EPFL - Semestre de Printemps 2021-2022 — J. Scherer
Topologie — **Série 7**
MATHÉMATIQUES — le 6 avril 2022

Exercice 1. Identifier les pushouts de groupes suivants :

1. $\mathbb{Z} \leftarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Z} \xleftarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z}$
3. $0 \leftarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}$
4. $\mathbb{Z} \xleftarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}$
5. $\mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z}$
6. $F(n) \leftarrow 1 \rightarrow F(m)$
7. $\mathbb{Z}/2 \xleftarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/3$ où p et q sont les réductions modulo 2 et 3
8. $\mathbb{Z}/2 \xleftarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/4$ où p et q sont les réductions modulo 2 et 4
9. $1 \leftarrow F(a) \xrightarrow{xy} F(x, y)$ où l'application xy envoie le générateur a sur xy
10. $1 \leftarrow F(a) \xrightarrow{x^2y} F(x, y)$ où l'application x^2y est déterminée par le fait que l'image de a est x^2y
11. $1 \leftarrow F(a) \xrightarrow{x^2y^2} F(x, y)$ où l'application x^2y^2 envoie a sur x^2y^2
12. Montrer que ce dernier groupe n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}$ en exhibant un homomorphisme surjectif sur $C_2 \times C_2$.

Remarque. Un amalgame célèbre est $C_4 *_{C_2} C_6$, un groupe isomorphe à $SL_2(\mathbb{Z})$. Un homomorphisme entre ces deux groupes est construit en considérant les matrices $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Propriété universelle de l'abélianisation. Montrer que l'homomorphisme quotient $\varepsilon\colon G \to G_{ab}$ a la propriété suivante. Pout tout groupe abélien A et tout homomorphisme de groupes $\varphi\colon G \to A$, il existe un unique homomorphisme de groupes abéliens $f\colon G_{ab} \to A$ tel que $f \circ \varepsilon = \varphi$.

Remarque. Ceci signifie en fait la chose suivante. Ecrivons $\mathcal{O}(A)$ pour le groupe abélien vu comme groupe (on *oublie* le fait que A est abélien). On a alors une bijection $\mathrm{Hom}(G, \mathcal{O}(A)) \cong \mathrm{Hom}(G_{ab}, A)$. Ainsi l'abélianisation est un adjoint à droite de l'oubli. L'application quotient ε correspond à l'identité de G_{ab} dans cette correspondance et on l'appelle *co-augmentation*.

Exercice 3. Composition de carrés commutatifs. On considère le diagramme suivant d'espaces (topologiques) et d'applications (continues) :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & A'' \arrow[d, "g''"] \\
B \arrow[r, "h"] & B' \arrow[r, "h'"] & B''
\end{tikzcd}$$

1. Montrer que si les carrés de gauche et de droite sont commutatifs, i.e. $g' \circ f = h \circ g$ et $g'' \circ f' = h' \circ g'$, alors le grand rectangle est aussi commutatif.
2. Et si le grand rectangle et l'un des deux carrés est commutatif, est-ce que le second carré est commutatif ?
3. Montrer que si les carrés de gauche et de droite sont commutatifs à homotopie près, i.e. $g' \circ f \simeq h \circ g$ et $g'' \circ f' \simeq h' \circ g'$, alors le grand rectangle est aussi commutatif à homotopie près.

Exercice 4. Composition de pushouts. On considère le diagramme suivant de groupes et d'homomorphismes :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & G' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & G'' \arrow[d, "g''"] \\ H \arrow[r, "h"] & H' \arrow[r, "h'"] & H'' \end{tikzcd}$$

1. Montrer que si les carrés de gauche et de droite sont des pushouts, alors le grand rectangle est aussi un pushout. On aura avantage à utiliser la propriété universelle.
2. Et si le grand rectangle et le carré de gauche sont des pushouts, est-ce que le carré de droite est un pushout ?
3. Et si le grand rectangle et le carré de droite sont des pushouts, est-ce que le carré de gauche est un pushout ?

Exercice 5. L'argument de Eckmann-Hilton. Soit G un groupe topologique et $m\colon G\times G \to G$ la multiplication. On étudie dans cet exercice le groupe fondamental de G (pour le point de base donné par l'élément neutre 1_G). On définit une loi de composition $\bullet$ sur $\pi_1 G$. Soient $f, g\colon S^1 \to G$ deux lacets. Le lacet $f \bullet g$ est défini par $(f \bullet g)(t) = m[f(t), g(t)]$.

1. Montrer que $\bullet$ définit bien une loi de composition sur $\pi_1 G$, c'est-à-dire que $[f \bullet g]$ ne dépend pas du choix des représentants des lacets f et g.
2. Montrer que les lois $\star$ et $\bullet$ vérifient la *loi d'échange* : $(a \star b) \bullet (c \star d) = (a \bullet c) \star (b \bullet d)$.
3. Calculer $(a \star 1) \bullet (1 \star b)$ et $(1 \star a) \bullet (b \star 1)$ pour conclure que $\bullet = \star$ et que cette multiplication est commutative.
4. Conclure que $\pi_1 G$ est un groupe commutatif.

On revient maintenant à une comparaison plus pédestre des deux lois $\star$ et $\bullet$.

5. Soit (X, x_0) un espace pointé. Montrer qu'il existe une application injective (et continue) $X \vee X \hookrightarrow X \times X$ qui identifie le wedge comme un sous-espace du produit.
6. Montrer que la composition $S^1 \xrightarrow{pinch} S^1 \vee S^1 \hookrightarrow S^1 \times S^1$ est homotope à la diagonale. On pourra construire l'homotopie dans le modèle du tore donné par un quotient de $I \times I$.
7. Montrer par un argument de diagramme (commutatif à homotopie près) que la loi $\bullet$ coïncide avec la concaténation $\star$ dans $\pi_1 G$.

Exercice 6. Soit $f\colon F(a,b) \to F(x,y)$ l'homomorphisme de groupes (entre deux groupes libres à deux générateurs) défini par $f(a) = xy^2x^{-1}y^{-2}$ et $f(b) = x^4y^{-3}$. On cherche à identifier le pushout G du diagramme $\{1\} \leftarrow F(a,b) \xrightarrow{f} F(x,y)$.

(a) Donner une présentation du groupe G.

(b) Montrer que G est abélien (on pourra montrer que la classe de x commute avec celles de y^2 et y^3 dans G).

(c) Montrer que l'image de $x^{-1}y$ dans le pushout G est un générateur de G (exprimer dans G l'image de x en fonction de celle de $x^{-1}y$).

(d) Identifier G avec un groupe libre $F(z)$ à un générateur, en donnant en particulier les homomorphismes qui permettent de compléter le diagramme de pushout ci-dessus en un carré commutatif.

L'exercice 6 est à rendre le mercredi 13 avril.