EPFL - Automne 2020	Prof. Z. Patakfalvi
Structures Algébriques	**Exercices**
Série 1	18 Septembre 2020

Veuillez télécharger vos solutions à l'exercice à rendre (Exercice 1) sur la page Moodle du cours avant le lundi 28 septembre, 20h.

---

1 Exercices à rendre

Exercise 1 (Division euclidienne pour les polynômes)**.**
On note

$$\mathbb{R}[t] = \left\{ p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \mid a_i \in \mathbb{R}, n \geq 0 \right\}$$

l'ensemble des **polynômes à une variable et à coefficients réels**. Rappelons que le **degré** d'un élément de $\mathbb{R}[t]$ est défini par

$$\deg \left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i \right) = n, \quad \text{avec la convention que } a_n \neq 0,$$

et

$$\deg(0) = -\infty \quad \text{par convention.}$$

Démontrer soigneusement qu'il existe une division euclidienne dans $\mathbb{R}[t]$, c'est-à-dire : soient $0 \neq q(t) \in \mathbb{R}[t]$ un polyôme non-nul et $a(t) \in \mathbb{R}[t]$ un polynôme quelconque, alors il existe deux uniques polynômes $b(t), r(t) \in \mathbb{R}[t]$ tels que

$$a(t) = q(t)b(t) + r(t) \quad \text{et} \quad \deg r(t) < \deg q(t).$$

Indication : Procédez comme dans la preuve de la Proposition 1.1.3 du cours en utilisant le degré. N'oubliez pas de démontrer les propriétés du degré auxquelles vous faites appel.

2 Exercices supplémentaires

Exercise 2.
Soient A, B des ensembles et $f : A \to B, g : B \to A$ deux applications.

1. Supposons que $f \circ g = \mathrm{id}_B$ et $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Montrez que f et g sont bijectives.
2. Donnez un exemple où $f \circ g = \mathrm{id}_B$ mais où f n'est pas bijective.

Exercise 3.
Soient $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$ des applications entre ensembles. Supposons que $g \circ f\colon A \to C$ est injective. Est-ce que f est nécessairement injective ? Est-ce que g est nécessairement injective ?

Exercise 4.
Le but de cet exercice est de pratiquer le langage symbolique mathématique.

1. Ecrire en langage symbolique l'énoncé *la fonction $f\colon A \to B$ est injective.*
2. Ecrire en langage symbolique l'énoncé *l'ensemble E contient exactement deux éléments.*
3. Ecrire en langage symbolique l'énoncé *les sous-ensembles A et B forment une partition de X.*
4. Démontrer la règle de contraposition, c'est-à-dire :
$$(P \Rightarrow Q) \;\Leftrightarrow\; (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$
5. Démontrer la règle de double négation, c'est-à-dire que l'implication
$$\neg\neg P \Rightarrow P$$
est toujours vraie.

Exercise 5.
Soient A et B deux ensembles finis.

1. Combien d'éléments possède l'ensemble produit $A \times B$?
2. Combien y a-t-il de fonctions $A \to B$?
3. Combien y a-t-il de fonctions injectives $A \hookrightarrow B$?
4. Combien y a-t-il de fonctions surjectives $A \twoheadrightarrow B$?
Cette question est plus compliquée que les précédentes. Le principe d'inclusion-exclusion vous sera certainement utile.