Topologie

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Introduction

Mon 21 Feb

1 Quotients topologiques

Un espace topologique (X, τ) est ecrit X si la topologie est claire.
Le singloton $\{*\}$ est note $*$.
La boule unite de $\mathbb{R}^n$ est notee D^n et la version ouverte sera $int(D)^n$.

1.1 La topologie quotient

But : Construire de nouveaux espaces a l'aide d'espaces connus en identifiant des points.
Soit X un espace, Y un ensemble et $q : X \to Y$ surjective.

Definition 1 (Topologie quotient)
La topologie quotient sur Y est la topologie des $V \subset Y$ tel que $q^{-1}(V)$ est ouvert dans X .

Remarque
q est alors continue et on verifie que c'est une topologie.

Exemple
$X = [0, 1]$ et $Y = (0, 1) \cup \{*\}$ et q l'application qui envoie 0 et 1 sur $*$.
Alors q est surjective et donc Y peut etre muni de la topologie quotient et est homeomorphe a un cercle.
On definit $f : S^1 \to Y : e^{2\pi it} \mapsto t$ si $0 < t < 1$ et $*$ sinon.

Proposition 3
Soit $q : X \to Y$ une application continue, surjective et ouverte, alors q est un quotient.

Proposition 4
Soit $V \subset Y$ un sous-ensemble tel que $q^{-1}(V)$ est ouverte dans X. Comme q est surjective, alors $V = q(q^{-1}(V))$ et c'est un ouvert car q envoie les ouverts sur les ouverts.

Proposition 5
Une composition de quotients est un quotient.

Theorème 6
La topologie quotient est la plus fine qui rend q continue. De plus, pour $g : Y \to Z$, g est continue si et seulement si $g \circ q$ est continue.

Proposition 7

Si $q : X \to Y$ est continue, la preimage d'un ouvert de Y est ouvert dans X. La topologie quotient est celle qui contient le plus d'ouvert possibles. Clairement, si g est continue, alors $g \circ q$ l'est aussi. Si $g \circ q$ est continue, soit $W \subset Z$ un ouvert, alors $(g \circ q)^{-1}(W) = q^{-1}(g^{-1}(W))$ est ouvert et par definition $g^{-1}(W)$ est ouvert dans Y.

Proposition 8

Le quotient d'un compact est compact

> **Preuve**
> *L'image d'un compact est compacte.* □

1.2 Relations d'equivalence

Si $q : X \to Y$ est un quotient, on definit sur X une relation d'equivalence $\sim$ par $x \sim x'$ ssi $q(x) = q(x')$, alors les points de Y sont les classes d'equivalence $[x]$.

> **Definition 2**
> *Si $\simeq$ est une relation d'equivalence sur X, alors $X/\sim$ est l'espace quotient des classes d'equivalence.*

Proposition 9 (Proprietes universelles)

Soit $\sim$ une relation d'equivalence sur X et $f : X \to Z$ tel que $x \sim x' \implies f(x) = f(x')$, alors il existe un unique $\overline{f} : X/\sim \to Z$ tel que $\overline{f} \circ q = f$

> **Preuve**
> *Pour que le triangle commute, on doit poser $\overline{f}([x]) = f(x)$ et l'application est bien definie par hypothese et donc unique.*
> *On sait que $\overline{f}$ est continue ssi $\overline{f} \circ q$ l'est.* □

> **Definition 3**
> *Si $A \subset X$, on pose $x \sim x' \iff x = x'$ ou $x, x' \in A$. Le collapse X/A est l'espace quotient $X/\sim$*

Par exemple $I/\{0, 1\}$.

Exemple

$$D^n/\partial D^n = D^n/S^{n-1} = S^n$$

Pour deux espaces bien connus, pointes (X_1, x_1) et (X_2, x_2), on peut construire un nouvel espace en identifiant x_1 et x_2.

Definition 4 (Reunion disjointe)
Soit I un ensemble, X_α un espace pour chaque $\alpha \in I$.
La reunion disjointe $\bigcup X_\alpha$ est l'ensemble $\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \times \{\alpha\}$ dont la topologie est engendree par les sous-ensemble de la forme $U_\alpha \times \{\alpha\}$

Definition 5
Soit I un ensemble et pour tout $\alpha \in I$, (X_α, x_α) un espace pointe.
Le wedge $\bigvee_\alpha X_\alpha$ est le collapse de la reunion disjointe ou on identifie les points de base

Definition 6
Soit X un espace. Le cylindre $Cyl(X)$ est $X \times I$ et le cone CX est le collapse du cylindre a la base.

1.3 Separation et quotients

On definit sur $\mathbb{R} \times \{0;1\}$ une relation d'equivalence $\sim$ par $(x,0) \sim (x,1)$ si $x \neq 0$.
Le quotient est la droite a deux origines dont on ne peut separer les deux origines $(0,1)$ et $(0,0)$ par des ouverts.
Regardons le graphe de $\sim$ dans $\mathbb{R} \times \{0;1\} \times (\mathbb{R} \times \{0,1\})$ (ie. une copie de 4 plans)

Proposition 11
Si $X/\sim$ est separe, alors le graphe de $\sim$ dans $X \times X$ est ferme.

Preuve
La preimage de $\Delta \subset X/\sim \times X/\sim$ par $q \times q$ est $\Gamma_\sim$.
Comme Δ est ferme, sa preimage aussi. □

Lecture 2: Conditions de Separation

Sat 26 Feb

1.4 Conditions de separation du quotient

On donne une condition necessaire et une condition suffisante pour que le quotient soit separe

Proposition 12
Soit $\sim$ une relation d'equivalence sur un espace X. Si $X/\sim$ est separe, le graphe Γ de la relation est ferme dans $X \times X$

Preuve
Si $X/\sim$ est separe, par un lemme, la diagonale $\Delta \subset X/\sim \times X/\sim$ est ferme.

Considerons $q \times q : X \times X \to X/\sim \times X/\sim$. Cette application est continue et donc $(q \times q)^{-1}(\Delta)$ est un ferme de $X \times X$. Or cette preimage est l'ensemble des paires de points $(x, y) \in X \times X$ tq $q(x) = q(y) \iff x \sim y$. $\square$

On donne maintenant une condition suffisante permettant de conclure qu'un quotient est separe.

Proposition 13
Soit $\sim$ une relation d'equivalence sur un espace X separe. Si $q^{-1}(q(x))$ est compact pour tout point $x \in X$ et de plus que pour $F \subset X$ ferme $q^{-1}(q(F))$ est ferme, alors le quotient est separe.

Preuve
Soit $\overline{x} = q(x)$ et $\overline{y} = q(y)$ deux points distincts de $X/\sim$.
Les saturations $q^{-1}(\overline{x}), q^{-1}(\overline{y})$ sont des compacts par hypothese.
Comme X est separe, on peut separer des compacts avec des ouverts disjoints U et V.
On a donc

$$q^{-1}(\overline{x}) \subset U, q^{-1}(\overline{y}) \subset V \text{ et } U \cap V = \emptyset$$

Posons $E = X \setminus U, F = X \setminus V$ deux fermes de X.
Par hypothese, les saturations $q^{-1}(q(E))$ et $q^{-1}(q(F))$ sont fermes. Ainsi $U' = X \setminus q^{-1}(q(E))$ et $V' = X \setminus q^{-1}(q(F))$ sont des ouverts. On observe que $E \subset q^{-1}(q(E)), F \subset q^{-1}(q(F))$, alors $U' \subset U, V' \subset V$.
De plus $q^{-1}(q(x)) \subset U'$ et $q^{-1}(q(y)) \subset V'$.
Il reste a montrer que $q(U')$ et $q(V')$ sont ouverts dans $X/\sim$ et disjoints.
Pour le premier point, il suffit de verifier que $q^{-1}(q(U'))$ est ouvert dans X.
On pretend que $q^{-1}(q(U')) = U'$.
En effet, $U' \subset q^{-1}(q(U'))$ est toujours vrai, il faut donc montrer l'inclusion inverse.
Soit $u \in q^{-1}(q(U'))$, donc $q(u) \in q(U')$. Donc $q(u) \notin q(E)$ et donc $u \in U'$
Le meme resultat est vrai pour V'.

Il faut donc finalement encore montrer que $q(U')$ et $q(V')$ sont des voisinages ouverts, de $\overline{x}$ et $\overline{y}$ disjoints.
Supposons qu'il existe $u' \in U', v' \in V'$ tel que $q(u') = q(v')$. Alors $u' \in q^{-1}(q(v')) \subset q^{-1}(q(V')) = V'$.
Donc $U' \cap V' \neq \emptyset$, contradiction. $\square$

Lecture 3: Groupes topologiques

Mon 28 Feb

Corollaire 14
Soit $A \subset X$ un sous-espace compact d'un espace X separe. Alors le collapse $\mathfrak{X}A$ est separe.

Preuve
Il suffit de verifier les proprietes du theoreme.
Soit $\overline{x} \in \mathfrak{X}A$.
Si $x \in A, q^{-1}(x) = A$ est compact. Si $x \notin A, q^{-1}(\overline{x}) = \{x\}$ qui est compact.
Soit F un ferme de X, alors si $F \cap A = \emptyset$, on a que $q^{-1}(q(F)) = F$ ferme, sinon $F \cap A \neq \emptyset$ et alors

$$q^{-1}(q(F)) = F \cup A$$

Comme A est compact et X separe, alors A ferme. $\square$

Exemple
Soit $\sim$ une relation d'equivalence sur $\mathbb{R}^2$ defini par $(x,y) \sim (x',y') \iff (x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2$.
Alors

$$\mathbb{R}^2\sim$$

est un tore, separe, or la proposition ne s'applique pas car $q^{-1}(0,0) = \mathbb{Z}^2$.

Definition 7 (Espaces projectifs)
L'espace projectif reel $\mathbb{R}P^n$ est le quotient de S^n par la relation antipodale $x \sim y \iff x = \pm y$ pour $x, y \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Exemple

— $\mathbb{R}P^0 = \mathfrak{S}^0\sim = *$, $\mathbb{R}P^1 = \mathfrak{S}^1\sim \simeq S^1$.

— *De plus $\mathbb{R}P^2 = S^2/\sim$ est le plan projectif*

Proposition 17
$\mathbb{R}P^n$ est compact et separe

Suit immediatement des propositions.
L'analogue complexe donne

Definition 8 (Espace projectif complexe)
L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ est le quotient de $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par la relation $x \sim y \iff \exists \alpha \in S^1$ tel que $x = \alpha y$.

De meme, pour les quaternions $\mathbb{H}$, on peut definir $\mathbb{H}P^n$, pour les octonions on peut construire $\mathbb{O}P^0, \mathbb{O}P^1 \simeq S^8, \mathbb{C}P^2$

1.5 Quotients par des actions de groupe

Definition 9 (Groupe topologique)
Un groupe topologique est un groupe G tel que les applications de multiplication $\mu : G \times G \to G$ et l'inverse $\iota : G \to G$ sont continues.

Tout groupe peut etre vu comme un groupe topologique discret.

Exemple
Le cercle unite $S^1 \subset \mathbb{C}$ muni de la multiplication complexe est un groupe topologique

Remarque
Les seules spheres qui sont des groupes topologiques sont S^0, S^1, S^3

Lemme 20
Si $H < G$ est un sous-groupe d'un groupe topologique G, la topologie induite en fait un groupe topologique.

Definition 10
Une action d'un groupe topologique G sur un espace X est une application $\mu : X \times G \to X$ telle que

$$\mu(x, 1_G) = x \forall x \in X \text{ et } \mu(x, gg') = \mu(\mu(x, g), g')$$

Definition 11
Soit μ une action de G sur X, l'espace des orbites $\mathfrak{X}G$ et l'espace quotient de X par la relation $x \sim y \iff \exists g \in G$ tel que $y = \mu(x, g)$

Remarque
Si $H < G$ est un groupe topologique, alors H agit sur G par multiplication a droite et $\mathfrak{G}H$ est l'espace des orbites gH. Si H est un sous-groupe normal, ce quotient est un groupe.

Proposition 22
Soit μ une action d'un groupe topologique G sur un espace X, alors

1. *$q : X \to \mathfrak{X}G$ est ouverte*
2. *Si X est compact, le quotient est compact*
3. *Si X et G sont compact et separe, alors $\mathfrak{X}G$ aussi.*

Preuve
Soit $U \subset X$ *ouvert,* $q(U)$ *est ouvert car* $q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{g \in G} U \cdot g$ *et* $U \cdot g$ *est ouvert car la translation est continue et est meme un homeomorphisme.*
La propriete 2 est immediate.

On considere $X \times X \times G \to X \times X$ *en envoyant* $(x, y, g) \mapsto (x, yg)$*, cette application est continue.*
Le graphe Γ *de la relation definie par* μ *est l'image de* $\Delta \times G$*.*
Comme X *est separe,* Δ *est ferme donc compact et* G *est compact.*
Ainsi Γ *est compact dans* $X \times X$ *separe donc* Γ *est ferme.*
Soient xG *et* yG *deux orbites differentes, ie.* $(x, y) \notin \Gamma$*.*
Il existe donc des ouverts $x \in U, y \in V$ *tel que* $U \times V \cap \Gamma = \emptyset$*.*
Comme q *est ouverte,* $q(U), q(V)$ *sont des voisinages ouverts des orbites* xG *et* yG *respectivement. On conclut en remarquant que ces images sont disjointes.*
Sinon on aurait zG *commun, ie.* $zg \in U, zg' \in V$ *pour* $g, g' \in G$ *et alors* $(zg, zgg^{-1}g') \in \Gamma \cap (U \times V)$ □

1.6 $SO(n)$

Proposition 23
Soit G *compact et* X *separe. Soit* μ *une action transitive de* G *sur* X*.*
Alors, si G_x*, alors*

$$\mathfrak{G} G_x = X$$

pour tout $x \in X$*.*

Preuve
On definit $\mu_x : G \to X$ *envoyant* $g \mapsto xg$*, continue.*
On observe que μ_x *envoie* G_x *sur* x *et par transitivite,* μ_x *est surjective.*
Par la propriete universelle du quotient, μ_x *passe au quotient.*
$\bar{\mu}_x$ *est une bijection continue. C'est un homeo car* $\mathfrak{G} G_x$ *est compact,* X *separe.* □

Lecture 4: Attachements de Cellules

Mon 07 Mar

1.7 Recollements

On construit de nouveaux espaces a l'aide de pieces plus simple.
On se donne $f : A \to X, g : A \to Y$ deux applications. On recolle X et Y le long de A

Definition 12 (Recollement)
Le recollement de X *et* Y *le long de* A *est le quotient de* $X \coprod Y$ *par la relation d'equivalence engendree par* $f(a) \sim g(a) \forall a \in A$

Remarque
Il ne suffit pas d'identifier $f(a) \sim g(a)$ pour que la relation soit une relation d'equivalence.
Pour garantir la transitivite, on a des zigszags d'equivalence $f(a) \sim g(a) = g(b) \sim f(b) = f(c) \sim g(c) \dots$

Exemple
Si $A = *$, $f(*) = x_0 \in X, g(*) = y_0 \in Y$, alors le recollement $X \cup_* Y$ est le wedge $X \vee Y$

On notera le recollement $X \cup_A Y$.
Si $q : X \coprod Y \to X \cup_A Y$ est le quotient, alors l'inclusion $i_1 : X \to X \coprod Y$ induit $i = q \circ i_i : X \to X \cup_A Y$ et de meme pour l'inclusion de Y.

Proposition 26
Le recollement $X \cup_A Y$ est le pushout de $Y \leftarrow A \to X$.

Preuve
On doit montrer l'existence et l'unicite de θ.
Puisque chaque element de $X \cup_A Y$ admet un representant dans X ou Y, on doit poser $\theta([x]) = \alpha(x) \forall x \in X$ et $\theta([y]) = \beta(y) \forall y \in Y$.
On montre l'existence.
Posons $\Theta : X \coprod Y \to Z$ l'application determinee par α et β.
On verifie que Θ est compatible avec $\sim$. Soit $a \in A$, alors $\Theta(f(a)) = \alpha(f(a)) = \beta(g(a)) = \Theta(g(a))$.
Ainsi Θ passe au quotient et induit θ, qui est donc bien continue. $\square$

Des maintenant, on suppose que $g : A \subset Y$ est l'inclusion d'un sous-espace ferme.

Lemme 27
Soit $C \subset Y$, alors la saturation de C est

$$f(C \cap A) \coprod (C \cup f^{-1} \circ f(C \cap A))$$

Preuve
On va regarder ce qui se passe pour tout $c \in C$.
Si $c \notin A$, alors $q^{-1}(q(c)) = \{c\}$, sinon $q^{-1}(q(c))$ contient $f(c) \in X$ et $f^{-1}(f(c)) \subset Y$ $\square$

Lemme 28
Si $C \subset X$, $q^{-1}(q(C)) = C \coprod f^{-1}(C) \subset X \coprod Y$

Preuve
Comme ci-dessus, si $c \in C$ *n'est pas dans l'image de* f *, on a* $q^{-1}(q(c)) = \{c\}$*,*
sinon on a $c \in X$ *et* $f^{-1}(c) \subset A \subset Y$ $\square$

Proposition 29
Soient X *et* Y *deux espaces separes,* $g : A \subset Y$ *l'inclusion d'un compact, alors* $X \cup_A Y$ *est separe.*

Preuve
On observe que $X \coprod Y$ *est separe. Avant d'appliquer le critere de separabilite, on montre que l'application quotient est fermee. Comme un ferme de* $X \coprod Y$ *est la reunion disjointe de deux fermes on a deux cas.*
Si $C \subset X$ *ferme, alors* $q(C)$ *est ferme* $\iff$ $q^{-1}(q(C))$ *est fermee. Par le lemme ci-dessus,*

$$q^{-1}(q(C)) = C \coprod f^{-1}(C)$$

qui sont fermes.
Si $C \subset Y$*, alors* $q^{-1}(q(C)) = f(C \cap A) \coprod (C \cup f^{-1}(f(C \cap A)))$ $\square$

On a $f(C \cap A)$ compact et donc ferme puisque Y est separe.
Pour conclure, on verifie les deux conditions du critere.
Pour conclure, on verifie les deux conditions du critere, la saturation d'un ferme est fermee grace aux preparatifs.
Soit $z \in X \coprod Y$, on doit montrer que $q^{-1}(q(z))$ est compact, les lemmes ci-dessus permettent de conclure parce que si $z = a \in A, f^{-1}(f(a))$ est un ferme d'un compact et est donc compacte.

1.8 Attachement de cellules

Ici $g : A \subset CA = {A \times I}/{A \times 1}$.
Soit $f : A \to X$, le recollement $X \cup_A CA$ aussi note $X \cup_f CA$ est appele attachement d'une A-cellule sur X le long de f.
Si $A = S^{n-1}$ alors cet attachement est celui d'une n-cellule

Remarque
$CS^{n-1} \simeq D^n$*, on note* $X \cup_f CS^{n-1} = X \cup_f e^n$ *ou* $X \cup_f D^n$ *et on appelle* $e^n \simeq D^n$ *une* n*-cellule (fermee.)*

Proposition 31
Si X *est separe et* A *est compact et separe, alors* $X \cup_f CA$ *est separe.*
Si en plus X *est compact*

Preuve
Le premier point suit de la proposition precedente car CA *est separe, le 2eme point suit du critere de compacite car* $X \coprod Ca$ *est compact.* $\square$

Definition 13 (Suspension)
La suspension de A est le quotient $A \times I \big/ (a,0) \sim (a',0)$ *et* $(a,1) \sim (a',1)$

Lecture 5: Homotopies et groupe fondamental

Sat 12 Mar

2 Homotopies et Groupe Fondamental

2.1 Homotopie

Definition 14 (Homotopie entre applications)
Soient $f, g : X \to Y$ des applications. On dit que f et g sont homotopes et on note $f \simeq g$ s'il existe une application $H : X \times I \to Y$ tel que $H(-,0) = f$ et $H(-,1) = g$.
On appelle H une homotopie.

Proposition 32
La relation $\simeq$ est une relation d'equivalence.

Preuve
Reflexivite

Suit du fait qu'on peut definir une homotopie constante.

$$H : X \times I \to Y : (x,t) \mapsto f(x)$$

Symetrie

La symetrie suit du fait qu'on peut parcourir une homotopie dans l'autre sens.
Ainsi, soit $H : X \times I \to Y$ une homotopie entre f et g. On pose

$$G : X \times I \to Y : (x,t) \mapsto H(x, 1-t)$$

Transitivite

Supposons que $H : X \times I \to Y, G : X \times I \to Y$ sont des homotopies, $f \simeq g \simeq h$. On construit une homotopie $K : X \times I \to Y$ entre f et h

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} H(x,2t) \ si\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) \ si\ \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

On voit que K est continue et montre que $f \simeq h$. □

Definition 15 (Classes d'homotopie)
On note $[X, Y]$ *l'ensemble des classes d'homotopies d'applications* $f : X \to Y$.
C'est donc $C(X,Y)/\simeq$.

Lecture 6: Homotopies

Mon 14 Mar

Definition 16 (Espaces Homotopes)
Deux espaces X *et* Y *sont homotopes ou homotopiquement equivalent, note* $X \simeq Y$*, s'il existe* $f : X \to Y$ *et* $g : Y \to X$ *tel que*

$$g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X \text{ et } f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$$

On dit que f *et* g *sont des equivalences homotopiques et qu'elles sont inverses homotopiques l'une de l'autre.*

Proposition 33

$$CX \simeq *$$

Preuve
Posons $CX = X \times I/X \times 0$.
On pose $f : * \to CX$ *par* $f(*) = [x, 1]$ *et on prend* $g : CX \to *$.
On a $g \circ f = \mathrm{Id}_*$*, il reste a voir que* $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_{CX}$*. On construit une homotopie* $H : CX \times I \to CX$*, defini par*

$$H([x,t], s) \mapsto [x, ts]$$

C'est une application (trivialement bien definie) et c'est une homotopie entre $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_{CX}$ □

Remarque
Si f *et sont des applications pointees* $(X, x_0) \to (Y, y_0)$ *qui sont homotopes au sens non pointe, il est faux en general que* $f \simeq_* g$ *au sens pointe.*
Par exemple $f, g : S^1 \to S^1 \bigvee S^1$, f *est donnee par* a *et* g *est donnee par* $b \star a \star b^{-1}$ *(concatenation).*
On a que $f \simeq g$ *pour* $f_t : S^1 \to S^1 \bigvee S^1$ *donne par* $b|_{[1-t,1]} \star a \star \bar{b}|_{[0,t]}$

2.2 Attachement de cellules

But : $f \simeq g : A \to X$, alors

$$X \cup_f CA \simeq X \cup_G CA$$

Proposition 35
Si $f, g : A \to X$ sont homotopes, alors $X \cup_f CA \simeq X \cup_g CA$

Preuve
Pour comparer les deux espaces $Y = X \cup_f CA$ et $Y' = X \cup_g CA$, on construit des applications $h : Y \to Y'$ et $k : Y' \to Y$.
On definit $h : Y \to Y'$ par la propriete universelle du pushout.
On choisit $\iota' : X \to Y'$ l'application donnee par la construction de Y'.
On pose

$$\alpha : CA \to Y'[a, t] \qquad \mapsto \begin{cases} H(a, 2t) \text{ si } t \leq \frac{1}{2} \\ [a, 2t-1] \text{ si } t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si $t = 0$, alors $H(a, 0) = f(a)$ donc le diagramme commute.
Si $t = \frac{1}{2}, H(a, 1) = g(a)$. On construit k comme h, mais avec $H(-, 1-t)$.
On doit montrer que $k \circ h \simeq \mathrm{Id}_Y$ (et de meme $h \circ k \simeq \mathrm{Id}_{Y'}$) □

Corollaire 36
Si $f, g : S^{n-1} \to X$ et $f \simeq g$, alors $X \cup_f e^n \simeq X \cup_g e^n$.

Corollaire 37
Si $f : A \to X$ est homotope a c_x constante, alors $X \cup_f CA \simeq X \bigvee \sum A$

2.3 Homotopie et π_0

Soit $S_0 = \{\pm 1\}$ sphere unite de $\mathbb{R}$.
On etudie les applications pointees de $(S_0, 1) \to (X, x_0)$. Ainsi $f(1) = x_0$ et $f(-1) = x$ abritraire.
Deux telles applications f donnee par x et f' donee par x' sont homotopes (au sens pointe) s'il existe une homotopie pointee

$$H : S^0 \times I \to X$$

H est donc simplement donne par $H(-1, t)$, un chemin dans X de x vers x'.
Donc x et x' sont dans la meme composante connexe par arcs.

Proposition 38
L'ensemble $\pi_0 X$ des composantes connexes par arcs est en bijection avec $[S_0, X]_*$

2.4 Invariance Homotopique

Soit $f : X \to Y$, elle induit une application

$$f_* : [A, X] \to [A, Y]$$

$$[g] \mapsto [f \circ g]$$

Preuve
On veut montrer que l'application ci-dessus est bien definie.
Si $g \sim g'$ via l'homotopie G, alors $f \circ g \simeq f \circ g'$ via $f \circ G$ □

Proposition 39
Si $f \simeq f' : X \to Y$, alors $f_* = f'_*$.

Preuve
On choisit $H : X \times I \to Y$ une homotopie entre $H(-, 0) = f$ et $H(-, 1) = f'$.
On veut montrer que $f \circ g \simeq f' \circ g$.
On construit $G : A \times I \to X \times I \to Y$ en envoyant

$$(a, t) \mapsto (g(a), t) \mapsto H(g(a), t)$$ □

Corollaire 40
Si $X \simeq Y$, alors $[A, X] \simeq [A, Y]$ comme ensembles.

Preuve
On a $f : X \to Y$ et $f' : Y \to X$ inverses homotopes l'une de l'autre. Alors $[A, X] \to [A, Y] \to [A, X]$ □

Lecture 7: Groupe Fondamental

Mon 21 Mar

2.5 Groupe Fondamental

Un lacet

$$\alpha : I \to X$$

est une application satisfaisant $\alpha(0) = x_0 = \alpha(1)$ ce qui signifie qu'il existe une application induite

$$\overline{\alpha} : S^1 \to X$$

Et on note alors

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1 X = [(S^1, 1), (X, x_0)]$$

$\pi_1 X$ a une structure de groupe donnee par la concatenation de lacets $\alpha \star \beta$

Definition 17 (Pinch and Fold)
L'application pinch

$$pinch : \sum A = {}^{A \times I}\!/\!_{\sim} \to {}^{\sum A}\!/\!_{A \times \frac{1}{2}} \simeq \sum A \vee \sum A$$

Definition 18 (Fold)
Le pliage est une application

$$\nabla : X \vee X \to X$$

definie par la propriete universelle du pushout du diagramme $X \leftarrow * \to X$ *avec le cone* $\mathrm{Id}_X : X \to X$

La concatenation de deux lacets $\alpha, \beta : S^1 \to X$ est representee par

$$\alpha * \beta : S^1 \xrightarrow{\text{pinch}} S^1 \vee S^1 \xrightarrow{\alpha \vee \beta} X \vee X \xrightarrow{\nabla} X$$

On a vu que la concatenation equipe $[S^1, X]_*$ d'une structure de groupe.
L'associativite du groupe fondamental revient a dire que le diagramma suivant commute : A REMPLIR

En fait le groupe fondamental π_1 est un foncteur $\top_* \to \mathrm{Gr}$, des espaces pointes vers les groupes

Proposition 41
Une application pointee $f : X \to Y$ *induit un homomorphisme de groupes* $f_* : \pi_1 X \to \pi_1$

Preuve
On sait que la postcomposition avec f *induit une application* $f_* : [S_1, X]_* \to [S_1, Y]_*$.
On montre que c'est un homomorphisme.
Soient $\alpha, \beta : S^1 \to X$, *pointees, alors le diagramme suivant commute A REMPLIR*

On a que 1 *et* 2 *commutent et 3 commute aussi par la propriete universelle* $\square$

On souhaite calculer $\pi_1(X \times Y)$, on note $C_*(S^1, X)$ l'ensemble des applications pointees $\alpha : S^1 \to X$.
Le groupe $\pi_1(X)$ en est un quotient $[S^1, X]_* = C_*(S^1, X)/_{\simeq}$.
La propriete universelle du produit est qu'une application $\omega : S^1 \to X \times Y$ est donnee par ses projections $p_1 \circ \omega$ et $p_2 \circ \omega$, ie.

$$\begin{aligned} F : C_*(S^1, X) \times C_*(S^1, Y) &\to C_*(S^1, X \times Y) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (\omega : S^1 \to X \times Y) \end{aligned}$$

est une bijection d'inverse

$$G : C_*(S^1, X \times Y) \to C_*(S^1, X) \times C_*(S^1, Y)$$

donne par la projection.

Proposition 42
Le foncteur π_1 preserve les produits.

Preuve
Les bijections F et G passent au quotient.
On montre que si $\alpha \simeq \alpha', \beta \simeq \beta'$, alors $F(\alpha, \beta) \simeq F(\alpha', \beta')$ et de meme, si $\omega \simeq \omega'$, alors la postcomposition par p_i donne des applications homotopes.
La compatibilite avec la structure de groupes vient du fait que G est definie par $(p_1)_*$ et $(p_2)_*$ sur les deux composantes. $\square$

2.6 Surfaces

Definition 19 (Surface)
Une surface S est un espace topologique connexe par arcs, compact, sans bord tel que tout point $s \in S$ admet un voisinage ouvert U homeomorphe a D^2 avec $\partial U \simeq S^1$

Definition 20 (Somme connexe)
Soient S et T deux surfaces, la somme connexe $S\#T$ est la surface obtenue en choisissant $s \in S, t \in T$, des voisinages $s \in U \simeq D^2$ et $t \in V$ et un homeomorphisme $f : \partial U \to S^1 \to \partial V$ et en recollant

$$S\#T = {}^{(S \setminus U) \coprod}\!/_{x \simeq f(x)} \quad \forall x \in \partial U$$

Remarque
$S\#T$ est bien defini (sans preuve), de plus

$$T\#S^2 \simeq T$$

Exemple
$T^2\#T^2$ est une surface de genre 2, un tore a deux trous.

Lecture 8: Tore a deux trous

Mon 28 Mar

Exemple
Posons $T = S = T^2$, on construit $T^2\#T^2$, un tore a deux trous.
$T^2 = {}^{I \times I}\!/_{\sim} = {}^{\mathbb{R}^2}\!/_{\mathbb{Z}^2}$.
On va choisir des points s, t dans S et T respectivement de coordonnees $(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$ et $(\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$.
On choisit U et V comme deux goutes autour de s respectivement V.
Le quotient du pentagone par $A \sim A'$ donne un espace homeomorphe a $I \times I \setminus U$.

Lecture 9: Theorie combinatoire des groupes

Mon 28 Mar

2.7 Bouteille de Klein

Soit K la bouteille de Klein, quotient de I^2.
On comprend que K s'ecrit comme

$$K = (S^1_a \vee S^1_b) \cup_{abab^{-1}} e^2$$

On decoupe $I \times I$ le long de deux segments verticaux le long de $(\frac{1}{3}, t)$ et $(\frac{2}{3}, t)$
Ainsi, K est un quotient de trois bandes verticales, et aussi de deux bandes A_2 et ${A_1 \coprod A_3}/{b' \sim b''}$.

3 Theorie Combinatoire des Groupes

But : Decrire et manipuler des groupes de maniere agreable pour pouvoir construire des pushouts.

3.1 Groupes libres

Exemple
Le groupe ayant un seul generateur a, sujet a aucune relation autre que les axiomes de groupe est le groupe $\{a^n | n \in \mathbb{Z}\} / a^0 = 1 \simeq \mathbb{Z}$.
On observe que pour tout groupe G $\hom_{\mathrm{Gr}}(F(a), G) \simeq \hom_{\mathrm{Set}}(\{a\}, UG)$.

Definition 21 (Groupe libre)
Soit I un ensemble, le groupe libre $F(I)$ a I generateur est obtenu en associant a chaque indice $\alpha \in I$ un generateur $x_\alpha \in F(I)$.
Tous les mots sont obtenus par concatenation de x_α^n pour $n \in \mathbb{Z}$ avec les identifications $x_\alpha^0 = 1, 1 \cdot x_\alpha = x_\alpha = x_\alpha \cdot 1$ et $x_\alpha x_\alpha^{-1} = 1$

De la construction de $F(I)$, on comprend qu'un homomorphisme $\phi : F(I) \to G$ est determine et meme equivalent a la donnee des images $g_\alpha = \phi(x_\alpha)$.
Ces isomorphismes etant naturels, on a que

Proposition 47
Le foncteur $F(-)$ est adjoint a gauche de U.

Le groupe libre abelien est un quotient de $F(a,b)$ via $\phi : F(a,b) \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ determine par $\phi(a) = (1,0)$ et $\phi(b) = (0,1)$.
$\ker \phi$ contient $aba^{-1}b^{-1} = [a,b]$, ainsi, il contient aussi $[a,b]^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$ qui forment un sous-groupe cyclique infini dans $F(a,b)$.
Cependant, ce sous-groupe n'est pas normal et en fait $\ker \phi$ est le sous-groupe

normal engendre par $[a, b]$.

3.2 Presentations

Lemme 48
Tout groupe est quotient d'un groupe libre.

Preuve
Soit G un groupeet $\{g_\alpha | \alpha \in I\}$ un ensemble de generateurs (par exemple tous les $g \in G$).
On definit $\phi : F(I) \to G : x_\alpha \mapsto g_\alpha$, alors ϕ est surjective. □

Definition 22
Soit $\phi : F(I) \to G$ un homomorphisme surjectif. Un element de $\ker \phi$ represente par un mot r_β en les generateurs x_α est un relateur.
Pour un choix de generateurs, $\beta \in J$ de $\ker \phi$ comme sous-groupe normal de $F(I)$ on appelle $\langle x_\alpha, \alpha \in I | r_\beta, \beta \in J\rangle$ une presentation de G.
Chaque relateur correspond a une relation $r_\beta = 1$ dans le quotient de $F(I)$

Autrement dit G est isomorphe a ce quotient.

3.3 Graphes de Cayley

On cherche a representer geometriquement un groupe donne par une presentation.

Definition 23 (Graphe de Cayley)
Soit $G = \langle x_\alpha | r_\beta\rangle$, le graphe de Cayley $\Gamma(G, \{x_\alpha\})$ est le graphe oriente et colore dont les sommets sont $g \in G$ et les aretes relient g et gx_α, oriente de g vers gx_α, de couleur α.

Remarque
Comme espace topologique, ce graphe est un quotient d'intervalles, un pour chaque arete, et on identifie les sommets a l'element du groupe voulu.

Lecture 10: Amalgamations

Mon 04 Apr

3.4 Produits libres

Soit $G = \langle x_\alpha | r_\beta \rangle$ et $H = \langle y_\gamma | s_\delta \rangle$, on forme le produit libre

$$G * H = \langle x_\alpha, y_\gamma | r_\beta, s_\delta \rangle$$

Proposition 50
Le produit libre $G * H$ est le coproduit de G et H dans la categorie des groupes, ie. $\hom(G * H, M) \simeq \hom(G, M) \times \hom(H, M)$ pour tout groupe M.

Preuve
Soit $G \hookrightarrow G * H \hookleftarrow H$.
Soit $\omega : G * H \to M$, alors on peut lui associer $\omega \circ \iota$ et $\omega \circ j$.
Conversement, etant donne $\phi : G \to M$ et $\psi : H \to M$, montrons que $\exists! \omega : G * H \to M$ tel que $\omega \circ \iota = \phi$ et $\omega \circ j = \psi$.
Pour l'existence, on definit $\tilde{\omega} : F(x_\alpha, y_\gamma) \to M$.
Comme $\phi(r_\beta) = 1 = \psi(s_\delta)$, $\tilde{\omega}$ passe au quotient et induit une application $\omega : G * H \to M$.
L'unicite de ω suit du fait que ce soit une colimite. □

Remarque
On definit de la meme facon un produit libre d'un nombre arbitraire de groupes.

3.5 Pushouts de groupes

Soient $\alpha : K \to G$ et $\beta : K \to H$ deux homomorphismes, on veut construire le pushout de $G \leftarrow K \to G$

Definition 24 (Pushout)
Le pushout ou amalgame $G *_K H$ est le quotient de $G * H$ par le sous-groupe normal genere par les elements de la forme $\iota(\alpha(x)) j(\beta(x)^{-1})$

On appelle aussi i et j les compositions $G \to G * H \to G *_K H$ et $H \to G * H \to G *_K H$.
On a ainsi un carre commutatif

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & G \arrow[d, "\iota"] \\ H \arrow[r, "j"'] & G *_K H \end{tikzcd}$$

Proposition 52
Le pushout est un pushout.

Preuve

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & G \arrow[d, "\iota"] \arrow[ddr, bend left, "\phi"] & \\ H \arrow[r, "j"'] \arrow[drr, bend right, "\psi"'] & G *_K H \arrow[dr, "\exists ! \omega"] & \\ & & M \end{tikzcd}$$

On construit $\tilde{\omega} : G * H \to M$ par la propriete universelle du produit libre (a l'aide de ϕ et ψ).
Cet homomorphisme $\tilde{\omega}$ passe au quotient parce que $\tilde{\omega}(\iota(\alpha(x))j(\beta(x))^{-1}) = \psi(\alpha(x))\psi(\beta(x))^{-1} = 1$ et on a une application induite $\omega : G *_K H \to M$.
L'unicite est immediate. □

4 Seifert-van Kampen

On souhaite calculer le groupe fondamental d'un pushout d'espaces et l'identifier.

4.1 Groupe fondamental d'un recollement

Soient $A, B \subset X$, $X = A \cup B$, deux sous-espaces ouverts tels que $C = A \cap B$ est connexe par arcs.
On choisit $x_0 \in C$ comme point de base pour C, A, B et X.
On appelle $\iota : A \subset X, j : B \subset X, \alpha : C \subset A, \beta : C \subset B$.
On obtient alors un pushout :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\iota"] \\ B \arrow[r, "j"'] & X \end{tikzcd}$$

On va montrer que

$$\begin{tikzcd} \pi_1(C, x_0) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "\beta_*"'] & \pi_1(A, x_0) \arrow[d, "\iota_*"] \\ \pi_1(B, x_0) \arrow[r, "j_*"'] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

est un pushout.
Par la propriete universelle du pushout, ce carre nous fournit $\phi : \pi_1(A, x_0) *_{\pi_1(A,x_0)} \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$

Lemme 53
ϕ est surjectif.

Preuve
Soit $\gamma : I \to X$ un lacet base en x_0.
Le recouvrement de X par A et B donne un recouvrement ouvert $\gamma^{-1}(A), \gamma^{-1}(B)$ de l'intervalle I, un espace metrique compact.
donc il existe un nombre de lebesgue $\delta > 0$ tel que tout sous-ensemble de I de diametre $< \delta$ est contenu dans $\gamma^{-1}(A)$ ou $\gamma^{-1}(B)$ (ou les deux.)
On choisit donc $n > \frac{1}{\delta}, n \in \mathbb{N}$ de sorte que $\gamma_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}$ est un chemin dans A ou dans B.
Pour alternet les images dans A et dans B, on concatene les chemins qui se suivent dans le meme ouvert pour choisir $s_0 = 0 < s_1 = \frac{k_1}{n} < \ldots < \frac{k_r}{n} = 1$ de telle sorte que γ envoie $[s_0, s_1]$ dans (disons) A , $[s_1, s_2]$ dans B etc.
On definit $\gamma_i = \gamma|_{[s_{i-1}, s_i]}$.
Comme C est connexe par arcs, il existe des chemins γ^i dans C, allant de x_0 a $\gamma(s_i)$.
On decompose a homotopie pres, le chemin γ en concatenation de lacets (d'abord des chemins) .

$$\begin{aligned}
\gamma &\simeq \gamma_1 \star \gamma_2 \star \ldots \star \gamma_r \\
&\simeq \gamma_1 \star \overline{\gamma^1} \star \gamma^1 \star \ldots \\
&\simeq \underbrace{(\gamma_1 \star \overline{\gamma^1})}_{\omega_1} \star \underbrace{(\gamma^1 \star \gamma_2 \star \overline{\gamma^2})}_{\omega_2} \star \ldots
\end{aligned} \qquad \square$$

ou ω_1 est un lacet base en x_0 et entierement contenu dans A ou dans B.
Alors $[\gamma] = [\omega_1]. \ldots .[\omega_r] = i_*(\omega_1) j_*(\omega_2) \ldots$

Pour montrer que ϕ est un isomorphisme, on cherche a identifier le noyau de $\pi_1 A * \pi_1 B \to \pi_1 A *_{\pi_1} C \pi_1 B \to \pi_1 X$.
Soit γ la concatenation de lacets $\gamma_1 * \ldots * \gamma_r$, avec γ_{2i+1} dans A, et γ_{2i} dans B.
On suppose que $[\gamma] = 1$ dans $\pi_1 X$, ie. que $\gamma \simeq c_{x_0} \iff \exists H : I^2 \to X$ entre γ et c_{x_0}.
Par le meme argument de nombre de lebesgue, on decoupe le carre en rectangles que H envoie entierement dans A ou dans B.

Lecture 11: Fin Seifert Van-Kampen

Mon 11 Apr

On veut montrer que l'application ϕ definie la derniere fois est une application de $\ker N = \ker(\pi_1 A * \pi_1 B \to \pi_1 A *_{\pi_1 C} \pi_1 B)$.
On decoupe donc $I \times I$ en nm carres tels que $H|_{C_k} \subset A$ ou B.
On construit ω_k comme indique sur le dessin.
On a $\omega_0 = c_{x_0}$ et $\omega_{nm} = \gamma$.
Ainsi, $H|_{C_k}$ fournit une homotopie entre ω_k et ω_{k-1}.
On va montrer que $\omega_k * \overline{\omega_{k-1}} \in N$.

En effet, alors $\omega_{nm} = \omega_{nm} * \overline{\omega_{nm-1}} \ldots * \omega * \overline{\omega_0}$.
Pour chaque k, on fixe $H|_{C_k}$ est vue dans ou B si elle est dans $C = A \cap B$.
De meme, pour chaque chemin correspondant aux 4 cotes du rectangle.
Mettons que pour k, l'homotopie est dans A, alors les cotes "a gauche et en haut" sont choisis dans A.
Ainsi, les deux autres sont choisis dans A ou B selon $k = 1$ et $k - n$.
S'ils sont tous dans A, alors $H|_{C_k}$ est une homotopie dans A entre chemin dans A, $\omega_k * \overline{\omega_{k-1}} \in N$.
Supposons qu'un cote au moins est un chemin dans B

$$\omega_k * \overline{\omega_{k-1}} = \lambda_1 * \lambda_2 * \overline{\lambda_2} * \lambda_3 = \lambda_1 * \lambda_3$$

Comme le point y (le cote en haut a droite du carre) appartient a C, on choisit un chemin γ^1 de $H(y)$ a x_0, de meme γ^2 pour z (le point en bas a droite du carre).

$$\lambda_1 * \lambda_3 = \lambda_1 * \gamma^1 * \overline{\gamma^1} * \lambda_4 * \gamma^2 * \overline{\gamma^2} * \lambda_5$$

Le chemin λ_4 est dans B, appelons λ_4' le meme chemin vu dans A , $H|_{C_k}$ est une homotopie dans A tel que le chemin $\lambda_1 \simeq \overline{\lambda_5} * \overline{\lambda_4'}$

$$\begin{aligned} &= \overline{\lambda_5} * \gamma^2 * \overline{\gamma^2} * \overline{\lambda_4'} * \gamma^1 * \overline{\gamma^1} * \lambda^4 * \gamma^2 * \overline{\gamma^2} * \lambda_5 \\ &= \overline{\epsilon} * \overline{\alpha} * \beta * \epsilon \end{aligned}$$

Represente un conjugue par ϵ dans $\pi_1 A * \pi_1 B$ du meme lacet λ_4 vu dans B ou λ_4' vu dans A.
Par definition de $\pi_1 A *_{\pi_1 C} \pi_1 B$, c'est un element de N

Exemple
$\mathbb{R}P^2 = {D^2}/{\sim} \simeq S^1 \cup_2 e^2$.
Pour recouvrir $\mathbb{R}P^2$ par des ouverts, on epaissit $\mathbb{R}P^1$ et on amincit e^2.
On pose $A = \dot{D}_{\frac{3}{4}}, B = D^2 \setminus D_{\frac{1}{4}}$.
Comme A, B, C sont satures, $q(A), q(B), q(C)$ sont ouverts, on a donc

$$q(A) = *, q(B) = q(S^1) = S^1 \text{ et } q(C) = q(S^1) = S^1$$

L'inclusion $C \subset B$ induit une application $q(C) \to q(B)$

4.2 Groupe fondamental d'un Wedge

On suppose que tous nos espaces sont pointes et bien pointes dans le sens ou le point de base x_0 admet un voisinage ouvert et contractile au sens pointe, $U \simeq \{0\}$ et l'homotopie $\mathrm{Id}_U \simeq c_{x_0}$ fixe x_0

Exemple
S^1 est bien pointe, toutes les surfaces aussi, le peigne du topologue ne l'est pas en $(0, 1)$.

Lemme 56
Si X, Y sont bien pointes, $X \vee Y$ aussi ($X \times Y$ aussi).

Preuve
Soient $U \ni x_0, V \ni y_0$ des voisinages contractiles de x_0 resp. y_0.
Dans $X \vee Y = X \coprod Y / x_0 \sim y_0$, on choisit l'image de $U \coprod V \subset X \coprod Y$.
Les homotopies $H : \mathrm{Id}_U \simeq c_{x_0}, F : \mathrm{Id}_V \simeq c_{y_0}$ donne une homotopie $H \coprod F$: $\mathrm{Id}_{U \coprod V} \to c_{x_0} \coprod c_{y_0}$ passe au quotient comme elle preserve le point de base. $\square$

Proposition 57
Soient $(X, x_0), (Y, y_0)$ deux espaces bien pointes, alors $\pi_1(X \vee Y) \simeq \pi_1 X * \pi_1 Y$

Preuve
On prend $A = X \vee V$ et $B = Y \vee U$, alors on conclut par le lemme ci-dessus et Seifert. $\square$

Lecture 12: Retractes

Thu 21 Apr

Definition 25 (Retracte)
Un sous-espace $\iota : A \hookrightarrow X$ est un retracte de X s'il existe une retraction $r : X \to A$ tel que $r \circ \iota = \mathrm{Id}_A$.

Exemple

1. *S^1 est un retracte de $S^1 \vee S^1$.*
2. *Tout point $x_0 \in X$ est un retracte de X $r : X \to \{x_0\}$.*

Remarque
S^1 n'est pas un retracte du disque D^2, il n'existe aucune application continue $r : D^2 \to S^1$ tel que $r(x) = x$ si $x \in S^1$.
Sinon $\pi_1 S^1 \xrightarrow{\iota_*} \pi_1 D^2 \xrightarrow{r_*} \pi_1 S^1$.
Si la composition $r \circ \iota$ etait l'identite, la composition $\mathbb{Z} \to 0 \to \mathbb{Z}$ serait l'identite, ce qui est impossible.

Definition 26 (Retracte de deformation)
Un retracte $\iota : A \hookrightarrow X$ est un retracte de deformation de X s'il existe une homotopie $\iota \circ r \simeq \mathrm{Id}_X$

Exemple
Le peigne du topologue P $\{(0, 1)\} \subset P$ est un retracte de deformation.
On definit l'homotopie H en trois temps.

1. *Contracter les dents du peigne*
2. *Contracter la base du peigne.*

3. *Remonter en* $(0,1)$

Cette homotopie n'a pas fixe le point $(0,1)$

Definition 27 (Retracte de deformation fort)
Un retracte de deformation $\iota : A \hookrightarrow X$ *est un retracte de deformation fort si l'homotopie* $H : \iota \circ r \simeq \mathrm{Id}_X$ *peut etre choisie relative a* A*, ie,* $H(a,t) = a$ *pour tout* $t \in I$ *et pour tout* $a \in A$

Exemple (Le collier)
Soit A *un espace et* $Col(A) = A \times [0, \frac{3}{4}[$*, l'inclusion de* $A \times 0 \hookrightarrow Col(A)$ *est un retracte de deformation fort.*
On pose $r(a,t) = (a,0) \forall a \in A, \forall t$.
On definit donc $H : Col(A) \times I \to Col(A)$ *en envoyant* $(a,t,s) \mapsto (a,ts)$ *qui verifie clairement toutes les hypotheses ci-dessus.*

Lecture 13: Consequence de Seifert

Mon 25 Apr

Proposition 62
Soit $f : A \to X$ *une application pointee avec* A *connexe par arcs.*
Soit $Y = X \cup_f CA$*, alors* $\pi_1 Y \simeq \pi_1 X *_{\pi_1 A} 1$

Preuve
Y *est recouvert par* $q(X)$ *et* $q(CA)$*, mais ce ne sont pas des ouverts de* Y*, il faut les epaissir.*
On pose $X' = q\left(X \coprod Col(A)\right)$ *et* $C'A = A\times]\frac{1}{4}, 1]/A \times 1$ *un "petit" cone ouvert.*
On voit que $C'A \simeq *$ *(comme* CA *) et* $C'A$ *et* X' *sont des ouverts de* Y *car ce sont des images par* q *d'ouverts satures.*
De plus, X' *admet* X *comme retracte de deformation fort.*
Enfin, $X' \cap C'A = q\left(Col(A) \cap (A\times]\frac{1}{4}, 1])/A \times 1\right) = q\left(A\times]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \simeq A$.
On peut donc appliquer le theoreme de Seifert van Kampen car A *est connexe par arcs.*
Pour conclure, on affirme que $j : C'A \cap X' \hookrightarrow X'$ *induit* $f_* : \pi_1 A \to \pi_1 X$.
On considere $X' \hookleftarrow A'\times]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[\to A'$ $\square$

4.3 Attachement de cellules standard

Si $Y = X \cup_f e^n$ Comme $\pi_1 S^{n-1} = 1$, pour $n \geq 3$ on a

Corollaire 63
Si $n \geq 3$, $\pi_1 Y \simeq \pi_1 X$.
Si $n = 2$, $\pi_1 Y \simeq {\pi_1 X}/{N_f}$ *ou* N_f *est le sous-groupe normale engendre*

par $f_*(1)$ ou $f_* : \mathbb{Z} \simeq \pi_1 S^1 \to \pi_1 X$ qui envoie $1 \mapsto f_*(1)$

Preuve
Par la proposition on a un pushout de groupes $\pi_1 X \leftarrow \pi_1 S^1 \to \pi_1(CS^1)$ qui est $\pi_1 Y$, donc $\pi_1 Y \simeq \pi_1 X *_{\pi_1 S^1} 1 \simeq {}^{\pi_1 X}\!/\!_{N_f}$ □

Il reste a etudier les attachements de 1 cellule.
Il y a deux cas pour $f : S^0 \to (X, x_0)$.
SI $f(-1)$ et x_0 ne sont pas dans la meme composante connexe, alors $\pi_1 Y = \pi_1(X, x_0) * \pi_1(X, f(-1))$.
Si x_1 et x_0 sont dans la meme composante connexe, alors f est homotope a l'application $g = c_{x_0}$ via γ un chemin entre x_0 et x_1.
Alors $X \cup_f e^1 \simeq X \cup_g e^1$ (puisque des applications homotopes donnent des attachements homotopes) or puisque g est constante, ceci est homotope a $X \vee e^1$.
Ainsi, si X est bien pointe, alors $\pi_1 Y \simeq \pi_1 X * \mathbb{Z}$.

4.4 Classification des surfaces

Rappel : Une surface est un espace compact, hausdorff et localement homeomorphe a $\mathbb{R}^2$.
On va supposer connu que toute surface est triangularisable, ie. S est un quotient d'une reunion disjointe finie de triangles en identifiant uniquemenet des paires de cotes, a homeomorphisme pres.
On va supposer que S est le quotient d'un polygone P a $2k$ cotes $a'_1, \dots, a'_k, a''_1, \dots, a''_k$ ou a'_i et a''_i sont identifies deux a deux, et tous les sommets sont identifies a un point.
On reconnait dans cette description la somme connexe de i copies de $\mathbb{R}P^2$ et de tores.

Proposition 64
Si S est le quotient de P par une relation donnee par un mot w, P un $2k$-gone et S' est le quotient de P par une relation donee par un mot w' , P' un $2l$ gone, alors $S \# S'$ est le quotient d'un $(2k+2l)$ gone par la relation donnee par ww'

Preuve
On appelle $A_0, \dots, A_{2k-1}$ les sommets de P et on choisit un voisinage U d'un point interieur dont le bord ne recontre ∂P qu'en A_0.
De memme pour P' avec U' et $\partial U \cap P' = \{A'_0\}$.
Comme $P \setminus U$ est le quotient d'un $(2k+1)$-gone dont les cotes sont $a'_1, a''_1 \dots, a'_k, a''_k$ et b entre B_0 et A_0.
Ici, B_0 est la deuxieme extremite de a''_k.
La somme connexe est le quotient d'un $(2k+1)$-gone et un $(2l+1)$-gone, vu que le quotient d'un quotient est un quotient, $S \# S'$ est construite en identi-

fiant d'abord b et b' *de sorte a obtenir un* $(2k+2l)$*-gone puis en identifiant les cotes 2 a 2 selon les instructions donnees par le mot parcouru de* A_0 *sur le bord dans le sens trigonometrique.*
C'est bien la concatenation ww'. □