Théorie des Groupes

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Introduction

Fri 10 Sep

1 Une Introduction à la Théorie des Catégories

Notion Fondamentale : la composition

- Composition d'applications
- l'exemple fondamental d'un groupe est donné par $\mathrm{Aut}(X)$, où la multiplication du groupe est donnée par la composition d'automorphismes.

1.1 Catégories

Definition 1 (Graphe dirigé)
Un graphe dirigé G consiste en un couple de classes G_0 et G_1, muni de deux applications

$$\mathrm{dom} : G_1 \to G_0 \text{ et } \mathrm{cod} : G_1 \to G_0$$

appelées domaine et codomaine. On pense à G_0 comme l'ensemble des sommests et G_1 l'ensemble des arêtes de G.

Par exemple, si $x, y \in G_0, f \in G_1$, alors

$$\mathrm{dom}(f) = x, \quad \mathrm{cod}(f) = y$$

$$X \xrightarrow{\quad f \quad} Y$$

On introduit la notation

$$G(x, y) = \{f \in G_1 | \, \mathrm{dom}(f) = x, \mathrm{cod}(f) = y\}$$

Exemple
Soit X un ensemble, et soit $R \subset X \times X$ une relation sur X. Alors $G_r = (X, R)$ est un graphe dirigé, où

$$\mathrm{dom} : R \to X : (x_1, x_2) \to x_1 \text{ et } \mathrm{cod} : R \to X : (x_1, x_2) \to x_2$$

Observer que $\forall x_1, x_2 \in X$

$$G_R(x_1, x_2) = \begin{cases} \{(x_1, x_2)\} : (x_1, x_2) \in R \\ \emptyset \text{ sinon} \end{cases}$$

Definition 2 (Catégories)
Une catégorie C est un graphe dirigé (C_0, C_1) muni d'applications de composition

$$\gamma_{a,b,c} : C(a, b) \times C(b, c) \to C(a, c) : (f, g) \to g \circ f$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

— *(Existence d'identités) Il existe une application* $\mathrm{Id} : C_0 \to C_1 : c \to \mathrm{Id}_c$ *tel que*
$$f \circ \mathrm{Id}_a = f = \mathrm{Id}_b \circ f \forall f \in C_1(a,b), \forall a,b \in C_0$$
— *(Associativité) Quelque soient* $a,b,c,d \in C_0$ *et* $f \in C(a,b), g \in C(b,c)$ *et* $h \in C(c,d)$
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \in C(a,d)$$

Notation

On note

$$C_0 = \mathrm{Ob}\, C - \text{ les objets de } C$$
$$C_1 = \mathrm{Mor}\, C - \text{ les morphismes}$$

— Si $\mathrm{Ob}\, C, \mathrm{Mor}\, C$ sont des ensembles, alors C est petite.
— Si $C(a,b)$ est un ensemble $\forall a,b \in \mathrm{Ob}\, C$, alors C est localement petite.

Lecture 2: Exemples de Categories

Mon 20 Sep

1.2 Exemples de Catégories

Exemple

— *Des catégories concrètes*
— *des catégories non concrètes*

1.2.1 Catégories concrètes

Les objets sont des ensembles munis de structures supplémentaire :

1. Ens dont les objets sont les ensembles et les moprphismes sont les applications ensemblistes.

$$\mathrm{Ob}\,\mathrm{Ens} = \text{ la classe de tous les ensembles}$$
$$\mathrm{Mor}\,\mathrm{Ens} = \text{ applications ensemblistes}$$

2. La catégorie Gr , dont les objerts sont les groupes et les morphismes sont les homomorphismes de groupe.

$$\mathrm{Ob}\,\mathrm{Gr} = \text{ la classe de tous les groupes}$$
$$\mathrm{Mor}\,\mathrm{Gr} = \text{ la classe de tous les homomorphismes de groupe}$$

La composition est encore donnée par celle des applications ensemblistes et les identites sont celles des groupes vus comme ensembles.

3. La catégorie Ab, dont les objets sont les groupes abeliens et les morphismes sont les homomorphismes de groupe.

$$\begin{aligned}\mathrm{Ob}\,\mathrm{A}b &= \{A \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{G}r | A \text{ abelien } \} \\ \mathrm{Mor}\,\mathrm{A}b &= \{\phi \in \mathrm{Mor}\,\mathrm{G}r | \,\mathrm{dom}\,\phi, \mathrm{cod}\,\phi \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{A}b\}\end{aligned}$$

4. La categorie $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$, dont les objets sont les espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$ et les morphismes sont les applications lineaires.

$$\begin{aligned}\mathrm{Ob}\,\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} &= \text{ la classe de tous les } \mathbb{K}\text{-espaces vectoriels} \\ \mathrm{Mor}\,\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} &= \text{ la classe de toutes les applications } \mathbb{K}\text{-lineaires}\end{aligned}$$

Dans tous ces cas, la composition est bien définie car elle preserve toujours la structure supplementaire (ie. le groupe ou l'espace vectoriel)

1.2.2 Categories pas forcement concretes

1. Soit X un ensemble, $R \subset X \times X$ une relation sur X. Alors le graphe dirigé G_R admet des applications de composition naturelle, qui verifient l'associativité.
Soit $x, y, z \in X$ tel que $(x, y), (y, z) \in R \exists ?(y, z) \circ (x, y)$? Existe-il une arete de x vers $z \iff (x, z) \in R$
Donc on veut que R soit transitive. L'existence de l'identité dans une catégorie implique que $(x, x) \in R \forall x \in X$ ce qui implique que R est reflexive.

2. Pour tout groupe G , il y a une catégorie BG, spécifié par $\mathrm{Ob}\, BG = \star$ et $BG(\star, \star) = G$, où la composition est donnée par la multiplication de G

$$\begin{aligned}\mathrm{Ob}\, BG &= \{\star\} \\ \mathrm{Mor}\, G &= \{g \in G\}\end{aligned}$$

On définit la composition

$$\gamma : BG(\star, \star) \times BG(\star, \star) \to BG(\star, \star) \times BG(\star, \star)$$

et on sait que γ (ie. la composition) est associative car la multiplication dans G est associative.

3. Soient C et D des catégories. Leur produit est la catégorie notée $C \times D$ spécifié par

$$\mathrm{Ob}(C \times D) = \mathrm{Ob}\, C \times \mathrm{Ob}\, D$$

et

$$(C \times D)((c, d), (c', d')) = C(c, c') \times D(d, d') \forall c, c' \in \mathrm{Ob}\, C, d, d' \in \mathrm{Ob}\, D$$

où la composition est donnée par celle de Cdans la premiere composante et par celle de D dans la deuxieme, et $\mathrm{Id}_{(c,d)} = (\mathrm{Id}_c, \mathrm{Id}_d)$.
$(f,g) : (c,d) \times (c',d') \in \mathrm{Mor}(C \times D)$.
Etant donné $(f,g) : (c,d) \to (c',d'), (f',g') : (c',d') \to (c'',d'')$, on definit

$$(f',g') \circ (f,g) = (f' \circ f, g' \circ g)$$

L'associativité suit de la composition associative dans C et D

Definition 3 (Isomorphisme)
Soit C une catégorie. Un morphisme $f : a \to b$ dans C est un isomorphisme s'il admet un inverse, i.e., il existe un morphisme $g : b \to a$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_a$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_b$. On dit alors que les objets a et b sont isomorphes.
Un isomorphisme dont le domaine est egal au codomaine est un automorphisme.
Une catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphiemes est un groupoide.

Lecture 3: Comment comparer 2 categories

Tue 21 Sep

1.3 Foncteurs

On souhaite une application entre categories qui preserve la structure de la composition.

Definition 4 (Foncteur)
Soient C et D des categories. Un foncteur F de C vers D , note $F : C \to D$ consiste en un couple d'applications

$$F_{Ob} : \mathrm{Ob}\, C \to \mathrm{Ob}\, D$$

$$F_{Mor} : \mathrm{Mor}\, C \to \mathrm{Mor}\, D$$

tel que pour tout morphisme $f : a \to b$ dans C

$$F_{\mathrm{Mor}}(f) : F_{\mathrm{Ob}}(A) \to F_{\mathrm{Ob}}(b)$$
$$F_{\mathrm{Mor}}(\mathrm{Id}_c) = \mathrm{Id}_{F_{\mathrm{Ob}(c)}}$$

pour tout $c \in \mathrm{Ob}\, C$, et

$$F_{\mathrm{Mor}}(g \circ f) = F_{\mathrm{Mor}(g)} \circ F_{\mathrm{Mor}}(f)$$

quel que soient $f \in C(a,b), g \in C(b,c),$ et $a, b, c \in \mathrm{Ob}\, C$

Lemme 3
Soient $F : C \to D$ et $F' : D \to E$ des foncteurs. Alors le couple d'applications

$$F'_{\mathrm{Ob}} \circ F_{\mathrm{Ob}} : \mathrm{Ob}\, C \to \mathrm{Ob}\, E$$

et

$$F'_{\text{Mor}} \circ F_{\text{Mor}} : \text{Mor}\, C \to \text{Mor}\, E$$

definit un foncteur de C vers E , que nous notons $F' \circ F : C \to E$.

— (Les foncteurs identites) Pour toute categorie C , il y a un foncteur $\text{Id}_C : C \to C$ dont les composantes sont les identites.

— (Les foncteurs oubli) On travaille souvent (et parfois de maniere implicite) avec des foncteurs en general notes U , qui oublient de la structure sur les objets et morphismes. Par exemple, $U : \text{G}r \to \text{E}ns$.
Si G est un groupe, $U(G)$ oublie sa mulitplication et ses inverses.
Si $\phi : G \to H$ est un homomorphisme de groupe, alors $U(\phi) : U(G) \to U(H)$ est simplement l'application sous-jacente.
U preserve la composition et l'identite, cat elles sont definies exactement de la meme maniere dans les deux categories.

— $U : \text{Vect}_{\mathbb{K}} \to \text{A}b$
Pour $V \in \text{Ob}\,\text{Vect}_{\mathbb{K}} \Rightarrow U(V)$ oublie la multiplication par scalaire et ne retient que son groupe abelien sous-jacent. Puisque les compositions et les identites sont les memes dans les deux categories, U est bien un foncteur.

— Puisque tout groupe abelien est un groupe, on a un foncteur $\text{Ab} \to \text{Gr}$, etant donne un tel foncteur d'inclusion (qu'on appelle generalement ι) on dit que Ab est une sous-categorie de Gr

Lecture 4: Transformations naturelles

Sun 26 Sep

1.4 Transformations naturelles

Comment comparer deux foncteurs ayant le meme domaine et codomaine ?

Definition 5 (Transformations naturelles)
Soient $F, F' : C \to D$ des foncteurs. Une transformation naturelle τ de F vers F' est une application

$$\tau : \text{Ob}\, C \to \text{Mor}\, D$$

tel que pour tout $f : b \to c$ et et $\tau_c \in D(F(c), F'(c))$, on a

$$F'(f) \circ \tau_b = \tau_c \circ F(f)$$

Si τ_c est un isomorphisme pour tout c , alors τ est un isomorphisme naturel.

Soient $F, F', F" : C \to D$ des foncteurs et soient $\sigma : F \to F'$ et $\tau : F' \to F"$ des transformations naturelles. Alors l'application

$$\text{Ob}\, C \to \text{Mor}\, D : c \to \tau_c \circ \sigma_c$$

On définit alors $\tau \circ \sigma : F \to F"$ par

$$\tau \circ \sigma : \text{Ob}\, C \to \text{Mor}\, D$$

On veut montrer que $\forall f : b \to c$ dans C, on a

$$\tau_c \circ \sigma_c \circ F(f) = \sigma_b \circ \tau_b \circ F"(f)$$

ce qui suit immédiatement. On construit facilement une transformation naturelle identité. Pour un foncteur $F : C \to D$, il y a une identité donné par

$$\mathrm{Ob}\, C \to \mathrm{Mor}\, D : c \to \mathrm{Id}_{F(c)}$$

Il est facile de voir que pour tout autre transformation naturelle $\tau : F \to G$. Notons que ainsi, pour toute catégories C et D , C petit, il y a une catégorie $\mathrm{Fun}(C, D)$, dont les objets sont les foncteurs de C vers D et les morphismes sont les transformations naturelles.

Exemple
Soit $U : \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathrm{Ens}$ *le foncteur qui oublie tout la structure algebrique et soit* $L : \mathrm{Ens} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ *le foncteur qui envoie un ensemble sur l'ensemble de ses combinaisons linéaires.*
Il y a une transformation naturelle $\eta : \mathrm{Id}_{\mathrm{Ens}} \to U \circ L$.
Pour definir $\eta : \mathrm{Id}_{\mathrm{Ens}} \to U \circ L$ *, il nous faut une application* $\eta : \mathrm{Ob}\,\mathrm{Ens} \to \mathrm{Mor}\,\mathrm{Ens}$ *tel que*

$$\forall X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Ens}, \eta_X : X \to U(L(X))$$

donc $\forall x \in X, \eta_X(x) : X \to \mathbb{K}$.
On décide de poser

$$\eta_X(x)(x') = \begin{cases} 1 : x' = x \\ 0 : x' \neq x \end{cases}$$

Est-ce que ce diagramme commute ?

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & U(L(X)) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle U(L(f))} \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & U(L(Y)) \end{array}$$

On a

$$\eta_Y \circ f(x) = \eta_Y(f(x)) : Y \to \mathbb{K}$$
$$y \to \begin{cases} 1 : y = f(x) \\ 0 : y \neq f(x) \end{cases}$$

On a aussi

$$U(L(f)) \circ \eta_X(x) : Y \to \mathbb{K}$$

$$y \mapsto \sum_{x' \in f^{-1}(y)} \eta_X(x)(x') = \begin{cases} 1 : y = f(x) \\ 0 : \ sinon \end{cases}$$

On a donc bien une transformation naturelle. De plus, on a une transformation naturelle $\epsilon : L \circ U \to \mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}$ *Pour* $V \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$

$$L \circ U(V) = \{\omega : U(V) \to \mathbb{K} || \{v | \omega(v) \neq 0\} | < \infty\}$$

Enfait, ω *est un élément du dual de* V*.*
Définir $\epsilon_V : L \circ U(V) \to V$ *par*

$$\epsilon_v(\omega) = \sum_{v \in V} \omega(v) \cdot v$$

Cette somme est finie et donc bien définie.
On vérifie facilement que ϵ_V *est linéaire.*
Soit $g : V \to V'$ *une application linéaire, est-ce que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} L \circ U(V) \arrow[r, "\epsilon_V"] \arrow[d, "L \circ U(g)"] & V \arrow[d, "g"] \\ L \circ U(V') \arrow[r, "\epsilon_{V'}"] & V' \end{tikzcd}$$

On a

$$g \circ \epsilon_V(\omega) = \sum_{v \in V} \omega(v) \cdot g(v)$$

Dans l'autre sens

$$\begin{aligned} \epsilon_{V'} \circ (L \circ U(g))(\omega) &= \sum_{v' \in V'} L \circ U(g)(\omega)(v') \cdot v' \\ &= \sum_{v' \in V'} \left(\sum_{v \in g^{-1}(v')} \omega(v) \right) \cdot v' \end{aligned}$$

.

Lecture 5: Adjonctions

Sat 02 Oct

1.5 Equivalence de categories

Definition 6 (Equivalence de categories)
Un foncteur $F : C \to D$ *est une Equivalence de categories s'il existe un foncteur* $F' : C \to D$ *tel que*

$$\sigma : \mathrm{Id}_C \overset{\simeq}{\Rightarrow} F' \circ F \ et \ \tau : \mathrm{Id}_D \overset{\simeq}{\Rightarrow} F \circ F'$$

Remarque
Si F *est un isomorphisme de categories, c'est aussi une equivalence de categories.*

Exemple
Soit Un *la categorie avec un seul objet* $*$ *et un seul morphisme* Id. *Soit* C *la categorie* $\mathrm{Ob}\, C = \{a, b\}$ *et deux morphismes non-identite* $f : a \to b$ *et* $g : b \to a$ *qui sont des isomorphismes. Alors les categories* Un *et* C *sont equivalentes.*
On definit $F : \mathrm{Un} \to C$ *par* $F(*) = a, F(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}_a$.
On definit $F' : C \to \mathrm{Un}$ *par* $F'(a) = F'(b) = *$.
On a que $F' \circ F = \mathrm{Id}_{\mathrm{Un}}$ *donc la transformation naturelle* $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathrm{Id}_{\mathrm{Un}}}$ *est triviale.*
Dans l'autre sens, $F \circ F' \neq \mathrm{Id}_C$ *, cependant* $\exists \tau : \mathrm{Id}_C \to F \circ F'$ *defini par*

$$\tau : \mathrm{Ob}\, C \to \mathrm{Mor}\, C$$

donne par

$$\tau(a) = \mathrm{Id}_a, \tau(b) = g$$

Verifions la naturalite :
Commencons par $f : a \to b$*, on a*

$$\mathrm{Id}_a \circ \mathrm{Id}_a = g \circ f$$

ce qui est vrai par definition de C.
De meme

$$\mathrm{Id}_a \circ g = \mathrm{Id}_a \circ g$$

1.6 Adjonctions

On veut generaliser la notion d'equivalence de categories, dont il y a beaucoup d'exemples interessants (surtout en theorie des groupes)

Definition 7 (Adjonctions)
Un couple de foncteurs $L : C \to D$ *et* $R : D \to C$ *forme une adjonction s'il existe des transformations naturelles*

$$\eta : \mathrm{Id}_C \to R \circ L \text{ et } \epsilon : L \circ R \to \mathrm{Id}_D$$

tel que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd} L(c) \arrow[r, "L(\eta_c)"] \arrow[dr, "Id_{L(c)}"'] & L \circ R \circ L(c) \arrow[d, "\epsilon_{L(c)}"] \\ & L(c) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} R(d) \arrow[r, "\eta_{R(d)}"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{R(d)}"'] & R \circ L \circ R(d) \arrow[d, "R(\epsilon_d"] \\ & R(d) \end{tikzcd}$$

pour tout $c \in \mathrm{Ob}\, C, d \in \mathrm{Ob}\, D$.

Analysons ces identites triangulaires.
La premiere identite veut dire $\forall c \in \operatorname{Ob} C, \eta_c : c \to RL(c)$, on peut lui appliquer L et on trouve

$$L(c) \xmapsto{L(\eta_c)} LRL(c)$$

On peut maintenant considerer $\epsilon_{L(c)} : LRL(c) \to L(c)$ pour revenir a $L(c)$

$$L(c) \xmapsto{L(\eta_c)} LRL(c) \xmapsto{\epsilon_{L(c)}} L(c)$$

et on veut que cette suite de composition soit egale a $\mathrm{Id}_{L(c)}$.
Pour la deuxieme identite, soit $d \in \operatorname{Ob} D$, on a alors

$$R(d) \xmapsto{\eta_{R(d)}} RLR(d) \xmapsto{R(\epsilon_d)} R(d)$$

Si $L : C \leftrightarrow D : R$ est une adjonction avec transformations naturelles associees $\eta : \mathrm{Id}_C \to RL$ et $\epsilon : LR \to \mathrm{Id}_D$, alors on dit que L est un adjoint a gauche de R et R est un adjoint a droite de L.
On notera alors $L \dashv R$.

1.7 Caracterisation des Adjonctions

1.7.1 Preparation

Soit $L : C \leftrightarrow D : R$ un couple de foncteurs entre deux categories petites. On peut y associer deux autres foncteurs interessants

— $D(L(-), -) : C^{op} \times D \to \mathrm{Ens}$
— $C(-, R(-)) : C^{op} \times D \to \mathrm{Ens}$

qui sont definis comme suit

— Sur les objets,

$$\forall (c, d) \in \operatorname{Ob} C^{op} \times \operatorname{Ob} d \quad D(L(-), -)(c, d) = D(L(c), d)$$

— Sur les morphismes Soient $(f^{op}, g) \in \mathrm{Mor}(C^{op}(c, c') \times D(d, d'))$.
Donc $\exists f \in C(c', c)$, on veut definir une application ensembliste

$$D(L(f^{op}), g) : D(L(c), d) \to D(L(c'), d')$$

On peut resumer ceci dans le diagramme

$$L(c') \xmapsto{L(f)} L(c) \xmapsto{h} d \xmapsto{g} d'$$

Ainsi, $D(L(f^{op}, g)) \coloneqq g \circ h \circ L(f) : L(c') \to d'$.
Est-ce que ce choix definit bien un foncteur ?

— Identites : Pour $h : L(f) \to d \in C(L(f), d)$ Si $(\mathrm{Id}_c^{op}, \mathrm{Id}_d) \in \mathrm{Mor}(C^{op} \times D)$ alors $D(L(\mathrm{Id}_c^{op}), \mathrm{Id}_d)(h) = \mathrm{Id}_d \circ h \circ \mathrm{Id}_{L_c} = h$.
Donc
$$D(L(\mathrm{Id}_c^{op}, \mathrm{Id}_d)) = \mathrm{Id}_{D(L(c),d)}$$

— Considerons
$$(c, d) \overset{(f^{op},g)}{\longrightarrow} (c', d') \overset{(f'^{op},g')}{\longrightarrow} (c", d")$$
et etudions
$$D(L(c), d) \overset{D(L(f^{op}),g)}{\longrightarrow} D(L(c'), d') \overset{D(L(f'^{op}),g')}{\longrightarrow} D(L(c"), d")$$
On a donc, pour $h \in D(L(c), d)$
$$D(L(f^{op}), g) \circ D(L(f'^{op}, g'))(h) = g' \circ g \circ h \circ L(f) \circ L(f') \circ g = D(L(f'^{op} \circ f^{op}), g' \circ g)(h)$$

De maniere semblable, $\exists$ foncteur
$$C(-, R(-)) : C^{op} \times D \to \mathrm{Ens}$$
defini sur les objets par
$$\forall (c, d) \in \mathrm{Ob}(C^{op} \times D) \quad C(-, R(-))(c, d) = C(c, R(d))$$
et $\forall (f^{op}, g) : (c, d) \to (c', d')$, alors
$$\begin{aligned} C(f^{op}, R(g)) : C(c, R(d)) &\to C(c', R(d')) \\ (h : c \to R(d)) &\to (R(g) \circ h \circ f) \end{aligned}$$

Lecture 6: Caracterisation des Adjonctions

Sun 10 Oct

1.8 Exemple concret d'adjonction

On considere $L : \mathrm{Ens} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ et $U : \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathrm{Ens}$.
Ces adjonctions verifient les identites triangulaires et on a une adjonction $L \dashv U$.
Verifions les identites triangulaires.
Soit $V \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ Considerer
$$U(V) \overset{\eta_{U(V)}}{\longrightarrow} UL(UV)$$
et
$$U(LU(V)) \overset{U(\epsilon(V))}{\longrightarrow} U(V)$$
On veut voir que $U(\epsilon_V) \circ \eta_{U(V)} = \mathrm{Id}_{U(V)}$.
Par definition de η ,
$$\begin{aligned} \eta_{U(V)} &\to UL(U(V)) \\ v &\mapsto (\eta_{U(V)}(v) : U(V) \to \mathbb{K}) \end{aligned}$$

ou

$$\eta_{U(V)}(v) : V \to \mathbb{K} : v' \mapsto \delta_{v,v'}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} U(\epsilon_V) : U(LU(V)) &\to U(V) \\ \omega &\mapsto \sum_{v \in V} \omega(v) \cdot v \end{aligned}$$

Donc, $\forall v \in U(V)$,

$$\begin{aligned} U(\epsilon_V) \circ \eta_{U(V)}(v) &= U(\epsilon_V)(\eta_{U(V)}(v)) \\ &= \sum_{v' \in V} \eta_{U(V)}(v)(v') \cdot v' \\ &= v \end{aligned}$$

Donc $U(\epsilon_V) \circ \eta_{U(V)} = \mathrm{Id}_{U(V)}$.

Montrons l'autre egalite triangulaire.
Soit $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Ens}$. Considerons

$$\begin{aligned} L(\eta_X) : L(X) &\to L(UL(X)) \\ \omega &\mapsto L(\eta_X) : UL(X) \to \mathbb{K} \\ L(\eta_X) : \psi &\mapsto \sum_{x \in \eta_X^{-1}(\psi)} \end{aligned}$$

Pour $\psi \in UL(X)$ (donc $\psi : X \to \mathbb{K}$),

$$\eta_X^{-1}(\psi) = \begin{cases} \{x'\} : \text{ si } \psi = \eta_X(x') \\ \emptyset \text{ sinon} \end{cases}$$

donc $L(\eta_X)(\omega) : UL(X) \to \mathbb{K}$

$$\psi \mapsto \sum_{x \in \eta_X^{-1}(\psi)} = \begin{cases} \omega(x') : \psi = \eta_X(x') \\ 0 : \psi \neq \eta_X(x') \forall x' \in X \end{cases}$$

De plus

$$\begin{aligned} \epsilon_{L(X)} : LU(L(X)) &\to L(X) \\ UL(X) \xrightarrow{(} \xi)\mathbb{K} &\mapsto \sum_{\psi \in UL(X)} \xi(\psi) \cdot \psi \end{aligned}$$

Faisons donc le calcul.
Soit $\omega \in L(X)$

$$\epsilon_{L(X)} \circ L(\eta_X)(\omega) = \epsilon_{L(X)}(L(\eta_X)(\omega))$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\psi \in UL(X)} L(\eta_X)(\omega)(\psi) \cdot \psi \\
&= \sum_{x \in X} \omega(x) \cdot \eta_X(x)
\end{aligned}
$$

Donc $\forall x' \in X$

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{L(X)} \circ L(\eta_X)(\omega)(x') &= \left(\sum_{x \in X} \omega(x) \eta_X(x) \right)(x') \\
&= \sum_{x \in X} \omega(x)(\eta_X(x)(x')) = \omega(x')
\end{aligned}
$$

1.9 Caracterisation des adjonctions

Proposition 7
Un couple de foncteurs $L : C \to D$ et $R : D \to C$ entre categories localement petites est une adjonction si et seulement si il existe un isomorphisme naturel entre les foncteurs

$$D(L(-), -) : C^{op} \times D \to \mathrm{Ens} : (c, d) \to D(L(c), d)$$

et

$$C(-, R(-)) : C^{op} \times D \to \mathrm{Ens} : (c, d) \to C(c, R(d))$$

Nous demontrerons qu'il existe des transformations naturelles $\alpha : D(L(-), -) \to C(-, R(-))$ et $\beta : C(-, R(-)) \to D(L(-), -)$ qui sont mutuellement inverses. On a donc besoin de deux applications

$$\alpha : \mathrm{Ob}(C^{op} \times D) \to \mathrm{Mor}\, \mathrm{Ens}$$

et

$$\beta : \mathrm{Ob}(C^{op} \times D) \to \mathrm{Mor}\, \mathrm{Ens}$$

tel que $\forall (c, d) \in \mathrm{Ob}(C^{op} \times D)$

$$\alpha_{(c,d)} : D(L(c), d) \to C(c, R(d))$$

et

$$\beta_{(c,d)} : C(c, R(d)) \to D(L(c), d)$$

De plus, on veut que

$$\forall (f^{op}, g) \in C^{op} \times D((c, d), (c', d'))$$

$$D(L(c), d) \xrightarrow{\alpha_{c,d}} C(c, R(d)) \xrightarrow{C(f^{op}, R(g))} C(c', R(d'))$$

$$=D(L(c),d) \overset{D(L(f^{op}),g)}{\longrightarrow} D(L(c'),d') \overset{\alpha_{(c',d')}}{\longrightarrow} C(c',R(d'))$$

et de meme pour l'application naturelle inverse

$$\begin{aligned} C(c,R(d)) &\overset{\beta c,d}{\longrightarrow} D(L(c),d) \overset{D(L(f^{op}),g)}{\longrightarrow} D(L(c'),d') \\ =C(c,R(d)) &\overset{C(f^{op},R(g))}{\longrightarrow} C(c',R(d')) \overset{\beta_{(c',d')}}{\longrightarrow} D(L(c'),d') \end{aligned}$$

Finalement, on soujaite egalement que $\alpha_{(c,d)}$ et $\beta_{(c,d)}$ sont des applications ensemblistes mutuellement inverses.
On va construire α et β a partir des transformations naturelles $\eta : \mathrm{Id}_C \to RL$ et $\epsilon : LR \to \mathrm{Id}_D$.

Preuve
Supposer que $C \dashv D$ *soit une adjonction avec transformation naturelle associees* η, ϵ.

Premier pas : Construction de α et β

Soit $(c,d) \in \mathrm{Ob}(C^{op} \times D)$

$$\alpha_{(c,d)} : D(L(c),d) \to C(c,R(d))$$

Soit $h : L(c) \to d \in D(L(c),d)$*, notons qu'on a*

$$c \overset{\eta_C}{\longrightarrow} RL(c) \overset{R(h)}{\longrightarrow} R(d)$$

Definissons donc $\alpha_{(c,d)}(h) = R(h) \circ \eta_C$

Soit $(c,d) \in \mathrm{Ob}(C^{op} \times D)$*, on a alors* $\forall k : c \to R(d) \in C(c,R(d))$

$$L(c) \overset{L(k)}{\longrightarrow} LR(d) \overset{\epsilon_d}{\longrightarrow}$$

Posons donc

$$\beta_{c,d}(k) = \epsilon_d \circ L(k)$$

Naturalite

Soit $(f^{op},g) : (c,d) \to (c',d') \in C^{op} \times D$.
Soit $h \in D(L(c),d)$*, on a alors*

$$\begin{aligned} C(f^{op},R(g)) \circ \alpha_{(c,d)}(h) &= C(f^{op},R(g))(R(h) \circ \eta_c) \\ &= R(g) \circ (R(h) \circ \eta_c) \circ f \\ &= R(g \circ h) \circ \eta_c \circ f \end{aligned}$$

Dans l'autre sens, on a

$$\begin{aligned}\alpha_{(c',d')} \circ D(Lf^{op}, g)(h) &= \alpha_{c',d'}(g \circ h \circ L(f)) \\ &= R(g \circ h \circ L(f)) \circ \eta_c \\ &= R(g \circ h) \circ RL(f) \circ \eta_{c'}\end{aligned}$$

Il faut donc montrer que $\eta_c \circ f = RL(f) \circ \eta_{c'}$
Or $f : c' \to c$ *donne*

$$RL(f) \circ \eta_{c'} = \eta_c \circ f$$

commute car η *est une transformation naturelle. De meme, le fait que* ϵ *soit une transformation naturelle implique que* β *en est aussi une.*

α et β sont mutuellement inverses

Considerer pour $(c, d) \in \mathrm{Ob}(C^{op} \times D)$.
On a

$$\begin{aligned}\beta_{(c,d)} \cdot \alpha_{(c,d)}(h) &= \beta_{(c,d)}(R(h) \circ \eta_c) \\ &= \epsilon_d \circ L(R(h) \circ \eta_c) \\ &= \epsilon_d \circ LR(h) \circ L(\eta_c)\end{aligned}$$

On est en train de calculer

$$\begin{aligned} & L(c) \xrightarrow{L(\eta_c)} LRL(c) \xrightarrow{LR(h)} LR(d) \xrightarrow{\epsilon_d} R \\ = {} & L(c) \xrightarrow{L(\eta_c)} LRL(c) \xrightarrow{\epsilon_{L(c)}} LR(d) \xrightarrow{h} R(d) \\ = {} & L(c) \xrightarrow{\mathrm{Id}_{L(c)}} \xrightarrow{h} R(d) = h\end{aligned}$$

Donc $h = \epsilon_d \circ LR(h) \circ L(\eta_c)$.
De meme l'autre identite triangulaire implique que $\alpha_{(c,d)} \circ \beta_{(c,d)} = \mathrm{Id}_{C(c,L(d))}$.
Ainsi α *et* β *sont bien des isomorphismes naturels, mutuellements inverses.*

Pour completer la caracterisation, il faudrait aussi montrer l'implication inverse.
Pour definir η, ϵ *a partir de* α, β

— η *: Considere* $\forall c \in \mathrm{Ob}\, C$,

$$\begin{aligned}\alpha_{(c,L(c))} : D(L(c), L(c)) &\to C(c, RL(c)) \\ \mathrm{Id}_{L(c)} &\mapsto \alpha_{(c,L(c))}(\mathrm{Id}_{L(c)})\end{aligned}$$

Et on definit alors $\eta_c : c \to RL(c)$ *par* $\eta_c = \alpha_{(c,L(c))}(\mathrm{Id}_{L(c)})$

— ϵ *:Considerer* $\forall d \in \mathrm{Ob}\, D$,

$$\begin{aligned}\beta_{R(d),d} : C(R(d), R(d)) &\to D(LR(d), d) \\ \mathrm{Id}_{R(d)} &\mapsto \beta(R(d), d)(\mathrm{Id}_{R(d)})\end{aligned}$$

□

Lecture 7: Produits et Coproduits

Sat 16 Oct

1.10 Produits et Coproduits

Dans Ens, on a les constructions suivantes :
$\forall f : X \to Y, g : X \to Z \in \operatorname{Mor} \operatorname{Ens}$

$$\exists! h : X \to Y \times Z$$

tel que $\mathrm{pr}_Y \circ h = f, \mathrm{pr}_z \circ h = g$.
De meme $\forall f : X \to Y, g : X \to Z \in \operatorname{Mor} \operatorname{Ens}$

$$\exists! h : X \amalg Y \to Z$$

tel que

$$h \circ i_x = f, h \circ i_y = g$$

Formellement, dans une categorie quelconque

Definition 8
Soit C une categorie, et soient $b, c \in \operatorname{Ob} C$. Un produit de b et c consiste en un objet a de C et de deux morphismes $p : a \to b$ et $q : a \to c$ tel que pour tout couple de morphisme $f : d \to b$ et $g : d \to c$ il existe un unique morphisme $h : d \to a$ tel que $p \circ h = f$ et $q \circ h = g$.

Remarque
En general, le produit de deux objets n'existe pas, mais s'il existe, il est unique a isomorphisme pres.

Lemme 9
Soit C une categorie, et soient $b, c \in \operatorname{Ob} C$. Si $b \xleftarrow{p} a \xrightarrow{q} c$ et $b \xleftarrow{p}' a \xrightarrow{q}' c$ sont des produits de b et c, alors il existe un isomorphisme $h : a \to a'$ qui respecte les morphismes de projection.

Preuve
Puisque $b \xleftarrow{p} a \xrightarrow{q} c$ est un produit de b et c, la propriete universelle du produit nous dit qu'il existe un unique morphisme $h : a' \to a$.
Puisque $b \xleftarrow{p}' a' \xrightarrow{q}' c$ est un produit de b et c, $\exists! k : a \to a'$ tel que

$$p = p' \circ k \text{ et } q = q' \circ k$$

Montrons que h et k sont des isomorphismes mutuellement inverses.
On a que

$$p \circ h \circ k = p' \circ k = p$$

de meme, on a

$$q \circ h \circ k = q$$

L'unicite de la propriete universelle implique que $h \circ k = \mathrm{Id}_A$ et $k \circ h = \mathrm{Id}_{a'}$ $\square$

On introduit la notation pour “le” produit de $b, c \in \operatorname{Ob} C$ (s'il existe) est note

$$b \xleftarrow{p}_1 b \times c \xrightarrow{p}_2 c$$

ou parfois simplement $b \times c$.

Definition 9 (Coproduit)
Soit C une categorie. Un coproduit de b et c est un objet a et deux morphismes $i : b \to a$ et $j : c \to a$ tel que pour tout couple de morphismes $f : b \to d$ et $g : c \to d$ il existe un unqiue morphisme $h : a \to d$ tel que $h \circ i = f$ et $h \circ j = g$ ce que nous resumons par le diagramme suivant.

Lemme 10
Soit c une categorie, et soient $b, c \in \operatorname{Ob} C$ Si a et a' sont des coproduits de b et c, alors il existe un isomorphismes $h : a \to a'$ tel que $h \circ j = j', h \circ i = i'$

Remarque
Soit C une categorie, et soient $b, c \in \operatorname{Ob} C$. Si a est un produit de b et c dans C, alors a est un coproduit dans C^{op}.