

Analyse II

David Wiedemann

Table des matières

1	Intégrales généralisées	4
1.1	Intégrales absolument convergentes	5
1.2	Intégrale généralisée sur un intervalle non borné	7
2	L'espace R^n	7
2.1	Espace vectoriel norme	7
2.2	Normes sur R^n	9
2.3	Suites sur R^n	9
2.4	Topologie de \mathbb{R}^n	10
2.5	Classification des points d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$	10
2.6	Caractérisation des ensembles ouverts	11
2.7	Caractérisation des ensembles fermés	11
2.8	Ensembles compacts	12
3	Fonctions de plusieurs variables	12
3.1	Notion de limite	12
3.2	Caractérisation de limite par suites	13
3.3	Propriétés de l'opération de limite	13
3.4	Fonctions à valeurs dans R^m	14
4	Fonctions continues	14
4.0.1	Définitions Équivalentes	14
4.1	Prolongement par continuité	14
5	Dérivées de fonctions à plusieurs variables	16
5.1	Dérivées Directionnelles	16
5.2	Fonctions Différentiables	17
5.3	Dérivées d'ordre supérieur	19
5.4	Dérivées d'ordre supérieur	22
5.5	Développement limite et formule de Taylor	23

6	Integrales qui dependent de parametres	24
6.1	Integrales sur un intervalle ferme borne	24
6.2	Integrales avec des bornes variables	26
6.3	Integrales generalisees	27
7	Fonctions Bijectives	28

List of Theorems

1	Definition (Intégrales généralisées (sur un intervalle borné non fermé))	4
2	Definition (Integrale sur un intervalle borne ouvert)	4
1	Theorème (Critere de Comparaison)	4
3	Definition (Integrale absolument convergente)	5
3	Theorème (absolument convergente implique convergente)	5
5	Theorème (Critere de comparaison (II))	6
4	Definition (Integrale sur un intervalle non borne)	7
5	Definition (Norme d'un vecteur)	7
6	Definition (Espace vectoriel norme)	7
7	Definition	7
8	Definition (Distance)	8
9	Definition (Produit Scalaire)	8
6	Theorème (Inegalite de Cauchy-Schwarz)	8
7	Theorème	8
10	Definition (Suites convergentes)	9
9	Lemme	9
11	Definition (Suites de Cauchy)	9
10	Theorème	9
11	Theorème (Bolzano-Weierstrass)	10
12	Definition (Boule)	10
13	Definition	11
14	Definition	11
15	Definition (Ensemble compact)	12
12	Theorème (Caracterisation par sous-suites convergentes)	12
13	Theorème (Caracterisation par recouvrements finis)	12
16	Definition (Chemin dans E)	12
17	Definition (Ensembles connexes par arcs)	12
18	Definition (Limite)	12
14	Theorème (Des deux gendarmes)	13
15	Theorème (Limites/Suites)	13
16	Theorème (Critere de Cauchy)	13

19	Definition (Limite)	14
20	Definition (Continuite en un point)	14
21	Definition (Continuite sur E)	14
22	Definition (continuite uniforme sur E)	14
23	Definition (Prolongement par continuite)	14
17	Theorème (Prolongement par continuite sur l'adherence)	15
18	Theorème	15
24	Definition	15
19	Theorème	16
20	Theorème	16
21	Theorème	16
25	Definition (Derivees directionnelle)	16
26	Definition (Gradient)	17
27	Definition (Matrice Jacobienne)	17
28	Definition (Differentiability)	17
22	Theorème	17
23	Theorème (Theoreme des accroissements finis dans \mathbb{R}^n)	19
24	Theorème (Taf dans le cas vectoriel)	19
29	Definition (Derivees partielles secondes (cas scalaire))	19
30	Definition (Matrice hessienne)	20
31	Definition (Espace $C^2(E)$)	20
32	Definition (Derivees directionnelles secondes)	20
25	Lemme	20
26	Theorème (Theoreme de Schwarz)	21
27	Corollaire	23
29	Theorème	25
31	Theorème	25
32	Theorème	27
33	Definition	27
33	Theorème	27
34	Definition (Homeomorphisme)	28
35	Definition (Diffeomorphisme)	29
36	Definition (Diffeomorphisme local)	29
35	Theorème	29
36	Theorème (Condition necessaire d'inversion locale)	29
37	Theorème	30
37	Definition (Norme spectrale)	30
38	Definition (Norme de frobenius)	30
38	Lemme	30
39	Theorème (Condition suffisante d'inversion locale)	31

1 Intégrales généralisées

Peut-on définir une intégrale sur un intervalle ouvert plutôt que sur un intervalle fermé? ie.

$$f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R} \text{ c.p.m.}$$

Definition 1 (Intégrales généralisées (sur un intervalle borné non fermé)

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux ($a < b$).

En particulier, f est c.p.m. sur tout intervalle $[a, x]$, $a < x < b$ Soit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ existe (ou converge) si $\lim_{x \rightarrow b} F(x)$ existe, dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b} F(x) - F(a)$$

Si $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ n'existe pas, alors on dit que

$$\int_a^b f(t)dt$$

diverge. Definition analogue pour le cas $]a, b]$.

On souhaite définir $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)dx = 0$.

Dans certains cas cette intégrale vaut 0. Mais si on calcule

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{\pi}{2} + \epsilon^2}^{\frac{\pi}{2} - \epsilon} \tan(t)dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (-\ln(\cos(\frac{\pi}{2} - \epsilon)) + \ln(\cos(-\frac{\pi}{2} + \epsilon^2))) = -\infty$$

Il faut donc une définition qui est cohérente.

Definition 2 (Intégrale sur un intervalle borne ouvert)

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m et $c \in]a, b[$.

Si les intégrales généralisées $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ existent, alors on définit l'intégrale

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Si une des deux intégrales diverge, alors le tout diverge.

Lecture 2: Integrales Generalisees

Theorème 1 (Critere de Comparaison)

Soit $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m. et supposons $\exists c \in [a, b[$ tel que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in [c, b[$$

Si $\int_a^b g(x)dx$ existe alors $\int_a^b f(x)dx$ existe aussi
 Si $\int_a^b f(x)dx$ diverge alors $\int_a^b g(x)dx$ diverge aussi.

Preuve

Si $\int_a^b g(x)dx$ existe, alors $\int_c^b g(x)dx$ existe.

Donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t)dt \\ &= \lim_{x \rightarrow b-} \left(\int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt \right) \\ &= \int_a^c f(t)dt + \lim_{x \rightarrow b-} \int_c^x f(t)dt \\ &\leq \int_a^c f(t)dt + \lim_{x \rightarrow b-} \int_c^x g(t)dt < +\infty\end{aligned}$$

En notant $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, F est non décroissante, et bornée supérieurement sur l'intervalle $[a, b[\Rightarrow \lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ existe. \square

Exemple

$f(x) = \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|$ sur $]0, 1]$, on a

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

1 est intégrable, et donc l'intégrale de $f(x)$ existe.

1.1 Intégrales absolument convergentes

Définition 3 (Intégrale absolument convergente)

Soit I un intervalle du type $[a, b[,]a, b]$ ou $]a, b[$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m.

On dit que l'intégrale généralisée de f sur I est absolument convergente si

$$\int_I |f(x)|dx$$

existe.

Théorème 3 (absolument convergente implique convergente)

Si l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument, alors il converge.

Preuve

Notons $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ et $f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}$ et on a $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$.

Donc

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)| \text{ et } 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)| \forall x \in I$$

Par critère de comparaison, si

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ existe} \Rightarrow \text{alors } \int_a^b f_+(x)dx, \int_a^b f_-(x) \text{ existent}$$

et donc $\int_a^b f(x)dx$

□

Remarque

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m Si f est bornée sur I , alors

$$\int_I f(x)dx$$

existe.

Theorème 5 (Critere de comparaison (II))

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m.

S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1[$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \in \mathbb{R}$$

Alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

existe.

S'il existe $\alpha \geq 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \neq 0$$

alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

diverge.

Preuve

Par definition de la limite $\forall \epsilon > 0, \exists b-a > \delta_\epsilon > 0$ tel que

$$|f(x)(b-x)^\alpha - l| < \epsilon \forall x$$

$$\Rightarrow l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha \leq l + \epsilon$$

et donc

$$0 \leq |f(x)| \leq \frac{|l| + \epsilon}{(b-x)^\alpha}$$

Puisque le terme de droite est integrable, on conclut par le critere de comparaison. Pour la deuxieme partie, soit $\alpha \geq 1$ et $l \neq 0$.

Supposons $l > 0$, on a

$$l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha$$

Le meme raisonnement que ci-dessus donne que l'integrale de f diverge. □

1.2 Integrale generalisee sur un intervalle non borne

Definition 4 (Integrale sur un intervalle non borne)

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m.

On dit que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ existe si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(x)dx$$

existe et dans ce cas, on note

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

idem si $f :]-\infty, a[\rightarrow \mathbb{R}$. Soit $f :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m. on dit que $\int_a^\infty f(x)dx$ existe s'il existe $c \in]a, \infty[$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f(t)dt \text{ et } \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_c^y f(t)dt$$

existent.

Lecture 3: L'espace R^n

Mon 01 Mar

2 L'espace R^n

2.1 Espace vectoriel norme

Soit un ensemble V sur lequel on definit deux operations

1. somme : $+: V \times V \rightarrow V$
2. multiplication par un scalaire $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$

On definit R^n par $R^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots \times \mathbb{R}$

Definition 5 (Norme d'un vecteur)

C'est une application $N : V \rightarrow \mathbb{R}$, c'est une application qui satisfait

- $\forall x \in V : N(x) \geq 0$ et $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V : N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$
- $\forall x, y \in V, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

On utilise souvent la notation $N(x) = \|x\|$

Definition 6 (Espace vectoriel norme)

Un espace vectoriel norme est note $(V, \|\cdot\|)$

Definition 7

Soit V un espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur V .

On dit que N_1 et N_2 sont equivalentes si $\exists c_1, c_2 > 0$ tel que

$$c_1 N_2(x) \leq N_1(x) \leq c_2 N_2(x) \forall x \in V$$

Definition 8 (Distance)

Soit X un ensemble.

Une distance est une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés suivantes

- $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y$
- La distance est symétrique
- $\forall x, y, z \in V, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Un espace X muni d'une distance est appelé un espace métrique et est noté (X, d) .

On peut toujours définir une distance sur un espace vectoriel normé, défini par

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

On appelle cette distance, la distance induite par la norme.

Tout espace vectoriel normé est aussi un espace métrique.

Definition 9 (Produit Scalaire)

Soit V un espace vectoriel.

Un produit scalaire est une application $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes

- $\forall x, y \in V, b(x, y) = b(y, x)$
- $\forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x, z) + \beta b(y, z)$
- $\forall x \in V, b(x, x) \geq 0, b(x, x) = 0 \iff x = 0$

Theorème 6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit V un espace vectoriel et $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un produit scalaire. Alors

$$\forall x, y \in V, |b(x, y)| \leq \sqrt{b(x, x)b(y, y)}$$

Preuve

$\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.

$$0 \leq b(\alpha x + y, \alpha x + y) = \alpha^2 b(x, x) + 2\alpha b(x, y) + b(y, y)$$

Donc on a

$$\Delta = b(x, y)^2 - b(x, x)b(y, y)$$

□

Theorème 7

Soit $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un produit scalaire, alors l'application $x \rightarrow \sqrt{b(x, x)} = \|x\|_b$ est une norme sur V .

Donc, si V est muni d'un produit scalaire, alors V est un espace normé et donc V est un espace métrique pour la distance induite par le produit scalaire.

2.2 Normes sur \mathbb{R}^n

- La norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- Norme "max" $\|x\|_\infty = \max |x_i|$
- Norme 1 : $\|x\|_1 = \sum |x_i|$
- Normes $p \in [1, +\infty[$ $\|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

Pour p infinie, on retrouve la norme infinie

On montre en exercices que toutes les normes p sont équivalentes.

De même, on montre que toutes les normes sur \mathbb{R}^n sont équivalentes. Par contre, seulement la norme 2 est déduite d'un produit scalaire.

Definition 10 (Suites convergentes)

Soit $\{x^{(k)}\}_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que cette suite converge s'il existe $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^{(k)} - x\| = 0$$

Lecture 4: Boules sur \mathbb{R}^n

Wed 03 Mar

2.3 Suites sur \mathbb{R}^n

Remarque

Supposons que $\{x^{(k)}\} \rightarrow \vec{x}$ par rapport à la norme euclidienne. Et soit $\|\cdot\|$ une autre norme sur \mathbb{R}^n . Puisque toutes les normes sont équivalentes sur \mathbb{R}^n $\|\vec{x}\| \leq c \|\vec{x}\|_2$ Donc toutes les suites convergent peu importe la norme.

En particulier, on peut choisir la norme infinie.

Lemme 9

Une suite $\{x^{(k)}\}$ converge si et seulement si toutes les composantes convergent.

Definition 11 (Suites de Cauchy)

On dit qu'une suite $\{x^{(k)}\}$ est de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \exists N > 0 : \forall k, l \geq N \quad \|x^{(k)} - x^{(l)}\| \leq \epsilon$$

Theorème 10

Une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Preuve

Si la suite $x^{(k)}$ converge $\iff \{x_i^{(k)}\}$ converge pour tout $i = 1, \dots, n$ donc toutes ces suites sont de Cauchy et donc $x^{(k)}$ converge. \square

Theorème 11 (Bolzano-Weierstrass)

Soit $\{x^{(k)}\}$ une suite bornée.

Alors il existe une sous-suite $\{x^{(k_j)}\}$ qui converge

Preuve

Si $\{x^{(k)}\}$ est bornée, en particulier chaque suite $x^{(k)_i}$ sera bornée.

En $i = 1$, la suite $x^{(k)}$ est bornée, donc il existe une sous-suite convergente vers une valeur x_1 .

On considère les index de cette sous-suite et on réapplique l'argument ci-dessus en $i = 2$, etc. \square

2.4 Topologie de \mathbb{R}^n **Definition 12 (Boule)**

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, la boule ouverte centrée en x et de rayon δ

$$B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \delta\}$$

La boule fermée

$$\overline{B}(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \delta\}$$

La sphere centrée en x et de rayon δ

$$S(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| = \delta\}$$

2.5 Classification des points d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$

Le complémentaire de E est

$$E^c = \{y \in \mathbb{R}^n, y \notin E\}$$

On dit que x est un point intérieur de E si $\exists \delta : B(x, \delta) \subset E$, on dit que x est un point frontière de E si $\forall \delta B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$ et $B(x, \delta) \cap E^c \neq \emptyset$. On dit que E° est l'ensemble des points intérieurs de E , E° est appelé l'intérieur de E .

On note ∂E l'ensemble des points frontières, appelé la frontière ou le bord de E .

On dit que x est un point adhérent de E si $\forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$. On note \bar{E} l'ensemble des points adhérents de E , appelé l'adhérence de E .

On a $\bar{E} = E \cup \partial E$

On dit que x est un point isolé si

$$\exists \delta > 0 B(x, \delta) \cap E = \{x\}$$

On dit que x est un point d'accumulation de E , si $\forall \delta > 0$

$$B(x, \delta) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Donc, en particulier, si on prend $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$

$$\exists x^{(k)} \in E, \text{ tel que } \|x^{(k)} - x\| \leq \frac{1}{k}$$

La suite $x^{(k)}$ converge vers x .

Definition 13

Soit E un ensemble de \mathbb{R}^n , on dit que E est ouvert si tous ses points sont intérieurs

Definition 14

E est fermé si E^c est ouvert.

Lecture 5: Ensembles compacts/connexes par arcs

Mon 08 Mar

2.6 Caractérisation des ensembles ouverts

- $\overset{\circ}{E}$ est toujours ouvert.
- E est ouvert si et seulement si $E = \overset{\circ}{E}$
- L'union (même infinie) d'ensembles ouverts est ouverte.
Soit $E = \bigcup_{\alpha \in A} K_{\alpha}$ et K_{α} sont ouverts.
Alors $\forall x \in E, x \in K_{\alpha}$ et donc il existe une boule ouverte centrée en x et contenue dans K_{α} .
- L'intersection finie d'ensembles ouverts est ouverte.
Soit $E = \bigcap K_i$, alors $\forall x \in E, x \in K_i \forall i$, mais chaque K_i est ouvert, donc en prenant $\delta = \min \{\delta_1, \dots\}$, $B(x, \delta) \in E$ et donc E est ouvert.

2.7 Caractérisation des ensembles fermes

- $\mathbb{R}^n \setminus \overline{E} = \overset{\circ}{E^c}, \overline{E^c} = \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{E}$
- \overline{E} est toujours fermé.
- L'intersection (même infinie) d'ensembles fermes est fermée.
- L'union finie d'ensembles fermes est fermée.
- E est fermé si et seulement si toute suite $\{x^{(k)}\}$ convergente, converge vers un élément $x \in E$.

Preuve

Soit E fermé et $\{x^{(k)}\}$ une suite convergente vers $x \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0 \exists N_{\epsilon} : \forall k > N_{\epsilon}, \|x - x^{(k)}\| \leq \epsilon$.

Donc $\forall \epsilon B(x, \epsilon) \cap E \neq \emptyset$, donc $x \in \overline{E} = E$.

Supposons que E n'est pas fermé, donc E^c n'est pas ouvert. Donc $\exists x \in E^c : \forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$.

Si on prend $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \exists x^{(k)} \in B(x, \delta) \cap E$ et $\{x^{(k)}\}$ converge vers x , donc $x \in E \nmid$ □

2.8 Ensembles compacts

Definition 15 (Ensemble compact)

On dit que E est compact si E est à la fois fermé et borné.

Theorème 12 (Caractérisation par sous-suites convergentes)

Un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute suite $\{x^{(k)}\} \subset E$ on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément $x \in E$

Theorème 13 (Caractérisation par recouvrements finis)

Un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute famille $\{K_\alpha, \alpha \in A\}$ d'ouverts tel que $E \subset K_\alpha$, on peut extraire une sous-famille finie qui est encore un recouvrement de E .

Definition 16 (Chemin dans E)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. On appelle chemin de E une application $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$, $\gamma(t) = (\gamma_1, \dots)$, tel que γ_i est continu pour tout i .

Definition 17 (Ensembles connexes par arcs)

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est connexe par arcs si $\forall x, y \in E$, il existe un chemin γ tel que $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

3 Fonctions de plusieurs variables

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. On appelle fonction sur E à valeurs réelles une application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall x \in E, x \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

On note $D(f)$ le domaine de f , $\text{Im } f$ l'image, $g(f)$ le graphe.

3.1 Notion de limite

Definition 18 (Limite)

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E . On dit que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta$$

Alors

$$\|f(x) - l\| < \epsilon$$

Theorème 14 (Des deux gendarmes)

Soit $f, g, h : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E .

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$ et $\exists \alpha > 0$

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad 0 < \|x - x_0\| \leq \alpha$$

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe et est égale à l .

Lecture 6: Fonctions continues

Wed 10 Mar

3.2 Caractérisation de limite par suites**Theorème 15 (Limites/Suites)**

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E .

La limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ si et seulement si pour toute suite $\{x^{(k)}\} \subset E$ qui converge vers x_0 , on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^{(k)}) = l$.

Preuve

Soit $\{x^{(k)} : \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = x_0\}$, on sait que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in E, \|x - x_0\| < \delta, |f(x) - l| < \epsilon$$

il existe N tq $\forall k > n$ tq $\|x^{(k)} - x_0\| < \delta$

Si la limite $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^{(k)}) = l$ pour toute suite $x^{(k)}$.

Par l'absurde, supposons que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas.

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E, x \neq x_0 : \|x - x_0\| < \delta$$

et

$$|f(x) - l| \geq \epsilon \quad \square$$

Si on prend $\delta = \frac{1}{k}$, alors $\exists x^{(k)} \neq x_0 : \|x^{(k)} - x_0\| < \frac{1}{k}$ tel que $|f(x^{(k)}) - l| \geq \epsilon$.

Or cette suite $x^{(k)}$ converge vers x_0 , \nexists

3.3 Propriétés de l'opération de limite

Soit $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$, alors l'opération de limite est linéaire, respecte les règles de multiplication.

Theorème 16 (Critère de Cauchy)

Idem qu'en analyse I.

3.4 Fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^m

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definition 19 (Limite)

On dit que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \vec{l} \in \mathbb{R}^m$ existe si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E \setminus \{x_0\}, 0 < \|x - x_0\| < \delta$$

on a

$$\|f(x) - l\| < \epsilon$$

De plus, chaque composante de f converge vers la composante correspondante de la limite.

4 Fonctions continues

Definition 20 (Continuité en un point)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, et $x_0 \in E$.

Si x_0 est un point d'accumulation de E , on dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Si x_0 est un point isolé, on admet que f est continue en x_0 .

4.0.1 Définitions Équivalentes

- $\forall \epsilon > 0, \exists \delta : \forall x \in E, \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$
- pour toute suite $x^{(k)} \subset E$ qui converge vers x_0 on a que $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^{(k)}) = f(x_0)$

Definition 21 (Continuité sur E)

On dit que $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue sur E si elle est continue en tout point $x \in E$.

Dans ce cas, on note $f \in C^0(E)$

Definition 22 (continuité uniforme sur E)

On dit que f est uniformément continue sur E si $\forall \epsilon, \exists \delta$ tel que $\forall x \in E, \forall y \in E, \|y - x\| < \delta$, on a $\|f(y) - f(x)\| < \epsilon$

Evidemment, la continuité uniforme implique la continuité.

Lecture 7: Prolongement par continuité

Mon 15 Mar

4.1 Prolongement par continuité

Definition 23 (Prolongement par continuité)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue, avec $E \neq \overline{E}$, soit $x_0 \in \overline{E} \setminus E$. Une fonction $\tilde{f} : E \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est appelée un prolongement si \tilde{f} est continue en x_0 et

coincide avec f sur E .

Le prolongement par continuité est uniquement défini par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in E$ et $\tilde{f}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ si la limite existe.

Theorème 17 (Prolongement par continuité sur l'adhérence)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue sur E . Supposons que $\forall x \in \overline{E} \setminus E$ la limite $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$ existe. Alors on peut définir un prolongement $\tilde{f} : \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\tilde{f}(x) = f(x) \forall x \in E$ et $\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$ sinon, de plus \tilde{f} est continue sur \overline{E} .

Preuve

Si $x \in E$, $f(x)$ est continue en x donc $\tilde{f}(x) = f(x)$ est continue en x . On a

$$\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in E} f(y) = \lim_{y \rightarrow x, y \in E} \tilde{f}(y)$$

Pour montrer que \tilde{f} est continue en x , il faut montrer que $\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in \overline{E}} \tilde{f}(y)$

Il faut montrer que pour toute suite $x^{(k)} \subset \overline{E}$ convergeant en $x \in \overline{E} \setminus E$ on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x^{(k)}) = \tilde{f}(x)$$

On construit une deuxième suite $y^{(k)}$ convergent vers x .

Si $x^{(k)} \in E$, alors $y^{(k)} = x^{(k)}$.

Si $x^{(k)} \in \overline{E} \setminus E$ on peut toujours trouver une valeur $y^{(k)} \in E$ tel que $\|y^{(k)} - x^{(k)}\| \leq 2^{-k}$, $\|f(y^{(k)}) - \tilde{f}(x^{(k)})\| \leq 2^{-k}$.

On aura donc

$$\|y^{(k)} - x\| \leq \|y^{(k)} - x^{(k)}\| + \|x^{(k)} - x\|$$

Ainsi $y^{(k)} \subset E$ converge vers x , et ainsi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\tilde{f}(x^{(k)}) - \tilde{f}(y^{(k)})) + \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(y^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(y^{(k)}) \quad \square$$

Theorème 18

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ uniformément continue. Alors f peut être prolongée par continuité sur \overline{E} et le prolongement $\tilde{f} : \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est uniformément continu.

Définition 24

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ Si $\sup f = \infty$ on dit que f n'est pas bornée supérieurement.

Si $M < \infty$ on appelle M la borne supérieure de f .

S'il existe $x_M \in E$, $f(x_M) = M$ alors on dit que M est le maximum de f sur E et x_M est un point maximum de f . Meme définition pour borne inférieure.

Theorème 19

Soit E non vide et compact, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint son maximum et son minimum sur E .

Preuve

Par l'absurde f n'est pas bornée, il existe $x^{(k)}$ tel que $|f(x^{(k)})| > k$
 Mais E est compact, donc il existe une sous-suite $x^{(k_i)}$ qui converge, or f est continue, donc

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} f(x^{(k_i)}) = f(x) < \infty \nmid$$

Supposons que f n'atteint pas ses bornes

Il existe $x^{(k)}$ qui converge vers le sup, or E est fermé. □

Theorème 20

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, compact, connexe par arcs, et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint toutes les valeurs entre son minimum et maximum.

Preuve

f est continue sur un compact donc f atteint son min et son max.
 Puisque E est connexe, il existe γ un chemin du minimum au maximum.
 On conclut par TVI sur la fonction $f \circ \gamma$ □

Theorème 21

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et compact avec $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue. Alors f est uniformément continue sur E .

Lecture 8: Derivee partielles et directionnelle

Wed 17 Mar

5 Derivees de fonctions a plusieurs variables**5.1 Derivees Directionnelles****Definition 25 (Derivees directionnelle)**

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{E}$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur arbitraire.
 On dit que f est derivable dans la direction \vec{v} , au point x_0 , si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

existe et on note $D_v f(x_0)$.

Si on prend $\|\vec{v}\|$ (norme euclidienne), alors on appelle $D_v f(x_0)$ la derivee directionnelle de f dans la direction \vec{v} au point x_0 .

en particulier, on peut prendre $\vec{v} = e_i$, dans ce cas on utilise la notation

$$D_{e_i} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$$

et on appelle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ la i -eme derivee partielle de f au point x_0 .

Definition 26 (Gradient)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \overset{\circ}{E}$.

Si toutes les derivees partielles de f en x_0 existent, alors on appelle le vecteur gradient

$$\nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^n, \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Definition 27 (Matrice Jacobienne)

On appelle matrice Jacobienne $Df(x_0) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

5.2 Fonctions Differentiables

Definition 28 (Differentiabilite)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overset{\circ}{E}$. On dit que f est differentiable (ou derivable) en x_0 si il existe une application lineaire $L_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + L_{x_0}(x - x_0) + g(x) \forall x \in E$$

et $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\|x - x_0\|} = 0$.

Theoreme 22

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differentiable en $x_0 \in \overset{\circ}{E}$, alors

- Toutes les derivees partielles de f en x_0 existent.
- On a

$$L_{x_0}(x - x_0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{0i}) = Df(x_0)(x - x_0)$$

- Toutes les derivees directionnelles existent et

$$D_v f(x_0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)v_i = \nabla f(x_0)^T \vec{v} = Df(x_0) \vec{v}$$

- f est continue en x_0 .

Preuve

- On a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + L_{x_0}(x_0 + te_i - x_0) + g(x_0 + te_i)}{t} \\
&= L_{x_0}(e_i) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + te_i)}{t} \\
&= L_{x_0}a_i
\end{aligned}$$

— On a

$$f(x) = f(x_0) + L_{x_0}(x - x_0) + g(x)$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} L_{x_0}(x - x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0)$$

—

$$\begin{aligned}
D_v f(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Df(x_0)tv + g(x_0 + tv)}{t} \\
&= Df(x_0) \vec{v}
\end{aligned}$$

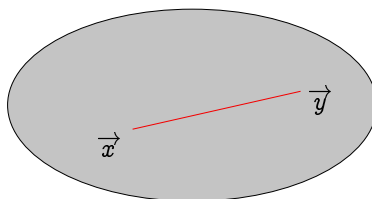
□

Lecture 9: Derivees secondes

Wed 24 Mar

Cas scalaire :

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $x, y \in E$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ derivable sur E .



On denote par $[x, y]$ le segment (ferme) entre x et y et $]x, y[$ le segment ouvert entre x et y .

Theorème 23 (Theoreme des accroissements finis dans \mathbb{R}^n)

Soit $x, y \in E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, alors il existe $z \in [x, y]$ tel que

$$f(y) - f(x) = \nabla f(z)^T(y - x) = Df(z)(y - x)$$

Preuve

Soit $g(t) = f(x + t(y - x))$ pour $t \in [0, 1]$.

On a alors

$$g'(t) = \frac{d}{dt}g(t) = \frac{d}{dt}f(\phi(t))$$

ou $\phi(t) = x + t(y - x)$.

Puisque f et ϕ sont derivables, on conclut que g est aussi derivable.

Donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= Df(\phi(t)) \cdot D\phi(t) \\ &= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t(y - x))(y_i - x_i) \\ &= \nabla f(x + t(y - x))^T(y - x) = Df(x + t(y - x))(y - x) \end{aligned}$$

Le taf applique a g donne $\exists s \in]0, 1[$ tel que

$$g(1) - g(0) = g'(s)$$

Donc

$$f(y) - f(x) = Df(x + s(y - x))(y - x)$$

□

On conclut en posant $z = x + s(y - x)$.

Le cas vectoriel :

Theorème 24 (Taf dans le cas vectoriel)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

On essaie de représenter $f(y) - f(x)$ à l'aide des dérivées de f .

On peut écrire TAF pour chaque composante, mais les z_k ne sont en général pas les mêmes.

Cependant, on peut toujours écrire pour $f \in C^1(E)$

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 Df(x + s(y - x))(y - x) ds$$

5.3 Dérivées d'ordre supérieur**Définition 29 (Dérivées partielles secondes (cas scalaire))**

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, E ouvert.

Supposons que pour un indice $i = \{1, \dots, n\}$ fixe, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existe $\forall x \in E$.

Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admet la dérivée partielle selon x_j , alors on dit que f a une dérivée partielle seconde en x et on note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x)$$

Definition 30 (Matrice hessienne)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que toutes les dérivées partielles existent que toutes les dérivées secondes existent

$$H_f(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(y) & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)(y) & \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(y) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)(y) & \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(y) & \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)(y) & \dots \end{pmatrix}$$

Definition 31 (Espace $C^2(E)$)

On dit que $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 si toutes les dérivées partielles secondes sont continues.

Definition 32 (Dérivées directionnelles secondes)

Soit $v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$. Alors, étant donné $D_v f : E \rightarrow \mathbb{R}$, on peut essayer de calculer la dérivée directionnelle de $D_v f$ dans la direction $w \in \mathbb{R}^n$.

Si une telle dérivée existe, on dit que f admet une dérivée directionnelle seconde dans les directions v et w au point x et on note

$$D_{wv} f(x) = D_w(D_v f)(x)$$

Lemme 25

Soit $f \in C^2(E)$, E ouvert et $v, w \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\| = \|w\| = 1$.

Alors $D_{wv} f$ existe en tout $x \in E$ et

$$\begin{aligned} D_{wv} f(x) &= w^T H_f(x) v \\ &= \sum_{i=1}^n w_i \left(\sum_{j=1}^n H_f(x)_{ij} v_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) w_i v_j \end{aligned}$$

Preuve

Si $f \in C^2$ alors $f \in C^1$, alors $D_v f(x) = \nabla f(x)^T v = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i$.

Mais puisque $f \in C^2$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^1 \forall i$, donc

$$\begin{aligned} D_w(D_v f)(x) &= \nabla(D_v f)^T w = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (D_v f) w_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right) v_j w_i \end{aligned}$$

□

Ce qui donne le resultat desire.

Theorème 26 (Theoreme de Schwarz)

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ fixes.

Supposons que $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent sur E et sont continues en $x \in E$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

Lecture 10: Derivees d'ordre superieur

Mon 29 Mar

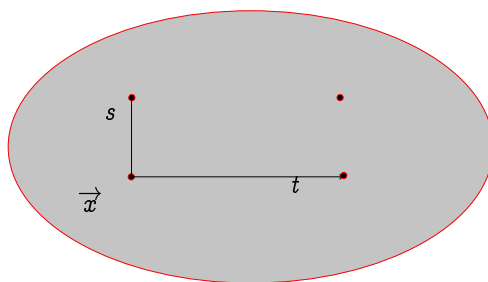


FIGURE 1 – thmschwarz

Preuve

Soit $s, t > 0$ suffisamment petit tel que

$$x + se_i, x + te_j, x + se_i + te_j \in E$$

Posons

$$\begin{aligned} \Delta(s, t) &= f(x + se_i + te_j) - f(x + se_i) - f(x + te_j) + f(x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + se_i)t - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)t \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j} st \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(x + te_j)s - \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)s \end{aligned}$$

Plus formellement, on peut ecrire

$$\Delta(s, t) = (f(x + se_i + te_j) - f(x + se_i)) - (f(x + te_j) - f(x))$$

On definit

$$g(\xi) = f(x + \xi e_i + t e_j) - f(x + \xi e_i)$$

et donc

$$\Delta(s, t) = g(s) - g(0)$$

et g est derivable car f est derivable

$$g'(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \xi e_i + t e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \xi e_i)$$

par le TAF, on a

$$\begin{aligned} g(s) - g(0) &= g'(\tilde{s})s \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \tilde{s} e_i + t e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \tilde{s} e_i) \right) s \end{aligned}$$

On definit maintenant

$$\phi(y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \tilde{s} e_i + y e_j)$$

Alors on a

$$\Delta(s, t) = (\phi(t) - \phi(0))s$$

A nouveau, ϕ est derivable, et donc on a

$$\begin{aligned} \Delta(s, t) &= \phi'(\tilde{t})ts \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}(x + \tilde{s} e_i + \tilde{t} e_j)ts \end{aligned}$$

Si on prend $t = s$, on a

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \Delta(s, s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x + \tilde{s} + \tilde{t} e_j) s^2 \right)$$

On peut appliquer exactement le meme raisonnement dans l'autre sens, et on obtient le resultat desire. \square

5.4 Derivees d'ordre superieur

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et on fixe $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$. On definit la derivee partielle par rapport aux variables x_{i_1}, \dots, x_{i_p} , on note alors

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \left(\dots \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \right) \right) (x)$$

Corollaire 27

Soit i_1, \dots, i_p fixe et σ une permutation des nombres $\{1, \dots, p\}$.
 Si $\frac{\partial^p}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}}$ et $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_{\sigma(p)}} \dots \partial x_{i_{\sigma(1)}}}$ existent et sont continues en x pour toute permutation alors ils sont égaux

5.5 Developpement limite et formule de Taylor

On veut generaliser la definition pour la dimension 1, on veut un polynome de degre p dans les variables (x_1, \dots, x_n) , en utilisant la notation multi-entiers, on note

$$p(x) = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n), |\alpha| \leq 2} c_\alpha x^\alpha$$

De maniere generale, on peut donc ecrire

$$q(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq p} c_\alpha x^\alpha$$

Le developpement limite d'ordre p d'une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ autour d'un point $x \in \overset{\circ}{E}$, aura donc la forme

$$f(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq p} c_\alpha (y - x)^\alpha + R_p(y)$$

Ou R_p satisfait

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{R_p(y)}{\|y - x\|^p} = 0$$

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{p+1}(E)$, E un ouvert non vide et soient $x, y \in E$ tel que $[x, y] \in E$, soit $g(t) = f(x + t(y - x))$, pour $t \in [0, 1]$, on voit que $g \in C^{p+1}([0, 1])$. On peut donc ecrire

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \dots + \frac{g^{(p)}(0)}{p!} t^p + R_p(y)$$

On a donc

$$g'(t) = \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x_t) \frac{d(x_t)_{i_1}}{dt} = \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x_t) (y_{i_1} - x_{i_1}) = \sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} (y - x)^\alpha$$

De meme, on trouve

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} f(x_t) \right) \\ &= \sum_{|\alpha|=2} \frac{2!}{\alpha!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha} (x_t) (y - x)^\alpha \end{aligned}$$

La formule de Taylor s'écrit donc

$$\begin{aligned} f(y) &= g(1) = \sum_{k=0}^p \frac{g^k(0)}{k!} t + R_p(y) \\ &= \sum_{k=0}^p \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{k!} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(x)(y-x)^\alpha + R_p(1) \end{aligned}$$

La formule de Lagrange donne

$$R_p(1) = \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x + \theta(y-x))(y-x)^\alpha$$

Lecture 11: Integrales qui dependent de parametres

Wed 31 Mar

6 Integrales qui dependent de parametres

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$, soit $f : I \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in I$ et $x = (x_1, \dots)$ tel que $\forall x \in E \int_I f(t, \vec{x}) dt$ existe.

On peut définir la fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\vec{x} \rightarrow g(x) = \int_I f(t, \vec{x}) dt$$

— Si f est continue sur $I \times E$ est-ce que g est continue? Autrement dit, pour $x_0 \in E$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \int_I f(t, \vec{x}) dt \stackrel{?}{=} \int_I \lim_{x \rightarrow x_0} f(t, x) dt = g(x_0)$$

— Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe sur $I \times E$ est-ce que $\frac{\partial}{\partial x_i} g$ existe sur E et

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \stackrel{?}{=} \int_I \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x) dt$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \rightarrow x^2 e^{-x^2 t}$

Soit

$$g(x) = \int_0^\infty x^2 e^{-x^2 t} dt$$

Pour $x = 0$, $f(t, 0) = 0 \forall t$, $g(0) = 0$, pour $x \neq 0$,

$$g(x) = (-e^{-x^2 t})|_{t=0}^\infty = 1$$

ainsi, g n'est pas continue.

6.1 Integrales sur un intervalle ferme borne

Soit $I = [a, b]$

Theorème 29

Soit $E \in \mathbb{R}^n$ ouvert et

$$f : [a, b] \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

continue.

Alors la fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_a^b f(t, x) dt$$

est bien définie $\forall x \in E$ et est continue sur E .

Preuve

Pour tout $x \in E$, la fonction $t \rightarrow f_x(t)$ est continue et donc intégrable.

Montrons que g est continue sur E .

Fixons $x_0 \in E$, $\exists \eta > 0$ $\overline{B}(x_0, \eta) \subset E$.

Alors la restriction de f à $A = [a, b] \times \overline{B}(x_0, \eta)$.

Donc A est compact, et donc $f|_A$ est uniformément continue.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta \in]0, \eta] : \forall (s, y), (t, x) \in A, |s - t| \leq \delta, \|y - x\| \leq \delta$$

On a

$$|f(s, y) - f(t, x)| \leq \epsilon$$

En particulier, on peut choisir $s = t, y = x_0$, alors

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= \left| \int_a^b f(t, x) - f(t, x_0) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t, x) - f(t, x_0)| dt \\ &\leq \epsilon(b - a) \end{aligned}$$

Remarque

— Le theoreme est valable aussi si l'ensemble E est ferme, il suffit de considerer $\overline{B}(x, \delta) \cap E$ et meme pour n'importe quel sous-ensemble E .

Theorème 31

Soit a, b fini, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, et $f : [a, b] \times E \rightarrow \mathbb{R}$ continue tel que, pour i fixe

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : [a, b] \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

existe et est continue.

Alors $g(x) = \int_a^b f(t, x) dt$ existe pour tout x et $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$ existe pour tout x

et

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x) dt$$

Preuve

Soit $x_0 \in E$ et $\eta > 0 : \overline{B}(x_0, \eta) \subset E$, on definit

$$A = [a, b] \times \overline{B}(x_0, \eta) \text{ un compact}$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_A$ est uniformement continue.

On a donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in]0, \eta] : \forall t \in [a, b], \forall x \in \overline{B}(x_0, \delta)$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0) \right| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$$

On veut montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + s e_i) - g(x_0)}{s}$$

existe et est egal a

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0) dt$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(x_0 + s e_i) - g(x_0)}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{s} \int_a^b f(t, x_0 + s e_i) - f(t, x_0) dt - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0) dt \right| \\ &= \left| \int_a^b \frac{1}{s} \int_0^s \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0 + \sigma e_i) d\sigma - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0) dt \right| \\ &= \left| \int_a^b \frac{1}{s} \int_0^s \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0 + \sigma e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0) \right) d\sigma dt \right| \\ &\leq \int_a^b \frac{1}{|s|} \int_0^s \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0 + \sigma e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0) \right|}_{\leq \frac{\epsilon}{b-a}} d\sigma dt \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

□

6.2 Integrales avec des bornes variables

Soit

$$g(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x) dt$$

On suppose que

$$f :]\alpha, \beta[\times E \rightarrow \mathbb{R}$$

et que

$$a, b : E \rightarrow]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$$

Theorème 32

Soit E un ouvert non vide et supposons que toutes les dérivées partielles de x_i existent et sont continues pour tout i , de plus supposons que a, b sont $C^1(E)$, alors $g \in C^1(E)$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial b}{\partial x_i}(x)f(b(x), x) - \frac{\partial a}{\partial x_i}(x)f(a(x), x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) dt$$

Sans preuve.

Idee de la demonstration : Reecrire

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{a(x)}^c f(t, x) dt + \int_c^{b(x)} f(t, x) dt \\ &= G(b(x), x) - G(a(x), x), \text{ avec } G(s, x) = \int_c^s f(t, x) dt \end{aligned}$$

On montre que $G \in C^1$, alors $g \in C^1$ et donc

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} G(b(x), x) - \frac{\partial}{\partial x_i} G(a(x), x)$$

6.3 Integrales generalisees

Cas $I = [a, b[$ En general, on a pas la continuité de $g(x)$.

Definition 33

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et $f : [a, b[\times E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On dit que $\int_a^b f(t, x) dt$ converge uniformement sur E si $\int_a^b f(t, x) dt$ existe $\forall x$ et $\forall \epsilon > 0 \exists \bar{c} \in]a, b[$ (independant de x) tel que

$$\forall c \in [\bar{c}, b[\text{ et } \forall x \in E, \left| \int_c^b f(t, x) dt \right| \leq \epsilon$$

Theorème 33

Soit $f : [a, b] \times E \rightarrow \mathbb{R}$ continue et l'intégrale $\int_a^b f(t, x) dt$ converge uniformement sur E . Alors la fonction $g(x) = \int_a^b f(t, x) dt$ existe $\forall x \in E$ et est continue sur E .

De plus si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe, et est continue sur $[a, b] \times E$, et $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) dt$ converge uniformement, alors $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ existe et est continue sur E .

L'idée de la démonstration est

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= \left| \int_a^b (f(t, x) - f(t, x_0)) dt \right| \\ &\leq \int_a^{\bar{c}} |f(t, x) - f(t, x_0)| dt + \int_{\bar{c}}^b |f(t, x) - f(t, x_0)| dt \\ &\leq \int_a^{\bar{c}} |f(t, x) - f(t, x_0)| dt + 2\epsilon \end{aligned}$$

Et on s'est ramené au cas d'un intervalle fermé.

Remarque

Si il existe $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et telle que

$$|f(t, \vec{x})| \leq h(t)$$

Alors f est uniformément intégrable.

Lecture 12: Fonctions Bijectives et difféomorphismes

Mon 12 Apr

7 Fonctions Bijectives

Soit $\vec{f} : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F \subset \mathbb{R}^n$.

Si \vec{f} est une bijection entre E et F alors $\forall \vec{y} \in F, \exists ! \vec{x} \in E : f(\vec{x}) = \vec{y}$

On peut donc définir une application inverse $\vec{g} : F \rightarrow E$ tel que $\forall \vec{y} \in F, f(g(\vec{y})) = \vec{y}$ et de manière équivalente, $\forall x \in E, g(f(x)) = x$

Pourquoi étudier les bijections ?

— Exemple 1

On souhaite résoudre le problème $f(x) = y$ pour un $y \in F$ donné. Si f est une bijection, on sait qu'il existe une solution.

— Changement de variable

Soit $f : E \rightarrow F$ bijective et $\phi : F \rightarrow \mathbb{R}$.

On peut récrire ϕ en fonction de variables $x \in E$, $\tilde{\phi} = \phi \circ f$, donc

$$x \mapsto \tilde{\phi}(x) = \phi(f(x)), \forall x \in E.$$

Vice versa étant donné $\tilde{\phi} : E \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto \tilde{\phi}(x)$.

On peut la récrire en fonction de $y \in F$.

On aura donc

$$\phi(y) = \tilde{\phi}(g(y))$$

On utilise ceci, en partie pour les coordonnées polaires.

Definition 34 (Homeomorphisme)

Soit $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non-vides. On dit que $f : E \rightarrow F$ est un homeomorphisme si elle est bijective et f et son inverse $g : F \rightarrow E$ sont continues.

Definition 35 (Diffeomorphisme)

Soit $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non-vides. On dit que $f : E \rightarrow F$ est un diffeomorphisme global si elle est bijective et f et son inverse $g : F \rightarrow E$ sont C^1 . De maniere plus generale, on dit que f est un k -diffeomorphisme si f et son inverse sont de classe C^k .

Definition 36 (Diffeomorphisme local)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide et $x_0 \in E$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . On dit que f est un diffeomorphisme local en x_0 , si il existe un ouvert $U \subset E$ contenant x_0 et un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ contenant $y_0 \in f(x_0)$ tel que $\vec{f} : U \rightarrow V$ est un diffeomorphisme.

Clairement, si f est un diffeomorphisme global, c'est en particulier un diffeomorphisme local en tout point $x \in E$, mais la reciproque n'est pas vraie en general. On a toutefois le resultat suivant

Theoreme 35

Soit $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non vides et $f : E \rightarrow F$ bijective et un diffeomorphisme local en tout point $x \in E$. Alors, f est un diffeomorphisme global.

Question

Sous quelles conditions, \vec{f} est elle un diffeomorphisme local en $x \in E$. Dans le cas $n = 1$, f est un diffeomorphisme local en $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction affine

$$\vec{f}(x) = Ax + b$$

Quand est-ce que f est inversible, ou, etant donne $y \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = y$ a une solution unique, si et seulement si $\det A \neq 0$

De maniere plus generale, vu que f est C^1 , on a

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + R_f(\vec{x})$$

Autour de x_0 , on a donc

$$f(x) \approx f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$$

et donc f est un diffeomorphisme local si et seulement si $\det(Df(x_0)) \neq 0$

Theoreme 36 (Condition necessaire d'inversion locale)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec E ouvert non vide, un diffeomorphisme

local en x_0 . Alors, $\det(Df(x_0)) \neq 0$.

Preuve

Par définition de difféomorphisme local, il existe un ouvert $U \subset E$ contenant x_0 et un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ contenant $y_0 = f(x_0)$ tel que $f : U \rightarrow V$ est une bijection et soit $g : V \rightarrow U$ la fonction inverse de classe C^1 par hypothèse.

Puisque $g(f(x)) = x \forall x \in U$, on a

$$D(g(f(x))) = Dg(f(x))Df(x) = \text{Id} \quad \square$$

Et donc $Df(x_0)$ est inversible.

Theorème 37

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ ferme et $\phi : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

- $\phi(K) \subset K$
- Il existe $\rho \in]0, 1[$ tel que $\forall x, y \in K$

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \rho \|x - y\|$$

(dans ce cas, on dit que l'application est contractante)

Alors ϕ possède un unique point fixe $\exists ! v \in K$ tel que $v = \phi(v)$

Definition 37 (Norme spectrale)

On définit

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\|$$

Definition 38 (Norme de Frobenius)

On note

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}^2}$$

Lemme 38

Soit a, b finis et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. Alors

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

Theorème 39 (Condition suffisante d'inversion locale)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $x_0 \in E$.
 Si $\det Df(x_0) \neq 0$, alors f est un difféomorphisme local en x_0 . De plus
 si $g : V \rightarrow U$ est un inverse local, avec $U \subset E$ un ouvert contenant x_0
 et V un ouvert contenant $y_0 = f(x_0)$, on a

$$Dg(f(x)) = Df(x)^{-1} \forall x \in U$$

On va utiliser le theoreme du point fixe de Banach.

Preuve

On montre l'existence d'un inverse local.

Par hypothese $x \rightarrow Df(x)$ est continue. Donc

$$\exists r_1, \det(Df(x_0)) \neq 0 \forall x \in B(x_0, r) \cap E$$

Considerons

$$x \rightarrow \text{Id} - Df(x_0)^{-1} Df(x) =: A(x)$$

On a a nouveau que $A(x)$ est continue et $A(x_0) = 0$.

Donc, il existe $r_2 > 0$ tel que $\forall x \in B(x_0, r_2) \cap E \frac{-1}{2n} \leq A_{ij}(x) \leq \frac{1}{2n}$ Donc

$$\forall x \in B(x_0, r_2) \cap E |||A(x)||| \leq \|A(x)\|_F = \sqrt{\sum_{ij} A_{ij}(x)^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j} \frac{1}{4n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Donc il existe $r \leq \min\{r_1, r_2\}$ tel que

- $B(x_0, r) \subset E$
- $\det Df(x) \neq 0 \forall x \in B(x_0, r)$
- $|||A(x)||| \leq \frac{1}{2} \forall x \in B(x_0, r)$

On veut montrer que f est localement inversible, donc $\forall y \in V \exists ! x \in U : f(x) = y$.

On a

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff 0 = y - f(x) \\ &\iff 0 = Df(x_0)^{-1}(y - f(x)) \\ &\iff x = x + Df(x_0)^{-1}(y - f(x)) \end{aligned}$$

On a

$$D\phi^y(x) = D^y(x - Df(x_0)^{-1}(f(x) - y)) = A(x)$$

On montre donc que ϕ^y est contractante, donc

$$\forall x_1, x_2 \in \overline{B}(x_0, r)$$

On veut calculer

$$\|\phi^y(x_1) - \phi^y(x_2)\| = \left\| \int_0^1 D\phi^y(x_1 + t(x_2 - x_1))(x_2 - x_1) dt \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 \|D\phi^y(\dots)(x_2 - x_1) dt\| \\
&\leq \int_0^1 \|D\phi^y(\dots)\| \|x_2 - x_1\| dt \\
&\leq \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\|
\end{aligned}$$

□

*Donc ϕ^y est contractante sur $B(x_0, r)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.
Il nous faut encore montrer que $\phi^y(\overline{B}(x_0, r)) \subset \overline{B}(x_0, r)$*