

# Série 1

David Wiedemann

27 septembre 2020

**Lemme 1.** *On montre d'abord que :*

$$\forall a(t), b(t) \in \mathbb{R}[t], \deg(ab) = \deg(a) + \deg(b)$$

*Démonstration.* Pour alléger la notation, on pose que :  $\deg(a(t)) = A$  et  $\deg(b(t)) = B$ .

$$\begin{aligned} a(t) \cdot b(t) &= \left( \sum_{i=0}^A a_i t^i \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^B b_j t^j \right) \\ &= a_A b_B t^A t^B \\ &\quad + a_A t^A \sum_{j=0}^{B-1} b_j t^j \\ &\quad + b_B t^B \sum_{i=0}^{A-1} a_i t^i \\ &\quad + \left( \sum_{i=0}^{A-1} a_i t^i \right) \left( \sum_{j=0}^{B-1} b_j t^j \right) \end{aligned}$$

Ici, on peut clairement voir que le terme  $a_A b_B t^A t^B = a_A b_B t^{A+B}$  est du plus haut degré, et donc le lemme est prouvé.  $\square$

**Lemme 2.** *Soit  $a(t), b(t) \in \mathbb{R}[t]$  et  $\deg(a(t)) \geq \deg(b(t))$  alors  $\deg(a(t) + b(t)) \leq \deg(a(t))$ .*

*Démonstration.* Il suffit à nouveau de développer la somme du polynôme. On posera de plus que si  $j > \deg(b(t))$ , alors  $b_j = 0$ .

$$\begin{aligned} a(t) + b(t) &= \sum_{i=0}^{\deg(a(t))} a_i t^i + \sum_{j=0}^{\deg(b(t))} b_j t^j \\ &= \sum_{k=0}^{\deg(a(t))} (a_k + b_k) t^k \end{aligned}$$

On voit clairement que le terme de plus haut degre est le terme  $t^{\deg(a(t))}$ .  
On distingue deux cas :

— Si  $a_A \neq -b_A$ , alors  $\deg(a(t) + b(t)) = \deg(a(t))$ .

— Si  $a_A + b_A = 0$ , on a  $\deg(a(t) + b(t)) < \deg(a(t))$

□

**Lemme 3.** Soit  $a(t), b(t) \in \mathbb{R}[t]$ , alors

$$a(t) \cdot b(t) = 0$$

implique  $a(t) = 0$  ou  $b(t) = 0$ .

*Démonstration.* On utilisera le lemme 1.

Par l'absurde, on assume que  $a(t) \neq 0$  et  $b(t) \neq 0$ , alors

$$\begin{aligned} \deg(a(t) \cdot b(t)) &= \deg(a(t)) + \deg(b(t)) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Contradiction, car  $\deg(0) < 0$ .

Donc  $a(t) = 0$  ou  $b(t) = 0$

□

On peut donc finalement montrer que la division Euclidienne dans  $\mathbb{R}[t]$  existe et est unique.

*Démonstration.*

**Unicité**

On suppose que  $\exists b, r, b', r' \in \mathbb{R}[t]$  et que  $\deg(r'), \deg(r) < \deg(q)$ , tel que :

$$\begin{aligned} a(t) &= q(t) \cdot b(t) + r(t) \\ &= q(t)b'(t) + r'(t) \\ 0 &= q(t)(b(t) - b'(t)) + \underbrace{(r(t) - r'(t))}_{:=r''} \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, on peut également assumer que  $\deg(r) \geq \deg(r')$ .

On utilise maintenant le lemme 2 pour remarquer que

$$\deg(r''(t)) \leq \deg(r(t)) < \deg(q(t))$$

Par le lemme 2 et le lemme 1, on a que

$$q(t)(b(t) - b'(t)) = 0$$

Finalement par le lemme 3,  $q(t) = 0$  ou  $b(t) - b'(t) = 0$ .  
Par hypothèse,  $q(t) \neq 0$ , et donc  $b(t) = b'(t)$ , donc  $b(t)$  est unique.  
Pour prouver l'unicité de  $r(t)$ , on utilise l'unicité de  $b(t)$ .

$$\begin{aligned} q(t)(b(t) - b'(t)) + (r'(t) - r(t)) &= 0 \\ \xRightarrow{b(t)=b'(t)} r'(t) - r(t) &= 0 \end{aligned}$$

Et donc  $r'(t) = r(t)$ .  
Donc  $b(t)$  et  $r(t)$  sont uniques.

### Existence

On procède par induction sur le degré de  $a(t)$ .

On vérifie d'abord le cas  $\deg(a(t)) = 0$ .

On peut distinguer deux cas :

— Si  $\deg(q(t)) = 0$ , alors  $a(t) = k_1 \in \mathbb{R}$  et  $q(t) = k_2 \in \mathbb{R}$ , alors

$$b(t) = \frac{k_1}{k_2} \text{ et } r(t) = 0 \Rightarrow a(t) = b(t) \cdot q(t) + r(t).$$

— Si  $\deg(q(t)) > 0$ , alors

$$b(t) = 0 \text{ et } r(t) = a(t) \Rightarrow a(t) = q(t) \cdot b(t) + r(t).$$

On remarque que ceci résout également le cas  $a(t) = 0$ .

Par récurrence, on suppose que le cas  $\deg(a(t)) = n$  est vrai et on montre pour  $\deg(a(t)) = n + 1$ .

On pose que  $a(t) = a'(t) + a_{n+1}t^{n+1}$ , avec  $\deg(a'(t)) \leq n$ , et que  $q(t) = q'(t) + q_mt^m$ , avec  $\deg(q(t)) \leq m$  et  $\deg(q'(t)) = m - 1$ .

On distingue à nouveau 2 cas :

— Si,  $\deg(q(t)) > \deg(a(t))$ , dans ce cas, il suffit de poser que  $b(t) = 0$  et que  $r(t) = a(t)$ , alors

$$a(t) = q(t) \cdot b(t) + r(t)$$

— On suppose donc que  $\deg(a(t)) \geq \deg(q(t))$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} a(t) &= a_{n+1}t^{n+1} + a'(t) \\ &= a_{n+1}t^{n+1} \left( \frac{q_mt^m}{q_mt^m} \right) + a'(t) \\ &= a_{n+1}t^{n+1} \left( \frac{q(t) - q'(t)}{q_mt^m} \right) + a'(t) \\ &= \underbrace{a_{n+1}t^{n+1} \frac{q(t)}{q_mt^m}}_{\text{degré : } n+1} - \underbrace{a_{n+1}t^{n+1} \frac{q'(t)}{q_mt^m}}_{\text{degré } \leq n} + \underbrace{a'(t)}_{\text{degré } \leq n} \end{aligned}$$

Donc, par hypothèse de récurrence,  $\exists c(t)$  et  $r_c(t)$  tel que

$$-\frac{a_{n+1}}{q_m}t^{n-m+1}q'(t) = c(t) \cdot q(t) + r_c(t)$$

De même, le degré de  $a'(t)$  est aussi inférieur à  $n + 1$ , et donc, par hypothèse de récurrence,  $\exists d(t), r_d(t)$  tel que  $a'(t) = q(t) \cdot d(t) + r_d(t)$ .  
On a donc

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{a_{n+1}}{q_m}t^{n+1-m}q(t) - \frac{a_{n+1}}{q_m}t^{n-m+1}(q'(t)) + a'(t) \\ &= \frac{a_{n+1}}{q_m}t^{n+1-m}q(t) - c(t) \cdot q(t) - r_c(t) + q(t) \cdot d(t) + r_d(t) \\ &= q(t) \left( \frac{a_{n+1}}{q_m}t^{n+1-m} - c(t) + d(t) \right) - r_c(t) + r_d(t) \end{aligned}$$

On a donc trouvé une formulation pour  $a(t)$  tel que  $a(t) = b(t) \cdot q(t) + r(t)$ .

□