Analyse II

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Introduction

Mon 22 Feb

1 Intégrales généralisées

Peut-on définir une intégrale sur un intervalle ouvert plutot que sur un intervalle fermé ? ie.

$$f : [a, b[\to \mathbb{R} \text{ c.p.m.}$$

Definition 1 (Intégrales généralisées (sur un intervalle borné non fermé)) *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux ($a < b$).*
En particulier, f est c.p.m. sur tout intervalle $[a, x]$, $a < x < b$ Soit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.
On dit que l'integrale generalisee $\int_a^b f(x)dx$ existe (ou converge) si $\lim_{x\to b} F(X)$ existe, dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b} F(x) - F(a)$$

Si $\lim_{x\to b-} F(x)$ n'existe pas, alors on dit que

$$\int_a^b f(t)dt$$

diverge. Definition analogue pour le cas $]a, b]$.

On souhaite definir $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} tan(x)dx = 0$.
Dans certains cas cette integrale vaut 0. Mais si on calcule

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\frac{\pi}{2}+\epsilon^2} \frac{\pi}{2} - \epsilon tan(t)dt = \lim_{\epsilon\to 0+} (-\ln(\cos(\frac{\pi}{2} - \epsilon)) + \ln(\cos(-\frac{\pi}{2} + \epsilon^2))) = -\infty$$

Il faut donc une definition qui est coherente.

Definition 2 (Integrale sur un intervalle borne ouvert) *Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ c.p.m et $c \in]a, b[$.*
Si les integrales generalisees $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ existent, alors on definit l'integrale

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Si une des deux integrales diverge, alors le tout diverge.