17.1. On désire montrer qu'il existe deux points *antipodaux* sur l'équateur qui ont exactement la même température.

Démontrer que si $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue et 2π-périodique (i.e. $f(x+2\pi) = f(x)$ pour tout x), alors il existe x avec $f(x) = f(x+\pi)$.

Se convaincre que ceci est bien une formulation mathématique de notre énoncé équatorial plus vague.

17.2. $(*)$ On considère $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ 0 \neq x \in [-1,1],\ f(0) = 0.$$

Pour quel entier positif m a-t-on $f \in C^m([-1,1])$?

17.3. Soit $0 < L < 1$. Démontrer que toute fonction f qui est L-Lipschitz sur $\mathbf{R}$ admet un point fixe, et que ce point est unique.

Indication: Pour x_0 donné, considérer la suite donnée par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$.