Série 12

David Wiedemann

21 décembre 2020

1

Ce résultat découle directement du théorème de Lagrange.
En effet, $|{}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}} \times {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}}| = p^2$.
Soit H un sous-groupe propre.
Donc $|H| > 1$ et $|H| < p^2$. Par Lagrange, on sait que $|H| | p^2$, ce qui force $|H| = p$.
On en conclut que $H \simeq {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}}$, car tous les groupes d'ordre premier sont isomorphes au groupe cyclique.

2

Dans ce qui suit, k représente le corps sur lequel U est défini et p sera la characteristique de ce corps.
Soit F un sous-groupe de U.
Supposons d'abord que $F \cap Z(U) \neq \{e\}$.
On a montré dans l'exercice 3 que le centre du groupe unipotent est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } a \in k$$

Si $F \cap Z(U) \neq \{e\}$, il existe une matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } a \in k^\times$$

appartenant à F.
Car F est un sous-groupe, le groupe cyclique engendré par M est contenu dans F.
Or $|Z(U)| = p$ et il est clair que $\langle M \rangle = Z(U)$, il suit $Z(U) \subseteq F$.

Supposons maintenant que $F \not\supset Z(U)$.
Par l'absurde, supposons que $F \cap Z(U) \neq \{e\}$.
Or, la cardinalité de F est au pire p^2, et la cardinalité de $Z(U)$ est p. Si $F \cap Z(U)$ est différent de l'élément neutre, alors la cardinalité de $F \cap Z(U)$ doit être p (car $F \cap Z(U)$ est un sous-groupe de F) , ce qui implique $F \supset Z(U)$.
Ceci contredit l'hypothèse $F \not\supset Z(U)$.

3

On suppose que $F \cap Z(U) = \{e\}$.

Car $|U| = p^3$, par Lagrange, il y a 2 possibilités pour $|F|$.
Si $|F| = p$, alors il est évident que $|FZ(U)| = p^2$, donc

$$|{}^{FZ(U)}\diagup_{Z(U)}| = p$$

Et on en conclut que

$$^{FZ(U)}\diagup_{Z(U)} \simeq {}^{\mathbb{Z}}\diagup_{p\mathbb{Z}}$$

Ici, il est clair que $FZ(U)$ forme un groupe, en effet, $Z(U)$ est un groupe normal.
Supposons donc $|F| = p^2$. On en conclut que $FZ(U) > p^2$ (car l'intersection des deux groupes possède seulement l'élément neutre) , et donc $FZ(U) = U$.

Il est clair que

$$F \simeq {}^{F}\diagup_{\{e\}}$$

Donc

$$F \simeq {}^{F}\diagup_{F \cap Z(U)} \simeq {}^{FZ(U)}\diagup_{Z(U)} = {}^{U}\diagup_{Z(U)} \simeq k \oplus k \simeq {}^{\mathbb{Z}}\diagup_{p\mathbb{Z}} \times {}^{\mathbb{Z}}\diagup_{p\mathbb{Z}}$$

Ici, le premier isomorphisme est immédiat, le deuxième isomorphisme suit du deuxième théorème d'isomorphisme, le troisième suit de $FZ(U) = U$ et le quatrième isomorphisme suit de l'exercice 3.3.

Soit $a \in k^\times$, montrons que le sous-groupe E engendré par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un sous-groupe dont l'intersection avec $Z(U)$ est l'élément neutre est qui n'est pas normal.

Par l'exercice 3.1, on voit que E forme un sous-groupe d'ordre p dont l'intersection avec $Z(U)$ est $\{e\}$.
Posons

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors } M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que $M \cdot M^{-1} = \mathrm{Id}$

Pourtant,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \notin E$$

4

Si $F \supsetneq Z(U)$ et F est un sous-groupe propre, alors, par Lagrange, $|F| = p^2$, et donc

$$|{}^{F}\!/_{Z(U)}| = \frac{p^2}{p} = p$$

Ce qui force

$${}^{F}\!/_{Z(U)} \simeq {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}}$$

, car tous les groupes d'ordre premier sont isomorphes.
Par le théorème de correspondance, il suffit de montrer que ${}^{F}\!/_{Z(U)}$ est normal dans ${}^{U}\!/_{Z(U)}$.
Pourtant, ${}^{U}\!/_{Z(U)} \simeq {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}} \times {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}}$.
En restreignant cet isomorphisme à ${}^{F}\!/_{Z(U)}$, on trouve un sous-groupe d'ordre p dans ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}} \times {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}}$.
Or ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}} \times {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}}$ est abélien, et donc n'importe quel sous-groupe est normal.
Il en suit que ${}^{F}\!/_{Z(U)} \trianglelefteq {}^{U}\!/_{Z(U)}$, on conclut avec le théorème de correspondance, qui implique $F \trianglelefteq U$.