Topologie

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Introduction

Mon 21 Feb

1 Quotients topologiques

Un espace topologique (X, τ) est ecrit X si la topologie est claire.
Le singloton $\{*\}$ est note $*$.
La boule unite de $\mathbb{R}^n$ est notee D^n et la version ouverte sera $int(D)^n$.

1.1 La topologie quotient

But : Construire de nouveaux espaces a l'aide d'espaces connus en identifiant des points.
Soit X un espace, Y un ensemble et $q : X \to Y$ surjective.

Definition 1 (Topologie quotient)
La topologie quotient sur Y est la topologie des $V \subset Y$ tel que $q^{-1}(V)$ est ouvert dans X .

Remarque
q est alors continue et on verifie que c'est une topologie.

Exemple
$X = [0, 1]$ et $Y = (0, 1) \cup \{*\}$ et q l'application qui envoie 0 et 1 sur $*$.
Alors q est surjective et donc Y peut etre muni de la topologie quotient et est homeomorphe a un cercle.
On definit $f : S^1 \to Y : e^{2\pi it} \mapsto t$ si $0 < t < 1$ et $*$ sinon.

Proposition 3
Soit $q : X \to Y$ une application continue, surjective et ouverte, alors q est un quotient.

Proposition 4
Soit $V \subset Y$ un sous-ensemble tel que $q^{-1}(V)$ est ouverte dans X. Comme q est surjective, alors $V = q(q^{-1}(V))$ et c'est un ouvert car q envoie les ouverts sur les ouverts.

Proposition 5
Une composition de quotients est un quotient.

Theorème 6
La topologie quotient est la plus fine qui rend q continue. De plus, pour $g : Y \to Z$, g est continue si et seulement si $g \circ q$ est continue.

Proposition 7
Si $q : X \to Y$ est continue, la preimage d'un ouvert de Y est ouvert dans X.
La topologie quotient est celle qui contient le plus d'ouvert possibles.
Clairement, si g est continue, alors $g \circ q$ l'est aussi.
Si $g \circ q$ est continue, soit $W \subset Z$ un ouvert, alors $(g \circ q)^{-1}(W) = q^{-1}(g^{-1}(W))$ est ouvert et par definition $g^{-1}(W)$ est ouvert dans Y.

Proposition 8
Le quotient d'un compact est compact

> **Preuve**
> *L'image d'un compact est compacte.* □

1.2 Relations d'equivalence

Si $q : X \to Y$ est un quotient, on definit sur X une relation d'equivalence $\sim$ par $x \sim x'$ ssi $q(x) = q(x')$, alors les points de Y sont les classes d'equivalence $[x]$.

Definition 2
Si $\simeq$ est une relation d'equivalence sur X, alors $X/\sim$ est l'espace quotient des classes d'equivalence.

Proposition 9 (Proprietes universelles)
Soit $\sim$ une relation d'equivalence sur X et $f : X \to Z$ tel que $x \sim x' \implies f(x) = f(x')$, alors il existe un unique $\overline{f} : X/\sim \to Z$ tel que $\overline{f} \circ q = f$

> **Preuve**
> *Pour que le triangle commute, on doit poser $\overline{f}([x]) = f(x)$ et l'application est bien definie par hypothese et donc unique.*
> *On sait que $\overline{f}$ est continue ssi $\overline{f} \circ q$ l'est.* □

Definition 3
Si $A \subset X$, on pose $x \sim x' \iff x = x'$ ou $x, x' \in A$. Le collapse X/A est l'espace quotient $X/\sim$

Par exemple $I/\{0, 1\}$.

Exemple

$$D^n/\partial D^n = D^n/S^{n-1} = S^n$$

Pour deux espaces bien connus, pointes (X_1, x_1) et (X_2, x_2), on peut construire un nouvel espace en identifiant x_1 et x_2.

Definition 4 (Reunion disjointe)
Soit I un ensemble, X_α un espace pour chaque $\alpha \in I$.
La reunion disjointe $\bigcup X_\alpha$ est l'ensemble $\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \times \{\alpha\}$ dont la topologie est engendree par les sous-ensemble de la forme $U_\alpha \times \{\alpha\}$

Definition 5
Soit I un ensemble et pour tout $\alpha \in I$, (X_α, x_α) un espace pointe.
Le wedge $\bigvee_\alpha X_\alpha$ est le collapse de la reunion disjointe ou on identifie les points de base

Definition 6
Soit X un espace. Le cylindre $Cyl(X)$ est $X \times I$ et le cone CX est le collapse du cylindre a la base.

1.3 Separation et quotients

On definit sur $\mathbb{R} \times \{0;1\}$ une relation d'equivalence $\sim$ par $(x,0) \sim (x,1)$ si $x \neq 0$.
Le quotient est la droite a deux origines dont on ne peut separer les deux origines $(0,1)$ et $(0,0)$ par des ouverts.
Regardons le graphe de $\sim$ dans $\mathbb{R} \times \{0;1\} \times (\mathbb{R} \times \{0,1\})$ (ie. une copie de 4 plans)

Proposition 11
Si $X/\sim$ est separe, alors le graphe de $\sim$ dans $X \times X$ est ferme.

Preuve
La preimage de $\Delta \subset X/\sim \times X/\sim$ par $q \times q$ est $\Gamma_\sim$.
Comme Δ est ferme, sa preimage aussi. □

Lecture 2: Conditions de Separation

Sat 26 Feb

1.4 Conditions de separation du quotient

On donne une condition necessaire et une condition suffisante pour que le quotient soit separe

Proposition 12
Soit $\sim$ une relation d'equivalence sur un espace X. Si $X/\sim$ est separe, le graphe Γ de la relation est ferme dans $X \times X$

Preuve
Si $X/\sim$ est separe, par un lemme, la diagonale $\Delta \subset X/\sim \times X/\sim$ est ferme.

Considerons $q \times q : X \times X \to X/\sim \times X/\sim$. Cette application est continue et donc $(q \times q)^{-1}(\Delta)$ est un ferme de $X \times X$. Or cette preimage est l'ensemble des paires de points $(x, y) \in X \times X$ tq $q(x) = q(y) \iff x \sim y$. $\square$

On donne maintenant une condition suffisante permettant de conclure qu'un quotient est separe.

Proposition 13
Soit $\sim$ une relation d'equivalence sur un espace X separe. Si $q^{-1}(q(x))$ est compact pour tout point $x \in X$ et de plus que pour $F \subset X$ ferme $q^{-1}(q(F))$ est ferme, alors le quotient est separe.

Preuve
Soit $\overline{x} = q(x)$ et $\overline{y} = q(y)$ deux points distincts de $X/\sim$.
Les saturations $q^{-1}(\overline{x}), q^{-1}(\overline{y})$ sont des compacts par hypothese.
Comme X est separe, on peut separer des compacts avec des ouverts disjoints U et V.
On a donc

$$q^{-1}(\overline{x}) \subset U, q^{-1}(\overline{y}) \subset V \text{ et } U \cap V = \emptyset$$

Posons $E = X \setminus U, F = X \setminus V$ deux fermes de X.
Par hypothese, les saturations $q^{-1}(q(E))$ et $q^{-1}(q(F))$ sont fermes. Ainsi $U' = X \setminus q^{-1}(q(E))$ et $V' = X \setminus q^{-1}(q(F))$ sont des ouverts. On observe que $E \subset q^{-1}(q(E)), F \subset q^{-1}(q(F))$, alors $U' \subset U, V' \subset V$.
De plus $q^{-1}(q(x)) \subset U'$ et $q^{-1}(q(y)) \subset V'$.
Il reste a montrer que $q(U')$ et $q(V')$ sont ouverts dans $X/\sim$ et disjoints.
Pour le premier point, il suffit de verifier que $q^{-1}(q(U'))$ est ouvert dans X.
On pretend que $q^{-1}(q(U')) = U'$.
En effet, $U' \subset q^{-1}(q(U'))$ est toujours vrai, il faut donc montrer l'inclusion inverse.
Soit $u \in q^{-1}(q(U'))$, donc $q(u) \in q(U')$. Donc $q(u) \notin q(E)$ et donc $u \in U'$
Le meme resultat est vrai pour V'.

Il faut donc finalement encore montrer que $q(U')$ et $q(V')$ sont des voisinages ouverts, de $\overline{x}$ et $\overline{y}$ disjoints.
Supposons qu'il existe $u' \in U', v' \in V'$ tel que $q(u') = q(v')$. Alors $u' \in q^{-1}(q(v')) \subset q^{-1}(q(V')) = V'$.
Donc $U' \cap V' \neq \emptyset$, contradiction. $\square$

Lecture 3: Groupes topologiques

Mon 28 Feb

Corollaire 14
Soit $A \subset X$ un sous-espace compact d'un espace X separe. Alors le collapse $\mathfrak{X}A$ est separe.

Preuve
Il suffit de verifier les proprietes du theoreme.
Soit $\overline{x} \in \mathfrak{X}A$.
Si $x \in A, q^{-1}(x) = A$ est compact. Si $x \notin A, q^{-1}(\overline{x}) = \{x\}$ qui est compact.
Soit F un ferme de X, alors si $F \cap A = \emptyset$, on a que $q^{-1}(q(F)) = F$ ferme, sinon $F \cap A \neq \emptyset$ et alors

$$q^{-1}(q(F)) = F \cup A$$

Comme A est compact et X separe, alors A ferme. □

Exemple
Soit $\sim$ une relation d'equivalence sur $\mathbb{R}^2$ defini par $(x, y) \sim (x', y') \iff (x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2$.
Alors

$$\mathbb{R}^2 \sim$$

est un tore, separe, or la proposition ne s'applique pas car $q^{-1}(0, 0) = \mathbb{Z}^2$.

Definition 7 (Espaces projectifs)
L'espace projectif reel $\mathbb{R}P^n$ est le quotient de S^n par la relation antipodale $x \sim y \iff x = \pm y$ pour $x, y \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Exemple

— $\mathbb{R}P^0 = \mathfrak{S}^0 \sim = *$, $\mathbb{R}P^1 = \mathfrak{S}^1 \sim \simeq S^1$.

— *De plus $\mathbb{R}P^2 = S^2 / \sim$ est le plan projectif*

Proposition 17
$\mathbb{R}P^n$ est compact et separe

Suit immediatement des propositions.
L'analogue complexe donne

Definition 8 (Espace projectif complexe)
L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ est le quotient de $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par la relation $x \sim y \iff \exists \alpha \in S^1$ tel que $x = \alpha y$.

De meme, pour les quaternions $\mathbb{H}$, on peut definir $\mathbb{H}P^n$, pour les octonions on peut construire $\mathbb{O}P^0, \mathbb{O}P^1 \simeq S^8, \mathbb{C}P^2$

1.5 Quotients par des actions de groupe

Definition 9 (Groupe topologique)
Un groupe topologique est un groupe G tel que les applications de multiplication $\mu : G \times G \to G$ et l'inverse $\iota : G \to G$ sont continues.

Tout groupe peut etre vu comme un groupe topologique discret.

Exemple
Le cercle unite $S^1 \subset \mathbb{C}$ muni de la multiplication complexe est un groupe topologique

Remarque
Les seules spheres qui sont des groupes topologiques sont S^0, S^1, S^3

Lemme 20
Si $H < G$ est un sous-groupe d'un groupe topologique G, la topologie induite en fait un groupe topologique.

Definition 10
Une action d'un groupe topologique G sur un espace X est une application $\mu : X \times G \to X$ telle que

$$\mu(x, 1_G) = x \forall x \in X \text{ et } \mu(x, gg') = \mu(\mu(x, g), g')$$

Definition 11
Soit μ une action de G sur X, l'espace des orbites $\mathfrak{X}G$ et l'espace quotient de X par la relation $x \sim y \iff \exists g \in G$ tel que $y = \mu(x, g)$

Remarque
Si $H < G$ est un groupe topologique, alors H agit sur G par multiplication a droite et $\mathfrak{G}H$ est l'espace des orbites gH. Si H est un sous-groupe normal, ce quotient est un groupe.

Proposition 22
Soit μ une action d'un groupe topologique G sur un espace X, alors

1. *$q : X \to \mathfrak{X}G$ est ouverte*
2. *Si X est compact, le quotient est compact*
3. *Si X et G sont compact et separe, alors $\mathfrak{X}G$ aussi.*

Preuve
Soit $U \subset X$ *ouvert,* $q(U)$ *est ouvert car* $q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{g \in G} U \cdot g$ *et* $U \cdot g$ *est ouvert car la translation est continue et est meme un homeomorphisme.*
La propriete 2 est immediate.

On considere $X \times X \times G \to X \times X$ *en envoyant* $(x, y, g) \mapsto (x, yg)$*, cette application est continue.*
Le graphe Γ *de la relation definie par* μ *est l'image de* $\Delta \times G$*.*
Comme X *est separe,* Δ *est ferme donc compact et* G *est compact.*
Ainsi Γ *est compact dans* $X \times X$ *separe donc* Γ *est ferme.*
Soient xG *et* yG *deux orbites differentes, ie.* $(x, y) \notin \Gamma$*.*
Il existe donc des ouverts $x \in U, y \in V$ *tel que* $U \times V \cap \Gamma = \emptyset$*.*
Comme q *est ouverte,* $q(U), q(V)$ *sont des voisinages ouverts des orbites* xG *et* yG *respectivement. On conclut en remarquant que ces images sont disjointes.*
Sinon on aurait zG *commun, ie.* $zg \in U, zg' \in V$ *pour* $g, g' \in G$ *et alors* $(zg, zgg^{-1}g') \in \Gamma \cap (U \times V)$ □

1.6 $SO(n)$

Proposition 23
Soit G *compact et* X *separe. Soit* μ *une action transitive de* G *sur* X*.*
Alors, si G_x*, alors*

$$\mathfrak{G}G_x = X$$

pour tout $x \in X$*.*

Preuve
On definit $\mu_x : G \to X$ *envoyant* $g \mapsto xg$*, continue.*
On observe que μ_x *envoie* G_x *sur* x *et par transitivite,* μ_x *est surjective.*
Par la propriete universelle du quotient, μ_x *passe au quotient.*
$\bar{\mu}_x$ *est une bijection continue. C'est un homeo car* $\mathfrak{G}G_x$ *est compact,* X *separe.* □

Lecture 4: Attachements de Cellules

Mon 07 Mar

1.7 Recollements

On construit de nouveaux espaces a l'aide de pieces plus simple.
On se donne $f : A \to X, g : A \to Y$ deux applications. On recolle X et Y le long de A

Definition 12 (Recollement)
Le recollement de X *et* Y *le long de* A *est le quotient de* $X \coprod Y$ *par la relation d'equivalence engendree par* $f(a) \sim g(a) \forall a \in A$

Remarque
Il ne suffit pas d'identifier $f(a) \sim g(a)$ pour que la relation soit une relation d'equivalence.
Pour garantir la transitivite, on a des zigszags d'equivalence $f(a) \sim g(a) = g(b) \sim f(b) = f(c) \sim g(c) \dots$

Exemple
Si $A = *$, $f(*) = x_0 \in X, g(*) = y_0 \in Y$, alors le recollement $X \cup_* Y$ est le wedge $X \vee Y$

On notera le recollement $X \cup_A Y$.
Si $q : X \coprod Y \to X \cup_A Y$ est le quotient, alors l'inclusion $i_1 : X \to X \coprod Y$ induit $i = q \circ i_i : X \to X \cup_A Y$ et de meme pour l'inclusion de Y.

Proposition 26
Le recollement $X \cup_A Y$ est le pushout de $Y \leftarrow A \to X$.

Preuve
On doit montrer l'existence et l'unicite de θ.
Puisque chaque element de $X \cup_A Y$ admet un representant dans X ou Y, on doit poser $\theta([x]) = \alpha(x) \forall x \in X$ et $\theta([y]) = \beta(y) \forall y \in Y$.
On montre l'existence.
Posons $\Theta : X \coprod Y \to Z$ l'application determinee par α et β.
On verifie que Θ est compatible avec $\sim$. Soit $a \in A$, alors $\Theta(f(a)) = \alpha(f(a)) = \beta(g(a)) = \Theta(g(a))$.
Ainsi Θ passe au quotient et induit θ, qui est donc bien continue. $\square$

Des maintenant, on suppose que $g : A \subset Y$ est l'inclusion d'un sous-espace ferme.

Lemme 27
Soit $C \subset Y$, alors la saturation de C est

$$f(C \cap A) \coprod (C \cup f^{-1} \circ f(C \cap A))$$

Preuve
On va regarder ce qui se passe pour tout $c \in C$.
Si $c \notin A$, alors $q^{-1}(q(c)) = \{c\}$, sinon $q^{-1}(q(c))$ contient $f(c) \in X$ et $f^{-1}(f(c)) \subset Y$ $\square$

Lemme 28
Si $C \subset X$, $q^{-1}(q(C)) = C \coprod f^{-1}(C) \subset X \coprod Y$

Preuve
Comme ci-dessus, si $c \in C$ n'est pas dans l'image de f , on a $q^{-1}(q(c)) = \{c\}$, sinon on a $c \in X$ et $f^{-1}(c) \subset A \subset Y$ □

Proposition 29
Soient X et Y deux espaces separes, $g : A \subset Y$ l'inclusion d'un compact, alors $X \cup_A Y$ est separe.

Preuve
On observe que $X \coprod Y$ est separe. Avant d'appliquer le critere de separabilite, on montre que l'application quotient est fermee. Comme un ferme de $X \coprod Y$ est la reunion disjointe de deux fermes on a deux cas.
Si $C \subset X$ ferme, alors $q(C)$ est ferme $\iff$ $q^{-1}(q(C))$ est fermee. Par le lemme ci-dessus,

$$q^{-1}(q(C)) = C \coprod f^{-1}(C)$$

qui sont fermes.
Si $C \subset Y$, alors $q^{-1}(q(C)) = f(C \cap A) \coprod (C \cup f^{-1}(f(C \cap A)))$ □

On a $f(C \cap A)$ compact et donc ferme puisque Y est separe.
Pour conclure, on verifie les deux conditions du critere.
Pour conclure, on verifie les deux conditions du critere, la saturation d'un ferme est fermee grace aux preparatifs.
Soit $z \in X \coprod Y$, on doit montrer que $q^{-1}(q(z))$ est compact, les lemmes ci-dessus permettent de conclure parce que si $z = a \in A, f^{-1}(f(a))$ est un ferme d'un compact et est donc compacte.

1.8 Attachement de cellules

Ici $g : A \subset CA = {}^{A \times I}\!\big/_{A \times 1}$.
Soit $f : A \to X$, le recollement $X \cup_A CA$ aussi note $X \cup_f CA$ est appele attachement d'une A-cellule sur X le long de f.
Si $A = S^{n-1}$ alors cet attachement est celui d'une n-cellule

Remarque
$CS^{n-1} \simeq D^n$, on note $X \cup_f CS^{n-1} = X \cup_f e^n$ ou $X \cup_f D^n$ et on appelle $e^n \simeq D^n$ une n-cellule (fermee.)

Proposition 31
Si X est separe et A est compact et separe, alors $X \cup_f CA$ est separe.
Si en plus X est compact

Preuve
Le premier point suit de la proposition precedente car CA est separe, le 2eme point suit du critere de compacite car $X \coprod Ca$ est compact. □

Definition 13 (Suspension)
La suspension de A est le quotient $A \times I \big/ (a,0) \sim (a',0)$ *et* $(a,1) \sim (a',1)$

Lecture 5: Homotopies et groupe fondamental

Sat 12 Mar

2 Homotopies et Groupe Fondamental

2.1 Homotopie

Definition 14 (Homotopie entre applications)
Soient $f, g : X \to Y$ des applications. On dit que f et g sont homotopes et on note $f \simeq g$ s'il existe une application $H : X \times I \to Y$ tel que $H(-,0) = f$ et $H(-,1) = g$.
On appelle H une homotopie.

Proposition 32
La relation $\simeq$ est une relation d'equivalence.

Preuve

Reflexivite

Suit du fait qu'on peut definir une homotopie constante.

$$H : X \times I \to Y : (x,t) \mapsto f(x)$$

Symetrie

La symetrie suit du fait qu'on peut parcourir une homotopie dans l'autre sens.
Ainsi, soit $H : X \times I \to Y$ une homotopie entre f et g. On pose

$$G : X \times I \to Y : (x,t) \mapsto H(x, 1-t)$$

Transitivite

Supposons que $H : X \times I \to Y, G : X \times I \to Y$ sont des homotopies, $f \simeq g \simeq h$. On construit une homotopie $K : X \times I \to Y$ entre f et h

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} H(x,2t) \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1) \text{ si } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

On voit que K est continue et montre que $f \simeq h$. □

Definition 15 (Classes d'homotopie)
On note $[X, Y]$ l'ensemble des classes d'homotopies d'applications $f : X \to Y$.
C'est donc $C(X,Y)/_{\simeq}$.

Lecture 6: Homotopies

Mon 14 Mar

Definition 16 (Espaces Homotopes)
Deux espaces X et Y sont homotopes ou homotopiquement equivalent, note $X \simeq Y$, s'il existe $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ tel que

$$g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X \text{ et } f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$$

On dit que f et g sont des equivalences homotopiques et qu'elles sont inverses homotopiques l'une de l'autre.

Proposition 33

$$CX \simeq *$$

Preuve
Posons $CX = X \times I/_{X \times 0}$.
On pose $f : * \to CX$ par $f(*) = [x, 1]$ et on prend $g : CX \to *$.
On a $g \circ f = \mathrm{Id}_*$, il reste a voir que $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_{CX}$. On construit une homotopie $H : CX \times I \to CX$, defini par

$$H([x, t], s) \mapsto [x, ts]$$

C'est une application (trivialement bien definie) et c'est une homotopie entre $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_{CX}$ □

Remarque
Si f et sont des applications pointees $(X, x_0) \to (Y, y_0)$ qui sont homotopes au sens non pointe, il est faux en general que $f \simeq_* g$ au sens pointe.
Par exemple $f, g : S^1 \to S^1 \bigvee S^1$, f est donnee par a et g est donnee par $b \star a \star b^{-1}$ (concatenation).
On a que $f \simeq g$ pour $f_t : S^1 \to S^1 \bigvee S^1$ donne par $b|_{[1-t,1]} \star a \star \overline{b}|_{[0,t]}$

2.2 Attachement de cellules

But : $f \simeq g : A \to X$, alors

$$X \cup_f CA \simeq X \cup_G CA$$

Proposition 35
Si $f, g : A \to X$ *sont homotopes, alors* $X \cup_f CA \simeq X \cup_g CA$

Preuve
Pour comparer les deux espaces $Y = X \cup_f CA$ *et* $Y' = X \cup_g CA$*, on construit des applications* $h : Y \to Y'$ *et* $k : Y' \to Y$*.*
On definit $h : Y \to Y'$ *par la propriete universelle du pushout.*
On choisit $\iota' : X \to Y'$ *l'application donnee par la construction de* Y'*.*
On pose

$$\alpha : CA \to Y'[a,t] \qquad \mapsto \begin{cases} H(a,2t) \text{ si } t \leq \frac{1}{2} \\ [a, 2t-1] \text{ si } t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si $t = 0$*, alors* $H(a, 0) = f(a)$ *donc le diagramme commute.*
Si $t = \frac{1}{2}, H(a, 1) = g(a)$*. On construit* k *comme* h*, mais avec* $H(-, 1-t)$*.*
On doit montrer que $k \circ h \simeq \mathrm{Id}_Y$ *(et de meme* $h \circ k \simeq \mathrm{Id}_{Y'}$*)* □

Corollaire 36
Si $f, g : S^{n-1} \to X$ *et* $f \simeq g$*, alors* $X \cup_f e^n \simeq X \cup_g e^n$*.*

Corollaire 37
Si $f : A \to X$ *est homotope a* c_x *constante, alors* $X \cup_f CA \simeq X \bigvee \sum A$

2.3 Homotopie et π_0

Soit $S_0 = \{\pm 1\}$ sphere unite de $\mathbb{R}$.
On etudie les applications pointees de $(S_0, 1) \to (X, x_0)$. Ainsi $f(1) = x_0$ et $f(-1) = x$ abritraire.
Deux telles applications f donnee par x et f' donee par x' sont homotopes (au sens pointe) s'il existe une homotopie pointee

$$H : S^0 \times I \to X$$

H est donc simplement donne par $H(-1, t)$, un chemin dans X de x vers x'.
Donc x et x' sont dans la meme composante connexe par arcs.

Proposition 38
L'ensemble $\pi_0 X$ *des composantes connexes par arcs est en bijection avec* $[S_0, X]_*$

2.4 Invariance Homotopique

Soit $f : X \to Y$, elle induit une application

$$f_* : [A, X] \to [A, Y]$$

$$[g] \mapsto [f \circ g]$$

Preuve

On veut montrer que l'application ci-dessus est bien definie.

Si $g \sim g'$ *via l'homotopie* G*, alors* $f \circ g \simeq f \circ g'$ *via* $f \circ G$ □

Proposition 39

Si $f \simeq f' : X \to Y$*, alors* $f_* = f'_*$.

Preuve

On choisit $H : X \times I \to Y$ *une homotopie entre* $H(-,0) = f$ *et* $H(-,1) = f'$.

On veut montrer que $f \circ g \simeq f' \circ g$.

On construit $G : A \times I \to X \times I \to Y$ *en envoyant*

$$(a,t) \mapsto (g(a),t) \mapsto H(g(a),t)$$

□

Corollaire 40

Si $X \simeq Y$*, alors* $[A,X] \simeq [A,Y]$ *comme ensembles.*

Preuve

On a $f : X \to Y$ *et* $f' : Y \to X$ *inverses homotopes l'une de l'autre. Alors* $[A,X] \to [A,Y] \to [A,X]$ □

Lecture 7: Groupe Fondamental

Mon 21 Mar

2.5 Groupe Fondamental

Un lacet

$$\alpha : I \to X$$

est une application satisfaisant $\alpha(0) = x_0 = \alpha(1)$ ce qui signifie qu'il existe une application induite

$$\overline{\alpha} : S^1 \to X$$

Et on note alors

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1 X = [(S^1, 1), (X, x_0)]$$

$\pi_1 X$ a une structure de groupe donnee par la concatenation de lacets $\alpha \star \beta$

Definition 17 (Pinch and Fold)

L'application pinch

$$pinch : \sum A = {}^{A \times I}\!/_{\sim} \to {}^{\sum A}\!/_{A \times \frac{1}{2}} \simeq \sum A \vee \sum A$$

Definition 18 (Fold)
Le pliage est une application

$$\nabla : X \vee X \to X$$

definie par la propriete universelle du pushout du diagramme $X \leftarrow * \to X$ *avec le cone* $\mathrm{Id}_X : X \to X$

La concatenation de deux lacets $\alpha, \beta : S^1 \to X$ est representee par

$$\alpha * \beta : S^1 \xrightarrow{\text{pinch}} S^1 \vee S^1 \xrightarrow{\alpha \vee \beta} X \vee X \xrightarrow{\nabla} X$$

On a vu que la concatenation equipe $[S^1, X]_*$ d'une structure de groupe.
L'associativite du groupe fondamental revient a dire que le diagramma suivant commute : A REMPLIR

En fait le groupe fondamental π_1 est un foncteur $\top_* \to \mathrm{Gr}$, des espaces pointes vers les groupes

Proposition 41
Une application pointee $f : X \to Y$ *induit un homomorphisme de groupes* $f_* : \pi_1 X \to \pi_1$

Preuve
On sait que la postcomposition avec f *induit une application* $f_* : [S_1, X]_* \to [S_1, Y]_*$.
On montre que c'est un homomorphisme.
Soient $\alpha, \beta : S^1 \to X$*, pointees, alors le diagramme suivant commute A REMPLIR*

On a que 1 *et* 2 *commutent et 3 commute aussi par la propriete universelle*□

On souhaite calculer $\pi_1(X \times Y)$, on note $C_*(S^1, X)$ l'ensemble des applications pointees $\alpha : S^1 \to X$.
Le groupe $\pi_1(X)$ en est un quotient $[S^1, X]_* = {}^{C_*(S^1,X)}\!/_{\simeq}$.
La propriete universelle du produit est qu'une application $\omega : S^1 \to X \times Y$ est donnee par ses projections $p_1 \circ \omega$ et $p_2 \circ \omega$, ie.

$$\begin{aligned} F : C_*(S^1, X) \times C_*(S^1, Y) &\to C_*(S^1, X \times Y) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (\omega : S^1 \to X \times Y) \end{aligned}$$

est une bijection d'inverse

$$G : C_*(S^1, X \times Y) \to C_*(S^1, X) \times C_*(S^1, Y)$$

donne par la projection.

Proposition 42
Le foncteur π_1 preserve les produits.

Preuve
Les bijections F et G passent au quotient.
On montre que si $\alpha \simeq \alpha', \beta \simeq \beta'$, alors $F(\alpha, \beta) \simeq F(\alpha', \beta')$ et de meme, si $\omega \simeq \omega'$, alors la postcomposition par p_i donne des applications homotopes.
La compatibilite avec la structure de groupes vient du fait que G est definie par $(p_1)_*$ et $(p_2)_*$ sur les deux composantes. □

2.6 Surfaces

Definition 19 (Surface)
Une surface S est un espace topologique connexe par arcs, compact, sans bord tel que tout point $s \in S$ admet un voisinage ouvert U homeomorphe a D^2 avec $\partial U \simeq S^1$

Definition 20 (Somme connexe)
Soient S et T deux surfaces, la somme connexe $S\#T$ est la surface obtenue en choisissant $s \in S, t \in T$, des voisinages $s \in U \simeq D^2$ et $t \in V$ et un homeomorphisme $f : \partial U \to S^1 \to \partial V$ et en recollant

$$S\#T = {}^{(S \setminus U) \coprod}\!\big/_{x \simeq f(x)} \quad \forall x \in \partial U$$

Remarque
$S\#T$ est bien defini (sans preuve), de plus

$$T\#S^2 \simeq T$$

Exemple
$T^2\#T^2$ est une surface de genre 2, un tore a deux trous.

Lecture 8: Tore a deux trous

Mon 28 Mar

Exemple
Posons $T = S = T^2$, on construit $T^2\#T^2$, un tore a deux trous.
$T^2 = {}^{I \times I}\!/_{\sim} = {}^{\mathbb{R}^2}\!/_{\mathbb{Z}^2}$.
On va choisir des points s, t dans S et T respectivement de coordonnees $(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$ et $(\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$.
On choisit U et V comme deux goutes autour de s respectivement V.
Le quotient du pentagone par $A \sim A'$ donne un espace homeomorphe a $I \times I \setminus U$.

Lecture 9: Theorie combinatoire des groupes

Mon 28 Mar

2.7 Bouteille de Klein

Soit K la bouteille de Klein, quotient de I^2.
On comprend que K s'ecrit comme

$$K = (S^1_a \vee S^1_b) \cup_{abab^{-1}} e^2$$

On decoupe $I \times I$ le long de deux segments verticaux le long de $(\frac{1}{3}, t)$ et $(\frac{2}{3}, t)$
Ainsi, K est un quotient de trois bandes verticales, et aussi de deux bandes A_2 et ${A_1 \coprod A_3}/{b' \sim b''}$.

3 Theorie Combinatoire des Groupes

But : Decrire et manipuler des groupes de maniere agreable pour pouvoir construire des pushouts.

3.1 Groupes libres

Exemple
Le groupe ayant un seul generateur a, sujet a aucune relation autre que les axiomes de groupe est le groupe $\{a^n | n \in \mathbb{Z}\} / a^0 = 1 \simeq \mathbb{Z}$.
On observe que pour tout groupe G $\hom_{\mathrm{Gr}}(F(a), G) \simeq \hom_{\mathrm{Set}}(\{a\}, UG)$.

Definition 21 (Groupe libre)
Soit I un ensemble, le groupe libre $F(I)$ a I generateur est obtenu en associant a chaque indice $\alpha \in I$ un generateur $x_\alpha \in F(I)$.
Tous les mots sont obtenus par concatenation de x^n_α pour $n \in \mathbb{Z}$ avec les identifications $x^0_\alpha = 1, 1 \cdot x_\alpha = x_\alpha = x_\alpha \cdot 1$ et $x_\alpha x_\alpha^{-1} = 1$

De la construction de $F(I)$, on comprend qu'un homomorphisme $\phi : F(I) \to G$ est determine et meme equivalent a la donnee des images $g_\alpha = \phi(x_\alpha)$.
Ces isomorphismes etant naturels, on a que

Proposition 47
Le foncteur $F(-)$ est adjoint a gauche de U.

Le groupe libre abelien est un quotient de $F(a, b)$ via $\phi : F(a, b) \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ determine par $\phi(a) = (1, 0)$ et $\phi(b) = (0, 1)$.
$\ker \phi$ contient $aba^{-1}b^{-1} = [a, b]$, ainsi, il contient aussi $[a, b]^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$ qui forment un sous-groupe cyclique infini dans $F(a, b)$.
Cependant, ce sous-groupe n'est pas normal et en fait $\ker \phi$ est le sous-groupe

normal engendre par $[a, b]$.

3.2 Presentations

Lemme 48
Tout groupe est quotient d'un groupe libre.

Preuve
Soit G un groupeet $\{g_\alpha | \alpha \in I\}$ un ensemble de generateurs (par exemple tous les $g \in G$).
On definit $\phi : F(I) \to G : x_\alpha \mapsto g_\alpha$, alors ϕ est surjective. $\square$

Definition 22
Soit $\phi : F(I) \to G$ un homomorphisme surjectif. Un element de $\ker \phi$ represente par un mot r_β en les generateurs x_α est un relateur.
Pour un choix de generateurs, $\beta \in J$ de $\ker \phi$ comme sous-groupe normal de $F(I)$ on appelle $\langle x_\alpha, \alpha \in I | r_\beta, \beta \in J \rangle$ une presentation de G.
Chaque relateur correspond a une relation $r_\beta = 1$ dans le quotient de $F(I)$

Autrement dit G est isomorphe a ce quotient.

3.3 Graphes de Cayley

On cherche a representer geometriquement un groupe donne par une presentation.

Definition 23 (Graphe de Cayley)
Soit $G = \langle x_\alpha | r_\beta \rangle$, le graphe de Cayley $\Gamma(G, \{x_\alpha\})$ est le graphe oriente et colore dont les sommets sont $g \in G$ et les aretes relient g et gx_α, oriente de g vers gx_α, de couleur α.

Remarque
Comme espace topologique, ce graphe est un quotient d'intervalles, un pour chaque arete, et on identifie les sommets a l'element du groupe voulu.

Lecture 10: Amalgamations

Mon 04 Apr

3.4 Produits libres

Soit $G = \langle x_\alpha | r_\beta \rangle$ et $H = \langle y_\gamma | s_\delta \rangle$, on forme le produit libre

$$G * H = \langle x_\alpha, y_\gamma | r_\beta, s_\delta \rangle$$

Proposition 50

Le produit libre $G * H$ est le coproduit de G et H dans la categorie des groupes, ie. $\hom(G * H, M) \simeq \hom(G, M) \times \hom(H, M)$ *pour tout groupe M.*

Preuve

Soit $G \hookrightarrow G * H \hookleftarrow H$.

Soit $\omega : G * H \to M$, alors on peut lui associer $\omega \circ \iota$ et $\omega \circ j$.

Conversement, etant donne $\phi : G \to M$ et $\psi : H \to M$, montrons que $\exists! \omega : G * H \to M$ tel que $\omega \circ \iota = \phi$ et $\omega \circ j = \psi$.

Pour l'existence, on definit $\tilde{\omega} : F(x_\alpha, y_\gamma) \to M$.

Comme $\phi(r_\beta) = 1 = \psi(s_\delta)$, $\tilde{\omega}$ passe au quotient et induit une application $\omega : G * H \to M$.

L'unicite de ω suit du fait que ce soit une colimite. $\square$

Remarque

On definit de la meme facon un produit libre d'un nombre arbitraire de groupes.

3.5 Pushouts de groupes

Soient $\alpha : K \to G$ et $\beta : K \to H$ deux homomorphismes, on veut construire le pushout de $G \leftarrow K \to G$

Definition 24 (Pushout)

Le pushout ou amalgame $G *_K H$ est le quotient de $G * H$ par le sous-groupe normal genere par les elements de la forme $\iota(\alpha(x)) j(\beta(x)^{-1})$

On appelle aussi i et j les compositions $G \to G * H \to G *_K H$ et $H \to G * H \to G *_K H$.

On a ainsi un carre commutatif

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & G \arrow[d, "\iota"] \\ H \arrow[r, "j"'] & G *_K H \end{tikzcd}$$

Proposition 52

Le pushout est un pushout.

Preuve

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & G \arrow[d, "\iota"] \arrow[ddr, bend left, "\phi"] & \\
H \arrow[r, "j"'] \arrow[drr, bend right, "\psi"'] & G *_K H \arrow[dr, "\exists ! \omega"] & \\
& & M
\end{tikzcd}$$

On construit $\tilde{\omega} : G * H \to M$ par la propriete universelle du produit libre (a l'aide de ϕ et ψ).
Cet homomorphisme $\tilde{\omega}$ passe au quotient parce que $\tilde{\omega}(\iota(\alpha(x))j(\beta(x))^{-1}) = \psi(\alpha(x))\psi(\beta(x))^{-1} = 1$ et on a une application induite $\omega : G *_K H \to M$.
L'unicite est immediate. $\square$

4 Seifert-van Kampen

On souhaite calculer le groupe fondamental d'un pushout d'espaces et l'identifier.

4.1 Groupe fondamental d'un recollement

Soient $A, B \subset X$, $X = A \cup B$, deux sous-espaces ouverts tels que $C = A \cap B$ est connexe par arcs.
On choisit $x_0 \in C$ comme point de base pour C, A, B et X.
On appelle $\iota : A \subset X, j : B \subset X, \alpha : C \subset A, \beta : C \subset B$.
On obtient alors un pushout :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\iota"] \\
B \arrow[r, "j"'] & X
\end{tikzcd}$$

On va montrer que

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(C, x_0) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "\beta_*"'] & \pi_1(A, x_0) \arrow[d, "\iota_*"] \\
\pi_1(B, x_0) \arrow[r, "j_*"'] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

est un pushout.
Par la propriete universelle du pushout, ce carre nous fournit $\phi : \pi_1(A, x_0) *_{\pi_1(A,x_0)} \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$

Lemme 53
ϕ est surjectif.

Preuve
Soit $\gamma : I \to X$ un lacet base en x_0.
Le recouvrement de X par A et B donne un recouvrement ouvert $\gamma^{-1}(A), \gamma^{-1}(B)$ de l'intervalle I, un espace metrique compact.
donc il existe un nombre de lebesgue $\delta > 0$ tel que tout sous-ensemble de I de diametre $< \delta$ est contenu dans $\gamma^{-1}(A)$ ou $\gamma^{-1}(B)$ (ou les deux.)
On choisit donc $n > \frac{1}{\delta}, n \in \mathbb{N}$ de sorte que $\gamma_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}$ est un chemin dans A ou dans B.
Pour alternet les images dans A et dans B, on concatene les chemins qui se suivent dans le meme ouvert pour choisir $s_0 = 0 < s_1 = \frac{k_1}{n} < \ldots < \frac{k_r}{n} = 1$ de telle sorte que γ envoie $[s_0, s_1]$ dans (disons) A , $[s_1, s_2]$ dans B etc.
On definit $\gamma_i = \gamma|_{[s_{i-1}, s_i]}$.
Comme C est connexe par arcs, il existe des chemins γ^i dans C, allant de x_0 a $\gamma(s_i)$.
On decompose a homotopie pres, le chemin γ en concatenation de lacets (d'abord des chemins) .

$$\begin{aligned}\gamma &\simeq \gamma_1 \star \gamma_2 \star \ldots \star \gamma_r \\ &\simeq \gamma_1 \star \overline{\gamma^1} \star \gamma^1 \star \ldots \\ &\simeq \underbrace{(\gamma_1 \star \overline{\gamma^1})}_{\omega_1} \star \underbrace{(\gamma^1 \star \gamma_2 \star \overline{\gamma^2})}_{\omega_2} \star \ldots\end{aligned}$$ □

ou ω_1 est un lacet base en x_0 et entierement contenu dans A ou dans B.
Alors $[\gamma] = [\omega_1]. \ldots .[\omega_r] = i_*(\omega_1) j_*(\omega_2) \ldots$

Pour montrer que ϕ est un isomorphisme, on cherche a identifier le noyau de $\pi_1 A * \pi_1 B \to \pi_1 A *_{\pi_1} C \pi_1 B \to \pi_1 X$.
Soit γ la concatenation de lacets $\gamma_1 * \ldots * \gamma_r$, avec γ_{2i+1} dans A, et γ_{2i} dans B.
On suppose que $[\gamma] = 1$ dans $\pi_1 X$, ie. que $\gamma \simeq c_{x_0} \iff \exists H : I^2 \to X$ entre γ et c_{x_0}.
Par le meme argument de nombre de lebesgue, on decoupe le carre en rectangles que H envoie entierement dans A ou dans B.

Lecture 11: Fin Seifert Van-Kampen

Mon 11 Apr

On veut montrer que l'application ϕ definie la derniere fois est une application de $\ker N = \ker(\pi_1 A * \pi_1 B \to \pi_1 A *_{\pi_1 C} \pi_1 B)$.
On decoupe donc $I \times I$ en nm carres tels que $H|_{C_k} \subset A$ ou B.
On construit ω_k comme indique sur le dessin.
On a $\omega_0 = c_{x_0}$ et $\omega_{nm} = \gamma$.
Ainsi, $H|_{C_k}$ fournit une homotopie entre ω_k et ω_{k-1}.
On va montrer que $\omega_k * \overline{\omega_{k-1}} \in N$.

En effet, alors $\omega_{nm} = \omega_{nm} * \overline{\omega_{nm-1}} \dots * \omega * \overline{\omega_0}$.
Pour chaque k, on fixe $H|_{C_k}$ est vue dans ou B si elle est dans $C = A \cap B$.
De meme, pour chaque chemin correspondant aux 4 cotes du rectangle.
Mettons que pour k, l'homotopie est dans A, alors les cotes "a gauche et en haut" sont choisis dans A.
Ainsi, les deux autres sont choisis dans A ou B selon $k = 1$ et $k - n$.
S'ils sont tous dans A, alors $H|_{C_k}$ est une homotopie dans A entre chemin dans A, $\omega_k * \overline{\omega_{k-1}} \in N$.
Supposons qu'un cote au moins est un chemin dans B

$$\omega_k * \overline{\omega_{k-1}} = \lambda_1 * \lambda_2 * \overline{\lambda_2} * \lambda_3 = \lambda_1 * \lambda_3$$

Comme le point y (le cote en haut a droite du carre) appartient a C, on choisit un chemin γ^1 de $H(y)$ a x_0, de meme γ^2 pour z (le point en bas a droite du carre).

$$\lambda_1 * \lambda_3 = \lambda_1 * \gamma^1 * \overline{\gamma^1} * \lambda_4 * \gamma^2 * \overline{\gamma^2} * \lambda_5$$

Le chemin λ_4 est dans B, appelons λ_4' le meme chemin vu dans A , $H|_{C_k}$ est une homotopie dans A tel que le chemin $\lambda_1 \simeq \overline{\lambda_5} * \overline{\lambda_4'}$

$$\begin{aligned} &= \overline{\lambda_5} * \gamma^2 * \overline{\gamma^2} * \overline{\lambda_4'} * \gamma^1 * \overline{\gamma^1} * \lambda^4 * \gamma^2 * \overline{\gamma^2} * \lambda_5 \\ &= \overline{\epsilon} * \overline{\alpha} * \beta * \epsilon \end{aligned}$$

Represente un conjugue par ϵ dans $\pi_1 A * \pi_1 B$ du meme lacet λ_4 vu dans B ou λ_4' vu dans A.
Par definition de $\pi_1 A *_{\pi_1 C} \pi_1 B$, c'est un element de N

Exemple
$\mathbb{R}P^2 = {D^2}/{\sim} \simeq S^1 \cup_2 e^2$.
Pour recouvrir $\mathbb{R}P^2$ par des ouverts, on epaissit $\mathbb{R}P^1$ et on amincit e^2.
On pose $A = \dot{D}_{\frac{3}{4}}, B = D^2 \setminus D_{\frac{1}{4}}$.
Comme A, B, C sont satures, $q(A), q(B), q(C)$ sont ouverts, on a donc

$$q(A) = *, q(B) = q(S^1) = S^1 \text{ et } q(C) = q(S^1) = S^1$$

L'inclusion $C \subset B$ induit une application $q(C) \to q(B)$

4.2 Groupe fondamental d'un Wedge

On suppose que tous nos espaces sont pointes et bien pointes dans le sens ou le point de base x_0 admet un voisinage ouvert et contractile au sens pointe, $U \simeq \{0\}$ et l'homotopie $\mathrm{Id}_U \simeq c_{x_0}$ fixe x_0

Exemple
S^1 est bien pointe, toutes les surfaces aussi, le peigne du topologue ne l'est pas en $(0, 1)$.

Lemme 56
Si X, Y sont bien pointes, $X \vee Y$ aussi ($X \times Y$ aussi).

Preuve
Soient $U \ni x_0, V \ni y_0$ des voisinages contractiles de x_0 resp. y_0.
Dans $X \vee Y = X \coprod Y / x_0 \sim y_0$, on choisit l'image de $U \coprod V \subset X \coprod Y$.
Les homotopies $H : \mathrm{Id}_U \simeq c_{x_0}, F : \mathrm{Id}_V \simeq c_{y_0}$ donne une homotopie $H \coprod F$: $\mathrm{Id}_{U \coprod V} \to c_{x_0} \coprod c_{y_0}$ passe au quotient comme elle preserve le point de base. $\square$

Proposition 57
Soient $(X, x_0), (Y, y_0)$ deux espaces bien pointes, alors $\pi_1(X \vee Y) \simeq \pi_1 X * \pi_1 Y$

Preuve
On prend $A = X \vee V$ et $B = Y \vee U$, alors on conclut par le lemme ci-dessus et Seifert. $\square$

Lecture 12: Retractes

Thu 21 Apr

Definition 25 (Retracte)
Un sous-espace $\iota : A \hookrightarrow X$ est un retracte de X s'il existe une retraction $r : X \to A$ tel que $r \circ \iota = \mathrm{Id}_A$.

Exemple

1. *S^1 est un retracte de $S^1 \vee S^1$.*

2. *Tout point $x_0 \in X$ est un retracte de X $r : X \to \{x_0\}$.*

Remarque
S^1 n'est pas un retracte du disque D^2, il n'existe aucune application continue $r : D^2 \to S^1$ tel que $r(x) = x$ si $x \in S^1$.
Sinon $\pi_1 S^1 \xrightarrow{\iota_*} \pi_1 D^2 \xrightarrow{r_*} \pi_1 S^1$.
Si la composition $r \circ \iota$ etait l'identite, la composition $\mathbb{Z} \to 0 \to \mathbb{Z}$ serait l'identite, ce qui est impossible.

Definition 26 (Retracte de deformation)
Un retracte $\iota : A \hookrightarrow X$ est un retracte de deformation de X s'il existe une homotopie $\iota \circ r \simeq \mathrm{Id}_X$

Exemple
Le peigne du topologue P $\{(0,1)\} \subset P$ est un retracte de deformation.
On definit l'homotopie H en trois temps.

1. *Contracter les dents du peigne*
2. *Contracter la base du peigne.*

3. *Remonter en* $(0,1)$

Cette homotopie n'a pas fixe le point $(0,1)$

Definition 27 (Retracte de deformation fort)
Un retracte de deformation $\iota : A \hookrightarrow X$ *est un retracte de deformation fort si l'homotopie* $H : \iota \circ r \simeq \mathrm{Id}_X$ *peut etre choisie relative a* A*, ie,* $H(a,t) = a$ *pour tout* $t \in I$ *et pour tout* $a \in A$

Exemple (Le collier)
Soit A *un espace et* $Col(A) = A \times [0, \frac{3}{4}[$*, l'inclusion de* $A \times 0 \hookrightarrow Col(A)$ *est un retracte de deformation fort.*
On pose $r(a,t) = (a,0) \forall a \in A, \forall t$.
On definit donc $H : Col(A) \times I \to Col(A)$ *en envoyant* $(a,t,s) \mapsto (a,ts)$ *qui verifie clairement toutes les hypotheses ci-dessus.*

Lecture 13: Consequence de Seifert

Mon 25 Apr

Proposition 62
Soit $f : A \to X$ *une application pointee avec* A *connexe par arcs.*
Soit $Y = X \cup_f CA$*, alors* $\pi_1 Y \simeq \pi_1 X *_{\pi_1 A} 1$

Preuve
Y *est recouvert par* $q(X)$ *et* $q(CA)$*, mais ce ne sont pas des ouverts de* Y*, il faut les epaissir.*
On pose $X' = q\left(X \coprod Col(A)\right)$ *et* $C'A = A \times]\frac{1}{4}, 1]/A \times 1$ *un "petit" cone ouvert.*
On voit que $C'A \simeq *$ *(comme* CA *) et* $C'A$ *et* X' *sont des ouverts de* Y *car ce sont des images par* q *d'ouverts satures.*
De plus, X' *admet* X *comme retracte de deformation fort.*
Enfin, $X' \cap C'A = q\left(Col(A) \cap (A \times]\frac{1}{4}, 1])/A \times 1\right) = q\left(A \times]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \simeq A$.
On peut donc appliquer le theoreme de Seifert van Kampen car A *est connexe par arcs.*
Pour conclure, on affirme que $j : C'A \cap X' \hookrightarrow X'$ *induit* $f_* : \pi_1 A \to \pi_1 X$.
On considere $X' \hookleftarrow A' \times]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[\to A'$ $\square$

4.3 Attachement de cellules standard

Si $Y = X \cup_f e^n$ Comme $\pi_1 S^{n-1} = 1$, pour $n \geq 3$ on a

Corollaire 63
Si $n \geq 3$*,* $\pi_1 Y \simeq \pi_1 X$.
Si $n = 2$*,* $\pi_1 Y \simeq {}^{\pi_1 X}\!/_{N_f}$ *ou* N_f *est le sous-groupe normale engendre*

par $f_*(1)$ ou $f_* : \mathbb{Z} \simeq \pi_1 S^1 \to \pi_1 X$ qui envoie $1 \mapsto f_*(1)$

Preuve
Par la proposition on a un pushout de groupes $\pi_1 X \leftarrow \pi_1 S^1 \to \pi_1(CS^1)$ qui est $\pi_1 Y$, donc $\pi_1 Y \simeq \pi_1 X *_{\pi_1 S^1} 1 \simeq {}^{\pi_1 X}/_{N_f}$ □

Il reste a etudier les attachements de 1 cellule.
Il y a deux cas pour $f : S^0 \to (X, x_0)$.
SI $f(-1)$ et x_0 ne sont pas dans la meme composante connexe, alors $\pi_1 Y = \pi_1(X, x_0) * \pi_1(X, f(-1))$.
Si x_1 et x_0 sont dans la meme composante connexe, alors f est homotope a l'application $g = c_{x_0}$ via γ un chemin entre x_0 et x_1.
Alors $X \cup_f e^1 \simeq X \cup_g e^1$ (puisque des applications homotopes donnent des attachements homotopes) or puisque g est constante, ceci est homotope a $X \vee e^1$.
Ainsi, si X est bien pointe, alors $\pi_1 Y \simeq \pi_1 X * \mathbb{Z}$.

4.4 Classification des surfaces

Rappel : Une surface est un espace compact, hausdorff et localement homeomorphe a $\mathbb{R}^2$.
On va supposer connu que toute surface est triangularisable, ie. S est un quotient d'une reunion disjointe finie de triangles en identifiant uniquemenet des paires de cotes, a homeomorphisme pres.
On va supposer que S est le quotient d'un polygone P a $2k$ cotes $a'_1, \ldots, a'_k, a''_1, \ldots, a''_k$ ou a'_i et a''_i sont identifies deux a deux, et tous les sommets sont identifies a un point.
On reconnait dans cette description la somme connexe de i copies de $\mathbb{R}P^2$ et de tores.

Proposition 64
Si S est le quotient de P par une relation donnee par un mot w, P un $2k$-gone et S' est le quotient de P par une relation donee par un mot w' , P' un $2l$ gone, alors $S\#S'$ est le quotient d'un $(2k + 2l)$ gone par la relation donnee par ww'

Preuve
On appelle $A_0, \ldots, A_{2k-1}$ les sommets de P et on choisit un voisinage U d'un point interieur dont le bord ne recontre ∂P qu'en A_0.
De memme pour P' avec U' et $\partial U \cap P' = \{A'_0\}$.
Comme $P \setminus U$ est le quotient d'un $(2k + 1)$-gone dont les cotes sont $a'_1, a''_1 \ldots, a'_k, a''_k$ et b entre B_0 et A_0.
Ici, B_0 est la deuxieme extremite de a''_k.
La somme connexe est le quotient d'un $(2k+1)$-gone et un $(2l+1)$-gone, vu que le quotient d'un quotient est un quotient, $S\#S'$ est construite en identi-

fiant d'abord b et b' de sorte a obtenir un $(2k+2l)$-gone puis en identifiant les cotes 2 a 2 selon les instructions donnees par le mot parcouru de A_0 sur le bord dans le sens trigonometrique.
C'est bien la concatenation ww'. $\square$

Lecture 14: Revetements

Mon 02 May

On veut calculer $\pi_1\left(T^2\#\mathbb{R}P^2\right)$.
Comme $\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2 \simeq T^2\#\mathbb{R}P^2$.
On calcule le groupe fondamental grace a la presentation de $Y := T^2\#\mathbb{R}P^2$.
Si P est le pushout de $\vee_1^3 \leftarrow \partial H \simeq S^1 \hookrightarrow H \simeq D^2$, on a une application induite $P \to Y$, c'est une bijection d'un compact vers un hausdorff, c'est un homeomorphisme.
Donc $\pi_1 Y = \pi_1 P = \pi_1\left((S_d^1 \vee S_e^1 \vee S_f^1) \cup_p e^2\right) \simeq \langle \delta, \epsilon, \phi | r\rangle$.
Ici, r est le mot $[p] \in \left[S^1, S^1 \vee S^1 \vee S^1\right]$ qui est l'image de $\mathrm{Id}_{\partial H}$ par p_*.
Comme $\mathrm{Id}_{\partial H} = d' * e' * \overline{d''} * \overline{e''} * f' * f''$.
Son image est le lace $d * e * \overline{d} * \overline{e} * f * f$.
Sa classe d'homotopie est donc donnee par $\delta\epsilon\delta^{-1}\epsilon^{-1}\phi^2$.
De la boite noire, il suit que toute surface est soit la sphere, soit une somme connexe de tores et plans projectifs.
S'il n'y pas de $\mathbb{R}P^2$, on a une somme connexe de g tores, un tore a g trous.
Sinon, il y a au moins une copie de $\mathbb{R}P^2$ et la surface S sera de la forme $T^2\#\ldots\#T^2\#\mathbb{R}P^2\ldots\#\mathbb{R}P^2 = (T^2)^{\#a}\#(\mathbb{R}P^2)^{\#b} = (\mathbb{R}P^2)^{\#2a+b}$.

Theorème 65 (Theoreme de classification)
Une surface est homeomorphe a , $(T^2)^{\#g}$ ou $(\mathbb{R}P^2)^k$ pour $g \geq 1, k \geq 1$.

On pourrait montrer pour conclure que les π_1 de ces surfaces sont tous distincts, on va plutot etudier $H_1 S = (\pi_1 S)_{ab}$.
On sait que $\pi_1 S^2 = 1, H_1 S^2 = 0$.
On calcule $H_1((T^2)^{\#g}) = \mathbb{Z}^{2g}$.

Lemme 66
$H_1((\mathbb{R}P^2)^{\#k}) = \mathbb{Z}^{k-1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Preuve

$$\pi_1((\mathbb{R}P^2)^{\#k}) = \langle a_1, \ldots, a_k | a_1^2 \ldots a_k^2\rangle$$ $\square$

On construit $\phi : \pi_1((\mathbb{R}P^2)^{\#k}) \to A = \mathbb{Z}^{k-1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; a_i \to e_i, a_k \to f - (e_1 + \ldots + e_{k-1})$ ou e_i est le ieme generateur de $\mathbb{Z}^{k-1}$.
On verifie que $\phi(a_1^2 \ldots a_k^2) = 0$ pour etre sur que ϕ est un homomorphisme.

Calculons $\phi(a_1^2 \ldots a_k^2) = 2\phi(a_1) + \ldots + 2\phi(a_k)) + 2(f - e_1 - \ldots - e_{k-1}) = 2f = 0$.
Comme A est abelien, ϕ induit $\overline{\phi} : \pi_{ab} \to A$.
On construit l'inverse a ψ en envoyant $e_i \to \overline{a_i}$ et $f \to \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$.
Comme A est un groupe libre abelien produit avec $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il suffit de verifier que $\psi(2f) = 0$ ce qui est immediat.
On termine en verifiant que ψ est l'inverse de ϕ.
Comme les groupes $0, \mathbb{Z}^{2g}, \mathbb{Z}^{k-1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Remarque
Pour reconnaitre S, il n'est pas necessaire de calculer $H_1 S$, il suffit de savoir si S est orientable (sinon elle contient un ruban de moebius) et de calculer $\xi(S)$, la caracteristique d'euler.
En general $\xi(S)$ est # sommets $-$# arretes + # faces pour un polyedre.
Pour nous, c'est donc $1 - l + 1 = 2 - l$

5 Les Revetements

5.1 Definitions

Tous les espaces sont Hausdorff, connexes par arcs et localement connexes par arcs.
Ie., tout voisinage de tout point contient un voisinage de ce point qui est connexe par arcs.
Pour $x \in X$, on appellera $p^{-1}(x) = Fx$ la fibre au-dessus de X

Definition 28
Une application $p : E \to X$ est un revetement si tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert trivialisant $U \ni x$, tel que $p^{-1}(U)$ est une reunion disjoint de $U_i, i \in I$, appeles feuillets, avec $p|_{U_i} : U_i \to U$ un homeomorphisme.

Exemple

1. Id_X *est un revetement*
2. $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ *est un revetement*
3. $q : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ *est un revetement*
4. *Pour F discret, la projection $p_2 : X \times F \to X$ est le revetement trivial.*

Lemme 69
Les fibres sont des espaces discrets

Preuve

Soit $e \in Fx$ et $U \ni x$ un ouvert trivialisant.

Alors e appartient a un seul feuillet U_i et donc dans Fx $\square$

Proposition 70

Un revetement est une surjection ouverte, en particulier un quotient.

Preuve

Soit V un ouvert connexe de E et $x \in p(V)$.

On choisit un ouvert trivialisant $U \ni x$, alors $x = p(y)$, $y \in V \subset E$, $y \in V \subset E$ et il existe donc un feuillet U_i tel que $U_i \cap V \neq \emptyset$.

Comme $p|_{U_i}$ est un homeo, $p|_{U_i \cap V}$ aussi. Donc $p(U_i \cap V)$ est ouvert. $\square$

Lecture 15: Relevement d'homotopies

Mon 09 May

Proposition 71

Soit $p : E \to X$ un revetement. Si Y est un espace connexe, $f, g : Y \to E$ deux applications tel que $p \circ f = p \circ g$ alors $Z = \{y \in Y | f(y) = g(y)\}$ est soit Y tout entier soit l'ensemble vide.

Preuve

On va montrer que Z est ouvert et ferme.

Comme Y est connexe, Z sera donc Y ou $\emptyset$.

Montrons que Z est ouvert.

Pour $z \in Z$, on choisit un ouvert trivialisant U de $p(f(z)) = p(g(z))$.

Soit U_i le feuillet contenant $f(z) = g(z)$.

Alors $f^{-1}(U_i) \cap g^{-1}(U_i)$ est un ouvert de Y.

On montre qu'il est contenu dans Z.

Soit y un point de l'intersection, alors $f(y)$ et $g(y) \in E$ et $p(f(y)) = p(g(y))$ dans X.

Or $p|_{U_i}$ est un homeo et $f(y), g(y) \in U_i$. Donc $f(y) = g(y)$.

Montrons donc que Z est ferme.

Soit $y \in Z$ et U un ouvert trivialisant de $p(f(y)) = p(g(y))$.

Soit U_i le feuillet dans E qui contient $f(y)$ et U_j celui qui contient $g(y)$.

Puisque $f(y) \neq g(y)$ et $p|_{U_i}$ est un homeo, on sait que $i \neq j$.

Alors $f^{-1}(U_i) \cap g^{-1}(U_j)$ est un ouvert de Y qui contient y.

C'est donc un voisinage ouvert de y dans Y.

On affirme qu'il est entierement contenu dans $Y \setminus Z$ $\square$

Definition 29 (Morphisme de Revetement)

Soient $E_1 \xrightarrow{p_1} X$ et $E_2 \xrightarrow{p_2} X$ est une application $f : E_1 \to E_2$ tel que

$p_2 \circ f = p_1$

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Un automorphisme d'un revetement $p : E \to X$ est un morphisme inversible en tant que morphisme de revetement.
Il existe donc $g : E \to E$ tq $g \circ f = f \circ g = \mathrm{Id}_E$ et $p \circ f = p$ et $p \circ g = p$.
On note $\mathrm{Aut}(p)$ l'ensemble de tous ces automorphismes.

Exemple
L'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui envoie $x \mapsto x + n$ est un automorphisme de $\exp : \mathbb{R} \to S^1$.

Remarque
Soient p, q deux revetements composables, alors $q \circ p$ est un revetement si les fibres de q sont finies mais ce n'est pas le cas en general.

5.2 Relevement de chemins

Theorème 74 (Relevement unique de chemins)
Soit $p : E \to X$ un revetement et $\gamma : I \to X$ un chemin. Soit $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ ou $x_0 = \gamma(0)$. Il existe alors un unique chemin $\tilde{\gamma} : I \to E$ tq $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ et $\tilde{\gamma}(0) = y_0$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\iota"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[ur, dashed, "\exists ! \tilde{\gamma}"] & X \end{tikzcd}$$

Preuve
Soit U_α un recouvrement de X par des ouverts trivialisants.
Comme I est compact, il existe $\delta > 0$ tel que tout intervalle de I de rayon $< \delta$ a son image dans l'un de ces ouverts.
On choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < \delta$.
On construit $\tilde{\gamma}$ inductivement.
L'intervalle $[0, \frac{1}{n}]$ a son image par γ contenue dans U_{α_1}, un ouvert trivialisant.
Alors $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ est dans l'un des feuillets $(U_{\alpha_1})_{i_1}$.
On pose alors $\tilde{\gamma} : [0, \frac{1}{n}] \to U_{\alpha_1} \xrightarrow{(p|_{(U_{\alpha_1})_{i_1}})^{-1}} (U_{\alpha_1})_{i_1} \subset E$.
On continue par induction, supposons que $\tilde{\gamma}$ est definie sur $[0, \frac{k}{n}]$, alors

$$\gamma[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \subset U_{\alpha_{k+1}}$$

et $\tilde{\gamma}(\frac{k}{n}) = y_k \in (U_{\alpha_{k+1}})_{i_{k+1}}$.
On pose

$$\tilde{\gamma} : [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \xrightarrow{\gamma} U_{\alpha_{k+1}} \to (U_{\alpha_{k+1}})_{i_{k+1}}$$

L'unicite suit de la proposition.
Supposons en effet que $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}' : I \to E$ *sont deux relevements, alors* $\tilde{\gamma}(0) = y_0 = \tilde{\gamma}'(0)$, *donc* $Z = \{t \in I | \tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}'(t)\}$ *n'est pas vide.*
Donc c'est l'intervalle tout entier. □

Proposition 75

Soit $p : E \to X$ *un revetement et* Y *un espace localement connexe par arcs.*
Si $f : Y \to E$ *est une application et* $H : Y \times I \to X$ *est une homotopie* $p \circ f = H(-,0) \simeq H(0,1)$.
Il existe $\tilde{H} : Y \times I \to E$ *tel que* $\tilde{H}(-,0) = f$ *et* $p \circ \tilde{H} = H$

$$\begin{tikzcd}
Y \times 0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\tilde{H}"] & X
\end{tikzcd}$$

Proposition 76

Soit $p : E \to X$ *un revetement. Si* $f, g : I \to E$ *sont deux chemins avec* $f(0) = g(0)$ *et* $H : I \times I \to X$ *est une homotopie entre* $p \circ f$ *et* $p \circ g$ *avec* $H(0,t) = x_0$ *et* $H(1,t) = x_1$ *pour tout* $t \in I$, *alors* $f \simeq g$

Preuve

Par la propriete de relevement, il existe une homotopie $\tilde{H} : I \times I \to E$ *tel que* $p \circ \tilde{H} = H$ *et* $\tilde{H}(s,0) = f(s)$.
Par la propriete des relevement, $\tilde{H}(0,t)$ *est l'unique chemin qui releve* $H(0,t)$ *et idem pour* $\tilde{H}(1,t) = y_1 = f(1)$.
Finalement, $\tilde{H}(s,1) = g$.
$\tilde{H}(s, m_1)$ *est un chemin qui part de* y_0, *qui releve* $p \circ g$ *et par unicite c'est donc* g. □

Corollaire 77

Toutes les fibres sont des espaces discrets de meme cardinal.

Preuve

Soient $x_0, x_1 \in X$ *et* $\gamma : I \to X$ *avec* $\gamma(0) = x_0$ *et* $\gamma(1) = x_1$.
Le theoreme associe a tout $y \in p^{-1}(x_0)$ *un unique chemin* $\tilde{\gamma}$ *qui releve* γ.
On pose $\Phi : p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_1)$ *en associant* $y \to \tilde{\gamma}(1)$ *de meme pour* $\overline{\gamma}$ *on construit* Φ^{-1} *et on etablit donc une bijection.* □

Corollaire 78

Soit $p : E \to X$ un revetement, alors $p_* : \pi_1 E \to \pi_1 X$ est un monomorphisme.

Preuve

On applique la proposition pour des lacets $f, g : I \to E$.
Ici, $f(0) = f(1) = y_0 = g(0) = g(1)$.
On sait que si $p \circ f \simeq p \circ g$ au sens pointe, alors $f \simeq g$ au sens pointe.
Ceci signifie que $p_*(f) = p_* g \implies [f] = [g]$ □

5.3 Revetements et Actions de groupe

Soit G un groupe discret, agissant sur un espace X.

Definition 30 (Action totalement discontinue)

L'action de G sur X est totalement discontinue si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $x \in U$ tel que $Ug \cap U = \emptyset$ pour tout $g \neq e$

Proposition 79

Si X est connexe par arcs et localement connexe par arcs et que G agit de maniere totalement discontinue, alors $q : X \to X/G$ est un revetement.

Preuve

On rappelle que $q(x) = xG$, on choisit un ouvert de x comme dans la definition. Alors on a

$$q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{g \in G} Ug$$

est une reunion disjoint d'ouverts de X. En particulier $q(U)$ est un voisinage ouvert de $x \in X/G$.
Pour montrer que $q(U)$ est un ouvert trivialisant, on etude $q|_{Ug} : Ug \to q(U)$.
D'abord, cette application est continue puisque q est continue.
De plus elle est ouverte, si $V \subset U$ est un ouvert, $q(V)$ est un ouvert de $q(U)$ et de meme $q(Vg) = q(V)$ est ouvert.
Elle est surjective car $q(Ug) = q(U)$.
Elle est injective car si $q(ug) = q(vg)$, alors il existe h tel que $ug = vgh$ et donc $u = vghg^{-1}$.
Or $U \cap Ughg^{-1} = \emptyset$ si $ghg^{-1} \neq e \iff h \neq e$.
On conclut que $q|_{U_g}$ est un homeo. □

5.4 Relevements en general

La propriete de relevement unique des chemins permet en fait de resoudre des problemes plus generaux.

Proposition 80

Soit $p : E \to X$ *un revetement et* $f : Y \to X$ *une application. On fixe des points de base* $e_0 \in E, x_0 \in X, y_0 \in Y$ *avec* $p(e_0) = x_0 = f(y_0)$*. Alors* f *admet un relevement* $\tilde{f} : Y \to E$ *si et seulement si* $f_*(\pi_1 Y) \subset p_*(\pi_1 E)$

Preuve

Si $f = p \circ \tilde{f}$*, alors on a* $\pi_1 Y \to \pi_1 E \hookrightarrow \pi_1 X$*.*
Ainsi, $f_* = p_* \circ \tilde{f}_*$ *et en particulier* $\operatorname{Im} f_* \subset \operatorname{Im} p_*$*.*
Soit donc $y \in Y$ *et, par connexite par arcs, il existe un chemin* γ *dans* Y *avec* $\gamma(0) = y_0, \gamma(1) = y$*.*
Par la propriete de relevement des chemins, il existe un unique $\tilde{\gamma}$ *qui releve* $f \circ \gamma : I \to Y \to X$*.*
On pose alors $\tilde{f}(y) = \tilde{\gamma}(1)$*. On a alors* $p \circ \tilde{\gamma}(1) = f(\gamma(1)) = f(y)$*.*
On montre que $\tilde{f}$ *est bien definie.*
Soit γ' *un autre chemin entre* y_0 *et* y*. Soit* $\tilde{\gamma}'$ *le relevement* $f \circ \gamma'$ *dans* E*.*
Alors $f \circ \gamma' * \overline{f \circ \gamma}$ *est un lacet* ω *base en* $x_0 \in X$*.*
Comme $\omega = f(\gamma * \overline{\gamma'})$*, on conclut que* $[\omega] = \operatorname{Im} f_* \subset \operatorname{Im} p_*$*.*
Il existe un lacet $\tilde{\alpha} : I \to E$ *base en* e_0 *tel que* $p_*[\tilde{\alpha}] = [p \circ \tilde{\alpha}] = [\omega]$*.*
Il existe une homotopie $H : I \times I \to X$ *entre* $p \circ \tilde{\alpha}$ *et* ω*.*
Par la propriete de relevement des homotopies, il existe une homotopie $\tilde{H}$ *entre* $\tilde{\alpha}$ *et un lacet* $\tilde{\omega} = \tilde{H}(-, 1)$ *tel que* $p \circ \tilde{\omega} = \omega$*.*
Sur $[0, \frac{1}{2}]$*,* $\tilde{\omega}$ *releve* $f \circ \gamma'$ *et sur* $[\frac{1}{2}, 1]$*,* $\tilde{\omega}$ *releve* $\overline{f \circ \gamma}$*. Ainsi,* $\tilde{\omega}$ *est forme des seuls chemins* $\tilde{\gamma}'$ *et* $\overline{\tilde{\gamma}}$*.*
En particulier $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$*.*
Est-ce que $\tilde{f}$ *est continue ?*
Pour montrer que la preimage d'un ouvert est ouverte, on va montrer que pour tout $e \in E$ *de cet ouvert,* $y \in \tilde{f}^{-1}(e)$*, il existe un voisinage ouvert* $y \in V \subset Y$ *tel que* $\tilde{f}(V)$ *est contenu dans cet ouvert.*
On choisit un ouvert trivialisant U *de* $p(e)$ *et on appelle* U_e *le feuillet qui contient* e*.*
Quitte a restreindre l'ouvert original, on peut suposer que c'est un feuillet.
Comme $f^{-1}(U)$ *contient* y*, cart* $p \circ \tilde{f}(y) = f(y)$*, on choisit un ouvert* $y \in V$ *connexe par arcs.*
On affirme que $\tilde{f}(V) \subset U_e$*.*
On fixe un chemin γ *entre* y_0 *et* y *dans* Y *et on choisit dans* V *un chemin* β *entre* y *et* $v \in V$*.*
On utilise $\gamma * \beta$ *comme chemin entre* y_0 *et* v*.*

Pour comprendre $\tilde{f}(v)$, on releve le chemin

$$f \circ (\gamma * \beta) = (f \circ \gamma) * (f \circ \beta) \qquad \square$$

en un chemin $\tilde{\gamma} * \tilde{\beta}$.
Mais $f \circ \beta$ est contenu dans $f(V) \subset U$ si bien que $\tilde{\beta}$ est obtenu comme $(p|_{U_e})^{-1} \circ (f \circ \beta)$ et il est entierement contenu dans U_e.
En particulier, $\tilde{f}(v) = (\tilde{\gamma} * \tilde{\beta})(1) = \tilde{\beta}(1) \in U_e$

Lecture 16: Revetement universel

Mon 16 May

Exemple

Comme contreexemple, notons que par exemple pour $p : \mathbb{R} \to S^1$ l'application $d : S^1 \to S^1$ n'admet pas de relevement.

5.5 Revetements universels

Definition 31 (Revetement Universel)
Un revetement universel de X est un revetement $p : E \to X$ avec $\pi_1 E = 1$

Remarque

Si un revetement universel existe, alors pour tout revetement $q : E' \to X$, le revetement de $p : E \to X$ se factorise a travers q'.
Ceci suit du fait que $\operatorname{Im} p_* < \operatorname{Im} q_*$.
De plus, si p existe et U est un ouvert trivialisant contenant un point $x \in X$, alors on a que l'inclusion $\iota : U \to X$ se factorise a travers E.
En effet, si $U_e \xrightarrow{j} E$ est l'inclusion d'un feuillet et $q : U_e \to U$ est l'homeo.,alors $j \circ q^{-1}$ releve ι.
Par la proposition, $\iota_* \pi_1(U; x) \subset p_* \pi_1(E, e) = 1$.
Ainsi, tous les lacets de U bases en x sont homotopiquement triviaux dans X.

Definition 32 (Semi-localement simplement connexe)
Un espace X est semi-localement simplement connexe ($\frac{1}{2}$-loc 1-connexe) si tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert tel que l'inclusion $\iota : U \hookrightarrow X$ induit l'homomorphisme trivial sur les groupes fondamentaux.

Lemme 83
L'ensemble de tous les ouverts $U \subset X$ connexes par arcs tel que $\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ forment une base pour la topologie de X

On definit $\tilde{B}$ une base d'une topologie sur $\tilde{X}$ en posant pour tout $[\gamma] \in \tilde{X}$ et tout ouvert $U \in B$ avec $\gamma(1) \in U$ comme etant $U_\gamma = \left\{[\alpha] \in \tilde{X} | \exists \beta \text{ chemin de } U \text{ tel que } [\alpha] = [\gamma \circ \beta]\right\}$.

Pour $\gamma : I \to X, \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x, [\gamma] \in \tilde{X}$, pour $x \in U \in B$, on pose $U_{[\gamma]} = \{[\gamma * \beta] | \beta : I \to U, \beta(0) = x\}$.
On pose alors $\tilde{B} = \{U_{[\gamma]} | \gamma, U\}$.

Lemme 84
$\tilde{B}$ est la base d'une topologie sur $\tilde{X}$

Lecture 17: Monodromie (mot cool)

Mon 23 May

Proposition 85
L'application $p : \tilde{X} \to X$ d'evaluation en 1 est un revetement.

Preuve
$\tilde{X}$ est connexe par arcs, Γ est un chemin du point de base $[c_{x_0}] \in \tilde{X}$ vers $[\gamma]$.
Comme X est connexe par arcs, p est surjective.
Pour montrer la continuite, notons que $p^{-1}(U) = \bigcup U_{[\gamma]}$ qui est ouvert.
Les $U \in B$ sont des ouverts trivialisant dont les $U_{[\gamma]}$ sont des feuillets, pour des classes d'homotopie relatives de chemins de x_0 vers x distinctes.
On peut choisir et fixer un point d'arrivee x de nos chemins γ. Alors, si $U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']} \neq \emptyset$, alors ils sont egaux a $U_{[\alpha]}$ pour $[\alpha]$ dans l'intersection.
Comme $p(U_{[\gamma]}) = U \in B$, on a que p est ouverte, il suffit donc de montrer que p est une bijection lorsqu'on la restreint a $U_{[\gamma]}$.
La surjectivite est clare, pour l'injectivite, supposons que $p[\gamma * \beta]$ et $p[\gamma * \beta']$ et donc $\beta(1) = y = \beta'(1)$.
Comme $\beta' * \overline{\beta}$ est entierement contenu dans U, il est trivial et donc $[\gamma * \beta'] = [\gamma * \beta' * \overline{\beta} * \beta] = [\gamma * \beta]$. □

Theorème 86
Le revetement p est un revetement universel (donc le revetement universel).

Preuve
Comme $p_* : \pi_1(\tilde{X}, [c_{x_0}]) \to \pi_1(X, x_0)$ est injective, il suffit de montrer que pour un lacet $\tilde{\omega} : I \to \tilde{X}$ base en $[c_{x_0}], p_0\tilde{\omega} = \omega$ est homotopiquemeent constant dans X.
Soit Ω le chemin dans $\tilde{X}$ qui releve ω, ie.

$$\Omega(t) = [\omega|_{[0,t]}]$$

Au debut, $\Omega(0) = [c_{x_0}]$ et $\Omega(1) = [\omega]$.
Les deux chemins $\tilde{\omega}$ et Ω relevent tous deux ω, par unicite $\Omega = \tilde{\omega}$, si bien

que $[\omega] = [c_{x_0}]$. $\square$

5.6 Monodromie

Soit $p : E \to X$ un revetement, $e_0 \in E, x_0 = p(e_0)$, soit $F_{x_0} = p^{-1}(x_0) \ni e_0$. L'action de monodromie $F_{x_0} \times \pi_1(X, x_0)$ qui envoie $(e_0, [\omega]) \to \tilde{\omega}(1)$ ou $\tilde{\omega}$ est le seul relevement de ω qui commence en x_0.

Proposition 87

La monodromie est transitive, le stabilisateur de e_0 *est* $p_*(\pi_1(E, e_0))$ *et* $F_x = {\pi_1(X, x_0)}\big/{p_*(\pi_1(E, e_0))}$

Preuve

Comme E *est connexe par arcs, on choisit un chemin* α *de* e_0 *vers* e_1 *dans* E *pour* $e_0, e_1 \in F_x$*, alors* $p \circ \alpha$ *est un lacet qui agit sur* e_0 *de la maniere voulue.*

Le stabilisateur de e_0 *est le sous-groupe des classes d'homotopie des lacets* $[\omega] \in \pi_1(X, x_0)$ *qui se relevent en un lacet* $\tilde{\omega}$ *dans* (E, e_0).

Donc $[\omega] = p_*[\tilde{\omega}]$.

En conclusion, par transitivite, F_{x_0} *est en bijection avec* ${\pi_1 X}\big/{Stab}$ *et on a bien que* $Stab = p_*\pi_1(E, e_0)$ $\square$

Remarque

Pour $e_0, e_1 \in F_{x_0}$, $p_*\pi_1(E, e_0)$ *et* $p_*\pi_1(E, e_1)$ *ne sont pas egales, elles sont seulement conjuguees dans* $\pi_1(X, x_0)$.

Proposition 89

Deux revetements $p : E \to X$ *et* $p' : E' \to X$ *sont isomorphes si et seulement si* $p_*(\pi_1(E, e_0))$ *et* $p'_*\pi_1(E', e'_0)$ *sont conjugues.*

Preuve

Soit $f : E \to E'$ *un isomorphisme de revetements.*

Comme $f(e_0) = e'_1 \neq e'_0$.

Les images des groupes fondamentaux sont conjugues par la remarque ci-dessus.

Supposons donc que $\operatorname{Im} p_*$ *et* $\operatorname{Im} p'_*$ *sont conjugues, il existe donc* $[\omega] \in \pi_1(X, x_0)$ *tel que* $[\omega]^{-1} p_*\pi_1(E, e_0)[\omega] = p'_*\pi_1(E', e'_0)$.

On releve alors ω *en* $\tilde{\omega}$ *dans* E *avec* $\tilde{\omega}(0) = e_0$*, appelons* $\epsilon = \tilde{\omega}(1) \in F_{x_0}$.

Alors par la remarque $p_*\pi_1(E, \epsilon)$ *est egal a* $p'_*\pi_1(E', e'_0)$.

Ainsi, $(E, \epsilon) \simeq (E', e'_0)$ *et donc* $E \simeq E'$. $\square$

Theorème 90 (Theoreme de classification)

Soit $Cov(X)$ *l'ensemble des classes d'isomorphisme de revetement de* X

et $Conj(G)$ l'ensemble des classes de conugaison des sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$.
Alors

$$\Phi : Conj(G) \to Cov(X)$$
$$[H] \mapsto p_H : X_H \to X$$

ou X_H est defini tel que dans la serie.
Alors Φ est une bijection d'inverse Ψ qui associe a $(p : E \to X) \mapsto p_*\pi_1(E, e_0)$

Lecture 18: Dernier cours (sniff)

Mon 30 May

5.7 Revetements Galoisiens

Definition 33 (Revetement Galoisien)
Un revetement $p : E \to X$ est galoisien si pour tout $x \in X$, tous $e, e' \in p^{-1}(x)$, il existe un automorphisme f de p tel que $f(e) = e'$

Proposition 91
Le revetement p est galoisien si et seulement si $\operatorname{Im} p_*$ est un sous-groupe normal de $\pi_1 X$

Preuve
On cherche a factoriser l'application $p : (E, e) \to (X, x)$ a travers $p : (E, e') \to (X, x)$.
On sait que $f : (E, e) \to (E, e')$ existe si et seulement si $p_*\pi_1(E, e) \subset p_*\pi_1(E, e') = [\omega]p_*\pi_1(E, e)[\omega]^{-1}$.
Pour que f existe pour tous $e, e' \in F_x$ il faut et il suffit que $p_*\pi_1(E, e) = [\omega]p_*\pi_1 E[\omega]^{-1}$ pour tout $[\omega] \in \pi_1(X, x)$ □

Proposition 92
Si $p : E \to X$ est galoisien, alors $X \simeq E/\mathrm{Aut}(p)$

Preuve
Puisque pour tout automorphisme $f \in \mathrm{Aut}(p)$, $p(f(e)) = p(e)$, la propriete universelle du quotient nous donne $\overline{p} : E/\mathrm{Aut}(p) \to X$. Pour montrer que c'est un homeo, on construit $\overline{q} : X \to E/\mathrm{Aut}(p)$ induite par $q : E \to E/\mathrm{Aut}(p)$.
Pour $x \in X$, on pose $\overline{q}(x) = q(e)$ pour $e \in F_x$, bien defini car p est galoisien et donc $\mathrm{Aut}(p)$ agit transitivement.
De plus $\overline{q}$ est continue : Soit $U \subset E/\mathrm{Aut}(p)$ ouvert, on a $(\overline{q})^{-1}(U) =$

$p(q^{-1}(U))$ ouvert car p est ouvert. $\square$

Proposition 93

Si G agit totalement discontinument sur E, alors $p : E \to {}^{E}\!/_{G}$ est galoisien et $\mathrm{Aut}(p) \simeq G$

Preuve

Comme l'action est toalement discontinue, $G \to \mathrm{Aut}(p)$ est injective, il reste a voir qu'elle est surjective.
Soit $f \in \mathrm{Aut}(p), e \in F_x$ et $f(e) = e' \in eG$, il existe $g \in G$ tel que $eg = e'$.
On a $f : E \to E$ et $().g : E \to E$ qui relevent $\mathrm{Id}_{E/G}$ et coincident sur e.
Par tout ou rien, $f = ().g$ $\square$

Lemme 94

Pour tout revetement p, $\mathrm{Aut}(p) \leftrightarrow$ $\{$ *Bijections $\pi_1(X, x_0)$ equivariantes de F_{x_0}* $\}$

Si p est galoisien, ceci permet d'identifier la structure de groupe de $\mathrm{Aut}(p) \simeq {}^{\pi_1(X, x_0)}\!/_{p_*(\pi_1(E, e_0))}$

Corollaire 95

Si G agit totalement discontinument sur E, alors $\pi_1({}^{E}\!/_{G}) = G$