Analyse III

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Introduction

Thu 23 Sep

1 Rappels

Theorème 1 (de la fonction inverse)
Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ *de classe* C^1 *tel que* $Df|_x$ *est inversible. Alors il existe un voisinage* V *de* x, *un voisinage* W *de* $f(x)$ *tel que* f *est une bijection de* V *a* W *et dont l'inverse est aussi derivable. De plus* $Df^{-1}|_{f(x)} = (Df|_x)^{-1}$

Theorème 2 (de la fonction implicite)
Soit $U \subset \mathbb{R}^n, W \subset \mathbb{R}^p$ *et* $f : U \times W \to \mathbb{R}^n$ *une fonction* C^1 *et* $(x, z) \in U \times W$ *tel que*

$$Df|_{(x,z)} = \left[Dxf|_{(x,z)}|D_z f_{(x,z)}\right]$$

est telle que $D_x f|_{(x,z)}$ *est inversible.*
Alors si $f(x, z) = 0$, *il existe un voisinage* Z *de* z *et une fonction* $g : Z \to V$ *tel que* $f(g(\tilde{z}, \tilde{z})) = 0$ *et*

$$Dg|_z = -(D_x f|_{(x,z)})^{-1} D_z f|_{(x,z)}$$

2 Nombres Complexes

De meme que $\mathbb{R}$ est obtenu a partir de $\mathbb{Q}$ en faisant une operation de completion (topologique).
$\mathbb{C}$ est obtenu a partir de $\mathbb{R}$ en faisant une operation de completion algebrique ; on requiert simplement qu'il existe une solution a $x^2 + 1 = 0$.

Lecture 2: Intro Complexes

Mon 27 Sep

3 Nombres Complexes

Si on veut etendre $\mathbb{R}$ en un corps qui contienne i, on obtient $\mathbb{C}$.
On perd la relation d'ordre sur les complexes.
Geometriquement, on represente les nombres complexes dans le plan.

Remarque
L'argument d'un nombre complexe n'est defini que modulo 2π.
La representation polaire est particulierement pertinente pour la multiplication

$$|zw| = |z||w| \text{ et } arg(zw) = arg(z) + arg(w)$$

Ce sera prouve de maniere elegante plus tard, mais on pourrait le verifier avec les formules trigonometriques.

C'est consistant avec la notation $z = re^{i\theta}$. Un choix frequent pour θ est de definir arg sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ en le prenant dans $(-\pi, \pi)$.

Solutions de $z^n = w$

pour $n \in \mathbb{N}^*, w \in \mathbb{C}^*$, il existe n solutions

$$\left\{|\omega|^{\frac{1}{n}} e^{i(arg(w)+2k\pi)/n} | k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3.1 Topologie sur $\mathbb{C}$

Comme en analyse reelle, l'outil principal est $|\cdot|$ complexe.
Les objets de choix pour parler de convergence sont $(x-r, x+r)$ et $[x-r, x+r]$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ leurs analogues sont $D(z,r) = \{\omega \in \mathbb{C} | |z-w| < r\}$.
On a $\partial D(z,r) = \overline{D}(z,r) \setminus D(z,r)$ est le cercle de rayon r centre en z.
Un ensemble $U \subset \mathbb{C}$ est dit ouvert si $\forall z \in U \exists \delta > 0$ tel que $D(z,\delta) \subset U$.
Un domaine est un ouvert connexe.

3.2 Echange de sommes

— Sur $\mathbb{R}$, si $a_{n,m} \geq 0$ on peut toujours dire

$$\sum_n \sum_m a_{n,m} = \sum_m \sum_n a_{n,m}$$

— Idem si la somme converge absolument.

Theorème 4 (fondamental de l'algebre)
Si P est un polynome de degre ≥ 1, alors $\exists z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$

Corollaire 5
Tous les polynomes peuvent etre factorise.

4 Analyse Complexe

4.1 Fonctions analytiques complexes

But : aller plus loin que les polynomes.
On considere des series entieres

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_*)^n$$

Les fonctions analytiques sont les fonctions definies par des series entieres convergentes.

Definition 1 (Serie entiere)
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_*^n)$ *une serie entiere centree en* z_*

Definition 2 (Convergence de series entieres)
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$ *si* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k(z - z_*)^k$ *existe.*

Definition 3 (Convergence uniforme)
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_*)^n$ *converge uniformement sur* $K \subset \mathbb{C}$ *si elle converge sur* K *et si*

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k(z - z_*)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_*)^k \right\|_{\infty,K} = 0$$

Definition 4 (Convergence d'une suite de fonctions)
Si $f_k : K \to \mathbb{C}$ *est une suite de fonctions tel que* $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty,K} < +\infty$*, on dit que* $\sum f_k$ *converge normalement.*

Lemme 6
La convergence normale implique la convergence uniforme.

Lecture 3: fonctions complexes

Thu 30 Sep

4.2 Rayon de Convergence

Definition 5 (Rayon de convergence)
Le rayon de convergence de $\sum_n a_n(z - z_*)^n$ *est*

$$\rho = \sup \left\{ r \geq 0 : \sum a_n(z - z_*)^n \text{ converge sur } D(z^*, r) \right\}$$

On a $\rho \in [0, \infty]$.
Ou de maniere equivalent

$$\sup \left\{ r \geq 0 : \sum |a_n||r|^n \text{ converge } \right\}$$

Lemme 7
Si $\sum a_n z^n$ *a rayon de convergence* ρ*, alors la serie converge normalement sur* $D(0, \rho)$

Lemme 8
Si $\limsup |a_k|\rho^k < \infty$*, alors le rayon de convergence est* $\geq \rho$.

Lemme 9
Si

$$|\frac{a_{k+1}}{a_k}|$$

converge quand $k \to \infty$ alors $|\frac{a_{K+1}}{a_k} \to \rho^{-1}$

$$\rho^{-1} = \limsup(|a_n|)^{\frac{1}{n}}$$

Lemme 10
$\sum a_k z^k, \sum b_n z^n$ *convergent, alors*

$$\sum (a_k + b_k) z^k$$

converge et vaut $\sum a_k z^k + \sum b_k z^k$.
Et si on pose $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

converge et vaut le produit.

4.3 Analyticite et recentrage

Definition 6
Si f est donnee par une serie entiere $\sum a_n z^n$.
On definit les series entieres "derivees" par

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

ou les series derivees ont le meme rayon de convergence que la serie de base car

$$\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup (n^k |a_n|)^{\frac{1}{n}}$$

Lemme 11 (Lemme de recentrage)
Soit $f : D(0,r) \to \mathbb{C}$ *donnee par* $\sum a_n z^n$ *avec rauon de convergence r.*
Soit $z_* \in D(0,r)$. *On a que la serie*

$$\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_*)(z - z_*)^n$$

converge avec rayon de convergence $\geq r - |z_*|$ *ou f^n est la derivee formelle de f definie ci-dessus.*

Preuve

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum a_n z^n \\ &= \sum a_n (z - z_* + z_*)^n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z - z_*)^k z_*^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} z_*^{n-k} (z - z_*)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!} n(n-1)\dots(n-k+1) z_*^{n-k} (z - z_*) k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_*)}{k!} (z - z_*)^k
\end{aligned}
$$

Si on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 1_{k \leq n} |a_n| \binom{n}{k} |z_*^{n-k}| |z - z_*|^k < \infty \qquad \square$$

or ceci converge car $z_* \in D(0, r)$ *en effet* $\exists \epsilon > 0$ *tel que* $|z_*| + \epsilon < r$

4.4 Zeros isoles

Proposition 12

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ *analytique, non nulle, alors l'ensemble*

$$\{z \in U : f(z) = 0\}$$

ne contient pas de points d'accumulation dans U.

Preuve

Supposons $z_* \in U$ *un point d'accumulation.*

Par le lemme de recentrage $\exists \epsilon > 0$ *tel que* $f(z) = \sum a_n (z - z_*)^n$.

Par hypothese $\exists m$ *tel que* $a_m \neq 0$.

Soit n *le plus petit tel entier*

$$f(z) = (z - z^*)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - z_*)^n \qquad \square$$

Donc il existe un voisinage de z^* *ou* f *est continue (parce que la serie converge uniformement sur les compacts).*

Lecture 4: Series entieres suite

Mon 04 Oct

Corollaire 13

Une fonction analytique $f : U \to \mathbb{C}$ *a un unique developpement en serie entiere au voisinage de chaque* $z_* \in U$.

Preuve

Sans perte de géneralité $z_* = 0$.

Si on a deux developpements en serie $\sum a_n z^n$ *et* $\sum \tilde{a}_n z^n$ *qui definissent la meme fonction, donc*

$$\sum (a_n - \tilde{a}_n) z^n$$

s'annule au voisinage de 0*, donc* $a_n = \tilde{a}_n$. □

> **Corollaire 14**
> *Soient* $f, g : U \to \mathbb{C}$ *analytiques.*
> *Si* f *et* g *coincident sur un ensemble avec un point d'accumulation dans* Σ*, alors* $f(z) = g(z) \forall z \in \Sigma$.

Preuve

Montrons d'abord que si z_* *est un point d'accumulation de* Σ*, alors* $z_* \in \Sigma$ *et* $\exists r > 0$ *tel que* $\Sigma \ni D(z_*, r)$.

On developpe $f - g$ *en serie au voisinage de* z^* *et on obtient une serie nulle au voisinage de* z_* .

Pour conclure que $\Sigma = U$*, on utilise un argument de connexite.*

Soit $z' \in U$*, comme* U *est un domaine,* $\exists \gamma : [0,1] \to U$ *allant de* $z_* \in \Sigma$ *a* z'.

Soit $s \geq 0$ *defini par* $s = \sup \{S \geq 0 | f(\gamma(t)) = g(\gamma(t)) \forall t \in [0, S]\}$.

Si on a que $s = 1$*, on a fini.*

Si on avait $s < 1$*, on sait que* $s > 0$ *car* z_* *est un point d'accumulation.* $\gamma(s)$ *est donc un point d'accumulation de* Σ*, donc*

$$\exists r > 0 \text{ tel que } f - g$$

s'annule sur $D(\gamma(s), r)$ *mais du coup on a que* $f(\gamma(t)) = g(\gamma(t))$ *pour* $t \in [0, s]$.□

5 Fonctions $\exp, \log, \sin, \cos, \sinh, \cosh$

5.1 $\exp$

Definition 7 (Exponentielle)

$\exp(z)$ *aussi note* e^z *est la fonction analytique definie par*

$$\sum \frac{z^n}{n!}$$

La propriete fondamentale est qu'elle transforme l'addition en multiplication

$$\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$$

En effet

$$\exp(z + w) = \sum_n \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{n!} \binom{n}{k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$= \sum_{n} \sum_{k} 1_{k \leq n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^n}{n!}$$
$$= \sum_{k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \frac{z^k}{k!}$$
$$= \exp(w) \exp(z)$$

L'echange est justifie car la serie converge absolument.
Car $\exp > 0$, et $\exp' > 0$, exp est strictement croissante sur $[0, \infty)$ et de meme (car $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$) , elle envoie $(-\infty, 0]$ sur $(0, 1]$ bijectivement.
Pour $t \in \mathbb{R}$, on definit $\cos(t) = \mathrm{Re}(\exp(it))$ et $\sin(t) = \mathrm{Im}(\exp(it))$.
Sur $i\mathbb{R}$, on a $e^{\bar{i}t} = e^{-it}$ (on regarde le developpement en serie), on en deduit

$$|e^{it}| = \sqrt{e^{it} e^{\bar{i}t}} = \sqrt{1}$$

Et donc

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \text{ et } \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

On peut maintenant etendre ces definitions a tout $z \in \mathbb{C}$, en posant

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ et } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

De meme, on pose

$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \text{ et } \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

exp **sur** $i\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \to S^1 \quad t \mapsto e^{it} := \cos t + i \sin t$$

Comme on a le developpement en serie de sin et cos, on a

$$\sin' t = \cos t \text{ et } \cos'(t) = -\sin(t)$$

On sait donc qu'il existe un point t^* tel que $\cos(t^*) = 0$(sinon cos serait borne inferieurement, et sin grandirait a l'infini).
exp est periodique dans la direction imaginaire, montrons que 2π est la plus petite periode possible, cad que $\forall t \in (0, 2\pi)$.
Pour cela, notons que sur $(0, \frac{\pi}{2})$ cos et sin sont strictements positifs.
Posons $t = 4s, s \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$e^{it} = (e^{is})^4 = (u + iv)^4, u, v > 0$$

Donc

$$e^{it} = (u + iv)^4 = u^4 + v^4 - 6u^2v^2 + 4i(u^2 - v^2)$$

Si on veut $e^{it} = 0$, alors $u^2 - v^2 = 0 \Rightarrow u^2 = v^2$ donc $u^2 = v^2 = 1$, mais alors

$$u^4 + v^4 - 6u^2v^2 \neq 0$$

Contradicition

Lecture 5: ...

Thu 07 Oct

5.2 Logarithme

Moralement, on aimerait definir le logarithme comme "l'inverse" de l'exponentielle.
Dans les reel, c'est ainsi qu'on avait procede, mais la difference, c'etait que la fonction exponentielle etait bijective.
Ici, on a que la fonction exponentielle $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective.
Du coup on aurait envie de definir le log sur $\mathbb{C}^*$, mais la fonction exponentielle n'est pas injective.
En fait, cela fait qu'on ne peut pas definir une fonction log qui soit continue sur $\mathbb{C}^*$. Si on essaie de poser

$$\log \exp(a + ib) = a + ib$$
$$\log e^a e^{ib} = \log |w| + i \arg w$$

Comment choisir $\arg w$.

Definition 8
Une determination du logarithme est une fonction

$$L : U \to \mathbb{C}$$

ou U est un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $e^{L(z)} = z$

Remarque
Sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a une determination de l'argument et du log : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on prend $argw$ dans $(-\pi, \pi)$.

Proposition 16
Il n'existe pas de determination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$

Preuve
Tous les problemes viennent du fait qu'on fait un tour autour de l'origine.
Montrons qu'il n'en existe pas sur $\mathbb{S}^1$.
Supposons qu'on ait une telle determination du log.
Posons $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definie par $u^\theta = f(e^{i\theta})$. On a $u(\theta) - \theta = 2\pi i n\theta$ puisque

$e^{u(\theta)} - \theta$
Donc

$$\operatorname{Im} u(\theta) = \arg(e^{i\theta}) + 2\pi\mathbb{Z}$$

Cependant

$$u(\theta + 2\pi) = \theta + 2\pi + n = u(\theta)$$

□

6 Fonctions holomorphes

On souhaite generaliser la notion de derivee aux fonctions complexes.
Une possibilite est de voir le plan $\mathbb{R}^2$ et en utilisant les notions de calcul differentiel sur $\mathbb{R}^2$
La notion d'holomorphie, c'est celle d'etre derivable au sens d'une variable complexe, et on verra que c'est une notion beaucoup plus forte que celle d'etre differentiable au sens de $\mathbb{R}^2$, mais suffisamment naturelle pour etre verifiee dans beaucoup de cas

Definition 9 (Fonction Holomorphe)
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ ou U est un domaine de $\mathbb{C}$. On dit que f est holomorphe en $z \in U$ s'il existe une limite notee $f'(z) \in \mathbb{C}$ si la limite suivante existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

ou la limite est prise au sens complexe.
Formellement, cela veut dire $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que si $h \in D(0, \delta) \setminus \{0\}$ on a

$$|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z)| \leq \epsilon$$

Une autre maniere d'ecrire cela

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(h)$$

ou $o(h)$ est telle que $|o(h)/h| \to 0$.

Comment comprendre ca en termes de derivees partielles en faisant l'identification $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$?
Dire que la fonction a un developpment de Taylor au 1er ordre pour une fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \\ f_2(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_1, x_2) & \partial_2 f_1(x_1, x_2) \\ \partial_1 f_2(x_1, x_2) & \partial_2 f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(h_1, h_2)$$

Donc la matrice Df_{x_1,x_2} doit etre la matrice de la composition d'une rotation et d'une homothetie. Donc la contrainte d'etre differentiable au sens complexe est equivalence a celle de demander d'etre differentiable au sens de deux variables relles et d'avoir que la jacobienne soit de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

donc

$$\partial_1 \operatorname{Re} f = \partial 2 \operatorname{Im} f \text{ et } \partial_1 \operatorname{Im} f = -\partial 2 \operatorname{Re} f$$

Definition 10
On dit que f satisfait les equations de Cauchy-Riemann si

$$\partial_1 \operatorname{Re} f = \partial 2 \operatorname{Im} f \text{ et } \partial_1 \operatorname{Im} f = -\partial 2 \operatorname{Re} f$$

Proposition 17
f est holomorphe en $z = x_1 + ix_2 \iff f$ est derivable au sens de $\mathbb{R}^2$ et satisfait les equations de Cauchy-Riemann.

Definition 11
On dit que f est holomorphe sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ si elle est C^1 (au sens de $\mathbb{R}^2$) et qu'elle est holomorphe en tout point de U

6.1 Analytique $\Rightarrow$ Holomorphe

Proposition 18
Si

$$f(z) = \sum a_k (z - z_*)^k$$

a comme rayon de convergence ρ , alors f est holomorphe sur $D(z_*, \rho)$ et f' est donee par la serie entiere

$$f'(z) = \sum k a_k (z - z_*)^{k-1}$$

qui a aussi comme rayon de convergence ρ.

Preuve
La serie qui donne la derivee converge avec rayon de convergence ρ. Maintenat, ce qu'il nous faut, c'est de montrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - hf'(z)}{h} = 0$$

Supposons $z_* = 0$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k (z+h)^k - a_k z^k}{h} - hkz^{k-1} \to 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k[(z+h)^k - z^k - khz^{k-1}]}{h}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k[h[(z+h^{k-1}) + (z+h)^{k-2} + \ldots + z^{k-1}]] - khz^{k-1}}{h}$$

On va montrer que $\forall \epsilon > 0$, on peut rendre la queue de la serie plus petite que $\frac{\epsilon}{2}$ en allant assez loin dans la serie et qu'ensuite, pour le N fixe qui sortira, on pourra prendre h assez petit pour que les N premieres termes soient plus petits que $\frac{\epsilon}{2}$.
Notons que pour mh suffisamment petit (il existe $\delta_1 > 0$ tel que si $h \in D(0, \delta_1), z + h \in D(0, \rho)$) et du coup on aura la convergence de

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k[[|z+h|^{k-1} + \ldots + |z^{k-1}|]] + k|z|^{k-1}]$$

vu que

$$[|z+h|^{k-1} + \ldots] \leq k(|z| + |h|)^k \qquad \square$$