Série 5, Exercice 6

David Wiedemann

16 octobre 2020

Soit A et B deux groupes d'ordre 3.
Regardons la loi de composition $\star$ sur A, la construction d'une loi de composition sur B.
Posons $A = \{e_A, a, a'\}$, on dénote par e_A l'élément neutre.
Clairement $e_A \star a = a, e_A \star a' = a', a \star e_A = a, a' \star e_A = a'$ car sinon e_A ne serait pas l'élément neutre.
Supposons maintenant que $a \star a' \neq e_A$, alors a n'admet pas d'inverse, donc $a \star a' = e_A$.
Le raisonnement est le même pour a', en effet $a' \star a = e_A$.
Finalement, on considère $a \star a$, supposons que $a \star a = e_A$, alors a admet deux inverses ce qui est une contradiciton.
Supposons donc que $a \star a = a$, alors $a \star a \star a' = a \star a'$ et donc $a = e_A$ ce qui est une contradiciton. Ce qui force $a \star a = a'$.
Avec le même raisonnement, on montre que $a' \star a' = a$.

Donc, il y a une manière unique de construire une loi de composition sur un groupe d'ordre 3.
On peut donc définir une table pour la composition sur A, ainsi

$\star$	e_A	a	a'
e_A	e_A	a	a'
a	a	a'	e_A
a'	a'	e_A	a

et de même pour un groupe $B = \{e_B, b, b'\}$ d'ordre 3 [1]

$\times$	e_B	b	b'
e_B	e_B	b	b'
b	b	b'	e_B
b'	b'	e_B	b

Par la construction ci-dessus, on sait que la loi de composition sur B est unique.

On définit donc la bijection ϕ de A vers B

$$\phi : x \in A \to \begin{cases} e_B \text{ si } x = e_A \\ b \text{ si } x = a \\ b' \text{ si } x = a' \end{cases}$$

On vérifie facilement qu'il s'agit d'un isomorphisme.