Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 Soit R un anneau intègre de caractéristique différente de zéro. Quelle assertion est toujours vraie?

- ☐ La caractéristique de R est p pour un nombre premier $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.
- ☐ La caractéristique de R est q^ℓ pour un $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ et un nombre premier $q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$; de plus, il existe un anneau intègre R dans lequel $\ell > 1$.
- ☐ Le nombre d'éléments dans R est p pour un nombre premier $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.
- ☐ Le nombre d'éléments de R ne peut pas être 2^ℓ pour $\ell > 1$.

Question 2 Soient $B_1, B_2 \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ deux matrices de rang plein. On a $\Lambda(B_1) = \Lambda(B_2)$ si et seulement s'il existe ...

- ☐ ... une matrice unimodulaire U telle que $B_1 = B_2 U$.
- ☐ ... une matrice orthogonale Q telle que $B_1 = QB_2$.
- ☐ ... une matrice unimodulaire U telle que $B_1 = UB_2$.
- ☐ ... une matrice orthogonale Q telle que $B_1 = B_2 Q$.

Question 3 Soit $A \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ avec polynôme characteristique et polynôme minimal

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 3)^5(\lambda + 4)^3 \qquad \text{et} \qquad m_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 4)$$

respectivement. Quelle assertion est vraie pour la forme normale de Jordan J de A?

- ☐ Tous les blocs de Jordan de J associés à la valeur propre -4 sont de taille 1×1.
- ☐ J a un bloc de Jordan de dimension 2×2 associé à la valeur propre -4.
- ☐ J a exactement 3 blocs de Jordan.
- ☐ J a un bloc de Jordan de taille 3×3 associé à la valeur propre 3.

Question 4 Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice inversible. Laquelle des assertions suivantes est vraie?

- ☐ Pour le polynôme caractéristique $p_A(x)$, on a $p_A(A^{-1}) = 0$.
- ☐ Pour le polynôme caractéristique $p_A(x)$, on a $p_A(A)p_A(A^{-1}) = I_n$.
- ☐ Il existe un polynôme $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ tel que $A^{-1} = p(A)$.
- ☐ Pour le polynôme caractéristique $p_A(x)$, on a $p_A(A) = 0$ si et seulement si A est diagonalisable.

Question 5 Soit $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique donnée par $Q(x) = x^\intercal Ax$ avec $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique. Une solution optimale du problème $\max\{Q(x) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1\}$ est un vecteur $x^\star$ tel que

$$Q(x^\star) = \max\{Q(x) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1\},$$

où $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ est la norme Euclidienne. Laquelle des assertions suivantes est vraie pour toute matrice A?

- ☐ Il existe au plus 2 solutions optimales.
- ☐ Il existe au plus n solutions optimales.
- ☐ Il existe une infinité de solutions optimales.
- ☐ Il existe soit deux soit une infinité de solutions optimales.

Question 6 Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique et $u_1, \ldots, u_n$ une base orthonormale de vecteurs propres de A, associés aux valeurs propres $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 1/2$ respectivement. On définit le vecteur $v^{(0)} := u_1 + \cdots + u_n$ et inductivement $v^{(i)} := Av^{(i-1)}$ pour $i \geq 1$. Quelle est la valeur de la distance $\|u_1 - v^{(i)}\|$, où $\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$ est la norme Euclidienne?

- ☐ $\sqrt{n-1}\,(1/2)^{-i}$.
- ☐ $\sqrt{n-1}\,(1/2)^{i}$.
- ☐ $\sqrt{n}\,(1/2)^{-i}$.
- ☐ $\sqrt{n}\,(1/2)^{i}$.

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 7 Soient $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ et $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ un nombre premier tel qu'il existe deux nombres entiers $g, h \in \mathbb{Z}$ avec $r = ga + hb$. Alors $r = \gcd(a, b)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 8 Soit $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ telle que $\det(U) = 1$. Alors $\Lambda(U) = \mathbb{Z}^n$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 9 Soient $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Si A est de rang ligne plein, alors il existe une solution $x \in \mathbb{R}^n$ telle que $Ax = b$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 Soient $\Lambda_1, \Lambda_2 \subseteq \mathbb{Z}^n$ deux réseaux entiers tels que $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$. Alors $\det(\Lambda_1) | \det(\Lambda_2)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique et inversible avec composantes $a_{i,j} \geq 0$ pour tous i, j. Alors A est définie positive.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12 Soient $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tels que $p(A) = 0$. Alors $p(x)$ divise le polynôme minimal de A.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 13 La pseudo inverse d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est unique.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 14 Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a au plus n vecteurs propres différents.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 15 Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne. Si toutes les valeurs propres sont strictement positives, alors A est semi-définie positive.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 16 Soient $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $v \in \mathbb{C}^n$. S'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Av = \lambda v$, alors v est un vecteur propre et λ est une valeur propre.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 17 Soit R un anneau intègre fini. Le nombre d'éléments $|R|$ est un nombre premier.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 18 Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K, $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel de V, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur $V \times V$. Alors $V = W \oplus W^{\perp}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisème partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 19: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8

Soit $\mathbb{C}^n$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ défini par

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle = \Re(\langle u, v \rangle) \quad \text{pour tous } u, v \in \mathbb{C}^n,$$

où $\Re(x) \in \mathbb{R}$ dénote la partie réelle d'un nombre $x \in \mathbb{C}$.

i) Montrer que $\langle\langle u, v \rangle\rangle$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

ii) Montrer que $\langle\langle v, v \rangle\rangle = \langle v, v \rangle$ pour tout $v \in \mathbb{C}^n$.

iii) Montrer que si deux vecteurs $u, v \in \mathbb{C}^n$ sont orthogonaux par rapport au produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ alors on a $\langle\langle u, v \rangle\rangle = 0$. Montrer que l'inverse n'est pas toujours vrai.

Question 20: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8

Soient $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_1, \ldots, a_m)^\intercal \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Soit $\widetilde{H} \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-espace de dimension $k \leq \operatorname{rang}(A)$ tel que pour tout sous-espace $H \subseteq \mathbb{R}^n$ de dimension k,

$$\sum_{i=1}^{m} d(a_i, \widetilde{H})^2 \leq \sum_{i=1}^{m} d(a_i, H)^2. \qquad (\star)$$

Montrer que si l'inégalité $\leq$ dans $(\star)$ est stricte pour tout sous-espace $H \neq \widetilde{H}$ de dimension k, il existe une matrice $\widetilde{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rang k tel que pour toute matrice $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \neq \widetilde{B}$, avec $\operatorname{rang}(B) = k$, on a

$$\|A - \widetilde{B}\|_F < \|A - B\|_F.$$

Rappel: La norme $\|M\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2}$ est la norme Frobenius d'une matrice $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et un sous-espace $H \subseteq \mathbb{R}^n$ on écrit $d(a, H) := \min_{y\in H} \|a - y\|$, où $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ est la norme Euclidienne.
Soient $a \in \mathbb{R}^n$, et $\{u_1, \ldots, u_k\}$ une base orthonormale d'un sous-espace $H \subseteq \mathbb{R}^n$. Vous pouvez utiliser (sans preuve) le fait que $\hat{a} = \sum_{i=1}^k \langle a, u_i\rangle\, u_i$ est le seul vecteur dans H avec $d(a, H) = \|a - \widehat{a}\|$.

Question 21: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8

Soit $V = \mathbb{R}^{2n}$ un espace Euclidien équipé du produit scalaire standard $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{2n} x_i y_i$, et soit $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ une matrice symétrique avec valeurs propres

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 1 > \lambda_{n+1} > \cdots > \lambda_{2n} > 0.$$

Soit $\{v_1, \ldots, v_{2n}\}$ une base orthonormale (par rapport à $\langle\cdot,\cdot\rangle$) des vecteurs propres correspondants. On définit un nouveau produit scalaire par $\langle x, y\rangle_A := x^\intercal Ay$. Vous pouvez utiliser le fait que $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ est un produit scalaire sans le prouver.

i) Montrez que $v_1, \ldots, v_{2n}$ est une base orthogonale par rapport à $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$, i.e. montrez que $\langle v_i, v_j\rangle_A = 0$ pour $i, j \in \{1, \ldots, 2n\}$, $i \neq j$.

ii) Montrez que pour tout $i = 1, \ldots, n$ il existe un vecteur $u_i \in \operatorname{span}\{v_i, v_{n+i}\}$ tel que $\langle u_i, u_i\rangle = 1 = \langle u_i, u_i\rangle_A$.

iii) Montrez qu'il existe un sous-espace $U \subseteq V$ avec $\dim(U) = n$ tel que $\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_A$ pour tous $x, y \in U$.

Question 22: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice inversible, et

$$V = \left\{ \sum_{i=0}^{m} \alpha_i A^i \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\, \forall\, i = 0, 1, \ldots, m : \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ généré par toutes les puissances de A, où $A^0 = I_n$.

i) Énoncez le théorème de Hamilton-Cayley.

Rémontrez une variation de Corollaire 1.15, c.-à-d.

ii) montrez que $A^{-1} \in V$, et

iii) montrez que $\dim(V) \leq n$.

iv) Montrez que $\dim(V) = d$, où d est le degré du polynôme minimal de A.