EPFL Automne 2020
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 6

Tous les exercices seront corriges. La correction sera postee sur le moodle apres 2 semaines.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le dimanche de la semaine suivante celle ou la serie a ete postee. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme de fichier pdf (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien a cet effet dans la semaine de la serie.

Exercice 1. Les sous-ensembles suivants sont-ils des SEV ?

1. $V = \mathbb{Q}^2$, $U = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2,\ x^2 - y^2 = 0\}$, $U' = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2,\ x^2 - 2.y^2 = 0\}$.
2. $\{(x_1, \cdots, x_d) \in K^d,\ x_1 + \cdots + x_d = 0\} \subset K^d$.
3. $\{(x_1, \cdots, x_d) \in K^d,\ x_1 + \cdots + x_d = 1\} \subset K^d$.
4. Soient $V' \subset V$ et $W' \subset W$ des SEV de V et de W respectivement,
$$V' \times W' \subset V \times W.$$
5. Soit V un EV, X un ensemble et et
$$\mathcal{F}(X, V) = \{f : X \mapsto V\}$$
l'EV des fonctions de X a valeurs dans V. Soit $I \subset X$ un sous-ensemble,
$$\mathcal{F}(X, V)_I = \{f : X \mapsto V, \forall x \in I,\ f(x) = 0_V\} \subset \mathcal{F}(X, V)$$
le sous-ensemble des fonctions s'annulant en tout point de I.
6. Soient V, W des K-evs. L'ensemble des applications lineaires de V vers W dans l'espace vectoriel des fonctions de V a valeurs dans W :
$$\mathrm{End}_{K-ev}(V, W) \subset \mathcal{F}(V, W) = \{f : V \mapsto W\}.$$
7. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^+$ des fonctions paires (resp. $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^-$ des fonctions impaires)
$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)\ (resp.\ f(x) = -f(-x)).$$

Exercice 2. Soit V de dimension finie. Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire.

1. Montrer que si $\mathscr{G} \subset V$ est une partie generatrice de V alors $\varphi(\mathscr{G})$ est une partie generatrice de $\mathrm{Im}(\varphi)$. En deduire que
$$\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) \leqslant \dim(V).$$
2. Montrer que si φ est surjective alors $\dim W \leqslant \dim V$.
3. Montrer que si φ est injective et $\mathscr{L} \subset V$ est une partie libre alors $\varphi(\mathscr{L})$ est libre.
4. Montrer que si $\varphi : V \hookrightarrow W$ est injective alors
$$\dim(V) \leqslant \dim(W).$$
5. Montrer que si φ est bijective alors $\dim(V) = \dim(W)$.

Exercice 3. ($\star$) Dans l'EV K^3 on considere la famille
$$\mathscr{F} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}.$$

1. Montrer que si $\mathrm{car}(K) \neq 2$ ($2_K = 2.1_K \neq 0_K$) $\mathscr{F}$ est libre.
2. Montrer que si $\mathrm{car}(K) \neq 2$ la famille $\mathscr{F}$ est generatrice (et donc une base) en montrant que tout $v = (x,y,z) \in K^3$ s'ecrit explicitement comme combinaison lineaire des elements de cette famille.
3. Montrer sans faire de calculs explicites que si $\mathrm{car}(K) \neq 2$ ($2_K = 2.1_K \neq 0_K$) $\mathscr{F}$ est generatrice .
4. Montrer que su $\mathrm{car}(K) = 2$ la famille $\mathscr{F}$ n'est ni libre, ni generatrice.

Exercice 4. Soit K un corps, on notera 2 pour $2_K = 2.1_K$. Soit $\varphi : K^2 \mapsto K^2$ l'application definie par
$$\varphi : \begin{array}{ccc} K^2 & \mapsto & K^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, x+y) \end{array}.$$

1. Montrer que φ est lineaire.
2. Montrer que $\ker(\varphi) = \{0_2\}$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = K^2$ en trouvant pour chaque $(X,Y) \in K^2$ un (x,y) tel que $\varphi(x,y) = (X,Y)$.

Exercice 5. Soit $\varphi : \mathbb{Q}^2 \mapsto \mathbb{Q}^2$ l'application definie par
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^2 & \mapsto & \mathbb{Q}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, x+2y) \end{array}.$$

1. Montrer que φ est lineaire.

2. Montrer $\ker(\varphi) = \{0_2\}$, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{Q}^2$.

Exercice 6. Soit K un corps general, on notera 2 pour $2_K = 2.1_K$. Soit $\varphi : K^2 \mapsto K^2$ l'application definie par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} K^2 & \mapsto & K^2 \\ (x, y) & \mapsto & (2x + y, x + 2y) \end{array}.$$

1. Montrer que φ est lineaire.
2. Montrer que si $\mathrm{car}(K) \neq 3$ alors $\ker(\varphi) = \{0_2\}$, $\mathrm{Im}(\varphi) = K^2$.
3. Decrivez le noyau et l'image, si $\mathrm{car}(K) = 3$ (on observera que dans ce cas $2_K = -1_K$).

Exercice 7. Soient V et W des espaces vectoriels de dimension finie et

$$V \times W = \{(v, w),\ v \in V,\ w \in W\}$$

l'espace vectoriel produit.

1. Montrer que
$$\dim(V \times W) = \dim(V) + \dim(W).$$
Pour cela on pourra construire explicitement une base de $V \times W$ a partir de bases de V et de W.

Exercice 8. Soit V un K-ev et $X, Y \subset V$ des sous-espaces vectoriels dont V est la somme directe

$$V = X \oplus Y,\ X \cap Y = \{0_V\}.$$

1. Montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \mapsto & V \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$
est un isomorphisme.
2. On suppose que X et Y sont de dimension finie. Montrer que $\dim V = \dim X + \dim Y$ (pour cela construire une base de V a partir de bases de X et de Y).