Série 6 Exercice à rendre

David Wiedemann

5 mai 2021

1

On considère une suite $\{x_i\} \subset E$ [1] convergeant vers x.
Par un théorème du cours, on sait que $x \in \overline{E}$.
On considère maintenant les deux suites $(f(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ et $(g(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$.
Car f et g sont continues,

$$\lim_{i\to\infty} f(x_i) = f(x) \text{ et } \lim_{i\to+\infty} g(x_i) = g(x)$$

Ainsi, on a que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ satisfaisant que pour tout $i > N$, on a

$$|f(x_i) - f(x)| < \epsilon$$

Or $x_i \in E$ pour tout i et donc

$$|f(x_i) - f(x)| = |g(x_i) - f(x)| < \epsilon$$

Ainsi $g(x_i)$ converge vers $f(x)$, et donc, $g(x) = f(x)$.
Car ceci est vrai pour toute suite de E et tout élément $x \in \overline{E}$, on en déduit que

$$f(x) = g(x) \forall x \in \overline{E}$$

2

On considère à nouveau une suite $\{x_i\} \subset E$ convergeant vers $x \in \overline{E}$.
Par continuité, on sait à nouveau que

$$\lim_{i\to+\infty} f(x_i) = f(x) \text{ et } \lim_{i\to+\infty} g(x_i) = g(x)$$

Notons que, par hypothèse, on a

$$f(x_i) \leq g(x_i) \forall i \in \mathbb{N}$$

1. On n'exclut pas les suites constantes

Ainsi, par une propriété du cours, on a bien que

$$\lim_{i \to +\infty} f(x_i) \leq \lim_{i \to +\infty} g(x_i)$$

et donc

$$f(x) \leq g(x)$$

Etant donne que ceci est valable pour toute suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset E$ et tout $x \in \overline{E}$, on a montré que

$$f(x) \leq g(x) \forall x \in \overline{E}$$

3

Montrons d'abord que $E := \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) > 0\}$ est un ensemble ouvert.
Soit $y = (y_1, \ldots, y_n) \in E$.
Par l'absurde, supposons que E n'est pas ouvert, alors $\exists y \in E$ tel que $\forall \delta > 0 \exists x \in B(y, \delta)$ satisfaisant $h(x) \leq 0$.
Soit $\epsilon = \frac{1}{2} h(y)$, alors, par la continuité de h, il existe $\delta > 0$, satisfaisant

$$\|y - x\| < \delta \Rightarrow |h(y) - h(x)| < \epsilon$$

Or, par hypothèse, $h(x) \leq 0$ et donc

$$|h(y) - h(x)| = |h(y)| + |h(x)| > \epsilon$$

ce qui constitue une contradiction à l'hypothèse. On en déduit que E est un ensemble ouvert.

Montrons maintenant que $F := \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$.
Notons d'abord que, par symmetrie, l'ensemble $E' := \{x \in \mathbb{R}^n : -h(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) < 0\}$ est également ouvert.
Car l'union de deux ensembles ouverts est ouverte, $E \cup E'$ est ouvert.
Ainsi, le complémentaire $(E \cup E')^c$ est fermé.
Or, il est clair que $(E \cup E')^c = F$ et donc F est fermé.