

Série 1

David Wiedemann

10 mars 2022

1

On montre la double implication.

\Leftarrow

Pour montrer que p est une application quotient, il faut montrer que $F \subset B$ est ferme ssi $p^{-1}(F)$ est ferme .

Puisque p est continue (c'est la composition de q avec l'inclusion $A \hookrightarrow X$), si F est ferme alors $p^{-1}(F)$ est ferme.

De plus, si $p^{-1}(F)$ est ferme, alors c'est un ensemble ferme saturé et par hypothèse il existe un ferme saturé $E \subset X$ tel que $E \cap A = p^{-1}(F)$ et $q(E) \cap B = F$ et ainsi F est ferme.

On a alors bien que $q(E)$ est un ferme puisque E était un ferme saturé.

\Rightarrow

Supposons maintenant que p est un quotient, soit $F \subset A$ un ferme p -saturé.

Ainsi, puisque p est un quotient, $p(F)$ est un ferme de B .

On pose alors $E' = \text{cl}_Y p(F)$, ie. l'intersection sur tous les fermes de Y contenant et on définit $E = q^{-1}(E')$.

Remarquons d'abord que

- E est q -saturé, car c'est une preimage d'un ensemble de $Y = X/\sim$, et ainsi une réunion de classes d'équivalences
- E est ferme, en effet, c'est la preimage d'un ferme.

On prétend que $F = E \cap A$.

En effet, l'inclusion $F \subset E \cap A$ est immédiate :

Soit $f \in F$, alors $p(f) \in p(F) \subset \text{cl}_Y(p(F))$, et donc $f \in q^{-1}(\text{cl}_Y(p(F))) = E$ et de plus $f \in A$, on en déduit que $f \in E \cap A$.

Puisque $F \subset A$ est un ferme saturé, $p(F) \subset B$ est ferme et donc il existe un ferme $K \subset Y$ tel que $K \cap B = p(F)$ (par définition de la topologie quotient) et donc $q^{-1}(K) \cap A = F$.

De plus $E' \subset K$ et donc $q^{-1}(E') \cap A \subset q^{-1}(K) \cap A = F$.

Ce qui montre la double inclusion des ensembles.

2

Comme indique sur piazza, on supposera que l'application p est un quotient, sinon l'énoncé est faux avec le contre exemple $X = \mathbb{R}, A = [0, 1)$ et $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.

Soit $A \subset X$ comme dans l'énoncé.

Soit \sim la relation d'équivalence sur X , on notera \sim' la relation d'équivalence induite sur A .

On notera $\iota : A \hookrightarrow X$ l'inclusion et $q_A : A \rightarrow A/\sim'$, $q_X : X \rightarrow X/\sim$ les applications canoniques.

On montre le résultat en deux temps, on montrera que

— $q_X \circ \iota$ passe au quotient de q_A et induit une application $g : A/\sim' \rightarrow X/\sim$

— L'application q_A passe au quotient de $q_X \circ \iota$
et on conclura.

$q_X \circ \iota$ passe au quotient de q_A

En effet, si $a \sim' b \in A$, on a que $q_X \circ \iota(a) = q_X(a) = q_X(b)$ car \sim' est la restriction de \sim , ainsi on a une application induite

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{q_X \circ \iota} & X/\sim \\ q_A \downarrow & \nearrow \exists! f & \\ A/\sim' & & \end{array}$$

q_A passe au quotient de $q_X \circ \iota$

Remarquons que $q_X \circ \iota = p$ et est donc par hypothèse une application quotient.

On a bien que si $p(a) = p(b)$, alors $a \sim b \iff a \sim' b \iff q_A(a) = q_A(b)$ et on a une deuxième application induite

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{q_X \circ \iota} & A/\sim' \\ q_A \downarrow & \nearrow \exists! g & \\ X/\sim & & \end{array}$$

Finalement, on obtient les diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc}
 X/\sim & & A/\sim' \\
 \uparrow q_X \circ \iota & \nearrow \exists! f & \\
 A & \xrightarrow{q_A} & A/\sim' \\
 \downarrow q_X \circ \iota & \nwarrow \exists! g & \\
 X/\sim & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A/\sim' & & X/\sim \\
 \uparrow q_A & \nearrow \exists! g & \\
 A & \xrightarrow{q_X \circ \iota} & X/\sim \\
 \downarrow q_A & \nwarrow \exists! f & \\
 A/\sim' & &
 \end{array}$$

Ainsi, on a que $g \circ f \circ p = p$ et par une dernière application de la propriété universelle, on trouve que $g \circ f = \text{Id}_{A/\sim'}$, le même raisonnement montre que $f \circ g = \text{Id}_{X/\sim}$.

3

Soit \sim la relation d'équivalence sur \mathbb{R} décrite dans l'énoncé et soit \sim' la relation restreinte à I .

On a clairement que \sim' identifie les points 0 et 1 et donc \sim' est la même relation d'équivalence que décrite dans l'énoncé.

On vérifie les deux hypothèses de la partie 2 de l'exercice

- $q|_A$ est bien surjectif, soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x - \lfloor x \rfloor \in I$ et $x - \lfloor x \rfloor \sim x$
- Montrons que c'est une application quotient en appliquant le critère de la partie 1, soit F un fermé saturé de I , on prétend que la saturation de F dans \mathbb{R} reste un fermé.

En effet, puisque I est fermé dans \mathbb{R} , F est aussi un fermé dans \mathbb{R} . Soit $b \in q^{-1}(q(F))^c = (F + \mathbb{Z})^c$, et soit $b \sim a$ avec $a \in I$, soit $U \ni a$ un ouvert dans I séparant a de F , alors la q -saturation de U est donnée par $\mathbb{Z} + U$ et contient donc b , de plus elle est clairement disjointe de $q^{-1}(q(F))$.

Ainsi par la partie 1, on déduit que p est un quotient et ainsi on peut appliquer le critère établi en 2 et conclure que $\mathbb{R}/\sim = I/\sim' = I/\{0,1\} = S^1$.