Série 4

David Wiedemann

16 octobre 2020

On dénotera par e_{S_n} l'élément neutre de S_n. On utilisera le résultat démontré dans l'exercice 2 partie 3 :

$$\forall S \in S_n, S \neq e_{S_n} \implies \exists \sigma_1, \ldots, \sigma_k \text{ des permutations disjointes tel que } S = \prod_{i=1}^{k} \sigma_i$$

Théorème 1. *Soit $S \in S_n, S \neq e_{S_n}$ une permutation d'ordre $o(S) = k$, par exercice 2, partie 3, on peut poser que*

$$S = \prod_{i=1}^{m} \sigma_i$$

avec $\sigma_i, 0 < i \leq m$ des cycles disjoints.
Alors,

$$o(\sigma_i) \leq k \quad \forall 0 < i \leq m$$

Démonstration. Supposons qu'il existe σ_m tel que $n = o(\sigma_m) > k$, alors

$$S^k = \left(\prod_{i=1}^{m} \sigma_i\right)^k = \prod_{i=1}^{m} \sigma_i^k$$

où la deuxième égalité suit du fait que un produit de cycles disjoints commute (exercice 2 partie 2).
Or $\sigma_m^k \neq e_{S_n}$ car par définition n est le plus petit entier tel que $\sigma_m^n = e_{S_n}$ et $k < n$.
Etant donné que σ_m est disjoint des autres cycles, on en déduit que

$$\prod_{i=1}^{m} \sigma_i^k \neq e_{S_n}$$

$\square$

Grâce à ce théorème, on sait que pour énumérer toutes les permutations d'ordre n, il suffit de considérer le produit de cycles dont l'ordre est inférieur ou égal à n.

On sait, par l'exercice 2.5 que l'ordre d'un élément de S_n est borné par $n!$, il n'y a donc qu'un cas fini de possibilités à considérer.
Ramenons nous maintenant à S_4.
On désignera par $\binom{\bullet}{\bullet}$ les coefficients binomiaux.

- Le nombre d'éléments dans S_4 dont l'ordre est 1, est clairement 1, c'est l'identité.

- Le nombre d'éléments dont l'ordre est 2 est :

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{2} = 9$$

  En effet, soit $S \in S_4$ d'ordre 2, alors on distingue 2 cas :
  Si $S = \sigma$ un cycle d'ordre 2, alors il y a clairement $\binom{4}{2}$ manières de choisir les deux éléments du cycle.
  Si $S = \sigma_1 \cdot \sigma_2$, avec σ_1, σ_2, deux cycles d'ordre 2, alors il y a $\binom{4}{2}$ manières de choisir la première permutation et $\binom{2}{2}$ manières de choisir la deuxième.
  Il faut diviser le deuxième coefficient binomial car l'ordre dans lequel on choisit les cycles n'importe pas, ceci suit de la commutativité de cycles disjoints.
- Le nombre d'éléments dont l'ordre est 3 est :

$$\binom{4}{3} \cdot 2 = 8$$

  Si une permutation S est d'ordre 3, elle peut être représentée par un seul cycle d'ordre 3.
  Il y a clairement $\binom{4}{3}$ manières de choisir les trois éléments du cycle.
  Il y a $\frac{3!}{3} = 2$ manières d'arranger les trois termes choisis pour qu'ils forment des permutations distinctes.
- Le nombre d'éléments dont l'ordre est 4 est :

$$\binom{4}{4} \cdot 6 = 6$$

  A nouveau, si $S \in S_4$ une permutation d'ordre 4, elle peut être représentée par un cycle unique d'ordre 4.
  Il y a, clairement $\binom{4}{4}$ manières de choisir les éléments.
  Il y a $\frac{4!}{4} = 6$ manières d'arranger ces 4 éléments pour qu'ils forment des cycles différents.

On peut maintenant facilement vérifier que

$$1 + 6 + 8 + 6 = 24$$

On a donc bien énuméré toutes les possibilités.