DAVID WIEDEMANN

ANALYSE I

Table des matières

List of Theorems

Mon 14 Sep

1 Introduction

1.1 Buts du Cours

Officiel :

Suites, series, fonctions, derivees, integrales , . . .

Secrets :

Apprendre le raisonnement rigoureux

Creativite

Esprit Critique

Ne croyez rien tant que c'est pas prouve

On construit sur ce qu'on a fait, on recommence pas toujours a 0, par rapport a d'autres domaines(lettres par exemple)

Theorem 1 (env. -400)
Il n'existe aucin nombre (fraction) x tel que $x^2 = 2$.

Ca contredit pythagore nn ?

On va demontrer le theoreme. [1]

Lemma 2 (Lemme)
Soit $n \in \mathbb{N}$ *Alors n pair* $\iff$ n^2 *pair.*

[2]

Proof

$\Rightarrow$ Si n pair $\Rightarrow$ n^2 pair.

Hyp. $n = 2m (m \in \mathbb{N})$

Donc $n^2 = 4m^2$, pair.

Par l'absurde, n impair. $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$.

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

impair. Donc si n est impair, alors n^2 est forcement impair. Ab-

1. On demontre d'abord un lemme

2. Il se pourrait qu'il y ait 13 valeurs pour $\sqrt{2}$

surde.

Proof

Supposons par l'absurde $\exists x$ t.q. $x^2 = 2$ et $x = \frac{a}{b}(a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$.

On peut supposer a et b non tous pairs.(sinon reduire).

$$x^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$$

pair.

Lemme : a pair, i.e. $a = 2n(n \in \mathbb{N})$.

$$a^2 = 4n^2 = 2b^2 \Rightarrow 2n^2 = b^2, i.e. b^2 pair.$$

Lemme : b pair.

Donc a et b sont les deux pairs, on a une contradiction.

$\lightning$

En conclusion, le theoreme est bel et bien vrai, et contredit donc pythagore. Donc les fractions ($\mathbb{Q}$) ne suffisent pas a decrire/mesurer les longueurs geometriques. Il faut les nombres reels, on les comprends seulement vraiment depuis 2 siecles.

C'est important de chercher ce genre d'erreurs.

Prochain but : definir les nombres reels ($\mathbb{R}$). L'interaction entre les fractions et les nombres reels.

2 Definir $\mathbb{R}$

On commence avec la definition axiomatique des nombres reels.

Axiom 3 (Nombres Reels)

$\mathbb{R}$ est un corps, en d'autres termes :

Ils sont munis de deux operations : plus et fois.

— *Associativite* $x + (y + z) = (x + y) + z(x, y, z \in \mathbb{R})$ [1]

— *Commutativite* $x + y = y + x$.

— *Il existe un element neutre* 0 *t.q.* $0 + x = x, x \in \mathbb{R}$. [2]

— *Distributivite* $x(yz) = (xy)z$

1. L'associativite n'est pas forcement vraie(octonions)

2. Il y a aucune difference entre les regles pour l'addition que pour la multiplication.

— *Il existe un element inverse, unique* $-x \in \mathbb{R}$ *t.q.* $x + (-x) = 0$

Remarque : Il existe beaucoup d'autres corps que $\mathbb{R}$, par exemple $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \{0,1,2\} \mod 3$

Attention : $\{0,1,2,3\} \mod 4$ n'est pas un corps !

Presque tous marchent, ils satisfont 8 des 9 axiomes.

Lemma 4 (Theorem name)

$\forall x \exists ! y$ *t.q.* $x + y = 0$.

Proof

Supposons $x + y = 0 = x + y'$

A voir : $y = y'$.

$$\begin{aligned} y &= y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' \\ &= (x + y) + y' = 0 + y' = y' \end{aligned}$$

CQFD.

Exercice

Demontrer que 0 est unique.

Proposition 5 (Annulation de l'element neutre)

$0 \cdot x = 0$

Proof

$$x = x \cdot 1 = x(1 + 0) = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$$

$$0 = x + (-x) = x + (-x) + x \cdot 0$$

$\Rightarrow 0 = x \cdot 0$ [3]

3. $a - b = a + (-b)$

Corollary 6 (x fois moins 1 egale -x)

$$x + x \cdot (-1) = 0$$

Proof

A voir : $x \cdot (-1)$ satisfait les proprietes de $-x$.

Or

$$x + x(-1) = x(1-1) = x \cdot 0 = 0.$$

Exercice

Montrer que $\forall x : x - (-x) = x$ et que ceci implique $(-a)(-b) = ab$.

Rien de tout ca n'a quelque chose a voir avec $\mathbb{R}$.

Il nous faut plus d'axiomes !!

Axiom 7 (Nombres Reels II)

$\mathbb{R}$ est un corps ordonne. Ce qui revient a dire que les assertions suivantes sont verifiees.

- *$x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$*
- *$(x \leq yety \leq x) \Rightarrow x = y$*
- *pour tout couple de nombres reels x et y : ou bien $x \leq y$ ou bien $x \geq y$.*

Exemple de corps ordonnnes :

(1) $\mathbb{R}$, (2) $\mathbb{Q}$, (3) $\{0, 1, 2\} \mod 3$ n'est pas un corps ordonne.

Exercice

$x \leq y \iff -x \geq -y$ Exercice

$x \leq y$ et $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$

$x \leq y$ et $z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz$.

Il nous manque encore un axiome, et c'est le dernier, pour mercredi !