

Topologie

David Wiedemann

Table des matières

1	Quotients topologiques	5
1.1	La topologie quotient	5
1.2	Relations d'équivalence	6
1.3	Séparation et quotients	7
1.4	Conditions de séparation du quotient	7
1.5	Quotients par des actions de groupe	10
1.6	$SO(n)$	11
1.7	Recollements	11
1.8	Attachement de cellules	13
2	Homotopies et Groupe Fondamental	14
2.1	Homotopie	14
2.2	Attachement de cellules	15
2.3	Homotopie et π_0	16
2.4	Invariance Homotopique	16
2.5	Groupe Fondamental	17
2.6	Surfaces	19
2.7	Bouteille de Klein	20
3	Theorie Combinatoire des Groupes	20
3.1	Groupes libres	20
3.2	Presentations	21
3.3	Graphes de Cayley	21
3.4	Produits libres	22
3.5	Pushouts de groupes	22
4	Seifert-van Kampen	23
4.1	Groupe fondamental d'un recollement	23
4.2	Groupe fondamental d'un Wedge	25
4.3	Attachement de cellules standard	27
4.4	Classification des surfaces	28

5	Les Revetements	30
5.1	Definitions	30
5.2	Relevement de chemins	32
5.3	Revetements et Actions de groupe	34
5.4	Relevements en general	35

List of Theorems

1	Definition (Topologie quotient)	5
3	Proposition	5
4	Proposition	5
5	Proposition	5
6	Theorème	5
7	Proposition	5
8	Proposition	6
2	Definition	6
9	Proposition (Proprietes universelles)	6
3	Definition	6
4	Definition (Reunion disjointe)	7
5	Definition	7
6	Definition	7
11	Proposition	7
12	Proposition	7
13	Proposition	8
14	Corollaire	9
7	Definition (Espaces projectifs)	9
17	Proposition	9
8	Definition (Espace projectif complexe)	9
9	Definition (Groupe topologique)	10
20	Lemme	10
10	Definition	10
11	Definition	10
22	Proposition	10
23	Proposition	11
12	Definition (Recollement)	11
26	Proposition	12
27	Lemme	12
28	Lemme	12
29	Proposition	13
31	Proposition	13
13	Definition (Suspension)	14

14	Definition (Homotopie entre applications)	14
32	Proposition	14
15	Definition (Classes d'homotopie)	15
16	Definition (Espaces Homotopes)	15
33	Proposition	15
35	Proposition	16
36	Corollaire	16
37	Corollaire	16
38	Proposition	16
39	Proposition	17
40	Corollaire	17
17	Definition (Pinch and Fold)	17
18	Definition (Fold)	18
41	Proposition	18
42	Proposition	19
19	Definition (Surface)	19
20	Definition (Somme connexe)	19
21	Definition (Groupe libre)	20
47	Proposition	20
48	Lemme	21
22	Definition	21
23	Definition (Graphe de Cayley)	21
50	Proposition	22
24	Definition (Pushout)	22
52	Proposition	22
53	Lemme	23
56	Lemme	26
57	Proposition	26
25	Definition (Retracte)	26
26	Definition (Retracte de deformation)	26
27	Definition (Retracte de deformation fort)	27
62	Proposition	27
63	Corollaire	27
64	Proposition	28
65	Theorème (Theoreme de classification)	29
66	Lemme	29
28	Definition	30
69	Lemme	30
70	Proposition	31
71	Proposition	31
29	Definition (Morphisme de Revetement)	31

74	Theorème (Relevement unique de chemins)	32
75	Proposition	33
76	Proposition	33
77	Corollaire	33
78	Corollaire	34
30	Definition (Action totalement discontinue)	34
79	Proposition	34
80	Proposition	35

1 Quotients topologiques

Un espace topologique (X, τ) est écrit X si la topologie est claire.

Le singleton $\{*\}$ est noté $*$.

La boule unité de \mathbb{R}^n est notée D^n et la version ouverte sera $\text{int}(D)^n$.

1.1 La topologie quotient

But : Construire de nouveaux espaces à l'aide d'espaces connus en identifiant des points.

Soit X un espace, Y un ensemble et $q : X \rightarrow Y$ surjective.

Definition 1 (Topologie quotient)

La topologie quotient sur Y est la topologie des $V \subset Y$ tel que $q^{-1}(V)$ est ouvert dans X .

Remarque

q est alors continue et on vérifie que c'est une topologie.

Exemple

$X = [0, 1]$ et $Y = (0, 1) \cup \{*\}$ et q l'application qui envoie 0 et 1 sur $*$.

Alors q est surjective et donc Y peut être muni de la topologie quotient et est homéomorphe à un cercle.

On définit $f : S^1 \rightarrow Y : e^{2\pi it} \mapsto t$ si $0 < t < 1$ et $*$ sinon.

Proposition 3

Soit $q : X \rightarrow Y$ une application continue, surjective et ouverte, alors q est un quotient.

Proposition 4

Soit $V \subset Y$ un sous-ensemble tel que $q^{-1}(V)$ est ouverte dans X . Comme q est surjective, alors $V = q(q^{-1}(V))$ et c'est un ouvert car q envoie les ouverts sur les ouverts.

Proposition 5

Une composition de quotients est un quotient.

Theorème 6

La topologie quotient est la plus fine qui rend q continue. De plus, pour $g : Y \rightarrow Z$, g est continue si et seulement si $g \circ q$ est continue.

Proposition 7

Si $q : X \rightarrow Y$ est continue, la preimage d'un ouvert de Y est ouvert dans X .

La topologie quotient est celle qui contient le plus d'ouvert possibles.

Clairement, si g est continue, alors $g \circ q$ l'est aussi.

Si $g \circ q$ est continue, soit $W \subset Z$ un ouvert, alors $(g \circ q)^{-1}(W) = q^{-1}(g^{-1}(W))$ est ouvert et par définition $g^{-1}(W)$ est ouvert dans Y .

Proposition 8

Le quotient d'un compact est compact

Preuve

L'image d'un compact est compacte. □

1.2 Relations d'équivalence

Si $q : X \rightarrow Y$ est un quotient, on définit sur X une relation d'équivalence \sim par $x \sim x'$ ssi $q(x) = q(x')$, alors les points de Y sont les classes d'équivalence $[x]$.

Definition 2

Si \simeq est une relation d'équivalence sur X , alors X/\sim est l'espace quotient des classes d'équivalence.

Proposition 9 (Propriétés universelles)

Soit \sim une relation d'équivalence sur X et $f : X \rightarrow Z$ tel que $x \sim x' \implies f(x) = f(x')$, alors il existe un unique $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Z$ tel que $\bar{f} \circ q = f$

Preuve

Pour que le triangle commute, on doit poser $\bar{f}([x]) = f(x)$ et l'application est bien définie par hypothèse et donc unique.

On sait que \bar{f} est continue ssi $\bar{f} \circ q$ l'est. □

Definition 3

Si $A \subset X$, on pose $x \sim x' \iff x = x'$ ou $x, x' \in A$. Le collapse X/A est l'espace quotient X/\sim

Par exemple $I/\{0, 1\}$.

Exemple

$$D^n/\partial D^n = D^n/S^{n-1} = S^n$$

Pour deux espaces bien connus, pointés (X_1, x_1) et (X_2, x_2) , on peut construire un nouvel espace en identifiant x_1 et x_2 .

Definition 4 (Reunion disjointe)

Soit I un ensemble, X_α un espace pour chaque $\alpha \in I$.

La reunion disjointe $\bigcup X_\alpha$ est l'ensemble $\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \times \{\alpha\}$ dont la topologie est engendree par les sous-ensemble de la forme $U_\alpha \times \{\alpha\}$

Definition 5

Soit I un ensemble et pour tout $\alpha \in I$, (X_α, x_α) un espace pointe.

Le wedge $\bigvee_\alpha X_\alpha$ est le collapse de la reunion disjointe ou on identifie les points de base

Definition 6

Soit X un espace. Le cylindre $Cyl(X)$ est $X \times I$ et le cone CX est le collapse du cylindre a la base.

1.3 Separation et quotients

On definit sur $\mathbb{R} \times \{0;1\}$ une relation d'equivalence \sim par $(x,0) \sim (x,1)$ si $x \neq 0$.

Le quotient est la droite a deux origines dont on ne peut separer les deux origines $(0,1)$ et $(0,0)$ par des ouverts.

Regardons le graphe de \sim dans $\mathbb{R} \times \{0;1\} \times (\mathbb{R} \times \{0,1\})$ (ie. une copie de 4 plans)

Proposition 11

Si X/\sim est separe, alors le graphe de \sim dans $X \times X$ est ferme.

Preuve

La preimage de $\Delta \subset X/\sim \times X/\sim$ par $q \times q$ est Γ_\sim .

Comme Δ est ferme, sa preimage aussi. □

Lecture 2: Conditions de Separation

Sat 26 Feb

1.4 Conditions de separation du quotient

On donne une condition necessaire et une condition suffisante pour que le quotient soit separe

Proposition 12

Soit \sim une relation d'equivalence sur un espace X . Si X/\sim est separe, le graphe Γ de la relation est ferme dans $X \times X$

Preuve

Si X/\sim est separe, par un lemme, la diagonale $\Delta \subset X/\sim \times X/\sim$ est ferme.

Considerons $q \times q : X \times X \rightarrow X/\sim \times X/\sim$. Cette application est continue et donc $(q \times q)^{-1}(\Delta)$ est un ferme de $X \times X$. Or cette preimage est l'ensemble des paires de points $(x, y) \in X \times X$ tq $q(x) = q(y) \iff x \sim y$. \square

On donne maintenant une condition suffisante permettant de conclure qu'un quotient est separe.

Proposition 13

Soit \sim une relation d'equivalence sur un espace X separe. Si $q^{-1}(q(x))$ est compact pour tout point $x \in X$ et de plus que pour $F \subset X$ ferme $q^{-1}(q(F))$ est ferme, alors le quotient est separe.

Preuve

Soit $\bar{x} = q(x)$ et $\bar{y} = q(y)$ deux points distincts de X/\sim .

Les saturations $q^{-1}(\bar{x}), q^{-1}(\bar{y})$ sont des compacts par hypothese.

Comme X est separe, on peut separer des compacts avec des ouverts disjoints U et V .

On a donc

$$q^{-1}(\bar{x}) \subset U, q^{-1}(\bar{y}) \subset V \text{ et } U \cap V = \emptyset$$

Posons $E = X \setminus U, F = X \setminus V$ deux fermes de X .

Par hypothese, les saturations $q^{-1}(q(E))$ et $q^{-1}(q(F))$ sont fermes. Ainsi $U' = X \setminus q^{-1}(q(E))$ et $V' = X \setminus q^{-1}(q(F))$ sont des ouverts. On observe que $E \subset q^{-1}(q(E)), F \subset q^{-1}(q(F))$, alors $U' \subset U, V' \subset V$.

De plus $q^{-1}(q(x)) \subset U'$ et $q^{-1}(q(y)) \subset V'$.

Il reste a montrer que $q(U')$ et $q(V')$ sont ouverts dans X/\sim et disjoints.

Pour le premier point, il suffit de verifier que $q^{-1}(q(U'))$ est ouvert dans X .

On pretend que $q^{-1}(q(U')) = U'$.

En effet, $U' \subset q^{-1}(q(U'))$ est toujours vrai, il faut donc montrer l'inclusion inverse.

Soit $u \in q^{-1}(q(U'))$, donc $q(u) \in q(U')$. Donc $q(u) \notin q(E)$ et donc $u \in U'$

Le meme resultat est vrai pour V' .

Il faut donc finalement encore montrer que $q(U')$ et $q(V')$ sont des voisinages ouverts, de \bar{x} et \bar{y} disjoints.

Supposons qu'il existe $u' \in U', v' \in V'$ tel que $q(u') = q(v')$. Alors $u' \in q^{-1}(q(v')) \subset q^{-1}(q(V')) = V'$.

Donc $U' \cap V' \neq \emptyset$, contradiction. \square

Lecture 3: Groupes topologiques

Mon 28 Feb

Corollaire 14

Soit $A \subset X$ un sous-espace compact d'un espace X separe. Alors le collapse $\mathfrak{X}A$ est separe.

Preuve

Il suffit de verifier les proprietes du theoreme.

Soit $\bar{x} \in \mathfrak{X}A$.

Si $x \in A$, $q^{-1}(x) = A$ est compact. Si $x \notin A$, $q^{-1}(\bar{x}) = \{x\}$ qui est compact.

Soit F un ferme de X , alors si $F \cap A = \emptyset$, on a que $q^{-1}(q(F)) = F$ ferme, sinon $F \cap A \neq \emptyset$ et alors

$$q^{-1}(q(F)) = F \cup A$$

Comme A est compact et X separe, alors A ferme. \square

Exemple

Soit \sim une relation d'equivalence sur \mathbb{R}^2 defini par $(x, y) \sim (x', y') \iff (x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2$.

Alors

$$\mathbb{R}^2 \sim$$

est un tore, separe, or la proposition ne s'applique pas car $q^{-1}(0, 0) = \mathbb{Z}^2$.

Definition 7 (Espaces projectifs)

L'espace projectif reel $\mathbb{R}P^n$ est le quotient de S^n par la relation antipodale $x \sim y \iff x = \pm y$ pour $x, y \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Exemple

— $\mathbb{R}P^0 = \mathfrak{S}^0 \sim = *$, $\mathbb{R}P^1 = \mathfrak{S}^1 \sim \simeq S^1$.

— De plus $\mathbb{R}P^2 = S^2 / \sim$ est le plan projectif

Proposition 17

$\mathbb{R}P^n$ est compact et separe

Suit immediatement des propositions.

L'analogie complexe donne

Definition 8 (Espace projectif complexe)

L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ est le quotient de $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par la relation $x \sim y \iff \exists \alpha \in S^1$ tel que $x = \alpha y$.

De meme, pour les quaternions \mathbb{H} , on peut definir $\mathbb{H}P^n$, pour les octonions

on peut construire $\mathbb{O}P^0, \mathbb{O}P^1 \simeq S^8, \mathbb{C}P^2$

1.5 Quotients par des actions de groupe

Definition 9 (Groupe topologique)

Un groupe topologique est un groupe G tel que les applications de multiplication $\mu : G \times G \rightarrow G$ et l'inverse $\iota : G \rightarrow G$ sont continues.

Tout groupe peut être vu comme un groupe topologique discret.

Exemple

Le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{C}$ muni de la multiplication complexe est un groupe topologique

Remarque

Les seules sphères qui sont des groupes topologiques sont S^0, S^1, S^3

Lemme 20

Si $H < G$ est un sous-groupe d'un groupe topologique G , la topologie induite en fait un groupe topologique.

Definition 10

Une action d'un groupe topologique G sur un espace X est une application $\mu : X \times G \rightarrow X$ telle que

$$\mu(x, 1_G) = x \forall x \in X \text{ et } \mu(x, gg') = \mu(\mu(x, g), g')$$

Definition 11

Soit μ une action de G sur X , l'espace des orbites $\mathfrak{X}G$ et l'espace quotient de X par la relation $x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tel que } y = \mu(x, g)$

Remarque

Si $H < G$ est un groupe topologique, alors H agit sur G par multiplication à droite et $\mathfrak{S}H$ est l'espace des orbites gH . Si H est un sous-groupe normal, ce quotient est un groupe.

Proposition 22

Soit μ une action d'un groupe topologique G sur un espace X , alors

1. $q : X \rightarrow \mathfrak{X}G$ est ouverte
2. Si X est compact, le quotient est compact
3. Si X et G sont compact et séparés, alors $\mathfrak{X}G$ aussi.

Preuve

Soit $U \subset X$ ouvert, $q(U)$ est ouvert car $q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{g \in G} U \cdot g$ et $U \cdot g$ est ouvert car la translation est continue et est même un homeomorphisme.

La propriété 2 est immédiate.

On considère $X \times X \times G \rightarrow X \times X$ en envoyant $(x, y, g) \mapsto (x, yg)$, cette application est continue.

Le graphe Γ de la relation définie par μ est l'image de $\Delta \times G$.

Comme X est séparé, Δ est fermé donc compact et G est compact.

Ainsi Γ est compact dans $X \times X$ séparé donc Γ est fermé.

Soient xG et yG deux orbites différentes, ie. $(x, y) \notin \Gamma$.

Il existe donc des ouverts U, V tels que $U \times V \cap \Gamma = \emptyset$.

Comme q est ouverte, $q(U), q(V)$ sont des voisinages ouverts des orbites xG et yG respectivement. On conclut en remarquant que ces images sont disjointes.

Sinon on aurait zG commun, ie. $zg \in U, zg' \in V$ pour $g, g' \in G$ et alors $(zg, zgg^{-1}g') \in \Gamma \cap (U \times V)$ \square

1.6 $SO(n)$

Proposition 23

Soit G compact et X séparé. Soit μ une action transitive de G sur X .

Alors, si G_x , alors

$$\mathfrak{S}G_x = X$$

pour tout $x \in X$.

Preuve

On définit $\mu_x : G \rightarrow X$ envoyant $g \mapsto xg$, continue.

On observe que μ_x envoie G_x sur x et par transitivité, μ_x est surjective.

Par la propriété universelle du quotient, μ_x passe au quotient.

$\bar{\mu}_x$ est une bijection continue. C'est un homeo car $\mathfrak{S}G_x$ est compact, X séparé. \square

Lecture 4: Attachements de Cellules

Mon 07 Mar

1.7 Recollements

On construit de nouveaux espaces à l'aide de pièces plus simples.

On se donne $f : A \rightarrow X, g : A \rightarrow Y$ deux applications. On recolle X et Y le long de A

Definition 12 (Recollement)

Le recollement de X et Y le long de A est le quotient de $X \amalg Y$ par la relation d'équivalence engendrée par $f(a) \sim g(a) \forall a \in A$

Remarque

Il ne suffit pas d'identifier $f(a) \sim g(a)$ pour que la relation soit une relation d'équivalence.

Pour garantir la transitivité, on a des zigzags d'équivalence $f(a) \sim g(a) = g(b) \sim f(b) = f(c) \sim g(c) \dots$

Exemple

Si $A = *$, $f(*) = x_0 \in X$, $g(*) = y_0 \in Y$, alors le recollement $X \cup_* Y$ est le wedge $X \vee Y$

On notera le recollement $X \cup_A Y$.

Si $q : X \amalg Y \rightarrow X \cup_A Y$ est le quotient, alors l'inclusion $i_1 : X \rightarrow X \amalg Y$ induit $i = q \circ i_1 : X \rightarrow X \cup_A Y$ et de même pour l'inclusion de Y .

Proposition 26

Le recollement $X \cup_A Y$ est le pushout de $Y \leftarrow A \rightarrow X$.

Preuve

On doit montrer l'existence et l'unicité de θ .

Puisque chaque élément de $X \cup_A Y$ admet un représentant dans X ou Y , on doit poser $\theta([x]) = \alpha(x) \forall x \in X$ et $\theta([y]) = \beta(y) \forall y \in Y$.

On montre l'existence.

Posons $\Theta : X \amalg Y \rightarrow Z$ l'application déterminée par α et β .

On vérifie que Θ est compatible avec \sim . Soit $a \in A$, alors $\Theta(f(a)) = \alpha(f(a)) = \beta(g(a)) = \Theta(g(a))$.

Ainsi Θ passe au quotient et induit θ , qui est donc bien continue. \square

Des maintenant, on suppose que $g : A \subset Y$ est l'inclusion d'un sous-espace fermé.

Lemme 27

Soit $C \subset Y$, alors la saturation de C est

$$f(C \cap A) \amalg (C \cup f^{-1} \circ f(C \cap A))$$

Preuve

On va regarder ce qui se passe pour tout $c \in C$.

Si $c \notin A$, alors $q^{-1}(q(c)) = \{c\}$, sinon $q^{-1}(q(c))$ contient $f(c) \in X$ et $f^{-1}(f(c)) \subset Y$ \square

Lemme 28

Si $C \subset X$, $q^{-1}(q(C)) = C \amalg f^{-1}(C) \subset X \amalg Y$

Preuve

Comme ci-dessus, si $c \in C$ n'est pas dans l'image de f , on a $q^{-1}(q(c)) = \{c\}$, sinon on a $c \in X$ et $f^{-1}(c) \subset A \subset Y$ \square

Proposition 29

Soient X et Y deux espaces separes, $g : A \subset Y$ l'inclusion d'un compact, alors $X \cup_A Y$ est separe.

Preuve

On observe que $X \coprod Y$ est separe. Avant d'appliquer le critere de separabilite, on montre que l'application quotient est fermee. Comme un ferme de $X \coprod Y$ est la reunion disjointe de deux fermes on a deux cas.

Si $C \subset X$ ferme, alors $q(C)$ est ferme $\iff q^{-1}(q(C))$ est fermee. Par le lemme ci-dessus,

$$q^{-1}(q(C)) = C \coprod f^{-1}(C)$$

qui sont fermes.

Si $C \subset Y$, alors $q^{-1}(q(C)) = f(C \cap A) \coprod (C \cup f^{-1}(f(C \cap A)))$ \square

On a $f(C \cap A)$ compact et donc ferme puisque Y est separe.

Pour conclure, on verifie les deux conditions du critere.

Pour conclure, on verifie les deux conditions du critere, la saturation d'un ferme est fermee grace aux preparatifs.

Soit $z \in X \coprod Y$, on doit montrer que $q^{-1}(q(z))$ est compact, les lemmes ci-dessus permettent de conclure parce que si $z = a \in A$, $f^{-1}(f(a))$ est un ferme d'un compact et est donc compacte.

1.8 Attachement de cellules

Ici $g : A \subset CA = A \times I / A \times 1$.

Soit $f : A \rightarrow X$, le recollement $X \cup_A CA$ aussi note $X \cup_f CA$ est appele attachement d'une A -cellule sur X le long de f .

Si $A = S^{n-1}$ alors cet attachement est celui d'une n -cellule

Remarque

$CS^{n-1} \simeq D^n$, on note $X \cup_f CS^{n-1} = X \cup_f e^n$ ou $X \cup_f D^n$ et on appelle $e^n \simeq D^n$ une n -cellule (fermee.)

Proposition 31

Si X est separe et A est compact et separe, alors $X \cup_f CA$ est separe.

Si en plus X est compact

Preuve

Le premier point suit de la proposition precedente car CA est separe, le 2eme point suit du critere de compacite car $X \coprod Ca$ est compact. \square

Definition 13 (Suspension)

La suspension de A est le quotient $A \times I / (a, 0) \sim (a', 0)$ et $(a, 1) \sim (a', 1)$

Lecture 5: Homotopies et groupe fondamental

Sat 12 Mar

2 Homotopies et Groupe Fondamental**2.1 Homotopie****Definition 14 (Homotopie entre applications)**

Soient $f, g : X \rightarrow Y$ des applications. On dit que f et g sont homotopes et on note $f \simeq g$ s'il existe une application $H : X \times I \rightarrow Y$ tel que $H(-, 0) = f$ et $H(-, 1) = g$.

On appelle H une homotopie.

Proposition 32

La relation \simeq est une relation d'équivalence.

Preuve**Reflexivite**

Suit du fait qu'on peut définir une homotopie constante.

$$H : X \times I \rightarrow Y : (x, t) \mapsto f(x)$$

Symetrie

La symetrie suit du fait qu'on peut parcourir une homotopie dans l'autre sens.

Ainsi, soit $H : X \times I \rightarrow Y$ une homotopie entre f et g . On pose

$$G : X \times I \rightarrow Y : (x, t) \mapsto H(x, 1 - t)$$

Transitivite

Supposons que $H : X \times I \rightarrow Y, G : X \times I \rightarrow Y$ sont des homotopies, $f \simeq g \simeq h$. On construit une homotopie $K : X \times I \rightarrow Y$ entre f et h

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

On voit que K est continue et montre que $f \simeq h$. □

Definition 15 (Classes d'homotopie)

On note $[X, Y]$ l'ensemble des classes d'homotopies d'applications $f : X \rightarrow Y$.
C'est donc $C(X, Y) / \simeq$.

Lecture 6: Homotopies

Mon 14 Mar

Definition 16 (Espaces Homotopes)

Deux espaces X et Y sont homotopes ou homotopiquement équivalents, note $X \simeq Y$, s'il existe $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ tel que

$$g \circ f \simeq \text{Id}_X \text{ et } f \circ g \simeq \text{Id}_Y$$

On dit que f et g sont des équivalences homotopiques et qu'elles sont inverses homotopiques l'une de l'autre.

Proposition 33

$$CX \simeq *$$

Preuve

Posons $CX = X \times I / X \times 0$.

On pose $f : * \rightarrow CX$ par $f(*) = [x, 1]$ et on prend $g : CX \rightarrow *$.

On a $g \circ f = \text{Id}_*$, il reste à voir que $f \circ g \simeq \text{Id}_{CX}$. On construit une homotopie $H : CX \times I \rightarrow CX$, défini par

$$H([x, t], s) \mapsto [x, ts]$$

C'est une application (trivialement bien définie) et c'est une homotopie entre $f \circ g \simeq \text{Id}_{CX}$ □

Remarque

Si f et g sont des applications pointées $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ qui sont homotopes au sens non pointé, il est faux en général que $f \simeq_* g$ au sens pointé.

Par exemple $f, g : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$, f est donnée par a et g est donnée par $b \star a \star b^{-1}$ (concatenation).

On a que $f \simeq g$ pour $f_t : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ donnée par $b|_{[1-t, 1]} \star a \star \bar{b}|_{[0, t]}$

2.2 Attachement de cellules

But : $f \simeq g : A \rightarrow X$, alors

$$X \cup_f CA \simeq X \cup_g CA$$

Proposition 35

Si $f, g : A \rightarrow X$ sont homotopes, alors $X \cup_f CA \simeq X \cup_g CA$

Preuve

Pour comparer les deux espaces $Y = X \cup_f CA$ et $Y' = X \cup_g CA$, on construit des applications $h : Y \rightarrow Y'$ et $k : Y' \rightarrow Y$.

On définit $h : Y \rightarrow Y'$ par la propriété universelle du pushout.

On choisit $\iota' : X \rightarrow Y'$ l'application donnée par la construction de Y' .

On pose

$$\alpha : CA \rightarrow Y'[a, t] \mapsto \begin{cases} H(a, 2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ [a, 2t - 1] & \text{si } t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si $t = 0$, alors $H(a, 0) = f(a)$ donc le diagramme commute.

Si $t = \frac{1}{2}$, $H(a, 1) = g(a)$. On construit k comme h , mais avec $H(-, 1 - t)$.

On doit montrer que $k \circ h \simeq \text{Id}_Y$ (et de même $h \circ k \simeq \text{Id}_{Y'}$) \square

Corollaire 36

Si $f, g : S^{n-1} \rightarrow X$ et $f \simeq g$, alors $X \cup_f e^n \simeq X \cup_g e^n$.

Corollaire 37

Si $f : A \rightarrow X$ est homotope à c_x constante, alors $X \cup_f CA \simeq X \vee \sum A$

2.3 Homotopie et π_0

Soit $S_0 = \{\pm 1\}$ sphere unite de \mathbb{R} .

On étudie les applications pointées de $(S_0, 1) \rightarrow (X, x_0)$. Ainsi $f(1) = x_0$ et $f(-1) = x$ arbitraire.

Deux telles applications f donnée par x et f' donnée par x' sont homotopes (au sens pointé) s'il existe une homotopie pointée

$$H : S^0 \times I \rightarrow X$$

H est donc simplement donnée par $H(-1, t)$, un chemin dans X de x vers x' .

Donc x et x' sont dans la même composante connexe par arcs.

Proposition 38

L'ensemble $\pi_0 X$ des composantes connexes par arcs est en bijection avec $[S_0, X]_*$

2.4 Invariance Homotopique

Soit $f : X \rightarrow Y$, elle induit une application

$$f_* : [A, X] \rightarrow [A, Y]$$

$$[g] \mapsto [f \circ g]$$

Preuve

On veut montrer que l'application ci-dessus est bien définie.

Si $g \sim g'$ via l'homotopie G , alors $f \circ g \simeq f \circ g'$ via $f \circ G$ □

Proposition 39

Si $f \simeq f' : X \rightarrow Y$, alors $f_* = f'_*$.

Preuve

On choisit $H : X \times I \rightarrow Y$ une homotopie entre $H(-, 0) = f$ et $H(-, 1) = f'$.

On veut montrer que $f \circ g \simeq f' \circ g$.

On construit $G : A \times I \rightarrow X \times I \rightarrow Y$ en envoyant

$$(a, t) \mapsto (g(a), t) \mapsto H(g(a), t)$$

□

Corollaire 40

Si $X \simeq Y$, alors $[A, X] \simeq [A, Y]$ comme ensembles.

Preuve

On a $f : X \rightarrow Y$ et $f' : Y \rightarrow X$ inverses homotopes l'une de l'autre. Alors

$[A, X] \rightarrow [A, Y] \rightarrow [A, X]$ □

Lecture 7: Groupe Fondamental

Mon 21 Mar

2.5 Groupe Fondamental

Un lacet

$$\alpha : I \rightarrow X$$

est une application satisfaisant $\alpha(0) = x_0 = \alpha(1)$ ce qui signifie qu'il existe une application induite

$$\bar{\alpha} : S^1 \rightarrow X$$

Et on note alors

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1 X = [(S^1, 1), (X, x_0)]$$

$\pi_1 X$ a une structure de groupe donnée par la concaténation de lacets $\alpha \star \beta$

Definition 17 (Pinch and Fold)

L'application pinch

$$pinch : \sum A = A \times I / \sim \rightarrow \sum A /_{A \times \frac{1}{2}} \simeq \sum A \vee \sum A$$

Definition 18 (Fold)*Le pliage est une application*

$$\nabla : X \vee X \rightarrow X$$

*definie par la propriete universelle du pushout du diagramme $X \leftarrow * \rightarrow X$ avec le cone $\text{Id}_X : X \rightarrow X$*

La concatenation de deux lacets $\alpha, \beta : S^1 \rightarrow X$ est representee par

$$\alpha * \beta : S^1 \xrightarrow{\text{pinch}} S^1 \vee S^1 \xrightarrow{\alpha \vee \beta} X \vee X \xrightarrow{\nabla} X$$

On a vu que la concatenation equipe $[S^1, X]_*$ d'une structure de groupe.

L'associativite du groupe fondamental revient a dire que le diagramma suivant commute : A REMPLIR

En fait le groupe fondamental π_1 est un foncteur $\top_* \rightarrow \text{Gr}$, des espaces pointes vers les groupes

Proposition 41

Une application pointee $f : X \rightarrow Y$ induit un homomorphisme de groupes $f_ : \pi_1 X \rightarrow \pi_1 Y$*

Preuve

On sait que la postcomposition avec f induit une application $f_ : [S^1, X]_* \rightarrow [S^1, Y]_*$.*

On montre que c'est un homomorphisme.

Soient $\alpha, \beta : S^1 \rightarrow X$, pointees, alors le diagramme suivant commute A REMPLIR

On a que 1 et 2 commutent et 3 commute aussi par la propriete universelle \square

On souhaite calculer $\pi_1(X \times Y)$, on note $C_*(S^1, X)$ l'ensemble des applications pointees $\alpha : S^1 \rightarrow X$.

Le groupe $\pi_1(X)$ en est un quotient $[S^1, X]_* = C_*(S^1, X) / \simeq$.

La propriete universelle du produit est qu'une application $\omega : S^1 \rightarrow X \times Y$ est donnee par ses projections $p_1 \circ \omega$ et $p_2 \circ \omega$, ie.

$$\begin{aligned} F : C_*(S^1, X) \times C_*(S^1, Y) &\rightarrow C_*(S^1, X \times Y) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (\omega : S^1 \rightarrow X \times Y) \end{aligned}$$

est une bijection d'inverse

$$G : C_*(S^1, X \times Y) \rightarrow C_*(S^1, X) \times C_*(S^1, Y)$$

donne par la projection.

Proposition 42

Le foncteur π_1 preserve les produits.

Preuve

Les bijections F et G passent au quotient.

On montre que si $\alpha \simeq \alpha', \beta \simeq \beta'$, alors $F(\alpha, \beta) \simeq F(\alpha', \beta')$ et de meme, si $\omega \simeq \omega'$, alors la postcomposition par p_i donne des applications homotopes.

La compatibilite avec la structure de groupes vient du fait que G est definie par $(p_1)_*$ et $(p_2)_*$ sur les deux composantes. \square

2.6 Surfaces

Definition 19 (Surface)

Une surface S est un espace topologique connexe par arcs, compact, sans bord tel que tout point $s \in S$ admet un voisinage ouvert U homeomorphe a D^2 avec $\partial U \simeq S^1$

Definition 20 (Somme connexe)

Soient S et T deux surfaces, la somme connexe $S \# T$ est la surface obtenue en choisissant $s \in S, t \in T$, des voisinages $s \in U \simeq D^2$ et $t \in V$ et un homeomorphisme $f : \partial U \rightarrow S^1 \rightarrow \partial V$ et en recollant

$$S \# T = (S \setminus U) \amalg_{f(x) \simeq f(x)} \quad \forall x \in \partial U$$

Remarque

$S \# T$ est bien defini (sans preuve), de plus

$$T \# S^2 \simeq T$$

Exemple

$T^2 \# T^2$ est une surface de genre 2, un tore a deux trous.

Lecture 8: Tore a deux trous

Mon 28 Mar

Exemple

Posons $T = S = T^2$, on construit $T^2 \# T^2$, un tore a deux trous.

$$T^2 = I \times I / \sim = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2.$$

On va choisir des points s, t dans S et T respectivement de coordonnees $(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$ et $(\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$.

On choisit U et V comme deux gouttes autour de s respectivement V .

Le quotient du pentagone par $A \sim A'$ donne un espace homeomorphe a $I \times I \setminus U$.

Lecture 9: Theorie combinatoire des groupes

Mon 28 Mar

2.7 Bouteille de Klein

Soit K la bouteille de Klein, quotient de I^2 .
On comprend que K s'écrit comme

$$K = (S_a^1 \vee S_b^1) \cup_{abab^{-1}} e^2$$

On découpe $I \times I$ le long de deux segments verticaux le long de $(\frac{1}{3}, t)$ et $(\frac{2}{3}, t)$
Ainsi, K est un quotient de trois bandes verticales, et aussi de deux bandes A_2
et $A_1 \amalg A_3/b' \sim b''$.

3 Theorie Combinatoire des Groupes

But : Decrire et manipuler des groupes de maniere agreable pour pouvoir construire des pushouts.

3.1 Groupes libres

Exemple

Le groupe ayant un seul generateur a , sujet a aucune relation autre que les axiomes de groupe est le groupe $\{a^n | n \in \mathbb{Z}\} / a^0 = 1 \simeq \mathbb{Z}$.

On observe que pour tout groupe G $\text{hom}_{\text{Gr}}(F(a), G) \simeq \text{hom}_{\text{Set}}(\{a\}, UG)$.

Definition 21 (Groupe libre)

Soit I un ensemble, le groupe libre $F(I)$ a I generateur est obtenu en associant a chaque indice $\alpha \in I$ un generateur $x_\alpha \in F(I)$.

Tous les mots sont obtenus par concatenation de x_α^n pour $n \in \mathbb{Z}$ avec les identifications $x_\alpha^0 = 1, 1 \cdot x_\alpha = x_\alpha = x_\alpha \cdot 1$ et $x_\alpha x_\alpha^{-1} = 1$

De la construction de $F(I)$, on comprend qu'un homomorphisme $\phi : F(I) \rightarrow G$ est determine et meme equivalent a la donnee des images $g_\alpha = \phi(x_\alpha)$.

Ces isomorphismes etant naturels, on a que

Proposition 47

Le foncteur $F(-)$ est adjoint a gauche de U .

Le groupe libre abelien est un quotient de $F(a, b)$ via $\phi : F(a, b) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ determine par $\phi(a) = (1, 0)$ et $\phi(b) = (0, 1)$.

$\ker \phi$ contient $aba^{-1}b^{-1} = [a, b]$, ainsi, il contient aussi $[a, b]^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$ qui forment un sous-groupe cyclique infini dans $F(a, b)$.

Cependant, ce sous-groupe n'est pas normal et en fait $\ker \phi$ est le sous-groupe

normal engendre par $[a, b]$.

3.2 Presentations

Lemme 48

Tout groupe est quotient d'un groupe libre.

Preuve

Soit G un groupe et $\{g_\alpha | \alpha \in I\}$ un ensemble de generateurs (par exemple tous les $g \in G$).

On definit $\phi : F(I) \rightarrow G : x_\alpha \mapsto g_\alpha$, alors ϕ est surjective. \square

Definition 22

Soit $\phi : F(I) \rightarrow G$ un homomorphisme surjectif. Un element de $\ker \phi$ represente par un mot r_β en les generateurs x_α est un relateur.

Pour un choix de generateurs, $\beta \in J$ de $\ker \phi$ comme sous-groupe normal de $F(I)$ on appelle $\langle x_\alpha, \alpha \in I | r_\beta, \beta \in J \rangle$ une presentation de G .

Chaque relateur correspond a une relation $r_\beta = 1$ dans le quotient de $F(I)$

Autrement dit G est isomorphe a ce quotient.

3.3 Graphes de Cayley

On cherche a represente geometriquement un groupe donne par une presentation.

Definition 23 (Graphe de Cayley)

Soit $G = \langle x_\alpha | r_\beta \rangle$, le graphe de Cayley $\Gamma(G, \{x_\alpha\})$ est le graphe oriente et colore dont les sommets sont $g \in G$ et les aretes relient g et gx_α , oriente de g vers gx_α , de couleur α .

Remarque

Comme espace topologique, ce graphe est un quotient d'intervalles, un pour chaque arete, et on identifie les sommets a l'element du groupe voulu.

Lecture 10: Amalgamations

Mon 04 Apr

3.4 Produits libres

Soit $G = \langle x_\alpha | r_\beta \rangle$ et $H = \langle y_\gamma | s_\delta \rangle$, on forme le produit libre

$$G * H = \langle x_\alpha, y_\gamma | r_\beta, s_\delta \rangle$$

Proposition 50

Le produit libre $G * H$ est le coproduit de G et H dans la catégorie des groupes, ie. $\text{hom}(G * H, M) \simeq \text{hom}(G, M) \times \text{hom}(H, M)$ pour tout groupe M .

Preuve

Soit $G \hookrightarrow G * H \leftarrow H$.

Soit $\omega : G * H \rightarrow M$, alors on peut lui associer $\omega \circ \iota$ et $\omega \circ j$.

Conversement, étant donné $\phi : G \rightarrow M$ et $\psi : H \rightarrow M$, montrons que

$\exists ! \omega : G * H \rightarrow M$ tel que $\omega \circ \iota = \phi$ et $\omega \circ j = \psi$.

Pour l'existence, on définit $\tilde{\omega} : F(x_\alpha, y_\gamma) \rightarrow M$.

Comme $\phi(r_\beta) = 1 = \psi(s_\delta)$, $\tilde{\omega}$ passe au quotient et induit une application $\omega : G * H \rightarrow M$.

L'unicité de ω suit du fait que ce soit une colimite. \square

Remarque

On définit de la même façon un produit libre d'un nombre arbitraire de groupes.

3.5 Pushouts de groupes

Soient $\alpha : K \rightarrow G$ et $\beta : K \rightarrow H$ deux homomorphismes, on veut construire le pushout de $G \leftarrow K \rightarrow H$

Definition 24 (Pushout)

Le pushout ou amalgame $G *_K H$ est le quotient de $G * H$ par le sous-groupe normal engendré par les éléments de la forme $\iota(\alpha(x))j(\beta(x)^{-1})$

On appelle aussi i et j les compositions $G \rightarrow G * H \rightarrow G *_K H$ et $H \rightarrow G * H \rightarrow G *_K H$.

On a ainsi un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\alpha} & G \\ \beta \downarrow & & \downarrow \iota \\ H & \xrightarrow{j} & G *_K H \end{array}$$

Proposition 52

Le pushout est un pushout.

Preuve

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \xrightarrow{\alpha} & G & & \\
 \beta \downarrow & & \downarrow \iota & \searrow \phi & \\
 H & \xrightarrow{j} & G *_K H & \xrightarrow{\exists! \omega} & M \\
 & \searrow \psi & & &
 \end{array}$$

On construit $\tilde{\omega} : G * H \rightarrow M$ par la propriété universelle du produit libre (à l'aide de ϕ et ψ).

Cet homomorphisme $\tilde{\omega}$ passe au quotient parce que $\tilde{\omega}(\iota(\alpha(x))j(\beta(x))^{-1}) = \psi(\alpha(x))\psi(\beta(x))^{-1} = 1$ et on a une application induite $\omega : G *_K H \rightarrow M$.

L'unicité est immédiate. \square

4 Seifert-van Kampen

On souhaite calculer le groupe fondamental d'un pushout d'espaces et l'identifier.

4.1 Groupe fondamental d'un recollement

Soient $A, B \subset X$, $X = A \cup B$, deux sous-espaces ouverts tels que $C = A \cap B$ est connexe par arcs.

On choisit $x_0 \in C$ comme point de base pour C, A, B et X .

On appelle $\iota : A \subset X, j : B \subset X, \alpha : C \subset A, \beta : C \subset B$.

On obtient alors un pushout :

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\alpha} & A \\
 \beta \downarrow & & \downarrow \iota \\
 B & \xrightarrow{j} & X
 \end{array}$$

On va montrer que

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(C, x_0) & \xrightarrow{\alpha_*} & \pi_1(A, x_0) \\
 \beta_* \downarrow & & \downarrow \iota_* \\
 \pi_1(B, x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_1(X, x_0)
 \end{array}$$

est un pushout.

Par la propriété universelle du pushout, ce carré nous fournit $\phi : \pi_1(A, x_0) *_{\pi_1(A, x_0)} \pi_1(B, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$

Lemme 53

ϕ est surjectif.

Preuve

Soit $\gamma : I \rightarrow X$ un lacet base en x_0 .

Le recouvrement de X par A et B donne un recouvrement ouvert $\gamma^{-1}(A), \gamma^{-1}(B)$ de l'intervalle I , un espace metrique compact.

donc il existe un nombre de lebesgue $\delta > 0$ tel que tout sous-ensemble de I de diametre $< \delta$ est contenu dans $\gamma^{-1}(A)$ ou $\gamma^{-1}(B)$ (ou les deux.)

On choisit donc $n > \frac{1}{\delta}, n \in \mathbb{N}$ de sorte que $\gamma|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}$ est un chemin dans A ou dans B .

Pour alterner les images dans A et dans B , on concatene les chemins qui se suivent dans le meme ouvert pour choisir $s_0 = 0 < s_1 = \frac{k_1}{n} < \dots < \frac{k_r}{n} = 1$ de telle sorte que γ envoie $[s_0, s_1]$ dans (disons) A , $[s_1, s_2]$ dans B etc.

On definit $\gamma_i = \gamma|_{[s_{i-1}, s_i]}$.

Comme C est connexe par arcs, il existe des chemins γ^i dans C , allant de x_0 a $\gamma(s_i)$.

On decompose a homotopie pres, le chemin γ en concatenation de lacets (d'abord des chemins) .

$$\begin{aligned}\gamma &\simeq \gamma_1 \star \gamma_2 \star \dots \star \gamma_r \\ &\simeq \gamma_1 \star \overline{\gamma^1} \star \gamma^1 \star \dots \\ &\simeq \underbrace{(\gamma_1 \star \overline{\gamma^1})}_{\omega_1} \star \underbrace{(\gamma^1 \star \gamma_2 \star \overline{\gamma^2})}_{\omega_2} \star \dots\end{aligned}\quad \square$$

ou ω_1 est un lacet base en x_0 et entierement contenu dans A ou dans B .

Alors $[\gamma] = [\omega_1] \cdot \dots \cdot [\omega_r] = i_*(\omega_1)j_*(\omega_2) \dots$

Pour montrer que ϕ est un isomorphisme, on cherche a identifier le noyau de $\pi_1 A * \pi_1 B \rightarrow \pi_1 A *_{\pi_1 C} \pi_1 B \rightarrow \pi_1 X$.

Soit γ la concatenation de lacets $\gamma_1 * \dots * \gamma_r$, avec γ_{2i+1} dans A , et γ_{2i} dans B . On suppose que $[\gamma] = 1$ dans $\pi_1 X$, ie. que $\gamma \simeq c_{x_0} \iff \exists H : I^2 \rightarrow X$ entre γ et c_{x_0} .

Par le meme argument de nombre de lebesgue, on decoupe le carre en rectangles que H envoie entierement dans A ou dans B .

Lecture 11: Fin Seifert Van-Kampen

Mon 11 Apr

On veut montrer que l'application ϕ definie la derniere fois est une application de $\ker N = \ker(\pi_1 A * \pi_1 B \rightarrow \pi_1 A *_{\pi_1 C} \pi_1 B)$.

On decoupe donc $I \times I$ en nm carres tels que $H|_{C_k} \subset A$ ou B .

On construit ω_k comme indique sur le dessin.

On a $\omega_0 = c_{x_0}$ et $\omega_{nm} = \gamma$.

Ainsi, $H|_{C_k}$ fournit une homotopie entre ω_k et ω_{k-1} .

On va montrer que $\omega_k * \overline{\omega_{k-1}} \in N$.

En effet, alors $\omega_{nm} = \omega_{nm} * \overline{\omega_{nm-1}} \dots * \omega * \overline{\omega_0}$.

Pour chaque k , on fixe $H|_{C_k}$ est vue dans ou B si elle est dans $C = A \cap B$.

De meme, pour chaque chemin correspondant aux 4 cotes du rectangle.

Mettons que pour k , l'homotopie est dans A , alors les cotes "a gauche et en haut" sont choisis dans A .

Ainsi, les deux autres sont choisis dans A ou B selon $k = 1$ et $k - n$.

S'ils sont tous dans A , alors $H|_{C_k}$ est une homotopie dans A entre chemin dans A , $\omega_k * \overline{\omega_{k-1}} \in N$.

Supposons qu'un cote au moins est un chemin dans B

$$\omega_k * \overline{\omega_{k-1}} = \lambda_1 * \lambda_2 * \overline{\lambda_2} * \lambda_3 = \lambda_1 * \lambda_3$$

Comme le point y (le cote en haut a droite du carre) appartient a C , on choisit un chemin γ^1 de $H(y)$ a x_0 , de meme γ^2 pour z (le point en bas a droite du carre).

$$\lambda_1 * \lambda_3 = \lambda_1 * \gamma^1 * \overline{\gamma^1} * \lambda_4 * \gamma^2 * \overline{\gamma^2} * \lambda_5$$

Le chemin λ_4 est dans B , appelons λ'_4 le meme chemin vu dans A , $H|_{C_k}$ est une homotopie dans A tel que le chemin $\lambda_1 \simeq \overline{\lambda_5} * \overline{\lambda'_4}$

$$\begin{aligned} &= \overline{\lambda_5} * \gamma^2 * \overline{\gamma^2} * \overline{\lambda'_4} * \gamma^1 * \overline{\gamma^1} * \lambda^4 * \gamma^2 * \overline{\gamma^2} * \lambda_5 \\ &= \bar{\epsilon} * \bar{\alpha} * \beta * \epsilon \end{aligned}$$

Represente un conjugue par ϵ dans $\pi_1 A * \pi_1 B$ du meme lacet λ_4 vu dans B ou λ'_4 vu dans A .

Par definition de $\pi_1 A *_{\pi_1 C} \pi_1 B$, c'est un element de N

Exemple

$$\mathbb{R}P^2 = D^2 / \sim \simeq S^1 \cup_2 e^2.$$

Pour recouvrir $\mathbb{R}P^2$ par des ouverts, on epaissit $\mathbb{R}P^1$ et on amincit e^2 .

On pose $A = \dot{D}_{\frac{3}{4}}$, $B = D^2 \setminus D_{\frac{1}{4}}$.

Comme A, B, C sont satures, $q(A), q(B), q(C)$ sont ouverts, on a donc

$$q(A) = *, q(B) = q(S^1) = S^1 \text{ et } q(C) = q(S^1) = S^1$$

L'inclusion $C \subset B$ induit une application $q(C) \rightarrow q(B)$

4.2 Groupe fondamental d'un Wedge

On suppose que tous nos espaces sont pointes et bien pointes dans le sens ou le point de base x_0 admet un voisinage ouvert et contractile au sens pointe, $U \simeq \{0\}$ et l'homotopie $\text{Id}_U \simeq c_{x_0}$ fixe x_0

Exemple

S^1 est bien pointe, toutes les surfaces aussi, le peigne du topologue ne l'est pas en $(0, 1)$.

Lemme 56

Si X, Y sont bien pointes, $X \vee Y$ aussi ($X \times Y$ aussi).

Preuve

Soient $U \ni x_0, V \ni y_0$ des voisinages contractiles de x_0 resp. y_0 .

Dans $X \vee Y = X \amalg Y / x_0 \sim y_0$, on choisit l'image de $U \amalg V \subset X \amalg Y$.

Les homotopies $H : \text{Id}_U \simeq c_{x_0}, F : \text{Id}_V \simeq c_{y_0}$ donne une homotopie $H \amalg F : \text{Id}_U \amalg V \rightarrow c_{x_0} \amalg c_{y_0}$ passe au quotient comme elle preserve le point de base. \square

Proposition 57

Soient $(X, x_0), (Y, y_0)$ deux espaces bien pointes, alors $\pi_1(X \vee Y) \simeq \pi_1 X * \pi_1 Y$

Preuve

On prend $A = X \vee V$ et $B = Y \vee U$, alors on conclut par le lemme ci-dessus et Seifert. \square

Lecture 12: Retracts

Thu 21 Apr

Definition 25 (Retracte)

Un sous-espace $\iota : A \hookrightarrow X$ est un retrace de X s'il existe une retraction $r : X \rightarrow A$ tel que $r \circ \iota = \text{Id}_A$.

Exemple

1. S^1 est un retrace de $S^1 \vee S^1$.

2. Tout point $x_0 \in X$ est un retrace de X $r : X \rightarrow \{x_0\}$.

Remarque

S^1 n'est pas un retrace du disque D^2 , il n'existe aucune application continue $r : D^2 \rightarrow S^1$ tel que $r(x) = x$ si $x \in S^1$.

Sinon $\pi_1 S^1 \xrightarrow{\iota_*} \pi_1 D^2 \xrightarrow{r_*} \pi_1 S^1$.

Si la composition $r \circ \iota$ etait l'identite, la composition $\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}$ serait l'identite, ce qui est impossible.

Definition 26 (Retracte de deformation)

Un retrace $\iota : A \hookrightarrow X$ est un retrace de deformation de X s'il existe une homotopie $\iota \circ r \simeq \text{Id}_X$

Exemple

Le peigne du topologue $P \setminus \{(0,1)\} \subset P$ est un retrace de deformation.

On definit l'homotopie H en trois temps.

1. Contracter les dents du peigne
2. Contracter la base du peigne.

3. Remonter en $(0, 1)$

Cette homotopie n'a pas fixe le point $(0, 1)$

Definition 27 (Retracte de deformation fort)

Un retractor de deformation $\iota : A \hookrightarrow X$ est un retractor de deformation fort si l'homotopie $H : \iota \circ r \simeq \text{Id}_X$ peut être choisie relative à A , ie, $H(a, t) = a$ pour tout $t \in I$ et pour tout $a \in A$

Exemple (Le collier)

Soit A un espace et $\text{Col}(A) = A \times [0, \frac{3}{4}]$, l'inclusion de $A \times 0 \hookrightarrow \text{Col}(A)$ est un retractor de deformation fort.

On pose $r(a, t) = (a, 0) \forall a \in A, \forall t$.

On définit donc $H : \text{Col}(A) \times I \rightarrow \text{Col}(A)$ en envoyant $(a, t, s) \mapsto (a, ts)$ qui vérifie clairement toutes les hypothèses ci-dessus.

Lecture 13: Conséquence de Seifert

Mon 25 Apr

Proposition 62

Soit $f : A \rightarrow X$ une application pointée avec A connexe par arcs.

Soit $Y = X \cup_f CA$, alors $\pi_1 Y \simeq \pi_1 X *_{\pi_1 A} 1$

Preuve

Y est recouvert par $q(X)$ et $q(CA)$, mais ce ne sont pas des ouverts de Y , il faut les épaissir.

On pose $X' = q(X \amalg \text{Col}(A))$ et $C'A = A \times]\frac{1}{4}, 1]/A \times 1$ un "petit" cône ouvert.

On voit que $C'A \simeq *$ (comme CA) et $C'A$ et X' sont des ouverts de Y car ce sont des images par q d'ouverts saturés.

De plus, X' admet X comme retractor de deformation fort.

Enfin, $X' \cap C'A = q(\text{Col}(A) \cap (A \times]\frac{1}{4}, 1])/A \times 1) = q(A \times]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \simeq A$.

On peut donc appliquer le théorème de Seifert van Kampen car A est connexe par arcs.

Pour conclure, on affirme que $j : C'A \cap X' \hookrightarrow X'$ induit $f_* : \pi_1 A \rightarrow \pi_1 X$.

On considère $X' \leftarrow A' \times]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \rightarrow A'$ □

4.3 Attachement de cellules standard

Si $Y = X \cup_f e^n$ Comme $\pi_1 S^{n-1} = 1$, pour $n \geq 3$ on a

Corollaire 63

Si $n \geq 3$, $\pi_1 Y \simeq \pi_1 X$.

Si $n = 2$, $\pi_1 Y \simeq \pi_1 X / N_f$ ou N_f est le sous-groupe normale engendré

par $f_*(1)$ ou $f_* : \mathbb{Z} \simeq \pi_1 S^1 \rightarrow \pi_1 X$ qui envoie $1 \mapsto f_*(1)$

Preuve

Par la proposition on a un pushout de groupes $\pi_1 X \leftarrow \pi_1 S^1 \rightarrow \pi_1(CS^1)$ qui est $\pi_1 Y$, donc $\pi_1 Y \simeq \pi_1 X *_{\pi_1 S^1} 1 \simeq \pi_1 X / N_f$ \square

Il reste à étudier les attachements de 1 cellule.

Il y a deux cas pour $f : S^0 \rightarrow (X, x_0)$.

Si $f(-1)$ et x_0 ne sont pas dans la même composante connexe, alors $\pi_1 Y = \pi_1(X, x_0) * \pi_1(X, f(-1))$.

Si x_1 et x_0 sont dans la même composante connexe, alors f est homotope à l'application $g = c_{x_0}$ via γ un chemin entre x_0 et x_1 .

Alors $X \cup_f e^1 \simeq X \cup_g e^1$ (puisque des applications homotopes donnent des attachements homotopes) or puisque g est constante, ceci est homotope à $X \vee e^1$. Ainsi, si X est bien pointée, alors $\pi_1 Y \simeq \pi_1 X * \mathbb{Z}$.

4.4 Classification des surfaces

Rappel : Une surface est un espace compact, hausdorff et localement homéomorphe à \mathbb{R}^2 .

On va supposer connu que toute surface est triangularisable, ie. S est un quotient d'une réunion disjointe finie de triangles en identifiant uniquement des paires de cotes, à homéomorphisme près.

On va supposer que S est le quotient d'un polygone P à $2k$ cotes $a'_1, \dots, a'_k, a''_1, \dots, a''_k$ ou a'_i et a''_i sont identifiés deux à deux, et tous les sommets sont identifiés à un point.

On reconnaît dans cette description la somme connexe de i copies de $\mathbb{R}P^2$ et de tores.

Proposition 64

Si S est le quotient de P par une relation donnée par un mot w , P un $2k$ -gone et S' est le quotient de P par une relation donnée par un mot w' , P' un $2l$ -gone, alors $S \# S'$ est le quotient d'un $(2k + 2l)$ -gone par la relation donnée par ww'

Preuve

On appelle A_0, \dots, A_{2k-1} les sommets de P et on choisit un voisinage U d'un point intérieur dont le bord ne rencontre ∂P qu'en A_0 .

De même pour P' avec U' et $\partial U \cap P' = \{A'_0\}$.

Comme $P \setminus U$ est le quotient d'un $(2k + 1)$ -gone dont les cotes sont $a'_1, a''_1, \dots, a'_k, a''_k$ et b entre B_0 et A_0 .

Ici, B_0 est la deuxième extrémité de a''_k .

La somme connexe est le quotient d'un $(2k + 1)$ -gone et un $(2l + 1)$ -gone, vu que le quotient d'un quotient est un quotient, $S \# S'$ est construite en identi-

fiant d'abord b et b' de sorte a obtenir un $(2k + 2l)$ -gone puis en identifiant les cotes 2 a 2 selon les instructions donnees par le mot parcouru de A_0 sur le bord dans le sens trigonometrique.

C'est bien la concatenation ww' . □

Lecture 14: Revetements

Mon 02 May

On veut calculer $\pi_1(T^2 \# \mathbb{R}P^2)$.

Comme $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \simeq T^2 \# \mathbb{R}P^2$.

On calcule le groupe fondamental grace a la presentation de $Y := T^2 \# \mathbb{R}P^2$.

Si P est le pushout de $\vee_1^3 \leftarrow \partial H \simeq S^1 \hookrightarrow H \simeq D^2$, on a une application induite $P \rightarrow Y$, c'est une bijection d'un compact vers un hausdorff, c'est un homeomorphisme.

Donc $\pi_1 Y = \pi_1 P = \pi_1 \left((S_d^1 \vee S_e^1 \vee S_f^1) \cup_p e^2 \right) \simeq \langle \delta, \epsilon, \phi | r \rangle$.

Ici, r est le mot $[p] \in [S^1, S^1 \vee S^1 \vee S^1]$ qui est l'image de $\text{Id}_{\partial H}$ par p_* .

Comme $\text{Id}_{\partial H} = d' * e' * \bar{d}'' * \bar{e}'' * f' * f''$.

Son image est le lace $d * e * \bar{d} * \bar{e} * f * f$.

Sa classe d'homotopie est donc donnee par $\delta \epsilon \delta^{-1} \epsilon^{-1} \phi^2$.

De la boite noire, il suit que toute surface est soit la sphere, soit une somme connexe de tores et plans projectifs.

S'il n'y pas de $\mathbb{R}P^2$, on a une somme connexe de g tores, un tore a g trous.

Sinon, il y a au moins une copie de $\mathbb{R}P^2$ et la surface S sera de la forme $T^2 \# \dots \# T^2 \# \mathbb{R}P^2 \dots \# \mathbb{R}P^2 = (T^2)^{\#a} \# (\mathbb{R}P^2)^{\#b} = (\mathbb{R}P^2)^{\#2a+b}$.

Theorème 65 (Theoreme de classification)

Une surface est homeomorphe a $(T^2)^{\#g}$ ou $(\mathbb{R}P^2)^k$ pour $g \geq 1, k \geq 1$.

On pourrait montrer pour conclure que les π_1 de ces surfaces sont tous distincts, on va plutot etudier $H_1 S = (\pi_1 S)_{ab}$.

On sait que $\pi_1 S^2 = 1, H_1 S^2 = 0$.

On calcule $H_1((T^2)^{\#g}) = \mathbb{Z}^{2g}$.

Lemme 66

$$H_1((\mathbb{R}P^2)^{\#k}) = \mathbb{Z}^{k-1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Preuve

$$\pi_1((\mathbb{R}P^2)^{\#k}) = \langle a_1, \dots, a_k | a_1^2 \dots a_k^2 \rangle \quad \square$$

On construit $\phi : \pi_1((\mathbb{R}P^2)^{\#k}) \rightarrow A = \mathbb{Z}^{k-1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; a_i \rightarrow e_i, a_k \rightarrow f - (e_1 + \dots + e_{k-1})$ ou e_i est le i eme generateur de \mathbb{Z}^{k-1} .

On verifie que $\phi(a_1^2 \dots a_k^2) = 0$ pour etre sur que ϕ est un homomorphisme.

Calculons $\phi(a_1^2 \dots a_k^2) = 2\phi(a_1) + \dots + 2\phi(a_k) + 2(f - e_1 - \dots - e_{k-1}) = 2f = 0$.

Comme A est abélien, ϕ induit $\bar{\phi} : \pi_{ab} \rightarrow A$.

On construit l'inverse ψ en envoyant $e_i \rightarrow \bar{a}_i$ et $f \rightarrow \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$.

Comme A est un groupe libre abélien produit avec $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il suffit de vérifier que $\psi(2f) = 0$ ce qui est immédiat.

On termine en vérifiant que ψ est l'inverse de ϕ .

Comme les groupes $0, \mathbb{Z}^{2g}, \mathbb{Z}^{k-1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Remarque

Pour reconnaître S , il n'est pas nécessaire de calculer $H_1 S$, il suffit de savoir si S est orientable (sinon elle contient un ruban de Moebius) et de calculer $\xi(S)$, la caractéristique d'Euler.

En général $\xi(S)$ est $\# \text{ sommets} - \# \text{ arêtes} + \# \text{ faces}$ pour un polyèdre.

Pour nous, c'est donc $1 - l + 1 = 2 - l$

5 Les Revêtements

5.1 Définitions

Tous les espaces sont Hausdorff, connexes par arcs et localement connexes par arcs.

I.e., tout voisinage de tout point contient un voisinage de ce point qui est connexe par arcs.

Pour $x \in X$, on appellera $p^{-1}(x) = Fx$ la fibre au-dessus de X

Definition 28

Une application $p : E \rightarrow X$ est un revêtement si tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert trivialisant $U \ni x$, tel que $p^{-1}(U)$ est une réunion disjointe de $U_i, i \in I$, appelés feuillets, avec $p|_{U_i} : U_i \rightarrow U$ un homéomorphisme.

Exemple

1. Id_X est un revêtement
2. $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ est un revêtement
3. $q : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ est un revêtement
4. Pour F discret, la projection $p_2 : X \times F \rightarrow X$ est le revêtement trivial.

Lemme 69

Les fibres sont des espaces discrets

Preuve

Soit $e \in Fx$ et $U \ni x$ un ouvert trivialisant.

Alors e appartient à un seul feuillet U_i et donc dans Fx □

Proposition 70

Un revêtement est une surjection ouverte, en particulier un quotient.

Preuve

Soit V un ouvert connexe de E et $x \in p(V)$.

On choisit un ouvert trivialisant $U \ni x$, alors $x = p(y)$, $y \in V \subset E$, $y \in V \subset E$ et il existe donc un feuillet U_i tel que $U_i \cap V \neq \emptyset$.

Comme $p|_{U_i}$ est un homeo, $p|_{U_i \cap V}$ aussi. Donc $p(U_i \cap V)$ est ouvert. □

Lecture 15: Relevement d'homotopies

Mon 09 May

Proposition 71

Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Si Y est un espace connexe, $f, g : Y \rightarrow E$ deux applications tel que $p \circ f = p \circ g$ alors $Z = \{y \in Y \mid f(y) = g(y)\}$.

Preuve

On va montrer que Z est ouvert et fermé.

Comme Y est connexe, Z sera donc Y ou \emptyset .

Montrons que Z est ouvert.

Pour $z \in Z$, on choisit un ouvert trivialisant U de $p(f(z)) = p(g(z))$.

Soit U_i le feuillet contenant $f(z) = g(z)$.

Alors $f^{-1}(U_i) \cap g^{-1}(U_i)$ est un ouvert de Y .

On montre qu'il est contenu dans Z .

Soit y un point de l'intersection, alors $f(y)$ et $g(y) \in U_i$ et $p(f(y)) = p(g(y))$ dans X .

Or $p|_{U_i}$ est un homeo et $f(y), g(y) \in U_i$. Donc $f(y) = g(y)$.

Montrons donc que Z est fermé.

Soit $y \in Z$ et U un ouvert trivialisant de $p(f(y)) = p(g(y))$.

Soit U_i le feuillet dans E qui contient $f(y)$ et U_j celui qui contient $g(y)$.

Puisque $f(y) \neq g(y)$ et $p|_{U_i}$ est un homeo, on sait que $i \neq j$.

Alors $f^{-1}(U_i) \cap g^{-1}(U_j)$ est un ouvert de Y qui contient y .

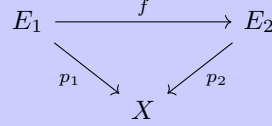
C'est donc un voisinage ouvert de y dans Y .

On affirme qu'il est entièrement contenu dans $Y \setminus Z$ □

Definition 29 (Morphisme de Revêtement)

Soient $E_1 \xrightarrow{p_1} X$ et $E_2 \xrightarrow{p_2} X$ est une application $f : E_1 \rightarrow E_2$ tel que

$$p_2 \circ f = p_1$$



Un automorphisme d'un revêtement $p : E \rightarrow X$ est un morphisme inversible en tant que morphisme de revêtement.

Il existe donc $g : E \rightarrow E$ tq $g \circ f = f \circ g = \text{Id}_E$ et $p \circ f = p$ et $p \circ g = p$.

On note $\text{Aut}(p)$ l'ensemble de tous ces automorphismes.

Exemple

L'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui envoie $x \mapsto x + n$ est un automorphisme de $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$.

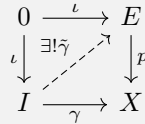
Remarque

Soient p, q deux revêtements composables, alors $q \circ p$ est un revêtement si les fibres de q sont finies mais ce n'est pas le cas en general.

5.2 Relevement de chemins

Theorème 74 (Relevement unique de chemins)

Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement et $\gamma : I \rightarrow X$ un chemin. Soit $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ ou $x_0 = \gamma(0)$. Il existe alors un unique chemin $\tilde{\gamma} : I \rightarrow E$ tq $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ et $\tilde{\gamma}(0) = y_0$



Preuve

Soit U_α un recouvrement de X par des ouverts trivialisants.

Comme I est compact, il existe $\delta > 0$ tel que tout intervalle de I de rayon $< \delta$ a son image dans l'un de ces ouverts.

On choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < \delta$.

On construit $\tilde{\gamma}$ inductivement.

L'intervalle $[0, \frac{1}{n}]$ a son image par γ contenue dans U_{α_1} , un ouvert trivialisant.

Alors $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ est dans l'un des feuillettes $(U_{\alpha_1})_{i_1}$.

On pose alors $\tilde{\gamma} : [0, \frac{1}{n}] \rightarrow U_{\alpha_1} \xrightarrow{(p|_{(U_{\alpha_1})_{i_1}})^{-1}} (U_{\alpha_1})_{i_1} \subset E$.

On continue par induction, supposons que $\tilde{\gamma}$ est définie sur $[0, \frac{k}{n}]$, alors

$$\gamma[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \subset U_{\alpha_{k+1}}$$

et $\tilde{\gamma}(\frac{k}{n}) = y_k \in (U_{\alpha_{k+1}})_{i_{k+1}}$.

On pose

$$\tilde{\gamma} : [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \xrightarrow{\gamma} U_{\alpha_{k+1}} \rightarrow (U_{\alpha_{k+1}})_{i_{k+1}}$$

L'unicite suit de la proposition.

Supposons en effet que $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}' : I \rightarrow E$ sont deux relevements, alors $\tilde{\gamma}(0) = y_0 = \tilde{\gamma}'(0)$, donc $Z = \{t \in I \mid \tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}'(t)\}$ n'est pas vide.

Donc c'est l'intervalle tout entier. \square

Proposition 75

Soit $p : E \rightarrow X$ un revetement et Y un espace localement connexe par arcs.

Si $f : Y \rightarrow E$ est une application et $H : Y \times I \rightarrow X$ est une homotopie $p \circ f = H(-, 0) \simeq H(0, 1)$.

Il existe $\tilde{H} : Y \times I \rightarrow E$ tel que $\tilde{H}(-, 0) = f$ et $p \circ \tilde{H} = H$

$$\begin{array}{ccc} Y \times 0 & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow \iota & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

Proposition 76

Soit $p : E \rightarrow X$ un revetement. Si $f, g : I \rightarrow E$ sont deux chemins avec $f(0) = g(0)$ et $H : I \times I \rightarrow X$ est une homotopie entre $p \circ f$ et $p \circ g$ avec $H(0, t) = x_0$ et $H(1, t) = x_1$ pour tout $t \in I$, alors $f \simeq g$

Preuve

Par la propriete de relevement, il existe une homotopie $\tilde{H} : I \times I \rightarrow E$ tel que $p \circ \tilde{H} = H$ et $\tilde{H}(s, 0) = f(s)$.

Par la propriete des relevement, $\tilde{H}(0, t)$ est l'unique chemin qui releve $H(0, t)$ et idem pour $\tilde{H}(1, t) = y_1 = f(1)$.

Finalement, $\tilde{H}(s, 1) = g$.

$\tilde{H}(s, m_1)$ est un chemin qui part de y_0 , qui releve $p \circ g$ et par unicite c'est donc g . \square

Corollaire 77

Toutes les fibres sont des espaces discrets de meme cardinal.

Preuve

Soient $x_0, x_1 \in X$ et $\gamma : I \rightarrow X$ avec $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$.

Le theoreme associe a tout $y \in p^{-1}(x_0)$ un unique chemin $\tilde{\gamma}$ qui releve γ .

On pose $\Phi : p^{-1}(x_0) \rightarrow p^{-1}(x_1)$ en associant $y \rightarrow \tilde{\gamma}(1)$ de meme pour $\bar{\gamma}$ on construit Φ^{-1} et on etablit donc une bijection. \square

Corollaire 78

Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement, alors $p_* : \pi_1 E \rightarrow \pi_1 X$ est un monomorphisme.

Preuve

On applique la proposition pour des lacets $f, g : I \rightarrow E$.

Ici, $f(0) = f(1) = y_0 = g(0) = g(1)$.

On sait que si $p \circ f \simeq p \circ g$ au sens pointe, alors $f \simeq g$ au sens pointe.

Ceci signifie que $p_*(f) = p_*g \implies [f] = [g]$ □

5.3 Revêtements et Actions de groupe

Soit G un groupe discret, agissant sur un espace X .

Definition 30 (Action totalement discontinue)

L'action de G sur X est totalement discontinue si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x tel que $Ug \cap U = \emptyset$ pour tout $g \neq e$.

Proposition 79

Si X est connexe par arcs et localement connexe par arcs et que G agit de manière totalement discontinue, alors $q : X \rightarrow X/G$ est un revêtement.

Preuve

On rappelle que $q(x) = xG$, on choisit un ouvert U de X comme dans la définition. Alors on a

$$q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{g \in G} Ug$$

est une réunion disjoint d'ouverts de X . En particulier $q(U)$ est un voisinage ouvert de $x \in X/G$.

Pour montrer que $q(U)$ est un ouvert trivialisant, on étudie $q|_{Ug} : Ug \rightarrow q(U)$.

D'abord, cette application est continue puisque q est continue.

De plus elle est ouverte, si $V \subset U$ est un ouvert, $q(V)$ est un ouvert de $q(U)$ et de même $q(Vg) = q(V)$ est ouvert.

Elle est surjective car $q(Ug) = q(U)$.

Elle est injective car si $q(ug) = q(vg)$, alors il existe h tel que $ug = vgh$ et donc $u = vghg^{-1}$.

Or $U \cap Ughg^{-1} = \emptyset$ si $ghg^{-1} \neq e \iff h \neq e$.

On conclut que $q|_{Ug}$ est un homeo. □

5.4 Relevements en general

La propriete de relevement unique des chemins permet en fait de resoudre des problemes plus generaux.

Proposition 80

Soit $p : E \rightarrow X$ un revetement et $f : Y \rightarrow X$ une application. On fixe des points de base $e_0 \in E, x_0 \in X, y_0 \in Y$ avec $p(e_0) = x_0 = f(y_0)$. Alors f admet un relevement $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ si et seulement si $f_*(\pi_1 Y) \subset p_*(\pi_1 E)$

Preuve

Si $f = p \circ \tilde{f}$, alors on a $\pi_1 Y \rightarrow \pi_1 E \hookrightarrow \pi_1 X$.

Ainsi, $f_* = p_* \circ \tilde{f}_*$ et en particulier $\text{Im } f_* \subset \text{Im } p_*$.

Soit donc $y \in Y$ et, par connexite par arcs, il existe un chemin γ dans Y avec $\gamma(0) = y_0, \gamma(1) = y$.

Par la propriete de relevement des chemins, il existe un unique $\tilde{\gamma}$ qui releve $f \circ \gamma : I \rightarrow Y \rightarrow X$.

On pose alors $\tilde{f}(y) = \tilde{\gamma}(1)$. On a alors $p \circ \tilde{\gamma}(1) = f(\gamma(1)) = f(y)$.

On montre que \tilde{f} est bien definie.

Soit γ' un autre chemin entre y_0 et y . Soit $\tilde{\gamma}'$ le relevement $f \circ \gamma'$ dans E .

Alors $f \circ \gamma' * \overline{f \circ \gamma}$ est un lacet ω base en $x_0 \in X$.

Comme $\omega = f(\gamma * \overline{\gamma'})$, on conclut que $[\omega] = \text{Im } f_* \subset \text{Im } p_*$.

Il existe un lacet $\tilde{\alpha} : I \rightarrow E$ base en e_0 tel que $p_*[\tilde{\alpha}] = [p \circ \tilde{\alpha}] = [\omega]$.

Il existe une homotopie $H : I \times I \rightarrow X$ entre $p \circ \tilde{\alpha}$ et ω .

Par la propriete de relevement des homotopies, il existe une homotopie \tilde{H} entre $\tilde{\alpha}$ et un lacet $\tilde{\omega} = \tilde{H}(-, 1)$ tel que $p \circ \tilde{\omega} = \omega$.

Sur $[0, \frac{1}{2}]$, $\tilde{\omega}$ releve $f \circ \gamma'$ et sur $[\frac{1}{2}, 1]$, $\tilde{\omega}$ releve $\overline{f \circ \gamma}$. Ainsi, $\tilde{\omega}$ est forme des seuls chemins $\tilde{\gamma}'$ et $\tilde{\gamma}$.

En particulier $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$.

Est-ce que \tilde{f} est continue ?

Pour montrer que la preimage d'un ouvert est ouverte, on va montrer que pour tout $e \in E$ de cet ouvert, $y \in \tilde{f}^{-1}(e)$, il existe un voisinage ouvert $V \subset Y$ tel que $\tilde{f}(V)$ est contenu dans cet ouvert.

On choisit un ouvert trivialisant U de $p(e)$ et on appelle U_e le feuillet qui contient e