

# Analyse II

David Wiedemann

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Intégrales généralisées</b>	<b>4</b>
1.1	Intégrales absolument convergentes . . . . .	5
1.2	Intégrale généralisée sur un intervalle non borné . . . . .	7
<b>2</b>	<b>L'espace <math>R^n</math></b>	<b>7</b>
2.1	Espace vectoriel norme . . . . .	7
2.2	Normes sur $R^n$ . . . . .	9
2.3	Suites sur $R^n$ . . . . .	9
2.4	Topologie de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	10
2.5	Classification des points d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ . . . . .	10
2.6	Caractérisation des ensembles ouverts . . . . .	11
2.7	Caractérisation des ensembles fermés . . . . .	11
2.8	Ensembles compacts . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Fonctions de plusieurs variables</b>	<b>12</b>
3.1	Notion de limite . . . . .	12
3.2	Caractérisation de limite par suites . . . . .	13
3.3	Propriétés de l'opération de limite . . . . .	13
3.4	Fonctions à valeurs dans $R^m$ . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Fonctions continues</b>	<b>14</b>
4.0.1	Définitions Équivalentes . . . . .	14
4.1	Prolongement par continuité . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Dérivées de fonctions à plusieurs variables</b>	<b>16</b>
5.1	Dérivées Directionnelles . . . . .	16
5.2	Fonctions Différentiables . . . . .	17

## List of Theorems

1	Definition (Intégrales généralisées ( sur un intervalle borné non fermé) ) . . . . .	4
---	--	---

2	Definition (Integrale sur un intervalle borne ouvert) . . . . .	4
1	Theorème (Critere de Comparaison) . . . . .	4
3	Definition (Integrale absolument convergente) . . . . .	5
3	Theorème (absolument convergente implique convergente) . . . .	5
5	Theorème (Critere de comparaison ( II ) ) . . . . .	6
4	Definition (Integrale sur un intervalle non borne) . . . . .	7
5	Definition (Norme d'un vecteur) . . . . .	7
6	Definition (Espace vectoriel norme) . . . . .	7
7	Definition . . . . .	7
8	Definition (Distance) . . . . .	8
9	Definition (Produit Scalaire) . . . . .	8
6	Theorème (Inegalite de Cauchy-Schwarz) . . . . .	8
7	Theorème . . . . .	8
10	Definition (Suites convergentes) . . . . .	9
9	Lemme . . . . .	9
11	Definition (Suites de Cauchy) . . . . .	9
10	Theorème . . . . .	9
11	Theorème (Bolzano-Weierstrass) . . . . .	10
12	Definition (Boule) . . . . .	10
13	Definition . . . . .	11
14	Definition . . . . .	11
15	Definition (Ensemble compact) . . . . .	12
12	Theorème (Caracterisation par sous-suites convergentes) . . . . .	12
13	Theorème (Caracterisation par recouvrements finis) . . . . .	12
16	Definition (Chemin dans $E$ ) . . . . .	12
17	Definition (Ensembles connexes par arcs) . . . . .	12
18	Definition (Limite) . . . . .	12
14	Theorème (Des deux gendarmes) . . . . .	13
15	Theorème (Limites/Suites) . . . . .	13
16	Theorème (Critere de Cauchy) . . . . .	13
19	Definition (Limite) . . . . .	14
20	Definition (Continuite en un point) . . . . .	14
21	Definition (Continuite sur $E$ ) . . . . .	14
22	Definition (continuite uniforme sur $E$ ) . . . . .	14
23	Definition (Prolongement par continuite) . . . . .	14
17	Theorème (Prolongement par continuite sur l'adherence) . . . . .	15
18	Theorème . . . . .	15
24	Definition . . . . .	15
19	Theorème . . . . .	16
20	Theorème . . . . .	16
21	Theorème . . . . .	16

25	Definition (Derivees directionnelle) . . . . .	16
26	Definition (Gradient) . . . . .	17
27	Definition (Matrice Jacobienne) . . . . .	17
28	Definition (Differentiabilite) . . . . .	17
22	Theorème . . . . .	17

## 1 Intégrales généralisées

Peut-on définir une intégrale sur un intervalle ouvert plutôt que sur un intervalle fermé ? ie.

$$f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R} \text{ c.p.m.}$$

### Definition 1 (Intégrales généralisées ( sur un intervalle borné non fermé )

Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux (  $a < b$  ).

En particulier,  $f$  est c.p.m. sur tout intervalle  $[a, x]$ ,  $a < x < b$  Soit  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ .

On dit que l'intégrale généralisée  $\int_a^b f(x)dx$  existe ( ou converge ) si  $\lim_{x \rightarrow b} F(x)$  existe, dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b} F(x) - F(a)$$

Si  $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$  n'existe pas, alors on dit que

$$\int_a^b f(t)dt$$

diverge. Definition analogue pour le cas  $]a, b]$ .

On souhaite définir  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)dx = 0$ .

Dans certains cas cette intégrale vaut 0. Mais si on calcule

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{\pi}{2} + \epsilon}^{\frac{\pi}{2} - \epsilon} \tan(t)dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (-\ln(\cos(\frac{\pi}{2} - \epsilon)) + \ln(\cos(-\frac{\pi}{2} + \epsilon))) = -\infty$$

Il faut donc une définition qui est cohérente.

### Definition 2 (Intégrale sur un intervalle borne ouvert)

Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  c.p.m et  $c \in ]a, b[$ .

Si les intégrales généralisées  $\int_a^c f(t)dt$  et  $\int_c^b f(t)dt$  existent, alors on définit l'intégrale

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Si une des deux intégrales diverge, alors le tout diverge.

## Lecture 2: Intégrales Generalisees

### Theorème 1 (Critere de Comparaison)

Soit  $f, g : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  c.p.m. et supposons  $\exists c \in [a, b[$  tel que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in [c, b[$$

Si  $\int_a^b g(x)dx$  existe alors  $\int_a^b f(x)dx$  existe aussi  
 Si  $\int_a^b f(x)dx$  diverge alors  $\int_a^b g(x)dx$  diverge aussi.

**Preuve**

Si  $\int_a^b g(x)dx$  existe, alors  $\int_c^b g(x)dx$  existe.

Donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t)dt \\ &= \lim_{x \rightarrow b-} \left( \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt \right) \\ &= \int_a^c f(t)dt + \lim_{x \rightarrow b-} \int_c^x f(t)dt \\ &\leq \int_a^c f(t)dt + \lim_{x \rightarrow b-} \int_c^x g(t)dt < +\infty\end{aligned}$$

En notant  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ,  $F$  est non décroissante, et bornée supérieurement sur l'intervalle  $[a, b[ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b-} F(x)$  existe.  $\square$

**Exemple**

$f(x) = \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|$  sur  $]0, 1]$ , on a

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

1 est intégrable, et donc l'intégrale de  $f(x)$  existe.

## 1.1 Intégrales absolument convergentes

**Définition 3 (Intégrale absolument convergente)**

Soit  $I$  un intervalle du type  $[a, b[$ ,  $]a, b]$  ou  $]a, b[$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  c.p.m.

On dit que l'intégrale généralisée de  $f$  sur  $I$  est absolument convergente si

$$\int_I |f(x)|dx$$

existe.

**Théorème 3 (absolument convergente implique convergente)**

Si l'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$  converge absolument, alors il converge.

**Preuve**

Notons  $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$  et  $f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}$  et on a  $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$ .

Donc

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)| \text{ et } 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)| \forall x \in I$$

Par critère de comparaison, si

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ existe} \Rightarrow \text{alors } \int_a^b f_+(x)dx, \int_a^b f_-(x) \text{ existent}$$

et donc  $\int_a^b f(x)dx$

□

### Remarque

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  c.p.m Si  $f$  est bornée sur  $I$ , alors

$$\int_I f(x)dx$$

existe.

### Theorème 5 (Critere de comparaison ( II) )

Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  c.p.m.

S'il existe  $\alpha \in ]-\infty, 1[$  tel que

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \in \mathbb{R}$$

Alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

existe.

S'il existe  $\alpha \geq 1$  tel que

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \neq 0$$

alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

diverge.

### Preuve

Par definition de la limite  $\forall \epsilon > 0, \exists b-a > \delta_\epsilon > 0$  tel que

$$|f(x)(b-x)^\alpha - l| < \epsilon \forall x$$

$$\Rightarrow l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha \leq l + \epsilon$$

et donc

$$0 \leq |f(x)| \leq \frac{|l| + \epsilon}{(b-x)^\alpha}$$

Puisque le terme de droite est integrable, on conclut par le critere de comparaison. Pour la deuxieme partie, soit  $\alpha \geq 1$  et  $l \neq 0$ .

Supposons  $l > 0$ , on a

$$l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha$$

Le meme raisonnement que ci-dessus donne que l'integrale de  $f$  diverge.

□

## 1.2 Intégrale généralisée sur un intervalle non borné

### Definition 4 (Intégrale sur un intervalle non borné)

Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  c.p.m.

On dit que  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  existe si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(x)dx$$

existe et dans ce cas, on note

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

idem si  $f : ]-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $f : ]a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  c.p.m. on dit que  $\int_a^\infty f(x)dx$  existe s'il existe  $c \in ]a, \infty[$  tel que

$$\lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f(t)dt \text{ et } \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_c^y f(t)dt$$

existent.

## Lecture 3: L'espace $R^n$

Mon 01 Mar

## 2 L'espace $R^n$

### 2.1 Espace vectoriel norme

Soit un ensemble  $V$  sur lequel on définit deux opérations

1. somme :  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$
2. multiplication par un scalaire  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$

On définit  $R^n$  par  $R^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots \times \mathbb{R}$

### Definition 5 (Norme d'un vecteur)

C'est une application  $N : V \rightarrow \mathbb{R}$ , c'est une application qui satisfait

- $\forall x \in V : N(x) \geq 0$  et  $N(x) = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V : N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$
- $\forall x, y \in V, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

On utilise souvent la notation  $N(x) = \|x\|$

### Definition 6 (Espace vectoriel norme)

Un espace vectoriel norme est noté  $(V, \|\cdot\|)$

### Definition 7

Soit  $V$  un espace vectoriel et  $N_1, N_2$  deux normes sur  $V$ .

On dit que  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes si  $\exists c_1, c_2 > 0$  tel que

$$c_1 N_2(x) \leq N_1(x) \leq c_2 N_2(x) \forall x \in V$$

**Definition 8 (Distance)**

Soit  $X$  un ensemble.

Une distance est une application  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui satisfait les propriétés suivantes

- $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y$
- La distance est symétrique
- $\forall x, y, z \in V, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Un espace  $X$  muni d'une distance est appelé un espace métrique et est noté  $(X, d)$ .

On peut toujours définir une distance sur un espace vectoriel normé, défini par

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

On appelle cette distance, la distance induite par la norme.

Tout espace vectoriel normé est aussi un espace métrique.

**Definition 9 (Produit Scalaire)**

Soit  $V$  un espace vectoriel.

Un produit scalaire est une application  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfait les propriétés suivantes

- $\forall x, y \in V, b(x, y) = b(y, x)$
- $\forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x, z) + \beta b(y, z)$
- $\forall x \in V, b(x, x) \geq 0, b(x, x) = 0 \iff x = 0$

**Theorème 6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**

Soit  $V$  un espace vectoriel et  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  un produit scalaire. Alors

$$\forall x, y \in V, |b(x, y)| \leq \sqrt{b(x, x)b(y, y)}$$

**Preuve**

$\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ .

$$0 \leq b(\alpha x + y, \alpha x + y) = \alpha^2 b(x, x) + 2\alpha b(x, y) + b(y, y)$$

Donc on a

$$\Delta = b(x, y)^2 - b(x, x)b(y, y)$$

□

**Theorème 7**

Soit  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  un produit scalaire, alors l'application  $x \rightarrow \sqrt{b(x, x)} = \|x\|_b$  est une norme sur  $V$ .

Donc, si  $V$  est muni d'un produit scalaire, alors  $V$  est un espace normé et donc  $V$  est un espace métrique pour la distance induite par le produit scalaire.



## 2.2 Normes sur $\mathbb{R}^n$

- La norme euclidienne  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- Norme "max"  $\|x\|_\infty = \max |x_i|$
- Norme 1 :  $\|x\|_1 = \sum |x_i|$
- Normes  $p \in [1, +\infty[$   $\|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

Pour  $p$  infinie, on retrouve la norme infinie

On montre en exercices que toutes les normes  $p$  sont équivalentes.

De même, on montre que toutes les normes sur  $\mathbb{R}^n$  sont équivalentes. Par contre, seulement la norme 2 est déduite d'un produit scalaire.

### Definition 10 (Suites convergentes)

Soit  $\{x^{(k)}\}_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ .

On dit que cette suite converge s'il existe  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^{(k)} - x\| = 0$$

## Lecture 4: Boules sur $\mathbb{R}^n$

Wed 03 Mar

### 2.3 Suites sur $\mathbb{R}^n$

#### Remarque

Supposons que  $\{x^{(k)}\} \rightarrow \vec{x}$  par rapport à la norme euclidienne. Et soit  $\|\cdot\|$  une autre norme sur  $\mathbb{R}^n$ . Puisque toutes les normes sont équivalentes sur  $\mathbb{R}^n$   $\|\vec{x}\| \leq c \|\vec{x}\|_2$  Donc toutes les suites convergent peu importe la norme.

En particulier, on peut choisir la norme infinie.

#### Lemme 9

Une suite  $\{x^{(k)}\}$  converge si et seulement si toutes les composantes convergent.

### Definition 11 (Suites de Cauchy)

On dit qu'une suite  $\{x^{(k)}\}$  est de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \exists N > 0 : \forall k, l \geq N \left\| x^{(k)} - x^{(l)} \right\| \leq \epsilon$$

#### Theorème 10

Une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy.

#### Preuve

Si la suite  $x^{(k)}$  converge  $\iff \{x_i^{(k)}\}$  converge pour tout  $i = 1, \dots, n$  donc toutes ces suites sont de Cauchy et donc  $x^{(k)}$  converge.  $\square$

**Theorème 11 (Bolzano-Weierstrass)**

Soit  $\{x^{(k)}\}$  une suite bornée.

Alors il existe une sous-suite  $\{x^{(k_j)}\}$  qui converge

**Preuve**

Si  $\{x^{(k)}\}$  est bornée, en particulier chaque suite  $x^{(k)_i}$  sera bornée.

En  $i = 1$ , la suite  $x^{(k)}$  est bornée, donc il existe une sous-suite convergente vers une valeur  $x_1$ .

On considère les index de cette sous-suite et on réapplique l'argument ci-dessus en  $i = 2$ , etc.  $\square$

**2.4 Topologie de  $\mathbb{R}^n$** **Définition 12 (Boule)**

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\delta > 0$ , la boule ouverte centrée en  $x$  et de rayon  $\delta$

$$B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \delta\}$$

La boule fermée

$$\overline{B}(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \delta\}$$

La sphere centrée en  $x$  et de rayon  $\delta$

$$S(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| = \delta\}$$

**2.5 Classification des points d'un ensemble  $E \subset \mathbb{R}^n$** 

Le complémentaire de  $E$  est

$$E^c = \{y \in \mathbb{R}^n, y \notin E\}$$

On dit que  $x$  est un point intérieur de  $E$  si  $\exists \delta : B(x, \delta) \subset E$ , on dit que  $x$  est un point frontière de  $E$  si  $\forall \delta B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$  et  $B(x, \delta) \cap E^c \neq \emptyset$ . On dit que  $E^\circ$  est l'ensemble des points intérieurs de  $E$ ,  $E^\circ$  est appelé l'intérieur de  $E$ .

On note  $\partial E$  l'ensemble des points frontières, appelé la frontière ou le bord de  $E$ .

On dit que  $x$  est un point adhérent de  $E$  si  $\forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$ . On note  $\bar{E}$  l'ensemble des points adhérents de  $E$ , appelé l'adhérence de  $E$ .

On a  $\bar{E} = E \cup \partial E$

On dit que  $x$  est un point isolé si

$$\exists \delta > 0 B(x, \delta) \cap E = \{x\}$$

On dit que  $x$  est un point d'accumulation de  $E$ , si  $\forall \delta > 0$

$$B(x, \delta) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Donc, en particulier, si on prend  $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$

$$\exists x^{(k)} \in E, \text{ tel que } \|x^{(k)} - x\| \leq \frac{1}{k}$$

La suite  $x^{(k)}$  converge vers  $x$ .

### Definition 13

Soit  $E$  un ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , on dit que  $E$  est ouvert si tous ses points sont intérieurs

### Definition 14

$E$  est fermé si  $E^c$  est ouvert.

## Lecture 5: Ensembles compacts/connexes par arcs

Mon 08 Mar

### 2.6 Caractérisation des ensembles ouverts

- $\overset{\circ}{E}$  est toujours ouvert.
- $E$  est ouvert si et seulement si  $E = \overset{\circ}{E}$
- L'union (même infinie) d'ensembles ouverts est ouverte.  
Soit  $E = \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$  et  $K_\alpha$  sont ouverts.  
Alors  $\forall x \in E, x \in K_\alpha$  et donc il existe une boule ouverte centrée en  $x$  et contenue dans  $K_\alpha$ .
- L'intersection finie d'ensembles ouverts est ouverte.  
Soit  $E = \bigcap K_i$ , alors  $\forall x \in E, x \in K_i \forall i$ , mais chaque  $K_i$  est ouvert, donc en prenant  $\delta = \min \{\delta_1, \dots\}$ ,  $B(x, \delta) \in E$  et donc  $E$  est ouvert.

### 2.7 Caractérisation des ensembles fermes

- $\mathbb{R}^n \setminus \overline{E} = \overset{\circ}{E^c}, \overline{E^c} = \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{E}$
- $\overline{E}$  est toujours fermé.
- L'intersection (même infinie) d'ensembles fermes est fermée.
- L'union finie d'ensembles fermes est fermée.
- $E$  est fermé si et seulement si toute suite  $\{x^{(k)}\}$  convergente, converge vers un élément  $x \in E$ .

#### Preuve

Soit  $E$  fermé et  $\{x^{(k)}\}$  une suite convergente vers  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : \forall k > N_\epsilon, \|x - x^{(k)}\| \leq \epsilon$ .

Donc  $\forall \epsilon B(x, \epsilon) \cap E \neq \emptyset$ , donc  $x \in \overline{E} = E$ .

Supposons que  $E$  n'est pas fermé, donc  $E^c$  n'est pas ouvert. Donc  $\exists x \in E^c : \forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$ .

Si on prend  $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \exists x^{(k)} \in B(x, \delta) \cap E$  et  $\{x^{(k)}\}$  converge vers  $x$ , donc  $x \in E$   $\nmid$  □

## 2.8 Ensembles compacts

### Definition 15 (Ensemble compact)

On dit que  $E$  est compact si  $E$  est à la fois fermé et borné.

### Theorème 12 (Caractérisation par sous-suites convergentes)

Un ensemble non vide  $E \subset \mathbb{R}^n$  est compact si et seulement si de toute suite  $\{x^{(k)}\} \subset E$  on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément  $x \in E$

### Theorème 13 (Caractérisation par recouvrements finis)

Un ensemble non vide  $E \subset \mathbb{R}^n$  est compact si et seulement si de toute famille  $\{K_\alpha, \alpha \in A\}$  d'ouverts tel que  $E \subset K_\alpha$ , on peut extraire une sous-famille finie qui est encore un recouvrement de  $E$ .

### Definition 16 (Chemin dans $E$ )

Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  non vide. On appelle chemin de  $E$  une application  $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ ,  $\gamma(t) = (\gamma_1, \dots)$ , tel que  $\gamma_i$  est continu pour tout  $i$ .

$E$

### Definition 17 (Ensembles connexes par arcs)

Un ensemble  $E \subset \mathbb{R}^n$  est connexe par arcs si  $\forall x, y \in E$ , il existe un chemin  $\gamma$  tel que  $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ .

## 3 Fonctions de plusieurs variables

Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  non vide. On appelle fonction sur  $E$  à valeurs réelles une application  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall x \in E, x \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

On note  $D(f)$  le domaine de  $f$ ,  $\text{Im } f$  l'image,  $g(f)$  le graphe.

### 3.1 Notion de limite

#### Definition 18 (Limite)

Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  un point d'accumulation de  $E$ . On dit que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta$$

Alors

$$\|f(x) - l\| < \epsilon$$

**Theorème 14 (Des deux gendarmes)**

Soit  $f, g, h : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  un point d'accumulation de  $E$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$  et  $\exists \alpha > 0$

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad 0 < \|x - x_0\| \leq \alpha$$

Alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe et est égale à  $l$ .

**Lecture 6: Fonctions continues**

Wed 10 Mar

**3.2 Caractérisation de limite par suites****Theorème 15 (Limites/Suites)**

Soit  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  un point d'accumulation de  $E$ . La limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  si et seulement si pour toute suite  $\{x^{(k)}\} \subset E$  qui converge vers  $x_0$ , on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^{(k)}) = l$ .

**Preuve**

Soit  $\{x^{(k)} : \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = x_0\}$ , on sait que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in E, \|x - x_0\| < \delta, |f(x) - l| < \epsilon$$

il existe  $N$  tq  $\forall k > n$  tq  $\|x^{(k)} - x_0\| < \delta$

Si la limite  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^{(k)}) = l$  pour toute suite  $x^{(k)}$ .

Par l'absurde, supposons que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  n'existe pas.

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E, x \neq x_0 : \|x - x_0\| < \delta$$

et

$$|f(x) - l| \geq \epsilon \quad \square$$

Si on prend  $\delta = \frac{1}{k}$ , alors  $\exists x^{(k)} \neq x_0 : \|x^{(k)} - x_0\| < \frac{1}{k}$  tel que  $|f(x^{(k)}) - l| \geq \epsilon$ .

Or cette suite  $x^{(k)}$  converge vers  $x_0$ ,  $\nexists$

**3.3 Propriétés de l'opération de limite**

Soit  $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  un point d'accumulation de  $E$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ , alors l'opération de limite est linéaire, respecte les règles de multiplication.

**Theorème 16 (Critère de Cauchy)**

Idem qu'en analyse I.

### 3.4 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

#### Definition 19 (Limite)

On dit que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \vec{l} \in \mathbb{R}^m$  existe si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E \setminus \{x_0\}, 0 < \|x - x_0\| < \delta$$

on a

$$\|f(x) - l\| < \epsilon$$

De plus, chaque composante de  $f$  converge vers la composante correspondante de la limite.

## 4 Fonctions continues

#### Definition 20 (Continuité en un point)

Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  non vide,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ , et  $x_0 \in E$ .

Si  $x_0$  est un point d'accumulation de  $E$ , on dit que  $f$  est continue en  $x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Si  $x_0$  est un point isolé, on admet que  $f$  est continue en  $x_0$

#### 4.0.1 Définitions Equivalentes

- $\forall \epsilon > 0, \exists \delta : \forall x \in E, \|x - x_0\| < \delta, \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$
- pour toute suite  $x^{(k)} \subset E$  qui converge vers  $x_0$  on a que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^{(k)}) = f(x_0)$

#### Definition 21 (Continuité sur $E$ )

On dit que  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  est continue sur  $E$  si elle est continue en tout point  $x \in E$ .

Dans ce cas, on note  $f \in C^0(E)$

#### Definition 22 (continuité uniforme sur $E$ )

On dit que  $f$  est uniformément continue sur  $E$  si  $\forall \epsilon, \exists \delta$  tel que  $\forall x \in E, \forall y \in E, \|y - x\| < \delta$ , on a  $\|f(y) - f(x)\| < \epsilon$

Evidemment, la continuité uniforme implique la continuité.

## Lecture 7: Prolongement par continuité

Mon 15 Mar

### 4.1 Prolongement par continuité

#### Definition 23 (Prolongement par continuité)

Soit  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  continue, avec  $E \neq \overline{E}$ , soit  $x_0 \in \overline{E} \setminus E$ . Une fonction  $\tilde{f} : E \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^m$  est appelée un prolongement si  $\tilde{f}$  est continue en  $x_0$  et

coincide avec  $f$  sur  $E$ .

Le prolongement par continuité est uniquement défini par  $\tilde{f}(x) = f(x)$  si  $x \in E$  et  $\tilde{f}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  si la limite existe.

**Theorème 17 (Prolongement par continuité sur l'adhérence)**

Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  non vide et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  continue sur  $E$ . Supposons que  $\forall x \in \overline{E} \setminus E$  la limite  $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$  existe. Alors on peut définir un prolongement  $\tilde{f} : \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\tilde{f}(x) = f(x) \forall x \in E$  et  $\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$  sinon, de plus  $\tilde{f}$  est continue sur  $\overline{E}$ .

**Preuve**

Si  $x \in E$ ,  $f(x)$  est continue en  $x$  donc  $\tilde{f}(x) = f(x)$  est continue en  $x$ . On a

$$\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in E} f(y) = \lim_{y \rightarrow x, y \in E} \tilde{f}(y)$$

Pour montrer que  $\tilde{f}$  est continue en  $x$ , il faut montrer que  $\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in \overline{E}} \tilde{f}(y)$ .  
Il faut montrer que pour toute suite  $x^{(k)} \subset \overline{E}$  convergeant en  $x \in \overline{E} \setminus E$  on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x^{(k)}) = \tilde{f}(x)$$

On construit une deuxième suite  $y^{(k)}$  convergent vers  $x$ .

Si  $x^{(k)} \in E$ , alors  $y^{(k)} = x^{(k)}$ .

Si  $x^{(k)} \in \overline{E} \setminus E$  on peut toujours trouver une valeur  $y^{(k)} \in E$  tel que  $\|y^{(k)} - x^{(k)}\| \leq 2^{-k}$ ,  $\|f(y^{(k)}) - \tilde{f}(x^{(k)})\| \leq 2^{-k}$ .

On aura donc

$$\|y^{(k)} - x\| \leq \|y^{(k)} - x^{(k)}\| + \|x^{(k)} - x\|$$

Ainsi  $y^{(k)} \subset E$  converge vers  $x$ , et ainsi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\tilde{f}(x^{(k)}) - \tilde{f}(y^{(k)})) + \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(y^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(y^{(k)}) \quad \square$$

**Theorème 18**

Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  non vide  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  uniformément continue. Alors  $f$  peut être prolongée par continuité sur  $\overline{E}$  et le prolongement  $\tilde{f} : \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$  est uniformément continu.

**Définition 24**

Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  non vide,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  Si  $\sup f = \infty$  on dit que  $f$  n'est pas bornée supérieurement.

Si  $M < \infty$  on appelle  $M$  la borne supérieure de  $f$ .

S'il existe  $x_M \in E$ ,  $f(x_M) = M$  alors on dit que  $M$  est le maximum de  $f$  sur  $E$  et  $x_M$  est un point maximum de  $f$ . Meme définition pour borne inférieure.

**Theorème 19**

Soit  $E$  non vide et compact,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Alors  $f$  atteint son maximum et son minimum sur  $E$ .

**Preuve**

Par l'absurde  $f$  n'est pas bornée, il existe  $x^{(k)}$  tel que  $|f(x^{(k)})| > k$   
 Mais  $E$  est compact, donc il existe une sous-suite  $x^{(k_i)}$  qui converge, or  $f$  est continue, donc

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} f(x^{(k_i)}) = f(x) < \infty$$

Supposons que  $f$  n'atteint pas ses bornes

Il existe  $x^{(k)}$  qui converge vers le sup, or  $E$  est fermé. □

**Theorème 20**

Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  non vide, compact, connexe par arcs, et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Alors  $f$  atteint toutes les valeurs entre son minimum et maximum.

**Preuve**

$f$  est continue sur un compact donc  $f$  atteint son min et son max.

Puisque  $E$  est connexe, il existe  $\gamma$  un chemin du minimum au maximum. On conclut par TVI sur la fonction  $f \circ \gamma$  □

**Theorème 21**

Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  non vide et compact avec  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  continue. Alors  $f$  est uniformément continue sur  $E$ .

**Lecture 8: Derivee partielles et directionnelle**

Wed 17 Mar

**5 Derivees de fonctions a plusieurs variables****5.1 Derivees Directionnelles****Definition 25 (Derivees directionnelle)**

Soit  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{E}$  et  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  un vecteur arbitraire.

On dit que  $f$  est derivable dans la direction  $\vec{v}$ , au point  $x_0$ , si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

existe et on note  $D_v f(x_0)$ .

Si on prend  $\|\vec{v}\|$  (norme euclidienne), alors on appelle  $D_v f(x_0)$  la derivee directionnelle de  $f$  dans la direction  $\vec{v}$  au point  $x_0$ .

en particulier, on peut prendre  $\vec{v} = e_i$ , dans ce cas on utilise la notation

$$D_{e_i} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$$



et on appelle  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$  la  $i$ -eme derivee partielle de  $f$  au point  $x_0$ .

**Definition 26 (Gradient)**

Soit  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \overset{\circ}{E}$ .

Si toutes les derivees partielles de  $f$  en  $x_0$  existent, alors on appelle le vecteur gradient

$$\nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^n, \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

**Definition 27 (Matrice Jacobienne)**

On appelle matrice Jacobienne  $Df(x_0) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

$$Df(x_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

## 5.2 Fonctions Differentiables

**Definition 28 (Differentiabilite)**

Soit  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in \overset{\circ}{E}$ . On dit que  $f$  est differentiable ( ou derivable) en  $x_0$  si il existe une application lineaire  $L_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et une fonction  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$f(x) = f(x_0) + L_{x_0}(x - x_0) + g(x) \forall x \in E$$

et  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\|x - x_0\|} = 0$ .

**Theoreme 22**

Soit  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differentiable en  $x_0 \in \overset{\circ}{E}$ , alors

- Toutes les derivees partielles de  $f$  en  $x_0$  existent.
- On a

$$L_{x_0}(x - x_0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - x_0) = Df(x_0)(x - x_0)$$

- Toutes les derivees directionnelles existent et

$$D_v f(x_0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) v_i = \nabla f(x_0)^T \vec{v} = Df(x_0) \vec{v}$$

- $f$  est continue en  $x_0$ .

**Preuve**

- On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + L_{x_0}(x_0 + te_i - x_0) + g(x_0 + te_i)}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L_{x_0}(e_i) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + te_i)}{t} \\
&= L_{x_0}a_i
\end{aligned}$$

— On  $a$

$$f(x) = f(x_0) + L_{x_0}(x - x_0) + g(x)$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} L_{x_0}(x - x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0)$$

—

$$\begin{aligned}
D_v f(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Df(x_0)tv + g(x_0 + tv)}{t} \\
&= Df(x_0)\vec{v}
\end{aligned}$$

□