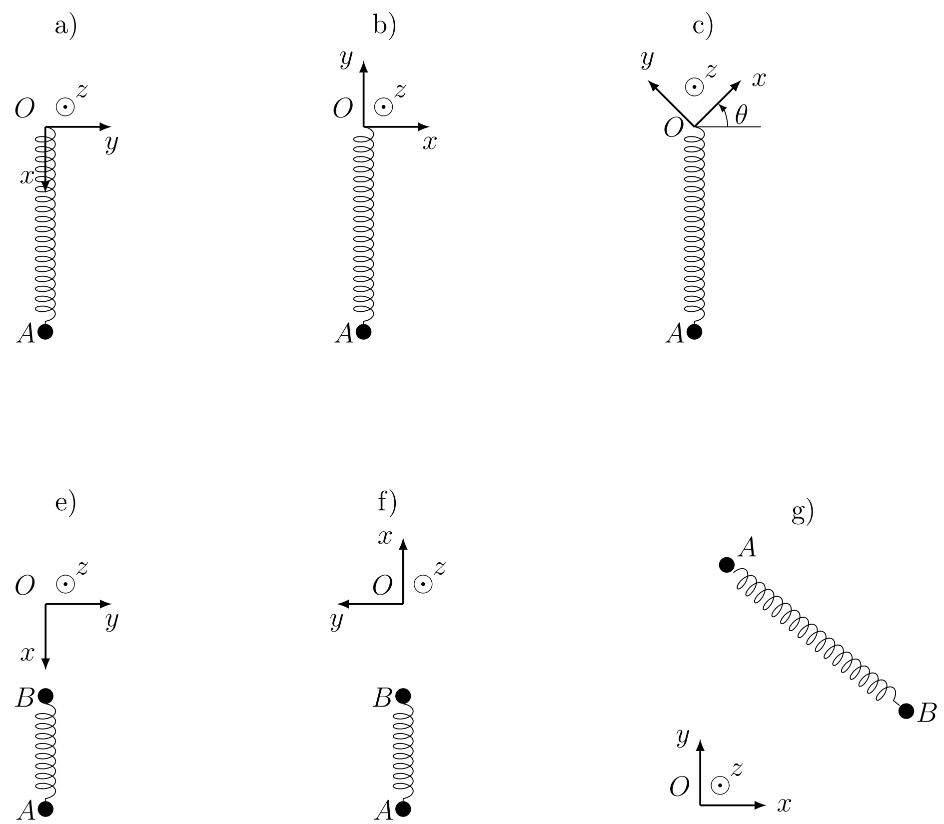
Exercices de physique générale I – Section MA

23 septembre 2020 *version 1*

Exercices en auditoire : semaine 2

1 Ressorts

Exprimer les force $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ appliquées aux points A et B indiqués sur les figures ci-dessous. Chaque ressort a une constante élastique k et une longueur à vide l_0 (longueur “naturelle”). Exprimer de préférence les positions sous la forme $\vec{r}_A = x_A\hat{e}_x + y_A\hat{e}_y + z_A\hat{e}_z$, où $\hat{e}_i$ est un vecteur unitaire dans la direction de l'axe i du repère.



Solution :

a) La position à vide (ou naturelle) du ressort se trouve à $\vec{r}_{\text{nat.}} = l_0\,\hat{e}_x$. La force s'écrit donc :

$$\vec{F}_A = -k\Delta\vec{r} = -k(\vec{r}_A - \vec{r}_{\text{nat.}}) = -k(x_A - l_0)\,\hat{e}_x\,. \tag{1}$$

b) La position à vide (ou naturelle) du ressort se trouve à $\vec{r}_{\text{nat.}} = -l_0\,\hat{e}_y$. La force s'écrit donc :

$$\vec{F}_A = -k\Delta\vec{r} = -k(\vec{r}_A - \vec{r}_{\text{nat.}}) = -k(y_A + l_0)\,\hat{e}_y\,. \tag{2}$$

c) La position à vide (ou naturelle) du ressort se trouve à $\vec{r}_{\text{nat.}} = -l_0(\sin\theta\,\hat{e}_x + \cos\theta\,\hat{e}_y)$ et le point A à $\vec{r}_A = -l_A(\sin\theta\,\hat{e}_x + \cos\theta\,\hat{e}_y)$, où l_A est la longueur totale du ressort (l_0 plus l'allongement). La force s'écrit alors :

$$\vec{F}_A = -k\Delta\vec{r} = -k(\vec{r}_A - \vec{r}_{\text{nat.}}) = -k[-l_A - (-l_0)]\,(\sin\theta\,\hat{e}_x + \cos\theta\,\hat{e}_y) = k(l_A - l_0)(\sin\theta\,\hat{e}_x + \cos\theta\,\hat{e}_y)\,. \tag{3}$$

d) Comme au point a), $\vec{F}_A = -k(x_A - l_0)\,\hat{e}_x$.

e) Pour calculer la force du ressort sur le point A, il faut identifier la position à laquelle le point A ne subirait aucune force. Ce point est à la position $\vec{r}_{\text{nat.}} = \vec{r}_B + l_0\,\hat{e}_x = (x_B + l_0)\,\hat{e}_x$, et donc

$$\vec{F}_A = -k(x_A - (x_B + l_0))\,\hat{e}_x = -k(x_A - x_B - l_0)\,\hat{e}_x\,. \tag{4}$$

Pour calculer la force du ressort sur le point B, il faut identifier la position à laquelle le point B ne subirait aucune force. Ce point est à la position $\vec{r}_{\text{nat.}} = \vec{r}_A - l_0\,\hat{e}_x = (x_A - l_0)\,\hat{e}_x$, et donc

$$\vec{F}_B = -k(x_B - (x_A - l_0))\,\hat{e}_x = -k(x_B - x_A + l_0)\,\hat{e}_x\,. \tag{5}$$

On remarque que

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B\,! \tag{6}$$

f) Par un raisonnement similaire à e), on trouve

$$\vec{F}_A = -k(x_A - (x_B - l_0))\,\hat{e}_x = -k(x_A - x_B + l_0)\,\hat{e}_x\,, \tag{7}$$

et

$$\vec{F}_B = -k(x_B - (x_A + l_0))\,\hat{e}_x = -k(x_B - x_A - l_0)\,\hat{e}_x = -\vec{F}_A\,. \tag{8}$$

g) De manière générale (pour un ressort rectiligne), on trouve

$$\vec{F}_A = -k\left[\vec{r}_A - \left(\vec{r}_B + l_0\frac{\vec{r}_A - \vec{r}_B}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|}\right)\right]\,, \tag{9}$$

et

$$\vec{F}_B = -k\left[\vec{r}_B - \left(\vec{r}_A + l_0\frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|}\right)\right]\,. \tag{10}$$