Analyse II

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Introduction

Mon 22 Feb

1 Intégrales généralisées

Peut-on définir une intégrale sur un intervalle ouvert plutot que sur un intervalle fermé ? ie.

$$f : [a, b[\to \mathbb{R} \text{ c.p.m.}$$

Definition 1 (Intégrales généralisées (sur un intervalle borné non fermé))
Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *continue par morceaux (* $a < b$*).*
En particulier, f *est c.p.m. sur tout intervalle* $[a, x]$, $a < x < b$ *Soit* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.
On dit que l'integrale generalisee $\int_a^b f(x)dx$ *existe (ou converge) si* $\lim_{x\to b} F(X)$ *existe, dans ce cas, on note*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b} F(x) - F(a)$$

Si $\lim_{x\to b-} F(x)$ *n'existe pas, alors on dit que*

$$\int_a^b f(t)dt$$

diverge. Definition analogue pour le cas $]a, b]$.

On souhaite definir $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} tan(x)dx = 0$.
Dans certains cas cette integrale vaut 0. Mais si on calcule

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\frac{\pi}{2}+\epsilon^2} \frac{\pi}{2} - \epsilon tan(t)dt = \lim_{\epsilon\to 0+} (-\ln(\cos(\frac{\pi}{2} - \epsilon)) + \ln(\cos(-\frac{\pi}{2} + \epsilon^2))) = -\infty$$

Il faut donc une definition qui est coherente.

Definition 2 (Integrale sur un intervalle borne ouvert)
Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m et* $c \in]a, b[$.
Si les integrales generalisees $\int_a^c f(t)dt$ *et* $\int_c^b f(t)dt$ *existent, alors on definit l'integrale*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Si une des deux integrales diverge, alors le tout diverge.

Lecture 2: Integrales Generalisees

Wed 24 Feb

Theorème 1 (Critere de Comparaison)
Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m. et supposons* $\exists c \in [a, b[$ *tel que*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in [c, b[$$

Si $\int_a^b g(x)dx$ existe alors $\int_a^b f(x)dx$ existe aussi
Si $\int_a^b f(x)dx$ diverge alors $\int_a^b g(x)dx$ diverge aussi.

Preuve
Si $\int_a^b g(x)dx$ existe, alors $\int_c^b g(x)dx$ existe.
Donc

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{x\to b-}\int_a^x f(t)dt \\
&= \lim_{x\to b-}(\int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt) \\
&= \int_a^c f(t)dt + \lim_{x\to b-}\int_c^x f(t)dt \\
&\leq \int_a^c f(t)dt + \lim_{x\to b-}\int_c^x g(t)dt < +\infty
\end{aligned}$$

En notant $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, F est non decroissante, et bornee superieurement sur l'intervalle $[a, b[\Rightarrow \lim_{x\to b-} F(x)$ existe. □

Exemple
$f(x) = \left|\sin(\frac{1}{x})\right|$ *sur* $]0, 1]$, *on a*

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

1 est integrable, et donc l'integrale de $f(x)$ existe.

1.1 Integrales absolument convergentes

Definition 3 (Integrale absolument convergente)
Soit I un intervalle du type $[a, b[,]a, b]$ ou $]a, b[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ c.p.m.
On dit que l'integrale generalisee de f sur I est absolument convergente si

$$\int_I |f(x)|dx$$

existe.

Theorème 3 (absolument convergente implique convergente)
Si l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument, alors il converge.

Preuve
Notons $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ et $f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}$ et on a $|f(x)| = f_+(x) + f_-$.
Donc

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)| \text{ et } 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)| \forall x \in I$$

Par critere de comparaison, si

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ existe } \Rightarrow \text{ alors } \int_a^b f_+(x)dx, \int_a^b f_-(x) \text{ existent}$$

et donc $\int_a^b f(x)dx$ $\square$

Remarque

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *c.p.m Si* f *est bornee sur* I*, alors*

$$\int_I f(x)dx$$

existe.

Theorème 5 (Critere de comparaison (II))

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m.*

S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1[$ *tel que*

$$\lim_{x \to b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \in \mathbb{R}$$

Alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

existe.

S'il existe $\alpha \geq 1$ *tel que*

$$\lim_{x \to b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \neq 0$$

alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

diverge.

Preuve

Par definition de la limite $\forall \epsilon > 0, \exists b - a > \delta_\epsilon > 0$ *tel que*

$$|f(x)(b-x)^\alpha - l| < \epsilon \forall x$$

$$\Rightarrow l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha \leq l + \epsilon$$

et donc

$$0 \leq |f(x)| \leq \frac{|l| + \epsilon}{(b-x)^\alpha}$$

Puisque le terme de droite est integrable, on conclut par le critere de comparaison. Pour la deuxieme partie, soit $\alpha \geq 1$ *et* $l \neq 0$.

Supposons $l > 0$*, on a*

$$l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha$$

Le meme raisonnement que ci-dessus donne que l'integrale de f *diverge.* $\square$

1.2 Integrale generalisee sur un intervalle non borne

Definition 4 (Integrale sur un intervalle non borne)
Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *c.p.m.*
On dit que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *existe si*

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(x)dx$$

existe et dans ce cas, on note

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$$

idem si $f :]-\infty, a[\to \mathbb{R}$. *Soit* $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *c.p.m. on dit que* $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *existe s'il existe* $c \in]a, \infty[$ *tel que*

$$\lim_{x\to a+} \int_x^c f(t)dt \text{ et } \lim_{y\to+\infty} \int_c^y f(t)dt$$

existent.

Lecture 3: L'espace R^n

Mon 01 Mar

2 L'espace R^n

2.1 Espace vectoriel norme

Soit un ensemble V sur lequel on definit deux operations

1. somme : $+ : V \times V \to V$
2. multiplication par un scalaire $\mathbb{R} \times V \to V$

On definit R^n par $R^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ldots \times \mathbb{R}$

Definition 5 (Norme d'un vecteur)
C'est une application $N : V \to \mathbb{R}$*, c'est une application qui satisfait*

- $\forall x \in V : N(x) \geq 0$ *et* $N(x) = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V : N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
- $\forall x, y \in V, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

On utilise souvent la notation $N(x) = \|x\|$

Definition 6 (Espace vetoriel norme)
Un espace vectoriel norme est note $(V, \|.\|)$

Definition 7
Soit V *un espace vectoriel et* N_1, N_2 *deux normes sur* V.
On dit que N_1 *et* N_2 *sont equivalentes si* $\exists c_1, c_2 > 0$ *tel que*

$$c_1 N_2(x) \leq N_1(x) \leq c_2 N_2(x) \forall x \in V$$

Definition 8 (Distance)
Soit X un ensemble.
Une distance est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ qui satisfait les proprietes suivantes
- $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0,\ d(x, y) = 0 \iff x = y$
- *La distance est symmetrique*
- $\forall x, y, z \in V, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Un espace X muni d'une distance est appele un espace metrique et est note (X, d).

On peut toujours definir une distance sur un espace vectoriel norme, defini par

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

On appelle cette distance, la distance induite par la norme.
Tout espace vectoriel norme est aussi un espace metrique.

Definition 9 (Produit Scalaire)
Soit V un espace vectoriel.
Un produit scalaire est une application $b : V \times V \to \mathbb{R}$ qui satisfait les proprietes suivantes
- $\forall x, y \in V, b(x, y) = b(y, x)$
- $\forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x, z) + \beta b(y, z)$
- $\forall x \in V, b(x, x) \geq 0, b(x, x) = 0 \iff x = 0$

Theorème 6 (Inegalite de Cauchy-Schwarz)
Soit V un espace vectoriel et $b : V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire. Alors

$$\forall x, y \in V | b(x, y) \leq \sqrt{b(x, x) b(y, y)}$$

Preuve
$\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}.$

$$0 \leq b(\alpha x + y, \alpha x + y) = \alpha^2 b(x, x) + 2\alpha b(x, y) + b(y, y)$$

Donc on a

$$\Delta = b(x, y)^2 - b(x, x) b(y, y)$$ □

Theorème 7
Soit $b : V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire, alors l'application $x \to \sqrt{b(x, x)} = \|x\|_b$ est une norme sur V.

Donc, si V est muni d'un produit scalairel, alors V est un espace norme et donc V est un espace metrique pour la distance induite par le produit scalaire.

2.2 Normes sur R^n

- La norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- Norme "max" $\|x\|_\infty = \max |x_i|$
- Norme 1 : $\|x\|_1 = \sum |x_i|$
- Normes $p \in [1, +\infty[$ $\|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

  Pour p infinie, on retrouve la norme infinie

On montre en exercices que toutes les normes p sont equivalentes.
De meme, on montre que toutes les normes sur R^n sont equivalentes. Par contre, seulement la norme 2 est deduite d'un produit scalaire.

Definition 10 (Suites convergentes)
Soit $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$.
On dit que cette suite converge s'il existe $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k \to +\infty} \left\| x^{(k)} - x \right\| = 0$$

Lecture 4: Boules sur R^n

Wed 03 Mar

2.3 Suites sur R^n

Remarque
Supposons que $\left\{x^{(k)}\right\} \to \overrightarrow{x}$ *par rapport a la norme euclidienne. Et oit* $|||\cdot|||$ *une autre norme sur* $\mathbb{R}^n$*. Puisque toutes les normes sont equivalentes sur* $\mathbb{R}^n$ $|||\overrightarrow{x}||| \leq c||\overrightarrow{x}||_2$ *Donc toutes les suites converge peu importe la norme.*

En particulier, on peut choisir la norme infinie.

Lemme 9
Une suite $\left\{x^{(k)}\right\}$ *converge si et seulement si toutes les composantes convergent.*

Definition 11 (Suites de Cauchy)
On dit qu'une suite $\left\{x^{(k)}\right\}$ *est de Cauchy si*

$$\forall \epsilon > 0 \exists N > 0 : \forall k, l \geq N \left\| x^{(k)} - x^{(l)} \right\| \leq \epsilon$$

Theorème 10
Une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Preuve
Si la suite $x^{(k)}$ *converge* $\iff$ $\left\{x_i^{(k)}\right\}$ *converge pour tout* $i = 1, \ldots, n$ *donc toutes ces suites sont de Cauchy et donc* $x^{(k)}$ *converge.* $\square$

Theorème 11 (Bolzano-Weierstrass)
Soit $\left\{x^{(k)}\right\}$ *une suite bornee.*
Alors il existe une sous-suite $\left\{x^{(k_j)}\right\}$ *qui converge*

Preuve
Si $\left\{x^{(k)}\right\}$ *est bornee, en particulier chaque suite* $x^{(k)_i}$ *sera bornee.*
En $i = 1$*, la suite* $x^{(k)}$ *est bornee, donc il existe une sous-suite convergente vers une valeur* x_1*.*
On considere les index de cette sous-suite et on reapplique l'argument ci-dessus en $i = 2$*, etc.* $\square$

2.4 Topologie de $\mathbb{R}^n$

Definition 12 (Boule)
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $\delta > 0$*, la boule ouverte centree en* x *et de rayon* δ

$$B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \delta\}$$

La boule fermee

$$\overline{B}(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \delta\}$$

La sphere centree en x *et de rayon* δ

$$S(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| = \delta\}$$

2.5 Classification des points d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$

Le complementaire de E est

$$E^c = \{y \in \mathbb{R}^n, y \notin E\}$$

On dit que x est un point interieur de E si $\exists \delta : B(x, \delta) \subset E$, on dit que x est un point frontiere de E si $\forall \delta B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$ et $B(x, \delta) \cap E^c \neq \emptyset$ On dit que E^o est l'ensemble des points interieurs de E, E^o est appele l'interieur de E.

On note ∂E l'ensemble des points frontieres, appele la frontiere ou le bord de E.
On dit que x est un point adherent de E si $\forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$ On note $\bar{E}$ l'ensemble des points adherents de E, appele l'adherence de E.
On a $\bar{E} = E \cup \partial E$
On dit que x est un point isole si

$$\exists \delta > 0 B(x, \delta) \cap E = \{x\}$$

On dit que x est un point d'accumulation de E, si $\forall \delta > 0$

$$B(x, \delta) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Donc, en particulier, si on prend $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$

$$\exists x^{(k)} \in E, \text{ tel que } \left\|x^{(k)} - x\right\| \leq \frac{1}{k}$$

La suite $x^{(k)}$ converge vers x.

Definition 13

Soit E un ensemble de $\mathbb{R}^n$, on dit que E est ouvert si tous ses points sont interieurs

Definition 14

E est ferme si E^c est ouvert.

Lecture 5: Ensembles compacts/connexes par arcs

Mon 08 Mar

2.6 Caracterisation des ensembles ouverts

— $\overset{\circ}{E}$ est toujours ouvert.

— E est ouvert si et seulement si $E = \overset{\circ}{E}$

— L'union (meme infinie) d'ensembles ouverts est ouverte.
Soit $E = \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$ et K_α sont ouverts.
Alors $\forall x \in E$, $x \in K_\alpha$ et donc il existe une boule ouverte centree en x et contenue dans K_α.

— L'intersection finie d'ensembles ouverts est ouverte.
Soit $E = \bigcap K_i$, alors $\forall x \in E, x \in K_i \forall i$, mais chaque K_i est ouvert, donc en prendant $\delta = \min\{\delta_1, \ldots\}$, $B(x, \delta) \in E$ et donc E est ouvert.

2.7 Caracterisation des ensembles fermes

— $\mathbb{R}^n \setminus \overline{E} = \overset{\circ}{E}, \overline{E^c} = \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{E}$

— $\overline{E}$ est toujours ferme.

— L'intersection (meme infinie) d'ensembles fermes est fermee.

— L'union finie d'ensembles fermes est fermee.

— E est ferme si et seulement si toute suite $\left\{x^{(k)}\right\}$ convergente, converge vers un element $x \in E$.

Preuve

Soit E ferme et $\left\{x^{(k)}\right\}$ une suite convergente vers $x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon$: $\forall k > N_\epsilon, \left\|x - x^{(k)}\right\| \leq \epsilon$.
Donc $\forall \epsilon B(x, \epsilon) \cap E \neq \emptyset$, donc $x \in \overline{E} = E$.
Supposons que E n'est pas ferme, donc E^c n'est pas ouvert. Donc $\exists x \in E^c : \forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$.
Si on prend $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \exists x^{(k)} \in B(x, \delta) \cap E$ et $\left\{x^{(k)}\right\}$ converge vers x, donc $x \in E$ ↯ □

2.8 Ensembles compacts

Definition 15 (Ensemble compact)
On dit que E est compact si E est a la fois ferme et borne.

Theorème 12 (Caracterisation par sous-suites convergentes)
Un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute suite $\{x^{(k)}\} \subset E$ on peut extraire une sous-suite convergente vers un element $x \in E$

Theorème 13 (Caracterisation par recouvrements finis)
Un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute famille $\{K_\alpha, \alpha \in A\}$ d'ouverts tel que $E \subset K_\alpha$, on peut extraire une sous-famille finie qui est encore un recouvrement de E.

Definition 16 (Chemin dans E)
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. On appelle chemin de E une application $\gamma : [0,1] \to E$, $\gamma(t) = (\gamma_1, \ldots)$, tel que γ_i est continu pour tout i.
E

Definition 17 (Ensembles connexes par arcs)
Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est connexe par arcs si $\forall x, y \in E$, il existe un chemin γ tel que $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

3 Fonctions de plusieurs variables

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. On appelle fonction sur E a valeurs reelles une application $f : E \to \mathbb{R}$

$$\forall x \in E, x \to f(x) \subset \mathbb{R}^n$$

On note $D(f)$ le domaine de f, $\operatorname{Im} f$ l'image, $g(f)$ le graphe .

3.1 Notion de limite

Definition 18 (Limite)
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E. On dit que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta$$

Alors

$$\|f(x) - l\| < \epsilon$$

Theorème 14 (Des deux gendarmes)
Soit $f, g, h : E \to \mathbb{R}^n$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *un point d'accumulation de* E.
Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$ *et* $\exists \alpha > 0$

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) 0 < \|x - x_0\| \leq \alpha$$

Alors $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existe et est egale a* l.

Lecture 6: Fonctions continues

Wed 10 Mar

3.2 Caracterisation de limite par suites

Theorème 15 (Limites/Suites)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *un point d'accumulation de* E. *La limite* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ *si et seulement si pour toute suite suite* $\left\{x^{(k)}\right\} \subset E$ *qui converge vers* x_0, *on a* $\lim_{k\to+\infty} f(x^{(k)}) = l$.

Preuve
Soit $\left\{x^{(k)} : \lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = x_0\right\}$, *on sait que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ *donc*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in E, \|x - x_0\| < \delta, |f(x) - l| < \epsilon$$

il existe N *tq* $\forall k > n$ *tq* $\left\|x^{(k)} - x_0\right\| < \delta$
Si la limite $\lim_{k\to+\infty} f(x^{(k)}) = l$ *pour toute suite* $x^{(k)}$.
Par l'absurde, supposons que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *n'existe pas.*

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E, x \neq x_0 : \|x - x_0\| < \delta$$

et

$$|f(x) - l| \geq \epsilon$$

□

Si on prend $\delta = \frac{1}{k}$, *alors* $\exists x^{(k)} \neq x_0 : \left\|x^{(k)} - x_0\right\| < \frac{1}{k}$ *tel que* $|f(x^{(k)}) - l| \geq \epsilon$.
Or cette suite $x^{(k)}$ *converge vers* x_0, $\lightning$

3.3 Proprietes de l'operation de limite

Soit $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E et $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$, alors l'operation de limite est lineaire, respecte les regles de multiplication.

Theorème 16 (Critere de Cauchy)
Idem qu'en analyse I.

3.4 Fonctions a valeurs dans R^m

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Definition 19 (Limite)
On dit que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \overrightarrow{l} \in \mathbb{R}^m$ *existe si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E \setminus \{x_0\}, 0 < \|x - x_0\| < \delta$$

on a

$$\|f(x) - l\| < \epsilon$$

De plus, chaque composante de f converge vers la composante correspondante de la limite.

4 Fonctions continues

Definition 20 (Continuite en un point)
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, $f : E \to \mathbb{R}^m$, et $x_0 \in E$.
Si x_0 est un point d'accumulation de E, on dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Si x_0 est un point isole, on admet que f est continue en x_0

4.0.1 Definitions Equivalentes

— $\forall \epsilon > 0, \exists \delta : \forall x \in E, \|x - x_0\|, \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$
— pour toute suite $x^{(k)} \subset E$ qui converge vers x_0 on a que $\lim_{k \to +\infty} f(x^{(k)}) = f(x_0)$

Definition 21 (Continuite sur E)
On dit que $f : E \to \mathbb{R}^m$ est continue sur E si elle est continue en tout point $x \in E$.
Dans ce cas, on note $f \in C^0(E)$

Definition 22 (continuite uniforme sur E)
On dit que f est uniformement continue sur E si $\forall \epsilon$, $\exists \delta$ tel que $\forall x \in E, \forall y \in E$ $\|y - x\| < \delta$, on a $\|f(y) - f(x)\| < \epsilon$

Evidemment, la continuite uniforme implique la continuite.

Lecture 7: Polynome caracteristique

Wed 10 Mar

5 Le polynome caracteristique

Soit A une matrice $n \times n$, $\lambda \in K$ est une valeur propre de l'endomorphisme defini par A si et seulement si $\ker(A - \lambda \operatorname{Id}) \supsetneq \{0\}$. On note

$$\det(A - \lambda I) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} (A - \lambda \operatorname{Id})_{i\pi(i)}$$

On observe que λ est une valeur propre de f si et seulement si λ est une racine de p_A.
Soit $f : V \to V$ un endomorphisme, $B = \{v_1, \ldots\}$ une base de V. Le polynome caracteristique de f est donne par

$$\det(A_B - \lambda \operatorname{Id})$$

Cette definition fait du sens, car le changement de base n'influence pas la valeur du determinant.

Definition 23 (Multiplicite algebrique)
La multiplicite algebrique d'une valeur propre est la multiplicite comme racine du polynome caracteristique.

Proposition 17
Soit f un endomorphisme de $V \to V$.
Soit $\lambda \in K$ une valeur propre.
La multiplicite geometrique de λ est au plus la mutliplicite algebrique.

Preuve
Soit $\{v_1, \ldots, v_r\}$ une base de E_λ, on complete cette base en une base de V avec $\{w_1, \ldots, w_{n-r}\}$. Dans cette base, la representation de la matrice de $A - \lambda \operatorname{Id}$ implique que

$$\det(A - x \operatorname{Id}) = (\lambda - x)^r \det C \qquad \square$$

et donc r est au plus la multiplicite algebrique.

Theorème 18 (Theoreme de diagonalisation)
Soit V un espace vectoriel sur K de dimension n, $f : V \to V$ un endomorphisme $\lambda_1, \ldots \in K$ les valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable si et seulement si

- $p_f(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{g_i}$
- $\dim E_{\lambda_i} = g_i$ *pour tout i*

Preuve

Soit f *diagonalisable et soit* $B = \{v_1, \dots\}$ *une base composee de vecteurs propres.* A_B *est une matrice diagonale, alors* $p_f(x) = \det(A_B - x\,\mathrm{Id}) = (-1)^n \prod(\lambda_i - x)^{g_i}$. *De plus* $\dim(\ker(A_B - \lambda_i\,\mathrm{Id})) = g_i$

Soient m_i *les multiplicites geometriques des valeurs propres.*
car

$$\deg(p_f) = n$$

on a fini. $\square$