

# Série 7

David Wiedemann

6 novembre 2020

## 1

Supposons que  $(m, n) = 1$ .

On utilise la propriété du produit universelle pour construire un morphisme entre  $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ .

Soit l'application  $\alpha$  définie par

$$\alpha : k \in \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \mapsto [k]_n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

De même on définit l'application  $\beta$  par

$$\beta : k \in \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \mapsto [k]_m \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

où  $[\cdot]_m$  est la classe de congruence modulo  $m$  d'un élément.

Vérifions que ces applications sont linéaires.

On vérifie facilement que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des morphismes, en effet

$$\alpha(0) = 0$$

car 0 est congru à 0 modulo  $n$ .

Soit  $a, b \in \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ , alors

$$\alpha(a + b) = [a + b]_n = [a]_n + [b]_n$$

où la dernière égalité suit directement de la définition de classe d'équivalence modulo  $n$ .

On vérifie de la même manière que  $\beta$  est linéaire.

Par la propriété du produit universel, il existe donc un morphisme  $\phi$  de  $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$  vers  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ .

De plus, on sait que  $\text{pr}_n \circ \phi = \alpha$  et  $\text{pr}_m \circ \phi = \beta$  où  $\text{pr}_n$  est la projection sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et  $\text{pr}_m$  la projection sur  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ .

Vérifions que  $\phi$  est un isomorphisme.

Car

$$|\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}|$$

Il suffit, par l'exercice 1 de la série 5, de vérifier que  $\phi$  est injective.

Supposons que  $\phi(k) = (0, 0)$  et montrons que ceci implique  $k = 0$ .  
Si  $\phi(k) = (0, 0)$ , alors  $\alpha(k) = 0$  et  $\beta(0)$ . Donc  $[k]_n = 0$  et  $[k]_m = 0$ , donc  $k$  est un multiple de  $n$  et de  $m$ . Car  $n$  et  $m$  sont premiers entre eux, ceci implique qu'il existe  $a$  tel que  $k = anm$ , donc  $k = 0$ .

Supposons maintenant que  $(n, m) \neq 1$ .  
Supposons par l'absurde qu'il existe un isomorphisme  $\phi$  entre  $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ . On sait que les isomorphismes préservent les ordres des éléments, on a donc en particulier

$$o(1) = nm.$$

Ce qui implique

$$o(\phi(1)) = nm$$

Or, posons que  $(n, m) = a$ , alors  $a|nm$  et donc  $\frac{nm}{a}$  est un entier.  
Car  $\frac{nm}{a}$  est un multiple de  $n$ , on trouve que pour tout  $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$\frac{nm}{a} \cdot [k]_n = [0]$$

Cette égalité suit du fait que  $\frac{nm}{a}$  contient tous les facteurs premiers de  $n$  et est donc un multiple de  $n$ .

Par le même argument,  $\forall k \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

$$\frac{nm}{a} \cdot [k]_m = [0]$$

Donc l'ordre de  $\phi(1)$  est borné par  $\frac{nm}{a}$  ce qui est une contradiction au fait que  $\phi$  est bijective.

Donc, il ne peut pas y avoir d'isomorphismes si  $(n, m) \neq 1$ .

## 2

**Théorème 1.** Soit  $A$  un groupe, et  $B \simeq C$  deux groupes isomorphes, alors

$$A \times B \simeq A \times C$$

*Démonstration.* On sait qu'il existe un isomorphisme  $\phi$  entre  $B$  et  $C$ , on peut donc construire un isomorphisme ainsi

$$\begin{aligned} A \times B &\mapsto A \times C \\ (a, b) &\mapsto (a, \phi(b)) \end{aligned}$$

La vérification que cette application est un isomorphisme est immédiate car  $\phi$  est un isomorphisme.  $\square$

On procède par récurrence sur  $r$ .

On sait que le cas  $r = 2$  est vrai par la partie 1. ( Le cas  $r = 1$  est trivialement vrai)

Supposons donc vrai pour  $r$  et montrons pour  $r + 1$ .

On sait que  $(n_r, n_i) = 1$  et  $(n_{r+1}, n_i) = 1$  pour tout  $0 < i < r$ . On en déduit que  $(n_r \cdot n_{r+1}, n_i) = 1$ . Ceci suit directement de la décomposition en nombre premiers, en effet  $n_{r+1}$  et  $n_r$  ne partagent pas de facteurs avec les  $n_i$  et donc  $n_r \cdot n_{r+1}$  non plus.

En posant donc que  $n_r \cdot n_{r+1} = p$ , on trouve

$$\mathbb{Z}/(n_1 \dots n_{r+1})\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/(n_1 \dots n_{r-1}p)\mathbb{Z} \simeq \prod_{i=1}^{r-1} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad (1)$$

$$\simeq \prod_{i=1}^{r-1} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_r n_{r+1}\mathbb{Z} \quad (2)$$

$$\simeq \prod_{i=1}^{r-1} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_{r+1}\mathbb{Z} \quad (3)$$

$$\simeq \prod_{i=1}^{r+1} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} \quad (4)$$

où l'égalité (1) suit de l'hypothèse de récurrence, et l'égalité (3) suit du théorème 1.

La forme de l'isomorphisme ci-dessus est donné par la généralisation de l'isomorphisme donné en 1 à plusieurs entiers, c'est à dire

$$k \in \mathbb{Z}/(n_1 \dots n_r)\mathbb{Z} \mapsto ([k]_{n_1}, \dots, [k]_{n_r})$$