EPFL Automne 2020
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 14

Pour cette series et la suivante il n'y aura pas d'exercice a rendre (fin du semestre).

Sauf mention explicit du contraire, on suppose que le corps de base K est de caracteristique $\neq 0$.

1 Calculs de determinants

Exercice 1. Calculer les determinants des matrices suivantes (pour a, b, c, λ dans un corps K)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 1 \\ -1 & 1 & a & b \\ a & 1 & a & c \\ 1 & 1 & -a & 0 \end{pmatrix}, \quad B_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. On suppose $K = \mathbb{C}$. On considere les matrices ($a \in \mathbb{C}$)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5+2i & -3i & 2+7i & a \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & i & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -11 & 13 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 77 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 6 & 12 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le determinant de A par developement de Lagrange le long d'une ligne ou d'une colonne bien choisie.
2. Calculer le determinant de A par operations elementaires (sur les lignes et/ou les colonnes).
3. La matrice est elle inversible ? Si oui calculer son inverse.
4. Montrer (sans le calculer) que $\det D \in \mathbb{Z}$.
5. Calculer le determinant de D (de la maniere que vous preferez) et celui de D^3.

6. Soit p un nombre premier. On ecrit D_p pour la matrice D mais vue a coefficients dans $\mathbb{F}_p$ (on remplace 77 par $77_p = 77.1_{\mathbb{F}_p} = 77 \pmod p$) et pareil pour les autres coordonnees). Montrer que

$$\det D_p = \det D \pmod p.$$

7. Pour quelles valeurs de p la matrice D_p est elle de rang 6 ?.

Exercice 3. Soit $M = (m_{ij})_{ij \leqslant d} \in M_d(\mathbb{C})$ une matrice a coefficients complexes. On pose $\overline{M}(\overline{m}_{ij})_{ij \leqslant d}$ la matrice obtenue an prenant le conjugue complexe de tous les coordonnees de M.

1. Montrer que $\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$.
2. Montrer que $\det(M.\overline{M}) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.
3. Montrer par un exemple que $M.\overline{M} \notin M_d(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $P_{car,\overline{M}}(X) = \overline{P_{car,M}}(X)$ ou pour un polynome $P(X) \in \mathbb{C}[X]$, on a note $\overline{P}(X)$ le polynome dont les coefficients sont les conjugues complexes des coefficients de P.
5. Montrer que la polynome produit $P_{car,M}(X).P_{car,\overline{M}}(X) \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 4. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ verifiant

$$M^{2020} + 2020\mathrm{Id}_3 = \mathbf{0}_{3\times 3}.$$

Exercice 5. Soit $M \in M_d(K)$ une matrice. On rappelle que pour $i, j \leqslant d$ le (i, j) cofacteur de M est le scalaire

$$\mathrm{cof}(M)_{ij} := (-1)^{i+j} \det M(i|j)$$

ou $M(i|j)$ est la matrice de taille $d-1$ obtenue a partir de M en otant la i-ieme ligne et la j-ieme colonne. La matrice des cofacteurs de M que l'on note

$$\mathrm{cof}(M) = (\mathrm{cof}(M)_{ij})_{ij \leqslant d}$$

est la matrice dont la (i, j)-ieme coordonnee est le cofacteur.

Soient E et F les matrices

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 2a & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & a+5 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\mathrm{cof}(E)$ et $\mathrm{cof}(F)$.
2. Verifier les relations de Cramer

$$E.{}^t\mathrm{cof}(E) = \det(E)\mathrm{Id}_3, \; F.{}^t\mathrm{cof}(F) = \det(F)\mathrm{Id}_3.$$

3. Si E ou F est inversible, calculer son inverse.
4. Calculer le polynome caracteristique de F et verifier le Theoreme de Cayley-Hamilton dans ce cas particulier.

Remarque 1.1. La formule de Cramer (qu'on a pas demontre et qui s'obtient a partir des formules de developement de Lagrange) dit que si $M \in M_d(K)$ on a

$$M.{}^t\mathrm{cof}(M) = \det(M).\mathrm{Id}_d.$$

2 Certain groupes de matrices

Exercice 6. Soit K un corps. Une matrice $M \in M_d(K)$ est dite orthogonale si elle verifie

$$M.{}^tM = \mathrm{Id}_d.$$

On note $O_d(K)$ l'ensemble des matrices orthogonales.

1. Montrer que $\det M = \pm 1_K$.
2. Montrer que $\mathrm{O}_d(K) \subset \mathrm{GL}_d(K)$ et que $O_d(K)$ est un sous-groupe de $GL_d(K)$ (le groupe orthogonal).
3. Soit $\mathrm{SO}_d(K) = \{M \in \mathrm{O}_d(K),\ \det M = 1\}$. Montrer que $\mathrm{SO}_d(K)$ est un sous-groupe distingue de $\mathrm{O}_d(K)$.
4. On suppose que $\mathrm{car} K \neq 2$ (de sorte que $1_K \neq -1_K$). Montrer qu'il existe M^- une matrice orthogonale de determinant -1 (on cherhera M sous forme diagonale).
5. Montrer que
$$\mathrm{O}_d(K) = \mathrm{SO}_d(K) \sqcup M^-.\mathrm{SO}_d(K).$$

Exercice 7. Soit $M, M' \in M_d(K)$ des matrice triangulaires superieure par blocs de meme taille :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & \star \\ \mathbf{0} & M_2 \end{pmatrix},\ M_1 \in M_{d_1}(K),\ M_2 \in M_{d_2}(K),\ d_1 + d_2 = d.$$

$$M' = \begin{pmatrix} M'_1 & \star \\ \mathbf{0} & M'_2 \end{pmatrix},\ M'_1 \in M_{d_1}(K),\ M'_2 \in M_{d_2}(K),\ d_1 + d_2 = d.$$

1. Montrer que
$$M.M' = \begin{pmatrix} M_1.M'_1 & \star \\ \mathbf{0} & M_2.M'_2 \end{pmatrix}$$
Les termes "$\star$" designent des matrices de taille $d_1 \times d_2$ dont les valeurs sont differentes et qu'on ne depend pas de calculer et $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{d_2 \times d_1}$ est la matrice nulle de dimensions $d_2 \times d_1$.

2. Montrer que M est inversible ssi M_1 et M_2 le sont et si c'est le cas donner la forme generale de M^{-1}.
3. Soit $P(X) = a_n.X_{{}^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_0\in K[X]}$ un polynome et

   $$P(M) = \mathrm{ev}_M(P) = a_n.M^n + a_{n-1}M^{n-1} + \cdots + a_0\mathrm{Id}_d \in M_d(K)$$

   son evaluation en la matrice M. Montrer que

   $$P(M) = \begin{pmatrix} P(M_1) & \star \\ \mathbf{0} & P(M_2) \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que $B_d(K) \subset \mathrm{GL}_d(K)$ l'ensemble des matrices triangulaires superieures inversibles forme un sous groupe de $\mathrm{GL}_d(K)$.

3 Le retour de la matrice compagnon

Soit un polynome unitaire de degre d,

$$P(X) = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_0 \in K[X].$$

On note $\mathrm{b} = (b_0, \cdots, b_{d-1}) \in K^d$ le vecteur de ces coefficients.

La matrice compagnon de P est la matrice

$$M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b_{d-1} \end{pmatrix} \in M_d(K).$$

On a deja vu en exercice (avec des notations differentes) que la matrice compagnon verifie l'equation polynomiale

$$P(M_P) = M_P^d + b_{d-1}M_P^{d-1} + \cdots + b_0\mathrm{Id}_d = \mathbf{0}_{d\times d}. \tag{7.1}$$

Remarque 3.1. Par exemple pour $K = \mathbb{R}$ la matrice compagnon de $X^2 + 1$ est la matrice $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui sert a definir le corps des nombres complexes et qui verifie

$$I^2 + \mathrm{Id}_2 = \mathbf{0}_2.$$

Exercice 8. Soit
$$P_{car,M_P}(X) = \det(X.\mathrm{Id}_d - M_P) \in K[X]$$
le polynome caracteristique de la matrice compagnon.

1. Montrer que
$$P_{car,M_P}(X) = P(X) = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_0.$$
Pour cela calculer
$$\det(X.\mathrm{Id}_d - M_P) = \det \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ -1 & X & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & X & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & X + b_{d-1} \end{pmatrix}$$
En echelonnant la matrice $X.\mathrm{Id}_d - M_P$ par une suite d'operations de type (III) (dans le corps $K(X)$ des fractions rationelles a coefficients dans K) (Cf. Exo 3 Serie 12).
2. Redemontrer cette egalite en developant le determinant par rapport a la derniere colonne.
3. Retrouver le fait que M_P est inversible ssi $b_0 = 0$ et montrer qu'alors
$$M_P^{-1} = Q(M_P)$$
avec
$$Q(X) = (-b_0^{-1})(X^{d-1} + b_{d-1}X^{d-2} + \cdots + b_1)$$
(utiliser (7.1)).

Remarque 3.2. On a montre que le polynome caracteristique $P_{car,M_P}(X)$ de la matrice compagnon M_P est precisement $P(X)$. D'autre part par (7.1), on a alors
$$P_{car,M_P}(M_P) = P(M_P) = \mathbf{0}_{d\times d}.$$
En d'autre termes, on a demontre le Theoreme Cayley-Hamilton (*pour tout matrice M on a $P_{car,M}(M) = \mathbf{0}_{d\times d}$*. dans le cas particulier des matrices compagnon.

Dans ce cours, la preuve que nous proposons du Theoreme Cayley-Hamilton consiste precisement a nous ramener au cas des matrices compagnons (il y a d'autres preuves utilisant la formule de Cramer).