Soit  $q(x) \in K[x]$ .

$q$  divise  $f$  si il existe  $g(x)$  tel que

$$q(x)g(x) = f(x)$$

On dit que  $q$  est un diviseur de  $f$ , on ecrit  $q(x)|f(x)$

### Definition 7 (Racine)

Soit  $p(x) \in K[x]$ , et soit  $\alpha \in K$  tel que  $p(\alpha) = 0$

#### Theorème 8

Soit  $f(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ , alors  $\alpha \in K$  est une racine de  $f$  si et seulement si  $(x - \alpha)|f(x)$

#### Preuve

Si  $(x - \alpha)q(x) = f(x)$ , alors on a fini.

sinon, la division de  $f(x)$  par  $x - \alpha$  avec reste donne

$$f(x) = q(x)(x - \alpha) + r \text{ ou } r \in K$$

Si  $r \neq 0$ , alors  $f(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + r = r \neq 0$  et donc  $(x - \alpha)|f(x)$

□



**Definition 8 (Multiplicite d'une racine)**

La multiplicite d'une racine  $\alpha$  de  $p(x) \in K[x]$  est le plus grand  $i \geq 1$  tel que

$$(x - \alpha)^i | p(x)$$

**Theorème 9 (Theoreme fondamental de l'algebre)**

Tout polynome  $p(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$  de degre  $\geq 1$  possede une racine complexe.

**Lecture 3: Factorisation des polynomes sur un corps**

Tue 02 Mar

**1.3 Factorisation des polynomes sur un corps**

Soit  $K$  un corps.

**Definition 9 (Polynome irreductible)**

Un polynome  $p(x) \in K[x] \setminus \{0\}$  est irreductible si

- $\deg p \geq 1$
- si  $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ , alors  $\deg f = 0$  ou  $\deg g = 0$ .

**Theorème 10**

Un polynome de degre 2 sur  $K[x]$  est irreductible si et seulement si le polynome ne possede pas de racines.

**1.4 Diviseurs Communs le plus grand****Theorème 11**

Soient  $f(x), g(x) \in K[x]$  pas tous les deux nuls.

On considere l'ensemble  $I = \{u \cdot f + v \cdot g : u, v \in K[x]\}$ .

Il existe un polynome  $d(x) \in K[x]$  satisfaisant

$$I = \{h \cdot d : h \in K[x]\}$$

**Preuve**

Soit  $a \in I \setminus \{0\}$  de degre minimal.

L'ensemble  $\{h \cdot d : h \in K[x]\}$  est clairement un sous-ensemble de  $I$ .

Il reste a montrer l'inclusion inverse.

Si  $d$  ne divise pas  $uf + vg$ , la division avec reste donne

$$uf + vg = qd + r \iff r = uf + vg - qd = (u - qu')f + (v - qv')g$$

Or le reste est non nul, mais le reste est de degre inferieur a  $\deg d$ .  $\nrightarrow$  □

**Definition 10 (Polynome Unitaire)**

Un polynome  $f(x) \in K[x]$  dont le coeff. dominant = 1 est un polynome unitaire.

**Definition 11 (Diviseur Commun)**

Soient  $f, g \in K[x]$  non-nuls.

Un diviseur commun de  $f$  et  $g$  est un polynome qui divise  $f$  et  $g$ .

**Theorème 12**

Soient  $f, g \in K[x]$  non-nuls.

Soit  $d \in K[x]$  comme dans le theoreme precedent.

- $d$  est un diviseur commun de  $f$  et  $g$ .
- Chaque diviseur commun de  $f$  et  $g$  est un diviseur de  $d$ .
- Si  $d$  est unitaire, alors  $d$  est unique.

**Preuve**

- $f \in I \Rightarrow \exists h$  tel que  $hd = f \iff d|f$  et  $g \in I \Rightarrow d|g$
- Soit  $d' \in K[x]$  tq  $d'|f, d'|g$ , on veut montrer que  $d'|d$ .

$$f = f'd', g = g'd'$$

des que  $d \in I$ , il existe  $u, v \in K[x]$  tel que

$$d = uf + vg = uf'd' + vg'd' = (uf' + vg')d' \Rightarrow d'|d \quad \square$$

- Soit  $d' \in I$  tel que  $I = \{hd' | h \in K[x]\}$ .  
Soient  $d, d'$  unitaires.  
 $d|d'$  et  $d'|d$ , donc ils sont les memes a un facteur pres.

**Definition 12 (PGCD)**

L'unique polynome unitaire  $d \in K[x]$  qui satisfait les conditions ci-dessus est appele le plus grand commun diviseur de  $f$  et  $g$ .

**Theorème 13 (Algorithme d'Euclide)**

Soient  $f_0, f_1$  non nuls et

$$\deg f_0 \geq \deg f_1$$

On cherche  $\gcd(f_0, f_1)$  Si  $f_1 = 0$ , alors  $\gcd = f_0$ .

Si  $f_1 \neq 0$  On pose

$$f_0 = q_1 f_1 + f_2$$

Soit  $h \in K[x] : h|f_0$  et  $h|f_1 \Rightarrow h|f_2$  Et donc on pose  $\gcd(f_0, f_1) = \gcd(f_1, f_2)$  On repete jusqu'a trouver un  $f_k$  nul.

Grace a l'algorithme d'Euclide, on peut aussi trouver  $u, v \in K[x]$  tel que  $uf_0 + vf_1 = \gcd(f_0, f_1)$ .

En effet, on a

$$\begin{pmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{i-1} \\ f_i \end{pmatrix}$$

et donc en appliquant cette matrice plusieurs fois, on trouve une dépendance linéaire entre  $f_{k-1}$  et  $f_k$

Et donc le  $\gcd(f_0, f_1) = \frac{1}{\text{coeff dominant de } f_{k-1}}(uf_0 + vf_1)$

## Lecture 4: Polynomes 2

Wed 03 Mar

### 1.5 Factorisation en éléments irréductibles

Un polynome  $p(x)$  est irréductible si le degré de  $p$  est  $\geq 1$ ,  $p(x) \neq 0$ .

Si  $h|p$ , alors  $h = a$  ou  $h = a \cdot p$ .

Tout  $f(x) \in K[x]$  se laisse factoriser

$$f(x) = a \prod_i p_i(x), p_i(x) \text{ irréductibles, unitaires}$$

Est-ce que cette factorisation est unique ?

#### Theorème 14

Soit  $p(x) \in K[x] \setminus \{0\}$  irréductible et supposons que  $p|f_1(x) \dots f_k(x)$ , alors il existe  $i$  tel que  $p(x)|f_i(x)$

#### Preuve

Par récurrence, il suffit de démontrer l'assertion pour  $k = 2$ .

Supposons que  $p|f \cdot g$ ,  $f, g \in K[x] \setminus \{0\}$ .

Si  $p \nmid f$ , alors  $\gcd(p, f) = 1$ . Donc, il existe  $u, v \in K[x]$  tel que  $up + vf = 1$ , donc on a

$$upg + vfg = g \Rightarrow p|upg + vfg \Rightarrow p|g \quad \square$$

#### Theorème 15 (La factorisation est unique)

La factorisation est unique à l'ordre près des  $p_i$ .

#### Preuve

Soit  $f(x) = a \prod p_i(x)$  et  $f(x) = a \prod q_j(x)$  une autre factorisation en éléments irréductibles.

Par récurrence sur  $k$ .

Si  $k = 1$ , alors

$$ap_1(x) = aq_1(x) \dots q_l(x)$$

Et donc  $q_1(x) = p_1(x)$ , car  $p_1$  est irréductible. Si  $k > 1$ ,

$$ap_1(x) \dots p_k(x) = aq_1(x) \dots q_l(x)$$

Grace au theoreme ci-dessus,  $p_1|q_j$  pour un certain  $j \iff p_1 = q_j$ . Et donc on obtient

$$p_2(x) \dots = q_1(x) \dots q_l(x) \quad \square$$

Par récurrence, cette factorisation existe et est la même à l'ordre près.

**Corollaire 16**

Soit  $f(x) \in K[x] \setminus \{0\}$  et  $\alpha_1 \dots$  des racines de  $f$  de multiplicité  $k_1, \dots, k_l$  respectivement.

Alors il existe  $g(x) \in K[x]$  tel que

$$f(x) = g(x) \prod (x - \alpha_i)^{k_i}$$

**Preuve**

Exercice □

## 2 Valeurs et Vecteurs Propres

**Definition 13 (Vecteur propre)**

Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $K$  et  $f$  un endomorphisme sur  $V$ .

Un vecteur propre de  $f$  associe à la valeur propre  $\lambda \in K$  est un vecteur  $v \neq 0$  satisfaisant

$$f(v) = \lambda v$$

**Lemme 17**

Soit  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  une base de  $V$  et  $A \in K^{n \times n}$  la matrice de l'endomorphisme  $f$  relatif à  $B$ .

La matrice  $A$  est une matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\iff v_i$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$ .

**Preuve**

On a

$$[f(v_i)]_B = Ae_i = \lambda_i e_i$$

Donc  $v_i$  est un vecteur propre associé à  $\lambda_i$ .

Dans l'autre sens, les arguments sont similaires. □

**Definition 14**

Un endomorphisme  $f$  sur un espace vectoriel de dimension finie est appelé diagonalisable s'il existe une base tel que  $\{v_1, \dots\}$  de  $V$  composée de vecteurs propres.

## Lecture 5: Vecteurs/Valeurs Propres

Tue 09 Mar

**Corollaire 18**

Soit  $f : V \rightarrow V$  un endomorphisme et  $\{v_1, \dots, v_n\}$  une base de  $V$ .  
 Alors  $f$  est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice inversible  $P \in K^{n \times n}$  tel que  $P^{-1}A_B P$  est diagonale.

**Preuve**

$f$  est diagonalisable  $\iff \exists B' = \{w_1, \dots\}$  tel que  $A_{B'}$  est diagonale.

Mais  $A_{B'} = P^{-1}A_B P$

□

**Definition 15 (Matrices semblables)**

$A, B \in K^{n \times n}$  sont semblables s'il existe  $P \in K^{n \times n}$  inversible tel que

$$P^{-1}AP = B$$

Donc si  $f$  est diagonalisable, la matrice de  $f$  est semblable a une matrice diagonale.

**Definition 16 (Sous-espace propre)**

Soit  $f : V \rightarrow V$  un endomorphisme et  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ , alors

$$E_\lambda = \ker(f - \lambda \cdot \text{Id})$$

est l'espace propre de  $f$  associe a  $\lambda$ .

$\dim E_\lambda$  est la multiplicite geometrique de  $\lambda$ .

**Lemme 19**

Soit  $f : V \rightarrow V$  un endomorphisme et  $v_1, \dots, v_r$  des vecteurs propres associes aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  distinctes.  
 Alors  $\{v_1, \dots, v_r\}$  est un ensemble libre.

**Preuve**

$r = 1$  est evident.

Pour  $r = 2$  :

Supposons que  $v_1, v_2$  sont lineairement dependants, alors il existe  $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in K \setminus \{0\}$  tel que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$$

Spg  $\lambda_2 \neq 0$ , en appliquant  $f$ , on trouve

$$0 = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$$

$$0 = \alpha_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} v_1 + \alpha_2 v_2$$

$$0 = \alpha_1 \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) v_2$$

Pour  $r > 2$

Supposons l'assertion est fausse et soit  $r > 2$  minimal tel que  $v_1, \dots, v_r$  sont

lin. dependants.. Soit

$$\alpha_1 v_1 + \dots = 0$$

avec  $\alpha_i \neq 0 \forall i$ , alors

$$0 = \alpha_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_r} v_1 + \dots + \alpha_r v_r$$

En soustrayant les deux egalites, on trouve

$$0 = \alpha_1 \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_r}\right) v_1 + \dots$$

□

Ce qui contredit la minimalite.

### Corollaire 20

Soit  $f : V \rightarrow V$  un endomorphisme de  $V$  sur  $K$  et  $\dim V = n$ .

Soient  $\lambda_1, \dots$ , les valeurs propres differentes de  $f$ .

Soit  $n_1 \dots$  les multiplicites geometriques respectives.

Soient  $B_i = \{v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)}\}$  des bases de  $E_{\lambda_i}$ , alors

$$\bigcup_i B_i$$

est un ensemble libre.

$f$  est diagonalisable  $\iff n_1 + \dots + n_r = n$

### Preuve

Soit

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} v_j^{(i)} = 0$$

□

Montrons que  $\alpha_{ij} = 0 \forall i, j$  "Immediat" par lemme d'avant.

On remarque immediatement que si  $\sum n_i = n$ , les vecteurs propres forment une base.

A l'inverse, soit  $f$  diagonalisable, cad il existe une base  $B$  de  $V$  composee de vecteurs propres. Soit  $m_i = |B \cap E_{\lambda_i}|$ , donc  $m_i$  est le nombre de vecteurs dans  $B$  associe a  $\lambda_i$ .

Clairement  $\sum m_i = n$ , mais  $m_i \leq n_i \leq \dim E_{\lambda_i}$ , donc  $\sum n_i = n$ .

## Lecture 7: Polynome caracteristique

Wed 10 Mar

### 3 Le polynome caracteristique

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ ,  $\lambda \in K$  est une valeur propre de l'endomorphisme defini par  $A$  si et seulement si  $\ker(A - \lambda \text{Id}) \supsetneq \{0\}$ . On note

$$\det(A - \lambda I) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^n (A - \lambda \text{Id})_{i\pi(i)}$$

On observe que  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  si et seulement si  $\lambda$  est une racine de  $p_A$ .

Soit  $f : V \rightarrow V$  un endomorphisme,  $B = \{v_1, \dots\}$  une base de  $V$ . Le polynome caracteristique de  $f$  est donne par

$$\det(A_B - \lambda \text{Id})$$

Cette definition fait du sens, car le changement de base n'influence pas la valeur du determinant.

**Definition 17 (Multiplicite algebrique)**

*La multiplicite algebrique d'une valeur propre est la multiplicite comme racine du polynome caracteristique.*

**Proposition 21**

*Soit  $f$  un endomorphisme de  $V \rightarrow V$ .*

*Soit  $\lambda \in K$  une valeur propre.*

*La multiplicite geometrique de  $\lambda$  est au plus la multiplicite algebrique.*

**Preuve**

*Soit  $\{v_1, \dots, v_r\}$  une base de  $E_\lambda$ , on complete cette base en une base de  $V$  avec  $\{w_1, \dots, w_{n-r}\}$ . Dans cette base, la representation de la matrice de  $A - \lambda \text{Id}$  implique que*

$$\det(A - x \text{Id}) = (\lambda - x)^r \det C \quad \square$$

*et donc  $r$  est au plus la multiplicite algebrique.*

**Theoreme 22 (Theoreme de diagonalisation)**

*Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $K$  de dimension  $n$ ,  $f : V \rightarrow V$  un endomorphisme  $\lambda_1, \dots \in K$  les valeurs propres distinctes, alors  $f$  est diagonalisable si et seulement si*

- $p_f(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{g_i}$
- $\dim E_{\lambda_i} = g_i$  pour tout  $i$

**Preuve**

*Soit  $f$  diagonalisable et soit  $B = \{v_1, \dots\}$  une base composee de vecteurs propres.  $A_B$  est une matrice diagonale, alors  $p_f(x) = \det(A_B - x \text{Id}) = (-1)^n \prod (\lambda_i - x)^{g_i}$ . De plus  $\dim(\ker(A_B - \lambda_i \text{Id})) = g_i$*

*Soient  $m_i$  les multiplicites geometriques des valeurs propres. car*

$$\deg(p_f) = n$$

*on a fini.*  $\square$

## Lecture 7: Cayley-Hamilton

Tue 16 Mar

### 3.1 Theoreme de Cayley-Hamilton

**Theorème 23 (Evaluation d'une matrice dans un polynome)**

Soit  $p(x) = a_0 + \dots + a_n x^n \in K[x]$  Pour  $A \in K^{n \times n}$ , on definit

$$p(A) = a_0 \text{Id} + \dots + a_n A^n$$

**Theorème 24 (Cayley-Hamilton)**

Soit  $A \in K^{n \times n}$  et  $p(\lambda) \in K[\lambda]$  le polynome caracteristique de  $A$ , alors  
 $p(A) = 0 \in K^{n \times n}$

**Preuve**

Supposons d'abord que  $A \in K^{n \times n}$  est diagonalisable.

Alors  $\exists \{v_1, \dots\}$  une base composee de vecteurs propres de  $A$ .

Considerons

$$\begin{aligned} p(A) \cdot v_i &= a_0 v_i + a_1 A v_i + \dots \\ &= a_0 v_i + a_1 \lambda_i v_i + \dots \\ &= p(\lambda_i) v_i = 0 \end{aligned}$$

Supposons donc que  $A$  n'est pas diagonalisable.

Notons que

$$\text{Id} = \frac{\text{cof}(A - \lambda \text{Id})^T}{\det(A - \lambda \text{Id})} \cdot (A - \lambda \text{Id})$$

Alors

$$a_0 + a_1 \lambda \text{Id} + \dots = \text{cof}(A - \lambda \text{Id})^T \cdot (A - \lambda \text{Id})$$

$$\text{cof}(A - \lambda \text{Id})^T \cdot (A - \lambda \text{Id}) = B_0 A + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i (B_i A - B_{i-1}) - \lambda_n B_{n-1}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} a_0 \text{Id} &= B_0 A \\ a_i \text{Id} &= B_i A - B_{i-1} \text{ pour } i \in \{1, \dots, n-1\} \\ a_n \text{Id} &= -B_{n-1} \end{aligned}$$

On multiplie chacune de ces equations par  $A^i$  et on les additionne. On trouve alors

$$p(A) = 0 \quad \square$$

**Definition 18 (Polynome minimal)**

Le polynome unitaire de degre minimal parmi ceux, qui annullent la matrice  $A \in K^{n \times n}$  est appele le polynome minimal de  $A$ .



**Preuve**

*Ce polynome est unique.*

*Supposons qu'il existe  $q, p$  des polynomes qui annullent  $A$ . Alors*

$$p \nmid q \text{ et } q \nmid p$$

*Donc*

$$p = qq' + r$$

*ou  $r \neq 0, \deg r < \deg p$ , donc*

$$0 = p(A) = r(A) + q'(A)q(A) = r(A)$$

*Donc  $p$  n'est pas de degre minimal  $\nmid$ .*

□

**Corollaire 25**

*Soit  $A \in K^{n \times n}$*

- *$A^k$  est combinaison lineaire de  $\text{Id}, A, \dots, A^{n-1}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$*
- *$A$  inversible, alors  $A^{-1}$  s'ecrit comme combinaison lineaire de  $\text{Id}, A, \dots, A^{n-1}$*

**Preuve**

- *Pour  $k \in 0, \dots, n-1$  clair.*

*Soit  $k \geq n : x^k = q(x)p_A(x) + r(x)$ , on evalue*

$$A^k = q(A)p_A(A) + r(A) = r(A)$$

*et  $r$  est de degre  $n-1$ .*

—

$$\det A \neq 0$$

□

*Donc il suffit de reformuler  $p(A) = 0$ .*

**Lecture 8: Formes bilineaires**

Wed 17 Mar

**4 Formes Bilineaires****Definition 19 (Forme Bilineaire)**

- $BL1 \forall u \in V,$

$$f_u : V \rightarrow K$$

$$v \rightarrow \langle u, v \rangle$$

*est lineaire*

—  $BL2 \forall u \in V$ ,

$$\begin{aligned} f_u : V &\rightarrow K \\ v &\rightarrow \langle v, u \rangle \end{aligned}$$

*est lineaire*

La forme  $\langle . \rangle$  est dite symmetrique si pour tout  $u, v \in V : \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ .

La forme  $\langle . \rangle$  est dite non degeneratee a gauche ( resp. a droite) si  $\forall v \in V \langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow w = 0$ .

Soit  $V$  un espace vect de dimension  $n$  et  $\{v_1, \dots, v_n\}$  une base.

$x, y \in V$  sont representes comme combinaison lineaire de  $\{v_1, \dots\}$ , soit  $x = \sum x_i v_i$ , et  $y = \sum y_j v_j$ , alors

$$\begin{aligned} \left\langle \sum x_i v_i, y \right\rangle &= \sum \langle x_i v_i, y \rangle \\ &= \sum x_i \langle v_i, y \rangle \\ &= \sum x_i \left\langle v_i, \sum y_j v_j \right\rangle \\ &= \sum x_i \sum y_j \langle v_i, v_j \rangle \\ &= (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix} (y_1, \dots, y_n)^T \end{aligned}$$

### Proposition 26

Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $K$  de dimension finie et  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  une base de  $V$ .

Soit  $f : V \times V \rightarrow K$  une forme bilineaire.

Les conditions suivantes sont equivalentes

- $rg(A_B^f) = n$
- $f$  est non degeneratee a gauche
- $f$  est non degeneratee a droite

### Preuve

On demontre que 1 est equivalent a 2.

Il faut montrer que  $\exists u \in V$  tel que  $f(v, u) \neq 0$ , or

$$f(v, u) = [v]_B^T \cdot A_B^f \cdot [u]_B$$

mais  $rg A_B^f = n \Rightarrow [v]_B^T \cdot A_B^f \neq 0^T$ .

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que la  $i$ -eme composante de  $([v]_B^T \cdot A_B^f)_i \neq 0$ , alors pour  $u = b_i$  on a fini.

Supposons maintenant que  $rg A_B^f < n$ , alors  $\exists x \in K^n \setminus \{0\}$  tel que  $x^T \cdot A_B^f = 0$  donc les lignes de  $A$  sont lineairements independantes.  $\square$

## 4.1 Orthogonalite

Soit  $\langle . \rangle$  une forme bilineaire symetrique.

### Definition 20 (Orthogonalite)

Deux elements  $u, v$  sont orthogonaux si

$$\langle u, v \rangle = 0$$

### Definition 21 (Complement orthogonal)

Soit  $E \subseteq V$ , alors

$$E^\perp = \{u \in V : u \perp e \forall e \in E\}$$

### Proposition 27

Soit  $E \subseteq V$ , alors  $E^\perp$  est un sous-espace de  $V$ .

### Lemme 28

Soit  $K$  un corps de caracteristique differente de 2.

Si  $\langle u, u \rangle = 0$  pour tout  $u \in V$ , alors  $\langle u, v \rangle = 0 \forall u, v \in V$

### Preuve

Soient  $u, v \in V$  :

$$2 \langle u, v \rangle = \langle u + v, u + v \rangle - \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle \quad \square$$

et donc  $\langle u, v \rangle = 0$ .

## Lecture 9: Formes bilineaires

Tue 23 Mar

### Definition 22 (Matrices Congruentes)

Deux matrices  $A, B \in K^{n \times n}$  sont congruentes s'il existe une matrice inversible  $P \in K^{n \times n}$  inversible tel que

$$P^T \cdot A \cdot P = B$$

## 4.2 Orthogonalite

On supposera que  $\langle . \rangle$  est une forme bilineaire symmetrique.

### Definition 23 (Base orthogonale)

Soit  $\{v_1, \dots, v_n\}$  une base de  $V$ .  $B$  est une base orthogonale si  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$   $\forall i \neq j$ .

### Lemme 29

Soit  $V$  de  $\dim V = n$  et  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  une base de  $V$ .  $B$  est orthogonale

si et seulement si la matrice  $A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  est une matrice diagonale.

### Theorème 30

Soit  $\text{char}(K) \neq 2$  et  $\dim V = n < \infty$ .

Alors  $V$  possède une base orthogonale.

### Preuve

Dans le cas  $n = 1$ , le theoreme est trivial.

Si  $n > 1$ , alors on distingue deux cas.

Si  $\langle u, u \rangle = 0$ , la base est trivialement orthogonale.

Sinon, soit  $u \in V$  tel que  $\langle u, u \rangle \neq 0$ .

On complete avec  $v_2, \dots, v_n \in V$  tel que  $\{u, v_2, \dots\}$  est une base de  $V$ .

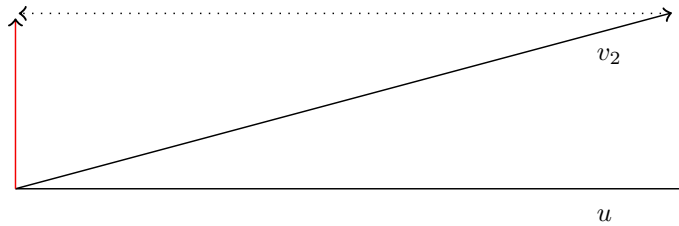


FIGURE 1 – gramschmidt

On construit une nouvelle base definie par

$$\{u, v_2 - \beta_2 u, \dots, v_n - \beta_n u\} := \{u, v'_2, \dots\}$$

Avec  $\beta_i = \frac{\langle \vec{v}_i, u \rangle}{\langle u, u \rangle}$

On remarque que  $u \perp v'_i$  et donc  $u \perp \text{span}\{v'_2, \dots\}$ .

Par hypothese de recurrence, on voit que qu'on peut repeter ce procede pour  $\{v'_2, \dots, v'_n\}$

### 4.3 Matrices congruentes

On dit que  $A \simeq B$  s'il existe  $P \in K^{n \times n}$  inversible tel que

$$P^T A P = B$$

Etre congruent est une relation d'équivalence.

**Lemme 31**

Soit  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  une base de  $V$ .  $V$  possède une base orthogonale si et seulement si  $\exists D$  une matrice diagonale  $\in K^{n \times n}$  tel que  $A_B^{(\cdot)} \simeq D$

**Algorithme pour trouver une matrice diagonale congruente a  $A \in K^{n \times n}$  symétrique**

L'algorithme prend  $n$  iterations.

Après la  $i - 1$  ième iteration  $A$  est transformée en

$$\begin{pmatrix} c_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & c_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & M \end{pmatrix}$$

Où  $M$  est une matrice quelconque.

S'il existe un index  $j \geq i$  tel que  $b_{jj} \neq 0$ , on échange la colonne  $i$  et la colonne  $j$  et la ligne  $i$  et la ligne  $j$ .

Si  $b_{ij} = 0 \forall j \geq i$ , on procède à la  $i + 1$ -ième iteration.

Pour chaque  $j \in \{i + 1, \dots, n\}$  on additionne  $\frac{-b_{ij}}{b_{ii}}$

## Lecture 11: Formes Bilineaires définies positives et Espaces Euclidiens

Tue 30 Mar

### 4.4 Formes Bilineaires symétriques définies positives

Ici,  $V$  sera toujours un espace vectoriel réel.

**Definition 24 (Formes Bilineaires définies positives)**

Une forme bilinéaire  $\langle \cdot \rangle$  est définie positive, si

$$\forall v \in V \setminus \{0\} : \langle v, v \rangle > 0$$

Une f.b.s. définie positive est appelée un produit scalaire.

**Definition 25 (Norme d'un vecteur)**

La longueur (ou norme) d'un vecteur de  $v \in V$  :

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

**Definition 26**

Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est appelé espace euclidien.

**Proposition 32**

Pour  $u \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\|\alpha \cdot u\| = |\alpha| \|u\|$$

**Preuve**

$$\|\alpha \cdot u\| = \sqrt{\langle \alpha u, \alpha u \rangle} = |\alpha| \|u\|$$

□

**Theorème 33 (Theoreme de Pythagore)**

Pour  $v, w \in V$  :, si  $\langle v, w \rangle = 0$ , alors

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

**Preuve**

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle \end{aligned}$$

□

**Proposition 34 (Regle du parallelogramme)**

Pour  $u, w \in V$  :

$$\|u + w\|^2 + \|u - w\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|w\|^2$$

*Sans preuve( facile)*

Soit  $w, v \in V$ , on cherche  $\alpha$  tel que

$$\langle v - \alpha w, w \rangle = 0$$

Donc

$$\alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}$$

On appelle  $\alpha$  la composante de  $v$  sur  $w$  et  $\alpha w$  la projection de  $v$  sur  $w$ .

**Theorème 35 (Inegalite Cauchy-Schwarz)**

Pour tout  $v, w \in V$ ,

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$$

**Preuve**

On considere d'abord le cas special  $\|w\| = 1$ .

Donc,  $\alpha = \langle v, w \rangle$ , le theoreme de pythagore donne

$$\|v\|^2 = \|v - \alpha w\|^2 + \|\alpha \cdot w\|^2 \geq \alpha^2 \cdot \|w\|^2 = \alpha^2 = |\langle v, w \rangle|^2$$

Le cas general donne donc

$$\left\langle v, \|w\| \frac{w}{\|w\|} \right\rangle \leq \|w\|^2 \|v\|^2 \quad \square$$

**Theorème 36 (Inegalite triangulaire)**

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

**Preuve**

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle^2 \\ &= \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \\ &\leq (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned} \quad \square$$

## 4.5 La methode de Gram Schmidt

Pour  $\langle \cdot \rangle$  un produit scalaire, on a

$$\forall v \in V \setminus \{0\}, \langle v, v \rangle \neq 0$$

**Lemme 37**

soit  $V$  un espace euclidien et soient  $v_1, \dots, v_n$  deux-a-deux orthogonaux.  
Soit  $v \in V$ , il existe  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  uniques tel que

$$v - a_1 v_1 - \dots - a_n v_n$$

est orthogonal a chaque  $v_i$

**Preuve**

$$\left\langle v - \sum_{i=1}^n a_i v_i, v_j \right\rangle = \langle v, v_j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, v_j \right\rangle = \langle v, v_j \rangle - a_j \langle v_j, v_j \rangle \quad \square$$

On peut donc poser  $a_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle}$

## Le procede de Gram-Schmidt

Soit  $V$  un espace vectoriel euclidien et  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

Il existe un ensemble libre  $\{u_1, \dots, u_n\}$  tel que

1.  $\langle u_i, u_j \rangle = 0 \forall i \neq j$
2.  $\forall k \in \{1, \dots, n\} :$

$$\text{span} \{v_1, \dots, v_k\} = \text{span} \{u_1, \dots, u_k\}$$

Pour ceci, on itere sur tous les elements de  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , on pose

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1 \\ &\vdots \\ u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 \end{aligned}$$

etc.

Pour  $i \in \{1, \dots, k\} :$

$$u_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle v_i, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} u_j$$

Par induction, on demontre que

$$\text{span} \{v_1, \dots, v_i\} = \text{span} \{u_1, \dots, u_{i-1}, v_i\}$$

Or  $u_i$  est combinaison lineaire des autres elements de la famille.

### Corollaire 38

Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  une matrice de rang-colonne plein.

On peut factoriser  $A$  comme

$$A = A' \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & \mu_{ij} \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Tel que  $A'$  est compose de colonnes 2-a-2 orthogonales pour le produit scalaire standard.

### Preuve

Pour  $a_i$  les colonnes de  $A$ , Gram-Schmidt donne

$$a'_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle a_i, a'_j \rangle}{\langle a'_j, a'_j \rangle} a'_j$$

Donc

$$a_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle a_i, a'_j \rangle}{\langle a'_j, a'_j \rangle} \cdot a'_j + a'_i \Rightarrow A = A' \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & \mu_{ij} \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \square$$



## Lecture 12: ...

Wed 31 Mar

### Definition 27

Soit  $V$  un espace Euclidien, et  $\langle \cdot \rangle$  un produit scalaire.

Une base  $\{u_1, \dots, u_n\}$  orthogonale est appelée orthonormale si  $\|u\|_i = 1 \forall i$ .

### Corollaire 39

Soit  $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$  une matrice de plein rang colonne, alors on peut factoriser  $V = U^* \cdot R$  ou  $U^* \in \mathbb{R}^{m \times n}$  dont les colonnes sont deux-a-deux orthogonales et de norme = 1, et ou  $R$  est une matrice triangulaire superieur

## 4.6 La methode des moindres carres

Soit  $A \cdot x = b$  un systeme lineaire en  $m$  variables sans solution.

On cherche un  $x$  tel que  $\|A \cdot x - b\|$  est minimale. On resout donc

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \|A \cdot x - b\|$$

### Theorème 40

Soit  $V$  un espace euclidien et soient  $v_1, \dots, v_n$  des vecteurs deux-a-deux orthogonaux non-nuls. Soit  $v \in V$  et  $\alpha_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$ , alors

$$\left\| v - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\| \leq \left\| v - \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \right\|$$

pour tout  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$

### Preuve

on a

$$\begin{aligned} \left\| v - \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \right\|^2 &= \left\| \underbrace{v - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i}_{\text{perpendiculaire a tous les } v_i} - \sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) v_i \right\|^2 \\ &= \left\| v - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) v_i \right\|^2 \geq \left\| v - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\|^2 \quad \square \end{aligned}$$

Donc, pour resoudre  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$ , on calcule d'abord une base orthogonale de l'espace engendre par les vecteurs-collone de  $A$ .

Ensuite, on calcule la projection de  $b$ , cad  $\sum_{i=1}^n \frac{\langle b, a_i^* \rangle}{\langle a_i^*, a_i^* \rangle}$ .

Ensuite, on resout  $Ax = proj(b)$  et on trouve un  $x$  proche.

**Theorème 41**

Les solutions du système

$$A^T \cdot Ax = A^T b$$

sont les solutions optimales de  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$

**Preuve**

$x$  est une solution optimale  $\iff A \cdot x = \text{proj}(b)$ , de plus  $\text{proj}(b)$  est le vecteur  $v$  unique dans  $\{A \cdot x : x \in \mathbb{R}^n\}$  tel que  $b - v \perp \text{span}\{A\} = \{A \cdot x : x \in \mathbb{R}^n\}$

Donc

$$A^T Ax = A^T b \iff A^T(Ax - b) = 0 \iff Ax - b \perp \{A \cdot x : x \in \mathbb{R}^n\} \quad \square$$

**4.7 Formes sesquilineaires et produits hermitiens**

Soit  $v = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ , avec  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ .

On définit

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + b_i^2 = \sum_{i=1}^n v_i \overline{v_i}$$

**Définition 28 (Produit Hermitien)**

Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ ,  $\langle \cdot \rangle$  une application, alors on a

- PH1 :  $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle} \forall v, w \in V$
- PH2

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle, \langle w + u, v \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$$

- PH3

$$\forall x \in \mathbb{C}, u, v \in V, \langle xu, v \rangle = x \langle u, v \rangle, \langle u, xv \rangle = \overline{x} \langle u, v \rangle$$

1. Une forme sesquilineaire satisfait PH2, PH3
2. Forme hermitienne satisfait PH1, PH2, PH3
3. Un produit hermitien satisfait PH1, PH2, PH3 et de plus

$$\langle v, v \rangle > 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$$

Le produit hermitien est l'analogue d'un produit scalaire.

**Définition 29 (Matrice hermitienne)**

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est appelée hermitienne si  $A^T = \overline{A}$

**Proposition 42**

Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  de dimension finie et soit  $B$  une base de  $V$ . Une forme sesquilineaire est une forme hermitienne si et seulement si  $A_B^f$  est une matrice hermitienne.

Si  $B, B'$  sont deux bases différentes, alors  $f(v, w) = [v]_B^T A_B^f \overline{[w]_B}$ .

Si  $B'$  est une autre base, et  $P_{BB'}, P_{B'B}$  les matrices de changement de base correspondantes. Alors on a

$$[v_{B'}]^T (P_{B'B})^T A_B^f \overline{P_{B'B} [w]_B}' = f(v, w)$$

On en déduit que

$$A_{B'}^f = (P_{B'B})^T A_B^f \overline{P_{B'B}}$$

**Definition 30 (Matrices Complexes congruentes)**

Deux matrices complexes  $A, B$  sont congruentes complexes, si il existe  $P$  une matrice inversible satisfaisant

$$A = P^T B \overline{P}$$

Comme avant, une base  $B = \{b_1, \dots\}$  est une base orthogonale si et seulement si  $A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  est diagonale.

**Théorème 43**

Soit  $V$  un espace vectoriel complexe et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  une forme hermitienne, alors  $V$  possède une base orthogonale.

On utilise le procédé analogue aux espaces hermitiens.

**Lecture 13: Matrices Symmetriques**

Tue 13 Apr

**Théorème 44 (Theoreme Spectral)**

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symétrique, alors il existe  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthogonale tel que

$$P^T \cdot A \cdot P$$

est diagonale.

Donc  $A$  est congruent à une matrice diagonale et est semblable  $D$ .

**Lemme 45**

Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une matrice hermitienne, alors toutes ses valeurs propres sont réelles.

**Preuve**

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre et  $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  un vecteur propre associe a  $\lambda$ . On va montrer que  $\lambda v^T \bar{v} = \bar{\lambda} v$ .

On a

$$\lambda v^T \bar{v} = v^T A^T \bar{v} = v^T \overline{A} \bar{v} = v^T \bar{\lambda} \bar{v} = \bar{\lambda} v \quad \square$$

**Corollaire 46**

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  resp.  $\mathbb{C}^{n \times n}$  une matrice symmetrique resp., hermitienne.  
Alors  $A$  possede une valeur propre reelle.

**Preuve**

Les valeurs propres de  $A$  sont les racines relles resp. complexes du polynome caracteristique de  $A$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une racine, donc  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  sur  $\mathbb{C}^n$ , par le lemme ci-dessus,  $\lambda$  est reel.

Et donc  $\lambda$  est une valeur propre d'une matrice reelle de  $A$ .  $\square$

Prouvons maintenant le theoreme spectral.

**Preuve**

On demontre le cas reel.

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrique. Il existe  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthogonale tel que  $U^T A U$  est orthogonale.

On procede par recurrence.

Le cas  $n = 1$ ,  $A = (a_{11})$  est clair.

Pour  $n > 1$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre de  $A$  et  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  un vecteur propre associe tel que  $v^T v = 1$ .

Soit  $\{v_1, u_2, \dots\}$  une base de  $\mathbb{R}^n$ .

Avec Gram-Schmidt, on peut supposer que cette base est orthonormale.

Soit  $U$  la matrice donnee par les colonnes  $(u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$ , on considere  $U$

$U^T A U \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ , c'est une matrice symmetrique ( parce que  $A$  est symmetrique).

Par recurrence, il existe une matrice orthogonale tel que  $K^T U^T A U K$  est diagonale et reelle.

Posons  $P = (v, U \cdot K) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$P$  est orthogonale, en effet

$$P^T P = \begin{pmatrix} v^T \\ K^T U^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ U K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^T v & v^T U K \\ K^T U^T v & K^T U^T U K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}$$

Et donc

$$P^T A P = \begin{pmatrix} v^T \\ K^T U^T \end{pmatrix} A (V, U K) \quad \square$$

Or  $v$  est orthogonal a tous les  $u_i$  et donc cette matrice est orthogonale.

## Lecture 14: Formes quadratiques reelles

Wed 14 Apr

### 5 Formes quadratiques reelles et matrices symmetriques reelles

#### Definition 31 (Sphere)

$S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$  est defini comme  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$

#### Definition 32 (Forme Quadratique)

Une forme quadratique est une application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^T A x$ , avec  $A$  une matrice symmetrique<sup>1</sup>

#### Probleme d'optimisation

On veut trouver le maximum

$$\max_{x \in S^{n-1}} x^T A x$$

L'existence du maximum est garantie car  $S^{n-1}$  est compacte et  $x \rightarrow x^T A x$  est continue.

Donc il existe  $x \in S^{n-1} : x^T A x \geq y^T A y \forall y \in S^{n-1}$ .

Par symmetrie, il existe au moins deux solutions optimales sur  $S^{n-1}$ .

#### Lemme 47

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrique et  $v \in S^{n-1}$  une solution optimale. On a

$$A v = \lambda v$$

pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  cad  $A$  possede une valeur propre reelle.

#### Preuve

On suppose que  $A \cdot v \neq \lambda v \forall \lambda \in \mathbb{R}$  ( avec  $v$  une solution optimale du systeme).

$$A \cdot v = \alpha v + \beta w (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Notons que

$$\sqrt{(1-x^2)}v + xw, x \in [-1, 1] \in S^{n-1}$$

Posons

$$g(x) := (\sqrt{1-x^2}v + xw)^T A (\sqrt{1-x^2}v + xw)$$

---

1. La symmetrie n'est pas necessaire, car  $x^T B x = x^T (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B^T)x$

avec  $g(0) = v^T Av$ , il reste à montrer que  $g'(0) \neq 0$ .

On a

$$\begin{aligned} g(x) &= (1 - x^2)v^T Av + \sqrt{1 - x^2}xv^T Aw + x\sqrt{1 - x^2}w^T Av + x^2w^T Aw \\ &= (1 - x^2)v^T Av + 2x\sqrt{1 - x^2}v^T Aw + x^2w^T Aw \end{aligned}$$

Donc

$$g'(0) = 2w^T Aw = 2\beta \neq 0$$

□

### Definition 33 (Matrice Symétrique définie positive/negative)

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symétrique,  $A$  est

- définie positive si  $x^T Ax > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- définie négative si  $x^T Ax < 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- semi-définie positive si  $x^T Ax \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$
- semi-définie négative si  $x^T Ax \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$

### Theorème 48

Une matrice symétrique  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est

- définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont  $> 0$
- définie négative si et seulement si toutes ses valeurs propres sont  $< 0$
- semi-définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont  $\geq 0$
- semi-définie négative si et seulement si toutes ses valeurs propres sont  $\leq 0$

### Preuve

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^T$$

- Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ , alors, en réécrivant  $v = \sum \beta_i p^i$

$$v^T Av = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \lambda_i > 0$$

□

On en déduit facilement les autres points.

### Definition 34 (k-mineur principal)

Soit  $A \in K^{n \times n}$ . On considère la matrice formée par les  $k$  premières lignes et colonnes de  $A$ , notons la  $B$ , le  $k$ -mineur principal est le déterminant de  $B$ .

**Theorème 49**

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice symétrique.

$A$  est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

**Preuve**

Si  $A$  est définie positive, alors  $C_k$  est définie positive (ie. toutes les sous-matrices). On a

$$C_k = P_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix} P_k^T$$

Où on a utilisé la décomposition selon le théorème spectral.

Par le théorème ci-dessus  $\det C_k > 0$

Montrons l'implication inverse.

Supposons maintenant que le déterminant  $\det(C_k) > 0 \forall k \in \{1, \dots, n\}$ .

On veut montrer que  $x^T A x > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

On applique l'algorithme d'orthogonalisation sur  $A$ .

Par récurrence, on a jamais échangé de lignes et de colonnes car sinon un déterminant serait nul.

L'algorithme produit une matrice triangulaire supérieure  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (avec une diagonale contenant des 1) tel que

$$R^T A R = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix} \quad \square$$

On observe donc que  $\det C_k = c_1 \dots c_k$  et donc tous les  $c_i$  sont positifs.

**Lecture 15: Theoreme Spectral**

Tue 20 Apr

**Theorème 50 (Theoreme spectral reel)**

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symétrique c-à-d  $A^T = A$ , alors il existe  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthogonale tel que

$$A = P D P^T$$

Avec  $D$  une matrice diagonale.

Donc  $A$  est semblable et congruente à une matrice diagonale. Pour  $P = (P_1, P_2, \dots)$  les vecteurs colonne de  $P$ ,  $P_1, \dots$  forment une base orthonormale.

male de vecteurs propres de  $A$ , cad

$$\begin{aligned} A \cdot p_i &= PDP^T P_i \\ &= P\lambda_i e_i = \lambda_i P e_i \end{aligned}$$

### Definition 35

Soit  $K \subseteq \{1, \dots, n\}$  et  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , écrivons

$$K = \{l_1, \dots, l_k\} \text{ ou } l_1 < l_2 < \dots < l_k$$

Alors  $A_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ , avec  $a_{k,ij} = a_{l_i, l_j}$ .

### Theorème 51

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symétrique.

$A$  est semi définie positive si

### Preuve

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symétrique et semi définie positive pour  $K \subseteq \{l_1, \dots\}$ .

$A_k$  est semi-définie positive, donc

$$A_K = P^{K^T} D'_k P_K$$

Et donc

$$\det(A_k) > 0$$

□

L'autre implication est identique au theoreme spectral.

### Theorème 52

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symétrique et soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = x^T A x$$

, alors

$$\max_{x \in S^{n-1}} f(x) = \lambda_1$$

et

$$\min_{x \in S^{n-1}} f(x) = \lambda_n$$

sont des valeurs propres qui satisfont

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$$

### Preuve

Si  $P = (p_1, \dots, p_n)$  alors  $\{p_1, \dots\}$  est une base orthonormale de vecteurs propres de  $A$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\|x\|_2^2 = x^T x$  On peut donc réécrire

$$x^T x = \sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2$$



Donc, pour  $x \in S^{n-1}$ , on a

$$\begin{aligned} f(x) &= x^T \sum \beta_i \lambda_i p_i \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \lambda_i \end{aligned} \quad \square$$

**Theorème 53 (Theoreme Min-Max)**

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrique et  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$ . Alors

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \max_{U \subseteq \mathbb{R}^n, \dim(U)=k} \min_{x \in S^{n-1} \cap U} x^T A x \\ &= \min_{U \subseteq \mathbb{R}^n, \dim(U)=n-k} \max_{x \in S^{n-1} \cap U} x^T A x \end{aligned}$$

**Preuve**

$\lambda_k$  est atteint par l'espace  $\text{span}\{p_1, \dots, p_k\}$  et  $p_k^T A p_k = \lambda_k$ . Pour

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i p_i \in \text{span}\{p_1, \dots, p_k\} \cap S^{n-1}$$

Alors

$$x^T A x = \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \lambda_i \geq \lambda_k$$

Donc

$$\min_{x \in S^{n-1}, x \in \text{span}\{p_1, \dots, p_k\}} x^T A x = \lambda_k$$

Il reste a montrer que pour tout  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , on a

$$\dim(U) = k \Rightarrow \min_{x \in S^{n-1}, x \in U} x^T A x \leq \lambda_k \quad \square$$

## Lecture 16: Valeurs Singulieres

Wed 21 Apr

### 5.1 Decomposition en valeurs singulieres

**Theorème 54 (Decomposition en valeurs singulieres)**

Soit  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , il existe des matrices unitaires  $P \in \mathbb{C}^{m \times m}, Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tel que  $A = PDQ$  avec  $D \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{m \times n}$  une matrice diagonale.

**Preuve**

On veut  $A = P \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix} Q$  avec  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$  les valeurs singulieres.

Soit  $u_1, \dots, u_n$  une base orthogonale par rapport au produit hermitien standard

compose de valeurs propres associees a  $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \dots \geq \sigma_r^2 \geq \sigma_{r+1}^2 = \dots = 0$ .  
On definit

$$Q := \begin{pmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{pmatrix}$$

Et soit

$$v_i := \frac{Au_i}{\sigma_i}, \quad i = 1, \dots, r$$

et on complete  $v_1, \dots, v_r$  en une base orthogonale de  $\mathbb{C}^m$ , on va montrer que

$$P := (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_m) \in \mathbb{C}^{m \times m}$$

est unitaire.

Il est clair que  $v_j^* v_j = 1 \forall j \geq r+1$ , sinon, pour  $1 \leq i, j \leq r$ , on a

$$\begin{aligned} v_i^* v_j &= \frac{u_i^* A^*}{\sigma_i} \cdot \frac{A \cdot u_j}{\sigma_j} \\ &= \frac{u_i^* \sigma_j^2 u_j}{\sigma_i \sigma_j} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \end{aligned}$$

Il reste a verifier que

$$(P^* A Q^*)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq r \text{ ou } j > 0 \text{ ou } i \neq j \\ \sigma_i & \text{autrement} \end{cases}$$

Pour  $i > r$  et  $j \leq r$ , on a donc

$$u_i^* A u_j = v_i^* \sigma_j v_j = 0$$

Et finalement, pour  $i \leq j \leq r$ , on a

$$= \frac{u_i^* A^*}{\sigma_i} A u_j$$

□

## 5.2 Pseudo-inverse d'une matrice

### Definition 36 (Pseudo inerse)

Pour une matrice  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , on note

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

ou  $\sigma_i$  sont les valeurs singulieres de  $A$ .

### Remarque

La factorisation en valeurs singulières n'est pas unique.

On va montrer que le pseudo-inverse d'une matrice est unique.

#### Theorème 56

Soit  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , il existe au plus une seule matrice  $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$  qui satisfait les conditions de penrose

- $AXA = A$
- $(A \cdot X)^* = AX$
- $XAX = X$
- $(X \cdot A)^* = XA$

#### Preuve

Supposons que  $X, Y \in \mathbb{C}^{n \times m}$  satisfait les conditions de penrose

$$\begin{aligned} X &= XAX \\ &= XAYAX \\ &= XAYAYAYAX \\ &= (XA)^*(YA)^*Y(AY)^*(AX)^* \\ &= A^*X^*A^*Y^*YY^*A^*X^*A^* \\ &= (AXA)^*Y^*YY^*(AXA)^* \\ &= A^*Y^*YY^*A^* \\ &= (YA)^*Y(AY)^* = YAYAY = YAY \end{aligned} \quad \square$$

#### Theorème 57

Soit  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , alors  $A^+$  vérifie les règles de penrose.

#### Preuve

On vérifie facilement pour  $D$  diagonale

$$AA^*A = PDQQ^*D^*P^*PDQ = PDQ = A \quad \square$$

— idem pour le reste.

## Lecture 17: Valeurs singulières

Tue 27 Apr

$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , avec  $A = PDQ^*$  avec  $D$  diagonale,  $P$  unitaire.

On a défini

$$A^+ = QD^+P^*$$

avec  $D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix}$

### 5.3 Encore des systemes d'equation

On essaie a nouveau de resoudre

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{C}^{m \times n}, b \in \mathbb{C}^m$$

On veut trouver

$$\min_{x \in \mathbb{C}^n} \|Ax - b\|^2$$

On a, entre autre resolu  $A^T Ax = A^T b$ .

On va utiliser la pseudo-inverse de  $A$  pour trouver la solution.

On veut trouver  $x \in \mathbb{C}^n$  la solution optimale tel que  $\|x\|$  est optimale.

#### Theorème 58

Soit  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, b \in \mathbb{C}^m$ , alors  $x = A^+ b$  est une solution optimale de norme minimale parmi les solutions du systeme  $Ax = b$ .

#### Preuve

Soit  $x \in \mathbb{C}^n$  et  $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$  unitaire, alors

$$\|x\|^2 = x^* x = x^* Q^* Q x = \|Qx\|^2$$

On a donc

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{C}^n} \|Ax - b\| &= \min_{x \in \mathbb{C}^n} \left\| PD \underbrace{Qx}_{:=y} - b \right\| \\ &= \min_{y \in \mathbb{C}^n} \|Dy - P^* b\| \\ &= \min_{y \in \mathbb{C}^n} \|Dy - c\| \end{aligned}$$

□

De plus  $y$  est une solution optimale  $\iff y_{r+1} = \dots = y_n = 0$

Et alors,  $x = Q^* y = Q^* D^+ P^* b$  est la solution optimale de norme minimale unique du probleme.

### 5.4 Le meilleur sous-espace approximatif

Etant donne  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n, 1 \leq k \leq n$ .

On veut trouver un sous-espace  $H \subseteq \mathbb{R}^n, \dim H \leq k$  tel que

$$\sum_{i=1}^m d(H, \alpha_i)^2$$

est minimale.

On choisit une base orthonormale de  $H : \{u_1, \dots, u_k\}$ , on peut facilement trouver la projection sur  $U$ , avec

$$proj(a_i) = \sum_{j=1}^k \langle a_i, u_j \rangle u_j$$

Grace au theoreme de pythagore, on a

$$\|a_i\|^2 = \|proj(a_i)\|^2 + d(a_i, H)^2$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \|a_i\|^2 &= \sum_{i=1}^m \|proj(a_i)\|^2 + \sum_{i=1}^m d(a_i, H)^2 \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (u_j^T a_i)^2}_{\text{A maximiser}} + \sum_{i=1}^m d(a_i, H)^2 \end{aligned}$$

On veut trouver un  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  tel que

$$\sum_{j=1}^k u_j^T A^T A u_j$$

avec  $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$ .

On veut maintenant trouver  $H \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\dim H = k$  et avec n'importe quelle base orthogonale tel que

$$\sum_{j=1}^k u_j^T A^T A u_j$$

est maximale.

#### 5.4.1 $k = 1$

On veut trouver

$$\max_{u \in S^{n-1}} u^T A^T A u$$

Avec le theoreme spectrale, on trouve la valeur propre maximale, et alors le sous-espace propre associe est solution. Par recurrence, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k w_j^T A^T A w_j &= \sum_{j=1}^{k-1} w_j^T A^T A w_j + w_k^T A^T A w_k \\ &\leq \sum_{j=1}^{k-1} u_j^T A^T A u_j + u_k^T A^T A u_k \end{aligned}$$

## Lecture 18: Minimisation de la norme de Frobenius

Wed 28 Apr

Etant donne  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , on veut trouver  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tel que  $\text{rang}(B) \leq k$  et

$$\min_{C \in \mathbb{R}^{m \times n}, \text{rang } C \leq k} \|A - C\|_F$$

est atteint a  $B$ .

### Definition 37 (Norme de Frobenius)

Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{i,j}^2}$$

### Definition 38 (Trace)

$A \in K^{n \times n}$ , la trace de  $A$  est definie par

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

### Lemme 59

On a

$$\text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot A)$$

pour toute matrices dans  $K^{n \times n}$

### Preuve

$$\begin{aligned} (AB)_{ii} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \\ \text{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} = \text{Tr}(BA) \end{aligned} \quad \square$$

### Lemme 60

Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , alors

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2$$

ou  $\sigma_i$  sont les valeurs singulieres.

**Preuve**

$$\begin{aligned}
\|A\|_F^2 &= \text{Tr}(A^T A) \\
&= \text{Tr}(Q^T D^T P^T P D Q) \\
&= \text{Tr}(Q^T D^2 Q) \\
&= \text{Tr}(D^2) = \sum \sigma_i^2
\end{aligned}$$

□

On veut donc trouver  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tel que

- $\text{rang} B \leq k$
- $\sum \|a_i - b_i\|^2$  est minimale

Pour  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A = PDQ$ , avec  $P = (v_1, \dots, v_m)$  et  $Q = \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_m^T \end{pmatrix}$ .

Rappel : le span  $\{u_1, \dots, u_k\}$  minimise

$$\sum_{i=1}^m d(\alpha_i, H)^2$$

**Definition 39**

*On definit*

$$A_k = \sum_{i=1}^k v_i \sigma_i u_i^T$$

Clairement  $\text{rang}(A_k) \leq k$ .

**Lemme 61**

*Les lignes de  $A_k$  sont les projections des lignes correspondantes de  $A$  dans le span  $\{u_1, \dots, u_k\}$ .*

**Preuve**

*Soit  $a^T$  une ligne de  $A$ .*

*La projection*

$$\tilde{A}^T = \sum_{i=1}^k (a^T u_i) u_i^T$$

*Alors les projections de toutes les lignes de  $A$  sont*

$$\sum_{i=1}^k A u_i u_i^T = \sum_{i=1}^k \sigma_i v_i u_i^T = A_k$$

**Theorème 62**

Soit  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\text{rang} B \leq k$  alors

$$\|A - A_k\|_F^2 \leq \|A - B\|_F^2$$

**Preuve** Soit  $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_m^T \end{pmatrix}$  et  $A_k = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{a}_m^T \end{pmatrix}$ .

Soit  $H = \text{span}\{b_1, \dots, b_k\}$  sont une base de l'espace engendré par les lignes de  $B$ , alors

$$\|A - B\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \|a_i - b_i\|^2 \geq \sum_{i=1}^m d(a_i, H)^2$$

Soit  $\tilde{H} = \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}$ , alors

$$\sum_{i=1}^m d(a_i, H)^2 \geq \sum_{i=1}^m d(a_i, \tilde{H})^2 = \sum_{i=1}^m \|a_i - \tilde{a}_i\|_F^2$$

□