

Théorie des Groupes

David Wiedemann

Table des matières

1	Une Introduction à la Théorie des Catégories	3
1.1	Catégories	3
1.2	Exemples de Catégories	4
1.2.1	Catégories concrètes	4
1.2.2	Catégories pas forcément concrètes	5
1.3	Foncteurs	6
1.4	Transformations naturelles	7
1.5	Equivalence de catégories	9
1.6	Adjonctions	10
1.7	Caractérisation des Adjonctions	11
1.7.1	Préparation	11
1.8	Exemple concret d'adjonction	12
1.9	Caractérisation des adjonctions	14
1.10	Produits et Coproduits	17
1.11	Préservation des produits/coproduits	18
2	Groupes Quotients	19
2.1	Quelques rappels de première année	19
2.2	Sens catégorique des quotients de groupe	19
3	Groupes Résolubles	23
4	Actions de groupe	24
4.1	Un cadre catégorique pour les actions de groupe	25
4.2	Généralisation et formalisation du cas $C = \text{Ens}$	27
4.3	Création d'actions libres	27
4.3.1	Le foncteur $\text{Free}_G : \text{Ens} \rightarrow {}_G \text{Ens}$	28

List of Theorems

1	Definition (Graphe dirigé)	3
2	Definition (Catégories)	3

3	Definition (Isomorphisme)	6
4	Definition (Foncteur)	6
3	Lemme	6
5	Definition (Transformations naturelles)	7
6	Definition (Equivalence de categories)	9
7	Definition (Adjonctions)	10
7	Proposition	14
8	Definition	17
9	Lemme	17
9	Definition (Coproduit)	18
10	Lemme	18
12	Proposition	18
14	Proposition	20
15	Theorème (Premier theoreme d'isomorphisme)	21
16	Theorème (Le deuxieme theoreme d'isomorphisme)	21
17	Theorème (Troisieme theoreme d'isomorphisme)	22
10	Definition (Groupe resoluble)	23
20	Lemme	23
21	Proposition	23
11	Definition (Action de groupe)	24
12	Definition (Points fixes)	24
13	Definition (Orbite)	24
14	Definition	25
24	Lemme	26
15	Definition	26
16	Definition (Action libre)	27

1 Une Introduction à la Théorie des Catégories

Notion Fondamentale : la composition

- Composition d'applications
- l'exemple fondamental d'un groupe est donné par $\text{Aut}(X)$, où la multiplication du groupe est donnée par la composition d'automorphismes.

1.1 Catégories

Definition 1 (Graphe dirigé)

Un graphe dirigé G consiste en un couple de classes G_0 et G_1 , muni de deux applications

$$\text{dom} : G_1 \rightarrow G_0 \text{ et } \text{cod} : G_1 \rightarrow G_0$$

appelées domaine et codomaine. On pense à G_0 comme l'ensemble des sommets et G_1 l'ensemble des arêtes de G .

Par exemple, si $x, y \in G_0, f \in G_1$, alors

$$\text{dom}(f) = x, \quad \text{cod}(f) = y$$

$$X \xrightarrow{f} Y$$

On introduit la notation

$$G(x, y) = \{f \in G_1 \mid \text{dom}(f) = x, \text{cod}(f) = y\}$$

Exemple

Soit X un ensemble, et soit $R \subset X \times X$ une relation sur X . Alors $G_r = (X, R)$ est un graphe dirigé, où

$$\text{dom} : R \rightarrow X : (x_1, x_2) \mapsto x_1 \text{ et } \text{cod} : R \rightarrow X : (x_1, x_2) \mapsto x_2$$

Observer que $\forall x_1, x_2 \in X$

$$G_R(x_1, x_2) = \begin{cases} \{(x_1, x_2)\} & \text{si } (x_1, x_2) \in R \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

Definition 2 (Catégories)

Une catégorie C est un graphe dirigé (C_0, C_1) muni d'applications de composition

$$\gamma_{a,b,c} : C(a, b) \times C(b, c) \rightarrow C(a, c) : (f, g) \mapsto g \circ f$$

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & f \circ g & & \end{array}$$

- (*Existence d'identités*) Il existe une application $\text{Id} : C_0 \rightarrow C_1 : c \rightarrow \text{Id}_c$ tel que

$$f \circ \text{Id}_a = f = \text{Id}_b \circ f \quad \forall f \in C_1(a, b), \forall a, b \in C_0$$

- (*Associativité*) Quelque soient $a, b, c, d \in C_0$ et $f \in C(a, b), g \in C(b, c)$ et $h \in C(c, d)$

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \in C(a, d)$$

Notation

On note

$$C_0 = \text{Ob } C \text{ — les objets de } C$$

$$C_1 = \text{Mor } C \text{ — les morphismes}$$

- Si $\text{Ob } C, \text{Mor } C$ sont des ensembles, alors C est petite.
- Si $C(a, b)$ est un ensemble $\forall a, b \in \text{Ob } C$, alors C est localement petite.

Lecture 2: Exemples de Categories

Mon 20 Sep

1.2 Exemples de Catégories

Exemple

- *Des catégories concrètes*
- *des catégories non concrètes*

1.2.1 Catégories concrètes

Les objets sont des ensembles munis de structures supplémentaire :

1. Ens dont les objets sont les ensembles et les morphismes sont les applications ensemblistes.

$$\text{Ob Ens} = \text{la classe de tous les ensembles}$$

$$\text{Mor Ens} = \text{applications ensemblistes}$$

2. La catégorie Gr, dont les objets sont les groupes et les morphismes sont les homomorphismes de groupe.

$$\text{Ob Gr} = \text{la classe de tous les groupes}$$

$$\text{Mor Gr} = \text{la classe de tous les homomorphismes de groupe}$$

La composition est encore donnée par celle des applications ensemblistes et les identités sont celles des groupes vus comme ensembles.

3. La catégorie Ab , dont les objets sont les groupes abéliens et les morphismes sont les homomorphismes de groupe.

$$\text{Ob } Ab = \{A \in \text{Ob } Gr \mid A \text{ abélien} \}$$

$$\text{Mor } Ab = \{\phi \in \text{Mor } Gr \mid \text{dom } \phi, \text{cod } \phi \in \text{Ob } Ab\}$$

4. La catégorie $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$, dont les objets sont les espaces vectoriels sur le corps \mathbb{K} et les morphismes sont les applications linéaires.

$$\text{Ob } \text{Vect}_{\mathbb{K}} = \text{ la classe de tous les } \mathbb{K}\text{-espaces vectoriels}$$

$$\text{Mor } \text{Vect}_{\mathbb{K}} = \text{ la classe de toutes les applications } \mathbb{K}\text{-linéaires}$$

Dans tous ces cas, la composition est bien définie car elle preserve toujours la structure supplémentaire (ie. le groupe ou l'espace vectoriel)

1.2.2 Catégories pas forcément concrètes

1. Soit X un ensemble, $R \subset X \times X$ une relation sur X . Alors le graphe dirigé G_R admet des applications de composition naturelle, qui vérifient l'associativité.

Soit $x, y, z \in X$ tel que $(x, y), (y, z) \in R$? $(y, z) \circ (x, y)$? Existe-il une arête de x vers $z \iff (x, z) \in R$

Donc on veut que R soit transitive. L'existence de l'identité dans une catégorie implique que $(x, x) \in R \forall x \in X$ ce qui implique que R est réflexive.

2. Pour tout groupe G , il y a une catégorie BG , spécifiée par $\text{Ob } BG = \star$ et $BG(\star, \star) = G$, où la composition est donnée par la multiplication de G

$$\text{Ob } BG = \{\star\}$$

$$\text{Mor } G = \{g \in G\}$$

On définit la composition

$$\gamma : BG(\star, \star) \times BG(\star, \star) \rightarrow BG(\star, \star) \times BG(\star, \star)$$

et on sait que γ (ie. la composition) est associative car la multiplication dans G est associative.

3. Soient C et D des catégories. Leur produit est la catégorie notée $C \times D$ spécifiée par

$$\text{Ob}(C \times D) = \text{Ob } C \times \text{Ob } D$$

et

$$(C \times D)((c, d), (c', d')) = C(c, c') \times D(d, d') \forall c, c' \in \text{Ob } C, d, d' \in \text{Ob } D$$

où la composition est donnée par celle de C dans la première composante et par celle de D dans la deuxième, et $\text{Id}_{(c,d)} = (\text{Id}_c, \text{Id}_d)$.

$(f, g) : (c, d) \times (c', d') \in \text{Mor}(C \times D)$.

Étant donné $(f, g) : (c, d) \rightarrow (c', d')$, $(f', g') : (c', d') \rightarrow (c'', d'')$, on définit

$$(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g)$$

L'associativité suit de la composition associative dans C et D

Definition 3 (Isomorphisme)

Soit C une catégorie. Un morphisme $f : a \rightarrow b$ dans C est un isomorphisme s'il admet un inverse, i.e., il existe un morphisme $g : b \rightarrow a$ tel que $g \circ f = \text{Id}_a$ et $f \circ g = \text{Id}_b$. On dit alors que les objets a et b sont isomorphes.

Un isomorphisme dont le domaine est égal au codomaine est un automorphisme.

Une catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphismes est un groupe.

Lecture 3: Comment comparer 2 catégories

Tue 21 Sep

1.3 Foncteurs

On souhaite une application entre catégories qui preserve la structure de la composition.

Definition 4 (Foncteur)

Soient C et D des catégories. Un foncteur F de C vers D , note $F : C \rightarrow D$ consiste en un couple d'applications

$$F_{\text{Ob}} : \text{Ob } C \rightarrow \text{Ob } D$$

$$F_{\text{Mor}} : \text{Mor } C \rightarrow \text{Mor } D$$

tel que pour tout morphisme $f : a \rightarrow b$ dans C

$$F_{\text{Mor}}(f) : F_{\text{Ob}}(a) \rightarrow F_{\text{Ob}}(b)$$

$$F_{\text{Mor}}(\text{Id}_c) = \text{Id}_{F_{\text{Ob}}(c)}$$

pour tout $c \in \text{Ob } C$, et

$$F_{\text{Mor}}(g \circ f) = F_{\text{Mor}}(g) \circ F_{\text{Mor}}(f)$$

quel que soient $f \in C(a, b)$, $g \in C(b, c)$, et $a, b, c \in \text{Ob } C$

Lemme 3

Soient $F : C \rightarrow D$ et $F' : D \rightarrow E$ des foncteurs. Alors le couple d'applications

$$F'_{\text{Ob}} \circ F_{\text{Ob}} : \text{Ob } C \rightarrow \text{Ob } E$$

et

$$F'_{\text{Mor}} \circ F_{\text{Mor}} : \text{Mor } C \rightarrow \text{Mor } E$$

definit un foncteur de C vers E , que nous notons $F' \circ F : C \rightarrow E$.

- (Les foncteurs identites) Pour toute categorie C , il y a un foncteur $\text{Id}_C : C \rightarrow C$ dont les composantes sont les identites.
- (Les foncteurs oubli) On travaille souvent (et parfois de maniere implicite) avec des foncteurs en general notes U , qui oublient de la structure sur les objets et morphismes. Par exemple, $U : \text{Gr} \rightarrow \text{Ens}$.
Si G est un groupe, $U(G)$ oublie sa multiplication et ses inverses.
Si $\phi : G \rightarrow H$ est un homomorphisme de groupe, alors $U(\phi) : U(G) \rightarrow U(H)$ est simplement l'application sous-jacente.
 U preserve la composition et l'identite, car elles sont definies exactement de la meme maniere dans les deux categories.
- $U : \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Ab}$
Pour $V \in \text{Ob Vect}_{\mathbb{K}} \Rightarrow U(V)$ oublie la multiplication par scalaire et ne retient que son groupe abelien sous-jacent. Puisque les compositions et les identites sont les memes dans les deux categories, U est bien un foncteur.
- Puisque tout groupe abelien est un groupe, on a un foncteur $\text{Ab} \rightarrow \text{Gr}$, etant donne un tel foncteur d'inclusion (qu'on appelle generalement ι) on dit que Ab est une sous-categorie de Gr

Lecture 4: Transformations naturelles

Sun 26 Sep

1.4 Transformations naturelles

Comment comparer deux foncteurs ayant le meme domaine et codomaine ?

Definition 5 (Transformations naturelles)

Soient $F, F' : C \rightarrow D$ des foncteurs. Une transformation naturelle τ de F vers F' est une application

$$\tau : \text{Ob } C \rightarrow \text{Mor } D$$

tel que pour tout $f : b \rightarrow c$ et $\tau_c \in D(F(c), F'(c))$, on a

$$F'(f) \circ \tau_b = \tau_c \circ F(f)$$

Si τ_c est un isomorphisme pour tout c , alors τ est un isomorphisme naturel.

Soient $F, F', F'' : C \rightarrow D$ des foncteurs et soient $\sigma : F \rightarrow F'$ et $\tau : F' \rightarrow F''$ des transformations naturelles. Alors l'application

$$\text{Ob } C \rightarrow \text{Mor } D : c \mapsto \tau_c \circ \sigma_c$$

On definit alors $\tau \circ \sigma : F \rightarrow F''$ par

$$\tau \circ \sigma : \text{Ob } C \rightarrow \text{Mor } D$$

On veut montrer que $\forall f : b \rightarrow c$ dans C , on a

$$\tau_c \circ \sigma_c \circ F(f) = \sigma_b \circ \tau_b \circ F''(f)$$

ce qui suit immédiatement. On construit facilement une transformation naturelle identité. Pour un foncteur $F : C \rightarrow D$, il y a une identité donné par

$$\text{Ob } C \rightarrow \text{Mor } D : c \rightarrow \text{Id}_{F(c)}$$

Il est facile de voir que pour tout autre transformation naturelle $\tau : F \rightarrow G$. Notons que ainsi, pour toute catégories C et D , C petit, il y a une catégorie $\text{Fun}(C, D)$, dont les objets sont les foncteurs de C vers D et les morphismes sont les transformations naturelles.

Exemple

Soit $U : \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Ens}$ le foncteur qui oublie tout la structure algebrique et soit $L : \text{Ens} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ le foncteur qui envoie un ensemble sur l'ensemble de ses combinaisons linéaires.

Il y a une transformation naturelle $\eta : \text{Id}_{\text{Ens}} \rightarrow U \circ L$.

Pour définir $\eta : \text{Id}_{\text{Ens}} \rightarrow U \circ L$, il nous faut une application $\eta : \text{Ob } \text{Ens} \rightarrow \text{Mor } \text{Ens}$ tel que

$$\forall X \in \text{Ob } \text{Ens}, \eta_X : X \rightarrow U(L(X))$$

donc $\forall x \in X, \eta_X(x) : X \rightarrow \mathbb{K}$.

On décide de poser

$$\eta_X(x)(x') = \begin{cases} 1 : x' = x \\ 0 : x' \neq x \end{cases}$$

Est-ce que ce diagramme commute ?

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & U(L(X)) \\ \downarrow f & & \downarrow U(L(f)) \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & U(L(Y)) \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \eta_Y \circ f(x) &= \eta_Y(f(x)) : Y \rightarrow \mathbb{K} \\ y &\rightarrow \begin{cases} 1 : y = f(x) \\ 0 : y \neq f(x) \end{cases} \end{aligned}$$

On a aussi

$$U(L(f)) \circ \eta_X(x) : Y \rightarrow \mathbb{K}$$

$$y \mapsto \sum_{x' \in f^{-1}(y)} \eta_X(x)(x') = \begin{cases} 1 : y = f(x) \\ 0 : \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc bien une transformation naturelle. De plus, on a une transformation naturelle $\epsilon : L \circ U \rightarrow \text{Id}_{\text{Vect}_{\mathbb{K}}}$ Pour $V \in \text{Ob Vect}_{\mathbb{K}}$

$$L \circ U(V) = \{\omega : U(V) \rightarrow \mathbb{K} \mid \{v \mid \omega(v) \neq 0\} \mid < \infty\}$$

Enfait, ω est un élément du dual de V .

Définir $\epsilon_V : L \circ U(V) \rightarrow V$ par

$$\epsilon_V(\omega) = \sum_{v \in V} \omega(v) \cdot v$$

Cette somme est finie et donc bien définie.

On vérifie facilement que ϵ_V est linéaire.

Soit $g : V \rightarrow V'$ une application linéaire, est-ce que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} L \circ U(V) & \xrightarrow{\epsilon_V} & V \\ \downarrow L \circ U(g) & & \downarrow g \\ L \circ U(V') & \xrightarrow{\epsilon_{V'}} & V' \end{array}$$

On a

$$g \circ \epsilon_V(\omega) = \sum_{v \in V} \omega(v) \cdot g(v)$$

Dans l'autre sens

$$\begin{aligned} \epsilon_{V'} \circ (L \circ U(g))(\omega) &= \sum_{v' \in V'} L \circ U(g)(\omega)(v') \cdot v' \\ &= \sum_{v' \in V'} \left(\sum_{v \in g^{-1}(v')} \omega(v) \right) \cdot v' \end{aligned}$$

Lecture 5: Adjonctions

Sat 02 Oct

1.5 Equivalence de categories

Definition 6 (Equivalence de categories)

Un foncteur $F : C \rightarrow D$ est une Equivalence de categories s'il existe un foncteur $F' : D \rightarrow C$ tel que

$$\sigma : \text{Id}_C \xrightarrow{\sim} F' \circ F \text{ et } \tau : \text{Id}_D \xrightarrow{\sim} F \circ F'$$

Remarque

Si F est un isomorphisme de categories, c'est aussi une equivalence de categories.

Exemple

Soit \mathbf{Un} la categorie avec un seul objet $*$ et un seul morphisme Id . Soit C la categorie $\text{Ob } C = \{a, b\}$ et deux morphismes non-identite $f : a \rightarrow b$ et $g : b \rightarrow a$ qui sont des isomorphismes. Alors les categories \mathbf{Un} et C sont equivalentes.

On definit $F : \mathbf{Un} \rightarrow C$ par $F(*) = a, F(\text{Id}) = \text{Id}_a$.

On definit $F' : C \rightarrow \mathbf{Un}$ par $F'(a) = F'(b) = *$.

On a que $F' \circ F = \text{Id}_{\mathbf{Un}}$ donc la transformation naturelle $\sigma = \text{Id}_{\text{Id}_{\mathbf{Un}}}$ est triviale.

Dans l'autre sens, $F \circ F' \neq \text{Id}_C$, cependant $\exists \tau : \text{Id}_C \rightarrow F \circ F'$ defini par

$$\tau : \text{Ob } C \rightarrow \text{Mor } C$$

donne par

$$\tau(a) = \text{Id}_a, \tau(b) = g$$

Verifions la naturalite :

Commencons par $f : a \rightarrow b$, on a

$$\text{Id}_a \circ \text{Id}_a = g \circ f$$

ce qui est vrai par definition de C .

De meme

$$\text{Id}_a \circ g = \text{Id}_a \circ g$$

1.6 Adjonctions

On veut generaliser la notion d'equivalence de categories, dont il y a beaucoup d'exemples interessants (surtout en theorie des groupes)

Definition 7 (Adjonctions)

Un couple de foncteurs $L : C \rightarrow D$ et $R : D \rightarrow C$ forme une adjonction s'il existe des transformations naturelles

$$\eta : \text{Id}_C \rightarrow R \circ L \text{ et } \epsilon : L \circ R \rightarrow \text{Id}_D$$

tel que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{array}{ccc} L(c) & \xrightarrow{L(\eta_c)} & L \circ R \circ L(c) \\ & \searrow \text{Id}_{L(c)} & \downarrow \epsilon_{L(c)} \\ & & L(c) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} R(d) & \xrightarrow{\eta_{R(d)}} & R \circ L \circ R(d) \\ & \searrow \text{Id}_{R(d)} & \downarrow R(\epsilon_d) \\ & & R(d) \end{array}$$

pour tout $c \in \text{Ob } C, d \in \text{Ob } D$.

Analysons ces identites triangulaires.

La premiere identite veut dire $\forall c \in \text{Ob } C, \eta_c : c \rightarrow RL(c)$, on peut lui appliquer L et on trouve

$$L(c) \xrightarrow{L(\eta_c)} LRL(c)$$

On peut maintenant considerer $\epsilon_{L(c)} : LRL(c) \rightarrow L(c)$ pour revenir a $L(c)$

$$L(c) \xrightarrow{L(\eta_c)} LRL(c) \xrightarrow{\epsilon_{L(c)}} L(c)$$

et on veut que cette suite de composition soit egale a $\text{Id}_{L(c)}$.

Pour la deuxieme identite, soit $d \in \text{Ob } D$, on a alors

$$R(d) \xrightarrow{\eta_{R(d)}} RLR(d) \xrightarrow{R(\epsilon_d)} R(d)$$

Si $L : C \leftrightarrow D : R$ est une adjonction avec transformations naturelles associees $\eta : \text{Id}_C \rightarrow RL$ et $\epsilon : LR \rightarrow \text{Id}_D$, alors on dit que L est un adjoint a gauche de R et R est un adjoint a droite de L .

On notera alors $L \dashv R$.

1.7 Caracterisation des Adjonctions

1.7.1 Preparation

Soit $L : C \leftrightarrow D : R$ un couple de foncteurs entre deux categories petites. On peut y associer deux autres foncteurs interessants

- $D(L(-), -) : C^{op} \times D \rightarrow \text{Ens}$
- $C(-, R(-)) : C^{op} \times D \rightarrow \text{Ens}$

qui sont definis comme suit

- Sur les objets,

$$\forall (c, d) \in \text{Ob } C^{op} \times \text{Ob } D \quad D(L(-), -)(c, d) = D(L(c), d)$$

- Sur les morphismes Soient $(f^{op}, g) \in \text{Mor}(C^{op}(c, c') \times D(d, d'))$.
Donc $\exists f \in C(c', c)$, on veut definir une application ensembliste

$$D(L(f^{op}), g) : D(L(c), d) \rightarrow D(L(c'), d')$$

On peut resumer ceci dans le diagramme

$$L(c') \xrightarrow{L(f)} L(c) \xrightarrow{h} d \xrightarrow{g} d'$$

Ainsi, $D(L(f^{op}, g)) := g \circ h \circ L(f) : L(c') \rightarrow d'$.

Est-ce que ce choix definit bien un foncteur ?

- Identites : Pour $h : L(f) \rightarrow d \in C(L(f), d)$ Si $(\text{Id}_c^{op}, \text{Id}_d) \in \text{Mor}(C^{op} \times D)$ alors $D(L(\text{Id}_c^{op}), \text{Id}_d)(h) = \text{Id}_d \circ h \circ \text{Id}_{L_c} = h$.

Donc

$$D(L(\text{Id}_c^{op}, \text{Id}_d)) = \text{Id}_{D(L(c), d)}$$

- Considerons

$$(c, d) \xrightarrow{(f^{op}, g)} (c', d') \xrightarrow{(f'^{op}, g')} (c'', d'')$$

et etudions

$$D(L(c), d) \xrightarrow{D(L(f^{op}, g))} D(L(c'), d') \xrightarrow{D(L(f'^{op}, g'))} D(L(c''), d'')$$

On a donc, pour $h \in D(L(c), d)$

$$D(L(f^{op}, g) \circ D(L(f'^{op}, g')))(h) = g' \circ g \circ h \circ L(f) \circ L(f') \circ g = D(L(f'^{op} \circ f^{op}), g' \circ g)(h)$$

De maniere semblable, \exists foncteur

$$C(-, R(-)) : C^{op} \times D \rightarrow \text{Ens}$$

defini sur les objets par

$$\forall (c, d) \in \text{Ob}(C^{op} \times D) \quad C(-, R(-))(c, d) = C(c, R(d))$$

et $\forall (f^{op}, g) : (c, d) \rightarrow (c', d')$, alors

$$\begin{aligned} C(f^{op}, R(g)) : C(c, R(d)) &\rightarrow C(c', R(d')) \\ (h : c \rightarrow R(d)) &\rightarrow (R(g) \circ h \circ f) \end{aligned}$$

Lecture 6: Caracterisation des Adjonctions

Sun 10 Oct

1.8 Exemple concret d'adjonction

On considere $L : \text{Ens} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ et $U : \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Ens}$.

Ces adjonctions verifient les identites triangulaires et on a une adjonction $L \dashv U$.

Verifions les identites triangulaires.

Soit $V \in \text{Ob Vect}_{\mathbb{K}}$ Considerer

$$U(V) \xrightarrow{\eta_{U(V)}} UL(UV)$$

et

$$U(LU(V)) \xrightarrow{U(\epsilon_V)} U(V)$$

On veut voir que $U(\epsilon_V) \circ \eta_{U(V)} = \text{Id}_{U(V)}$.

Par definition de η ,

$$\begin{aligned} \eta_{U(V)} &\rightarrow UL(U(V)) \\ v &\mapsto (\eta_{U(V)}(v) : U(V) \rightarrow \mathbb{K}) \end{aligned}$$

ou

$$\eta_{U(V)}(v) : V \rightarrow \mathbb{K} : v' \mapsto \delta_{v,v'}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} U(\epsilon_V) : U(LU(V)) &\rightarrow U(V) \\ \omega &\mapsto \sum_{v \in V} \omega(v) \cdot v \end{aligned}$$

Donc, $\forall v \in U(V)$,

$$\begin{aligned} U(\epsilon_V) \circ \eta_{U(V)}(v) &= U(\epsilon_V)(\eta_{U(V)}(v)) \\ &= \sum_{v' \in V} \eta_{U(V)}(v)(v') \cdot v' \\ &= v \end{aligned}$$

Donc $U(\epsilon_V) \circ \eta_{U(V)} = \text{Id}_{U(V)}$.

Montrons l'autre egalite triangulaire.

Soit $X \in \text{Ob Ens}$. Considerons

$$\begin{aligned} L(\eta_X) : L(X) &\rightarrow L(UL(X)) \\ \omega &\mapsto L(\eta_X) : UL(X) \rightarrow \mathbb{K} \\ L(\eta_X) : \psi &\mapsto \sum_{x \in \eta_X^{-1}(\psi)} \end{aligned}$$

Pour $\psi \in UL(X)$ (donc $\psi : X \rightarrow \mathbb{K}$),

$$\eta_X^{-1}(\psi) = \begin{cases} \{x'\} : \text{ si } \psi = \eta_X(x') \\ \emptyset \text{ sinon} \end{cases}$$

donc $L(\eta_X)(\omega) : UL(X) \rightarrow \mathbb{K}$

$$\psi \mapsto \sum_{x \in \eta_X^{-1}(\psi)} = \begin{cases} \omega(x') : \psi = \eta_X(x') \\ 0 : \psi \neq \eta_X(x') \forall x' \in X \end{cases}$$

De plus

$$\begin{aligned} \epsilon_{L(X)} : LU(L(X)) &\rightarrow L(X) \\ UL(X) &\xrightarrow{\hookrightarrow} \xi \mathbb{K} \mapsto \sum_{\psi \in UL(X)} \xi(\psi) \cdot \psi \end{aligned}$$

Faisons donc le calcul.

Soit $\omega \in L(X)$

$$\epsilon_{L(X)} \circ L(\eta_X)(\omega) = \epsilon_{L(X)}(L(\eta_X)(\omega))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\psi \in UL(X)} L(\eta_X)(\omega)(\psi) \cdot \psi \\
&= \sum_{x \in X} \omega(x) \cdot \eta_X(x)
\end{aligned}$$

Donc $\forall x' \in X$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{L(X)} \circ L(\eta_X)(\omega)(x') &= \left(\sum_{x \in X} \omega(x) \eta_X(x) \right) (x') \\
&= \sum_{x \in X} \omega(x) (\eta_X(x)(x')) = \omega(x')
\end{aligned}$$

1.9 Caractérisation des adjonctions

Proposition 7

Un couple de foncteurs $L : C \rightarrow D$ et $R : D \rightarrow C$ entre catégories localement petites est une adjonction si et seulement si il existe un isomorphisme naturel entre les foncteurs

$$D(L(-), -) : C^{op} \times D \rightarrow \mathbf{Ens} : (c, d) \rightarrow D(L(c), d)$$

et

$$C(-, R(-)) : C^{op} \times D \rightarrow \mathbf{Ens} : (c, d) \rightarrow C(c, R(d))$$

Nous démontrons qu'il existe des transformations naturelles $\alpha : D(L(-), -) \rightarrow C(-, R(-))$ et $\beta : C(-, R(-)) \rightarrow D(L(-), -)$ qui sont mutuellement inverses. On a donc besoin de deux applications

$$\alpha : \mathbf{Ob}(C^{op} \times D) \rightarrow \mathbf{Mor} \mathbf{Ens}$$

et

$$\beta : \mathbf{Ob}(C^{op} \times D) \rightarrow \mathbf{Mor} \mathbf{Ens}$$

tel que $\forall (c, d) \in \mathbf{Ob}(C^{op} \times D)$

$$\alpha_{(c,d)} : D(L(c), d) \rightarrow C(c, R(d))$$

et

$$\beta_{(c,d)} : C(c, R(d)) \rightarrow D(L(c), d)$$

De plus, on veut que

$$\forall (f^{op}, g) \in C^{op} \times D((c, d), (c', d'))$$

$$D(L(c), d) \xrightarrow{\alpha_{c,d}} C(c, R(d)) \xrightarrow{C(f^{op}, R(g))} C(c', R(d'))$$

$$= D(L(c), d) \xrightarrow{D(L(f^{op}), g)} D(L(c'), d') \xrightarrow{\alpha_{(c', d')}} C(c', R(d'))$$

et de meme pour l'application naturelle inverse

$$\begin{aligned} C(c, R(d)) &\xrightarrow{\beta_{c, d}} D(L(c), d) \xrightarrow{D(L(f^{op}), g)} D(L(c'), d') \\ &= C(c, R(d)) \xrightarrow{C(f^{op}, R(g))} C(c', R(d')) \xrightarrow{\beta_{(c', d')}} D(L(c'), d') \end{aligned}$$

Finalement, on soujaite egalement que $\alpha_{(c, d)}$ et $\beta_{(c, d)}$ sont des applications ensemblistes mutuellement inverses.

On va construire α et β a partir des transformations naturelles $\eta : \text{Id}_C \rightarrow RL$ et $\epsilon : LR \rightarrow \text{Id}_D$.

Preuve

Supposer que $C \dashv D$ soit une adjonction avec transformation naturelle associees η, ϵ .

Premier pas : Construction de α et β

Soit $(c, d) \in \text{Ob}(C^{op} \times D)$

$$\alpha_{(c, d)} : D(L(c), d) \rightarrow C(c, R(d))$$

Soit $h : L(c) \rightarrow d \in D(L(c), d)$, notons qu'on a

$$c \xrightarrow{\eta_C} RL(c) \xrightarrow{R(h)} R(d)$$

Definissons donc $\alpha_{(c, d)}(h) = R(h) \circ \eta_C$

Soit $(c, d) \in \text{Ob}(C^{op} \times D)$, on a alors $\forall k : c \rightarrow R(d) \in C(c, R(d))$

$$L(c) \xrightarrow{L(k)} LR(d) \xrightarrow{\epsilon_d}$$

Posons donc

$$\beta_{c, d}(k) = \epsilon_d \circ L(k)$$

Naturalite

Soit $(f^{op}, g) : (c, d) \rightarrow (c', d') \in C^{op} \times D$.

Soit $h \in D(L(c), d)$, on a alors

$$\begin{aligned} C(f^{op}, R(g)) \circ \alpha_{(c, d)}(h) &= C(f^{op}, R(g))(R(h) \circ \eta_c) \\ &= R(g) \circ (R(h) \circ \eta_c) \circ f \\ &= R(g \circ h) \circ \eta_{c'} \circ f \end{aligned}$$

Dans l'autre sens, on a

$$\begin{aligned}\alpha_{(c',d')} \circ D(Lf^{op}, g)(h) &= \alpha_{c',d'}(g \circ h \circ L(f)) \\ &= R(g \circ h \circ L(f)) \circ \eta_c \\ &= R(g \circ h) \circ RL(f) \circ \eta_{c'}\end{aligned}$$

Il faut donc montrer que $\eta_c \circ f = RL(f) \circ \eta_{c'}$

Or $f : c' \rightarrow c$ donne

$$RL(f) \circ \eta_{c'} = \eta_c \circ f$$

commute car η est une transformation naturelle. De meme, le fait que ϵ soit une transformation naturelle implique que β en est aussi une.

α et β sont mutuellement inverses

Considerer pour $(c, d) \in \text{Ob}(C^{op} \times D)$.

On a

$$\begin{aligned}\beta_{(c,d)} \cdot \alpha_{(c,d)}(h) &= \beta_{(c,d)}(R(h) \circ \eta_c) \\ &= \epsilon_d \circ L(R(h) \circ \eta_c) \\ &= \epsilon_d \circ LR(h) \circ L(\eta_c)\end{aligned}$$

On est en train de calculer

$$\begin{aligned}&L(c) \xrightarrow{L(\eta_c)} LRL(c) \xrightarrow{LR(h)} LR(d) \xrightarrow{\epsilon_d} R \\ &= L(c) \xrightarrow{L(\eta_c)} LRL(c) \xrightarrow{\epsilon_{L(c)}} LR(d) \xrightarrow{h} R(d) \\ &= L(c) \xrightarrow{\text{Id}_{L(c)}} h \xrightarrow{} R(d) = h\end{aligned}$$

Donc $h = \epsilon_d \circ LR(h) \circ L(\eta_c)$.

De meme l'autre identite triangulaire implique que $\alpha_{(c,d)} \circ \beta_{(c,d)} = \text{Id}_{C(c, L(d))}$.

Ainsi α et β sont bien des isomorphismes naturels, mutuellement inverses.

Pour completer la caracterisation, il faudrait aussi montrer l'implication inverse.

Pour definir η, ϵ a partir de α, β

— $\eta : \text{Considere } \forall c \in \text{Ob } C$,

$$\begin{aligned}\alpha_{(c, L(c))} : D(L(c), L(c)) &\rightarrow C(c, RL(c)) \\ \text{Id}_{L(c)} &\mapsto \alpha_{(c, L(c))}(\text{Id}_{L(c)})\end{aligned}$$

Et on definit alors $\eta_c : c \rightarrow RL(c)$ par $\eta_c = \alpha_{(c, L(c))}(\text{Id}_{L(c)})$

— $\epsilon : \text{Considerer } \forall d \in \text{Ob } D$,

$$\begin{aligned}\beta_{R(d), d} : C(R(d), R(d)) &\rightarrow D(LR(d), d) \\ \text{Id}_{R(d)} &\mapsto \beta_{R(d), d}(\text{Id}_{R(d)})\end{aligned}$$

□

Lecture 7: Produits et Coproduits

Sat 16 Oct

1.10 Produits et Coproduits

Dans \mathbf{Ens} , on a les constructions suivantes :

$\forall f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Z \in \mathbf{Mor} \mathbf{Ens}$

$$\exists ! h : X \rightarrow Y \times Z$$

tel que $\text{pr}_Y \circ h = f, \text{pr}_Z \circ h = g$.

De meme $\forall f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Z \in \mathbf{Mor} \mathbf{Ens}$

$$\exists ! h : X \amalg Y \rightarrow Z$$

tel que

$$h \circ i_x = f, h \circ i_y = g$$

Formellement, dans une categorie quelconque

Definition 8

Soit C une categorie, et soient $b, c \in \mathbf{Ob} C$. Un produit de b et c consiste en un objet a de C et de deux morphismes $p : a \rightarrow b$ et $q : a \rightarrow c$ tel que pour tout couple de morphisme $f : d \rightarrow b$ et $g : d \rightarrow c$ il existe un unique morphisme $h : d \rightarrow a$ tel que $p \circ h = f$ et $q \circ h = g$.

Remarque

En general, le produit de deux objets n'existe pas, mais s'il existe, il est unique a isomorphisme pres.

Lemme 9

Soit C une categorie, et soient $b, c \in \mathbf{Ob} C$. Si $b \xleftarrow{p} a \xrightarrow{q} c$ et $b \xleftarrow{p'} a' \xrightarrow{q'} c$ sont des produits de b et c , alors il existe un isomorphisme $h : a \rightarrow a'$ qui respecte les morphismes de projection.

Preuve

Puisque $b \xleftarrow{p} a \xrightarrow{q} c$ est un produit de b et c , la propriete universelle du produit nous dit qu'il existe un unique morphisme $h : a' \rightarrow a$.

Puisque $b \xleftarrow{p'} a' \xrightarrow{q'} c$ est un produit de b et c , $\exists ! k : a \rightarrow a'$ tel que

$$p = p' \circ k \text{ et } q = q' \circ k$$

Montrons que h et k sont des isomorphismes mutuellement inverses.

On a que

$$p \circ h \circ k = p' \circ k = p$$

de meme, on a

$$q \circ h \circ k = q$$

L'unicite de la propriete universelle implique que $h \circ k = \text{Id}_A$ et $k \circ h = \text{Id}_{a'}$ \square

On introduit la notation pour “le” produit de $b, c \in \text{Ob } C$ (s’il existe) est noté

$$b \xleftarrow{p}_1 b \times c \xrightarrow{p}_2 c$$

ou parfois simplement $b \times c$.

Definition 9 (Coproduct)

Soit C une catégorie. Un coproduit de b et c est un objet a et deux morphismes $i : b \rightarrow a$ et $j : c \rightarrow a$ tel que pour tout couple de morphismes $f : b \rightarrow d$ et $g : c \rightarrow d$ il existe un unique morphisme $h : a \rightarrow d$ tel que $h \circ i = f$ et $h \circ j = g$ ce que nous resumons par le diagramme suivant.

Lemme 10

Soit C une catégorie, et soient $b, c \in \text{Ob } C$. Si a et a' sont des coproduits de b et c , alors il existe un isomorphisme $h : a \rightarrow a'$ tel que $h \circ j = j', h \circ i = i'$

Remarque

Soit C une catégorie, et soient $b, c \in \text{Ob } C$. Si a est un produit de b et c dans C , alors a est un coproduit dans C^{op} .

1.11 Preservation des produits/coproduits

Proposition 12

Soit $C : L \dashv R : D$

1. Soient $b, c \in \text{Ob } C$, si $b \amalg c$ existe, alors $L(b \amalg c)$ est un coproduit de $L(b)$ et $L(c)$ dans D .
2. Soient $d, e \in \text{Ob } D$. Si le produit $d \times e$ existe, alors son image sous le foncteur R est un produit de $R(d)$ et $R(e)$

Preuve

Supposons que $b \xrightarrow{i}_1 b \amalg c \xleftarrow{i}_2 c$ est un coproduit de b et c dans C , considérons son image sous $L : L(b) \xrightarrow{L(i_1)} L(b \amalg c) \xleftarrow{L(i_2)} L(c)$.

Pour montrer que ceci est un coproduit de $L(b)$ et $L(c)$, il faut vérifier la propriété universelle.

Soit alors un couple de morphismes $L(b) \xrightarrow{f} d \xleftarrow{g} L(c)$ dans D .

A voir : $\exists ! h : L(b \amalg c) \rightarrow d$ qui satisfait la propriété universelle.

Observons que $f : L(b) \rightarrow d, g : L(c) \rightarrow d$ donnent $f^\# : b \rightarrow R(d)$ et $g^\# : c \rightarrow R(d)$.

Par la propriété universelle du produit, $\exists ! k : b \amalg c \rightarrow R(d)$ tel que $k \circ i_2 = g^\#$ et $k \circ i_1 = f^\#$.

Le morphisme $k : b \amalg c \rightarrow R(d)$ correspond à $k^\flat : L(b \amalg c) \rightarrow d$.

On va montrer que $k^\flat \circ L(i_1) = f$ et que $k^\flat \circ L(i_2) = g$.

On a $k^b = \epsilon_d \circ L(k)$.

De meme, on a $L(f^\sharp) = L(k) \circ L(i_1)$.

Il suffit donc de montrer que $f = \epsilon_d \circ L(f^\sharp)$.

Cependant, $f^\sharp = R(f) \circ \eta_b$, donc $L(f^\sharp) = LR(f) \circ L(\eta_b)$.

Reste a voir que k^b est l'unique morphisme faisant commuter ces triangles.

Supposons qu'il existe $l : L(b \amalg c) \rightarrow d$ faisant commuter le diagramme, montrons que $l = k^b$.

De maniere analogue, on trouve que $l^\sharp \circ i_1 = f^\sharp$ et $l^\sharp \circ i_2 = g$.

Par l'unicite de la propriete universelle du coproduit, on en deduit que $l^\sharp = k^\sharp \Rightarrow l = k$. \square

Lecture 8: Groupes Quotients

Sat 23 Oct

2 Groupes Quotients

2.1 Quelques rappels de premiere annee

Soit G un groupe.

- Un sous groupe N de G est normal si $aba^{-1} \in N \forall a \in G, b \in N$, on notera ceci $N \trianglelefteq G$.
- Si $\phi : G \rightarrow H$ est un homomorphisme, alors le noyau de ϕ est un sous-groupe normal de G .
 ϕ est injectif si et seulement si $\ker \phi = \{e\}$
- Si $H < G$, on pose $G/H = \{aH | a \in G\}$. De plus on a

$$aH \cap bH \neq \emptyset \Rightarrow aH = bH$$

On a une application $q_H : G \rightarrow G/H : a \mapsto \bar{a}$

- Si $N \trianglelefteq G$, alors G/N admet une structure de groupe tel que l'application $q_N : G \rightarrow G/N$ soit un homomorphisme de groupe
- Soit $N \trianglelefteq G$ et soit $\phi : G \rightarrow H$. Si $N < \ker \phi$, il existe un unique homomorphisme $\hat{\phi} : G/N \rightarrow H$ tel que $\hat{\phi} \circ q_N = \phi$

2.2 Sens categorique des quotients de groupe

Soient deux homomorphismes de groupe de meme domaine $G_1 \xleftarrow{\phi_1} G_0 \xrightarrow{\phi_2} G_2$.

Existe-t'il un groupe G et des homomorphismes $G_1 \xrightarrow{\psi_1} G \xleftarrow{\psi_2} G_2$ tel que $\psi_2 \phi_2 = \psi_1 \phi_1$ et tel que, pour tout couple d'homomorphismes $G_1 \xrightarrow{\omega_1} H \xleftarrow{\omega_2} G_2$ tel que $\omega_2 \phi_2 = \omega_1 \phi_1$, il existe un unique homomorphisme $\omega : G \rightarrow H$ tel que $\omega \psi_1 = \omega_1$ et $\omega \psi_2 = \omega_2$.

Remarque

Lorsqu'il existe $G_1 \xrightarrow{\psi}_1 G \xleftarrow{\psi}_2 G_2$ qui répondent aux critères de la question, on dit que c'est un pushout de ϕ_1 et ϕ_2 .

Un pushout de $\{e\} \xrightarrow{G}_0 \xleftarrow{\phi}_1 G_1$ consiste en

1. un homomorphisme $\psi_1 : G_1 \rightarrow G$ tel que $\text{Im } \phi_1 \subset \ker \psi_1$, tel que
2. \forall homomorphisme $\omega_1 : G_1 \rightarrow H$ tel que $\text{Im } \phi_1 \subset \ker \omega_1$, $\exists ! \omega : G \rightarrow H$ tel que $\omega_1 = \omega \circ \psi_1$

Proposition 14

Soit $\phi : H \rightarrow G$ un homomorphisme de groupe. Soit $N \trianglelefteq G$ le plus petit sous-groupe normal de G qui contient $\text{Im } \phi$. Alors

$$\{e\} \xrightarrow{i} G/N \xleftarrow{q}_{N_\phi} G$$

où i est l'unique homomorphisme du groupe trivial vers G/N , est le pushout de

$$\{e\} \xleftarrow{\pi} H \xrightarrow{\phi} G$$

où π est l'unique homomorphisme de H vers le groupe trivial.

Preuve

Il faut montrer que

$$\text{Im } \phi \subset \ker q_N$$

et

$$\forall \psi : G \rightarrow G'$$

tel que $\text{Im } \phi \subset \ker \psi$ $\exists ! \hat{\psi} : G/N_\phi \rightarrow G'$ tel que

$$\hat{\psi} \circ q_N = \psi$$

On a

$$\ker q_N = N_\phi \supset \text{Im } \phi$$

Soit $\psi : G \rightarrow G'$ tel que $\text{Im } \phi \subset \ker \psi$.

On veut trouver un homomorphisme $\hat{\psi} : G/N \rightarrow G'$ tel que $\hat{\psi} \circ q_N = \psi$.

Or $N_\phi = \bigcap N$ et $\text{Im } \phi \subset \ker \psi \trianglelefteq G$ d'où $N \subset \ker \psi$.

Par la propriété universelle du quotient, $\exists ! \hat{\psi}$

□

Lecture 9: Theoremes d'isomorphisme

Sat 30 Oct

Theorème 15 (Premier theoreme d'isomorphisme)

Si $\phi : G \rightarrow H$ est un homomorphisme de groupe, alors

$$G / \ker \phi \simeq \text{Im } \phi$$

Preuve

Par corestriction de l'homomorphisme $\phi : G \rightarrow H$, on obtient un homomorphisme surjectif

$$\phi : G \rightarrow \text{Im } \phi$$

Par la propriété universelle du quotient, il existe un unique $\hat{\phi} : G / \ker \phi \rightarrow \text{Im } \phi$ tel que $\hat{\phi} \circ q_{\ker \phi} = \phi$.

Puisque ϕ est surjectif, $\hat{\phi}$ l'est aussi, car $\phi(a) = \hat{\phi}(\bar{a})$.

Pour montrer que $\hat{\phi}$ est injectif, on calcule

$$\ker \hat{\phi} = \{ \bar{a} \in G / \ker \phi \mid \hat{\phi}(\bar{a}) = e \} = \{ \bar{e} \} \quad \square$$

Theorème 16 (Le deuxième theoreme d'isomorphisme)

Pour tout $H < G$ et tout $N \trianglelefteq G$

1. $HN = \{ab \mid a \in H, b \in N\} < G$
2. $H \cap N \trianglelefteq H$; et
3. $H / H \cap N \simeq HN / N$

Preuve

1. Pour montrer que HN est un sous-groupe de G , il faut montrer que $\forall ab, a'b' \in HN$,

$$(ab)^{-1}(a'b') \in HN$$

Or $(ab)^{-1}a'b' = b^{-1}a^{-1}a'b' ; \exists b'' \in N$ tel que $b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b''$, donc

$$= a^{-1}b''a'b' = a^{-1}a'b''b'$$

2. Soit $a \in H, b \in H \cap N$, on veut montrer que $aba^{-1} \in H \cap N$.

Or $b \in H \cap N \Rightarrow aba^{-1} \in H$, de même $b \in H \cap N \Rightarrow aba^{-1} \in N$.

Donc $b \in H \cap N$.

3. $N \trianglelefteq G \Rightarrow N \trianglelefteq HN$, donc \exists un groupe HN / N .

Considérons la composition

$$H \xrightarrow{\iota} HN \xrightarrow{q} HN / N$$

Montrons que $q \circ \iota$ surjectif, en effet $\forall ab \in HN \quad \overline{ab} = abN = aN = \bar{a}$.

Montrons que $\ker q \circ \iota = H \cap N$.

$$\ker(q \circ \iota) = \{a \in H \mid \bar{a} = \bar{e}\}$$

$$= \{a \in H \mid aN = N\}$$

$$= \{a \in H \mid a \in N\}$$

$$= H \cap N$$

□

On conclut par le premier theoreme d'isomoprisme.

Notation

Pour G un groupe,

$$— \mathcal{S}(G) = \{H \leq G\}$$

$$— \mathcal{N}(G) = \{H \trianglelefteq N\}$$

Theoreme 17 (Troisieme theoreme d'isomorphisme)

Soient G un gorupe et $N \trianglelefteq G$. Alors

$$1. \mathcal{S}(G/N) = \{H/N \mid H \in \mathcal{S}(G), N < H\}$$

$$2. \mathcal{N}(G/N) = \{K/N \mid K \in \mathcal{N}(G), N < K\}$$

$$3. \text{ Si } K \in \mathcal{N}(G) \text{ et } N < K, \text{ alors } G/K \simeq G/N/K/N$$

Preuve

$$1. \text{ Si } N < H < G, \text{ alors } H/N < G/N.$$

$$\text{Donc } \{H/N \mid H \in \mathcal{S}(G), N < H\}.$$

$$\text{Soit } \hat{H} < G/N.$$

$$\text{Alors } q^{-1}(\hat{H}) < G \text{ est un ss-groupe.}$$

$$q^{-1}(\hat{H}) = \{a \in G \mid \bar{a} \in \hat{H}\}$$

$$\text{En particulier } N < q^{-1}(\hat{H}) \text{ puisque } \forall a \in N, \bar{a} = \bar{e} \in \hat{H}.$$

$$\text{De plus } q^{-1}(\hat{H})/N = \{\bar{a} \mid a \in q^{-1}(\hat{H})\} = \hat{H}$$

$$2. \text{ On sait que } \mathcal{N}(G/N) = \{H/N \mid H \in \mathcal{S}(G), N < H, H/N \trianglelefteq G/N\}.$$

$$\text{Or } H/N \trianglelefteq G/N \iff \forall \bar{a} \in G/N, \bar{b} \in H/N, \bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}.$$

$$\iff \forall \bar{a}\bar{b}, \bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1} \in H/N \iff \bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1} \in H$$

$$3. \text{ Soit } N \trianglelefteq G, K \trianglelefteq G \text{ tel que } N \trianglelefteq K.$$

$$\text{Considerer } G/N \xleftarrow{q_N} G \xrightarrow{q_K} G/K.$$

$$\text{Puisque } N < K = \ker q_K, \text{ par la propriete universelle du quotient } \exists! \hat{q} \text{ tel}$$

$$\text{que } \hat{q} \circ q_N = q_K$$

$$\text{Observons que } \hat{q} \text{ est surjectif.}$$

$$\text{Ensuite calculons } \ker \hat{q}$$

$$\ker \hat{q} = \{aN \mid \hat{q}(aN) = eK\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{aN \mid aK = eK\} \\
&= K/N
\end{aligned}
\quad \square$$

On conclut par le premier theoreme d'isomorphisme

3 Groupes Resolubles

Definition 10 (Groupe resoluble)

Un groupe G est resoluble s'il existe une suite finie de sous-groupes

$$\{e\} = G_r < G_{r-1} < \dots < G_0 = G$$

tel que

- $G_k \trianglelefteq G_{k-1}$
- G_{k-1}/G_k est abelien

pour tout k .

Remarque

Si G est abelien, alors G est resoluble, car on peut prendre $\{e\} < G$

Remarque

La decomposition n'est pas unique.

Lemme 20

Soient G un groupe et $N \trianglelefteq G$. Alors

$$G/N \text{ abelien} \iff \{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G\} \subset N$$

Preuve

En exercice. □

Proposition 21

Soient G un groupe et $N \trianglelefteq G$. Si N et G/N sont resolubles, alors G l'est également.

Preuve

Si $N, G/N$ sont resolubles, alors \exists suites de sous-groupes.

Soit N_i la suite resolvant N et K_i la suite resolvant G/N .

$\exists H_i < G$ tel que $q(H_i) = K_i$.

De plus, puisque $K_i \trianglelefteq K_{i-1}$, on sait également que $H_i \trianglelefteq H_{i-1}$, par le troisieme theoreme d'isomorphisme.

Donc on a suite de sous-groupes de G

$$q^{-1}(K_s) = H_s \trianglelefteq H_{s-1} \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq G_0 = G \quad \square$$

4 Actions de groupe

Definition 11 (Action de groupe)

Une action de groupe G sur l'ensemble X consiste en un homomorphisme de groupe

$$\phi : G \rightarrow \text{Aut } X$$

De maniere equivalente, une action de G sur X consiste en une application

$$\phi^b : G \times X \rightarrow X$$

tel que

$$\phi^b(a \cdot b, x) = \phi^b(a, \phi^b(b, x)) \text{ et } \phi^b(e, x) = x \forall a, b \in G, x \in X$$

Definition 12 (Points fixes)

L'ensemble des points fixes par a , note X^a est le sous-ensemble de X defini par

$$X^a = \{x \in X | ax = x\}$$

L'ensemble des points fixes de l'action ϕ , note $(X, \phi)^G$ ou simplement X^G est le sous-ensemble de X defini par

$$X^G = \{x \in X | ax = x \forall a \in G\} = \bigcap_{a \in G} X^a$$

Definition 13 (Orbite)

Soit $\phi : G \rightarrow \text{Aut } X$ une action de groupe. Soit $x \in X$

1. L'orbite de x , note O_x est le sous-ensemble de X defini par

$$O_x = \{ax | a \in G\}$$

2. L'ensemble des orbites de l'action est

$$(X, \phi)_G = \{O_x | x \in X\}$$

que l'on note souvent simplement X_G .

3. Le stabilisateur de x , note G_x est le sous-groupe de G defini par

$$G_x = \{a \in G | ax = x\}$$

— Soient $x, x' \in X$, si $O_x \cap O_{x'} \neq \emptyset$, alors $O_x = O_{x'}$.

Donc on peut decomposer X en une reunion disjointe d'orbites, $\exists \bar{X} \subset X$

tel que

$$X = \bigcup_{x \in \bar{X}} O_x$$

— $\forall x \in X \exists$ bijection

$$G/G_x \rightarrow O_x : \bar{a} \mapsto a \cdot x$$

— Equation de classe Soit $\phi : G \rightarrow \text{Aut } X$ une action de groupe. La bijection du point precedent donne une equation de classe

$$\#X < \infty \Rightarrow \# = \sum_{x \in \bar{X}} (G : G_x)$$

— Soit $\phi : G \rightarrow \text{Aut } X$ une action de groupe, le lemme de Burnside exprime la relation entre orbites et ensembles de points fixes

$$X = \bigcup_{x \in \bar{X}} O_x \Rightarrow \#\bar{X} = \frac{1}{\#G} \sum_{a \in G} \#X^a$$

Lecture 11: Perspectiue categorique sur les actions de groupe

Sat 06 Nov

4.1 Un cadre categorique pour les actions de groupe

Pour generaliser la notion d'action de groupe a d'autres categories que Ens, quelle definition doit-on essayer de generaliser ?

Definition 14

Soit C une categorie, et soit $c \in \text{Ob } C$. Soit G un groupe. Une action de G sur c consiste en un homomorphisme de groupe

$$\phi : G \rightarrow \text{Aut } c$$

Un objet de C muni d'une action de G est un G -objet de C .

$\phi : G \rightarrow \text{Aut } c$ homomorphisme $\iff \forall a \in G, \phi(a) : c \simeq c$ et $\forall a, b \in G$
 $\phi(ab) = \phi(a) \circ \phi(b)$.

Un tel couple, $(c, \phi : G \rightarrow \text{Aut } c)$ est un G -objet de C .

On peut decortiquer encore plus lorsque C est concrete

Remarque

Si C est une categorie concrete, \exists foncteur oubli $U : C \rightarrow \text{Ens}$.

Si (c, ϕ) est un G -objet de C , alors on a $\phi : G \rightarrow \text{Aut } c$.

Appliquons U a la famille des $\phi(a)$

$$U(\phi(a)) : U(c) \xrightarrow{\simeq} U(c)$$

On a alors une action de G sur l'ensemble $U(c)$.

Donc une action de G sur $c \in \text{Ob } C$ consiste en une action de G sur $U(c)$ qui respect la structure supplementaire.

Exemple

Si $V \in \text{Vect}_{\mathbb{K}}$, alors $\text{Aut } V = GL(V)$ le groupe general lineaire de V , ie., le groupe de tous les isomorphismes lineaires de V .

Un G -ev est donc un espace vectoriel muni d'un homomorphisme $\phi : G \rightarrow GL(V)$

Comment definir de maniere raisonnable un morphisme entre G -objets dans une categorie C ?

Pour repondre a cette question, on formule la definition d'une action de groupe d'une autre maniere, encore plus categorique.

Lemme 24

Soient C une categorie et G un groupe. Pour tout $c \in \text{Ob } C$, il y a une bijection

$$\text{Gr}(G, \text{Aut } c) \simeq \{F \in \text{Ob Fun}(BG, C) \mid F(\star) = c\}$$

Preuve

$\alpha : \text{Gr}(G, \text{Aut } c) \rightarrow \{F : BG \rightarrow C \mid F(\star) = c\}$ Defini comme :

Etant donne $\phi : G \rightarrow \text{Aut } c$ un homomorphisme, on definit $\alpha(\phi)$ comme etant le foncteur

$$\alpha(\phi) : BG \rightarrow C$$

precise par

$$\alpha(\phi)(\star) = c$$

$$\alpha(\phi)(a) = \phi(a) : c \simeq c \quad \forall a \in \text{Mor } BG = G$$

$\alpha(\phi)$ est trivialement un foncteur.

On definit l'inverse a α comme

$$\beta(F) : G \rightarrow \text{Aut } c$$

est l'application definie par $\beta(F)(a) = F(a) : c \rightarrow c$.

On verifie que $\beta(F)(a)$ est un isomorphisme, de plus $\beta(F)$ est un homomorphisme. On montre facilement que $\beta \circ \alpha$ et $\alpha \circ \beta$ sont des identites. \square

Definition 15

Soient C une categorie et G un groupe, la categorie $\text{Fun}(BG, C)$ est appelee la categorie des G -objets dans C . Les morphismes dans $\text{Fun}(BG, C)$, sont appeles G -equivariants.

Un morphisme G -equivariant est une transformation naturelle $\tau : F \rightarrow F'$ ou $F, F' : BG \rightarrow C$, ie. une application $\tau : G = \text{Ob } BG \rightarrow \text{Mor } C$ telle que pour tout $a \in G$

$$F'(a) \circ \tau_* = \tau_* \circ F(a)$$

Grace au lemme ci-dessus, si $(c, \phi), (c', \phi')$ des G -objets de C , donc $\phi : G \rightarrow \text{Aut } c, \phi' : G \rightarrow \text{Aut}(c')$ un morphisme G -equivariant de (c, ϕ) vers (c', ϕ') consiste en

— un morphisme $f \in C(c, c')$ tel que

$$\phi'(a) \circ f = f \circ \phi(a) \forall a \in G$$

4.2 Generalisation et formalisation du cas $C = \text{Ens}$

Soit C une categorie. Soit G un groupe.

Le foncteur d'action triviale de G est

$$\text{Triv}_G : C \rightarrow {}_G C$$

est defini par :

$$\text{triv}_G(c) = (c, \text{cst}_{\text{Id}})$$

et $\forall f \in C(c, c'), \text{triv}_G(f) = f$

Motive par l'analyse du cas $C = \text{Ens}$, on pose

— le foncteur orbite est l'adjoint a gauche de Triv_G , s'il existe

$$(-)_G : {}_G C \rightarrow C$$

— Le foncteur point fixe est l'adjoint a droite de Triv_G , s'il existe

$$(-)^G : {}_G C \rightarrow C$$

Si $(-)_G$ existe, alors \exists un isomomorphisme naturel

$${}_G C((c, \phi), \text{Triv}_G(c')) \simeq C((c, \phi)_G, c')$$

De meme, si $(-)^G : {}_G C \rightarrow C$ existe, alors \exists isomorphisme naturel

$${}_G C(\text{Triv}_G(c'), (c, \phi)) \simeq C(c', (c, \phi)^G)$$

4.3 Creation d'actions libres

\exists adjonction $L : \text{Ens} \dashv \text{Vect}_{\mathbb{K}} : U$.

Il existe egalement un foncteur oublie $U : {}_G C \rightarrow C \forall C$ categorie, G groupe, defini par $U(c, \phi) = c$, existe-il un adjoint a gauche de ce foncteur oubli ?

Ie,

$$C(c, U(c', \phi')) \simeq {}_G C(L(c), (c', \phi'))$$

Definition 16 (Action libre)

Soient G un groupe et C une categorie.

— Le foncteur de G -action libre, note $\text{Free}_G : C \rightarrow {}_G C$ est l'adjoint a gauche du foncteur oubli $U : {}_G C \rightarrow C$ lorsqu'il existe.

Alors, si l'adjoint a gauche de U existe, on aura $\forall c \in \text{Ob } C, (c', \phi') \in \text{Ob } {}_G C$

$${}_G C(\text{Free}_G(c), (c', \phi')) \simeq C(c, c')$$

4.3.1 Le foncteur $\text{Free}_G : \text{Ens} \rightarrow {}_G\text{Ens}$

Soit $\mu : G \times G \rightarrow G$ la multiplication de G ,

Remarque

G est lui même un G -ensemble, quand on le munit de l'action de translation.

$\forall X \in \text{Ob Ens}$, on pose

$$\text{Free}_G(x) = (G \times X, \phi_X)$$

on on definit

$$\phi_X : G \rightarrow \text{Aut}(G \times X) : a \mapsto ((b, x) \mapsto (ab, x))$$

Donc $\text{Free}_G(x) \in \text{Ob } {}_G\text{Ens}$

Lecture 12: Orbites et points fixes categoriques

Sat 13 Nov