GEOM DIFF

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Intro

Wed 22 Sep

1 Rappels de geometrie euclidienne

Definition 1 (Espace Euclidien)
Un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel $\mathbb{E}^n$ *sur* $\mathbb{R}$ *muni d'un produit scalaire* $\langle\cdot\rangle : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ *symmetrique, defini positif.*

Le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ est $\langle x, y\rangle = \sum_i x_i y_i (\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij})$.

> **Proposition 1 (Cauchy-Schwartz)**
> $\forall x, y \in \mathbb{E}^n, \langle x, y\rangle \leq \|x\| \, \|y\|$.

Remarque
La norme determine le produit scalaire via les formules de polarisation

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

1.1 Proprietes de la norme

- $\|x\| \geq 0 \forall x \in \mathbb{E}^n$
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
- $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Definition 2
- *Si* $x, y \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}$ *, on definit l'angle* $\theta \in [0, \pi]$ *par* $\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} \in [-1, 1]$ *(par Cauchy-Schwarz) .*
- *On a* $\langle x, y\rangle = \|x\| \, \|y\| \cos\theta$

La distance entre $x, y \in \mathbb{E}^n$ est $d(x, y) = \|y - x\|$ $(\mathbb{E}^n, d)$ est un espace metrique.
Les proprietes suivantes sont equivalentes
- $x \perp y$
- $\theta = \frac{\pi}{2}$
- $\|x - y\| = \|x + y\|$
- $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$

2 Isometries et Similitudes

Definition 3 (similitude)
Une application $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *est une similitude de rapport* $\lambda > 0$ *si* f *est bijective et*

$$d(f(x), f(y)) = \lambda d(x, y)$$

Si $\lambda = 1$, on dit que f est une isometrie.

Theorème 3
Si $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *est une similitude, alors il existe* $b \in \mathbb{E}^n$ *et* $g : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *lineaire tel que*

$$f(x) = g(x) + b$$

Remarque
$b = f(0)$ *et* f *lineaire* $\iff f(0) = 0$

Preuve
On utilisera le theoreme fondamental de la geometrie affine :
Soit V *un espace vectoriel de dimension finie sur* $\mathbb{R}$ *et* $f : V \to V$ *une application bijective.*
Alors f *est affine si et seulement si* f *preserve les droites.*
On ne donne pas la preuve mais une intuition : on pose $g(x) = f(x) - b(b = f(0))$ *, donc* $g(0) = 0$ *et* g *preserve les droites.*
Soit $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *une similitude de* $\mathbb{E}^n$*. On affirme que* f *preserve les droites*

$$x, y, z \in \mathbb{E}^n \Rightarrow f(x), f(y), f(z)$$

quitte a renommer les points x, y, z*, on a*

$$x, y, z \text{ alignes} \iff d(x,z) = d(x,y) + d(y,z) \iff d(f(x), f(z)) = d(f(x), f(y)) + d(f(y), f(z))$$

Donc f *affine implique* $f(x) = g(x) + b$ *(* $b = f(0), g$ *lineaire).*
Il reste a voir que g *est une* λ*-similitude* $\Rightarrow$ *immediat a verifier.* □

Corollaire 5
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est une similitude de rapport* $\lambda > 0$ *si et seulement si il existe* $b \in \mathbb{R}^n$ *et* $A \in M_n(\mathbb{R}), A^T \cdot A = I$ *tel que*

$$f(x) = \lambda A x + b$$

Preuve

$$\begin{aligned} \langle g(e_i), g(e_j) \rangle &= \frac{1}{4} \|g(e_i) + g(e_j)\|^2 - \|g(e_i) - g(e_j)\|^2 \\ &= \frac{1}{4}(\|g(e_i + e_j)\|^2 - \|g(e_i - e_j)\|^2) \\ &= \lambda^2 \langle e_i, e_j \rangle = \lambda^2 \delta_{ij} \end{aligned}$$

Soit A *la matrice de* g*, alors* $g(x) = Ax$ *, on a*

$$\lambda^2 \delta_{ij} = \langle Ae_i, Ae_j \rangle$$

$$= \left\langle \sum_i a_{ij} e_i, \sum_i a_{ij} e_i \right\rangle$$
$$= \sum_i \sum_j a_{ir} a_{js} \delta_{rs} = \sum_r a_{ir} a_{jr} \qquad \square$$

2.1 Proprietes de base des matrices orthogonales O_n

Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ les proprietes suivantes sont equivalentes

— $A \in O_n$

— A inversible avec $A^{-1} = A^T$

— Les collonnes/lignes de A forment une base orthonormee.

— $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$

— $\|Ax\| = \|x\|$

— $f(x) = Ax + b$ est une isometrie pour l'espace euclidien pour tout b

Remarque
Si $A \in O_n \Rightarrow \det A = \pm 1$ *et* $\det : O_n \to \{\pm 1\}$

Definition 4 (Groupe special orthogonal)
On definit

$$SO(n) = O_n \cap SL_n(\mathbb{R})$$

Definition 5
Une transformation affine $f : V \to V$ *,* V *un* $\mathbb{R}$ *-ev est directe (ou qu'elle preserve l'orientation) si son determinant est positif (ou le determinant de la partie lineaire de* f *.) Une isometrie directe s'appelle un deplacement de* $\mathbb{E}^n$ *si* $f(x) = Ax + b, A \in SO(n)$

Remarque

$$SE(n) = SO(n) \rtimes \mathbb{R}^n$$

2.2 Etude de O_2

Proposition 8
Une matrice $A \in O_2$ *s'ecrit*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

si $\det A = 1$*, ou*

$$S_\phi = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}$$

Preuve
$A \in O_2$ si et seulement siles colonnes de A forment une base orthonormee. Donc il existe θ tel que la 1ere colonne est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ *et la forme de la 2eme colonne en suit.* □

2.3 Etude de O_3

Theorème 9 (Theoreme d'Euler)
Tout deplacement (isometrie qui preserve l'orientation) qui fixe un point, fixe un axe et c'est une rotation autour de cet axe.

Preuve
On identifie l'espace euclidien a $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, qui fixe un point on suppose que $f(0) = 0$.
On a $f(x) = Ax$.
On affirme qu'il existe $U \in \mathbb{R}^3, U \neq 0$ tel que $Au = u$.
En effet 1 est valeur propre de A car $\det(A - \mathrm{Id}) = 0$ parce que

$$\det(A - \mathrm{Id}) = \det(A^T)\det(A - \mathrm{Id}) = \det(\mathrm{Id} - A^T) = \det(\mathrm{Id} - A) = (-1)^3 \det(A - \mathrm{Id})$$

□

Lecture 2: Courbes

Wed 29 Sep

3 Geometrie des courbes

Une courbe peut etre concue comme :
- Le lieu des points geometriques qui satisfont a une certaine contrainte/-condition
- La trajectoire d'un point qui se deplace dans le plan ou l'espace.
- Une courbe peut etre engendree par un mechanisme
- Une courbe peut correspondre a un phenome optique.

Le premier point de vue va conduire a une description implicite de la courbe par une equation dans $\mathbb{R}^2$ ou deux equations dans l'espace.

Definition 6
Une courbe algebrique dans le plan est un ensemble du type $\Gamma : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = 0\}$.
La courbe est algebrique si $f \in \mathbb{R}[x, y]$

Definition 7 (Courbe parametrique)
Une courbe parametrique dans $\mathbb{R}^n$ est une application continue :

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$$

avec $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, $u \in I$ est le parametre.

L'image de γ est la trace de γ

Definition 8

- *La courbe α est de classe $C^k (k \geq 0)$ si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^k par $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \ldots, \alpha_n(u))$ et $\alpha_j : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^k .*
- *Si α est C^1 et $u_0 \in I$, le vecteur vitesse est*

$$\dot{\alpha}(u_0) = \frac{d\alpha}{du}(u_0)$$

  L'acceleration sera $\ddot{\alpha}(u_0) = \frac{d^2\alpha}{du}$
- *La droite tangente a γ en u_0 est la droite par $\alpha(u_0)$ et de direction $\dot{\alpha}(u_0)$*

$$T_{\alpha,u_0} : \lambda \mapsto \alpha(u_0) + \lambda\dot{\alpha}(u_0)$$

- *La vitesse de α en u_0 est $V_\alpha(u_0)$ (en supposant α differentiable en u_0)*
- *Le point $\alpha(u_0)$ est regulier si $\dot{\alpha}(u_0)$ et singulier si $\dot{\alpha}(u_0)$*
- *Le point $\alpha(u_2)$ est biregulier si $\alpha \in C^2$ et $\dot{\alpha}(u_0), \ddot{\alpha}(u_0)$ sont lineairement independants .*
- *Si α est bireguliere en u_0 , le plan par $\alpha(u_0)$ en direction $\dot{\alpha}(u_0), \ddot{\alpha}(u_0)$ est le plan osculateur de α en u_0.*

3.1 Exemples de courbes parametrees

- La cubique

$$\alpha(u) = (au, bu^2, cu^3)$$

-

$$\beta(u) = (u^2, \ldots, u^{n+1})$$

- La droite en parametrage affine, par p et q est

$$\gamma(t) = p + t(q - p)$$

- Le cercle C de centre $p \in \mathbb{R}^n$ dans un plan (affine) $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ de rayon r se parametrise

$$C(t) = p + r\left(\cos(\omega t)b_1 + \sin(\omega t)b_2\right)$$

  ou $\{p, b_1, b_2\}$ est une repere affine orthonorme de Π.
- L'helice circulaire droite est

$$\gamma(u) = (a\cos(u), a\sin(u), bu)$$

Definition 9 (Longueur d'une courbe)
La longueur d'une courbe $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 est

$$l(\gamma) = \int_a^b V_\gamma(u)du$$

Proposition 10
La longueur verifie les proprietes suivantes :

— *Additivite : Si* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *est une courbe* C^1*, alors* $l(\gamma|_{[a,c]} l(\gamma|_{[c,b]}) l(\gamma_{[a,b]})$

— *La longueur est invariante par isometrie.*

— *Pour* f *une similitude de rapport* $\lambda > 0$*, alors*

$$l(f \circ \gamma) = \lambda l(\gamma)$$

—

$$l(\gamma_{[a,b]}) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$$

avec egalite si et seulement si γ*est le segment* $[\gamma(a), \gamma(b)]$.

Preuve

— *Suit de*

$$l(\gamma_{[a,b]}) = \int_a^b V_\gamma(u)du = \int_a^c V_\gamma(u)du + \int_c^b V_\gamma(u)du$$

— *On sait que* $f(x) = \lambda Ax + b$ *,* A *orthogonal, donc pour* $\tilde{\gamma}(u) = f(\gamma(u))$

$$\tilde{\gamma'} = \lambda A\gamma'(u)$$

$$l(\tilde{\gamma}) = \int_a^b V_{\tilde{\gamma}}(u)du = \lambda l(\gamma)$$

— *Soit* $p = \gamma(a), q = \gamma(b)$.
On note $w = \frac{q-p}{\|q-p\|}$ *et on definit*

$$g : [a, b] \to \mathbb{R} \quad g(u) = \langle \gamma(u) - p, w \rangle$$

Alors

$$\frac{dg}{du} = \langle \dot{\gamma}(u), w \rangle \leq \|\dot{\gamma}(u)\| \, \|w\| = V_\gamma(u)$$

Ainsi,

$$\int_a^b \frac{dg}{du} du = g(b) - g(a) = \langle q - p, w \rangle = q - p$$

□

3.2 Champs de vecteurs le long d'une courbe

Definition 10 (Champ vectoriel)
Un champ de vecteurs le long d'une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *est la donnee* $\forall u \in I$ *d'un vecteur* $W(u) = \sum_j w_j(u)e_j$ *.*
Ce champ est de classe C^k *si* $w_j : I \to \mathbb{R}$ *est de classe* C^k*.*

Definition 11 (Le vecteur tangent)
Si γ est reguliere on definit

$$T_\gamma(u) = \frac{\dot{\alpha}(u)}{V_\gamma(u)}$$

Si γ est bireguliere, alors le champ normal principal est donne par

$$N_\gamma(u) = \frac{\ddot{\alpha}(u) - \langle \ddot{\alpha}(u), t\rangle\, t}{\|\ddot{\alpha}(u) - \langle \ddot{\alpha}(u), t\rangle\, t\|}$$

Proposition 11 (Regle de Leibniz)

—

$$\frac{d}{du}\langle Z(u), W(u)\rangle = \left\langle \dot{Z}(u), W(u)\right\rangle + \left\langle Z(u), \dot{W}(u)\right\rangle$$

Corollaire 12

— *Si $\langle Z(u), W(u)\rangle = c$, alors*

$$\left\langle \dot{W}, Z\right\rangle = -\left\langle W, \dot{Z}\right\rangle$$

— *Si $\|w\| = c \Rightarrow \langle \dot{w}, w\rangle = 0$*

Lecture 3: Reparametrage

Wed 06 Oct

3.3 Reparametrage d'une courbe

On veut formaliser la notion que deux courbes α, β de $\mathbb{R}^n$ representent la "meme" courbe geometrique.
On veut $\alpha(u) = \beta(t)$ avec $u = h(t)(= u(t))$.
Plus precisement, si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ et $\beta : J \to \mathbb{R}^n$ ($u \in I$, $t \in J$), alors α est un reparametrage si il existe un diffeomorphisme $h : J \to I$, $t \mapsto u = u(t) = h(t)$, tel que $\alpha = \beta \circ h$.

Remarque
La condition que deux courbes sont un reparametrage l'une de l'autre est une relation d'equivalence et une classe d'equivalence est une courbe geometrique

Definition 12 (Quantite)
Une quantite ou une propriete d'une courbe est geometrique si elle est invariante par reparametrage.
Sinon la quantite est dite cinematique.

Exemple

1. *La trace d'une courbe est une propriete geometrique*

2. *La notion de regularite, biregularite sont geometriques*
3. *Le plan osculateur est une notion geometrique.*
4. *La longueur d'une courbe est geometrique.*

Preuve
On suppose $\alpha : I \to \mathbb{R}^n, \beta : J \to \mathbb{R}^n,\ \alpha(u) = \beta(t), t = h(u)$.
On a

$$l_\alpha = \int_I V_\alpha(u)du, l_\beta = \int_J V_\beta(t)dt$$

avec $V_\alpha = \left\| \frac{d\alpha}{du} \right\|, V_\beta = \left\| \frac{d\beta}{du}\frac{du}{dt} \right\| = |\frac{du}{dt}|V_\alpha(u)$.
Donc $V_\beta(t)dt = \pm V_\alpha(u)du$ *et donc* $l_\beta = l_\alpha$. □

En general, si $S_\beta(t)$ est une quantite geometrique, alors $\frac{d}{dt}S_\beta$ n'est en general pas geometriuqe, mais $\frac{1}{V_\beta(t)}\frac{d}{dt}S_\beta$

Preuve
On a $S_\beta(t) = S_\alpha(u)$ *et* $\frac{1}{V_\beta(t)}\frac{d}{dt} = \frac{1}{V_\alpha(u)}\frac{d}{du}$ □

Exemple
Le vecteur unitaire tangent $\overrightarrow{T}_\beta(t)$ *est une quantite geometrique.*

Preuve
On a $T_\beta(t) = \frac{\dot{\beta}(t)}{\|\dot{\beta}(t)\|} = \frac{1}{V_\beta(t)}\frac{d\beta}{dt}$.
Ainsi, $T_\alpha(u) = \frac{1}{V_\alpha(u)}\frac{d\alpha}{du}$ □

Definition 13 (Derivation naturelle)
On definit

$$\frac{1}{V_\beta(t)}\frac{d}{dt}$$

comme etant la derivation naturelle le long de la courbe.

Contreexemples

La vitesse, le vecteur vitesse et l'acceleration sont des quantites cinematiques.

Definition 14
On dit que $V_\alpha(u)du$ *est la differentielle naturelle le long de la courbe*

Exemple
1. *Masse d'un fil metalique inhomogene.*
   La quantite utile est la densite lineaire de masse $\rho : I \to \mathbb{R}_+$.
   La masse sera alors $M = \int_I \rho(u)V_\alpha(u)du$
2. *Centre de gravite*

$$G = \frac{1}{M}\int_I \alpha(u)\rho(u)V_\alpha(u)du$$

Definition 15 (Abscisse Curviligne)
Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *une courbe reguliere et* $u_0 \in I$.
L'abscisse curviligne ou parametre naturel de α *par rapport au point initial* $\alpha(u_0)$ *est la fonction*

$$S = S_\alpha : I \to \mathbb{R}$$

definie par

$$S = \int_{u_0}^{u} V_\alpha(\zeta) d\zeta$$

On dit que α est parametree naturellement si $S_\alpha(u) = u \iff V_\alpha(u) = 1$

Proposition 17
Toute courbe C^1 *reguliere peut se reparmetriser natruellement.*

Preuve
Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, C^1 *reguliere et* $u_0 \in I$.
On pose

$$s = s(u) = \int_{u_0}^{u} V_\alpha(u) du$$

Alors la fonction s *definit un diffeomorphisme*

$$s : I \to J$$

□

4 Courbure d'une courbe

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe parametree reguliere de classe C^2.
Le vecteur de courbure est le champ le long de γ

$$\overrightarrow{K}_\gamma(u) = \frac{1}{V_\gamma(u)} \dot{\overrightarrow{T}}_\gamma(u)$$

La courbure de γ est alors la fonction

$$k_\gamma = \left\| \overrightarrow{K}_\gamma(u) \right\|$$

Remarque
Si γ *est parametree naturellement, alors*

$$k_\gamma(u) = \left\| \frac{d^2\gamma}{du^2} \right\|$$

Remarque
Le vecteur de courbure et la courbure sont des quantites geometriques.

Proposition 20 (Formule de l'acceleration)
Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^2, alors son acceleration est

$$\ddot{\gamma} = \dot{V}_\gamma(t) + V_\gamma^2(t)\overrightarrow{K}_\gamma(t)$$

Preuve
On a

$$\dot{\gamma}(t) = V_\gamma(t)\overrightarrow{T}_\gamma(t)$$

Donc

$$\ddot{\gamma} = \dot{V}_\gamma(t)\overrightarrow{T}_\gamma(t) + V_\gamma(t)\dot{\overrightarrow{T}}(t) = V'K + V^2K$$

□

Remarque
On a toujours $\overrightarrow{k} \perp \overrightarrow{T}$

Definition 16
Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ bireguliere de classe C^3.
On definit le repere mobile de Frenet de γ est le repere $\{\gamma(t), T, N_\gamma(t), B_\gamma(t)\}$ ou

$$T_\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}}{V_\gamma(t)}, \quad N_\gamma(t) = \frac{\ddot{\gamma} - \langle\dot{\gamma}, T\rangle T}{\|\ddot{\gamma} - \langle\dot{\gamma}, T\rangle T\|} \quad B = T \times N$$

Definition 17 (Torsion)
La torsion de γ est

$$\tau_\gamma(t) = \frac{1}{V_\gamma(t)}\left\langle \dot{B}, N\right\rangle$$

Theorème 22 (Formules de Serret-Frenet)

$$\begin{cases} \frac{1}{V_\gamma}\dot{T}_\gamma = \kappa_\gamma N \\ \frac{1}{V_\gamma}\dot{N} = -\kappa_\gamma T_\gamma + \tau_\gamma B_\gamma \\ \frac{1}{V_\gamma}\dot{B} = -\tau_\gamma N_\gamma \end{cases}$$

Preuve

1. *Par definition, du vecteur de courbure.*
2. $$\frac{1}{V}N' = \frac{1}{V}\left(\langle N', T\rangle T + \langle N', B\rangle B\right)$$

   or

   $$\begin{aligned} \langle N', T\rangle &= -\langle N, T'\rangle \\ \langle N', B\rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\langle N', B \rangle = V_\gamma$$

De meme

$$B' = \langle B', T \rangle T + \langle B', N \rangle N + \langle B', B \rangle B \qquad \square$$

Lecture 4: ...

Wed 13 Oct

Theorème 23
La courbure de γ est la variation naturelle de la direction de γ

Preuve
Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe C^2 que l'on suppose parametree naturellement.
On fixe $p = \gamma(s_0)$ et on note

$$\phi(s) = \phi_{s_0}(s) = (T_\gamma(s), \hat{T}_\gamma(s_0))$$

On a par trigonometrie elementaire que

$$\|T(s) - T(s_0)\| = 2\sin(\frac{\phi(s)}{2})$$

Donc

$$\begin{aligned}\lim_{s\to s_0+} \frac{\phi(s)-\phi(s_0)}{s-s_0} &= \lim_{s\to s_0} \frac{\phi(s)}{2\sin(\phi(s)/2)} \frac{2\sin(\frac{\phi(s)}{2})}{s-s_0} \\ &= \lim_{s\to s_0} \frac{\phi(s)}{2\sin(\frac{\phi(s)}{2})} \frac{\|T(s)-T(s_0)\|}{s-s_0} \\ &= \lim_{s\to s_0+} \left\| \frac{T(s)-T(s_0)}{s-s_0} \right\| = \kappa(s_0)\end{aligned}$$

Donc on prouve que $\frac{d}{ds}|_{s_0+}\phi(s) = \kappa(s_0)$

4.1 Contact entre deux courbes

Definition 18 (Contact de courbes)
Soit $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^n$ deux courbes C^k.
Ces deux courbes ont un contact d'ordre k en $t_0 \in I$ si

$$\alpha(t_0) = \beta(t_0) \text{ et } \frac{d^n}{dt^n}\alpha(t) = \frac{d^n}{dt^n\beta(t)}$$

Theorème 24
α et β ont un contact d'ordre 2 en t_0 $\iff$

$$\alpha(t_0) = \beta(t_0), T_\alpha(t) = T_\beta(t), V_\alpha(t_0) = V_\beta(t_0)$$

et

$$\kappa_\alpha(t_0) = \kappa_\beta(t_0)$$

Definition 19 (Cercle osculateur)
Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *bireguliere et* $u_0 \in I$.
On appelle cercle osculateur de γ *en* u_0 *le cercle contenu dans le plan osculateur de* γ *et de centre et rayon*

$$p = \gamma(u_0) + \rho(u_0)\mathcal{N}_\gamma(u_0)$$

et rayon $\rho(u_0) = \frac{1}{\kappa_\gamma(u_0)}$

Proposition 25
Le cercle osculateur est l'unique cercle qui a un contact d'ordre 2.

5 Repere de Frenet

Definition 20 (Reguliere au sens de Frenet)
La courbe γ *est reguliere au sens de Frenet si* $\gamma \in C^2$ *et* γ *est bireguliere et* $u \to N_\gamma(u)$ *est* C^1.

Remarque
- *Si* γ *est bireguliere et* C^3, *alors* γ *est Frenet-reguliere.*
- *Si* γ *est frenet reguliere, alors* T_γ *et* B_γ *sont de classe* C^1 .

Si γ *est Frenet-reguliere, alors la torsion* $\tau_\gamma : I \to \mathbb{R}$ *est*

$$\tau_\gamma = \frac{1}{V_\gamma(u)} \left\langle \dot{N}, B_\gamma \right\rangle$$

Proposition 27
γ *est une courbe plane* $\iff$ $\tau_\gamma = 0$

Preuve
Si γ *est plane, alors le plan osculateur est constant* $\iff$ B_γ *est constant* $\Rightarrow$ $\dot{B}_\gamma = 0 \Rightarrow \tau_\gamma = 0$.
Supposons que $\tau_\gamma = 0$.
Soit $p = \gamma(u_0) \in \mathbb{R}^3$.
On definit

$$h(u) = \langle \gamma(u) - p, B_\gamma \rangle$$

Notons que $\dot{B}_\gamma = -\tau_\gamma N = 0$ *est constant.*
Donc

$$\frac{dh}{du} = \langle \dot{\gamma}(u), B \rangle = V_\gamma \langle T_\gamma, B \rangle = 0$$

Donc h est constant et donc $\langle \gamma(u), B\rangle = \langle p, B\rangle \, \forall u \in I$ qui est l'equation d'un plan. $\square$

Proposition 28
La torsion mesure la variation angulaire du plan osculateur, c'est a dire que si

$$\theta(s) = (B_\gamma(s), \hat{} B_\gamma(s_0))$$

Preuve
Alors

$$\frac{d}{ds}|_{s_0}\theta(s) = |\tau_\gamma(s_0)|$$ $\square$

On applique la meme preuve que Serret-Frenet.

Definition 21 (Courbe a pente constante)
Une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 est dite de pente constante si $\dot{\gamma}(u)$ fait un angle constant avec une direction fixe.

Proposition 29
Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ Frenet reguliere, alors γ est de pente constante $\iff$

$$\frac{\tau}{\kappa} = \text{ cste.}$$

Preuve
On suppose que γ est parametree naturellement et $\langle T_\gamma(s), A\rangle = a =$ constante .

$$0 = \frac{d}{ds}\langle T, A\rangle = \left\langle \dot{T}, A\right\rangle = \kappa \langle N, A\rangle$$

or $\kappa \neq 0$ donc $\langle N, A\rangle = 0$ ce qui implique que $b = \langle B, A\rangle$.
On a donc

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{ds}\langle N, A\rangle &= \langle \kappa T - \tau B, A\rangle \\ \iff \kappa \langle T, A\rangle &= \tau \langle B, A\rangle \\ \iff \frac{\tau}{\kappa} &= \text{ constante} \end{aligned}$$

Supposons donc que $\frac{\tau}{\kappa} =$ constante .
On pose $\lambda = \frac{\tau}{\kappa}$ et $A = \lambda T + B$, alors

$$\langle T, A\rangle = \lambda \langle T, T\rangle + \langle B, T\rangle = \lambda = \text{ constant}$$

Verifions que A est constant, car

$$\frac{dA}{ds} = \lambda\dot{T} + \dot{B} = \lambda\kappa N - \tau N = 0$$ $\square$

5.1 Theoreme fondamental des courbes de $\mathbb{R}^3$

Etant donne deux fonctions continues sur l'intervalle I $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}$ *avec* $\kappa(s) > 0$.
Alors il existe une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *Frenet reguliere telle que sa courbure et sa torsion sont donnees par* κ *et* τ *ie.* $\kappa(s) = \kappa_\gamma(s), \tau(s) = \tau_\gamma(s) \forall s \in I$.
Cette courbe est unique a un deplacement pres.

Preuve
On prouve d'abord l'unicite.
On suppose que $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{R}^3$ *sont deux courbes Frenet regulieres, de vitesse 1 tel que* $\delta_{\gamma_1} = \delta_{\gamma_2} = \delta$ *et* $\kappa_{\gamma_1} = \kappa_{\gamma_2} = \kappa$.

Quitte a appliquer une translation et une rotation a γ_2, *on peut supposer que* $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$.

$$T_1(0) = T_2(0), N_1(0) = N_2(0), B_1(0) = B_2(0)$$

On note $F_i(s) \in SO(3)$ *la matrice dont les colonnes sont* T_i, N_i, B_i.
Alors on calcule

$$\frac{dF_i}{ds} = F_i(s)\Omega(s)$$

avec

$$\Omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

Cette equation matricielle est equivalente aux equations de Serret-Frenet.
On calcule

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(F_i(s)F_2(s)^{-1}) &= \frac{d}{ds}(F_1F_2^T) \\ &= \dot{F}_1F_2^T + F_1\dot{F}_2^T \\ &= (F_1\Omega)F_2^T + F_1(F_2\Omega)^T \\ &= F_1\Omega F_2^T + F_1\Omega^T F_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or $F_1(0) \cdot F_2(0)^{-1} = \mathrm{Id}$ *et donc* $F_1(s) = F_2(s) \forall s \in I$.
Donc $T_1(s) = T_2(s) \forall s \in I$. *Donc* $\gamma_1' = \gamma_2'$ *et donc* $\gamma_1 = \gamma_2$.

Existence

Sont donnes $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}$, *on veut construire* γ.
Le theoreme de Cauchy-Lipschitz sur les edo donne l'existence d'une solution au probleme de Cauchy

$$\frac{dF}{ds} = F(s)\Omega(s), F(0) = \mathrm{Id}$$

On affirme que $F(s) \in SO(3) \forall s$.
En effet, on a $F(0)F(0)^T = \mathrm{Id}$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F(s)F(s)^T &= \dot{F}F^T + F\dot{F}^T \\ &= F\Omega F^T - F\Omega^T F^T = 0 \qquad \square\end{aligned}$$

Et donc $F(s) \in O(3)$ et $F(s) \in SO(3)$ car l'application det *est continue.*
On pose donc $\gamma(s) = \int_0^s T(u)du$

Lecture 5: ...

Wed 20 Oct

6 Courbes dans le plan oriente

Definition 22
On dit que deux bases d'un ev reel de dimension finie.
On dit que deux bases ont la meme orientation si la matrice de changement de base a determinant positif.
C'est une relation d'equivalence appellee une "classe d'orientation"

Un espace vectoriel est oriente si on en a choisi une classe d'orientation.
L'orientation canonique de $\mathbb{R}^n$ est celle associee a la base canonique.

Definition 23 (Angle oriente)
L'angle oriente entre deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ dans un plan oriente est defini par $\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}} = \pm \widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}$ avec le signe $+$ si $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right\}$ est une base positive (directe) et $-$ sinon.

Definition 24 (L'operateur J)
On note $J = R_{+\frac{\pi}{2}}$ la rotation dans un plan oriente d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

Dans une base orthonormee directe, on a $J = R_{+\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Definition 25 (Produit exterieur)
Le produit exterieur de deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ dans un plan oriente est

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \left\langle \overrightarrow{a}, J\overrightarrow{b} \right\rangle$$

Remarque

1. *$a \wedge b = \|a\| \|b\| \sin\theta$, alors*
2. *Si on plonge $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \left\langle \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, e_3 \right\rangle$$

Definition 26
Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe de classe C^1, alors on definit le vecteur normal oriente a γ

$$N^{or}(u)$$

par la condition que

$$T_\gamma \wedge N^{or} > 0 \iff \{T, N^{or}\} \text{ est orthonormee directe}$$

On definit la courbure orientee d'une courbe reguliere de classe C^2 par

$$k(u) = \kappa^{or}(u) = \frac{1}{V}\left\langle \dot{T}, N^{or} \right\rangle$$

Definition 27
On dit qu'un arc de courbe γ de classe C^2 dnas un plan oriente est convexe si $k > 0$, concave si $k < 0$.
On dit que γ est une "spirale" si la courbure est non nulle et monotone.
Un point d'inflexion si la courbure change de signe en ce point.
Un point est un "sommet" si la derivee de la courbure change de signe

Remarque
Le graphe de $f(x)$ a un point d'inflexion en $f"(x) = 0$ et $f"(x)$ change de signe

Definition 28 (Fonction angulaire)
La fonction angulaire d'une courbe plane (dans un plan oriente).
Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe C^2.
On appelle fonction angulaire de γ la fonction

$$\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$$

verifiant

1. *ϕ est continue*
2. *$\phi(u) = \widehat{\dot{}(u), \overrightarrow{a}} \mod 2\pi$*

Remarque
Si on prend $\overrightarrow{a} = e_1$, alors

$$T = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}$$

Proposition 33
La courbure orientee est la variation naturelle de la fonction angulaire.

Preuve
On a $T = (\cos\phi, \sin\phi)$, donc

$$N = (-\sin\phi, \cos\phi)$$

et de meme

$$k = \frac{1}{V}\left\langle \dot{T}, N \right\rangle$$ □

Theorème 34 (Theoreme fondamental des courbes planes)
Soit $k : [0,L] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors il existe une courbe $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^2$, de classe C^2 de courbure $k(s)$ et de vitesse 1.
Cette courbe est unique a isometrie directe pres.

Preuve
Existence

La fonction $k : [0,L] \to \mathbb{R}$ est donnee. On pose

$$\phi(s) = \int_0^s k(u)du$$

Puis on pose $T(s) = (\cos\phi(s), \sin(\phi(s)))$, on a donc $N(s) = (-\sin(\phi(s))), \cos\phi(s)$.
On pose encore

$$X(s) = \int_0^s \cos(\phi(s))ds, Y(s) = \int_0^s \sin(\phi(s))ds$$

On pose enfin $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$.
L'existence est donc prouvee.
L'unicite vient de $\frac{d\phi}{ds} = k$ □

Definition 29
On dit qu'une courbe $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est une courbe fermee de classe C^k si $\gamma(a) = \gamma(b)$ et les derivees coincident.

Une telle courbe s'appelle aussi courbe periodique, car on peut l'etendre a

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

Theorème 35 (Theoreme des 4 sommests)
Toute courbe plane C^2-fermee admet au moins 4 changement de signes de $\frac{dk}{du}$

Preuve
On montre le resultat dans le cas d'une courbe convexe.
Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe C^2-convexe. Alors on a $k(a) = k(b)$ et on note $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$.
On suppose $V_\gamma(s) = 1$, alors on a

$$\frac{dT}{ds} = kN$$

avec

$$T = (\dot{x}, \dot{y}), N = JT = (-\dot{y}, \dot{x})$$

Ainsi,

$$\ddot{x} = -k\dot{y}, \ddot{y} = k\dot{x}$$

On a alors

$$\int_a^b \dot{k}(s) = 0$$

et

$$\int_a^b k(s)\dot{y}(s)ds = -\int_a^b \ddot{y}(s)ds = 0$$

et

$$\int_a^b k(s)\dot{x}(s)ds = 0$$

Supposons que $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ est C^2-fermee avec deux changements de signe de $\dot{k}(s)$, par exemple $\dot{k}(s) > 0$ sur (a, c) et $\dot{k}(s) < 0$ sur (c, b). Notons $p = \gamma(a) = \gamma(b), q = \gamma(c)$, soit

$$h(x, y) = Ax + By + C = 0$$

l'equation de la droite par p et q.
Alors le signe de $\dot{k}(s)(Ax + By + C)$ est constant.
Mais

$$0 < \int_a^b f(s)ds = A\int_a^b \dot{k}x(s)ds + B\int_a^b \dot{k}y(s)ds + C\int_a^b \dot{k}ds = 0$$

□

Contradiction.

7 Surfaces

7.1 Le concept de variete

Definition 30 (Variete)
Une variete topologique de dimension $n \in \mathbb{N}$ est un espace topologique M tel que

1. *Chaque point $p \in M$ admet un voisinage homeomorphe a un ouvert de $\mathbb{R}^n$*
2. *L'espace topologique M est separe (de Hausdorff) et admet une base denombrable d'ouvert*

Definition 31 (Surface topologique)
Une surface topologique est une variete de dimension 2.

Lecture 6: varietes

Wed 27 Oct

7.2 Sous-Varietes de $\mathbb{R}^n$

Rappels :

Definition 32
Si $U \subset \mathbb{R}^n$, on note $C^k(U, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $f : U \to \mathbb{R}^n$ qui sont continues et tel que $\forall j = 1, 2, \ldots, n$ les derivees partielles

$$\frac{\partial^k}{\partial x^{i_1} \ldots, \partial x^{i_k}}$$

existent et sont continues.

Definition 33
Un diffeomorphisme de classe C^k entre deux ouverts $U, V \subset \mathbb{R}^n$ est une application $f : U \to V$ tel que

1. *f est bijective*
2. *f et f^{-1} sont de classe C^k*

Definition 34 (Systeme de coordonnees)
On appelle systeme de coordonnees (generalisees ou curviligne) sur un ouvert U la donnee de n fonctions

$$y_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

qui verifient que la fonction $f = (y_1, \ldots, y_n)$ est un diffeomorphisme de classe C^k.

Definition 35 (Sous-Variete)
Un sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variete differentiable de classe C^k si $\forall p \in M$, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ tel que $p \in U$ et un diffeomorphisme $f : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ tel que $f(M \cap U) = V \cap \mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{R}^m$ est plonge dans $\mathbb{R}^n$.
Autre point de vue :
M est une sous-variete de classe C^k si $\forall p \in M$ il existe un systeme de coordonnees curvilignes de classe C^k $y_1, \ldots, y_n$ definie sur un voisinage U de p tel que $q \in U \cap M \iff y_{m+1}(q) = \ldots = y_n(q) = 0$.
On regarde $y_j(x) = 0 (j = m + 1, \ldots, n)$ comme un systeme d'equations locales qui definissent la sous-variete.

Definition 36 (Dimension d'une sous variete)
m tel que defini ci-dessus est la dimension de M et $n - m$ est la codimension de $M \subset \mathbb{R}^n$.

7.2.1 Rappel de calcul differentiel

Definition 37
Une application $f : U \to \mathbb{R}^n$ definie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$ est differentiable (au sens de Frechet) en $p \in U$ s'il existe une application lineaire $l : R^m \to \mathbb{R}^n$ tel que

$$\lim \frac{f(p+h) - f(p) - l(h)}{|h|} = 0$$

7.3 Le theoreme du rang constant

Si $A \in M_{n\times m}(K)$ est de rang r alors il existe des matrices inversibles $P \in GL_n(K), Q \in GL_m(K)$ tel que

$$PAQ^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Theorème 36 (Theoreme du rang constant)
La meme chose se produit localement pour une application differentiable, ie. il existe une reparametrisation tel que tout fonction f s'ecrit comme

$$f(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_r, \ldots)$$

Definition 38
On note

$$\mathrm{Rang}(f,p) = \mathrm{Rang}_f(p) = \mathrm{Rang}(df_p)$$

Definition 39 (Rang maximal)

1. *f est de rang maximal en p si*

$$\mathrm{Rang}_f(p) = \min\{n, m\}$$

2. *f est une submersion si $\mathrm{Rang}_f(p) = n \forall p \in U \forall p \in U \iff df_p$ est surjective $\forall p$*
3. *f est une immersion $\iff \mathrm{Rang}_f(p) = m \iff df_p$ est injectif $\forall p \in U$*

Lemme 37
Si $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ alors la fonction $U \to \mathbb{N}, p \mapsto \mathrm{Rang}_f(p)$ est semi-continue inferieurement.

Preuve
Si $\mathrm{Rang}_f(p) > \alpha$, alirs il existe une sous matrice S_p de la matrice jacobienne de taille $r \times r$ tel que $\det(S_p) \neq 0$ par continuite des $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ on a $\det S_q \neq 0$ pour q assez proche de $p \Rightarrow \mathrm{Rang}_f(p) \geq r > \alpha$ □

Theorème 38 (Theoreme du rang constant)
Soit $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n), (U \subset \mathbb{R}^m)$ *avec* $k \geq 1$. *Supposons que* $\mathrm{Rang}_f(p)$ *est constant.*
Alors pour tout point $p \in U$ *il existe des voisinages* $V \subset U$ *de* p *et* W *de* $q = f(p)$ *est des diffeomorphismes* $C^k, \phi : U \to U', \psi : W \to W'$ *tel que*

$$\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$$

satisfait

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots)$$

Corollaire 39 (Theoreme d'inversion locale)
Si $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n) k \geq 1, U \subset \mathbb{R}^n$ *verifie que* $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est un isomorphisme, alors il existe des voisinages* U *de* p *et* V *de* $q = f(p)$ *tel que* $df_q^{-1} = (df_q)^{-1}$.

Lecture 7: Varietes (enfin)

Wed 03 Nov

7.4 Exemples de Sous-varietes

1. Une sous-variete de dimension 0 de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble discret (tous les points sont isoles)
2. Un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variete de dimension n.
3. L'ensemble vide est une sous-variete de dimension n $\forall n$

Theorème 40
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *une application* C^k *et de rang constant* $= r$.

— *L'ensemble des points*

$$M = \{x \in U | f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^m$$

est une sous-variete differentiable de classe C^k *de dimension* $m - r$.
— $\forall p \in U$, *il existe un voisinage* $V \subset U$ *de* p *tel que* $N = f(V)$ *est une sous-variete*

Definition 40 (Groupe de Lie)
Un groupe de Lie est une variete differentiable G *tel que la multiplication et l'inverse sont des operations bien definies.*

7.5 Sur les differentielles et gradients

Que vaut la differentielle dx_i ? On a que

$$dx_i|_p(h) = x_i(p + h) - x_i(p) = p_i + h_i - p_i = h_i$$

On a que $dx_i(e_j) = \delta_{ij}$, donc $\{dx_i, \ldots, dx_n\} \in (\mathbb{R}^n)^*$ est la base duale canonique.

Lecture 8: Surfaces

Wed 10 Nov

> **Proposition 41**
> *L'espace tangent en un point p d'une sous-variete differentiable $M \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de dimension $m = \dim M$.*

Preuve

On se donne un diffeomorphisme local adapte a M au voisinage de p.
C'est-a dire $\phi : U \to V$ diffeomorphisme entre deux ouverts $U, V \subset \mathbb{R}^n$ qui verifient $p \in U \cap M$ et $\phi(U \cap M) = V \cap E$ ou $E \subset \mathbb{R}^n$ est un sev de dimension m.
Soit v un vecteur tangent a M en p. Alors il existe $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que α represente le vecteur v.
Quite a restreindre $\epsilon > 0$, on peut supposer que $\alpha(t) \in M \forall t$.
Notons $\beta = \phi(\alpha)$ β est un chemin de classe C^1 tel que

$$\beta(t) \in \phi(U \cap M) = E \cap V$$

et $\beta(0) = \frac{d\beta}{dt}(0) = d\phi_{\alpha(0)}(\dot{\alpha}(0)) = d\phi_p(v)$.
Mais il est clair que $\dot{\beta}(0) \in E$.
On a donc prouve que $\forall v \in T_pM$ on a

$$d\phi_p(v) \in E$$

Donc $v \in d\phi_p^{-1}(E) = d(\phi^{-1})_q(E)$ et donc $T_pM \subset d\phi_p^{-1}(E)$.
On affirme que $(d\phi_p)^{-1}(E) \subset T_pM$, posons $w = d\phi_p(v) \in E$ et $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to E \cap V$ defini par

$$\beta(t) = q + tw$$

Alors $\alpha(t) = \phi^{-1}(\beta(t))$ represente v □

> **Corollaire 42**
> *Si $M = f^{-1}(0)$ ou $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est une submersion alors*
>
> $$T_pM = \ker(df_p)$$

Preuve

On affirme que $T_pM \subset \ker(df_p)$.
En effet, si $v \in T_pM$, alors $v = \dot{\alpha}$ avec $\alpha(0) = p$.
Donc

$$f(\alpha(t)) = c \Rightarrow df_p(v) = 0$$ □

Corollaire 43
Si $\psi : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est un plongement(ie. ψ est une immersion et $\psi : U \to M = \psi(U)$ est un homeomorphisme) alors $\forall p = \psi(u) \in M$ on a

$$T_pM = \mathrm{Im}(d\psi_u)$$

Notons que

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_j} = \frac{d}{dt}\psi(u + te_j) \in T_pM$$

8 Geometrie des Surfaces

Definition et exemples

On decrit une surface de deux manieres differentes.

Description implicite
Une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ peut etre definie $S : f(x) = c \iff S = \{x \in \mathbb{R}^3 | f(x) = c\}$ ou $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est differentiable.
On dit que $x \in U$ est un point critique si $df_x = 0$ dans ce cas $c = f(x)$ est une valeur critique.

Definition 41 (Point singulier)
Un point singulier de S est un point critique qui appartient a S.
x est un point singulier de $S \iff f(x) = c, \partial_i(x) = 0 \forall i \in [3]$.

Description parametrique
Une surface parametree est la donnee d'un plongement differentiable $\psi : \Omega \to S \subset \mathbb{R}^3$.
On a vu que $\forall p \in \psi(u) \in S$ le plan tangent est

$$T_pS = \mathrm{Im}\, d\psi_u$$

et ce plan est engendre par $\frac{\partial \psi}{\partial u_1}, \frac{\partial \psi}{\partial u_2}$.

Theorème 44
Toute surface implicite admet des parametrisations locales au voisinage de tout point regulier.

Definition 42
Si $\psi : \Omega \to S$ est une surface parametree alors on appelle repere mobile adapte a ψ la donnee des trois champs de vecteurs

$$(u, v) \in \Omega \to \{b_1(u, v), b_2(u, v), n(u, v)\}$$

ou

$$b_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u}, b_2 = \frac{\partial \psi}{\partial v}, n = \frac{b_1 \times b_2}{\|b_1 \times b_2\|}$$

Definition 43 (Tenseur metrique)
On appelle tenseur metrique (ou premiere forme fondamentale) de la surface parametree $\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ *est la matrice de Gram de* $\{b_1(u,v), b_2(u,v)\}$

$$G(u,v) = \begin{pmatrix} g_{11}(u,v) & g_{12}(u,v) \\ g_{21}(u,v) & g_{22}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|b\|^2 & \langle b_1, b_2 \rangle \\ \langle b_1, b_2 \rangle & \|b_2\|^2 \end{pmatrix}$$