13.1. Soit $f : [0,\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe deux constantes α et β telles que pour tout $x \in [0,\infty[$:

$$|f(x)| \leq \alpha x + \beta.$$

Indications:

(a) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $x, y \in [0,\infty[$, $|x-y| \leq \delta$ alors $|f(x) - f(y)| \leq 1$.

(b) Vérifier que $|f(n\delta) - f(0)| \leq n$, $\forall n = 0, 1, \ldots$.

(c) Montrer que $|f(x)| \leq 1 + m + |f(0)|$ avec $m = \left[\frac{x}{\delta}\right]$ où $[y]$ dénote la partie entière de $y \in \mathbf{R}$.

13.2. Soient $a \in \mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue en a telle que pour tout $x, y \in \mathbf{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1.) Montrer que la fonction f est continue partout.

2.) En déduire que f est linéaire; plus précisément, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$f(x) = x\,f(1).$$

Indications:

Montrer que $f(0) = 0$ et f est continue en $x = 0$.

Montrer que f est continue partout,

Montrer que $f(n) = n\,f(1)$, $\forall n \in \mathbf{Z}$.

Montrer que $f(x) = x\,f(1)$, $\forall x \in \mathbf{Q}$.