

## Série 3 du lundi 1<sup>er</sup> mars 2021

### Exercice 1.

- 1) Démontrer l'inégalité de Young :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \quad (1)$$

où  $p \in ]1, +\infty[$  et  $q$  est tel que  $1/p + 1/q = 1$ .

*Indication.* Utiliser le fait que la fonction  $\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est concave et appliquer  $\ln$  à la relation d'inégalité.

- 2) Démontrer que si  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  où  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  et si  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  est le produit scalaire euclidien, alors on a l'inégalité de Hölder :

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q \quad (2)$$

où  $p \in [1, +\infty]$  et  $1/p + 1/q = 1$  (avec la convention  $1/+\infty = 0$ ).

*Indication.* Lorsque  $p, q \in ]1, +\infty[$ , poser  $\lambda = \|\mathbf{x}\|_p^{-1/q} \|\mathbf{y}\|_q^{1/p}$  et utiliser le point 1 après avoir écrit  $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \sum_{i=1}^n \lambda |x_i| \times \frac{1}{\lambda} |y_i|$ .

- 3) Montrer que  $\|\cdot\|_p$  est une norme pour  $p \in [1, +\infty]$  mais, lorsque  $n \geq 2$ , pas pour  $p \in ]0, 1[$ .

*Indication.* Pour  $p \in ]1, \infty[$ , partir de  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$  et utiliser le point 2 ci-dessus.

- 4) Soient  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $p \in [1, +\infty]$  et  $q \in \mathbb{R}$  tel que  $1/p + 1/q = 1$ . Démontrer les inégalités suivantes :

$$\|\mathbf{x}\|_1 \leq n^{1/q} \|\mathbf{x}\|_p \quad \text{si } p \neq 1, \quad (3)$$

$$\|\mathbf{x}\|_p \leq n^{1/p} \|\mathbf{x}\|_\infty \quad \text{si } p \neq +\infty, \quad (4)$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1. \quad (5)$$

En déduire que toutes les normes  $\{\|\cdot\|_p : p \in [1, +\infty]\}$  sont équivalentes.

### Exercice 2.

Soient  $f, g \in C^0([0, 1])$ . On définit

$$\phi(f, g) = \int_0^1 fg \quad (6)$$

- 1) Montrer que  $\phi$  définit un produit scalaire sur  $C^0([0, 1])$ .

- 2) Montrer que  $|\phi(f, g)| \leq \phi(f, f)^{1/2} \phi(g, g)^{1/2}$  en suivant la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donnée au cours.

### Exercice 3.

- 1) Soit un espace métrique  $(M, d)$  et une fonction continue  $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ . On suppose que :  
 (i)  $h(0) = 0$ ; (ii)  $h$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ ; (iii)  $h' > 0$  sur  $]0, +\infty[$ ; (iv) et  $h'$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ . Prouver que  $\tilde{d} = h \circ d$  est aussi une distance sur  $M$ .
- 2) Si  $V \neq \{0\}$  est un espace vectoriel équipé d'une norme  $N$ ,  $d$  est la distance induite par  $N$  et  $h(x) = x/(1+x)$  pour  $x \geq 0$ , prouver que  $\tilde{d} = h \circ d$  est une distance, mais qu'elle n'est induite par aucune norme.

### Exercice 4.

Soit  $V$  l'ensemble de toutes les suites réelles dont seulement un nombre fini d'éléments sont non-nuls.

- 1) Montrer que  $V$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Définissons l'application sur  $V$

$$N : v \mapsto \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{N}} v_i^2}.$$

Prouver que  $N$  est une norme sur  $V$ .

- 3) Le théorème de Bolzano-Weierstrass, tel que formulé sur  $\mathbb{R}^n$ , est-il toujours vrai sur  $V$  équipé de la norme  $N$ ?