

Analyse I

David Wiedemann

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Buts du Cours	7
2	Definir \mathbb{R}	8
2.1	Exemple d'utilisation	10
3	Suites et limites	15
3.1	Convergence	15
4	Limsup et liminf	20
4.1	Suites de Cauchy	24
5	Series	25
5.0.1	Un calcul naif (avec la série harmonique alternée) . . .	31
6	Fonctions	37
6.1	Continuité	42
7	Suites de Fonctions	49
8	Dérivation	54
8.1	Applications de la dérivée	57
8.1.1	Recherche d'extremums	57
8.2	Principe de Bernoulli-L'Hospital	62
8.3	Bernoulli-L'hospital pour infini sur infini	63
9	Polynome de Taylor et developpements limites	64
9.1	Utilisations de la 2eme derivee	67
9.2	Convexite, Concavite	67
10	Series Entieres	68
10.1	Deux P.S sur exp	74
11	Integration	75

List of Theorems

1	Theorème (env. -400)	7
2	Lemme (Lemme)	7
3	Axiom (Nombres Reels)	8
4	Lemme (Theorem name)	9
5	Proposition (Annulation de l'element neutre)	9
6	Corollaire (x fois moins 1 egale -x)	9
7	Axiom (Nombres Reels II)	10
1	Definition (valeur absolue)	10
8	Proposition (Inegalite du triangle)	10
2	Definition (Bornes)	11
9	Axiom (Axiome de completude)	11
3	Definition (Supremum)	11
14	Proposition	12
15	Corollaire (Propriete archimediennne)	12
16	Theorème (La racine de deux existe)	12
18	Proposition (\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R})	13
19	Lemme	13
20	Proposition (Densite des irrationnels)	14
4	Definition (Suite)	15
5	Definition (Convergence de suites)	15
23	Lemme (Unicite de la limite)	15
6	Definition	16
25	Lemme	16
27	Proposition	16
28	Lemme	17
30	Proposition (Inversion d'une limite)	18
31	Corollaire	18
32	Lemme	18
34	Proposition	19
35	Proposition	19
37	Lemme (Deux gendarmes)	20
7	Definition (Limsup et liminf)	20
38	Theorème	21
39	Theorème (Premiere regle de d'Alembert)	21
8	Definition (Sous-suite)	22
44	Proposition	23
45	Theorème (Bolzano-Weierstrass)	23
9	Definition (Point d'accumulation)	23
10	Definition (Suites de Cauchy)	24
48	Lemme	24

49	Theorème (Convergence des suites de Cauchy)	24
50	Lemme	24
11	Definition (Serie)	25
53	Corollaire	26
54	Corollaire	26
55	Corollaire	27
56	Corollaire (Critere de Cauchy pour les séries)	27
58	Proposition	27
59	Proposition (Serie Geometrique)	28
60	Proposition (Série Harmonique)	28
61	Proposition (Critère de Comparaison)	29
63	Corollaire	29
12	Definition (Séries Alternées)	30
64	Theorème	30
13	Definition	31
68	Lemme	32
69	Theorème	32
71	Theorème	33
72	Theorème (Critere de d'Alembert 2)	34
78	Proposition	35
79	Theorème (Critere de la racine)	36
83	Lemme	37
14	Definition	37
15	Definition	38
85	Theorème	38
87	Corollaire	39
88	Corollaire	39
89	Corollaire	39
90	Corollaire	39
91	Lemme	39
92	Corollaire	40
93	Corollaire (Cauchy)	40
94	Lemme	40
95	Corollaire	41
97	Proposition	41
16	Definition	42
99	Proposition	42
101	Corollaire	42
102	Corollaire	42
104	Proposition	43
17	Definition (Terminologie Supplémentaire)	43

18	Definition	43
19	Definition	43
20	Definition	44
21	Definition (Notation)	44
22	Definition (Notation)	44
106	Theorème	44
107	Theorème	44
108	Proposition	45
23	Definition	45
113	Proposition	46
115	Theorème	46
117	Theorème (Théorème de la valeur intermédiaire (TVI))	47
118	Corollaire	47
119	Corollaire	48
120	Corollaire	48
121	Proposition (1er theoreme de la fonction implicite)	48
122	Lemme	48
123	Corollaire	49
24	Definition	49
25	Definition (Convergence uniforme de fonctions)	52
127	Proposition	52
128	Theorème	53
129	Theorème (Dini)	53
26	Definition	54
132	Proposition	54
133	Proposition	54
134	Corollaire	55
135	Proposition	55
137	Proposition	56
138	Theorème (Chain Rule)	56
139	Theorème	57
27	Definition (Point Critique)	57
28	Definition	58
142	Proposition	58
144	Proposition (Méthode de recherche d'extremum)	58
145	Theorème (theoreme de Rolle)	58
146	Theorème (théorème des accroissements finis TAF)	59
147	Corollaire	59
148	Corollaire	60
149	Corollaire	60
29	Definition (Fonctions Lipschitzienne)	60

151	Corollaire	60
153	Corollaire (Théorème de Darboux)	61
155	Theorème (Theoreme de Cauchy)	61
156	Theorème (Bernoulli-L'Hospital)	62
157	Theorème (BH pour l'infini)	62
158	Theorème	63
30	Definition (Polynome de Taylor)	64
159	Theorème (Formule de Taylor)	64
31	Definition (Developpement limite)	65
164	Proposition	65
165	Proposition	66
166	Theorème	66
169	Lemme	66
170	Proposition	67
32	Definition (Convexe)	67
171	Proposition	67
172	Theorème	68
173	Corollaire	68
33	Definition	69
175	Theorème	69
176	Corollaire	69
34	Definition	70
178	Corollaire	70
180	Corollaire	70
181	Theorème	70
183	Corollaire	72
184	Proposition	72
185	Corollaire	73
186	Theorème (Lemme d'Abel)	73
35	Definition	74
189	Proposition	74
36	Definition (Subdivisions)	75
37	Definition (Somme de Darboux inferieure)	75
38	Definition (Somme de Darboux superieure)	75
39	Definition	75
40	Definition	75
190	Proposition	76
191	Corollaire	76
192	Theorème	77
193	Theorème	77
194	Corollaire	77

41	Definition	77
42	Definition	77
195	Proposition	78
197	Lemme	78
198	Lemme	78
199	Lemme	78
200	Proposition	79
202	Corollaire	80
203	Lemme	80
204	Proposition (Theoreme de la moyenne)	80
43	Definition (Primitive)	80
206	Corollaire	81
207	Theorème (Theoreme Fondamental)	81
208	Theorème (Fondamental, reformulation)	81

1 Introduction

1.1 Buts du Cours

Officiel :

Suites, series, fonctions, derivees, integrales , ...

Secrets :

Apprendre le raisonnement rigoureux

Creativite

Esprit Critique

Ne croyez rien tant que c'est pas prouve

On construit sur ce qu'on a fait, on recommence pas toujours a 0, par rapport a d'autres domaines (lettres par exemple)

Theorème 1 (env. -400)

Il n'existe aucun nombre (fraction) x tel que $x^2 = 2$.

Ca contredit pythagore nn ?

On va demontrer le theoreme.¹

Lemme 2 (Lemme)

Soit $n \in \mathbb{N}$ Alors n pair $\iff n^2$ pair.

Preuve

\Rightarrow Si n pair $\Rightarrow n^2$ pair.

Hyp. $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$)

Donc $n^2 = 4m^2$, pair.

Par l'absurde, n impair. $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$).

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

impair. Donc si n est impair, alors n^2 est forcément impair. Absurde. □

Preuve

Supposons par l'absurde $\exists x$ t.q. $x^2 = 2$ et $x = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$).

On peut supposer a et b non tous pairs. (sinon reduire).

$$x^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$$

1. On demontre d'abord un lemme

pair.

Lemme : a pair, i.e. $a = 2n (n \in \mathbb{N})$.

$$a^2 = 4n^2 = 2b^2 \Rightarrow 2n^2 = b^2, \text{ i.e. } b^2 \text{ pair.}$$

Lemme : b pair.

Donc a et b sont les deux pairs, on a une contradiction.

⚡

□

En conclusion, le theoreme est bel et bien vrai, et contredit donc pythagore. Donc les fractions (\mathbb{Q}) ne suffisent pas a decire/mesurer les longueurs geometriques. Il faut les nombres reels, on les comprends seulement vraiment depuis 2 siecles.

C'est important de chercher ce genre d'erreurs.

Prochain but : definir les nombres reels (\mathbb{R}). L'interaction entre les fractions et les nombres reels.

2 Definir \mathbb{R}

On commence avec la definition axiomatique des nombres reels.

Axiom 3 (Nombres Reels)

\mathbb{R} est un corps, en d'autres termes :

Ils sont munis de deux operations : plus et fois.

— Associativite $x + (y + z) = (x + y) + z (x, y, z \in \mathbb{R})$ ²

— Commutativite $x + y = y + x$.

— Il existe un element neutre 0 t.q. $0 + x = x, x \in \mathbb{R}$.³

— Distributivite $x(yz) = (xy)z$

— Il existe un element inverse, unique $-x \in \mathbb{R}$ t.q. $x + (-x) = 0$

Remarque : Il existe beaucoup d'autres corps que \mathbb{R} , par exemple $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \{0, 1, 2\} \bmod 3$

Attention : $\{0, 1, 2, 3\} \bmod 4$ n'est pas un corps!

Presque tous marchent, ils satisfont 8 des 9 axiomes.

2. L'associativite n'est pas forcement vraie(octonions)

3. Il y a aucune difference entre les regles pour l'addition que pour la multiplication.

Lemme 4 (Theorem name)

$$\forall x \exists ! y \ t.q. \ x + y = 0.$$

Preuve

Supposons $x + y = 0 = x + y'$

A voir : $y = y'$.

$$\begin{aligned} y &= y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' \\ &= (x + y) + y' = 0 + y' = y' \end{aligned}$$

CQFD.

□

Exercice

Démontrer que 0 est unique.

Proposition 5 (Annulation de l'élément neutre)

$$0 \cdot x = 0$$

Preuve

$$x = x \cdot 1 = x(1 + 0) = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$$

$$0 = x + (-x) = x + (-x) + x \cdot 0$$

□

$$\Rightarrow 0 = x \cdot 0$$

4

Corollaire 6 (x fois moins 1 égale -x)

$$x + x \cdot (-1) = 0$$

Preuve

A voir : $x \cdot (-1)$ satisfait les propriétés de $-x$.

Or

$$x + x(-1) = x(1 - 1) = x \cdot 0 = 0.$$

□

Exercice

Montrer que $\forall x : -(-x) = x$ et que ceci implique $(-a)(-b) = ab$.

Rien de tout ça n'a quelque chose à voir avec \mathbb{R} .

Il nous faut plus d'axiomes!!

$$4. \ a - b = a + (-b)$$

Axiom 7 (Nombres Reels II)

\mathbb{R} est un corps ordonne. Ce qui revient a dire que les assertions suivantes sont verifiees.

— $x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$

— $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$

— pour tout couple de nombres reels x et y : ou bien $x \leq y$ ou bien $x \geq y$.

Exemple de corps ordonnes :

(1) \mathbb{R} , (2) \mathbb{Q} , (3) $\{0, 1, 2\} \pmod{3}$ n'est pas un corps ordonne.

Exercice

$x \leq y \iff -x \geq -y$ **Exercice**

$x \leq y$ et $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$

$x \leq y$ et $z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz$.

Il nous manque encore un axiome, et c'est le dernier : pour mercredi !

Lecture 2: Cours Mercredi

Wed 16 Sep

2.1 Exemple d'utilisation

Definition 1 (valeur absolue)

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposition 8 (Inegalite du triangle)

Elle dit que

$$\forall x, y : |x + y| \leq |x| + |y|$$

Preuve

Cas $x, y \geq 0$: alors $x + y \geq 0$

$$\iff x + y \leq x + y$$

Ce qui est toujours vrai.

Cas $x \geq 0$ et $y < 0$.

Si $x + y \geq 0$, alors

$$\iff |x + y| \leq x - y$$

$$\iff x + y \leq x - y$$

$$y \leq -y$$

c'est vrai car $y < 0$.

Si $x + y < 0$, alors

$$\Longleftrightarrow -x - y \leq x - y$$

□

Donc $-x \leq x$ vrai car $x \geq 0$.

Definition 2 (Bornes)

Terminologie : Soit $A \subseteq E$, E corps ordonné.

— Une borne supérieure (majorant) pour A et un nombre b tq

$$a \leq b \forall a \in A.$$

— Une borne inférieure (minorant) pour A et un nombre b tq

$$a \geq b \forall a \in A.$$

On dira que l'ensemble A est borne si il admet une borne.

Axiom 9 (Axiome de complétude)

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \neq \emptyset$$

et majorée $\exists s \in \mathbb{R}$ t.q

1. *s est un majorant pour A .*

2. *\forall majorant b de A , $b \geq s$.*

Cet axiome finit la partie axiomatique du cours.

Remarque

1. *$\forall s' < s \exists a \in A : a > s'$.*

2. *s est unique.*

Definition 3 (Supremum)

Ce s s'appelle le supremum de A , note $\sup(A)$.

Remarque

\exists (pour A minore et $\neq \emptyset$) une borne inférieure plus grande que toutes les autres, notée $\inf(A)$ (infimum).

$$\inf(A) = -\sup(-A)$$

Remarque

Si $\sup(A) \in A$, on l'appelle le maximum.

Remarque

Si $\inf(A) \in A$, on l'appelle le minimum.

Proposition 14

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x.$$
Preuve

Par l'absurde,

Alors

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : n < x$$

$\Rightarrow \mathbb{N}$ borne et $\neq \emptyset \Rightarrow \exists s = \sup(\mathbb{N})$

$$s - \frac{1}{2} < s \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > s - \frac{1}{2}$$

$$n + 1 \in \mathbb{N} \text{ et } n + 1 > s - \frac{1}{2} + 1 = s + \frac{1}{2}$$

donc $n + 1 > s$ absurde. □

Corollaire 15 (Propriété archimédienne)

$$1. \forall x \forall y > 0 \exists n \in \mathbb{N} : ny > x.$$

$$2. \forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon$$

Preuve

Pour 2, appliquer la proposition à $x = \frac{1}{\epsilon} \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{1}{\epsilon}$

Alors

$$\Rightarrow \epsilon > \frac{1}{n}$$

Pour montrer le 1.

Considérer $\frac{x}{y}$ □

On peut maintenant montrer que la racine de deux existe.

Théorème 16 (La racine de deux existe)

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

Preuve

$$A := \{y | y^2 < 2\}$$

Clairement $A \neq \emptyset$ car $1 \in A$. De plus, A est majorée : 2 est une borne. (si $y > 2$, $y^2 > 4 > 2 \Rightarrow y \notin A$).

Donc $\exists x = \sup(A)$

Supposons (par l'absurde) que $x^2 < 2$

Soit $0 < \epsilon < 1, \frac{2-x^2}{4x}$.

Clairement, par hypothese $2 - x^2 > 0$ et idem pour $4x$ car $x \geq 1$. Soit $y = x + \epsilon$, alors

$$y^2 = x^2 + 2\epsilon x + \epsilon^2 < x^2 + \frac{2-x^2}{2} + \frac{2-x^2}{2} = 2$$

$\Rightarrow y \in A$ Mais $y = x + \epsilon > x$. Absurde car $x = \sup(A)$. Donc $x^2 \geq 2$. Deuxiemement, supposons (absurde) $x^2 > 2$.

Soit $0 < \epsilon < \frac{x^2-2}{2x} > 0$.

Posons $b = x - \epsilon$.

$$\begin{aligned} b < x &\Rightarrow \exists y \in A : y > b \\ \Rightarrow y^2 > b^2 &= x^2 - 2\epsilon x + \epsilon^2 > x^2 - \underbrace{2\epsilon x}_{< x^2-2} \\ &> x^2 - (x^2 - 2) = 2. \end{aligned}$$

Conclusion : $y^2 > 2$ contredit $y \in A$.

Donc $x^2 = 2$. □

Remarque

Preuve similaire :

$$\forall y > 0 \exists! x > 0 : x^2 = y$$

Proposition 18 (\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R})

$$\forall x < y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y$$

Lemme 19

$$\forall x \exists n \in \mathbb{Z} : |n - x| \leq \frac{1}{2}$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} \forall x \exists [x] \in \mathbb{Z} \text{ tq} \\ \begin{cases} [x] \leq x \\ [x] + 1 > x \end{cases} \end{aligned}$$

Preuve

$$\exists n \in \mathbb{Z} : n > x \text{ (Archimede).}$$

Soit $[x] = \inf\{n \in \mathbb{Z} : n > x\} - 1$ □

Preuve (Preuve de la densité)

Archimède : $\exists q \in \mathbb{N} : q > \frac{1}{y-x}$.

Donc

$$\begin{aligned} & qy - qx > 1. \\ \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : qx < p < qy \end{aligned}$$

par exemple :

$$p = [qy]$$

si $qy \notin \mathbb{Z}$ ou bien

$$p = qy - 1$$

si $qy \in \mathbb{Z}$

□

Lecture 3: Suites

Wed 23 Sep

0,999

0,9

0.99

0.999

0.9999

\vdots

Proposition 20 (Densité des irrationnels)

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, les irrationnels sont dense dans \mathbb{R} .

Preuve

Soit $x < y$ (dans \mathbb{R}).

Cherche $z \notin \mathbb{Q}$ tq $x < z < y$.

$$\exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ tq } x < \frac{p}{q} < y$$

Prop. archimédienne $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} :$

$$\underbrace{\frac{p}{q} + \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{n}}_{:=z} < y$$

car

$$\exists n : \frac{1}{n} < \underbrace{y - \frac{1}{q}}_{>0} / \sqrt{2}$$

Il reste a voir que : $z = \frac{p}{q} + \sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$

$$\sqrt{2} = n(z - \frac{p}{q})$$

$$z \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \quad \text{⚡}$$

□

3 Suites et limites

Definition 4 (Suite)

Une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dans \mathbb{R} est une application (= fonction) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Remarque

Suite $(x_n) \neq$ ensemble $\{x_n\}$ Il arrive qu'on indice x_n par une partie de \mathbb{N} . Mais suite = suite infinie

Exemple

$$x_n = \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$$

$$x_n = (-1)^n; x_n = n!; F_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$$

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415$$

3.1 Convergence

Definition 5 (Convergence de suites)

L'expression $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ signifie :

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$$

On dit alors que (x_n) converge (vers l). Sinon, (x_n) diverge.

Lemme 23 (Unicité de la limite)

Si (x_n) converge, il existe un unique $l \in \mathbb{R}$ tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$

Preuve

Supposons l, l' limites. Si $l \neq l'$, alors $|l - l'| > 0$ Donc $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \frac{|l - l'|}{2}$

De meme $\exists n_1 \forall n > n_1 : |x_n - l'| < \frac{|l - l'|}{2}$

Soit $n > n_0, n_1$ Alors :

$$|l - l'| = |l - x_n + x_n - l'| \leq \underbrace{|l - x_n|}_{< |l - l'|/2} + \underbrace{|x_n - l'|}_{|x_n - l'|}$$

Donc

$$|l - l'| < 2 \cdot \frac{|l - l'|}{2}$$

⚡

□

Exemple

1. Si (x_n) est constante ($\exists a \forall n : x_n = a$) alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ (Archimede)

Definition 6

Terminologie :

(x_n) est bornée, majorée, minorée, rationnelle, ... etc si l'ensemble $\{x_n\}$ l'est.

La suite (x_n) est croissante si $x_n \leq x_{n+1} \forall n$ Idem décroissante Dans les deux cas, on dit que la suite (x_n) est monotone

Lemme 25

Toute suite convergente est bornée.

Preuve

Posons $\epsilon = 7$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |x_n - l| < 7$$

□

Soit $B_1 \geq |x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|$

Posons $B = \max(B_1, |l| + 7)$ Alors $|x_n| \leq B \forall n$.

Attention la réciproque n'est pas vraie!!

Exemple

$x_n = (-1)^n$ définit une suite bornée non convergente.

Preuve

Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = l$.

Posons $\epsilon = \frac{1}{10}$ alors $\exists n_0 \forall n > n_0 : |(-1)^n - l| < \frac{1}{10}$

$n > n_0$ pair $\Rightarrow |1 - l| < \frac{1}{10}$

$n > n_0$ impair $\Rightarrow |-1 - l| < \frac{1}{10}$

ceci implique

$$\Rightarrow |1 - (-1)| \leq |1 - l| + |-1 - l| < \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

□

Proposition 27

Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x'_n = l'$

Alors 1. : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + x'_n) = l + l'$, et 2. : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot x'_n = l \cdot l'$

Preuve

1 :

Soit $\epsilon > 0$ Cherche n_0 tq $\forall n > n_0 : |x_n + x'_n - (l + l')| < \epsilon$.

Appliquons les deux hypothèses à $\frac{\epsilon}{2}$: $\exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ et

$\frac{\epsilon}{2} : \exists N' \forall n > N' : |x'_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ Posons $n_0 = \max(N, N')$
 Si $n > n_0$, alors

$$|x_n + x'_n - (l + l')| \leq |x_n - l| + |x'_n - l'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

2 :

Par le lemme, $\exists B$ tq. $|x_n|, |x'_n| < B \forall n$.

Soit $\epsilon > 0$. Appliquons les hypotheses a $\frac{\epsilon}{2B}$.

$$\exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2B}$$

Si $n > n_0 := \max(N, N') :$

$$\begin{aligned} |x_n x'_n - ll'| &\leq |x_n x'_n - x_n l'| + |x_n l' - ll'| \\ &= \underbrace{|x_n|}_{< B} \cdot \underbrace{|x'_n - l'|}_{< \frac{\epsilon}{2B}} + \underbrace{|l'|}_{< B} \cdot \underbrace{|x_n - l|}_{< \frac{\epsilon}{2B}} < \epsilon \end{aligned} \quad \square$$

Lemme 28

On a utilise : lemme Si $x_n \leq B \forall n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ alors $l \leq B$

Preuve

Par l'absurde :

Si $l > B$, posons $\epsilon = l - B > 0$

$\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$

en particulier $x_n > l - \epsilon = B \nmid$ □

Lecture 4: lundi

Mon 28 Sep

Remarque

— $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = |\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n|$, ce qui est sous-entendu ici est que la limite existe.

— $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergence et limite sont inchangées si on modifie un nombre fini de termes.

En particulier $(x_n)_{n=17}^{\infty}$, rien ne change.

— $x_n \rightarrow l$ ($n \rightarrow \infty$), équivalent a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$

— On dit que (x_n) converge vers $+\infty$ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, si (x_n) diverge de la façon suivante :

$$\forall R \in \mathbb{R}, \exists n_0 \forall n > n_0 : x_n > R$$

La définition est la même si x_n converge vers $-\infty$

Proposition 30 (Inversion d'une limite)

Supposons que (x_n) converge vers $l \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{l}$

Corollaire 31

Si (x_n) converge vers l et

Si (y_n) converge vers $m \neq 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{l}{m}$$

Car $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$

Lemme 32

Sous les hypotheses de la proposition,

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n \neq 0$$

Preuve

Appliquons la convergence à $\epsilon = \frac{|l|}{2}$ (car $l \neq 0$)

$$|x_n - l| < \epsilon \Rightarrow x_n \neq 0$$

□

Preuve

Preuve de la proposition

Soit $\epsilon > 0$.

On veut estimer

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{l} \right| = \underbrace{\frac{|l - x_n|}{|x_n - l|}}_{\geq \frac{|l|}{2} |l|} < ? \epsilon$$

pour n comme dans le lemme. On veut donc

$$|l - x_n| < \epsilon \frac{|l|^2}{2}$$

Donc $\exists n_1 \forall n \geq n_1$, on a bien $|l - x_n| < \epsilon$

□

Exemple

On peut à présent calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_d n^d}{b_0 + \dots + b_f n^f}$$

$$a_d \neq 0, b_f \neq 0$$

Si $d > f$ alors $\lim = \pm \infty$

Si $d < f$ alors $\lim = 0$

Si $d = f$, alors $\lim = \frac{a_d}{b_f}$

Justification

La suite peut s'écrire

$$\frac{a_d + a^{d-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^{d-1}}}{b_0 \frac{1}{n^d} + \dots + b_f \frac{1}{n^{f-d}}}$$

Si $f = d$, $\rightarrow \frac{a_d}{b_f}$

Si $f > d$, $\rightarrow 0$

Si $f < d$, $\rightarrow \pm\infty$, selon signe de $\frac{a_d}{b_f}$

Proposition 34

Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $|a| < 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$$

Proposition 35

Si (x_n) est monotone et bornée, alors elle converge.

Preuve

Soit (x_n) croissante. Affirmation, $x_n \rightarrow s := \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Soit $\epsilon > 0$, $\exists n : x_n > s - \epsilon$ (def. de sup)

$\forall n \geq n_0 : s - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq s \Rightarrow |x_n - s| < \epsilon$

Idem, si elle était décroissante. □

Preuve

Remarque : $(x_n) \rightarrow 0 \iff (|x_n| \rightarrow 0)$.

$$\dots |x_n - 0| < \epsilon$$

Donc on va traiter le cas $a > 0$, alors $(a^n)_{n=1}^\infty$ est décroissante.

Bornée (par zero et 1) \Rightarrow elle admet une limite l .

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{n+1}}_{a \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n}$ Donc $l = al$. Si $l \neq 0$, $1 = a$ absurde, donc l nul. □

Exemple

Def (x_n) en posant $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$

Observons que $x_n \geq 2 > 0 \forall n$

Si (x_n) converge, alors

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + \frac{1}{x_n}) = 2 + \frac{1}{l}$$

Donc

$$l^2 - 2l - 1 = 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{1+1} = l$$

Or $l \geq 2 \Rightarrow l = 1 + \sqrt{2}$ si l existe.

A present, estimons $|x_n - l|$:

$$\begin{aligned} \left| x_n - 1 - \sqrt{2} \right| &= \left| 2 + \frac{1}{x_{n-1}} = \left(2 + \frac{1}{l} \right) \right| = \frac{|l - x_{n-1}|}{x_{n-1}l} \leq \frac{|x_{n-1} - l|}{4} \\ &\leq \dots \leq \frac{|x_{n-2} - l|}{4^2} \leq \frac{|2 - l|}{4^n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

car $\frac{1}{4^n} \rightarrow 0$

Lemme 37 (Deux gendarmes)

Soit $(x_n), (y_n), (z_n)$ trois suites avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$$

si $x_n \leq y_n \leq z_n \forall n$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = l$$

Preuve

repose sur le fait que

$$|x_n - l|, |z_n - l| < \epsilon \Rightarrow l - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \epsilon$$

montre $|y_n - l| < \epsilon$

□

4 Limsup et liminf

Definition 7 (Limsup et liminf)

Soit (x_n) une suite quelconque.

On definit la limite superieure par :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf_n \sup \{x_k, k \geq n\}$$

Attention : Ici on convient que

$$\sup(A) = +\infty$$

si A non majore

$$\inf(A) = -\infty$$

si A non minore

On definit la limite superieure par :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup_n \inf \{x_k, k \geq n\}$$

Notez : $z_n := \sup \{x_k : k \geq n\}$

Cela definit une suite decroissante et donc (z_n) converge vers son inf.

Conclusion : $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} x_k$

Lecture 5: mercredi 30

Wed 30 Sep

Theorème 38

(x_n) converge $\iff \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ Dans ce cas, la limite prend cette même valeur.

Preuve

$\Leftarrow :$

Soit $z_n = \sup \{x_p : p \geq n\}$,

$$y_n = \inf \{x_p : p \geq n\}$$

Rappel : $(z_n) \rightarrow LS$ et $(y_n) \rightarrow LI$

Or, $y_n \leq x_n \leq z_n$. Donc par les 2 gendarmes

$$\Rightarrow (x_n) \rightarrow LS = LI$$

$\Rightarrow :$

Hypothèse : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$.

A voir : $LS = LI = l$.

Montrons par exemple que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = l$$

(i.e. $LS = l$)

Soit $\epsilon > 0$.

$$\exists N \forall n \geq N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{et } \forall n \geq N : |z_n - LS| < \frac{\epsilon}{4}$$

Def. de $z_N \Rightarrow \exists p \geq N : |x_p| > z_N - \frac{\epsilon}{4}$

A present

$$|LS - l| \leq \underbrace{|LS - z_N|}_{< \frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|z_n - x_p|}_{< \frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|x_p - l|}_{< \frac{\epsilon}{2}}$$

avec $p \geq N$ et $N \geq N$ Donc $\forall \epsilon > 0 :$

$$|LS - l| < \epsilon$$

Donc $LS = l$

□

Theorème 39 (Première règle de d'Alembert)

Supposons $x_n \neq 0 \forall n$

Supposons que $\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|$ existe

Si $\rho < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

Si $\rho > 1$, alors (x_n) diverge.

Remarque

Si $\rho = 1$, on ne peut rien conclure

Exemple

- $x_n = n$ diverge, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$
- $x_n = \frac{1}{n}$ converge mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$

Preuve

Supposons $\rho < 1$.

A voir : $x_n \rightarrow 0$.

Soit $\rho < r < 1$. Convergence pour $\epsilon = r - \rho$: $\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - \rho \right| < r - \rho$

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < r$$

i.e. $|x_{n+1}| < r |x_n|$ de meme $|x_{n+2}| < r |x_{n+1}| < r^2 |x_n|$

Conclusion $\forall m \geq n_0 : |x_m| < r^{m-n_0} |x_{n_0}|$

Donc

$$\forall m \geq n_0 : |x_m| < r^m |x_{n_0}| r^{-n_0}$$

On sait que $\lim_{m \rightarrow +\infty} r^m = 0$ donc

$$0 \leq |x_m| \leq r^m c$$

avec c constante Cas $\rho > 1$.

On va montrer que $|x_n|$ est non bornée.

Soit $1 < r < \rho$.

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |x_{n+1}/x_n| > r$$

Donc

$$|x_{n+1}| > r |x_n|$$

comme avant :

$$x_m > r^{m-n_0} |x_{n_0}|$$

□

Remarque

Si $r > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = +\infty$ r^n est croissante donc il suffit de montrer que la suite est non bornée.

Si elle était bornée, soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} r^n \in \mathbb{R}$

Mais $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n+1} = rl$

Donc $l \neq 0 \Rightarrow 1 = r$ absurde.

Définition 8 (Sous-suite)

Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite.

Une sous-suite de (x_n) est une suite de la forme $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, ou $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite strictement croissante de \mathbb{N} .

Exemple

Si (x_n) est une suite, considérer :

$$x_2, x_3, x_5, x_7, x_{11}, x_{13}, \dots$$

Ici, $n_k = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$

Proposition 44

Si x_n converge, alors toute sous-suite converge vers la même limite.

Preuve

Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Soit $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ une sous-suite et $\epsilon > 0$.

A voir : $\exists k_0 \forall k > k_0 : |x_{n_k} - l| < \epsilon$

Or $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$.

Donc il suffit de choisir k_0 tq $n_{k_0} \geq n_0$.

(puisque la suite (n_k) est croissante.) □

Theorème 45 (Bolzano-Weierstrass)

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente

Preuve

On va construire une sous-suite qui converge vers $s := \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$

Ici, (x_n) est la suite en question et on pose

$$z_n = \sup \{x_p : p \geq n\}$$

Par récurrence, n_1 quelconque.

Supposons n_{k-1} construit et construisons n_k :

$$\exists N \forall n \geq N : |z_n - s| < \frac{1}{k}$$

Choisissons un $n \geq N, n_{k-1} + 1$

$$\exists p \geq n \text{ t.q. } x_p > z_n - \frac{1}{k}$$

On définit $n_k = p$ ($n_k > n_{k-1}$)

$$\text{Or, } \underbrace{|x_{n_k} - s|}_{< \frac{1}{k}} \leq \underbrace{|x_{n_k} - z_n|}_{< \frac{1}{k}} + \underbrace{|z_n - s|}_{< \frac{1}{k}}$$

Donc $(x_{n_k}) \rightarrow s$ ($k \rightarrow \infty$) □

Définition 9 (Point d'accumulation)

x est un point d'accumulation de la suite x_n s'il existe une sous-suite qui converge vers x .

Exemple

$$x = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$x = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

4.1 Suites de Cauchy

Definition 10 (Suites de Cauchy)

La suite (x_n) est dite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < \epsilon$$

Attention :

Il ne suffit pas de comparer x_n et x_{n+k} pour k fixe.

Exemple

$$x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\text{Cauchy} \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall k \in \mathbb{N} : |x_n - x_{n+k}| < \epsilon$$

Lemme 48

Si (x_n) converge, elle est de Cauchy.

Preuve

Soit $\epsilon > 0$, soit l la limite.

Hypothèse :

$$\text{avec } \frac{\epsilon}{2} : \exists N \forall n \geq N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

Si $n, n' \geq N$

$$|x_n - x_{n'}| \leq |x_n - l| + |x_{n'} - l| < \epsilon$$

□

Theorème 49 (Convergence des suites de Cauchy)

Toute suite de Cauchy converge

Preuve

Soit (x_n) de Cauchy.

Lemme 50

(x_n) est bornée.

Preuve

Soit $\epsilon = 10$

$$\forall N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < 10$$

Donc (x_n) est bornée par

$$\max(|x_N| + 10, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|)$$

□

Appliquer Bolzano-Weierstrass

\exists sous-suite (x_{n_k})

qui converge, soit l sa limite. A voir (x_n) converge vers l .

soit $\epsilon > 0 \exists k_0 \forall k \geq k_0 |x_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2}$

$$\exists N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < \frac{\epsilon}{2}$$

Si $n \geq N, n_{k_0}$ alors

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < \epsilon$$

□

Lecture 6: lundi

Mon 05 Oct

Remarque

Ecriture decimale : 3.1415... ou encore 0.333... veut dire

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \dots$$

une somme infinie de fractions. La différence entre le n ieme terme et le n' ieme terme :

$$\leq 10^{-n} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Cauchy}$$

Cette limite est une "somme infinie".

5 Series

But : definir les "sommes infinies" .

$$\rightarrow \begin{cases} \text{Existe?} \\ \text{Valeur?} \end{cases}$$

Exemple

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$$

ou encore

$$\exp(x) = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \dots$$

ou

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Definition 11 (Serie)

Le symbole $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ représente

$x_0 + x_1 + x_2 + \dots$ et est défini par

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x_k$$

On appelle

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

une série et on dit qu'elle converge/diverge lorsque la suite $s_n := x_0 + \dots + x_n$ le fait.

Corollaire 53

Si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ existent, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

Preuve

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n, s_n = \sum_{k=0}^n x_k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n, t_n = \sum_{k=0}^n y_k$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n, \text{ où}$$

$$u_n = (x_0 + y_0) + \dots + (x_n + y_n) = s_n + t_n$$

Donc la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n + t_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

□

Corollaire 54

Pour $a \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} ax_n = a \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

existe.

Sans preuve.

Corollaire 55

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n \text{ existe si } \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$
existe et vaut

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n - (x_0 + x_1 + \dots + x_{n_0-1})$$

n

Corollaire 56 (Critere de Cauchy pour les séries)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ converge} \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : \left| \sum_{p=N}^n x_p \right| < \epsilon$$

(Dans ce cas, $|\sum_{n=N}^{\infty} x_n| \leq \epsilon$)

Preuve

Appliquer Cauchy à la suite s_n :

$$\exists n_0 \forall n, n' > n_0 : |s_n - s_{n'}| < \epsilon$$

Alors

$$\left| \sum_{p=n'+1}^n x_p \right| < \epsilon$$

Exemple

Ecriture decimale,

Proposition 58

Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

Preuve

Appliquer Cauchy à $\underbrace{s_n - s_{n-1}}_{=x_n}$

Attention, la réciproque est FAUSSE.

□

2 Exemples

Proposition 59 (Serie Geometrique)

Soit $r \in \mathbb{R}$ avec $|r| < 1$, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Preuve

Soit

$$s_n = r^0 + r^1 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n+1} = 0$$

□

Donc $s_n \rightarrow \frac{1}{1-r}$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$$

Proposition 60 (Série Harmonique)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge (vers } +\infty)$$

Preuve

Considérons

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \underbrace{\frac{1}{2^n+1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{2^{n+1}-2^n=2^n \text{ termes.}} + \dots$$

Tous ces termes sont $\geq \frac{1}{2^{n+1}}$

Cette somme est :

$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} \geq 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

□

Contredit Cauchy pour $\epsilon = \frac{1}{2}$.

Astuce utile :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Preuve

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \quad \square$$

Donc ça converge.

C'est une série télescopique

Proposition 61 (Critère de Comparaison)

Supposons $0 \leq x_n \leq y_n$.

Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ converge, alors } \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ aussi.}$$

Preuve

$$s_n = x_0 + \dots + x_n$$

est croissante. Donc converge $\iff (s_n)$ bornée.

Mais $y_0 + \dots + y_n$ converge \Rightarrow bornée et $s_n \leq y_0 + \dots + y_n \Rightarrow (s_n)$ bornée \square

Remarque

De plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

Si, par contre,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ diverge}$$

Corollaire 63

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge.

Preuve

$$\forall n \geq 2 : \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Or

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \text{ converge.}$$

Donc, par comparaison, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge .}$$

□

Lecture 7: mercredi

Wed 07 Oct

Definition 12 (Séries Alternées)

(x_n) est alternée si $x_n \cdot x_{n+1} \leq 0 \forall n$

Theorème 64

Soit (x_n) alternée, $|x_n|$ décroissante, et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ converge.}$$

Exemple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge. (série harmonique alternée)⁵

Preuve

On utilise cauchy.

Soit $n, m \in \mathbb{N}$.

$$\underbrace{x_n + x_{n+1}}_{\geq 0} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m-1} + x_{n+m}$$

Cas $x_n \geq 0$:

Cas où n pair

$$0 \leq \sum_{p=n}^{n+m} x_p \leq x_n$$

Si m impair :

idem

Que n soit pair ou impair

$$\left| \sum_{p=n}^{n+m} x_p \right| \leq |x_n|$$

5. En fait la série converge vers $-\log 2$

Or, soit $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \Rightarrow$$

$$\exists N \forall n > N |x_n| \leq \epsilon.$$

$$\text{Donc } \forall n > N, m |$$

$$|x_n + \dots + x_{n+m}| < \epsilon$$

□

5.0.1 Un calcul naïf (avec la série harmonique alternée)

Soit $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, existe par le théorème.

Note : $S < 0$.

$$s_n = \underbrace{-1 + \frac{1}{2}}_{=-\frac{1}{2}} - \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{<0} - \dots + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$s_n < -\frac{1}{n}, \forall n \text{ pair} \Rightarrow S \leq -\frac{1}{2}$$

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

à chaque terme x_n , on associe x_{2n}

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \dots \\ &= \frac{1}{2}(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots) = \frac{1}{2}S \end{aligned}$$

Donc $S = \frac{1}{2}S \Rightarrow S = 0$ Faux!

Conclusion :

On ne peut pas permuter (en général) les termes d'une série convergente (somme infinie)

Definition 13

On dit que la somme de

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge absolument si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

converge.

Note : la valeur

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

ne nous intéresse pas

Remarque

Si $x_n \geq 0 \forall n$, aucune différence entre “convergence” et “convergence absolue”.

Exemple

— La série harmonique alternée converge, mais pas absolument.

Lemme 68

Convergence absolue implique la convergence.

Preuve

$$\forall n : 0 \leq x_n + |x_n| \leq 2|x_n|$$

Donc convergence absolue \Rightarrow

$$\sum (x_n + |x_n|)$$

converge.

Or $-\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ converge.

Somme des deux sommes ci-dessus, implique que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

□

Theorème 69

Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge absolument, alors toute permutation converge vers la même somme.

Exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Clarification :

Soit σ une permutation de \mathbb{N} , i.e. bijection.

La nouvelle série sera

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ pour } y_n = x_{\sigma(n)}$$

Notons $s_n = x_0 + \dots + x_n$ et

$$t_n = y_0 + \dots + y_n = x_{\sigma(0)} + \dots + x_{\sigma(n)}$$

Le théorème dit : si $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ existe, alors $\lim s_n = \lim t_n$.

Preuve

1er cas "facile".

Supposons $x_n \geq 0 \forall n$.

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sup \{s_n | n \in \mathbb{N}\}$

On va montrer que $\underbrace{\sup_n s_n}_{=:s} \geq \underbrace{\sup_n t_n}_{=:t}$ et que $\sup_n s_n \leq \sup_n t_n$

Pour $s \geq t$:

Soit $\epsilon > 0$. Or, par déf, $\exists n t_n > t - \epsilon$

ie

$$y_0 + \dots + y_n > t - \epsilon$$

ie

$$x_{\sigma(0)} + \dots + x_{\sigma(n)} > t - \epsilon$$

Soit $m = \max_{i=0, \dots, n} \sigma(i)$, alors

$$s_m \geq t - \epsilon$$

donc

$$s = \sup s_n > t - \epsilon$$

vrai $\forall \epsilon > 0 \Rightarrow s \geq t$

En considérant σ^{-1} , on obtient de même $t \geq s \Rightarrow s = t$, donc le théorème vrai SI

$x_n \geq 0$.

2ème cas : $x_n \leq 0 \forall n$, idem

Cas général :

Posons $x_n = x'_n + x''_n$, ou $x'_n = \max(x_n, 0)$ et $x''_n = \min(x_n, 0)$, alors

$$x_{\sigma(n)} = x'_{\sigma(n)} + x''_{\sigma(n)}$$

On conclut en appliquant le cas (1) à x'_n et (2) ou x''_n

□

Theorème 71

Supposons que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge, mais pas absolument.

$\forall l \in \mathbb{R} \exists$ permutation σ t.q.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = l.$$

Lecture 8: Series fin

Mon 12 Oct

Theorème 72 (Critere de d'Alembert 2)

Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \rho$ existe.

Si $\rho < 1$ alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

converge absolument.

Si $\rho > 1$, alors elle diverge.

Preuve

Si $\rho > 1$, x_n diverge donc ne converge pas vers 0, donc $\sum x_n$ diverge.

Supposons $\rho < 1$. $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{\rho+1}{2}$.

On déduit que

$$|x_n| \leq \left(\frac{\rho+1}{2} \right)^{n-n_0} |x_{n_0}|$$

Donc

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|$$

peut etre comparee à

$$|x_{n_0}| \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{\rho+1}{2} \right)^{n-n_0}$$

Or la série ci-dessus est une série géométrique avec $\frac{\rho+1}{2} < 1$, donc elle converge.

Donc

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|$$

converge car la série géométrique converge, il suit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

converge absolument. □

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument.

Preuve

$x_n = \frac{x^n}{n!}$, alors

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| \rightarrow 0$$

□

Exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$x_n = \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Alors

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \left| \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)} \right| \rightarrow 0$$

Remarque

Si $\rho = 1$ on ne peut rien conclure.

Exemple

$$\sum \frac{1}{n} \text{ diverge, or } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

Idem pour

$$\sum n$$

Exemple

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge, or

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

Proposition 78

On admet que

$$\forall x \geq 0 \exists ! x^{\frac{1}{n}} : (x^{\frac{1}{n}})^n = x$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

Preuve

Posons $\epsilon_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$, (a voir : $\epsilon_n \rightarrow 0$).

$$\begin{aligned} n &= ((1 + \epsilon_n)^{\frac{1}{n}})^n = 1 + n\epsilon_n + \frac{n(n-1)}{2} \underbrace{\epsilon_n^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} \epsilon_n^2 \\ \Rightarrow \epsilon_n &\leq \left(\frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

□

Theorème 79 (Critere de la racine)

Soit $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} (|x_n|)^{\frac{1}{n}}$.

Si $L < 1$, alors $\sum x_n$ converge absolument

Si $L > 1$, alors $\sum x_n$ diverge.

Exemple

Soit

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Exemple

1.

$$\sum \frac{x_n}{n!}, \text{ alors}$$

$$|x_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n!}^{\frac{1}{n}} \text{ donc } |x_n| \rightarrow 0 \text{ (exo)}$$

2.

$$\sum n \text{ diverge, } n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

3.

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge, or

$$\frac{1}{n^2}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} \rightarrow 1$$

Preuve

Si $L > 1$,

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \left\{ |x_k|^{\frac{1}{k}} : k \geq n \right\}$. Donc $\exists n_0 \forall n > n_0 : z_n > 1$, i.e.

$$\exists k \geq n : |x_k| > 1^k = 1$$

x_n ne converge pas vers zero \implies la série ne converge pas.

Si $L < 1$,

$\exists n_0 \forall n > n_0 : z_n < \frac{1+L}{2}$, or

$$|x_n| \leq z_n^n < \left(\frac{1+L}{2} \right)^n$$

On conclut par converge avec la série géométrique. □

Exemple

Posons $x_0 = 0$, et $x_{n+1} = \frac{1+nx_n}{2^{n+1}}$

Notons (exo par récurrence)

$$\forall n \leq 2^n$$

Donc

$$0 \leq x_n \leq 1$$

On a

$$x_n^{\frac{1}{n}} = \frac{(n+1)^{\frac{1}{n}}}{2 \cdot 2^{\frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Le critère s'applique : $L < 1$.

Lemme 83

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$$

Preuve

A voir : $(\sqrt[n]{n!})^2 \rightarrow +\infty$.

Or $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \geq \frac{n}{2} (\frac{n}{2} + 1) \cdot \dots \cdot n$

Si n pair.

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} (\frac{n}{2} + 1) \cdot \dots \cdot n \\ \geq (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Donc $\sqrt[n]{(n!)^2} \geq \sqrt[n]{(\frac{n}{2})^n} = \frac{n}{2} \rightarrow \infty$

□

6 Fonctions

En général, fonctions = applications = map.

En analyse I, fonction = fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} ou sur une partie $A \subseteq \mathbb{R}$.

En analyse II, on ira de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Lecture 9: mercredi

Wed 14 Oct

Definition 14

On dit qu'une fonction f est définie au voisinage de $x \in \mathbb{R}$, si $\exists \epsilon > 0$: f définie sur

$$]x - \epsilon, x[\text{ et }]x, x + \epsilon[$$

Exemple

$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$ défini au voisinage de 0.

Definition 15

Soit f définie au voisinage de x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

signifie

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Theorème 85

Soit f définie au voisinage de x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall \text{ suite } (a_n)_{n=1}^{\infty}$$

qui converge vers x_0 et $a_n \neq x_0, \forall n$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$$

Remarque

A priori, f n'est pas définie en a_n , mais $\exists n_0, \forall n > n_0 : a_n \in \text{domaine de définition}$ car f définie au voisinage de x_0

Preuve

\Rightarrow

Soit $a_n \neq x_0$, une suite convergent vers x_0 . A voir : Soit $\epsilon > 0$, cherche $n_0 \forall n > n_0 :$

$$|f(a_n) - l| < \epsilon.$$

Par hypothese, $\exists \delta > 0 \forall x$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \quad (1)$$

Appliquer $\lim a_n = x_0$ à $\delta :$

$$\exists n_0, \forall n > n_0 : |a_n - x_0| < \delta$$

Appliquer à présent 1 à $x = a_n$

\Leftarrow

Soit $\epsilon > 0$, on cherche $\delta > 0$

Supposons par l'absurde qu'aucun δ satisfait la définition.

En particulier, $\delta = \frac{1}{n}$

$$\exists x_n : 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - l| \geq \epsilon$$

Or

$$x_n \neq x_0 \text{ et } (x_n) \rightarrow x_0$$

Par hypothèse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$$

En particulier, pour ϵ ,

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : |f(x_n) - l| < \epsilon \quad \square$$

Corollaire 87

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} l$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l'$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + f'(x) = l + l'$$

Idem pour produit.

Corollaire 88

Si $f(x) \geq a$, $\forall x$ au voisinage de x_0 et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \text{ alors } l \geq a$$

Corollaire 89

Si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

Corollaire 90

Pour

$$\lim \frac{g(x)}{f(x)}$$

il suffit de traiter $\lim \frac{1}{f(x)}$.

Lemme 91

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq 0$, alors

$$\exists \epsilon > 0 \forall x \in]x_0 - \epsilon, x_0[\cup]x_0, x_0 + \epsilon[$$

tel que $f(x) \neq 0$

Preuve

$$|f(x) - l| < \frac{|l|}{2}$$

dans un voisinage de x_0 , alors $f(x) \neq 0$ \square

Corollaire 92

Si $\lim f(x) = l = \lim g(x)$ et

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \forall x \text{ au voisinage de } x_0$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

Corollaire 93 (Cauchy)

Soit f définie au voisinage de x_0 , alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ existe} \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \text{ avec}$$

$$0 < |x_i - x_0| < \delta \quad (i = 1, 2)$$

on a

$$|f(x_i) - f(x_2)| < \epsilon$$

Lemme 94

Si $\lim f(a_n)$ existe \forall suite $(a_n \neq x_0)$ convergeant vers x_0 , alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

existe

Preuve

Il suffit de montrer que toutes ces limites $f(a_n)$ ont la même valeur.

En effet, on peut alors appliquer le théorème et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

Sinon, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l \neq l' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a'_n)$ pour deux telles suites a_n et a'_n .

A présent

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{si } n \text{ pair} \\ a'_n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

□

or $f(b_n)$ converge absurde car elle admet deux sous-suites avec limites distinctes l, l' .

Preuve

Preuve du corollaire ci-dessus.

Grace au lemme, il suffit de montrerr que \forall suite $a_n \rightarrow x_0$, la suite $f(a_n)$ est de Cauchy.

Par hypothèse, $\exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 : 0 < |x_i - x_0| < \delta$ implique

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Or, $\exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - x_0| < \delta$.

Applique $a_n = x_1$ et $a_m = x_2$ donne que $f(a_n)$ est de cauchy.

□

Corollaire 95

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l'$, alors $l = l'$.

Remarque

On a implicitement utilisé les concept de $+$, \cdot , \leq sur les fonctions.

Ce n'est pourtant pas un corps.

Par exemple, $\forall x, y \in \text{corps}$

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$$

Les fonctions ont une opération supplémentaire

$$f \circ g$$

est définie par

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

Soit $g : A \rightarrow B$ des parties de \mathbb{R} , et $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ avec g défini au voisinage de x_0 et f au voisinage de g_0 .

Proposition 97

Supposons $g(x) \neq g_0 \forall x$ au voisinage de x_0

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$ et $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = l$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f \circ g(x) = l$$

Preuve

Soit $\epsilon > 0$, à voir $\exists \delta > 0 \forall x :$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - l| < \epsilon$$

2eme hup nous dit

$$\exists \eta > 0 \forall y : |y - y_0| < \eta \Rightarrow |f(y) - l| < \epsilon$$

Idee : appliquer la premiere hypothèse à η et poser $y = g(x)$.

Ca marche, tant que $y \neq y_0$. □

Exemple

Exemple délicat :

Soit

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Clairement $\lim_{x \rightarrow 0} = 0$.

On pose que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On voit que $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 0$.

Or

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))$$

n'existe pas.

Lecture 10: fonctions

Mon 19 Oct

6.1 Continuité

Definition 16

Soit f définie au voisinage de x_0 .

Alors f est dite continue en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Donc f continue (en x_0) si on peut "sortir f de la limite" (en x_0)

Proposition 99

f continue en $x_0 \iff$ toute suite a_n tendant vers x_0 , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

Preuve

Théorème de traduction pour $l = f(x_0)$

□

Remarque

Pour parler de continuité en x_0 , il faut que f soit définie en x_0 et au voisinage de x_0

Corollaire 101

Si f et g sont continues en x_0 , alors $f + g$ et $f \cdot g$ aussi.

Preuve

Idem que avant

□

Corollaire 102

Si de plus $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est cont. en x_0 .

Remarque

On a montré que alors dans ce cas il existe un voisinage de x_0 où $g(x) \neq 0$

Proposition 104

Soit g continue en x_0 et f continue en $g(x_0)$, alors $f \circ g$ est continue en x_0 .

Preuve

Ecrivons la définition de g continue en x_0 :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$$

Soit $\epsilon > 0$. Cherche $\eta > 0$ tq $\forall x$:

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(\underbrace{g(x)}_{=y}) - f(g(x_0))| < \epsilon$$

Continuité de f en $g(x_0)$ appliquée à ϵ donne $\theta > 0$ tq $\forall y$

$$|y - g(x_0)| < \theta \Rightarrow |f(y) - f(g(x_0))| < \epsilon$$

continuité de g en x_0 appliquée à θ

$$\exists \eta > 0 \forall x \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \theta$$

□

Pour $y = g(x)$ on a montré ce qu'il fallait.

Definition 17 (Terminologie Supplémentaire)

f est définie au voisinage à gauche de x_0 si $\exists \epsilon > 0$ tq f est définie sur $]x_0 - \epsilon, x_0[$.

De même à droite : $]x_0, x_0 + \epsilon[$

Definition 18

Soit f définie au voisinage à droite de x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0 >} = l$$

signifie

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x > x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

La limite à gauche est définie de la même manière.

Definition 19

f est continue à droite en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0 >} f(x) = f(x_0)$$

Idem à gauche.

Exercice 105

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ existe} \iff \text{les limites à gauche et à droite existent et coïncident.}$$

Definition 20

f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a , à gauche en b .

Definition 21 (Notation)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

si

$$\forall R \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > R$$

Idem pour $-\infty$

Definition 22 (Notation)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

signifie

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall x > n_0 : |f(x) - l| < \epsilon$$

On note $C([a, b])$ ou parfois $C^0([a, b])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$

Theorème 106

Toute fonction continue sur $[a, b]$ est bornée.

Preuve

Supposons par l'absurde f non-bornée (disons sans perte de généralité non majorée).

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n : f(x_n) > n$.

On a une suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ de $[a, b]$

Par Bolzano-Weierstrass implique qu'on a une sous-suite x_{n_k} qui converge vers $x \in [a, b]$

f continue en $x \iff f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k})$

□

Theorème 107

Toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue atteint son sup donc max.

Preuve

On sait déjà que f est bornée, soit donc $s := \sup \{f(x) | x \in [a, b]\}$

Si par l'absurde $f(x) \neq s \forall x \in [a, b]$ posons

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - s}$$

g est continue et donc g est bornée, disons par B .

Absurde car implique $|f(x) - s| > \frac{1}{B}$.

□

Proposition 108

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I .

Soit $A \subseteq I$ une partie dense. Si

$$f|_A = g|_A$$

Alors $f = g$ sur tout I

Preuve

Soit $x \in I$. Par densité,

$$\exists (a_n)$$

suite de A avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x$.

$$\text{Continuité } f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(a_n) = g(x) \quad \square$$

Lecture 11: limites de fonctions

Wed 21 Oct

Comment définir 3^π ?

Exemple

Supposons que f soit définie et continue sur $I \setminus \{x_0\}$, où I est un intervalle ouvert et $x_0 \in I$.

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe, on obtient une fonction continue sur I en définissant $f(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Ca s'appelle le "prolongement par continuité".

Un exemple de preuve de continuité :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ sur }]0, +\infty[$$

Soit $\epsilon > 0$, cherche δ

Veut : $\forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon$.

Or, $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \epsilon$ si $\delta = \sqrt{x_0}\epsilon > 0$

Remarque

Ce δ montre la continuité en $y \forall y \geq x_0$

Definition 23

f est dite uniformément continue sur I (où I est un intervalle ou plus généralement $I \subseteq \mathbb{R}$) si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x_0 \in I :$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Comparer à f continue sur I :

$$\forall x_0 \in I \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x :$$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Le point clé est que le delta dépend que de ϵ et pas de x_0 .

Exemple

$f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1, +\infty[$

Et aussi sur $[\frac{1}{100}, +\infty[$.

Exemple

$f(x) = x^2$ non uniformément continu sur $[0, +\infty[$. Considérons

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|(x + x_0)$$

Proposition 113

Si f et g sont uniformément continues sur I , alors $f + g$ aussi. *Attention :*

Faux pour $f.g$ et pour $\frac{1}{f}$.

Exercice 114

Supposons f uniformément continue sur $[a, b]$ et $[b, c]$, alors f uniformément continue sur $[a, c]$

Theorème 115

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$

Remarque

Donc $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$.

Preuve

Si, par l'absurde, f n'est pas uniformément continue, alors :

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, x_0 :$$

$$|x - x_0| < \delta \text{ mais } |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on applique ça à $\delta = \frac{1}{n}$, alors

$$\Rightarrow \exists y_n, z_n : |y_n - z_n| < \frac{1}{n} ; |f(y_n) - f(z_n)| \geq \epsilon$$

Car y_n suite de $[a, b]$, par Bolzano-Weierstrass $\Rightarrow \exists$ sous-suite y_{n_k} convergente.

Alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} z_{n_k} = y$ car $|z_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$.

Le théorème de traduction implique

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(y_{n_k}) = f(y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(z_{n_k})$$

Mais $|f(y_{n_k}) - f(z_{n_k})| \geq \epsilon$.

↯

□

Theorème 117 (Théorème de la valeur intermédiaire (TVI))

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

$\forall c$ entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists x \in [a, b] : f(x) = c$.

Preuve

Sans perte de généralité, $f(a) < c < f(b)$; et $c = 0$ (sinon remplacer f par $f - c$).

Supposons par l'absurde $f(a) < 0 < f(b)$ mais $f(x) \neq 0 \forall x$.

Alors $\frac{1}{f}$ est continue. Donc bornée. Donc $\exists \alpha > 0$ tq $|f(x)| \geq \alpha \forall x$.

On sait que f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Appliquer à α .

Donc, $\exists \delta > 0 \forall y, z : |y - z| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| < \alpha$.

Prenons $n \in \mathbb{N}$ avec $\frac{b-a}{n} < \delta$ (Archimède)

Posons $a_i = a + i \frac{b-a}{n}$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Donc $\forall i \forall y, z \in [a_i, a_{i+1}]$

$$|f(y) - f(z)| < \alpha$$

□

Donc $\forall i$, soit f est $\leq -\alpha$ sur tout $[x_i, x_{i+1}]$ soit $\geq \alpha$ pour tout $[x_i, x_{i+1}]$.

Or $f(a) < 0$ donc $\leq -\alpha$ Donc $f \leq -\alpha$ sur $[a_0, a_1]$

Or $f(a) < 0$ donc $\leq -\alpha$ Donc $f \leq -\alpha$ sur $[a_1, a_2]$, etc.

Or $f(a_n) = b$, donc \nexists

Lecture 12: Fonctions

Mon 26 Oct

Corollaire 118

$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \geq 0 : \exists y \geq 0 : y^n = x$

Comme ce y est unique (axiome de $<$) on peut donc définir $\sqrt[n]{x} = y$

Preuve

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(y) = y^n$.

f est continu, $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Rappel : i.e.

$$\exists y_0 \forall y \geq y_0 : f(y) \geq x$$

TVI pour $[0, y] : \exists z$ tq $f(z) = x$.

□

Rappel

- $ax + b = 0$ admet une solution (en x) si $a \neq 0$
- $ax^2 + bx + c$ admet parfois une solution
- $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ admet une solution ($a \neq 0$)
- degré 4 admet parfois une solution
- degré 5 : pas de formule avec "juste" des racines.

Corollaire 119

Tout polynôme de degré impair admet des racines.

Preuve

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

n impair, $a_n \neq 0$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (si $a_n > 0$ $-\infty$ si $a_n < 0$)

En effet

$$a_n x^n (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{-1} + \dots)$$

Donc $\exists x_1 : f(x_1) > 0$ (resp. < 0).

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (resp. $+\infty$).

Donc

$$\exists x_2 : f(x_2) < 0$$

□

TVI sur $[x_2, x_1] \Rightarrow \exists x : f(x) = 0$

Corollaire 120

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

$f([a, b]) = [m, M]$ où $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$

Proposition 121 (1er theoreme de la fonction implicite)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement monotone.

Donc (corollaire précédent) , f est bijective

$$f : [a, b] \rightarrow [m, M]$$

i.e. $\exists f^{-1} : [m, M] \rightarrow [a, b]$

Alors f^{-1} est continue

Preuve

Sans perte de généralité, f strictement croissante.

Lemme 122

Soit $g : [m, M] \rightarrow [a, b]$ surjective et strictement croissante.

Alors g est continue

Preuve

En x_0

Soit $\epsilon > 0 : \exists x_1 : g(x_1) > g(x_0) - \epsilon$

De même, $\exists x_2 : g(x_2) < g(x_0) + \epsilon$.

Donc sur $[x_1, x_2]$ f prend des valeurs entre $g(x_0) - \epsilon$ et $g(x_0) + \epsilon$

□

Appliquer à $g = f^{-1}$.

C'est surjectif, par définition du domaine de f^{-1} , i.e. l'image de f .

Corollaire 123

Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue.

Alors $\exists x \in [a, b] : f(x) = x$.

Preuve

Considérer g

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

avec

$$g(x) = x - f(x)$$

Donc

$$g(a) = a - f(a) \leq 0$$

$$g(b) = b - f(b) \geq 0$$

$$TVI \Rightarrow \exists x : g(x) = 0 \text{ i.e. } f(x) = x$$

□

7 Suites de Fonctions

But : donner un sens à

" f_n converge vers une fonction f "

Definition 24

(f_n) converge ponctuellement vers f si

$$\forall x : \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

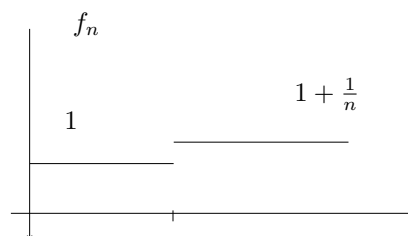


FIGURE 1 – fonction1

Exemple

—

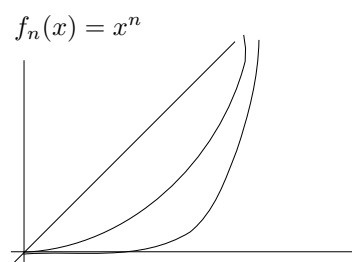


FIGURE 2 – fonction2

— Ponctuellement, $f_n \rightarrow f$ où

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Remarque

$$\lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = 1$$

On pourrait donc prendre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = 1$$

Par contre

$$\lim_{\underbrace{x \rightarrow 1}_{<}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

Donc, attention à la continuité !

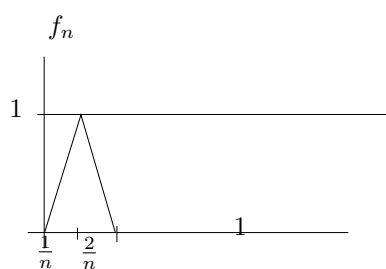


FIGURE 3 – fonction3

— f_n est continue pour tout n ,

$$\max f_n = 1$$

Or $f_n \rightarrow 0$ ponctuellement.

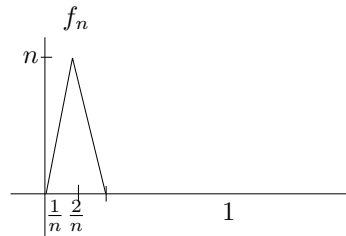


FIGURE 4 – fonction4

— Or, à nouveau, $f_n \rightarrow f = 0$

Definition 25 (Convergence uniforme de fonctions)

Une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge uniformément sur $A \subseteq \mathbb{R}$ sur f si :

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Lecture 13: Suites de Fonctions 2

Wed 28 Oct

Remarque

La convergence uniforme implique la convergence ponctuelle

Proposition 127

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément.

Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)}_{=l_n}$$

existe.

Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

Preuve

Soit f la limite de (f_n) .

Hyp : $\forall n : l_n = \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$ existe et $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n$.

But : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Soit donc $\epsilon > 0$, alors

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |l_n - l| < \frac{\epsilon}{3}$$

De plus, par convergence uniforme

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 \begin{cases} |l_n - l| < \frac{\epsilon}{3} \\ \forall x : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \end{cases}$$

Donc

$$\exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - l_{n_0}| < \frac{\epsilon}{3}$$

Soit $0 < |x - x_0| < \delta$, on veut

$$|f(x) - l| < \epsilon$$

Or

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - l_{n_0}| + |l_{n_0} - l| < \epsilon \quad \square$$

Theorème 128

Toute limite uniforme de fonctions continues est continue.

Preuve

Soit f la limite uniforme de (f_n) , f_n est continue $\forall n$.

Soit x_0 avec f_n définie au voisinage de x_0 .

A voir : f continue en x_0 , i.e.

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f(x_0) \quad \square$$

Theorème 129 (Dini)

Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions continues.

Si (f_n) converge ponctuellement vers f continue, alors f_n converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Exercice 130

Trouver un contre exemple sans l'hypothèse décroissante.

Preuve

Par l'absurde,

$$\exists \epsilon > 0 \forall n_0 \exists n \geq n_0 \exists x_n : |f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$$

Par Bolzano-Weierstrass \Rightarrow

(x_{n_k}) qui converge vers x

et tel que

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \epsilon$$

Convergence de $f_n(x)$ implique

$$\exists k : |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Continuité de f_{n_k} et de f en x

$$\exists \delta > 0 \forall y : |x - y| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \\ |f_{n_k}(y) - f_{n_k}(x)| < \frac{\epsilon}{3} \end{cases}$$

Choisir un k' tel que $|x_{n_{k'}} - x| < \delta$

Comme

- $|f(x) - f(x_{n_k})| < \frac{\epsilon}{3}$
- $|f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_{n_{k'}})| < \frac{\epsilon}{3}$
- $f \leq f_{n_{k'}} \leq f_{n_k}$

Donc

$$|f_{n_{k'}}(x_{n_{k'}}) - f(x_{n_{k'}})| < \epsilon$$

□

Absurde.

8 Dérivation

Definition 26

Soit f définie au voisinage de x_0 .

On dit que f est dérivable en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe.

Alors cette limite s'appelle la dérivée de f en x_0 , notée $f'(x_0)$.

Remarque

Si f est dérivable partout, alors on obtient une fonction f' .

On définit de même la dérivée gauche et droite.

Proposition 132

Si f et g sont dérivables en x_0 , alors $f + g$ aussi et

$$(f + g)' = f' + g'$$

Preuve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

□

Proposition 133

Soit f définie au voisinage de x_0 . Alors

$$f \text{ dérivable en } x_0 \iff \exists a \in \mathbb{R} \exists \text{ fonction } r \text{ au voisinage de } x_0 \text{ tel que}$$

$$1. f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$$

Dans ce cas, $a = f'(x_0)$

Lecture 14: Derivees

Mon 02 Nov

Corollaire 134

f dérivable en x_0 implique f continue en x_0 .

Preuve

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{continue pour tout } x} + \underbrace{r(x)}_{\text{continu en } x_0}$$

□

Proposition 135

Soient f, g dérivables en x_0

- $f + g$ est dérivable en x_0 et $(f + g)' = f' + g'$
- fg est dérivable en x_0 et

$$(fg)' = f'g + fg' \text{ (règle de Leibnitz)}$$

- Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Preuve

- Somme est déjà faite
- Produit :

$$\begin{aligned} & \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{\rightarrow g(x_0)} + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow g'(x_0)} \end{aligned}$$

- Quotient :

Il suffit d'appliquer Leibnitz à f et $\frac{1}{g}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \frac{1}{g}\right)' = f' \frac{1}{g} + f \left(\frac{1}{g}\right)'$$

Il suffit de montrer que

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

Soit donc $g(x_0) \neq 0$.

$$\frac{\frac{1}{g(x) - \frac{1}{g(x_0)}}}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \quad \square$$

Exemple

Soit $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, $f(x) = x^n = \frac{1}{x^{|n|}}$ Donc

$$(x^{|n|})' = |n|x^{|n|-1}$$

Donc, par la proposition

$$f'(x) = \frac{-|n|x^{|n|-1}}{x^{2|n|}}$$

Or $|n| = -n$, alors

$$f'(x) = nx^{-n-1+2n} = nx^{n-1}$$

Proposition 137

Donc, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Attention, ne pas écrire $(x^n)'$

Theorème 138 (Chain Rule)

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

Soit g dérivable en x_0 et f en $g(x_0)$, alors $f \circ g$ est dérivable en x_0 avec la formule ci-dessus.

Preuve

Définissons h par

$$h(y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} & \text{si } y \neq g(x_0) \\ f'(g(x_0)) & \text{si } y = g(x_0) \end{cases}$$

Alors h est continue en $g(x_0)$ (par définition de f dérivable en $g(x_0)$).

On a alors

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} h(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \end{aligned} \quad \square$$

Theorème 139

Soit $f :]a, b[\rightarrow]c, d[$ bijective, continue.

Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Preuve

$$\begin{aligned} L &= \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\ &= \left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} \right)^{-1} \end{aligned}$$

En posant $x = f^{-1}(y)$, on obtient

$$\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)^{-1}$$

Or, f^{-1} est continue, donc quand $y \rightarrow y_0$, on a que $x \rightarrow x_0$.

Donc, la limite pour $y \rightarrow y_0$ de L est

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)^{-1} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

Lecture 15: Derivees

Wed 04 Nov

Exemple

Soit $f(x) = \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$.

Donc la dérivée est

$$f'(x) = \frac{1}{q(x^{\frac{1}{q}})^{q-1}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}$$

On sait donc dériver des puissances rationnelles quelconques

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} = g(h(x))$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= p(x^{\frac{1}{q}})^{p-1} \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} \\ &= \frac{p}{q} x^{\frac{p-1}{q} + \frac{1}{q} - 1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} \end{aligned}$$

8.1 Applications de la dérivée**8.1.1 Recherche d'extremums****Définition 27 (Point Critique)**

x est un point critique de f si f est dérivable en x et $f'(x) = 0$.

Remarque

Bien que $x = 0$ soit un point critique de $f(x) = x^3$, cette fonction est strictement croissante.

Definition 28

x est un maximum local de f si il existe un voisinage de x sur lequel x est un (vrai) maximum.

La définition pour les minimas est équivalente.

Plus généralement, on parlera d'extremums.

Proposition 142

Soit f dérivable en x_0 (donc définie dans son voisinage).

Si x_0 est un extremum local de f , alors c'est un point critique.

Remarque

1. La réciproque est fausse.
2. Si f n'est pas dérivable, on peut très bien avoir un max / min.
3. Dérivable à droite (gauche) pas suffisant.

Preuve

Sans perte de généralité, x_0 est un max local de f .

Dérivée à gauche :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

De même, dérivée à droite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Donc, $f'(x_0) = 0$.

□

Proposition 144 (Méthode de recherche d'extremum)

Pour $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$.

Les candidats sont

1. Les points critiques dans $]a, b[$
2. Les points non-différentiables
3. Les bornes : a, b

Theorème 145 (theoreme de Rolle)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors $\exists x \in]a, b[: f'(x) = 0$

Preuve

$\exists x_1 \in [a, b] : \sup_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_1)$.

Si $x_1 \in]a, b[$, alors $f'(x_1) = 0$ par la proposition.

Cas restant : $x_1 = a$ ou b .

$$\exists x_2 \in [a, b] \text{ min} : \inf_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_2)$$

Le seul cas restant est donc :

max et min atteints en a ou b .

Or $f(a) = f(b)$, donc $\max f = \min f$, donc f constante. □

Théorème 146 (théorème des accroissements finis TAF)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$.

Alors $\exists x \in]a, b[: f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Preuve

Posons $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ g est aussi continue dérivable.

Or

$$g(a) = f(a) \text{ et } g(b) = f(a)$$

Donc g satisfait l'hypothèse de Rolle.

Donc, par Rolle

$$\exists x \in]a, b[: g'(x) = 0$$

Or

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

□

Corollaire 147

Si $f' = 0$, alors f constante.

Plus précisément :

Soit

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

continue dérivable sur $]a, b[$ tel que $f'(x) = 0 \forall x \in]a, b[$, alors f est constante sur $[a, b]$

Preuve

Si, par l'absurde, il existe $x, y \in [a, b]$ avec $f(x) \neq f(y)$.

Par TAF pour $[x, y]$, il existe $z \in]x, y[$:

$$f'(z) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \neq 0$$

Absurde. □

Corollaire 148

$f' > 0$ (sur un intervalle) implique f strictement croissante.

Preuve

Soit $x < y$, à voir $f(x) < f(y)$.

Or, par TAF $\Rightarrow \exists z \in]x, y[$

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0$$

□

Corollaire 149

$f' \geq 0$ (sur un intervalle) $\iff f$ croissante (pas forcément strictement)

Preuve

\Leftarrow :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

\Rightarrow :

Par l'absurde :

$$\exists x < y \text{ tel que } f(x) > f(y)$$

Par TAF $\Rightarrow \exists z \in]x, y[$ tel que

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < 0$$

□

Ce qui est absurde.

Lecture 16: Lundi 09

Mon 09 Nov

Définition 29 (Fonctions Lipschitzienne)

La fonction f est Lipschitz sur un intervalle I si il existe l tel que $\forall x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq l \cdot |x - y|$$

Remarque

Si f est Lipschitz, f est continue, même uniformément continue sur I , poser $\delta = \frac{\epsilon}{l}$.

On dit aussi "L-lipschitz".

Corollaire 151

Si f est dérivable et $|f'| \leq L$ sur I , alors f est L -lipschitz sur I

Preuve

TAF sur $[x, y]$, donc

$$\exists z \in]x, y[: f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$$

□

Remarque

$f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$ est uniformément continue, mais sa dérivée est non-bornée sur $]0, 1[$.

Corollaire 153 (Théorème de Darboux)

Soit f continu en x_0 . Si f est dérivable au voisinage de x_0 et si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

existe, alors f est dérivable en x_0 .

Preuve

TAF sur $[x_0, x]$.

Donc il existe $z \in]x_0, x[$ tel que

$$f'(z) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Posons $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$, donc

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Donc $f'(x_0)$ existe et est égal à l . □

Remarque

Nous avons prouvé que $f'(x_0)$ existe et de plus $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

Donc la dérivée est continue.

Théorème 155 (Théorème de Cauchy)

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$.

Supposons que g' ne s'annule pas sur $[a, b]$, alors

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Preuve

Considérons

$$h(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a)) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

On a

$$h(a) = 0$$

$$h(b) = 0$$

Rolle (pour h) implique $\exists c \in]a, b[$ tel que

$$h'(c) = 0$$

Or

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)$$

□

$$\text{i.e. } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

8.2 Principe de Bernoulli-L'Hospital

Idée :

Calculer des limites du type $\frac{0}{0}$.

Theorème 156 (Bernoulli-L'Hospital)

Soient $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivables avec

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a+} g(x)$$

Supposons

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe et $g'(x) \neq 0$ au voisinage à droite de a .

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Preuve

On étend f et g par continuité sur $[a, b[$ en posant $f(a) = 0 = g(a)$.

Soit $a < x < b$. Appliquons Cauchy sur $[a, x]$.

Donc $\exists c \in]a, x[$ tel que $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Par hypothèse, la limite

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

existe.

□

Theorème 157 (BH pour l'infini)

Soient $f, g :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

Supposons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Preuve

Sans perte de généralité $a > 0$.

On définit $\phi, \psi :]0, \frac{1}{a}[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\phi(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \psi(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

BH pour $\frac{\phi}{\psi}$ sur $]0, \frac{1}{a}$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}$$

□

Lecture 17: BH

Wed 11 Nov

8.3 Bernoulli-L'hospital pour infini sur infini

Theorème 158

Soient $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivables tel que

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow a+} g(x)$$

Si $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe aussi, avec la meme valeur

Preuve

Le principe est que pour calculer la limite d'une expression A (pour $x \rightarrow a$), on peut remplacer A par

$$ABC$$

pour autant que $\lim_{x \rightarrow a+} BC = 1$.

Soit $\epsilon > 0$. Posons $l = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ A montrer : Pour x suffisamment proche de a

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \epsilon$$

On sait que $\exists y \forall a < c < y$

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - l \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Par Cauchy sur $[x, y]$, on a

$$\forall a < x < y : \left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - l \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Ecrivons donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \frac{f(x)}{f(x) - f(y)} \frac{g(x) - g(y)}{g(x)}$$

En effet, pour notre y :

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{f(x) - f(y)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{1}{1 - \frac{g(y)}{f(x)}} = 1$$

□

9 Polynome de Taylor et developpements limites

But : Approximer des fonctions par polynomes.

Definition 30 (Polynome de Taylor)

Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n fois derivable.

Le polynome de Taylor de f en a et d'ordre n est

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

Theorème 159 (Formule de Taylor)

Supposons f $n+1$ fois derivable

$\forall x \exists t \in]a, x[$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-a)^{n+1}$$

Remarque

Excellent si f raisonnable car $\frac{1}{(n+1)!}$ tres petit.

Preuve

On note $T(y)$ pour le polynome de Taylor.

Soit

$$g(y) = f(y) - T(y) + \frac{T(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}}(y-a)^{n+1}$$

On remarque que

$$g^{(k)}(a) = \text{cst. } (n+1)(n) \dots (n+1-k)(y-a)^{n+1-k} = 0$$

Or, $g(x) = 0$.

On applique donc Rolle a g sur $[a, x]$ Par Rolle, $\exists x_1 \in]a, x[$ tel que $g'(x_1) = 0$.

Rolle pour g' sur $[a, x_1]$.

$$\exists x_2 \in]a, x_1[\text{ tel que } g''(x_2) = 0$$

etc...

Rolle pour $g^{(n)}$ sur $[a, x_n]$, donc

$$\exists t \in]a, x_n[\text{ tel que } g^{(n+1)}(t) = 0$$

Donc

$$0 = g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) + \frac{T(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}}(n+1)!$$

Donc

$$-T(x) + f(x) = f^{(n+1)}(t)(x-a)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}$$

□

Lecture 18: Developpements Limites

Mon 16 Nov

De maniere generale, si

$$P(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k$$

Alors

$$P^{(k)}(a) = k!c_k$$

Definition 31 (Developpement limite)

Soit f une fonction definie au voisinage de a .

Un developpement limit (DL) d'ordre n pour f en a est la donnee d'un polynome

$$\sum_{j=0}^n a_j (x-a)^j$$

(la partie principale) et d'une fonction r (le reste) tel que

1. $f(x) = \sum a_j (x-a)^j + r(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x-a)^n}$

Remarque

Le cas $n = 1$ correspond a notre critere de differentiability de f en a .

Admettre un DL d'ordre 1 en $a \iff f$ derivable en a .

Remarque

Admettre un DL d'ordre 0 en $a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.

Remarque

Si on note $r(x) = \epsilon(x)(x-a)^n$, on obtient

1. $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j (x-a)^j + \epsilon(x)(x-a)^n$
2. $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$

Ceci montre que si f admet un DL d'ordre n , alors $\forall k \leq n$

$$f^{(k)}(a) = k!a_k$$

Proposition 164

Si un DL d'ordre n existe, il est unique.

Preuve

Suffit de montrer l'unicite de la partie principale. Or, les coefficients a_j sont determines par les derivees de f ,

$$f^{(k)}(a) (k \leq n)$$

qui existent bel et bien par la remarque precedente. □

Proposition 165

Si f admet un DL d'ordre n en a , elle admet aussi un DL d'ordre $m \leq n$ en a .

Preuve

On a qu'a tronquer la partie principale de la somme. □

Theorème 166

Soit $f \in C^{n+1}(I)$, I intervalle ouvert, $a \in I$.

Alors f admet un DL d'ordre n en a , et la partie principale est le polynôme de Taylor.

Preuve

On va juste utiliser que $f^{(n+1)}$ est bornée sur un voisinage de a .

A voir :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{n+1!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(x-a)^n} = 0$$

□

Exercice 167

Si f et g admettent des DL d'ordre n en a , alors $f + g$, $f \cdot g$ et $f \circ g$ (ici : f admet DL en $g(a)$) aussi.

Les parties principales seront la somme, respectivement produit, resp. composition des parties principales.

Exemple (Un Bel Exemple)

Soit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

On voit que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Lemme 169

$f^{(k)} = f \cdot \frac{P}{Q}$, pour deux polynômes P, Q .

Conclusion :

f est une fonction C^∞ avec $f^{(k)}(0) = 0 \forall k$.

Tous les polynômes de Taylor de f en 0 sont nuls,

$$T(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} 0(x-a)^k = 0$$

f admet un DL d'ordre n en zero $\forall n$, partie principale 0.

Lecture 19: Developpements Limites

Wed 18 Nov

9.1 Utilisations de la 2eme derivee

Proposition 170

Soit f deux fois derivable et a un point critique (i.e. $f'(a) = 0$)

Si $f''(a) < 0$, alors a est un maximum local strict.

Idem pour $f''(a) > 0$.

Attention la reciproque fausse

Preuve

f' est strictement decroissante sur un voisinage de a .

□

9.2 Convexite, Concavite

Definition 32 (Convexe)

Une fonction f est convexe, si $\forall x < y \forall \lambda \in [0, 1]$

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Proposition 171

f convexe \iff

$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ avec

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

$\forall x_1, \dots, x_n$

Preuve

\Rightarrow

La convexite correspond au cas $n = 2$

Supposons vrai pour $n - 1$ ($k \geq 3$) Ecrivons

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = (1 - \lambda_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_n} x_i + \lambda_n x_n$$

Par Hypothese de recurrence

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq (1 - \lambda_n) f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_n} x_i\right) + \lambda_n f(x_n)$$

□

Theorème 172

Si f est dérivable et f' est croissante, alors f est convexe.

Corollaire 173

Si f est deux fois dérivable et $f'' \geq 0$, alors f est convexe.

Preuve

f' existe, croissante.

A montrer.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

sans perte de généralité $a < b$

Posons $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$ TAF sur $[a, x]$ et $[x, b]$:

$$\exists a < x_1 < x < x_2 < b \text{ tel que}$$

$$f(x) - f(a) = f'(x_1)(x - a)$$

de meme

$$f(b) - f(x) = f'(x_2)(b - x)$$

On a donc

$$\lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) = \lambda(f(x) - f'(x_1)(x - a)) + (1 - \lambda)(f(x) + f'(x_2)(\lambda(b - a))) = f(x) + (b - a)\lambda(1 - \lambda)f'(x_2) - (b - a)\lambda(1 - \lambda)f'(x_1)$$

Or f' croissant. □

Lecture 20: Series Entieres

Mon 23 Nov

10 Series Entieres

But :

Etudier des fonctions du type

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Motivations :

- Fonctions familières, utiles du type \sin, \cos, \exp, \dots
- polynômes de Taylor \rightarrow série de Taylor?

Remarque

Nous travaillons surtout avec $x_0 = 0$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Pour retrouver le cas général : se ramener à $f(x - x_0)$.

Definition 33

On dit qu'une série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformément absolument sur I vers f si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$$

converge uniformément, i.e.

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall x \in I :$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |f_n(x)| < \epsilon$$

Theorème 175

Supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ converge pour $y \neq 0$.

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge $\forall x \in]-|y|, |y|[$.

De plus, pour tout $0 < r < |y|$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformément et absolument sur $[-r, r]$

Preuve

Il suffit de montrer le deuxième point.

Puisque $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ converge, on sait que $(a_n y^n) \rightarrow 0$ et donc $a_n y^n$ est bornée. Donc

$$\exists B > 0 \forall n : |a_n y^n| \leq B.$$

Fixons $0 < r < |y|$ et considérons $x \in [-r, r]$.

Remarque :

$$|a_n x^n| = |a_n y^n| \left| \frac{x}{y} \right|^n \leq B \left(\frac{r}{|y|} \right)^n.$$

Pour convergence absolue, par comparaison, on étudie

$$\sum_{n=0}^{\infty} B \left(\frac{r}{|y|} \right)^n$$

Converge, car c'est une série géométrique de raison $\frac{r}{|y|} < 1$

□

Corollaire 176

$\forall 0 < r < |y|$. On obtient une fonction continue $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de $x \in [-r, r]$

Remarque

Bien que $f(y)$ existe par hypothèse, l'existence et la continuité en $\pm y$ peut être problématique.

Considérons $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Definition 34

Le rayon de convergence de cette série entière est

$$R := \sup \left\{ |y| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \text{ converge} \right\}$$

Corollaire 178

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

est une fonction continue (et qui existe) sur $] - R, R[$.

De plus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge $\forall x$ avec $|x| > R$

Remarque

1. Pour $|x| = R$, tout peut arriver
2. Pour $\sum a_n (x - x_0)^n$, on obtient un intervalle de convergence $]x_0 - R, x_0 + R[$.

Corollaire 180

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

, avec $R = +\infty$ si $\limsup = 0$

Preuve

Critère de la racine pour $|x| < R$:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \text{converge} \quad \square$$

Theorème 181

Soit $f(x) = \sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \neq 0$.

1. La série $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ a le même rayon de convergence R .
2. f est dérivable sur $] - R, R[$ et sa dérivée est $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

Preuve

On fixe $0 < r < R$ et on travaille sur $[-r, r]$.

Pour tout n , appliquer Taylor a la fonction x^n au point x_0 .

Donc $\exists t$ (entre x_0 et x) tel que

$$x^n = x_0^n + nx_0^{n-1}(x - x_0) + \frac{1}{2!}n(n-1)t^{n-2}(x - x_0)^2(x - x_0)$$

On trouve

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = nx_0^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)t^{n-2}$$

On s'intéresse a $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} na_n x_0^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}n(n-1)(x - x_0)t_{x,n}^{n-2} \end{aligned}$$

Il reste a demontrer

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} a_n t^{n-2}$$

converge et reste borne sur $[-r, r]$.

Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} a_n t^{n-1} = 0$$

Rappel : t se trouve entre x et x_0 , en particulier dans $[-r, r]$, donc

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} a_n t^{n-2} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) r^{n-2} a_n \right|$$

Il suffit donc de prouver que cette derniere serie converge, donc de montrer

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n|a_n|r^n < +\infty$$

□

Donc il suffit de montrer que r est dans le rayon de convergence.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n(n-1)} = 1$. Donc le rayon de convergence est R .

Lecture 21: Series de Taylor

Wed 25 Nov

Remarque

Si f est C^∞ , on peut definir sa serie de Taylor en x_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

C'est donc une serie entiere.

Attention, en general, cette serie n'est pas f !

En revanche, si f est definie par une serie entiere $\sum a_n x^n$, alors sa serie de Taylor est elle-meme $\sum a_n x^n$.

Corollaire 183

Soit $f(x) = \sum a_n x^n$ et soit R son rayon de convergence.

Alors f est C^∞ sur $] -R, R[$

Preuve

Par recurrence, puisque la derivee est a nouveau une serie entiere, il suffit de montrer le cas $n = 1$.

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 1 \cdot a_1$$

□

Proposition 184

1. $\exp(x) > 0 \forall x$
2. \exp est croissante et convexe
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$
4. $\exp(x + y) = \exp x \exp y$
5. $\exp -x = \frac{1}{\exp x}$

Preuve

Derivons $x \mapsto \exp x \exp -x$, on a

$$\exp' x \exp -x + \exp x \exp' -x - 1 = 0$$

De plus

$$\exp 0 \exp -0 = 1$$

Donc $\exp x \neq 0 \forall x$ et $\exp -x = \frac{1}{\exp x}$ Fixons y . Derivons $x \mapsto \frac{\exp x + y}{\exp x}$, on trouve

$$\frac{\exp x + y - \exp x + y \exp x}{\exp x} = 0$$

Donc la fonction est constante. De plus, en $x = 0$, on trouve $\exp y$, donc $\forall x$

$$\exp y \exp x = \exp x + y$$

On a

$$\exp x = \exp \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = \left(\exp \frac{x}{2} \right)^2 > 0$$

On a finalement

$$\exp x \geq x$$

pour $x \geq 0$, de meme

$$\exp -x = \frac{1}{\exp x}$$

□

il en suit les deux limites.

Corollaire 185

exp est une bijection entre les reels et les reels strictements positifs et admet donc une inverse C^∞ notee log

Theorème 186 (Lemme d'Abel)

Soit $f(x) = \sum a_n x^n$.

On suppose $R \neq 0$.

Si $\sum a_n R^n$ converge, alors f est continue (a gauche) en R .^a

a. Meme theoreme en $-R$

Preuve

On suppose que $f(R)$ converge.

Spg $f(R) = 0$.

Notons $b_n = a_n R^n$ et $g(w) = \sum b_n w^n$

Donc, il s'agit de prouver :

$$\lim_{w \rightarrow 1^-} g(w) = 0.$$

Soit $s_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n$, donc $s_n \rightarrow 0$.

Pour $g(w) = \sum b_n w^n$, or

$$b_0 + b_1 w + \dots + b_n w^n = s_0 + (s_1 - s_0)w + \dots + (s_n - s_{n-1})w^n$$

Or

$$= s_0(1 - w) + s_1 w(1 - w) + \dots + s_{n-1} w^{n-1}(1 - w) + s_n w^n$$

Donc $g(w) = (1 - w) \sum s_n w^n$

Il suffit donc de prouver que

$$\sum s_n w^n$$

converge et reste bornee independamment de $\omega \in [0, 1]$.

Or s_n converge.

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} s_n w^n \right| \leq \epsilon \sum w^n = \epsilon w^{n_0} \frac{1}{1 - w}$$

Or

$$|g(w)| \leq (1 - w) \left\{ \left| \sum_{n=0}^{n_0-1} s_n w^n \right| + \epsilon w^{n_0} \frac{1}{1 - w} \right\}$$

□

Donc $g(w)$ converge vers 0.

Lecture 22: Integrales

Mon 30 Nov

10.1 Deux P.S sur \exp

But : définir $x^y \forall xy \in \mathbb{R} (x \geq 0)$

Compatible avec $x^n = xx \dots x$ et compatible avec les regles concernant x^n :

$$\begin{aligned}x^{n+m} &= x^n x^m \\(x^n)^m &= x^{nm}\end{aligned}$$

Definition 35

Pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ quelconque, on pose

$$x^y = \exp(y \log x)$$

Remarque

1. \log est definit pour $x > 0$, car \exp est une bijection de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$
2. Cette definition satisfait nos contraintes.

P. ex. : $n \in \mathbb{N}$

$$n \in \mathbb{N}, \exp(n \log x) = \exp(\log x + \dots + \log x) = \exp(\log x) \dots \exp(\log x) = x^n$$

On definit les fonctions trigonometriques hyperboliques par

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

et

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Exercice 188

Quelle est la serie entiere qui definit ca ?

Proposition 189

Supposons que f (soit derivable et) satisfasse $f' = f$.

Alors $f(x) = c \exp x$ (avec $c = f(0)$).

Preuve

Posonns $g(x) = f(x)e^{-x}$

Alors g est derivable et

$$g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0$$

On sait que g est constantem donc $f(x) = c \exp x$.

□

11 Integration

But : Calculer et definir des aires (= surfaces) , puis volumes, hypervolumes, etc.

Rapport avec la derivation (thm. fondamental de l'analyse).

Definition 36 (Subdivisions)

Considerons l'intervalle $[a, b]$, avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Une subdivision σ de $[a, b]$ est une suite finie x_0, x_1, \dots, x_n , tel que

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Definition 37 (Somme de Darboux inferieure)

La somme de Darboux inferieure associee a f et σ est

$$\underline{S}_\sigma(f) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

avec

$$m_i = \inf \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Defini pour toute fonction f bornee sur $[a, b]$.

$\underline{S}_\sigma(f)$ est une tentative (a priori trop petite) de definir l'aire determinee par f sur $[a, b]$.

Definition 38 (Somme de Darboux superieure)

La somme de Darboux inferieure associee a f et σ est

$$\overline{S}_\sigma(f) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

avec

$$M_i = \sup \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Defini pour toute fonction f bornee sur $[a, b]$.

Definition 39

$$\underline{S}(f) = \sup \{\underline{S}_\sigma(f)\}$$

$$\overline{S}(f) = \sup \{\overline{S}_\sigma(f)\}$$

Definition 40

La fonction f est dite integrable sur $[a, b]$, si $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$.

L'integrale de f sur $[a, b]$, note $\int_a^b f$ est alors ce nombre $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$

Lecture 23: Intuition derriere l'integration

Wed 02 Dec

Proposition 190

Soient σ et τ deux subdivisions avec $\sigma \subseteq \tau$.

Alors

$$\overline{S}_\sigma(f) \geq \overline{S}_\tau(f)$$

et

$$\underline{S}_\sigma(f) \leq \underline{S}_\tau(f)$$

Preuve

Par recurrence, il suffit de considerer le cas ou τ a un point de plus que σ .

En enumerant τ $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b$.

Posons que σ ne possede pas x_i .

Pour calculer $\overline{S}_\tau(f)$, on introduit

$$M_j = \sup \{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$$

Pour la somme superieur de σ , on pose

$$M'_j = M_j \forall j \leq i-1$$

et

$$M'_i = \sup \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]\} = \max(M_i, M_{i+1})$$

Donc

$$\overline{S}_\sigma(f) = \sum_{j=1}^{i-1} M'_j(x_i - x_{i-1}) + \max(M_i, M_{i+1})(x_{i+1} - x_{i-1}) + \sum_{j=i+1}^n M_j(x_j - x_{j-1})$$

□

Le terme au milieu est plus grand ou egal au terme correspondant de la somme pour τ .

Corollaire 191

$\forall \sigma, \tau$, on a

$$\overline{S}_\sigma(f) \geq \underline{S}_\tau(f)$$

Preuve

$\sigma, \tau \subseteq \sigma \cup \tau$.

La proposition implique que

$$\overline{S}_\sigma(f) \geq \overline{S}_{\sigma \cup \tau}(f) \geq \underline{S}_{\sigma \cup \tau}(f) \geq \underline{S}_\tau(f)$$

□

En conclusion

$$f \text{ integrable} \iff \forall \epsilon > 0 \exists \sigma \overline{S}_\sigma(f) < \underline{S}_\sigma(f) + \epsilon$$

Theorème 192

Toute fonction continue est integrable sur un intervalle ferme.

Preuve

Soit $\epsilon > 0$. On cherche $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision σ tel que

$$\overline{S}_\sigma(f) < \underline{S}_\sigma(f) + \epsilon$$

On sait que f est uniformement continue et bornee.

Donc $\exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{(b-a)}$.

Choisissons σ tel que $\forall i = 1, \dots, n$ $x_i - x_{i-1} < \delta$.

Alors f varie au plus de $\frac{\epsilon}{(b-a)}$ sur $[x_{i-1}, x_i]$.

Donc $M_i - m_i \leq \frac{\epsilon}{b-a} \forall i$. Donc

$$\overline{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \epsilon$$

□

Theorème 193

Soit f integrable sur $[a, b]$ (f borne).

Si \tilde{f} coincide avec f sauf en un point $c \in [a, b]$, alors \tilde{f} est aussi integrable et $\int \tilde{f} = \int f$.

Preuve

Donc il suffit de montrer :

$$\forall \sigma \forall \epsilon > 0 \exists \tau \supseteq \sigma : \overline{S}_\tau(\tilde{f}) < \overline{S}_\tau(f) + \epsilon$$

On ajoute deux points a et b pour obtenir τ tel que $c \in [x_{i-1}, x_i]$ avec $x_i - x_{i-1} < \delta$ pour $\delta = \frac{\epsilon}{|f(c) - \tilde{f}(c)|}$.

Alors

$$|\overline{S}_\tau(f) - \overline{S}_\tau(\tilde{f})| = |M_i - \tilde{M}_i|(x_i - x_{i-1}) \leq |\tilde{f}(c) - f(c)|\delta < \epsilon$$

□

Corollaire 194

Si f est continue sauf en un nombre fini de points, f est integrable.

Definition 41

La finesse (ou maille) de σ est $h(\sigma) = \max \{(x_i - x_{i-1}) : i = 1, \dots, n\}$

Definition 42

Soit σ une subdivision de $[a, b]$ et soit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \forall i$.

La somme de Riemann associee a ce choix est

$$R = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Lecture 24: Integrales

Mon 07 Dec

Proposition 195

Soit $f \in C^0([a, b])$ et (σ_j) une suite de subdivisions.

On suppose que la maille tend vers 0.

Alors

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} R_{\sigma_j} = \int_a^b f$$

pour toute somme de Riemann R_{σ_j} associée à σ_j .

Exemple

Soit $\sigma_j = (x_0, \dots, x_j)$ avec

$$x_i = a + i \frac{b-a}{j}$$

On a alors

$$R = \sum_{i=1}^j f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Preuve

L'uniforme continuité dit

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y :$$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

□

Donc, si $h(\sigma) < \delta$, alors $f(\xi_i), m_i, M_i$ diffèrent au plus de ϵ .

Lemme 197

Soient $f_1 \leq f_2$ intégrables sur $[a, b]$.

Alors $\int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2$.

Preuve

$$\forall \sigma \forall [x_{i-1}, x_i] : m_i(f_1) \leq m_i(f_2).$$

Fini.

□

Lemme 198

Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors $|f|$ aussi et $\int_a^b |f| \geq |\int_a^b f|$

Preuve

Suit de l'inégalité triangulaire pour les sommes.

□

Lemme 199

Si f est intégrable sur $[a, b]$ et $a < c < d < b$, alors f intégrable sur $[c, d]$.

Preuve

A montrer, $\forall \epsilon > 0$, on cherche σ subdivision de $[c, d]$ tel que $\overline{S}_\sigma(f) < \underline{S}_\sigma(f) + \epsilon$.

Or, par hypothese, $\exists \tau$ sbdivision de $[a, b]$ tel que

$$\overline{S}_\tau < \underline{S}_\tau(f) + \epsilon$$

Posons $\rho = \tau \cup \{c, d\}$.

On sait que $\overline{S}_\rho(f) \leq \overline{S}_\tau(f)$.

Posons σ la subdivision ρ sans les elements avant c et apres d .

$$\overline{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f) = \overline{S}_\rho(f) - \underline{S}_\rho(f) - \sum_{i=1}^k (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=l+1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

□

Proposition 200

Soit f integrable sur $[a, b]$ et $a < c < b$. Aors

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

De plus, si f est integrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, alors f est integrable sur $[a, b]$

Preuve

Soit $\epsilon > 0$.

Puisque f est integrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$, $\exists \sigma$ et τ .

On a alors

$$\overline{S}_\sigma(f) < \underline{S}_\sigma(f) + \frac{\epsilon}{2}$$

$\sigma \cup \tau$ est une subdivision de $[a, b]$ et

$$\overline{S}_{\sigma \cup \tau} = \overline{S}_\sigma + \overline{S}_\tau$$

Donc, puisque vrai pour tout ϵ , on a fini.

On a seulement utilise les hypotheses que f est integrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, donc la 2eme partie de la proposition est aussi demontree. □

Remarque

Si $a > b$, on definit

$$\int_a^b f = - \int_a^b f$$

On note aussi

$$\int_a^a f = 0$$

Corollaire 202

$$\forall a, b, c : \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Lemme 203

Soit f integrable sur $[a, b]$. Alors

$$\inf(f)(b-a) \leq \int_a^b f \leq \sup f(b-a)$$

Preuve

Il suffit de considerer $\underline{S}_{[a,b]}$ et $\overline{S}_{[a,b]}$

□

Proposition 204 (Theoreme de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f = f(c)(b-a)$$

Preuve

Le lemme ci-dessus implique que

$$\inf f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \sup f$$

Comme f est continue sur $[a, b]$, $\inf f$ et $\sup f$ sont des valeurs de f .

Donc $\frac{\int_a^b f}{b-a}$ est une valeur intermediaire, donc par TVI, on a fini.

□

Definition 43 (Primitive)

Soit f une fonction.

On dit qu'une fonction F est une primitive de f si F est derivable et $F' = f$.

Remarque

1. Si une primitive F existe, alors il y en a plusieurs : $F + c$
2. TAF implique que toute autre primitive est de cette forme.

$$F_2' = f = F_1' \Rightarrow (F_2 - F_1)' = 0 \Rightarrow F_2 - F_1 \text{ est constant par TAF}$$

3. De nombreuses fonctions sont sans primitives : theoreme de Darboux.

Corollaire 206

Toute fonction continue est la dérivée d'une fonction (dérivable)

Théorème 207 (Théorème Fondamental)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Définissons $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_a^x f$$

Alors F est une primitive de f .

Preuve

On sait déjà que $F(x) = \int_a^x f$ est bien défini.

Soit $x_0 \in]a, b[$, alors pour $x \in [a, b]$:

$$\underbrace{F(x) - F(x_0)}_{x-x_0} = \frac{\int_a^x f - \int_a^{x_0} f}{x - x_0} = \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0}$$

Pour la dernière égalité, il suffit de distinguer les cas.

A démontrer : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0}$ existe et vaut $f(x_0)$.

Par le théorème de la moyenne, $\exists c_x \in [x_0, x]$

$$\int_{x_0}^x f = f(c_x)(x - x_0)$$

□

Donc, reste à montrer $\lim_{x \rightarrow x_0} f(c_x) = f(x_0)$.

Or $\lim_{x \rightarrow x_0} c(x) = x_0$.

Comme f est continue, on conclut par limite de composition.

Théorème 208 (Fondamental, reformulation)

Soit f continue sur $[a, b]$ et G une primitive de f .

Alors

$$\int_a^b f = G(b) - G(a)$$

Preuve

Posons $F(x) = \int_a^x f$ TAF $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : G = F + c$. Or $F(a) = 0 \Rightarrow c = G(a)$

Et $\int_a^b f = F(b) = G(b) - G(a)$.

□