

---

**Algèbre linéaire avancée II**  
printemps 2021

---

**Série 13**

Tous les exercices sauf celui marqué d'une (\*) seront corrigés. La correction sera postée sur Piazza 2 semaines après. La solution de l'exercice (\*) sera discutée dans les séances d'exercices du mardi. Un des exercices (\*) sera une question ouverte de l'examen final.

---

**Exercice 1.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Montrer qu'il existe un polynôme  $m_A(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$  de degré minimal et dont le coefficient du monôme dominant est 1 tel que  $m_A(A) = 0$ . De plus, montrer que  $m_A(x)$  est unique.

Le polynôme  $m_A(x)$  est appelé le *polynôme minimal* de  $A$ .

**Exercice 2.** Soit  $U \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  une matrice unimodulaire.

i) Montrer que  $U^{-1}$  est aussi unimodulaire.

ii) Montrer que  $\mathbb{Z}^n = \{Uz \mid z \in \mathbb{Z}^n\}$ , c'est-à-dire que  $U$  est un automorphisme sur  $\mathbb{Z}^n$ .

**Exercice 3.** Soit  $U \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  une matrice unimodulaire. Montrer qu'il existe un  $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$  et des matrices  $E_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  tels que

i) chaque  $E_i$  représente une opération élémentaire unimodulaire (cf. définition 6.4),

ii) on a  $U = E_1 \cdot E_2 \cdots E_m$ .

**Exercice 4.** Montrer que le système  $Ax = 0$  a une solution  $0 \neq z^* \in \mathbb{Z}^n$  pour chaque matrice  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  avec  $m < n$ .

**Exercice 5.** Trouver toutes les solutions entières de

$$Ax = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 10 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{Z}^3. \quad (1)$$

et de

$$Bx = \begin{pmatrix} 8 & -7 & -10 \\ -6 & 15 & 12 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{Z}^3. \quad (2)$$

**Exercice 6.** Montrer que  $d$  dans le lemme 6.6 est le gcd de la première ligne de  $A$ . En d'autres mots, montrer le lemme suivant.

*Lemme.* Soit  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  une matrice en nombres entiers de plein ligne rang, alors il existe une matrice unimodulaire  $U \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ , tel que la première ligne de  $AU$  est de la forme  $(d, 0, \dots, 0)$  où  $d = \gcd(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n})$ .

**Exercice 7.** (\*) Soit  $G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  une matrice symétrique, unimodulaire, et définie positive. Montrer qu'il existe une matrice unimodulaire  $U$  telle que  $G = U^T U$ .

*Indication:* Regarder  $ac$ . Si  $ac \geq 2$ , est-ce qu'il y a une matrice unimodulaire  $U$  t.q.  $U^T G U = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$  avec  $0 \leq b' < b$  ?