

## Série 08 du mercredi 17 mars 2021

### Exercice 1.

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = 0, \\ \frac{\cos\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_3\right) - 1}{x_1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer  $\nabla f(0, 0, 0)$ .  $f$  est-elle différentiable en  $(0, 0, 0)$  ?

### Exercice 2.

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On définit

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{|x|^\alpha y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donner les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles  $f$  est

- 1) continue en  $(0, 0)$  ;
- 2) différentiable en  $(0, 0)$ .

### Exercice 3.

On définit

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1)$$

Montrer que

- 1) les dérivées directionnelles de  $f$  existent dans  $\mathbb{R}^2$  ;
- 2)  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2$  ;
- 3) les dérivées directionnelles de  $f$  sont discontinues en  $(0, 0)$ .