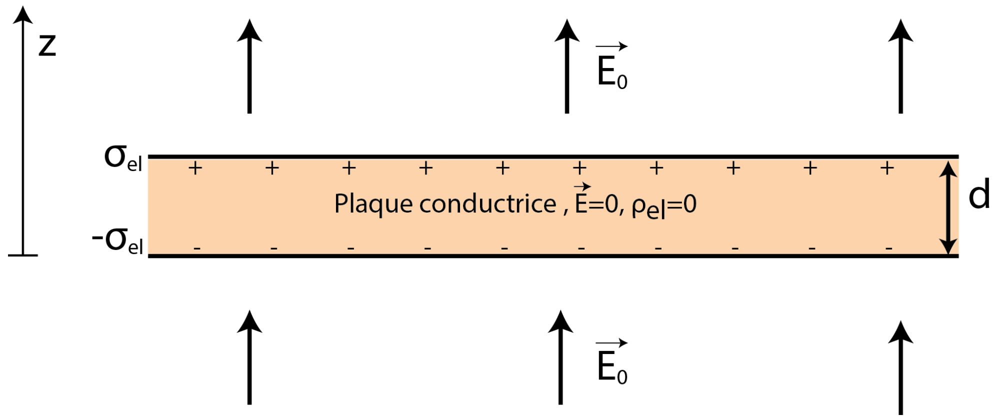
7 Mai 2021 *Nicola Offeddu*

Série 9

Exercice 1: Une autre manière de déterminer ϕ

Dans le cours, nous avons vu que si on place une plaque conductrice infinie et non-chargée dans un champ électrique uniforme $\vec{E_0}$ (avec la normale de la plaque parallèle à $\vec{E}$), une densité de charge de surface σ_{el} se forme par influence sur la plaque, où $\sigma_{el} = \epsilon_0 E_0$.



A partir de cela, nous avons déterminé, dans le cours, le potentiel électrostatique Φ partout dans l'espace avec la relation :

$\Phi(B) - \Phi(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$.

(a) Utiliser ici la relation différentielle $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ pour déterminer Φ à partir de $\vec{E}$ par intégration. On suppose que $\Phi = 0$ à $z = 0$.

(b) Faite un schéma de la situation et indiquez les lignes de champs $\vec{E}$ ainsi que les surfaces équipotentielles.

Exercice 2: Intégrales curvilignes

Etudiez les notes complémentaires sur les intégrales curvilignes mise à disposition sur le moodle.

Exercice 3: Effet de pointe

On considère un conducteur sphérique de rayon R et de charge Q.

(a) Utilisez la loi de Gauss pour trouver le champ $\vec{E}$ en tout point de l'espace.

(b) Calculez le potentiel électrostatique partout dans l'espace en utilisant la relation suivante, vue en cours :

$$\phi(B) - \phi(A) = -\int_{A\to B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

Choisissez la constante libre du potentiel telle que $\phi(\vec{r}) \to 0$ quand $\vec{r} \to \infty$.

(c) On suppose maintenant que ce conducteur sphérique est maintenu à un potentiel V fixé, par exemple à l'aide d'une pile électrique. Exprimez le champ électrique à la surface de la sphère en fonction de R. Qu'est ce vous constatez si $R \to 0$?

Exercice 4: Principe du générateur de Van de Graaff (examen 2017)

On considère un conducteur sphérique de rayon interne b et de rayon externe c. Le conducteur est isolé et porte une charge $Q_1 > 0$. Au centre de celui-ci, on place un conducteur sphérique de rayon a, avec $a < b$. Ce conducteur est isolé et porte une charge $Q_2 > 0$.

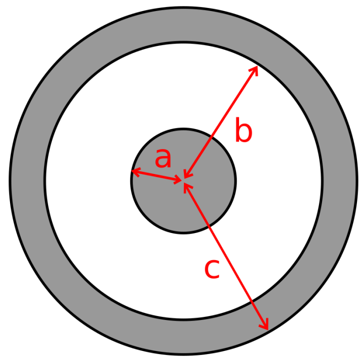


Figure - Les conducteurs l'un dans l'autre

(a) Dessinez qualitativement la situation en régime statique, en indiquant la direction et le sens du champ électrique $\vec{E}$ et la répartition des charges.

(b) Déterminez $\vec{E}$ dans tout l'espace.

(c) Déterminez la densité de charge de surface sur les deux conducteurs.

(d) Quelle est la différence de potentiel électrostatique entre les deux conducteurs ?

(e) On relie les deux conducteurs par un fil conducteur. Après avoir attendu un temps suffisamment long pour atteindre une situation statique, quelle sera la nouvelle répartition des charges ? Justifiez votre réponse.

Exercice 5: D'où vient l'énergie ?

On considère un condensateur plan de surface A. Les deux plaques sont séparées par une distance d. Le condensateur porte une charge q isolée. Quelle est l'énergie stockée dans ce condensateur ?

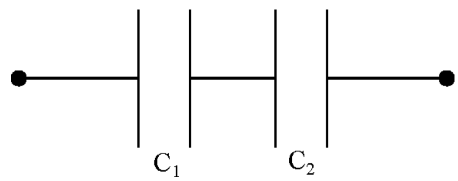
On écarte maintenant ses plaques d'une distance supplémentaire d. Ainsi la séparation entre les plaques est de $2d$. Quelle est l'énergie du condensateur dans cette nouvelle configuration ?

Expliquez cette variation d'énergie.

Exercice 6: Condensateurs en série et parallèles

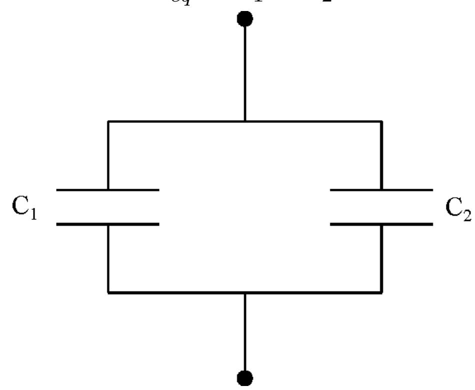
(a) Montrez que deux condensateurs en série de capacité C_1 et C_2 peuvent être remplacés par un seul condensateur de capacité C_{eq}

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$



(b) Montrez que si les deux condensateurs sont mis en parallèle, alors ils peuvent être remplacés par un condensateur de capacité C_{eq}.

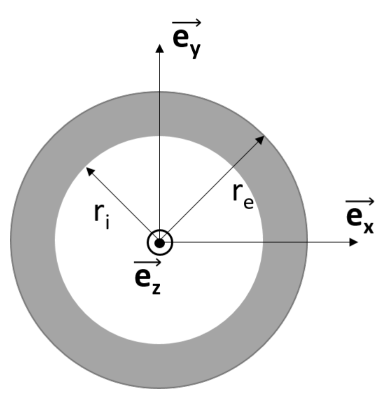
$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

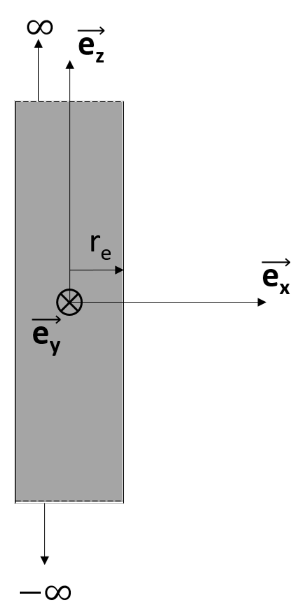


Généralisez les deux cas pour n condensateurs de capacité $C_1, ...C_n$.

Exercice 7: Analogie électrostatique et fluide (Examen 2020)

On considère le tuyau cylindrique, conducteur, de longueur infinie, de rayon interne r_i et rayon externe r_e indiqué dans la figure. Ce tuyau porte une charge par mètre donnée par μ.





(a) Indiquez sur un dessin la répartition des charges électriques ainsi que les lignes du champ électrique.

(b) Déterminez le champ électrique $\vec{E}$ dans les trois régions $r < r_i$, $r_i < r < r_e$ et $r > r_e$.

(c) En générale, les equations différentielles pour le champ $\vec{E}$ en électrostatique sont donnés par $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_{el}/\epsilon_0$ et $\nabla \times \vec{E} = 0$. En déduire leur forme pour la région $r > r_e$

On considère maintenant un tuyau de mêmes dimensions, mais non-chargé. Il est plongé dans un fluide parfait et incompressible ($\rho = \rho_0 =$const.) et on suppose qu'il est perméable (le fluide peut traverser les parois du tuyau). L'écoulement du fluide dans la region $r > r_e$ est décrite par le champ de vitesse suivant

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}(x, y) = \frac{ax}{r^2}\vec{e_x} + \frac{ay}{r^2}\vec{e_y} \tag{10}$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le rayon en coordonnées cylindriques et $a > 0$. (On ne s'intéresse pas au champ de vitesse dans la région $r < r_e$).

(d) Dessinez les lignes de courant pour $r > r_e$ puis comparez celles-ci aux lignes du champ électrique de la partie a). Qu'est-ce que vous constatez ?

(e) Démontrez que le champ de vitesse $\vec{u}(\vec{r}, t)$ du fluide, donné par l'équation (1), satisfait les mêmes équations différentielles que celles obtenues dans la partie c) pour le champ électrique $\vec{E}$ dans la région $r > r_e$.

(f) Utilisez la loi de Bernoulli pour trouver la pression du fluide le long de l'axe x pour $x > r_e$. Supposez que $p \to p_0$ pour $x \to \infty$.