Analyse II

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Introduction Mon 22 Feb

1 Intégrales généralisées

Peut-on définir une intégrale sur un intervalle ouvert plutot que sur un intervalle fermé ? ie.

$$f : [a, b[\to \mathbb{R} \text{ c.p.m.}$$

Definition 1 (Intégrales généralisées (sur un intervalle borné non fermé))
Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *continue par morceaux (* $a < b$*).*
En particulier, f *est c.p.m. sur tout intervalle* $[a, x]$*,* $a < x < b$ *Soit* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$*.*
On dit que l'integrale generalisee $\int_a^b f(x)dx$ *existe (ou converge) si* $\lim_{x\to b} F(X)$ *existe, dans ce cas, on note*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b} F(x) - F(a)$$

Si $\lim_{x\to b-} F(x)$ *n'existe pas, alors on dit que*

$$\int_a^b f(t)dt$$

diverge. Definition analogue pour le cas $]a, b]$*.*

On souhaite definir $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} tan(x)dx = 0$.
Dans certains cas cette integrale vaut 0. Mais si on calcule

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\frac{\pi}{2}+\epsilon^2} \frac{\pi}{2} - \epsilon tan(t)dt = \lim_{\epsilon\to 0+} (-\ln(\cos(\frac{\pi}{2} - \epsilon)) + \ln(\cos(-\frac{\pi}{2} + \epsilon^2))) = -\infty$$

Il faut donc une definition qui est coherente.

Definition 2 (Integrale sur un intervalle borne ouvert)
Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m et* $c \in]a, b[$*.*
Si les integrales generalisees $\int_a^c f(t)dt$ *et* $\int_c^b f(t)dt$ *existent, alors on definit l'integrale*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Si une des deux integrales diverge, alors le tout diverge.

Lecture 2: Integrales Generalisees

Wed 24 Feb

Theorème 1 (Critere de Comparaison)
Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m. et supposons* $\exists c \in [a, b[$ *tel que*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in [c, b[$$

Si $\int_a^b g(x)dx$ *existe alors* $\int_a^b f(x)dx$ *existe aussi*
Si $\int_a^b f(x)dx$ *diverge alors* $\int_a^b g(x)dx$ *diverge aussi.*

Preuve
Si $\int_a^b g(x)dx$ *existe, alors* $\int_c^b g(x)dx$ *existe.*
Donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{x\to b-}\int_a^x f(t)dt \\ &= \lim_{x\to b-}(\int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt) \\ &= \int_a^c f(t)dt + \lim_{x\to b-}\int_c^x f(t)dt \\ &\leq \int_a^c f(t)dt + \lim_{x\to b-}\int_c^x g(t)dt < +\infty\end{aligned}$$

En notant $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *,* F *est non decroissante, et bornee superieurement sur l'intervalle* $[a, b[\Rightarrow \lim_{x\to b-} F(x)$ *existe.* $\square$

Exemple
$f(x) = \left|\sin(\frac{1}{x})\right|$ *sur* $]0, 1]$*, on a*

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

1 est integrable, et donc l'integrale de $f(x)$ *existe.*

1.1 Integrales absolument convergentes

Definition 3 (Integrale absolument convergente)
Soit I *un intervalle du type* $[a, b[,]a, b]$ *ou* $]a, b[$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *c.p.m.*
On dit que l'integrale generalisee de f *sur* I *est absolument convergente si*

$$\int_I |f(x)|dx$$

existe.

Theorème 3 (absolument convergente implique convergente)
Si l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ *converge absolument, alors il converge.*

Preuve
Notons $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ *et* $f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}$ *et on a* $|f(x)| = f_+(x) + f_-$.
Donc

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)| \text{ et } 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)| \forall x \in I$$

Par critere de comparaison, si

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ existe } \Rightarrow \text{ alors } \int_a^b f_+(x)dx, \int_a^b f_-(x) \text{ existent}$$

et donc $\int_a^b f(x)dx$ □

Remarque

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *c.p.m Si* f *est bornee sur* I*, alors*

$$\int_I f(x)dx$$

existe.

Theorème 5 (Critere de comparaison (II))

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m.*

S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1[$ *tel que*

$$\lim_{x\to b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \in \mathbb{R}$$

Alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

existe.

S'il existe $\alpha \geq 1$ *tel que*

$$\lim_{x\to b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \neq 0$$

alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

diverge.

Preuve

Par definition de la limite $\forall\epsilon > 0, \exists b - a > \delta_\epsilon > 0$ *tel que*

$$|f(x)(b-x)^\alpha - l| < \epsilon \forall x$$

$$\Rightarrow l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha \leq l + \epsilon$$

et donc

$$0 \leq |f(x)| \leq \frac{|l| + \epsilon}{(b-x)^\alpha}$$

Puisque le terme de droite est integrable, on conclut par le critere de comparaison. Pour la deuxieme partie, soit $\alpha \geq 1$ *et* $l \neq 0$*.*

Supposons $l > 0$*, on a*

$$l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha$$

Le meme raisonnement que ci-dessus donne que l'integrale de f *diverge.* □

1.2 Integrale generalisee sur un intervalle non borne

Definition 4 (Integrale sur un intervalle non borne)
Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *c.p.m.*
On dit que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *existe si*

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(x)dx$$

existe et dans ce cas, on note

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$$

idem si $f :]-\infty, a[\to \mathbb{R}$. *Soit* $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *c.p.m. on dit que* $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *existe s'il existe* $c \in]a, \infty[$ *tel que*

$$\lim_{x\to a+} \int_x^c f(t)dt \text{ et } \lim_{y\to+\infty} \int_c^y f(t)dt$$

existent.

Lecture 3: L'espace R^n

Mon 01 Mar

2 L'espace R^n

2.1 Espace vectoriel norme

Soit un ensemble V sur lequel on definit deux operations

1. somme : $+ : V \times V \to V$
2. multiplication par un scalaire $\mathbb{R} \times V \to V$

On definit R^n par $R^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ldots \times \mathbb{R}$

Definition 5 (Norme d'un vecteur)
C'est une application $N : V \to \mathbb{R}$, *c'est une application qui satisfait*
— $\forall x \in V : N(x) \geq 0$ *et* $N(x) = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.
— $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V : N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
— $\forall x, y \in V, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$
On utilise souvent la notation $N(x) = \|x\|$

Definition 6 (Espace vetoriel norme)
Un espace vectoriel norme est note $(V, \|.\|)$

Definition 7
Soit V *un espace vectoriel et* N_1, N_2 *deux normes sur* V.
On dit que N_1 *et* N_2 *sont equivalentes si* $\exists c_1, c_2 > 0$ *tel que*

$$c_1 N_2(x) \leq N_1(x) \leq c_2 N_2(x) \forall x \in V$$

Definition 8 (Distance)
Soit X un ensemble.
Une distance est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ qui satisfait les proprietes suivantes

— $\forall x, y \in X, d(x,y) \geq 0,\ d(x,y) = 0 \iff x = y$
— *La distance est symmetrique*
— $\forall x, y, z \in V, d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Un espace X muni d'une distance est appele un espace metrique et est note (X, d).

On peut toujours definir une distance sur un espace vectoriel norme, defini par

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

On appelle cette distance, la distance induite par la norme.
Tout espace vectoriel norme est aussi un espace metrique.

Definition 9 (Produit Scalaire)
Soit V un espace vectoriel.
Un produit scalaire est une application $b : V \times V \to \mathbb{R}$ qui satisfait les proprietes suivantes

— $\forall x, y \in V, b(x,y) = b(y,x)$
— $\forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x,z) + \beta b(y,z)$
— $\forall x \in V, b(x,x) \geq 0, b(x,x) = 0 \iff x = 0$

Theorème 6 (Inegalite de Cauchy-Schwarz)
Soit V un espace vectoriel et $b : V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire. Alors

$$\forall x, y \in V | b(x,y) \leq \sqrt{b(x,x) b(y,y)}$$

Preuve
$\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.

$$0 \leq b(\alpha x + y, \alpha x + y) = \alpha^2 b(x,x) + 2\alpha b(x,y) + b(y,y)$$

Donc on a

$$\Delta = b(x,y)^2 - b(x,x) b(y,y)$$

□

Theorème 7
Soit $b : V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire, alors l'application $x \to \sqrt{b(x,x)} = \|x\|_b$ est une norme sur V.

Donc, si V est muni d'un produit scalairel, alors V est un espace norme et donc V est un espace metrique pour la distance induite par le produit scalaire.

2.2 Normes sur R^n

- La norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
- Norme "max" $\|x\|_\infty = \max |x_i|$
- Norme 1 : $\|x\|_1 = \sum |x_i|$
- Normes $p \in [1, +\infty[$ $\|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
  Pour p infinie, on retrouve la norme infinie

On montre en exercices que toutes les normes p sont equivalentes.
De meme, on montre que toutes les normes sur R^n sont equivalentes. Par contre, seulement la norme 2 est deduite d'un produit scalaire.

Definition 10 (Suites convergentes)
Soit $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$.
On dit que cette suite converge s'il existe $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k \to +\infty} \left\| x^{(k)} - x \right\| = 0$$

Lecture 4: Boules sur R^n

Wed 03 Mar

2.3 Suites sur R^n

Remarque
Supposons que $\left\{x^{(k)}\right\} \to \vec{x}$ *par rapport a la norme euclidienne. Et oit* $||| \cdot |||$ *une autre norme sur* $\mathbb{R}^n$*. Puisque toutes les normes sont equivalentes sur* $\mathbb{R}^n$ $|||\vec{x}||| \leq c||\vec{x}||_2$ *Donc toutes les suites converge peu importe la norme.*

En particulier, on peut choisir la norme infinie.

Lemme 9
Une suite $\left\{x^{(k)}\right\}$ *converge si et seulement si toutes les composantes convergent.*

Definition 11 (Suites de Cauchy)
On dit qu'une suite $\left\{x^{(k)}\right\}$ *est de Cauchy si*

$$\forall \epsilon > 0 \exists N > 0 : \forall k, l \geq N \left\| x^{(k)} - x^{(l)} \right\| \leq \epsilon$$

Theorème 10
Une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Preuve
Si la suite $x^{(k)}$ *converge* $\iff$ $\left\{x_i^{(k)}\right\}$ *converge pour tout* $i = 1, \ldots, n$ *donc toutes ces suites sont de Cauchy et donc* $x^{(k)}$ *converge.* $\square$

Theorème 11 (Bolzano-Weierstrass)
Soit $\left\{x^{(k)}\right\}$ *une suite bornee.*
Alors il existe une sous-suite $\left\{x^{(k_j)}\right\}$ *qui converge*

Preuve
Si $\left\{x^{(k)}\right\}$ *est bornee, en particulier chaque suite* $x^{(k)_i}$ *sera bornee.*
En $i = 1$*, la suite* $x^{(k)}$ *est bornee, donc il existe une sous-suite convergente vers une valeur* x_1*.*
On considere les index de cette sous-suite et on reapplique l'argument ci-dessus en $i = 2$*, etc.* □

2.4 Topologie de $\mathbb{R}^n$

Definition 12 (Boule)
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $\delta > 0$*, la boule ouverte centree en* x *et de rayon* δ

$$B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \delta\}$$

La boule fermee

$$\overline{B}(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \delta\}$$

La sphere centree en x *et de rayon* δ

$$S(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| = \delta\}$$

2.5 Classification des points d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$

Le complementaire de E est

$$E^c = \{y \in \mathbb{R}^n, y \notin E\}$$

On dit que x est un point interieur de E si $\exists \delta : B(x, \delta) \subset E$, on dit que x est un point frontiere de E si $\forall \delta B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$ et $B(x, \delta) \cap E^c \neq \emptyset$ On dit que E^o est l'ensemble des points interieurs de E, E^o est appele l'interieur de E.

On note ∂E l'ensemble des points frontieres, appele la frontiere ou le bord de E.
On dit que x est un point adherent de E si $\forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$ On note $\bar{E}$ l'ensemble des points adherents de E, appele l'adherence de E.
On a $\bar{E} = E \cup \partial E$
On dit que x est un point isole si

$$\exists \delta > 0 B(x, \delta) \cap E = \{x\}$$

On dit que x est un point d'accumulation de E, si $\forall \delta > 0$

$$B(x, \delta) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Donc, en particulier, si on prend $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$

$$\exists x^{(k)} \in E, \text{ tel que } \left\| x^{(k)} - x \right\| \leq \frac{1}{k}$$

La suite $x^{(k)}$ converge vers x.

Definition 13

Soit E un ensemble de $\mathbb{R}^n$, on dit que E est ouvert si tous ses points sont interieurs

Definition 14

E est ferme si E^c est ouvert.