

Analyse II

David Wiedemann

Table des matières

1	Intégrales généralisées	4
1.1	Intégrales absolument convergentes	5
1.2	Intégrale généralisée sur un intervalle non borné	7
2	L'espace R^n	7
2.1	Espace vectoriel norme	7
2.2	Normes sur R^n	9
2.3	Suites sur R^n	9
2.4	Topologie de \mathbb{R}^n	10
2.5	Classification des points d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$	10
2.6	Caractérisation des ensembles ouverts	11
2.7	Caractérisation des ensembles fermés	11
2.8	Ensembles compacts	12
3	Fonctions de plusieurs variables	12
3.1	Notion de limite	12
3.2	Caractérisation de limite par suites	13
3.3	Propriétés de l'opération de limite	13
3.4	Fonctions à valeurs dans R^m	14
4	Fonctions continues	14
4.0.1	Définitions Équivalentes	14
4.1	Prolongement par continuité	14
4.2	Prolongement par continuité	16

List of Theorems

1	Definition (Intégrales généralisées (sur un intervalle borné non fermé))	4
2	Definition (Intégrale sur un intervalle borné ouvert)	4
1	Théorème (Critère de Comparaison)	4
3	Definition (Intégrale absolument convergente)	5

3	Theorème (absolument convergente implique convergente)	5
5	Theorème (Critere de comparaison (II))	6
4	Definition (Integrale sur un intervalle non borne)	7
5	Definition (Norme d'un vecteur)	7
6	Definition (Espace vectoriel norme)	7
7	Definition	7
8	Definition (Distance)	8
9	Definition (Produit Scalaire)	8
6	Theorème (Inegalite de Cauchy-Schwarz)	8
7	Theorème	8
10	Definition (Suites convergentes)	9
9	Lemme	9
11	Definition (Suites de Cauchy)	9
10	Theorème	9
11	Theorème (Bolzano-Weierstrass)	10
12	Definition (Boule)	10
13	Definition	11
14	Definition	11
15	Definition (Ensemble compact)	12
12	Theorème (Caracterisation par sous-suites convergentes)	12
13	Theorème (Caracterisation par recouvrements finis)	12
16	Definition (Chemin dans E)	12
17	Definition (Ensembles connexes par arcs)	12
18	Definition (Limite)	12
14	Theorème (Des deux gendarmes)	13
15	Theorème (Limites/Suites)	13
16	Theorème (Critere de Cauchy)	13
19	Definition (Limite)	14
20	Definition (Continuite en un point)	14
21	Definition (Continuite sur E)	14
22	Definition (continuite uniforme sur E)	14
23	Definition (Prolongement par continuite)	14
17	Theorème (Prolongement par continuite sur l'adherence)	15
18	Theorème	15
24	Definition	15
19	Theorème	16
20	Theorème	16
21	Theorème	16
25	Definition (Prolongement par continuite)	16
22	Theorème (Prolongement par continuite sur l'adherence)	16
23	Theorème	17

26	Definition	17
24	Theorème	17
25	Theorème	18
26	Theorème	18

1 Intégrales généralisées

Peut-on définir une intégrale sur un intervalle ouvert plutôt que sur un intervalle fermé ? ie.

$$f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R} \text{ c.p.m.}$$

Definition 1 (Intégrales généralisées (sur un intervalle borné non fermé)

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux ($a < b$).

En particulier, f est c.p.m. sur tout intervalle $[a, x]$, $a < x < b$ Soit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ existe (ou converge) si $\lim_{x \rightarrow b} F(x)$ existe, dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b} F(x) - F(a)$$

Si $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ n'existe pas, alors on dit que

$$\int_a^b f(t)dt$$

diverge. Definition analogue pour le cas $]a, b]$.

On souhaite définir $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)dx = 0$.

Dans certains cas cette intégrale vaut 0. Mais si on calcule

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{\pi}{2} + \epsilon}^{\frac{\pi}{2} - \epsilon} \tan(t)dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (-\ln(\cos(\frac{\pi}{2} - \epsilon)) + \ln(\cos(-\frac{\pi}{2} + \epsilon))) = -\infty$$

Il faut donc une définition qui est cohérente.

Definition 2 (Intégrale sur un intervalle borne ouvert)

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m et $c \in]a, b[$.

Si les intégrales généralisées $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ existent, alors on définit l'intégrale

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Si une des deux intégrales diverge, alors le tout diverge.

Lecture 2: Intégrales Generalisees

Theorème 1 (Critere de Comparaison)

Soit $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m. et supposons $\exists c \in [a, b[$ tel que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in [c, b[$$

Si $\int_a^b g(x)dx$ existe alors $\int_a^b f(x)dx$ existe aussi
 Si $\int_a^b f(x)dx$ diverge alors $\int_a^b g(x)dx$ diverge aussi.

Preuve

Si $\int_a^b g(x)dx$ existe, alors $\int_c^b g(x)dx$ existe.

Donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t)dt \\ &= \lim_{x \rightarrow b-} \left(\int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt \right) \\ &= \int_a^c f(t)dt + \lim_{x \rightarrow b-} \int_c^x f(t)dt \\ &\leq \int_a^c f(t)dt + \lim_{x \rightarrow b-} \int_c^x g(t)dt < +\infty\end{aligned}$$

En notant $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, F est non décroissante, et bornée supérieurement sur l'intervalle $[a, b[\Rightarrow \lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ existe. \square

Exemple

$f(x) = \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|$ sur $]0, 1]$, on a

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

1 est intégrable, et donc l'intégrale de $f(x)$ existe.

1.1 Intégrales absolument convergentes

Definition 3 (Intégrale absolument convergente)

Soit I un intervalle du type $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m.

On dit que l'intégrale généralisée de f sur I est absolument convergente si

$$\int_I |f(x)|dx$$

existe.

Theorème 3 (absolument convergente implique convergente)

Si l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument, alors il converge.

Preuve

Notons $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ et $f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}$ et on a $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$.

Donc

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)| \text{ et } 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)| \forall x \in I$$

Par critère de comparaison, si

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ existe} \Rightarrow \text{alors } \int_a^b f_+(x)dx, \int_a^b f_-(x)dx \text{ existent}$$

et donc $\int_a^b f(x)dx$

□

Remarque

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m Si f est bornée sur I , alors

$$\int_I f(x)dx$$

existe.

Theorème 5 (Critere de comparaison (II))

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m.

S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1[$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \in \mathbb{R}$$

Alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

existe.

S'il existe $\alpha \geq 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \neq 0$$

alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

diverge.

Preuve

Par definition de la limite $\forall \epsilon > 0, \exists b-a > \delta_\epsilon > 0$ tel que

$$|f(x)(b-x)^\alpha - l| < \epsilon \forall x$$

$$\Rightarrow l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha \leq l + \epsilon$$

et donc

$$0 \leq |f(x)| \leq \frac{|l| + \epsilon}{(b-x)^\alpha}$$

Puisque le terme de droite est integrable, on conclut par le critere de comparaison. Pour la deuxieme partie, soit $\alpha \geq 1$ et $l \neq 0$.

Supposons $l > 0$, on a

$$l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha$$

Le meme raisonnement que ci-dessus donne que l'integrale de f diverge.

□

1.2 Intégrale généralisée sur un intervalle non borné

Definition 4 (Intégrale sur un intervalle non borné)

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m.

On dit que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ existe si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(x)dx$$

existe et dans ce cas, on note

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

idem si $f :]-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $f :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m. on dit que $\int_a^\infty f(x)dx$ existe s'il existe $c \in]a, \infty[$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f(t)dt \text{ et } \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_c^y f(t)dt$$

existent.

Lecture 3: L'espace R^n

Mon 01 Mar

2 L'espace R^n

2.1 Espace vectoriel norme

Soit un ensemble V sur lequel on définit deux opérations

1. somme : $+$: $V \times V \rightarrow V$
2. multiplication par un scalaire $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$

On définit R^n par $R^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots \times \mathbb{R}$

Definition 5 (Norme d'un vecteur)

C'est une application $N : V \rightarrow \mathbb{R}$, c'est une application qui satisfait

- $\forall x \in V : N(x) \geq 0$ et $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V : N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$
- $\forall x, y \in V, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

On utilise souvent la notation $N(x) = \|x\|$

Definition 6 (Espace vectoriel norme)

Un espace vectoriel norme est noté $(V, \|\cdot\|)$

Definition 7

Soit V un espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur V .

On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes si $\exists c_1, c_2 > 0$ tel que

$$c_1 N_2(x) \leq N_1(x) \leq c_2 N_2(x) \forall x \in V$$

Definition 8 (Distance)

Soit X un ensemble.

Une distance est une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés suivantes

- $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y$
- La distance est symétrique
- $\forall x, y, z \in V, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Un espace X muni d'une distance est appelé un espace métrique et est noté (X, d) .

On peut toujours définir une distance sur un espace vectoriel normé, défini par

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

On appelle cette distance, la distance induite par la norme.

Tout espace vectoriel normé est aussi un espace métrique.

Definition 9 (Produit Scalaire)

Soit V un espace vectoriel.

Un produit scalaire est une application $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes

- $\forall x, y \in V, b(x, y) = b(y, x)$
- $\forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x, z) + \beta b(y, z)$
- $\forall x \in V, b(x, x) \geq 0, b(x, x) = 0 \iff x = 0$

Theorème 6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit V un espace vectoriel et $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un produit scalaire. Alors

$$\forall x, y \in V, |b(x, y)| \leq \sqrt{b(x, x)b(y, y)}$$

Preuve

$\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.

$$0 \leq b(\alpha x + y, \alpha x + y) = \alpha^2 b(x, x) + 2\alpha b(x, y) + b(y, y)$$

Donc on a

$$\Delta = b(x, y)^2 - b(x, x)b(y, y)$$

□

Theorème 7

Soit $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un produit scalaire, alors l'application $x \rightarrow \sqrt{b(x, x)} = \|x\|_b$ est une norme sur V .

Donc, si V est muni d'un produit scalaire, alors V est un espace normé et donc V est un espace métrique pour la distance induite par le produit scalaire.

2.2 Normes sur \mathbb{R}^n

- La norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- Norme "max" $\|x\|_\infty = \max |x_i|$
- Norme 1 : $\|x\|_1 = \sum |x_i|$
- Normes $p \in [1, +\infty[$ $\|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

Pour p infinie, on retrouve la norme infinie

On montre en exercices que toutes les normes p sont équivalentes.

De même, on montre que toutes les normes sur \mathbb{R}^n sont équivalentes. Par contre, seulement la norme 2 est déduite d'un produit scalaire.

Definition 10 (Suites convergentes)

Soit $\{x^{(k)}\}_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que cette suite converge s'il existe $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^{(k)} - x\| = 0$$

Lecture 4: Boules sur \mathbb{R}^n

Wed 03 Mar

2.3 Suites sur \mathbb{R}^n

Remarque

Supposons que $\{x^{(k)}\} \rightarrow \vec{x}$ par rapport à la norme euclidienne. Et soit $\|\cdot\|$ une autre norme sur \mathbb{R}^n . Puisque toutes les normes sont équivalentes sur \mathbb{R}^n $\|\vec{x}\| \leq c \|\vec{x}\|_2$ Donc toutes les suites convergent peu importe la norme.

En particulier, on peut choisir la norme infinie.

Lemme 9

Une suite $\{x^{(k)}\}$ converge si et seulement si toutes les composantes convergent.

Definition 11 (Suites de Cauchy)

On dit qu'une suite $\{x^{(k)}\}$ est de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \exists N > 0 : \forall k, l \geq N \left\| x^{(k)} - x^{(l)} \right\| \leq \epsilon$$

Theorème 10

Une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Preuve

Si la suite $x^{(k)}$ converge $\iff \{x_i^{(k)}\}$ converge pour tout $i = 1, \dots, n$ donc toutes ces suites sont de Cauchy et donc $x^{(k)}$ converge. \square

Theorème 11 (Bolzano-Weierstrass)

Soit $\{x^{(k)}\}$ une suite bornée.

Alors il existe une sous-suite $\{x^{(k_j)}\}$ qui converge

Preuve

Si $\{x^{(k)}\}$ est bornée, en particulier chaque suite $x^{(k)_i}$ sera bornée.

En $i = 1$, la suite $x^{(k)}$ est bornée, donc il existe une sous-suite convergente vers une valeur x_1 .

On considère les index de cette sous-suite et on réapplique l'argument ci-dessus en $i = 2$, etc. \square

2.4 Topologie de \mathbb{R}^n **Définition 12 (Boule)**

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, la boule ouverte centrée en x et de rayon δ

$$B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \delta\}$$

La boule fermée

$$\overline{B}(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \delta\}$$

La sphere centrée en x et de rayon δ

$$S(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| = \delta\}$$

2.5 Classification des points d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$

Le complémentaire de E est

$$E^c = \{y \in \mathbb{R}^n, y \notin E\}$$

On dit que x est un point intérieur de E si $\exists \delta : B(x, \delta) \subset E$, on dit que x est un point frontière de E si $\forall \delta B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$ et $B(x, \delta) \cap E^c \neq \emptyset$. On dit que E° est l'ensemble des points intérieurs de E , E° est appelé l'intérieur de E .

On note ∂E l'ensemble des points frontières, appelé la frontière ou le bord de E .

On dit que x est un point adhérent de E si $\forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$. On note \bar{E} l'ensemble des points adhérents de E , appelé l'adhérence de E .

On a $\bar{E} = E \cup \partial E$

On dit que x est un point isolé si

$$\exists \delta > 0 B(x, \delta) \cap E = \{x\}$$

On dit que x est un point d'accumulation de E , si $\forall \delta > 0$

$$B(x, \delta) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Donc, en particulier, si on prend $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$

$$\exists x^{(k)} \in E, \text{ tel que } \|x^{(k)} - x\| \leq \frac{1}{k}$$

La suite $x^{(k)}$ converge vers x .

Definition 13

Soit E un ensemble de \mathbb{R}^n , on dit que E est ouvert si tous ses points sont intérieurs

Definition 14

E est fermé si E^c est ouvert.

Lecture 5: Ensembles compacts/connexes par arcs

Mon 08 Mar

2.6 Caractérisation des ensembles ouverts

- $\overset{\circ}{E}$ est toujours ouvert.
- E est ouvert si et seulement si $E = \overset{\circ}{E}$
- L'union (même infinie) d'ensembles ouverts est ouverte.
Soit $E = \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$ et K_α sont ouverts.
Alors $\forall x \in E, x \in K_\alpha$ et donc il existe une boule ouverte centrée en x et contenue dans K_α .
- L'intersection finie d'ensembles ouverts est ouverte.
Soit $E = \bigcap K_i$, alors $\forall x \in E, x \in K_i \forall i$, mais chaque K_i est ouvert, donc en prenant $\delta = \min\{\delta_1, \dots\}$, $B(x, \delta) \in E$ et donc E est ouvert.

2.7 Caractérisation des ensembles fermes

- $\mathbb{R}^n \setminus \overline{E} = \overset{\circ}{E^c}, \overline{E^c} = \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{E}$
- \overline{E} est toujours fermé.
- L'intersection (même infinie) d'ensembles fermes est fermée.
- L'union finie d'ensembles fermes est fermée.
- E est fermé si et seulement si toute suite $\{x^{(k)}\}$ convergente, converge vers un élément $x \in E$.

Preuve

Soit E fermé et $\{x^{(k)}\}$ une suite convergente vers $x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : \forall k > N_\epsilon, \|x - x^{(k)}\| \leq \epsilon$.

Donc $\forall \epsilon B(x, \epsilon) \cap E \neq \emptyset$, donc $x \in \overline{E} = E$.

Supposons que E n'est pas fermé, donc E^c n'est pas ouvert. Donc $\exists x \in E^c : \forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$.

Si on prend $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \exists x^{(k)} \in B(x, \delta) \cap E$ et $\{x^{(k)}\}$ converge vers x , donc $x \in E$ \nmid □

2.8 Ensembles compacts

Definition 15 (Ensemble compact)

On dit que E est compact si E est à la fois fermé et borné.

Theorème 12 (Caractérisation par sous-suites convergentes)

Un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute suite $\{x^{(k)}\} \subset E$ on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément $x \in E$

Theorème 13 (Caractérisation par recouvrements finis)

Un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute famille $\{K_\alpha, \alpha \in A\}$ d'ouverts tel que $E \subset K_\alpha$, on peut extraire une sous-famille finie qui est encore un recouvrement de E .

Definition 16 (Chemin dans E)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. On appelle chemin de E une application $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$, $\gamma(t) = (\gamma_1, \dots)$, tel que γ_i est continu pour tout i .

E

Definition 17 (Ensembles connexes par arcs)

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est connexe par arcs si $\forall x, y \in E$, il existe un chemin γ tel que $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

3 Fonctions de plusieurs variables

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. On appelle fonction sur E à valeurs réelles une application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall x \in E, x \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

On note $D(f)$ le domaine de f , $\text{Im } f$ l'image, $g(f)$ le graphe.

3.1 Notion de limite

Definition 18 (Limite)

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E . On dit que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta$$

Alors

$$\|f(x) - l\| < \epsilon$$

Theorème 14 (Des deux gendarmes)

Soit $f, g, h : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E .

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$ et $\exists \alpha > 0$

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad 0 < \|x - x_0\| \leq \alpha$$

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe et est égale à l .

Lecture 6: Fonctions continues

Wed 10 Mar

3.2 Caractérisation de limite par suites**Theorème 15 (Limites/Suites)**

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E . La limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ si et seulement si pour toute suite $\{x^{(k)}\} \subset E$ qui converge vers x_0 , on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^{(k)}) = l$.

Preuve

Soit $\{x^{(k)} : \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = x_0\}$, on sait que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in E, \|x - x_0\| < \delta, |f(x) - l| < \epsilon$$

il existe N tq $\forall k > n$ tq $\|x^{(k)} - x_0\| < \delta$

Si la limite $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^{(k)}) = l$ pour toute suite $x^{(k)}$.

Par l'absurde, supposons que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas.

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E, x \neq x_0 : \|x - x_0\| < \delta$$

et

$$|f(x) - l| \geq \epsilon \quad \square$$

Si on prend $\delta = \frac{1}{k}$, alors $\exists x^{(k)} \neq x_0 : \|x^{(k)} - x_0\| < \frac{1}{k}$ tel que $|f(x^{(k)}) - l| \geq \epsilon$.

Or cette suite $x^{(k)}$ converge vers x_0 , \nexists

3.3 Propriétés de l'opération de limite

Soit $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$, alors l'opération de limite est linéaire, respecte les règles de multiplication.

Theorème 16 (Critère de Cauchy)

Idem qu'en analyse I.

3.4 Fonctions a valeurs dans \mathbb{R}^m

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definition 19 (Limite)

On dit que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \vec{l} \in \mathbb{R}^m$ existe si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E \setminus \{x_0\}, 0 < \|x - x_0\| < \delta$$

on a

$$\|f(x) - l\| < \epsilon$$

De plus, chaque composante de f converge vers la composante correspondante de la limite.

4 Fonctions continues

Definition 20 (Continuite en un point)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, et $x_0 \in E$.

Si x_0 est un point d'accumulation de E , on dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Si x_0 est un point isole, on admet que f est continue en x_0

4.0.1 Definitions Equivalentes

- $\forall \epsilon > 0, \exists \delta : \forall x \in E, \|x - x_0\| < \delta, \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$
- pour toute suite $x^{(k)} \subset E$ qui converge vers x_0 on a que $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^{(k)}) = f(x_0)$

Definition 21 (Continuite sur E)

On dit que $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue sur E si elle est continue en tout point $x \in E$.

Dans ce cas, on note $f \in C^0(E)$

Definition 22 (continuite uniforme sur E)

On dit que f est uniformement continue sur E si $\forall \epsilon, \exists \delta$ tel que $\forall x \in E, \forall y \in E, \|y - x\| < \delta$, on a $\|f(y) - f(x)\| < \epsilon$

Evidemment, la continuite uniforme implique la continuite.

Lecture 7: Prolongement par continuite

Mon 15 Mar

4.1 Prolongement par continuite

Definition 23 (Prolongement par continuite)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue, avec $E \neq \overline{E}$, soit $x_0 \in \overline{E} \setminus E$. Une fonction $\tilde{f} : E \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est appelee un prolongement si \tilde{f} est continue en x_0 et

coincide avec f sur E .

Le prolongement par continuité est uniquement défini par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in E$ et $\tilde{f}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ si la limite existe.

Theorème 17 (Prolongement par continuité sur l'adhérence)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue sur E . Supposons que $\forall x \in \overline{E} \setminus E$ la limite $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$ existe. Alors on peut définir un prolongement $\tilde{f} : \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\tilde{f}(x) = f(x) \forall x \in E$ et $\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$ sinon, de plus \tilde{f} est continue sur \overline{E} .

Preuve

Si $x \in E$, $f(x)$ est continue en x donc $\tilde{f}(x) = f(x)$ est continue en x . On a

$$\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in E} f(y) = \lim_{y \rightarrow x, y \in E} \tilde{f}(y)$$

Pour montrer que \tilde{f} est continue en x , il faut montrer que $\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in \overline{E}} \tilde{f}(y)$. Il faut montrer que pour toute suite $x^{(k)} \subset \overline{E}$ convergent en $x \in \overline{E} \setminus E$ on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x^{(k)}) = \tilde{f}(x)$$

On construit une deuxième suite $y^{(k)}$ convergent vers x .

Si $x^{(k)} \in E$, alors $y^{(k)} = x^{(k)}$.

Si $x^{(k)} \in \overline{E} \setminus E$ on peut toujours trouver une valeur $y^{(k)} \in E$ tel que $\|y^{(k)} - x^{(k)}\| \leq 2^{-k}$, $\|f(y^{(k)}) - \tilde{f}(x^{(k)})\| \leq 2^{-k}$.

On aura donc

$$\|y^{(k)} - x\| \leq \|y^{(k)} - x^{(k)}\| + \|x^{(k)} - x\|$$

Ainsi $y^{(k)} \subset E$ converge vers x , et ainsi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\tilde{f}(x^{(k)}) - \tilde{f}(y^{(k)})) + \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(y^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(y^{(k)}) \quad \square$$

Theorème 18

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ uniformément continue. Alors f peut être prolongée par continuité sur \overline{E} et le prolongement $\tilde{f} : \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est uniformément continu.

Définition 24

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\sup f = \infty$ on dit que f n'est pas bornée supérieurement.

Si $M < \infty$ on appelle M la borne supérieure de f .

S'il existe $x_M \in E$, $f(x_M) = M$ alors on dit que M est le maximum de f sur E et x_M est un point maximum de f . Meme définition pour borne inférieure.

Theorème 19

Soit E non vide et compact, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint son maximum et son minimum sur E .

Preuve

Par l'absurde f n'est pas bornée, il existe $x^{(k)}$ tel que $|f(x^{(k)})| > k$
 Mais E est compact, donc il existe une sous-suite $x^{(k_i)}$ qui converge, or f est continue, donc

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} f(x^{(k_i)}) = f(x) < \infty \nexists$$

Supposons que f n'atteint pas ses bornes

Il existe $x^{(k)}$ qui converge vers le sup, or E est fermé. □

Theorème 20

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, compact, connexe par arcs, et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint toutes les valeurs entre son minimum et maximum.

Preuve

f est continue sur un compact donc f atteint son min et son max.

Puisque E est connexe, il existe γ un chemin du minimum au maximum. On conclut par TVI sur la fonction $f \circ \gamma$ □

Theorème 21

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et compact avec $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue. Alors f est uniformément continue sur E .

Lecture 7: Prolongement par continuité

Mon 15 Mar

4.2 Prolongement par continuité**Definition 25 (Prolongement par continuité)**

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue, avec $E \neq \overline{E}$, soit $x_0 \in \overline{E} \setminus E$. Une fonction $\tilde{f} : E \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est appelée un prolongement si \tilde{f} est continue en x_0 et coïncide avec f sur E .

Le prolongement par continuité est uniquement défini par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in E$ et $\tilde{f}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ si la limite existe.

Theorème 22 (Prolongement par continuité sur l'adhérence)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue sur E . Supposons que $\forall x \in \overline{E} \setminus E$ la limite $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$ existe. Alors on peut définir un prolongement $\tilde{f} : \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\tilde{f}(x) = f(x) \forall x \in E$ et $\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$ sinon, de plus \tilde{f} est continue sur \overline{E} .

Preuve

Si $x \in E$, $f(x)$ est continue en x donc $\tilde{f}(x) = f(x)$ est continue en x . On a

$$\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in E} f(y) = \lim_{y \rightarrow x, y \in E} \tilde{f}(y)$$

Pour montrer que \tilde{f} est continue en x , il faut montrer que $\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in \overline{E}} \tilde{f}(y)$
Il faut montrer que pour toute suite $x^{(k)} \subset \overline{E}$ convergeant en $x \in \overline{E} \setminus E$ on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x^{(k)}) = \tilde{f}(x)$$

On construit une deuxième suite $y^{(k)}$ convergent vers x .

Si $x^{(k)} \in E$, alors $y^{(k)} = x^{(k)}$.

Si $x^{(k)} \in \overline{E} \setminus E$ on peut toujours trouver une valeur $y^{(k)} \in E$ tel que $\|y^{(k)} - x^{(k)}\| \leq 2^{-k}$, $\|f(y^{(k)}) - \tilde{f}(x^{(k)})\| \leq 2^{-k}$.

On aura donc

$$\|y^{(k)} - x\| \leq \|y^{(k)} - x^{(k)}\| + \|x^{(k)} - x\|$$

Ainsi $y^{(k)} \subset E$ converge vers x , et ainsi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\tilde{f}(x^{(k)}) - \tilde{f}(y^{(k)})) + \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(y^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(y^{(k)}) \quad \square$$

Theorème 23

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ uniformement continue. Alors f peut être prolongée par continuité sur \overline{E} et le prolongement $\tilde{f} : \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est uniformement continu.

Definition 26

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ Si $\sup f = \infty$ on dit que f n'est pas bornée supérieurement.

Si $M < \infty$ on appelle M la borne supérieure de f .

Si il existe $x_M \in E$, $f(x_M) = M$ alors on dit que M est le maximum de f sur E et x_M est un point maximum de f . Meme definition pour borne inférieure.

Theorème 24

Soit E non vide et compact, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint son maximum et son minimum sur E .

Preuve

Par l'absurde f n'est pas bornée, il existe $x^{(k)}$ tel que $|f(x^{(k)})| > k$

Mais E est compact, donc il existe une sous-suite $x^{(k_i)}$ qui converge, or f est continue, donc

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} f(x^{(k_i)}) = f(x) < \infty$$

Supposons que f n'atteint pas ses bornes

Il existe $x^{(k)}$ qui converge vers le sup, or E est fermé. □

Theorème 25

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, compact, connexe par arcs, et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Alors f atteint toutes les valeurs entre son minimum et maximum.

Preuve

f est continue sur un compact donc f atteint son min et son max.

Puisque E est connexe, il existe γ un chemin du minimum au maximum. On conclut par TVI sur la fonction $f \circ \gamma$ \square

Theorème 26

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et compact avec $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue. Alors f est uniformément continue sur E .