

Analyse II

David Wiedemann

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Intégrales généralisées | 6 |
| 1.1 | Intégrales absolument convergentes | 8 |
| 1.2 | Intégrale généralisée sur un intervalle non borné | 10 |
| 2 | L'espace R^n | 10 |
| 2.1 | Espace vectoriel normé | 10 |
| 2.2 | Normes sur R^n | 12 |
| 2.3 | Suites sur R^n | 12 |
| 2.4 | Topologie de \mathbb{R}^n | 13 |
| 2.5 | Classification des points d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ | 13 |
| 2.6 | Caractérisation des ensembles ouverts | 14 |
| 2.7 | Caractérisation des ensembles fermés | 14 |
| 2.8 | Ensembles compacts | 15 |
| 3 | Fonctions de plusieurs variables | 15 |
| 3.1 | Notion de limite | 15 |
| 3.2 | Caractérisation de limite par suites | 16 |
| 3.3 | Propriétés de l'opération de limite | 16 |
| 3.4 | Fonctions à valeurs dans R^m | 17 |
| 4 | Fonctions continues | 17 |
| 4.0.1 | Définitions Équivalentes | 17 |
| 4.1 | Prolongement par continuité | 17 |
| 5 | Dérivées de fonctions à plusieurs variables | 19 |
| 5.1 | Dérivées Directionnelles | 19 |
| 5.2 | Fonctions Différentiables | 20 |
| 5.3 | Dérivées d'ordre supérieur | 22 |
| 5.4 | Dérivées d'ordre supérieur | 25 |
| 5.5 | Développement limite et formule de Taylor | 26 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 6 | Integrales qui dependent de parametres | 27 |
| 6.1 | Integrales sur un intervalle ferme borne | 27 |
| 6.2 | Integrales avec des bornes variables | 29 |
| 6.3 | Integrales generalisees | 30 |
| 7 | Fonctions Bijectives | 31 |
| 7.1 | Fonctions Implicites et Hypersurfaces de \mathbb{R}^n | 36 |
| 7.1.1 | Cas $n = 2$ | 38 |
| 7.1.2 | Cas $n > 1$ | 40 |
| 7.2 | Cas Vectoriel | 43 |
| 8 | Extremas de fonctions | 47 |
| 8.1 | Extremas libres | 47 |
| 8.1.1 | Cas $n > 1$ | 49 |
| 8.2 | Extremas lies | 51 |
| 8.3 | Extremas sous contraintes multiples | 53 |
| 8.4 | Condition suffisante pour extremas locaux lies | 55 |
| 9 | Integrales multiples au sens de Riemann | 55 |
| 9.1 | Caracterisation equivalente de fonctions integrables | 60 |
| 9.2 | Formule d'integrales iterees | 62 |
| 9.3 | Exponentielle d'une matrice | 62 |

List of Theorems

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Definition (Intégrales généralisées (sur un intervalle borné non fermé)) | 6 |
| 2 | Definition (Integrale sur un intervalle borne ouvert) | 6 |
| 1 | Lemme | 6 |
| 3 | Lemme (Critere de Comparaison) | 7 |
| 4 | Theorème (Critere de Comparaison) | 7 |
| 3 | Definition (Integrale absolument convergente) | 8 |
| 6 | Theorème (absolument convergente implique convergente) | 8 |
| 8 | Theorème (Critere de comparaison (II)) | 9 |
| 4 | Definition (Integrale sur un intervalle non borne) | 10 |
| 5 | Definition (Norme d'un vecteur) | 10 |
| 6 | Definition (Espace vectoriel norme) | 10 |
| 7 | Definition | 10 |
| 8 | Definition (Distance) | 11 |
| 9 | Definition (Produit Scalaire) | 11 |
| 9 | Theorème (Inegalite de Cauchy-Schwarz) | 11 |
| 10 | Theorème | 11 |

| | | |
|----|---|----|
| 10 | Definition (Suites convergentes) | 12 |
| 12 | Lemme | 12 |
| 11 | Definition (Suites de Cauchy) | 12 |
| 13 | Theorème | 12 |
| 14 | Theorème (Bolzano-Weierstrass) | 13 |
| 12 | Definition (Boule) | 13 |
| 13 | Definition | 14 |
| 14 | Definition | 14 |
| 15 | Definition (Ensemble compact) | 15 |
| 15 | Theorème (Caracterisation par sous-suites convergentes) | 15 |
| 16 | Theorème (Caracterisation par recouvrements finis) | 15 |
| 16 | Definition (Chemin dans E) | 15 |
| 17 | Definition (Ensembles connexes par arcs) | 15 |
| 18 | Definition (Limite) | 15 |
| 17 | Theorème (Des deux gendarmes) | 16 |
| 18 | Theorème (Limites/Suites) | 16 |
| 19 | Theorème (Critere de Cauchy) | 16 |
| 19 | Definition (Limite) | 17 |
| 20 | Definition (Continuite en un point) | 17 |
| 21 | Definition (Continuite sur E) | 17 |
| 22 | Definition (continuite uniforme sur E) | 17 |
| 23 | Definition (Prolongement par continuite) | 17 |
| 20 | Theorème (Prolongement par continuite sur l'adherence) | 18 |
| 21 | Theorème | 18 |
| 24 | Definition | 18 |
| 22 | Theorème | 19 |
| 23 | Theorème | 19 |
| 24 | Theorème | 19 |
| 25 | Definition (Derivees directionnelle) | 19 |
| 26 | Definition (Gradient) | 20 |
| 27 | Definition (Matrice Jacobienne) | 20 |
| 28 | Definition (Differentiabilite) | 20 |
| 25 | Theorème | 20 |
| 26 | Theorème (Theoreme des accroissements finis dans \mathbb{R}^n) | 22 |
| 27 | Theorème (Taf dans le cas vectoriel) | 22 |
| 29 | Definition (Derivees partielles secondes (cas scalaire)) | 22 |
| 30 | Definition (Matrice hessienne) | 23 |
| 31 | Definition (Espace $C^2(E)$) | 23 |
| 32 | Definition (Derivees directionnelles secondes) | 23 |
| 28 | Lemme | 23 |
| 29 | Theorème (Theoreme de Schwarz) | 24 |

| | | |
|----|---|----|
| 30 | Corollaire | 26 |
| 32 | Theorème | 28 |
| 34 | Theorème | 28 |
| 35 | Theorème | 30 |
| 33 | Définition | 30 |
| 36 | Theorème | 30 |
| 34 | Définition (Homeomorphisme) | 31 |
| 35 | Définition (Diffeomorphisme) | 32 |
| 36 | Définition (Diffeomorphisme local) | 32 |
| 38 | Theorème | 32 |
| 39 | Theorème (Condition nécessaire d'inversion locale) | 32 |
| 40 | Theorème | 33 |
| 37 | Définition (Norme spectrale) | 33 |
| 38 | Définition (Norme de frobenius) | 33 |
| 41 | Lemme | 33 |
| 42 | Theorème (Condition suffisante d'inversion locale) | 33 |
| 39 | Définition (Hypersurfaces de classe C^k) | 37 |
| 40 | Définition (Fonction Implicite) | 37 |
| 43 | Theorème (Fonction implicite en dimension 2) | 40 |
| 44 | Theorème | 41 |
| 48 | Theorème (Fonctions Implicites - Cas vectoriel) | 45 |
| 41 | Définition (Extremum d'une fonction) | 47 |
| 42 | Définition | 49 |
| 49 | Theorème (Condition suffisant du second ordre) | 50 |
| 43 | Définition (Matrices definies postives) | 50 |
| 50 | Lemme | 50 |
| 51 | Lemme | 50 |
| 52 | Theorème (Condition suffisante d'extremas) | 50 |
| 55 | Theorème (Condition nécessaire pour extremas lies) | 52 |
| 57 | Theorème (Conditions nécessaires d'optimalite) | 53 |
| 44 | Définition (Partition) | 56 |
| 45 | Définition (Partition tensorielle) | 56 |
| 46 | Définition (Raffinement d'une partition) | 57 |
| 61 | Lemme | 58 |
| 62 | Lemme | 58 |
| 47 | Définition (Somme de Darboux) | 58 |
| 63 | Lemme | 58 |
| 48 | Définition (Fonction integrable au sens de Riemann) | 59 |
| 65 | Lemme | 60 |
| 66 | Theorème | 61 |
| 67 | Theorème (de Fubini) | 62 |

| | | |
|----|--|----|
| 68 | Corollaire | 62 |
| 49 | Definition (Exponentielle d'une matrice) | 62 |
| 50 | Definition (Norme frobenius pour les matrices complexes) | 62 |
| 69 | Lemme | 63 |
| 70 | Lemme | 63 |
| 71 | Theorème | 63 |
| 51 | Definition (Matrice nilpotente) | 64 |
| 72 | Theorème | 64 |
| 73 | Lemme | 64 |

1 Intégrales généralisées

Peut-on définir une intégrale sur un intervalle ouvert plutôt que sur un intervalle fermé ? ie.

$$f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R} \text{ c.p.m.}$$

Definition 1 (Intégrales généralisées (sur un intervalle borné non fermé))

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux ($a < b$).

En particulier, f est c.p.m. sur tout intervalle $[a, x]$, $a < x < b$ Soit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ existe (ou converge) si $\lim_{x \rightarrow b} F(x)$ existe, dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b} F(x) - F(a)$$

Si $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ n'existe pas, alors on dit que

$$\int_a^b f(t)dt$$

diverge. Definition analogue pour le cas $]a, b]$.

On souhaite définir $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)dx = 0$.

Dans certains cas cette intégrale vaut 0. Mais si on calcule

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{\pi}{2} + \epsilon}^{\frac{\pi}{2} - \epsilon} \tan(t)dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (-\ln(\cos(\frac{\pi}{2} - \epsilon)) + \ln(\cos(-\frac{\pi}{2} + \epsilon))) = -\infty$$

Il faut donc une définition qui est cohérente.

Definition 2 (Intégrale sur un intervalle borne ouvert)

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m et $c \in]a, b[$.

Si les intégrales généralisées $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ existent, alors on définit l'intégrale

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Si une des deux intégrales diverge, alors le tout diverge.

Lemme 1

La valeur de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ ne dépend pas de c , si elle converge.

Preuve

Soit $d \in]a, b[$, différent de c , alors on a

$$\int_a^d f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^d f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f(t)dt + \int_c^d f(t)dt$$

$$= \int_c^d f(t)dt + \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f(t)dt$$

Donc l'integrale existe.

Si elle existe, on trouve

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dt &= \int_a^d f(t)dt + \int_d^b f(t)dt \\ &= \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^d f(t)dt + \lim_{y \rightarrow b-} \int_d^y f(t)dt \\ &= \int_c^d f(t)dt + \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f(t)dt + \lim_{y \rightarrow b-} \int_d^c f(t)dt + \int_c^y f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned} \quad \square$$

Remarque

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Si f admet une extension par continuité sur $[a, b]$, alors on vérifie facilement que

$$\int_a^b f(t)dt$$

existe et coïncide avec

$$\int_a^b \tilde{f}(t)dt$$

ou \tilde{f} est l'extension par continuité de f sur $[a, b]$.

Lemme 3 (Critère de Comparaison)

Soit $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux et supposons qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in [c, b[$$

et si $\int_c^b g(x)dx$ existe, alors $\int_a^b f(x)dx$ existe aussi. De même si $\int_c^b f(x)dx$ diverge, alors $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Lecture 2: Integrales Generalisees

Wed 24 Feb

Theorème 4 (Critère de Comparaison)

Soit $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m. et supposons $\exists c \in [a, b[$ tel que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in [c, b[$$

Si $\int_a^b g(x)dx$ existe alors $\int_a^b f(x)dx$ existe aussi

Si $\int_a^b f(x)dx$ diverge alors $\int_a^b g(x)dx$ diverge aussi.

Preuve

Si $\int_a^b g(x)dx$ existe, alors $\int_c^b g(x)dx$ existe.

Donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t)dt \\ &= \lim_{x \rightarrow b-} \left(\int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt \right) \\ &= \int_a^c f(t)dt + \lim_{x \rightarrow b-} \int_c^x f(t)dt \\ &\leq \int_a^c f(t)dt + \lim_{x \rightarrow b-} \int_c^x g(t)dt < +\infty\end{aligned}$$

En notant $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, F est non décroissante, et bornée supérieurement sur l'intervalle $[a, b[\Rightarrow \lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ existe. \square

Exemple

$f(x) = \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|$ sur $]0, 1]$, on a

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

1 est intégrable, et donc l'intégrale de $f(x)$ existe.

1.1 Intégrales absolument convergentes**Définition 3 (Intégrale absolument convergente)**

Soit I un intervalle du type $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m.

On dit que l'intégrale généralisée de f sur I est absolument convergente si

$$\int_I |f(x)|dx$$

existe.

Theorème 6 (absolument convergente implique convergente)

Si l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument, alors il converge.

Preuve

Notons $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ et $f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}$ et on a $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$.

Donc

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)| \text{ et } 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)| \forall x \in I$$

Par critère de comparaison, si

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ existe} \Rightarrow \text{alors } \int_a^b f_+(x)dx, \int_a^b f_-(x)dx \text{ existent}$$

et donc $\int_a^b f(x)dx$

\square

Remarque

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m Si f est bornée sur I , alors

$$\int_I f(x)dx$$

existe.

Theorème 8 (Critere de comparaison (II))

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m.

S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1[$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \in \mathbb{R}$$

Alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

existe.

S'il existe $\alpha \geq 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \neq 0$$

alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

diverge.

Preuve

Par definition de la limite $\forall \epsilon > 0, \exists b-a > \delta_\epsilon > 0$ tel que

$$|f(x)(b-x)^\alpha - l| < \epsilon \forall x$$

$$\Rightarrow l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha \leq l + \epsilon$$

et donc

$$0 \leq |f(x)| \leq \frac{|l| + \epsilon}{(b-x)^\alpha}$$

Puisque le terme de droite est integrable, on conclut par le critere de comparaison. Pour la deuxieme partie, soit $\alpha \geq 1$ et $l \neq 0$.

Supposons $l > 0$, on a

$$l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha$$

Le meme raisonnement que ci-dessus donne que l'integrale de f diverge. \square

1.2 Intégrale généralisée sur un intervalle non borné

Definition 4 (Intégrale sur un intervalle non borné)

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m.

On dit que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ existe si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(x)dx$$

existe et dans ce cas, on note

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

idem si $f :]-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $f :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m. on dit que $\int_a^\infty f(x)dx$ existe s'il existe $c \in]a, \infty[$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f(t)dt \text{ et } \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_c^y f(t)dt$$

existent.

Lecture 3: L'espace R^n

Mon 01 Mar

2 L'espace R^n

2.1 Espace vectoriel norme

Soit un ensemble V sur lequel on définit deux opérations

1. somme : $+$: $V \times V \rightarrow V$
2. multiplication par un scalaire $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$

On définit R^n par $R^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots \times \mathbb{R}$

Definition 5 (Norme d'un vecteur)

C'est une application $N : V \rightarrow \mathbb{R}$, c'est une application qui satisfait

- $\forall x \in V : N(x) \geq 0$ et $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V : N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$
- $\forall x, y \in V, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

On utilise souvent la notation $N(x) = \|x\|$

Definition 6 (Espace vectoriel norme)

Un espace vectoriel norme est noté $(V, \|\cdot\|)$

Definition 7

Soit V un espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur V .

On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes si $\exists c_1, c_2 > 0$ tel que

$$c_1 N_2(x) \leq N_1(x) \leq c_2 N_2(x) \forall x \in V$$

Definition 8 (Distance)

Soit X un ensemble.

Une distance est une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés suivantes

- $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y$
- La distance est symétrique
- $\forall x, y, z \in V, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Un espace X muni d'une distance est appelé un espace métrique et est noté (X, d) .

On peut toujours définir une distance sur un espace vectoriel normé, défini par

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

On appelle cette distance, la distance induite par la norme.

Tout espace vectoriel normé est aussi un espace métrique.

Definition 9 (Produit Scalaire)

Soit V un espace vectoriel.

Un produit scalaire est une application $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes

- $\forall x, y \in V, b(x, y) = b(y, x)$
- $\forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x, z) + \beta b(y, z)$
- $\forall x \in V, b(x, x) \geq 0, b(x, x) = 0 \iff x = 0$

Theorème 9 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit V un espace vectoriel et $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un produit scalaire. Alors

$$\forall x, y \in V, |b(x, y)| \leq \sqrt{b(x, x)b(y, y)}$$

Preuve

$\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.

$$0 \leq b(\alpha x + y, \alpha x + y) = \alpha^2 b(x, x) + 2\alpha b(x, y) + b(y, y)$$

Donc on a

$$\Delta = b(x, y)^2 - b(x, x)b(y, y)$$

□

Theorème 10

Soit $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un produit scalaire, alors l'application $x \rightarrow \sqrt{b(x, x)} = \|x\|_b$ est une norme sur V .

Donc, si V est muni d'un produit scalaire, alors V est un espace normé et donc V est un espace métrique pour la distance induite par le produit scalaire.

2.2 Normes sur \mathbb{R}^n

- La norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- Norme "max" $\|x\|_\infty = \max |x_i|$
- Norme 1 : $\|x\|_1 = \sum |x_i|$
- Normes $p \in [1, +\infty[$ $\|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

Pour p infinie, on retrouve la norme infinie

On montre en exercices que toutes les normes p sont équivalentes.

De même, on montre que toutes les normes sur \mathbb{R}^n sont équivalentes. Par contre, seulement la norme 2 est déduite d'un produit scalaire.

Definition 10 (Suites convergentes)

Soit $\{x^{(k)}\}_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que cette suite converge s'il existe $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^{(k)} - x\| = 0$$

Lecture 4: Boules sur \mathbb{R}^n

Wed 03 Mar

2.3 Suites sur \mathbb{R}^n

Remarque

Supposons que $\{x^{(k)}\} \rightarrow \vec{x}$ par rapport à la norme euclidienne. Et soit $\|\cdot\|$ une autre norme sur \mathbb{R}^n . Puisque toutes les normes sont équivalentes sur \mathbb{R}^n $\|\vec{x}\| \leq c \|\vec{x}\|_2$ Donc toutes les suites convergent peu importe la norme.

En particulier, on peut choisir la norme infinie.

Lemme 12

Une suite $\{x^{(k)}\}$ converge si et seulement si toutes les composantes convergent.

Definition 11 (Suites de Cauchy)

On dit qu'une suite $\{x^{(k)}\}$ est de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \exists N > 0 : \forall k, l \geq N \left\| x^{(k)} - x^{(l)} \right\| \leq \epsilon$$

Theorème 13

Une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Preuve

Si la suite $x^{(k)}$ converge $\iff \{x_i^{(k)}\}$ converge pour tout $i = 1, \dots, n$ donc toutes ces suites sont de Cauchy et donc $x^{(k)}$ converge. \square

Theorème 14 (Bolzano-Weierstrass)

Soit $\{x^{(k)}\}$ une suite bornée.

Alors il existe une sous-suite $\{x^{(k_j)}\}$ qui converge

Preuve

Si $\{x^{(k)}\}$ est bornée, en particulier chaque suite $x^{(k)_i}$ sera bornée.

En $i = 1$, la suite $x^{(k)}$ est bornée, donc il existe une sous-suite convergente vers une valeur x_1 .

On considère les index de cette sous-suite et on réapplique l'argument ci-dessus en $i = 2$, etc. □

2.4 Topologie de \mathbb{R}^n **Définition 12 (Boule)**

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, la boule ouverte centrée en x et de rayon δ

$$B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \delta\}$$

La boule fermée

$$\overline{B}(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \delta\}$$

La sphere centrée en x et de rayon δ

$$S(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| = \delta\}$$

2.5 Classification des points d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$

Le complémentaire de E est

$$E^c = \{y \in \mathbb{R}^n, y \notin E\}$$

On dit que x est un point intérieur de E si $\exists \delta : B(x, \delta) \subset E$, on dit que x est un point frontière de E si $\forall \delta B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$ et $B(x, \delta) \cap E^c \neq \emptyset$. On dit que E° est l'ensemble des points intérieurs de E , E° est appelé l'intérieur de E .

On note ∂E l'ensemble des points frontières, appelé la frontière ou le bord de E .

On dit que x est un point adhérent de E si $\forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$. On note \bar{E} l'ensemble des points adhérents de E , appelé l'adhérence de E .

On a $\bar{E} = E \cup \partial E$

On dit que x est un point isolé si

$$\exists \delta > 0 B(x, \delta) \cap E = \{x\}$$

On dit que x est un point d'accumulation de E , si $\forall \delta > 0$

$$B(x, \delta) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Donc, en particulier, si on prend $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$

$$\exists x^{(k)} \in E, \text{ tel que } \|x^{(k)} - x\| \leq \frac{1}{k}$$

La suite $x^{(k)}$ converge vers x .

Definition 13

Soit E un ensemble de \mathbb{R}^n , on dit que E est ouvert si tous ses points sont intérieurs

Definition 14

E est fermé si E^c est ouvert.

Lecture 5: Ensembles compacts/connexes par arcs

Mon 08 Mar

2.6 Caractérisation des ensembles ouverts

- $\overset{\circ}{E}$ est toujours ouvert.
- E est ouvert si et seulement si $E = \overset{\circ}{E}$
- L'union (même infinie) d'ensembles ouverts est ouverte.
Soit $E = \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$ et K_α sont ouverts.
Alors $\forall x \in E, x \in K_\alpha$ et donc il existe une boule ouverte centrée en x et contenue dans K_α .
- L'intersection finie d'ensembles ouverts est ouverte.
Soit $E = \bigcap K_i$, alors $\forall x \in E, x \in K_i \forall i$, mais chaque K_i est ouvert, donc en prenant $\delta = \min \{\delta_1, \dots\}$, $B(x, \delta) \in E$ et donc E est ouvert.

2.7 Caractérisation des ensembles fermes

- $\mathbb{R}^n \setminus \overline{E} = \overset{\circ}{E^c}, \overline{E^c} = \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{E}$
- \overline{E} est toujours fermé.
- L'intersection (même infinie) d'ensembles fermes est fermée.
- L'union finie d'ensembles fermes est fermée.
- E est fermé si et seulement si toute suite $\{x^{(k)}\}$ convergente, converge vers un élément $x \in E$.

Preuve

Soit E fermé et $\{x^{(k)}\}$ une suite convergente vers $x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : \forall k > N_\epsilon, \|x - x^{(k)}\| \leq \epsilon$.

Donc $\forall \epsilon B(x, \epsilon) \cap E \neq \emptyset$, donc $x \in \overline{E} = E$.

Supposons que E n'est pas fermé, donc E^c n'est pas ouvert. Donc $\exists x \in E^c : \forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$.

Si on prend $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \exists x^{(k)} \in B(x, \delta) \cap E$ et $\{x^{(k)}\}$ converge vers x , donc $x \in E$ \nmid □

2.8 Ensembles compacts

Definition 15 (Ensemble compact)

On dit que E est compact si E est à la fois fermé et borné.

Theorème 15 (Caractérisation par sous-suites convergentes)

Un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute suite $\{x^{(k)}\} \subset E$ on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément $x \in E$

Theorème 16 (Caractérisation par recouvrements finis)

Un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute famille $\{K_\alpha, \alpha \in A\}$ d'ouverts tel que $E \subset K_\alpha$, on peut extraire une sous-famille finie qui est encore un recouvrement de E .

Definition 16 (Chemin dans E)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. On appelle chemin de E une application $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$, $\gamma(t) = (\gamma_1, \dots)$, tel que γ_i est continu pour tout i .

E

Definition 17 (Ensembles connexes par arcs)

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est connexe par arcs si $\forall x, y \in E$, il existe un chemin γ tel que $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

3 Fonctions de plusieurs variables

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. On appelle fonction sur E à valeurs réelles une application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall x \in E, x \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

On note $D(f)$ le domaine de f , $\text{Im } f$ l'image, $g(f)$ le graphe.

3.1 Notion de limite

Definition 18 (Limite)

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E . On dit que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta$$

Alors

$$\|f(x) - l\| < \epsilon$$

Theorème 17 (Des deux gendarmes)

Soit $f, g, h : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E .

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$ et $\exists \alpha > 0$

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad 0 < \|x - x_0\| \leq \alpha$$

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe et est égale à l .

Lecture 6: Fonctions continues

Wed 10 Mar

3.2 Caractérisation de limite par suites**Theorème 18 (Limites/Suites)**

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E . La limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ si et seulement si pour toute suite $\{x^{(k)}\} \subset E$ qui converge vers x_0 , on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^{(k)}) = l$.

Preuve

Soit $\{x^{(k)} : \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = x_0\}$, on sait que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in E, \|x - x_0\| < \delta, |f(x) - l| < \epsilon$$

il existe N tq $\forall k > n$ tq $\|x^{(k)} - x_0\| < \delta$

Si la limite $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^{(k)}) = l$ pour toute suite $x^{(k)}$.

Par l'absurde, supposons que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas.

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E, x \neq x_0 : \|x - x_0\| < \delta$$

et

$$|f(x) - l| \geq \epsilon \quad \square$$

Si on prend $\delta = \frac{1}{k}$, alors $\exists x^{(k)} \neq x_0 : \|x^{(k)} - x_0\| < \frac{1}{k}$ tel que $|f(x^{(k)}) - l| \geq \epsilon$.

Or cette suite $x^{(k)}$ converge vers x_0 , \nexists

3.3 Propriétés de l'opération de limite

Soit $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$, alors l'opération de limite est linéaire, respecte les règles de multiplication.

Theorème 19 (Critère de Cauchy)

Idem qu'en analyse I.

3.4 Fonctions a valeurs dans \mathbb{R}^m

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definition 19 (Limite)

On dit que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \vec{l} \in \mathbb{R}^m$ existe si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E \setminus \{x_0\}, 0 < \|x - x_0\| < \delta$$

on a

$$\|f(x) - l\| < \epsilon$$

De plus, chaque composante de f converge vers la composante correspondante de la limite.

4 Fonctions continues

Definition 20 (Continuite en un point)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, et $x_0 \in E$.

Si x_0 est un point d'accumulation de E , on dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Si x_0 est un point isole, on admet que f est continue en x_0

4.0.1 Definitions Equivalentes

- $\forall \epsilon > 0, \exists \delta : \forall x \in E, \|x - x_0\| < \delta, \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$
- pour toute suite $x^{(k)} \subset E$ qui converge vers x_0 on a que $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^{(k)}) = f(x_0)$

Definition 21 (Continuite sur E)

On dit que $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue sur E si elle est continue en tout point $x \in E$.

Dans ce cas, on note $f \in C^0(E)$

Definition 22 (continuite uniforme sur E)

On dit que f est uniformement continue sur E si $\forall \epsilon, \exists \delta$ tel que $\forall x \in E, \forall y \in E, \|y - x\| < \delta$, on a $\|f(y) - f(x)\| < \epsilon$

Evidemment, la continuite uniforme implique la continuite.

Lecture 7: Prolongement par continuite

Mon 15 Mar

4.1 Prolongement par continuite

Definition 23 (Prolongement par continuite)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue, avec $E \neq \overline{E}$, soit $x_0 \in \overline{E} \setminus E$. Une fonction $\tilde{f} : E \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est appelee un prolongement si \tilde{f} est continue en x_0 et

coincide avec f sur E .

Le prolongement par continuité est uniquement défini par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in E$ et $\tilde{f}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ si la limite existe.

Theorème 20 (Prolongement par continuité sur l'adhérence)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue sur E . Supposons que $\forall x \in \overline{E} \setminus E$ la limite $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$ existe. Alors on peut définir un prolongement $\tilde{f} : \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\tilde{f}(x) = f(x) \forall x \in E$ et $\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$ sinon, de plus \tilde{f} est continue sur \overline{E} .

Preuve

Si $x \in E$, $f(x)$ est continue en x donc $\tilde{f}(x) = f(x)$ est continue en x . On a

$$\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in E} f(y) = \lim_{y \rightarrow x, y \in E} \tilde{f}(y)$$

Pour montrer que \tilde{f} est continue en x , il faut montrer que $\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in \overline{E}} \tilde{f}(y)$. Il faut montrer que pour toute suite $x^{(k)} \subset \overline{E}$ convergent en $x \in \overline{E} \setminus E$ on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x^{(k)}) = \tilde{f}(x)$$

On construit une deuxième suite $y^{(k)}$ convergent vers x .

Si $x^{(k)} \in E$, alors $y^{(k)} = x^{(k)}$.

Si $x^{(k)} \in \overline{E} \setminus E$ on peut toujours trouver une valeur $y^{(k)} \in E$ tel que $\|y^{(k)} - x^{(k)}\| \leq 2^{-k}$, $\|f(y^{(k)}) - \tilde{f}(x^{(k)})\| \leq 2^{-k}$.

On aura donc

$$\|y^{(k)} - x\| \leq \|y^{(k)} - x^{(k)}\| + \|x^{(k)} - x\|$$

Ainsi $y^{(k)} \subset E$ converge vers x , et ainsi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\tilde{f}(x^{(k)}) - \tilde{f}(y^{(k)})) + \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(y^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(y^{(k)}) \quad \square$$

Theorème 21

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ uniformément continue. Alors f peut être prolongée par continuité sur \overline{E} et le prolongement $\tilde{f} : \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est uniformément continu.

Définition 24

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\sup f = \infty$ on dit que f n'est pas bornée supérieurement.

Si $M < \infty$ on appelle M la borne supérieure de f .

S'il existe $x_M \in E$, $f(x_M) = M$ alors on dit que M est le maximum de f sur E et x_M est un point maximum de f . Meme définition pour borne inférieure.

Theorème 22

Soit E non vide et compact, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint son maximum et son minimum sur E .

Preuve

Par l'absurde f n'est pas bornée, il existe $x^{(k)}$ tel que $|f(x^{(k)})| > k$
 Mais E est compact, donc il existe une sous-suite $x^{(k_i)}$ qui converge, or f est continue, donc

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} f(x^{(k_i)}) = f(x) < \infty$$

Supposons que f n'atteint pas ses bornes

Il existe $x^{(k)}$ qui converge vers le sup, or E est fermé. □

Theorème 23

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, compact, connexe par arcs, et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint toutes les valeurs entre son minimum et maximum.

Preuve

f est continue sur un compact donc f atteint son min et son max.
 Puisque E est connexe, il existe γ un chemin du minimum au maximum. On conclut par TVI sur la fonction $f \circ \gamma$ □

Theorème 24

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et compact avec $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue. Alors f est uniformément continue sur E .

Lecture 8: Derivee partielles et directionnelle

Wed 17 Mar

5 Derivees de fonctions a plusieurs variables**5.1 Derivees Directionnelles****Definition 25 (Derivees directionnelle)**

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{E}$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur arbitraire.
 On dit que f est derivable dans la direction \vec{v} , au point x_0 , si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

existe et on note $D_v f(x_0)$.

Si on prend $\|\vec{v}\|$ (norme euclidienne), alors on appelle $D_v f(x_0)$ la derivee directionnelle de f dans la direction \vec{v} au point x_0 .

en particulier, on peut prendre $\vec{v} = e_i$, dans ce cas on utilise la notation

$$D_{e_i} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$$

et on appelle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ la i -eme derivee partielle de f au point x_0 .

Definition 26 (Gradient)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \overset{\circ}{E}$.

Si toutes les derivees partielles de f en x_0 existent, alors on appelle le vecteur gradient

$$\nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^n, \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Definition 27 (Matrice Jacobienne)

On appelle matrice Jacobienne $Df(x_0) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

5.2 Fonctions Differentiables

Definition 28 (Differentiabilite)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overset{\circ}{E}$. On dit que f est differentiable (ou derivable) en x_0 si il existe une application lineaire $L_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + L_{x_0}(x - x_0) + g(x) \forall x \in E$$

et $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\|x - x_0\|} = 0$.

Theoreme 25

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differentiable en $x_0 \in \overset{\circ}{E}$, alors

- Toutes les derivees partielles de f en x_0 existent.
- On a

$$L_{x_0}(x - x_0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - x_0) = Df(x_0)(x - x_0)$$

- Toutes les derivees directionnelles existent et

$$D_v f(x_0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) v_i = \nabla f(x_0)^T \vec{v} = Df(x_0) \vec{v}$$

- f est continue en x_0 .

Preuve

- On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + L_{x_0}(x_0 + te_i - x_0) + g(x_0 + te_i)}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L_{x_0}(e_i) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + te_i)}{t} \\
&= L_{x_0}a_i
\end{aligned}$$

— On a

$$f(x) = f(x_0) + L_{x_0}(x - x_0) + g(x)$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} L_{x_0}(x - x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0)$$

—

$$\begin{aligned}
D_v f(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Df(x_0)tv + g(x_0 + tv)}{t} \\
&= Df(x_0)\vec{v}
\end{aligned}$$

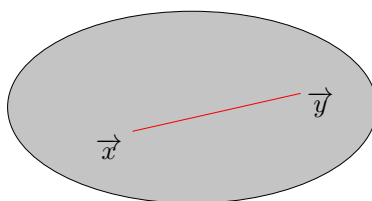
□

Lecture 9: Derivees secondes

Wed 24 Mar

Cas scalaire :

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $x, y \in E$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ derivable sur E .



On denote par $[x, y]$ le segment (ferme) entre x et y et $]x, y[$ le segment ouvert entre x et y .

Theorème 26 (Theoreme des accroissements finis dans \mathbb{R}^n)

Soit $x, y \in E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, alors il existe $z \in [x, y]$ tel que

$$f(y) - f(x) = \nabla f(z)^T(y - x) = Df(z)(y - x)$$

Preuve

Soit $g(t) = f(x + t(y - x))$ pour $t \in [0, 1]$.

On a alors

$$g'(t) = \frac{d}{dt}g(t) = \frac{d}{dt}f(\phi(t))$$

ou $\phi(t) = x + t(y - x)$.

Puisque f et ϕ sont derivables, on conclut que g est aussi derivable.

Donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= Df(\phi(t)) \cdot D\phi(t) \\ &= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t(y - x))(y_i - x_i) \\ &= \nabla f(x + t(y - x))^T(y - x) = Df(x + t(y - x))(y - x) \end{aligned}$$

Le taf applique a g donne $\exists s \in]0, 1[$ tel que

$$g(1) - g(0) = g'(s)$$

Donc

$$f(y) - f(x) = Df(x + s(y - x))(y - x)$$

□

On conclut en posant $z = x + s(y - x)$.

Le cas vectoriel :

Theorème 27 (Taf dans le cas vectoriel)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

On essaie de représenter $f(y) - f(x)$ a l'aide des derivees de f .

On peut écrire TAF pour chaque composante, mais les z_k ne sont en general pas les memes.

Cependant, on peut toujours écrire pour $f \in C^1(E)$

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 Df(x + s(y - x))(y - x)ds$$

5.3 Derivees d'ordre superieur**Definition 29 (Derivees partielles secondes (cas scalaire))**

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, E ouvert.

Supposons que pour un indice $i = \{1, \dots, n\}$ fixe, la derivee partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existe $\forall x \in E$.

Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admet la dérivée partielle selon x_j , alors on dit que f a une dérivée partielle seconde en x et on note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x)$$

Definition 30 (Matrice hessienne)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que toutes les dérivées partielles existent que toutes les dérivées secondes existent

$$H_f(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(y) & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)(y) & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(y) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)(y) & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(y) & \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)(y) & \cdots \end{pmatrix}$$

Definition 31 (Espace $C^2(E)$)

On dit que $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 si toutes les dérivées partielles secondes sont continues.

Definition 32 (Dérivées directionnelles secondes)

Soit $v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$. Alors, étant donné $D_v f : E \rightarrow \mathbb{R}$, on peut essayer de calculer la dérivée directionnelle de $D_v f$ dans la direction $w \in \mathbb{R}^n$.

Si une telle dérivée existe, on dit que f admet une dérivée directionnelle seconde dans les directions v et w au point x et on note

$$D_{wv} f(x) = D_w(D_v f)(x)$$

Lemme 28

Soit $f \in C^2(E)$, E ouvert et $v, w \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\| = \|w\| = 1$.

Alors $D_{wv} f$ existe en tout $x \in E$ et

$$\begin{aligned} D_{wv} f(x) &= w^T H_f(x) v \\ &= \sum_{i=1}^n w_i \left(\sum_{j=1}^n H_f(x)_{ij} v_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) w_i v_j \end{aligned}$$

Preuve

Si $f \in C^2$ alors $f \in C^1$, alors $D_v f(x) = \nabla f(x)^T v = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i$.

Mais puisque $f \in C^2$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^1 \forall i$, donc

$$\begin{aligned} D_w(D_v f)(x) &= \nabla(D_v f)^T w = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (D_v f) w_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right) v_j w_i \end{aligned}$$

□

Ce qui donne le resultat desire.

Theorème 29 (Theoreme de Schwarz)

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ fixes.

Supposons que $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent sur E et sont continues en $x \in E$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

Lecture 10: Derivees d'ordre superieur

Mon 29 Mar

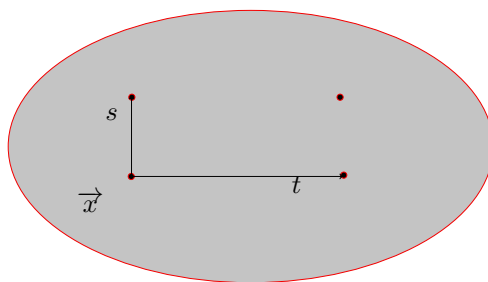


FIGURE 1 – thmschwarz

Preuve

Soit $s, t > 0$ suffisamment petit tel que

$$x + se_i, x + te_j, x + se_i + te_j \in E$$

Posons

$$\begin{aligned} \Delta(s, t) &= f(x + se_i + te_j) - f(x + se_i) - f(x + te_j) + f(x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + se_i)t - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)t \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j} st \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(x + te_j)s - \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)s \end{aligned}$$

Plus formellement, on peut ecrire

$$\Delta(s, t) = (f(x + se_i + te_j) - f(x + se_i)) - (f(x + te_j) - f(x))$$

On definit

$$g(\xi) = f(x + \xi e_i + t e_j) - f(x + \xi e_i)$$

et donc

$$\Delta(s, t) = g(s) - g(0)$$

et g est derivable car f est derivable

$$g'(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \xi e_i + t e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \xi e_i)$$

par le TAF, on a

$$\begin{aligned} g(s) - g(0) &= g'(\tilde{s})s \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \tilde{s} e_i + t e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \tilde{s} e_i) \right) s \end{aligned}$$

On definit maintenant

$$\phi(y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \tilde{s} e_i + y e_j)$$

Alors on a

$$\Delta(s, t) = (\phi(t) - \phi(0))s$$

A nouveau, ϕ est derivable, et donc on a

$$\begin{aligned} \Delta(s, t) &= \phi'(\tilde{t})ts \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}(x + \tilde{s} e_i + \tilde{t} e_j)ts \end{aligned}$$

Si on prend $t = s$, on a

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \Delta(s, s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x + \tilde{s} + \tilde{t} e_j) s^2 \right)$$

On peut appliquer exactement le meme raisonnement dans l'autre sens, et on obtient le resultat desire. \square

5.4 Derivees d'ordre superieur

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et on fixe $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$.

On definit la derivee partielle par rapport aux variables x_{i_1}, \dots, x_{i_p} , on note alors

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \left(\dots \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \right) \right) (x)$$

Corollaire 30

Soit i_1, \dots, i_p fixe et σ une permutation des nombres $\{1, \dots, p\}$.

Si $\frac{\partial^p}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}}$ et $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_{\sigma(p)}} \dots \partial x_{i_{\sigma(1)}}}$ existent et sont continues en x pour toute permutation alors ils sont egaux

5.5 Developpement limite et formule de Taylor

On veut generaliser la definition pour la dimension 1, on veut un polynome de degre p dans les variables (x_1, \dots, x_n) , en utilisant la notation multi-entiers, on note

$$p(x) = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n), |\alpha| \leq 2} c_\alpha x^\alpha$$

De maniere generale, on peut donc ecrire

$$q(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq p} c_\alpha x^\alpha$$

Le developpement limite d'ordre p d'une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ autour d'un point $x \in \overset{\circ}{E}$, aura donc la forme

$$f(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq p} c_\alpha (y-x)^\alpha + R_p(y)$$

Ou R_p satisfait

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{R_p(y)}{\|y-x\|^p} = 0$$

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{p+1}(E)$, E un ouvert non vide et soient $x, y \in E$ tel que $[x, y] \in E$, soit $g(t) = f(x + t(y-x))$, pour $t \in [0, 1]$, on voit que $g \in C^{p+1}([0, 1])$. On peut donc ecrire

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \dots + \frac{g^{(p)}(0)}{p!} t^p + R_p(y)$$

On a donc

$$g'(t) = \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x_t) \frac{d(x_t)_{i_1}}{dt} = \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x_t) (y_{i_1} - x_{i_1}) = \sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(y-x)^\alpha$$

De meme, on trouve

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} f(x_t) \right) \\ &= \sum_{|\alpha|=2} \frac{2!}{\alpha!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha}(x_t) (y-x)^\alpha \end{aligned}$$

La formule de Taylor s'écrit donc

$$\begin{aligned} f(y) &= g(1) = \sum_{k=0}^p \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t + R_p(y) \\ &= \sum_{k=0}^p \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{k!} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(x)(y-x)^\alpha + R_p(1) \end{aligned}$$

La formule de Lagrange donne

$$R_p(1) = \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x + \theta(y-x))(y-x)^\alpha$$

Lecture 11: Integrales qui dependent de parametres

Wed 31 Mar

6 Integrales qui dependent de parametres

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$, soit $f : I \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in I$ et $x = (x_1, \dots)$ tel que $\forall x \in E \int_I f(t, \vec{x}) dt$ existe.

On peut définir la fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\vec{x} \rightarrow g(x) = \int_I f(t, \vec{x}) dt$$

— Si f est continue sur $I \times E$ est-ce que g est continue? Autrement dit, pour $x_0 \in E$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \int_I f(t, \vec{x}) dt \underset{?}{=} \int_I \lim_{x \rightarrow x_0} f(t, x) dt = g(x_0)$$

— Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe sur $I \times E$ est-ce que $\frac{\partial}{\partial x_i} g$ existe sur E et

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \underset{?}{=} \int_I \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x) dt$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \rightarrow x^2 e^{-x^2 t}$

Soit

$$g(x) = \int_0^\infty x^2 e^{-x^2 t} dt$$

Pour $x = 0$, $f(t, 0) = 0 \forall t$, $g(0) = 0$, pour $x \neq 0$,

$$g(x) = (-e^{-x^2 t})|_{t=0}^\infty = 1$$

ainsi, g n'est pas continue.

6.1 Integrales sur un intervalle ferme borne

Theorème 32

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et

$$f : [a, b] \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

continue.

Alors la fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_a^b f(t, x) dt$$

est bien définie $\forall x \in E$ et est continue sur E .

Preuve

Pour tout $x \in E$, la fonction $t \rightarrow f(t, x)$ est continue et donc intégrable.

Montrons que g est continue sur E .

Fixons $x_0 \in E$, $\exists \eta > 0$ $\overline{B}(x_0, \eta) \subset E$.

Alors la restriction de f à $A = [a, b] \times \overline{B}(x_0, \eta)$.

Donc A est compact, et donc $f|_A$ est uniformément continue.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta \in]0, \eta] : \forall (s, y), (t, x) \in A, |s - t| \leq \delta, \|y - x\| \leq \delta$$

On a

$$|f(s, y) - f(t, x)| \leq \epsilon$$

En particulier, on peut choisir $s = t, y = x_0$, alors

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= \left| \int_a^b f(t, x) - f(t, x_0) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t, x) - f(t, x_0)| dt \\ &\leq \epsilon(b - a) \end{aligned}$$

Remarque

— Le theoreme est valable aussi si l'ensemble E est ferme, il suffit de considerer $\overline{B}(x, \delta) \cap E$ et meme pour n'importe quel sous-ensemble E .

Theorème 34

Soit a, b fini, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, et $f : [a, b] \times E \rightarrow \mathbb{R}$ continue tel que, pour i fixe

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : [a, b] \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

existe et est continue.

Alors $g(x) = \int_a^b f(t, x)dt$ existe pour tout x et $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$ existe pour tout x et

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x)dt$$

Preuve

Soit $x_0 \in E$ et $\eta > 0 : \overline{B}(x_0, \eta) \subset E$, on definit

$$A = [a, b] \times \overline{B}(x_0, \eta) \text{ un compact}$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_A$ est uniformement continue.

On a donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in]0, \eta] : \forall t \in [a, b], \forall x \in \overline{B}(x_0, \delta)$$

$$|\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$$

On veut montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + se_i) - g(x_0)}{s}$$

existe et est egal a

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0)dt$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(x_0 + se_i) - g(x_0)}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0)dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{s} \int_a^b f(t, x_0 + se_i) - f(t, x_0)dt - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0)dt \right| \\ &= \left| \int_a^b \frac{1}{s} \int_0^s \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0 + \sigma e_i) d\sigma - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0)dt \right| \\ &= \left| \int_a^b \frac{1}{s} \int_0^s \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0 + \sigma e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0) \right) d\sigma dt \right| \\ &\leq \int_a^b \frac{1}{|s|} \int_0^s \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0 + \sigma e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0) \right|}_{\leq \frac{\epsilon}{b-a}} d\sigma dt \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

□

6.2 Integrales avec des bornes variables

Soit

$$g(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x)dt$$

On suppose que

$$f :]\alpha, \beta[\times E \rightarrow \mathbb{R}$$

et que

$$a, b : E \rightarrow]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$$

Theorème 35

Soit E un ouvert non vide et supposons que toutes les dérivées partielles de x_i existent et sont continues pour tout i , de plus supposons que a, b sont $C^1(E)$, alors $g \in C^1(E)$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial b}{\partial x_i}(x)f(b(x), x) - \frac{\partial a}{\partial x_i}(x)f(a(x), x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) dt$$

Sans preuve.

Idee de la demonstration : Reecire

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{a(x)}^c f(t, x) dt + \int_c^{b(x)} f(t, x) dt \\ &= G(b(x), x) - G(a(x), x), \text{ avec } G(s, x) = \int_c^s f(t, x) dt \end{aligned}$$

On montre que $G \in C^1$, alors $g \in C^1$ et donc

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} G(b(x), x) - \frac{\partial}{\partial x_i} G(a(x), x)$$

6.3 Integrales generalisees

Cas $I = [a, b[$ En general, on a pas la continuite de $g(x)$.

Definition 33

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et $f : [a, b[\times E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On dit que $\int_a^b f(t, x) dt$ converge uniformement sur E si $\int_a^b f(t, x) dt$ existe $\forall x$ et $\forall \epsilon > 0 \exists \bar{c} \in]a, b[$ (independant de x) tel que

$$\forall c \in [\bar{c}, b[\text{ et } \forall x \in E, \left| \int_c^b f(t, x) dt \right| \leq \epsilon$$

Theorème 36

Soit $f : [a, b] \times E \rightarrow \mathbb{R}$ continue et l'integrale $\int_a^b f(t, x) dt$ converge uniformement sur E . Alors la fonction $g(x) = \int_a^b f(t, x) dt$ existe $\forall x \in E$ et est continue sur E .

De plus si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe, et est continue sur $[a, b] \times E$, et $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) dt$ converge uniformement, alors $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ existe et est continue sur E .

L'idée de la démonstration est

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= \left| \int_a^b (f(t, x) - f(t, x_0)) dt \right| \\ &\leq \int_a^{\bar{c}} |f(t, x) - f(t, x_0)| dt + \int_{\bar{c}}^b |f(t, x) - f(t, x_0)| dt \\ &\leq \int_a^{\bar{c}} |f(t, x) - f(t, x_0)| dt + 2\epsilon \end{aligned}$$

Et on s'est ramené au cas d'un intervalle fermé.

Remarque

Si il existe $h : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et telle que

$$|f(t, \vec{x})| \leq h(t)$$

Alors f est uniformément intégrable.

Lecture 12: Fonctions Bijectives et difféomorphismes

Mon 12 Apr

7 Fonctions Bijectives

Soit $\vec{f} : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F \subset \mathbb{R}^n$.

Si \vec{f} est une bijection entre E et F alors $\forall \vec{y} \in F, \exists ! \vec{x} \in E : f(\vec{x}) = \vec{y}$

On peut donc définir une application inverse $\vec{g} : F \rightarrow E$ tel que $\forall \vec{y} \in F, f(g(\vec{y})) = \vec{y}$ et de manière équivalente, $\forall x \in E, g(f(x)) = x$

Pourquoi étudier les bijections ?

— Exemple 1

On souhaite résoudre le problème $f(x) = y$ pour un $y \in F$ donné. Si f est une bijection, on sait qu'il existe une solution.

— Changement de variable

Soit $f : E \rightarrow F$ bijective et $\phi : F \rightarrow \mathbb{R}$.

On peut récrire ϕ en fonction de variables $x \in E$, $\tilde{\phi} = \phi \circ f$, donc $x \mapsto \tilde{\phi}(x) = \phi(f(x)), \forall x \in E$.

Vice versa étant donné $\tilde{\phi} : E \rightarrow \mathbb{R}, \vec{x} \mapsto \tilde{\phi}(x)$.

On peut la récrire en fonction de $y \in F$.

On aura donc

$$\phi(y) = \tilde{\phi}(g(y))$$

On utilise ceci, en partie pour les coordonnées polaires.

Definition 34 (Homeomorphisme)

Soit $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non-vides. On dit que $f : E \rightarrow F$ est un homeomorphisme si elle est bijective et f et son inverse $g : F \rightarrow E$ sont continues.

Definition 35 (Diffeomorphisme)

Soit $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non-vides. On dit que $f : E \rightarrow F$ est un diffeomorphisme global si elle est bijective et f et son inverse $g : F \rightarrow E$ sont C^1 .

De maniere plus generale, on dit que f est un k -diffeomorphisme si f et son inverse sont de classe C^k .

Definition 36 (Diffeomorphisme local)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide et $x_0 \in E$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 .

On dit que f est un diffeomorphisme local en x_0 , si il existe un ouvert $U \subset E$ contenant x_0 et un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ contenant $y_0 \in f(x_0)$ tel que $\vec{f} : U \rightarrow V$ est un diffeomorphisme.

Clairement, si f est un diffeomorphisme global, c'est en particulier un diffeomorphisme local en tout point $x \in E$, mais la reciproque n'est pas vraie en general. On a toutefois le resultat suivant

Theoreme 38

Soit $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non vides et $f : E \rightarrow F$ bijective et un diffeomorphisme local en tout point $x \in E$. Alors, f est un diffeomorphisme global.

Question

Sous quelles conditions, \vec{f} est elle un diffeomorphisme local en $x \in E$.

Dans le cas $n = 1$, f est un diffeomorphisme local en $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction affine

$$\vec{f}(x) = Ax + b$$

Quand est-ce que f est inversible, ou, etant donne $y \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = y$ a une solution unique, si et seulement si $\det A \neq 0$

De maniere plus generale, vu que f est C^1 , on a

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + R_f(\vec{x})$$

Autour de x_0 , on a donc

$$f(x) \approx f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$$

et donc f est un diffeomorphisme local si et seulement si $\det(Df(x_0)) \neq 0$

Theoreme 39 (Condition necessaire d'inversion locale)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec E ouvert non vide, un diffeomorphisme local en x_0 . Alors, $\det(Df(x_0)) \neq 0$.

Preuve

Par définition de difféomorphisme local, il existe un ouvert $U \subset E$ contenant x_0 et un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ contenant $y_0 = f(x_0)$ tel que $f : U \rightarrow V$ est une bijection et soit $g : V \rightarrow U$ la fonction inverse de classe C^1 par hypothèse.
Puisque $g(f(x)) = x \forall x \in U$, on a

$$D(g(f(x))) = Dg(f(x))Df(x) = \text{Id} \quad \square$$

Et donc $Df(x_0)$ est inversible.

Theorème 40

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ ferme et $\phi : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

- $\phi(K) \subset K$
- Il existe $\rho \in]0, 1[$ tel que $\forall x, y \in K$

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \rho \|x - y\|$$

(dans ce cas, on dit que l'application est contractante)

Alors ϕ possède un unique point fixe $\exists ! v \in K$ tel que $v = \phi(v)$

Definition 37 (Norme spectrale)

On définit

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\|$$

Definition 38 (Norme de frobenius)

On note

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}^2}$$

Lemme 41

Soit a, b finis et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. Alors

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

Theorème 42 (Condition suffisante d'inversion locale)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $x_0 \in E$.
Si $\det Df(x_0) \neq 0$, alors f est un difféomorphisme local en x_0 . De plus si $g : V \rightarrow U$ est un inverse local, avec $U \subset E$ un ouvert contenant x_0 et V

un ouvert contenant $y_0 = f(x_0)$, on a

$$Dg(f(x)) = Df(x)^{-1} \forall x \in U$$

On va utiliser le theoreme du point fixe de Banach.

Preuve

On montre l'existence d'un inverse local.

Par hypothese $x \rightarrow Df(x)$ est continue. Donc

$$\exists r_1, \det(Df(x_0)) \neq 0 \forall x \in B(x_0, r) \cap E$$

Considerons

$$x \rightarrow \text{Id} - Df(x_0)^{-1} Df(x) =: A(x)$$

On a a nouveau que $A(x)$ est continue et $A(x_0) = 0$.

Donc, il existe $r_2 > 0$ tel que $\forall x \in B(x_0, r_2) \cap E \frac{-1}{2n} \leq A_{ij}(x) \leq \frac{1}{2n}$ Donc $\forall x \in B(x_0, r_2) \cap E |||A(x)||| \leq \|A(x)\|_F = \sqrt{\sum_{ij} A_{ij}(x)^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j} \frac{1}{4n^2}} = \frac{1}{2}$.

Donc il existe $r \leq \min\{r_1, r_2\}$ tel que

- $B(x_0, r) \subset E$
- $\det Df(x) \neq 0 \forall x \in B(x_0, r)$
- $|||A(x)||| \leq \frac{1}{2} \forall x \in B(x_0, r)$

On veut montrer que f est localement inversible, donc $\forall y \in V \exists! x \in U : f(x) = y$.

On a

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff 0 = y - f(x) \\ &\iff 0 = Df(x_0)^{-1}(y - f(x)) \\ &\iff x = x + Df(x_0)^{-1}(y - f(x)) \end{aligned}$$

On a

$$D\phi^y(x) = D^y(x - Df(x_0)^{-1}(f(x) - y)) = A(x)$$

On montre donc que ϕ^y est contractante, donc

$$\forall x_1, x_2 \in \overline{B}(x_0, r)$$

On veut calculer

$$\begin{aligned} \|\phi^y(x_1) - \phi^y(x_2)\| &= \left\| \int_0^1 D\phi^y(x_1 + t(x_2 - x_1))(x_2 - x_1) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|D\phi^y(\dots)(x_2 - x_1)\| dt \\ &\leq \int_0^1 |||D\phi^y(\dots)||| \|x_2 - x_1\| dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\| \end{aligned} \quad \square$$

Donc ϕ^y est contractante sur $B(x_0, r)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.
 Il nous faut encore montrer que $\phi^y(\overline{B}(x_0, r)) \subset \overline{B}(x_0, r)$

Lecture 13: theoreme d'inversion locale

Wed 14 Apr

Preuve

On a montre l'existence d'une fonction inverse en trouvant un point fixe de la fonction

$$\phi^y(x) = x - (Df(x_0))^{-1}(f(x) - y)$$

Il existe $r > 0$ tel que

- $\overline{B}(x_0) \subset E$
- $\|D\phi^y(x)\| \leq \frac{1}{2}$
- $\det(Df(x)) \neq 0 \forall x \in \overline{B}(x_0, r)$

On a montre que pour tout point $y \in \mathbb{R}^n$, ϕ^y est contractante sur $\overline{B}(x_0, r)$ et que $\phi^y(\overline{B}(x_0, r)) \subset B(x_0, r)$ pour un $y \in B(y_0, \tilde{r})$.

On a donc l'existence d'un unique point $x \in B(x_0, r) : x = \phi^y(x) \iff f(x) = y$, ou encore

$$\forall y \in B(y_0, r) =: V \exists ! x \in B(x_0, r) \cap f^{-1}(V) : f(x) = y$$

Or $B(x_0, r) \cap f^{-1}(V) =: U$ est un ouvert, et donc $f : U \rightarrow V$ est inversible et on peut donc définir une fonction inverse g .

Montrons maintenant que g est continue en montrant qu'elle est Lipschitz sur V . On veut montrer qu'il existe $L > 0$ tel que $\forall y_1, y_2 \in V$

$$\|g(y_1) - g(y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|$$

En notant $\|x_1 - x_2\|$ les preimages, on peut reecrire

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &= \|\phi^{y_1}(x_1) - \phi^{y_2}(x_2)\| \\ &\leq \|\phi^{y_1}(x_1) - \phi^{y_1}(x_2)\| + \|\phi^{y_1}(x_2) - \phi^{y_2}(x_2)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| + \|Df(x_0)^{-1}(y_2 - y_1)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| + \|Df(x_0)^{-1}\| \|y_2 - y_1\| \end{aligned}$$

Et donc on a

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2 \|Df(x_0)^{-1}\| \|y_1 - y_2\|$$

On montre que g est de classe C^1 (en utilisant le fait que f est de classe C^1).
 Soit $y, y_1 \in V$ et $x = g(y), x_1 = g(y_1)$.

On veut montrer que g est différentiable en y . On essaie d'écrire un developpement limite de g en y .

On a

$$\underbrace{f(x_1)}_{y_1} = \underbrace{f(x)}_y + Df(x)(x_1 - x) + R_f(x_1)$$

$$\begin{aligned}
Df(x)(x_1 - x) &= y_1 - y - R_f(x_1) \\
x_1 - x &= Df(x)^{-1}(y_1 - y) - Df(x)^{-1}R_f(x_1) \\
g(y_1) - g(y) &= Df(x)^{-1}(y_1 - y) - \underbrace{Df(x)^{-1}R_f(x_1)}_{R_g(y_1)}
\end{aligned}$$

On veut montrer que $\lim_{y_1 \rightarrow y} \frac{R_g(y_1)}{\|y_1 - y\|} = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{y_1 \rightarrow y} \frac{R_g(y_1)}{\|y_1 - y\|} &\leq \lim_{y_1 \rightarrow y} \frac{\|Df(x)^{-1}\| \|R_f(x_1)\|}{\|y_1 - y\|} \\
&= \lim_{y_1 \rightarrow y} \|Df(x)^{-1}\| \frac{\|x_1 - x\|}{\|y_1 - y\|} \frac{\|R_f(x_1)\|}{\|x_1 - x\|} \\
&= \lim_{y_1 \rightarrow y} \|Df(x)^{-1}\| 2 \|Df(x_0)^{-1}\| \frac{\|R_f(x_1)\|}{\|x_1 - x\|}
\end{aligned}$$

Donc g est différentiable en $y \in V$ et

$$Dg(y) = Df(x)^{-1} \text{ ou } x = g(y) \quad \square$$

7.1 Fonctions Implicites et Hypersurfaces de \mathbb{R}^n

Considerons une fonction $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

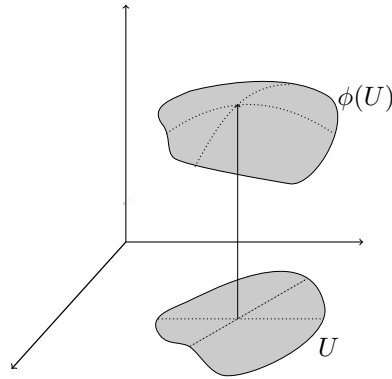


FIGURE 2 – hypersurfaces

En particulier si ϕ est différentiable en $x_0 \in U$, alors

$$\phi(x) = \underbrace{\phi(x_0) + D\phi(x_0)(x - x_0)}_{T_\phi^1(x) \text{ fonction affine en } x} + R_\phi(x)$$

Donc le graphe $G(T_{\phi, x_0}^1) = \left\{ z \in \mathbb{R}^{n+1}, z = (x, y), x \in \mathbb{R}^n, y \in T_{\phi, x_0}^1 \right\}$ se reecrit comme l'ensemble

$$\left\{ z \in \mathbb{R}^{n+1} : y - y_0 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi(x_0)}{\partial x_i} (x - x_0) = 0 \right\}$$

En definissant

$$v = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_0), \dots, 1 \right), z = (x_1, x_2, \dots, x_n, y)$$

On peut ecrire

$$G(T_{\phi, x_0}^1) = \{ z \in \mathbb{R}^{n+1} : v \cdot (z - z_0) = 0 \}$$

Ce graphe definit un hyperplan de \mathbb{R}^{n+1} appele l'hyperplan tangent au graphe de ϕ en $z_0 = (x_0, y_0)$ On essaie de resoudre le probleme inverse, ie. decire le plan d'une surface comme le plan d'une fonction.

Definition 39 (Hypersurfaces de classe C^k)

On dit que $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est une hypersurface de classe C^k autour de z_0 si elle est le graphe d'une fonction de classe C^k autour de z_0 , cad, qu'il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contenant z_0 , un indice $i \in \{1, \dots, n+1\}$, un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\Sigma \cap V = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i = \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \}$$

En particulier, on considere des surfaces definies par

$$\Sigma = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = 0 \}$$

On se demande quand est-ce que Σ est une hypersurface (au moins localement autour d'un point z_0).

Si Σ est une hypersurface autour d'un point $z_0 \in \Sigma$, il existe $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contenant z_0 et $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\Sigma \cap V = \{ x : x_i = \phi(x_{n+1}) \}$$

Alors on dit que la fonction ϕ est definie implicitement par la relation $f(x) = 0$.

Lecture 14: Fonctions Implicites

Mon 19 Apr

Definition 40 (Fonction Implicite)

Soit $f : E \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, avec E un ouvert non vide.

On definit $\Sigma = \{ z \in \mathbb{R}^{n+1}, f(z) = 0 \}$, et soit $z_0 = (z_{0,1}, \dots, z_{0,n+1}) \in \Sigma$.

On dit que f definit implicitement une fonction autour de z_0 si il existe un ouvert $V \subset E$ contenant z_0 , un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et un indice $i \in \{1, \dots, n+1\}$ et une fonction $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

—

$$z_{0,i} = \phi(z_{0,1}, \dots, z_{0,i-1}, z_{0,i+1}, \dots, z_{0,n+1})$$

$$\text{— } \forall x \in \Sigma \cap V, x_i = \phi(x_{ni})^1$$

$$\text{Alors le graphe } G(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i = \phi(x_{ni})\} = \Sigma \cap V$$

Questions

1. Quand est-ce que $f(x) = 0$ définit une fonction implicite ?
2. Si f définit une fonction implicite, que peut-on dire sur ϕ ?

Commençons par le deuxième point.

Supposons que f définit une fonction implicite $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons aussi que $f, \phi \in C^k$.

7.1.1 Cas $n = 2$

Soit $f = f(x, y)$ et soit

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$$

et $(x_0, y_0) \in \Sigma$

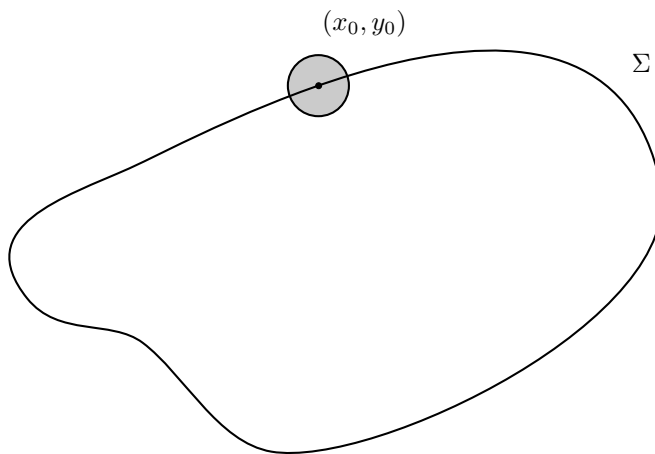


FIGURE 3 – voisinage

Supposons qu'il existe $\phi :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$G(\phi) = \Sigma \cap V$$

1. Avec la notation $z_{ni} = (z_{0,1}, \dots, z_{0,i-1}, z_{0,i+1}, \dots, z_{0,n+1})$

$$\forall x \in U : f(x, \phi(x)) = 0$$

$$y = \phi(x)$$

On note $\tilde{f}(x) = f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in U$, donc

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{f}' &= \frac{d}{dx}(f(x, \phi(x))) \\ &= \frac{df}{dx}(x, \phi(x)) + \frac{df}{dy}(x, \phi(x)) \cdot \phi'(x) \end{aligned}$$

En particulier, en $(x_0, y_0 = \phi(x_0))$, on peut écrire que

$$\frac{df}{dy}(x_0, y_0) \phi'(x_0) = - \frac{df}{dx}(x_0, y_0)$$

Donc, si $\frac{df}{dy}(x_0, y_0) \neq 0$, alors

$$\phi'(x_0) := - \frac{\frac{df}{dx}(x_0, y_0)}{\frac{df}{dy}(x_0, y_0)}$$

De plus, pour tout x suffisamment proche de x_0

$$\phi'(x) := - \frac{\frac{df}{dx}(x, \phi(x))}{\frac{df}{dy}(x, \phi(x))}$$

par le theoreme de la valeur intermediaire (la derivee partielle selon y) ne s'annulera pas.

On peut iterer l'argument, et donc, si f, ϕ sont de classe C^2 , on peut écrire

$$0 = \tilde{f}''(x) = \frac{d}{dx}(\tilde{f}'(x))$$

Apres developpement, on remarque que, si $\frac{df}{dy}(x_0, y_0) \neq 0$, on peut encore calculer la derivee seconde de f :

$$\phi''(x) = - \frac{1}{\frac{df}{dy}(x, \phi(x))} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \phi(x)) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, \phi(x)) \phi'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, \phi(x)) (\phi'(x))^2 \right)$$

Donc, meme sans connaitre ϕ explicitement, on peut construire un developpement limite de ϕ .

Graphiquement

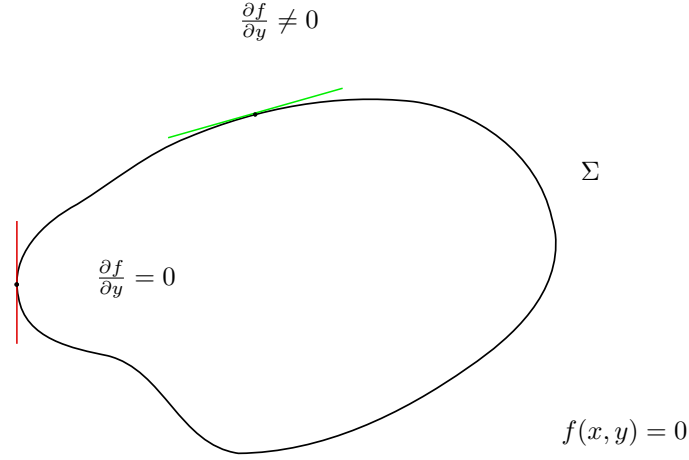


FIGURE 4 – courbe implicite

Theorème 43 (Fonction implicite en dimension 2)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, E ouvert non vide, de classe C^1 , $\Sigma = \{(x, y) \in E : f(x, y) = 0\}$ et $(x_0, y_0) \in \Sigma$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Alors il existe un $\delta > 0$, un ouvert $V \subset E$ contenant (x_0, y_0) et une unique fonction $\phi : U =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}$ tel que

- $y_0 = \phi(x_0)$
- $f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in U$
- $G(\phi) = \Sigma \cap V$

On peut facilement generaliser ce theoreme,

7.1.2 Cas $n > 1$

soit $f : E \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction implicite definie par f (aussi de classe C^1) autour du point $z_0 = (x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, cad $f = f(x, y)$

$$f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in U$$

Soit $f(x) = f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in U$, on a alors

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \phi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)$$

Donc, si $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \neq 0$, alors pour x suffisamment proche de x_0 , on peut ecrire

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}$$

Theorème 44

Soit $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ouvert non vide,

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $\Sigma = \{z \in E, f(z) = 0\}$ et $z = (x_0, y_0)$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, Alors il existe $\delta > 0$, un ouvert $V \subset E$ contenant z_0 et une unique fonction $\phi : U = B(x_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$ tel que

- $y_0 = \phi(x_0)$
- $\forall x \in U, f(x, \phi(x)) = 0$
- $G(\phi) = \Sigma \cap V$

De plus, si f est de classe C^k , alors ϕ est de classe C^k

Exemple

Soit $f(x, y) = x^2 - y$, $\Sigma = \{(x, y) : x^2 - y = 0\}$, alors

$$y = x^2 = \phi(x)$$

f définit une fonction implicite $y = x^2 \forall x \in \mathbb{R}$.

On peut essayer d'écrire $x = \phi(y)$

$$x^2 = y \implies x = \pm\sqrt{y}$$

Notons que, dans un voisinage de 0, on ne peut pas écrire Σ comme une fonction de y .

Exemple

Posons maintenant $f(x, y) = xe^y + ye^x$ et $\Sigma = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$.

Notons que $(x, y) = (0, 0)$, et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$$

On peut donc expliciter y en fonction de x , $y = \phi(x)$ et on a que

$$\phi'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)} = -1$$

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Sigma = \{z \in E, f(z) = 0\}$, $z_0 \in \Sigma$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \neq 0$.

Alors on sait qu'il existe une fonction implicite $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : G(\phi) = \Sigma \cap V$

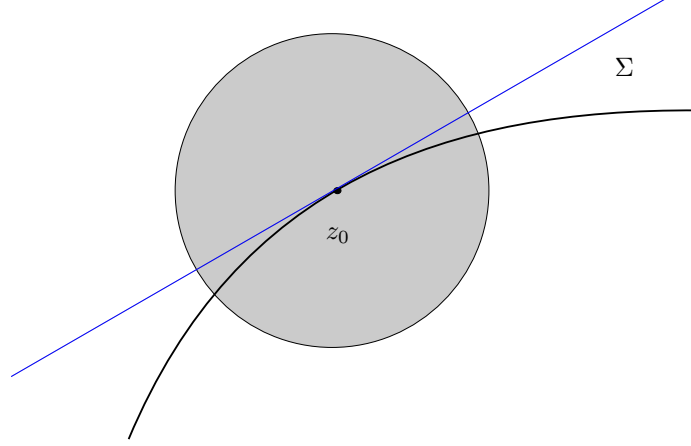


FIGURE 5 – voisinage de z_0

Alors, on peut construire l'hyperplan tangent au graphe $G(\phi)$ en z_0 qui est aussi l'hyperplan tangent à Σ en z_0 .

$$\begin{aligned}
\Pi_{\phi, z_0} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = \phi(x_0) + D\phi(x_0)(x - x_0)\} \\
&= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = y_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{0i}) \right\} \\
&= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = y_0 + \sum_{i=1}^n -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}(x_i - x_{0i}) \right\} \\
&= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0)(x_i - x_{0i}) = 0 \right\} \\
&= \left\{ z \in \mathbb{R}^{n+1} : \frac{\partial f}{\partial z_i}(z_0)(z_i - z_{0i}) = 0 \right\} \\
&= \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \nabla f(z_0) \cdot (z - z_0) = 0\}
\end{aligned}$$

Donc l'hyperplan tangent à Σ en z_0 est l'ensemble des point $z \in \mathbb{R}^{n+1} : z - z_0 \perp \nabla f$.

Si ∇f est nul, on ne peut pas définir l'hyperplan tangent, et donc on appelle ces points les points critiques de f .

Lecture 15: fonctions implicites-cas vectoriel

Wed 21 Apr

7.2 Cas Vectoriel

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, avec

$$f(z) = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix}$$

et soit $\Sigma = \{z \in E : f(z) = 0\}$, on peut reecrire ceci comme

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{z \in E : f_i(z) = 0\} \\ &= \bigcap_{i=1}^m \Sigma_i \end{aligned}$$

ou $\Sigma_i = \{z \in E : f_i(z) = 0\}$.

Exemple

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, defini par

$$f(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} f_1(z_1, z_2, z_3) \\ f_2(z_1, z_2, z_3) \end{pmatrix}$$

Alors

$$\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{(z_1, z_2, z_3) \in E : f_1(z_1, z_2, z_3) = 0\} \cap \{(z_1, z_2, z_3) \in E : f_2(z_1, z_2, z_3) = 0\}$$

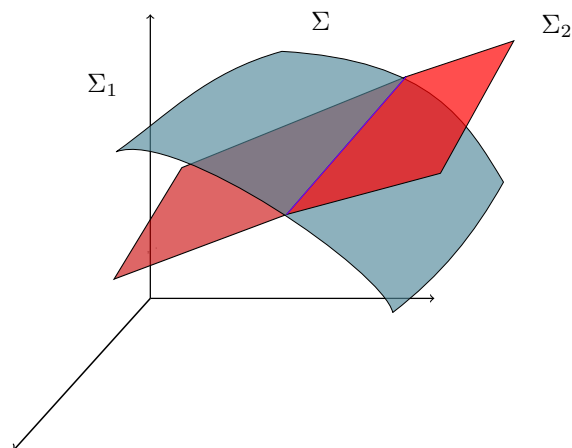


FIGURE 6 – surfaces intersection

Peut on représenter Σ comme le graphe d'une fonction de n variables ?
 Pour $z = (x, y), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$, on veut écrire

$$y = \phi(x) : G(\phi) = \Sigma \cap V$$

On étudie d'abord le cas d'une fonction affine, soit

$$f_a : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

une fonction affine, on peut donc écrire

$$f_a(z) = Az + b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n+m}, b \in \mathbb{R}^m$$

$$Az + b = [A_1 | A_2] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_1 x + A_2 y + b$$

On considère maintenant

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{z \in \mathbb{R}^{n+m} : f_a(z) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : A_1 x + A_2 y + b = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : A_2 y = -(b + A_1 x)\} \end{aligned}$$

Si A_2 est inversible, on peut écrire y comme fonction unique de x

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : y = -(A_2)^{-1}(b + A_1 x)\}$$

Dans le cas général, pour $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 .

$$\Sigma = \{z \in E : f(z) = 0\},$$

On écrit

$$\begin{aligned} f(z) &= \underbrace{f(z_0) + Df(z_0) \cdot (z - z_0)}_{:= f_a(z)} + R_f(z) \\ &= f(z_0) + [D_x f(z_0) | D_y f(z_0)] \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + R_f(z) \end{aligned}$$

La matrice $D_x f(z_0)$ est de taille $m \times n$ et $D_y f(z_0)$ est de taille $m \times m$, on peut donc écrire

$$f(z) \approx f_a(z) = f(z_0) + D_x f(z_0)(x - x_0) + D_y f(z_0)(y - y_0)$$

En posant $f_a(z) = 0$, on s'attend à ce que $f(z) = 0$ définit une fonction implicite $y = \phi(x)$ si $\det(D_y f(z_0)) \neq 0$

Theorème 48 (Fonctions Implicites - Cas vectoriel)

Soit $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ouvert non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 , $\Sigma = \{z \in E : f(z) = 0\}$, $z_0 \in \Sigma$.

Si $\det(D_y f(z_0)) \neq 0$, alors il existe un ouvert $V \subset E$ contenant z_0 , un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, et une fonction $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tel que

- $\phi(x_0) = y_0$
- $\forall x \in U, (x, \phi(x)) \in V, f(x, \phi(x)) = 0$
- $G(\phi) = \Sigma \cap V$
- $\det(D_y f(x, \phi(x))) \neq 0 \forall x \in U$

$$D\phi(x) = -D_y f(x, \phi(x))^{-1} D_x f(x, \phi(x))$$

- Si f est de classe C^k , alors ϕ est aussi de classe C^k .

Preuve

On construit la fonction $F : E \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, avec

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

On veut montrer que f est un difféomorphisme local autour de $z_0 = (x_0, y_0)$:

$$DF(x_0, y_0) = D \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_x f(z_0) & D_y f(z_0) \end{pmatrix}$$

On a

$$\det DF(z_0) = \det D_y f(z_0) \neq 0$$

par hypothèse.

Donc F est un difféomorphisme local.

Il existe donc $V' \subset E$ contenant $z_0 = (x_0, y_0)$ et un ouvert $U' \subset \mathbb{R}^{n+m}$ contenant $(x_0, 0)$ tel que $F : V' \rightarrow U'$ est un difféomorphisme

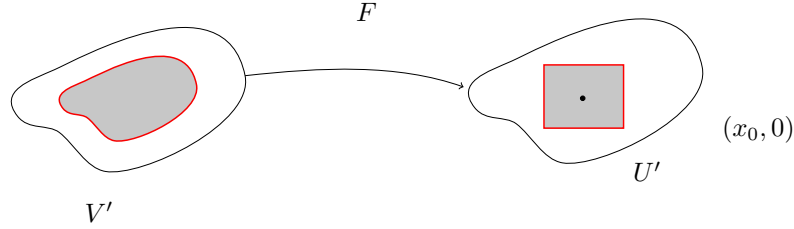


FIGURE 7 – V' vers U'

Il existe $\delta, \tilde{\delta} > 0$ tel que $\hat{U} = \{(x, y) : x \in B(x_0, \delta), y \in B(0, \tilde{\delta})\} \subset U'$.
 Soit $V = F^{-1}(\hat{U})$ et on considère la restriction $f : V \rightarrow \hat{U}$, d'inverse $G : \hat{U} \rightarrow V$

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

On peut donc réécrire ceci comme

$$\begin{cases} x = u \\ y = \psi(u, w) = \psi(x, w) \end{cases}$$

L'existence de $\psi : \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est donnée par hypothèse. Donc la fonction implicite cherchée est $\phi(x) := \psi(x, 0)$. ϕ est définie sur le voisinage de x :

$$\phi : U = B(x_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

En effet, on veut vérifier que $f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in U$, donc

$$(x, 0) = F \circ G(x, 0) = F(G(x, 0)) = F(x, \psi(x, 0)) = (x, f(x, \phi(x)))$$

Et donc $f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in U$.

On vérifie encore que $\Sigma \cap V \subset G(\phi)$.

En effet

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \Sigma \cap V \\ (x, y) &= (G \circ F)(x, y) = G(F(x, y)) \\ &= G(x, f(x, y)) = G(x, 0) = (x, \psi(x, 0)) = (x, \phi(x)) \end{aligned}$$

Donc $(x, y) \in G(\phi)$.

ϕ est de classe C^1 par la composition de fonctions de classe C^1 .

Puisque F est un difféomorphisme sur V , il s'ensuit que $\det DF(x, y) \neq 0 \forall (x, y) \in V$, donc en particulier, on a que

$$\det D_y f(x, \phi(x)) \neq 0 \forall x \in U$$

On pose

$$\tilde{f}(x) = f(x, \phi(x)) = 0$$

Etant donné que

$$f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in U, \text{ avec } f, \phi \in C^1$$

$$0 = Df(x, \phi(x))$$

$$0 = D_x f(x, \phi(x)) + D_y f(x, \phi(x)) D\phi(x) \quad \square$$

On en déduit l'égalité

Lecture 16: Extremas de fonctions

Mon 26 Apr

8 Extremas de fonctions

Definition 41 (Extremum d'une fonction)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $x^* \in E$.

On dit que f admet au point x^* un maximum global (ou absolu) si $\forall x \in E, f(x) \leq f(x^*)$

On dit que le maximum global est strict si $\forall x \in E, f(x) < f(x^*)$.

Le maximum est local si $\exists \delta > 0 : \forall x \in B(x^*, \delta) \cap E, f(x) \leq f(x^*)$.

Le maximum local est strict si $\exists \delta > 0 \forall x \in B(x^*, \delta) \cap E \setminus \{x^*\}, f(x) < f(x^*)$.

Les définitions sont les mêmes pour un minimum.

Par extremum local/global on étend un minimum ou un maximum de la fonction.

8.1 Extremas libres

Si l'ensemble E est ouvert

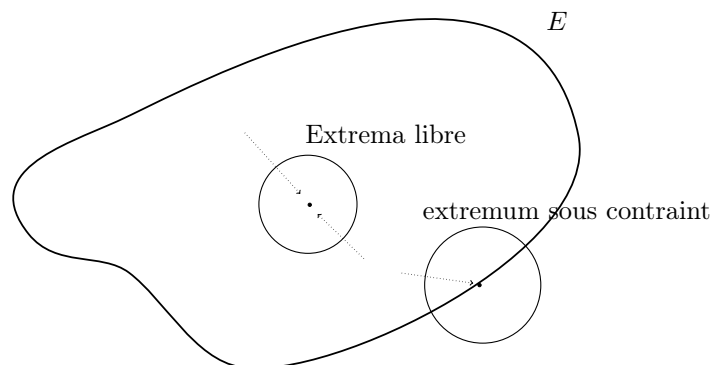


FIGURE 8 – extremum libre et extremum sous contrainte

Soit x^* un point d'extremum pour f . On dit que x^* est libre si $x^* \in \overset{\circ}{E}$ et x^* est sous-contraint si $x^* \in \partial E$.

Rappel cas $n = 1$

Soit $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I ouvert

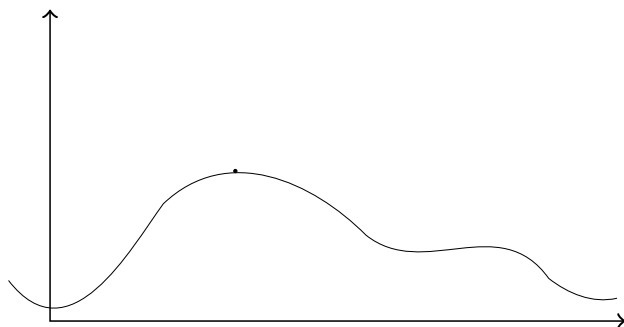


FIGURE 9 – fonction avec extremas

- Si f est derivable en x^* et x^* est un point d'extremum local de f , alors $f'(x^*) = 0$. (condition necessaire du premier ordre) .
- Si f est deux fois derivable qen x^* et x^* est minimum local de f , alors $f'(x^*) = 0, f''(x^*) \geq 0$ (condition necessaire du second ordre)

- Si f est deux fois différentiable sur I , $x^* \in I$ tel que $f'(x^*) = 0$ et $f''(x^*) > 0$, alors x^* est un point minimum local de f (condition suffisante du second ordre).
- Cas difficile à traiter : $f'(x^*) = 0, f''(x^*) = 0$.
On peut soit regarder les dérivées d'ordre supérieur ou bien étudier le signe de $g(x) = f(x) - f(x^*)$.

8.1.1 Cas $n > 1$

Soit $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, E un ouvert non vide.

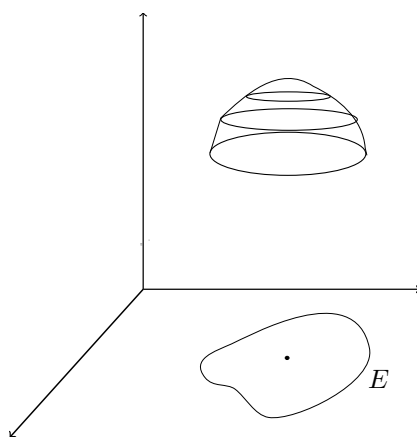


FIGURE 10 – fonctions deux variables extremas

Soit $v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$. Soit x^* un point de maximum local de f , i.e.

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in B(x^*, \delta) \cap E, f(x) \leq f(x^*)$$

On peut considérer

$$g_v(t) = f(x^* + tv), \quad t \in]-\delta, \delta[$$

Si f admet un maximum local en x^* , alors $g_v(t)$ admet un maximum local en $t = 0$.

Si f est différentiable en x^* , alors g_v est dérivable en $t = 0$, donc $g'_v(0) = 0$.

Mais $g'_v(0) = D_v f(x^*) = \nabla f(x^*) \cdot v = 0 \forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$.

Donc $\nabla f(x^*) = 0$

Donc la condition nécessaire du premier ordre est $\nabla f(x^*) = 0$.

Definition 42

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, E ouvert, différentiable en $x^* \in E$. On dit que x^* est un point stationnaire si $\nabla f(x^*) = 0$.

De plus, si f est deux fois différentiable en x^* , alors g_v est aussi deux fois différentiable en $t = 0$, donc $g_v''(0) \leq 0$.

Mais $g_v''(0) = D_{vv}f(x^*) = v^T H_f(x^*) v \leq 0 \forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$. Donc la condition nécessaire du second ordre est donc que $v^T H_f(x^*) v \leq 0 \forall v \in \mathbb{R}^n$ (pour que $f(x^*)$ soit un maximum local).

Theorème 49 (Condition suffisant du second ordre)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ admettant un extremum local en $x^* \in E$.

Si f est (une fois) différentiable en x^* , alors $\nabla f(x^*) = 0$.

Si f est deux fois différentiable en x^* et

- x^* est un point de maximum local, alors $v^T H_f(x^*) v \leq 0 \forall v \in \mathbb{R}^n$.
- Si x^* est un point de minimum local alors $v^T H_f(x^*) v \geq 0 \forall v \in \mathbb{R}^n$.

Definition 43 (Matrices définies positives)

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, on dit que

- A est définie positive si $x^T A x > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- A est semi-définie positive si $x^T A x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$
- memes définitions pour A (semi-) négative
- A est indéfinie si $\exists x, y : x^T A x > 0, y^T A y \leq 0$

A toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, on peut associer une forme quadratique $Q_A(x) = x^T A x$, $x \in \mathbb{R}^n$

Lemme 50

Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est définie positive si et seulement si $\exists c > 0 : x^T A x \geq c \|x\| \forall x \in \mathbb{R}^n$

Lemme 51

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A est définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres sont positives.

De plus c du lemme précédent est la valeur propre minimale.

Theorème 52 (Condition suffisante d'extremas)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur E , $x^* \in E$ un point stationnaire de f . (cad $\nabla f(x^*) = 0$). Si $H_f(x^*)$ est définie positive, alors x^* est un minimum local de f .

Si $H_f(x^*)$ est définie négative, alors $f(x^*)$ est un maximum local de f .

Preuve

Puisque $f \in C^2(E)$, on peut écrire un développement limité de f .

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f(x^*) \cdot (x - x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T H_f(x^*)(x - x^*) + R_f(x) \forall x \in E.$$

Alors, il existe $\delta > 0$ tel que $\frac{\|R_f(x)\|}{\|x-x^*\|} \leq \frac{c}{4} \forall x \in B(x, \delta) \cap E, x \neq x^*$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } f(x) &\geq f(x^*) + \frac{1}{2}c \|x - x^*\|^2 - \frac{c}{4} \|x - x^*\|^2 \\ &= f(x^*) + \frac{c}{4} \|x - x^*\|^2 \end{aligned}$$

□

Donc x^* est un minimum local strict de f .

Lecture 17: Extremas lies

Wed 28 Apr

8.2 Extremas lies

Exemple

Parmi tous les cylindres d'un volume donne \bar{V} , on cherche celui qui a une surface minimale. On a $S(R, H) = 2\pi RH + 2\pi R^2$ et $V(R, H) = \pi R^2 H$, on cherche

$$\min_{R>0, H>0} S(R, H)$$

sous la contrainte $V(R, H) = \bar{V}$

Formulation du probleme

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, E ouvert non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .
 $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , on cherche

$$\min_{x \in E} f(x) \text{ sous la contrainte } g(x) = 0$$

De facon equivalent, si on pose $\Sigma_g = \{x \in E : g(x) = 0\}$,

$$\min_{x \in \Sigma_g} f(x)$$

Exemple

On cherche

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} x^2 + y^2$$

tel que $x + y - 1 = 0$.

Les courbes de niveau de f sont $f(x, y) = c \iff x^2 + y^2 = c$, sous la contrainte $g(x, y) = 0 \iff y = 1 - x$.

Si (x^*, y^*) est le point de minimum sous-contrainte, alors on a

$$\nabla f(x^*, y^*) \parallel \nabla g(x^*, y^*)$$

Donc $\nabla g(x^*, y^*)$ est un vecteur orthogonal a Σ_g en (x^*, y^*) (vecteur orthogonal a l'hyperplan tangent a Σ_g en (x^*, y^*)).

$\nabla f(x^*, y^*)$ est un vecteur normal a la courbe de niveau $f(x, y) = f(x^*, y^*)$.

Cette affirmation est equivalent a

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*)$$

Theorème 55 (Condition nécessaire pour extremas liés)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide ($n \geq 2$), $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $z^* \in \Sigma_g$ un point d'extremum local lie. Si $\nabla g(z^*) \neq 0$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(z^*) = \lambda \nabla g(z^*).$$

Preuve

Puisque le gradient $\nabla g(z^*) \neq 0$, on peut utiliser le theoreme des fonctions implicites.

$$\nabla g(z^*) \neq 0 \Rightarrow \exists i \in [n] : \frac{\partial g}{\partial z_i}(z^*) \neq 0$$

Supposons $i = n$, on note $y = z_n$, $x = (z_1, \dots, z_{n-1})$.

Grace au theoreme des fonctions implicites, on sait qu'il existe un ouvert $V \subset E$ contenant z^* , un $\delta > 0$ et $\phi : B(x^*, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

- $\phi(x^*) = y^*$
- $\forall x \in B(x^*, \delta), (x, \phi(x)) \in V$, et $g(x, \phi(x)) = 0$.
- $G(\phi) = \Sigma_g \cap V$

On a

$$g(x, y) = 0 \iff y = \phi(x) \forall x \in B(x^*, \delta)$$

On definit $\tilde{f}(x) = f(x, \phi(x))$.

Si z^* est un point d'extremum local lie de f sur Σ_g , alors x^* est un point d'extremum libre de \tilde{f} sur $B(x^*, \delta)$.

Donc, $\nabla_x \tilde{f}(x^*) = 0$, donc

$$\iff 0 = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x^*) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x^*)$$

Mais

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x^*) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^*, y^*)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)}$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(z^*) - \frac{\partial f}{\partial g}(z^*) \frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}}{\frac{\partial g}{\partial y}}(z^*) = 0$$

On pose

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}}(z^*) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(z^*) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(z^*)$$

Donc toutes les composantes sont proportionnelles et on a

$$\nabla f(z^*) = \lambda \nabla g(z^*)$$

Remarque

Si z^* est un extremum local de f sur Σ_g et $\nabla g(z^*) \neq 0$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \nabla f(z^*) = \lambda \nabla g(z^*) \\ g(z^*) = 0 \end{cases}$$

Ensemble, ceci forme un systeme de $n + 1$ equations.

λ est appele multiplicateur de Lagrange

On definit la fonction de Lagrange (ou le lagrangien)

$$\mathcal{L} : E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathcal{L}(z, \lambda) = f(z) - \lambda g(z)$$

On a que

$$\nabla_{(z, \lambda)} \mathcal{L}(z, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla_z \mathcal{L} \\ \dots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \quad \square$$

Donc, si z^* est un extremum local de f sur Σ_g , alors il existe $\lambda^* \in \mathbb{R} : \nabla \mathcal{L}(z^*, \lambda^*) = 0$.

Lecture 18: Extremas sous contraintes multiples

Mon 03 May

8.3 Extremas sous contraintes multiples

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, et

$$f, g_1, \dots, g_m : E \rightarrow \mathbb{R}$$

On impose $m < n$, pour que le probleme ne soit pas surdetermine.

On cherche donc

$$\min_{z \in E} f(z) \text{ sous les contraintes } g_i(z) = 0 \forall 1 \leq i \leq m$$

Soit $g = (g_1, \dots, g_m) : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, et on definit l'ensemble faisable

$$\Sigma_g = \{z \in E : g(z) = 0\}$$

On cherche donc

$$\min_{z \in \Sigma_g} f(z)$$

Theorème 57 (Conditions necessaires d'optimalite)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide, $f, g_1, \dots, g_m : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $z^* \in \Sigma_g$.

Si $\text{Rang}(Dg(z^*)) = m$ (cad. les vecteurs $\nabla g_1(z^*), \dots, \nabla g_m(z^*)$ sont linéairement independants) .

Alors il existe $\vec{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ tel que

$$\nabla f(z^*) = \sum_i \lambda_i^* \nabla g_i(z^*)$$

Donc, (z^*, λ^*) satisfait le systeme

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z_1}(z^*) = \lambda_1^* \frac{\partial g_1}{\partial z_1} + \lambda_2^* \frac{\partial g_2}{\partial z_1}(z^*) + \dots \\ \frac{\partial f}{\partial z_2}(z^*) = \lambda_1^* \frac{\partial g_1}{\partial z_2} + \lambda_2^* \frac{\partial g_2}{\partial z_2}(z^*) + \dots \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial z_n}(z^*) = \lambda_1^* \frac{\partial g_1}{\partial z_n} + \lambda_2^* \frac{\partial g_2}{\partial z_n}(z^*) + \dots \\ g_1(z^*) = 0 \\ \vdots \\ g_m(z^*) = 0 \end{cases}$$

Il y a donc $n + m$ equations avec $n + m$ inconnues.

On peut definir un probleme equivalent, en passant par la fonction lagrangienne, notamment (z^*, λ^*) est un point stationnaire de la fonction de Lagrange :

$$\mathcal{L} : E \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

definie par

$$\mathcal{L}(z, \lambda) = f(z) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(z) = f(z) - \lambda \cdot g(z)$$

8.4 Condition suffisante pour extremas locaux lies

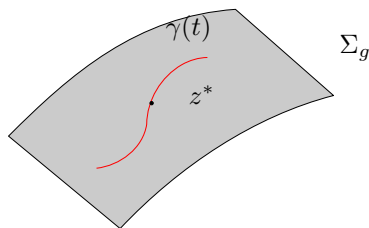


FIGURE 11 – extrema local lie

Soit $\gamma(t)$ un chemin sur Σ_g , $\gamma(0) = z^*$, et

$$\tilde{f}(t) = f \circ \gamma(t) = f(\gamma(t))$$

si $\tilde{f}''(0) > 0$ pour tout chemin alors z^* est un point de minimum local de f sur Σ_g .

On considere

$$w^T(H_f(z^*))w = D_{ww}f(z^*)\forall w \in T_z(\Sigma_g) = \{v \in \mathbb{R}^n : Dg(z^*) \cdot v = 0\}$$

Si on cherche un minimum on s'attend a ce que

$$D_{ww}f(z^*) > 0$$

Sauf qu'il faut corriger le fait que le chemin puisse etre courbe, donc la condition devient :

Soit $z^* \in \Sigma_g$ qui satisfait la condition necessaire, si

$$w^T(H_f(z^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* H_{g_i}(z^*))w > 0$$

Alors z^* est un point de minimum local de f sur Σ_g (lieu aux contraintes $g_i = 0 \forall 1 \leq i \leq n$).

9 Integrales multiples au sens de Riemann

But : Etant donne

- Un sousensemble borne $E \subset \mathbb{R}^n$ et
- une fonction bornee $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

Comme definir

$$\int_E f(x)dx$$

On va d'abord definir l'integrale sur un pave de \mathbb{R}^n , cad un sous-ensemble de \mathbb{R}^n de la forme

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

ou on suppose $a_i \leq b_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$

Le volume de R est defini comme

$$Vol(R) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

On dit que R est un pave degenerate s'il existe $k \in [n]$ tel que $a_k = b_k$.

Dans ce cas, on aura $Vol(R) = 0$.



FIGURE 12 – exemple de partition

Definition 44 (Partition)

On appelle partition d'un pave $R \subset \mathbb{R}^n$ une collection finie P de paves tel que

- $\bigcup_{Q \in P} Q = R$
- $\forall Q, Q' \in P, Q \neq Q', \overset{\circ}{Q} \cap \overset{\circ}{Q'} = \emptyset$

Definition 45 (Partition tensorielle)

Une partition P d'un pave R est dite tensorielle s'il existe pour tout $1 \leq j \leq n$.

$$a_j = t_j^0 \leq t_j^1 \leq \dots, t_j^{N_j} = b_j$$

tel que

$$P = \{[t_1^{\alpha_1}, t_1^{\alpha_1+1}] \times [t_1^{\alpha_2}, t_1^{\alpha_2+1}] \times \dots \times [t_1^{\alpha_n}, t_1^{\alpha_n+1}]\} \quad 1 \leq \alpha_i \leq N_i$$

On note alors

$$P = (t_1^0, \dots, t_1^{N_1}) \otimes (t_2, \dots, t_2^{N_2}) \otimes \dots \otimes (t_n^0, \dots, t_n^{N_n})$$

Definition 46 (Raffinement d'une partition)

Le raffinement d'une partition P d'un pave R .

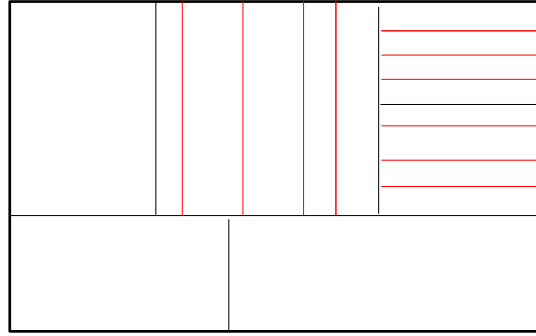


FIGURE 13 – raffinement d'une partition

Soit P et P' deux partitions d'un pave R

On dit que P' est un raffinement de P si pour tout $Q \in P$, la collection

$$P'_Q = \{Q' \in P' : Q' \subset Q\}$$

est une partition du pave Q .

Remarque

Soit P' un raffinement de P .

Si $Q' \in P'$ n'est inclus dans aucun $Q \in P$, alors $\text{vol}(R) = 0$

Remarque

P' est un raffinement de P si et seulement si

$$\forall Q' \in P' \text{ non degenerate } \exists Q \in P : Q' \subset Q$$

Remarque

Si P' est un raffinement tensoriel de P , alors pour tout $Q \in P$, la collection

$$P'_Q = \{Q' \in P' : Q' \subset Q\}$$

est un raffinement tensoriel de Q .

Lemme 61

Soit P, P' deux partitions d'un pave $R \subset \mathbb{R}^n$, alors il existe toujours un raffinement tensoriel P'' de P et P'

Preuve

Pour $P = \{[a_1^{i, b_1^i}] \times \dots, i = 1, \dots, k\}$ et

$$P' = \{[c_1^j, d_1^j] \times \dots, j = 1, \dots, k'\}$$

Prenons l'ensemble

$$\begin{aligned} & \{a_l^1, b_l^1, \dots, a_l^k, b_l^k, c_l^1, d_l^1, \dots, c_l^{k'}, d_l^{k'}\} \\ &= \{t_l^0, t_l^1, \dots, t_l^{k+k'}\} \text{ tel que } t_l^0 \leq t_l^1 \leq \dots \leq t_l^{k+k'} \end{aligned}$$

Alors

$$P'' = (t_1^0, \dots, t_1^{k+k'}) \otimes (t_2^0, \dots, t_2^{k+k'}) \otimes \dots$$

est une partition tensorielle qui raffine a la fois P et P' □

Lemme 62

Soit P une partition d'un pave $R \subset \mathbb{R}^n$.

Alors

$$vol(R) = \sum_{Q \in P} vol(Q).$$

Lecture 19: integrales multiples

Wed 05 May

Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pave ($R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$) et

$$f : R \rightarrow \mathbb{R}$$

borne.

Definition 47 (Somme de Darboux)

Soit P une partition du pave R , alors on definit les sommes inferieures $\underline{S}(f, P) =$

$$\sum_{Q \in P} \inf_{x \in Q} f(x) Vol(Q).$$

On peut definir les sommes superieures $\overline{S}(f, P) = \sum_{Q \in P} \sup_{x \in Q} f(x) Vol(Q)$

Lemme 63

Soit P une partition de R et P'' un raffinement de P , alors

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, P'') \leq \overline{S}(f, P'') \leq \overline{S}(f, P)$$

Pour toute partition P, P' de R on a toujours

$$\underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P')$$

Preuve

Puisque P'' est un raffinement de P ,

$$\forall Q \in P \quad Q = \bigcup_{\substack{Q'' \in P'' \\ Q'' \subset Q}} Q'' \quad \text{Vol}(Q) = \sum_{\substack{Q'' \in P'' \\ Q'' \subset Q}} \text{Vol}(Q'')$$

On a

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, P) &= \sum_{Q \in P} \inf_{x \in Q} f(x) \text{Vol}(Q) \\ &= \sum_{Q \in P} \inf_{x \in Q} f(x) \sum_{\substack{Q'' \in P'' \\ Q'' \subset Q}} \text{Vol}(Q'') \\ &\leq \sum_{Q \in P} \sum_{\substack{Q'' \in P'' \\ Q'' \subset Q}} \inf_{x \in Q''} f(x) \text{Vol}(Q'') \\ &= \sum_{Q'' \in P''} \inf_{x \in Q''} f(x) \text{Vol}(Q'') = \underline{S}(f, P'') \end{aligned}$$

L'inégalité intermédiaire est évidente, et la troisième se démontre de la même manière.

Il suffit de remarquer que tout couple P, P' de partitions de R admet un raffinement commun, nommons le P'' , alors on a

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, P'') \leq \overline{S}(f, P'') \leq \overline{S}(f, P') \quad \square$$

Definition 48 (Fonction intégrable au sens de Riemann)

Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pavé et $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ bornée. On appelle intégrale de Riemann inférieure $\int_R f(x) dx = \sup \{ \underline{S}(f, P) : P \text{ partition de } R \}$.

On définit de manière analogue l'intégrale de Riemann supérieure

$$\overline{\int}_R f(x) dx = \inf \{ \overline{S}(f, P) : P \text{ partition de } R \}$$

Une fonction f est dite intégrable au sens de Riemann si

$$\overline{\int}_R f(x) dx = \int_{-R} f(x) dx$$

dans ce cas, on note

$$\int_R f(x) dx$$

On note $\mathcal{R}(R)$ l'ensemble des fonctions $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ bornées et Riemann intégrables..

Remarque

Pour toute fonction $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ bornée,

$$\int_{\underline{R}} f(x)dx \text{ et } \int_{\overline{R}} f(x)dx$$

sont bien définies.

Enn effet, $\forall P, P'$ des partitions de R , on a

$$-\infty < \underline{S}(f, P) \leq \int_{\underline{R}} f(x)dx \leq \int_{\overline{R}} f(x)dx \leq \overline{S}(f, P') < +\infty$$

9.1 Caractérisation équivalente de fonctions intégrables**Lemme 65**

Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ et $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ bornée.

f est Riemann-intégrable si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, il existe une partition P_ϵ

$$\overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) < \epsilon$$

Preuve

f intégrable implique qu'il existe une partition P_ϵ tel que ...

$$\int_R f(x) = \int_{\underline{R}} f(x)dx = \sup_{P \text{ partition de } R} \underline{S}(f, P)$$

Alors

$$\exists P'_\epsilon : \underline{S}(f, P'_\epsilon) \geq \int_{\underline{R}} f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} = \int_R f(x)dx - \frac{\epsilon}{2}$$

et

$$\int_R f(x)dx = \int_{\overline{R}} f(x)dx = \inf_{P \text{ partition de } R} \overline{S}(f, P)$$

et donc

$$\exists P''_\epsilon : \overline{S}(f, P''_\epsilon) \leq \int_R f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$$

Soit maintenant P_ϵ un raffinement commun de P'_ϵ et P''_ϵ , alors

$$\overline{S}(f, P_\epsilon) \leq \overline{S}(f, P''_\epsilon) \leq \int_R f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$$

et

$$\underline{S}(f, P_\epsilon) \geq \underline{S}(f, P'_\epsilon) \geq \int_R f(x)dx - \frac{\epsilon}{2}$$

On montre la direction inverse

$$\begin{aligned} \int_{\overline{R}} f(x)dx &\leq \overline{S}(f, P_\epsilon) \\ \int_{\underline{R}} f(x)dx &\geq \underline{S}(f, P_\epsilon) \end{aligned}$$

$$\overline{\int_R f(x)dx} - \underline{\int_R f(x)dx} \leq \overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) \leq \epsilon$$

Puise que ϵ est arbitraire, on a que $\overline{\int_R f(x)dx} = \underline{\int_R f(x)dx}$ donc f est Riemann-integrable. \square

Theorème 66

Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pave et $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors f est Riemann-integrable.

Preuve

R est compact, donc f est uniformement continue

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall x, y \in R, \|x - y\| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

On peut toujours construire une partition P de R tel que

$$\forall Q \in P, \forall x, y \in Q : \|x - y\| < \delta_\epsilon$$

On pose P une partition tensorielle $\forall Q$ a des cotes de longueur h , alors

$$\forall x, y \in Q : \|x - y\| = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} \leq h\sqrt{n} < \delta_\epsilon$$

Il suffit donc de prendre $h < \frac{\delta_\epsilon}{\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) &= \sum_{Q \in P} (\sup_{x \in Q} f(x) - \inf_{x \in Q} f(x)) \text{Vol}(Q) = \sum_{Q \in P} (\max_{x \in Q} f(x) - \min_{x \in Q} f(x)) \text{Vol}(Q) \\ &= \sum_{Q \in P} (f(\overline{x}_Q) - f(\underline{x}_Q)) \text{Vol}(Q) \\ &< \sum_{Q \in P} \epsilon \text{Vol}(Q) = \epsilon \text{Vol}(Q) \end{aligned}$$

Donc $\forall \epsilon > 0$, on a trouve une partition P_ϵ tel que

$$\overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) < \epsilon$$

\square

Donc f est Riemann-integrable.

Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pave et $\hat{R} \subset \mathbb{R}^n$ un autre apve tel que $R \subset \overset{\circ}{\hat{R}}$.

Soit $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ bornee et considerons le prolongement par 0 de f sur \hat{R} : $\hat{f} : \hat{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors, f est Riemann integrable sur R si et seulement si \hat{f} est Riemann-integrable sur \hat{R} .

9.2 Formule d'intégrales itérées

Soit $R \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $\forall z \in R : z = (\underbrace{z_1, \dots, z_n}_{x \in \mathbb{R}^n}, \underbrace{z_{n+1}, \dots, z_{n+m}}_{y \in \mathbb{R}^m})$.

Notons $R = \underbrace{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]}_{R^{(1)}} \times \underbrace{[a_{n+1}, b_{n+1}] \times \dots \times [a_{n+m}, b_{n+m}]}_{R^{(2)}}$

Theorème 67 (de Fubini)

Soit $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et Riemann-intégrable,

$$f(x, y), x \in R^{(1)}, y \in R^{(2)}.$$

Si $\forall y \in R^{(2)}$ la fonction $f(\cdot, y) : R^{(1)} \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors la fonction

$$y \mapsto G(y) = \int_{R^{(1)}} f(x, y) dx : R^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}$$

est aussi Riemann-intégrable sur $R^{(2)}$ et

$$\int_R f(z) dz = \int_{R^{(2)}} G(y) dy = \int_{R^{(2)}} \left(\int_{R^{(1)}} f(x, y) dx \right) dy$$

Corollaire 68

Si $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors

$$\int_R f(z) dz = \int_{R^{(1)}} \left(\int_{R^{(2)}} f(x, y) dy \right) dx = \int_{R^{(2)}} \left(\int_{R^{(1)}} f(x, y) dx \right) dy$$

Lecture 20: Exponentielle d'une matrice

Wed 05 May

9.3 Exponentielle d'une matrice

Definition 49 (Exponentielle d'une matrice)

Pour $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, on définit

$$e^A = \text{Id} + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots$$

Definition 50 (Norme frobenius pour les matrices complexes)

$A \in \mathbb{C}^{n \times m}$,

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} |a_{ij}|^2}$$

Lemme 69

Pour $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$, on a

$$\|A \cdot B\|_F \leq \|A\|_F \cdot \|B\|_F$$

Preuve

On a $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}$, $B = (b_1, \dots, b_n)$, on a

$$\begin{aligned} \|AB\|_F &= \sqrt{\sum_{ij} |AB_{ij}|^2} \\ |(AB)_{ij}|^2 &= |a_i^T b_j|^2 \leq \|a_i\|^2 \|b_j\|^2 \\ \|AB\|_F^2 &= \sum_{ij} |(AB)_{ij}|^2 \leq \sum_{ij} \|a_i\|^2 \|b_j\|^2 = \sum_i \|a_i\|^2 \cdot \sum_j \|b_j\|^2 \quad \square \end{aligned}$$

Lemme 70

La serie e^A converge.

Preuve

On va considerer les sommes partielles $e^A = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$, $b_n = \sum_{j=1}^n \frac{A^j}{j!}$

Soient $m, n \in \mathbb{N}$, on considere

$$\begin{aligned} \|b_m - b_n\|_F &= \left\| \sum_{j=n+1}^m \frac{A^j}{j!} \right\|_F \\ &\leq \sum_{j=n+1}^m \frac{\|A\|_F^j}{j!} \leq \epsilon \end{aligned}$$

Donc les sommes partielles sont de Cauchy. □

On definit $e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tA)^j}{j!}$.

On a

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$$

Theorème 71

La solution du systeme d'equations

$$x' = Ax, \quad x(0) = v$$

est

$$x(t) = e^{At} \cdot v.$$

Preuve

soit $x(t) = e^{At}v$, on a clairement que $x(0) = v$ et

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot e^{At}v = Ax(t) \quad \square$$

Methode de calcul**Definition 51 (Matrice nilpotente)**

Une matrice N est nilpotente si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$.

Theorème 72

Chaque matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ peut etre factorisee comme

$$A = P(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + N)P^{-1}$$

ou $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est nilpotente, $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est inversible, λ_1, \dots , sont des valeurs propres de A et

$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et N commutent .

Lemme 73

$A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, si $A \cdot B = B \cdot A$, alors on a que

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i A^i}{i!}, \quad A = P(D + N)P^{-1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} (P(D + N)P^{-1})^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} P(D + N)^i P^{-1} \\ &= P \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} (D + N)^i \right) P^{-1} \\ &= P e^{t(D+N)} P^{-1} \\ &= P e^{tD} e^{tN} P^{-1} \\ &= P \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i D^i}{i!} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i N^i}{i!} \right) P^{-1} \\ &= P \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tD)^i}{i!} \right) \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{t^i N^i}{i!} \right) P^{-1} \end{aligned}$$

Donc, si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$$