Analyse avancée II | Semaine du 2021-03-15 au 2021-03-19
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Série 07 du lundi 15 mars 2021

Exercice 1.

Soit $E = ([0,1] \times [0,1]) \setminus \{(0,0)\}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\forall (x,y) \in E$.

1) f est-elle continue sur E ?
2) f est-elle uniformément continue sur E ?

Exercice 2.

Soient V et W deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $f : V \to W$ une fonction. On considère V muni des normes $\|\cdot\|_V$, $|||\cdot|||_V$ et W muni des normes $\|\cdot\|_W$, $|||\cdot|||_W$. On suppose que

$$\exists C_1 > 0, \forall v \in V : \quad |||v|||_V \leqslant C_1 \|v\|_V, , \tag{1}$$
$$\exists C_2 > 0, \forall v \in V : \quad |||w|||_W \leqslant C_2 \|w\|_W. \tag{2}$$

On dit alors que la norme $\|\cdot\|_V$ est « plus forte que $|||\cdot|||_V$ », ou de manière équivalente, $|||\cdot|||_V$ est « plus faible que $\|\cdot\|_V$ ». De même pour W.

Montrer que

1) Si $f : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ est continue, alors $f : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, |||\cdot|||_W)$ est continue.
2) Si $f : (V, |||\cdot|||_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ est continue, alors $f : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ est continue.

Rappel 1. $f : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ est continue si

$$\forall \epsilon > 0, \forall v \in V, \exists \delta = \delta(v,\epsilon) > 0 : \forall \tilde{v} \in V, \quad (\|\tilde{v} - v\|_V < \delta \implies \|f(\tilde{v}) - f(v)\|_W < \epsilon). \tag{3}$$

Exercice 3.

Définition 1 (Fonction höldérienne)**.** On dit qu'une fonction $\boldsymbol{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est α-höldérienne, pour $\alpha \in]0,1]$, si

$$\sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in E} \frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^\alpha} < \infty. \tag{4}$$

On vérifie facilement que cette définition ne dépend pas de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

1) Montrer que si $\boldsymbol{f}$ est α-höldérienne, alors $\boldsymbol{f}$ est uniformément continue sur E.
2) Utiliser cette propriété pour montrer que la fonction $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$,

$$f : (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{|x_1 - x_2|} \tag{5}$$

est uniformément continue sur $[-1,1]^2$.

Indication. Utiliser la propriété que, $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, $\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$.

Exercice 4.

Considérons l'espace $M(m, n)$ des matrices réelles de taille $m \times n$. Montrer que

1) $M(m, n)$ est un espace vectoriel (pour les opérations usuelles de somme des matrices et proportion par un scalaire) ;
2) l'application $\|\cdot\| : M(m, n) \to \mathbb{R}^+$, $\|A\| := \sup_{0 \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}$ est une norme [1] sur $M(m, n)$;
3) l'application $|||\cdot||| : M(m, n) \to \mathbb{R}^+$, $|||A||| := \sqrt{\sum_{i,j} A_{i,j}^2}$, définit aussi une norme [2] sur $M(m, n)$.
4) Trouver deux constantes strictement positives C_1, C_2 telles que, $\forall A \in M(m, n)$,

$$C_1\|A\| \leqslant |||A||| \leqslant C_2\|A\|. \tag{6}$$

1. Cette norme est appelée « norme spectrale ».
2. Cette norme est appelée « norme de Frobenius ».