Enseignement des mathématiques

Analyse

Recueil d'exercices et aide-mémoire vol. 2

Jacques Douchet

Presses polytechniques et universitaires romandes

Analyse

Enseignement des mathématiques

Analyse

Recueil d'exercices et aide-mémoire vol. 2

Jacques Douchet

Presses polytechniques et universitaires romandes

L'auteur et l'éditeur remercient l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne dont le soutien financier a rendu possible la publication de cet ouvrage.

DANS LA MÊME COLLECTION

Analyse
Receuil d'exercices et aide-mémoire vol. 1
Jacques Douchet

Calcul différentiel et intégral
Jacques Douchet et Bruno Zwahlen
Fonctions réelles d'une ou de plusieurs variables réelles

Introduction à l'analyse numérique
Jacques Rappaz et Marco Picasso

Algèbre linéaire
Aide-mémoire, exercices et applications
Robert C. Dalang et Amel Chaabouni

Analyse avancée pour ingénieurs
Bernard Dacorogna, Chiara Tanteri

Initiation aux probabilités
Sheldon M. Ross

Cours d'Analyse
Srishti D. Chatterji
1 Analyse vectorielle
2 Analyse complexe
3 Equations différentielles

Introduction à la statistique
Stephan Morgenthaler

Aide-mémoire d'analyse
Heinrich Matzinger

Les Presses polytechniques et universitaires romandes sont une fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des travaux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne ainsi que d'autres universités et écolesd'ingénieurs francophones.
Le catalogue de leurs publications peut être obtenu par courrier aux Presses polytechniques et universitaires romandes,
EPFL – Rolex Learning Center, CH-1015 Lausanne, par E-Mail à ppur@epfl.ch,
par téléphone au (0)21 693 41 40, ou par fax au (0)21 693 40 27.

www.ppur.org

Première édition
ISBN 978-2-88074-570-7

CH – 1015 Lausanne
Imprimé en Italie

Introduction

Ce recueil de 513 exercices est destiné en premier lieu aux étudiants du premier cycle universitaire qui suivent pour la première fois un cours d'analyse (calcul différentiel et intégral) concernant les fonctions réelles de plusieurs variables réelles. Il s'adresse aussi à tous ceux qui s'intéressent ou veulent approfondir l'un ou l'autre des sujets traités.

Le contenu de ce livre correspond au cours d'analyse que l'auteur enseigne, depuis plusieurs années, aux étudiants du deuxième semestre de différentes sections de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL). Le choix des exercices sert aussi bien à vérifier du degré d'acquisition par l'étudiant de la théorie que de son habilité à les résoudre. Il est bon de rappeler ici que le meilleur moyen de devenir familier avec l'analyse est de résoudre un maximum d'exercices. Et plus on en résout, plus on a de chance de pouvoir les résoudre. On acquiert ainsi un savoir faire dont l'intuition, élément indispensable en mathématique, ne devrait pas être absente.

D'un point de vue pratique, ce livre contient quatre chapitres qui sont divisés chacun en deux parties :

1) La première partie est un rappel non exhaustif de toutes les principales définitions et tous les principaux résultats qu'il faut connaître sur le sujet traité. Les propositions sont énoncées avec précision mais sans leur démonstration.

2) La deuxième partie est un recueil d'exercices concernant le sujet traité. Pour les résoudre, une bonne connaissance des définitions et propositions données dans la première partie est exigée de la part de l'étudiant. C'est pourquoi une bonne assimilation de la théorie est nécessaire, mais malheureusement pas forcément suffisante, pour arriver à résoudre tous les exercices. Pour certains d'entre eux, la connaissance des chapitres précédents est parfois nécessaire. Pour chaque exercice, un corrigé est donné à la fin du livre. Chaque corrigé est fait en fonction de la difficulté de l'exercice. Les exercices difficiles s'adressent plus particulièrement aux étudiants des sections mathématique et physique.

Il est vivement recommandé aux étudiants de se familiariser avec les différents logiciels mathématiques proposés sur le marché pour résoudre les exercices qui s'y prêtent, après, bien sûr, avoir essayés de les résoudre par eux-mêmes.

Pour ceux qui s'intéressent aux démonstrations, je recommande comme livre de référence : Jacques Douchet et Bruno Zwahlen, *Calcul différentiel et intégral*, Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR).

Enfin, n'étant pas propriétaire des exercices contenus dans ce livre, j'encourage tous mes collègues à les utiliser à bon escient et sans restriction, ainsi que d'en faire profiter pleinement leurs étudiants.

Finalement, je souhaite à tous les étudiants beaucoup de plaisir à faire les exercices proposés et rappelle que ce n'est qu'en persévérant que l'on arrive à ses fins.

Remerciements

Je tiens à remercier ici toutes les personnes qui m'ont aidé à la réalisation de ce livre. En particulier, Gérard Maze qui a relu une partie du manuscrit, Christophe Hebeisen, Sean Bronee et Maya Tuscher pour les dessins, M.-F. De Carmine pour son aide et ses remarques judicieuses ainsi que les Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR) qui ont accepté de publier ce livre en faisant preuve d'un grand professionnalisme.

Jacques Douchet

Table des matières

Chapitre 1

Espace $\mathbb{R}^n$

1.1 Introduction

On désigne par $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des ***n-tuples ordonnés*** $(x_1, \ldots, x_n)$ de nombres réels. Par la suite, les éléments de $\mathbb{R}^n$ seront notés indifféremment $\mathbf{x}$ ou $(x_1, \ldots, x_n)$.

On munit $\mathbb{R}^n$ des deux opérations suivantes : pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ et tout scalaire λ

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)\,.$$

Avec ces deux opérations, on vérifie que $\mathbb{R}^n$ est un ***espace vectoriel*** sur $\mathbb{R}$ de dimension n.

Définition 1.1 A chaque élément $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on associe sa ***norme euclidienne***

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\,.$$

1.1.1 Propriétés

1) $$\|\mathbf{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = 0\,.$$

2) $$\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|\,.$$

3) ***Inégalité triangulaire***

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\,.$$

4) ***Inégalité triangulaire inverse***

$$\Big|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\Big| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|\,.$$

Définition 1.2 A chaque couple d'éléments $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on associe son **produit scalaire**

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\,.$$

1.1.2 Propriétés

1)
$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}\,.$$

2)
$$\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\,.$$

3)
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle\,.$$

4) ***Bilinéarité***
$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle\,.$$

5) ***Egalité de Pythagore***. Si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$:
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\,.$$

6) ***Inégalité de Cauchy-Schwarz***
$$\left|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\right| \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\,.$$

7) Pour $n = 2$ ou 3 et $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$:
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| \cos\theta$$
où θ est l'angle compris entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. Par conséquent les deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont orthogonaux si et seulement si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

1.2 Suites dans $\mathbb{R}^n$

Définition 1.3 Une ***suite*** d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, qui, à tout entier naturel k, fait correspondre l'élément $f(k)$ de $\mathbb{R}^n$.

$f(k)$ est appelé le ***k-ième terme*** de la suite et on le désigne par une lettre indexée en bas à droite par k, par exemple : $\mathbf{x}_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k})$, la suite elle-même étant alors désignée par $\big(\mathbf{x}_k\big)$. Le sous-ensemble $\big\{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\big\}$ de $\mathbb{R}^n$ est appelé l'ensemble des éléments de la suite. Si $\big\{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\big\}$ est inclus dans un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$, on dit que $\big(\mathbf{x}_k\big)$ est une suite d'éléments de E.

Définition 1.4 Une suite $\big(\mathbf{x}_k\big)$ est dite ***bornée*** s'il existe un nombre réel $M \geq 0$ tel que pour tout entier $k \geq 0$: $\|\mathbf{x}_k\| \leq M$.

Proposition 1.5 *Une suite $\big(\mathbf{x}_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k})\big)$ est bornée si et seulement si les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont bornées.*

Définition 1.6 Une suite $\big(\mathbf{x}_k\big)$ est dite ***convergente*** et admet pour ***limite*** $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ou tout simplement que $\big(\mathbf{x}_k\big)$ ***converge*** vers $\mathbf{x}$, si à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq k_\varepsilon$ implique $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \leq \varepsilon$. On écrit alors,
$$\lim_{k \to +\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}\,.$$
Lorsque la limite existe, elle est unique.

Définition 1.7 Une suite qui ne converge pas est dite ***divergente***.

Proposition 1.8 *Une suite* $\big(\mathbf{x}_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k})\big)$ *converge vers* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *si et seulement si pour tout entier* $1 \leq p \leq n$*, la suite numérique* $\big(x_{p,k}\big)$ *converge vers* x_p*.*

Proposition 1.9 *Toute suite convergente est bornée.*

Proposition 1.10 *(**Linéarité**) Soient* $\big(\mathbf{x}_k\big)$ *et* $\big(\mathbf{y}_k\big)$ *deux suites qui convergent respectivement vers* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *et soient* α*,* β *deux scalaires. Alors, la suite* $\big(\alpha\mathbf{x}_k + \beta\mathbf{y}_k\big)$ *converge vers* $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$*.*

Définition 1.11 Une suite $\big(\mathbf{x}_k\big)$ est dite ***de Cauchy*** si à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $k, \ell \geq k_\varepsilon$ impliquent $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_\ell\| \leq \varepsilon$.

Proposition 1.12 *Une suite* $\big(\mathbf{x}_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k})\big)$ *est de Cauchy si et seulement si les* n *suites numériques* $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ *sont de Cauchy.*

Proposition 1.13 *Une suite* $\big(\mathbf{x}_k\big)$ *est de Cauchy si et seulement si elle converge.*

Définition 1.14 Si $\big(k_p\big)$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels, on dit que $\big(\mathbf{x}_{k_p}\big)$ est une ***sous-suite*** ou encore une ***suite extraite*** de la suite $\big(\mathbf{x}_k\big)$.

Proposition 1.15 *(**Théorème de Bolzano-Weierstrass**) De toute suite bornée* $\big(\mathbf{x}_k\big)$*, on peut extraire une sous-suite* $\big(\mathbf{x}_{k_p}\big)$ *qui converge.*

Proposition 1.16 *Si une suite* $\big(\mathbf{x}_k\big)$ *converge vers* $\mathbf{x}$*, toutes ses sous-suites convergent vers* $\mathbf{x}$*.*

1.3 Topologie de $\mathbb{R}^n$

1.3.1 Sous-ensemble ouvert

Définition 1.17 Soient $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Par définition,

$$B(\mathbf{a}, r) = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \big\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\big\| < r\big\}$$

est appelé la ***boule ouverte de centre*** $\mathbf{a}$ ***et de rayon*** r.

Définition 1.18 Un point $\mathbf{a}$ est dit ***intérieur*** à E s'il existe $r > 0$ tel que

$$B(\mathbf{a}, r) \subset E\,.$$

L'ensemble des points intérieurs à E est appelé l'***intérieur*** de E et est noté $\mathring{E}$

Définition 1.19 E est dit **ouvert** si $E = \mathring{E}$.

Proposition 1.20 *$\mathring{E}$ est le plus grand ouvert contenu dans E.*

Proposition 1.21 *Toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.*

Proposition 1.22 *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Exemple 1.23 $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$, $B(\mathbf{a}, r)$ et $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| > r\right\}$ sont des ouverts.

1.3.2 Sous-ensemble fermé

Définition 1.24 E est dit ***fermé*** si son complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus E$ est ouvert.

Proposition 1.25 *E est fermé si et seulement si toute suite d'éléments de E qui converge, converge vers un élément de E.*

Proposition 1.26 *Toute réunion finie de fermés est un fermé.*

Proposition 1.27 *Toute intersection quelconque de fermés est un fermé.*

Proposition 1.28 *Si E est à la fois ouvert et fermé, on a l'alternative suivante : ou bien $E = \emptyset$ ou bien $E = \mathbb{R}^n$.*

1.4 Adhérence d'un sous-ensemble

Définition 1.29 Un point $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ est dit ***adhérent*** à E si pour tout $r > 0$:

$$B(\mathbf{a}, r) \cap E \neq \emptyset\,.$$

L'ensemble des points adhérents à E est appelé l'***adhérence*** de E et est noté $\overline{E}$.

Par définition, $\overline{E}$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^n$ qui n'appartiennent pas à l'intérieur du complémentaire de E.

Propriétés

1) $\mathbf{x} \in \overline{E}$ si et seulement si $\mathbf{x}$ est la limite d'une suite d'éléments de E.

2) $$\overline{E} = \mathbb{R}^n \setminus \big(\overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R}^n \setminus E}}\big).$$

3) $$\mathring{E} \subset E \subset \overline{E}.$$

4) $$\overline{E} = \mathring{E} \cup \partial E.$$

5) $$\overline{E} \text{ est fermé.}$$

Exemple 1.30 Soient $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Par définition,

$$\overline{B(\mathbf{a}, r)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r\}$$

est appelée la ***boule fermée de centre*** $\mathbf{a}$ ***et de rayon*** r.

Proposition 1.31 *E est fermé si et seulement si $E = \overline{E}$.*

Proposition 1.32 *$\overline{E}$ est le plus petit fermé contenant E.*

1.5 Sous-ensemble compact

Définition 1.33 E est dit ***borné*** s'il existe un nombre réel $M \geq 0$ tel que $\mathbf{x} \in E$ implique $\|\mathbf{x}\| \leq M$.

Définition 1.34 E est dit ***compact*** s'il est à la fois fermé et borné.

Proposition 1.35 *L'adhérence d'un borné est compacte.*

Proposition 1.36 *E est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de E, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de E.*

Proposition 1.37 *(**Théorème de Heine-Borel-Lebesgue**) E est compact si et seulement si de tout recouvrement de E par des ouverts, on peut extraire un recouvrement fini.*

1.6 Bord d'un sous-ensemble

Définition 1.38 Un point $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ est appelé ***point frontière*** de E si pour tout $r > 0$:

$$E \cap B(\mathbf{a}, r) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \left(\mathbb{R}^n \setminus E\right) \cap B(\mathbf{a}, r) \neq \emptyset\,.$$

L'ensemble des points frontières de E est appelé le ***bord*** de E et on le désigne par ∂E.

Par définition, ∂E est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^n$ qui n'appartiennent ni à l'intérieur de E ni à l'intérieur de son complémentaire.

Propriétés

1) $\mathbf{x} \in \partial E$ si et seulement si $\mathbf{x}$ est la limite d'une suite d'éléments de E et d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n \setminus E$.

2) $$\partial E \text{ est fermé.}$$

3) $$\partial E = \overline{E} \setminus \mathring{E} = \big(\mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{(\mathbb{R}^n \setminus E)}\big) \cap \big(\mathbb{R}^n \setminus \mathring{E}\big).$$

4) $$\partial E = \emptyset \Longleftrightarrow E = \mathbb{R}^n \text{ ou } \emptyset.$$

5) $$\partial \overline{E} \subset \partial E.$$

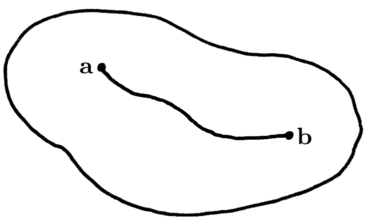
6) Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Alors,

$$\partial B(\mathbf{a}, r) = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r\big\}.$$

1.7 Sous-ensemble connexe par arcs

Définition 1.39 Une application $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) : [0,1] \to E$ dont les n fonctions $\gamma_1, \ldots, \gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont continues est appelée un ***chemin*** de E d'***origine*** $\boldsymbol{\gamma}(0)$ et d'***extrémité*** $\boldsymbol{\gamma}(1)$.

Définition 1.40 E est dit ***connexe par arcs*** si deux quelconques de ses éléments $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ peuvent être joints par un chemin de E d'origine $\mathbf{a}$ et d'extrémité $\mathbf{b}$.

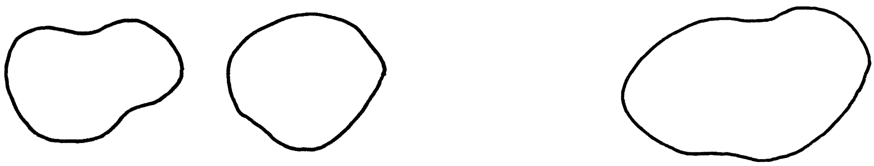


Ensemble connexe par arcs

Proposition 1.41 *Pour qu'un ouvert soit connexe par arcs il faut et il suffit qu'il ne soit pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints.*

1.8 Sous-ensemble connexe

Définition 1.42 E est dit ***connexe*** si pour tout couple d'ouverts A et B, les relations $E = A_1 \cup B_1$ et $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ avec $A_1 = E \cap A$ et $B_1 = E \cap B$ impliquent $A_1 = \emptyset$ ou $B_1 = \emptyset$.



Ensemble non connexe Ensemble connexe

Proposition 1.43 *Pour qu'un ouvert soit connexe il faut et il suffit qu'il ne soit pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints.*

Proposition 1.44 *E est connexe si et seulement si pour tout couple de fermés C et D, les relations $E = C_1 \cup D_1$ et $C_1 \cap D_1 = \emptyset$ avec $C_1 = E \cap C$ et $D_1 = E \cap D$ impliquent $C_1 = \emptyset$ ou $D_1 = \emptyset$.*

Proposition 1.45 *Pour qu'un fermé soit connexe il faut et il suffit qu'il ne soit pas la réunion de deux fermés non vides disjoints.*

Proposition 1.46 *L'adhérence d'un connexe est connexe.*

Proposition 1.47 *Dans $\mathbb{R}$, les uniques connexes sont les intervalles.*

Proposition 1.48 *Un connexe par arcs est connexe.*

Proposition 1.49 *Un ouvert est connexe par arcs si et seulement s'il est connexe.*

Exemple 1.50 $E = \left\{(x, \sin\frac{1}{x}) : x > 0\right\}$ est connexe par arcs tandis que $\overline{E} = E \cup \left\{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\right\}$ est connexe mais pas connexe par arcs.

1.9 Exercices

1.1 Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

1) Montrer que $\left|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\right| = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$ si et seulement s'il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$.
2) En déduire que $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ implique $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$ avec $\lambda > 0$.

1.2 Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|}{1 + \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|} \leq \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{1 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} + \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|}{1 + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|}.$$

1.3 Soit $\left(\mathbf{x}_k\right)$ une suite qui converge vers $\mathbf{x}$. Montrer que la suite $\left(\|\mathbf{x}_k\|\right)$ converge vers $\|\mathbf{x}\|$.

1.4 Soit $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1\right\}$.

1) Trouver $\mathring{E}$, $\overline{E}$ et ∂E.
2) En déduire que E est ouvert.

1.5 Soit

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < x\right\}.$$

1) Trouver $\mathring{E}$, $\overline{E}$ et ∂E.
2) En déduire que E est ouvert.

1.6 Soit $E = \{(x, \sin x) : 0 \le x \le 2\pi\}$.

1) Trouver $\mathring{E}$, $\overline{E}$ et ∂E.

2) En déduire que E est fermé.

1.7 Soit

$$E = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \right) : n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

1) Trouver $\mathring{E}$, $\overline{E}$ et ∂E.

2) En déduire que E n'est ni ouvert ni fermé.

1.8 Soit

$$E = \left\{ \left(n + \frac{1}{p}, m + \frac{1}{q} \right) : n, m \in \mathbb{Z} \text{ et } p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \right\}.$$

1) E est-il ouvert ?

2) E est-il fermé ?

3) Trouver $\mathring{E}$, $\overline{E}$ et ∂E.

1.9 Soient $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.

1) Montrer que $B(\mathbf{a}, r)$ et $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| > r\}$ sont des ouverts.

2) En déduire que

$$\partial B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r\}.$$

3) Vérifier que

$$\overline{B(\mathbf{a}, r)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \le r\}.$$

1.10 1) Montrer que E est fermé si et seulement si $E = \overline{E}$.
2) Montrer que $\overline{E}$ est le plus petit fermé contenant E.

1.11 Montrer que $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F}$.

1.12 Soit $E \cap F \neq \emptyset$. Montrer que $\overline{E \cap F} \subset \overline{E} \cap \overline{F}$. Peut-on inverser l'inclusion ?

1.13 Soit $F \subset E$. Montrer que $\overline{F} \subset \overline{E}$.

1.14 Soient $\overline{E} \cap A \neq \emptyset$ et A ouvert. Montrer que $E \cap A \neq \emptyset$.

1.15 Montrer que l'adhérence de tout sous-ensemble borné est bornée.

1.16 1) Montrer que $\overline{E} = \mathring{E} \cup \partial E$.
En déduire que $\partial E = \emptyset$ implique $E = \mathbb{R}^n$ ou $\emptyset$.

1.17 Montrer que toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

1.18 Montrer que toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

1.19 En donnant un contre-exemple, montrer qu'une intersection non finie d'ouverts n'est pas forcément un ouvert.

1.20 Montrer que toute réunion finie de fermés est un fermé.

1.21 En donnant un contre-exemple, montrer qu'une réunion non finie de fermés n'est pas forcément un fermé.

1.22 Montrer que toute intersection quelconque de fermés est un fermé.

1.23 Montrer que $\partial \mathring{E} \subset \partial E$. L'inclusion inverse est-elle vraie ?

1.24 Montrer que $\partial E = \partial(\mathbb{R}^n \setminus E)$.

1.25 Montrer que $\mathbf{x} \in \partial E$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de E et une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n \setminus E$ qui convergent vers $\mathbf{x}$.

1.26 Soit $\overline{E} \cap \overline{F} = \emptyset$. Montrer que

$$\partial(E \cup F) = \partial E \cup \partial F.$$

Que devient cette égalité si $\overline{E} \cap \overline{F} \neq \emptyset$?

1.27 Montrer que E est fermé si et seulement si pour tout suite $(\mathbf{x}_k)$ de E qui converge, elle converge vers un élément de E.

1.28 Soient $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $E = \{(x, f(x)) : a \le x \le b\}$ est fermé.

1.29 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ est appelé un ***point d'accumulation*** de E si pour tout $r > 0$, l'intersection $E \cap B(\mathbf{a}, r)$ contient au moins un élément autre que $\mathbf{a}$ lui-même.

1) Montrer que tous les points d'accumulation de E appartiennent à $\overline{E}$.

2) Montrer que si E admet un point d'accumulation, il possède une infinité d'éléments.

3) Supposons que E soit borné. Montrer que si E n'admet pas de point d'accumulation, il ne possède qu'un nombre fini d'éléments. Que devient ce résultat si E n'est pas considéré borné ?

4) Montrer que E est fermé si et seulement s'il contient tous ses points d'accumulation.

1.30 Soient $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$ p éléments distincts de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $E = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ est compact.

Montrer que

1.31 $E = \{([x], 0) : -0{,}5 < x < 6{,}4\}$ est compact.

1.32 $E = \{(1, [\sin x]) : x \in \mathbb{R}\}$ est compact.

1.33 Montrer que l'adhérence d'un borné est compact.

1.34 (***Propriété de l'intersection finie***) Soit E compact et soit $(E_k)_{k\in\Omega}$ une famille de fermés inclus dans E telle que pour tout sous-ensemble fini Ω_0 de Ω : $\bigcap\limits_{k\in\Omega_0} E_k \neq \emptyset$. Montrer que

$$\bigcap_{k\in\Omega} E_k \neq \emptyset\,.$$

1.35 Soit $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de compacts non vides telle que pour tout $k \in \mathbb{N} : E_{k+1} \subset E_k$. De plus, on suppose que $\lim\limits_{k\to+\infty} \sigma_k = 0$ où

$$\sigma_k = \sup\left\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x},\, \mathbf{y} \in E_k\right\}.$$

Montrer que $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k$ est un singleton.

1.36 Soit E fermé tel que

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} B\left(\mathbf{a}_k, \frac{1}{k}\right).$$

Montrer que E est compact.

1.37 Soient $E \neq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $\mathbf{a} \in E$ et posons $r = \sup\{\delta > 0 : B(\mathbf{a},\delta) \subset E\}$. Montrer que

$$\partial B(\mathbf{a}, r) \cap \partial E \neq \emptyset\,.$$

1.38 Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ un compact et $F \subset \mathbb{R}^n$ un fermé non vides. Montrer qu'il existe $\mathbf{a} \in E$ et $\mathbf{b} \in F$ tels que

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \inf\left\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x} \in E \quad \text{et} \quad \mathbf{y} \in F\right\}.$$

1.39 Soient $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Montrer que $B(\mathbf{c}, r)$ est connexe par arcs.

1.40 Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F \subset E$ un compact non vide.

1) Montrer qu'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$$\bigcup_{\mathbf{x}\in F} B(\mathbf{x}, \delta) \subset E\,.$$

2) En déduire que si $F = \overline{B(\mathbf{a}, r)}$, il existe un nombre $s > r$ tel que

$$B(\mathbf{a}, s) \subset E\,.$$

1.41 Soit $(E_k)_{k\in\Omega}$ une famille de connexes par arcs de $\mathbb{R}^n$ telle que $\bigcap\limits_{k\in\Omega} E_k \neq \emptyset$. Montrer que $\bigcup\limits_{k\in\Omega} E_k$ est connexe par arcs.

1.42 Soient E fermé et $\boldsymbol{\gamma} : [0, 1] \to E$ un chemin de E. Montrer que $\operatorname{Im}\boldsymbol{\gamma}$ est connexe par arcs et compact.

1.43 Soient E et F deux fermés non vides dont l'union $E \cup F$ et l'intersection $E \cap F$ sont connexes par arcs. En déduire que E et F sont connexes par arcs.

1.44 Montrer que l'adhérence d'un connexe est connexe. La réciproque est-elle vraie ?

1.45 Montrer qu'un connexe par arcs est connexe.

1.46 Montrer que dans $\mathbb{R}$, les uniques connexes sont les intervalles.

1.47 Montrer qu'un connexe ne peut pas être la réunion de deux fermés non vides disjoints.

1.48 Soient $E \subset F \subset \overline{E}$. Montrer que si E est connexe, F l'est aussi.

1.49 Soit $\left(E_k\right)_{k\in\Omega}$ une famille de connexes de $\mathbb{R}^n$ telle que $\bigcap_{k\in\Omega} E_k \neq \emptyset$.

Montrer que $\bigcap_{k\in\Omega} E_k$ est connexe.

1.50 Soit $E = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : x > 0\right\}$.

1) Montrer que E est connexe par arcs.

2) Montrer que

$$\overline{E} = E \cup \left\{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\right\}.$$

3) Montrer que $\overline{E}$ est connexe, mais pas connexe par arcs.

CHAPITRE 2

Fonctions de plusieurs variables

2.1 Introduction

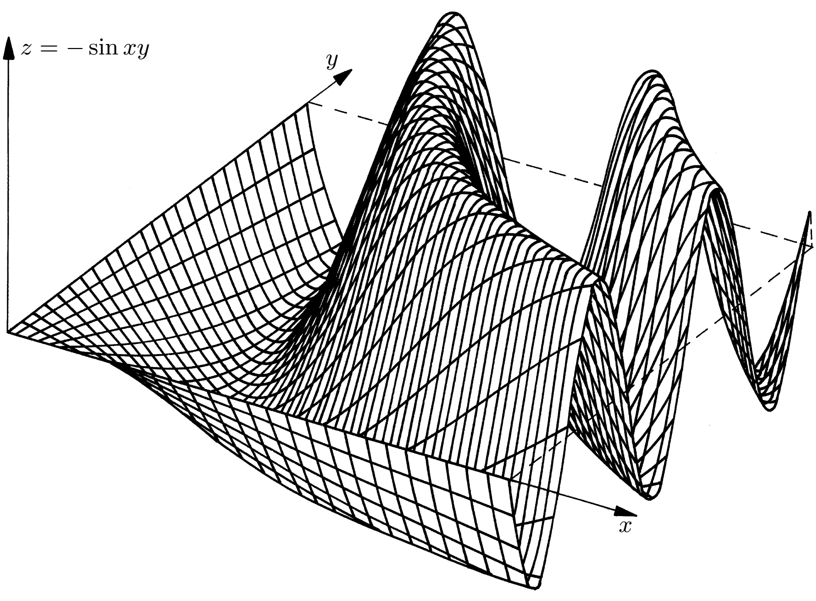
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. La correspondance, qui, à tout élément $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de E associe le nombre réel y est appelée une ***fonction*** ou encore une ***application*** de E dans $\mathbb{R}$ et on la note par $f : E \to \mathbb{R}$. Pour montrer que $f(\mathbf{x})$ est l'élément de $\mathbb{R}$ associé à $\mathbf{x}$, on utilise la notation $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$.

Par définition, E est appelé le ***domaine de définition*** de la fonction f et $\operatorname{Im} f = \big\{y \in \mathbb{R} : \exists\, \mathbf{x} \in E \text{ tel que } f(\mathbf{x}) = y\big\}$ l'***image*** de E par f .

Soit $E \subset \mathbb{R}^2$. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $\{O; e_1, e_2, e_3\}$, la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est représentée par sa ***surface***

$$\Sigma = \big\{\big(x, y, z = f(x,y)\big) : (x,y) \in E\big\}\,.$$

On désigne par $\mathbf{F}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : E \to \mathbb{R}$.



Définition 2.1 Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite ***bornée***, s'il existe un nombre réel $M \geq 0$ tel que $\mathbf{x} \in E$ implique $\bigl|f(\mathbf{x})\bigr| \leq M$.

Définition 2.2 On dit que la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ admet un ***minimum local*** en $\mathbf{a} \in E$, s'il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbf{x} \in E \cap B(\mathbf{a}, \delta)$ implique $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$.

Définition 2.3 On dit que la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ admet un ***maximum local*** en $\mathbf{a} \in E$, s'il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbf{x} \in E \cap B(\mathbf{a}, \delta)$ implique $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$.

Définition 2.4 On dit que la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ atteint son ***minimum*** en $\mathbf{a} \in E$, si $f(\mathbf{a}) = \inf\limits_{\mathbf{x} \in E} f(\mathbf{x})$. On écrit alors, $f(\mathbf{a}) = \min\limits_{\mathbf{x} \in E} f(\mathbf{x})$.

Définition 2.5 On dit que la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ atteint son ***maximum*** en $\mathbf{a} \in E$, si $f(\mathbf{a}) = \sup\limits_{\mathbf{x} \in E} f(\mathbf{x})$. On écrit alors, $f(\mathbf{a}) = \max\limits_{\mathbf{x} \in E} f(\mathbf{x})$.

2.2 Limite d'une fonction

Définition 2.6 Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite ***définie au voisinage*** du point $\mathbf{a}$ si $\mathbf{a}$ est un point intérieur à $E \cup \{\mathbf{a}\}$.

Définition 2.7 On dit qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie au voisinage du point $\mathbf{a}$ admet pour **limite** $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $\mathbf{x}$ tend vers $\mathbf{a}$ si à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer $\delta_{\mathbf{a},\varepsilon} > 0$ tel que $\mathbf{x} \in E$ et $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \delta_{\mathbf{a},\varepsilon}$ impliquent $\bigl|f(\mathbf{x}) - \ell\bigr| \leq \varepsilon$. On écrit alors, $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell$.

Proposition 2.8 *Lorsque la limite d'une fonction existe, elle est unique.*

Proposition 2.9 *Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie au voisinage du point $\mathbf{a}$ admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $\mathbf{x}$ tend vers $\mathbf{a}$ si et seulement si pour toute suite $(\mathbf{x}_k)$ d'éléments de $E \backslash \{\mathbf{a}\}$ qui converge vers $\mathbf{a}$, la suite des images $\bigl(f(\mathbf{x}_k)\bigr)$ converge vers ℓ.*

Propriétés

On suppose que $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell_1$ et $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \ell_2$. Alors,

1) Linéarité. $\forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} (\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}) = \alpha \ell_1 + \beta \ell_2\,.$$

2)
$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} (fg)(\mathbf{x}) = \ell_1 \ell_2\,.$$

3) Si $\ell_2 \neq 0$ et $\forall\ \mathbf{x} \in E \setminus \{\mathbf{a}\} : g(\mathbf{x}) \neq 0$,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{\ell_1}{\ell_2}\,.$$

4)
$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \bigl|f(\mathbf{x})\bigr| = |\ell_1|\,.$$

Proposition 2.10 *Soient* $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ *et* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{b}} f(\mathbf{x}) = \ell$ *et soient* $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n *fonctions telles que* $\lim_{t\to a} g_1(t) = b_1, \ldots, \lim_{t\to a} g_n(t) = b_n$. *De plus, on suppose qu'il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $0 < |t-a| \leq \alpha$ *implique* $\big(g_1(t), \ldots, g_n(t)\big) \neq \mathbf{b}$. *Alors,*

$$\lim_{t\to a} f\big(g_1(t), \ldots, g_n(t)\big) = \ell\,.$$

Proposition 2.11 ***(Permutation des limites)*** *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que*

1) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell\,;$

2) $\forall\, x \in \mathbb{R} : \lim_{y\to b} f(x,y)$ *existe ;*

3) $\forall\, y \in \mathbb{R} : \lim_{x\to a} f(x,y)$ *existe.*

Alors, $\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) = \ell\,.$

Proposition 2.12 ***(Théorème des deux gendarmes)*** *Soient* f, g, $h : E \to \mathbb{R}$ *trois fonctions satisfaisant les deux propriétés suivantes :*

1) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h(\mathbf{x}) = \ell\,;$

2) $\forall\, \mathbf{x} \in E \setminus \{\mathbf{a}\} : g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$.

Alors, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell$.

Proposition 2.13 *Soient* f, $g : E \to \mathbb{R}$ *deux fonctions satisfaisant les deux propriétés suivantes :*

1) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = 0\,;$

2) $\forall\, \mathbf{x} \in E \setminus \{\mathbf{a}\} : \big|f(\mathbf{x}) - \ell\big| \leq g(\mathbf{x})$.

Alors, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \ell$.

2.3 Fonctions continues

Soit $\mathbf{a} \in \mathring{E}$. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite ***continue*** en $\mathbf{a}$ si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})\,.$$

Proposition 2.14 *Soit* $\mathbf{a} \in \mathring{E}$. *Une fonction* $f : E \to \mathbb{R}$ *est continue en* $\mathbf{a}$ *si et seulement si pour toute suite* $\big(\mathbf{x}_k\big)$ *d'éléments de* E *qui converge vers* $\mathbf{a}$, *la suite des images* $\big(f(\mathbf{x}_k)\big)$ *converge vers* $f(\mathbf{a})$.

2.3.1 Propriétés

Soient f, $g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $\mathbf{a}$. Alors,

1) Linéarité. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: la fonction $(\alpha f + \beta g)$ est continue en $\mathbf{a}$.
2) Les fonctions fg, f/g et $|f|$ sont continues en $\mathbf{a}$.

Proposition 2.15 *D'une part, soient $g_1, \ldots, g_m : E \to \mathbb{R}$ m fonctions continues en $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. D'autre part, soit $f : F \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $\mathbf{b} = \big(g_1(\mathbf{a}), \ldots, g_m(\mathbf{a})\big)$. De plus, on suppose que*

$$\big\{\big(g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})\big) : \mathbf{x} \in E\big\} \subset F\,.$$

Alors, la fonction composée $h : E \to \mathbb{R}$ définie par $h(\mathbf{x}) = f\big(g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})\big)$ est continue en $\mathbf{a}$.

2.3.2 Continuité sur un sous-ensemble

Définition 2.16 Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite ***continue*** si à tout élément $(\mathbf{a}, \varepsilon) \in E \times \mathbb{R}_+^*$, on peut associer $\delta_{\mathbf{a},\varepsilon} > 0$ tel que $\mathbf{x} \in E$ et $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \delta_{\mathbf{a},\varepsilon}$ impliquent $\big|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\big| \leq \varepsilon$.

L'ensemble des fonctions continues $f : E \to \mathbb{R}$ est noté $\mathbf{C}(E, \mathbb{R})$.

1) Pour qu'une fonction continue $f : E \to \mathbb{R}$ soit continue en $\mathbf{a}$ il faut et il suffit que $\mathbf{a}$ soit un point intérieur à E.
2) Pour qu'une fonction continue $f : E \to \mathbb{R}$ soit continue en chacun de ses points il faut et il suffit que E soit ouvert.

Proposition 2.17 *Soient E un connexe et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,* $\operatorname{Im} f$ *est un intervalle.*

Proposition 2.18 *(**Théorème de Borsuk-Ulam**) Soit $f : \partial B\big((0,0), r\big) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, il existe sur $\partial B\big((0,0), r\big)$ deux points diamétralement opposés $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ pour lesquels on a $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$.*

Proposition 2.19 *Soient $a < b$, I un intervalle et $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par*

$$g(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

est continue.

Proposition 2.20 *Soient $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle et $f : [a, +\infty[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $y \in I$, l'intégrale généralisée*

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

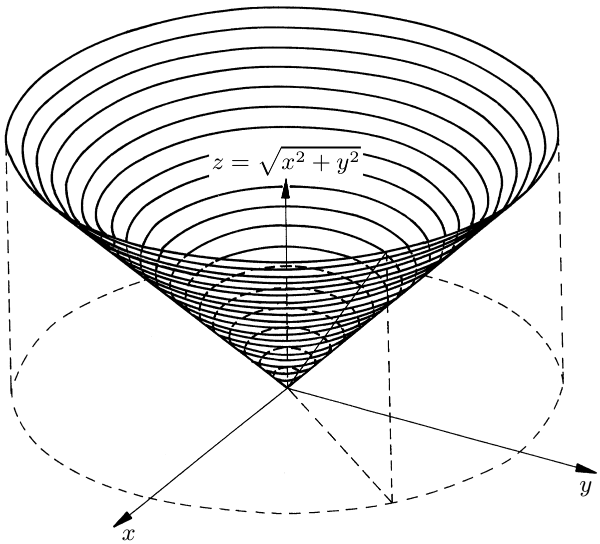
converge. De plus, on suppose qu'à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer un nombre $\alpha_\varepsilon > a$ (indépendant de y) tel que pour tout $y \in I$:

$$\left| \int_{\alpha_\varepsilon}^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| \leq \varepsilon\,.$$

Alors, la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

est continue.



2.3.3 Continuité uniforme

Définition 2.21 Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite ***uniformément continue*** si à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ et $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta_\varepsilon$ impliquent $\left|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\right| \leq \varepsilon$.

Proposition 2.22 *Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ uniformément continue est continue.*

2.3.4 Continuité sur un compact

Proposition 2.23 *Soient E un compact et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,*

1) *La fonction f est uniformément continue.*

2) *La fonction $f : E \to \mathbb{R}$ atteint son maximum et son minimum. Autrement dit, il existe deux éléments $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ de E pour lesquels on a*

$$f(\mathbf{a}) = \min_{\mathbf{x} \in E} f(\mathbf{x}) \quad \textit{et} \quad f(\mathbf{b}) = \max_{\mathbf{x} \in E} f(\mathbf{x})\,.$$

3) $\operatorname{Im} f$ *est compact.*

Proposition 2.24 *(**Théorème de la valeur intermédiaire**) Soient E un compact connexe et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,*

$$\operatorname{Im} f = \left[\min_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x})\,,\ \max_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x})\right].$$

2.3.5 Prolongement par continuité

Proposition 2.25 *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Alors, il existe une unique fonction continue $g : \overline{E} \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec f sur E. De plus, g est uniformément continue sur $\overline{E}$.*

Proposition 2.26 *(**Théorème de Tietze-Urysohn**) Soient E un fermé et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue pour laquelle il existe deux nombres réels $\alpha < \beta$ tels que pour tout $\mathbf{x} \in E : \alpha \le f(\mathbf{x}) \le \beta$. Alors, il existe une fonction continue $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec f sur E et telle que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $\alpha \le g(\mathbf{x}) \le \beta$.*

Proposition 2.27 *Soient A et B deux fermés non vides disjoints et $\alpha < \beta$ deux nombres réels. Alors, il existe une fonction continue $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

1) $\forall\, \mathbf{x} \in A : g(\mathbf{x}) = \alpha$.

2) $\forall\, \mathbf{x} \in B : g(\mathbf{x}) = \beta$.

3) $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \alpha \le g(\mathbf{x}) \le \beta$.

2.4 Exercices

Calculer

2.1 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,.$$

2.2 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,.$$

2.3 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}\,.$$

2.4 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\,.$$

2.5 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}\,.$$

2.6 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^4}\,.$$

2.7 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

2.8 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2}\,.$$

2.9 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \cos\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}\,.$$

2.10 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin y}{x^2 + y^2}\,.$$

2.11

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x^2 + \sin 2xy + \sin y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

2.12 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \sin y}{\operatorname{tg}\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

2.13 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5 + y^4}{\sin^2(x^2 + y^2)}\,.$$

2.14 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x^2 \sin y}{x^2 + \operatorname{sh}^2 y}\,.$$

2.15 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy\sin xy}{\operatorname{sh} x^2+\operatorname{sh}^2 y}$.

2.16 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2.17 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin x \ \operatorname{th} y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2.18 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{\sin(x^2+y^2)}$.

2.19 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^3y^3\,\dfrac{\sin(x^2-y^2)}{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}$.

2.20 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)+x^2\sin y}{\operatorname{sh}(x^2+y^2)}$.

2.21 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4\operatorname{tg} xy}{x^2+y^2}$.

2.22 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\operatorname{tg} y}{x^2+y^2}$.

2.23

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{Arctg} 2(x^2+y^2)+x^2\sin y}{\sin(x^2+y^2)}.$$

2.24 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\ \operatorname{th} y^2$.

2.25 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln\sqrt[4]{1+x^2+y^2}}{\operatorname{sh}(x^2+y^2)}$.

2.26

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\ln\sqrt{1+\sqrt{x^2+\left(y-1\right)^4}}}{\sin\sqrt{x^2+\left(y-1\right)^4}}.$$

2.27 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{x^2+y^2}$.

2.28 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}$.

2.29 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)$.

2.30 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{Arctg}^2\left(\sin(x^2+y^2)\right)}{\ln\left(1+\operatorname{tg}^2(x^2+y^2)\right)^2}$.

2.31 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln\left(\dfrac{1+\operatorname{sh}(x^2+y^2)}{1+x^2y^2}\right)}{\sin(x^2+y^2)}$.

2.32 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln\left(\dfrac{1+x^4+y^4}{1+x^2+y^2}\right)}{\sin(x^2+y^2)}$.

2.33 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1+\sin xy)}{\sin(x^2+y^2)}$.

2.34

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^2+y^2)+y^4\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

2.35 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^4-y^4)+\sin 2(x^2+y^2)}{(x^6+y^6)} \times \ln\left(1+\left(x^2-y^2\right)^2+x^2y^2\right).$$

Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ pour les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définies par

2.36 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{y} & \text{si } y\neq 0 \\ 0 & \text{si } y=0\,. \end{cases}$

2.37 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin xy}{\operatorname{Arctg} y} & \text{si } y\neq 0 \\ 0 & \text{si } y=0\,. \end{cases}$

2.38 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{th} xy}{y} & \text{si } y\neq 0 \\ 0 & \text{si } y=0\,. \end{cases}$

2.39 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y}\,e^{-\frac{1}{x^2y^2}} & \text{si } xy\neq 0 \\ 0 & \text{si } xy=0\,. \end{cases}$

2.40 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y}{x^2}\,e^{-\frac{y}{x^2}} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0\,. \end{cases}$$

Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$.

2.41 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y}{x^2}\,e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0\,. \end{cases}$$

Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ pour les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

2.42 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 1 & \text{si } xy = 0\,. \end{cases}$

2.43 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 1 & \text{si } xy = 0\,. \end{cases}$

2.44 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^4 - y^4)}{\operatorname{sh} xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0\,. \end{cases}$

2.45 Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{2y^4}{x^2 + y^4}\,.$$

1) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $\lim_{t\to 0} f(t, \alpha t) = 0$.

2) Peut-on en déduire que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe ?

Etudier la continuité des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

2.46 $f(x,y) = \begin{cases} y + \dfrac{1}{y} \operatorname{Arctg}(x^2 y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0\,. \end{cases}$

2.47 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y^2} \operatorname{th}(xy^2) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$

2.48

$$f(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2xy}{x^2 \sin^2 t + y^2 \cos^2 t}\, dt & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

2.49 $f(x,y) = \begin{cases} xy \ln \left|\dfrac{x}{y}\right| & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0\,. \end{cases}$

2.50 $f(x,y) = \begin{cases} x\, e^{\operatorname{Arctg} \frac{y}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$

2.51 Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\} \cup \{(0,0)\}$. Montrer qu'il n'existe aucun nombre réel α pour lequel la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sqrt{x-y}} & \text{si } x > y \\ \alpha & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

est continue.

2.52 Soient α_1, α_2, β_1, β_2 et γ cinq constantes positives et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{\alpha_1} |y|^{\alpha_2}}{\left(|x|^{\beta_1} + |y|^{\beta_2}\right)^{\gamma}} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0\,. \end{cases}$$

Montrer que

$$f \text{ continue en } (0,0) \Longleftrightarrow \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} > \gamma\,.$$

2.53 Comment faut-il choisir la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y \left[\dfrac{x}{y}\right] & \text{si } y \neq 0 \\ g(x) & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

soit continue aux points $(a, 0)$?

2.54 Comment faut-il choisir la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y} \ln\left(1 + \dfrac{e^y - 1}{x^2 + 1}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ g(x) & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

soit continue aux points $(a, 0)$?

2.55 Comment faut-il choisir la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\, e^x - y\, e^y}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ g(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

soit continue aux points (a, a) ?

2.56 Comment faut-il choisir la fonction $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ de sorte que la fonction $f :]0,1[\times]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y \operatorname{cotg}\left(y\sqrt{x}\right) & \\ \quad \text{si } x \in]0,1[& \\ \quad \text{et } y \in]-\pi,0[\cup]0,\pi[& \\ g(x) \text{ si } x \in]0,1[\text{ et } y = 0 & \end{cases}$$

soit continue aux points $(a,0)$ avec $0 < a < 1$?

2.57 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1) Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0\,.$$

2) Peut-on en déduire que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \text{ ?}$$

2.58 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1) Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0\,.$$

2) Peut-on en déduire que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \text{ ?}$$

2.59 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \cos\dfrac{1}{x}\, \cos\dfrac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0\,. \end{cases}$$

Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \text{ et } \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

n'existent pas, mais que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0\,.$$

2.60 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x\,v(y) + y\,v(x)$ où $v(t) = 1$ si t est rationnel et 0 si t est irrationnel. Montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

et que

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \text{ et } \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

n'existent pas.

2.61 Montrer que

$$\lim_{y\to+\infty} \int_0^1 2xy\, e^{-x^2y}\, dx \neq \int_0^1 \left(\lim_{y\to+\infty} 2xy\, e^{-x^2y}\right) dx\,.$$

2.62 Calculer

1) $\displaystyle\max_{0\le x,y\le 1} (x^2y - y^2x)$.

2) $\displaystyle\max_{0\le x,y,z\le 1} \left(x^2y + y^2z + z^2x - x^2z - y^2x - z^2y\right)$.

2.63 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1,\ldots,x_n) = x_n\, g(x_1)$ est continue.

2.64 Soient $f, g : \overline{E} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que si elles coïncident sur E, elles coïncident sur $\overline{E}$.

2.65 Soient $f, g : \overline{E} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $\mathbf{x} \in E$: $f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x})$. Montrer que cette inégalité reste valable sur $\overline{E}$.

2.66 Soient $\left(A_k\right)_{k\in\Omega}$ une famille d'ouverts non vides et $f : \bigcup_{k\in\Omega} A_k \to \mathbb{R}$ une fonction dont la restriction à chaque A_k est continue. Montrer que f est continue.

2.67 Soient $\left(B_k\right)_{k\in\Omega}$ une famille de fermés non vides et $f : \bigcup_{k\in\Omega} B_k \to \mathbb{R}$ une fonction dont la restriction à chaque B_k est continue. Peut-on en déduire que la fonction f est continue ?

2.68 Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et I un intervalle ouvert. Montrer que $E = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \in I\right\}$ est ouvert.

2.69 Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et I un intervalle fermé. Montrer que $E = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \in I\right\}$ est fermé.

2.70 Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\right\}$ est fermé.

2.71 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) < \alpha\right\}$$

et

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) > \alpha\right\}$$

sont des ouverts. Montrer que f est continue.

2.72 Soient E un compact et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est compact.

2.73 Soient E un connexe et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est un intervalle.

2.74 Soient E un connexe et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue ne s'annulant pas. Montrer que f garde un signe constant sur E.

2.75 Soient E un connexe et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que s'il existe deux éléments $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ de E pour lesquels $f(\mathbf{a})f(\mathbf{b}) \leq 0$, la fonction f s'annule au moins une fois dans E.

2.76 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré 0. Montrer que si f est continue en $\mathbf{0}$, elle est constante.

2.77 Soient E un connexe et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction ***localement constante***. Autrement dit : $\forall\, \mathbf{a} \in E$, $\exists\, \delta_{\mathbf{a}} > 0$ tel que

$$\mathbf{x} \in E \cap B(\mathbf{a}, \delta_{\mathbf{a}}) \Rightarrow f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})\,.$$

Montrer que la fonction f est constante.

2.78 Soit $E \neq \emptyset$. La fonction $d(\,\cdot\,, E) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$d(\mathbf{x}, E) = \inf\left\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in E\right\}$$

est appelée la ***distance*** du point $\mathbf{x}$ au sous-ensemble E. Montrer que

1) $d(\mathbf{x}, E) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} \in \overline{E}$.
2) La fonction $d(\,\cdot\,, E) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est uniformément continue.

2.79 Soient A et B deux fermés non vides disjoints. Trouver une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} -1 & \text{si } \mathbf{x} \in A \\ 1 & \text{si } \mathbf{x} \in B \end{cases}$$

et $-1 < f(\mathbf{x}) < 1$ si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus (A \cup B)$.

2.80 Un agriculteur possédant deux champs A et B désire les partager entre ses deux enfants. Son idée est de tracer une ligne droite sur le plan cadastral qu'il possède de sorte que chacun de ses deux champs soient divisés en deux parties strictement égales. En utilisant le théorème de Borsuk-Ulam, montrer qu'une telle droite existe.

Chapitre 3

Dérivées partielles

3.1 Introduction

Soient $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction et $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in E$. Si la fonction d'une variable $f_k : \{x \in \mathbb{R} : (a_1, \ldots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \ldots, a_n) \in E\} \to \mathbb{R}$ définie par

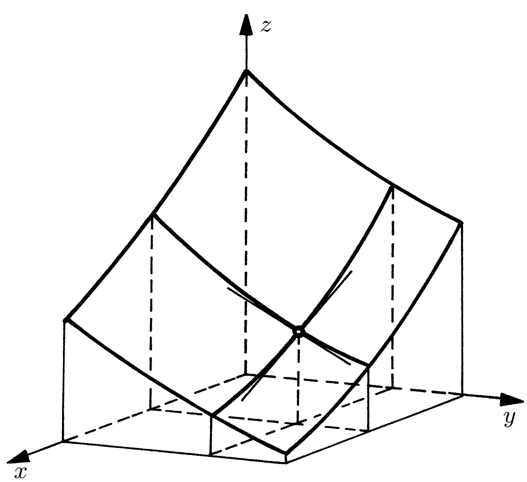
$$f_k(x) = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

possède une dérivée en a_k, on dit que la fonction f admet une ***dérivée partielle par rapport à*** x_k en $\mathbf{a}$ et on écrit

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, \ldots, a_n) = f_k'(a_k)\,.$$

Par définition,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, \ldots, a_n) = \lim_{x \to a_k} \frac{f\big(a_1, \ldots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \ldots, a_n\big) - f\big(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\big)}{x - a_k}\,.$$



Définition 3.1 Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction dont la dérivée partielle par rapport à x_k existe en tout point de E. Alors, la fonction

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : E \to \mathbb{R}$$

est appelée la ***dérivée partielle*** de f par rapport à x_k.

Définition 3.2 Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction dont les n dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\,, \ldots\,, \frac{\partial f}{\partial x_n} : E \to \mathbb{R}$$

existent. Alors, la fonction $\nabla f : E \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\nabla f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n)\,, \ldots\,, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n)\right)$$

est appelée le ***gradient*** de la fonction f.

Proposition 3.3 *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction dont les n dérivées partielles*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : E \to \mathbb{R}$$

existent et sont continues en $\mathbf{a}$. *Alors, la fonction f est aussi continue en* $\mathbf{a}$.

Définition 3.4 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathbf{C}^1$ si les n fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\,, \ldots\,, \frac{\partial f}{\partial x_n} : E \to \mathbb{R}$$

existent et sont continues.

D'après la proposition précédente, toute fonction de classe $\mathbf{C}^1$ est continue.

Proposition 3.5 *Soient $a < b$ deux nombres réels, I un intervalle ouvert et $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue dont la dérivée partielle par rapport à y est continue. Alors, la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par*

$$g(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

est de classe $\mathbf{C}^1$ *et, de plus, pour tout $y \in I$:*

$$g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx\,.$$

Proposition 3.6 *Soient $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle ouvert et $f : [a, +\infty[\, \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant les trois propriétés suivantes :*

1) la fonction $\frac{\partial f}{\partial y} : [a, +\infty[\, \times I \to \mathbb{R}$ est continue ;

2) pour tout $y \in I$, les deux intégrales généralisées

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx \quad \text{et} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$$

convergent ;

3) à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer un nombre $\alpha_\varepsilon > a$ (indépendant de y) tel que les relations $\beta \geq \alpha_\varepsilon$ et $y \in I$ impliquent

$$\left| \int_\beta^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx \right| \leq \varepsilon\,.$$

Alors, la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

est de classe $\mathbf{C}^1$ et, de plus, pour tout $y \in I$:

$$g'(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx\,.$$

Proposition 3.7 *D'une part, soient $g_1, \dots, g_m : E \to \mathbb{R}$ m fonctions de classe $\mathbf{C}^1$. D'autre part, soit $f : F \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^1$. De plus, on suppose que*

$$\big\{ \big(g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})\big) : \mathbf{x} \in E \big\} \subset F\,.$$

Alors, la fonction composée $h : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(\mathbf{x}) = f\big(y_1 = g_1(\mathbf{x}), \dots, y_m = g_m(\mathbf{x})\big)$$

est de classe $\mathbf{C}^1$ et, de plus, pour tout $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in E$ et tout entier $1 \leq p \leq n$:

$$\frac{\partial h}{\partial x_p}(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}\big(g_1(\mathbf{a}), \dots, g_m(\mathbf{a})\big) \frac{\partial g_k}{\partial x_p}(\mathbf{a})\,.$$

En particulier, si E est un intervalle ouvert, on a pour tout $t \in E$:

$$h'(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}\big(g_1(t), \dots, g_m(t)\big)\, g_k'(t)\,.$$

Proposition 3.8 *Soient I et I_1 deux intervalles ouverts, $f : I_1 \times I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^1$ et $g, h : I \to I_1$ deux fonctions de classe $\mathbf{C}^1$. Alors, la fonction $v : I \to \mathbb{R}$ définie par*

$$v(t) = \int_{h(t)}^{g(t)} f(x, t)\, dx$$

est de classe $\mathbf{C}^1$ *et, de plus, pour tout* $t \in I$:

$$v'(t) = f\big(g(t), t\big)\, g'(t) - f\big(h(t), t\big)\, h'(t) + \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\,(x,t)\,dx\,.$$

3.1.1 Plan tangent

Soient $E \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^1$. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $\{O; e_1, e_2, e_3\}$, cette fonction est représentée par la surface $\Sigma = \big\{\big(x, y, z = f(x,y)\big) : (x,y) \in E\big\}$.

Fixons $(a,b) \in E$ et soient I un intervalle ouvert, $t_0 \in I$ et $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathbf{C}^1$ telles que $\varphi(t_0) = a$, $\psi(t_0) = b$ et $\big\{\big(\varphi(t), \psi(t)\big) : t \in I\big\} \subset E$. Alors, l'application $\boldsymbol{\rho} : I \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \Big(\varphi(t), \psi(t), \alpha(t) = f\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\Big)$$

est une ***courbe*** sur la surface Σ qui passe par le point $P = \big(a, b, c = f(a,b)\big)$ et dont le vecteur tangent en ce point est $\boldsymbol{\rho}'(t_0) = \big(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \alpha'(t_0)\big)$. Ainsi, en constatant que pour tout $t \in I$: $-\alpha(t) + f\big(\varphi(t), \psi(t)\big) = 0$, on obtient, en dérivant cette égalité par rapport à t, que

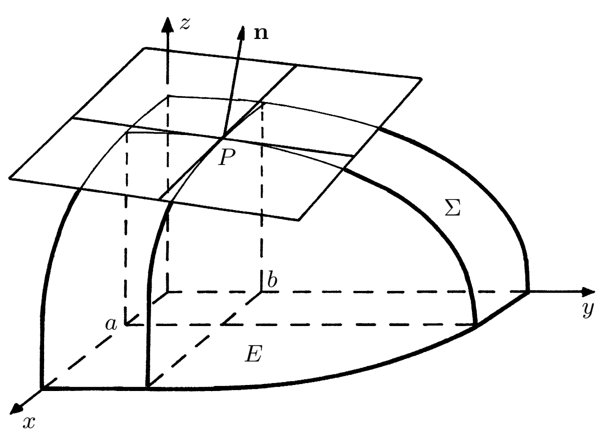
$$-\alpha'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\,(a,b)\varphi'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\,(a,b)\psi'(t_0) = 0\,;$$

ce qui revient à dire que les deux vecteurs

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,(a,b),\ \frac{\partial f}{\partial y}\,(a,b),\ -1\right) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\rho}'(t_0)$$

sont orthogonaux ou encore que le vecteur tangent à la courbe $\boldsymbol{\rho}(t)$ au point P se trouve dans le plan orthogonal au vecteur $\mathbf{n}$ qui passe par P. Par définition, ce plan est appelé le ***plan tangent*** à la surface Σ au point P. Son équation est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}\,(a,b)(y-b) - \big(z - f(a,b)\big) = 0\,.$$



3.1.2 Dérivée suivant une direction donnée

Soient le point $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, la direction $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ avec $\|\mathbf{v}\| = 1$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^1$. Soit $f_{\mathbf{v}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la nouvelle fonction définie par

$$f_{\mathbf{v}}(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = f(a_1 + tv_1, \ldots, a_n + tv_n)\,.$$

Puisque la fonction f est de classe $\mathbf{C}^1$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

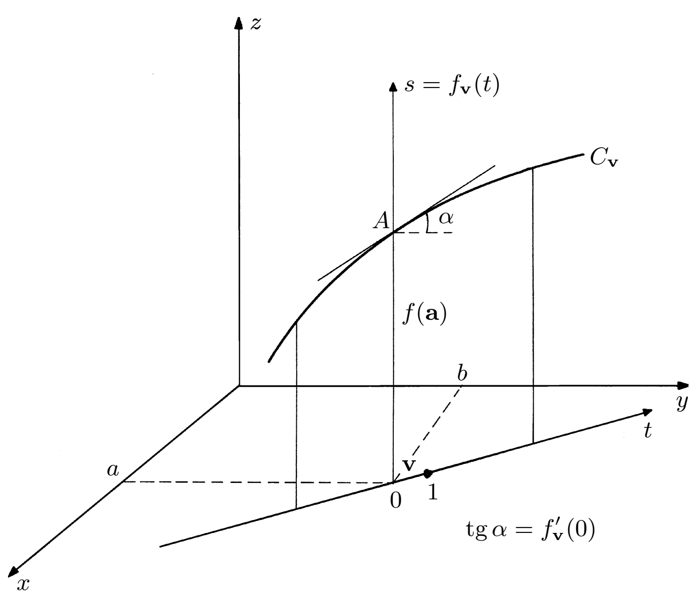
$$f'_{\mathbf{v}}(t) = \sum_{k=1}^{n} v_k \, \frac{\partial f}{\partial x_k}\,(\mathbf{a} + t\mathbf{v})\,.$$

Par définition,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\,(\mathbf{a}) = f'_{\mathbf{v}}(0) = \sum_{k=1}^{n} v_k \, \frac{\partial f}{\partial x_k}\,(\mathbf{a}) = \big\langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{v} \big\rangle$$

est appelée la ***dérivée de la fonction*** f ***dans la direction*** $\mathbf{v}$ au point $\mathbf{a}$.

D'un point de vue purement géométrique, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a})$ représente la pente de la tangente à la courbe $C_{\mathbf{v}}$ de la fonction $f_{\mathbf{v}}$ au point $A = \big(0, f(\mathbf{a})\big)$.



Cas particuler : Si $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$, $\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a})\right|$ est

1) maximale si $\mathbf{v} = \pm\dfrac{\nabla f(\mathbf{a})}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|}$,

2) minimale si $\big\langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{v} \big\rangle = 0$.

Remarque : Si $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, pour toute direction $\mathbf{v}$: $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = 0$. Dans ce cas, pour $n = 2$, le plan tangent à la surface $\Sigma = \big\{\big(x, y, z = f(x, y)\big) : (x, y) \in E\big\}$ au point $P = \big(a, b, f(a, b)\big)$ est horizontal.

3.1.3 Fonction homogène

Définition 3.9 Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite **homogène** de degré $\alpha \in \mathbb{R}$, si pour tout $\mathbf{x} \in E$ et tout scalaire $t > 0$:

$$t\mathbf{x} \in E \quad \text{et} \quad f(t\mathbf{x}) = t^{\alpha} f(\mathbf{x}) .$$

Remarque : Une fonction homogène n'est pas obligatoirement continue.

Proposition 3.10 *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré α. Alors, si la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_k} : E \to \mathbb{R}$ existe, elle est homogène de degré $\alpha - 1$.*

Proposition 3.11 *(**Théorème d'Euler**) Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert tel que pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ et tout scalaire $t > 0$: $t\mathbf{x} \in E$. Alors, une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ est homogène de degré α si et seulement si pour tout $\mathbf{x} \in E$:*

$$\alpha f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_n) .$$

*Cette égalité est appelée la **relation d'Euler**.*

3.1.4 Jacobien

Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $\mathbf{a} \in E$ et $f_1, \ldots, f_n : E \to \mathbb{R}$ n fonctions de classe $\mathbf{C}^1$. Alors, le déterminant

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(\mathbf{a}) = \det \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

est appelé le ***jacobien*** des n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ au point $\mathbf{a}$.

3.2 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une dérivée partielle par rapport à x_k. Si la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_k} : E \to \mathbb{R}$ admet à son tour une dérivée partielle par rapport à x_p, on aura la nouvelle fonction

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p} = \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) : E \to \mathbb{R} .$$

Dans le cas particulier où $p = k$, on écrit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}\,.$$

Les fonctions

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p} : E \to \mathbb{R}$$

sont appelées les ***dérivées partielles secondes*** ou encore d'ordre 2 de la fonction f.

De proche en proche, on peut définir ainsi, lorsqu'elles existent, les ***dérivées partielles d'ordre*** q de la fonction f. Par exemple, la dérivée partielle d'ordre q de la fonction f par rapport aux variables $x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}$ (prises dans cette ordre) sera notée $\frac{\partial^q f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_q}}$.

Définition 3.12 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On dit qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathbf{C}^m$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre m existent et sont continues. $\mathbf{C}^0$ désignant l'ensemble des fonctions continues et $\mathbf{C}^\infty$ l'ensemble des fonctions dont toutes les dérivées partielles successives existent et sont continues. D'où

$$\mathbf{C}^\infty \subset \cdots \subset \mathbf{C}^{m+1} \subset \mathbf{C}^m \subset \cdots \subset \mathbf{C}^1 \subset \mathbf{C}^0\,.$$

Proposition 3.13 ***(Théorème de Schwarz)*** *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction dont les deux dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k}$: $E \to \mathbb{R}$ existent et sont continues en $\mathbf{a}$. Alors,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k}(\mathbf{a})\,.$$

Proposition 3.14 *Soient $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^m$ et p un entier compris entre 1 et m. Si les deux p-tuples ordonnés $(r_1, \ldots, r_p)$ et $(s_1, \ldots, s_p)$ sont égaux à une permutation près, on a pour tout $\mathbf{x} \in E$:*

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{r_1} \cdots \partial x_{r_p}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^p f}{\partial x_{s_1} \cdots \partial x_{s_p}}(\mathbf{x})\,.$$

Définition 3.15 Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction dont les n dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} : E \to \mathbb{R}$ existent. Alors, la fonction $\Delta f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Delta f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x_1, \ldots, x_n)$$

est appelée le ***laplacien*** de la fonction f.

Définition 3.16 Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite ***harmonique*** si elle est de classe $\mathbf{C}^2$ et si pour tout $\mathbf{x} \in E$: $\Delta f(\mathbf{x}) = 0$.

3.2.1 Polynôme de Taylor

Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $\mathbf{a} \in E$, $\delta > 0$ (choisi de manière que $B(\mathbf{a}, 2\delta) \subset E$) et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^{m+1}$. Alors, à chaque élément $\mathbf{x}$ de $B(\mathbf{a}, \delta)$, on peut associer $\theta_{\mathbf{x}} \in \,]0, 1[$ de sorte que l'on ait l'égalité suivante (dite ***formule de Taylor***) :

$$f(\mathbf{x}) = g(1) = g(0) + g'(0) + \cdots + \frac{g^{(m)}(0)}{m!} + \frac{g^{(m+1)}(\theta_{\mathbf{x}})}{(m+1)!}\,.$$

où $g : \,]-2, 2[\, \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $g(t) = f\big(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})\big)$. Par définition, la fonction polynomiale $P_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$P_m(\mathbf{x}) = g(0) + g'(0) + \cdots + \frac{g^{(m)}(0)}{m!}$$

est appelé le ***polynôme de Taylor d'ordre*** m de la fonction f autour de $\mathbf{a}$.

Cas particuliers :

1) (***Théorème des accroissements finis***) Pour $m = 0$:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(\mathbf{a}+\theta_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{a})\big)\,(x_k - a_k)\,.$$

2) Pour $n = 2$, le polynôme de Taylor d'ordre 2 autour de (a, b) est donné par

$$\begin{aligned} P_2(x,y) = \\ & f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right). \end{aligned}$$

3.2.2 Point stationnaire

Définition 3.17 On dit que $\mathbf{a} \in E$ est un ***point stationnaire*** de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ si $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Proposition 3.18 *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un extremum local en $\mathbf{a}$ et telle que $\nabla f(\mathbf{a})$ existe. Alors, $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.*

Proposition 3.19 *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un extremum local en $\mathbf{a}$. Alors, $\mathbf{a}$ se trouve forcément parmi les points suivants :*

1) $\mathbf{x} \notin \mathring{E}$ *;*

2) $\mathbf{x} \in \mathring{E}$ *et* $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ *;*

3) $\mathbf{x} \in \mathring{E}$ *et* $\nabla f(\mathbf{x})$ *n'existe pas.*

Proposition 3.20 *Soit* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathbf{C}^2$ *telle que* $\nabla f(a,b) = \mathbf{0}$ *et posons*

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \quad et \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\,.$$

Alors,

1) si $s^2 - rt < 0$ *et* $r > 0$*, la fonction* f *admet un minimum local en* (a,b) *;*

2) si $s^2 - rt < 0$ *et* $r < 0$*, la fonction* f *admet un maximum local en* (a,b) *;*

3) si $s^2 - rt > 0$*, la fonction* f *n'admet pas d'extremum local en* (a,b)*.*

3.2.3 Extrema liés

Proposition 3.21 ***(Théorème de Lagrange)*** *Soient* $E \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert,* $1 \leq p < n$*,* $\mathbf{a} \in E$ *et* $f, g_1, \ldots, g_p : E \to \mathbb{R}$ $p+1$ *fonctions de classe* $\mathbf{C}^1$*. De plus, on suppose que* $g_1(\mathbf{a}) = \ldots = g_p(\mathbf{a}) = 0$ *et*

$$rg\begin{pmatrix} \nabla g_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \nabla g_p(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = p\,.$$

Alors, pour que la restriction de la fonction f *à* $\big\{\mathbf{x} \in E : g_1(\mathbf{x}) = 0, \ldots, g_p(\mathbf{x}) = 0\big\}$ *admette un extremum local en* $\mathbf{a}$*, il faut qu'il existe* p *scalaires* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *tels que*

$$\nabla\left(f + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k g_k\right)(\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

Par définition, les p scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont appelés des ***multiplicateurs de Lagrange*** et

$$L = f + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k g_k : E \to \mathbb{R}$$

la ***fonction de Lagrange***.

Remarques :

1) Puisque la condition est nécessaire mais pas suffisante, l'existence des p scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ne garantit pas celle de l'extremum local en $\mathbf{a}$.
2) Si $p = 1$: $rg\big(\nabla g_1(\mathbf{a})\big) = 1 \iff \nabla g_1(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$.

3.3 Théorème des fonctions implicites

Proposition 3.22 ***(Théorème des fonctions implicites)*** *Soient* $n, p \in \mathbb{N}^*$ *et* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathbf{C}^p$ *telle que*

$$f(a_1, \ldots, a_{n+1}) = 0 \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(a_1, \ldots, a_{n+1}) \neq 0\,.$$

Alors, il existe localement une unique fonction continue $\phi : B\big((a_1, \ldots, a_n), \delta\big) \to \mathbb{R}$ *vérifiant les deux propriétés suivantes :*

1) $\phi(a_1, \ldots, a_n) = a_{n+1}$.

2) $\forall\,(x_1, \ldots, x_n) \in B\big((a_1, \ldots, a_n), \delta\big)$ *:* $f\big(x_1, \ldots, x_n, \phi(x_1, \ldots, x_n)\big) = 0$.

De plus, ϕ *est de classe* $\mathbf{C}^p$*.*

3.3.1 Pour les fonctions à deux variables

1) Le vecteur $\nabla f(a,b)$ est normal à la courbe

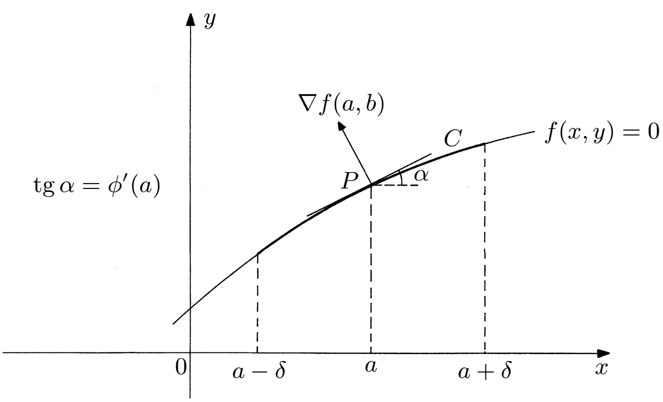
$$C = \big\{\big(x, y = \phi(x)\big) : |x - a| < \delta\big\}$$

au point $P = (a,b)$. De plus, la pente de sa tangente en ce point est donnée par

$$\phi'(a) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\,(a,b)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\,(a,b)}\,.$$

2) Si $p \geq 2$ et $\phi'(a) = 0$:

$$\phi''(a) = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(a,b)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\,(a,b)}\,.$$



3.3.2 Pour les fonctions à trois variables

1) Puisque

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}\,(a,b) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\,(a,b,c)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}\,(a,b,c)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}\,(a,b) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}\,(a,b,c)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}\,(a,b,c)}\,,$$

le vecteur $\nabla f(a,b,c)$ est normal à la surface

$$\Sigma = \big\{\big(x,y,z=\phi(x,y)\big) : (x,y) \in B\big((a,b),\delta\big)\big\}$$

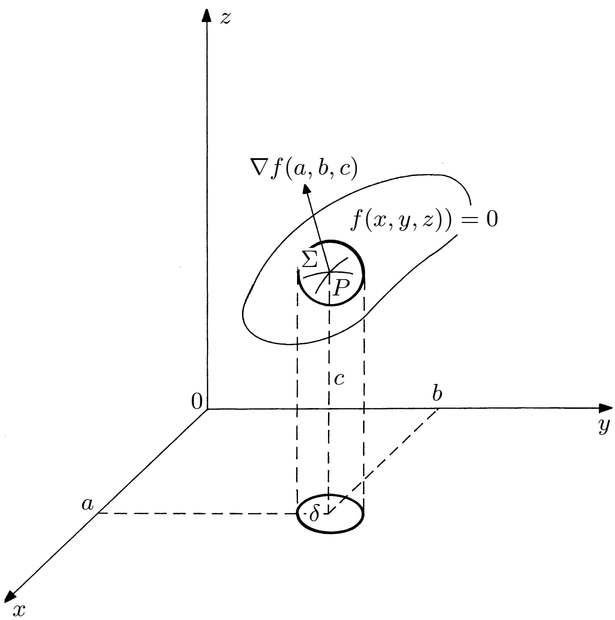
au point $P=(a,b,c)$. De plus, l'équation de son plan tangent en ce point est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)(y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)(z-c) = 0\,.$$

2) Si $p \geq 2$ et $\nabla\phi(a,b) = \mathbf{0}$:

$$r = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(a,b) = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)}\,, \quad s = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}(a,b) = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b,c)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)}\,,$$

$$t = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}(a,b) = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)}\,.$$



Proposition 3.23 ***(Théorème des fonctions implicites généralisé)*** *Soient $n,m,p \in \mathbb{N}^*$ et $f_1,\dots,f_m : E \to \mathbb{R}$ m fonctions de classe $\mathbf{C}^p$ telles que pour $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_n,a_{n+1},\dots,a_{n+m}) \in E$, on a*

$$\forall\, k \in \{1,\dots,m\} : f_k(\mathbf{a}) = 0 \quad \textit{et} \quad \frac{D(f_1,\dots,f_m)}{D(x_{n+1},\dots,x_{n+m})}(\mathbf{a}) \neq 0\,.$$

Alors, il existe localement m uniques fonctions continues

$$\phi_1, \ldots, \phi_m : B\big((a_1, \ldots, a_n), \delta\big) \to \mathbb{R}$$

vérifiant les deux propriétés suivantes :

1) $\forall\, k \in \{1, \ldots, m\} : \phi_k(a_1, \ldots, a_n) = a_{n+k}$.

2) $\forall\, k \in \{1, \ldots, m\}$ *et* $(x_1, \ldots, x_n) \in B\big((a_1, \ldots, a_n), \delta\big)$ *:*

$$f_k\big(x_1, \ldots, x_n,\, \phi_1(x_1, \ldots, x_n),\, \ldots,\, \phi_m(x_1, \ldots, x_n)\big) = 0\,.$$

De plus, les m fonctions $\phi_1, \ldots, \phi_m$ sont de classe $\mathbf{C}^p$.

3.4 Formes différentielles

Soient I_1 et I_2 deux intervalles ouverts et $M, N : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors, l'équation différentielle

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \tag{3.1}$$

est appelée une ***forme différentielle***. De plus, lorsque les deux fonctions M, N sont de classe $\mathbf{C}^1$ et que pour tout $(x,y) \in I_1 \times I_2$:

$$\frac{\partial M}{\partial y}\,(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}\,(x,y)\,,$$

on dit que la forme différentielle (3.1) est ***exacte***.

Définition 3.24 Une fonction $y : I \to I_2$ de classe $\mathbf{C}^1$ où I est un intervalle ouvert inclus dans I_1 est dite solution de la forme différentielle (3.1) si pour tout $x \in I$:

$$M\big(x, y(x)\big) + N\big(x, y(x)\big)y'(x) = 0\,.$$

Remarque : Le vecteur $\Big(M\big(x, y(x)\big), N\big(x, y(x)\big)\Big)$ est normal en chacun de ses points à la courbe C de la solution $y = y(x)$.

Proposition 3.25 *Soit $(a,b) \in I_1 \times I_2$ et posons pour tout $(x,y) \in I_1 \times I_2$:*

$$\chi(x,y) = \int_a^x M(t,y)\,dt + \int_b^y N(a,t)\,dt\,.$$

Alors, si la forme différentielle (3.1) est exacte, on a :

1) $\forall\,(x,y) \in I_1 \times I_2 : \nabla\chi(x,y) = \big(M(x,y), N(x,y)\big)$.

2) Pour qu'une fonction $y : I \to I_2$ de classe $\mathbf{C}^1$ soit solution de la forme différentielle exacte (3.1) il faut et il suffit qu'il existe une constante c telle que pour tout $x \in I$: $\chi\,(x, y(x)) = c$.

Proposition 3.26 *(**Existence et unicité locale**) Soit $(a,b) \in I_1 \times I_2$. Alors, si $N(a,b) \neq 0$, la forme différentielle exacte (3.1) admet une solution $y : I \to I_2$, localement unique au voisinage de a, qui satisfait la condition initiale $y(a) = b$. De plus, pour tout $x \in I$: $\chi\big(x, y(x)\big) = 0$.*

Proposition 3.27 *Soient M, N : $]0,+\infty[\times]-\infty,+\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, homogènes de degré α. Alors, en faisant le changement de variable $y(x) = x\, z(x)$, la forme différentielle (3.1) se transforme en l'équation à variables séparées*

$$\frac{-1}{x} = \frac{N\big(1, z(x)\big)}{M\big(1, z(x)\big) + z(x) N\big(1, z(x)\big)}\, z'(x)\,.$$

3.4.1 Facteur intégrant

Définition 3.28 Si les deux fonctions $M, N : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathbf{C}^1$, une fonction $\mu : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}^*$ de classe $\mathbf{C}^1$ est appelée un ***facteur intégrant*** de la forme differentielle (3.1) si

$$\mu(x,y)\, M(x,y) + \mu(x,y)\, N(x,y) y' = 0 \tag{3.2}$$

est une forme différentielle exacte.

Remarque : Si la forme différentielle (3.1) possède un facteur intégrant, ses solutions coïncident avec celles de la forme différentielle exacte (3.2). En particulier, si $(a,b) \in I_1 \times I_2$ et $N(a,b) \neq 0$, la forme différentielle (3.1) admet une solution $y : I \to I_2$, localement unique au voisinage de a, qui satisfait la condition initiale $y(a) = b$. De plus, cette solution vérifie l'égalité

$$\chi(x,y) = \int_a^x \mu(t,y)\, M(t,y)\, dt + \int_b^y \mu(a,t)\, N(a,t)\, dt = 0\,.$$

Proposition 3.29 *Supposons que $M, N : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathbf{C}^1$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1) $\forall\, (x,y) \in I_1 \times I_2$: $N(x,y) \neq 0$;

2) $\forall\, (x,y) \in I_1 \times I_2$:

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{N(x,y)} = f(x)\,.$$

Alors, si $a \in I_1$, la fonction $\mu : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mu(x,y) = \widehat{\mu}(x) = e^{-\int_a^x f(t)dt}$$

est un facteur intégrant de la forme différentielle (3.1).

Proposition 3.30 *Supposons $M, N : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathbf{C}^1$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1) $\forall (x,y) \in I_1 \times I_2 : M(x,y) \neq 0\,;$

2) $\forall (x,y) \in I_1 \times I_2 :$

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{M(x,y)} = g(y)\,.$$

Alors, si $b \in I_2$, la fonction $\mu : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mu(x,y) = \widehat{\mu}(y) = e^{\int_b^y g(t)\,dt}$$

est un facteur intégrant de la forme différentielle (3.1).

3.5 Exercices

3.1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que $\nabla f(0,0) = \mathbf{0}$ mais que la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

3.2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y^2} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0\,. \end{cases}$$

Montrer que $\nabla f(0,0) = \mathbf{0}$ mais que la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

3.3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Montrer que $\nabla f(0,0) = \mathbf{0}$ mais que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

3.4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\,.$$

3.5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} + y^2 \sin\dfrac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0,\ y = 0 \\ y^2 \sin\dfrac{1}{y} & \text{si } x = 0,\ y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = y = 0\,. \end{cases}$$

Montrer que les deux fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont continues en $(0,0)$ mais que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$ n'existent pas.

3.6 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln\big(|x|+|y|\big) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathbf{C}^1$.

3.7 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}-z^3\right)-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Calculer $\nabla f(0,0,0)$.

3.8 Pour la fonction $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2y^2(1-\ln y^3)$, calculer la valeur de l'expression

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,2) + 5\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(3,2) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,2)\,.$$

3.9 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \int_y^{x^2+y^2} \ln(2+x^2+y^2+t^2)\,dt\,.$$

Calculer $\nabla f(1,0)$.

3.10 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2\,\mathrm{th}\left(\dfrac{y+z^2}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Calculer $\nabla f(0,1,1)$.

3.11 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = e^{x-1}\sin xy\,.$$

Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$.

3.12 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = xy + \ln\sqrt[3]{1+x^2+2y^4}\,.$$

Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(1,0)$.

3.13 Soit $f : B\big((0,0),2\big) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}\,.$$

Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(1,0)$.

3.14 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction de classe $\mathbf{C}^1$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}\,x^2y}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ x^2 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(1,0)$.

3.15 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y^2 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(0,1)$.

3.16 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \cos(x^2+y)+\sin(x+y)+e^{x^3y}\,.$$

Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

3.17 Trouver une fonction homogène $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de degré 2 qui n'est pas continue.

3.18 Soit $f : \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\big\} \to \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré α telle que $f(1,0) = 0$. Montrer que pour tout $a > 0$: $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = 0$.

3.19 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^1$, homogène de degré $\alpha \neq 1$. Montrer que $\nabla f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Que devient ce résultat si $\alpha = 1$?

Calculer

3.20 $\displaystyle \lim_{t\to 0} \frac{\int_{-t}^{t} e^{t^2x^2}\,dx}{\sin t}$.

3.21 $\displaystyle \lim_{t\to 0} \int_0^t \frac{(t-x)\,e^{-x^2}}{\sin^2 t}\,dx$.

3.22 $\displaystyle \lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\int_{t^2}^{t} \ln\big(x^2+\cos(x^2t^3)\big)\,dx}{\operatorname{Arctg} t^3}$.

3.23 $\displaystyle \lim_{t\to 0} \int_0^1 \frac{\ln(1+t^2x^2)}{t^2}\,dx$.

3.24 $\displaystyle \lim_{t\to 0} \int_0^{t^2} \frac{(t^2-x)\cos x^2}{\sin t^4}\,dx$.

3.25

$$\lim_{t\to 0} \left(\int_{t^4}^{t^2} \frac{\ln(x^2+t^2x+t^4)}{t^2}\,dx - \ln t^4\right).$$

3.26 $\displaystyle \lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{t^2} \ln(1+t^2x^2)\,dx}{e^t-\cos t-\sin t}$.

3.27 $\displaystyle \lim_{t\to 0} \int_0^{t^2} \frac{1+\sqrt{\operatorname{sh}^3(t^4x)}}{t^2}\,dx$.

3.28 $\displaystyle \lim_{t\to 0} \int_0^{t^2} \frac{1+\operatorname{sh}(x^2t^2)}{t^2}\,dx$.

3.29 $\displaystyle \lim_{t\to 0} \int_0^{t^2} \frac{\cos(x-t\sin x)}{\sin^2 t+\operatorname{sh} t^2}\,dx$.

3.30 $\displaystyle \lim_{t\to 0} \int_0^{t^2} \frac{\ln(2+t^2x^2)}{1-e^t+\operatorname{sh} t}\,dx.$

3.31 $\displaystyle \lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{t} x\cos^2\big((1+t^2)x^2\big)\,dx}{t^2}$.

3.32 $\displaystyle \lim_{t\to 0} \int_{t^2}^{\ln(1+t^2)} \frac{\sin(tx)}{t^4}\,dx$.

3.33

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^6+\sin^6 t+\left(\displaystyle\int_t^1 \sin(x^2t^2)\,dx\right)^6}{(1-\cos t)^3}.$$

3.34 Montrer que

$$\lim_{t\to -\infty} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3t}} = 0\,.$$

3.35 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer

$$\lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^t (x-t)^2 f(x)\,dx}{t^3}\,.$$

3.36 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+tx)}{1+t^2}\,dt\,.$$

1) Calculer $f'(x)$.

2) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{2}\operatorname{Arctg} x\,.$$

3.37 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \int_0^t \ln\left(\frac{1+t^2+x^2}{1+2x^2}\right)dx\,.$$

Calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f'(t)$.

3.38 Calculer la dérivée de la fonction $f: \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |t-x|\sin x\,dx\,.$$

3.39 Montrer que la fonction $f:]-1,1[\,\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \int_{-t^4}^{t^2} \ln\big(1+\cos(tx)\big)\,dx$$

admet un minimum local en 0.

3.40 Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \int_0^t \sin\left(t\sqrt{1+x^2}\right)dx$$

admet un minimum local en 0.

3.41 Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \sin\sqrt{1+t^2} + \int_{t^3}^{t^2} \ln(1+e^{tx^2})\,dx$$

admet un minimum local en 0.

3.42 Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(t)=\int_{t^2}^{t}\big(x^2-x+\sin(x^2t)\big)\,dx$$

admet un maximum local en 0.

3.43 Montrer que la fonction $f:\,]-1,1[\,\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(t)=t^2+\cos t+t\ln(1+\cos t)+\int_t^{t^2}\ln(2+x^2t)\,dx$$

admet un minimum local en 0.

3.44 Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(t)=\int_0^{t^2}\operatorname{Arctg}(tx^2)\,dx$$

admet un point d'inflexion en 0.

3.45 Soient $\lambda>0$, $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t)=\int_0^t\sigma(x)\sin\lambda(t-x)\,dx\,.$$

1) Vérifier que f est la solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre $y''(t)+\lambda^2y(t)=\lambda\sigma(t)$ qui satisfait les deux conditions initiales $y(0)=y'(0)=0$.

2) Calculer $\displaystyle\int_0^2 x^5\sin(2-x)\,dx\,.$

3.46 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Vérifier que la fonction $f:\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(t)=t^n\int_0^\pi(\sin x)^{2n}\cos(t\cos x)\,dx$$

est solution de l'équation différentielle

$$t^2y''(t)+ty'(t)+(t^2-n^2)y(t)=0\,.$$

3.47 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t)=\int_0^{t^2}\sqrt{\operatorname{ch}tx}\;dx\,.$$

1) Calculer $f'(0)$ et $f''(0)$.

2) En déduire que la fonction admet un minimum local en 0.

3) Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}^*$: $f(0)<f(t)$.

3.48 Soit la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\int_1^{1+x^3}\big(\operatorname{ch}(xyt^3)+\sin(3xyt^2)\big)\,dt\,.$$

Donner l'équation du plan tangent à la surface $z=f(x,y)$ au point $(2,0)$.

3.49 Montrer que $(0,0)$ est un point stationnaire de la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\int_{-x^2}^{y^2}\operatorname{ch}(yt^2+x)\,dt\,.$$

Etudier sa nature.

3.50 Montrer que $(0,0)$ est un point stationnaire de la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=10\,x^2\cos y+\int_{x^2}^{y^2}\ln\sqrt{2+x^4+\cos(ty)}\,dt.$$

Etudier sa nature.

3.51 Soit $f:\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(x^2\sin^2t+y^2\cos^2t)\,dt\,.$$

1) Montrer que pour tout $x,y>0$:

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\pi}{x+y},\frac{\pi}{x+y}\right).$$

2) En déduire que pour tout $x,y>0$:

$$f(x,y)=\pi\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\,.$$

3.52 Soit $g:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(y^2\cos^2t+\sin^2t)\,dt\,.$$

1) Montrer que

$$\lim_{y\to 0+} g(y) = \int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin^2 t \, dt = -\pi \ln 2.$$

2) En déduire que

$$\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t \, dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}-} \ln \cos t \, dt = -\pi \ln \sqrt{2}$$

et

$$\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-} \ln \operatorname{tg} t \, dt = 0 \, .$$

3.53 Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \, , \end{cases}$$

et soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} h(x) \, dx \, .$$

1) Montrer que g est continue et $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = 0$.

2) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$. Calculer g'.

3) Montrer que pour tout $y \geq 0$:

$$g(y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} y \, .$$

4) En déduire que

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \, .$$

3.54 Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies respectivement par

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} \, dt \right)^2$$

et

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \, dt \, .$$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4} \, .$$

2) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \, .$$

3.55 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = xy^3 + \ln \sqrt{1 + x^4 + 2y^2} \, .$$

Calculer $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, 1)$ avec $\mathbf{v} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

3.56 La hauteur d'une montagne en chacun de ses points P est donnée par la fonction

$$h(x, y) = 3\,000 - 2x^2 - y^2$$

où (x, y) sont les coordonnées de la projection du point P sur le plan de base muni d'un repère orthonormé dont l'axe Ox désigne la direction *est* et l'axe Oy la direction *nord*

1) Dire si l'on commence par monter ou par descendre lorsque l'on se déplace depuis le point $Q = (30, -20)$ dans la direction *sud-ouest*.

2) Au point Q, dans quelle direction la pente est-elle la plus raide ?

3) Au point Q, dans quelle direction la pente est-elle nulle ?

3.57 La profondeur d'un cratère d'un volcan en chacun de ses points P est donnée par la fonction

$$p(x, y) = -500 + x^4 y^2 + \ln(1 + 4x^2 + 5y^2)$$

où (x, y) sont les coordonnées de la projection du point P sur le plan de base muni d'un repère orthonormé dont l'axe Ox désigne la direction *est* et l'axe Oy la direction *nord*.

1) Dire si l'on commence par monter ou par descendre lorsque l'on se déplace depuis le point $Q = (1, 2)$ dans la direction *nord-ouest*.

2) Au point Q, dans quelle direction la pente est-elle la plus raide ?

3) Au point Q, dans quelle direction la pente est-elle nulle ?

3.58 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = -x^2 + 2xy + e^{x+y}\cos x^2\,.$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 2 autour de $(0,0)$.

3.59 Soient $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathbf{C}^1$ telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\,.$$

1) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$ qui vérifient pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(x,y) = \big(g(x,y), h(x,y)\big)\,.$$

2) L'existence des fonctions f est-elle liée à la condition imposée à g et h ?

3.60 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ qui satisfont pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3y^2 - y^3 + 2x \operatorname{Arctg} x$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy - 3xy^2 + \frac{2y}{1+y^2}\,.$$

3.61 Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. En effectuant le changement de variables $u = bx + ay$ et $v = bx - ay$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$a\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$

3.62 Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = af(x,y)\,.$$

3.63 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$

Vérifier que les solutions sont homogènes de degré 0.

3.64 En effectuant le changement de variables $u = x - y$ et $v = x + y$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,.$$

3.65 En effectuant le changement de variables $u = x$, $v = y - x$ et $w = z - x$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0\,.$$

3.66 Trouver toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) + h(x)$$

soit solution de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,.$$

3.67 Trouver toutes les fonctions $g, h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = g(xy) + h\left(\frac{y}{x}\right)$$

soit solution de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln\frac{x^2}{y^2}\,.$$

3.68 Soit $E = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u + v > 0\big\}$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ telles que pour tout $(x,y) \in E$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x+y)}{x+y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f(x+y)}{x+y}\right) = \ln(1+x+y)^4\,.$$

3.69 Trouver toutes les fonctions $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$ de sorte que la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2 g(y)$$

soit solution de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2xy^2 \ln y\,.$$

3.70 Trouver toutes les fonctions $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$ de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) + h(x)$$

soit solution de l'équation aux dérivées partielles

$$y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2}\,.$$

3.71 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$ qui sont solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - 4x^3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$

3.72 Trouver toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$ de sorte que la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = y^3 g(x)$$

soit solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = y^3 \sin 5x\,.$$

3.73 Trouver toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$ de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{x}\,g(xy)$$

soit solution de l'équation aux dérivées partielles

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -xf(x,y) + x^2y^2\,.$$

3.74 Soit $\lambda > 0$. En effectuant le changement de variables $u = \lambda x + y$ et $v = -\lambda x + y$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$ qui vérifient l'***équation d'onde***

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0\,.$$

3.75 Soient a, b et c trois constantes vérifiant $a \neq 0$ et $b^2 - ac > 0$. En posant

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

et

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

et en effectuant le changement de variables $u = \alpha x + y$ et $v = \beta x + y$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$ qui sont solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0\,.$$

3.76 En effectuant le changement de variables $u = x$ et $v = \frac{y}{x}$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$ qui sont solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0\,.$$

3.77 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^2$, homogène de degré α.

1) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \alpha(\alpha - 1)\,f(x,y)\,.$$

2) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$, homogènes de degré 0.

3) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$, homogènes de degré 1.

3.78 Trouver les deux fonctions $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$ qui vérifient les conditions initiales $g(0) = h(0) = 1$, $g'(0) = h'(0) = 0$ et $g''(0) = 1$ et telles que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = g(x)\,h(y)$ est harmonique.

3.79 Trouver deux fonctions $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$ qui vérifient les conditions initiales

$$g(1) = h(0) = 0 \text{ et } g(e) = h(1) = 1$$

et telles que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = g(x)h(y)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0\,.$$

3.80 (***Mouvement central***) Soient

$$\mathbf{r} = (x,y,z) \text{ et } r = \|\mathbf{r}\|\,.$$

1) Si $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathbf{C}^1$, montrer que pour tout $r > 0$:

$$\nabla f(r) = f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}\,.$$

2) Si $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathbf{C}^2$, montrer que pour tout $r > 0$:

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{2}{r}\,f'(r)\,.$$

3) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$ de sorte que pour tout $r > 0$: $\Delta f(r) = 0$.

3.81 (***Laplacien en coodonnées polaires***)
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(r,\theta) = f(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)\,.$$

Vérifier que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)\,.$$

3.82 En utilisant l'exercice précédent, trouver les deux fonctions $f_1 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$ de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = f_1\Big(\sqrt{x^2+y^2}\Big) + f_2\Big(\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\Big)$$

soit harmonique.

3.83 (***Laplacien en coordonnées cylindriques***)
Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^2$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(r,\theta,z) = f(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z).$$

Vérifier que
pour tout $(r,\theta,z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta,z) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,z) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta,z) + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(r,\theta,z)\,.$$

3.84 (***Laplacien en coordonnées sphériques***)
Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^2$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(r,\beta,\theta) = f(x = r\sin\beta\cos\theta,\ y = r\sin\beta\sin\theta, z = r\cos\beta)\,.$$

Vérifier que
pour tout $(r,\theta,z) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,\pi[\times \mathbb{R}$:

$$\Delta f(r\sin\beta\cos\theta, r\sin\beta\sin\theta, r\cos\beta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\beta,\theta) + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\beta,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \beta^2}(r,\beta,\theta) + \frac{1}{r^2\sin^2\beta}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\beta,\theta) + \frac{\operatorname{cotg}\beta}{r^2}\frac{\partial g}{\partial \beta}(r,\beta,\theta)\,.$$

3.85 Montrer que l'équation

$$x^2 + 2e^y + \sin xy - 2 = 0$$

définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 0$. Montrer que la fonction ϕ admet un maximum local en 0.

3.86 Montrer que l'équation

$$e^{xy} + y^2 - x - 2 = 0$$

définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 1$. Montrer que la fonction ϕ admet un maximum local en 0.

3.87 Montrer que l'équation

$$1 - y^2 + x^2 y\, e^y = 0$$

définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 1$. Montrer que la fonction ϕ admet un minimum local en 0.

3.88 Montrer que l'équation

$$x^3 + y^3 - x^2 y - 1 = 0$$

définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 1$. Montrer que la fonction ϕ admet un minimum local en 0.

3.89 Montrer que l'équation

$$x^2 - 2x - y - \cos \pi y^2 + \ln \frac{1 + y^4}{2} + e^{x(y-1)} = 0$$

définit au voisinage du point 1 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(1) = 1$. Montrer que la fonction ϕ admet un maximum local en 1.

3.90 Montrer que l'équation

$$\cos(x^2 + y) + \sin(x + y) + e^{x^3 y} = 2$$

définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = \frac{\pi}{2}$. Montrer que la fonction ϕ admet un maximum local en 0.

3.91 Montrer que l'équation

$$x - y + e^{-xy} - \int_y^{x^2+y^2} e^{xt^2}\, dt = 0$$

définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 1$. Montrer que la fonction ϕ admet un maximum local en 0.

3.92 Montrer que l'équation

$$\ln x + \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - x = 0.$$

définit au voisinage du point 1 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(1) = 0$. Montrer que la fonction ϕ admet un minimum local en 1.

3.93 Montrer que l'équation

$$\ln x + e^{\frac{y}{x}} = 1$$

définit au voisinage du point 1 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(1) = 0$. Donner l'équation de la tangente à la courbe $y = \phi(x)$ en 1.

3.94 Soient A un ouvert, $(a, b) \in A$ avec $a \neq 0$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^1$, homogène de degré α telle que

$$f(a, b) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0\,.$$

Donner explicitement la fonction implicite $y = \phi(x)$ que f définit au voisinage du point a et qui vérifie $\phi(a) = b$.

3.95 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 5xy \sin\left(\frac{\pi y}{2x}\right).$$

En utilisant l'exercice précédent, donner explicitement la fonction implicite $y = \phi(x)$ que définit f au voisinage du point 1 et qui vérifie $\phi(1) = -1$.

3.96 Montrer que l'équation

$$3x^2 + 6y^2 + z^5 - 2z^4 + 1 = 0$$

définit au voisinage du point $(0, 0)$ une fonction implicite $z = \phi(x, y)$ telle que $\phi(0, 0) = 1$. Vérifier que $(0, 0)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ. Etudier sa nature.

3.97 Montrer que l'équation

$$x - 6y + e^{x^2} + \ln(2 + x^2 + z^2 - 2z) - xy + 3y^2 z + 2 = 0$$

définit au voisinage du point $(0,1)$ une fonction implicite $z = \phi(x,y)$ telle que $\phi(0,1) = 1$. Vérifier que $(0,1)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ. Etudier sa nature.

3.98 Montrer que l'équation

$$x^4 + x^3 y^2 + xyz + z^4 = 1$$

définit au voisinage du point $(0,0)$ une fonction implicite $z = \phi(x,y)$ telle que $\phi(0,0) = 1$. Vérifier que $(0,0)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ. Etudier sa nature.

3.99 Montrer que l'équation

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$$

définit au voisinage du point $(1,1)$ une fonction implicite $z = \phi(x,y)$ telle que $\phi(1,1) = 4$. Vérifier que $(1,1)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ. Etudier sa nature.

3.100 Montrer que l'équation

$$x + 2x^2 + y^2 - x\,e^y - y\,e^x + 2\sin yz - (y+1)z + 1 = 0$$

définit au voisinage du point $(0,0)$ une fonction implicite $z = \phi(x,y)$ telle que $\phi(0,0) = 1$. Vérifier que $(0,0)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ. Etudier sa nature.

3.101 Montrer que l'équation

$$z^5 + xz^4 + yz + x^2 + (y-1)^2 = 0$$

définit au voisinage du point $(0,1)$ une fonction implicite $z = \phi(x,y)$ telle que $\phi(0,1) = 0$. Vérifier que $(0,1)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ. Etudier sa nature.

3.102 Montrer que l'équation

$$x^5 z + x^2 y^2 + 7\cos xyz - x^{10}\cos y^2 - z^3 = 0$$

définit au voisinage du point $(1,0)$ une fonction implicite $z = \phi(x,y)$ telle que $\phi(1,0) = 2$. Vérifier que $(1,0)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ. Etudier sa nature.

3.103 Montrer que l'équation

$$e^{x^2} + e^{y^2} + e^{z^2} + e^{xy} + e^{xz} + e^{yz} + e^{xyz} - x - y - 6 - e = 0$$

définit au voisinage du point $(0,0)$ une fonction implicite $z = \phi(x,y)$ telle que $\phi(0,0) = 1$. Vérifier que $(0,0)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ. Etudier sa nature.

3.104 Montrer que l'équation

$$e^{x^2+y^2+z} - x^4 + y^6 - z^4\,e^z = 0$$

définie au voisinage du point $(0,0)$ une fonction implicite $z = \phi(x,y)$ telle que $\phi(0,0) = 1$. Vérifier que $(0,0)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ. Etudier sa nature.

3.105 Montrer que l'équation

$$-1 - 3x + x^2 + y^2 + y^3 + x\,e^y + xz\,e^y + z^4\,e^{xz} = 0$$

définit au voisinage du point $(0,0)$ une fonction implicite $z = \phi(x,y)$ telle que $\phi(0,0) = 1$. Vérifier que $(0,0)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ. Etudier sa nature.

3.106 Montrer que l'équation

$$x^4 + y^4 + z^4 + e^{xy} + e^{xz} + e^{yz} - e - 4 = 0$$

définit au voisinage du point $(1,0)$ une fonction implicite $z = \phi(x,y)$ telle que $\phi(1,0) = 1$. Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = \phi(x,y)$ au point $(1,0)$.

3.107 Montrer que l'équation

$$x^4 + x^3y^2 + xz + yz + xyz + z^4 - 1 = 0$$

définit au voisinage du point $(0,0)$ une fonction implicite $z = \phi(x,y)$ telle que $\phi(0,0) = 1$. Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = \phi(x,y)$ au point $(0,0)$.

3.108 Montrer que l'équation

$$\mathrm{Arctg}\left(\frac{xz}{y}\right) + \ln\left(\frac{2+x^2}{1+y^2+z^2}\right) - \frac{\pi}{4} = 0$$

définit au voisinage du point $(1,1)$ une fonction implicite $z = \phi(x,y)$ telle que $\phi(1,1) = 1$. Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = \phi(x,y)$ au point $(1,1)$.

3.109 Montrer que l'équation

$$x^2 + xz + e^{xyz} + \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) = 3$$

définit au voisinage du point $(1,1)$ une fonction implicite $z = \phi(x,y)$ telle que $\phi(1,1) = 0$. Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = \phi(x,y)$ au point $(1,1)$.

3.110 Montrer que l'équation

$$\cos xy + 2\sin xyz + z^5 = 0$$

définit au voisinage du point $(\pi,1)$ une fonction implicite $z = \phi(x,y)$ telle que $\phi(\pi,1) = 1$. Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = \phi(x,y)$ au point $(\pi,1)$.

3.111 Montrer que l'équation

$$\ln xy + 2\,e^{\frac{z}{x}} - x^2y + x = 2$$

définit au voisinage du point $(1,1)$ une fonction implicite $z = \phi(x,y)$ telle que $\phi(1,1) = 0$. Vérifier que $(1,1)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ.
Etudier sa nature.

3.112 Montrer que l'équation

$$-1 + x^2 + yz^5 + \mathrm{Arctg}\,xyz + \ln\frac{\sqrt{1+x+z}}{3z} + \ln\sqrt[3]{y^2+z^3} = 0$$

définit au voisinage du point $(1,0)$ une fonction implicite $z = \phi(x,y)$ telle que $\phi(1,0) = 7$. Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = \phi(x,y)$ au point $(1,0)$.

3.113 (***Théorème des fonctions implicites***)
Soient E un ouvert, $(a,b) \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^1$ telle que

$$f(a,b) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0\,.$$

1) (***Existence***) Montrer qu'il existe deux nombres $\alpha, \delta > 0$ et une fonction continue $\phi :]a-\delta, a+\delta[\to \mathbb{R}$ pour lesquels les quatre propriétés suivantes sont vérifiées :
a) $\forall x \in]a-\delta, a+\delta[$:
$$f\big(x, \phi(x)\big) = 0\,.$$
b) $\forall x \in]a-\delta, a+\delta[$:
$$\big|\phi(x) - b\big| < \alpha\,.$$
c) $(x,y) \in]a-\delta, a+\delta[\times [b-\alpha, b+\alpha]$ et $f(x,y) = 0 \Rightarrow y = \phi(x)$.
d) $\phi(a) = b$.

2) Montrer que la fonction ϕ est de classe $\mathbf{C}^1$.

3) (***Unicité locale***) En déduire que si une fonction continue $\varphi :]a-\delta_1, a+\delta_1[\to \mathbb{R}$ avec $0 < \delta_1 \leq \delta$ satisfait les deux propriétés suivantes : $\varphi(a) = b$ et pour tout $x \in]a-\delta_1, a+\delta_1[$: $f\big(x, \varphi(x)\big) = 0$, elle coïncide avec ϕ sur $]a-\delta_1, a+\delta_1[$.

4) Que devient ce résultat si la fonction φ n'est pas supposée continue ?

3.114 Montrer que les deux équations

$$x - y^3 + z + 8 = 0 \text{ et } x^3 + y^4 - z^5 - 16 = 0$$

définissent au voisinage du point 0 deux fonctions implicites $y = \phi_1(x)$ et $z = \phi_2(x)$ telles que $\phi_1(0) = 2$ et $\phi_2(0) = 0$. Donner l'équation de la tangente à chacune des deux courbes $y = \phi_1(x)$ et $z = \phi_2(x)$ au point $x = 0$.

3.115 Montrer que les deux équations

$$x - u^2 + v^2 = 0 \text{ et } y - uv + 1 = 0$$

définissent au voisinage du point $(0,0)$ deux fonctions implicites $u = \phi_1(x,y)$ et $v = \phi_2(x,y)$ telles que $\phi_1(0,0) = 1$ et $\phi_2(0,0) = 1$. Donner l'équation du plan tangent à chacune des deux surfaces $u = \phi_1(x,y)$ et $v = \phi_2(x,y)$ au point $(0,0)$.

3.116 (***Théorème des fonctions inverses***)
Soient E un ouvert, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in E$ et $f_1, \ldots, f_n : E \to \mathbb{R}$ n fonctions de classe $\mathbf{C}^1$ telles que

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}\,(\mathbf{a}) \neq 0\,.$$

Montrer qu'il existe localement n uniques fonctions continues $\phi_1, \ldots, \phi_n : B(\mathbf{b}, \delta) \to \mathbb{R}$ avec $\mathbf{b} = \big(f_1(\mathbf{a}), \ldots, f_n(\mathbf{a})\big)$
vérifiant les deux propriétés suivantes :

1) $\forall\, k = 1, \ldots, n : \phi_k(\mathbf{b}) = a_k$.
2) $\forall\, k = 1, \ldots, n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in B(\mathbf{b}, \delta)$:

$$f_k\big(x_1 = \phi_1(y_1, \ldots, y_n),\, \ldots,\, x_n = \phi_n(y_1, \ldots, y_n)\big) = y_k\,.$$

3.117 Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathbf{C}^1$ telle que $f(0,0) = g(0,0) = 0$. De plus, on suppose qu'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \delta,\ |y| \leq \delta\big\}$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y) - 1\right| \leq \frac{1}{3}\,, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y)\right| \leq \frac{1}{3}$$

et

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}\,(x,y)\right| \leq \frac{1}{3}\,, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial y}\,(x,y) - 1\right| \leq \frac{1}{3}\,.$$

1) Soient $|\alpha|,\ |\beta| \leq \frac{\delta}{3}$.
Montrer, en utilisant la suite récurrente, $x_0 = y_0 = 0$ et

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - f(x_n, y_n) + \alpha \\ y_{n+1} = y_n - g(x_n, y_n) + \beta \end{cases}$$

qu'il existe un unique élément (a,b) de D pour lequel $f(a,b) = \alpha$ et $g(a,b) = \beta$.

2) En déduire que le système

$$\begin{cases} x + y^5 = 0{,}01 \\ x^7 + y = 0{,}001 \end{cases}$$

admet une et une seule solution dans $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \times \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

3.118 (***Formes différentielles exactes***)
Soient I_1, I_2 deux intervalles ouverts, $(a,b) \in I_1 \times I_2$ et $M, N : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathbf{C}^1$ telles que pour tout $(x,y) \in I_1 \times I_2$:

$$\frac{\partial M}{\partial y}\,(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}\,(x,y)\,.$$

De plus, on suppose que $N(a,b) \neq 0$ et posons pour tout $(x,y) \in I_1 \times I_2$:

$$\chi(x,y) = \int_a^x M(t,y)\,dt + \int_b^y N(a,t)\,dt\,.$$

1) Montrer qu'il existe localement une unique fonction $\phi : \,]a-\delta, a+\delta[\, \to I_2$ de classe $\mathbf{C}^1$ telle que $\phi(a) = b$ et pour tout $|x-a| < \delta$: $\chi\big(x, \phi(x)\big) = 0$.

2) (***Existence et unicité locale***) En déduire que la fonction ϕ est localement l'unique solution de la forme différentielle exacte

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(a) = b$.

3.119 Trouver la solution de la forme différentielle $y(y-2x) - x(x-2y)y' = 0$ qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$.

3.120 Trouver la solution de la forme différentielle

$$\frac{1}{x^2 y} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{xy^2}\,y' = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$.

3.121 Trouver la solution de la forme différentielle $2x + e^x y + (e^x - 2y)y' = 0$ qui satisfait la condition initiale $y(0) = 0$.

3.122 Trouver la solution de la forme différentielle $xy^2 + (1 + x^2y)y' = 0$ qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$.

3.123 Trouver la solution de la forme différentielle

$$y^4 + (2y + 4xy^3)y' = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$.

3.124 Trouver la solution de la forme différentielle

$$(3x^2 - 6y)y + (x^2 - 12\,y)xy' = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$.

3.125 Trouver la solution de la forme différentielle

$$y^6 + (3y^2 + 6xy^5)y' = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$.

3.126 Trouver la solution de la forme différentielle

$$x^2(1 - 3y) - y' = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$.

3.127 Trouver la solution de la forme différentielle

$$1 + x^2y^2 + \frac{2}{3}(2 + x^3)yy' = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$.

3.128 Trouver la solution de la forme différentielle

$$(1 + x^2)y^3 + (3x + x^3)y^2y' = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$.

3.129 Trouver la solution de la forme différentielle

$$(2 - \cos^2 xy)xy^2 + (1 + \sin^2 xy)(1 + x^2y)y' = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$.

3.130 Trouver la solution de la forme différentielle

$$\frac{x}{x^2 + y^2 + 1} + \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}\,y' = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$.

3.131 Trouver la solution de la forme différentielle $2x\,e^y + e^x + (e^y + x^2\,e^y)y' = 0$ qui satisfait la condition initiale $y(0) = 0$.

3.132 Trouver la solution de la forme différentielle

$$-2x(1 + \operatorname{tg} y) + (1 + x^2)(1 + \operatorname{tg}^2 y)y' = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 0$.

3.133 Trouver la solution de la forme différentielle

$$(1 + y^2 \sin 2x) - 2yy' \cos^2 x = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$.

3.134 Trouver la solution de la forme différentielle

$$\sqrt{y\,e^{2x}} + \frac{1}{2x}\,y' = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$.

3.135 Trouver la solution de la forme différentielle $3(y^2 + 1) + 2xyy' = 0$ qui satisfait la condition initiale $y(1) = 2$.

3.136 Trouver la solution de la forme différentielle $(y^2 + 1)\sin x + 2\cos x yy' = 0$ qui satisfait la condition initiale $y(0) = 2$.

3.137 Trouver la solution de la forme différentielle

$$-y + 2x^2 \operatorname{tg}\frac{y}{x} + xy' = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = \frac{\pi}{6}$.

3.138 Trouver la solution de la forme différentielle $x - 3y + (3x - y)y' = 0$ qui satisfait la condition initiale $y(1) = 2$.

3.139 Trouver la solution de la forme différentielle $x^2+y^2+xyy'=0$ qui satisfait la condition initiale $y(1)=1$.

3.140 Trouver la solution de la forme différentielle $x^2+y^2+x^2y'=0$ qui satisfait la condition initiale $y(1)=0$.

3.141 Trouver la solution de la forme différentielle $x^2-3y^2+2xyy'=0$ qui satisfait la condition initiale $y(1)=2$.

3.142 Trouver la solution de la forme différentielle $xy^2-y^3+xy^2y'=0$ qui satisfait la condition initiale $y(1)=0$.

3.143 Trouver la solution de la forme différentielle

$$y\sin\frac{y}{x}+x\cos\frac{y}{x}-x\sin\frac{y}{x}\,y'=0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1)=\frac{\pi}{4}$.

3.144 Trouver la solution de la forme différentielle

$$y+\sqrt{x^2+y^2}-xy'=0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1)=0$.

3.145 Trouver la solution de la forme différentielle $y^2+4ye^x+2(y+e^x)y'=0$ qui satisfait la condition initiale $y(0)=2$.

3.146 Minimiser la distance de P à Q où P est un point de l'ellipse d'équation $2x^2+y^2+2y=1$ et Q un point de la droite d'équation $-x+y-\sqrt{2}=0$.

3.147 Trouver la solution de la forme différentielle

$$\left(\frac{1}{x}+y^2\right)+xyy'=0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1)=1$.

3.148 Trouver la solution de la forme différentielle $-y+x(1+xy)y'=0$ qui satisfait la condition initiale $y(1)=1$.

3.149 Trouver la solution de la forme différentielle $xy^2(xy'+y)=1$ qui satisfait la condition initiale $y(1)=1$.

3.150 Trouver la solution de la forme différentielle $(x^4+y^2)+xy(x^2-1)y'=0$ qui satisfait la condition initiale $y(2)=2$.

3.151 Trouver la solution de la forme différentielle $(x^2+y^2+1)+xyy'=0$ qui satisfait la condition initiale $y(1)=1$.

3.152 Trouver la solution de la forme différentielle $-xy+x^2y'=0$ qui satisfait la condition initiale $y(1)=1$.

3.153 Trouver la solution de la forme différentielle

$$x^2+xy+2(x+y)+(x+1)y'=0$$

qui satisfait la condition initiale $y(0)=0$.

3.154 Trouver la solution de la forme différentielle

$$4x\sin xy+y(1+x^2)\cos xy \\ +x(1+x^2)\cos xyy'=0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1)=\pi$.

3.155 Trouver la solution de la forme différentielle

$$\left(\frac{1}{y}-x\right)+\frac{1}{y^2}\,y'=0$$

qui satisfait la condition initiale $y(0)=1$.

3.156 Trouver la solution de la forme différentielle

$$\left(\frac{3}{xy}-\frac{y^2}{x^5}\right)+\left(\frac{2y}{x^4}-\frac{1}{y^2}\right)y'=0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1)=-1$.

3.157 Trouver la solution de la forme différentielle $y-y^2+xy'=0$ qui satisfait la condition initiale $y(1)=2$.

3.158 Trouver la solution de la forme différentielle $-2xy+(y^2+x^2+3)y'=0$ qui satisfait la condition initiale $y(0)=1$.

3.159 Trouver la solution de la forme différentielle $2xy+(3x^2-y^3)y'=0$ qui satisfait la condition initiale $y(0)=1$.

3.160 Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, $b \in \mathbb{R}$ et $f, p : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Trouver la solution de l'*équation différentielle linéaire du premier ordre*

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$$

qui satisfait la condition initiale $y(a) = b$.

3.161 Trouver la solution de la forme différentielle $(y\,e^x + y^2) - (2\,e^x + xy)y' = 0$ qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$.

3.162 Sachant qu'il existe un facteur intégrant de la forme $\mu(x, y) = \sigma(x^2+y^2)$, trouver la solution de la forme différentielle

$$x\left(2\sqrt{x^2+y^2}+1\right) + yy' = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$.

3.163 Sachant qu'il existe un facteur intégrant de la forme $\mu(x, y) = \sigma(xy)$, trouver la solution de la forme différentielle

$$y(4x + 6y) + x(3x + 8y)y' = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(2) = -1$.

3.164 Trouver toutes les fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ de sorte que $\mu(x, y) = x^2$ soit un facteur intégrant de la forme différentielle

$$x(x^2 + y) + f(x)y' = 0\,.$$

Pour la fonction f qui vérifie $f(1) = 1$, trouver la solution de la forme différentielle qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$.

3.165 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ de sorte que $\mu(x, y) = x$ soit un facteur intégrant de la forme différentielle

$$x^2 + y + f(x)y' = 0.$$

Pour la fonction f qui vérifie $f(1) = 1$, trouver la solution de la forme différentielle qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$.

3.166 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ de sorte que la forme différentielle

$$(y^2 + 1)\sin x - f(x)yy' = 0$$

soit exacte. Pour la fonction qui satisfait $f(0) = 2$, donner la solution de la forme différentielle qui vérifie la condition initiale $y(0) = 1$.

3.167 Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, $b \in \mathbb{R}^*$, $m \neq 0$ ou 1 et $p, f : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathbf{C}^1$.

1) Vérifier que $\mu(x, y) = y^{-m}\gamma^{m-1}(x)$ avec $\gamma(x) = e^{-\int_a^x p(t)\,dt}$ est un facteur intégrant de la forme différentielle (***équation de Bernoulli***)

$$\big(p(x)y - f(x)y^m\big) + y' = 0\,.$$

2) Montrer que la solution de cette forme différentielle qui satisfait la condition initiale $y(a) = b$ est donnée par

$$y(x) = b\gamma(x)\left(1 + (1-m)b^{m-1}\int_a^x f(t)\gamma^{m-1}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{1-m}}.$$

Etudier la nature des points stationnaires des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

3.168 $f(x, y) = 2x^2\sin y - x^2 - y^2\,.$

3.169

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + 2y^2) + x^2y^2 + y\,.$$

3.170 $f(x, y) = -xy - e^{-xy} + \cos x\,.$

3.171 $f(x, y) = 8\,e^{xy} + x^2 + 4y^2\,.$

Le minimum local obtenu est-il global ?

3.172 $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3xy^2\,.$

3.173 $f(x, y) = e^{x^2+y^2-2x+2y}\,.$

3.174 $f(x, y) = x^3 + y^3 - e^{x+y}\,.$

3.175 $f(x, y) = x^3 - 3x + xy^2\,.$

3.176 $f(x,y) = 12\,xy - x^2y - xy^2$.
Le maximum local obtenu est-il global ?

3.177 $f(x,y) = x^2 + x\sin y - \dfrac{1}{4}\cos y + 5$.

3.178 $f(x,y) = y^2 + y\cos x - \sin x - 2$.
Montrer que $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = -3$.

3.179 $f(x,y) = 24 + (1-y^2)\sin x$.

3.180 $f(x,y) = \cos(x+y) + \sin y$.

3.181 $f(x,y) = (x^2+y^2)\,e^{-(x+y)}$.

3.182 $f(x,y) = (x+y)\,e^{-(x^2+y^2)}$.

3.183 $f(x,y) = y\,e^{-(x^2+y)}$.
Le maximum local obtenu est-il global ?

3.184 $f(x,y) = x + y^2 - \operatorname{sh}(x+y)$.

3.185 $f(x,y) = x + y - \operatorname{sh}(x+y)$.

3.186

$$f(x,y) = \ln\bigl(1+x^2+y^2\bigr)^4 - (x-1)^2 - y^2 .$$

Le maximum local obtenu est-il global ? Même question pour le minimum.

3.187 $f(x,y) = 16\,e^{xy} + 16\,x^2 + y^2$.

3.188

$$f(x,y) = e^{x^2} + \cos(x+y) + \sin(x+y).$$

3.189 $f(x,y) = 2x^3 + (x-y)^2 - 6y$.

3.190 $f(x,y) = -xy - e^{-xy} + \cos x$.

3.191

$$f(x,y) = x^2 + \frac{9}{5}\,xy + y^2 + \operatorname{Arctg} xy .$$

3.192

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

avec $x, y \neq 0$.

3.193 $f(x,y) = \sin^2 y + (x-\cos y)^2 + 2$.

3.194 $f(x,y) = x^2y(4-x-y)$.

3.195 $f(x,y) = 1 + 6x^2 - 3\bigl(1-(x-y)^2\bigr)^8$.

3.196 Soit $\lambda > 0$. Etudier, en fonction de λ, la nature des points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = e^{xy} + x^2 + \lambda y^2.$$

Pour $\lambda \geq \frac{1}{4}$, montrer que

$$f(0,0) = \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y).$$

3.197 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{1+\alpha^2x^2+y^2}$$

possède un minimum local en $(0,0)$.

Trouver les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

3.198
$f(x,y) = (x+y) + \sin(x+y) + \cos(x+y)$.

3.199 $f(x,y) = \left|2\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)\right|$.

3.200 Soient E un ouvert, $(a,b) \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^2$ admettant un maximum local en (a,b). Montrer que pour tout couple $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2uv\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \leq 0 .$$

3.201 Trouver les extrema de la fonction $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{1+3x^2+y^2} .$$

3.202 Trouver les extrema de la fonction $f : [-2,0]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1 .$$

3.203 Trouver les extrema de la fonction $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y) .$$

3.204 Soit $E = \bigl\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ |x| \leq \frac{\pi}{2},\ |y| \leq \cos x\bigr\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = y^2 + y\cos x - \sin x - 2 .$$

3.205 Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq \frac{3\pi}{4}\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \sin(x-y) + \cos(x+y)\,.$$

3.206 Trouver les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \cos x + \cos y + \sin(x+y)\,.$$

Trouver le minimum des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

3.207

$$f(x,y) = (1-x+y)^2 + (1+x+y)^2 + (2+2x+y)^2.$$

3.208 $f(x,y) = x^2 + y^2 + \big(x+y-2\big)^2.$

3.209 $f(x,y) = |x| + |y| + |x+y-2|\,.$

3.210 Soient $A = (7,1)$, $B = (x,-x)$, $C = (y,y)$ et $D = (8,4)$. Minimiser la somme des distances de A à B, de B à C et de C à D.

3.211 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$

1) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_\alpha(x) = f(x, \alpha x)$ admet un minimum local en 0.

2) Peut-on en déduire que la fonction f admet un minimum local en $(0,0)$?

3.212 Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 25\}$. Trouver le minimum de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$.

Trouver les extrema des fonctions $f : \overline{B\big((0,0),1\big)} \to \mathbb{R}$ définies par

3.213

$$f(x,y) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - x\,.$$

3.214 $f(x,y) = \dfrac{x+y}{1+x^2+y^2}\,.$

3.215 Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ 0 \leq x \leq y\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x+y}\,.$$

3.216 Soit $f : \overline{B\big((0,0),2\big)} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \lim_{t\to 0}\big(\cos tx + y \sin tx\big)^{\frac{1}{t}}\,.$$

1) Montrer que $f(x,y) = e^{xy}$.

2) Trouver les extrema de la fonction f.

3.217 Trouver les extrema de la fonction $f : \overline{B\big((2,0),2\big)} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \left|2\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)\right|.$$

3.218 Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2x - 8z \leq 11\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = -x + y + 2z + 4\,.$$

3.219 Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - 4x \leq 0\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \ln(1+x-y) + e^{-\frac{1}{1+x-y}}.$$

3.220 Trouver les extrema de la fonction $f :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = xy(x-y)$$

sous la condition $x + y = 8$.

3.221 Trouver les extrema de la fonction $f : [0,\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y$$

sous la condition $\sin x \sin y = \frac{1}{2}$.

Trouver les extrema des fonctions $f : \overline{B\big((0,0),1\big)} \to \mathbb{R}$ définies par

3.222 $f(x,y) = e^{(x-1)y}\,.$

3.223 $f(x,y) = x + 2y\,.$

3.224 $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy\,.$

3.225 $f(x,y) = 1+2x^2+2y^2-4x^8-4y^8$.

3.226 $f(x,y) = 4x^2+(x-y)^2-4xy+1$.

3.227 $f(x,y) = x(1+y) + \ln\sqrt{2+x^2+y^2}$.

3.228 $f(x,y) = \operatorname{Arctg}(x^6+y^6+x^2+y^2+1)$.

3.229 $f(x,y) = \ln\sqrt{2+x^4+y^4}$.

3.230 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2y + y^3 - 3y + 4$.

3.231 Trouver les extrema de la fonction $f : \overline{B((0,0),1)} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \operatorname{Arctg} xy$.

3.232 Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y^2+2x-1 \leq 0\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = -x+y+2$.

3.233 Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2+(y-1)^2 \leq 1\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = 3x^2+y^2.$$

3.234 Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = 5+\operatorname{ch}(1+x^2+y^2+x^6+y^6).$$

3.235 Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y^2 \leq 4\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2+xy+2y^2.$$

3.236 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4(x-1)^2 + 25\,(y-2)^2 \leq 100,\ 2 \leq y \leq 2x\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x+3y.$$

3.237 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4(x-1)^2 + 25\,(y-4)^2 \leq 100,\ x \geq 0\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = 4(x-1)^2+25\,(y-4)^2-2x-8y.$$

3.238 Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16} \leq 1\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x+x^2+y^2.$$

3.239 Trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2+6y^2$$

sous la condition $x^2+3\sqrt{2}xy \geq 1$.

3.240 Trouver les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \int_x^y t\,e^{-t^2}\,dt$$

sous la condition $e^{x^2}+e^{y^2} = 8$.

3.241 Trouver les extrema de la fonction $f : \overline{B((0,0,0),1)} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = xyz.$$

3.242 Trouver les extrema de la fonction $f : \overline{B((0,0,0),1)} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = xz+y^2-z.$$

3.243 Trouver le minimum de la fonction $f : \overline{B((0,0,0),1)} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = xy+xz+yz.$$

3.244 Trouver les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

sous la condition $5x^2+9y^2+6z^2+4yz-1 = 0$.

3.245 Trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = x^2+5y^2+8z^2$$

sous la condition $xy+xz+yz-1 = 0$.

3.246 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = 9x^2 - 24\,z + 36\,y^2 - 36\,x + 4z^2 - 72\,y + 118.$$

1) Trouver le minimum de f.

2) Trouver, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la valeur minimale de f sous la condition $x - y \leq \alpha$.

3) Trouver les extrema de f sous les conditions $x^2 + 4y^2 + z^2 - 48 = 0$ et $z^2 - 8z + 16 = 0$.

3.247 Trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sous les conditions $x + y + z - 1 = 0$ et $xy - 1 = 0$.

3.248 Trouver les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sous les conditions $x^2 + y^2 + 2z^2 - 4 = 0$ et $xyz - 1 = 0$.

3.249 Trouver les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

sous les conditions $(x - 4) + 2(y - 2) + 3(z - 3) = 0$ et $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 - 1 = 0$.

3.250 Trouver les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = xyz$$

sous les conditions $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ et $1 - 2\sin(x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

3.251 Trouver les valeurs extrêmes de z sur la surface

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12\,xy + 4xz - 35 = 0\,.$$

3.252 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = \alpha x + 2y + z - 1$$

sous les conditions $x^2 + y^2 - 1 = 0$ et $y + z - 1 = 0$.

3.253 Pour x, y, $z > 0$, trouver la valeur maximale de l'expression

$$\frac{xyz}{(1 + x)(x + y)(y + z)(z + 16)}\,.$$

3.254 Dans le plan, trouver la plus courte distance entre un point et une droite.

3.255 Dans l'espace, trouver la plus courte distance entre un point et un plan.

3.256 Trouver les axes de l'ellipse d'équation

$$2x^2 + xy + 2y^2 - 1 = 0\,.$$

3.257 Trouver les axes de l'ellipse déterminée par l'intersection du cylindre d'équation $x^2 + y^2 - 4 = 0$ et du plan d'équation $x + y + 2z - 2 = 0$.

3.258 Trouver les axes de l'ellipsoïde d'équation

$$4x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 4 = 0\,.$$

3.259 Trouver la plus courte distance de l'origine à l'hyperbole d'équation

$$x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0\,.$$

3.260 Minimiser la distance de P à Q où P est un point de l'ellipse d'équation $x^2 + 4x + 4y^2 = 0$ et Q un point de la droite d'équation $x + 2y - 4 = 0$.

3.261 Minimiser la distance de P à Q où P est un point de l'ellipse d'équation $2x^2 + xy + 2y^2 - 1 = 0$ et Q un point de la droite d'équation $y - 10 = 0$.

3.262 Minimiser la distance de P à Q où P est un point de l'ellipsoïde d'équation $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 8 = 0$ et Q un point du plan d'équation $x + y + z - 10 = 0$.

3.263 Minimiser la distance de P à Q où P est un point de la parabole d'équation $x^2 + y = 0$ et Q un point du plan d'équation $x + y - 1 = 0$.

3.264 Déterminer parmi les triangles rectangles ayant la même aire A, celui qui la plus petite hypothénuse.

3.265 Déterminer parmi les triangles ayant le même périmètre $2p$, celui dont l'aire est maximale.

3.266 Déterminer à l'intérieur d'un triangle donné dont l'aire vaut A, le point P dont le produit de ses distances aux trois côtés est maximal.

3.267 Soient P un point du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

et $Q = (c, -2c + 8)$. Déterminer c de sorte que la distance de P à Q soit minimale.

3.268 Trouver le point de l'ellipse d'équation $(x-4)^2 + 4(y-2)^2 - 4 = 0$ dont la somme de ses distances aux deux axes Ox et Oy est minimale.

3.269 Soient

$$P = (1, 1, 1) \text{ et } Q = (2, 3, 4)\,.$$

Trouver le point appartenant au plan d'équation $x+y+z-1 = 0$ de sorte que la somme des carrés de ses distances aux points P et Q soit minimale.

3.270 Soient $P = (0, 4)$ et $Q = (5, 0)$. Trouver le point appartenant au cercle d'équation $x^2+y^2-1 = 0$ de sorte que la somme des carrés de ses distances aux points P et Q soit minimale.

3.271 Soient d_1 la droite d'équation $x + 6 = 0$ et d_2 celle d'équation $x+y-4 = 0$. Trouver le point appartenant au cercle d'équation $x^2+y^2-1 = 0$ dont la somme de ses distances aux deux droites d_1 et d_2 est minimale.

3.272 Soient $A = (3, -2)$, $B = (5, 4)$, $P = (x, 0)$ et $Q = (0, y)$. Maximiser la somme des carrés des distances de P à A et de Q à B, sachant que la longueur du segment PQ vaut 5.

3.273 Trouver le point P de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-1 = 0$ de sorte que la somme de la distance de P au plan d'équation $x + y + z - 5 = 0$ et du carré de la distance de P au point $A = (0, 0, 8)$ soit minimale.

3.274 Trouver parmi les points appartenant à l'intersection de l'ellipsoïde d'équation $2x^2 + y^2 + 5z^2 - 1 = 0$ avec la paraboloïde d'équation $z = 2x^2+3y^2$ ceux dont la distance à l'origine est extrémale.

3.275 Minimiser la distance de P à Q où P est un point de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-3 = 0$ et Q un point de la droite passant par le point $A = (2, 3, 1)$ et parallèle au vecteur $\mathbf{v} = (0, 1, -1)$.

3.276 Minimiser la distance de P à Q où P est un point de l'ellipsoïde d'équation $x^2+4y^2+4z^2-1 = 0$ et Q un point de la droite passant par le point $A = (2, 1, 1)$ et parallèle au vecteur $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$.

3.277 Trouver trois nombres réels positifs dont le produit vaut 1 728 et dont la somme est minimale.

3.278 Trouver trois nombres réels a, b et c dont la somme vaut 15, le produit des deux premiers 36 et pour lesquels $a^2 + b^2 + c^2$ est minimale.

3.279 Montrer que pour $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$|xyz| \leq \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

3.280 1) Trouver le maximum de la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} x_k^2$$

sous la condition $1 - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = 0$.

2) En déduire que
pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\left|\prod_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \left(\frac{\|\mathbf{x}\|}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

3.281 Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n constantes non toutes nulles. Trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

sous la condition $1 - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0$.

3.282 (*Théorème de Lagrange dans* $\mathbb{R}^2$). Soient E un ouvert, $(a,b) \in E$ et $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathbf{C}^1$ telles que $g(a,b) = 0$, $\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \neq 0$ et la restriction de f à $\{(x,y) \in E : g(x,y) = 0\}$ admette un extremum local en (a,b). Montrer que pour

$$\lambda = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b)}$$

on a

$$\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$$

3.283 (*Principe du maximum et du minimum*). Soient $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $\delta > 0$ et $f : \overline{B(\mathbf{a},\delta)} \to \mathbb{R}$ une fonction continue que l'on suppose harmonique dans $B(\mathbf{a},\delta)$. Montrer que f atteint ses extrema sur $\partial B(\mathbf{a},\delta)$.

3.284 Soient $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $\delta > 0$ et $f, g : \overline{B(\mathbf{a},\delta)} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues que l'on suppose harmoniques dans $B(\mathbf{a},\delta)$ et égales sur $\partial B(\mathbf{a},\delta)$. Montrer que $f = g$.

3.285 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^1$ telle que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) < 0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1\,.$$

En quels points de $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq 3\}$, la fonction f atteint-elle ses extrema ?

3.286 Soient E un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f : \overline{E} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, de classe $\mathbf{C}^1$ dans E et constante sur ∂E. Montrer qu'il existe au moins un élément $\mathbf{a}$ de E pour lequel on a $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

3.287 Soient E un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbf{C}^1$ telle que pour tout $\mathbf{x} \in E : \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Montrer que la fonction f est constante.

Chapitre 4

Intégrales multiples

4.1 Intégrale double sur un rectangle fermé

Soient $a < b$ et $c < d$ quatre nombres réels et $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, les deux fonctions $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ et $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$g(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx \quad \text{et} \quad h(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

sont continues. De plus (*théorème de Fubini*),

$$\int_c^d g(y)\, dy = \int_a^b h(x)\, dx\,.$$

Définition 4.1 Par définition, le nombre réel

$$\int_c^d g(y)\, dy = \int_a^b h(x)\, dx$$

est appelé l'***intégrale double*** de la fonction f sur le ***rectangle fermé*** $D = [a, b] \times [c, d]$ et est noté $I_D(f)$.

Par convention, on écrira

$$\begin{aligned} I_D(f) &= \int_c^d g(y)\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx \\ &= \int_a^b h(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy \\ &= \iint_D f(x, y)\, dx\, dy\,. \end{aligned}$$

Propriétés

Soient f, $g : D = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors,

1) Linéarité. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)(x, y)\, dx\, dy = \alpha \iint_D f(x, y)\, dx\, dy + \beta \iint_D g(x, y)\, dx\, dy\,.$$

2)
$$\left| \iint_D f(x, y)\, dx\, dy \right| \leq \iint_D \left| f(x, y) \right| dx\, dy\,.$$

3) Si $f \geq 0$:

a) $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dx\, dy \geq 0.$

b) $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = 0 \iff f = 0.$

4) Si $f \geq g$:

a) $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dx\, dy \geq \iint_D g(x, y)\, dx\, dy\,.$

b) $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_D g(x, y)\, dx\, dy \iff f = g.$

5)
$$\text{Aire}(D) = \iint_D dx\, dy = (b - a)(d - c)\,.$$

6) Si $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x, y)$ et $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x, y)$,

$$m\, \text{Aire}(D) \leq \iint_D f(x, y)\, dx\, dy \leq M\, \text{Aire}(D)\,.$$

Proposition 4.2 *(**Théorème de la moyenne**) Soit*

$$f : D = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$$

une fonction continue. Alors, il existe au moins un élément (x_0, y_0) de D pour lequel on a

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = f(x_0, y_0)\, \text{Aire}(D)\,.$$

4.2 Intégrale double sur un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$

Un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ est appelé un ***rectangle fermé*** s'il peut s'écrire sous la forme

$$D = [a, b] \times [c, d]$$

où a, b, c et d sont quatre nombres réels tels que $a < b$ et $c < d$.

Nous dirons que $\big(D_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille de ***rectangles fermés quasi disjoints*** si pour tout couple d'entiers $p \neq q$:

$$\overset{\circ}{D}_p \cap \overset{\circ}{D}_q = \emptyset\,.$$

Proposition 4.3 *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné non vide. Alors, il existe au moins une famille $\big(D_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ de rectangles fermés quasi disjoints telle que*

$$D = \bigcup_{k=0}^{+\infty} D_k\,.$$

De plus, si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \big|I_{D_k}(f)\big| < +\infty\,.$$

Proposition 4.4 *Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné, $\big(D_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\big(\widehat{D}_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ deux familles de rectangles fermés quasi disjoints telles que*

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} D_k = D = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \widehat{D}_k$$

et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} I_{D_k}(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} I_{\widehat{D}_k}(f)\,.$$

Définition 4.5 Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné, $\big(D_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de rectangles fermés quasi disjoints dont la réunion est D et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors, par définition , le nombre réel

$$\sum_{k=0}^{+\infty} I_{D_k}(f)$$

est appelé l'***intégrale double*** de la fonction f sur D et est noté

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{ou encore } I_D(f)\,.$$

Ainsi,

$$I_D(f) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{k=0}^{+\infty} I_{D_k}(f)\,.$$

4.2.1 Propriétés

Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et $f,\, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Alors,

1) Linéarité. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)(x,y)\, dx\, dy = \alpha \iint_D f(x,y)\, dx\, dy + \beta \iint_D g(x,y)\, dx\, dy\,.$$

2) $$\left| \iint_D f(x,y)\, dx\, dy \right| \leq \iint_D \big|f(x,y)\big|\, dx\, dy\,.$$

3) Si $f \geq 0$:

a) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\, dx\, dy \geq 0.$

b) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = 0 \Longleftrightarrow f = 0.$

4) Si $f \geq g$:

a) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\, dx\, dy \geq \iint_D g(x,y)\, dx\, dy.$

b) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_D g(x,y)\, dx\, dy \Longleftrightarrow f = g.$

5) Si $m = \displaystyle\inf_{(x,y)\in D} f(x,y)$ et $M = \displaystyle\sup_{(x,y)\in D} f(x,y)$,

$$m\, \mathrm{Aire}(D) \leq \iint_D f(x,y)\, dx\, dy \leq M\, \mathrm{Aire}(D)\,.$$

6) Pour toute famille $\big(D_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ de rectangles fermés quasi disjoints dont la réunion est D, on a

$$\mathrm{Aire}(D) = \iint_D dx\, dy = \sum_{k=0}^{+\infty} I_{D_k}(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Aire}(D_k)\,.$$

7) Si $f < g$, le ***volume*** V de

$$E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ f(x,y) < z < g(x,y)\big\}$$

est donné par $V = \displaystyle\iint_D \big(g(x,y) - f(x,y)\big)\, dx\, dy\,.$

8) Si $D_1 \subset D_2 \subset \mathbb{R}^2$ sont deux ouverts bornés non vides. Alors,

$$\iint_{D_1} \big|f(x,y)\big|\, dx\, dy \leq \iint_{D_2} \big|f(x,y)\big|\, dx\, dy\,.$$

9) Soit $\left(D_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles ouverts non vides et disjoints de $\mathbb{R}^2$ dont la réunion est D. Alors, pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\iint_{D_k} f(x,y)\,dx\,dy\right).$$

10) Par convention, si la fonction f est continue sur le compact $\overline{D}$, on pose

$$\iint_{\overline{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Toutes les propriétés données ci-dessus pour $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ restent valables pour $\iint_{\overline{D}} f(x,y)\,dx\,dy$.

4.2.2 Calcul des intégrales doubles

Proposition 4.6 *Soient $a < b$ deux nombres réels et $\Phi,\ \Psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $x \in \left]a,b\right[: \Phi(x) < \Psi(x)$. Posons,*

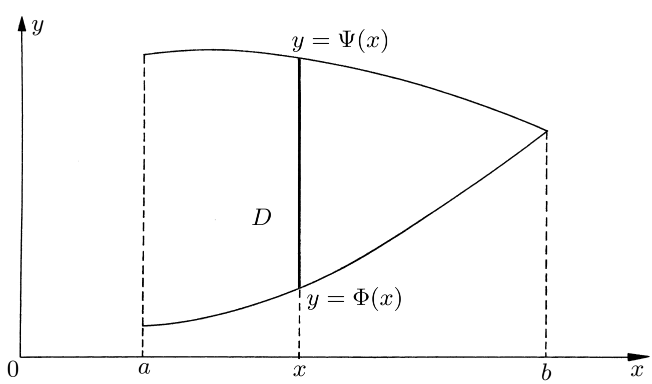
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ \Phi(x) < y < \Psi(x)\right\}.$$

Alors, pour toute fonction continue

$$f : \overline{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \Phi(x) \le y \le \Psi(x)\right\} \to \mathbb{R}\,,$$

on a

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_{\Phi(x)}^{\Psi(x)} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_a^b dx\int_{\Phi(x)}^{\Psi(x)} f(x,y)\,dy\,.$$



Remarques :

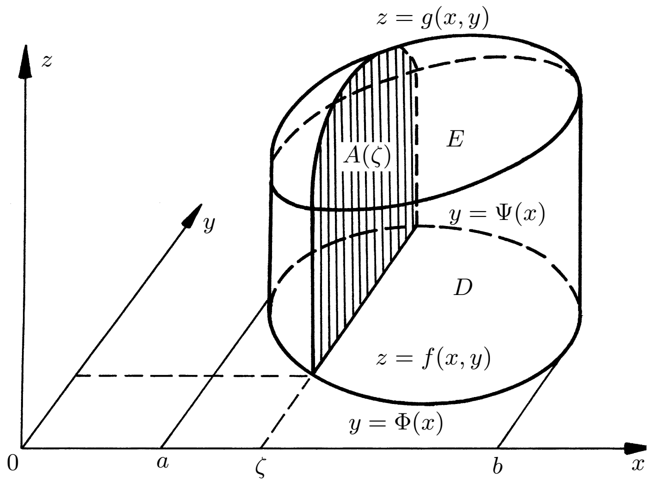
1) Supposons que $f, g : \overline{D} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues telles que sur $D : f < g$ et posons pour $a < \zeta < b$:

$$A(\zeta) = \int_{\Phi(\zeta)}^{\Psi(\zeta)} \big(g(\zeta, y) - f(\zeta, y)\big)\, dy\,.$$

Alors, $A(\zeta)$ est la surface plane obtenue en coupant le corps

$$E = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ f(x, y) < z < g(x, y)\big\}$$

par le plan d'équation $x = \zeta$. Le volume V de E est $V = \displaystyle\int_a^b A(\zeta)\, d\zeta$.



2) $\displaystyle \text{Aire}(D) = \iint_D dx\, dy = \int_a^b dx \int_{\Phi(x)}^{\Psi(x)} dy = \int_a^b \big(\Psi(x) - \Phi(x)\big)\, dx\,.$

3) Dans le cas particulier, où $\Phi(x) = c$ et $\Psi(x) = d$, on a bien

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy\,.$$

Proposition 4.7 *Soient $c < d$ deux nombres réels et $\Phi, \Psi : [c, d] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $y \in \,]c, d[\, : \Phi(y) < \Psi(y)$. Posons*

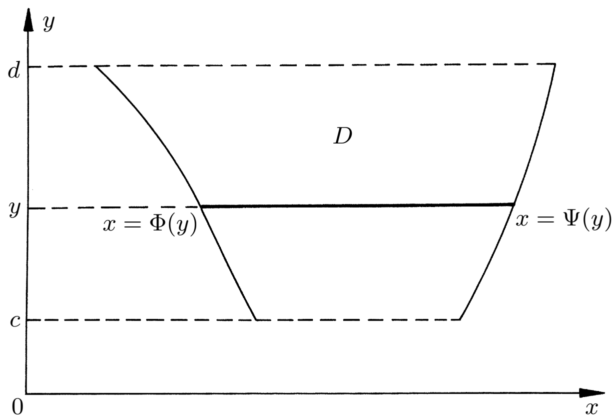
$$D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Phi(y) < x < \Psi(y),\ c < y < d\big\}\,.$$

Alors, pour toute fonction continue

$$f : \overline{D} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Phi(y) \le x \le \Psi(y),\ c \le y \le d\big\} \to \mathbb{R}\,,$$

on a

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x, y)\, dx\right) dy = \int_c^d dy \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x, y)\, dx\,.$$



4.2.3 Changement de variables

Proposition 4.8 *Soient $E, D \subset \mathbb{R}^2$ deux ouverts bornés et $(\varphi, \psi) : E \to D$ une bijection de classe $\mathbf{C}^1$. Alors, pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a*

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \iint_E f\big(\varphi(u,v), \psi(u,v)\big) \left| \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\,(u,v) \right| du\,dv \\ &= \iint_E f\big(\varphi(u,v), \psi(u,v)\big) \left| \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} \right| (u,v) du\,dv\,.\end{aligned}$$

Cas particuliers : Pour les ***coordonnées polaires***

$$\begin{cases} x = \varphi(\rho,\theta) = \rho\cos\theta \\ y = \psi(\rho,\theta) = \rho\sin\theta\,, \end{cases} \qquad \text{on a} \quad \frac{D(\varphi,\psi)}{D(\rho,\theta)}\,(\rho,\theta) = \rho\,.$$

4.3 Intégrale double sur $\mathbb{R}^2$

Une famille $\big(D_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles ouverts et bornés de $\mathbb{R}^2$ est appelée un ***recouvrement régulier*** de $\mathbb{R}^2$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) $\forall\, k \in \mathbb{N} : D_k \subset D_{k+1}$.

2) $\forall\, r > 0,\ \exists\ k_r \in \mathbb{N}$ tel que

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le r,\ |y| \le r\big\} \subset D_{k_r}\,.$$

Proposition 4.9 *Soient $f : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty[$ une fonction continue et $\big(D_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$, $\big(\widehat{D}_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ deux recouvrements réguliers de $\mathbb{R}^2$. Alors, on a l'alternative suivante : ou bien les deux suites $\big(d_k\big)$ et $\big(\widehat{d}_k\big)$ définies respectivement par*

$$d_k = \iint_{D_k} f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{et} \quad \widehat{d}_k = \iint_{\widehat{D}_k} f(x,y)\,dx\,dy$$

convergent vers la même limite ou bien $\lim\limits_{k\to+\infty} d_k = \lim\limits_{k\to+\infty} \widehat{d}_k = +\infty$.

Définition 4.10 Soient $f : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty[$ une fonction continue et $\big(D_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ un recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$. Si la suite

$$\left(d_k = \iint_{D_k} f(x,y)\,dx\,dy\right)$$

converge, sa limite est appelée l'***intégrale double*** de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ et on écrit

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{k\to+\infty} d_k = \lim_{k\to+\infty} \iint_{D_k} f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Pour exprimer que l'intégrale double ci-dessus converge, on utilise la notation

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy < +\infty\,.$$

Dans le cas contraire, on écrit $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = +\infty$.

Proposition 4.11 *(**Critère de comparaison**) Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty[$ deux fonctions continues telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $0 \le f(x,y) \le g(x,y)$. Alors,*

1) $$\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,dx\,dy < +\infty \Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy < +\infty\,.$$

2) $$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = +\infty \Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,dx\,dy = +\infty\,.$$

Proposition 4.12 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \big|f(x,y)\big|\,dx\,dy < +\infty\,.$$

Alors, la suite

$$\left(d_k = \iint_{D_k} f(x,y)\,dx\,dy\right)$$

converge et sa limite est indépendante du recouvrement régulier $\big(D_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ choisi.

Définition 4.13 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \big|f(x,y)\big|\,dx\,dy < +\infty\,.$$

Alors, la limite de la suite

$$\left(d_k = \iint_{D_k} f(x,y)\,dx\,dy\right)$$

où $\big(D_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$ est appelée l'***intégrale double*** de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ et on écrit

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{k\to+\infty} d_k = \lim_{k\to+\infty} \iint_{D_k} f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Proposition 4.14 *Linéarité. Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \big|f(x,y)\big|\,dx\,dy < +\infty \quad \text{et} \quad \iint_{\mathbb{R}^2} \big|g(x,y)\big|\,dx\,dy < +\infty\,.$$

Alors, pour tout couple α et β de $\mathbb{R}$, on a

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (\alpha f + \beta g)(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Proposition 4.15 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \big|f(x,y)\big|\,dx\,dy < +\infty$$

et supposons qu'à chaque $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on puisse associer une fonction continue $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

1) $\forall\, |y| \le \alpha$ *et* $x \in \mathbb{R}$ *:* $\big|f(x,y)\big| \le g_\alpha(x)$ *;*

2) l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(x)\,dx$ *converge.*

Alors,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right) dy\,.$$

4.4 Intégrales multiples

Un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^n$ est appelé un ***pavé fermé*** (dans $\mathbb{R}^2$, on parle de ***rectangle fermé***), s'il peut s'écrire sous la forme

$$D = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

où les $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sont $2n$ nombres réels vérifiant pour tout entier $1 \le k \le n$: $a_k < b_k$.

Nous dirons que $\big(D_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille de ***pavés fermés quasi disjoints*** si pour tout couple $r \neq s$:

$$\mathring{D}_r \cap \mathring{D}_s = \emptyset\,.$$

Soient $D = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, le nombre réel

$$\int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\cdots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \right) \cdots \right) dx_{n-1} \right) dx_n$$

est appelé l'***intégrale multiple*** (si $n = 2$, on parle d'***intégrale double*** et si $n = 3$ d'***intégrale triple***) de la fonction f sur le pavé fermé D et est noté $I_D(f)$. Ce nombre ne dépend pas de l'ordre d'intégration. D'autre part, le nombre réel positif $V(D) = I_D(1)$ est appelé le ***volume*** du pavé fermé D (dans $\mathbb{R}^2$, on parle d'***aire***).

A présent, soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une famille $\big(D_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ de pavés fermés quasi disjoints dont la réunion est D. De plus, si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée, la série numérique

$$\sum_{k=0}^{+\infty} I_{D_k}(f)$$

est absolument convergente et sa somme est indépendante de la famille $\big(D_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ choisie. Par définition, cette somme est appelée l'***intégrale multiple*** (si $n = 2$, on parle d'***intégrale double*** et si $n = 3$ d'***intégrale triple***) de la fonction f sur D et on écrit

$$I_D(f) = \int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \sum_{k=0}^{+\infty} I_{D_k}(f)\,.$$

D'autre part, le nombre $V(D) = I_D(1)$ est appelé le ***volume*** de D (dans $\mathbb{R}^2$, on parle d'***aire***).

Par convention : Si $D \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné et $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on pose

$$\int \cdots \int_{\overline{D}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n\,.$$

Maintenant, supposons que $\big(D_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est un ***recouvrement régulier*** de $\mathbb{R}^n$ (sect. 4.3) et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, si la suite $\big(I_{D_k}(|f|)\big)$ converge, la suite $\big(I_{D_k}(f)\big)$ converge aussi et sa limite est indépendante du choix du recouvrement régulier de $\mathbb{R}^n$ considéré. Par définition, cette limite est appelée l'***intégrale multiple*** (si $n = 2$, on parle d'***intégrale double*** et si $n = 3$ d'***intégrale triple***) de la fonction f sur $\mathbb{R}^n$ et on écrit

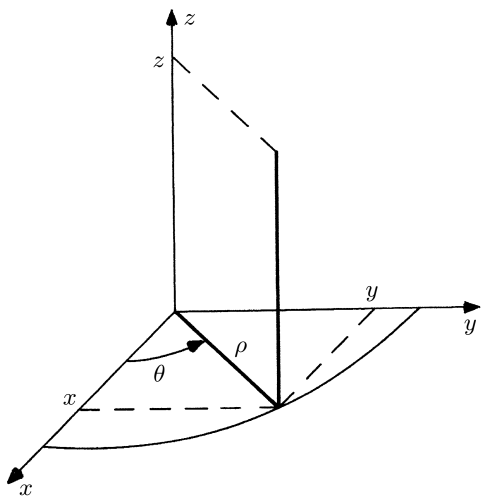
$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \lim_{k \to +\infty} I_{D_k}(f)\,.$$

Pour finir, notons que tous les résultats obtenus concernant les intégrales doubles restent valables pour les intégrales multiples.

Changements de variables particuliers dans $\mathbb{R}^3$

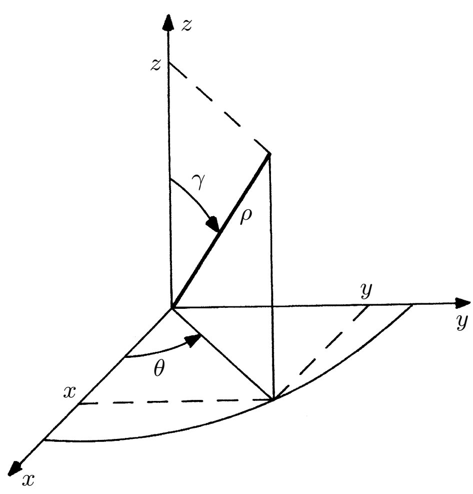
1) Pour les ***coordonnées cylindriques***

$$\begin{cases} x = \varphi(\rho,\theta,z) = \rho\cos\theta \\ y = \psi(\rho,\theta,z) = \rho\sin\theta \\ z = \phi(\rho,\theta,z) = z\,, \end{cases} \qquad \text{on a} \quad \frac{D(\varphi,\psi,\phi,)}{D(\rho,\theta,z)}\,(\rho,\theta,z) = \rho\,.$$



2) Pour les ***coordonnées sphériques***

$$\begin{cases} x = \varphi(\rho,\theta,\gamma) = \rho\sin\gamma\cos\theta \\ y = \psi(\rho,\theta,\gamma) = \rho\sin\gamma\sin\theta \\ z = \phi(\rho,\theta,\gamma) = \rho\cos\gamma\,, \end{cases} \qquad \text{on a} \quad \frac{D(\varphi,\psi,\phi,)}{D(\rho,\theta,\gamma)}\,(\rho,\theta,\gamma) = \rho^2\sin\gamma\,.$$



4.5 Exercices

4.1 Soit $D = [0,1] \times [0,2]$. Calculer
$$\iint_D y \frac{e^{2x+y^2}}{1+e^x}\, dx\, dy\,.$$

4.2 Soit $D = [0,2] \times [0,1]$. Calculer
$$\iint_D (x^3 + 3x^2 y + y^3)\, dx\, dy\,.$$

4.3 Soit $D = [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Calculer
$$\iint_D \frac{x \sin y}{1+x^2}\, dx\, dy\,.$$

4.4 Soit $D = [0,\pi] \times [0,1]$. Calculer
$$\iint_D x \sin xy\, dx\, dy\,.$$

4.5 Soit $D = \left[1, \sqrt{3}\right] \times [0,1]$. Calculer
$$I = \iint_D \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}\, dx\, dy\,.$$

4.6 Soit $D = [0,1] \times [1,2]$. Calculer
$$\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}\, dx\, dy\,.$$

4.7 Soit D l'intérieur du triangle de sommets $A = (0,0)$, $B = (\pi, 0)$ et $C = (\pi, \pi)$. Calculer
$$\iint_D x \cos(x+y)\, dx\, dy\,.$$

4.8 Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < \pi\right\}$. Calculer
$$\iint_D y^2\, e^{xy}\, dx\, dy\,.$$

4.9 Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < y,\ xy < 4\right\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{x^2 y}{1+xy}\, dx\, dy\,.$$

4.10 Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1,\ y > 1,\ x+y < 3\right\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{dx\, dy}{(x+y)^3}\,.$$

4.11 Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x+y < 1\right\}$. Calculer
$$\iint_D 6^x 2^y\, dx\, dy\,.$$

4.12 Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 4x,\ 1 < xy < 2\right\}$. Calculer
$$\iint_D x^2 y^2\, dx\, dy\,.$$

4.13 Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 2x,\ xy < 4,\ x^2+y^2 > 4\right\}$. Calculer
$$\iint_D x^2 y\, dx\, dy\,.$$

4.14 Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < \sqrt{2},\ 0 < xy < 1,\ x^2+y^2 > 2\right\}$. Calculer
$$\iint_D xy^2\, dx\, dy\,.$$

4.15 Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x,\ x+y-2 < 0\right\}$. Calculer
$$\iint_D \left|(x-y)(x+y-2)\right|\, dx\, dy\,.$$

4.16 Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y,\ y > x^2\right\}$. Calculer
$$\iint_D x \sin y\, dx\, dy\,.$$

4.17 Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2,\ x^2 < y < 2x^2\right\}$. Calculer
$$\iint_D (x^3 + y^3)\, dx\, dy\,.$$

4.18 Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1,\ 4 < xy < 8,\ 4x - y - 4 < 0\right\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{dx\, dy}{\sqrt{xy}}\,.$$

4.19 Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1,\ x > \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Calculer
$$\iint_D (x-y)\, dx\, dy\,.$$

4.20 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(\ln x - 1) + 1 < y < \ln x\}$. Calculer
$$\iint_D x\,dx\,dy\,.$$

4.21 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{2+\cos(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,.$$

4.22 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < (x-2)^2 + y^2 < 4,\ y > 0\}$. Calculer
$$\iint_D \cos(x^2+y^2-4x+4)\,dx\,dy\,.$$

4.23 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4,\ y > 1\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,.$$

4.24 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 36,\ x > 3\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,dx\,dy\,.$$

4.25 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ x + y > 1\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,.$$

4.26 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x < 0,\ x > 1\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,.$$

4.27 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x < 0\}$. Calculer
$$\iint_D xy(x^2+y^2)\,dx\,dy\,.$$

4.28 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4,\ 0 < y < x\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{y^2\cos(x^2+y^2)}{x^2}\,dx\,dy\,.$$

4.29 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 16\,x^2 + 9y^2 < 144,\ 0 < y < x\}$. Calculer
$$\iint_D x\,dx\,dy\,.$$

4.30 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 4y^2 < 36,\ x > 0,\ y > 0\}$. Calculer
$$\iint_D x^2y^4\,dx\,dy\,.$$

4.31 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4(x-1)^2 + 9(y-1)^2 < 36,\ y > 1,\ x - y > 0\}$. Calculer
$$\iint_D xy\,dx\,dy\,.$$

4.32 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9(x-2)^2 + 25\,(y+1)^2 < 225,\ y < x-3,\ y > -x+1\}$. Calculer
$$\iint_D (x-2)(y+1)^2\,dx\,dy\,.$$

4.33 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 3\sqrt{x^2+y^2} - 3x,\ x + y > 0\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

4.34 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\left(\sqrt{x^2+y^2} + x\right)\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt[4]{\left(x^2+y^2\right)^3}}\,.$$

4.35 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + y^2 - 2y < 2,\ 0 < y - 1 < x\}$. Calculer
$$\iint_D x(y-1)^2\,dx\,dy\,.$$

4.36 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \frac{1}{2x} < y < \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\}$. Calculer
$$\iint_D (x^2+4y^2)\,dx\,dy\,.$$

4.37 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ 0 < y < x\}$. Calculer
$$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x}\,dx\,dy\,.$$

4.38 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ 0 < y < x\}$. Calculer

$$\iint_D \left(x^2 + \frac{y^2}{9}\right) \sin\left(2 \operatorname{Arctg} \frac{y}{3x}\right) dx\, dy\,.$$

4.39 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \sqrt{2},\ 0 < y < \sqrt{\frac{2}{3}}\}$. Calculer

$$\iint_D \frac{dx\, dy}{\sqrt{\left(\frac{1}{3} + x^2 + y^2\right)^3}}\,.$$

4.40 Soient $r > 0$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - rx < 0\}$. Calculer

$$\iint_D \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy\,.$$

4.41 1) Vérifier que pour tout $r > 0$:

$$\begin{aligned}\iint_{B(\mathbf{0},r)} & e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \\ &\leq 4\left(\int_0^r e^{-t^2}\, dt\right)^2 \\ &\leq \iint_{B(\mathbf{0},2r)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy\,.\end{aligned}$$

2) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

4.42 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x + y < 1,\ x > 0,\ y > 0\}$. En effectuant le changement de variables

$$x = \frac{u+v}{2} \text{ et } y = \frac{u-v}{2}\,,$$

calculer

$$\iint_D e^{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)}\, dx\, dy\,.$$

4.43 Soit $D =]0,1[\times]0,1[$. En effectuant le changement de variables

$$x = u^2 \text{ et } y = \frac{v}{u}\,,$$

calculer

$$\iint_D \frac{dx\, dy}{(1+x)(1+xy^2)}\,.$$

4.44 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y < 2x,\ x < y^2 < 2x\}$. En effectuant le changement de variables

$$u = \frac{x}{y} \text{ et } v = \frac{y^2}{x}\,,$$

calculer

$$\iint_D \frac{y}{x}\, dx\, dy\,.$$

4.45 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 < 1,\ y > 0\}$. En effectuant le changement de variables

$$u = x + \frac{y}{2} \text{ et } v = \frac{\sqrt{3}}{2} y\,,$$

calculer

$$\iint_D e^{x^2+xy+y^2}\, dx\, dy\,.$$

4.46 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 1 < y^2 < x,\ 0 < y < 2 - x\}$. En effectuant le changement de variables

$$u = \frac{y}{2-x} \text{ et } v = y^2 - x\,,$$

calculer

$$\iint_D \frac{y^2(2 + 2y^2 - x)}{(2-x)^4}\, dx\, dy\,.$$

4.47 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \sqrt{2}\, y < x,\ 1 < x^2 - y^2 < 4\}$. En effectuant le changement de variables

$$u = x^2 - y^2 \text{ et } v = \frac{y}{x}\,,$$

calculer

$$\iint_D \frac{y}{x^3} \sin \pi\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx\, dy\,.$$

4.48 En effectuant le changement de variables

$$x = \mu \text{ et } y = \mu \operatorname{tg} \theta\,,$$

calculer

$$\lim_{t \to 0+} \int_t^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\, dy\right) dx\,.$$

Calculer

4.49 $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} (1+y^6)\,dy\,.$

4.50 $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 xy\,e^{y^3}\,dy\,.$

4.51 $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{(4-y^2)^3}\,dy\,.$

4.52 $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dx\,.$

4.53 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,.$

4.54 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2}\,dx\,.$

4.55 $\alpha > 0$.

$$\int_0^{2\alpha} dx \int_0^{\sqrt{2\alpha x - x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,.$$

4.56

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^x \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^x \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,dy + \int_{\sqrt{2}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,dy\,.$$

Calculer l'aire de

4.57 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $y^2 - 6x < 0,\ x - y < 12,\ x^2+y^2 > 16\}$.

4.58 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $x < 0,\ y^2 < x^4(x+4)\}$.

4.59 Soit $r > 0$. Calculer l'aire du domaine D délimité par la ***cardioïde*** $\rho(\theta) = 2r(1+\cos\theta)$.

4.60 Soit $a > 0$. Calculer l'aire du domaine D délimité par la ***lemniscate*** $\rho|\theta| = a\sqrt{|\cos 2\theta|}$.

4.61 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4\}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Calculer

$$\iint_D \frac{2f(x)+5f(y)}{f(x)+f(y)}\,dx\,dy\,.$$

4.62 Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Montrer que

$$\left(\iint_D fg(x,y)\,dx\,dy\right)^2 = \iint_D f^2(x,y)\,dx\,dy \iint_D g^2(x,y)\,dx\,dy$$

si et seulement si f et g sont linéairement dépendantes.

4.63 Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Montrer que pour tout couple de nombres réels $p, q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$\iint_D |fg|(x,y)\,dx\,dy \le \sqrt[p]{\iint_D |f|^p(x,y)\,dx\,dy} \times \sqrt[q]{\iint_D |g|^q(x,y)\,dx\,dy}\,.$$

Cette relation est appelée l'***inégalité de Hölder***. Lorsque $p = q = 2$, il est d'usage de l'appeler l'***inégalité de Cauchy-Schwarz***.

4.64 Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Montrer que pour tout $p \in [1, +\infty[$:

$$\sqrt[p]{\iint_D |f+g|^p(x,y)\,dx\,dy} \le \le \sqrt[p]{\iint_D |f|^p(x,y)\,dx\,dy} + \sqrt[p]{\iint_D |g|^p(x,y)\,dx\,dy}\,.$$

Cette relation est appelée l'***inégalité de Minkowski***.

4.65 Soient $D = [-1,1] \times [-1,1]$ et $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et paire. Montrer que

$$\iint_D f(x-y)\,dx\,dy = 2\int_0^2 (2-t)f(t)\,dt\,.$$

4.66 Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x,y) = \int_0^x dr \int_0^y f(r,s)\,ds\,.$$

Vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = f(x,y)\,.$$

4.67 1) (***Théorème de Green sur un disque***). Soient E un ouvert, $(a,b) \in E$, $r > 0$ un nombre choisi de sorte que $\overline{B\big((a,b),r\big)} \subset E$ et $f_1, f_2 : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Montrer que

$$\iint_{B((a,b),r)} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy$$
$$= r\int_0^{2\pi} \big(-f_1(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)\sin\theta$$
$$+ f_2(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)\cos\theta\big)\,d\theta\,.$$

2) En déduire que si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2,

$$\iint_{B((a,b),r)} \Delta f(x,y)\,dx\,dy$$
$$= r\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)\cos\theta\right.$$
$$\left. + \frac{\partial f}{\partial y}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)\sin\theta\right) d\theta.$$

3) Soient $\delta > 0$ et $f : B\big((a,b),\delta\big) \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique qui atteint un de ses extrema en (a,b). Montrer que f est constante.

4) En déduire que si E est un ouvert connexe et que si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction harmonique qui atteint un de ses extrema, f est constante.

5) *Principe du maximum et du minimum.* Montrer que si E est un ouvert connexe borné et que si $f : \overline{E} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui est harmonique dans E, elle atteint ses extrema sur ∂E.

Calculer

4.68 $$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\big(1+x^2+y^2\big)^2}\,dx\,dy\,.$$

4.69 $$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)}\,.$$

4.70 $$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^4)(1+y^4)}\,.$$

4.71 $$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-x^2}}{1+y^2}\,dx\,dy\,.$$

4.72 $$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,dx\,dy\,.$$

4.73 $$\iint_{\mathbb{R}^2} |x^2-y^2|\,dx\,dy\,.$$

4.74 Montrer que pour tout $s \in \,]0,1[$:

$$\int_{0+}^{1-} t^{s-1}(1-t)^{-s}\,dt$$
$$= \int_{0+}^{1-} \frac{t^{s-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin \pi s}\,.$$

Calculer

4.75
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1+y^2}{(1+y^4)\Big(1+\big(1+y^2\big)^2x^2\Big)}\,dx\,dy.$$

4.76 $$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^2}$$
où D est l'intérieur du tétraède de sommets $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.

4.77 $$\iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$
où D est l'intérieur du tétraède de sommets $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ et $(0,0,1)$.

4.78 Soit $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2+y^2+z^2 < 4\big\}$. Calculer

$$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,.$$

4.79 Soit $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1\big\}$. Calculer

$$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}}\,.$$

4.80 Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1,\ x^2 + y^2 + z^2 < 4, z > 0\}$. Calculer

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz\,.$$

4.81 Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 4 - x^2 - y^2\}$. Calculer

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz\,.$$

4.82 Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 2,\ x^2 + y^2 < 1, z > 0\}$. Calculer

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy\,dz\,.$$

4.83 Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z^2,\ 0 < z < 3\}$. Calculer

$$\iiint_D z(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz\,.$$

4.84 Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 2z,\ x^2+y^2+z^2 < 3\}$. Calculer

$$\iiint_D (x + y + z)^2\,dx\,dy\,dz\,.$$

4.85 Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x, y > 0,\ 2 < x^2 + y^2 < 2\sqrt{2}(x + y), 0 < z < x + y\}$. Calculer

$$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{x^2 + y^2}\,.$$

4.86 Calculer le volume d'un ***cylindre***.

4.87 Calculer le volume d'une ***sphère***.

4.88 Calculer le volume d'un ***ellipsoïde***.

4.89 Calculer le volume de l'***ellipsoïde*** d'équation $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$.

4.90 Soit $\alpha > 0$. Calculer le volume commun aux deux ***cylindres*** d'équation respective

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 \text{ et } x^2 + z^2 = \alpha^2\,.$$

4.91 Soit $\alpha > 0$. Calculer le volume commun à l'intérieur du ***cylindre*** d'équation $x^2 + y^2 = \alpha^2$ et l'intérieur de la ***sphère*** de centre l'origine et de rayon 2α.

4.92 Calculer le volume du domaine délimité par l'intérieur du ***cylindre*** d'équation $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ et l'intérieur de la ***sphère*** de centre l'origine et de rayon 2.

4.93 Calculer le volume du domaine délimité par l'extérieur du ***cône*** d'équation $x^2 + y^2 = z^2$ et l'intérieur de la ***sphère*** de centre l'origine et de rayon $r > 0$.

4.94 Calculer le volume de

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 < \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 2z\right\}.$$

4.95 En coordonnées cartésiennes, le ***centre de gravité*** $\mathcal{G}$ d'un solide homogène D de densité $\sigma > 0$ est donné par

$$x_{\mathcal{G}} = \frac{T_x}{M},\ y_{\mathcal{G}} = \frac{T_y}{M} \text{ et } z_{\mathcal{G}} = \frac{T_z}{M}$$

où

$$T_x = \iiint_D x\,dx\,dy\,dz\,,$$
$$T_y = \iiint_D y\,dx\,dy\,dz\,,$$
$$T_z = \iiint_D z\,dx\,dy\,dz$$

et

$$M = \sigma \iiint_D dx\,dy\,dz\,.$$

Trouver les coordonnées $(x_{\mathcal{G}}, y_{\mathcal{G}}, z_{\mathcal{G}})$ pour le solide de révolution

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < \sqrt{2 - x^2 - y^2}\right\}.$$

4.96 Soit $r > 0$ et désignons par $V_n(r)$ le ***volume*** de la boule ouverte $B_n(\mathbf{0}, r)$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer, en utilisant l'induction, que pour tout entier $n \geq 2$: $V_n(r) = \alpha_n r^n$ avec

$$\alpha_n = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{n} \cdot \dfrac{2\pi}{n-2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2\pi}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\[2ex] \dfrac{2\pi}{n} \cdot \dfrac{2\pi}{n-2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2\pi}{3} \cdot 2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Calculer $V_4(2)$ et $V_5(3)$.

Espace $\mathbb{R}^n$

1.1 1) Pour commencer, supposons que $\big|\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\big| = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$. Puisque $\|\mathbf{x}\| \neq 0$, on obtient, en posant $\lambda = \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|^2}$,

$$\big\|\lambda\mathbf{x}-\mathbf{y}\big\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\big(\lambda x_k - y_k\big)^2 = \lambda^2\|\mathbf{x}\|^2 - 2\lambda\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2 = 0\,.$$

D'où $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$. De plus $\lambda \neq 0$ car $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. La réciproque est évidente.

2) D'une part, $\big\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\big\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\big(x_k+y_k\big)^2 = \big\|\mathbf{x}\big\|^2 + 2\big\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\big\rangle + \big\|\mathbf{y}\big\|^2$.

D'autre part, $\big\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\big\|^2 = \big(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\big)^2 = \big\|\mathbf{x}\big\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2$.
Ainsi,

$$\big\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\big\rangle = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\ ;$$

ce qui entraîne, d'après 1), qu'il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$. De plus, puisque $\lambda\|\mathbf{x}\|^2 = \big\langle \mathbf{x},\mathbf{y}=\lambda\mathbf{x}\big\rangle = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|^2$ et $\|\mathbf{x}\| \neq 0$, on a bien $\lambda > 0$.

1.2
$$\begin{aligned}\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|}{1+\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|} &= 1 - \frac{1}{1+\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|} \leq 1 - \frac{1}{1+\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|}\\ &= \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|}{1+\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|} \leq \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{1+\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} + \frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|}{1+\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|}\,.\end{aligned}$$

1.3 En effet, d'après l'inégalité triangulaire inverse, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$:

$$\big|\|\mathbf{x}_k\| - \|\mathbf{x}\|\big| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|\,.$$

1.4 1) $\mathring{E} = E$, $\overline{E} = \mathbb{R}\times[0,1]$ et $\partial E = \mathbb{R}\times\{0,1\}$.
2) $\mathring{E} = E \Rightarrow E$ ouvert.

1.5 1) $\mathring{E} = E$, $\overline{E} = \big\{(x,y)) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x\big\}$ et $\partial E = \big\{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\big\} \cup \big\{(x,x^2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\big\}$.
2) $\mathring{E} = E \Rightarrow E$ ouvert.

1.6 1) $\mathring{E} = \emptyset$, $\overline{E} = \partial E = E$.
2) $\overline{E} = E \Rightarrow E$ fermé.

$\boxed{\mathbf{1.7}}$ 1) $\mathring{E} = \emptyset$, $\overline{E} = \partial E = E \cup \{(0,0)\}$.

2) $\mathring{E} \neq E \neq \overline{E} \Rightarrow E$ n'est ni ouvert ni fermé.

$\boxed{\mathbf{1.8}}$ 1) Non. En effet, soit $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in E$ et $\delta > 0$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe deux irrationnels r et s vérifiant $\left|r - \frac{1}{2}\right| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ et $\left|s - \frac{1}{2}\right| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$. Ainsi, $(r,s) \in B(\mathbf{a}, \delta)$ et $(r,s) \notin E$.

2) Non. En effet, $\left(\mathbf{x}_k = (\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2})\right)$ est une suite d'éléments de E qui converge vers $(0,0) \notin E$.

3a) $\mathring{E} = \emptyset$. En effet, soit $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in E$ et $\delta > 0$. Alors,

$$\mathbf{b} = \left(a_1 + \frac{\pi}{\left[\frac{\pi}{\delta}\right] + 1}, a_2\right) \notin E \quad \text{et} \quad \mathbf{b} \in B(\mathbf{a}, \delta)\,.$$

3b) Posons

$$A = \left\{\left(n + \frac{1}{p}, m + \frac{1}{q}\right) : n,\ m \in \mathbb{Z} \text{ et } p,\ q \in \mathbb{N}^*\right\}$$

et montrons que $\overline{E} = A$. Puisque l'inclusion $A \subset \overline{E}$ est évidente, on va démontrer l'inclusion inverse. Soit $(x,y) \in A$. Ecrivons $x = [x] + x_1$ et $y = [y] + y_1$. Il nous suffit donc de vérifier que

$$x_1,\ y_1 \in B = \left\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\right\} \cup \{0\}\,.$$

Pour commencer, prouvons ce résultat pour x_1. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $x_1 \notin B$. Alors, en posant $\alpha = \min\{x - [x], [x] + 1 - x\}$ et $\beta = \min\{\frac{1}{k_1 - 1} - x_1, x_1 - \frac{1}{k_1}\}$ avec $k_1 = \min\{k \in \mathbb{N} : kx_1 > 1\}$, on obtient que pour $\delta = \min\{\alpha, \beta\} > 0$, il n'existe aucun élément $\left(n + \frac{1}{p}, m + \frac{1}{q}\right)$ de E tel que

$$\sqrt{\left(x - n - \frac{1}{p}\right)^2 + \left(y - m - \frac{1}{q}\right)^2} < \delta\ ;$$

ce qui revient à dire que $(x,y) \notin \overline{E}$. D'où contradiction. De façon analogue, on démontre que $y_1 \in B$.

3c) $\partial E = \mathring{E} \cup \partial E = \overline{E} = \left\{\left(n + \frac{1}{p},\ m + \frac{1}{q}\right) : n,\ m \in \mathbb{Z} \text{ et } p,\ q \in \mathbb{N}^*\right\}$.

$\boxed{\mathbf{1.9}}$ 1) Soit $\mathbf{b} \in B(\mathbf{a}, r)$ et posons $\delta = r - \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| > 0$. Alors, $B(\mathbf{b}, \delta) \subset B(\mathbf{a}, r)$. En effet,

$$\mathbf{x} \in B(\mathbf{b}, \delta) \Rightarrow \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\,.$$

Soit $\mathbf{c} \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| > r\}$ et posons $\delta = \|\mathbf{c} - \mathbf{a}\| - r > 0$. Alors, $B(\mathbf{c}, \delta) \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| > r\}$. En effet,

$$\mathbf{y} \in B(\mathbf{c}, \delta) \Rightarrow \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| \geq \|\mathbf{c} - \mathbf{a}\| - \|\mathbf{y} - \mathbf{c}\| > r\,.$$

Par conséquent $B(\mathbf{a}, r)$ et $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| > r\}$ sont des ouverts.

2) Il découle de 1) que $\partial B(\mathbf{a},r) \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = r\}$. Montrons à présent l'inclusion inverse. Pour cela, soit $\mathbf{d} \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = r\}$ et $\delta > 0$. Alors, en posant $\mathbf{d}_1 = \mathbf{d} - \frac{\beta}{2r}(\mathbf{d}-\mathbf{a})$ avec $\beta = \min\{r,\delta\}$, on obtient $\|\mathbf{d}_1 - \mathbf{a}\| = (1-\frac{\beta}{2r})\|\mathbf{d}-\mathbf{a}\| < r$. D'où $\mathbf{d}_1 \in B(\mathbf{a},r) \cap B(\mathbf{d},\delta)$. Comme de plus $\mathbf{d} \notin B(\mathbf{a},r)$, on a bien $\mathbf{d} \in \partial B(\mathbf{a},r)$.

3) $\overline{B(\mathbf{a},r)} = B(\mathbf{a},r) \cup \partial B(\mathbf{a},r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \le r\}$.

$\boxed{\mathbf{1.10}}$ 1) Si $E = \overline{E}$, E est fermé car $\overline{E}$ l'est. Réciproquement,

$$E \text{ fermé} \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus E \text{ ouvert} \Rightarrow \overset{\circ}{(\mathbb{R}^n \setminus E)} = \mathbb{R}^n \setminus E \Rightarrow \overline{E} = \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{(\mathbb{R}^n \setminus E)} = E\,.$$

2) Soit F un fermé contenant E. Alors, $\overline{E} \subset F$. En effet,

$$\mathbf{x} \in \overline{E} \Rightarrow \forall\,\delta > 0 : \emptyset \neq B(\mathbf{x},\delta) \cap E \subset B(\mathbf{x},\delta) \cap F \Rightarrow \mathbf{x} \in \overline{F} = F\,.$$

$\boxed{\mathbf{1.11}}$ Pour commencer, montrons que $\overline{E} \cup \overline{F} \subset \overline{E \cup F}$. En effet,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \in \overline{E} \cup \overline{F} &\Rightarrow \forall\,\delta > 0 : B(\mathbf{a},\delta) \cap E \neq \emptyset \text{ ou } \forall\,\delta > 0 : B(\mathbf{a},\delta) \cap F \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \forall\,\delta > 0 :\ B(\mathbf{a},\delta) \cap (E \cup F) \neq \emptyset \Rightarrow \mathbf{a} \in \overline{E \cup F}\,.\end{aligned}$$

Montrons à présent que $\overline{E \cup F} \subset \overline{E} \cup \overline{F}$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\mathbf{b} \in \overline{E \cup F}$ avec $\mathbf{b} \notin \overline{E} \cup \overline{F}$. Alors, il existe au moins un $\delta > 0$ pour lequel

$$B(\mathbf{b},\delta) \cap E = \emptyset \quad \text{et} \quad B(\mathbf{b},\delta) \cap F = \emptyset \Rightarrow B(\mathbf{b},\delta) \cap (E \cup F) = \emptyset \Rightarrow \mathbf{b} \notin \overline{E \cup F}\,.$$

D'où contradiction.

$\boxed{\mathbf{1.12}}$ En effet,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \in \overline{E \cap F} &\Rightarrow \forall\,\delta > 0 :\ B(\mathbf{a},\delta) \cap (E \cap F) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \forall\,\delta > 0 :\ B(\mathbf{a},\delta) \cap E \neq \emptyset \text{ et } B(\mathbf{a},\delta) \cap F \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \mathbf{a} \in \overline{E} \text{ et } \mathbf{a} \in \overline{F} \Rightarrow \mathbf{a} \in \overline{E} \cap \overline{F}\,.\end{aligned}$$

Non. Comme contre-exemple, prendre

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \cup \{(0,0)\} \text{ et } F = \{(x,y)) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} \cup \{(0,0)\}\,.$$

$\boxed{\mathbf{1.13}}$ $\overline{F}$ est le plus petit fermé qui contient F (ex. 1.10) et $\overline{E}$ est un fermé qui contient E donc F. Par conséquent $\overline{F} \subset \overline{E}$.

$\boxed{\mathbf{1.14}}$ Soit $\mathbf{a} \in \overline{E} \cap A$. D'une part, puisque $\mathbf{a} \in A$ et A ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(\mathbf{a},\delta) \subset A$. D'autre part, $B(\mathbf{a},\delta) \cap E \neq \emptyset$ car $\mathbf{a} \in \overline{E}$. Par conséquent $\emptyset \neq B(\mathbf{a},\delta) \cap E \subset A \cap E$.

$\boxed{\mathbf{1.15}}$ Puisque E est borné, il existe $M \ge 0$ tel que $\mathbf{x} \in E$ implique $\|\mathbf{x}\| \le M$. Supposons à présent que $\mathbf{a} \in \overline{E}$. Comme $B(\mathbf{a},1) \cap E \neq \emptyset$, désignons par $\mathbf{b}$ un de ses éléments. Ainsi, $\|\mathbf{a}\| \le \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\| \le 1 + M$. Autrement dit, $\overline{E}$ est bornée.

1.16 1) $\overline{E} = \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{(\mathbb{R}^n \setminus E)} = \mathbb{R}^n \cap \big(\mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{(\mathbb{R}^n \setminus E)}\big)$

$$= \Big(\mathring{E} \cup \big(\mathbb{R}^n \setminus \mathring{E}\big)\Big) \cap \big(\mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{(\mathbb{R}^n \setminus E)}\big)$$

$$= \big(\mathring{E} \cap \overline{E}\big) \cup \Big(\big(\mathbb{R}^n \setminus \mathring{E}\big) \cap \big(\mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{(\mathbb{R}^n \setminus E)}\big)\Big) = \mathring{E} \cup \partial E\,.$$

2) Si $\partial E = \emptyset$, on sait, d'après 1), que $\overline{E} = \mathring{E}$; ce qui entraîne que E est à la fois ouvert et fermé. Par conséquent $E = \mathbb{R}^n$ ou $\emptyset$.

1.17 Soit $\big(E_k\big)_{k\in\Omega}$ une famille de sous-ensembles ouverts. Posons

$$E = \bigcup_{k\in\Omega} E_k\,.$$

Si $\mathbf{a} \in E$, il existe au moins un $k_0 \in \Omega$ tel que $\mathbf{a} \in E_{k_0}$. Ainsi, E_{k_0} étant ouvert, il existe $r > 0$ pour lequel $B(\mathbf{a}, r) \subset E_{k_0} \subset E$.

1.18 Soient $E_1, \ldots, E_m$ m sous-ensembles ouverts. Posons

$$E = \bigcap_{k=1}^{m} E_k\,.$$

Si $\mathbf{a} \in E$, tous les E_k étant ouverts, à chaque entier $1 \leq k \leq m$, on peut associer $r_k > 0$ tel que $B(\mathbf{a}, r_k) \subset E_k$. Ainsi, en posant $r = \min\{r_1, \ldots, r_m\}$, on obtient $B(\mathbf{a}, r) \subset E$.

1.19 Contre-exemple : $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} B\left(\mathbf{0}, \frac{1}{k}\right) = \{\mathbf{0}\}$ est fermé.

1.20 Soient $F_1, \ldots, F_m$ m sous-ensembles fermés. Puisque

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^{m} F_k = \bigcap_{k=1}^{m} \big(\mathbb{R}^n \setminus F_k\big)$$

est ouvert (ex. 1.18), $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{m} F_k$ est fermé.

1.21 Contre-exemple : $\displaystyle\overline{\bigcup_{k=2}^{+\infty} B\left(\mathbf{0}, 1 - \frac{1}{k}\right)} = B(\mathbf{0}, 1)$ est ouvert.

1.22 Soit $\big(F_k\big)_{k\in\Omega}$ une famille de sous-ensembles fermés. Puisque

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k\in\Omega} F_k = \bigcup_{k\in\Omega} (\mathbb{R}^n \setminus F_k)$$

est ouvert (ex. 1.17), $\displaystyle\bigcap_{k\in\Omega} F_k$ est fermé.

1.23 Puisque $\overline{\mathring{E}} \subset \overline{E}$ (ex. 1.13), on a

$$\partial\mathring{E} = \overline{\mathring{E}} \setminus \mathring{E} \subset \overline{E} \setminus \mathring{E} = \partial E\,.$$

Non. Contre-exemple : $E = B(\mathbf{0}, 1) \cup \big\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1\big\}$.

1.24 Découle de la définition du bord. En effet, ∂F est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^n$ qui n'appartiennent ni à l'intérieur de F ni à celui de son complémentaire.

1.25 Si $\mathbf{x} \in \partial E$, à chaque entier $k > 0$, on peut associer un élément $\mathbf{a}_k$ de $E \cap B\big(\mathbf{x}, \frac{1}{k}\big)$ et un élément $\mathbf{b}_k$ de $(\mathbb{R}^n \setminus E) \cap B\big(\mathbf{x}, \frac{1}{k}\big)$. Par construction, les deux suites $\big(\mathbf{a}_k\big)$ et $\big(\mathbf{b}_k\big)$ convergent vers $\mathbf{x}$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite $\big(\mathbf{c}_k\big)$ d'éléments de E et une suite $\big(\mathbf{d}_k\big)$ d'éléments de $\mathbb{R}^n \setminus E$ qui convergent toutes les deux vers $\mathbf{x}$. Alors, pour tout $r > 0$:

$$E \cap B(\mathbf{x}, r) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad (\mathbb{R}^n \setminus E) \cap B(\mathbf{x}, r) \neq \emptyset\,;$$

ce qui revient à dire que $\mathbf{x} \in \partial E$.

1.26 On va commencer par démontrer que $\partial(E \cup F) \subset \partial E \cup \partial F$. Si $\mathbf{x} \in \partial(E \cup F)$, il existe une suite $(\mathbf{a}_k)$ d'éléments de $E \cup F$ et une suite $\big(\mathbf{b}_k\big)$ d'éléments de $\mathbb{R}^n \setminus (E \cup F)$ qui convergent toutes les deux vers $\mathbf{x}$. Comme de plus, l'un au moins des deux sous-ensembles $\{k \in \mathbb{N} : \mathbf{a}_k \in E\}$ ou $\{k \in \mathbb{N} : \mathbf{a}_k \in F\}$ contient un nombre infini d'entiers naturels, de la suite $\big(\mathbf{a}_k\big)$, on peut extraire une sous-suite $\big(\mathbf{a}_{k_p}\big)$ qui est : soit contenue dans E soit contenue dans F. Finalement, puisque

$$\lim_{p \to +\infty} \mathbf{a}_{k_p} = \lim_{p \to +\infty} \mathbf{b}_{k_p} = \mathbf{x}$$

et que la suite $\big(\mathbf{b}_{k_p}\big)$ est contenue dans $\mathbb{R}^n \setminus (E \cup F) = (\mathbb{R}^n \setminus E) \cap (\mathbb{R}^n \setminus F)$, on a $\mathbf{x} \in \partial E \cup \partial F$.

Montrons à présent l'inclusion inverse, à savoir : $\partial E \cup \partial F \subset \partial(E \cup F)$. Pour cela, on va commencer par démontrer que $\partial E \subset \partial(E \cup F)$. Si $\mathbf{x} \in \partial E$, puisque $\partial E \subset \overline{E}$ et $\overline{E} \cap \overline{F} = \emptyset$, on a $\mathbf{x} \notin \overline{F}$; ce qui entraîne l'existence d'un $r > 0$ tel que $B(\mathbf{x}, r) \cap F = \emptyset$. D'autre part, il existe une suite $\big(\mathbf{c}_k\big)$ d'éléments de E (donc de $E \cup F$) et une suite $\big(\mathbf{d}_k\big)$ de $(\mathbb{R}^n \setminus E) \cap B(\mathbf{x}, r)$ (donc de $\mathbb{R}^n \setminus (E \cup F)$ car $B(\mathbf{x}, r) \cap F = \emptyset$) qui convergent toutes deux les vers $\mathbf{x}$. Par conséquent $\mathbf{x} \in \partial(E \cup F)$. De façon analogue, on démontre que $\partial F \subset \partial(E \cup F)$.

Supposons à présent que $\overline{E} \cap \overline{F} \neq \emptyset$. Puisque dans la démonstration de l'inclusion $\partial(E \cup F) \subset \partial E \cup \partial F$, on n'utilise pas l'hypothèse $\overline{E} \cap \overline{F} = \emptyset$, cette inclusion reste vraie si $\overline{E} \cap \overline{F} \neq \emptyset$. Par contre, l'inclusion inverse peut être fausse. En effet, comme contre-exemple, il suffit de prendre $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ et $0 < r_1 < r_2$ et de poser $E = B(\mathbf{a}, r_1)$ et $F = B(\mathbf{a}, r_2)$.

1.27 Pour commencer, on va supposer que E est fermé. Alors, si $(\mathbf{x}_k)$ est une suite d'éléments de E qui converge $\mathbf{x}$, on a $\mathbf{x} \in \overline{E} = E$.

Montrons à présent la réciproque. Pour cela, il nous suffit de démontrer que $\overline{E} \subset E$. En effet, si $\mathbf{x} \in \overline{E}$, il existe une suite $\big(\mathbf{x}_k\big)$ d'éléments de E qui converge vers $\mathbf{x}$. Or, par hypothèse, $\mathbf{x} \in E$.

1.28 Soit $\big(c_k\big)$ est une suite déléments de $[a, b]$ qui converge vers c. Alors, $c \in [a, b]$ et, grâce à la continuité de la fonction f, $\lim\limits_{k \to +\infty} f(c_k) = f(c)$.

Pour conclure, il suffit d'utiliser l'exercice précédent.

$\boxed{\mathbf{1.29}}$ 1) Soit $\mathbf{a}$ un point d'accumulation de E. Alors, il découle de la définition de $\mathbf{a}$ et de celle de $\overline{E}$, que $\mathbf{a} \in \overline{E}$.

2) Pour cela, raisonnons par l'absurde, et supposons que $\mathbf{a}$ est un point d'accumulation de E et que E ne possède qu'un nombre fini d'éléments. Alors, en posant $r = \min\big\{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \ : \ \mathbf{x} \in E \quad \text{et} \quad \mathbf{x} \neq a\big\}$, on obtient $r > 0$ et $E \cap B(\mathbf{a}, r) \subset \{\mathbf{a}\}$. D'où contradiction.

3) Pour cela, raisonnons de nouveau par l'absurde et supposons que E possède une infinité d'éléments. Alors, E contient un sous-ensemble $\{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\}$ dont tous les éléments sont distincts. Puisque E est borné, la suite $\big(\mathbf{x}_k\big)$ l'est aussi. Ainsi, grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass, on sait que de $\big(\mathbf{x}_k\big)$ on peut extraire une sous-suite $\big(\mathbf{x}_{k_p}\big)$ qui converge. Puisque tous les $\mathbf{x}_{k_p}$ sont distincts, sa limite est un point d'accumulation de E. D'où contradiction.

D'une manière générale, si E n'est pas borné, le résultat est faux. Il suffit de prendre comme contre-exemple $E = \big\{(n, 0) : n \in \mathbb{N}\big\}$.

4) Pour commencer, supposons que E est fermé et qu'il possède un point d'accumulation $\mathbf{a}$. Alors, d'après 1), $\mathbf{a} \in \overline{E} = E$.

Réciproquement, supposons que E contienne tous ses points d'accumulation et soit $\big(\mathbf{y}_k\big)$ une suite d'éléments de E qui converge vers $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Alors, ou bien $\mathbf{y}$ est un point d'accumulation de E ou bien il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k \geq k_0 : \mathbf{y}_k = \mathbf{y}$. Dans les deux cas $\mathbf{y} \in E$. Par conséquent E est fermé.

$\boxed{\mathbf{1.30}}$ En effet, E est borné car pour tout $\mathbf{x} \in E : \|\mathbf{x}\| \leq \max\big\{\|\mathbf{a}_1\|, \ldots, \|\mathbf{a}_p\|\big\}$ et, puisque chacun des $\{\mathbf{a}_k\}$ est fermé,

$$E = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\} = \bigcup_{k=1}^{p} \{\mathbf{a}_k\} \quad \text{l'est aussi.}$$

$\boxed{\mathbf{1.31}}$ D'après l'exercice précédent,

$$E = \big\{(-1,0),\ (0,0),\ (1,0),\ (2,0),\ (3,0),\ (4,0),\ (5,0),\ (6,0)\big\} \quad \text{est compact.}$$

$\boxed{\mathbf{1.32}}$ D'après l'exercice 1.30, $E = \big\{(1,-1),\ (1,0),\ (1,1)\big\}$ est compact.

$\boxed{\mathbf{1.33}}$ Puisque E est borné, $\overline{E}$ est fermé et borné (ex. 1.15) donc compact.

$\boxed{\mathbf{1.34}}$ Raisonnons par l'absurde et supposons que $\bigcap\limits_{k \in \Omega} E_k = \emptyset$. Alors,

$$E \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k \in \Omega} E_k = \bigcup_{k \in \Omega} \big(\mathbb{R}^n \setminus E_k\big)\,.$$

Ainsi, puisque E est compact, on sait, d'après le théorème de Heine-Borel-Lebesgue, qu'il existe un sous-ensemble fini Ω_0 de Ω tel que

$$E \subset \bigcup_{k \in \Omega_0} \big(\mathbb{R}^n \setminus E_k\big) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k \in \Omega_0} E_k\ ;$$

ce qui est impossible car $\emptyset \neq \bigcap\limits_{k \in \Omega_0} E_k \subset E$. D'où contradiction.

$\boxed{\mathbf{1.35}}$ En utilisant l'exercice précédent, on sait que $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k \neq \emptyset$ et soit $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ deux éléments de cette intersection. Puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} \sigma_k = 0$ et pour tout entier k : $\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| \leq \sigma_k$, on a : $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

$\boxed{\mathbf{1.36}}$ Puisque E est fermé, il nous suffit de montrer que E est borné. En effet, si $\mathbf{x} \in E$, il existe un entier $1 \leq k_0 \leq n$ tel que $\mathbf{x} \in B\big(\mathbf{a}_{k_0}, \frac{1}{k_0}\big)$. Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire inverse,

$$\|\mathbf{x}\| < \|\mathbf{a}_{k_0}\| + \frac{1}{k_0} \leq \max\big\{\|\mathbf{a}_k\| : k = 1, \ldots, n\big\} + 1\,.$$

$\boxed{\mathbf{1.37}}$ Par sa définition $0 < r < +\infty$, $B(\mathbf{a}, r) \subset E$ et à chaque entier $k > 0$, on peut associer un $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n \backslash E$ tel que $r \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| < r + \frac{1}{k}$. La suite $(\mathbf{x}_k)$ étant bornée, on sait, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrasse, que l'on peut en extraire une sous-suite $(\mathbf{x}_{k_p})$ qui converge et désignons par $\mathbf{b}$ cette limite. Ainsi, puisque pour tout entier $p > 0$:

$$r \leq \|\mathbf{x}_{k_p} - \mathbf{a}\| < r + \frac{1}{k_p} \leq r + \frac{1}{p}\,,$$

on obtient, par passage à la limite, que $\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\| = r$. Comme de plus $\mathbb{R}^n \backslash E$ est un fermé, il contient $\mathbf{b}$. En résumé,

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{b} \in \partial B(\mathbf{a}, r) \\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \backslash E \\ B(\mathbf{a}, r) \subset E \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{b} \in \partial B(\mathbf{a}, r) \cap \partial E\,.$$

$\boxed{\mathbf{1.38}}$ Posons $\sigma = \inf\big\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| : \mathbf{x} \in E \text{ et } \mathbf{y} \in F\big\}$. Alors, il existe une suite $\big(\mathbf{x}_k\big)$ d'éléments de E et une suite $\big(\ \mathbf{y}_k\big)$ d'éléments de F telles que

$$\sigma = \lim_{k\to+\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\|\,.$$

D'une part, E étant compact, de la suite $\big(\mathbf{x}_k\big)$ on peut extraire une sous-suite $\big(\mathbf{x}_{k_p}\big)$ qui converge vers un élément $\mathbf{a}$ de E. D'autre part, la suite $\big(\mathbf{y}_{k_p}\big)$ étant bornée (car $\|\mathbf{y}_{k_p}\| \leq \|\mathbf{x}_{k_p}\| + \big\|\mathbf{x}_{k_p} - \mathbf{y}_{k_p}\big\|$), on sait, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, que l'on peut en extraire une sous-suite $\big(\mathbf{y}_{k_{p_q}}\big)$ qui converge vers $\mathbf{b}$. De plus, $\mathbf{b} \in \overline{F} = F$. Finalement,

$$\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| = \lim_{q\to+\infty} \big\|\mathbf{x}_{k_{p_q}} - \mathbf{y}_{k_{p_q}}\big\| = \lim_{k\to+\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\| = \sigma\,.$$

$\boxed{\mathbf{1.39}}$ En effet, soient $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in B(\mathbf{c}, r)$. Alors, l'application $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to B(\mathbf{c}, r)$ définie par $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{b}t + (1-t)\mathbf{a}$ est un chemin de $B(\mathbf{c}, r)$ d'origine $\mathbf{a}$ et d'extrémité $\mathbf{b}$.

$\boxed{\mathbf{1.40}}$ 1) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'un tel nombre n'existe pas. Alors, à chaque entier $k > 0$, on peut associer un $\mathbf{x}_k \in F$ et un $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^n \backslash E$ tels que $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\| < \frac{1}{k}$. Comme F est compact, de $(\mathbf{x}_k)$ on peut extraire une sous-suite $(\mathbf{x}_{k_p})$ qui converge vers un élément $\mathbf{x}$ de F. Ainsi, puisque $\lim\limits_{k\to+\infty}(\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k) = 0$, on a

$$\lim_{p\to+\infty} \mathbf{y}_{k_p} = \lim_{p\to+\infty}\big(\mathbf{x}_{k_p} - (\mathbf{x}_{k_p} - \mathbf{y}_{k_p})\big) = \mathbf{x}\,.$$

Finalement puisque $\mathbb{R}^n\backslash E$ est un fermé, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\backslash E$; ce qui est impossible car $F \subset E$. D'où contradiction.

2) Posons $s = r + \delta$ et montrons que $B(\mathbf{a}, s) \subset E$. Puisque par hypothèse $F = \overline{B(\mathbf{a}, r)} \subset E$, il nous suffit de démontrer que tout $\mathbf{b}$ avec $r < \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| < s$ appartient à E. En effet, $\mathbf{c} = \mathbf{a} + r\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|} \in F$ donc $B(\mathbf{c}, \delta) \subset E$ et $\|\mathbf{b} - \mathbf{c}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| - r < \delta$.

$\boxed{\mathbf{1.41}}$ Puisque $\bigcap\limits_{k\in\Omega} E_k \neq \emptyset$, cette intersection contient au moins un élément $\mathbf{c}$. Soient $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E = \bigcup\limits_{k\in\Omega} E_k$. Alors, il existe $k_1, k_2 \in \Omega$ tels que $\mathbf{a} \in E_{k_1}$ et $\mathbf{b} \in E_{k_2}$. Les deux sous-ensembles E_{k_1} et E_{k_2} étant connexes par arcs, les deux points $\mathbf{a}$ et $\mathbf{c}$ peuvent être joints par un chemin $\boldsymbol{\gamma}_1$ de E_{k_1} d'origine $\mathbf{a}$ et d'extrémité $\mathbf{c}$, tandis que les deux points $\mathbf{c}$ et $\mathbf{b}$ peuvent être joints par un chemin $\boldsymbol{\gamma}_2$ de E_{k_2} d'origine $\mathbf{c}$ et d'extrémité $\mathbf{b}$. Ainsi, l'application $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to E$ définie par

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_1(2t) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \boldsymbol{\gamma}_2(2t-1) & \text{si } t \in \left]\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

est un chemin de E d'origine $\mathbf{a}$ et d'extrémité $\mathbf{b}$.

$\boxed{\mathbf{1.42}}$ Pour commencer, on va démontrer que $\operatorname{Im}\boldsymbol{\gamma}$ est connexe par arcs. En effet, soient $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ deux éléments de $\operatorname{Im}\boldsymbol{\gamma}$. Alors, puisqu'il existe t_1, $t_2 \in [0,1]$ tels que $\boldsymbol{\gamma}(t_1) = \mathbf{a}$ et $\boldsymbol{\gamma}(t_2) = \mathbf{b}$, l'application $\boldsymbol{\gamma}_1$ définie par

$$\boldsymbol{\gamma}_1(t) = \boldsymbol{\gamma}\big(t_1 + t(t_2 - t_1)\big)$$

est un chemin de $\operatorname{Im}\boldsymbol{\gamma}$ d'origine $\mathbf{a}$ et d'extrémité $\mathbf{b}$.

Montrons à présent que $\operatorname{Im}\boldsymbol{\gamma}$ est compact. Pour cela, soit $\big(\mathbf{x}_k\big)$ une suite d'éléments de $\operatorname{Im}\boldsymbol{\gamma}$. Alors, il existe une suite $\big(t_k\big)$ d'éléments de $[0,1]$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N} : \mathbf{x}_k = \boldsymbol{\gamma}(t_k)$. Comme la suite $\big(t_k\big)$ est bornée, on sait, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, que l'on peut en extraire une sous-suite $\big(t_{k_p}\big)$ qui converge. De plus, sa limite t appartient à $[0,1]$; ce qui nous permet d'écrire, en utilisant la continuité de la fonction $\boldsymbol{\gamma}$, que la sous-suite $\big(\mathbf{x}_{k_p} = \boldsymbol{\gamma}(t_{k_p})\big)$ converge vers $\boldsymbol{\gamma}(t)$.

$\boxed{\mathbf{1.43}}$ Pour commencer, on va démontrer que E est connexe par arcs. Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in E$, $E \cup F$ étant connexe par arcs, il existe un chemin $\boldsymbol{\gamma}_1$ de $E \cup F$ d'origine $\mathbf{a}$ et d'extrémité $\mathbf{b}$ et posons

$$r = \sup\big\{t \in [0,1] : \boldsymbol{\gamma}_1\big([0,t]\big) \subset E\big\} \quad \text{et} \quad s = \inf\big\{t \in [0,1] : \boldsymbol{\gamma}_1\big([t,1]\big) \subset E\big\}\,.$$

Ainsi, il résulte de la définition de r et s, de la continuité de la fonction $\boldsymbol{\gamma}_1$ et du fait que E est fermé, que $\boldsymbol{\gamma}_1\big([0,r]\big)$ et $\boldsymbol{\gamma}_1\big([s,1]\big)$ sont inclus tous les deux dans E.

1) $r = 1$. L'application $\boldsymbol{\gamma}_1$ est un chemin de E.

2) $r \neq 1$. Alors, $0 \leq r < s \leq 1$ et montrons que $\boldsymbol{\gamma}_1(r)$, $\boldsymbol{\gamma}_1(s) \in F$. En effet, il découle de la définition de r et s l'existence de deux suites (r_k) et (s_k) de $[r, s]$ qui convergent respectivement vers r et s et telles que pour tout entier $k \geq 0$: $\boldsymbol{\gamma}_1(r_k)$, $\boldsymbol{\gamma}_1(s_k) \in F$. La continuité de la fonction $\boldsymbol{\gamma}_1$ et le fait que F est fermé, nous permet de conclure. On a ainsi démontré que $\boldsymbol{\gamma}_1(r)$, $\boldsymbol{\gamma}_1(s) \in E \cap F$. Puisque cette intersection est par hypothèse connexe par arcs, il existe un chemin $\boldsymbol{\gamma}_2$ de $E \cap F$ d'origine $\boldsymbol{\gamma}_1(r)$ et d'extrémité $\boldsymbol{\gamma}_1(s)$. Par conséquent l'application $\boldsymbol{\gamma} : [0, 1] \to E$ définie par

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_1(t) & \text{si } t \in [0, r] \cup [s, 1] \\ \boldsymbol{\gamma}_2\left(\dfrac{t - r}{s - r}\right) & \text{si } t \in [r, s] \end{cases}$$

est un chemin de E d'origine $\mathbf{a}$ et d'extrémité $\mathbf{b}$.

La connexité par arcs de F se démontre de façon analogue.

$\boxed{\mathbf{1.44}}$ Raisonnons par l'absurde et supposons que $\overline{E}$ n'est pas connexe. Alors, il existe deux ouverts A et B tels que

$$\overline{E} = A_1 \cup B_1 \quad \text{et} \quad A_1 \cap B_1 = \emptyset$$

avec $A_1 = \overline{E} \cap A \neq \emptyset$ et $B_1 = \overline{E} \cap B \neq \emptyset$. Par conséquent $A_2 = E \cap A \neq \emptyset$ et $B_2 = E \cap B \neq \emptyset$ (ex.1.14) et de plus

$$E = A_2 \cup B_2 \quad \text{et} \quad A_2 \cap B_2 = \emptyset\ ;$$

ce qui est impossible car E est connexe. D'où contradiction.

D'une manière générale, le réciproque est fausse. Contre-exemple : $E = [0, 1[\cup]1, 2]$ n'est pas connexe mais $\overline{E} = [0, 1]$ l'est (ex. 1.46).

$\boxed{\mathbf{1.45}}$ Raisonnons par l'absurde et supposons que E est connexe par arcs mais non connexe. Alors, il existe deux ouverts A et B tels que

$$E = A_1 \cup B_1 \quad \text{et} \quad A_1 \cap B_1 = \emptyset$$

avec $A_1 = E \cap A \neq \emptyset$ et $B_1 = E \cap B \neq \emptyset$. Soit $\mathbf{a} \in A_1$ et $\mathbf{b} \in B_1$. Puisque $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in E$ et que E est connexe par arcs, il existe un chemin $\boldsymbol{\gamma}$ de E d'origine $\mathbf{a}$ et d'extrémité $\mathbf{b}$. Posons $s = \sup\{t \in [0, 1] : \boldsymbol{\gamma}([0, t]) \subset A_1\}$. Ainsi, puisque $\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{a}$, $\boldsymbol{\gamma}(1) = \mathbf{b}$ et $\boldsymbol{\gamma}$ continue, on a : $0 < s < 1$ et $\boldsymbol{\gamma}(s) \notin A_1 \cup B_1$; ce qui est impossible car $\boldsymbol{\gamma}(s) \in E = A_1 \cup B_1$. D'où contradiction.

$\boxed{\mathbf{1.46}}$ Tout intervalle I étant connexe par arcs, il est, d'après l'exercice précédent, aussi connexe. Supposons à présent que E n'est pas un intervalle. Alors, il existe $a < c < b$ avec a, $b \in E$ et $c \notin E$. Par conséquent

$$E = \big(E \cap]-\infty, c[\big) \cup \big(E \cap]c, +\infty[\big), \;\; a \in E \cap]-\infty, c[\quad \text{et} \quad b \in E \cap]c, +\infty[\ ;$$

ce qui entraîne que E n'est pas connexe.

$\boxed{\textbf{1.47}}$ Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux fermés F_1 et F_2 non vides et disjoints tels que $E = F_1 \cup F_2$. Alors, $A = \mathbb{R}^n \setminus F_1$ et $B = \mathbb{R}^n \setminus F_2$ sont deux ouverts tels que $E \cap A = F_2$ et $E \cap B = F_1$; ce qui est impossible car E est connexe. D'où contradiction.

Remarque : Pour démontrer cet exercice, on peut utiliser la proposition 1.44.

$\boxed{\textbf{1.48}}$ Raisonnons par l'absurde et supposons que F n'est pas connexe. Alors, il existe deux ouverts A et B tels que $F = A_1 \cup B_1$ et $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ avec $A_1 = F \cap A \neq \emptyset$ et $B_1 = F \cap B \neq \emptyset$. Ainsi, puisque $F \subset \overline{E}$, on a $\overline{E} \cap A \neq \emptyset$ et $\overline{E} \cap B \neq \emptyset$. Par conséquent $A_2 = E \cap A \neq \emptyset$ et $B_2 = E \cap B \neq \emptyset$ (ex. 1.14) et de plus $E = A_2 \cup B_2$ et $A_2 \cap B_2 = \emptyset$; ce qui est impossible car E est connexe. D'où contradiction.

Cas particulier : $F = \overline{E}$.

$\boxed{\textbf{1.49}}$ Raisonnons par l'absurde et supposons que $E = \bigcup\limits_{k \in \Omega} E_k$ n'est pas connexe. Alors, il existe deux ouverts A et B tels que $E = A_1 \cup B_1$ et $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ avec $A_1 = E \cap A \neq \emptyset$ et $B_1 = E \cap B \neq \emptyset$. Puisque tous les E_k sont connexes, il existe k_1, $k_2 \in \Omega$ tels que $E_{k_1} \subset A_1$ et $E_{k_2} \subset B_1$; ce qui est impossible car $\emptyset \neq E_{k_1} \cap E_{k_2} \subset A_1 \cap B_1$. D'où contradiction.

$\boxed{\textbf{1.50}}$ 1) En effet, si $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ et $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ sont deux éléments de E, l'application $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to E$ définie par

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \left(a_1 + t(b_1 - a_1)\,,\, \sin \frac{1}{a_1 + t(b_1 - a_1)} \right)$$

est un chemin de E d'origine $\mathbf{a}$ et d'extrémité $\mathbf{b}$.

2) Posons $F = E \cup A$ où $A = \big\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\big\}$. Pour commencer, on va démontrer l'inclusion $F \subset \overline{E}$. Puisque $E \subset \overline{E}$, il nous suffit de vérifier que $A \subset \overline{E}$. En effet, si $(0, b) \in A$, la suite $\big(\mathbf{x}_k\big)$ définie par

$$\mathbf{x}_k = \left(\frac{1}{\operatorname{Arcsin} b + 2(k+1)\pi}\,, b \right)$$

est une suite d'éléments de E qui converge vers $(0, b)$. D'où $(0, b) \in \overline{E}$. Montrons à présent l'inclusion inverse. Pour cela, soit $(c, d) \in \overline{E}$. Alors, il existe une suite $\big((c_k, d_k)\big)$ d'éléments de E qui converge vers (c, d) ; ce qui revient à dire que $\lim\limits_{k \to +\infty} c_k = c \geq 0$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} \sin \frac{1}{c_k} = d$. Par conséquent ou bien $c > 0$ et $\sin \frac{1}{c} = d$ ou bien $c = 0$ et $-1 \leq d \leq 1$. D'où $(c, d) \in F$.

3) Puisque E est connexe par arcs, il est connexe ; ce qui entraîne que $\overline{E}$ l'est aussi. Montrons à présent que $\overline{E}$ n'est pas connexe par arcs. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il l'est. Alors, il existe un chemin $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$ de $\overline{E}$ d'origine $(0, 1)$ et d'extrémité $(1, \sin 1)$ et posons $\alpha = \inf \big\{ r \in [0,1] : \gamma_1\big([r, 1]\big) > 0 \big\}$. Ainsi, il résulte de la définition de α et de la continuité de la fonction γ_1, que $0 \leq \alpha < 1$ et $\gamma_1(\alpha) = 0$; ce qui nous permet

d'écrire, grâce au théorème de la valeur intermédiaire, que pour tout entier $k \geq 0$:

$$\left[\frac{1}{\gamma_1\left(\alpha + \dfrac{1-\alpha}{k+1}\right)}, +\infty \right[\subset \left\{ \frac{1}{\gamma_1(t)} : \alpha < t \leq \alpha + \frac{1-\alpha}{k+1} \right\}.$$

Ainsi, en désignant par $\beta \neq \gamma_2(\alpha)$ un nombre compris entre -1 et 1, il découle de l'inclusion ci-dessus, qu'à tout entier $k \geq 0$, on peut associer un élément t_k de $\left]\alpha, \alpha + \frac{1-\alpha}{k+1}\right]$ de sorte que $\gamma_2(t_k) = \beta$; ce qui entraîne, grâce à la continuité de la fonction γ_2, que $\gamma_2(\alpha) = \lim\limits_{k \to +\infty} \gamma_2(t_k) = \beta$. D'où contradiction.

Solutions des exercices du chapitre 2

Fonctions de plusieurs variables

2.1 N'existe pas car $\lim\limits_{t\to 0} f(t,0) = 1 \neq -1 = \lim\limits_{t\to 0} f(0,t)$ avec $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

2.2 $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$: $\left|xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \leq |xy| \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0\,.$

2.3 N'existe pas car $\lim\limits_{t\to 0} f(t,0) = 0 \neq -1 = \lim\limits_{t\to 0} f(0,t)$ avec $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^2}{x^2+y^2}$.

2.4 $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2|x|+y^2|y|}{x^2+y^2} \leq |x|+|y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0\,.$$

2.5 N'existe pas car $\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \dfrac{1}{2} \neq 0 = \lim\limits_{t\to 0} f(t,0)$ avec $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

2.6 $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$0 \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = \frac{x^2}{x^2+y^4}\,y^2 \leq y^2 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = 0\,.$$

2.7 $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

2.8 N'existe pas car $\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \dfrac{1}{2} \neq 0 = \lim\limits_{t\to 0} f(t,0)$ avec $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{x^2+y^2}$.

2.9 $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\cos t}{t^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}$.

2.10 $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{x^2\sin y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}\,|\sin y| \leq |y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin y}{x^2+y^2} = 0\,.$$

$\boxed{\textbf{2.11}}$ $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$: $$\left|\frac{\sin x^2+\sin 2xy+\sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{x^2+2|xy|+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\big(|x|+|y|\big)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 4\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x^2+\sin 2xy+\sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

$\boxed{\textbf{2.12}}$ $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$ avec $0<\sqrt{x^2+y^2}<\frac{\pi}{2}$:

$$\left|\frac{\sin x\sin y}{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{|xy|}{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}}\,|y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x\sin y}{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

$\boxed{\textbf{2.13}}$ N'existe pas car $\lim_{t\to 0} f(t,0)=0\neq 1=\lim_{t\to 0} f(0,t)$ avec $f(x,y)=\dfrac{x^5+y^4}{\sin^2(x^2+y^2)}$.

$\boxed{\textbf{2.14}}$ $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:
$$\left|\frac{\sin x^2\sin y}{x^2+\operatorname{sh}^2 y}\right| = \frac{|\sin x^2|}{x^2+\operatorname{sh}^2 y}\,|\sin y| \le |y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x^2\sin y}{x^2+\operatorname{sh}^2 y} = 0\,.$$

$\boxed{\textbf{2.15}}$ *Rappel* : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $\operatorname{sh} x^2\ge x^2$ et $\operatorname{sh}^2 y\ge y^2$.
$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:
$$\left|\frac{xy\sin xy}{\operatorname{sh} x^2+\operatorname{sh}^2 y}\right| \le \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \le y^2 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\sin xy}{\operatorname{sh} x^2+\operatorname{sh}^2 y} = 0\,.$$

$\boxed{\textbf{2.16}}$ $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:
$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,|y| \le |y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

$\boxed{\textbf{2.17}}$ $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:
$$\left|\frac{\sin x\operatorname{th} y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,|y| \le |y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x\operatorname{th} y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

$\boxed{\textbf{2.18}}$ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{\sin(x^2+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}(x^2-y^2) = 0.$$

$\boxed{\textbf{2.19}}$ $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$ avec $0<x^2+y^2<\frac{\pi}{2}$:

$$\left|x^3y^3\frac{\sin(x^2-y^2)}{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}\right| \le \frac{(x^2+y^2)}{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}\,|xy|^3 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^3y^3\frac{\sin(x^2-y^2)}{\operatorname{tg}(x^2+y^2)} = 0\,.$$

$\boxed{\textbf{2.20}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\operatorname{sh} t} = 1 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\operatorname{sh}(x^2+y^2)} = 1.$

2) $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:
$$\left|\frac{x^2\sin y}{\operatorname{sh}(x^2+y^2)}\right| \le \frac{x^2+y^2}{\operatorname{sh}(x^2+y^2)}\,|\sin y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin y}{\operatorname{sh}(x^2+y^2)} = 0\,.$$

Finalement, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)+x^2\sin y}{\operatorname{sh}(x^2+y^2)} = 1.$

$\boxed{\mathbf{2.21}}$ $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{x^4\operatorname{tg}xy}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}\,x^2\,|\operatorname{tg}xy| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4\operatorname{tg}xy}{x^2+y^2}=0\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.22}}$ $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$0\le\left|\frac{x^2\operatorname{tg}y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}\,|\operatorname{tg}y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\operatorname{tg}y}{x^2+y^2}=0\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.23}}$ 1) $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{x^2\sin y}{\sin(x^2+y^2)}\right| \le \frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}\,|\sin y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\sin y}{\sin(x^2+y^2)}=0\,.$$

2) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{Arctg}2t}{\sin t}=2 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{Arctg}2(x^2+y^2)}{\sin(x^2+y^2)}=2.$

Finalement, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{Arctg}2(x^2+y^2)+x^2\sin y}{\sin(x^2+y^2)}=2.$

$\boxed{\mathbf{2.24}}$ $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^4}\,\operatorname{th}y^2\right| \le \frac{y^4}{x^2+y^4}\,|x|\le|x| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\,\operatorname{th}y^2=0\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.25}}$ $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{\operatorname{sh}t}=1 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln\sqrt[4]{1+x^2+y^2}}{\operatorname{sh}(x^2+y^2)}=\frac{1}{4}.$

$\boxed{\mathbf{2.26}}$ $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{\sin t}=1 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{\ln\sqrt{1+\sqrt{x^2+(y-1)^4}}}{\sin\sqrt{x^2+(y-1)^4}}=\frac{1}{2}.$

$\boxed{\mathbf{2.27}}$ $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$0<\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{x^2+y^2}<6\,\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{x^2+y^2}=0\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.28}}$ $\displaystyle\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} : 0<\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}<\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}\,\sqrt{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}=0\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.29}}$ *Rappel* : $\displaystyle\lim_{t\to 0+} t\ln t=0.$

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} : 0<\left|xy\ln(x^2+y^2)\right|\le\frac{1}{2}\left|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right|$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)=0\,.$$

2.30 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{Arctg}^2(\sin t)}{\ln(1+\mathrm{tg}^2\,t)^2}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\mathrm{Arctg}(\sin t)}{\sin t}\right)^2\frac{\mathrm{tg}^2\,t}{\ln(1+\mathrm{tg}^2\,t)}\left(\frac{\sin t}{\mathrm{tg}\,t}\right)^2=\frac{1}{2}$

$\displaystyle\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\mathrm{Arctg}^2\big(\sin(x^2+y^2)\big)}{\ln\big(1+\mathrm{tg}^2(x^2+y^2)\big)^2}=\frac{1}{2}\,.$

2.31 D'une part,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln\big(1+\mathrm{sh}(x^2+y^2)\big)}{\sin(x^2+y^2)}=1 \qquad \text{car} \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+\mathrm{sh}\,t)}{\sin t}=1\,.$$

D'autre part, puisque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}=1 \qquad \text{car} \qquad \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1\,.$$

et pour tout $(x,y)\neq(0,0)$:

$$0\leq\frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2+y^2}\leq\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leq y^2\,,$$

on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+x^2y^2)}{\sin(x^2+y^2)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2+y^2}\,\frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}\right)=0\,.$$

D'où $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{sh}(x^2+y^2)}{1+x^2y^2}\right)}{\sin(x^2+y^2)}=1\,.$

2.32 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{\sin t}=1\Rightarrow\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sin(x^2+y^2)}=1.$

2) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1\Rightarrow\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+x^4+y^4)}{x^4+y^4}=1.$

3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=0$ car pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}$:

$$0<\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\leq\frac{\big(x^2+y^2\big)^2}{x^2+y^2}\leq x^2+y^2\,.$$

4) $\displaystyle\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}:\ \frac{\ln\left(\dfrac{1+x^4+y^4}{1+x^2+y^2}\right)}{\sin(x^2+y^2)}$

$$=\frac{\ln(1+x^4+y^4)}{x^4+y^4}\,\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\,\frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}-\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sin(x^2+y^2)}\,.$$

Finalement, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln\left(\dfrac{1+x^4+y^4}{1+x^2+y^2}\right)}{\sin(x^2+y^2)}=-1.$

2.33 Cette limite n'existe pas car

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{t\to 0} f(0,t)$$

avec $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+\sin xy)}{\sin(x^2+y^2)}$.

2.34 1) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$.

2) $\lim\limits_{t\to 0+} t\ln t = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = 0$. Par conséquent

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0$$

car pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$: $\left|\dfrac{y^4\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right| \le \big|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\big|$.

Finalement, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)+y^4\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$.

2.35 $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^6+y^6 = (x^2+y^2)\left(\big(x^2-y^2\big)^2+x^2y^2\right)$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^4-y^4)+\sin 2(x^2+y^2)}{(x^6+y^6)} \ln\left(1+\big(x^2-y^2\big)^2+x^2y^2\right)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left((x^2-y^2)+\frac{\sin 2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right) \frac{\ln\left(1+\big(x^2-y^2\big)^2+x^2y^2\right)}{\big(x^2-y^2\big)^2+x^2y^2} = 2.$$

2.36 $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le 1-\cos\sqrt{|xy|} = 2\sin^2\dfrac{\sqrt{|xy|}}{2} \le \dfrac{|xy|}{2}$

$$\Rightarrow \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \big|f(x,y)\big| \le \frac{|x|}{2} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0\,.$$

2.37 $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\operatorname{Arctg} t} = 1 \Rightarrow \exists\ 0<\delta\le 1$ tel que $\forall\, 0<|t|\le\delta : \left|\dfrac{t}{\operatorname{Arctg} t}\right| \le 2$

$\Rightarrow \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ avec $\sqrt{x^2+y^2}<\delta : \left|\dfrac{\sin xy}{\operatorname{Arctg} y}\right| \le \left|\dfrac{y}{\operatorname{Arctg} y}\right| |x| \le 2|x|$

$\Rightarrow \forall\,(x,y) \in B\big((0,0),\delta\big) :\ \big|f(x,y)\big| \le 2|x| \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0\,.$

2.38 $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* :\ \left|\dfrac{\operatorname{th} xy}{y}\right| \le |x|$

$$\Rightarrow \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \big|f(x,y)\big| \le |x| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0\,.$$

2.39 $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^* :\ \left|\dfrac{1}{y}\,e^{-\frac{1}{x^2y^2}}\right| < x^2|y|$

$$\Rightarrow \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \big|f(x,y)\big| \le x^2|y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.40}}$ $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]:\ \left|\dfrac{y}{x^2}\,e^{-\frac{y}{x^2}}\right|\le\dfrac{3}{2x^2}\,e^{-\frac{1}{2x^2}}<12\,x^2$

$\Rightarrow\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}\times\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]:\ \big|f(x,y)\big|\le 12x^2\Rightarrow\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}f(x,y)=0\,.$

$\boxed{\mathbf{2.41}}$ $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}:\ \left|\dfrac{y}{x^2}\,e^{-\frac{1}{|x|}}\right|\le 2|y|$

$\Rightarrow\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \big|f(x,y)\big|\le 2|y|\Rightarrow\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0\,.$

$\boxed{\mathbf{2.42}}$ Soit $\varepsilon>0$. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1\Rightarrow\exists\,0<\delta<1$ tel que $\forall\,0<|t|<\delta$:

$$\left|\frac{\sin t}{t}-1\right|<\varepsilon\,.$$

Ainsi, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$ avec $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$: $\left|\frac{\sin xy}{xy}-1\right|<\varepsilon$; ce qui entraîne que pour tout $(x,y)\in B\big((0,0),\delta\big)$: $\big|f(x,y)-1\big|<\varepsilon$.

D'où $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=1$.

$\boxed{\mathbf{2.43}}$ Soit $\varepsilon>0$. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{sh} t}=1$. Alors, il existe $0<\delta<1$ tel que pour tout $0<|t|<\delta$:

$$\left|\frac{\sin t}{t}-1\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{et}\quad\left|\frac{t}{\operatorname{sh} t}-1\right|<\frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Ainsi, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$ avec $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin xy}{\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y}-1\right|&=\left|\left(\frac{\sin xy}{xy}-1\right)\frac{x}{\operatorname{sh} x}\,\frac{y}{\operatorname{sh} y}+\left(\frac{x}{\operatorname{sh} x}-1\right)\frac{y}{\operatorname{sh} y}+\left(\frac{y}{\operatorname{sh} y}-1\right)\right|\\&\le\left|\frac{\sin xy}{xy}-1\right|+\left|\frac{x}{\operatorname{sh} x}-1\right|+\left|\frac{y}{\operatorname{sh} y}-1\right|<\varepsilon\,;\end{aligned}$$

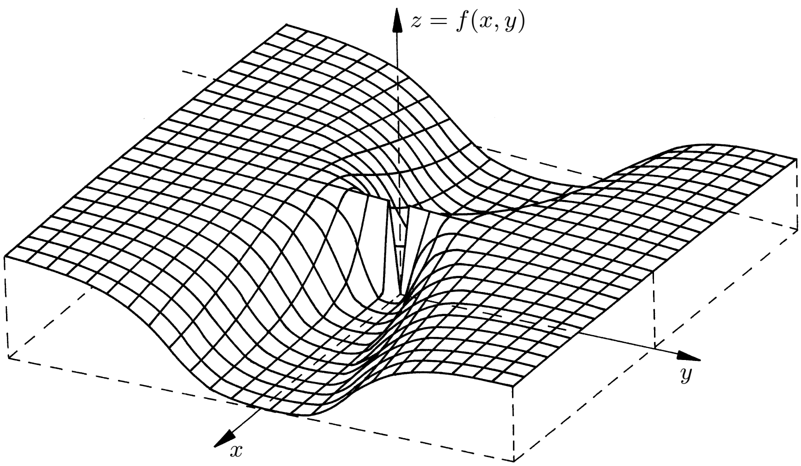
ce qui entraîne que pour tout $(x,y)\in B\big((0,0),\delta\big)$: $\big|f(x,y)-1\big|<\varepsilon$.

D'où $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=1$.

$\boxed{\mathbf{2.44}}$ N'existe pas car $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(t,t)=0\neq 1=\lim_{t\to 0}f(t,t^3)$.

$\boxed{\mathbf{2.45}}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(t,\alpha t)=\lim_{t\to 0}\frac{2\alpha^4t^2}{1+\alpha^4t^2}=0$.

2) N'existe pas car $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(t,t)=0\neq 1=\lim_{t\to 0}f(t^2,t)$.



2.46 1) La fonction est continue en tout point $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

2) La fonction f est discontinue aux points de la forme $(a,0)$ avec $a \neq 0$ car $\lim\limits_{t \to 0} f(a,t) = a^2 \neq 0 = f(a,0)$.

3) La fonction f est continue en $(0,0)$. En effet, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$\left| y + \frac{1}{y}\ \mathrm{Arctg}(x^2 y) \right| \leq |y| + x^2 \ ;$$

ce qui entraîne que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\big| f(x,y) - f(0,0) \big| \leq |y| + x^2$.

2.47 1) La fonction est continue en tout point $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

2) La fonction f est discontinue aux points de la forme $(a,0)$ avec $a \neq 0$ car $\lim\limits_{t \to 0} f(a,t) = a \neq 0 = f(a,0)$.

3) La fonction f est continue en $(0,0)$. En effet, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$\left| \frac{1}{y^2}\ \mathrm{th}(xy^2) \right| \leq |x| \ ;$$

ce qui entraîne que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\big| f(x,y) - f(0,0) \big| \leq |x|$.

2.48 *Rappel* : $\forall\, s \in \mathbb{R}^*$: $\mathrm{Arctg}\,|s| + \mathrm{Arctg}\,\dfrac{1}{|s|} = \dfrac{\pi}{2}$.

1) Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$:

$$f(x,y) = \frac{2y}{x} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos^2 t \left(\mathrm{tg}^2\, t + \dfrac{y^2}{x^2} \right)} = 2\,\mathrm{Arctg}\, \frac{x\,\mathrm{tg}\, t}{y} \Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2 \left(\mathrm{Arctg}\, \frac{x\sqrt{3}}{y} - \mathrm{Arctg}\, \frac{x}{y\sqrt{3}} \right) = 2 \left(\mathrm{Arctg}\, \frac{y\sqrt{3}}{x} - \mathrm{Arctg}\, \frac{y}{x\sqrt{3}} \right),$$

la fonction f est continue en tout point $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

2) La fonction f est discontinue en $(0,0)$ car $\lim_{s\to 0} f(s,s) = \frac{\pi}{3} \neq 0 = f(0,0)$.

3) Soit $a \neq 0$. Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

$$\left|f(x,y) - f(a,0)\right| \leq 2\left|\frac{y}{x}\right|\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

la fonction f est continue en tout point $(a,0)$.

4) Soit $b \neq 0$. Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$\left|f(x,y) - f(0,b)\right| \leq 2\left|\frac{x}{y}\right|\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

la fonction f est continue en tout point $(0,b)$.

2.49 *Rappel* : $\lim_{t\to 0} t\ln|t| = 0 \Rightarrow \exists\, 0 < \delta < 1$ tel que $\forall\, 0 < |t| < \delta : \big|t\ln|t|\big| < 1$.

1) La fonction f est continue en tout point $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

2) La fonction f est continue en $(0,0)$. En effet, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ avec $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$:

$$\left|xy\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right| = \big|xy\ln|x| - xy\ln|y|\big| < |x| + |y|\ ;$$

ce qui entraîne que pour tout $(x,y) \in B\big((0,0),\delta\big)$:

$$\left|f(x,y) - f(0,0)\right| \leq |x| + |y|\,.$$

3) Soit $a \neq 0$. Montrons à présent la continuité de la fonction f en $(a,0)$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe deux nombres réels μ, $M > 0$ tels que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ avec $\sqrt{(x-a)^2+y^2} < \mu$:

$$0 < |x| < |a|+1\,, \quad \big|x\ln|x|\big| < M\,, \quad |y| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{et} \quad \big|y\ln|y|\big| < \frac{\varepsilon}{2\big(|a|+1\big)}$$

ou encore

$$\left|xy\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right| \leq |y|\big|x\ln|x|\big| + |x|\big|y\ln|y|\big| < \varepsilon\ ;$$

ce qui entraîne que pour tout $(x,y) \in B\big((a,0),\mu\big) : \left|f(x,y) - f(a,0)\right| < \varepsilon$.

4) Par une démonstration similaire à celle ci-dessus, on prouve que la fonction f est continue en $(0,b)$ avec $b \neq 0$.

2.50 1) La fonction f est continue en tout point $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

2) Soit $b \in \mathbb{R}$. Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left|f(x,y) - f(0,b)\right| \leq |x|\, e^{\frac{\pi}{2}}\ ,$$

la fonction f est continue en $(0,b)$.

2.51 Raisonnons par l'absurde et supposons qu'un tel α existe. Alors, il existe deux nombres réels δ, $M > 0$ de sorte que pour tout $(x,y) \in B\big((0,0), 2\delta\big) \cap E$: $\big|f(x,y)\big| \leq M$; ce qui est impossible car

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} f(\delta\cos\theta, \delta\sin\theta) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{e^{-\frac{1}{\delta^2}}}{\sqrt{\sqrt{2}\,\delta\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}} = +\infty\,.$$

D'où contradiction.

2.52 Pour commencer, supposons que la fonction f est continue en $(0,0)$. Alors, puisque $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, on doit avoir

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt[\beta_1]{n}}, \frac{1}{\sqrt[\beta_2]{n}}\right) = \frac{1}{2^\gamma} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}-\gamma} = 0\,;$$

ce qui entraîne que $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1} + \dfrac{\alpha_2}{\beta_2} - \gamma > 0$.

Pour montrer la réciproque, il suffit de constater que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$:

$$\big|f(x,y) - f(0,0)\big| = \big|f(x,y)\big| = \frac{\big(|x|^{\beta_1}\big)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}\big(|y|^{\beta_2}\big)^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}}{\big(|x|^{\beta_1} + |y|^{\beta_2}\big)^\gamma}$$

$$\leq \frac{\big(|x|^{\beta_1} + |y|^{\beta_2}\big)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}\big(|x|^{\beta_1} + |y|^{\beta_2}\big)^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}}{\big(|x|^{\beta_1} + |y|^{\beta_2}\big)^\gamma} = \big(|x|^{\beta_1} + |y|^{\beta_2}\big)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}-\gamma}\,.$$

2.53 Montrons que la fonction $g(x) = x$ répond à la question. En effet, soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$\left|y\left[\frac{x}{y}\right] - a\right| \leq |x-a| + |y|\,;$$

ce qui entraîne que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\big|f(x,y) - a\big| \leq |x-a| + |y|$.

2.54 Montrons que la fonction $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ répond à la question. En effet, soient $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. D'une part, il découle de la formule de MacLaurin appliquée à la fonction $\ln(1+t)$, qu'à chaque élément $(x,y) \in B\big((a,0),\delta\big)$ avec $y \neq 0$, on peut associer $\theta_{x,y} \in\,]0,1[$ tel que

$$\frac{1}{y}\ln\left(1 + \frac{e^y - 1}{x^2+1}\right) - \frac{1}{a^2+1}$$

$$= \frac{e^y - 1 - y}{y}\,\frac{1}{x^2+1} - \frac{\big(e^y-1\big)^2}{2y}\,\frac{1}{\big(1 + x^2 + \theta_{x,y}(e^y-1)\big)^2} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{a^2+1}\,.$$

D'autre part, il existe deux nombres réels δ, $M > 0$ tels que pour tout $(x,y) \in B\big((a,0),\delta\big)$ avec $y \neq 0$,

$$\left|\frac{e^y-1-y}{y}\right| < \frac{\varepsilon}{3M}\,, \quad \left|\frac{\big(e^y-1\big)^2}{2y}\right| < \frac{\varepsilon}{3M} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\big(1 + x^2 + \theta_{x,y}(e^y-1)\big)^2} < M$$

et tout $|x-a|<\delta$:

$$\left|\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{a^2+1}\right|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^2+1}<M\,.$$

Ainsi, en constatant que pour tout $(x,y)\in B\big((a,0),\delta\big)$ avec $y\neq 0$,

$$\left|\frac{1}{y}\ln\left(1+\frac{e^y-1}{x^2+1}\right)-\frac{1}{a^2+1}\right|\leq\varepsilon\,,$$

on obtient pour tout $(x,y)\in B\big((a,0),\delta\big)$: $\big|f(x,y)-f(a,0)\big|<\varepsilon$.

$\boxed{\textbf{2.55}}$ Soient $a\in\mathbb{R}$ et $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x)=x\,e^x$. En constatant que $\lim\limits_{x\to a}f(x,a)=h'(a)$, l'unique choix pour g est

$$g(x)=h'(x)=(1+x)\,e^x\,.$$

Reste à démontrer que g est bien la fonction cherchée. En effet, d'après le théorème des accroissements finis, à chaque élément $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on peut associer $\theta_{x,y}\in\,]0,1[$ tel que $h(x)-h(y)=h'\big(y+\theta_{x,y}(x-y)\big)(x-y)$; ce qui nous permet d'écrire

$$f(x,y)-f(a,a)=h'\big(y+\theta_{x,y}(x-y)\big)-h'(a)\,.$$

Par conséquent $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)}f(x,y)=f(a,a)$.

$\boxed{\textbf{2.56}}$ Montrons que la fonction $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ répond à la question. En effet, soit $a\in\,]0,1[$ et $\varepsilon>0$. Alors, il existe $0<\delta<\min\big\{\frac{a}{2},\frac{1-a}{2}\big\}$ tel que pour tout $0<|t|<\delta$ et $|x-a|<\delta$:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left|\frac{t}{\operatorname{tg}t}-1\right|<\frac{\varepsilon\sqrt{a}}{2\sqrt{2}}\;;$$

ce qui entraîne que pour tout $(x,y)\in B\big((a,0),\delta\big)$ avec $y\neq 0$:

$$\begin{aligned}\left|y\operatorname{cotg}\big(y\sqrt{x}\big)-\frac{1}{\sqrt{a}}\right| &= \left|\left(\frac{y\sqrt{x}}{\operatorname{tg}\big(y\sqrt{x}\big)}-1\right)\frac{1}{\sqrt{x}}+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right|\\ &\leq\left|\frac{y\sqrt{x}}{\operatorname{tg}\big(y\sqrt{x}\big)}-1\right|\frac{1}{\sqrt{x}}+\left|\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right|<\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Par conséquent pour tout $(x,y)\in B\big((a,0),\delta\big)$: $\big|f(x,y)-f(a,0)\big|<\varepsilon$.

$\boxed{\textbf{2.57}}$ 1) Puisque pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=0$ et tout $y\in\mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$, on a

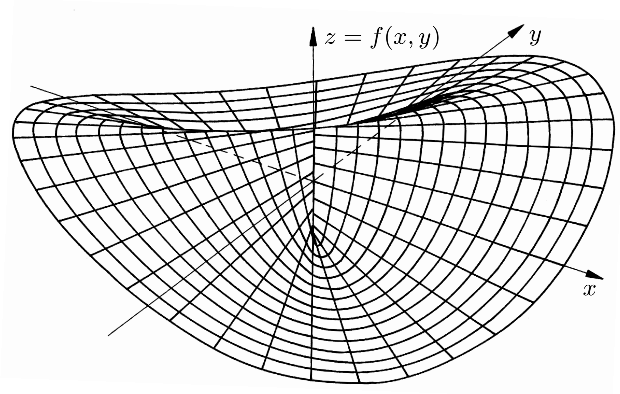
$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}f(x,y)\right)=0 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}f(x,y)\right)=0\,.$$

2) Non car $\lim\limits_{t\to 0}f(t,t)=1$.

$\boxed{\textbf{2.58}}$ 1) Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$ et tout $y \in \mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$, on a

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0\,.$$

2) Non car $\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \dfrac{1}{2}$.



$\boxed{\textbf{2.59}}$ Pour tout $0 < |x| \neq \frac{2}{(2k+1)\pi}$ avec $k \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ n'existe pas car

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(x, \frac{1}{2n\pi}\right) = x\cos\frac{1}{x} \neq 0 = \lim_{n\to+\infty} f\left(x, \frac{2}{(2n+1)\pi}\right);$$

ce qui implique $\lim\limits_{x\to 0}\big(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\big)$ n'existe pas.

De même $\lim\limits_{y\to 0}\big(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\big)$ n'existe pas.

Par contre, $\lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0$ car pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\big|f(x,y)\big| \leq (x+y)^2$.

$\boxed{\textbf{2.60}}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ n'existe pas car

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(x, \frac{1}{n}\right) = x \neq 0 = \lim_{n\to+\infty} f\left(x, \frac{\sqrt{2}}{n}\right);$$

ce qui implique $\lim\limits_{x\to 0}\big(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\big)$ n'existe pas.

De même $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ n'existe pas.

Par contre, $\lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0$ car pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\big|f(x,y)\big| \leq |x| + |y|$.

$\boxed{\mathbf{2.61}}$ En effet, puisque pour tout $y > 0$:

$$\int_0^1 2xy\, e^{-x^2 y}\, dx = -e^{-x^2 y}\Big|_0^1 = 1 - e^{-y}$$

et tout $x \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{y\to+\infty} 2xy\, e^{-x^2 y} = 0$, on a

$$\lim_{y\to+\infty} \int_0^1 2xy\, e^{-x^2 y}\, dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \left(\lim_{y\to+\infty} 2xy\, e^{-x^2 y}\right) dx\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.62}}$ 1) Puisque pour tout $0 \le x,\ y \le 1$: $x^2 y - y^2 x = xy(x-y) \le y(1-y)$, on obtient que

$$\max_{0\le x,y\le 1} x^2 y - y^2 x = \frac{1}{4}\,.$$

Ce maximum est atteint pour $x = 1$ et $y = \frac{1}{2}$.
2) Soit $f : E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x,\ y,\ z \le 1\big\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 y + y^2 z + z^2 x - x^2 z - y^2 x - z^2 y \\ &= x^2(y-z) + x(z^2 - y^2) + (y^2 z - z^2 y) \\ &= (y-z)\big(x^2 - (y+z)x + yz\big) = (x-y)(z-y)(z-x) \end{aligned}$$

et posons

$$a = 1-y\,, \quad b = 1-z \quad \text{et} \quad c = 1-x\,.$$

Puisque la fonction f est continue sur le compact E, elle atteint son maximum. Comme de plus $f\big(\frac{1}{2},0,1\big) = \frac{1}{4} > 0$, ce maximum est strictement positif. Il nous faut donc considérer uniquement les trois cas suivants :

a) $0 \le z < y < x \le 1$. $f(x,y,z) = (x-y)(x-z)(y-z)$
$\le (1-y)(1-z)(y-z) = ab(b-a)$;

b) $0 \le y < x < z \le 1$. $f(x,y,z) = (z-x)(z-y)(x-y)$
$\le (1-x)(1-y)(x-y) = ac(a-c)$;

c) $0 \le x < z < y \le 1$. $f(x,y,z) = (y-x)(y-z)(z-x)$
$\le (1-x)(1-z)(z-x) = bc(c-b)$.

Finalement, on peut conclure, grâce à 1), que le maximum cherché vaut $\frac{1}{4}$ et qu'il est atteint aux points suivants :

$$\left(1, \frac{1}{2}, 0\right), \quad \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right) \quad \text{et} \quad \left(0, 1, \frac{1}{2}\right).$$

$\boxed{\mathbf{2.63}}$ En effet, la fonction f est le produit de 2 fonctions continues.

$\boxed{\mathbf{2.64}}$ Soit $\mathbf{x} \in \overline{E}$. Alors, il existe une suite $\big(\mathbf{x}_k\big)$ d'éléments de E qui converge vers $\mathbf{x}$. Puisque les deux fonctions sont continues sur $\overline{E}$ et coïncident sur E, on a

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{k\to+\infty} f(\mathbf{x}_k) = \lim_{k\to+\infty} g(\mathbf{x}_k) = g(\mathbf{x})\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.65}}$ Soit $\mathbf{x} \in \overline{E}$. Alors, il existe une suite $\big(\mathbf{x}_k\big)$ d'éléments de E qui converge vers $\mathbf{x}$. Puisque les deux fonctions sont continues sur $\overline{E}$ et $f \leq g$ sur E, on a

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{k\to+\infty} f(\mathbf{x}_k) \leq \lim_{k\to+\infty} g(\mathbf{x}_k) = g(\mathbf{x})\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.66}}$ En effet, soient $\varepsilon > 0$ et $\mathbf{a} \in A = \bigcup_{k\in\Omega} A_k$. Alors, il existe $k_0 \in \Omega$ tel que $\mathbf{a} \in A_{k_0}$. Puisque A_{k_0} est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(\mathbf{a}, r) \subset A_{k_0}$. Finalement, la restriction de la fonction f à A_{k_0} étant continue, il existe $0 < \delta < r$ tel que pour tout $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta)$: $\big|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\big| \leq \varepsilon$.

$\boxed{\mathbf{2.67}}$ Non. Posons $B_\infty = \big\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\big\}$, pour tout $k \in \mathbb{R}$: $B_k = \big\{(x, kx) : x \in \mathbb{R}\big\}$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Puisque $f(x, kx) = k^4x^2$ est la restriction de f à B_k, elle est continue. De même, $f(0, y) = 0$ qui est la restriction de f à B_∞ est continue. Par contre, la fonction f n'est pas continue sur

$$\mathbb{R}^2 = \left(\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} B_k\right) \cup B_\infty$$

car elle est discontinue en $(0, 0)$. En effet, $\lim_{t\to 0} f(t^2, t) = 1 \neq 0 = f(0, 0)$.

$\boxed{\mathbf{2.68}}$ Si $E = \emptyset$, il n'y a rien à démontrer. On va donc supposer que $E \neq \emptyset$ et soit $\mathbf{a} \in E$. D'une part, puisque I est un intervalle ouvert, il existe $\zeta > 0$ tel que $\big]f(\mathbf{a}) - \zeta\,,\, f(\mathbf{a}) + \zeta\big[\subset I$. D'autre part, la fonction f étant continue en $\mathbf{a}$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta)$: $f(\mathbf{x}) \in \big]f(\mathbf{a}) - \zeta\,,\, f(\mathbf{a}) + \zeta\big[$. D'où $B(\mathbf{a}, \delta) \subset E$. Par conséquent E est ouvert.

$\boxed{\mathbf{2.69}}$ Si $E = \emptyset$, il n'y a rien à démontrer. On va donc supposer que $E \neq \emptyset$ et soit $\big(\mathbf{x}_k\big)$ une suite d'éléments de E qui converge vers $\mathbf{x}$. Puisque f est continue en $\mathbf{x}$ et I un intervalle fermé, on obtient que la suite $\big(f(\mathbf{x}_k)\big)$ converge vers $f(\mathbf{x})$ et que $f(\mathbf{x}) \in I$. D'où $\mathbf{x} \in E$. Par conséquent E est fermé.

$\boxed{\mathbf{2.70}}$ Il suffit de poser $h = f - g$, $I = \{0\}$ et d'utiliser l'exercice précédent.

$\boxed{\mathbf{2.71}}$ En effet, soient $\varepsilon > 0$ et $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, puisque $E_1 = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) + \varepsilon\big\}$ est ouvert et que $\mathbf{a} \in E_1$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta_1)$: $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) + \varepsilon$. De même, $E_2 = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{a}) - \varepsilon < f(\mathbf{x})\big\}$ étant aussi ouvert et $\mathbf{a} \in E_2$, il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta_2)$: $f(\mathbf{a}) - \varepsilon < f(\mathbf{x})$. Par conséquent, en posant $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, on obtient que pour tout $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta)$: $\big|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\big| < \varepsilon$.

2.72 En effet, soit $\big(y_k\big)$ une suite d'éléments de $\operatorname{Im} f$. Alors, à chaque entier $k \geq 0$, on peut associer au moins un élément $\mathbf{x}_k$ de E tel que $y_k = f(\mathbf{x}_k)$. Ainsi puisque E est compact, de la suite $\big(\mathbf{x}_k\big)$ on peut extraire une sous-suite $\big(\mathbf{x}_{k_p}\big)$ qui converge vers un élément $\mathbf{x}$ de E ; ce qui entraîne, la fonction f étant continue, que la sous-suite $\big(y_{k_p}\big)$ converge vers $f(\mathbf{x})$ qui est, par définition, un élément de $\operatorname{Im} f$.

2.73 Raisonnons par l'absurde et supposons que $\operatorname{Im} f$ n'est pas un intervalle. Alors, il existe $c \in \mathbb{R}$ pour lequel $E_1 = \big\{\mathbf{x} \in E : f(\mathbf{x}) < c\big\} \neq \emptyset$, $E_2 = \big\{\mathbf{x} \in E : f(\mathbf{x}) > c\big\} \neq \emptyset$ et $E = E_1 \cup E_2$. D'autre part, en utilisant la continuité de la fonction f, à chaque élément $\mathbf{x}$ de E, on peut associer $\delta_{\mathbf{x}} > 0$ tel que $E \cap B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}})$ est inclus dans E_1 si $\mathbf{x} \in E_1$ et dans E_2 si $\mathbf{x} \in E_2$. Ainsi, en posant

$$A = \bigcup_{\mathbf{x} \in E_1} B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}}) \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{\mathbf{x} \in E_2} B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}}),$$

on obtient que A et B sont deux ouverts et que $E_1 = E \cap A$ et $E_2 = E \cap B$; ce qui est impossible car E est connexe. D'où contradiction.

2.74 D'après l'exercice précédent, on sait, puisque E est connexe et f continue, que $\operatorname{Im} f$ est un intervalle. Comme de plus f ne s'annule pas, $\operatorname{Im} f$ est un intervalle qui ne contient pas 0. Autrement dit, la fonction f garde un signe constant sur E.

2.75 D'après l'exercice 2.73, on sait, puisque E est connexe et f continue, que $\operatorname{Im} f$ est un intervalle. Comme de plus $f\big(\mathbf{a}\big)\, f(\mathbf{b}) \leq 0$, $\operatorname{Im} f$ est un intervalle contenant 0. Autrement dit, la fonction f s'annule au moins une fois dans E.

2.76 En effet, puisque que pour tout scalaire $t > 0$ et tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $f(t\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, on obtient, grâce à la continuité de la fonction f en $\mathbf{0}$, que

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0+} f(t\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}).$$

2.77 Raisonnons par l'absurde et supposons que la fonction f n'est pas constante et soit $\mathbf{b} \in E$. Alors, $\big\{\mathbf{x} \in E : f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{b})\big\} \neq \emptyset$. Désignons par E_1 cet ensemble et par $E_2 = E \setminus E_1$. Ainsi, puisque f est localement constante, à chaque élément $\mathbf{x}$ de E, on peut associer $\delta_{\mathbf{x}} > 0$ tel que $E \cap B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}})$ est inclus dans E_1 si $\mathbf{x} \in E_1$ et dans E_2 si $\mathbf{x} \in E_2$. Ainsi, en posant

$$A = \bigcup_{\mathbf{x} \in E_1} B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}}) \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{\mathbf{x} \in E_2} B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}}),$$

on obtient que A et B sont deux ouverts tels que $E_1 = E \cap A$ et $E_2 = E \cap B$; ce qui est impossible car E est connexe. D'où contradiction.

2.78 1) Pour commencer, on va supposer que $d(\mathbf{x}, E) = 0$. Alors, il existe une suite $\big(\mathbf{a}_k\big)$ d'éléments de E telle que $\lim\limits_{k \to +\infty} \big\|\mathbf{a}_k - \mathbf{x}\big\| = 0$; ce qui revient à dire que la suite $\big(\mathbf{a}_k\big)$ converge vers $\mathbf{x}$ ou encore que $\mathbf{x} \in \overline{E}$.

Supposons à présent que $\mathbf{x} \in \overline{E}$. Alors, il existe une suite $\left(\mathbf{b}_k\right)$ d'éléments de E qui converge vers $\mathbf{x}$. Par conséquent $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\|\mathbf{b}_k - \mathbf{x}\right\| = 0$ ou encore $d(\mathbf{x}, E) = 0$.

2) En effet, soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Puisque pour tout $\mathbf{y} \in E$:

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| + \|\mathbf{b} - \mathbf{y}\|,$$

on obtient que $d(\mathbf{a}, E) \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| + d(\mathbf{b}, E)$.
De même, $d(\mathbf{b}, E) \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| + d(\mathbf{a}, E)$. Par conséquent

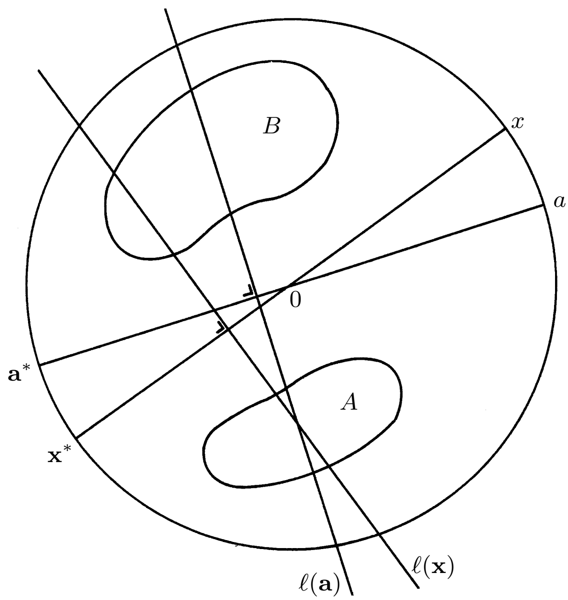
$$\left|d(\mathbf{a}, E) - d(\mathbf{b}, E)\right| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|.$$

2.79 D'après l'exercice précédent, la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(\mathbf{x}) = \frac{d(\mathbf{x}, A) - d(\mathbf{x}, B)}{d(\mathbf{x}, A) + d(\mathbf{x}, B)}$$

répond à la question.

2.80 Désignons par O un point extérieur aux deux champs A et B et par C le cercle de centre O et de diamètre d (qui est choisi de sorte que les deux champs sont strictement contenus dans C).



Soit $\mathbf{x}$ un point de C et $\mathbf{x}^*$ son point diamétralement opposé. On désigne par $\sigma_{\mathbf{x}}(t)$ la droite perpendiculaire au diamètre $\mathbf{x}\mathbf{x}^*$ et dont la distance à $\mathbf{x}$ vaut t et soit $f : [0, d] \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$ où $f_1(t)$ est l'aire de A qui se trouve du même côté que $\mathbf{x}$ par rapport à $\sigma_{\mathbf{x}}(t)$ et $f_2(t)$ est l'aire de A qui se trouve du même côté que $\mathbf{x}^*$ par rapport à $\sigma_{\mathbf{x}}(t)$.

Comme, $f(0) = -\operatorname{Aire} A$ et $f(d) = \operatorname{Aire} A$, on sait d'après le théorème de la valeur intermédiaire, qu'il existe $t_0 \in \,]0, d[$ pour lequel $f(t_0) = 0$. Ainsi, par construction, la droite $\ell(\mathbf{x}) = \sigma_{\mathbf{x}}(t_0)$ divise le champ A en deux parties égales. De plus, $\ell(\mathbf{x})$ est unique et $\ell(\mathbf{x}) = \ell(\mathbf{x}^*)$.

Considérons à présent la fonction continue $g : C \to \mathbb{R}$ définie par $g(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{x})$ où $g_1(\mathbf{x})$ est l'aire de B qui se trouve du même côté que $\mathbf{x}$ par rapport à $\ell(\mathbf{x})$ et $g_2(\mathbf{x})$ est l'aire de B qui se trouve du même côté que $\mathbf{x}^*$ par rapport à $\ell(\mathbf{x})$. Alors, pour tout $\mathbf{x} \in C : g(\mathbf{x}) = -g(\mathbf{x}^*)$. Or, d'après le théorème de Borsuk-Ulam, il existe au moins un $\mathbf{a} \in C$ pour lequel $g(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a}^*)$. Par conséquent $g(\mathbf{a}) = 0$; ce qui revient à dire que la droite $\ell(\mathbf{a})$ divise le champ B en deux parties égales. En conclusion, la droite $\ell(\mathbf{a})$ divise chacun des deux champs A et B en deux parties strictement égales.

Solutions des exercices du chapitre 3

Dérivées partielles

3.1 $\forall\, t \in \mathbb{R} : f(t,0) = f(0,t) = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0\,.$

La fonction f n'est pas continue en $(0,0)$ car $\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$.

3.2 $\forall\, t \in \mathbb{R} : f(t,0) = f(0,t) = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0\,.$

La fonction f n'est pas continue en $(0,0)$ car $\lim\limits_{t\to 0} f(t^2,t) = 1 \neq 0 = f(0,0)$.

3.3 $\forall\, t \in \mathbb{R} : f(t,0) = f(0,t) = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0\,.$

Puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2(2y^2-x^2)}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^5}} & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si}(x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$

on a $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\partial f}{\partial x}\,(t,t) = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \neq 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,(0,0)\,;$

ce qui entraîne que la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

3.4 $\forall\, t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = \lim_{s\to 0} \frac{f(s,t)-f(0,t)}{s} = t \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(t,0) = \lim_{s\to 0} \frac{f(t,s)-f(t,0)}{s} = 0\,.$$

D'où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(0,0) = 1 \neq 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,(0,0)\,.$$

3.5 Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y) = \begin{cases} 2x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} 2y\sin\dfrac{1}{y}-\cos\dfrac{1}{y} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0\,,\end{cases}$$

on a pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0$;

ce qui entraîne que ces deux fonctions sont continues, en particulier en $(0,0)$. Par contre, puisque

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\left(2\sin\frac{1}{t}-\frac{1}{t}\cos\frac{1}{t}\right)$$

et que cette dernière limite n'existe pas, on a bien que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ n'existe pas. De même pour $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$.

$\boxed{\textbf{3.6}}$ *Rappel* : $\forall\, t\in\mathbb{R}^*$: $\big(|t|\big)'=\dfrac{t}{|t|}$.

Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} y\ln\big(|x|+|y|\big)+\dfrac{|x|y}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

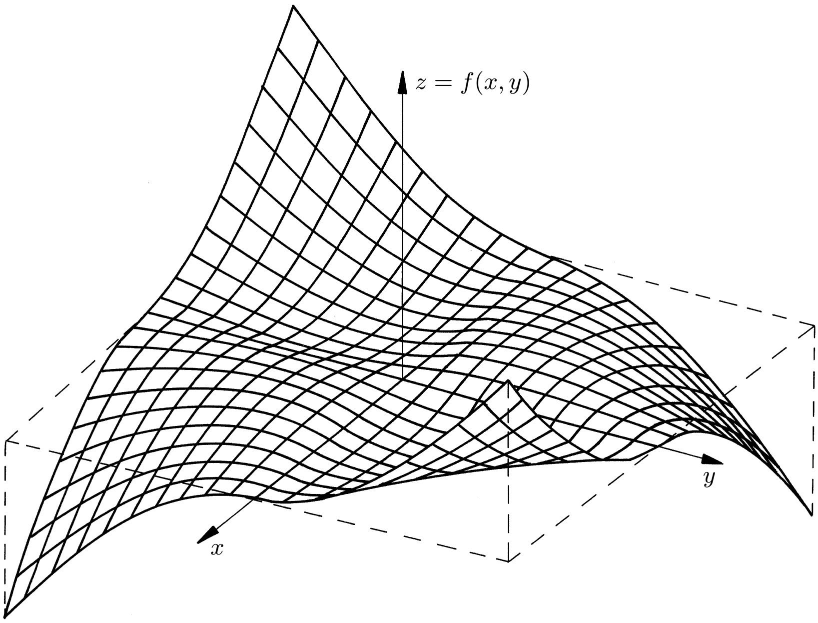
et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} x\ln\big(|x|+|y|\big)+\dfrac{x|y|}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si}(x,y)=(0,0),\end{cases}$$

les deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}$. Comme de plus, pour tout $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\leq\Big|\big(|x|+|y|\big)\ln\big(|x|+|y|\big)\Big|+|y|\,,$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leq\Big|\big(|x|+|y|\big)\ln\big(|x|+|y|\big)\Big|+|x|$$

et $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\big(|x|+|y|\big)\ln\big(|x|+|y|\big)=0$ car $\displaystyle\lim_{t\to 0+}t\ln t=0$, elles sont aussi continues en $(0,0)$.



$\boxed{\mathbf{3.7}}$ $\nabla f(0,0,0) = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$. En effet,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0,0) - f(0,0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t^2} = -\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{2t} = -\frac{1}{2}$$

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : f(0,t,0) = f(0,0,t) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.8}}$ $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2(1 - 3\ln y)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y^2(1 - 3\ln y) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4xy(1 - 3\ln y) - 6xy$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y(1 - 3\ln y) - 3x^2y \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2(7 + 6\ln y)\,.$$

D'où $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,2) + 5\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,2) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,2) = 11 - 330\ln 2\,.$

$\boxed{\mathbf{3.9}}$ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\ln\Big(2 + x^2 + y^2 + \left(x^2 + y^2\right)^2\Big) + 2x\int_y^{x^2+y^2} \frac{dt}{2 + x^2 + y^2 + t^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\ln\Big(2+x^2+y^2+\big(x^2+y^2\big)^2\Big) - \ln(2+x^2+2y^2) + 2y\int_y^{x^2+y^2}\frac{dt}{2+x^2+y^2+t^2}\,,$$

on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 4\ln 2 + 2\int_0^1 \frac{dt}{3+t^2} = 4\ln 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\bigg|_0^1 = 4\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -\ln 3\,.$$

D'où

$$\nabla f(1,0) = \left(4\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,,\,-\ln 3\right).$$

3.10 $\nabla f(0,1,1) = \mathbf{0}$. En effet,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,1) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,1,1)-f(0,1,1)}{t} = \lim_{t\to 0} t\,\mathrm{th}\,\frac{2}{t} = 0$$

et $\forall\, t\in\mathbb{R} : f(0,t,1) = f(0,1,t) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1,1) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(0,1,1) = 0\,.$

3.11 Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x-1}(\sin xy + y\cos xy) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\,e^{x-1}\cos xy\,,$$

l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ est

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(1,\frac{\pi}{2}\right)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(1,\frac{\pi}{2}\right)\left(y-\frac{\pi}{2}\right) - (z-1) = x - z = 0\,.$$

3.12 Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + \frac{2x}{3(1+x^2+2y^4)} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + \frac{8y^3}{3(1+x^2+2y^4)}\,,$$

l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(1,0)$ est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)y - \left(z - \frac{\ln 2}{3}\right) = \frac{x}{3} + y - z - \frac{\ln\frac{e}{2}}{3} = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.13}}$ Puisque pour tout $(x,y) \in B\big((0,0),2\big)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,,$$

l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(1,0)$ est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)y - \left(z-\sqrt{3}\right) = -\frac{x}{\sqrt{3}} - z + \frac{4}{\sqrt{3}} = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.14}}$ 1) Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x,0) = x^2$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2\ ;$$

2) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(1,y)-f(1,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sh} y - y}{y^2} = 0.$
Ainsi, l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(1,0)$ est

$$2(x-1)-(z-1) = 2x - z - 1 = 0.$$

Ce plan est parallèle à l'axe Oy .

$\boxed{\mathbf{3.15}}$ D'une part, $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,1)-f(0,1)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t - t}{t^2} = 0.$

D'autre part, puisque $y \in \mathbb{R}$: $f(0,y) = y^2$, on a $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2.$

Par conséquent l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(0,1)$ est $2y - z - 1 = 0$. Ce plan est parallèlle à l'axe Ox.

$\boxed{\mathbf{3.16}}$ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x\sin(x^2+y) + \cos(x+y) + 3x^2y\,e^{x^3y}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin(x^2+y) + \cos(x+y) + x^3\,e^{x^3y}\,,$$

l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ est

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)x + \frac{\partial f}{\partial y}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\left(y-\frac{\pi}{2}\right) - (z-2) = -y - z + \left(2+\frac{\pi}{2}\right) = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.17}}$ La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si } x < y\,, \end{cases}$

est homogène de degré 2 mais elle n'est pas continue aux points de la forme $(a,a) \neq (0,0)$ car $\displaystyle\lim_{t\to a-} f(a,t) = a^2 \neq 0 = \lim_{t\to a+} f(a,t)$.

$\boxed{\mathbf{3.18}}$ $\forall\, t > 0 : f(t,0) = t^\alpha f(1,0) = 0 \;\Rightarrow\; \displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$

3.19 Soit $1 \leq k \leq n$. Alors, si $\alpha \neq 1$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{0}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(2 \cdot \mathbf{0}) = 2^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{0}) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{0}) = 0 \,.$$

Si $\alpha = 1$, ce résultat est généralement faux. Contre-exemple : $f(x, y) = x$.

3.20 Par la règle de Bernoulli-L'Hospital, on a

$$\lim_{t \to 0} \frac{\displaystyle\int_{-t}^{t} e^{t^2 x^2}\, dx}{\sin t} = 2 \lim_{t \to 0} \frac{\displaystyle\int_{0}^{t} e^{t^2 x^2}\, dx}{\sin t} = 2 \lim_{t \to 0} \frac{e^{t^4} + 2t \displaystyle\int_{0}^{t} x^2 e^{t^2 x^2}\, dx}{\cos t} = 2 \,.$$

3.21 $\displaystyle\lim_{t \to 0} \int_0^t \frac{(t-x)\, e^{-x^2}}{\sin^2 t}\, dt$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^t (t-x)\, e^{-x^2}\, dt}{\sin^2 t} = \lim_{t \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^t e^{-x^2}\, dt}{\sin 2t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{-t^2}}{2 \cos 2t} = \frac{1}{2} \,.$$

3.22 Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$f(t) = \int_{t^2}^{t} \ln\big(x^2 + \cos(x^2 t^3)\big)\, dx \,.$$

Pour tout $|t| < 1$:

$$f'(t) = \ln(t^2 + \cos t^5) - 2t \ln(t^4 + \cos t^7) - 3t^2 \int_{t^2}^{t} \frac{x^2 \sin(x^2 t^3)}{x^2 + \cos(x^2 t^3)}\, dx.$$

De plus,

$$\lim_{t \to 0} \frac{\ln(t^2 + \cos t^5)}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{2t - 5t^4 \sin t^5}{2t(t^2 + \cos t^5)} = 1$$

et

$$\lim_{t \to 0} \frac{\ln(t^4 + \cos t^7)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{4t^3 - 7t^6 \sin t^7}{(t^4 + \cos t^7)} = 0 \,.$$

Par conséquent $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t^3} = \frac{1}{3} \lim_{t \to 0} \frac{f'(t)}{t^2} = \frac{1}{3}$.

Finalement $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\displaystyle\int_{t^2}^{t} \ln\big(x^2 + \cos(x^2 t^3)\big)\, dx}{\operatorname{Arctg} t^3} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t^3} \, \frac{t^3}{\operatorname{Arctg} t^3} = \frac{1}{3}$.

3.23 Puisque pour tout $t \neq 0$:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1 + t^2 x^2}\, dx = \frac{1}{t^2} \left(1 - \int_0^1 \frac{dx}{1 + t^2 x^2}\right) = \frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{\operatorname{Arctg} t}{t}\right),$$

on a

$$\lim_{t \to 0} \int_0^1 \frac{\ln(1 + t^2 x^2)}{t^2}\, dx = \lim_{t \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^1 \ln(1 + t^2 x^2)\, dx}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{2t x^2}{1 + t^2 x^2}\, dx}{2t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \int_0^1 \frac{x^2}{1 + t^2 x^2}\, dx = \lim_{t \to 0} \frac{t - \operatorname{Arctg} t}{t^3} = \frac{1}{3} \,.$$

$\boxed{\mathbf{3.24}}$ Puisque

$$\lim_{t\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{t^2}(t^2-x)\cos x^2\,dx}{t^4}=\lim_{t\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{t^2}\cos x^2\,dx}{2t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t^4}{2}=\frac{1}{2}\,,$$

on a $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_0^{t^2}\frac{(t^2-x)\cos x^2}{\sin t^4}\,dx=\lim_{t\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{t^2}(t^2-x)\cos x^2\,dx}{t^4}\,\frac{t^4}{\sin t^4}=\frac{1}{2}\,.$

$\boxed{\mathbf{3.25}}$ D'une part, puisque pour tout $t\neq 0$:

$$\begin{aligned}\int_{t^4}^{t^2}\frac{x+2t^2}{x^2+t^2x+t^4}\,dx&=\left(\sqrt{3}\ \mathrm{Arctg}\,\frac{t^2+2x}{\sqrt{3}\,t^2}+\frac{1}{2}\,\ln(x^2+t^2x+t^4)\right)\Bigg|_{t^4}^{t^2}\\&=\sqrt{3}\,\frac{\pi}{3}+\frac{\ln 3}{2}-\sqrt{3}\ \mathrm{Arctg}\,\frac{2t^2+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\,\ln(1+t^2+t^4)\,,\end{aligned}$$

on a $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_{t^4}^{t^2}\frac{x+2t^2}{x^2+t^2x+t^4}\,dx=\sqrt{3}\,\frac{\pi}{6}+\frac{\ln 3}{2}\,.$

D'autre part, soit $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$f(t)=\int_{t^4}^{t^2}\ln(x^2+t^2x+t^4)\,dx-t^2\ln t^4\,.$$

Alors, $\lim\limits_{t\to 0}f(t)=0$ car pour tout $0<|t|<\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\big|f(t)\big|&\le\int_{t^4}^{t^2}\big|\ln(x^2+t^2x+t^4)\big|\,dx+|t^2\ln t^4|\\&\le(t^2-t^4)\big|\ln(t^8+t^6+t^4)\big|+|t^2\ln t^4|\\&\le(1-t^2)\big|t^2\ln(1+t^2+t^4)+t^2\ln t^4\big|+|t^2\ln t^4|\,.\end{aligned}$$

De plus, pour tout $t\neq 0$:

$$\begin{aligned}f'(t)&=2t\ln 3t^4-4t^3\ln(t^8+t^6+t^4)+2t\int_{t^4}^{t^2}\frac{x+2t^2}{x^2+t^2x+t^4}\,dx-2t\ln t^4-4t\\&=2t\ln 3-4t^3\ln t^4-4t^3\ln(1+t^2+t^4)+2t\int_{t^4}^{t^2}\frac{x+2t^2}{x^2+t^2x+t^4}\,dx-4t\,.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\left(\int_{t^4}^{t^2}\frac{\ln(x^2+t^2x+t^4)}{t^2}\,dx-\ln t^4\right)&=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t^2}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{f'(t)}{2t}=\frac{3\ln 3}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-2\,.\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3.26}}$ $\forall t \in \mathbb{R} : e^t - \cos t - \sin t = t^2 + \mathcal{R}_2(t)$ et

$$\lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{t^2} \ln(1+t^2x^2)\,dx}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2t\ln(1+t^6) + \displaystyle\int_0^{t^2} \frac{2tx^2}{1+t^2x^2}\,dx}{2t} = 0\,.$$

D'où

$$\lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{t^2} \ln(1+t^2x^2)\,dx}{e^t - \cos t - \sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{t^2} \ln(1+t^2x^2)\,dx}{t^2}\,\frac{t^2}{e^t - \cos t - \sin t} = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.27}}$ $$\lim_{t\to 0} \int_0^{t^2} \frac{1+\sqrt{\operatorname{sh}^3(t^4x)}}{t^2}\,dx = \lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{t^2} 1+\sqrt{\operatorname{sh}^3(t^4x)}\,dx}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2t\left(1+\sqrt{\operatorname{sh}^3 t^6}\right) + 6t^3\displaystyle\int_0^{t^2} x\operatorname{ch}(t^4x)\sqrt{\operatorname{sh}(t^4x)}\,dx}{2t} = 1\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.28}}$ $$\lim_{t\to 0} \int_0^{t^2} \frac{1+\operatorname{sh}(x^2t^2)}{t^2}\,dx = \lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{t^2} \big(1+\operatorname{sh}(x^2t^2)\big)\,dx}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2t(1+\operatorname{sh} t^6) + 2t\displaystyle\int_0^{t^2} x^2\operatorname{ch}(x^2t^2)\,dx}{2t} = 1\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.29}}$ Puisque, grâce à la règle de Bernoulli-L'Hospital,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{t^2} \cos(x - t\sin x)\,dx}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2t\cos(t^2 - t\sin t^2) + \displaystyle\int_0^{t^2} \sin x\sin(x - t\sin x)\,dx}{2t} = 1$$

on a

$$\lim_{t\to 0} \int_0^{t^2} \frac{\cos(x - t\sin x)}{\sin^2 t + \operatorname{sh} t^2}\,dx = \lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{t^2} \cos(x - t\sin x)\,dx}{t^2}\,\frac{1}{\dfrac{\sin^2 t}{t^2} + \dfrac{\operatorname{sh} t^2}{t^2}} = \frac{1}{2}\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.30}}$ Pour tout $t \in \mathbb{R} : 1 - e^t + \operatorname{sh} t = -\frac{t^2}{2} + \mathcal{R}_2(t)$. Puisque, en utilisant la règle Bernoulli-L'Hospital,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{t^2} \ln(2+t^2x^2)\,dt}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2t\left(\ln(2+t^6) + \displaystyle\int_0^{t^2} \frac{x^2}{(2+t^2x^2)}\,dx\right)}{2t} = \ln 2,$$

on a

$$\lim_{t\to 0}\int_0^{t^2}\frac{\ln(2+t^2x^2)}{1-e^t+\operatorname{sh} t}\,dx=\lim_{t\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{t^2}\ln(2+t^2x^2)\,dx}{t^2}\;\frac{t^2}{1-e^t+\operatorname{sh} t}=-2\ln 2.$$

3.31 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{t}x\cos^2\big((1+t^2)x^2\big)\,dx}{t^2}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos^2\big((1+t^2)t^2\big)-2t\displaystyle\int_0^t x^3\sin\big(2(1+t^2)x^2\big)\,dx}{2t}=\frac{1}{2}\,.$$

3.32 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_{t^2}^{\ln(1+t^2)}\frac{\sin(tx)\,dx}{t^4}=0$ car pour tout $0<|t|<1$:

$$\left|\int_{t^2}^{\ln(1+t^2)}\frac{\sin(tx)\,dx}{t^4}\right|=\frac{1}{t^4}\int_{\ln(1+t^2)}^{t^2}\sin(tx)\,dx\le\frac{t^2-\ln(1+t^2)}{t^3}=\frac{\dfrac{t^4}{2}+\mathcal{R}_4(t)}{t^3}\,.$$

3.33 *Rappel* : $(1-\cos t)^3=\dfrac{t^6}{8}+\mathcal{R}_6(t)$.

1) D'une part, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t^6+\sin^6 t}{(1-\cos t)^3}=16$.

2) D'autre part, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\left(\displaystyle\int_t^1\sin(x^2t^2)\,dx\right)^6}{(1-\cos t)^3}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\dfrac{\int_t^1\sin(x^2t^2)\,dx}{t}\right)^6}{\left(\dfrac{1-\cos t}{t^2}\right)^3}=0\,.$

Par conséquent $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t^6+\sin^6 t+\left(\displaystyle\int_t^1\sin(x^2t^2)\,dx\right)^6}{(1-\cos t)^3}=16\,.$

3.34 En effet, soit $0<\varepsilon<1$.

Puisque $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{-t}}\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1\frac{dx}{\sqrt{x^3}}=0$, il existe $t_\varepsilon<0$ tel que pour tout $t\le t_\varepsilon$:

$$0<\frac{1}{\sqrt{-t}}\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1\frac{dx}{\sqrt{x^3}}\le\frac{\varepsilon}{2}\;;$$

ce qui entraîne que pour tout $t\le t_\varepsilon$:

$$0<\int_0^t\frac{dx}{\sqrt{1-x^3t}}=\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^3t}}+\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^t\frac{dx}{\sqrt{1-x^3t}}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{\sqrt{-t}}\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1\frac{dx}{\sqrt{x^3}}\le\varepsilon\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.35}}$ $$\lim_{t\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^t (x-t)^2 f(x)\,dx}{t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{\displaystyle -2\int_0^t (x-t) f(x)\,dx}{3t^2}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^t f(x)\,dx}{3t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{3} = \frac{f(0)}{3}\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.36}}$ 1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \int_0^x \frac{t}{(1+tx)(1+t^2)}\,dt\\
&= \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}\left(\int_0^x \frac{-x}{(1+tx)}\,dt + \int_0^x \frac{t+x}{1+t^2}\,dt\right)\\
&= \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}\left(-\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\,\ln(1+x^2) + x\,\mathrm{Arctg}\,x\right)\\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{Arctg}\,x = \left(\frac{1}{2}\,\ln(1+x^2)\,\mathrm{Arctg}\,x\right)'.
\end{aligned}$$

2) Il suffit d'utiliser le résultat obtenu sous 1) et de constater que $f(0)=0$.

$\boxed{\mathbf{3.37}}$ Puisque pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 2t\int_0^t \frac{dx}{1+t^2+x^2} = 2t\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{x}{\sqrt{1+t^2}}\right)\Bigg|_0^t\\
&= \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,,
\end{aligned}$$

on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f'(t) = \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\mathbf{3.38}}$ Puisque pour tout $|t|<\frac{\pi}{2}$:

$$f(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{t} (t-x)\sin x\,dx + \int_t^{\frac{\pi}{2}} (x-t)\sin x\;dx\,,$$

on a $\displaystyle f'(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{t} \sin x\,dx - \int_t^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -2\cos t$.

$\boxed{\mathbf{3.39}}$ Puisque pour tout $|t|<1$:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 2t\ln(1+\cos t^3) + 4t^3\ln(1+\cos t^5) - \int_{-t^4}^{t^2} \frac{x\sin(tx)}{1+\cos(tx)}\,dx\,,\\
f''(t) &= 2\ln(1+\cos t^3) + 12\,t^2\ln(1+\cos t^5)\\
&\qquad - \frac{8t^3\sin t^3}{1+\cos t^3} - \frac{24t^7\sin t^5}{1+\cos t^5} - \int_{-t^4}^{t^2} \frac{x^2}{1+\cos(tx)}\,dx\,,
\end{aligned}$$

on a $f'(0)=0$ et $f''(0)=2\ln 2>0$. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en 0.

3.40 Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f'(t) = \sin\left(t\sqrt{1+t^2}\right) + \int_0^t \sqrt{1+x^2}\,\cos\left(t\sqrt{1+x^2}\right) dx\,,$$

$$f''(t) = \left(2\sqrt{1+t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\right)\cos\left(t\sqrt{1+t^2}\right) - \int_0^t (1+x^2)\sin\left(t\sqrt{1+x^2}\right) dx,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2 > 0$. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en 0.

3.41 Puisque la fonction $\sin\sqrt{1+t^2}$ admet un minimum local en 0, il nous suffit de montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \int_{t^3}^{t^2} \ln\left(1+e^{tx^2}\right) dx$$

en admet un en ce point. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g'(t) = 2t\ln\left(1+e^{t^5}\right) - 3t^2\ln\left(1+e^{t^7}\right) + \int_{t^3}^{t^2} \frac{x^2\,e^{tx^2}}{1+e^{tx^2}}\,dx\,,$$

$$g''(t) = 2\ln\left(1+e^{t^5}\right) + \frac{12\,t^5\,e^{t^5}}{1+e^{t^5}} - 6t\ln\left(1+e^{t^7}\right) - \frac{24\,t^8\,e^{t^7}}{1+e^{t^7}} + \int_{t^3}^{t^2} \frac{x^4\,e^{tx^2}}{\left(1+e^{tx^2}\right)^2}\,dx\,;$$

ce qui entraîne que $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2\ln 2 > 0$.

3.42 Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f'(t) = t^2 - t + \sin t^3 - 2t(t^4 - t^2 + \sin t^5) + \int_{t^2}^{t} x^2\cos(x^2 t)\,dx\,,$$

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2t - 1 + 3t^2\cos t^3 - 2(t^4 - t^2 + \sin t^5) - 2t(4t^3 - 2t + 5t^4\cos t^5) \\ &\quad + t^2\cos t^3 - 2t^5\cos t^5 - \int_{t^2}^{t} x^4\sin(x^2 t)\,dx\,, \end{aligned}$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -1 < 0$. Par conséquent la fonction f admet un maximum local en 0.

3.43 Puisque pour tout $|t| < 1$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2t - \sin t + \ln(1+\cos t) - \frac{t\sin t}{1+\cos t} + 2t\ln(2+t^5) - \ln(2+t^3) \\ &\quad + \int_t^{t^2} \frac{x^2}{2+x^2 t}\,dx\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2 - \cos t - \frac{\sin t}{1+\cos t} - \frac{(1+\cos t)\sin t + t\cos t + t}{(1+\cos t)^2} \\ &\quad + 2\ln(2+t^5) + \frac{12\,t^5}{2+t^5} - \frac{4t^2}{2+t^3} - \int_t^{t^2} \frac{x^4}{\left(2+x^2 t\right)^2}\,dx\,, \end{aligned}$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 1 + 2\ln 2 > 0$. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en 0.

$\boxed{\mathbf{3.44}}$ Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$: $f'(t) = 2t \operatorname{Arctg} t^5 + \displaystyle\int_0^{t^2} \frac{x^2}{1+t^2x^4}\, dx$,
$f' > 0$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(0) = 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un point d'inflexion en 0.

$\boxed{\mathbf{3.45}}$ 1) En effet, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(t) = \lambda \int_0^t \sigma(x) \cos \lambda(t-x)\, dx \text{ et } f''(t) = \lambda\sigma(t) - \lambda^2 \int_0^t \sigma(x) \sin \lambda(t-x)\, dx,$$

on a bien $f''(t) + \lambda^2 f(t) = \lambda\sigma(t)$ et $f(0) = f'(0) = 0$.
2) Posons $\lambda = 1$ et $\sigma(t) = t^5$. Puisque, d'après 1), la fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre $y''(t) + y(t) = t^5$ qui satisfait les deux conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$, on a

$$f(t) = -120 \sin t + 120\, t - 20\, t^3 + t^5 \,.$$

D'où $\displaystyle\int_0^2 x^5 \sin(2-x)\, dx = f(2) = -120 \sin 2 + 112.$

$\boxed{\mathbf{3.46}}$ En effet, puisque pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= nt^{n-1} \int_0^\pi (\sin x)^{2n} \cos(t\cos x)\, dx - t^n \int_0^\pi (\sin x)^{2n} \cos x \sin(t \cos x)\, dx\,,\\
f''(t) &= n(n-1)t^{n-2} \int_0^\pi (\sin x)^{2n} \cos(t\cos x)\, dx\\
&\quad - 2nt^{n-1} \int_0^\pi (\sin x)^{2n} \cos x \sin(t\cos x)\, dx\\
&\quad - t^n \int_0^\pi (\sin x)^{2n} \cos^2 x \cos(t \cos x)\, dx\,,
\end{aligned}$$

on a bien

$$\begin{aligned}
F(t) &= t^2 f''(t) + t f'(t) + (t^2 - n^2) f(t)\\
&= n(n-1)t^n \int_0^\pi (\sin x)^{2n} \cos(t\cos x)\, dx\\
&\quad - 2nt^{n+1} \int_0^\pi (\sin x)^{2n} \cos x \sin(t\cos x)\, dx\\
&\quad - t^{n+2} \int_0^\pi (\sin x)^{2n} \cos^2 x \cos(t\cos x)\, dx + nt^n \int_0^\pi (\sin x)^{2n} \cos(t\cos x)\, dx\\
&\quad - t^{n+1} \int_0^\pi (\sin x)^{2n} \cos x\, \sin(t\cos x)\, dx + t^{n+2} \int_0^\pi (\sin x)^{2n} \cos(t \cos x)\, dx\\
&\quad - n^2 t^n \int_0^\pi (\sin x)^{2n} \cos(t\cos x)\, dx\\
&= t^{n+1} \int_0^\pi \big(t(\sin x)^{2n+2} \cos(t\cos x) - (2n+1)(\sin x)^{2n} \cos x \sin(t\cos x) \big)\, dx\\
&= -t^{n+1} (\sin x)^{2n+1} \sin(t\cos x) \Big|_0^\pi = 0\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3.47}}$ 1) Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f'(t) = 2t\sqrt{\operatorname{ch} t^3} + \frac{1}{2}\int_0^{t^2} \frac{x \operatorname{sh} tx}{\sqrt{\operatorname{ch} tx}}\, dx\,,$$
$$f''(t) = 2\sqrt{\operatorname{ch} t^3} + \frac{4t^3 \operatorname{sh} t^3}{\sqrt{\operatorname{ch} t^3}} + \frac{1}{4}\int_0^{t^2} \frac{x^2(1+\operatorname{ch}^2 tx)}{\sqrt{\operatorname{ch}^3 tx}}\, dx\,,$$

on a $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2$.
2) $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow f$ admet un minimum local en 0.
3) $\forall\, t,\, x \in \mathbb{R} : \sqrt{\operatorname{ch} tx} \geq 1 \Rightarrow \forall\, t \in \mathbb{R}^* : f(t) = \displaystyle\int_0^{t^2} \sqrt{\operatorname{ch} tx}\, dx > 0 = f(0)$.

$\boxed{\mathbf{3.48}}$ Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2\left(\operatorname{ch}\left(xy\big(1+x^3\big)^3\right) + \sin\left(3xy\big(1+x^3\big)^2\right)\right)\\ &\quad + \int_1^{1+x^3} \big(yt^3 \operatorname{sh}(xyt^3) + 3yt^2\cos(3xyt^2)\big)\, dt\,,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \int_1^{1+x^3} \big(xt^3 \operatorname{sh}(xyt^3) + 3xt^2\cos(3xyt^2)\big)\, dt\,,\end{aligned}$$

l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $(2, 0)$ est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,0)y - (z-8) = 12\,x + 1\,456\,y - z - 16 = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.49}}$ En effet, $\nabla f(0,0) = \mathbf{0}$ car pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\operatorname{ch}(yx^4 + x) + \int_{-x^2}^{y^2} \operatorname{sh}(yt^2 + x)\, dt\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\operatorname{ch}(y^5 + x) + \int_{-x^2}^{y^2} t^2\operatorname{sh}(yt^2 + x)\, dt\,.$$

Etudions la nature de ce point stationnaire. Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\operatorname{ch}(yx^4 + x) + 4x(2yx^3 + 1)\operatorname{sh}(yx^4 + x) + \int_{-x^2}^{y^2} \operatorname{ch}(yt^2 + x)\, dt\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x^5\operatorname{sh}(yx^4 + x) + 2y\operatorname{sh}(y^5 + x) + \int_{-x^2}^{y^2} t^2\operatorname{ch}(yt^2 + x)\, dt\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\operatorname{ch}(y^5 + x) + 12\,y^5\operatorname{sh}(y^5 + x) + \int_{-x^2}^{y^2} t^4\operatorname{ch}(yt^2 + x)\, dt\,,$$

on a $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right)^2 - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -4$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$;
ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en $(0, 0)$.

3.50 En effet, $\nabla f(0,0)=\mathbf{0}$ car pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=20\,x\cos y-x\ln\bigl(2+x^4+\cos(x^2y)\bigr)+2\int_{x^2}^{y^2}\frac{x^3}{2+x^4+\cos(ty)}\,dx\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-10\,x^2\sin y+y\ln(2+x^4+\cos y^3)-\frac{1}{2}\int_{x^2}^{y^2}\frac{t\sin(ty)}{2+x^4+\cos(ty)}\,dx\,.$$

Etudions la nature de ce point stationnaire. Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=20\,\cos y-\ln\bigl(2+x^4+\cos(x^2y)\bigr)-\frac{8x^4-2x^2y\sin(x^2y)}{2+x^4+\cos(x^2y)}$$
$$+2\int_{x^2}^{y^2}\frac{-x^6+6x^2+3x^2\cos(ty)}{\bigl(2+x^4+\cos(ty)\bigr)^2}\,dx\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-20\,x\sin y+\frac{x^3\sin(x^2y)}{2+x^4+\cos(x^2y)}+\frac{4x^3y}{2+x^4+\cos y^3}$$
$$+2\int_{x^2}^{y^2}\frac{x^3t\sin(ty)}{\bigl(2+x^4+\cos(ty)\bigr)^2}\,dx\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-10\,x^2\cos y+\ln(2+x^4+\cos y^3)-\frac{4y^3\sin y^3}{2+x^4+\cos y^3}$$
$$-\frac{1}{2}\int_{x^2}^{y^2}\frac{t^2\bigl(1+(2+x^4)\cos(ty)\bigr)}{\bigl(2+x^4+\cos(ty)\bigr)^2}\,dx\,,$$

on a

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=-(20-\ln 3)\ln 3<0$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=20-\ln 3>0\ ;$$

ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en $(0,0)$.

3.51 1) $\forall\, x,y>0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2x\sin^2 t}{x^2\sin^2 t+y^2\cos^2 t}\,dt\ \text{ et }\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2y\cos^2 t}{x^2\sin^2 t+y^2\cos^2 t}\,dt\,;$$

ce qui entraîne que

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\,dt=\pi \\ y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2xy\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{x^2\sin^2 t+y^2\cos^2 t} \\ \qquad =2xy\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{ds}{x^2s^2+y^2}=\pi \end{cases}$$

avec $s = \operatorname{tg} t$. Ainsi, en résolvant ce système par rapport aux dérivées partielles, on obtient que pour $x \neq y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\pi}{x+y}\,.$$

Pour $x = y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{2}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \frac{\pi}{2x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) = \frac{2}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{2x}\,.$$

2) Puisque pour tout $x, y > 0$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\pi}{x+y}$,
il existe une fonction $h :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ telle que pour tout $x, y > 0$:

$$f(x,y) = \pi \ln(x+y) + h(y)\,.$$

Ainsi, puisque pour tout $y > 0$: $h(y) = f(1,y) - \pi\ln(1+y)$, on a

$$h'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,y) - \frac{\pi}{1+y} = 0\,.$$

Par conséquent h est une fonction constante. Comme de plus

$$h(1) = f(1,1) - \pi\ln 2 = -\pi\ln 2\,,$$

on obtient finalement que pour tout $x, y > 0$:

$$f(x,y) = \pi\ln(x+y) + h(y) = \pi\ln\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

$\boxed{\mathbf{3.52}}$ 1) D'une part, en posant $x = 1$ dans l'exercice précédent, on a

$$\lim_{y\to 0+} g(y) = \pi \lim_{y\to 0+} \ln\left(\frac{1+y}{2}\right) = -\pi\ln 2\,.$$

D'autre part, $\displaystyle\lim_{y\to 0+} g(y) = \int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin^2 t\,dt\,.$

En effet, puisque pour tout $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$: $\ln\sin t = \ln\frac{\sin t}{t} + \ln t$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin^2 t\,dt$ converge ; ce qui permet d'écrire que pour tout $y > 0$:

$$\begin{aligned}
&0 < g(y) - \int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin^2 t\,dt = \int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + y^2\operatorname{cotg}^2 t)\,dt \\
&= y\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+s^2)}{y^2+s^2}\,ds = y\int_0^1 \frac{\ln(1+s^2)}{y^2+s^2}\,ds + y\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+s^2)}{y^2+s^2}\,ds \\
&\leq y + y\int_1^{+\infty} \frac{\ln 2s^2}{s^2}\,ds \leq y + y(2+\ln 2)
\end{aligned}$$

avec $s = y\operatorname{cotg} t$.

2) De 1), on déduit immédiatement que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-} \ln\cos t\,dt = \int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,dt = \frac{1}{2}\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin^2 t\,dt = -\pi\ln\sqrt{2}\,.$$

et

$$\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-} \ln\operatorname{tg} t\,dt = \int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}-} \ln\cos t\,dt = 0\,.$$

3.53 Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = e^{-xy}h(x)$.

1a) La fonction f est continue.

1b) Puisque pour tout $y > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \left|e^{-xy}h(x)\right| dx \le \int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dx = \frac{-1}{y}\,e^{-xy}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{y}$$

et $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy}h(x)\,dx$ converge pour tout $y \ge 0$.

1c) Soit $\varepsilon > 0$. Alors, pour tout $y \ge 0$:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{2}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-xy}h(x)\,dx &= \int_{\frac{2}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx \\ &= -e^{-xy}\frac{\cos x}{x}\Big|_{\frac{2}{\varepsilon}}^{+\infty} - \int_{\frac{2}{\varepsilon}}^{+\infty} \frac{(1+xy)\,e^{-xy}}{x^2}\cos x\,dx\ ;\end{aligned}$$

ce qui entraîne, puisque pour tout $t \ge 0$: $1 + t \le e^t$, que

$$\left|\int_{\frac{2}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-xy}h(x)\,dx\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\frac{2}{\varepsilon}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \varepsilon\,.$$

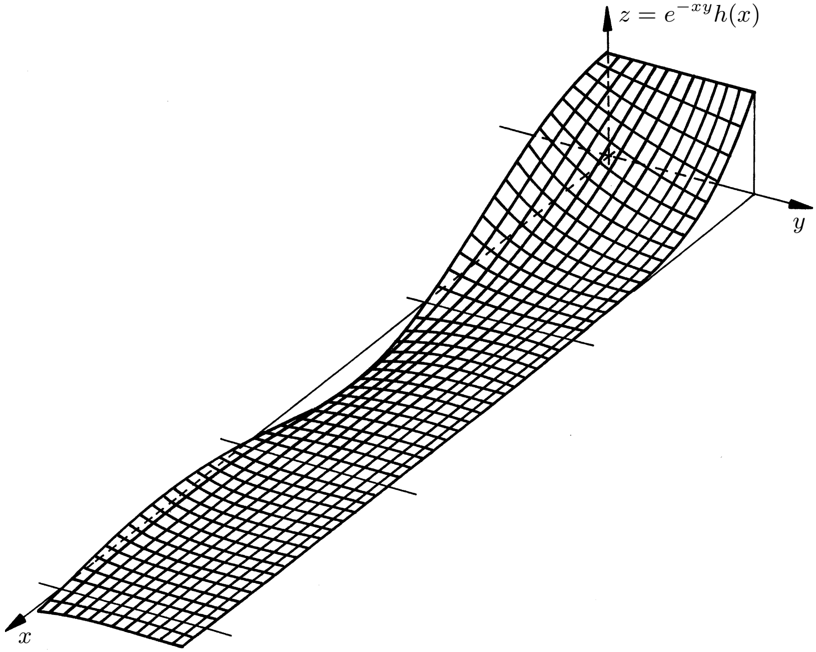
On a ainsi démontré que la fonction g est continue. De plus, il découle de 1b) que $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = 0$.

2a) Puisque pour tout $x \ge 0$ et $y > 0$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x\,e^{-xy}h(x)$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est continue.

2b) Soit $y > 0$. Puisque

$$\int_0^{+\infty} \left|-x\,e^{-xy}h(x)\right| dx \le \int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dx = \frac{-1}{y}e^{-xy}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{y}\,,$$

l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} -x\,e^{-xy}h(x)\,dx$ converge.



2c) Puisque pour tout ε, $y > 0$, les relations $\beta \geq \frac{4}{y^2 \varepsilon}$ et $t > \frac{y}{2}$ impliquent

$$\int_\beta^{+\infty} \left|-x\, e^{-xt} h(x)\right| dx \leq \int_\beta^{+\infty} e^{-xt}\, dx = \frac{-1}{t}\, e^{-xt}\Big|_\beta^{+\infty} = \frac{1}{t}\, e^{-\beta t} < \varepsilon\,.$$

On a ainsi démontré que pour tout $y > 0$:

$$g'(y) = \int_0^{+\infty} -x\, e^{-xy} h(x)\, dx = -\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\, dx = \frac{-1}{1+y^2}\,.$$

3) Des résultats précédents, on déduit que pour tout $y \geq 0$:

$$g(y) = c - \operatorname{Arctg} y$$

et $c = \lim\limits_{y \to +\infty} \big(g(y) + \operatorname{Arctg} y\big) = \dfrac{\pi}{2}$.

4) $g(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\, dx = \int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$.

3.54 1) Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) + g'(x) &= 2\, e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt - 2\, e^{-x^2} \int_0^1 x\, e^{-(xt)^2}\, dt \\ &= 2\, e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt - 2\, e^{-x^2} \int_0^x e^{-s^2}\, ds = 0\,, \end{aligned}$$

on a $f(x) + g(x) = f(0) + g(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

2) En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R} : 0 < g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\, dt < e^{-x^2}$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Par conséquent

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4} - g(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.55}}$ Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(x,y) = \left(y^3 + \frac{2x^3}{1+x^4+2y^2}\,,\, 3xy^2 + \frac{2y}{1+x^4+2y^2}\right),$$

on a $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\,(1,1) = \big\langle \nabla f(1,1)\,,\, \mathbf{v}\big\rangle = \dfrac{33}{10}\,.$

$\boxed{\mathbf{3.56}}$ 1) Direction *sud-ouest* : $\mathbf{v} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\nabla h(x,y) = (-4x, -2y)$. D'où

$$h'_{\mathbf{v}}(0) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}}\,(30,-20) = \big\langle \nabla h(30,-20)\,,\, \mathbf{v}\big\rangle = \frac{80}{\sqrt{2}} > 0\,.$$

La pente étant positive, on monte.
2) La pente la plus raide au point Q est donnée par les directions

$$\mathbf{v} = \pm\frac{\nabla h(30,-20)}{\big\|\nabla h(30,-20)\big\|} = \pm\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\,,\, \frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

- Dans la direction $\mathbf{v} = \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, la pente est la plus raide pour monter.
- Dans la direction $\mathbf{v} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$, la pente est la plus raide pour descendre.
- Au point Q, la pente est nulle pour les deux directions opposées

$$\mathbf{v} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\,,\, \frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

$\boxed{\mathbf{3.57}}$ 1) Direction *nord-ouest* : $\mathbf{v} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla p(x,y) = \left(4x^3y^2 + \frac{8x}{1+4x^2+5y^2}\,,\, 2x^4y + \frac{10y}{1+4x^2+5y^2}\right).$$

D'où

$$p'_{\mathbf{v}}(0) = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{v}}\,(1,2) = \big\langle \nabla p(1,2)\,,\, \mathbf{v}\big\rangle = \frac{-288}{25\sqrt{2}} < 0\,.$$

La pente étant négative, on descend.
2) La pente la plus raide au point Q est donnée par les directions

$$\mathbf{v} = \pm\frac{\nabla p(1,2)}{\big\|\nabla p(1,2)\big\|} = \pm\left(\frac{51}{\sqrt{2\,826}}\,,\, \frac{15}{\sqrt{2\,826}}\right).$$

- Dans la direction $\mathbf{v} = \left(\frac{51}{\sqrt{2\,826}}, \frac{15}{\sqrt{2\,826}}\right)$, la pente est la plus raide pour monter.
- Dans la direction $\mathbf{v} = \left(\frac{-51}{\sqrt{2\,826}}, \frac{-15}{\sqrt{2\,826}}\right)$, la pente est la plus raide pour descendre.
- Au point Q, la pente est nulle pour les deux directions opposées

$$\mathbf{v} = \pm\left(\frac{-15}{\sqrt{2\,826}}, \frac{51}{\sqrt{2\,826}}\right).$$

$\boxed{\textbf{3.58}}$ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x + 2y + e^{x+y}(\cos x^2 - 2x\sin x^2)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x + e^{x+y}\cos x^2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2 + e^{x+y}(\cos x^2 - 4x\sin x^2 - 2\sin x^2 - 4x^2\cos x^2)\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2 + e^{x+y}(\cos x^2 - 2x\sin x^2) \ \text{ et } \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^{x+y}\cos x^2\,,$$

on a $P_2(0,0) = 1 + x + y - \dfrac{x^2}{2} + 3xy + \dfrac{y^2}{2}$.

$\boxed{\textbf{3.59}}$ 1) Supposons que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soit une telle fonction. Alors, il existe une fonction $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \int_0^x g(t,y)\,dt + \gamma(y)\ ;$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} h(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \int_0^x \frac{\partial g}{\partial y}(t,y)\,dt + \gamma'(y) = \int_0^x \frac{\partial h}{\partial x}(t,y)\,dt + \gamma'(y) \\ &= h(x,y) - h(0,y) + \gamma'(y)\,. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$: $\gamma(y) = \displaystyle\int_0^y h(0,t)\,dt + \text{cste}$. Par conséquent toutes les fonctions f cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = \int_0^x g(t,y)\,dt + \int_0^y h(0,t)\,dt + \text{cste}\,.$$

2) Oui, d'après le théorème de Schwarz.

$\boxed{\textbf{3.60}}$ En posant pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$g(x,y) = 3y^2 - y^3 + 2x\,\text{Arctg}\,x \text{ et } h(x,y) = 6xy - 3xy^2 + \frac{2y}{1+y^2}$$

et en constatant que $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 6y - 3y^2$, on peut écrire, grâce à l'exercice précédent, que

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_0^x g(t,y)\,dt + \int_0^y h(0,t)\,dt + \text{cste} \\ &= 3xy^2 - xy^3 - x + (x^2+1)\,\text{Arctg}\,x + \ln(1+y^2) + \text{cste}\,. \end{aligned}$$

3.61 Supposons que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soit une telle fonction et considérons la fonction auxiliaire $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u,v) = f\left(x = \frac{u+v}{2b}\,,\, y = \frac{u-v}{2a}\right).$$

Alors, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\,(u,v) = \frac{1}{2ab}\left(a\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2b}\,,\,\frac{u-v}{2a}\right) + b\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2b}\,,\,\frac{u-v}{2a}\right)\right) = 0\ ;$$

ce qui donne, en intégrant par rapport à u, que $F(u,v) = g(v)$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathbf{C}^1$. Par conséquent toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = g(bx - ay) \text{ avec } g \in \mathbf{C}^1\,.$$

3.62 Supposons que $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit une telle fonction et considérons la fonction auxiliaire $F : \left]0,+\infty\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F(r,\theta) = f(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)\,.$$

Alors, pour tout $(r,\theta) \in \left]0,+\infty\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \theta}\,(r,\theta) &= -(r\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial x}\,(r\cos\theta,\ r\sin\theta) + (r\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\\ &= aF(r,\theta)\ ;\end{aligned}$$

ce qui donne, en intégrant par rapport à θ, que $F(r,\theta) = g(r)\,e^{a\theta}$ où $g : \left]0,+\infty\right[\to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathbf{C}^1$.

Par conséquent toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) e^{a \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}} \quad \text{avec } g \in \mathbf{C}^1\,.$$

3.63 Supposons que $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit une telle fonction et considérons la fonction auxiliaire $F : \left]0,+\infty\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F(r,\theta) = f(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)\,.$$

Alors, pour tout $(r,\theta) \in \left]0,+\infty\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$r\frac{\partial F}{\partial r}\,(r,\theta) = (r\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial x}\,(r\cos\theta, r\sin\theta) + (r\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\,(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial F}{\partial r}\,(r,\theta) = 0\ ;$$

ce qui donne, en intégrant par rapport à r, que $F(r,\theta) = g(\theta)$ où $g : \left]0,+\infty\right[\to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathbf{C}^1$.

Par conséquent toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = g\Big(\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\Big) \quad \text{avec } g \in \mathbf{C}^1$$

ou plus simplement

$$f(x,y) = h\Big(\frac{y}{x}\Big) \quad \text{avec } h \in \mathbf{C}^1 .$$

D'après le théorème d'Euler, f est homogène de degré 0.

Remarque : Comme la relation d'Euler est une condition nécessaire et suffisante, il découle de cet exercice que toutes les fonctions homogènes f de degré 0 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sont de la forme $f(x,y) = h\big(\frac{y}{x}\big)$ avec $h \in \mathbf{C}^1$.

$\boxed{\mathbf{3.64}}$ Supposons que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soit une telle fonction et considérons la fonction auxiliaire $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u,v) = f\left(x = \frac{u+v}{2}\,,\, y = \frac{-u+v}{2}\right).$$

Alors, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{-u+v}{2}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{-u+v}{2}\right)\right) = 0\,;$$

ce qui donne, en intégrant par rapport à u, que $F(u,v) = g(v)$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathbf{C}^1$.

Par conséquent toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = g(x+y) \quad \text{avec } g \in \mathbf{C}^1 .$$

$\boxed{\mathbf{3.65}}$ Supposons que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ soit une telle fonction et considérons la fonction auxiliaire $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u,v,w) = f(x = u,\, y = u+v,\, z = u+w)\,.$$

Alors, pour tout $(u,v,w) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial u}(u,v,w)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(u,u+v,u+w) + \frac{\partial f}{\partial y}(u,u+v,u+w) + \frac{\partial f}{\partial z}(u,u+v,u+w) = 0\,;\end{aligned}$$

ce qui donne, en intégrant par rapport à u, que $F(u,v,w) = g(v,w)$ où $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathbf{C}^1$.

Par conséquent toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y,z) = g(y-x, z-x) \quad \text{avec } g \in \mathbf{C}^1 .$$

$\boxed{\textbf{3.66}}$ Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \iff h'(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^4}}\,.$$

Ainsi, puisque pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} h(x) &= \int^x \frac{dt}{t\sqrt{1+t^4}} = \frac{1}{4} \int^x \frac{4t^3}{t^4\sqrt{1+t^4}}\, dt = \frac{1}{4} \int^{x^4} \frac{ds}{s\sqrt{1+s}} \\ &= \frac{1}{2} \int^{\sqrt{1+x^4}} \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \Bigg|^{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}+1} + \text{cste}\,, \end{aligned}$$

on obtient que toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x, y) = g\Big(\frac{y}{x}\Big) + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}+1} + \text{cste} \quad \text{avec } g \in \mathbf{C}^1.$$

$\boxed{\textbf{3.67}}$ Pour tout $x, y > 0$:

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2\frac{y}{x}\, h'\Big(\frac{y}{x}\Big) = -2 \ln \frac{y}{x} \iff h'\Big(\frac{y}{x}\Big) = \frac{x}{y} \ln \frac{y}{x}\,.$$

Ainsi, puisque pour tout $t > 0$:

$$h(t) = \int^t \frac{\ln s}{s}\, ds = \frac{1}{2} \ln^2 s \Big|^t = \frac{1}{2} \ln^2 t + \text{cste}\,,$$

on obtient que toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x, y) = g(xy) + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{y}{x} + \text{cste} \quad \text{avec } g \in \mathbf{C}^1.$$

$\boxed{\textbf{3.68}}$ Puisque pour tout $(x, y) \in E$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x+y)}{x+y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f(x+y)}{x+y}\right) &= 2\frac{(x+y)\, f'(x+y) - f(x+y)}{(x+y)^2} \\ &= 4 \ln(1+x+y)\,, \end{aligned}$$

on obtient que pour tout $t > 0$:

$$f'(t) - \frac{1}{t} f(t) = 2t \ln(1+t) \text{ ou encore } f(t) = ct - t^2 + t(t+1)\ln(1+t)\,,$$

où c est une constante.

$\boxed{\textbf{3.69}}$ Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} & x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x g(y) + 2xy g'(y) = 2xy^2 \ln y \\ & \iff g'(y) + \frac{1}{y}\, g(y) = y \ln y\,. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque pour tout $y > 0 : g(y) = \frac{c}{y} - \frac{y^2}{9}(1 - 3\ln y)$, on obtient que toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = x^2\, g(y) = c\frac{x^2}{y} - \frac{x^2y^2}{9}\,(1 - 3\ln y)$$

où c est une constante.

$\boxed{\mathbf{3.70}}$ Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y) + x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x,y) = -\frac{1}{x}\,g'\Big(\frac{y}{x}\Big) = \frac{y}{x^2} \iff g'\Big(\frac{y}{x}\Big) = -\frac{y}{x}\,.$$

Ainsi, puisque pour tout $t \in \mathbb{R} : g(t) = -\frac{t^2}{2} + \text{cste}$, on obtient que toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = g\Big(\frac{y}{x}\Big) + h(x) = -\frac{y^2}{2x^2} + h(x) \quad \text{avec } h \in \mathbf{C}^2.$$

$\boxed{\mathbf{3.71}}$ Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x,y) - 4x^3\frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y) - 4x^3\, f(x,y)\right) = 0\\ &\iff \frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y) - 4x^3\, f(x,y) = g(x)\end{aligned}$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathbf{C}^1$ quelconque. Par conséquent toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = e^{x^4}\, h(y) + e^{x^4}\int_0^x e^{-t^4}\, g(t)\, dt \quad \text{avec } h \in \mathbf{C}^2\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.72}}$ Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y)\\ &\qquad = y^3\, g''(x) + 3y^3\, g'(x) + 6y^3\, g(x) = y^3 \sin 5x\\ &\iff g''(x) + 3g'(x) + 6g(x) = \sin 5x\,.\end{aligned}$$

Ainsi, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = c_1\, e^{-\frac{3}{2}x}\cos\frac{\sqrt{15}}{2}\,x + c_2\, e^{-\frac{3}{2}x}\sin\frac{\sqrt{15}}{2}\,x - \frac{1}{586}\,(15\,\cos 5x + 19\,\sin 5x)\,,$$

on obtient que toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$\begin{aligned}f(x,y) = {}& c_1 y^3\, e^{-\frac{3}{2}x}\cos\frac{\sqrt{15}}{2}\,x\\ &+ c_2 y^3\, e^{-\frac{3}{2}x}\sin\frac{\sqrt{15}}{2}\,x - \frac{y^3}{586}\,(15\,\cos 5x + 19\,\sin 5x)\end{aligned}$$

où c_1, c_2 sont deux constantes.

3.73 Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \\ &= -g(xy) + xy\, g'(xy) - xy\, g''(xy) = -g(xy) + x^2y^2 \\ \iff g''(xy) - g'(xy) = -xy\,. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$: $g(t) = c_1\, e^t + \frac{t^2}{2} + t + c_2$ où c_1, c_2 sont deux constantes, on obtient que toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = \frac{1}{x}\, g(xy) = \frac{c_1}{x}\, e^{xy} + \frac{xy^2}{2} + y + \frac{c_2}{x}\,.$$

3.74 Supposons que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soit une telle fonction et considérons la fonction auxiliaire $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u,v) = f\left(x = \frac{u-v}{2\lambda}\,,\, y = \frac{u+v}{2}\right).$$

Alors, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u,v) = -\frac{1}{4\lambda^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u-v}{2\lambda}, \frac{u+v}{2}\right) - \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{u-v}{2\lambda}, \frac{u+v}{2}\right)\right) = 0\,;$$

ce qui donne, en intégrant d'abord par rapport à u puis par rapport à v, que $F(u,v) = g(u) + h(v)$ où $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathbf{C}^2$.

Par conséquent toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = g(\lambda x + y) + h(-\lambda x + y) \quad \text{avec } g, h \in \mathbf{C}^2\,.$$

3.75 Supposons que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soit une telle fonction et considérons la fonction auxiliaire $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u,v) = f\left(x = \frac{u-v}{\alpha-\beta}\,,\, y = \frac{-\beta u + \alpha v}{\alpha - \beta}\right).$$

Alors, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u,v) \\ &= -\frac{a}{4(b^2-ac)}\left(a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u-v}{\alpha-\beta}, \frac{-\beta u + \alpha v}{\alpha-\beta}\right)\right. \\ &\quad \left. + 2b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{u-v}{\alpha-\beta}, \frac{-\beta u + \alpha v}{\alpha-\beta}\right) + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{u-v}{\alpha-\beta}, \frac{-\beta u + \alpha v}{\alpha-\beta}\right)\right) = 0\,; \end{aligned}$$

ce qui donne, en intégrant d'abord par rapport à u puis par rapport à v, que $F(u,v) = g(u) + h(v)$, où $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathbf{C}^2$.

Par conséquent toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = g(\alpha x + y) + h(\beta x + y) \quad \text{avec } g, h \in \mathbf{C}^2 .$$

$\boxed{\mathbf{3.76}}$ Supposons que $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit une telle fonction et considérons la fonction auxiliaire $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u,v) = f(x = u,\ y = uv) .$$

Alors, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & u^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u,v) = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,uv) + 2u^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u,uv) + u^2 v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u,uv) = 0 \\ \iff & \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u,v) = 0 \ ; \end{aligned}$$

ce qui donne, en intégrant deux fois par rapport à u, que $F(u,v) = ug(v) + h(v)$, où $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathbf{C}^2$.

Par conséquent toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = xg\Big(\frac{y}{x}\Big) + h\Big(\frac{y}{x}\Big) \quad \text{avec } g, h \in \mathbf{C}^2 .$$

69

$\boxed{\mathbf{3.77}}$ 1) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $\gamma :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par $\gamma(t) = f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$. Ainsi, pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= x \frac{\partial f}{\partial x} f(tx,ty) + y \frac{\partial f}{\partial y} f(tx,ty) = \alpha t^{\alpha-1} f(x,y) , \\ \gamma''(t) &= x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(tx,ty) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(tx,ty) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f(tx,ty) \\ &= \alpha(\alpha-1) f(x,y) \ ; \end{aligned}$$

ce qui donne, en prenant $t = 1$,

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x,y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(x,y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f(x,y) = \alpha(\alpha-1) f(x,y) .$$

2a) En utilisant 1) et l'exercice précédent, on obtient que toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$, homogène de degré 0 sont de la forme

$$f(x,y) = h\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{avec } h \in \mathbf{C}^2.$$

2b) En utilisant 1) et l'exercice précédent, on obtient que toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$, homogène de degré 1 sont de la forme

$$f(x,y) = xg\Big(\frac{y}{x}\Big) \quad \text{avec } g \in \mathbf{C}^2 .$$

3.78 Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \Delta f(x,y) = g''(x)\,h(y) + g(x)\,h''(y) = 0$, on a, grâce aux conditions initiales, que

$$g''(x) - g(x) = 0 \text{ et } h''(y) + h(y) = 0 \text{ ou encore } g(x) = \operatorname{ch} x \text{ et } h(y) = \cos y\,.$$

3.79 Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y) + \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y) + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y)\\ &\qquad= \left(g''(x) + \frac{1}{x}\,g'(x)\right)h(y) + \frac{1}{x^2}\,g(x)\,h''(y) = 0\,,\end{aligned}$$

il suffit de prendre $g''(x) + \frac{1}{x}g'(x) = 0$ et $h''(y) = 0$. Ainsi, en tenant compte des conditions initiales, les deux fonctions $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par $g(x) = \ln x$ et $h(y) = y$ répondent à la question.

3.80 Posons pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\big\{(0,0,0)\big\}$:

$$g(x,y,z) = f\left(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).$$

1) Pour tout $\mathbf{r} = (x,y,z) \neq \mathbf{0} : \nabla f(r) = \nabla g(x,y,z) = f'(r)\dfrac{\mathbf{r}}{r}$.

2) Pour tout $\mathbf{r} = (x,y,z) \neq \mathbf{0} : \Delta f(r) = \Delta g(x,y,z) = f''(r) + \dfrac{2}{r}f'(r)$.

3) Pour tout $r > 0 : \Delta f(r) = f''(r) + \dfrac{2}{r}f'(r) = 0 \iff f(r) = \dfrac{c_1}{r} + c_2$ où c_1, c_2 sont deux constantes.

3.81 Puisque pour tout $(r,\theta)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r}\,(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}\,(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\,(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\,,\\ \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\,(r,\theta) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin 2\theta\\ &\quad+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin^2\theta\,,\\ &= -r\frac{\partial f}{\partial x}\,(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin^2\theta\\ &\quad- r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin 2\theta - r\frac{\partial f}{\partial y}\,(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\\ &\quad+ r^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos^2\theta\,,\end{aligned}$$

on a $\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}\,(r,\theta) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}\,(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\,(r,\theta)$.

$\boxed{\mathbf{3.82}}$ Puisque pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: $g(r,\theta) = f_1(r) + f_2(\theta)$, la fonction f est harmonique sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ si et seulement si

$$f_1''(r) + \frac{1}{r}\, f_1'(r) + \frac{1}{r^2}\, f_2''(\theta) = 0 \Longleftrightarrow r^2 f_1''(r) + r f_1'(r) = \alpha \ \text{ et } f_2''(\theta) = -\alpha$$

où α est une constante. Par conséquent toutes les fonctions $f_1 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ sont de la forme

$$f_1(r) = a \ln r + \frac{\alpha}{2} \ln^2 r + b \text{ et } f_2(\theta) = -\frac{\alpha}{2}\,\theta^2 + c\theta + d$$

où a, b, c et d sont quatre constantes.

$\boxed{\mathbf{3.83}}$ Puisque pour tout $(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\sin\theta\,,\\
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta,z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cos^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\sin 2\theta\\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\sin^2\theta\,,\\
\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta,z) &= -r\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cos\theta + r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\sin^2\theta\\
&\quad - r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\sin 2\theta - r\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\sin\theta\\
&\quad + r^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cos^2\theta\,,\\
\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(r,\theta,z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,,
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
&\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\\
&\qquad = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta,z) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,z) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta,z) + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(r,\theta,z)\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3.84}}$ Dans le seul but de simplifier l'écriture, posons

$$\gamma(r,\beta,\theta) = (r\sin\beta\cos\theta, r\sin\beta\sin\theta, r\cos\beta)\,.$$

Ainsi, puisque pour tout $(r,\beta,\theta) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\sin\beta\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\sin\beta\sin\theta\\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial z}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\cos\beta\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\sin^2\beta\cos^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\sin^2\beta\sin 2\theta\\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\sin 2\beta\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\sin^2\beta\sin^2\theta\\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\sin 2\beta\sin\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\cos^2\beta\,,\\
\frac{\partial g}{\partial \beta}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big) &= r\frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\cos\beta\cos\theta + r\frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\cos\beta\sin\theta\\
&\qquad - r\frac{\partial f}{\partial z}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\sin\beta\,,\\
\frac{\partial^2 g}{\partial \beta^2}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big) &= -r\frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\sin\beta\cos\theta - r\frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\sin\beta\sin\theta\\
&\quad - r\frac{\partial f}{\partial z}\big(\gamma t(r,\beta,\theta)\big)\cos\beta + r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\cos^2\beta\cos^2\theta\\
&\quad + r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\cos^2\beta\sin 2\theta - r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\sin 2\beta\cos\theta\\
&\quad + r^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\cos^2\beta\sin^2\theta - r^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\sin 2\beta\sin\theta\\
&\quad + r^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\sin^2\beta\,,\\
\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big) &= -r\frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\sin\beta\cos\theta - r\frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\sin\beta\sin\theta\\
&\quad + r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\sin^2\beta\sin^2\theta - r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\sin^2\beta\sin 2\theta\\
&\quad + r^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big)\sin^2\beta\cos^2\theta\,,
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
\Delta f\big(\gamma(r,\beta,\theta)\big) &= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\beta,\theta) + \frac{2}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\beta,\theta) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \beta^2}(r,\beta,\theta)\\
&\qquad + \frac{1}{r^2\sin^2\beta}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\beta,\theta) + \frac{\operatorname{cotg}\beta}{r^2}\,\frac{\partial g}{\partial \beta}(r,\beta,\theta)\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3.85}}$ Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=x^2+2\,e^y+\sin xy-2$. Alors, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\,e^y + x\cos xy\,.$$

Ainsi, puisque $f(0,0)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=2\neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi:\,]-\delta,\delta[\,\to\mathbb{R}$ telle que $\phi(0)=0$ et pour tout $|x|<\delta: f\big(x,\phi(x)\big)=0$. De plus, $\phi\in\mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y\cos xy \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 - y^2\sin xy\,.$$

Par conséquent $\phi'(0) = 0$ et $\phi''(0) = -1 < 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un maximum local en 0.

$\boxed{\mathbf{3.86}}$ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = e^{xy} + y^2 - x - 2$. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\, e^{xy} + 2y\,.$$

Ainsi, puisque $f(0, 1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 2 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ telle que $\phi(0) = 1$ et pour tout $|x| < \delta : f\big(x, \phi(x)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\, e^{xy} - 1 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = y^2\, e^{xy}\,.$$

Par conséquent $\phi'(0) = 0$ et $\phi''(0) = -\frac{1}{2} < 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un maximum local en 0.

$\boxed{\mathbf{3.87}}$ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = 1 - y^2 + x^2 y\, e^y$. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y + x^2\, e^y + x^2 y\, e^y\,.$$

Ainsi, puisque $f(0, 1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = -2 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ telle que $\phi(0) = 1$ et pour tout $|x| < \delta : f\big(x, \phi(x)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy\, e^y \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y\, e^y\,.$$

Par conséquent $\phi'(0) = 0$ et $\phi''(0) = e > 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un minimum local en 0.

$\boxed{\mathbf{3.88}}$ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 y - 1$. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - x^2\,.$$

Ainsi, puisque $f(0, 1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 3 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ telle que $\phi(0) = 1$ et pour tout $|x| < \delta : f\big(x, \phi(x)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 2xy \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x - 2y\,.$$

Par conséquent $\phi'(0) = 0$ et $\phi''(0) = \frac{2}{3} > 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un minimum local en 0.

$\boxed{\textbf{3.89}}$ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x^2 - 2x - y - \cos \pi y^2 + \ln \frac{1+y^4}{2} + e^{x(y-1)}\,.$$

Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y) = -1 + 2\pi y \sin \pi y^2 + \frac{4y^3}{1+y^4} + x\, e^{x(y-1)}\,.$$

Ainsi, puisque $f(1,1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : \,]1-\delta, 1+\delta[\, \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(1) = 1$ et pour tout $|x-1| < \delta$: $f\big(x, \phi(x)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y) = 2x - 2 + (y-1)\, e^{x(y-1)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y) = 2 + (y-1)^2\, e^{x(y-1)}\,.$$

Par conséquent $\phi'(1) = 0$ et $\phi''(1) = -1 < 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un maximum local en 1.

$\boxed{\textbf{3.90}}$ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \cos(x^2 + y) + \sin(x+y) + e^{x^3 y} - 2\,.$$

Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y) = -\sin(x^2+y) + \cos(x+y) + x^3\, e^{x^3 y}\,.$$

Ainsi, puisque $f\big(0, \frac{\pi}{2}\big) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}\big(0, \frac{\pi}{2}\big) = -1 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : \,]-\delta, \delta[\, \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(0) = \frac{\pi}{2}$ et pour tout $|x| < \delta$: $f\big(x, \phi(x)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y) &= -2x \sin(x^2+y) + \cos(x+y) + 3x^2 y\, e^{x^3 y}\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y) &= -2\sin(x^2+y) - 4x^2 \cos(x^2+y)\\
&\qquad - \sin(x+y) + 6xy\, e^{x^3 y} + 9x^4 y^2\, e^{x^3 y}\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\phi'(0) = 0$ et $\phi''(0) = -3 < 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un maximum local en 0.

$\boxed{\textbf{3.91}}$ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x - y + e^{-xy} - \int_y^{x^2+y^2} e^{xt^2}\, dt\,.$$

Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y) = -1 - x\, e^{-xy} - 2y\, e^{x(x^2+y^2)^2} + e^{xy^2}.$$

Ainsi, puisque $f(0,1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0.1) = -2 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : \,]-\delta, \delta[\, \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(0) = 1$ et pour tout $|x| < \delta : f\big(x, \phi(x)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ (car $f \in \mathbf{C}^\infty$) et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - y\,e^{-xy} - 2x\,e^{x(x^2+y^2)^2} - \int_y^{x^2+y^2} t^2\,e^{xt^2}\,dt$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = {} & y^2\,e^{-xy} - 2\,e^{x(x^2+y^2)^2} \\ & - 2x\Big(\big(x^2+y^2\big)^2 + 4x^2(x^2+y^2)\Big)\,e^{x(x^2+y^2)^2} \\ & - 2x\big(x^2+y^2\big)^2\,e^{x(x^2+y^2)^2} - \int_y^{x^2+y^2} t^4\,e^{xt^2}\,dt\,.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\phi'(0) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)} = 0 \quad\text{et}\quad \phi''(0) = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)} = -\frac{1}{2} < 0\,,$$

ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un maximum local en 0.

3.92 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$f(x,y) = \ln x + \operatorname{Arctg}\frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - x\,.$$

Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2}\,e^{\frac{y}{x}} - 1\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{2xy}{\big(x^2+y^2\big)^2} + \frac{2y}{x^3}\,e^{\frac{y}{x}} + \frac{y^2}{x^4}\,e^{\frac{y}{x}}\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{1}{x}\,e^{\frac{y}{x}}\,.$$

Ainsi, puisque $f(1,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 2 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : \,]1-\delta, 1+\delta[\, \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(1) = 0$ et pour tout $|x-1| < \delta$: $f\big(x, \phi(x)\big) = 0$. Comme de plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ (car $f \in \mathbf{C}^\infty$), $\phi'(1) = 0$ et $\phi''(1) = \frac{1}{2} > 0$, la fonction ϕ admet un minimum local en 1.

3.93 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \ln x + e^{\frac{y}{x}} - 1$. Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{e^{\frac{y}{x}}}{x}$.

Ainsi, puisque $f(1,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi :]1-\delta, 1+\delta[\to \mathbb{R}$ telle que $\phi(1) = 0$ et pour tout $|x-1| < \delta$: $f\big(x, \phi(x)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\, e^{\frac{y}{x}} \;;$$

ce qui entraîne que $\phi'(1) = -1$. Par conséquent l'équation de la tangente à la courbe $y = \phi(x)$ en 1 est $y = \phi'(1)(x-1) = -x+1$.

3.94 D'une part, puisque $f(a,b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi :]a-\delta, a+\delta[\to \mathbb{R}$ telle que $\phi(a) = b$ et pour tout $|x-a| < \delta$: $f\big(x, \phi(x)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^1$ et pour tout $|x-a| < \delta$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(x, \phi(x)\big) + \phi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \phi(x)\big) = 0\,.$$

D'autre part, la fonction f étant homogène de degré α, on a, d'après la relation d'Euler, que pour tout $(x,y) \in A$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y) \;;$$

ce qui entraîne que pour tout $|x-a| < \delta$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}\big(x, \phi(x)\big) + \phi(x)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \phi(x)\big) = 0\,.$$

Considérons à présent, la fonction auxiliaire $g :]a-\delta, a+\delta[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \phi(x)\big)\,.$$

Ainsi, puisque cette fonction est continue et $ag(a) \neq 0$, il existe un nombre $0 < \beta \leq \delta$ tel que pour tout $|x-a| < \beta$: $xg(x) \neq 0$. Par conséquent pour tout $|x-a| < \beta$:

$$\phi'(x) - \frac{1}{x}\phi(x) = 0 \text{ et } \phi(a) = b \text{ ou encore } \phi(x) = \frac{b}{a}x\,.$$

3.95 $\phi(x) = -x$.

$\boxed{\mathbf{3.96}}$ Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 6y^2 + z^5 - 2z^4 + 1\,.$$

Alors, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: $\dfrac{\partial f}{\partial z}\,(x, y, z) = 5z^4 - 8z^3$.

Ainsi, puisque $f(0, 0, 1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = -3 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : B\big((0, 0), \delta\big) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(0, 0) = 1$ et pour tout $(x, y) \in B\big((0, 0), \delta\big)$: $f\big(x, y, \phi(x, y)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x, y, z) = 6x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}\,(x, y, z) = 12\,y\,.$$

Par conséquent $\nabla\phi(0, 0) = (0, 0)$. Autrement dit, $(0, 0)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ.

Nature du point stationnaire. Puisque pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x, y, z) = 6\,,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x, y, z) = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x, y, z) = 12\,,$$

on a $r = 2$, $s = 0$ et $t = 4$ ou encore $s^2 - rt = -8 < 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un minimum local en $(0, 0)$.

$\boxed{\mathbf{3.97}}$ Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = x - 6y + e^{x^2} + \ln(2 + x^2 + z^2 - 2z) - xy + 3y^2z + 2\,.$$

Alors, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: $\dfrac{\partial f}{\partial z}\,(x, y, z) = \dfrac{2z - 2}{2 + x^2 + z^2 - 2z} + 3y^2$.

Ainsi, puisque $f(0, 1, 1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 1, 1) = 3 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : B\big((0, 1), \delta\big) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(0, 1) = 1$ et pour tout $(x, y) \in B\big((0, 1), \delta\big)$: $f\big(x, y, \phi(x, y)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x, y, z) = 1 + 2x\,e^{x^2} + \frac{2x}{2 + x^2 + z^2 - 2z} - y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}\,(x, y, z) = -6 - x + 6yz\,.$$

Par conséquent $\nabla\phi(0, 1) = (0, 0)$. Autrement dit, $(0, 1)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ.

Nature du point stationnaire. Puisque pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 2\,e^{x^2} + 4x^2\,e^{x^2} + \frac{2(2 - x^2 + z^2 - 2z)}{\big(2 + x^2 + z^2 - 2z\big)^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x, y, z) = -1 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x, y, z) = 6z\,,$$

on a $r = -\frac{4}{3}$, $s = \frac{1}{3}$ et $t = -2$ ou encore $s^2 - rt = -\frac{23}{9} < 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un maximum local en $(0, 1)$.

3.98 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = x^4 + x^3y^2 + xyz + z^4 - 1\,.$$

Alors, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy + 4z^3\,.$

Ainsi, puisque $f(0,0,1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = 4 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : B\big((0,0),\delta\big) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(0,0) = 1$ et pour tout $(x,y) \in B\big((0,0),\delta\big)$: $f\big(x,y,\phi(x,y)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x^3 + 3x^2y^2 + yz \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2x^3y + xz\,.$$

Par conséquent $\nabla\phi(0,0) = (0,0)$. Autrement dit, $(0,0)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ.

Nature du point stationnaire. Puisque pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 12\,x^2 + 6xy^2\,,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 6x^2y + z \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 2x^3\,,$$

on a $r = 0$, $s = \frac{-1}{4}$ et $t = 0$ ou encore $s^2 - rt = \frac{1}{16} > 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

3.99 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72\,.$$

Alors, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 10\,z - 2x - 2y\,.$

Ainsi, puisque $f(1,1,4) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,4) = 36 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : B\big((1,1),\delta\big) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(1,1) = 4$ et pour tout $(x,y) \in B\big((1,1),\delta\big)$: $f\big(x,y,\phi(x,y)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 10\,x - 2y - 2z \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 10\,y - 2x - 2z\,.$$

Par conséquent $\nabla\phi(1,1) = (0,0)$. Autrement dit, $(1,1)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ.

Nature du point stationnaire. Puisque pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 10\,,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = -2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 10\,,$$

on a $r = -\frac{5}{18}$, $s = \frac{1}{18}$ et $t = -\frac{5}{18}$ ou encore $s^2 - rt = -\frac{2}{27} < 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ admet maximum local en $(1,1)$.

3.100 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = x + 2x^2 + y^2 - x\,e^y - y\,e^x + 2\sin yz - (y+1)z + 1\,.$$

Alors, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2y\cos yz - (y+1)\,.$

Ainsi, puisque $f(0,0,1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = -1 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : B\big((0,0),\delta\big) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(0,0) = 1$ et pour tout $(x,y) \in B\big((0,0),\delta\big)$: $f\big(x,y,\phi(x,y)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 1 + 4x - e^y - y\,e^x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y - x\,e^y - e^x + 2z\cos yz - z\,.$$

Par conséquent $\nabla\phi(0,0) = (0,0)$. Autrement dit, $(0,0)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ.

Nature du point stationnaire. Puisque pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 4 - y\,e^x\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = -e^y - e^x\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 2 - x\,e^y - 2z^2\sin yz\,,$$

on a $r = 4$, $s = -2$ et $t = 2$ ou encore $s^2 - rt = -4 < 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un minimum local en $(0,0)$.

3.101 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = z^5 + xz^4 + yz + x^2 + (y-1)^2\,.$$

Alors, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 5z^4 + 4xz^3 + y\,.$

Ainsi, puisque $f(0,1,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,0) = 1 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : B\big((0,1),\delta\big) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(0,1) = 0$ et pour tout $(x,y) \in B\big((0,1),\delta\big)$: $f\big(x,y,\phi(x,y)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = z^4 + 2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = z + 2(y-1)\,.$$

Par conséquent $\nabla\phi(0,1) = (0,0)$. Autrement dit, $(0,1)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ.

Nature du point stationnaire. Puisque pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 2\,,$$

on a $r = -2$, $s = 0$ et $t = -2$ ou encore $s^2 - rt = -4 < 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un maximum local en $(0,1)$.

3.102 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = x^5 z + x^2 y^2 + 7\cos xyz - x^{10}\cos y^2 - z^3\,.$$

Alors, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\dfrac{\partial f}{\partial z}\,(x,y,z) = x^5 - 7xy\sin xyz - 3z^2\,.$

Ainsi, puisque $f(1,0,2) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,2) = -11 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : B\big((1,0),\delta\big) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(1,0) = 2$ et pour tout $(x,y) \in B\big((1,0),\delta\big)$: $f\big(x,y,\phi(x,y)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y,z) &= 5x^4 z + 2xy^2 - 7yz\sin xyz - 10\,x^9\cos y^2\,,\\
\frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y,z) &= 2x^2 y - 7xz\sin xyz + 2x^{10} y\sin y^2\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\nabla\phi(1,0) = (0,0)$. Autrement dit, $(1,0)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ.

Nature du point stationnaire. Puisque pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y,z) &= 20\,x^3 z + 2y^2 - 7y^2 z^2\cos xyz - 90\,x^8\cos y^2\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,(x,y,z) &= 4xy - 7z\sin xyz - 7xyz^2\cos xyz + 20\,x^9 y\sin y^2\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y,z) &= 2x^2 - 7x^2 z^2\cos xyz + 2x^{10}\sin y^2 + 4x^{10} y^2\cos y^2\,,
\end{aligned}$$

on a $r = -\frac{50}{11}$, $s = 0$ et $t = -\frac{26}{11}$ ou encore $s^2 - rt = -\frac{1\,300}{121} < 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un maximum local en $(1,0)$.

3.103 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = e^{x^2} + e^{y^2} + e^{z^2} + e^{xy} + e^{xz} + e^{yz} + e^{xyz} - x - y - 6 - e\,.$$

Alors, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\dfrac{\partial f}{\partial z}\,(x,y,z) = 2z\,e^{z^2} + x\,e^{xz} + y\,e^{yz} + xy\,e^{xyz}\,.$

Ainsi, puisque $f(0,0,1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = 2\,e \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : B\big((0,0),\delta\big) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(0,0) = 1$ et pour tout $(x,y) \in B\big((0,0),\delta\big)$: $f\big(x,y,\phi(x,y)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y,z) &= 2x\,e^{x^2} + y\,e^{xy} + z\,e^{xz} + yz\,e^{xyz} - 1\,,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= 2y\,e^{y^2} + x\,e^{xy} + z\,e^{yz} + xz\,e^{xyz} - 1\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\nabla\phi(0,0) = (0,0)$. Autrement dit, $(0,0)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ.

Nature du point stationnaire. Puisque pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= 2\,e^{x^2} + 4x^2\,e^{x^2} + y^2\,e^{xy} + z^2\,e^{xz} + y^2z^2\,e^{xyz}\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x,y,z) &= e^{xy} + xy\,e^{xy} + z\,e^{xyz} + xyz^2\,e^{xyz}\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y,z) &= 2\,e^{y^2} + 4y^2\,e^{y^2} + x^2\,e^{xy} + z^2\,e^{yz} + x^2z^2\,e^{xyz}\,,
\end{aligned}$$

on a $r = -\frac{3}{2e}$, $s = -\frac{1}{e}$ et $t = -\frac{3}{2e}$ ou encore $s^2 - rt = -\frac{5}{4e^2} < 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un maximum local en $(0,0)$.

$\boxed{\mathbf{3.104}}$ Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z} - x^4 + y^6 - z^4\,e^z\,.$$

Alors, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\dfrac{\partial f}{\partial z}\,(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z} - 4z^3\,e^z - z^4\,e^z\,.$

Ainsi, puisque $f(0,0,1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = -4\,e \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : B\big((0,0),\delta\big) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(0,0) = 1$ et pour tout $(x,y) \in B\big((0,0),\delta\big)$: $f\big(x,y,\phi(x,y)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y,z) = 2x\,e^{x^2+y^2+z} - 4x^3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y,z) = 2y\,e^{x^2+y^2+z} + 6y^5\,;$$

ce qui entraîne que $\nabla\phi(0,0) = (0,0)$. Autrement dit, $(0,0)$ est un point srationnaire de la fonction ϕ.

Nature du point stationnaire. Puisque pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y,z) &= 2\,e^{x^2+y^2+z} + 4x^2\,e^{x^2+y^2+z} - 12\,x^2\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x,y,z) &= 4xy\,e^{x^2+y^2+z}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y,z) &= 2\,e^{x^2+y^2+z} + 4y^2\,e^{x^2+y^2+z} + 30\,y^4\,,
\end{aligned}$$

on a $r = t = \frac{1}{2}$ et $s = 0$ ou encore $s^2 - rt = -\frac{1}{4} < 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un minimum local en $(0,0)$.

$\boxed{\mathbf{3.105}}$ Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = -1 - 3x + x^2 + y^2 + y^3 + x\,e^y + xz\,e^y + z^4\,e^{xz}\,.$$

Alors, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\dfrac{\partial f}{\partial z}\,(x,y,z) = x\,e^y + 4z^3\,e^{xz} + xz^4\,e^{xz}\,.$

Ainsi, puisque $f(0,0,1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = 4 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : B\big((0,0),\delta\big) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(0,0) = 1$ et pour tout $(x,y) \in B\big((0,0),\delta\big) : f\big(x,y,\phi(x,y)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= -3 + 2x + e^y + z\,e^y + z^5\,e^{xz}\,,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= 2y + 3y^2 + x\,e^y + xz\,e^y\,.\end{aligned}$$

Par conséquent $\nabla\phi(0,0) = (0,0)$. Autrement dit, $(0,0)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ.

Nature du point stationnaire. Puisque pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2 + z^6\,e^{xz}\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = e^y + z\,e^y\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 2 + 6y + x\,e^y + xz\,e^y\,,$$

on a $r = -\frac{3}{4}$, $s = -\frac{1}{2}$ et $t = -\frac{1}{2}$ ou encore $s^2 - rt = -\frac{1}{8} < 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un maximum local en $(0,0)$.

$\boxed{\textbf{3.106}}$ Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 + e^{xy} + e^{xz} + e^{yz} - e - 4\,.$$

Alors, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 4z^3 + x\,e^{xz} + y\,e^{yz}\,.$

Ainsi, puisque $f(1,0,1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,1) = 4+e \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : B\big((1,0),\delta\big) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(1,0) = 1$ et pour tout $(x,y) \in B\big((1,0),\delta\big) : f\big(x,y,\phi(x,y)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x^3 + y\,e^{xy} + z\,e^{xz} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 4y^3 + x\,e^{xy} + z\,e^{yz}\,.$$

D'où le plan tangent à la surface $z = \phi(x,y)$ au point $(1,0)$ est

$$\left\langle \nabla f(1,0,1), \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \right\rangle = (4+e)x + 2y + (4+e)z - 2(4+e) = 0\,.$$

$\boxed{\textbf{3.107}}$ Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = x^4 + x^3y^2 + xz + yz + xyz + z^4 - 1\,.$$

Alors, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x + y + xy + 4z^3\,.$

Ainsi, puisque $f(0,0,1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = 4 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : B\big((0,0),\delta\big) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(0,0) = 1$ et pour tout $(x,y) \in B\big((0,0),\delta\big) : f\big(x,y,\phi(x,y)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x^3 + 3x^2y^2 + z + yz \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2x^3y + z + xz\,.$$

D'où le plan tangent à la surface $z = \phi(x,y)$ au point $(0,0)$ est

$$\left\langle \nabla f(0,0,1), \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \right\rangle = x + y + 4z - 4 = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.108}}$ Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \operatorname{Arctg}\left(\frac{xz}{y}\right) + \ln\left(\frac{2+x^2}{1+y^2+z^2}\right) - \frac{\pi}{4} \\ &= \operatorname{Arctg}\left(\frac{xz}{y}\right) + \ln(2+x^2) - \ln(1+y^2+z^2) - \frac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) = \Bigg(&\frac{yz}{y^2+x^2z^2} + \frac{2x}{2+x^2}\,, \\ &-\frac{xz}{y^2+x^2z^2} - \frac{2y}{1+y^2+z^2}\,, \frac{xy}{y^2+x^2z^2} - \frac{2z}{1+y^2+z^2}\Bigg)\,. \end{aligned}$$

Ainsi, en constatant que $f(1,1,1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = -\frac{1}{6} \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : B\left((1,1),\delta\right) \to \mathbb{R}$ telle $\phi(1,1) = 1$ et pour tout $(x,y) \in B\big((1,1),\delta\big) : f\big(x,y,\phi(x,y)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ (car $f \in \mathbf{C}^\infty$). D'où l'équation du plan tangent à la surface $z = \phi(x,y)$ au point $(1,1)$ est

$$\left\langle \nabla f(1,1,1), \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{7}{6}(x-1) - \frac{7}{6}(x-1) - \frac{1}{6}(z-1) = 0$$

ou encore $7x - 7y - z + 1 = 0$.

$\boxed{\mathbf{3.109}}$ Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = x^2 + xz + e^{xyz} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\,y\right) - 3\,.$$

Alors, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x + xy\,e^{xyz}$.

Ainsi, puisque $f(1,1,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0) = 2 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : B\big((1,1),\delta\big) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(1,1) = 0$ et pour tout $(x,y) \in B\big((1,1),\delta\big) : f\big(x,y,\phi(x,y)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ (car $f \in \mathbf{C}^\infty$) et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x + z + yz\, e^{xyz} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz\, e^{xyz} + \frac{\pi}{2}\cos\Big(\frac{\pi}{2}\, y\Big).$$

D'où le plan tangent à la surface $z = \phi(x,y)$ au point $(1,1)$ est

$$\left\langle \nabla f(1,1,0), \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 2(x-1) + 2z = 0 \Leftrightarrow x + z - 1 = 0\,.$$

Ce plan est parallèle à l'axe Oz.

3.110 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = \cos xy + 2\sin xyz + z^5.$$

Alors, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2xy\cos xyz + 5z^4$. Ainsi, puisque $f(\pi,1,1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(\pi,1,1) = 5 - 2\pi \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : B\big((\pi,1),\delta\big) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(\pi,1) = 1$ et pour tout $(x,y) \in B\big((\pi,1),\delta\big)$: $f\big(x,y,\phi(x,y)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ (car $f \in \mathbf{C}^\infty$) et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -y\sin xy + 2yz\cos xyz$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -x\sin xy + 2xz\cos xyz\,.$$

D'où l'équation du plan tangent à la surface $z = \phi(x,y)$ au point $(\pi,1)$ est

$$\left\langle \nabla f(\pi,1,1), \begin{pmatrix} x-\pi \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \right\rangle = -2x - 2\pi y + (5-2\pi)z + 6\pi - 5 = 0\,.$$

3.111 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = \ln xy + 2\, e^{\frac{z}{x}} - x^2 y + x - 2\,.$$

Alors, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{2}{x}\, e^{\frac{z}{x}}$. Ainsi, puisque $f(1,1,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0) = 2 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : B\big((1,1),\delta\big) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(1,1) = 0$ et pour tout $(x,y) \in B\big((1,1),\delta\big) : f\big(x,y,\phi(x,y)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ (car $f \in \mathbf{C}^\infty$) et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{1}{x} - \frac{2z}{x^2}\, e^{\frac{z}{x}} - 2xy + 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{1}{y} - x^2\,.$$

Par conséquent $\nabla\phi(1,1) = (0,0)$. Autrement dit, $(0,0)$ est un point stationnaire de la fonction ϕ.

Nature du point stationnaire. Puisque pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{4z}{x^3}\, e^{\frac{z}{x}} + \frac{2z^2}{x^4}\, e^{\frac{z}{x}} - 2y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) &= -2x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) &= -\frac{1}{y^2}\,,
\end{aligned}$$

on a $r = \frac{3}{2}$, $s = 1$ et $t = \frac{1}{2}$ ou encore $s^2 - rt = \frac{1}{4} > 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ n'admet pas d'extremum local en $(1, 1)$.

$\boxed{\mathbf{3.112}}$ Soit $f : E = \left]-1, +\infty\right[\times \mathbb{R} \times \left]0, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) = -1 + x^2 + yz^5 + \operatorname{Arctg} xyz \\
+ \frac{1}{2}\ln(1+x+z) - \ln 3 - \ln z + \frac{1}{3}\ln(y^2+z^3)\,.
\end{aligned}$$

Alors, pour tout $(x, y, z) \in E$:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 5yz^4 + \frac{xy}{1+x^2y^2z^2} + \frac{1}{2(1+x+z)} - \frac{1}{z} + \frac{z^2}{y^2+z^3}\,.$$

Ainsi, puisque $f(1, 0, 7) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 7) = \frac{1}{18} \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi : B\big((1, 0), \delta\big) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(1, 0) = 7$ et pour tout $(x, y) \in B\big((1, 0), \delta\big)$: $f\big(x, y, \phi(x, y)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x, y, z) \in E$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 2x + \frac{yz}{1+x^2y^2z^2} + \frac{1}{2(1+x+z)}\,, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= z^5 + \frac{xz}{1+x^2y^2z^2} + \frac{2y}{3(y^2+z^3)}\,.
\end{aligned}$$

D'où le plan tangent à la surface $z = \phi(x, y)$ au point $(1, 0)$ est

$$\left\langle \nabla f(1,0,7), \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-7 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{37}{18}\,x + (7^5+7)y + \frac{1}{18}\,z - \frac{22}{9} = 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.113}}$ Pour les besoins de la démonstration, on va supposer que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) > 0$. Le cas $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) < 0$ se traitant de façon analogue.

1) Puisque la fonction f est de classe $\mathbf{C}^1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) > 0$, il existe un nombre $\beta > 0$ (choisi de sorte $B\big((a, b), \beta\big) \subset E$) tel que pour tout $(x, y) \in B\big((a, b), \beta\big)$: $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$. Ainsi, en posant $\alpha = \frac{\beta}{2}$, on obtient que

$$A = [a-\alpha, a+\alpha] \times [b-\alpha, b+\alpha] \subset B\big((a,b),\beta\big)$$

et pour tout $(x, y) \in A$: $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$. Considérons à présent la fonction auxiliaire $g : [b - \alpha, b + \alpha] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(a, t)$. Cette fonction est continue et pour tout $|t-b| < \alpha : g'(t) = \frac{\partial f}{\partial y}\,(a,t) > 0$. Elle est donc strictement croissante sur $[b-\alpha, b+\alpha]$; ce qui entraîne, puisque $g(b) = f(a,b) = 0$, que

$$f(a, b-\alpha) = g(b-\alpha) < 0 \text{ et } f(a, b+\alpha) = g(b+\alpha) > 0\,.$$

Ainsi, il découle de la continuité de la fonction f qu'il existe un nombre $0 < \delta < \alpha$ pour lequel pour tout $|x-a| < \delta$:

$$f(x, b-\alpha) < 0 \text{ et } f(x, b+\alpha) > 0\,.$$

Finalement, soit x_0 un élément de $]a-\delta, a+\delta[$ fixé et $h : [b-\alpha, b+\alpha] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(t) = f(x_0, t)$. Cette fonction est continue et pour tout $|t-b| < \alpha$:

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0, t) > 0\,.$$

Elle est donc strictement croissante sur $[b-\alpha, b+\alpha]$. Comme de plus

$$h(b-\alpha) = f(x_0, b-\alpha) < 0 \text{ et } h(b+\alpha) = f(x_0, b+\alpha) > 0\,,$$

la fonction h s'annule une et une seule fois dans l'intervalle fermé $[b-\alpha, b+\alpha]$. On désigne cet élément de $[b-\alpha, b+\alpha]$ par $\phi(x_0)$. On a ainsi défini une nouvelle fonction $\phi :]a-\delta, a+\delta[\to \mathbb{R}$ qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

- $\forall\, x \in\,]a-\delta, a+\delta[\, : f\big(x, \phi(x)\big) = 0$.
- $\forall\, x \in\,]a-\delta, a+\delta[\, : \big|\phi(x) - b\big| < \alpha$.
- $(x,y) \in\,]a-\delta, a+\delta[\, \times [b-\alpha, b+\alpha]$ et $f(x,y) = 0 \Rightarrow y = \phi(x)$.
- $\phi(a) = b$.

Cette dernière propriété est une conséquence directe de la propriété précédente.

2) Pour commencer, on va démontrer la continuité de la fonction ϕ en a. En effet, il résulte de la démonstration de 1), qu'à chaque $0 < \varepsilon < \beta$, on peut associer un nombre $0 < \delta_\varepsilon < \delta$ tel que pour tout $|x-a| < \delta_\varepsilon : \big|\phi(x) - b\big| < \varepsilon$.

Montrons à présent la continuité de la fonction ϕ. Pour cela, soit c avec $0 < |c-a| < \delta$ et montrons qu'elle est continue en ce point. En effet, puisque la fonction f est de classe $\mathbf{C}^1$ et

$$f\big(c, \phi(c)\big) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}\,\big(c, \phi(c)\big) > 0\,,$$

il existe, d'après les résultats déjà démontrés, un nombre $\zeta > 0$ (choisi de sorte que $]c-\zeta, c+\zeta[\, \subset\,]a-\delta, a+\delta[$) et une fonction $\phi_1 :]c-\zeta, c+\zeta[\to \mathbb{R}$ continue en c tels que pour tout $|x-c| < \zeta$:

$$f\big(x, \phi_1(x)\big) = 0\,,\ \ \phi_1(c) = \phi(c) \text{ et } \big|\phi_1(x) - \phi_1(c)\big| < \big(\alpha - \big|\phi(c) - b\big|\big)\,.$$

Ainsi, en constatant que pour tout $|x-c| < \zeta$:

$$\big|\phi_1(x) - b\big| \le \big|\phi_1(x) - \phi_1(c)\big| + \big|\phi(c) - b\big| < \alpha\,,$$

on peut affirmer, sans autre, que sur $]c-\zeta, c+\zeta[\, : \phi_1 = \phi$. D'où, la continuité de la fonction ϕ en c.

Pour finir, montrons que ϕ est de classe $\mathbf{C}^1$. Pour cela, soit $d \in]a-\delta, a+\delta[$. Puisque la fonction f est de classe $\mathbf{C}^1$, on sait qu'à chaque élément $x \neq d$ de $]a-\delta, a+\delta[$, on peut associer $0 < \theta_1,\, \theta_2 < 1$ de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}
0 &= f\big(x, \phi(x)\big) - f\big(d, \phi(d)\big)\\
&= \Big(f\big(x, \phi(x)\big) - f\big(x, \phi(d)\big)\Big) + \Big(f\big(x, \phi(d)\big) - f\big(d, \phi(d)\big)\Big)\\
&= \frac{\partial f}{\partial y}\,\Big(x,\, \phi(d) + \theta_1\big(\phi(x) - \phi(d)\big)\Big)\,\big(\phi(x) - \phi(d)\big)\\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial x}\,\big(d + \theta_2(x-d),\, \phi(d)\big)(x-d)\ ;
\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'écrire, car $\frac{\partial f}{\partial y}\,\Big(x, \phi(d) + \theta_1\big(\phi(x) - \phi(d)\big)\Big) > 0$, que

$$\frac{\phi(x) - \phi(d)}{x-d} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\,\big(d + \theta_2(x-d),\, \phi(d)\big)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\,\Big(x, \phi(d) + \theta_1\big(\phi(x) - \phi(d)\big)\Big)}\,.$$

Ainsi, la fonction f étant de classe $\mathbf{C}^1$ et ϕ continue, on obtient, par passage à la limite, que

$$\phi'(d) = \lim_{x \to d} \frac{\phi(x) - \phi(d)}{x-d} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\,\big(d, \phi(d)\big)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\,\big(d, \phi(d)\big)}\,.$$

Remarque : Il découle immédiatement de cette dernière égalité que si $f \in \mathbf{C}^p$ alors $\phi \in \mathbf{C}^p$.

3) Pour commencer, montrons que $\varphi = \phi$ sur $[a, a+\delta_1[$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $\big\{t \in [0, \delta_1[\ :\ \varphi(a+t) \neq \phi(a+t)\big\} \neq \emptyset$ et désignons par σ l'infimum de cet ensemble. Alors, $0 \leq \sigma < \delta_1$. De plus, puisque les deux fonctions φ et ϕ sont continues en $a+\sigma$, on a

$$\varphi(a+\sigma) = \lim_{n \to +\infty} \varphi\bigg(a + \sigma\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\bigg) = \lim_{n \to +\infty} \phi\bigg(a + \sigma\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\bigg) = \phi(a+\sigma)\ ;$$

ce qui entraîne, entre autre, que $\big|\varphi(a+\sigma) - b\big| = \big|\phi(a+\sigma) - b\big| < \alpha\,.$

Ainsi, en utilisant de nouveau la continuité de la fonction φ, il existe un nombre $\sigma < \mu < \delta_1$ tel que pour tout $\sigma \leq s \leq \mu : \big|\varphi(a+s) - b\big| < \alpha$. Par conséquent, en utilisant la deuxième propriété que vérifie φ et la troisième propriété que vérifie ϕ, on a que pour tout $s \in [\sigma, \mu] : \varphi(a+s) = \phi(a+s)$; ce qui est impossible d'après la définition de σ. D'où contradiction.

De façon analogue, on démontre que $\varphi = \phi$ sur $]a - \delta_1, a]$.

4) Si la fonction φ n'est pas considérée continue, on n'a pas forcément l'unicité locale. Comme contre-exemple, il suffit de prendre la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défine par $f(x,y) = -\sin xy$ avec $(a,b) = (1, \pi)$. Alors,

$$f(1,\pi) = 0\,,\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(1,\pi) = 1 > 0 \text{ et } \phi(x) = \frac{\pi}{x}\,.$$

La fonction non continue $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{x} & \text{si } x \neq 1 \\ \pi & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

satisfait elle aussi les deux propriétés demandées, à savoir : $\varphi(1) = \pi$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f\big(x, \varphi(x)\big) = 0$. Par contre, si $x \neq 1$: $\varphi(x) \neq \phi(x)$.

$\boxed{\textbf{3.114}}$ Soient $f_1,\, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f_1(x,y,z) = x - y^3 + z + 8 \text{ et } f_2(x,y,z) = x^3 + y^4 - z^5 - 16$$

Alors, puisque $f_1(0,2,0) = f_2(0,2,0) = 0$ et

$$\frac{D(f_1,f_2)}{D(y,z)}\,(0,2,0) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0,2,0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(0,2,0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(0,2,0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(0,2,0) \end{pmatrix} = -32 \neq 0\,,$$

le théorème des fonctions implicites généralisé nous permet d'affirmer qu'il existe localement deux uniques fonctions continues $\phi_1,\, \phi_2 : \left]-\delta, \delta\right[\to \mathbb{R}$ telles que $\phi_1(0) = 2$, $\phi_2(0) = 0$ et pour tout $|x| < \delta$:

$$f_1\big(x,\, \phi_1(x),\, \phi_2(x)\big) = x - \phi_1^3(x) + \phi_2(x) + 8 = 0$$

et

$$f_2\big(x,\, \phi_1(x),\, \phi_2(x)\big) = x^3 + \phi_1^4(x) - \phi_2^5(x) - 16 = 0\,.$$

De plus, $\phi_1,\, \phi_2 \in \mathbf{C}^\infty$. Ainsi, en dérivant ces deux expressions par rapport à x, on obtient que pour tout $|x| < \delta$:

$$1 - 3\phi_1'(x)\phi_1^2(x) + \phi_2'(x) = 0 \text{ et } 3x^2 + 4\phi_1'(x)\phi_1^3(x) - 5\phi_2'(x)\phi_2^4(x) = 0\,;$$

ce qui entraîne que $\phi_1'(0) = 0$ et $\phi_2'(0) = -1$. Par conséquent l'équation de la tangente à la courbe $y = \phi_1(x)$ en 0 est $y = 2$ tandis que celle de la tangente à la courbe $y = \phi_2(x)$ en ce même point est $y = -x$.

$\boxed{\textbf{3.115}}$ Soit $f_1, f_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f_1(x,y,u,v) = x - u^2 + v^2 \quad \text{et} \quad f_2(x,y,u,v) = y - uv + 1\,.$$

Alors, puisque $f_1(0,0,1,1) = f_1(0,0,1,1) = 0$ et

$$\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}(0,0,1,1) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u}\,(0,0,1,1) & \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\,(0,0,1,1) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u}\,(0,0,1,1) & \dfrac{\partial f_2}{\partial v}\,(0,0,1,1) \end{pmatrix} = 4 \neq 0\,,$$

le théorème des fonctions implicites généralisé nous permet d'affirmer qu'il existe localement deux uniques fonctions continues $\phi_1,\, \phi_2 : B\big((0,0),\delta\big) \to \mathbb{R}$ telles que $\phi_1(0,0) = \phi_2(0,0) = 1$ et pour tout $(x,y) \in B\big((0,0),\delta\big)$:

$$f_1\big(x,\, y,\, \phi_1(x,y),\, \phi_2(x,y)\big) = x - \phi_1^2(x,y) + \phi_2^2(x,y) = 0$$

et

$$f_2\big(x,\, y,\, \phi_1(x,y),\, \phi_2(x,y)\big) = y - \phi_1(x,y)\phi_2(x,y) + 1 = 0\,.$$

De plus, $\phi_1,\, \phi_2 \in \mathbf{C}^\infty$. Ainsi, en dérivant ces deux expressions par rapport à x et par rapport à y, on obtient que pour tout $(x,y) \in B\big((0,0),\delta\big)$:

$$\begin{cases} 1 - 2\phi_1(x,y)\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x}\,(x,y) + 2\phi_2(x,y)\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x}\,(x,y) = 0 \\ -\phi_2(x,y)\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x}\,(x,y) - \phi_1(x,y)\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x}\,(x,y) = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -2\phi_1(x,y)\dfrac{\partial\phi_1}{\partial y}\,(x,y) + 2\phi_2(x,y)\dfrac{\partial\phi_2}{\partial y}\,(x,y) = 0 \\ 1 - \phi_2(x,y)\dfrac{\partial\phi_1}{\partial y}\,(x,y) - \phi_1(x,y)\dfrac{\partial\phi_2}{\partial y}\,(x,y) = 0\,; \end{cases}$$

ce qui donne que

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\,(0,0) = -\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\,(0,0) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\phi_1}{\partial y}\,(0,0) = \frac{\partial\phi_2}{\partial y}\,(0,0) = \frac{1}{2}\,.$$

Par conséquent l'équation du plan tangent à la surface $u = \phi_1(x,y)$ au point $(0,0)$ est $x+2y-4u+4 = 0$ tandis celle du plan tangent à la surface $v = \phi_2(x,y)$ en ce même point est $x - 2y + 4v - 4 = 0$.

$\boxed{\textbf{3.116}}$ Dans le seul but de simplifier les notations, on pose

$$(\mathbf{y},\mathbf{x}) = (y_1,\ldots,y_n,x_1,\ldots,x_n)\,.$$

Considérons à présent les n fonctions auxiliaires $g_1,\ldots,g_n : \mathbb{R}^n \times E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ définies par $g_k(\mathbf{y},\mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x}) - y_k$. Alors, puisque pour tout entier $k = 1,\ldots,n$: $g_k(\mathbf{b},\mathbf{a}) = 0$ et

$$\frac{D(g_1,\ldots,g_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}\,(\mathbf{b},\mathbf{a}) = \frac{D(f_1,\ldots,f_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}\,(\mathbf{a}) \neq 0\,,$$

le théorème des fonctions implicites généralisé nous permet d'affirmer qu'il existe localement n uniques fonctions continues $\phi_1,\ldots,\phi_n : B(\mathbf{b},\delta) \to \mathbb{R}$ telles que $\phi_1(\mathbf{b}) = a_1,\ldots,\phi_n(\mathbf{b}) = a_n$ et pour tout $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n) \in B(\mathbf{b},\delta)$ et tout entier $k = 1,\ldots,n$:

$$g_k\big(\mathbf{y},\, \phi_1(\mathbf{y}),\, \ldots,\, \phi_n(\mathbf{y})\big) = 0 \text{ ou encore } f_k\big(\phi_1(\mathbf{y}),\, \ldots,\, \phi_n(\mathbf{y})\big) = y_k\,.$$

$\boxed{\textbf{3.117}}$ Pour commencer, montrons que pour tout $(x,y),(u,v) \in D$:

$$\big|\big(f(x,y) - x\big) - \big(f(u,v) - u\big)\big| \le \frac{1}{3}\,\big(|x-u| + |y-v|\big)$$

et

$$\big|\big(g(x,y) - y\big) - \big(g(u,v) - v\big)\big| \le \frac{1}{3}\,\big(|x-u| + |y-v|\big)\,.$$

En effet, on sait, d'après le théorème des accroissement finis, qu'il existe deux nombres $0 < \theta_1,\, \theta_2 < 1$ pour lesquels :

$$\begin{aligned}
&\big(f(x,y)-x\big)-\big(f(u,v)-u\big)\\
&\qquad\qquad = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\big(u+\theta_1(x-u),\, v+\theta_1(y-v)\big)-1\right)(x-u)\\
&\qquad\qquad + \frac{\partial f}{\partial y}\big(u+\theta_1(x-u),\, v+\theta_1(y-v)\big)(y-v)\,,\\
&\big(g(x,y)-y\big)-\big(g(u,v)-v\big)\\
&\qquad\qquad = \frac{\partial g}{\partial x}\big(u+\theta_2(x-u),\, v+\theta_2(y-v)\big)(x-u)\\
&\qquad\qquad + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\big(u+\theta_2(x-u),\, v+\theta_2(y-v)\big)-1\right)(y-v)\,.
\end{aligned}$$

De plus, pour $k=1,2$: $\big(u+\theta_k(x-u),\, v+\theta_k(y-v)\big)\in D$.

1a) Montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $(x_n,y_n)\in D$. Pour cela, il suffit de constater que $(x_0,y_0)=(0,0)\in D$ et $(x_n,y_n)\in D \Rightarrow (x_{n+1},y_{n+1})\in D$. En effet,

$$|x_{n+1}| = \big|x_n - f(x_n,y_n)+\alpha\big| \le \big|x_n-f(x_n,y_n)\big|+|\alpha| \le \frac{1}{3}\big(|x_n|+|y_n|\big)+|\alpha|\le\delta$$

et

$$|y_{n+1}| = \big|y_n - g(x_n,y_n)+\beta\big| \le \big|y_n-g(x_n,y_n)\big|+|\beta| \le \frac{1}{3}\big(|x_n|+|y_n|\big)+|\beta|\le\delta\,.$$

1b) Maintenant, montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la propriété P_n :

$$|x_{n+1}-x_n|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n M \text{ et } |y_{n+1}-y_n|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n M$$

où $M=\max\big\{|\alpha|,|\beta|\big\}$ est vraie. P_0 est vraie et vérifions que pour tout entier $n\ge 0 : P_n\Rightarrow P_{n+1}$. En effet,

$$\begin{aligned}
|x_{n+2}-x_{n+1}| &= \Big|\big(f(x_{n+1},y_{n+1})-x_{n+1}\big)-\big(f(x_n,y_n)-x_n\big)\Big|\\
&\le \frac{1}{3}\big(|x_{n+1}-x_n|+|y_{n+1}-y_n|\big)\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}M
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|y_{n+2}-y_{n+1}| &= \Big|\big(g(x_{n+1},y_{n+1})-y_{n+1}\big)-\big(g(x_n,y_n)-y_n\big)\Big|\\
&\le \frac{1}{3}\big(|x_{n+1}-x_n|+|y_{n+1}-y_n|\big)\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}M\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, le raisonnement par récurrence nous permet de conclure que P_n est vraie pour tout entier $n\ge 0$.

1c) Finalement, puisque pour tout couple d'entiers $m > n \geq 0$:

$$|x_m - x_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} (x_k - x_{k-1})\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |x_k - x_{k-1}| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} M \\ \leq 3M \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

et

$$|y_m - y_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} (y_k - y_{k-1})\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |y_k - y_{k-1}| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} M \\ \leq 3M \left(\frac{2}{3}\right)^{n},$$

les deux suites $\big(x_n\big)$ et $\big(y_n\big)$ sont de Cauchy donc convergentes. Posons

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \text{ et } \lim_{n\to+\infty} y_n = b\,.$$

Alors, $(a, b) \in D$ car D est un fermé et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(x_n, y_n) \in D$; ce qui entraîne, les deux fonctions f et g étant continues, que

$$a = a - f(a, b) + \alpha \text{ et } b = b - g(a, b) + \beta \text{ ou encore } f(a, b) = \alpha \text{ et } g(a, b) = \beta.$$

1d) Pour finir, démontrons l'unicité. Pour cela, supposons que pour $(c, d) \in D$ et $f(c, d) = \alpha$ et $g(c, d) = \beta$. Alors,

$$|a - c| = \big|\big(f(a, b) - a\big) - \big(f(c, d) - c\big)\big| \leq \frac{1}{3}\big(|a - c| + |b - d|\big)$$

et

$$|b - d| = \big|\big(g(a, b) - b\big) - \big(g(c, d) - d\big)\big| \leq \frac{1}{3}\big(|a - c| + |b - d|\big)\ ;$$

ce qui entraîne que $|a-c|+|b-d| \leq \frac{2}{3}\big(|a-c|+|b-d|\big)$ ou encore $|a-c|+|b-d| = 0 \Rightarrow a = c$ et $b = d$. D'où l'unicité.

2) Posons $f(x, y) = x + y^5$, $g(x, y) = x^7 + y$, $\alpha = 0{,}01$, $\beta = 0{,}001$ et $\delta = \dfrac{1}{3}$.

Alors, pour tout $(x, y) \in D = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \times \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$:

$$f(0, 0) = g(0, 0) = 0\,,$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 1\right| = 0\,, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| = 5y^4 \leq \frac{1}{3}\,,$$
$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right| = 7x^6 \leq \frac{1}{3}\,, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) - 1\right| = 0\,,$$
$$\alpha = 0{,}01 \leq \frac{1}{9} \text{ et } \beta = 0{,}001 \leq \frac{1}{9}\,.$$

Ainsi, en utilisant 1), on sait qu'il existe, dans D, une et une seule solution du système proposé.

$\boxed{\textbf{3.118}}$ 1) Puisque pour tout $(x,y) \in I_1 \times I_2$:

$$\frac{\partial \chi}{\partial y}(x,y) = \int_a^x \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)\,dt + N(a,y) = \int_a^x \frac{\partial N}{\partial x}(t,y)\,dt + N(a,y)$$
$$= N(t,y)\Big|_a^x + N(a,y) = N(x,y)\,,$$

on a $\frac{\partial \chi}{\partial y}(a,b) = N(a,b) \neq 0$. Comme de plus $\chi(a,b) = 0$ et $\chi \in \mathbf{C}^1$, on sait, d'après l'exercice 3.98, qu'il existe localement une unique fonction $\phi :]a-\delta, a+\delta[\to I_2$ de classe $\mathbf{C}^1$ telle que $\phi(a) = b$ et pour tout $|x-a| < \delta$: $\chi\big(x,\phi(x)\big) = 0$.

2) Soit $y : I \to I_2$ une fonction de classe $\mathbf{C}^1$ où I est un intervalle ouvert contenant a et contenu dans I_1 et considérons la fonction auxiliaire $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \chi\big(x,y(x)\big)$. Alors, pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \frac{\partial \chi}{\partial x}\big(x,y(x)\big) + \frac{\partial \chi}{\partial y}\big(x,y(x)\big)y'(x) = M\big(x,y(x)\big) + N\big(x,y(x)\big)y'(x)\;;$$

ce qui entraîne, si y est une solution de la forme différentielle exacte qui satisfait la condition initiale $y(a) = b$, que pour tout $x \in I$: $\chi\big(x,y(x)\big) = 0$ ou encore, d'après 1), que $y(x) = \phi(x)$ sur $]a-\delta,a+\delta[\, \cap I$. D'où l'unicité locale.

$\boxed{\textbf{3.119}}$ La forme différentielle étant exacte et $N(1,1) = 1 \neq 0$, on sait qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \int_1^x y(y-2t)\,dt - \int_1^y (1-2t)\,dt = xy(y-x) = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est $y(x) = x$ avec $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{3.120}}$ La forme différentielle étant exacte et $N(1,1) = 1 \neq 0$, on sait qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \int_1^x \left(\frac{1}{t^2 y} + \frac{\ln t}{t}\right) dt + \int_1^y \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{xy} + \frac{1}{2}\ln^2 x + 1 = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \frac{2}{x(2+\ln^2 x)} \quad \text{avec } x > 0\,.$$

$\boxed{\textbf{3.121}}$ La forme différentielle étant exacte et $N(0,0) = 1 \neq 0$, on sait qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(0) = 0$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \int_0^x \big(2t + e^t y\big)\,dt + \int_0^y (1-2t)\,dt = -y^2 + e^x y + x^2 = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \frac{e^x - \sqrt{e^{2x} + 4x^2}}{2} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}\,.$$

$\boxed{\textbf{3.122}}$ La forme différentielle étant exacte et $N(1,1) = 2 \neq 0$, on sait qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \int_1^x ty^2\,dt + \int_1^y (1+t)\,dt = \frac{x^2y^2}{2} + y - \frac{3}{2} = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \frac{-1+\sqrt{1+3x^2}}{x^2} \quad \text{avec } x > 0\,.$$

$\boxed{\textbf{3.123}}$ La forme différentielle étant exacte et $N(1,1) = 6 \neq 0$, on sait qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \int_1^x y^4\,dt + \int_1^y (2t+4t^3)\,dt = xy^4 + y^2 - 2 = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+8x}}{2x}} \quad \text{avec } x > 0\,.$$

$\boxed{\textbf{3.124}}$ La forme différentielle étant exacte et $N(1,1) = -11 \neq 0$, on sait qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \int_1^x (3t^2-6y)y\,dt + \int_1^y (1-12\,t)\,dt = -6xy^2 + x^3y + 5 = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \frac{x^3+\sqrt{x^6+120\,x}}{12\,x} \quad \text{avec } x > 0\,.$$

$\boxed{\textbf{3.125}}$ La forme différentielle étant exacte et $N(0,1) = 3 \neq 0$, on sait qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = y^6\int_0^x dt + \int_1^y 3t^2\,dt = xy^6 + y^3 - 1 = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2x}} & \text{si } x > -\dfrac{1}{4} \text{ et } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{3.126}}$ L'équation $x^2(1-3y) - y' = 0$ peut s'écrire $\frac{1}{1-3y(x)}y'(x) = x^2$ qui est une équation à variables séparées dont l'unique solution qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$ est

$$y(x) = \frac{2 + e^{x^3}}{3\, e^{x^3}} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.127}}$ *Première méthode.* La forme différentielle étant exacte et $N(1,1) = 2 \neq 0$, on sait qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \int_1^x (1 + t^2 y^2)\, dt + 2\int_1^y t\, dt = x - 2 + \frac{x^3+2}{3}\, y^2 = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \sqrt{\frac{3(2-x)}{2+x^3}}\,, \quad -\sqrt[3]{2} < x < 2\,.$$

Deuxième méthode. En faisant le changement de variable $z = y^2$, la forme différentielle se transforme en l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$z'(x) + \frac{3x^2}{2+x^3}\, z(x) = -\frac{3}{2+x^3}$$

dont la solution qui satisfait la condition initiale $z(1) = 1$ est

$$z(x) = \frac{3(2-x)}{2+x^3} \quad \text{avec } -\sqrt[3]{2} < x < 2\,.$$

D'où

$$y(x) = \sqrt{\frac{3(2-x)}{2+x^3}} \quad \text{avec } -\sqrt[3]{2} < x < 2\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.128}}$ *Première méthode.* La forme différentielle étant exacte et $N(1,1) = 4 \neq 0$, on sait qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = y^3 \int_1^x (1 + t^2)\, dt + 4\int_1^y t^2\, dt = y^3\left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{4}{3} = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{4}{x(3+x^2)}} \quad \text{avec } x > 0\,.$$

Deuxième méthode. En faisant le changement de variable $z = y^3$, la forme différentielle se transforme en l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$z'(x) + \frac{3(1+x^2)}{3x+x^3}\, z(x) = 0$$

dont la solution qui satisfait la condition initiale $z(1) = 1$ est

$$z(x) = \frac{4}{x(3+x^2)} \quad \text{avec } x > 0\,.$$

D'où

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{4}{x(3+x^2)}} \quad \text{avec } x > 0\,.$$

$\boxed{\textbf{3.129}}$ En constatant que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$2 - \cos^2 xy = 1 + \sin^2 xy \neq 0\,,$$

l'équation proposée est équivalente à la forme différentielle exacte

$$xy^2 + (1 + x^2 y)y' = 0\,.$$

Ainsi, puisque $N(1, 1) = 2 \neq 0$, on sait qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x, y) = \int_1^x ty^2\,dt + \int_1^y (1 + t)\,dt = \frac{x^2y^2}{2} + y - \frac{3}{2} = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 3x^2}}{x^2} \quad \text{avec } x > 0\,.$$

$\boxed{\textbf{3.130}}$ Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $x^2 + y^2 + 1 \neq 0$, l'équation proposée est équivalente à la forme différentielle $x + yy' = 0$ dont la solution qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$ est

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2}\,, \quad |x| < 1.$$

$\boxed{\textbf{3.131}}$ La forme différentielle étant exacte et $N(0, 0) = 1 \neq 0$, on sait qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(0) = 0$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x, y) = \int_0^x \left(2t\,e^y + e^t\right) dt + \int_0^y e^t\,dt = (1 + x^2)\,e^y + e^x - 2 = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \ln \frac{2 - e^x}{1 + x^2} \quad \text{avec } x < \ln 2\,.$$

$\boxed{\textbf{3.132}}$ La forme différentielle proposée peut aussi s'écrire

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 y(x)}{1 + \operatorname{tg} y(x)}\,y'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

qui est une équation différentiable à variables séparées dont la solution qui satisfait la condition initiale $y(0) = 0$ est $y(x) = \operatorname{Arctg} x^2$ avec $x \in \mathbb{R}$.

3.133 En faisant le changement de variable $z(x) = y^2(x)$, la forme différentielle proposée se transforme en l'équation différentielle linéaire du premier ordre $z'(x) - 2\operatorname{tg} x\, z(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ dont la solution qui satisfait la condition initiale $z(0) = 1$ est

$$z(x) = \frac{1+x}{\cos^2 x}\,.$$

D'où $y(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{\cos x}$ avec $-1 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

3.134 La forme différentielle proposée peut aussi s'écrire

$$\frac{1}{2\sqrt{y(x)}}\, y'(x) = -x\, e^x$$

qui est une équation différentiable à variables séparées dont la solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$ est

$$y(x) = \big((1-x)\, e^x + 1\big)^2 \quad \text{avec } x < a$$

où $a > 1$ est l'unique racine de l'équation $(1-x)\, e^x + 1 = 0$.

3.135 La forme différentielle proposée peut aussi s'écrire

$$\frac{2y(x)}{1+y^2(x)}\, y'(x) = -\frac{3}{x}$$

qui est une équation différentiable à variables séparées dont la solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = 2$ est

$$y(x) = \sqrt{\frac{5}{x^3} - 1} \quad \text{avec } 0 < x < \sqrt[3]{5}\,.$$

3.136 La forme différentielle proposée peut aussi s'écrire

$$\frac{2y(x)}{1+y^2(x)}\, y'(x) = -\operatorname{tg} x$$

qui est une équation différentiable à variables séparées dont la solution qui satisfait la condition initiale $y(0) = 2$ est

$$y(x) = \sqrt{5\cos x - 1} \quad \text{avec } |x| < \operatorname{Arccos}\frac{1}{5}\,.$$

3.137 En faisant le changement de variable $y(x) = xz(x)$ avec $x > 0$, la forme différentielle proposée se transforme en l'équation à variables séparées

$$\frac{1}{\operatorname{tg} z(x)}\, z'(x) = -2$$

dont la solution qui satisfait la condition initiale $z(1) = \frac{\pi}{6}$ est

$$z(x) = \operatorname{Arcsin}\frac{e^{-2(x-1)}}{2}\,.$$

D'où $y(x) = x \operatorname{Arcsin}\dfrac{e^{-2(x-1)}}{2}$ avec $x > 1 - \dfrac{\ln 2}{2}$.

$\boxed{\textbf{3.138}}$ En remarquant que les deux expressions $x-3y$ et $3x-y$ sont homogènes de degré 1, on obtient, en faisant le changement de variable $y(x) = xz(x)$ avec $x > 0$, que la forme différentielle proposée se transforme en l'équation à variables séparées

$$\frac{3 - z(x)}{1 - z^2(x)}\, z'(x) = -\frac{1}{x}$$

dont la solution qui satisfait la condition initiale $z(1) = 2$ est

$$z(x) = \frac{9 - 2x - 3\sqrt{9 - 8x}}{2x}\,.$$

D'où $y(x) = \dfrac{9 - 2x - 3\sqrt{9 - 8x}}{2}$ avec $x < \dfrac{9}{8}\,.$

$\boxed{\textbf{3.139}}$ En remarquant que les deux expressions $x^2 + y^2$ et xy sont homogènes de degré 2, on obtient, en faisant le changement de variable $y(x) = xz(x)$ avec $x > 0$, que la forme différentielle proposée se transforme en l'équation à variables séparées

$$\frac{z(x)}{1 + 2z^2(x)}\, z'(x) = -\frac{1}{x}$$

dont la solution qui satisfait la condition initiale $z(1) = 1$ est

$$z(x) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x^4} - 1\right)}\,.$$

D'où $y(x) = \dfrac{\sqrt{3 - x^4}}{\sqrt{2}\,x}$ avec $0 < x < \sqrt[4]{3}$.

$\boxed{\textbf{3.140}}$ En remarquant que les deux expressions $x^2 + y^2$ et x^2 sont homogènes de degré 2, on obtient, en faisant le changement de variable $y(x) = xz(x)$ avec $x > 0$, que la forme différentielle proposée se transforme en l'équation à variables séparées

$$\frac{1}{1 + z(x) + z^2(x)}\, z'(x) = -\frac{1}{x}$$

dont la solution qui satisfait la condition initiale $z(1) = 0$ est

$$z(x) = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3}\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right).$$

D'où

$$y(x) = \frac{x}{2}\left(-1 + \sqrt{3}\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right) \quad \text{avec } e^{-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}} < x < e^{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}\,.$$

$\boxed{\textbf{3.141}}$ En remarquant que les deux expressions x^2+y^2 et $2xy$ sont homogènes de degré 2, on obtient, en faisant le changement de variable $y(x) = xz(x)$ avec $x > 0$, que la forme différentielle proposée se transforme en l'équation à variables séparées

$$\frac{2z(x)}{z^2(x)-1}\,z'(x) = \frac{1}{x}$$

dont la solution qui satisfait la condition initiale $z(1) = 2$ est $z(x) = \sqrt{1+3x}\,$. D'où $y(x) = x\sqrt{1+3x}$ avec $x > 0$.

$\boxed{\textbf{3.142}}$ En remarquant que les deux expressions xy^2-y^3 et xy^2 sont homogènes de degré 3, on obtient, en faisant le changement de variable $y(x) = xz(x)$ avec $x > 0$, que la forme différentielle proposée se transforme en l'équation à variables séparées

$$z'(x) = -\frac{1}{x}$$

dont la solution qui satisfait la condition initiale $z(1) = 0$ est $z(x) = -\ln x\,$. D'où $y(x) = -x\ln x$ avec $x > 0$.

$\boxed{\textbf{3.143}}$ Puisque la forme différentielle peut aussi s'écrire

$$\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x} - \sin\frac{y}{x}\,y' = 0$$

et que $\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}$ e t $-\sin\frac{y}{x}$ sont homogèmes de degré 0, elle se transforme, en faisant le changement de variable $y(x) = xz(x)$ avec $x > 0$, en l'équation à variables séparées

$$\operatorname{tg} z(x)z'(x) = \frac{1}{x}$$

dont la solution qui satisfait la condition initiale $z(1) = \frac{\pi}{4}$ est

$$z(x) = \operatorname{Arccos}\frac{1}{\sqrt{2}x}\,.$$

D'où $y(x) = x\operatorname{Arccos}\dfrac{1}{\sqrt{2}x}$ avec $x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,$.

$\boxed{\textbf{3.144}}$ En remarquant que les deux expressions $y+\sqrt{x^2+y^2}$ et $-x$ sont homogènes de degré 1, on obtient, en faisant le changement de variable $y(x) = xz(x)$ avec $x > 0$, que la forme différentielle proposée se transforme en l'équation à variables séparées

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2(x)}}\,z'(x) = \frac{1}{x}$$

dont la solution qui satisfait la condition initiale $z(1) = 0$ est $z(x) = \frac{x^2-1}{2x}\,$.

D'où $y(x) = \dfrac{x^2-1}{2}$ avec $x > 0\,$.

3.145 Puisque $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{N(x,y)} = -1$,

la fonction $\mu(x,y) = \widehat{\mu}(x) = e^x$ est un facteur intégrant de la forme différentielle proposée ; ce qui entraîne, $N(0,2) = 6 \neq 0$, qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(0) = 2$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \int_0^x \left(y^2\, e^t + 4y\, e^{2t}\right) dt + 2\int_2^y (t+1)\, dt = e^x y^2 + 2\, e^{2x} y - 8 = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = -e^x + \sqrt{e^{2x} + 8\, e^{-x}} \quad \text{avec } x > 0\,.$$

3.146 Le problème proposé revient à minimiser la fonction $f(x,y) = \frac{x-y+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ sous la condition $g(x,y) = 2x^2+y^2+2y-1 = 0$. Un tel minimum existe car f est continue et un compact (l'ellipse). Désignons par (a,b) un point de l'ellipse où le minimum est atteint. Puisque $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} + 4\lambda a = 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + 2\lambda(b+1) = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow b + 1 = -2a\,.$$

Ainsi, de $g(a,-1-2a) = 0$, on déduit que $a^2 = \frac{1}{3}$. Par conséquent la distance minimale cherchée est $\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

3.147 Puisque $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{N(x,y)} = -\dfrac{1}{x}$,

la fonction $\mu(x,y) = \widehat{\mu}(x) = x$ est un facteur intégrant de la forme différentielle proposée ; ce qui entraîne, $N(1,1) = 1 \neq 0$, qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \int_1^x (1+ty^2)\, dt + \int_1^y t\, dt = x + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{3}{2} = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \frac{\sqrt{3-2x}}{x} \quad \text{avec } 0 < x < \frac{3}{2}\,.$$

3.148 Puisque $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{N(x,y)} = \dfrac{2}{x}$,

la fonction $\mu(x,y) = \widehat{\mu}(x) = \frac{1}{x^2}$ est un facteur intégrant de la forme différentielle proposée ; ce qui entraîne, $N(1,1) = 2 \neq 0$, qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = -\int_1^x \frac{y}{t^2}\,dt + \int_1^y (1+t)\,dt = \frac{y^2}{2} + \frac{y}{x} - \frac{3}{2} = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(-1 + \sqrt{1+3x^2}\right) \quad \text{avec } x > 0\,.$$

3.149 Puisque $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{N(x,y)} = -\dfrac{1}{x}$,

la fonction $\mu(x,y) = \widehat{\mu}(x) = x$ est un facteur intégrant de la forme différentielle proposée ; ce qui entraîne, $N(1,1) = 1 \neq 0$, qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \int_1^x (t^2y^3 - t)\,dt + \int_1^y t^2\,dt = \frac{x^3y^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{3x^2-1}{2}} \quad \text{avec } x > \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

3.150 Puisque $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{N(x,y)} = \dfrac{3}{x}$,

la fonction $\mu(x,y) = \widehat{\mu}(x) = \frac{1}{x^3}$ est un facteur intégrant de la forme différentielle proposée ; ce qui entraîne, $N(2,2) = 12 \neq 0$, qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(2) = 2$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \int_2^x \left(t + \frac{y^2}{t^3}\right)dt + \frac{3}{4}\int_2^y t\,dt = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)y^2 - \frac{7}{2} = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = x\sqrt{\frac{7-x^2}{x^2-1}} \quad \text{avec } 1 < x < \sqrt{7}\,.$$

3.151 Puisque $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{N(x,y)} = -\dfrac{1}{x}$,
la fonction $\mu(x,y) = \widehat{\mu}(x) = x$ est un facteur intégrant de la forme différentielle proposée ; ce qui entraîne, $N(1,1) = 1 \neq 0$, qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \int_1^x \big(t^3 + t(y^2+1)\big)\,dt + \int_1^y t\,dt = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}(y^2+1) - \frac{5}{4} = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{5 - x^4 - 2x^2}{2}} \quad \text{avec } 0 < x < \sqrt{-1+\sqrt{6}}\,.$$

3.152 Puisque $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{N(x,y)} = \dfrac{3}{x}$,
la fonction $\mu(x,y) = \widehat{\mu}(x) = \frac{1}{x^3}$ est un facteur intégrant de la forme différentielle proposée ; ce qui entraîne, $N(1,1) = 1 \neq 0$, qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = -\int_1^x \frac{y}{t^2}\,dt + \int_1^y dt = \frac{y}{x} - 1 = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est $y(x) = x$ avec $x > 0$.

Remarque : Ici, on peut diviser les deux membres de cette forme différentielle par x^2 pour obtenir une équation différentielle linéaire de premier ordre.

3.153 Puisque $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{N(x,y)} = -1$,
la fonction $\mu(x,y) = \widehat{\mu}(x) = e^x$ est un facteur intégrant de la forme différentielle proposée ; ce qui entraîne, $N(0,0) = 1 \neq 0$, qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(0) = 0$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \int_0^x \big(t^2 + (y+2)t + 2y\big)\,e^t\,dt + \int_0^y dt = x^2\,e^x + (x+1)\,e^x y = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = -\frac{x^2}{x+1} \quad \text{avec } x > -1\,.$$

3.154 Puisque $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{N(x,y)} = -\dfrac{2x}{1+x^2}$,
la fonction $\mu(x,y) = \widehat{\mu}(x) = 1 + x^2$ est un facteur intégrant de la forme différentielle proposée ; ce qui entraîne, $N(1,\pi) = -2 \neq 0$, qu'elle admet une

solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = \pi$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\begin{aligned}\chi(x,y) &= \int_1^x 4t(1+t^2)\sin ty + y\big(1+t^2\big)^2\cos ty\,dt + 4\int_\pi^y \cos t\,dt\\ &= \int_1^x 4t(1+t^2)\sin ty\,dt\\ &\quad + \big(1+t^2\big)^2\sin ty\Big|_1^x - \int_1^x 4t(1+t^2)\sin ty\,dt + 4\sin t\Big|_\pi^y\\ &= \big(1+x^2\big)^2\sin xy = 0\,,\end{aligned}$$

on obtient finalement que la solution cherchée est $y(x) = \dfrac{\pi}{x}$ avec $x > 0$.

3.155 Puisque $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{N(x,y)} = 1\,,$

la fonction $\mu(x,y) = \widehat{\mu}(x) = e^{-x}$ est un facteur intégrant de la forme différentielle proposée ; ce qui entraîne, $N(0,1) = 1 \neq 0$, qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \int_0^x \left(\frac{1}{y} - t\right)e^{-t}\,dt + \int_1^y \frac{dt}{t^2} = \left(-\frac{1}{y} + x + 1\right)e^{-x} = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est $y(x) = \dfrac{1}{x+1}$ avec $x > -1$.

3.156 Puisque $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{N(x,y)} = -\dfrac{3}{x},$

la fonction $\mu(x,y) = \widehat{\mu}(x) = x^3$ est un facteur intégrant de la forme différentielle proposée ; ce qui entraîne, $N(1,-1) = -3 \neq 0$, qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = -1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \int_1^x \left(\frac{3t^2}{y} - \frac{y^2}{t^2}\right)dt + \int_{-1}^y \left(2t - \frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{x^3}{y} + \frac{y^2}{x} = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est $y(x) = -x\sqrt[3]{x}$ avec $x > 0$.

3.157 Puisque $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{M(x,y)} = \dfrac{2}{1-y}\,,$

on a que $\mu(x,y) = \frac{1}{(1-y)^2}$ est un facteur intégrant de la forme différentielle proposée ; ce qui entraîne, $N(1,2) = 1 \neq 0$, qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = 2$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\varkappa(x,y) = \frac{y}{(1-y)}\int_1^x dt + \int_2^y \frac{dt}{(1-t)^2} = \frac{y(x-2)+2}{1-y} = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \frac{2}{2-x} \quad \text{avec } x < 2\,.$$

Remarque : Cette forme différentielle peut se transformer en l'équation de Bernoulli $y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \frac{1}{x}y^2(x)$ ou encore en l'équation à variables séparées $\frac{1}{y^2-y}y' = \frac{1}{x}$.

3.158 Puisque $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{M(x,y)} = -\dfrac{2}{y}\,,$

la fonction $\mu(x,y) = \widehat{\mu}(y) = \frac{1}{y^2}$ est un facteur intégrant de la forme différentielle proposée ; ce qui entraîne, $N(0,1) = 4 \neq 0$, qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = -2\int_0^x \frac{t}{y}\,dt + \int_1^y \left(1 + \frac{3}{t^2}\right) dt = -\frac{(3+x^2)}{y} + y + 2 = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = -1 + \sqrt{4+x^2} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}\,.$$

3.159 Puisque $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{M(x,y)} = \dfrac{2}{y}\,,$

la fonction $\mu(x,y) = \widehat{\mu}(y) = y^2$ est un facteur intégrant de la forme différentielle proposée ; ce qui entraîne, $N(0,1) = -1 \neq 0$, qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = 2\int_0^x ty^3\,dt - \int_1^y t^5\,dt = x^2y^3 - \frac{y^6}{6} + \frac{1}{6} = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \sqrt[3]{3x^2 + \sqrt{9x^4+1}} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}\,.$$

3.160 Pour commencer, remarquons que l'équation proposée peut aussi s'écrire

$$\big(p(x)y(x) - f(x)\big) + y'(x) = 0$$

qui est une forme différentielle. Comme pour tout $(x,y) \in I \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{N(x,y)} = -p(x)\,,$$

elle possède la fonction

$$\mu(x,y) = \widehat{\mu}(x) = e^{\int_a^x p(t)\,dt}$$

pour facteur intégrant ; ce qui entraîne, $N(a,b) = 1 \neq 0$, qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(a) = b$. Comme de plus, elle doit vérifier

$$\begin{aligned}\chi(x,y) &= \int_a^x \widehat{\mu}(t)\big(p(t)y - f(t)\big)\,dt + \int_b^y dt \\ &= y\widehat{\mu}(x) - \int_a^x \widehat{\mu}(t)f(t)\,dt - b = 0\,,\end{aligned}$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = b\,e^{-\int_a^x p(t)\,dt} + e^{-\int_a^x p(t)\,dt}\int_a^x e^{\int_a^t p(s)\,ds} f(t)\,dt\,, \quad x \in I\,.$$

3.161 Puisque $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)}{M(x,y)} = -\dfrac{3}{y}$,

la fonction $\mu(x,y) = \widehat{\mu}(y) = \frac{1}{y^3}$ est un facteur intégrant de la forme différentielle proposée ; ce qui entraîne, $N(0,1) = -2 \neq 0$, qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \frac{1}{y^2}\int_0^x \big(e^t + y\big)\,dt - 2\int_1^y \frac{dt}{t^3} = \frac{e^x + xy}{y^2} - 1 = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4\,e^x}}{2} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}\,.$$

3.162 Pour que $\sigma(x^2 + y^2)$ soit un facteur intégrant de la forme différentielle proposée il faut et il suffit que $\sigma'(s) + \frac{1}{2s}\sigma(s) = 0$ ou encore $\sigma(s) = \frac{\text{cste}}{\sqrt{s}}$. Par conséquent $\mu(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ est un facteur intégrant de la forme différentielle proposée ; ce qui entraîne, $N(0,1) = 1 \neq 0$, qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \int_0^x \left(2t + \frac{t}{\sqrt{t^2 + y^2}}\right) dt + \int_1^y dt = x^2 + \sqrt{x^2 + y^2} - 1 = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 1} \quad \text{avec } |x| < \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}\,.$$

$\boxed{\textbf{3.163}}$ Pour que $\sigma(xy)$ soit un facteur intégrant de la forme différentielle proposée il faut et il suffit que $\sigma'(s) - \frac{2}{s}\sigma(s) = 0$ ou encore $\sigma(s) = cs^2$. Par conséquent $\mu(x,y) = x^2y^2$ est un facteur intégrant de la forme différentielle proposée ; ce qui entraîne, $N(2,-1) = -4 \neq 0$, qu'elle admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(2) = -1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \int_2^x t^2y^3(4t+6y)\,dt + \int_{-1}^y 8t^2(6+8t)\,dt = x^3y^3(x+2y) = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est $y(x) = -\dfrac{x}{2}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{3.164}}$ 1) Pour que $\mu(x,y) = x^2$ soit un facteur intégrant de la forme différentielle proposée il faut et il suffit que pour tout $x > 0$: $f'(x) + \frac{2}{x}f(x) = x$ dont la solution est

$$f(x) = \frac{c}{x^2} + \frac{x^2}{4}\,.$$

2) Pour $f(1) = 1$, prendre $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{x^2} + x^2\right)$.

Ainsi, puisque $N(1,0) = f(1) = 1 \neq 0$, la forme différentielle

$$x(x^2+y) + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{x^2} + x^2\right)y' = 0$$

admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \int_1^x t^3(t^2+y)\,dt + \int_0^y dt = \frac{x^6-1}{6} + \frac{1}{4}\,(x^4+3)y = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \frac{2(1-x^6)}{3(3+x^4)} \quad \text{avec } x > 0\,.$$

$\boxed{\textbf{3.165}}$ 1) Pour que $\mu(x,y) = x$ soit un facteur intégrant de la forme différentielle proposée il faut et il suffit que pour tout $x > 0$: $f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = 1$ dont l'unique solution qui satisfait $f(1) = 1$ est

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

2) Ainsi, puisque $N(1,0) = f(1) = 1 \neq 0$, la forme différentielle

$$x^2 + y + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)y' = 0$$

admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = \int_1^x t(t^2+y)\,dt + \int_0^y dt = \frac{x^4-1}{4} + \frac{1}{2}\,(x^2+1)y = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est $y(x) = \dfrac{1-x^2}{2}$ avec $x > 0$.

$\boxed{\textbf{3.166}}$ 1) Pour que la forme différentielle proposée soit exacte il faut et il suffit que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -2\sin x$ dont l'unique solution qui satisfait $f(0) = 2$ est $f(x) = 2\cos x$.

2) Ainsi, puisque $N(0,1) = -f(0) = -2 \neq 0$, la forme différentielle exacte $(y^2+1)\sin x - 2\cos x yy' = 0$ admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\chi(x,y) = (y^2+1)\int_0^x \sin t\,dt - \int_1^y 2t\,dt = -(y^2+1)\cos x + 2 = 0\,,$$

on obtient finalement que la solution cherchée est

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\cos x} - 1} \quad \text{avec } |x| < \frac{\pi}{2}\,.$$

$\boxed{\textbf{3.167}}$ 1) En effet,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mu M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial \mu N}{\partial x}(x,y)\\ &\quad = (1-m)\,p(x)y^{-m}\gamma^{m-1}(x) - (1-m)\,p(x)\gamma^{m-1}(x)y^{-m} = 0\,.\end{aligned}$$

2) Ainsi, puisque $N(a,b) = 1 \neq 0$, la forme différentielle

$$\big(p(x)y - f(x)y^m\big) + y' = 0$$

admet une solution qui satisfait la condition initiale $y(a) = b$. Comme de plus, elle doit aussi vérifier

$$\begin{aligned}\chi(x,y) &= \int_a^x \big(p(t)y^{1-m} - f(t)\big)\gamma^{m-1}(t)\,dt + \int_b^y t^{-m}\,dt\\ &= \frac{y^{1-m}}{1-m}\left(\gamma^{m-1}(x) - 1\right) - \int_a^x f(t)\gamma^{m-1}(t)\,dt + \frac{y^{1-m} - b^{1-m}}{1-m} = 0\,,\end{aligned}$$

on obtient

$$y^{1-m}(x) = b^{1-m}\gamma^{m-1}(x)\left(1 + (1-m)b^{m-1}\int_a^x f(t)\gamma^{m-1}(t)\,dt\right)$$

ou encore que la solution cherchée est

$$y(x) = b\gamma(x)\left(1 + (1-m)b^{m-1}\int_a^x f(t)\gamma^{m-1}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{1-m}}.$$

Remarque : Sur le plus grand intervalle ouvert contenant a, contenu dans I et pour lequel

$$1 + (1-m)b^{m-1}\int_a^x f(t)\gamma^{m-1}(t)\,dt > 0\,,$$

la solution donnée ci-dessus est l'unique solution de l'équation de Bernoulli qui satisfait la condition initiale $y(a) = b$.

3.168 Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x(2\sin y-1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2(x^2\cos y-y)\,, \end{cases}$

les points stationnaires de la fonction f sont

$$\begin{aligned}
O &= (0,0),\\
P_k &= \left(-\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)}\,,\,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right) \quad \text{avec } k\geq 0\,,\\
Q_k &= \left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)}\,,\,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right) \quad \text{avec } k\geq 0\,,\\
M_k &= \left(-\sqrt{\frac{-2}{\sqrt{3}}\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)}\,,\,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right) \quad \text{avec } k< 0\,,\\
N_k &= \left(\sqrt{\frac{-2}{\sqrt{3}}\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)}\,,\,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right) \quad \text{avec } k< 0\,.
\end{aligned}$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2(2\sin y-1) \\ s=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=4x\cos y \\ t=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-2(x^2\sin y+1)\,. \end{cases}$$

1) Pour $O=(0,0)$, on a $s^2-rt=-4<0$ et $r=-2<0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un maximum local en ce point.

2) Aux points P_k, Q_k, M_k et N_k, on a $s^2-rt>0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ces points.

3.169 Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\left(\dfrac{1}{1+x^2+2y^2}+y^2\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{4y}{1+x^2+2y^2}+2x^2y+1\,, \end{cases}$$

la fonction f admet deux points stationnaires, à savoir :

$$P=\left(0,\,-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ et } Q=\left(0,\,-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2(1-x^2+2y^2)}{\left(1+x^2+2y^2\right)^2} + 2y^2 \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{-8xy}{\left(1+x^2+2y^2\right)^2} + 4xy \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{4(1+x^2-2y^2)}{\left(1+x^2+2y^2\right)^2} + 2x^2 \,. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $(0, y)$ avec $2y^2 + 4y + 1 = 0$, on a

$$r = \frac{2}{(1+2y^2)} + 2y^2\,, \quad s = 0 \quad \text{et} \quad t = \frac{8(1+2y)}{\left(1+2y^2\right)^2}\,.$$

Par conséquent :

1) Pour P : $s^2 - rt > 0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ce point.

2) Pour Q : $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en ce point.

$\boxed{\textbf{3.170}}$ Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\big(e^{-xy} - 1\big) - \sin x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\big(e^{-xy} - 1\big)\,, \end{cases}$

les points stationnaires de la fonction f sont

$$O_y = (0, y) \text{ avec } y \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad P_k = (k\pi, 0) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}^*\,.$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2\, e^{-xy} - \cos x \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (1-xy)\, e^{-xy} - 1 \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2\, e^{-xy}\,. \end{cases}$$

1) Pour $O_y = (0, y)$ avec $y \in \mathbb{R}$, on a $s^2 - rt = 0$. Puisque l'on ne peut rien dire dans ce cas, considérons la fonction auxiliaire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = -t - e^{-t}$. Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$: $g'(t) = -1 + e^{-t}$, la fonction continue g est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. D'où

$$\max_{t \in \mathbb{R}} g(t) = g(0) = -1\,.$$

Par conséquent pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)=g(xy)+\cos x\le g(0)+1=f(0,y)\ ;$$

ce qui entraîne que la fonction f atteint son maximum aux points O_y. 2) Pour $P_k=(k\pi,0)$ avec $k\in\mathbb{Z}^*$, on a $s^2-rt=-k^2\pi^2\cos k\pi$. D'où,

- si $k\neq 0$ est pair : $s^2-rt<0$ et $r<0$. La fonction f admet donc un maximum local aux points P_k ;
- si k est impair : $s^2-rt>0$. La fonction f n'admet pas d'extremum local aux points P_k.

$\boxed{\mathbf{3.171}}$ 1) Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=8y\,e^{xy}+2x=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=8x\,e^{xy}+8y=0\end{cases}\iff\begin{cases}x^2=4y^2\\ 4ye^{xy}+x=0\,.\end{cases}$$

Ainsi :

1) si $y=\frac{x}{2}$: $x\left(2\,e^{\frac{x^2}{2}}+1\right)=0$;

2) si $y=-\frac{x}{2}$: $x\left(-2\,e^{-\frac{x^2}{2}}+1\right)=0$.

Par conséquent la fonction f admet trois points stationnaires, à savoir :

$$P_1=(0,0)\,,\quad P_2=\left(-\sqrt{2\ln 2}\,,\quad\frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}\right)\ \text{ et }\ P_3=\left(\sqrt{2\ln 2},-\frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}\right).$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases}r=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=8y^2\,e^{xy}+2\\ s=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=8\,e^{xy}+8xy\,e^{xy}\\ t=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=8x^2\,e^{xy}+8\end{cases}$$

- Pour P_1 : $s^2-rt=48>0$, la fonction f admet un col en ce point.
- Pour P_2 et P_3 : $s^2-rt=-64\ln 2<0$ et $r>0$, la fonction f admet un minimum local en ces deux points.

2) Posons $A=\overline{B\big((0,0),3\big)}$. D'une part, puisque que f est continue et A compact, il existe $(a,b)\in A$ tel que

$$f(a,b)=\min_{(x,y)\in\mathbb{A}}f(x,y)\le f(0,0)=8\,.$$

D'autre part, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash A$: $f(x,y)=8\,e^{xy}+x^2+4y^2>x^2+y^2>9\,.$ Par conséquent $f(a,b)=\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}f(x,y)\,.$

Ce minimum est atteint aux points P_2 et P_3 et vaut $4(1+\ln 2)$.

$\boxed{\textbf{3.172}}$ Puisque $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 3y^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 6xy\,, \end{cases}$

la fonction f admet deux points stationnaires, à savoir :

$$P_1 = (0,0) \ \text{ et } \ P_2 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right).$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -6y \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6(x-y)\,. \end{cases}$$

1) Pour P_1 : $s^2 - rt = 0$. A priori, on ne peut rien dire. Néanmoins, puisque pour tout $y \in \mathbb{R}$: $f(0,y) = y^3$, on peut affirmer, sans autre, que la fonction f n'admet aucun extremum local en P_1.

2) Pour P_2 : $s^2 - rt = 2 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ce point.

$\boxed{\textbf{3.173}}$ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-1)\, e^{x^2+y^2-2x+y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(y+1)\, e^{x^2+y^2-2x+y}\,, \end{cases}$

l'unique point stationnaire de la fonction f est $(1,-1)$.
Nature du point stationnaire.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\big(1 + 2(x-1)^2\big)\, e^{x^2+y^2-2x+y} \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4(x-1)(y+1)\, e^{x^2+y^2-2x+y} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\big(1 + 2(y+1)^2\big)\, e^{x^2+y^2-2x+y}\,. \end{cases}$$

Pour $(1,-1)$: $s^2 - rt = -\frac{4}{e^2} < 0$ et $r = \frac{2}{e} > 0$. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en $(1,-1)$.

$\boxed{\textbf{3.174}}$ Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - e^{x+y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - e^{x+y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = y^2 \\ 3x^2 - e^{x+y} = 0\,. \end{cases}$$

Ainsi,

1) $x = -y$. Alors, $3x^2 - 1 = 0$ ou encore $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2) $x = y$. Alors $3x^2 - e^{2x} = 0$; désignons par a l'unique solution de cette équation. De plus, $a < 0$.

Par conséquent la fonction f admet trois points stationnaires, à savoir :

$$P_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ Q = (a, a)\,.$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x, y) = 6x - e^{x+y} \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x, y) = -e^{x+y} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y - e^{x+y}\,. \end{cases}$$

- Pour P_1 et P_2 : $s^2 - rt = 12 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ces deux points.
- Pour Q : $s^2 - rt = 36\, a^2(a - 1) < 0$ et $r = 3a(2 - a) < 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un maximum local en ce point.

3.175 Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}\,(x, y) = 3x^2 - 3 + y^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\,(x, y) = 2xy\,, \end{cases}$

la fonction f admet quatre points stationnaires, à savoir :

$$P_1 = \left(0, -\sqrt{3}\right),\ P_2 = \left(0, \sqrt{3}\right),\ Q_1 = (-1, 0) \text{ et } Q_2 = (1, 0)\,.$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x, y) = 6x \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x, y) = 2y \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x, y) = 2x\,. \end{cases}$$

1) Pour P_1 et P_2 : $s^2 - rt = 12 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ces deux points.

2) Pour Q_1 : $s^2 - rt = -12 < 0$ et $r = -6 < 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un maximum local en ce point.

3) Pour Q_1 : $s^2 - rt = -12 < 0$ et $r = 6 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en ce point.

3.176 Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(12-2x-y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(12-x-2y)\,, \end{cases}$

la fonction f admet quatre points stationnaires, à savoir :

$$O = (0,0)\,,\ \ P_1 = (0,12)\,,\ \ P_2 = (12,0)\ \text{ et }\ Q = (4,4)\,.$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2y \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 12 - 2x - 2y \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2\,x. \end{cases}$$

1) Pour O, P_1 et P_2 : $s^2 - rt = 144 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ces trois points.

2) Pour Q : $s^2 - rt = -48 < 0$ et $r = -8 < 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un maximum local en ce point.

Ce maximum local n'est pas un maximum global car $\lim_{x \to +\infty} f(x,-1) = +\infty$.

3.177 Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + \sin y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos y + \dfrac{1}{4}\sin y\,, \end{cases}$

les points stationnaires de la fonction f sont

$$P_k = (0, k\pi)\,,\ \ Q_k = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\ \text{ et }\ R_k = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos y \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x\sin y + \dfrac{1}{4}\cos y\,. \end{cases}$$

1) Pour P_k : $s^2 - rt > 0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ces points.

2) Pour Q_k et R_k : $s^2 - rt = -\frac{3}{4} < 0$ et $r = 2 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en ces points.

3.178 Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y\sin x - \cos x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + \cos x\,, \end{cases}$

les points stationnaires de la fonction f sont $P_k = \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y\cos x + \sin x \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\sin x \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\,. \end{cases}$$

1) *k pair*. Pour P_k : $s^2 - rt = -1 < 0$ et $r = 1 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en ces points.

2) *k impair*. Pour P_k : $s^2 - rt = 3 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ces points.
$\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = -3$ car $f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -3$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left(y + \frac{\cos x}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(9 - \sin^2 x + 4\sin x\right) \\ &\geq -\frac{1}{4}\left(9 - \sin^2 x + 4\sin x\right) \geq -3\,. \end{aligned}$$

3.179 Puisque $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1 - y^2)\cos x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2y\sin x = 0\,, \end{cases}$

les points stationnaires sont

$$(x,y) = (k\pi, \pm 1) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right).$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -(1 - y^2)\sin x \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2y\cos x \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2\sin x \end{cases}$$

1) Pour $(k\pi, \pm 1)$: $s^2 - rt = 4 > 0$. Pas d'extremum en ces points.

2) Pour $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$: $s^2 - rt = -2 < 0$.

- Si k est impair, $r > 0$ et l'on a un minimum local.
- Si k est pair $r < 0$ et l'on a maximum local.

3.180 Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(x+y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin(x+y) + \cos y\,, \end{cases}$

les points stationnaires de la fonction f sont

$$Q_{k,p} = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ \frac{\pi}{2} + p\pi\right) \text{ avec } k, p \in \mathbb{Z}\,.$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\cos(x+y) \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\cos(x+y) \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\cos(x+y) - \sin y\,. \end{cases}$$

1) Si k est pair et $p \in \mathbb{Z}$: $s^2 - rt = 1 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local aux points $Q_{k,p}$.

2) Si k est impair et p pair : $s^2 - rt = -1 < 0$ et $r = -1 < 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un maximum local aux points $Q_{k,p}$.

3) Si k et p impairs : $s^2 - rt = -1 < 0$ et $r = 1 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local aux points $Q_{k,p}$.

3.181 Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x - x^2 - y^2)\, e^{-(x+y)} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2y - x^2 - y^2)\, e^{-(x+y)}, \end{cases}$

la fonction f admet deux points stationnaires : $O = (0,0)$ et $P = (1,1)$.

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (2 - 4x + x^2 + y^2)\, e^{-(x+y)} \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (-2x - 2y + x^2 + y^2)\, e^{-(x+y)} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (2 - 4y + x^2 + y^2)\, e^{-(x+y)}\,. \end{cases}$$

1) Pour O : $s^2 - rt = -4 < 0$ et $r = 2 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en ce point.
2) Pour P : $s^2 - rt = 4\,e^{-4} > 0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ce point.

$\boxed{\mathbf{3.182}}$ Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}\,(x, y) = \big(1 - 2x(x+y)\big)\,e^{-(x^2+y^2)} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\,(x, y) = \big(1 - 2y(x+y)\big)\,e^{-(x^2+y^2)}, \end{cases}$$

la fonction f admet deux points stationnaires, à savoir :

$$P = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ et } Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x, y) = -2\big(3x + y - 2x^2(x+y)\big)\,e^{-(x^2+y^2)} \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x, y) = -2\big(x + y - 2xy(x+y)\big)\,e^{-(x^2+y^2)} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x, y) = -2\big(x + 3y - 2y^2(x+y)\big)\,e^{-(x^2+y^2)}. \end{cases}$$

1) Pour P : $s^2 - rt = -\frac{8}{e} < 0$ et $r = \frac{3}{\sqrt{e}} > 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en ce point.
2) Pour Q : $s^2 - rt = -\frac{8}{e} < 0$ et $r = -\frac{3}{\sqrt{e}} < 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un maximum local en ce point.

$\boxed{\mathbf{3.183}}$ Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}\,(x, y) = -2xy\,e^{-(x^2+y)} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\,(x, y) = (1 - y)\,e^{-(x^2+y)}, \end{cases}$

l'unique point stationnaire de la fonction f est $P = (0, 1)$.

Nature du point stationnaire.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x, y) = 2y(2x^2 - 1)\,e^{-(x^2+y)} \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x, y) = 2x(y - 1)\,e^{-(x^2+y)} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x, y) = (y - 2)\,e^{-(x^2+y)}. \end{cases}$$

Pour $(0,1)$: $s^2 - rt = -\frac{2}{e^2} < 0$ et $r = -\frac{2}{e} < 0$. Par conséquent la fonction f admet un maximum local en ce point. Ici, le maximum local est global. En effet, puisque $\max_{y\in\mathbb{R}} y\, e^{-y} = \frac{1}{e}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 < e^{-x^2} \leq 1$, on a

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} y\, e^{-(x^2+y)} = \frac{1}{e} = f(0,1)\,.$$

$\boxed{\textbf{3.184}}$ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \operatorname{ch}(x+y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - \operatorname{ch}(x+y)\,, \end{cases}$

l'unique point stationnaire de la fonction f est $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Nature du point stationnaire.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\operatorname{sh}(x+y) \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\operatorname{sh}(x+y) \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 - \operatorname{sh}(x+y)\,. \end{cases}$$

Pour $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$: $s^2 - rt = 0$. A priori, on ne peut rien dire. Néanmoins, en constatant que pour tout $\delta > 0$:

$$f\left(-\frac{1}{2} + \delta,\, \frac{1}{2} - \delta\right) = -\frac{1}{4} + \delta^2 > -\frac{1}{4} = f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

et

$$f\left(-\frac{1}{2} + \delta,\, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + (\delta - \operatorname{sh}\delta) < -\frac{1}{4} = f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

on peut affirmer que la fonction f n'admet pas d'extremum local en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$\boxed{\textbf{3.185}}$ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \operatorname{ch}(x+y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - \operatorname{ch}(x+y)\,, \end{cases}$

les points stationnaires de la fonction f sont de la forme $P_x = (x, -x)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\operatorname{sh}(x+y) \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\operatorname{sh}(x+y) \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\operatorname{sh}(x+y)\,. \end{cases}$$

Pour tous les points P_x : $s^2 - rt = 0$. A priori, on ne peut rien dire. Néanmoins, en constatant que pour tout $\delta > 0$:

$$f(x+\delta, -x) = \delta - \operatorname{sh}\delta < 0 \text{ et } f(x-\delta, -x) = -\delta + \operatorname{sh}\delta > 0\,,$$

on peut affirmer que la fonction f n'admet pas d'extremum local aux points P_x.

$\boxed{\mathbf{3.186}}$ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{8x}{1+x^2+y^2} - 2(x-1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\left(\dfrac{4}{1+x^2+y^2} - 1\right), \end{cases}$$

la fonction f admet trois points stationnaires, à savoir :

$$P_1 = (-1,0)\,,\ P_2 = \left(1-\sqrt{2}, 0\right) \text{ et } P_3 = \left(1+\sqrt{2}, 0\right)\,.$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{8(1-x^2+y^2)}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} - 2 \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\dfrac{16\,xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{8(1+x^2-y^2)}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} - 2\,. \end{cases}$$

1) Pour P_1 : $s^2 - rt = 4 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ce point.

2) Pour P_2 : $s^2 - rt = -\frac{8\sqrt{2}(3\sqrt{2}-4)}{(2-\sqrt{2})^3} < 0$ et $r = \frac{12\sqrt{2}-16}{(2-\sqrt{2})^2} > 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en ce point. P_2 n'est pas un minimum global. En effet,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = \lim_{x\to-\infty}\left((1+x^2)\left(\frac{4\ln(1+x^2)}{1+x^2} - 1\right) + 2x\right) = -\infty\,.$$

3) Pour P_3 : $s^2 - rt = -\frac{8\sqrt{2}(3\sqrt{2}+4)}{(2+\sqrt{2})^3} < 0$ et $r = -\frac{12\sqrt{2}+16}{(2+\sqrt{2})^2} < 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un maximum local en ce point. P_3 est un maximum global. Pour cela, posons $t = \sqrt{x^2+y^2}$ et considérons la fonction auxiliaire $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = 4\ln(1+t^2) - (1+t^2) + 2t$.
Puisque pour tout $t > 0$: $g'(t) = \dfrac{-2(t+1)\left(t-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(t-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)}{1+t^2}$, on a $\max\limits_{t>0} g(t) = g\left(1+\sqrt{2}\right)$. Finalement, il suffit de remarquer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) \le g(t) \le g\left(1+\sqrt{2}\right) = f\left(1+\sqrt{2}, 0\right)\,.$$

3.187 Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 16\,y\,e^{xy} + 32\,x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 16\,x\,e^{xy} + 2y\,, \end{cases}$

la fonction f admet trois points stationnaires, à savoir :

$$O=(0,0)\,,\ \ P=\left(-\frac{\sqrt{\ln 2}}{2}, 2\sqrt{\ln 2}\right) \text{ et } Q=\left(\frac{\sqrt{\ln 2}}{2}, -2\sqrt{\ln 2}\right).$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 16y^2\,e^{xy} + 32 \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 16\,(1+xy)\,e^{xy} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 16\,x^2\,e^{xy} + 2\,. \end{cases}$$

1) Pour $O=(0,0)$: $s^2 - rt = 192 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ce point.

2) Pour P et Q : $s^2 - rt = -256\ln 2 < 0$ et $r = 32\,(1+\ln 2) > 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en ces deux points.

3.188 Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\,e^{x^2} - \sin(x+y) + \cos(x+y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin(x+y) + \cos(x+y)\,, \end{cases}$$

les points stationnaires de la fonction f sont $P_k = \left(0, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2(1+2x^2)\,e^{x^2} - \cos(x+y) - \sin(x+y) \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\cos(x+y) - \sin(x+y) \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\cos(x+y) - \sin(x+y)\,. \end{cases}$$

1) Pour P_k avec k pair : $s^2 - rt = 2\sqrt{2} > 0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ces points.

2) Pour P_k avec k impair : $s^2 - rt = -2\sqrt{2} < 0$ et $r = 2+\sqrt{2} > 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en ce point.

$\boxed{\mathbf{3.189}}$ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + 2(x-y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2(x-y) - 6\,, \end{cases}$

la fonction f admet deux points stationnaires : $P = (-1,2)$ et $Q = (1,4)$.

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12\,x + 2 \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2 \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\,. \end{cases}$$

1) Pour $P = (-1,2)$: $s^2 - rt = 24 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ce point.

2) Pour $Q = (1,4)$: $s^2 - rt = -24 < 0$ et $r = 14 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en ce point.

$\boxed{\mathbf{3.190}}$ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\big(-1 + e^{-xy}\big) - \sin x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\big(-1 + e^{-xy}\big)\,, \end{cases}$

les points stationnaires de la fonction f sont $P_y = (0,y)$ avec $y \in \mathbb{R}$ et $Q_k = (k\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$.

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2\, e^{-xy} - \cos x \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -1 + (1 - xy)\, e^{-xy} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2\, e^{-xy}\,. \end{cases}$$

1) Pour tous les points P_y : $s^2 - rt = 0$. A priori, on ne peut rien dire. Néanmoins, désignons par $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction défine par $g(t) = -t - e^{-t}$. Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$: $g'(t) = -1 + e^{-t}$, on a

$$\max_{t \in \mathbb{R}^2} g(t) = g(0) = -1\,.$$

Ainsi, en remarquant que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) \leq \max_{t \in \mathbb{R}^2} g(t) + 1 = f(0,y) = 0\,,$$

on peut affirmer que la fonction f atteint son maximum global aux points P_y.

2) Pour Q_k avec $k \neq 0$ pair : $s^2 - rt = -k^2\pi^2 < 0$ et $r = -1 < 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un maximum local (ici global) en ces points.

3) Pour Q_k avec k impair : $s^2 - rt = k^2\pi^2$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas extremum local en ces points.

3.191 Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y\left(\dfrac{9}{5} + \dfrac{1}{1+x^2y^2}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\left(\dfrac{9}{5} + \dfrac{1}{1+x^2y^2}\right) + 2y\,, \end{cases}$$

la fonction f admet trois points stationnaires :

$$O = (0,0)\,,\ \ P = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \text{ et } Q = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right).$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 - \dfrac{2xy^3}{\left(1+x^2y^2\right)^2} \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{9}{5} + \dfrac{1}{1+x^2y^2} - \dfrac{2x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 - \dfrac{2x^3y}{\left(1+x^2y^2\right)^2}\,. \end{cases}$$

1) Pour $O = (0,0)$: $s^2 - rt = \frac{96}{25} > 0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ce point.

2) Pour P et Q : $s^2 - rt = -\frac{64}{25} < 0$ et $r = \frac{58}{25} > 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en ces points.

3.192 Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - \dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + \dfrac{1}{y^2}\,, \end{cases}$

l'unique point stationnaire de la fonction f est $P = (-1, 1)$.

Nature du point stationnaire.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2}{x^3} \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\dfrac{2}{y^3}\,. \end{cases}$$

Pour P : $s^2 - rt = -3 < 0$ et $r = -2 < 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un maximum local en ce point.

3.193 Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \nabla f(x, y) = \big(2(x - \cos y), 2x \sin y\big)$, les points stationnaires de la fonction f sont

$$P_k = \left(0, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \ \text{ et } \ Q_k = \left((-1)^k \,,\, k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Nature des points stationnaires.

$$r = 2\,, \quad s = 2\sin y \ \text{ et } \ t = 2x\cos y\,.$$

1) Pour les P_k : $s^2 - rt = 4$. En ces points, la fonction f n'admet pas d'extremum local.

2) Pour les Q_k : $s^2 - rt = -4$. Puisque $r = 2$, en ces points, la fonction f admet un minimum local.

3.194 Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy\left(4 - \dfrac{3}{2}x - y\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2(4 - x - 2y)\,, \end{cases}$

les points stationnaires de la fonction f sont $P = (4, 0)$, $Q = (2, 1)$ et $R_y = (0, y)$ avec $y \in \mathbb{R}$.

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y(4 - 3x - y) \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x\left(4 - \dfrac{3}{2}x - 2y\right) \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2x^2\,. \end{cases}$$

1) Pour $P = (4, 0)$: $s^2 - rt = 256 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ce point.

2) Pour $Q = (2, 1)$: $s^2 - rt = -32 < 0$ et $r = -6 < 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un maximum local en ces points.

3) Pour tous les points R_y : $s^2 - rt = 0$. A priori, on ne peut rien dire. Néanmoins, en constatant que pour tout $y \in \mathbb{R} : f(0, y) = 0$, on obtient, en étudiant le signe de $f(x, y)$ au voisinage de l'axe Oy, que

- si $y \notin [0, 4]$, la fonction f admet un maximum local en R_y ;
- si $y \in \,]0, 4[$, la fonction f admet un minimum local en R_y ;
- si $y = 0$ ou 4, la fonction n'admet pas d'extremum local en R_y.

$\boxed{\mathbf{3.195}}$ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 12\,x + 48\,(x-y)\big(1-(x-y)^2\big)^7 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -48\,(x-y)\big(1-(x-y)^2\big)^7 , \end{cases}$$

la fonction f admet trois points stationnaires : $O = (0,0)$, $P = (0,-1)$ et $Q = (0,1)$.

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12 + 48\,\big(1-(x-y)^2\big)^7 - 672\,(x-y)^2\big(1-(x-y)^2\big)^6 \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -48\,\big(1-(x-y)^2\big)^7 + 672\,(x-y)^2\big(1-(x-y)^2\big)^6 \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 48\,\big(1-(x-y)^2\big)^7 - 672\,(x-y)^2\big(1-(x-y)^2\big)^6 . \end{cases}$$

1) Pour le $O = (0,0)$: $s^2 - rt = -576 < 0$ et $r = 60 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en ce point.

2) Pour P et Q : $s^2 - rt = 0$. A priori, on ne peut rien dire. Néanmoins, puisque $f(0,-1) = f(0,1) = 1$ et pour tout $\delta > 0$:

$$f(\delta, -1+\delta) = f(\delta, 1+\delta) = 1 + 6\delta^2 > 1$$

et

$$f(0,-1-\delta) = f(0,1+\delta) = 1 - 3\delta^8(2+\delta)^8 < 1 ,$$

on peut affirmer que la fonction f n'admet pas d'extremum local aux points P et Q.

$\boxed{\mathbf{3.196}}$ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,e^{xy} + 2x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\,e^{xy} + 2\lambda y , \end{cases}$

les points stationnaires de la fonction f sont :

$$O = (0,0) ,$$

$$P_\lambda = \left(\sqrt{-\sqrt{\lambda}\ln\big(2\sqrt{\lambda}\big)} , -\frac{\sqrt{-\sqrt{\lambda}\ln\big(2\sqrt{\lambda}\big)}}{\sqrt{\lambda}} \right) \text{ avec } 0 < \lambda < \frac{1}{4} ,$$

$$Q_\lambda = \left(-\sqrt{-\sqrt{\lambda}\ln\big(2\sqrt{\lambda}\big)} , \frac{\sqrt{-\sqrt{\lambda}\ln\big(2\sqrt{\lambda}\big)}}{\sqrt{\lambda}} \right) \text{ avec } 0 < \lambda < \frac{1}{4} .$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2\, e^{xy} + 2 \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (1+xy)\, e^{xy} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2\, e^{xy} + 2\lambda\,. \end{cases}$$

1) Pour le $O = (0,0)$: $s^2 - rt = 1 - 4\lambda$ et $r = 2 > 0$; ce qui entraîne que

- Si $0 < \lambda < \frac{1}{4}$, la fonction f n'admet pas d'extremum local en ce point.
- Si $\lambda \geq \frac{1}{4}$, la fonction f admet un minimum global en ce point. En effet, en posant $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \sqrt{2}, |y| \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right\}$, on sait, f étant continue et E compact, qu'il existe $(a,b) \in E$ pour lequel

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in E} f(x,y) \leq f(0,0) = 1\,.$$

Ainsi, en remarquant que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E$: $f(x,y) > 2$, on a

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in \mathbb{R}^2} f(x,y)\,.$$

D'où $\nabla f(a,b) = (0,0)$ car $f \in \mathbf{C}^1$. Or pour $\lambda \geq \frac{1}{4}$, l'unique point stationnaire de la fonction f est $(0,0)$. D'où $a = b = 0$.

2) Pour P_λ et Q_λ avec $0 < \lambda < \frac{1}{4}$:

$$s^2 - rt = 16\,\lambda \ln\big(2\sqrt{\lambda}\big) < 0 \text{ et } r = 2\left(1 - \ln\big(2\sqrt{\lambda}\big)\right) > 0\ ;$$

ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en ces points.

3.197 Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y + \dfrac{2\alpha^2 x}{\left(1+\alpha^2x^2+y^2\right)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y + \dfrac{2y}{\left(1+\alpha^2x^2+y^2\right)^2} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + \dfrac{2\alpha^2}{\left(1+\alpha^2x^2+y^2\right)^2} - \dfrac{8\alpha^4x^2}{\left(1+\alpha^2x^2+y^2\right)^3} \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 1 - \dfrac{8\alpha^2xy}{\left(1+\alpha^2x^2+y^2\right)^3} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 + \dfrac{2}{\left(1+\alpha^2x^2+y^2\right)^2} - \dfrac{8y^2}{\left(1+\alpha^2x^2+y^2\right)^3}\,, \end{cases}$$

on obtient que pour $O = (0,0)$: $\nabla f(0,0) = (0,0)$, $s^2 - rt = -7 - 8\alpha^2 < 0$ et $r = 2(1+\alpha^2) > 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en ce point.

3.198 Si l'on pose $t = x + y$, ce problème revient à chercher les extrema locaux de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = t + \sin t + \cos t = t + \sqrt{2}\,\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right).$$

Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$: $g'(t) = 1 + \sqrt{2}\sin\big(\frac{\pi}{4} - t\big)$, les points stationnaires de la fonction g sont

$$t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ et } t = \pi + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Comme de plus $g''(t) = -\sin t - \cos t$, on a

1) Pour $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$: $g''\big(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\big) = -1 < 0$, la fonction g admet un maximum local en ces points.

2) Pour $t = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$: $g''\big(\pi + 2k\pi\big) = 1 > 0$, la fonction g admet un minimum local en ces points.

En conclusion, la fonction f admet un maximum local en tout point des droites d'équation $x + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ tandis qu'elle admet un minimum local en tout point des droites d'équation $x + y = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.199 Posons $t = x^2 + y^2$ et considérons la fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \left|2\sqrt{t} - t\right| = \begin{cases} 2\sqrt{t} - t & \text{si } 0 \leq t \leq 4 \\ -2\sqrt{t} + t & \text{si } t > 4\,. \end{cases}$$

D'une part, on constate que $g(0) = g(4) = \min_{t \geq 0} g(t) = 0$. D'autre part, puisque

$$g'(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}} - 1 & \text{si } 0 < t < 4 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{t}} + 1 & \text{si } t > 4\,, \end{cases}$$

la fonction g admet un unique point stationnaire, à savoir : $t = 1$. Comme de plus pour $t \in\,]0,4[$: $g''(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t^3}} < 0$, elle admet, en ce point, un maximum local.

En conclusion, la fonction f admet un minimum global en $(0,0)$ et en tout point situé sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 4$, tandis qu'elle admet un maximum local en tout point situé sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

$\boxed{\mathbf{3.200}}$ Pour simplifier l'écriture, posons

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\,, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\,.$$

Pour commencer, on va supposer que $s^2 - rt \neq 0$. Alors, puisque la fonction f admet un maximum local en (a,b), on doit avoir : $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$; ce qui entraîne que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$ru^2 + 2suv + tv^2 = r\left(\left(u + \frac{s}{r}v\right)^2 - \frac{v^2}{r^2}\left(s^2 - rt\right)\right) \leq 0\,.$$

Supposons maintenant que $s^2 - rt = 0$. Si $r = t = 0$, il n'y a rien à démontrer. Faisons donc l'hypothèse supplémentaire que $r \neq 0$ (le cas $t \neq 0$ se traitant de la même manière) et considérons la fonction auxiliaire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(t,b)$. Cette fonction est de classe $\mathbf{C}^2$ car f l'est. Puisque g admet un maximum local en a et que $g''(a) = r \neq 0$, on doit avoir $r < 0$. Par conséquent pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$ru^2 + 2suv + tv^2 = r\left(u + \frac{s}{r}v\right)^2 \leq 0\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.201}}$ Posons $E = [0,1] \times [0,1]$. Puisque pour tout $(x,y) \in E$: $f(x,y) \geq 0$, on peut écrire, sans autre, que

$$\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = 0\,.$$

On pourra noter que ce minimum est atteint aux points de la forme $(0,y)$ ou $(x,0)$ avec $0 \leq x,\, y \leq 1$. La fonction f atteint son maximum, car elle continue sur un compact. En remarquant que, pour tout $(x,y) \in \mathring{E}$:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y(1-3x^2+y^2)}{\left(1+3x^2+y^2\right)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x(1+3x^2-y^2)}{\left(1+3x^2+y^2\right)^2} \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \nabla f(x,y) \neq (0,0)\,,$$

le maximum cherché se trouve sur ∂E.

1) Sur $\{0\} \times [0,1]$, la fonction f est identiquement nulle.

2) Sur $[0,1] \times \{0\}$, la fonction f est identiquement nulle.

3) Sur $\{1\} \times [0,1]$, la fonction f, qui s'écrit $f(1,y) = \frac{y}{4+y^2}$, atteint son maximum en $y = 1$ et ce dernier vaut $\frac{1}{5}$.

4) Sur $[0,1] \times \{1\}$, la fonction f, qui s'écrit $f(x,1) = \frac{x}{2+3x^2}$, atteint son maximum en $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ et ce dernier vaut $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

En conclusion, $\displaystyle\max_{(x,y)\in E} f(x,y) = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\,.$

3.202 Posons $E = [-2,0] \times [0,1]$. La fonction f atteint ses extrema, car elle est continue sur un compact. Puisque, pour tout $(x,y) \in \mathring{E}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y + 3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + 2y - 2\,, \end{cases}$$

$\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est l'unique point stationnaire de f et $f\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$. Etudions à présent la fonction sur ∂E.

1) Sur $\{0\} \times [0,1]$, la fonction f s'écrit $f(x,1) = (y-1)^2$. Par conséquent

$$\min_{0 \leq y \leq 1} f(0,y) = f(0,1) = 0 \quad \text{et} \quad \max_{0 \leq y \leq 1} f(0,y) = f(0,0) = 1\,.$$

2) Sur $[-2,0] \times \{1\}$, la fonction f s'écrit $f(x,1) = x^2 + 2x$. Par conséquent

$$\min_{-2 \leq x \leq 0} f(x,1) = f(-1,1) = -1 \quad \text{et} \quad \max_{-2 \leq x \leq 0} f(x,1) = f(-2,1) = f(0,1) = 0.$$

3) Sur $\{-2\} \times [0,1]$, la fonction f s'écrit $f(-2,y) = y^2 - 1$. Par conséquent

$$\min_{0 \leq y \leq 1} f(-2,y) = f(-2,0) = -1 \quad \text{et} \quad \max_{0 \leq y \leq 1} f(-2,y) = f(-2,1) = 0\,.$$

4) Sur $[-2,0] \times \{0\}$, la fonction f s'écrit $f(x,0) = x^2 + 3x + 1$. Par conséquent

$$\min_{-2 \leq x \leq 0} f(x,0) = f\left(-\frac{3}{2}, 0\right) = -\frac{5}{4} \quad \text{et} \quad \max_{-2 \leq x \leq 0} f(x,0) = f(0,0) = 1\,.$$

En conclusion, $\displaystyle\min_{(x,y) \in E} f(x,y) = -\frac{4}{3}$ et $\displaystyle\max_{(x,y) \in E} f(x,y) = 1$.

3.203 Posons $E = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction f atteint ses extrema, car elle est continue sur un compact. Puisque, pour tout $(x,y) \in \mathring{E}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x + \cos(x+y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos y + \cos(x+y)\,, \end{cases}$$

$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ est l'unique point stationnaire de f et $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$. Etudions à présent la fonction sur ∂E.

1) Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \{0\}$, la fonction f s'écrit $f(x,0) = 2\sin x$. Par conséquent

$$\min_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} f(x,0) = f(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \max_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} f(x,0) = f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 2\,.$$

2) Sur $\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction f s'écrit $f\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 1 + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right)$. Par conséquent

$$\min_{0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 2\,,$$

$$\max_{0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2}\,.$$

3) Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, la fonction f s'écrit $f\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$. Par conséquent

$$\min_{0 \le x \le \frac{\pi}{2}} f\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 2\,,$$
$$\max_{0 \le x \le \frac{\pi}{2}} f\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}\,.$$

4) Sur $\{0\} \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction f s'écrit $f(0, y) = 2\sin y$. Par conséquent

$$\min_{0 \le y \le \frac{\pi}{2}} f(0, y) = f(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \max_{0 \le y \le \frac{\pi}{2}} f(0, y) = f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 2\,.$$

En conclusion, $\displaystyle\min_{(x,y)\in E} f(x, y) = 0$ et $\displaystyle\max_{(x,y)\in E} f(x, y) = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\boxed{\textbf{3.204}}$ La fonction f atteint ses extrema, car elle est continue sur un compact. Puisque, pour tout $(x, y) \in \mathring{E}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y\sin x - \cos x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + \cos x\,, \end{cases}$$

la fonction n'admet pas de point stationnaire . Etudions à présent la fonction sur ∂E.

1) Sur $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le \frac{\pi}{2},\ y = \cos x\right\}$, la fonction s'écrit $f(x, \cos x) = -2\sin^2 x - \sin x$. Par conséquent

$$\min_{-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}} f(x, \cos x) = f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -3\,,$$
$$\max_{-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}} f(x, \cos x) = f\left(-\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{1}{8}\,.$$

2) Sur $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le \frac{\pi}{2},\ y = -\cos x\right\}$, la fonction s'écrit $f(x, \cos x) = -\sin x - 2$. Par conséquent

$$\min_{-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}} f(x, -\cos x) = f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -3\,,$$
$$\max_{-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}} f(x, -\cos x) = f\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) = -1\,.$$

En conclusion, $\displaystyle\min_{(x,y)\in E} f(x, y) = -3$ et $\displaystyle\max_{(x,y)\in E} f(x, y) = \frac{1}{8}$.

3.205 E est l'intérieur avec ses côtés du carré de sommets $A = \left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$, $B = \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$, $C = \left(-\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ et $D = \left(0, -\frac{3\pi}{4}\right)$. La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Puisque, pour tout $(x,y) \in \mathring{E}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x-y) - \sin(x+y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\cos(x-y) - \sin(x+y)\,, \end{cases}$$

la fonction admet deux points stationnaires, à savoir : $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ et $\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$. De plus, $f\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right) = 2$. Etudions à présent la fonction sur son bord ∂E.

1) Sur le segment AB, la fonction s'écrit $f\left(x, -x + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Par conséquent

$$\min_{0 \le x \le \frac{3\pi}{4}} f\left(x, -x + \frac{3\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right) = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$
$$\max_{0 \le x \le \frac{3\pi}{4}} f\left(x, -x + \frac{3\pi}{4}\right) = f\left(\frac{5\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

2) Sur le segment BC, la fonction s'écrit $f\left(x, x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Par conséquent

$$\min_{-\frac{3\pi}{4} \le x \le 0} f\left(x, x + \frac{3\pi}{4}\right) = f\left(0, \frac{3\pi}{4}\right) = f\left(-\frac{3\pi}{4}, 0\right) = -\sqrt{2}\,,$$
$$\max_{-\frac{3\pi}{4} \le x \le 0} f\left(x, x + \frac{3\pi}{4}\right) = f\left(-\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

3) Sur le segment CD, la fonction s'écrit $f\left(x, -x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Par conséquent

$$\min_{-\frac{3\pi}{4} \le x \le 0} f\left(x, -x - \frac{3\pi}{4}\right) = f\left(-\frac{5\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}\right) = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$
$$\max_{-\frac{3\pi}{4} \le x \le 0} f\left(x, -x - \frac{3\pi}{4}\right) = f\left(-\frac{\pi}{8}, -\frac{5\pi}{8}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

4) Sur le segment DA, la fonction s'écrit $f\left(x, x - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Par conséquent

$$\min_{0 \le x \le \frac{3\pi}{4}} f\left(x, x - \frac{3\pi}{4}\right) = f\left(0, -\frac{3\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right) = 0\,,$$
$$\max_{0 \le x \le \frac{3\pi}{4}} f\left(x, x - \frac{3\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

En conclusion, $\displaystyle\min_{(x,y) \in E} f(x,y) = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\displaystyle\max_{(x,y) \in E} f(x,y) = 2$.

$\boxed{\textbf{3.206}}$ Pour commencer, montrons l'existence de ces extrema. Pour cela, considérons le sous-ensemble $E = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Puisqu'il est compact et que la fonction f est continue, elle atteint son minimum et son maximum sur E. Autrement dit, il existe (a, b), $(c, d) \in E$ pour lesquels

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in E} f(x,y) \text{ et } f(c,d) = \max_{(x,y)\in E} f(x,y)\,.$$

Soit à présent $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On sait qu'il existe un unique couple (u_1, v_1) de $[0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$ et un unique couple (k_1, k_2) de $\mathbb{Z}^2$ tels que $u = u_1 + 2k_1\pi$ et $v = v_1 + 2k_2\pi$. Par conséquent $f(a, b) \leq f(u, v) = f(u_1, v_1) \leq f(c, d)$. On a ainsi démontré que

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in \mathbb{R}^2} f(x,y) \text{ et } f(c,d) = \max_{(x,y)\in \mathbb{R}^2} f(x,y)\,.$$

La fonction f étant de classe $\mathbf{C}^1$, on doit avoir $\nabla f(a, b) = \nabla f(c, d) = (0, 0)$. Finalement, puisque les solutions dans E du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin x + \cos(x+y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin y + \cos(x+y) = 0 \end{cases}$$

sont $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ et $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ et que de plus

$$f\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) = 0\,,\ \ f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ et } f\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\,,$$

on peut conclure que $\displaystyle\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $\displaystyle\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$\boxed{\textbf{3.207}}$ Pour commencer, montrons l'existence de ce minimum. Pour cela, considérons le sous-ensemble $E = [-6, 6] \times [-6, 6]$. Puisqu'il est compact et que la fonction f est continue, elle atteint son minimum sur E. D'autre part, en constatant que $(0, 0) \in E$, $f(0, 0) = 6$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E : f(x, y) > 6$, on peut écrire

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \min_{(x,y)\in E} f(x,y)\,.$$

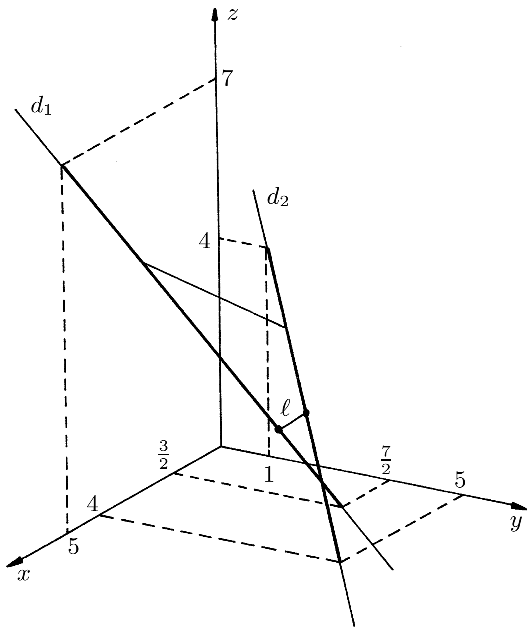
La fonction f étant de classe $\mathbf{C}^1$, ce minimum est atteint en un de ses points stationnaires. Finalement, puisque l'unique solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(3x+y+2) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(2x+3y+4) = 0 \end{cases}$$

est $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{8}{7}\right)$, on peut conclure que $\displaystyle\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = f\left(-\frac{2}{7}, -\frac{8}{7}\right) = \frac{2}{7}$.

Remarque : Géométriquement, ce problème revient à trouver, entre autres, la plus courte distance ℓ entre les deux droites gauches

$$d_1 = \{(2-t,\, 3+t,\, 1-2t) : t \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad d_2 = \{(1-s,\, 2-s,\, 3+s) : s \in \mathbb{R}\}\,.$$



$\boxed{\textbf{3.208}}$ Pour commencer, montrons l'existence de ce minimum. Pour cela, considérons le sous-ensemble $E = \overline{B\big((0,0),2\big)}$. Puisqu'il est compact et que la fonction f est continue, elle atteint son minimum sur E. D'autre part, en constatant que $(0,0) \in E$, $f(0,0) = 4$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E : f(x,y) > 4$, on peut écrire

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \min_{(x,y)\in E} f(x,y)\,.$$

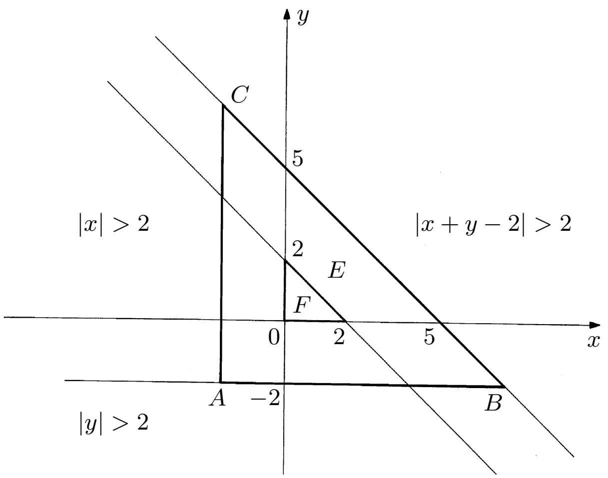
La fonction f étant de classe $\mathbf{C}^1$, ce minimum est atteint en un de ses points stationnaires. Finalement, puisque l'unique solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(2x+y-2) = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x+2y-2) = 0 \end{cases}$$

est $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, on peut conclure que $\displaystyle\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

$\boxed{\mathbf{3.209}}$ Pour commencer, montrons l'existence de ce minimum. Pour cela, désignons par E l'intérieur avec ses côtés du triangle rectangle de sommets $A = (-2,-2)$, $B = (7,-2)$ et $C = (-2,7)$. Puisqu'il est compact et que la fonction f est continue, elle atteint son minimum sur E. D'autre part, en constatant que $(0,0) \in E$, $f(0,0) = 2$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E : f(x,y) > 2$, on peut écrire

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \min_{(x,y)\in E} f(x,y)\,.$$



Recherche de ce minimum.

1) Soit F l'intérieur du triangle rectangle délimité par les deux axes et la droite d'équation $x + y - 2 = 0$. Alors,

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow (x,y) \in F\,.$$

De plus, dans $F : f(x,y) = 2$.

2) Sur l'axe Ox, la fonction f s'écrit $f(x,0) = |x| + |x-2|$. Par conséquent

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x,0) = f(t,0) = 2 \quad \text{avec } t \in [0,2]\,.$$

3) Sur l'axe Oy, la fonction f s'écrit $f(0,y) = |y| + |y-2|$. Par conséquent

$$\min_{y\in\mathbb{R}} f(0,y) = f(0,t) = 2 \quad \text{avec } t \in [0,2]\,.$$

4) Sur la droite d d'équation $x + y - 2 = 0$, la fonction f s'écrit $f(x, 2-x) = |x| + |2-x|$. Par conséquent

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x,2-x) = f(t,2-t) = 2 \quad \text{avec } t \in [0,2]\,.$$

En conclusion, $\displaystyle\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = 2$.

$\boxed{\mathbf{3.210}}$ Ce problème revient à trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \sqrt{2}\left(\sqrt{x^2-6x+25} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2-12\,y+40}\right).$$

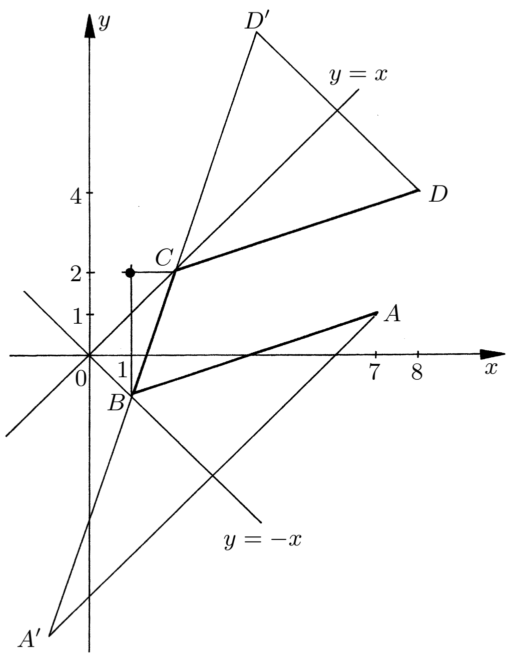
Pour commencer, montrons l'existence de ce minimum. Pour cela, considérons le sous-ensemble $E = \overline{B\big((0,0),12\big)}$. Puisqu'il est compact et que la fonction f est continue, elle atteint son minimum sur E. D'autre part, en constatant que $(0,0) \in E$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E : f(x,y) > f(0,0)$, on peut écrire

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \min_{(x,y)\in E} f(x,y)\,.$$

La fonction f étant de classe $\mathbf{C}^1$, ce minimum est atteint en un de ses points stationnaires. Finalement, puisque l'unique solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sqrt{2}\left(\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+25}} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{2}\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{y-6}{\sqrt{y^2-12\,y+40}}\right) = 0 \end{cases}$$

est $(1,2)$, on a $B = (1,-1)$ et $C = (2,2)$.



$\boxed{\mathbf{3.211}}$ 1) En effet, puisque pour tout $x \in \mathbb{R} : g_\alpha(x) = x^2(\alpha - x)(\alpha - 2x)$, la fonction g_α admet un minimum local en 0.

2) Non, car pour tout $x \neq 0 : f\left(x, \dfrac{3x^2}{2}\right) < f(0,0) = 0 < f\left(x, \dfrac{x^2}{2}\right)$.

$\boxed{\mathbf{3.212}}$ Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$g(t) = f(x = 5\operatorname{ch} t\,,\; y = 5\operatorname{sh} t) = \frac{25}{4}\left(3\,e^{2t} + e^{-2t}\right).$$

Ainsi, puisque pout tout $t \in \mathbb{R} : g'(t) = \frac{25}{2}\,e^{-2t}\big(3e^{4t} - 1\big)$, on a

$$\min_{t\in\mathbb{R}} g(t) = g\left(-\frac{\ln 3}{4}\right) = \frac{25\sqrt{3}}{2}\,.$$

Finalement, en constatant que pour tout $(x,y) \in E : f(x,y) = f(-x,-y)$, on peut écrire

$$\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = \min_{t\in\mathbb{R}} g(t) = \frac{25\sqrt{3}}{2}\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.213}}$ La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points :

1) Si $(a,b) \in B\big((0,0),1\big) : \nabla f(a,b) = (2a, 2b+1) = (0,0)$. D'où

$$(a,b) = \left(0, -\frac{1}{2}\right) \quad\text{et}\quad f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\,.$$

2) Si $(a,b) \in \partial B\big((0,0),1\big) : f(a,b) = b + \frac{3}{2}$ dont les valeurs extrêmes sont atteintes pour $a = 0$ et $b = \pm 1$. En conclusion,

$$\min_{(x,y)\in \overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \frac{1}{4} \quad\text{et}\quad \max_{(x,y)\in \overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \frac{5}{2}\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.214}}$ Soit $g : E = [0,1] \times [0, 2\pi[\;\to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$g(r,\theta) = f(x = r\cos\theta,\, y = r\sin\theta) = \sqrt{2}\,\frac{r}{1+r^2}\,\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right).$$

Ainsi, en remarquant que sur $[0,1]$ la fonction $h(r) = \frac{r}{1+r^2}$ est strictement croissante, on peut écrire

$$\min_{(x,y)\in \overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \min_{(r,\theta)\in E} g(r,\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

$$\max_{(x,y)\in \overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \max_{(r,\theta)\in E} g(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

$\boxed{\textbf{3.215}}$ Soit $g : D = [2,3] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$g(r,\theta) = f(x = r\cos\theta,\, y = r\sin\theta) = r\frac{\sin\theta}{1+\operatorname{cotg}\theta}\,.$$

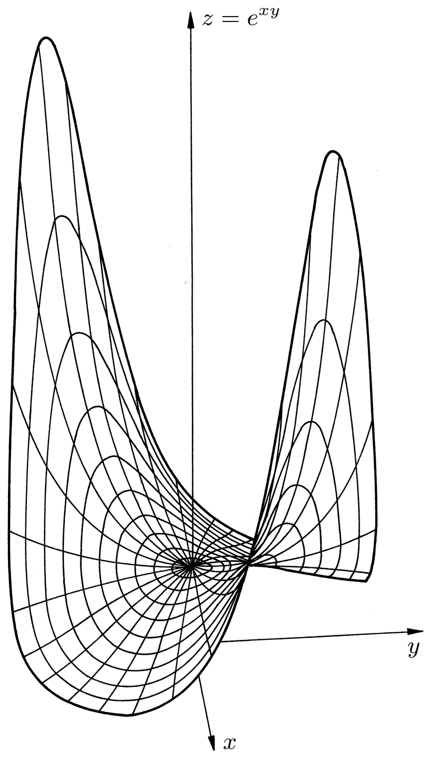
Ainsi, en remarquant que sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction $h(\theta) = \frac{\sin\theta}{1+\operatorname{cotg}\theta}$ est strictement croissante, on peut écrire

$$\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = \min_{(r,\theta)\in D} g(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \max_{(x,y)\in E} f(x,y) = \max_{(r,\theta)\in D} g(r,\theta) = 3\,.$$

$\boxed{\textbf{3.216}}$ 1) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Ainsi, en constatant que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(\cos tx + y\sin tx)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-x\sin tx + xy\cos tx}{\cos tx + y\sin tx} = xy\,,$$

on obtient bien que $f(x,y) = \lim\limits_{t\to 0} e^{\frac{\ln(\cos tx + y\sin tx)}{t}} = e^{xy}$.



2) La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

- Si $(a,b) \in B\big((0,0),2\big)$, on doit avoir

$$\nabla f(a,b) = \big(b\,e^{ab},\, a\,e^{ab}\big) = (0,0) \Longleftrightarrow a = b = 0$$

 et $f(0,0) = 1$.

- Supposons à présent que $(a,b) \in \partial B\big((0,0),2\big)$ et considérons la fonction auxiliaire $g : [0,2\pi[\to \mathbb{R}$ définie par $g(\theta) = f(x = 2\cos\theta,\ y = 2\sin\theta) = e^{2\sin 2\theta}$. Alors,

$$\min_{(x,y)\in\partial B((0,0),2)} f(x,y) = \min_{0\le\theta<2\pi} g(\theta) = e^{-2}\,,$$
$$\max_{(x,y)\in\partial B((0,0),2)} f(x,y) = \max_{0\le\theta<2\pi} g(\theta) = e^{2}\,.$$

Finalement, $\displaystyle\min_{(x,y)\in\overline{B((0,0),2)}} f(x,y) = e^{-2}$ et $\displaystyle\max_{(x,y)\in\overline{B((0,0),2)}} f(x,y) = e^{2}$.

$\boxed{\textbf{3.217}}$ En remarquant que $\left\{t = \sqrt{x^2+y^2} : (x,y) \in \overline{B\big((2,0),2\big)}\right\} = [0,4]$, ce problème revient tout simplement à trouver les extrema de la fonction $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \begin{cases} 2t - t^2 & \text{si } 0 \le t < 2 \\ t^2 - 2t & \text{si } 2 \le t \le 4\,. \end{cases}$$

D'où

$$\min_{(x,y)\in\overline{B((2,0),2)}} f(x,y) = \min_{0\le t\le 4} g(t) = 0\,,$$
$$\max_{(x,y)\in\overline{B((2,0),2)}} f(x,y) = \max_{0\le t\le 4} g(t) = 8\,.$$

$\boxed{\textbf{3.218}}$ La fonction f étant continue sur le compact E (ellipsoïde), elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b,c) un de ces points. Alors, $(a,b,c) \notin \mathring{E}$ car sur $\mathring{E} : \nabla f(x,y,z) = (-1,1,2) \neq (0,0,0)$. Par conséquent $(a,b,c) \in \partial E$ et posons

$$g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2x - 8z - 11\,.$$

Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b,c) \neq (0,0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b,c) = (0,0,0)$. D'où

$$\begin{cases} -1 + 2\lambda(a+1) = 0 \\ 1 + 4\lambda b = 0 \\ 2 + 8\lambda(c-1) = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \ a+1 = -2b = -2(c-1)\,;$$

ce qui entraîne, puisque $g(a,b,c) = 0$, que

$$(a,b,c) = \left(-1 + \frac{8}{\sqrt{10}}, -\frac{4}{\sqrt{10}}, 1 - \frac{4}{\sqrt{10}}\right)$$

ou

$$(a,b,c) = \left(-1 - \frac{8}{\sqrt{10}}, \frac{4}{\sqrt{10}}, 1 + \frac{4}{\sqrt{10}}\right).$$

En conclusion,

$$\min_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z) = f\left(-1+\frac{8}{\sqrt{10}}, -\frac{4}{\sqrt{10}}, 1-\frac{4}{\sqrt{10}}\right) = 7-2\sqrt{10}$$

et

$$\max_{(x,y,z)\in E} f(x,y) = f\left(-1-\frac{8}{\sqrt{10}}, \frac{4}{\sqrt{10}}, 1+\frac{4}{\sqrt{10}}\right) = 7+2\sqrt{10}\,.$$

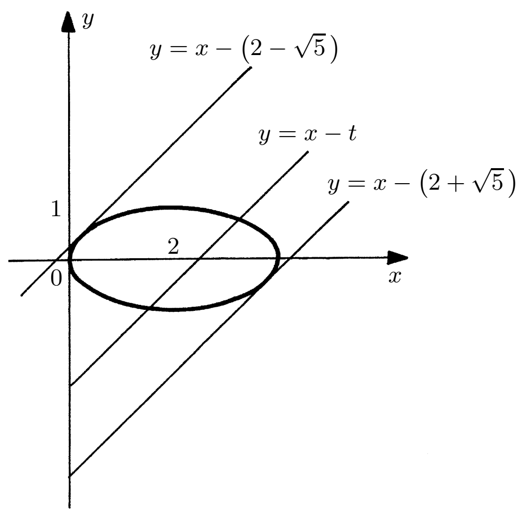
$\boxed{\textbf{3.219}}$ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, désignons par d_t la droite d'équation $y = x - t$. Ainsi, puisque

$$E \cap d_t \neq \emptyset \iff -t^2+4t+1 \geq 0 \iff 2-\sqrt{5} \leq t \leq 2+\sqrt{5}$$

et la fonction $g(t) = \ln(1+t) + e^{-\frac{1}{1+t}}$ strictement croissante sur $]-1,+\infty[$, on peut écrire

$$\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = g\left(2-\sqrt{5}\right) = \ln\left(3-\sqrt{5}\right) + e^{-\frac{1}{3-\sqrt{5}}}\,,$$

$$\max_{(x,y)\in E} f(x,y) = g\left(2+\sqrt{5}\right) = \ln\left(3+\sqrt{5}\right) + e^{-\frac{1}{3+\sqrt{5}}}\,.$$



$\boxed{\textbf{3.220}}$ Posons $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = 8\,,\ x,y > 0\right\}$. Alors, les extrema de la fonction f sur E sont les mêmes que ceux de la fonction $g :]0,8[\to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(t, 8-t) = 2t(8-t)(t-4)$. Par conséquent

$$\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = g\left(4-\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{256}{3\sqrt{3}}\,,$$

$$\max_{(x,y)\in E} f(x,y) = g\left(4+\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{256}{3\sqrt{3}}\,.$$

3.221 Posons $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin x \sin y = \frac{1}{2},\ 0 \le x, y \le \pi\}$. Alors, en constatant que la condition $\sin x \sin y = \frac{1}{2}$ avec $0 \le x,\ y \le \pi$ est équivalente à $y = \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2\sin x}$ ou $\pi - \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2\sin x}$ avec $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6}$, les extrema de la fonction f sur E sont les mêmes que ceux de la fonction $g : \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \frac{1}{4}\left(\operatorname{cotg}^2 t - 1\right) + \sin^2 t\,.$$

Par conséquent $\displaystyle\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\max_{(x,y)\in E} f(x,y) = \frac{3}{4}$.

3.222 La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. En constatant que dans $B\big((0,0),1\big)$: $\nabla f(x,y) \ne (0,0)$, on a $(a,b) \in \partial B\big((0,0),1\big)$ et posons $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Ainsi, puisque $\nabla g(a,b) \ne (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} b\, e^{(a-1)b} + 2\lambda a = 0 \\ (a-1)\, e^{(a-1)b} + 2\lambda b = 0 \end{cases} \Longrightarrow b^2 = a(a-1)\,.$$

Comme de plus $g(a,b) = 0$, on a : $(a,b) = \left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ou $(1,0)$ et

$$f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e^{\frac{3\sqrt{3}}{4}}\,, \quad f\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e^{-\frac{3\sqrt{3}}{4}} \quad \text{et} \quad f(1,0) = 1\,.$$

En conclusion,

$$\min_{(x,y)\in \overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = e^{-\frac{3\sqrt{3}}{4}} \quad \text{et} \quad \max_{(x,y)\in \overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = e^{\frac{3\sqrt{3}}{4}}\,.$$

3.223 La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. En constatant que $\nabla f(a,b) \ne (0,0)$, on a $(a,b) \in \partial B\big((0,0),1\big)$ et posons $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Ainsi, puisque $\nabla g(a,b) \ne (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda a = 0 \\ 2 + 2\lambda b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 2a\,.$$

Par conséquent

$$\min_{(x,y)\in \overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}\,,$$

$$\max_{(x,y)\in \overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.224}}$ La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

1) Si $(a,b) \in B\big((0,0),1\big)$, on doit avoir

$$\nabla f(a,b) = (2a+b, a-2b) = (0,0) \Longleftrightarrow a = b = 0$$

et $f(0,0) = 0$.

2) Supposons à présent que $(a,b) \in \partial B\big((0,0),1\big)$ et posons $g(x,y) = x^2+y^2-1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2(1+\lambda)a + b = 0 \\ a + 2(-1+\lambda)b = 0\ ; \end{cases}$$

ce qui entraîne, puisque $(a,b) \neq (0,0)$, que

$$\det\begin{pmatrix} 2(1+\lambda) & 1 \\ 1 & 2(-1+\lambda) \end{pmatrix} = 4\lambda^2 - 5 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

- $\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2}$. Alors, $b = \big(\sqrt{5}-2\big)a$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a

$$(a,b) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}}\,, \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}}\right) \text{ et } f(a,b) = \frac{-10+5\sqrt{5}}{10-4\sqrt{5}}\,.$$

- $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Alors, $b = -\big(\sqrt{5}+2\big)a$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a

$$(a,b) = \pm\left(-\frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\,, \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\right) \text{ et } f(a,b) = -\frac{10+5\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}\,.$$

En conclusion,

$$\min_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = -\frac{10+5\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}} \text{ et } \max_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \frac{-10+5\sqrt{5}}{10-4\sqrt{5}}\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.225}}$ La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

1) Si $(a,b) \in B\big((0,0),1\big)$, on doit avoir

$$\nabla f(a,b) = \big(4a(1-8a^6), 4b(1-8b^6)\big) = (0,0)$$

ou encore

$$(a,b) = (0,0) \text{ ou } \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ou } \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

De plus, $f(0,0) = 1$ et $f\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{7}{4}$.

2) Supposons à présent que $(a,b) \in \partial B\big((0,0),1\big)$ et posons $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire de sorte que $\nabla(f_1 + \lambda g)(a,b) = (0,0)$ avec $f_1(x,y) = -x^8 - y^8$. D'où

$$\begin{cases} -2a(4a^6 - \lambda) = 0 \\ -2b(4b^6 - \lambda) = 0\,. \end{cases}$$

- Si $ab = 0$, puisque $g(a,b) = 0$, on a $f(a,b) = -1$.
- Si $ab \neq 0$: $a^2 = b^2 = \frac{1}{2}$ et $f(a,b) = \frac{5}{2}$.

En conclusion, $\displaystyle\min_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = -1$ et $\displaystyle\max_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \frac{5}{2}\,.$

3.226 La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

1) Si $(a,b) \in B\big((0,0),1\big)$, on doit avoir

$$\nabla f(a,b) = (10\,a - 6b, -6a + 2b) = (0,0) \Longleftrightarrow a = b = 0\,.$$

$f(0,0) = 0$.

2) Supposons à présent que $(a,b) \in \partial B\big((0,0),1\big)$ et posons $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2(\lambda+5)a - 6b = 0 \\ -6a + 2(\lambda+1)b = 0\ ; \end{cases}$$

ce qui entraîne, puisque $(a,b) \neq (0,0)$, que

$$\det\begin{pmatrix} 2(\lambda+5) & -6 \\ -6 & 2(\lambda+1) \end{pmatrix} = 4\lambda^2 + 24\,\lambda - 16 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -3 \pm \sqrt{13}\,.$$

- $\lambda = -3 - \sqrt{13}$. Alors, $b = \frac{2-\sqrt{13}}{3}a$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a

$$(a,b) = \pm\left(\frac{3}{\sqrt{26 - 4\sqrt{13}}}\,,\ \frac{2-\sqrt{13}}{\sqrt{26-4\sqrt{13}}}\right) \text{ et } f(a,b) = \frac{27 + 14\sqrt{13}}{26 - 4\sqrt{13}}\,.$$

- $\lambda = -3 + \sqrt{13}$. Alors, $b = \frac{2+\sqrt{13}}{3}a$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a

$$(a,b) = \pm\left(\frac{3}{\sqrt{26 + 4\sqrt{13}}}\,,\ \frac{2+\sqrt{13}}{\sqrt{26+4\sqrt{13}}}\right) \text{ et } f(a,b) = \frac{27 - 14\sqrt{13}}{26 + 4\sqrt{13}}\,.$$

En conclusion,

$$\min_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \frac{27 - 14\sqrt{13}}{26 + 4\sqrt{13}} \text{ et } \max_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \frac{27 + 14\sqrt{13}}{26 - 4\sqrt{13}}\,.$$

$\boxed{\textbf{3.227}}$ La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a, b) un de ces points. Alors,

1) $(a, b) \notin B\big((0,0), 1\big)$ car sur $B\big((0,0), 1\big)$:

$$\nabla f(x,y) = \left(1 + y + \frac{x}{2 + x^2 + y^2}\,,\ x + \frac{y}{2 + x^2 + y^2}\right) \neq (0,0)\,.$$

En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$. Alors, $x^2 = y(y+1)$. Comme de plus $x^2 + y^2 < 1$, on aurait $0 \leq |x|,\ y < 1$; ce qui entraînerait que

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y) = 1 + y + \frac{x}{2 + x^2 + y^2} > \frac{1}{2}\,.$$

D'où contradiction.

2) Par conséquent $(a, b) \in \partial B\big((0,0), 1\big)$ et posons $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a, b) \neq (0, 0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f_1 + \lambda g)(a, b) = (0, 0)$ avec $f_1(x, y) = x(1 + y) + \frac{\ln 3}{2}$ ($f = f_1$ sur $\partial B\big((0,0),1\big)$). D'où

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda a + b = 0 \\ a + 2\lambda b = 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b(1+b).$$

Ainsi, puisque $g(a, b) = 0$, on a $(a, b) = (0, -1)$ ou $\big(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\big)$ et

$$f_1(0,1) = \frac{\ln 3}{2}\,,\ \ f_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\ln 3}{2}\,,$$
$$f_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\ln 3}{2}\,.$$

En conclusion,

$$\min_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\ln 3}{2} \quad \text{et} \quad \max_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\ln 3}{2}\,.$$

$\boxed{\textbf{3.228}}$ 1) Pour commencer, on va trouver les extrema de la fonction auxiliaire $h : \overline{B\big((0,0),1\big)} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = x^6 + y^6 + x^2 + y^2 + 1$. Cette fonction étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a, b) un de ces points. Alors,

$$\nabla h(a,b) = \big(2a(1+3a^4),\ 2b(1+3b^4)\big) = (0,0) \Longleftrightarrow a = b = 0$$

et $h(0, 0) = 1$.

2) Supposons à présent que $(a, b) \in \partial B\big((0,0), 1\big)$ et posons $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a, b) \neq (0, 0)$, on sait, d'après le théorème de

Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(h_1+\lambda g)(a,b)=(0,0)$ avec $h_1(x,y)=x^6+y^6+2$ ($h=h_1$ sur $\partial B\big((0,0),1\big)$). D'où

$$\begin{cases} 2a(3a^4+\lambda)=0 \\ 2b(3b^4+\lambda)=0\,. \end{cases}$$

Ainsi,

- $ab=0$. Alors, puisque $g(a,b)=0$, on a $(a,b)=(0,\pm1)$ ou $(\pm1,0)$ et $h(a,b)=h_1(a,b)=3$.
- $ab\neq 0$. Alors, $a^2=b^2=\dfrac{1}{2}$ et $h(a,b)=h_1(a,b)=\dfrac{9}{4}$.

Finalement, puisque la fonction Arctg est une fonction strictement croissante, on peut écrire

$$\min_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y)=\operatorname{Arctg}1=\frac{\pi}{4}\quad\text{et}\quad \max_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y)=\operatorname{Arctg}3\,.$$

3.229 La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

1) Si $(a,b)\in B\big((0,0),1\big)$, on doit avoir

$$\nabla f(a,b)=\left(\frac{2a^3}{2+a^4+b^4},\frac{2b^3}{2+a^4+b^4}\right)=(0,0)\Longleftrightarrow a=b=0$$

et $f(0,0)=\frac{\ln 2}{2}$.

2) Supposons à présent que $(a,b)\in\partial B\big((0,0),1\big)$ et posons $g(x,y)=x^2+y^2-1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b)\neq(0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b)=(0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2a\left(\dfrac{a^2}{2+a^4+b^4}+\lambda\right)=0 \\ 2b\left(\dfrac{b^2}{2+a^4+b^4}+\lambda\right)=0\,. \end{cases}$$

Ainsi,

- $ab=0$. Alors, puisque $g(a,b)=0$, on a $(a,b)=(0,\pm1)$ ou $(\pm1,0)$ et $f(a,b)=\frac{\ln 3}{2}$.
- $ab\neq 0$. Alors, $a^2=b^2=\frac{1}{2}$ et $f(a,b)=\frac{\ln\frac{5}{2}}{2}$.

En conclusion, $\displaystyle\min_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y)=\frac{\ln 2}{2}$ et $\displaystyle\max_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y)=\frac{\ln 3}{2}$.

$\boxed{\textbf{3.230}}$ La fonction f étant continue sur le compact D, elle atteint ses extrema qui se trouvent obligatoirement parmi les points suivants :

1) $\nabla f(x,y) = (2xy, x^2+3y^2-3) = (0,0)$ et $(x,y) \in \mathring{D}$ dont l'unique solution est $(0,1)$. De plus, $f(0,1) = 2$.
2) Sur $-2 \leq x \leq 2$ et $y = 0$: $f(x,y) = 4$.
3) Sur $x^2+y^2 = 4$ et $y \geq 0$: $f(x,y) = y+4$ dont la valeur minimale est 4 et la valeur maximale $f(0,2) = 6$.

En conclusion,

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = 2 \quad \text{et} \quad \max_{(x,y)\in D} f(x,y) = 6\,.$$

$\boxed{\textbf{3.231}}$ 1) Pour commencer, on va trouver les extrema de la fonction auxiliaire $h : \overline{B\big((0,0),1\big)} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = xy$. Cette fonction étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

$$\nabla h(a,b) = (b,a) = (0,0) \iff a = b = 0$$

et $h(0,0) = 1$.
2) Supposons à présent que $(a,b) \in \partial B\big((0,0),1\big)$ et posons $g(x,y) = x^2+y^2-1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(h+\lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2\lambda a + b = 0 \\ a + 2\lambda b = 0\,; \end{cases}$$

ce qui entraîne, puisque $(a,b) \neq (0,0)$, que

$$\det\begin{pmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix} = 4\lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = \pm\frac{1}{2}\,.$$

- $\lambda = -\frac{1}{2}$. Alors, $b = a$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a
$$(a,b) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
et $h(a,b) = \frac{1}{2}$.
- $\lambda = \frac{1}{2}$. Alors, $b = -a$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a
$$(a,b) = \pm\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
et $h(a,b) = -\frac{1}{2}$.

Finalement, puisque la fonction Arctg est une fonction strictement croissante, on peut écrire

$$\min_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = -\operatorname{Arctg}\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \max_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \operatorname{Arctg}\frac{1}{2}\,.$$

$\boxed{\textbf{3.232}}$ La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

1) $(a,b) \notin \mathring{E}$ car sur $\mathring{E}$: $\nabla f(x,y) = (-1,1) \neq (0,0)$.

2) Par conséquent $(a,b) \in \partial E$ et posons $g(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2x - 1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} -1 + 2\lambda(a+1) = 0 \\ 1 + 4\lambda b = 0 \end{cases} \Rightarrow a + 1 = -2b\,;$$

ce qui entraîne, puisque $g(a,b) = 0$, que

$$(a,b) = \left(-1 - \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ ou } \left(-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

et

$$f\left(-1 - \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3 + \sqrt{3} \text{ et } f\left(-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3 - \sqrt{3}\,.$$

En conclusion, $\displaystyle\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = 3 - \sqrt{3}$ et $\displaystyle\max_{(x,y)\in E} f(x,y) = 3 + \sqrt{3}$.

$\boxed{\textbf{3.233}}$ La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

1) $(a,b) \notin \mathring{E}$ car sur $\mathring{E}$: $\nabla f(x,y) = (6x, 2y) \neq (0,0)$.

2) Par conséquent $(a,b) \in \partial E$ et posons $g(x,y) = 9x^2 + (y-1)^2 - 1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 6a(1 + 3\lambda) = 0 \\ 2b + 2\lambda(b-1) = 0\,. \end{cases}$$

- $\lambda = \frac{-1}{3}$. Alors, $b = -\frac{1}{2}$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a $9a^2 = -\frac{5}{4}$; ce qui est impossible. Ce cas est donc à rejeter.
- $\lambda \neq -\frac{1}{3}$. Alors, $a = 0$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a $b = 0$ ou 2.

En conclusion, $\displaystyle\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = f(0,0) = 0$ et $\displaystyle\max_{(x,y)\in E} f(x,y) = f(0,2) = 4$.

$\boxed{\textbf{3.234}}$ Puisque la fonction ch est strictement croissante, ce problème revient à chercher les extrema de la fonction $h : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x,y) = x^2 + y^2 + x^6 + y^6\,.$$

Cette fonction étant continue sur le compact E, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

1) Si $(a,b) \in B\big((0,0),4\big)$, on doit avoir

$$\nabla h(a,b) = \big(2a(1+3a^4), 2b(1+3b^4)\big) = (0,0)\,.$$

D'où $a=b=0$ et $h(0,0)=0$.

2) Supposons à présent que $(a,b) \in \partial B\big((0,0),4\big)$ et posons $g(x,y) = x^2+y^2-4$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(h_1+\lambda g)(a,b) = (0,0)$ avec $h_1(x,y) = x^6+y^6$. D'où

$$\begin{cases} 6a^5 + 2\lambda a = 2a(3a^4+\lambda) = 0 \\ 6b^5 + 2\lambda b = 2b(3b^4+\lambda) = 0\,. \end{cases}$$

- Si $ab = 0 : h(a,b) = 68$.
- Si $ab \neq 0 : a^2 = b^2 = 2$ et $h(a,b) = 20$.

En conclusion, $\displaystyle\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = 5 + \operatorname{ch} 1$ et $\displaystyle\max_{(x,y)\in E} f(x,y) = 5 + \operatorname{ch} 69\,.$

3.235 La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

1) Si $(a,b) \in \mathring{E}$, on doit avoir

$$\nabla f(a,b) = (2a+b,\ a+4b) = (0,0) \Longleftrightarrow a=b=0$$

et $f(0,0)=0$.

2) Supposons à présent que $(a,b) \in \partial E$ et posons $g(x,y) = x^2+2y^2-4$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f_1+\lambda g)(a,b) = (0,0)$ avec $f_1(x,y) = 4+xy$ ($f_1 = f$ sur ∂E). D'où

$$\begin{cases} 2\lambda a + b = 0 \\ a + 4\lambda b = 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 2b^2\,.$$

Ainsi, puisque $g(a,b)=0$, on a $(a,b) = \pm\big(-\sqrt{2},1\big)$ ou $\pm\big(\sqrt{2},1\big)$ et $f_1(a,b) = 4 \pm \sqrt{2}$.

En conclusion, $\displaystyle\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = 0$ et $\displaystyle\max_{(x,y)\in E} f(x,y) = 4+\sqrt{2}\,.$

3.236 Soit $g : [0, \operatorname{Arctg} 5] \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$g(t) = f(1+5\cos t, 2+2\sin t) = 7 + 5\cos t + 6\sin t\,.$$

Puisque pour tout $t \in \;]0, \operatorname{Arctg} 5[$:

$$g'(t) = -5\sin t + 6\cos t\,,$$

$g'(t) > 0$ sur $]0, \operatorname{Arctg}\frac{6}{5}[$ et $g'(t) < 0$ sur $]\operatorname{Arctg}\frac{6}{5}, \operatorname{Arctg} 5[$; ce qui entraîne que la fonction continue g est strictement croissante sur $[0, \operatorname{Arctg}\frac{6}{5}]$ et strictement

décroissante sur $[\operatorname{Arctg}\frac{6}{5}, \operatorname{Arctg} 5]$. Par conséquent la valeur maximale de la fonction g est $g(\operatorname{Arctg}\frac{6}{5}) = 7+\sqrt{61}$.
Ainsi, puisque

$$D = \left\{(1+5\rho\cos t, 2+2\rho\sin t) : 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le t \le \operatorname{Arctg} 5\right\}$$

et pour tout $(\rho, t) \in [0,1]\times[0, \operatorname{Arctg} 5]$:

$$\begin{aligned} 7 = f(1,2) &\le f(1+5\rho\cos t, 2+2\rho\sin t) = 7+5\rho\cos t+6\rho\sin t \\ &\le 7+5\cos t+6\sin t \le 7+\sqrt{61} = f\left(1+\frac{25}{\sqrt{61}}, 2+\frac{12}{\sqrt{61}}\right), \end{aligned}$$

la valeur minimale de la fonction f est 7 tandis que sa valeur maximale est $7+\sqrt{61}$.

3.237 En constatant que $(\frac{5}{4}, \frac{104}{25}) \in D$ et que pour tout $(x,y)\in D$:

$$f(x,y) = 4\left(\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + 1 - \frac{5^2}{4^2}\right) + 25\left(\left(y-\frac{104}{25}\right)^2 + 16 - \frac{104^2}{25^2}\right),$$

on peut affirmer, sans autre, que la fonction f atteint son minimum au point $(\frac{5}{4}, \frac{104}{25})$ et qu'il vaut $f(\frac{5}{4}, \frac{104}{25}) = -\frac{3489}{100}$.
Maintenant trouvons son maximum. Ce maximum existe car la fonction f est continue sur le compact D et il se trouve parmi les points stationnaires de f ou sur $\partial D = E\cup F$ avec

$$E = \left\{(0,y)\in\mathbb{R}^2 : 4\left(1-\frac{\sqrt{6}}{5}\right) \le y \le 4\left(1+\frac{\sqrt{6}}{5}\right)\right\}$$

et

$$F = \left\{(1+5\cos t, 4+2\sin t) : |t| \le \operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{5}\right)\right\}.$$

1) Puisque $\nabla f(x,y) = (8x-10\,,\,50\,y-208)$, l'unique point stationnaire de la fonction f est $(\frac{5}{4}, \frac{104}{25})$ et l'on sait qu'en ce point elle atteint son minimum.
2) Sur E, la fonction f atteint son maximum au point $\big(0, 4(1-\frac{\sqrt{6}}{5})\big)$ et $f\big(0, 4(1-\frac{\sqrt{6}}{5})\big) = 68+\frac{32\sqrt{6}}{5}$.
3) Pour finir, considérons la fonction auxiliaire g définie, pour $|t| \le \operatorname{Arccos}(-\frac{1}{5})$, par

$$g(t) = f(1+5\cos t, 4+2\sin t) = 66-10\cos t-16\sin t\,.$$

Puisque pour tout $|t| < \operatorname{Arccos}(-\frac{1}{5})$:

$$g'(t) = 10\sin t - 16\cos t\,,$$

$g'(t) < 0$ sur $\left]-\operatorname{Arccos}(-\frac{1}{5}), \operatorname{Arctg}\frac{8}{5}\right[$ et $g'(t) > 0$ sur $\left]\operatorname{Arctg}\frac{8}{5}, \operatorname{Arccos}(-\frac{1}{5})\right[$; ce qui entraîne que la fonction continue g est strictement décroissante sur

$\left[-\operatorname{Arccos}(-\frac{1}{5}), \operatorname{Arctg}\frac{8}{5}\right]$, strictement croissante sur $\left[\operatorname{Arctg}\frac{8}{5}, \operatorname{Arccos}(-\frac{1}{5})\right]$ et sa valeur maximale est atteinte pour $t = -\operatorname{Arccos}(-\frac{1}{5})$. Par conséquent, la fonction f atteint son maximum sur F en $\left(0, 4\left(1-\frac{\sqrt{6}}{5}\right)\right)$.

En résumé, le minimum de la fonction f vaut $-\frac{3489}{100}$ et son maximum $68+\frac{32\sqrt{6}}{5}$.

$\boxed{\mathbf{3.238}}$ La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

1) Si $(a,b) \in \mathring{E}$, on doit avoir

$$\nabla f(a,b) = (1+2a, 2b) = (0,0) \Longleftrightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ et } b = 0$$

et $f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$.

2) Supposons à présent que $(a,b) \in \partial E$ et posons $g(x,y) = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - 1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 1 + 2\left(1+\dfrac{\lambda}{25}\right) a = 0 \\ 2b\left(1+\dfrac{\lambda}{16}\right) = 0\,. \end{cases}$$

- $b = 0$. Alors, puisque $g(a,b) = 0$, on a $|a| = 5$. D'où $f(-5,0) = 20$ et $f(5,0) = 30$.
- $b \neq 0$. Alors, $\lambda = -16$ et $a = -\frac{25}{18}$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a

$$b^2 = 16\left(1 - \frac{25}{18^2}\right) \text{ et } f(a,b) = -\frac{25}{18} + \frac{25^2}{18^2} + 16\left(1 - \frac{25}{18^2}\right).$$

En conclusion, $\displaystyle\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = -\frac{1}{4}$ et $\displaystyle\max_{(x,y)\in E} f(x,y) = 30$.

$\boxed{\mathbf{3.239}}$ Posons $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3\sqrt{2}xy \geq 1\right\}$ et montrons que la restriction de la fonction f à E atteint son minimum. Pour cela, posons $E_1 = E \cap \overline{B((0,0),1)}$. Puisque E_1 est compact et f continue, il existe $(a,b) \in E_1$ pour lequel on a

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in E_1} f(x,y)\,.$$

Ainsi, en constatant que $f(a,b) \leq f(1,0) = 1$ car $(1,0) \in E_1$ tandis que pour tout $(x,y) \in E \setminus E_1 : f(x,y) \geq x^2 + y^2 > 1$, on peut écrire

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in E} f(x,y)\,.$$

1) $(a,b) \notin \mathring{E}$ car sur $\mathring{E}$: $\nabla f(x,y) = (2x, 12\,y) \neq (0,0)$.

2) Par conséquent $(a,b) \in \partial E$ et posons $g(x,y) = x^2 + 3\sqrt{2}xy - 1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2(1+\lambda)a + 3\sqrt{2}\,\lambda b = 0 \\ 3\sqrt{2}\,\lambda a + 12\,b = 0\ ; \end{cases}$$

ce qui entraîne, puisque $(a,b) \neq (0,0)$, que

$$\det\begin{pmatrix} 2(1+\lambda) & 3\sqrt{2}\lambda \\ 3\sqrt{2}\lambda & 12 \end{pmatrix} = -18\,\lambda^2 + 24\,\lambda + 24 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -\frac{2}{3} \text{ ou } 2\,.$$

- $\lambda = -\frac{2}{3}$. Alors, $b = \frac{a}{3\sqrt{2}}$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a $2a^2 = 1$ et $f(a,b) = \frac{2}{3}$.
- $\lambda = 2$. Alors, $b = -\frac{a}{\sqrt{2}}$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a $-2a^2 = 1$; ce qui est impossible. Ce cas est donc à exclure.

En conclusion, $\displaystyle\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = \frac{2}{3}$.

$\boxed{\textbf{3.240}}$ Pour commencer, notons que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \int_x^y t\,e^{-t^2}\,dt = -\frac{e^{-t^2}}{2}\bigg|_x^y = \frac{1}{2}\left(e^{-x^2} - e^{-y^2}\right)$$

et posons $E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^{x^2} + e^{y^2} = 8\big\}$. Puisque f est continue sur le compact E, sa restriction à E atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points et posons $g(x,y) = e^{x^2} + e^{y^2} - 8$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} -a\big(e^{-a^2} - 2\lambda\,e^{a^2}\big) = 0 \\ b\big(e^{-b^2} + 2\lambda\,e^{b^2}\big) = 0 \end{cases} \Rightarrow ab = 0\ ;$$

ce qui nous permet de conclure que

$$\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = f(a,0) = -\frac{3}{7} \text{ et } \max_{(x,y)\in E} f(x,y) = f(0,b) = \frac{3}{7}\,.$$

$\boxed{\textbf{3.241}}$ La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b,c) un de ces points. Alors, $f(a,b,c) = abc \neq 0$ car $f\big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\big) > 0$ et $f\big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\big) < 0$. Alors,

1) $(a,b,c) \notin B\big((0,0,0),1\big)$ car sur $B\big((0,0,0),1\big)$:

$$\nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy) = (0,0,0) \Rightarrow f(x,y,z) = 0\,.$$

2) Par conséquent $(a,b,c) \in \partial B\big((0,0),1\big)$ et posons $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b,c) \neq (0,0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b,c) = (0,0,0)$. D'où

$$\begin{cases} bc + 2\lambda a = 0 \\ ac + 2\lambda b = 0 \\ ab + 2\lambda c = 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 = c^2 \ ;$$

ce qui entraîne, puisque $g(a,b,c) = 0$, que $a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{3}$.

En conclusion,

$$\min_{(x,y,z)\in\overline{B((0,0,0),1)}} f(x,y,z) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \max_{(x,y,z)\in\overline{B((0,0,0),1)}} f(x,y,z) = \frac{1}{3\sqrt{3}}\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.242}}$ La fonction f étant continue, elle atteint ses extrema sur le compact $\overline{B\big((0,0,0),1\big)}$. Désignons (a,b,c) un de ces points.

1) $(a,b,c) \notin B\big((0,0,0),1\big)$ car sur $B\big((0,0,0),1\big)$

$$\nabla f(x,y,z) = (z, 2y, x-1) \neq \mathbf{0}\,.$$

2) Par conséquent $(a,b,c) \in \partial B\big((0,0,0),1\big)$ et posons $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b,c) \neq \mathbf{0}$, on sait,d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b,c) = \mathbf{0}$. D'où

$$\begin{cases} 2\lambda a + c = 0 \\ 2(\lambda+1)b = 0 \\ (a-1) + 2\lambda c = 0\,. \end{cases}$$

- Si $\lambda = -1$: $a = -\frac{1}{3}$ et $c = -\frac{2}{3}$; ce qui entraîne, puisque $g(a,b,c) = 0, b = \pm\frac{2}{3}$ et $f(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}$.
- Si $\lambda \neq -1$: $b = 0$ et $c^2 = a(a-1)$; ce qui entraîne, puisque $g(a,b,c) = 0$, que $(a,c) = (1,0)$ ou $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ et $f(1,0,0) = 0$, $f(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ et $f(-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

En conclusion,

$$\max_{(x,y,z)\in\overline{B((0,0,0),1)}} f(x,y,z) = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad \min_{(x,y,z)\in\overline{B((0,0,0),1)}} f(x,y,z) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.243}}$ La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b,c) un de ces points. Alors,

1) Si $(a,b,c) \in B\big((0,0,0),1\big)$, on doit avoir

$$\nabla f(a,b,c) = (b+c,\, a+c,\, a+b) = (0,0,0) \Longleftrightarrow a = b = c = 0$$

et $f(0,0,0) = 0$.

2) Supposons à présent que $(a,b,c) \in \partial B\big((0,0),1\big)$ et posons $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b,c) \neq (0,0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b,c) = (0,0,0)$. D'où

$$\left\{\begin{array}{l} b+c+2\lambda a = 0 \\ a+c+2\lambda b = 0 \\ a+b+2\lambda c = 0 \end{array}\right. \Rightarrow (\lambda+1)(a+b+c) = 0\,.$$

- $\lambda = -1$. Alors, $0 = a(b+c-2a)+b(a+c-2b)+c(a+b-2c) = 2f(a,b,c)-2$ ou encore $f(a,b,c) = 1$.
- $\lambda \neq -1$. Alors, $0 = (a+b+c)^2 = 1+2f(a,b,c)$ ou encore $f(a,b,c) = -\frac{1}{2}$.

En conclusion,

$$\min_{(x,y,z)\in\overline{B((0,0,0),1)}} f(x,y,z) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \max_{(x,y,z)\in\overline{B((0,0,0),1)}} f(x,y,z) = 1\,.$$

$\boxed{\textbf{3.244}}$ Ce problème revient à trouver le carré de la plus longue et de la plus courte distance de l'origine à l'ellipsoïde E donné par l'équation de la condition. Ces deux valeurs extrêmes sont atteintes en des points (a,b,c) de E car E est compact. Posons $g(x,y,z) = 5x^2+9y^2+6z^2+4yz-1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b,c) \neq (0,0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b,c) = (0,0,0)$. D'où

$$\left\{\begin{array}{l} 2(1+5\lambda)a = 0 \\ 2(1+9\lambda)b+4\lambda c = 0 \\ 4\lambda b+2(1+6\lambda)c = 0\,. \end{array}\right.$$

1) $b=c=0$. Alors, $5a^2 = 1$ et $f(a,b,c) = \frac{1}{5}$.
2) $(a,b) \neq (0,0)$. Alors,

$$\det\begin{pmatrix} 2(1+9\lambda) & 4\lambda \\ 4\lambda & 2(1+6\lambda) \end{pmatrix} = 4(50\,\lambda^2+15\,\lambda+1) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -\frac{1}{10} \text{ ou } -\frac{1}{5}\,.$$

- $\lambda = -\frac{1}{10}$. Alors, $a=0$ et $b=2c$; ce qui entraîne, puisque $g(a,b,c)=0$, que $5\,0c^2 = 1$ et $f(a,b,c) = \frac{1}{10}$.
- $\lambda = -\frac{1}{5}$. Alors, $c = -2b$; ce qui entraîne, puisque $g(a,b,c) = 0$, que $5a^2+25\,b^2 = 1$ et $f(a,b,c) = a^2+5b^2 = \frac{1}{5}$.

En conclusion, $\displaystyle\min_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z) = \frac{1}{10}$ et $\displaystyle\max_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z) = \frac{1}{5}\,.$

$\boxed{\textbf{3.245}}$ Posons $E = \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^2 : xy+xz+yz-1 = 0\big\}$ et montrons que la restriction de la fonction f à E atteint son minimum. Pour cela, posons $E_1 = E \cap \overline{B\big((0,0,0),3\big)}$. Puisque E_1 est compact et f continue, il existe $(a,b,c) \in E_1$ pour lequel on a $f(a,b,c) = \min_{(x,y,z)\in E_1} f(x,y,z)$. Ainsi, en constatant que

$f(a,b,c) \leq f(1,1,0) = 6$ car $(1,1,0) \in E_1$ tandis que pour tout $(x,y,z) \in E \setminus E_1 : f(x,y,z) \geq x^2+y^2+z^2 > 9$, on peut écrire

$$f(a,b,c) = \min_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z)\,.$$

Posons $g(x,y,z) = xy+xz+yz-1$. Puisque $\nabla g(a,b,c) \neq (0,0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b,c) = (0,0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2a+\lambda b+\lambda c = 0 \\ \lambda a + 10\,b + \lambda c = 0 \\ \lambda a + \lambda b + 16\,c = 0\ ; \end{cases}$$

ce qui entraîne, puisque $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, que

$$\det\begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 10 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 16 \end{pmatrix} = 2(\lambda-4)(\lambda^2-10\,\lambda-40) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 4 \text{ ou } 5\pm\sqrt{65}\,.$$

De plus,

$$\begin{aligned} 0 &= a(2a+\lambda b+\lambda c) + b(\lambda a+10\,b+\lambda c) + c(\lambda a+\lambda b+16\,c) \\ &= 2f(a,b,c) + 2\lambda(ab+ac+bc) = 2\big(f(a,b,c)+\lambda\big)\,. \end{aligned}$$

Par conséquent $\displaystyle\min_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z) = -5+\sqrt{65}$.

$\boxed{\mathbf{3.246}}$ 1) Puisque pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(x,y,z) = 9(x-2)^2 + 36\,(y-1)^2 + 4(z-3)^2 + 10\,,$$

on peut écrire $\displaystyle\min_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} f(x,y,z) = f(2,1,3) = 10$.

2) En constatant que $(2,1,z) \in E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y \leq \alpha\big\} \Longleftrightarrow \alpha \geq 1$, il nous faut étudier les deux cas suivants :

- $\alpha \geq 1$. Alors, $\displaystyle\min_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z) = f(2,1,3) = 10$.
- $\alpha < 1$. Dans ce cas, le problème revient à trouver le minimum de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = 9(x-2)^2 + 36\,(y-1)^2 + 10$ sous la condition $x-y \leq \alpha$. Posons $F = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y \leq \alpha\big\}$. Pour commencer, montrons l'existence de ce minimum. Puisque $F_1 = F \cap \overline{B\big((2,1), 2(1-\alpha)\big)}$ est compact et g continue, il existe $(a,b) \in F_1$ pour lequel on a

  $$g(a,b) = \min_{(x,y)\in F_1} g(x,y)\,.$$

  Ainsi, en constatant que $g(a,b) \leq g(1+\alpha,1) = 9(1-\alpha)^2 + 10$ car $(1+\alpha,1) \in F_1$ tandis que pour tout $(x,y) \in F \setminus F_1 : g(x,y) > 36\,(1-\alpha)^2 + 10$, on peut écrire

  $$g(a,b) = \min_{(x,y)\in F} g(x,y)\,.$$

A présent, calculons ce minimum. Puisque $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on a $(a,b) \in \partial F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = x - y - \alpha = 0\}$. Ainsi, $\nabla h(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ pour lequel $\nabla(g + \lambda h)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\left\{\begin{array}{l} 18\,(a-2) + \lambda = 0 \\ 72\,(b-1) - \lambda = 0 \end{array}\right. \Rightarrow (a-2) = -4(b-1)\ ;$$

ce qui donne, car $a - b = \alpha$, que $a = \dfrac{6+4\alpha}{5}$ et $b = \dfrac{6-\alpha}{5}$.

En conclusion,

$$\min_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z) = f\left(\frac{6+4\alpha}{5}, \frac{6-\alpha}{5}, 3\right) = \min_{(x,y)\in F} g(x,y) = \frac{36}{5}\,(1-\alpha)^2 + 10.$$

3) En remarquant que $z^2 - 8z + 16 = 0$ est équivalent à $z = 4$, le problème proposé revient donc à trouver les extrema de la fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $u(x,y) = 9(x-2)^2 + 36\,(y-1)^2 + 14$ sous la condition $v(x,y) = x^2 + 4y^2 - 32 = 0$. Posons

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : v(x,y) = 0\}\,.$$

Puisque la fonction u est continue sur l'ellipse D qui est compacte, elle atteint ces extrema. Désignons par (r,s) un de ces points. Ainsi, comme $\nabla v(r,s) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire β de sorte que $\nabla(u + \beta v)(r,s) = (0,0)$. D'où

$$\left\{\begin{array}{l} 2(9+\beta)r - 36 = 0 \\ 8(9+\beta)s - 72 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow r = 2s\ ;$$

ce qui entraîne, $v(r,s) = 0$, que $s^2 = 4$ et $u(-4,-2) = 662$ et $u(4,2) = 86$.
En conclusion,

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y,4) = f(4,2,4) = \min_{(x,y)\in D} u(x,y) = 86\,,$$
$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y,4) = f(-4,-2,4) = \max_{(x,y)\in D} u(x,y) = 662\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.247}}$ Posons $g_1(x,y,z) = x + y + z - 1$, $g_2(x,y,z) = xy - 1$ et

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0\}$$

et montrons que la restriction de la fonction f à E atteint son minimum. En effet, puisque $E_1 = E \cap \overline{B((0,0,0),2)}$ est compact et f continue, il existe au moins un élément (a,b,c) de E_1 pour lequel on a

$$f(a,b,c) = \min_{(x,y,z)\in E_1} f(x,y,z)\,.$$

Ainsi, en constatant et $f(a,b,c) \leq f(1,1,-1) = 3$ car $(1,1,-1) \in E_1$ tandis que pour tout $(x,y,z) \in E \setminus E_1 : f(x,y,z) > 4$, on peut écrire

$$f(a,b,c) = \min_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z)\,.$$

A présent, calculons ce minimum. Puisque la matrice des conditions

$$\begin{pmatrix} \nabla g_1(a,b,c) \\ \nabla g_2(a,b,c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 car $ab \neq 0$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe deux scalaires λ_1 et λ_2 de sorte que $\nabla(f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(a,b,c) = (0,0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2a + \lambda_1 + \lambda_2 b = 0 \\ 2b + \lambda_1 + \lambda_2 a = 0 \\ 2c + \lambda_1 = 0\ ; \end{cases}$$

ce qui entraîne, en soustrayant la première égalité à la seconde, que $(a-b)(2-\lambda_2) = 0$. Montrons que $a = b$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que a $a \neq b$. Alors, $\lambda_2 = 2$ et $(2a+\lambda_1+\lambda_2 b)+(2c+\lambda_1) = 2+2\lambda_1 = 0$ ou encore $\lambda_1 = -1$. Par conséquent, en utilisant la dernière égalité ainsi que la première condition, on aurait $a + b = \frac{1}{2}$. Puisque $ab = 1$, cette égalité est impossible, car sinon a et b seraient les racines du binôme $t^2 - \frac{1}{2}t + 1 = 0$ que l'on sait ne pas en avoir. D'où contradiction. Ainsi, puisque $a = b$, on obtient, en utilisant les deux conditions, que $a^2 = 1$ et $c = 1 - 2a$. Par conséquent $(a,b,c) = (-1,-1,3)$ ou $(1,1,-1)$; ce qui nous permet de conclure, $f(-1,-1,3) = 11 > f(1,1,-1) = 3$, que

$$\min_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z) = 3\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.248}}$ Posons $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4$, $g_2(x,y,z) = xyz - 1$ et

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0\right\}.$$

Puisque E est compact et que la fonction f est continue, la restriction de f à E atteint ses extrema. Désignons par (a,b,c) un de ces points et montrons que la matrice des conditions

$$\begin{pmatrix} \nabla g_1(a,b,c) \\ \nabla g_2(a,b,c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 4c \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$$

est de rang 2. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que le rang de cette matrice est différent de 2. Alors, puisque $abc \neq 0$, on aurait $a^2 = b^2 = 2c^2$; ce qui impliquerait, en utilisant les deux conditions, que $3a^2 = 4$ et $a^6 = 2$. Or un tel résultat est impossible. D'où contradiction. On peut donc utiliser le théorème de Lagrange, qui dit qu'il existe deux scalaires λ_1 et λ_2 de sorte que $\nabla(f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(a,b,c) = (0,0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2(1+\lambda_1)a + \lambda_2 bc = 0 \\ 2(1+\lambda_1)b + \lambda_2 ac = 0 \\ 2(1+2\lambda_1)c + \lambda_2 ab = 0\,. \end{cases}$$

En remarquant que $\lambda_1 \neq -1$ (car sinon on aurait l'absurdité suivante : $abc \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow c = 0$) et en multipliant la première égalité par a et la seconde par b, on obtient que $a^2 = b^2$; ce qui donne, en utilisant cette fois la première condition, que $c^2 = 2 - a^2$. Finalement, en utilisant la deuxième condition, on a

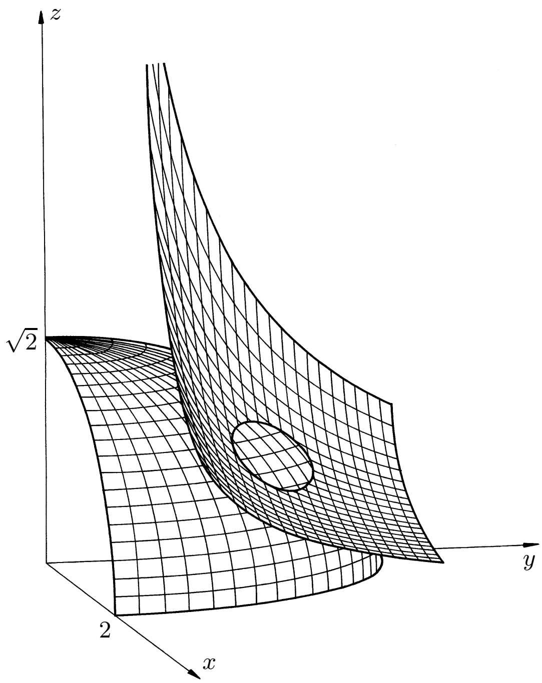
$$a^6 - 2a^4 + 1 = 0 \Longleftrightarrow a^2 = 1 \text{ ou } \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Alors,

1) $a^2 = 1 \Rightarrow b^2 = c^2 = 1$ et $f(a,b,c) = 3$.

2) $a^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow b^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $c^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $f(a,b,c) = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

En conclusion, $\displaystyle\min_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z) = 3$ et $\displaystyle\max_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z) = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.



$\boxed{\textbf{3.249}}$ Posons $g_1(x,y,z) = (x-4) + 2(y-2) + 3(z-3)$,

$$g_2(x,y,z) = (x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 - 1$$

et

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0\right\}.$$

Puisque E est compact et que la fonction f est continue, la restriction de f à E atteint ses extrema sur cet ensemble. Désignons par (a,b,c) un de ces points et montrons que la matrice des conditions

$$\begin{pmatrix} \nabla g_1(a,b,c) \\ \nabla g_2(a,b,c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2(a-4) & 2(b-2) & 2(c-3) \end{pmatrix}$$

est de rang 2. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que le rang de cette matrice est différent de 2. Alors, on aurait $(b-2) = 2(a-4)$ et $(c-3) = 3(a-4)$; ce qui impliquerait, en utilisant les deux conditions, $-1 = 0$. Une telle égalité est impossible. D'où contradiction. On peut donc utiliser le théorème de Lagrange, qui dit qu'il existe deux scalaires λ_1 et λ_2 de sorte que $\nabla(f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(a, b, c) = (0, 0, 0)$. D'où

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2(a-4) = 0 \\ 1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2(b-2) = 0 \\ 1 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2(c-3) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2\big(-(a-4) + (b-2)\big) = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2\big(-(b-2) + (c-3)\big) = 0 \\ (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 2\big(-(a-4) + (b-2)\big) \\ 1 & 2\big(-(b-2) + (c-3)\big) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (a-4) - 2(b-2) + (c-3) = 0\,.$$

Par conséquent

$$\left\{\begin{array}{l} (a-4) - 2(b-2) + (c-3) = 0 \\ (a-4) + 2(b-2) + 3(c-3) = 0 \\ (a-4)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 4 - \dfrac{4}{\sqrt{21}}\,, \quad b = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{21}}\,, \quad c = 3 + \dfrac{2}{\sqrt{21}} \\ \text{ou} \\ a = 4 + \dfrac{4}{\sqrt{21}}\,, \quad b = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{21}}\,, \quad c = 3 - \dfrac{2}{\sqrt{21}}\,. \end{array}\right.$$

Ainsi, puisque

$$f\left(4 - \frac{4}{\sqrt{21}}\,, 2 - \frac{1}{\sqrt{21}}\,, 3 + \frac{2}{\sqrt{21}}\right) = 9 - \frac{3}{\sqrt{21}}\,,$$

$$f\left(4 + \frac{4}{\sqrt{21}}\,, 2 + \frac{1}{\sqrt{21}}\,, 3 - \frac{2}{\sqrt{21}}\right) = 9 + \frac{3}{\sqrt{21}}\,,$$

on peut conclure que

$$\min_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z) = 9 - \frac{3}{\sqrt{21}} \quad \text{et} \quad \max_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z) = 9 + \frac{3}{\sqrt{21}}\,.$$

3.250 Pour commencer, remarquons que les deux conditions données $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ et $1 - 2\sin(x^2 + y^2 + z^2 = 0)$ sont équivalentes à l'unique condition $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{\pi}{6} = 0$. Puisque

$$E = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\big\}$$

est compact et f continue, la restriction de f à E atteint ses extrema. Désignons par (a, b, c) un de ces points. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a, b, c) \neq (0, 0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a, b, c) = (0, 0, 0)$. D'où

$$\left\{\begin{array}{l} bc + 2\lambda a = 0 \\ ac + 2\lambda b = 0 \\ ab + 2\lambda c = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \lambda a^2 = \lambda b^2 = \lambda c^2\,.$$

1) $\lambda = 0$. Alors, $f(a,b,c) = 0$.

2) $\lambda \neq 0$. Alors, $a^2 = b^2 = c^2$; ce qui entraîne, puisque $g(a,b,c) = 0$, que $a^2 = \frac{\pi}{18}$.

En conclusion, $\displaystyle\min_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z) = -\frac{\pi}{54}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $\displaystyle\max_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z) = \frac{\pi}{54}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

$\boxed{\textbf{3.251}}$ Montrons que les valeurs extrêmes cherchées sont $-\infty$ et $+\infty$. En effet, pour $y = 0$, l'équation de la surface devient le binôme du second degré en x : $2x^2 + 4xz + (z^2 - 35) = 0$, dont les deux solutions, pour chaque $z \in \mathbb{R}$ fixé, sont

$$x = \frac{-2z \pm \sqrt{2z^2 + 70}}{2}\,.$$

Remarque : Si on utilise, sans vérifier que les extrema existent, le théorème de Lagrange, on obtient que les valeurs extrêmes de z sur la surface proposée sont -5 et 5 !

$\boxed{\textbf{3.252}}$ Posons $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$, $g_2(x,y,z) = y + z - 1$ et

$$E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0\big\}.$$

Puisque E est une ellipse centrée en $(0,0,1)$ donc un compact et f une fonction continue, la restriction de f à E atteint ses extrema sur cet ensemble. Désignons par (a,b,c) un de ces points. Puisque la matrice des conditions

$$\begin{pmatrix} \nabla g_1(a,b,c) \\ \nabla g_2(a,b,c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 car $a^2 + b^2 \neq 0$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe deux scalaires λ_1 et λ_2 de sorte que $\nabla(f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(a,b,c) = (0,0,0)$. D'où

$$\begin{cases} \alpha + 2\lambda_1 a = 0 \\ 2 + 2\lambda_1 b + \lambda_2 = 0 \\ 1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\lambda_1 a = 0 \\ 1 + 2\lambda_1 b = 0\,. \end{cases}$$

1) $\alpha = 0$. Alors, $(a,b,c) = (0,-1,2)$ ou $(0,1,0)$ et

$$f(0,-1,2) = -1 \text{ et } f(0,1,0) = 1\,.$$

2) $\alpha \neq 0$. Alors, $a = b\alpha$. Par conséquent

$$(a,b,c) = \left(-\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)$$
$$\text{ou } \left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)$$

et

$$f\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,,\, -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,,\, 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) = -\sqrt{1+\alpha^2}\,,$$
$$f\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,,\, \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,,\, 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) = \sqrt{1+\alpha^2}\,.$$

En conclusion,

$$\min_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z) = -\sqrt{1+\alpha^2} \text{ et } \max_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z) = \sqrt{1+\alpha^2}\,.$$

3.253 En posant $r = x$, $s = \frac{y}{x}$, $u = \frac{z}{y}$, $v = \frac{16}{z}$, $g(r,s,u,v) = rsuv - 16$ et

$$E = \left\{(r,s,u,v) \in \mathbb{R}^4 : r,s,u,v > 0\,,\ g(r,s,u,v) = 0\right\}$$

et en constatant que

$$\frac{xyz}{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)} = \frac{1}{(1+r)(1+s)(1+u)(1+v)}\,,$$

le problème proposé revient à trouver l'inverse du minimum de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(r,s,u,v) = (1+r)(1+s)(1+u)(1+v)$. Montrons que ce minimum existe. Pour cela, posons

$$D = \left\{(r,s,u,v) \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq r,s,u,v \leq 200\right\}.$$

La fonction f étant continue sur le compact $E \cap D$, il existe $(a,b,c,d) \in E \cap D$ pour lequel on a

$$f(a,b,c,d) = \min_{(r,s,u,v)\in E\cap D} f(x,y,z)\,.$$

Ainsi, en constatant que $f(a,b,c,d) \leq f(1,1,1,16) = 136$ car $(1,1,1,16) \in E \cap D$ tandis que pour tout $(r,s,u,v) \in E \setminus D$: $f(r,s,u,v) \geq 201$, on peut écrire

$$f(a,b,c,d) = \min_{(r,s,u,v)\in E} f(r,s,u,v)\,.$$

A présent, calculons ce minimum. Puisque $\nabla g(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b,c,d) = (0,0,0,0)$. D'où

$$\begin{cases} (1+b)(1+c)(1+d) + \lambda bcd = 0 \\ (1+a)(1+c)(1+d) + \lambda acd = 0 \\ (1+a)(1+b)(1+d) + \lambda abd = 0 \\ (1+a)(1+b)(1+c) + \lambda abc = 0\,; \end{cases}$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} a(1+b)(1+c)(1+d) &= b(1+a)(1+c)(1+d) = c(1+a)(1+b)(1+d) \\ &= d(1+a)(1+b)(1+c) \end{aligned}$$

ou encore $a = b = c = d$.

Par conséquent, puisque $g(a,b,c,d) = 0$ et $a,b,c,d > 0$, on a $a = b = c = d = 2$ et $f(a,b,c,d) = 81$. En conclusion,

$$\max_{x,y,z>0} \frac{xyz}{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)} = \frac{1}{\min_{(r,s,u,v)\in E} f(r,s,u,v)} = \frac{1}{81}\,.$$

$\boxed{\textbf{3.254}}$ Soit $\alpha x + \beta y + \sigma = 0$ l'équation de la droite et $P = (p_1, p_2)$ le point. On sait, de la géométrie élémentaire, que la distance minimale d'un point à une droite est la longueur de PQ où $Q = (a, b)$ est le pied de la perpendiculaire abaissée de P à la droite. Autrement dit, ce problème revient à trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(g, x) = (x - p_1)^2 + (y - p_2)^2$ sous la condition $g(g, x) = \alpha x + \beta y + \sigma = 0$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a, b) \neq (0, 0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte $\nabla(f + \lambda g)(a, b) = (0, 0)$. D'où

$$\begin{cases} 2(a - p_1) + \alpha\lambda = 0 \\ 2(b - p_2) + \beta\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha\lambda}{2} = -(a - p_1) \\ \dfrac{\beta\lambda}{2} = -(b - p_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha a = -\dfrac{\alpha^2\lambda}{2} + p_1\alpha \\ \beta b = -\dfrac{\beta^2\lambda}{2} + p_2\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\sigma = -\frac{\lambda}{2}(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha p_1 + \beta p_2) \Rightarrow \frac{\lambda}{2} = \frac{\alpha p_1 + \beta p_2 + \sigma}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Finalement, $(a - p_1)^2 + (b - p_2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^2 = \dfrac{(\alpha p_1 + \beta p_2 + \sigma)^2}{\alpha^2 + \beta^2}$.

Par conséquent, la distance minimale d'un point à une droite est donnée par

$$\frac{\left|\alpha p_1 + \beta p_2 + \sigma\right|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

$\boxed{\textbf{3.255}}$ Soient $\alpha x + \beta y + \gamma z + \sigma = 0$ l'équation du plan et $P = (p_1, p_2, p_3)$ le point. On sait, de la géométrie élémentaire, que la distance minimale d'un point à un plan est la longueur de PQ où $Q = (a, b, c)$ est le pied de la perpendiculaire abaissée de P au plan. Autrement dit, ce problème revient à trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (x - p_1)^2 + (y - p_2)^2 + (z - p_3)^2$$

sous la condition $g(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \sigma = 0$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte $\nabla(f + \lambda g)(a, b, c) = (0, 0, 0)$. D'où

$$\begin{cases} 2(a - p_1) + \alpha\lambda = 0 \\ 2(b - p_2) + \beta\lambda = 0 \\ 2(c - p_3) + \gamma\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha\lambda}{2} = -(a - p_1) \\ \dfrac{\beta\lambda}{2} = -(b - p_2) \\ \dfrac{\gamma\lambda}{2} = -(c - p_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha a = -\dfrac{\alpha^2\lambda}{2} + p_1\alpha \\ \beta b = -\dfrac{\beta^2\lambda}{2} + p_2\beta \\ \gamma c = -\dfrac{\gamma^2\lambda}{2} + p_3\gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\sigma = -\frac{\lambda}{2}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right) + (\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3)$$
$$\Rightarrow \frac{\lambda}{2} = \frac{\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 + \sigma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Finalement,

$$(a - p_1)^2 + (b - p_2)^2 + (c - p_3)^2 = \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 = \frac{(\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 + \sigma)^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Par conséquent, la distance minimale d'un point à une droite est donnée par

$$\frac{\left|\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 + \sigma\right|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}\,.$$

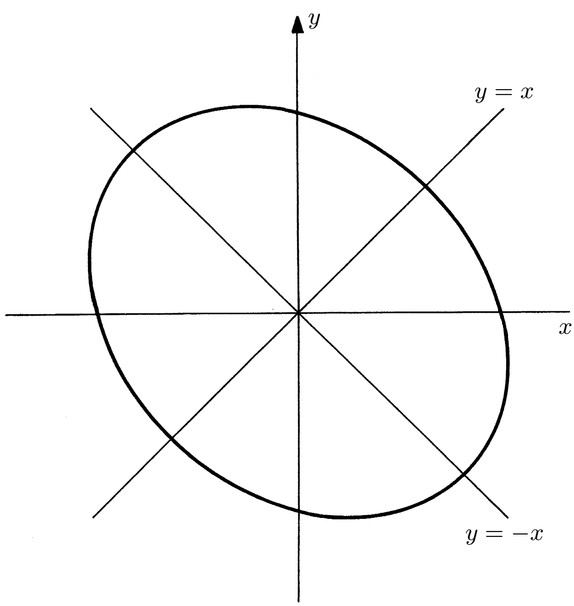
$\boxed{\mathbf{3.256}}$ L'ellipse $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 2x^2 + xy + 2y^2 - 1 = 0\right\}$ étant centrée à l'origine, ses axes sont sur deux droites perpendiculaires qui se coupent à l'origine. De plus, chacune de ces deux droites contient deux des sommets de l'ellipse. Or les sommets d'une ellipse sont ses points dont la distance à son centre est extrémale. Autrement dit, le problème proposé revient à trouver les deux droites sur lesquelles se trouvent les points où la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$ atteint ses extrema sous la condition $g(x,y) = 0$. Désignons par (a,b) un de ces points. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2(1+2\lambda)a + \lambda b = 0 \\ \lambda a + 2(1+2\lambda)b = 0\ ; \end{cases}$$

ce qui entraîne, puisque $(a,b) \neq (0,0)$, que

$$\det\begin{pmatrix} 2(1+2\lambda) & \lambda \\ \lambda & 2(1+2\lambda) \end{pmatrix} = (2+3\lambda)(2+5\lambda) = 0\,.$$

Ainsi, en remplaçant λ par $-\frac{2}{5}$ dans la première égalité ci-dessus, on obtient que la première bissectrice $y = x$ est l'un des axes et, par conséquent, l'autre axe est la seconde bissectrice $y = -x$.



3.257 Posons $g_1(x,y,z) = x^2+y^2-4$ et $g_2(x,y,z) = x+y+2z-2$. L'ellipse $E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0\big\}$ étant centrée en $(0,0,1)$, ses axes sont sur deux droites perpendiculaires qui se coupent en $(0,0,1)$. De plus, chacune de ces deux droites contient deux des sommets de l'ellipse. Or les sommets d'une ellipse sont ses points dont la distance à son centre est extrémale. Autrement dit, le problème proposé revient à trouver les deux droites sur lesquelles se trouvent les points où la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2+y^2+(z-1)^2$ atteint ses extrema sous les de conditions $g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0$. Désignons par (a,b,c) un de ces points. Puisque la matrice des conditions

$$\begin{pmatrix} \nabla g_1(a,b,c) \\ \nabla g_2(a,b,c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

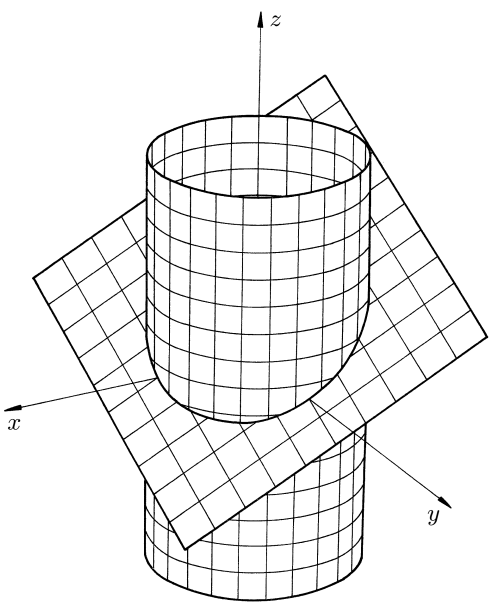
est de rang 2 car $a^2+b^2 \neq 0$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe deux scalaires λ_1 et λ_2 de sorte que $\nabla\big(f+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2\big)(a,b,c) = (0,0,0)$. D'où

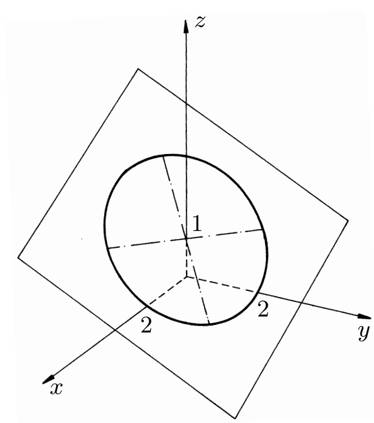
$$\begin{cases} 2(1+\lambda_1)a+\lambda_2 = 0 \\ 2(1+\lambda_1)b+\lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow (1+\lambda_1)(a-b) = 0\,. \\ 2(c-1)+2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

1) $\lambda_1 = -1$. Alors, $\lambda_2 = 0$ et $(a,b,c) = \big(-\sqrt{2},\sqrt{2},1\big)$ ou $\big(\sqrt{2},-\sqrt{2},1\big)$.

2) $\lambda_1 \neq -1$. Alors, $a = b$ et

$$(a,b,c) = \big(-\sqrt{2},-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\big) \text{ ou } \big(\sqrt{2},\sqrt{2},1-\sqrt{2}\big)\,.$$





Par conséquent les deux axes de l'ellipse E sont sur les deux droites perpendiculaires $\big\{(t,-t,1) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\big\}$ et $\big\{(t,t,1-t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\big\}$.

$\boxed{\mathbf{3.258}}$ Posons $g(x,y,z) = 4x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 4$.
L'ellipsoïde $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\}$ étant centrée à l'origine, ses axes sont sur trois droites perpendiculaires qui se coupent en $(0,0,0)$. De plus, chacune de ces trois droites contient deux des sommets de l'ellipsoïde. Or les sommets d'un ellipsoïde sont ses points dont la distance à son centre est extrémale (localement pour l'axe moyen). Autrement dit, le problème proposé revient à trouver les trois droites sur lesquelles se trouvent les points où la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ atteint ses extrema locaux sous la condition $g(x,y,z) = 0$. Désignons par (a,b,c) un de ces points. Puisque $\nabla g(a,b,c) \neq (0,0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b,c) = (0,0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2(1+4\lambda)a = 0 \\ 2(1+9\lambda)b + 4\lambda c = 0 \\ 4\lambda b + 2(1+6\lambda)c = 0\,. \end{cases}$$

1) $\lambda = -\frac{1}{4}$. Alors, $b = c = 0$ et $(a,b,c) = \pm(1,0,0)$.

2) $\lambda \neq -\frac{1}{4}$. Alors, $a = 0$ et, puisque $(a,b,c) \neq (0,0,0)$,

$$\det \begin{pmatrix} 2(1+9\lambda) & 4\lambda \\ 4\lambda & 2(1+6\lambda) \end{pmatrix} = 4(50\,\lambda^2 + 15\,\lambda + 1) = 0$$
$$\iff \lambda = -\frac{1}{10} \text{ ou } -\frac{1}{5}\,.$$

- $\lambda = -\frac{1}{10}$. Alors, $b = 2c$ et $(a,b,c) = \pm\left(0, \dfrac{4}{\sqrt{50}}, \dfrac{2}{\sqrt{50}}\right)$.
- $\lambda = -\frac{1}{5}$. Alors, $c = -2b$ et $(a,b,c) = \pm\left(0, -\dfrac{2}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.

Par conséquent les trois axes de l'ellipsoïde E sont sur les trois droites perpendiculaires l'axe Ox, $\{(0,2t,t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$ et $\{(0,t,-2t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$.

$\boxed{\mathbf{3.259}}$ Posons $g(x,y) = x^2 + 8xy + 7y^2 - 225$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$. Ce problème revient à trouver le minimum de de f sur $E = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$ et d'en prendre la racine carrée. Pour commencer, montrons qu'un tel minimum existe. Pour cela, posons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -16 \leq x,y \leq 16\}$. Puisque f est continue sur le compact $E_1 = E \cap D$, il existe $(a,b) \in E_1$ pour lequel on a

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in E_1} f(x,y)\,.$$

Ainsi, en constatant $f(a,b) \leq f(15,0) = 225$ car $(15,0) \in E_1$ tandis que pour tout $(x,y) \in E \setminus D : f(x,y) > 256$, on peut écrire

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in E} f(x,y)\,.$$

A présent, calculons ce minimum. Puisque $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b) \neq (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2(1+\lambda)a + 8\lambda b = 0 \\ 8\lambda a + 2(1+7\lambda)b = 0\ ; \end{cases}$$

ce qui entraîne, puisque $(a,b) \neq (0,0)$, que

$$\det\begin{pmatrix} 2(1+\lambda) & 8\lambda \\ 8\lambda & 2(1+7\lambda) \end{pmatrix} = 4(-9\lambda^2 + 8\lambda + 1) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -\frac{1}{9} \text{ ou } 1\,.$$

1) $\lambda = -\frac{1}{9}$. Alors, $b = 2a$; ce qui entraîne, puisque $g(a,2a) = 0$, que $a^2 = 5$.

2) $\lambda = 1$. Alors, $a = -2b$; ce qui est impossible car $g(-2b,b) < 0$.

En conclusion, $f(a,b) = 25$. Par conséquent la plus courte distance de l'origine à l'hyperbole donnée est 5.

$\boxed{\textbf{3.260}}$ Posons $g(x,y) = x^2 + 4x + 4y^2$ et $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$. Le problème proposé revient à trouver le minimum de la fonction $f(x,y) = 4 - x - 2y$ sous la condition $g(x,y) = 0$. Un tel minimum existe car la fonction f est continue sur le compact E. Désignons par (a,b) un des points de E où il est atteint. Puisque $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} -1 + 2\lambda(a+2) = 0 \\ -2 + 8\lambda b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow 2b = a + 2\,.$$

Ainsi, de $g(a,b) = 0$, on déduit que $a^2 + 4a + 2 = 0$ ou encore $a = -2 \pm \sqrt{2}$. Par conséquent la distance minimale cherchée est

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\left(3 - \sqrt{2}\right).$$

$\boxed{\textbf{3.261}}$ Posons $g(x,y) = 2x^2 + xy + 2y^2 - 1$ et $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$. Le problème proposé revient à trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 10 - y$ sous la condition $g(x,y) = 0$. Un tel minimum existe car la fonction f est continue sur le compact E. Désignons $(0,0)$ un des points de E où il est atteint. Puisque $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} \lambda(4a+b) = 0 \\ -1 + \lambda(a+4b) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow b = -4a\,.$$

Ainsi, de $g(a,-4a) = 0$, on déduit que $30\,a^2 = 1$.

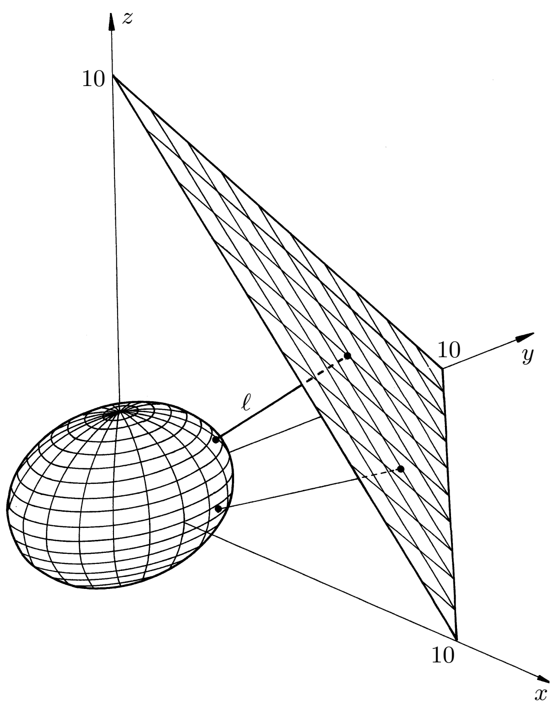
Par conséquent la distance minimale cherchée est $10 - \dfrac{4}{\sqrt{30}}$.

3.262 Posons $g(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z^2 - 8$.
Le problème proposé revient à trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 10 - x - y - z$ sous la condition $g(x, y, z) = 0$. Un tel minimum existe car la fonction f est continue sur le compact E. Désignons (a, b, c) un des points de E où il est atteint. Puisque $\nabla g(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a, b, c) = (0, 0, 0)$. D'où

$$\begin{cases} -1 + 4\lambda a = 0 \\ -1 + 2\lambda b = 0 \\ -1 + 4\lambda c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{b}{2} = c\,.$$

Ainsi, de $g(a, 2a, a) = 0$, on déduit que $a^2 = 1$.

Par conséquent la distance minimale ℓ cherchée est $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$.



3.263 Ce problème revient à trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t^2 - t + 1$. Ainsi, puisque $f'(t) = 2t - 1$, son minimum est atteint en $\frac{1}{2}$.

Par conséquent, la distance minimale cherchée est $\dfrac{3}{4\sqrt{2}}$.

3.264 Soit x et y la longueur respective de chacune des cathètes du triangle rectangle. Posons $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0,\ g(x, y) = xy - 2A = 0\}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$. Ce problème revient à trouver le minimum de la fonction f sur E. Pour commencer, montrons qu'un tel minimum existe. Pour cela, posons $D = [0, 2A+1] \times [0, 2A+1]$. Puisque f est continue sur le compact $E_1 = E \cap D$, il existe $(a,b) \in E_1$ pour lequel on a

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in E_1} f(x,y)\,.$$

Ainsi, en constatant que $f(a,b) \leq f(2A,1) = 4A^2+1 < (2A+1)^2$ car $(2A,1) \in E_1$ tandis que pour tout $(x,y) \in E \setminus D : f(x,y) > (2A+1)^2$, on peut écrire

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in E} f(x,y)\,.$$

A présent, calculons ce minimum. Puisque $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b) \neq (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2a + \lambda b = 0 \\ \lambda a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow (2+\lambda)(a+b) = 0\,;$$

ce qui entraîne, puisque $a, b > 0$, que $\lambda = -2$ ou encore $a = b$.

Par conséquent le triangle rectangle cherché n'est autre que le triangle rectangle isocèle dont la longueur de chaque cathète est $\sqrt{2A}$.

$\boxed{\textbf{3.265}}$ Soient x, y et z la longueur respective de chacun des trois côtés du triangle. Posons

$$E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x,y,z > 0,\ g(x,y,z) = x+y+z-2p = 0\big\}\,.$$

Ce problème revient à trouver le maximum de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = p(p-x)(p-y)(p-z)$ sur E. Pour commencer, montrons l'existence de ce maximum. Pour cela, posons

$$E_1 = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x,y,z \geq 0\,, g(x,y,z) = x+y+z-2p = 0\big\}.$$

Sur le compact E_1, la fonction continue f atteint son maximum. Désignons par (a,b,c) un des points de E_1 où il est atteint et montrons que $abc \neq 0$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $abc = 0$. Pour simplifier l'écriture, on va faire les hypothèses supplémentaires que $a = 0$ et $0 \leq b \leq c$. D'une part, en constatant que $\left(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}\right) \in E_1$ et $f\left(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}\right) > 0$, on a $f(a,b,c) > 0$. D'autre part, comme $b+c = 2p$, on doit avoir $0 \leq b < p < c$; ce qui entraîne que $f(a,b,c) = p^2(p-b)(p-c) < 0$. D'où contradiction. Autrement dit, $(a,b,c) \in E$.

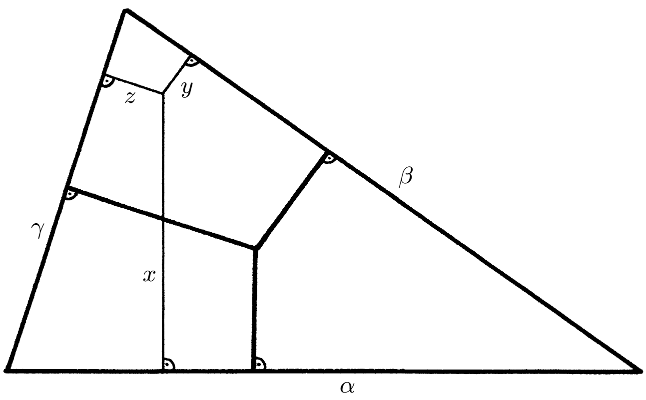
Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b,c) \neq (0,0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b,c) = (0,0,0)$. D'où

$$\begin{cases} -p(p-b)(p-c) + \lambda = 0 \\ -p(p-a)(p-c) + \lambda = 0 \\ -p(p-a)(p-b) + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c\,.$$

Par conséquent le triangle cherché n'est autre que le triangle équilatéral dont la longueur de chaque côté est $\frac{2p}{3}$.

$\boxed{\mathbf{3.266}}$ Soient α, β et γ la longueur respective de chacun des trois côtés du triangle. Posons

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x, y, z > 0,\ g(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z - 2A = 0\right\}.$$



Ce problème revient à trouver le maximum de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xyz$ sur E où x, y et z sont les distances du point P à chacun des trois côtés du triangle. Pour commencer, montrons l'existence de ce maximum. Pour cela, posons

$$E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x, y, z \geq 0,\ g(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z - 2A = 0\right\}.$$

Sur le compact E_1, la fonction continue f atteint son maximum. Désignons par (a, b, c) un des points de E_1 où il est atteint. De plus, $abc \neq 0$. En effet, comme $\left(\frac{2A}{3\alpha}, \frac{2A}{3\beta}, \frac{2A}{3\gamma}\right) \in E_1$ et $f\left(\frac{2A}{3\alpha}, \frac{2A}{3\beta}, \frac{2A}{3\gamma}\right) > 0$, on a $f(a, b, c) = abc > 0$. Autrement dit, $(a, b, c) \in E$.

Ainsi, en constatant que $\nabla g(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a, b, c) = (0, 0, 0)$. D'où

$$\begin{cases} bc + \lambda\alpha = 0 \\ ac + \lambda\beta = 0 \\ ab + \lambda\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow a\alpha = b\beta = c\gamma\,.$$

Finalement, comme $g(a, b, c) = 0$, on a $P = \left(\dfrac{2A}{3\alpha}, \dfrac{2A}{3\beta}, \dfrac{2A}{3\gamma}\right)$.

$\boxed{\mathbf{3.267}}$ Posons $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\right\}$.

Ce problème revient à trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 8 - 2x - y$ sous la condition $g(x, y) = 0$. Un tel minimum existe car f est continue et E compact. Désignons par (a, b) un des éléments de E où il est atteint. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a, b) \neq (0, 0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a, b) = (0, 0)$. D'où

$$\begin{cases} -2 + 2\lambda a = 0 \\ -1 + 2\lambda b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2b\,.$$

Par conséquent, puisque $g(a,b) = 0$, le minimum de la fonction f sur E est atteint au point $P = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Le point Q cherché est donc l'intersection de la droite d'équation $y = -2x + 8$ avec celle qui lui est perpendiculaire passant par le point P, à savoir $y = \frac{x}{2}$.

D'où $c = \dfrac{16}{5}$.

$\boxed{\mathbf{3.268}}$ Posons $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = (x-4)^2 + 4(y-2)^2 - 4 = 0\}$. Ce problème revient à trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x + y$ sous la condition $g(x,y) = 0$. Un tel minimum existe car f est continue et E compact. Désignons par (a,b) un des éléments de E où il est atteint. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait , d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 1 + 2(a-4)\lambda = 0 \\ 1 + 8(b-2)\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow a - 4 = 4(b-2)\,.$$

Par conséquent, puisque $g(a,b) = 0$, la somme minimale cherchée est

$$f\left(4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right), 2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 6 - \sqrt{5}\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.269}}$ Posons $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0\}$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2\,.$$

Ce problème revient à trouver le minimum de la fonction f sous la condition $g(x,y,z) = 0$. Pour commencer, montrons qu'un tel minimum existe. Pour cela, posons $E_1 = E \cap \overline{B\big((1,1,1),6\big)}$. Puisque f est continue sur le compact E_1, il existe $(a,b,c) \in E_1$ pour lequel on a

$$f(a,b,c) = \min_{(x,y,z)\in E_1} f(x,y,z)\,.$$

Ainsi, en constatant que $f(a,b,c) \leq f(1,0,0) = 28$ car $(1,0,0) \in E_1$ tandis que pour tout $(x,y,z) \in E \setminus \overline{B\big((1,1,1),6\big)} : f(x,y,z) > 36$, on peut écrire

$$f(a,b,c) = \min_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z)\,.$$

A présent, trouvons (a,b,c). Puisque $\nabla g(a,b,c) \neq (0,0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b,c) \neq (0,0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2(a-1) + 2(a-2) + \lambda = 0 \\ 2(b-1) + 2(b-3) + \lambda = 0 \\ 2(c-1) + 2(c-4) + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a - 3 = 2b - 4 = 2c - 5\,.$$

Finalement, puisque $g(a,b,c) = 0$, le point du plan cherché est $\left(-\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{6}\right)$.

$\boxed{\mathbf{3.270}}$ Posons $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}$.

Ce problème revient à trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + (x-5)^2 + y^2 + (y-4)^2$ sous la condition $g(x,y) = 0$. Un tel minimum existe car f est continue et E compact. Désignons par (a,b) un des éléments de E où il est atteint. Ainsi, puisque $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2(2+\lambda)a - 10 = 0 \\ 2(2+\lambda)b - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{4}{5}\,a\,.$$

Par conséquent, puisque $g(a,b) = 0$, le point cherché est $\left(\dfrac{5}{\sqrt{41}}, \dfrac{4}{\sqrt{41}}\right)$.

$\boxed{\mathbf{3.271}}$ Posons $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}$.

Ce problème revient à trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x + 6 + \frac{4-x-y}{\sqrt{2}}$ sous la condition $g(x,y) = 0$. Un tel minimum existe car f est continue et E compact. Désignons par (a,b) un des éléments de E où il est atteint. Ainsi, puisque $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\lambda a = 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + 2\lambda b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \left(1 - \sqrt{2}\right) b.$$

Par conséquent, puisque $g(a,b) = 0$, le point cherché est

$$\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)}}, \frac{1}{\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)}}\right).$$

$\boxed{\mathbf{3.272}}$ Posons $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0\}$.

Ce problème revient à trouver le maximum de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x-3)^2 + (y-4)^2 + 29$ sous la condition $g(x,y) = 0$. Un tel maximum existe car f est continue et E compact. Désignons par (a,b) un des éléments de E où il est atteint. Ainsi, puisque $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2(1+\lambda)a - 6 = 0 \\ 2(1+\lambda)b - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{4}{3}\,a\,.$$

Par conséquent, puisque $g(a,b) = 0$, on a $a^2 = 3$. Finalement, en remarquant que $f(3,4) < f(-3,-4)$, le point cherché est $(-3,-4)$.

$\boxed{\mathbf{3.273}}$ Posons $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$. Ce problème revient à trouver le maximum de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \frac{5-x-y-z}{\sqrt{3}} + x^2 + y^2 + (z - 8)^2$ sous la condition $g(x, y, z) = 0$. Un tel maximum existe car f est continue et E compact. Désignons par (a, b, c) un des éléments de E où il est atteint. Ainsi, puisque $\nabla g(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a, b, c) = (0, 0, 0)$. D'où

$$\begin{cases} 2(1+\lambda)a - \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 0 \\ 2(1+\lambda)b - \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 0 \\ 2(1+\lambda)c - \dfrac{1}{\sqrt{3}} - 16 = 0\,; \end{cases} \qquad \Rightarrow a = b \text{ et } c = \left(1 + 16\sqrt{3}\right) a\,.$$

Par conséquent, puisque $g(a, b, c) = 0$, le point cherché est

$$\left(\frac{1}{\sqrt{771 + 32\sqrt{3}}}, \frac{1}{\sqrt{771 + 32\sqrt{3}}}, \frac{1 + 16\sqrt{3}}{\sqrt{771 + 32\sqrt{3}}}\right).$$

$\boxed{\mathbf{3.274}}$ Posons $g_1(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 5z^2 - 1$, $g_2(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - z$ et

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0\}\,.$$

Ce problème revient à trouver les valeurs extrémales que la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ atteint sur E. Ces valeurs extrémales existent car f est continue et E compact. Désignons par (a, b, c) un des éléments de E où une de ces valeurs est atteinte. Ainsi, puisque la matrice des conditions

$$\begin{pmatrix} \nabla g_1(a, b, c) \\ \nabla g_2(a, b, c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 2b & 10\,c \\ 4a & 6b & -1 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 car $a^2 + b^2 \neq 0$, on sait qu'il existe, d'après le théorème de Lagrange, deux scalaires λ_1 et λ_2 de sorte que $\nabla(f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(a, b, c) = (0, 0, 0)$. D'où

$$\begin{cases} 2(1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2)a = 0 \\ 2(1 + \lambda_1 + 3\lambda_2)b = 0 \\ 2(1 + 5\lambda_1)c - \lambda_2 = 0\,. \end{cases}$$

1) $ab \neq 0$. Alors,

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = -1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{4} \quad \text{et } c = \frac{\lambda_2}{2(1 + 5\lambda_1)} = \frac{1}{2}\,;$$

ce qui est impossible car $g_1\left(a, b, \frac{1}{2}\right) = 2a^2 + b^2 + \frac{1}{4} \neq 0$. Ce cas est donc à exclure.

2) $a=0$. Alors, $c=3b^2$ et $15\,c^2+c-3=0$ ou encore $c=3b^2=\dfrac{-1+\sqrt{181}}{30}$.

3) $b=0$. Alors, $c=2a^2$ et $5c^2+c-1=0$ ou encore $c=2a^2=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{10}$.

En conclusion, la distance maximale est obtenue pour les deux points

$$\left(0,\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{181}}{90}},\frac{-1+\sqrt{181}}{30}\right)$$

tandis que la distance minimale est obtenue pour les deux points

$$\left(\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{21}}{20}},0,\frac{-1+\sqrt{21}}{10}\right).$$

$\boxed{\mathbf{3.275}}$ *Rappel* : La plus courte distance d'un point P de l'espace $\mathbb{R}^3$ à une droite passant par le point A et parallèle au vecteur $\mathbf{v}$ est donnée par

$$\frac{\|AP\times\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Posons $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3=0\right\}$.
Ce problème revient à trouver le minimum de la fonction $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z)=2(x-2)^2+(y+z-4)^2$ sous la condition $g(x,y,z)=0$. Un tel minimum existe car f est continue et E compact. Désignons par (a,b,c) un de ces points. Ainsi, puisque $\nabla g(a,b,c)\neq(0,0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b,c)=(0,0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2(2+\lambda)a-8=0 \\ 2(b+c-4)+2\lambda b=0 \\ 2(b+c-4)+2\lambda c=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda(b-c)=0\,.$$

1) $\lambda=0$. Alors, $a=2$ et $g(2,b,c)=b^2+c^2+1\neq0$; ce qui est impossible. Ce cas est donc à exclure.

2) $\lambda\neq0$. Alors, $a=b=c$.

Par conséquent, puisque $g(a,a,a)=0$, la distance minimale cherchée est

$$\sqrt{\frac{f(1,1,1)}{2}}=\sqrt{3}\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.276}}$ *Rappel* : La plus courte distance d'un point P de l'espace $\mathbb{R}^3$ à une droite passant par le point A et parallèle au vecteur $\mathbf{v}$ est donnée par

$$\frac{\|AP\times\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Posons $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 1 = 0\}$.

Ce problème revient à trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = (y-1)^2 + (z-1)^2$ sous la condition $g(x,y,z) = 0$. Un tel minimum existe car f est continue et E compact. Désignons par (a,b,c) un de ces points. Ainsi, puisque $\nabla g(a,b,c) \neq \mathbf{0}$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b,c) = (0,0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2\lambda a = 0 \\ 2(1+4\lambda)b - 2 = 0 \\ 2(1+4\lambda)c - 2 = 0\,. \end{cases}$$

1) $\lambda = 0$. Alors, $b = c = 1$ et $g(a,1,1) = a^2 + 7 \neq 0$; ce qui est impossible. Ce cas est donc à exclure.

2) $\lambda \neq 0$. Alors, $a = 0$ et $b = c$.

Par conséquent, puisque $g(0,b,b) = 0$, la distance minimale cherchée est

$$\sqrt{f\left(0, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{\frac{9}{4} - \sqrt{2}}.$$

$\boxed{\textbf{3.277}}$ Posons $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z > 0,\ g(x,y,z) = xyz - 1728 = 0\}$.

Ce problème revient à trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x + y + z$ sur E. Pour commencer, montrons qu'un tel minimum existe. Pour cela, posons $D = [0,1731] \times [0,1731] \times [0,1731]$. Puisque f est continue sur le compact $E_1 = E \cap D$, il existe $(a,b,c) \in E_1$ pour lequel on a

$$f(a,b,c) = \min_{(x,y,z) \in E_1} f(x,y,z)\,.$$

Ainsi, en constatant que $f(a,b,c) \leq f(1,1,1\,728) = 1\,730$ car $(1,1,1\,728) \in E_1$ tandis que pour tout $(x,y,z) \in E \setminus D : f(x,y,z) > 1\,731$, on peut écrire

$$f(a,b,c) = \min_{(x,y,z) \in E} f(x,y,z)\,.$$

A présent, trouvons (a,b,c). Puisque $\nabla g(a,b,c) \neq (0,0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b,c) \neq (0,0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 1 + \lambda bc = 0 \\ 1 + \lambda ac = 0 \\ 1 + \lambda ab = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c\,.$$

Enfin, puisque $g(a,b,c) = 0$, les trois nombres cherchés sont $a = b = c = 12$.

$\boxed{\textbf{3.278}}$ Posons

$$E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x,y,z) = x+y+z-15 = 0\,,\ g_2(x,y,z) = xy-36 = 0\big\}.$$

Ce problème revient à trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sur E. Pour commencer, montrons qu'un tel minimum existe. Pour cela, posons $E_1 = E \cap \overline{B\big((0,0,0),9\big)}$. Puisque f est continue sur le compact E_1, il existe au moins un élément (a,b,c) de E_1 pour lequel

$$f(a,b,c) = \min_{(x,y,z)\in E_1} f(x,y,z)\,.$$

Ainsi,en constatant que $f(a,b,c) \leq f(6,6,3) = 81$ car $(6,6,3) \in E_1$ tandis que pour tout $(x,y,z) \in E \setminus \overline{B\big((0,0,0),9\big)}$: $f(x,y,z) > 81$, on peut écrire :

$$f(a,b,c) = \min_{(x,y,z)\in E} f(x,y)\,.$$

A présent, trouvons (a,b,c). Puisque la matrice des conditions

$$\begin{pmatrix} \nabla g_1(a,b,c) \\ \nabla g_2(a,b,c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 car $ab = 36$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe deux scalaires λ_1 et λ_2 de sorte que $\nabla\big(f+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2\big)(a,b,c) \neq (0,0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2a+\lambda_1+\lambda_2 b = 0 \\ 2b+\lambda_1+\lambda_2 a = 0 \\ 2c+\lambda_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (2-\lambda_2)(a-b) = 0\,.$$

1) $\lambda_2 = 2$. Alors, $a+b = c$; ce qui donne, puisque $a+b+c = 15$, que $a+b = \frac{15}{2}$. Comme de plus $ab = 36$, les deux nombres a et b sont les racines du binôme $t^2 - \frac{15}{2}t + 36 = 0$ qui n'en admet aucune. Ce cas est donc à exclure.

2) $\lambda_2 \neq 2$. Alors, $a = b$; ce nous permet d'écrire, puisque $ab = 36$, que $a^2 = 36$.

Par conséquent les trois nombres cherchés sont $a = b = 6$ et $c = 3$.

$\boxed{\textbf{3.279}}$ Posons $E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0\big\}$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$. Puisque f est continue et que E est compact, la restriction de f à E atteint son maximum. Désignons par (a,b,c) un de ces points. Ainsi, puisque $\nabla g(a,b,c) \neq 0$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b,c) = (0,0,0)$ et l'on peut écrire, car $abc \neq 0$, que

$$\begin{cases} 2ab^2c^2 + 2\lambda a = 0 \\ 2a^2bc^2 + 2\lambda b = 0 \\ 2a^2b^2c + 2\lambda c = 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 = c^2\,.$$

Par conséquent $a^2 = \dfrac{1}{3}$ et $\displaystyle\max_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z) = \frac{1}{27}$.

Considérons à présent trois nombres x, y et z quelconques. Si $x = y = z = 0$, l'inégalité est évidente. On va donc supposer que $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$. Alors, en utilisant le résultat précédent, on peut écrire

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 \left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 \leq \frac{1}{27}$$

ou encore $|xyz| \leq \left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$.

$\boxed{\mathbf{3.280}}$ 1) Posons $g(x_1, \ldots, x_n) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

La fonction f étant continue sur le compact $\partial B(\mathbf{0}, 1)$, un tel maximum existe. Désignons par $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ un des points de $\partial B(\mathbf{0}, 1)$ où il est atteint. Ainsi, puisque $\nabla g(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$; ce qui entraîne que pour tout entier $1 \leq m \leq n$:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k^2 - \lambda a_m^2 = 0\,.$$

Par conséquent, pour tout couple d'entiers $1 \leq p, q \leq n$: $\lambda a_p^2 = \lambda a_q^2$.

- $\lambda = 0$. Alors, $f(\mathbf{a}) = 0$.
- $\lambda \neq 0$. Alors, pour tout couple d'entiers $1 \leq p, q \leq n$: $a_p^2 = a_q^2$; ce qui nous permet d'écrire, puisque $g(\mathbf{a}) = 0$, que pour tout entier $1 \leq k \leq n$: $a_k^2 = \frac{1}{n}$. D'où $f(\mathbf{a}) = \frac{1}{n^n}$.

En conclusion, le maximum cherché est $\dfrac{1}{n^n}$.

2) On va supposer que $\|\mathbf{x}\| \neq 0$ car sinon le résultat est évident. Ainsi, en utilisant le résultat précédent, on a

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{\|\mathbf{x}\|}\right)^2 \leq \frac{1}{n^n} \Rightarrow \left|\prod_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \left(\frac{\|\mathbf{x}\|}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

$\boxed{\mathbf{3.281}}$ Posons

$$E = \left\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g(x_1, \ldots, x_n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0\right\}$$

et montrons que le minimum cherché existe. En effet, par hypothèse, il existe un entier $1 \leq p \leq n$ tel que $\alpha_p \neq 0$ et posons $E_1 = E \cap \overline{B\left(\mathbf{0}, \frac{1}{\alpha_p}\right)}$. Puisque f est continue sur le compact E_1, il existe $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in E_1$ pour lequel on a

$$f(\mathbf{a}) = \min_{\mathbf{x} \in E_1} f(\mathbf{x})\,.$$

Ainsi, en constatant que

$$f(\mathbf{a}) \leq f\left(\mathbf{b} = \left(0, \ldots, x_p = \frac{1}{\alpha_p}, 0, \ldots, 0\right)\right) = \frac{1}{\alpha_p^2}$$

car $\mathbf{b} \in E_1$ tandis que pour tout $\mathbf{x} \in E \setminus \overline{B\big(\mathbf{0}, \frac{1}{\alpha_p}\big)}$: $f(\mathbf{x}) > \frac{1}{\alpha_p^2}$, on peut écrire

$$f(\mathbf{a}) = \min_{\mathbf{x} \in E} f(\mathbf{x})\,.$$

Ainsi, puisque $\nabla g(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$; ce qui entraîne que pour tout entier $1 \leq k \leq n$: $2a_k - \lambda\alpha_k = 0$. D'où

$$0 = \sum_{k=1}^{n}(2a_k - \lambda\alpha_k)\alpha_k = 2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k - \lambda\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 = 2 - \lambda\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2$$

ou encore $\lambda = \dfrac{2}{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2}$.

Par conséquent, pour tout entier $1 \leq k \leq n$: $a_k = \dfrac{\alpha_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2}$.

Finalement le minimum cherché est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2}$.

$\boxed{\mathbf{3.282}}$ Puisque pour la fonction g les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont vérifiées, on sait qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi :]a-\delta, a+\delta[\to \mathbb{R}$ telle que $\phi(a) = b$ et pour tout $|x-a| < \delta$: $g\big(x, \phi(x)\big) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^1$. Ainsi, pour tout $|x-a| < \delta$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}\big(x, \phi(x)\big) + \frac{\partial g}{\partial y}\big(x, \phi(x)\big)\phi'(x) = 0$$

ou encore en posant $x = a$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)\phi'(a) = 0\,.$$

Considérons à présent la fonction auxiliaire $h :]a-\delta, a+\delta[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f\big(x, \phi(x)\big)$. Alors, pour tout $|x-a| < \delta$:

$$h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, \phi(x)\big) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \phi(x)\big)\phi'(x)\,.$$

Comme de plus h admet un extremun local en a,

$$h'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\phi'(a) = 0\,.$$

Ainsi, puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) = 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\phi'(a)\right) + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\phi'(a)\right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \lambda\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \lambda\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\right)\phi'(a) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \lambda\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)\,. \end{aligned}$$

Par conséquent $\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$.

Remarque : La condition est nécessaire mais pas suffisante. En effet, pour $f(x,y) = x^3$, $g(x,y) = x^2 - y$, $a = b = 0$ et $\lambda = 0$, on a bien $\nabla(f+\lambda g)(0,0) = (0,0)$ mais la restriction de f à $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\right\}$ n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

3.283 Puisque pour la fonction f est continue sur les deux compacts $\overline{B(\mathbf{a},\delta)}$ et $\partial B(\mathbf{a},\delta)$, les deux nombres

$$M = \max_{\mathbf{x}\in\overline{B(\mathbf{a},\delta)}} f(\mathbf{x}) \text{ et } M_1 = \max_{\mathbf{x}\in\partial B(\mathbf{a},\delta)} f(\mathbf{x})$$

existent.

Montrons à présent que $M = M_1$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $M - M_1 > 0$. Alors, il existe $\mathbf{c} \in B(\mathbf{a},\delta)$ pour lequel $f(\mathbf{c}) = M$ et soit $g : \overline{B(\mathbf{a},\delta)} \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \frac{M-M_1}{4\delta^2}\|\mathbf{x}-\mathbf{c}\|^2$. Puisque cette fonction est continue, il existe $\mathbf{c}_1 \in \overline{B(\mathbf{a},\delta)}$ tel que

$$g(\mathbf{c}_1) = \max_{\mathbf{x}\in\overline{B(\mathbf{a},\delta)}} g(\mathbf{x})\,.$$

Ainsi, en constatant que $g(\mathbf{c}_1) \geq g(\mathbf{c}) = f(\mathbf{c}) = M$ et que pour tout $\mathbf{x} \in \partial B(\mathbf{a},\delta)$:

$$g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) + \frac{M-M_1}{4\delta^2}\left(\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| + \|\mathbf{a}-\mathbf{c}\|\right)^2 < M\,,$$

on a $\mathbf{c}_1 \in B(\mathbf{a},\delta)$. Comme de plus la fonction est de classe $\mathbf{C}^2$ sur $B(\mathbf{a},\delta)$ et qu'elle atteint son maximum en $\mathbf{c}_1$, on peut écrire, grâce à l'exercice 3.200, que pour tout couple $(u,v) \in \mathbb{R}^2 : ru^2 + 2suv + tv^2 \leq 0$ où $r = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\mathbf{c}_1)$, $s = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(\mathbf{c}_1)$ et $t = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\mathbf{c}_1)$ De cette inégalité, on obtient pour $u = v = 1 : r + 2s + t \leq 0$ et pour $u = -v = 1 : r - 2s + t \leq 0$; ce qui donne, en les additionnant, que $r + t \leq 0$. Finalement, puisque

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{c}_1) + \frac{M-M_1}{2\delta^2} \text{ et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{c}_1) + \frac{M-M_1}{2\delta^2}\,,$$

on a

$$\Delta f(\mathbf{c}_1) = (r+t) - \frac{M-M_1}{\delta^2} < 0\,;$$

ce qui est impossible car f est harmonique dans $B(\mathbf{a},\delta)$ et $\mathbf{c}_1 \in B(\mathbf{a},\delta)$. D'où contradiction. On a ainsi démontré que la fonction f atteint son maximum sur $\partial B(\mathbf{a},\delta)$. Pour démontrer que f atteint aussi son minimum sur $\partial B(\mathbf{a},\delta)$, il suffit d'appliquer le résultat obtenu ci-dessus à la fonction $-f$.

Remarque : Si f atteint un de ses extrema dans $B(\mathbf{a},\delta)$, elle est constante (voir exercice 4.67).

$\boxed{\mathbf{3.284}}$ Posons $h = f-g$. Alors, la fonction h est continue sur $\overline{B(\mathbf{a},\delta)}$ et harmonique sur $B(\mathbf{a},\delta)$, ce qui nous permet d'affirmer, d'après l'exercice précédent, qu'elle atteint son maximum et son minimum sur $\partial B(\mathbf{a},\delta)$; ce qui entraîne, h étant nulle sur $\partial B(\mathbf{a},\delta)$, qu'elle est nulle sur $\overline{B(\mathbf{a},\delta)}$. D'où $f = g$ sur $\overline{B(\mathbf{a},\delta)}$.

$\boxed{\mathbf{3.285}}$ Puisque f est continue et E compact, il existe deux éléments (a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2) de E de sorte que

$$f(a_1,b_1,c_1) = \min_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z) \text{ et } f(a_2,b_2,c_2) = \max_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z)\,.$$

Pour commencer calculons a_1, b_1 et c_1. D'une part, puisque pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f(a_1,y,c_1)}{\partial y} < 0\,,$$

la fonction $f(a_1,\,\cdot\,,c_1) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement décroissante ; ce qui nous permet d'affirmer que $b_1 = 3$. D'autre part, puisque pour tout $(x,z) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f(x,3,z)}{\partial x} = 4 \neq 0\,,$$

la fonction $f(\cdot,3,\cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ n'admet pas de point stationnaire ; ce qui entraîne que $a_1^2 + c_1^2 = 1$. Ainsi, en constatant que $(2a_1, 2c_1) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que

$$\begin{cases} 4 + 2\lambda a_1 = 0 \\ 1 + 2\lambda c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 4c_1\,.$$

D'où $(a_1,b_1) = \pm\left(\dfrac{4}{\sqrt{17}}, \dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)$.
Finalement, puisque pour tout $x,z \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{4}{\sqrt{17}},3,z\right) = 4 > 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z}\left(x,3,-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = 1 > 0\,,$$

les deux fonctions $f\big(\frac{4}{\sqrt{17}},3,\,\cdot\,\big)$, $f\big(\,\cdot\,,3,-\frac{1}{\sqrt{17}}\big) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont strictement croissantes ; ce qui nous permet d'écrire

$$f\left(-\frac{4}{\sqrt{17}},3,-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) < f\left(\frac{4}{\sqrt{17}},3,-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) < f\left(\frac{4}{\sqrt{17}},3,\frac{1}{\sqrt{17}}\right).$$

Par conséquent

$$a_1 = -\frac{4}{\sqrt{17}} \text{ et } c_1 = -\frac{1}{\sqrt{17}}\,.$$

De façon analogue, on démontre que $a_2 = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$, $b_2 = 0$ et $c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

$\boxed{\mathbf{3.286}}$ Puisque E est borné, $\overline{E}$ est compact (ex. 1.33). Par conséquent, f étant continue, il existe deux éléments $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ de $\overline{E}$ pour lesquels

$$f(\mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x}\in\overline{E}} f(\mathbf{x}) \text{ et } f(\mathbf{c}) = \max_{\mathbf{x}\in\overline{E}} f(\mathbf{x}) .$$

1) Si $f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{c})$, la fonction est constante ; ce qui implique que pour tout $\mathbf{x} \in E : \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.
2) Si $f(\mathbf{b}) \neq f(\mathbf{c})$, on a, puisque f est constante sur ∂E, que $\mathbf{b}$ ou $\mathbf{c}$ appartient à E ; ce qui entraîne que $\nabla f(\mathbf{b})$ ou $\nabla f(\mathbf{c})$ est nul.

$\boxed{\mathbf{3.287}}$ Soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in E$. Alors, en utilisant le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe un nombre $\delta > 0$ (choisi de manière que $B(\mathbf{a}, 2\delta) \subset E$) tel qu'à chaque élément $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ de $B(\mathbf{a}, \delta)$, on peut associer $\theta_{\mathbf{x}} \in \,]0, 1[$ de sorte que

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \big(\mathbf{a} + \theta_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{a})\big)(x_k - a_k) \ ;$$

ce qui entraîne, puisque $\nabla f\big(\mathbf{a}+\theta_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{a})\big) = \mathbf{0}$, que la fonction f est localement constante. Comme de plus E est connexe, on sait, d'après l'exercice 2.77, que la fonction f est constante sur tout E.

Solutions des exercices du chapitre 4

Intégrales multiples

4.1 $\displaystyle\iint_D y\frac{e^{2x+y^2}}{1+e^x}\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{\left(e^x\right)^2}{1+e^x}\,dx \int_0^2 y\,e^{y^2}\,dy = \int_1^e \frac{t}{1+t}\,dt \int_0^2 y\,e^{y^2}\,dy$

$\displaystyle= \big(t-\ln(1+t)\big)\Big|_1^e \left(\frac{e^{y^2}}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}\left(e-1-\ln\frac{1+e}{2}\right)(e^4-1)\,.$

4.2 $\displaystyle\iint_D (x^3+3x^2y+y^3)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_0^1 (x^3+3x^2y+y^3)\,dy$

$\displaystyle= \int_0^2 \left(x^3+\frac{3}{2}\,x^2+\frac{1}{4}\right) dy = \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+\frac{x}{4}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{17}{2}\,.$

4.3 $\displaystyle\iint_D \frac{x\sin y}{1+x^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\,dy$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left(\ln(1+x^2)\right)\Big|_0^1 (-\cos y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\ln 2}{2}\,.$

4.4 $\displaystyle\iint_D x\sin xy\,dx\,dy = \int_0^\pi dx \int_0^1 x\sin xy\,dy = \int_0^\pi (1-\cos x)\,dx$

$= (x-\sin x)\big|_0^\pi = \pi\,.$

4.5 Puisque pour tout $x \in \left[1, \sqrt{3}\,\right]$:

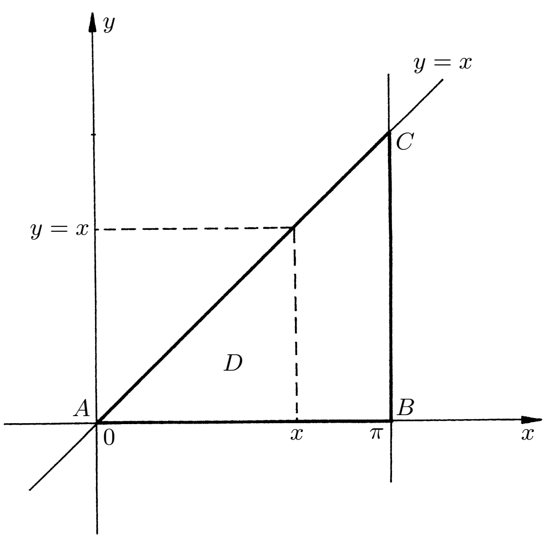
$$\begin{aligned}\int_0^1 \operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\,dy &= y\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\Big|_0^1 - x\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}\,dy\\ &= \operatorname{Arctg}\frac{1}{x} - \frac{x}{2}\left(\ln(1+x^2)-\ln x^2\right),\end{aligned}$$

on a

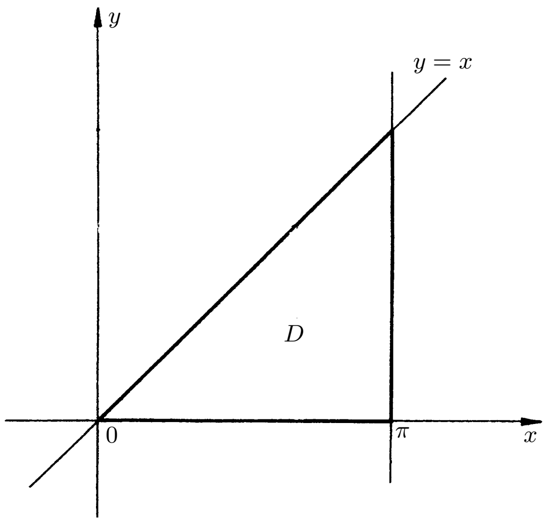
$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg}\frac{1}{x}\,dx - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{2}\left(\ln(1+x^2) - \ln x^2\right)dx \\
&= x \operatorname{Arctg}\frac{1}{x}\Big|_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2}\,dx - \frac{1}{4}\int_1^3 \left(\ln(1+t) - \ln t\right)dt \\
&= \sqrt{3}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^{\sqrt{3}} \\
&\quad - \frac{1}{4}\Big((1+t)\big(\ln(1+t)-1\big) - t(\ln t - 1)\Big)\Big|_1^3 \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right) - \ln 2 + \frac{3}{4}\ln 3\,.
\end{aligned}
$$

4.6 $$\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_1^2 dy \int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}\,dx = \int_1^2 \operatorname{Arctg}\frac{1}{y}\,dy$$
$$= y\operatorname{Arctg}\frac{1}{y}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{y}{1+y^2}\,dy = 2\operatorname{Arctg}\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(1+y^2)\Big|_1^2$$
$$= 2\operatorname{Arctg}\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}\,.$$

4.7 $$\iint_D x\cos(x+y)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^\pi dx \int_0^x x\cos(x+y)\,dy = \int_0^\pi x(\sin 2x - \sin x)\,dx$$
$$= \left(-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{\sin 2x}{4} + x\cos x - \sin x\right)\Big|_0^\pi = -\frac{3\pi}{2}\,.$$



4.8 $$\iint_D y^2\, e^{xy}\, dx\, dy = \int_0^\pi dy \int_y^\pi y^2\, e^{xy}\, dx = \int_0^\pi y\big(e^{\pi y} - e^{y^2}\big) dy$$
$$= \left(\frac{y}{\pi}\, e^{\pi y} - \frac{e^{\pi y}}{\pi^2} - \frac{e^{y^2}}{2}\right)\Bigg|_0^\pi = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2}\right) e^{\pi^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi^2}\,.$$



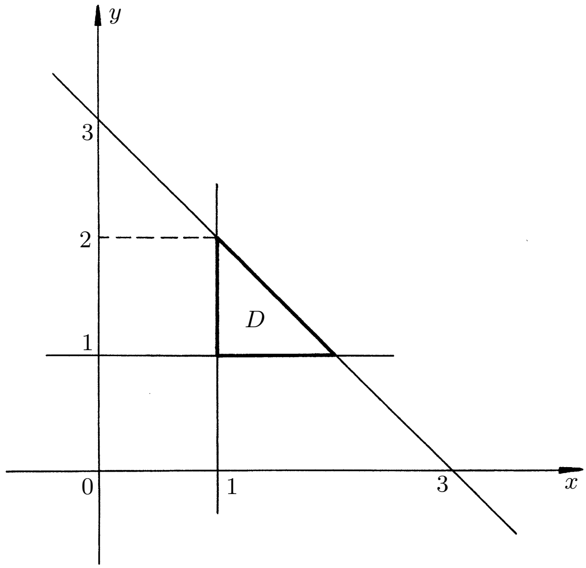
4.9 Puisque pour tout $x > 0$:

$$\int_x^{\frac{4}{x}} \frac{x^2 y}{1+xy}\, dy = x \int_x^{\frac{4}{x}} dy - \int_x^{\frac{4}{x}} \frac{x}{1+xy}\, dy$$
$$= x\left(\frac{4}{x} - x\right) - \ln(1+xy)\Big|_x^{\frac{4}{x}} = (4 - \ln 5) - x^2 + \ln(1+x^2)\,.$$

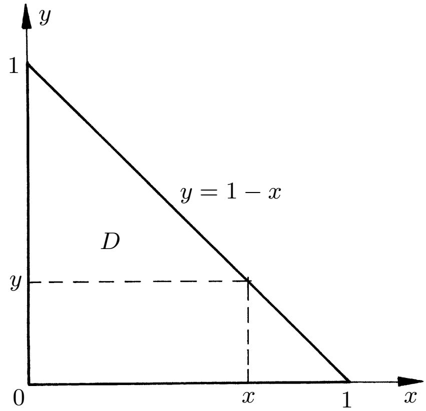
D'où

$$\iint_D \frac{x^2 y}{1+xy}\, dx\, dy$$
$$= \int_1^2 dx \int_x^{\frac{4}{x}} \frac{x^2 y}{1+xy}\, dy = 4 - \ln 5 - \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 + \int_1^2 \ln(1+x^2)\, dx$$
$$= \frac{5}{3} - \ln 5 + x\ln(1+x^2)\Big|_1^2 - 2\int_1^2 \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$$
$$= \frac{5}{3} + \ln\frac{5}{2} - 2 + 2\,\mathrm{Arctg}\, x\Big|_1^2 = -\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2} + \ln\frac{5}{2} + 2\,\mathrm{Arctg}\, 2\,.$$

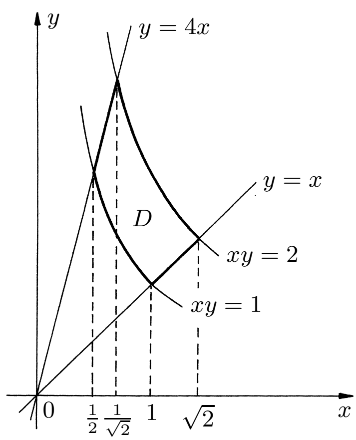
$\boxed{\mathbf{4.10}}$ $$\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^3} = \int_1^2 dx \int_1^{3-x} \frac{dy}{(x+y)^3} = -\frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{9} + \frac{1}{(x+1)}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{36}\,.$$



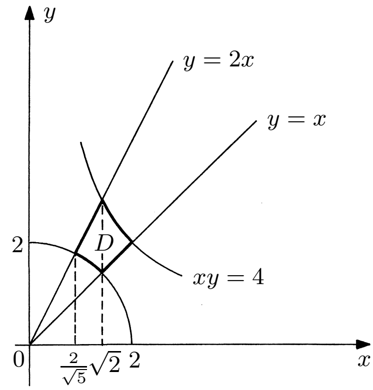
$\boxed{\mathbf{4.11}}$ $$\iint_D 6^x 2^y dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 6^x 2^y\,dy = \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \left(2\,e^{x\ln 3} - e^{x\ln 6}\right) dx$$
$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{2}{\ln 3}\,e^{x\ln 3} - \frac{1}{\ln 6}\,e^{x\ln 6}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{4}{\ln 3} - \frac{5}{\ln 6}\right).$$



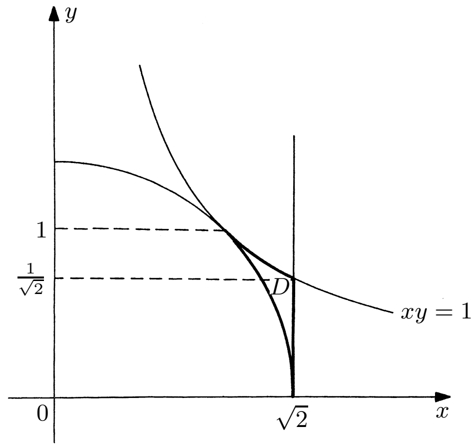
4.12 $$\iint_D x^2y^2\,dx\,dy$$
$$= \int_{\frac12}^{\frac{1}{\sqrt2}} dx \int_{\frac1x}^{4x} x^2y^2\,dy + \int_{\frac{1}{\sqrt2}}^{1} dx \int_{\frac1x}^{\frac2x} x^2y^2\,dy + \int_1^{\sqrt2} dx \int_x^{\frac2x} x^2y^2\,dy$$
$$= \frac13 \int_{\frac12}^{\frac{1}{\sqrt2}} \left(64\,x^5 - \frac1x\right) dx + \frac73 \int_{\frac{1}{\sqrt2}}^{1} \frac{dx}{x} + \frac13 \int_1^{\sqrt2} \left(\frac8x - x^5\right) dx$$
$$= \frac13 \left(\frac{32}{3}\,x^6 - \ln x\right)\Bigg|_{\frac12}^{\frac{1}{\sqrt2}} + \frac73\,\ln x\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt2}}^{1} + \frac13\left(8\ln x - \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_1^{\sqrt2} = \frac73\,\ln 2\,.$$



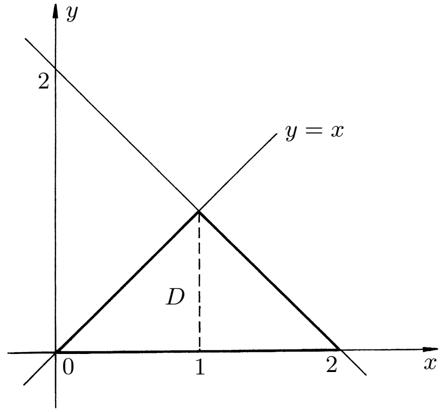
4.13 $$\iint_D x^2y\,dx\,dy = \int_{\frac{2}{\sqrt5}}^{\sqrt2} dx \int_{\sqrt{4-x^2}}^{2x} x^2y\,dy + \int_{\sqrt2}^{2} dx \int_x^{\frac4x} x^2y\,dy$$
$$= \frac12 \int_{\frac{2}{\sqrt5}}^{\sqrt2} (5x^4 - 4x^2)\,dx + \frac12 \int_{\sqrt2}^{2} (16 - x^4)\,dx$$
$$= \frac12\left(x^5 - \frac43\,x^3\right)\Bigg|_{\frac{2}{\sqrt5}}^{\sqrt2} + \frac12\left(16\,x - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{\sqrt2}^{2} = -\frac{104}{15}\sqrt2 + \frac{32}{375}\sqrt5 + \frac{64}{5}\,.$$



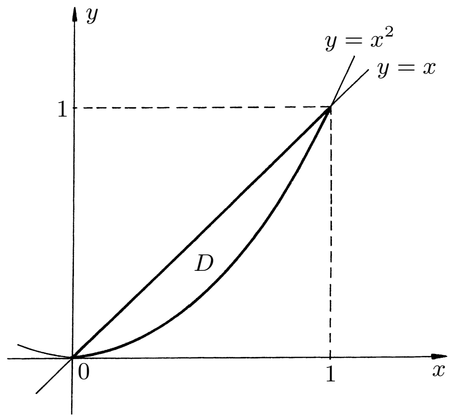
4.14 $$\iint_D xy^2\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_{\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2}} xy^2\,dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dy \int_{\sqrt{2-y^2}}^{\frac{1}{y}} xy^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y^4\,dy + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \left(y^2-1\right)^2 dy$$
$$= \frac{y^5}{10}\bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{2}\left(\frac{y^5}{5} - \frac{2}{3}y^3 + y\right)\bigg|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$



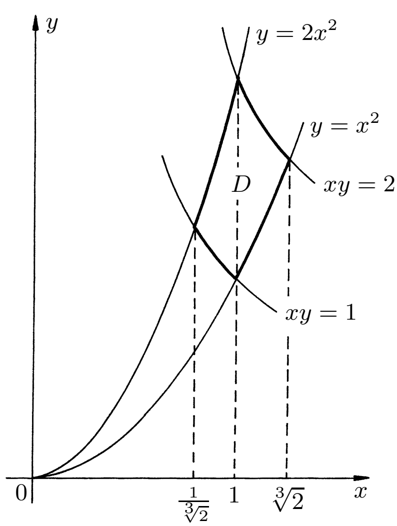
4.15 $$\iint_D \left|(x-y)(x+y-2)\right| dx\,dy$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^x (x-y)(2-x-y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} (x-y)(2-x-y)\,dy$$
$$= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3\right) dx + \int_1^2 \left(4x - 4x^2 + x^3 - (2-x)^2 + \frac{(2-x)^3}{3}\right) dx$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6}\right)\bigg|_0^1 + \left(2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} + \frac{(2-x)^3}{3} - \frac{(2-x)^4}{12}\right)\bigg|_0^2 = \frac{1}{3}.$$



4.16 $$\iint_D x\sin y\,dx\,dy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} x\sin y\,dy = \int_0^1 x(\cos x^2 - \cos x)\,dx$$
$$= \left(\frac{\sin x^2}{2} - x\sin x - \cos x\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{\sin 1}{2} - \cos 1\,.$$



4.17 $$\iint_D (x^3+y^3)\,dx\,dy$$
$$= \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{1} dx\int_{\frac{1}{x}}^{2x^2}(x^3+y^3)\,dy + \int_1^{\sqrt[3]{2}} dx\int_{x^2}^{\frac{2}{x}}(x^3+y^3)\,dy$$
$$= \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{1}\left(2x^5+4x^8-x^2-\frac{1}{4x^4}\right)dx + \int_1^{\sqrt[3]{2}}\left(2x^2+\frac{4}{x^4}-x^5-\frac{x^8}{4}\right)dx$$
$$= \left(\frac{x^6}{3}+\frac{4}{9}x^9-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{12\,x^3}\right)\Big|_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{1} + \left(\frac{2}{3}x^3-\frac{4}{3x^3}-\frac{x^6}{6}-\frac{x^9}{36}\right)\Big|_1^{\sqrt[3]{2}} = \frac{37}{36}\,.$$



$\boxed{\textbf{4.18}}$
$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{xy}} = \int_1^{\frac{1+\sqrt5}{2}} dx \int_{\frac{4}{x}}^{\frac{8}{x}} \frac{dy}{\sqrt{xy}} + \int_{\frac{1+\sqrt5}{2}}^{2} dx \int_{4x-4}^{\frac{8}{x}} \frac{dy}{\sqrt{xy}}$$
$$= 4\left(\sqrt2-1\right)\int_1^{\frac{1+\sqrt5}{2}} \frac{dx}{x} + 4\int_{\frac{1+\sqrt5}{2}}^{2}\left(\frac{\sqrt2-\sqrt{x(x-1)}}{x}\right)dx$$
$$= 4\sqrt2\,\ln 2 - 4\ln\frac{1+\sqrt5}{2} - 4\int_{\frac{1+\sqrt5}{2}}^{2}\frac{\sqrt{x(x-1)}}{x}\,dx$$
$$= 4\sqrt2\,\ln 2 - 4\ln\frac{1+\sqrt5}{2} - 4\left(\sqrt{x(x-1)} - \ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\right)\Big|_{\frac{1+\sqrt5}{2}}^{2}$$
$$= 4\left(\sqrt2\,\ln 2 - \ln\frac{1+\sqrt5}{2} - \sqrt2 + \ln\left(1+\sqrt2\right) + 1 - \ln\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt5}{2}} + \sqrt{\frac{-1+\sqrt5}{2}}\right)\right).$$

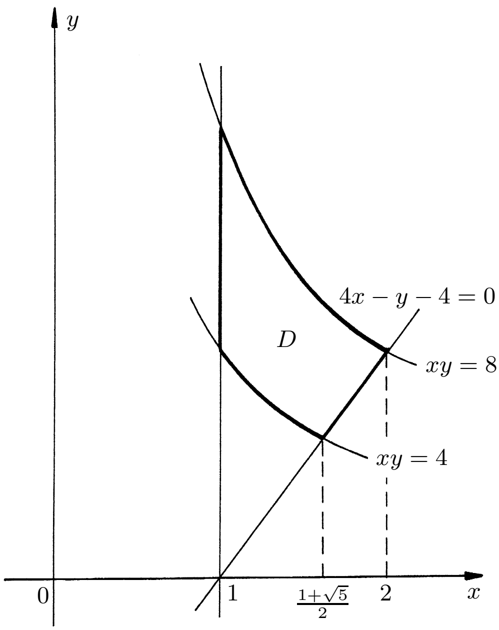


Fig. ex. 4.16

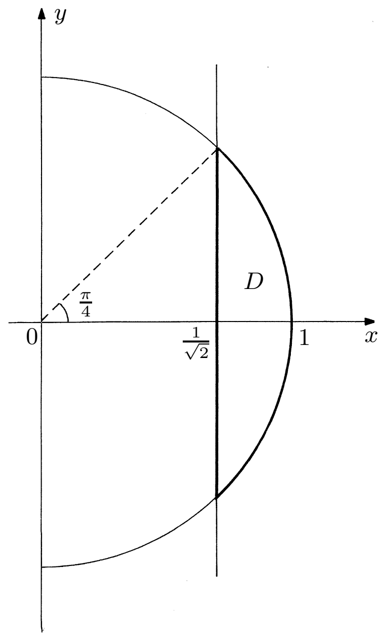
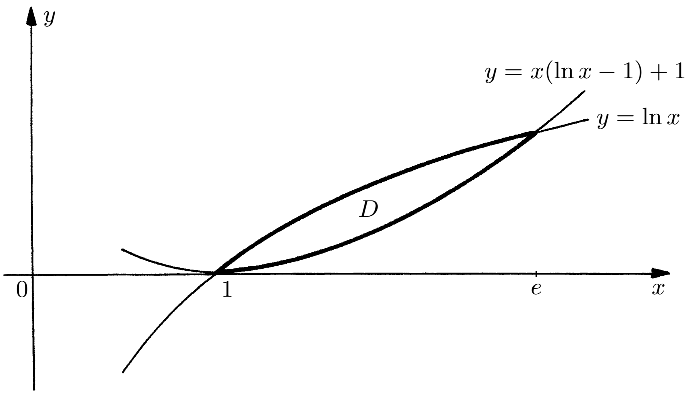


Fig. ex. 4.17

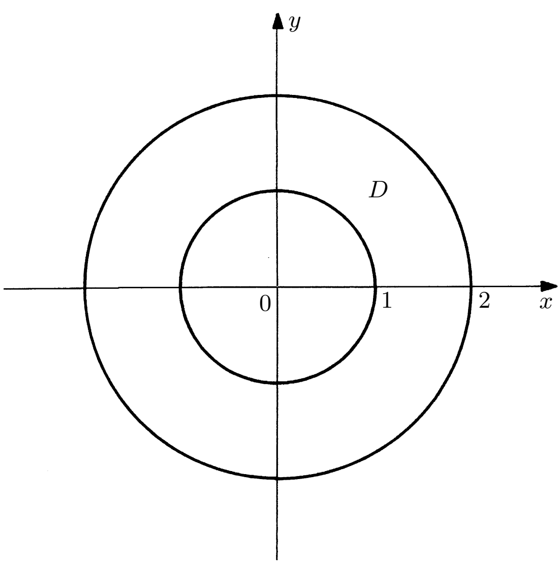
$\boxed{\textbf{4.19}}$
$$\iint_D (x-y)\,dx\,dy = \int_{\frac{1}{\sqrt2}}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x-y)\,dy = 2\int_{\frac{1}{\sqrt2}}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$= -\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{\sqrt2}}^{1} = \frac{1}{3\sqrt2}.$$

4.20 $$\iint_D x\,dx\,dy = \int_1^e dx \int_{x(\ln x-1)+1}^{\ln x} x\,dy = \int_1^e (x\ln x - x^2\ln x + x^2 - x)\,dx$$
$$= \left(\frac{x^2}{6}(3-2x)\ln x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{4}{9}x^3\right)\Bigg|_1^e = \frac{e^3}{9} - \frac{e^2}{4} + \frac{11}{36}\,.$$



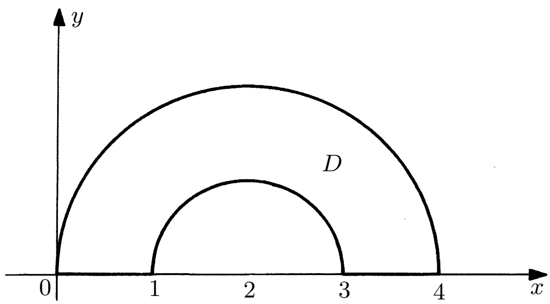
4.21 Puisque $D = \{(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta) : 1 < \rho < 2\,,\ 0 \le \theta < 2\pi\}$, on a

$$\iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{2+\cos(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \frac{\sin\rho^2}{2+\cos\rho^2}\,\rho\,d\rho$$
$$= -\pi\ln\big(2+\cos\rho^2\big)\Big|_1^2 = \pi\ln\frac{2+\cos 1}{2+\cos 4}\,.$$



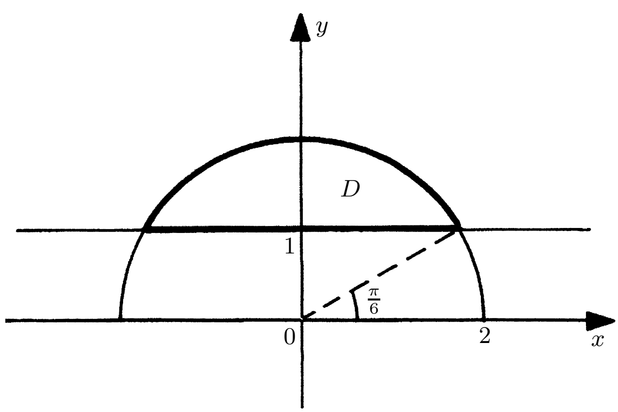
$\boxed{\mathbf{4.22}}$ Puisque $D = \big\{(2+\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta) : 1 < \rho < 2\,,\ 0 < \theta < \pi\big\}$, on a

$$\iint_D \cos(x^2+y^2-4x+4)\,dx\,dy = \int_0^\pi d\theta \int_1^2 \rho\cos\rho^2\,d\rho$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(\sin\rho^2\right)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}\left(\sin 4 - \sin 1\right).$$



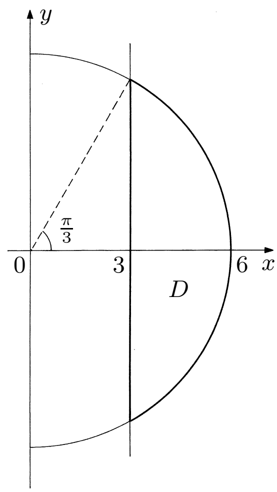
$\boxed{\mathbf{4.23}}$ Puisque $D = \left\{(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta) : \dfrac{1}{\sin\theta} < \rho < 2\,,\ \dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{5\pi}{6}\right\}$, on a

$$\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{2} \rho\sin^2\theta\,d\rho = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(2\sin^2\theta - \frac{1}{2}\right) d\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \cos 2\theta\right) d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta - \sin 2\theta\right)\Big| = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



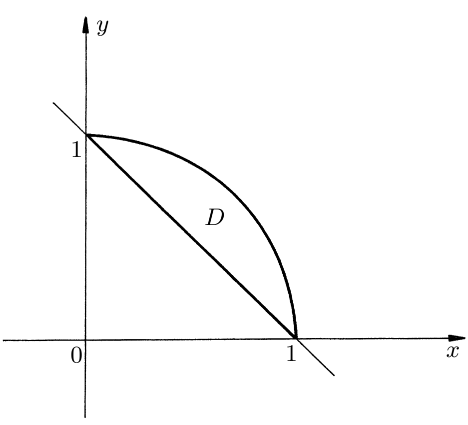
4.24 Puisque $D = \left\{ (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta) : \dfrac{3}{\cos\theta} < \rho < 6\,,\ |\theta| < \dfrac{\pi}{3} \right\}$, on a

$$\iint_D \frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,dx\,dy = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{3}{\cos\theta}}^{6} \frac{\cos\theta}{\rho^2}\,d\rho$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{\cos\theta}{6} + \frac{\cos^2\theta}{3}\right) d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (-\cos\theta + 1 + \cos 2\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{3}\left(-\sin\theta + \theta + \frac{\sin\theta}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\pi}{9}\,.$$



4.25 Puisque $D = \left\{ (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta) : \dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta} < \rho < 1\,,\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2} \right\}$, on a

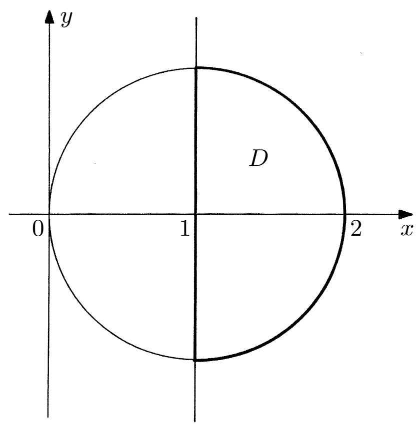
$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} \frac{d\rho}{\rho^3} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\,d\theta = -\frac{1}{4}\,\cos 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\,.$$



$\boxed{\mathbf{4.26}}$ Puisque $D = \left\{ (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta) : \dfrac{1}{\cos\theta} < \rho < 2\cos\theta\,,\ |\theta| < \dfrac{\pi}{4} \right\}$, on a

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta} \frac{d\rho}{\rho^3} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{4\cos^2\theta} + \cos^2\theta \right) d\theta$$

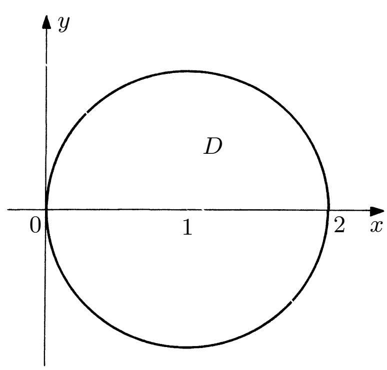
$$= -\frac{\operatorname{tg}\theta}{4} + \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}\,.$$



$\boxed{\mathbf{4.27}}$ Puisque $D = \left\{ (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta) : 0 < \rho < 2\cos\theta\,,\ |\theta| < \dfrac{\pi}{2} \right\}$, on a

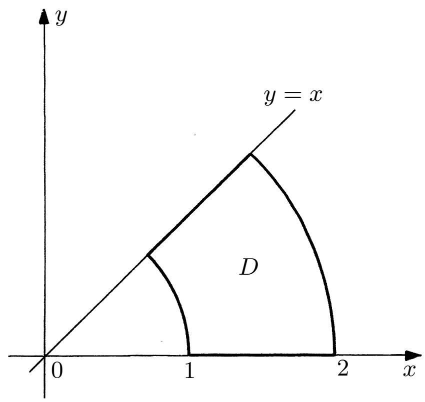
$$\iint_D xy(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} (\rho^5 \sin\theta\cos\theta)\,d\rho$$

$$= \frac{32}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta\sin\theta\,d\theta = -\frac{4}{3}\,\cos^8\theta\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0\,.$$



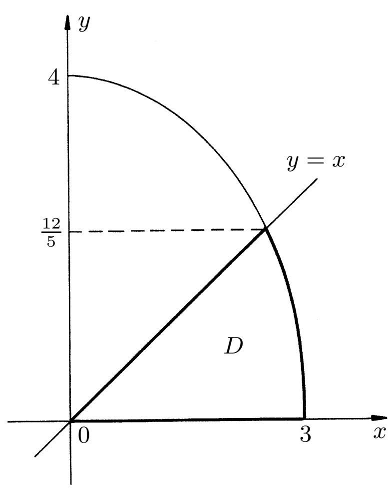
4.28 Puisque $D = \left\{(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta) : 1 < \rho < 2\cos\theta\,,\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}\right\}$, on a

$$\iint_D \frac{y^2\cos(x^2+y^2)}{x^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2\theta\,d\theta \int_1^2 \rho\cos\rho^2\,d\rho = (\operatorname{tg}\theta-\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\ \frac{\sin\rho^2}{2}\Big|_1^2$$
$$= \frac{1}{2}\Big(1-\frac{\pi}{4}\Big)\,(\sin 4 - \sin 1)\,.$$



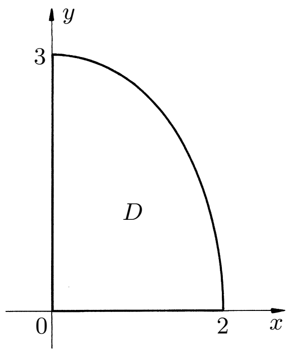
4.29 Puisque $D = \left\{(3\rho\cos\theta,\ 4\rho\sin\theta) : 0 < \rho < 1\,,\ 0 < \theta < \operatorname{Arctg}\dfrac{3}{4}\right\}$, on a

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^{\operatorname{Arctg}\frac{3}{4}} \cos\theta\,d\theta \int_0^1 36\,\rho^2\,d\rho = 12\,\sin\theta\Big|_0^{\operatorname{Arctg}\frac{3}{4}} = \frac{36}{5}\,.$$



$\boxed{\textbf{4.30}}$ Puisque $D = \left\{(2\rho\cos\theta,\, 3\rho\sin\theta) : 0 < \rho < 1\,,\; 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right\}$, on a

$$\begin{aligned}
&\iint_D x^2y^4\,dx\,dy \\
&\qquad = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (1944\,\rho^7\cos^2\theta\sin^4\theta)\,d\rho = 243\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta\sin^4\theta)\,d\theta \\
&\qquad = \frac{243}{32}\left(2\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{\sin 4\theta}{2} + \frac{\sin 6\theta}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{243\pi}{32}\,.
\end{aligned}$$

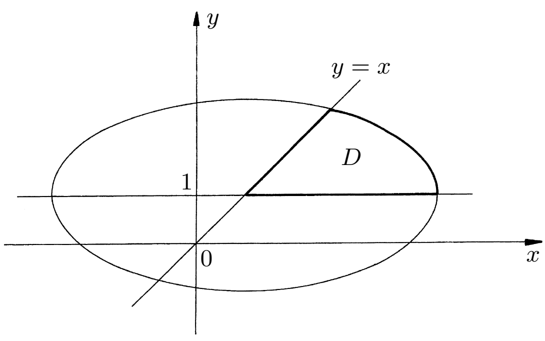


$\boxed{\textbf{4.31}}$ Puisque

$$D = \left\{(1+3\rho\cos\theta,\, 1+2\rho\sin\theta) : 0 < \rho < 1\,,\; 0 < \theta < \operatorname{Arctg}\frac{3}{2}\right\},$$

on a

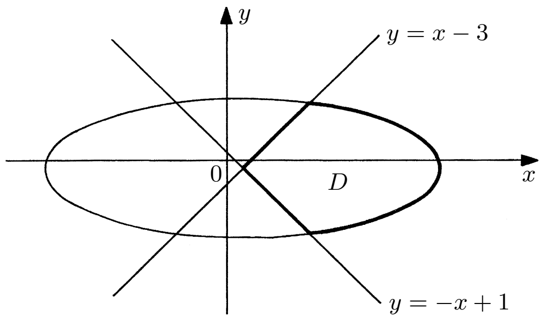
$$\begin{aligned}
\iint_D xy\,dx\,dy &= 6\int_0^{\operatorname{Arctg}\frac{3}{2}} d\theta \int_0^1 (\rho + 3\rho^2\cos\theta + 2\rho^2\sin\theta + 3\rho^3\sin 2\theta)\,d\rho \\
&= 6\int_0^{\operatorname{Arctg}\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2} + \cos\theta + \frac{2}{3}\,\sin\theta + \frac{3}{4}\,\sin 2\theta\right) d\theta \\
&= 6\left(\frac{\theta}{2} + \sin\theta - \frac{2}{3}\,\cos\theta - \frac{3}{8}\,\cos 2\theta\right)\Bigg|_0^{\operatorname{Arctg}\frac{3}{2}} = 3\operatorname{Arctg}\frac{3}{2} + \frac{10}{\sqrt{13}} + \frac{185}{26}\,.
\end{aligned}$$



4.32 Puisque $D = \left\{(2+5\rho\cos\theta,\ -1+3\rho\sin\theta) : 0<\rho<1\,,\ |\theta| < \operatorname{Arctg}\dfrac{5}{3}\right\}$, on a

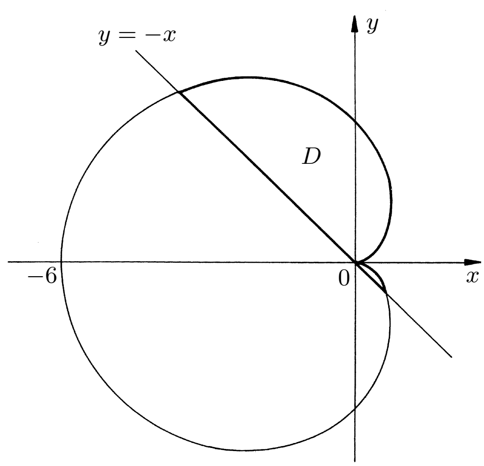
$$\iint_D (x-2)(y+1)^2\,dx\,dy = \int_{-\operatorname{Arctg}\frac{5}{3}}^{\operatorname{Arctg}\frac{5}{3}} d\theta \int_0^1 (675\,\rho^4\sin^2\theta\cos\theta)\,d\rho$$

$$= 135\int_{-\operatorname{Arctg}\frac{5}{3}}^{\operatorname{Arctg}\frac{5}{3}} \sin^2\theta\cos\theta\,d\theta = 45\,\sin^3\theta\Big|_{-\operatorname{Arctg}\frac{5}{3}}^{\operatorname{Arctg}\frac{5}{3}} = \frac{11\,250}{34\sqrt{34}}\,.$$



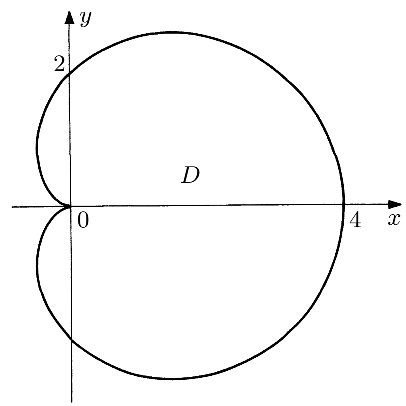
4.33 Puisque $D = \left\{(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta) : 0<\rho<3(1-\cos\theta)\,,\ -\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{3\pi}{4}\right\}$, on a

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{3(1-\cos\theta)} d\rho = 3\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1-\cos\theta)\,d\theta = 3(\pi-\sqrt{2}\,)\,.$$



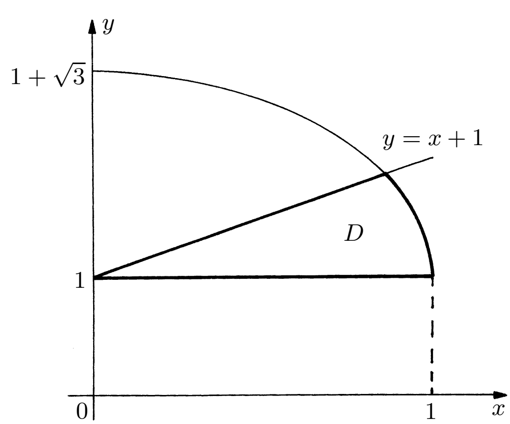
$\boxed{\mathbf{4.34}}$ Puisque $D = \{(\rho\cos\theta,\, \rho\sin\theta) : 0 < \rho < 2(1+\cos\theta)\,,\ 0 \le \theta < 2\pi\}$, on a

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2(1+\cos\theta)} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}} = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1+\cos\theta)}\, d\theta$$
$$= 4\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 4\left(\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta - \int_{\pi}^{2\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta\right) = 16\,.$$



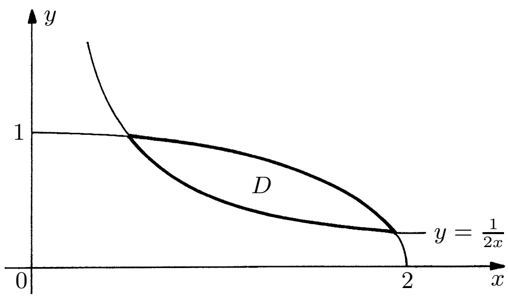
$\boxed{\mathbf{4.35}}$ Puisque $D = \left\{(\rho\cos\theta,\, 1+\sqrt{3}\rho\sin\theta) : 0 < \rho < 1\,,\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{6}\right\}$, on a

$$\iint_D x(y-1)^2 dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_0^1 \left(3\sqrt{3}\,\rho^4 \sin^2\theta\cos\theta\right) d\rho$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{5}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{\sqrt{3}}{5}\sin^3\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{40}\,.$$



4.36 Puisque $D = \left\{(2\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta) : \dfrac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}} < \rho < 1\,,\ \dfrac{\pi}{12} < \theta < \dfrac{5\pi}{12}\right\}$, on a

$$\iint_D (x^2+4y^2)\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{1} 8\rho^3\,d\rho$$
$$= 2\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \left(1-\frac{1}{4\sin^2 2\theta}\right) d\theta = \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{4}\,\mathrm{cotg}\,2\theta\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$



4.37 Puisque $D = \left\{(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta) : 0 < \rho < 1\,,\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}\right\}$, on a

$$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta\,d\theta \int_0^1 \rho^3\,d\rho = \frac{\pi^2}{128}\,.$$

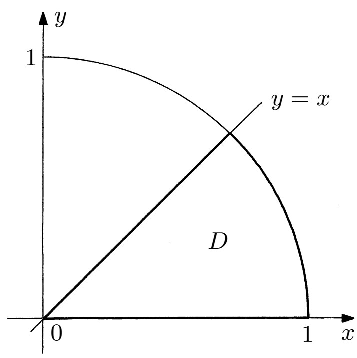


Fig. ex. 4.35 et **Fig. ex. 4.36**

4.38 Puisque

$$D = \left\{(\rho\cos\theta,\ 3\rho\sin\theta) : 0 < \rho < \frac{1}{\sqrt{1+8\sin^2\theta}}\,,\ 0 < \theta < \mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}\right\},$$

on a

$$\iint_D \left(x^2 + \frac{y^2}{9}\right) \sin\!\left(2 \operatorname{Arctg} \frac{y}{3x}\right) dx\, dy$$

$$= \int_0^{\operatorname{Arctg} \frac{1}{3}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+8\sin^2\theta}}} (3\rho^3 \sin 2\theta)\, d\rho$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{\operatorname{Arctg} \frac{1}{3}} \frac{\sin 2\theta}{\left(1 + 8\sin^2\theta\right)^2}\, d\theta = -\frac{3}{32}\, \frac{1}{1 + 8\sin^2\theta}\Bigg|_0^{\operatorname{Arctg}\frac{1}{3}} = \frac{1}{24}\,.$$

4.39 Soit $\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\gamma(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{\cos\theta} & \text{si } 0 < \theta \leq \dfrac{\pi}{6} \\ \dfrac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sin\theta} & \text{si } \dfrac{\pi}{6} < \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

et posons $D = \left\{(\rho\cos\theta,\, \rho\sin\theta) : 0 < \rho < \gamma(\theta)\,,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$. D'où

$$\iint_D \frac{dx\, dy}{\sqrt{\left(\frac{1}{3} + x^2 + y^2\right)^3}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}} \frac{\rho}{\sqrt{\left(\frac{1}{3} + \rho^2\right)^3}}\, d\rho + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sin\theta}} \frac{\rho}{\sqrt{\left(\frac{1}{3} + \rho^2\right)^3}}\, d\rho$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{\cos^2\theta}}}\right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3\sin^2\theta}}}\right) d\theta$$

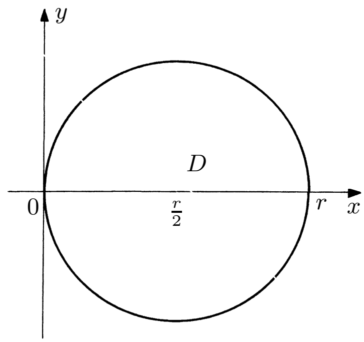
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\pi - \sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{7 - \sin^2\theta}}\, d\theta - \sqrt{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sqrt{3 - \cos^2\theta}}\, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\pi - \sqrt{3}\, \operatorname{Arcsin} \frac{\sin\theta}{\sqrt{7}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} + \sqrt{3}\, \operatorname{Arcsin} \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2\sqrt{7}}\,.$$

4.40 Puisque $D = \left\{(\rho\cos\theta,\, \rho\sin\theta) : 0 < \rho < r\cos\theta\,,\ |\theta| < \dfrac{\pi}{2}\right\}$, on a

$$\iint_D \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{r\cos\theta} \sqrt{r^2 - \rho^2}\, \rho\, d\rho$$

$$= \frac{2r^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\, d\theta = \frac{2r^3}{3} \left(\theta + \cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^3}{9}\,(3\pi - 4)\,.$$



4.41 1) En effet, pour tout $r > 0$: $B(\mathbf{0}, r) \subset D_r =]-r, r[\times]-r, r[\subset B(\mathbf{0}, 2r)$ et

$$\iint_{B(\mathbf{0},r)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \leq \iint_{D_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = 4 \left(\int_0^r e^{-t^2}\, dt \right)^2$$
$$\leq \iint_{B(\mathbf{0},2r)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy\,.$$

2) Ainsi, puisque pour tout $r > 0$:

$$\iint_{B(\mathbf{0},r)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r e^{-\rho^2} \rho\, d\rho = \pi\big(1 - e^{-r^2}\big)$$

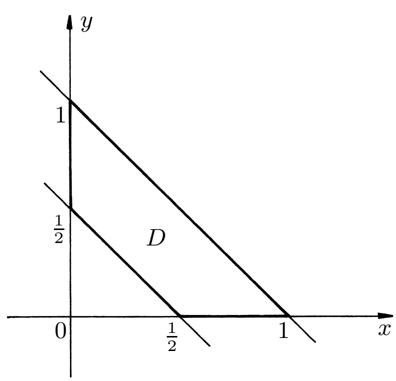
et

$$\iint_{B(\mathbf{0},2r)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2r} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho = \pi\big(1 - e^{-4r^2}\big)\,,$$

on peut écrire $\sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-r^2}\right)} \leq \int_0^r e^{-t^2}\, dt \leq \sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-4r^2}\right)}$ ou encore, par passage à la limite,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

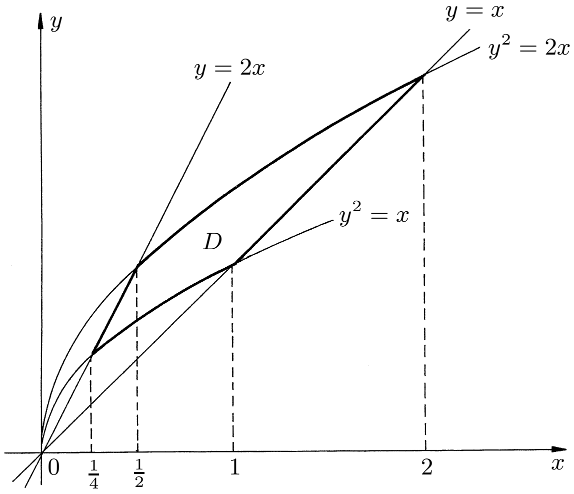
4.42 $$\iint_D e^{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)}\, dx\, dy = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 du \int_{-u}^u e^{\frac{v}{u}}\, dv = \operatorname{sh} 1 \int_{\frac{1}{2}}^1 u\, du = \frac{3}{8} \operatorname{sh} 1\,.$$



$\boxed{\mathbf{4.43}}$ $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(1+x)(1+xy^2)} = 2\int_0^1 du \int_0^u \frac{dv}{(1+u^2)(1+v^2)}$

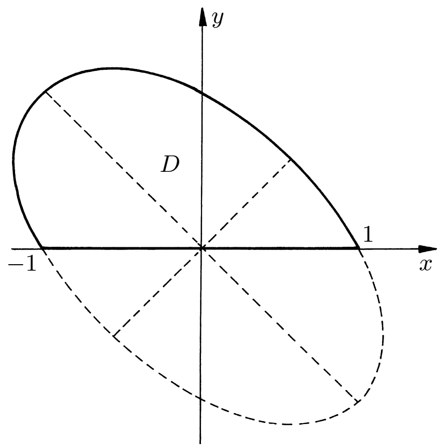
$$= 2\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctg} u}{1+u^2}\,du = \operatorname{Arctg}^2 u\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{16}\,.$$

$\boxed{\mathbf{4.44}}$ $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}\,dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 u\,du \int_1^2 v\,dv = \frac{9}{16}\,.$



$\boxed{\mathbf{4.45}}$ Posons $E = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 < 1\,,\ v > 0\big\}$. Alors,

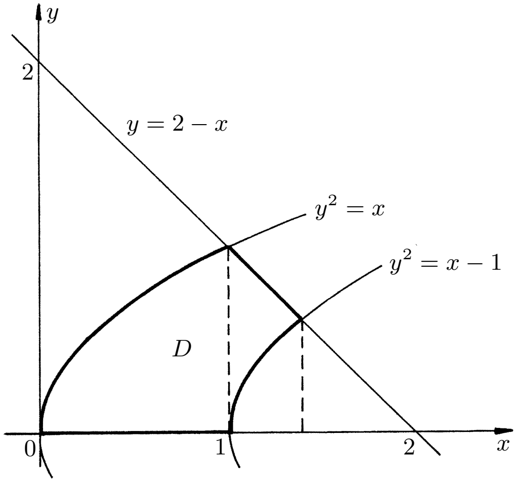
$$\iint_D e^{x^2+xy+y^2}\,dx\,dy = \frac{2}{\sqrt{3}}\iint_E e^{u^2+v^2}\,du\,dv$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^\pi d\theta \int_0^1 \rho\, e^{\rho^2}\,d\rho = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,(e-1)\,.$$



$\boxed{\mathbf{4.46}}$ Posons $E =]0,1[\times]-1,0[$. Alors,

$$\iint_E u^2\,du\,dv = \iint_D \frac{y^2(2+2y^2-x)}{(2-x)^4}\,dx\,dy\,.$$

D'où $\displaystyle\iint_D \frac{y^2(2+2y^2-x)}{(2-x)^4}\,dx\,dy = \int_0^1 u^2\,du = \frac{1}{3}$.

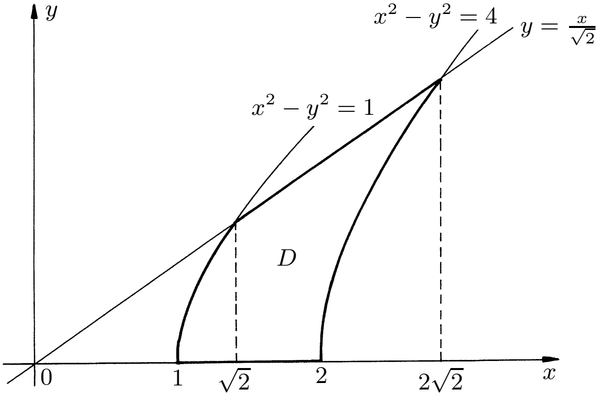


$\boxed{\mathbf{4.47}}$ Posons $E =]1,4[\times]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$. Alors,

$$\iint_E \frac{v}{2u}\,\sin\pi(1-v^2)\,du\,dv = \iint_D \frac{y}{x^3}\,\sin\pi\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dx\,dy\,.$$

D'où

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{y}{x^3}\,\sin\pi\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dx\,dy &= \int_1^4 du\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{v}{2u}\,\sin\pi(1-v^2)\right)dv\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_1^4\frac{du}{u} = \frac{\ln 2}{2\pi}\,.\end{aligned}$$



4.48 Posons, pour $0 < t < 1$:

$$D_t =]t, 1[\times]0, 1[\ \text{ et } E_t = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^2 : t < \mu < 1 \, , \ 0 < \theta < \operatorname{Arctg} \frac{1}{\mu} \right\}.$$

Alors,

$$\int_t^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \, dy \right) dx = \iint_{D_t} \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \, dx \, dy = \iint_{E_t} \frac{\cos 2\theta}{\mu} \, d\mu \, d\theta$$

$$= \int_t^1 d\mu \int_0^{\operatorname{Arctg} \frac{1}{\mu}} \frac{\cos 2\theta}{\mu} \, d\theta = \int_t^1 \frac{d\mu}{1 + \mu^2} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{Arctg} t \, .$$

D'où $\displaystyle \lim_{t \to 0+} \int_t^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \, dy \right) dx = \lim_{t \to 0+} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{Arctg} t \right) = \frac{\pi}{4}.$

4.49 Posons $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 \, , \ \sqrt{x} < y < \sqrt[3]{x} \right\}$. Alors,

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} (1 + y^6) \, dy = \iint_D (1 + y^6) \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_{y^3}^{y^2} (1 + y^6) \, dx$$

$$= \int_0^1 (y^2 - y^3)(1 + y^6) \, dy = \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^9}{9} - \frac{y^{10}}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{17}{180} \, .$$

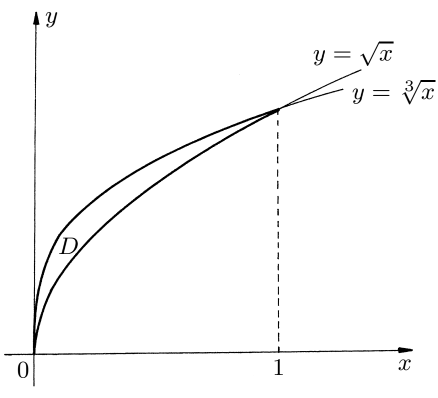


Fig. ex. 4.47

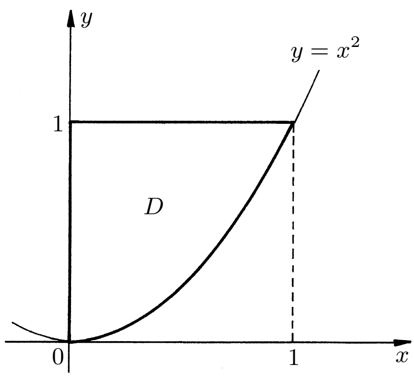


Fig. ex. 4.48

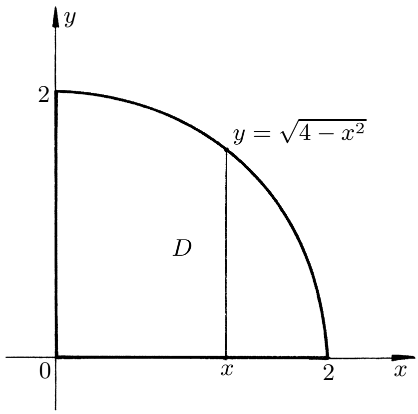
4.50 Posons $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 \, , \ x^2 < y < 1 \right\}$. Alors,

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 xy \, e^{y^3} \, dy = \iint_D xy \, e^{y^3} \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} xy \, e^{y^3} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 \, e^{y^3} \, dy = \frac{e^{y^3}}{6} \Big|_0^1 = \frac{e - 1}{6} \, .$$

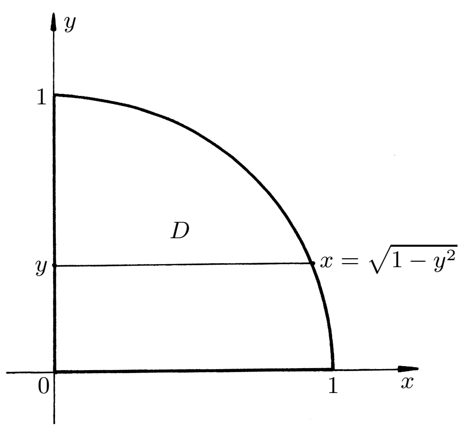
$\boxed{\mathbf{4.51}}$ Posons $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x,\ y > 0\,,\ x^2 + y^2 < 4\}$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\left(4-y^2\right)^3}\, dy &= \iint_D \sqrt{\left(4-y^2\right)^3}\, dx\, dy \\ &= \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{\left(4-y^2\right)^3}\, dx = \int_0^2 \left(4-y^2\right)^2 dy \\ &= \left(16\, y - \frac{8}{3}\, y^3 + \frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \frac{256}{15}\,.\end{aligned}$$



$\boxed{\mathbf{4.52}}$ Posons $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x,\ y > 0\,,\ x^2 + y^2 < 1\}$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\, dx &= \iint_D \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\, dx\, dy \\ = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\, dy &= \int_0^1 \left(\sqrt{2} - \sqrt{1+x^2}\right)\, dx \\ = \left(\sqrt{2}\, x - \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right)\Big|_0^1 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).\end{aligned}$$



$\boxed{\mathbf{4.53}}$ Posons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\,,\ 0 < y < x\}$. Alors, en faisant le changement de variables $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ avec $0 < \rho < 1$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, on peut écrire

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dx = \iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \ln(1+\rho^2)\rho\,d\rho = \frac{\pi}{8}\int_1^2 \ln t\,dt = \frac{\pi}{8}(2\ln 2 - 1)\,.$$

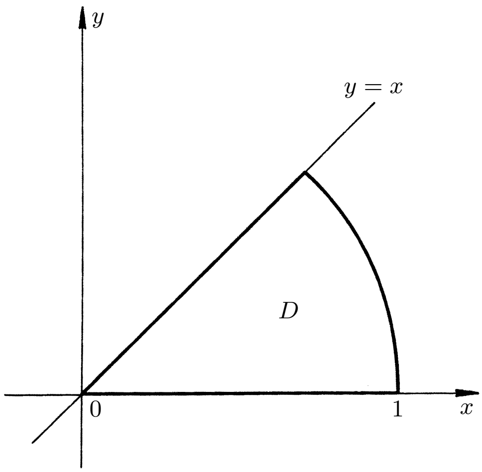


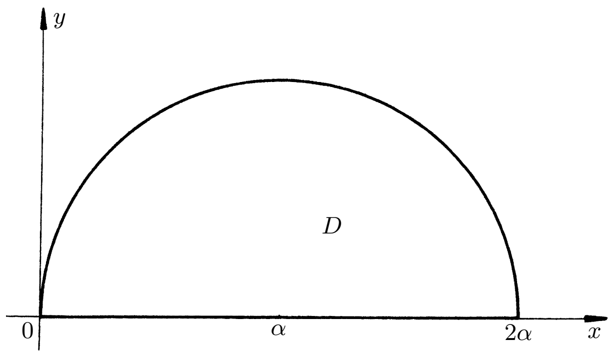
Fig. ex. 4.51 et **Fig. ex. 4.52**

$\boxed{\mathbf{4.54}}$ Posons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\,,\ 0 < y < x\}$. Alors, en faisant le changement de variables $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ avec $0 < \rho < 1$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, on peut écrire

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$= \iint_D \sqrt{1-x^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2\cos^2\theta}\,\rho\,d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin^3\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos\theta} + \cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

$\boxed{\mathbf{4.55}}$ Posons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-\alpha)^2+y^2 < \alpha^2\,,\ y > 0\}$. Alors, en faisant le changement de variables $x = \alpha + \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ avec $0 < \rho < \alpha$ et $0 < \theta < \pi$, on peut écrire

$$\int_0^{2\alpha} dx \int_0^{\sqrt{2\alpha x - x^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\alpha} (\alpha^2+\rho^2+2\alpha\rho\cos\theta)\rho\,d\rho = \alpha^4\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cos\theta\right)d\theta = \frac{3}{4}\,\alpha^4\pi\,.$$

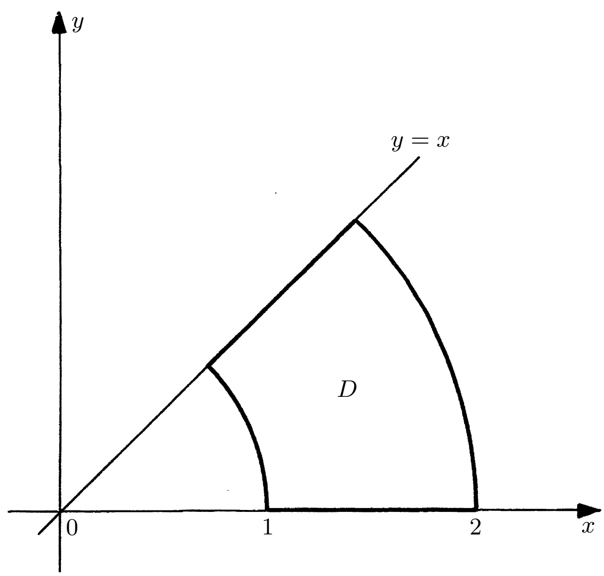


4.56 Posons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\,,\ 0 < y < x\}$. Alors, en faisant le changement de variables $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ avec $1 < \rho < 2$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, on peut écrire

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\, dy + \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{0}^{x} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\, dy$$

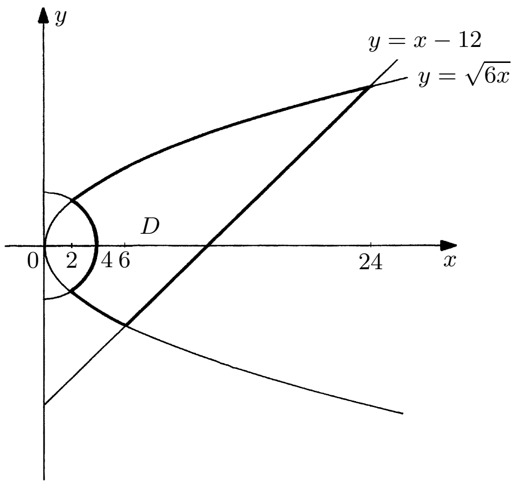
$$+ \int_{\sqrt{2}}^{2} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\, dy$$

$$= \iint_D \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\, d\theta \int_1^2 \rho\, d\rho = \frac{3}{4}\,.$$



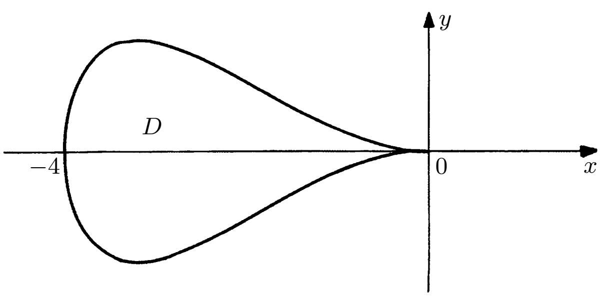
4.57

$$\begin{aligned}\text{Aire}(D) &= \iint_D dx\,dy \\ &= 2\int_2^4 dx \int_{\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{6x}} dy + 2\int_4^6 dx \int_0^{\sqrt{6x}} dy + \int_6^{24} dx \int_{x-12}^{\sqrt{6x}} dy \\ &= 2\int_2^4 \Big(\sqrt{6x} - \sqrt{16-x^2}\Big)\,dx + 2\int_4^6 \sqrt{6x}\,dx + \int_6^{24}\Big(\sqrt{6x} - (x-12)\Big)\,dx \\ &= \left(\frac{4}{3}\,x\sqrt{6x} - x\sqrt{16-x^2} - 16\ \text{Arcsin}\,\frac{x}{4}\right)\Bigg|_2^4 \\ &\qquad + \frac{4}{3}\,x\sqrt{6x}\Bigg|_4^6 + \left(\frac{2}{3}\,x\sqrt{6x} - \frac{1}{2}\,(x-12)^2\right)\Bigg|_6^{24} = 162 - \frac{16\,\pi}{3} - \frac{4}{\sqrt{3}}\,.\end{aligned}$$



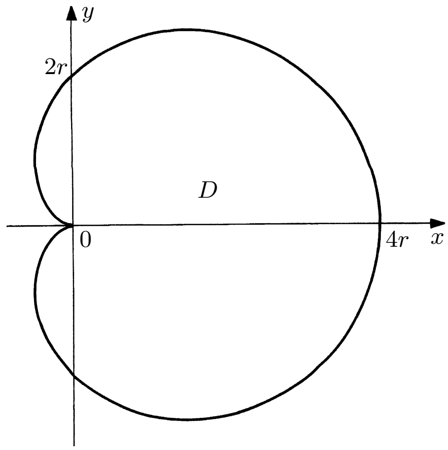
4.58 En faisant le chagement de variable $x = t^2 - 4$ avec $t \geq 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\text{Aire}(D) &= \iint_D dx\,dy = \int_{-4}^0 dx \int_{-x^2\sqrt{x+4}}^{x^2\sqrt{x+4}} dy = 2\int_{-4}^0 x^2\sqrt{x+4}\,dx \\ &= 4\int_0^2 t^2\big(t^2-4\big)^2\,dt = 4\left(\frac{t^7}{7} - \frac{8}{5}\,t^5 + \frac{16}{3}\,t^3\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2^{12}}{105}\,.\end{aligned}$$



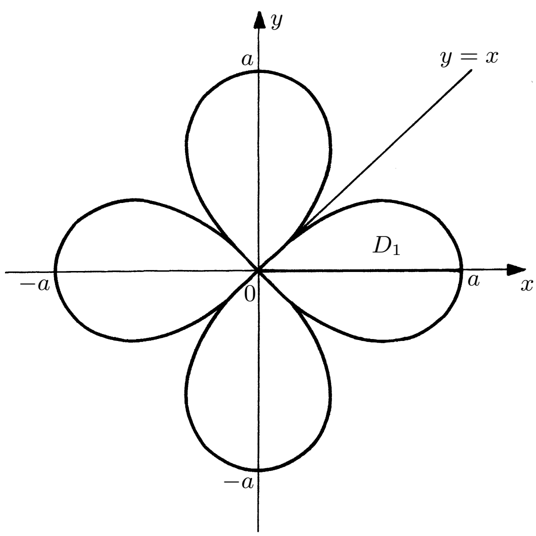
$\boxed{\mathbf{4.59}}$ Puisque $D = \big\{(\rho\cos\theta,\, \rho\sin\theta) : 0 < \rho < 2r(1+\cos\theta)\,,\ 0 \le \theta < 2\pi\big\}$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Aire}(D) &= \iint_D dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2r(1+\cos\theta)} \rho\,d\rho = 2r^2 \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2\,d\theta \\ &= 2r^2 \left(\frac{3}{2}\,\theta + 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 6\pi r^2\,.\end{aligned}$$



$\boxed{\mathbf{4.60}}$ Posons $D_1 = \left\{(\rho\cos\theta,\, \rho\sin\theta) : 0 < \rho < a\sqrt{\cos 2\theta}\,,\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}\right\}$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{Aire}(D) &= \iint_D dx\,dy = 8\iint_{D_1} dx\,dy = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho\,d\rho \\ &= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\,d\theta = 2a^2\,.\end{aligned}$$



$\boxed{\textbf{4.61}}$ Puisque D admet la première bissectrice $y = x$ pour axe de symétrie, on peut écrire

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}\,dx\,dy = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)+f(y)}\,dx\,dy\;;$$

ce qui entraîne, entre autres, que

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dx\,dy = \iint_D \frac{f(x)+f(y)}{f(x)+f(y)}\,dx\,dy = 2\iint_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}\,dx\,dy$$

ou encore $\displaystyle\iint_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}\,dx\,dy = \frac{\text{Aire}(D)}{2} = 2\pi.$

Par conséquent $\displaystyle\iint_D \frac{2f(x)+5f(y)}{f(x)+f(y)}\,dx\,dy = 14\,\pi.$

$\boxed{\textbf{4.62}}$ Pour commencer, on va supposer que les deux fonctions f et g sont linéairement dépendantes et que $g \neq 0$ (sinon l'égalité est évidence). Alors, il existe un nombre réel λ tel que $f = \lambda g$ et l'on a

$$\begin{aligned}\left(\iint_D f(x,y)g(x,y)\,dx\,dy\right)^2 &= \left(\iint_D \lambda g^2(x,y)\,dx\,dy\right)^2\\ &= \left(\iint_D f^2(x,y)\,dx\,dy\right)\left(\iint_D g^2(x,y)\,dx\,dy\right).\end{aligned}$$

Montrons à présent la réciproque. Pour cela, considérons la fonction auxiliaire $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned}F(t) &= \iint_D (f+tg)^2(x,y)\,dx\,dy\\ &= t^2\iint_D g^2(x,y)\,dx\,dy + 2t\iint_D fg(x,y)\,dx\,dy + \iint_D f^2(x,y)\,dx\,dy\end{aligned}$$

et supposons à nouveau pour la même raison que $g \neq 0$. Alors,

$$\iint_D g^2(x,y)dx\,dy > 0$$

et, en posant

$$\alpha = -\frac{\displaystyle\iint_D fg(x,y)\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_D g^2(x,y)\,dx\,dy}\,,$$

on obtient $F(\alpha) = 0$; ce qui entraîne que $f + \alpha g = 0$ ou encore que les deux fonctions f et g sont linéairement dépendantes.

$\boxed{\textbf{4.63}}$ *Rappel* : $\forall\, a,\, b \geq 0 : ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ (ex. 5.233 vol. 1).

Puisque pour $f = 0$ ou $g = 0$ le résultat est évident, on fera l'hypothèse supplémentaire que $f \neq 0$ et $g \neq 0$. Alors, $I_D\big(|f|^p\big) > 0$ et $I_D\big(|g|^q\big) > 0$. Ainsi, puisque pour tout $(x, y) \in D$:

$$\frac{|fg|(x,y)}{\big(I_D\big(|f|^p\big)\big)^{\frac{1}{p}}\,\big(I_D\big(|g|^q\big)\big)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\big|f(x,y)\big|^p}{p\,\big(I_D\big(|f|^p\big)\big)} + \frac{\big|g(x,y)\big|^q}{q\,\big(I_D\big(|g|^q\big)\big)}\,,$$

on a

$$\begin{aligned}
&\frac{\displaystyle\iint_D |fg|(x,y)\,dx\,dy}{\big(I_D\big(|f|^p\big)\big)^{\frac{1}{p}}\,\big(I_D\big(|g|^q\big)\big)^{\frac{1}{q}}} \\
&\qquad \leq \frac{\displaystyle\iint_D \big|f(x,y)\big|^p\,dx\,dy}{p\,\big(I_D\big(|f|^p\big)\big)} + \frac{\displaystyle\iint_D \big|g(x,y)\big|^q\,dx\,dy}{q\,\big(I_D\big(|g|^q\big)\big)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

ou encore $\displaystyle\iint_D |fg|(x,y)\,dx\,dy \leq \big(I_D\big(|f|^p\big)\big)^{\frac{1}{p}}\,\big(I_D\big(|g|^q\big)\big)^{\frac{1}{q}}$.

$\boxed{\textbf{4.64}}$ Puisque pour $p = 1$ ou $|f + g| = 0$ le résultat est évident on fera les hypothèses supplémentaires que $p > 1$ et $|f + g| \neq 0$. Ainsi, en constatant que pour $q = \frac{p}{p-1}$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et

$$|f+g|^p = |f+g|\,|f+g|^{p-1} \leq |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}$$

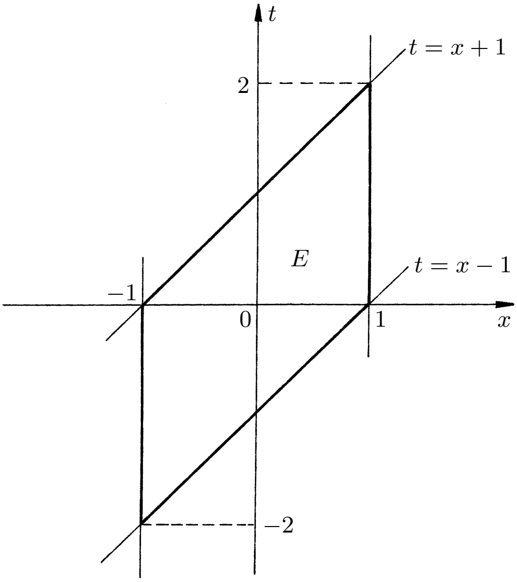
on peut écrire, en utilisant l'inégalité de Hölder (exercice précédent), que

$$\begin{aligned}
I_D\big(|f+g|^p\big) &\leq I_D\big(|f|\,|f+g|^{p-1}\big) + I_D\big(|g|\,|f+g|^{p-1}\big) \\
&\leq \big(I_D\big(|f|^p\big)\big)^{\frac{1}{p}}\,\big(I_D\big(|f+g|^p\big)\big)^{\frac{p-1}{p}} + \big(I_D\big(|g|^p\big)\big)^{\frac{1}{p}}\,\big(I_D\big(|f+g|^p\big)\big)^{\frac{p-1}{p}}
\end{aligned}$$

ou encore $\big(I_D\big(|f+g|^p\big)\big)^{\frac{1}{p}} \leq \big(I_D\big(|f|^p\big)\big)^{\frac{1}{p}} + \big(I_D\big(|g|^p\big)\big)^{\frac{1}{p}}$.

$\boxed{\textbf{4.65}}$ En effet, en posant $E = \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1,\ x - 1 < t < x + 1\big\}$, on obtient, puisque la fonction est paire, que

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x-y)\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} f(x-y)\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt \\
&= \iint_E f(t)\,dx\,dt = \int_{-2}^{0} dt \int_{-1}^{1+t} f(t)\,dx + \int_{0}^{2} dt \int_{t-1}^{1} f(t)\,dx \\
&= \int_{-2}^{0} (2+t) f(t)\,dt + \int_{0}^{2} (2-t) f(t)\,dt = 2\int_{0}^{2} (2-t) f(t)\,dt\,.
\end{aligned}$$



4.66 Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(r,y) = \int_0^y f(r,s)ds\,.$$

Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = g(x,y) = \int_0^y f(x,s)\,ds \text{ et } \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = f(x,y)\,.$$

De même, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \int_0^x \frac{\partial g}{\partial y}(r,y)\,dr = \int_0^x f(r,y)\,dr \text{ et } \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = f(x,y)\,.$$

4.67 1) $\displaystyle\iint_{B((a,b),r)} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \int_{b-r}^{b+r} dy \int_{a-\sqrt{r^2-(y-b)^2}}^{a+\sqrt{r^2-(y-b)^2}} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\,dx$

$$= \int_{b-r}^{b+r} \left(f_2\left(a + \sqrt{r^2-(y-b)^2}, y\right) - f_2\left(a - \sqrt{r^2-(y-b)^2}, y\right)\right) dy$$

$$= r \int_0^\pi \big(f_2(a + r\sin\theta, b + r\cos\theta) - f_2(a - r\sin\theta, b + r\cos\theta)\big) \sin\theta\, d\theta$$

$$= r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(f_2(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) - f_2(a - r\cos\theta, b + r\sin\theta)\big)\cos\theta\, d\theta$$

$$= r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_2(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\cos\theta\, d\theta$$

$$+ r\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f_2(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\cos\theta\, d\theta$$

$$= r\int_{0}^{2\pi} f_2(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\cos\theta\, d\theta\,.$$

De même,

$$\iint_{B((a,b),r)} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy = \int_{a-r}^{a+r} dx \int_{b-\sqrt{r^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{r^2-(x-a)^2}} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\, dy$$

$$= \int_{a-r}^{a+r} \left(f_1\left(x, b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2}\right) - f_1\left(x, b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}\right)\right) dx$$

$$= r\int_0^{\pi} (f_1(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) - f_1(a + r\cos\theta, b - r\sin\theta))\sin\theta\, d\theta$$

$$= r\int_0^{\pi} f_1(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$+ r\int_{-\pi}^{0} f_1(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$= r\int_0^{2\pi} f_1(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\sin\theta\, d\theta\,.$$

D'où

$$\iint_{B((a,b),r)} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right) dx\, dy$$

$$= r\int_0^{2\pi} \big(-f_1(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\sin\theta + f_2(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\cos\theta\big)\, d\theta\,.$$

2) Il suffit de prendre $f_1 = -\frac{\partial f}{\partial y}$ et $f_2 = \frac{\partial f}{\partial x}$.

3) Pour commencer, on va supposer que l'extremum est un maximum et soient $0 < s < \delta$ et $g : [0, s] \to \mathbb{R}$ la fonction continue définie par

$$g(t) = \int_0^{2\pi} f(a + t\cos\theta, b + t\sin\theta)\, d\theta\,.$$

Puisque, d'après 2), pour tout $0 < t < s$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,(a + t\cos\theta, b + t\sin\theta)\cos\theta \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\partial f}{\partial y}\,(a + t\cos\theta, b + t\sin\theta)\sin\theta \right) d\theta \\ &= \frac{1}{t}\iint_{B((a,b),t)} \Delta f(x,y)\,dx\,dy = 0\,, \end{aligned}$$

la fonction g est constante sur $[0, s]$. Montrons à présent que f vaut $f(a, b)$ sur $\partial B\big((a, b), s\big)$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un $(x, y) \in \partial B\big((a, b), s\big)$ tel que $f(x, y) < f(a, b)$. Comme de plus f atteint son maximum en (a, b), on aurait

$$g(s) = \int_0^{2\pi} f\big(a + s\cos\theta, b + s\sin\theta\big)d\theta < \int_0^{2\pi} f(a, b)\,d\theta = g(0)\ ;$$

ce qui est impossible car $g(0) = g(s)$. D'où contradiction.

On a ainsi démontré que pour tout $0 < s < \delta$, la fonction f vaut $f(a, b)$ sur $\partial B\big((a, b), s\big)$; ce qui implique qu'elle vaut $f(a, b)$ sur $B\big((a, b), \delta\big)$.

Supposons à présent qu'en (a, b) la fonction f atteigne son minimum. Alors, la fonction $-f$ atteint son maximum en ce point et donc, d'après le résultat obtenu ci-dessus, elle est constante. D'où, f constante.

4) On va supposer que cet extremum vaut μ et posons

$$\Omega = \big\{(x, y) \in E : f(x, y) = \mu\big\}\,.$$

D'une part, d'après 3), Ω est un ouvert qui par hypothèse est non vide.

D'autre part, $E\backslash\Omega = \emptyset$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $E\backslash\Omega \neq \emptyset$. Alors, si $(c, d) \in E\backslash\Omega$: $f(c, d) \neq \mu$ et, f étant continue, il existe $\tau > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in B\big((c, d), \tau\big)$: $f(x, y) \neq \mu$. Autrement dit, $B\big((c, d), \tau\big) \subset E\backslash\Omega$. Par conséquent $E\backslash\Omega$ est aussi un ouvert ; ce qui est impossible car $E = \Omega \cup E\backslash\Omega$ est connexe. D'où contradiction.

On a ainsi démontré que $E = \Omega$ ou encore que f est constante.

5) Puisque f est continue, elle atteint ses extrema sur le compact $\overline{E}$. D'après 4), si un de ses extrema se trouve dans E, elle est constante. D'où le résultat (voir exercice 3.283).

$\boxed{\mathbf{4.68}}$ En faisant le changement de variable $t = 1 + \rho^2$, on peut écrire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \iint_{B(\mathbf{0},k)} \frac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{\big(1 + x^2 + y^2\big)^2}\,dx\,dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k \frac{\ln(1 + \rho^2)}{\big(1 + \rho^2\big)^2}\,\rho\,d\rho = \pi \int_1^{1+k^2} \frac{\ln t}{t^2}\,dt \\ &= -\pi\left(\frac{\ln(1 + k^2)}{1 + k^2} + \frac{1}{1 + k^2} - 1\right)\ ; \end{aligned}$$

ce qui donne, par passage à la limite,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\big(1+x^2+y^2\big)^2}\,dx\,dy = \lim_{k\to+\infty} \iint_{B(\mathbf{0},k)} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\big(1+x^2+y^2\big)^2}\,dx\,dy = \pi\,.$$

4.69 Posons $D_k = \,]-k,k[\,\times\,]-k,k[$ avec $k\in\mathbb{N}^*$. Ainsi, puisque pour tout $k>0$:

$$\iint_{D_k} \frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \left(\int_{-k}^{k} \frac{dt}{1+t^2}\right)^2 = 4\left(\int_0^k \frac{dt}{1+t^2}\right)^2 = 4\operatorname{Arctg}^2 k\,,$$

on obtient, par passage à la limite,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = 4\lim_{k\to+\infty} \operatorname{Arctg}^2 k = \pi^2\,.$$

4.70 Posons $D_k = \,]-k,k[\,\times\,]-k,k[$ avec $k\in\mathbb{N}^*$. Ainsi, puisque pour tout $k>0$:

$$\iint_{D_k} \frac{dx\,dy}{(1+x^4)(1+y^4)} = \left(\int_{-k}^{k} \frac{dt}{1+t^4}\right)^2 = 4\left(\int_0^k \frac{dt}{1+t^4}\right)^2\,,$$

on obtient, par passage à la limite (ex. 6.81 vol. 1),

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^4)(1+y^4)} = \lim_{k\to+\infty} \iint_{D_k} \frac{dx\,dy}{(1+x^4)(1+y^4)} = \frac{\pi^2}{2}\,.$$

4.71 Posons $D_k = \,]-k,k[\,\times\,]-k,k[$ avec $k\in\mathbb{N}^*$. Ainsi, puisque pour tout $k>0$:

$$\iint_{D_k} \frac{e^{-x^2}}{1+y^2}\,dx\,dy = \int_{-k}^{k} dx \int_{-k}^{k} \frac{e^{-x^2}}{1+y^2}\,dy = 4\operatorname{Arctg} k \int_0^k e^{-x^2}\,dx\,,$$

on obtient, par passage à la limite (ex. 4.39),

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-x^2}}{1+y^2}\,dx\,dy = \lim_{k\to+\infty} \iint_{D_k} \frac{e^{-x^2}}{1+y^2}\,dx\,dy = \pi\sqrt{\pi}\,.$$

4.72 Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $\big|e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\big| \le e^{-(x^2+y^2)}$ et

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \lim_{k\to+\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k e^{-\rho^2}\rho\,d\rho = \pi \lim_{k\to+\infty} \big(1-e^{-k^2}\big) = \pi\,,$$

on a, d'après le critère de comparaison, que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \big|e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\big|\,dx\,dy < +\infty\,;$$

ce qui nous permet d'écrire, en constatant que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\iint_{B(\mathbf{0},k)} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k e^{-\rho^2} \cos\rho^2 \rho\, d\rho$$
$$= \pi \int_0^{k^2} e^{-t} \cos t\, dt = \frac{\pi}{2} e^{-t}(\sin t - \cos t)\Big|_0^{k^2} = \frac{\pi}{2}\left(e^{-k^2}(\sin k^2 - \cos k^2) + 1\right)$$

que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2)\, dx\, dy$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \iint_{B(\mathbf{0},k)} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2)\, dx\, dy = \frac{\pi}{2}\,.$$

4.73 $\iint_{\mathbb{R}^2} |x^2-y^2| dx\, dy = +\infty$ car

$$\lim_{k\to+\infty} \iint_{D_k} (x^2-y^2)\, dx\, dy = 0 \neq +\infty = \lim_{k\to+\infty} \iint_{\widehat{D}_k} (x^2-y^2)\, dx\, dy$$

où

$$D_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < k,\ |y| < k\right\}$$
$$\widehat{D}_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2k,\ |y| < k\right\}.$$

4.74 *Rappel :* $\forall\, x > 0 : \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2x-1}\, du\,.$

Ainsi, en posant pour tout entier $k > 0$:

$$D_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < k\right\}$$
$$C_k = \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : 0 < \theta < \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho < k\right\},$$

on a que pour tout $x, y > 0$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2x-1}\, du \int_0^{+\infty} e^{-v^2} v^{2y-1}\, dv \\
&= 4 \lim_{k\to+\infty} \iint_{D_k} e^{-(u^2+v^2)} u^{2x-1} v^{2y-1}\, du\, dv \\
&= 4 \lim_{k\to+\infty} \iint_{C_k} e^{-(u^2+v^2)} u^{2x-1} v^{2y-1}\, du\, dv \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta\, d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho^{2(x+y)-1}\, d\rho \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta\, d\theta\, \Gamma(x+y)\,.
\end{aligned}$$

Finalement, pour tout $s \in \,]0,1[$:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sin \pi s} &= \Gamma(s)\Gamma(1-s) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2s-1}\theta \sin^{-(2s-1)}\theta \, d\theta \\ &= \int_{0+}^{1-} t^{s-1}(1-t)^{-s}\,dt = \int_{0+}^{+\infty} \frac{w^{s-1}}{1+w}\,dw\end{aligned}$$

avec comme dernier changement de variable $t = \frac{w}{1+w}$.

$\boxed{\mathbf{4.75}}$ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \,]0,+\infty[$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{1+y^2}{(1+y^4)\left(1+\left(1+y^2\right)^2 x^2\right)}\,.$$

1) Posons $D_k = \,]-k,k[\,\times\,]-k,k[$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, puisque pour tout $k > 0$:

$$\begin{aligned}\iint_{D_k} f(x,y)dx\,dy &= \int_{-k}^{k} dy \int_{-k}^{k} \frac{1+y^2}{(1+y^4)\left(1+\left(1+y^2\right)^2 x^2\right)}\,dx \\ &= 2\int_{-k}^{k} \frac{\operatorname{Arctg}\big(k(1+y^2)\big)}{1+y^4}\,dy < 2\pi\int_0^k \frac{dy}{1+y^4} < 2\pi\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4}\,,\end{aligned}$$

on a $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy < +\infty$.

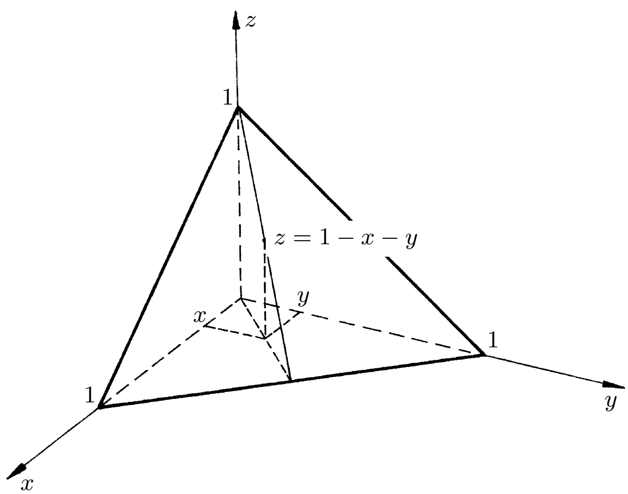
2) Soient $\alpha > 0$ et $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g_\alpha(x) = \frac{1+\alpha^2}{1+x^2}\,.$$

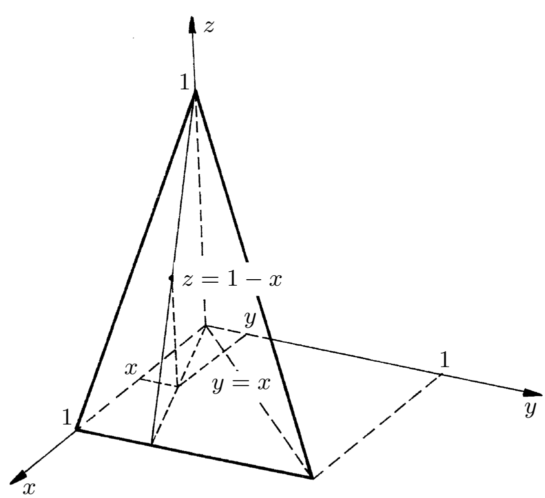
Alors, pour tout $|y| \le \alpha$ et tout $x \in \mathbb{R} : 0 < f(x,y) \le g_\alpha(x,y)$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(x)\,dx$ $= \pi(1+\alpha^2)$. Ainsi, les hypothèses de la proposition 4.15 étant vérifiées, on peut écrire (ex. 6.81 vol. 1)

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+y^2}{(1+y^4)\left(1+\left(1+y^2\right)^2 x^2\right)}\,dx = 2\pi\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y^2+\sqrt{2}y+1}{y^2-\sqrt{2}y+1} + \operatorname{Arctg}\left(\sqrt{2}y-1\right) + \operatorname{Arctg}\left(\sqrt{2}y+1\right)\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}}\,.\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{4.76}}$ $$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^2} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^2}$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+x+y}\right) dy$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{x-1}{2} + \ln 2 - \ln(1+x)\right) dx$$
$$= \left(\frac{(x-1)^2}{4} + x(1+\ln 2) - (x+1)\ln(1+x)\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{4} - \ln 2\,.$$



$\boxed{\textbf{4.77}}$ $$\iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{1-x} (x^2+y^2)\,dz$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^x (1-x)(x^2+y^2)\,dy = \frac{4}{3}\int_0^1 (1-x)x^3\,dx = \frac{1}{15}\,.$$



4.78 Puisque

$$D = \left\{(\rho\sin\gamma\cos\theta, \rho\sin\gamma\sin\theta, \rho\cos\gamma) : 1 < \rho < 2\,,\ 0 \le \theta < 2\pi\,,\ 0 \le \gamma \le \pi\right\},$$

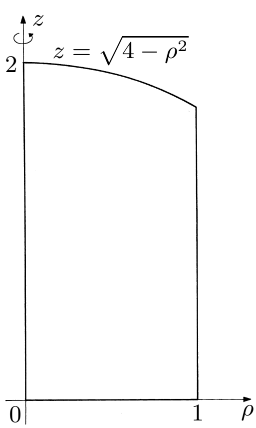
on a $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\gamma \int_1^2 \rho\sin\gamma\,d\rho = 6\pi.$

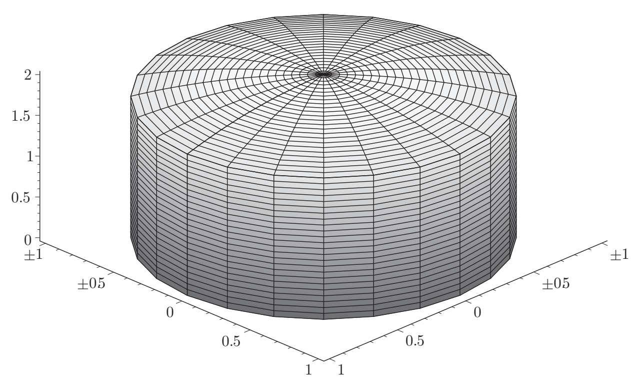
4.79

$$\begin{aligned}
\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}} &= \int_{-1}^{1} dx \iint_{B(\mathbf{0},\sqrt{1-x^2})} \frac{dy\,dz}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}} \\
&= \int_{-1}^{1} dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\rho}{\sqrt{(x-2)^2+\rho^2}}\,d\rho \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{5-4x} + x - 2\right) dx \\
&= 2\pi \left(-\frac{\sqrt{(5-4x)^3}}{6} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2\pi}{3}\,.
\end{aligned}$$

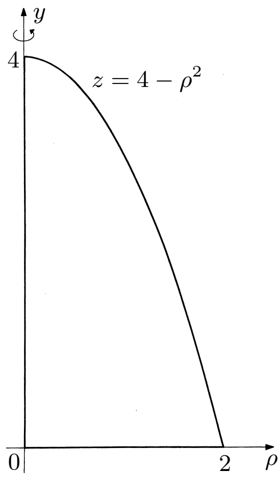
4.80

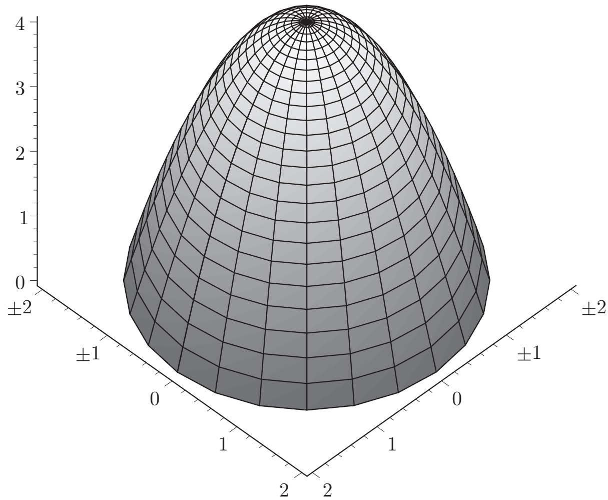
$$\begin{aligned}
\iiint_D z\,dx\,dy\,dz &= \iint_{B(\mathbf{0},1)} \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dz\right) dx\,dy \\
&= \frac{1}{2} \iint_{B(\mathbf{0},1)} (4-x^2-y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (4-\rho^2)\rho\,d\rho = \frac{7\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$



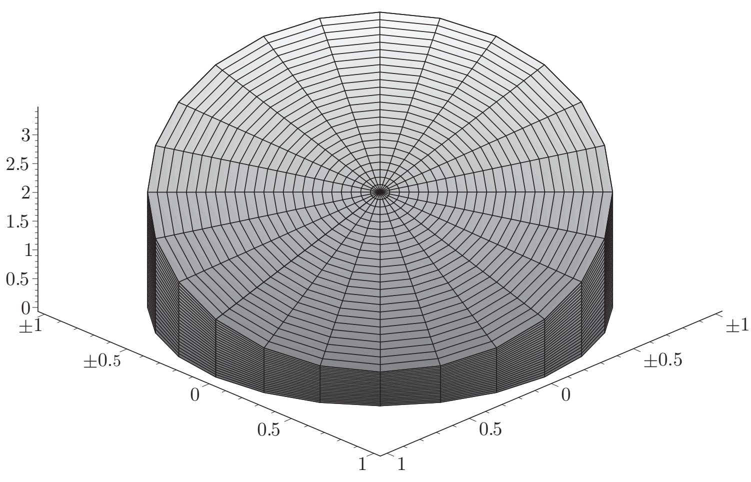


$\boxed{\mathbf{4.81}}$ $$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \iint_{B(\mathbf{0},2)} \left(\int_0^{4-x^2-y^2} z\,dz \right) dx\,dy$$
$$= \frac{1}{2} \iint_{B(\mathbf{0},2)} \left(4 - x^2 - y^2\right)^2 dx\,dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(4-\rho^2\right)^2 \rho\,d\rho = \frac{32\,\pi}{3}\,.$$



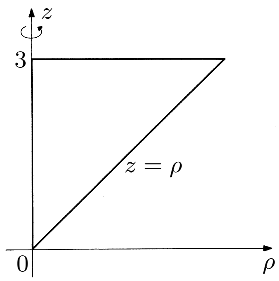


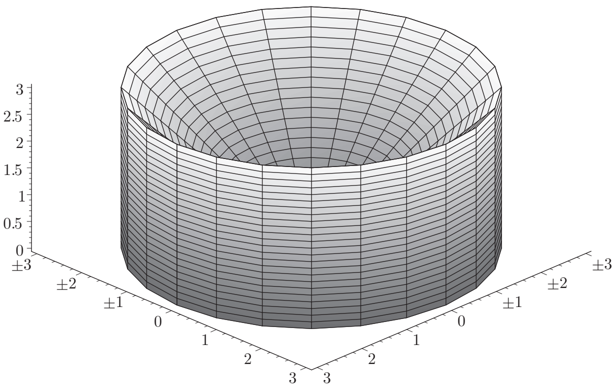
$\boxed{\mathbf{4.82}}$ $$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \iint_{B(\mathbf{0},1)} \left(\int_0^{2-x-y} \sqrt{x^2+y^2}\,dz \right) dx\,dy$$
$$= \iint_{B(\mathbf{0},1)} (2-x-y)\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2 - \rho\cos\theta - \rho\sin\theta)\rho^2\,d\rho$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3} - \frac{\cos\theta + \sin\theta}{4} \right) d\theta = \frac{4\pi}{3}\,.$$



4.83 $\displaystyle \iiint_D z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 dz \iint_{B(\mathbf{0},z)} z(x^2+y^2)\,dx\,dy$

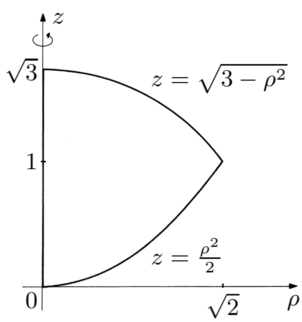
$$= \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z z\rho^3\,d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^3 z^5 dz = \frac{243\,\pi}{4}\,.$$

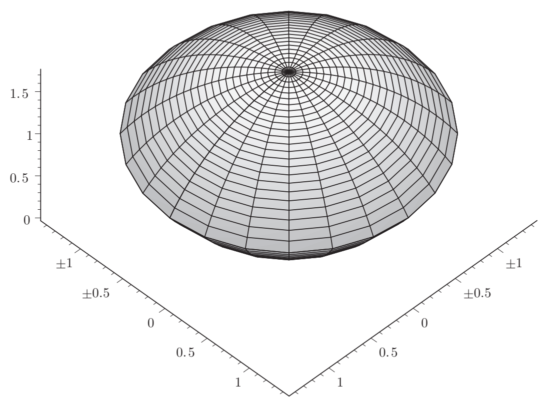




4.84 Puisque

$$D = \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) : 0 < \rho < \sqrt{2}\,,\ 0 \le \theta < 2\pi\,,\ \frac{\rho^2}{2} < z < \sqrt{3-\rho^2}\right\},$$





on a

$$\iiint_D (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^{\sqrt{3-\rho^2}} dz \int_0^{2\pi} (\rho\cos\theta + \rho\sin\theta + z)^2 \rho\,d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^{\sqrt{3-\rho^2}} \rho(\rho^2+z^2)\,dz$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(\left(\rho + \frac{2}{3}\rho^3\right)\sqrt{3-\rho^2} - \frac{\rho^5}{2} - \frac{\rho^7}{24}\right) d\rho$$

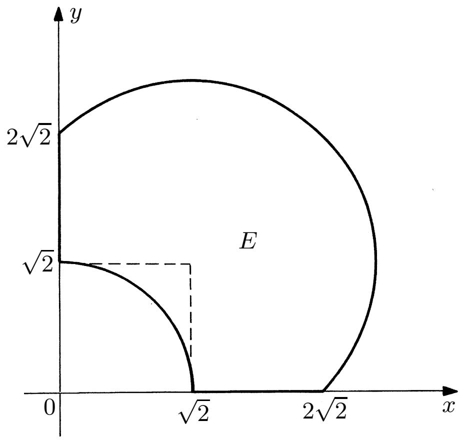
$$= 2\pi\left(\sqrt{(3-\rho^2)}\left(-\frac{9}{5} + \frac{\rho^2}{5} + \frac{2}{15}\rho^4\right) - \frac{\rho^6}{12} - \frac{\rho^8}{192}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{5}\left(-\frac{97}{12} + 9\sqrt{3}\right).$$

$\boxed{\mathbf{4.85}}$ Posons

$$E = \left\{ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \sqrt{2} < \rho < 2\sqrt{2}\,(\cos\theta + \sin\theta)\,,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

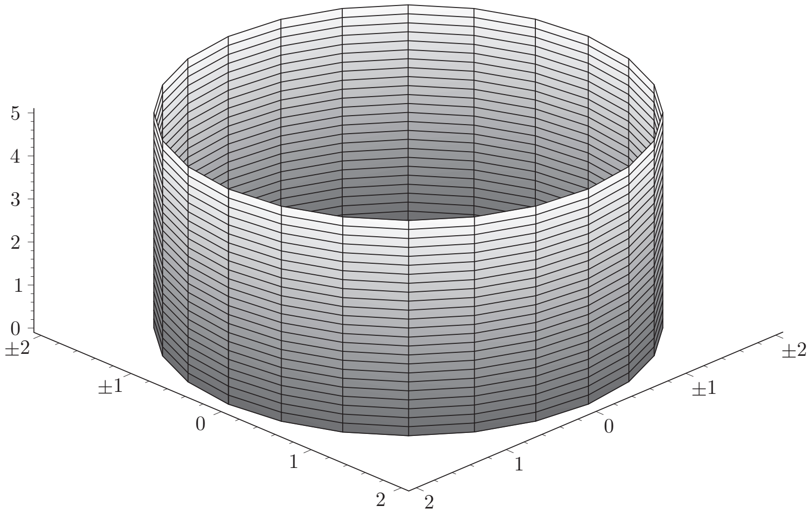
Alors

$$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2} = \iint_E \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}\,(\cos\theta+\sin\theta)} (\cos\theta+\sin\theta)\,d\rho$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(2(\cos\theta+\sin\theta)-1\big)(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta = \pi\sqrt{2}\,.$$

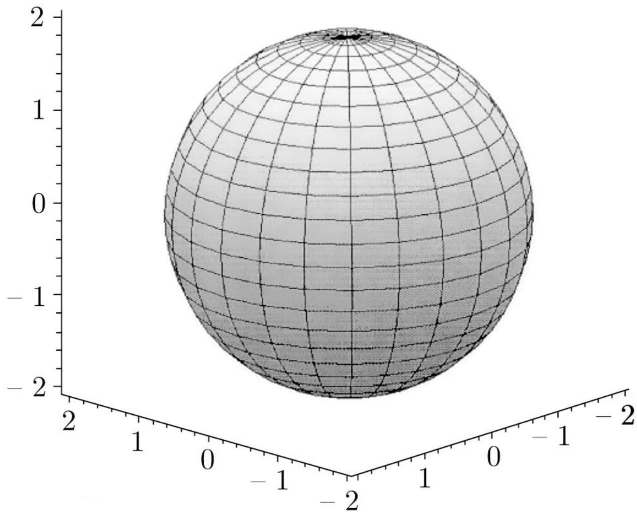


$\boxed{\mathbf{4.86}}$ $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < r^2\,,\ 0 < z < h\big\}.$

$$V = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^h dz \iint_{B(\mathbf{0},r)} dx\,dy = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho d\rho = \pi r^2 h\,.$$



4.87 $V = \iiint_{B(\mathbf{0},r)} dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\gamma \int_0^{r} \rho^2 \sin\gamma\, d\rho = \frac{4}{3}\,\pi r^3\,.$



4.88 Soit a, b et c trois constantes positives et posons

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1\right\}.$$

Alors, en faisant le changement de variable $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\sin\theta$ avec $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
V = \iiint_D dx\,dy\,dz &= \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz \\
&= 2c \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy \\
&= 2bc \int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\cos^2\theta\, d\theta \\
&= 8bc \int_0^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{4}{3}\,\pi abc\,.
\end{aligned}$$

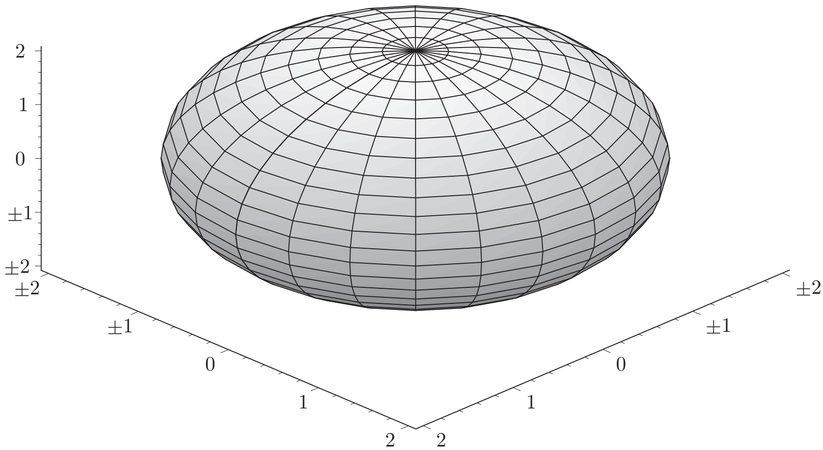


Fig. ex. 88 et **Fig. ex. 89**

$\boxed{\mathbf{4.89}}$ Posons

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+4y^2+9z^2<36\right\} \\ &= \left\{(6\rho\sin\gamma\cos\theta, 3\rho\sin\gamma\sin\theta, 2\rho\cos\gamma) : 0\le\rho<1,\ 0\le\gamma\le\pi,\ 0\le\theta<2\pi\right\}. \end{aligned}$$

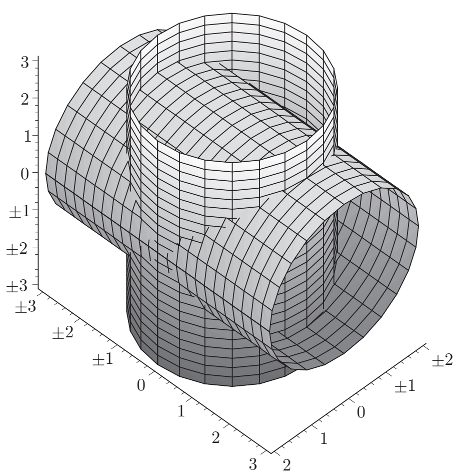
Alors, on a $V = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\gamma \int_0^{1} 36\,\rho^2\sin\gamma\,d\gamma = 48\,\pi.$

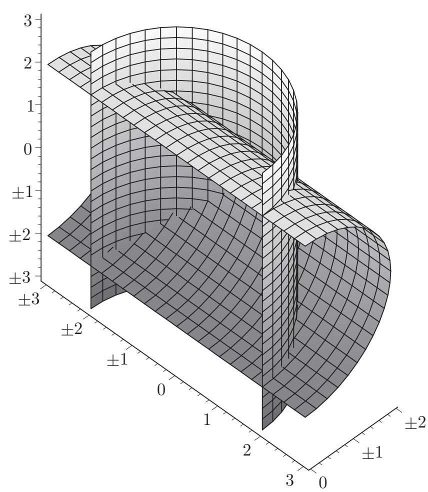
$\boxed{\mathbf{4.90}}$ Puisque le domaine commun à ces deux cylindres est

$$D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2<\alpha^2\,,\ x^2+z^2<\alpha^2\right\},$$

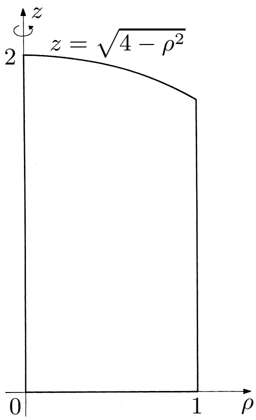
on a

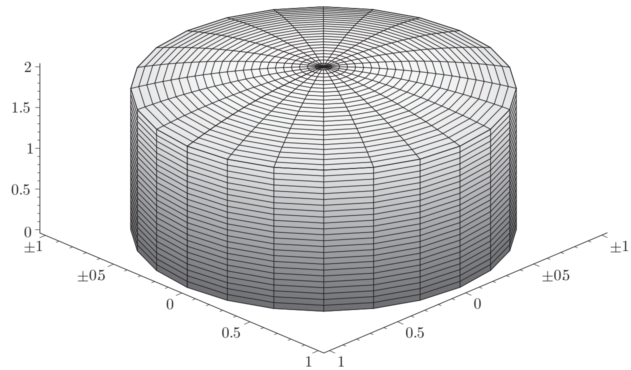
$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_{-\alpha}^{\alpha} dx \int_{-\sqrt{\alpha^2-x^2}}^{\sqrt{\alpha^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{\alpha^2-x^2}}^{\sqrt{\alpha^2-x^2}} dz \\ &= 8\int_0^{\alpha} (\alpha^2-x^2)\,dx = \frac{16}{3}\,\alpha^3\,. \end{aligned}$$



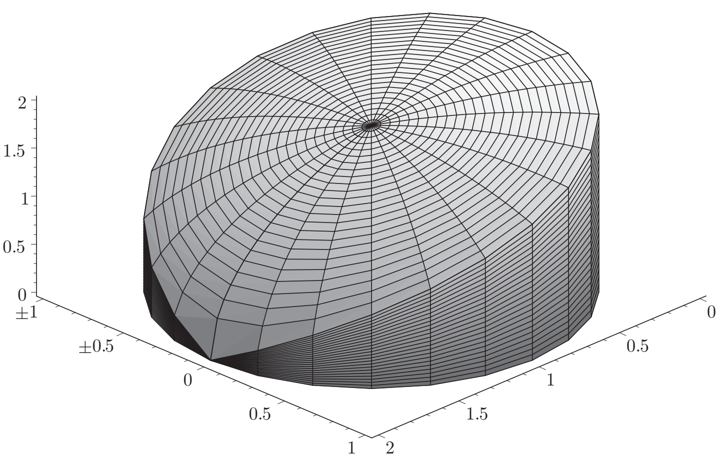


4.91 $V = 2\iint_{B(\mathbf{0},\alpha)} \sqrt{4\alpha^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha} \sqrt{4\alpha^2-\rho^2}\rho\, d\rho$
$= \dfrac{4\pi\alpha^3}{3}\left(8 - 3\sqrt{3}\right).$





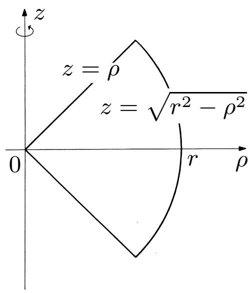
4.92 $V = 2\iint_{B((1,0),1)} \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4-\rho^2}\rho\, d\rho$
$= \dfrac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\, d\theta = \dfrac{32}{3}\left(\dfrac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)\sin\theta\right) d\theta$
$= \dfrac{32}{3}\left(\dfrac{\pi}{2} - \left(-\cos\theta + \dfrac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \dfrac{32}{3}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{3}\right).$

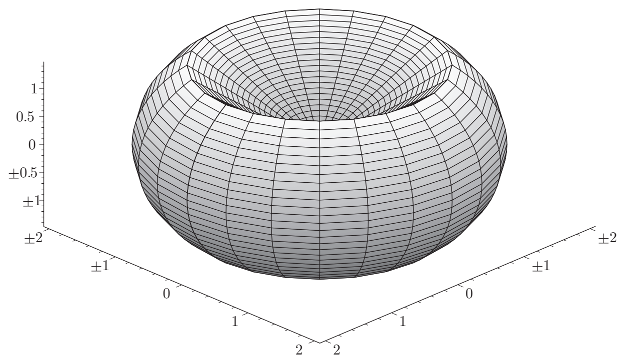


$\boxed{\mathbf{4.93}}$ Puisque le domaine commun au cône et à la sphère est

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2<z^2\,,\ x^2+y^2+z^2<r^2\} \\ &= \left\{(\rho\sin\gamma\cos\theta, \rho\sin\gamma\sin\theta, \rho\cos\gamma) : 0<\rho<r,\ \frac{\pi}{4}<\gamma<\frac{3\pi}{4},\ 0\le\theta<2\pi\right\}, \end{aligned}$$

on a $V = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\gamma \int_0^r \rho^2\sin\gamma\,d\gamma = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi r^3\,.$

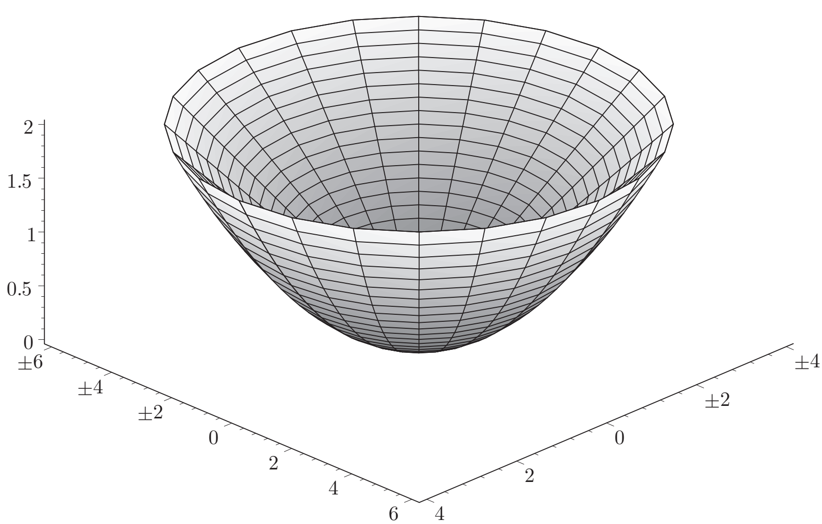




$\boxed{\mathbf{4.94}}$ Puisque

$$D = \{(2\rho\cos\theta, 3\rho\sin\theta, z) : z<\rho<\sqrt{2z}\,,\ 0\le\theta<2\pi\,,\ 0<z<2\},$$

on a $V = \iiint_D dx\,dy\,dz = 6\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dz \int_z^{\sqrt{2z}} \rho\,d\rho = 6\pi\int_0^2 (2z-z^2)\,dz = 8\pi\,.$



4.95 Puisque

$$T_x = \iint_{B(\mathbf{0},1)} \left(\sqrt{2-x^2-y^2} - (x^2+y^2)\right) x\,dx\,dy$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta \int_0^1 \left(\sqrt{2-\rho^2} - \rho^2\right) \rho^2\,d\rho = 0\,,$$

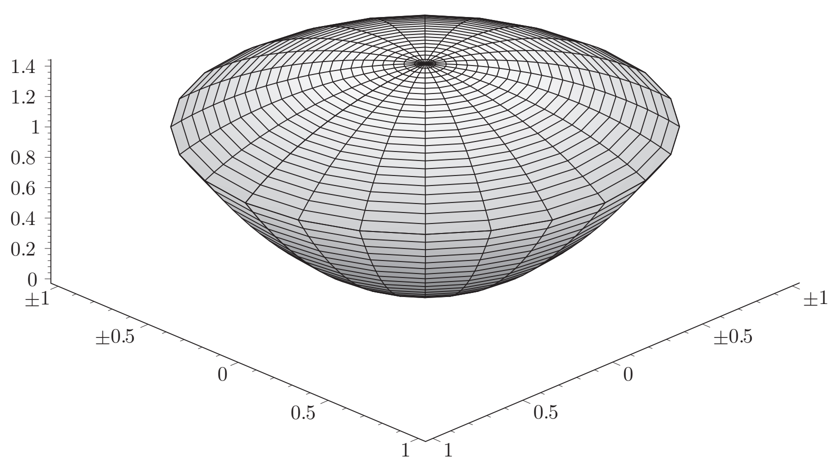
$$T_y = \iint_{B(\mathbf{0},1)} \left(\sqrt{2-x^2-y^2} - (x^2+y^2)\right) y\,dx\,dy$$
$$= \int_0^{2\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^1 \left(\sqrt{2-\rho^2} - \rho^2\right) \rho^2\,d\rho = 0\,,$$

$$T_z = \frac{1}{2} \iint_{B(\mathbf{0},1)} \left((2-x^2-y^2) - \left(x^2+y^2\right)^2\right) dx\,dy$$
$$= \pi \int_0^1 \left((2-\rho^2) - \rho^4\right)\rho\,d\rho = \frac{7\pi}{12}$$

et

$$M = \sigma \iint_{B(\mathbf{0},1)} \left(\sqrt{2-x^2-y^2} - (x^2+y^2)\right) dx\,dy$$
$$= 2\pi\sigma \int_0^1 \left(\sqrt{2-\rho^2} - \rho^2\right) \rho\,d\rho = \frac{8\sqrt{2}-7}{6}\,\pi\sigma\,,$$

on a $x_{\mathcal{G}} = y_{\mathcal{G}} = 0$ et $z_{\mathcal{G}} = \dfrac{7}{2\left(8\sqrt{2}-7\right)\sigma}$.



$\boxed{\mathbf{4.96}}$ Soit P_n avec $n \geq 2$, la relation définie par $V_n(r) = \alpha_n r^n$. Puisque P_2 est vraie, montrons que pour tout $n \geq 2 : P_n \Rightarrow P_{n+1}$. En effet, en faisant le changement de variable $x_{n+1} = r\sin\theta$ avec $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, on a

$$\begin{aligned} V_{n+1}(r) &= \underset{B_{n+1}(\mathbf{0},r)}{\int\cdots\int} dx_1\cdots dx_{n+1} = \int_{-r}^{r} dx_{n+1} \underset{B_n(\mathbf{0},\sqrt{r^2-x_{n+1}^2})}{\int\cdots\int} dx_1\cdots dx_n \\ &= 2\alpha_n \int_0^r \left(r^2 - x_{n+1}^2\right)^{\frac{n}{2}} dx_{n+1} = \left(2\alpha_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}\theta\, d\theta\right) r^{n+1}\,. \end{aligned}$$

On a ainsi démontré que pour tout entier $n \geq 2$, la relation P_n est vraie.

Calculons à présent les α_n. Pour cela, posons pour tout entier $m \geq 2$:

$$\beta_m = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m\theta\, d\theta\,.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 3 : \alpha_n = \alpha_{n-1}\beta_n$. De plus, on sait que pour tout entier $m \geq 2 : \beta_m = \frac{m-1}{m}\beta_{m-2}$ (ex. 6.124 vol. 1) ; ce qui implique, $\beta_0 = \pi$ et $\beta_1 = 2$, que pour tout $k \in \mathbb{N}^* : \beta_k\beta_{k-1} = \frac{2\pi}{k}$. Par conséquent, pour tout entier $n \geq 4 : \alpha_n = \frac{2\pi}{n}\alpha_{n-2}$. Finalement, puisque $\alpha_2 = \pi$ et $\alpha_3 = \frac{4\pi}{3}$, on peut écrire

$$\alpha_n = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{n}\cdot\dfrac{2\pi}{n-2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2\pi}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\[2ex] \dfrac{2\pi}{n}\cdot\dfrac{2\pi}{n-2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2\pi}{3}\cdot 2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

En particulier $V_4(2) = 8\pi^2$ et $V_5(3) = \dfrac{648\,\pi^2}{5}$.

Bibliographie

[1] J. Douchet, B. Zwahlen, *Calcul différentiel et intégral* PPUR, 2006.

[2] N. Piskounov, *Calcul différentiel et intégral* **1** & **2**, Ed. Ellipses, 1993.

[3] M. R. Spiegel, *Analyse*, McGraw-Hill, 1992.

[4] L. J. Corwin, R. H. Szczarda, *Multivariable Calculus*, Marcel Dekker, Inc., 1982.

[5] H. Anton, *Calculus with Analytic Geometry*, John-Wiley & Sons, Inc., 1992.

[6] C. H. Edwards, D. E. Penney, *Calculus with Analytic Geometry*, Pearson Education, Prentice Hall, 1998.

[7] S. Lang, *Calculus of Several Variables*, Springer-Verlag, 1988.

Index