Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-03-22 au 2021-03-26

# Série 09 du lundi 22 mars 2021

## Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \ln(|x_1| + |x_2|), \text{ si } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, \text{ si } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases} \tag{1}$$

Montrer que $f$ est de classe $\mathrm{C}^1$.

## Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ et soit $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ les trois fonctions données par :

$$g_1(y_1, y_2, y_3) = y_1 \cos y_2 \sin y_3, \tag{2}$$
$$g_2(y_1, y_2, y_3) = y_1 \sin y_2 \sin y_3, \tag{3}$$
$$g_3(y_1, y_2, y_3) = y_1 \cos y_3. \tag{4}$$

On définit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ comme $F(y_1, y_2, y_3) = f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))$ où

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = (g_1(\boldsymbol{y}), g_2(\boldsymbol{y}), g_3(\boldsymbol{y})) = (g_1(y_1, y_2, y_3), g_2(y_1, y_2, y_3), g_3(y_1, y_2, y_3)). \tag{5}$$

1) Calculer explicitement $F(\boldsymbol{y})$.
2) Calculer $\nabla F(\boldsymbol{a})$ où $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.
3) Vérifier, dans ce cas particulier, que $\forall k \in \{1, 2, 3\}$,

$$\frac{\partial F}{\partial y_k}(\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})) \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(\boldsymbol{y}). \tag{6}$$

## Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathrm{C}^1$. On note $F := f \circ \|\cdot\|$, c'est-à-dire

$$F : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Calculer le gradient $\nabla F(\boldsymbol{x})$ en tout point $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

## Exercice 4.

Soit $\boldsymbol{f} \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une application qui satisfait $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))) = \boldsymbol{x}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ est inversible en tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.