25.1. Confiné en Suisse centrale, Urs Dilängerschimeh s'est mis en tête de construire le cor des Alpes le plus long du monde.

Il assemble donc une succession de cylindres de troncs évidés de diamètres plus en plus petits, chacun mesurant 1 m de longueur. En commençant par le pavillon du cor, un cylindre de 1 m de diamètre, il emboîte le suivant : 1/2 m de diamètre, puis 1/3, 1/4, 1/5, ... le cor est infiniment long.

Il s'agit à présent de le peindre en rouge, et votre mission est d'évaluer la quantité de peinture nécessaire. L'aire latérale d'un cylindre est le produit de la longueur par le périmètre.

(i) Même si Urs renonce à peindre les jointures entre cylindres et ne peint donc que ces aires latérales, combien de m^2 peinture lui faudra-t-il ?

(ii) Imaginons qu'on remplisse tout le cor de peinture. Même avec le volume maximal (les parois les plus fines possibles), on aurait dans chaque cylindre de rayon r un volume qui est le produit de la longueur par l'aire transverse πr^2. Combien de m^3 peinture faudra-t-il ?

(iii) Méditez sur l'apparente contradiction entre vos deux réponses, en arguant qu'on pourrait peindre une surface en la « remplissant ».

<u>Indications.</u> Tout cet exercice se résout sans intégrales si l'on accepte les formules ci-dessus pour les cylindres. Au deuxième semestre, vous pourrez résoudre le même exercice pour des cors bien lisses.

25.2. $(*)$ Soit $g \geq 0$ une fonction continue sur $[a, b]$ avec $\int_a^b g = 0$. Montrer que $f = 0$.
Qu'en est-il si f est seulement supposée intégrable ?

25.3. $(*)$ Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ avec $g \geq 0$. Montrer qu'il existe c dans $[a, b]$ avec

$$\int_a^b (f \cdot g) = f(c) \int_a^b g.$$