Prof. Friedrich Eisenbrand 7 mars 2021

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2021

Série 3

Exercice 1.

1. Soit V un espace vectoriel réel et soit $B = \{v_1, \ldots, v_4\}$ une base de V. Soit f l'endomorphisme défini par

$$f(v_1) = v_1 - v_2, f(v_2) = 2v_2 - 6v_3, f(v_3) = -2v_1 + 2v_2, f(v_4) = v_2 - 3v_3 + v_4.$$

   Écrivez la matrice A_B de l'application f dans la base $B = \{v_1, \ldots, v_4\}$. Est-ce que f est inversible? Si oui, écrivez la matrice A_B^{-1} de l'application inverse $f^{-1} : V \longrightarrow V$.

2. Maintenant, soit g un autre endomorphisme défini par

$$g(v_1) = v_1 + 2v_2, g(v_2) = v_3 + v_4, g(v_3) = v_1 + v_2 + v_3, g(v_4) = 3v_2 - 2v_3.$$

   Écrivez la matrice C_B de l'application g dans la base $B = \{v_1, \ldots, v_4\}$. Est-ce que g est inversible? Si oui, écrivez la matrice C_B^{-1} de l'application inverse $g^{-1} : V \longrightarrow V$.

3. Maintenant soit $B' = \{w_1, \ldots, w_4\}$ une autre base de V telle que

$$v_1 = w_1 + w_2, v_2 = w_3 + w_4, v_3 = w_1 + w_2 + w_3, v_4 = w_2 + w_4.$$

   Écrivez la matrice $P_{BB'}$ de changement de base, c.à.d. $[v]_{B'} = P_{BB'}[v]_B$. Écrivez la matrice $A_{B'}$ de l'application f dans la base B', et la matrice $C_{B'}$ de l'application g dans la base B'.

   Rappel:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_B"] & V \arrow[d, "\phi_B"] \\ K^n \arrow[r, "A"] & K^n \end{tikzcd}$$

Exercice 2. Calculer les valeurs propres et les espaces propres des matrices suivantes sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ (mais avec $\varphi \in [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}$ dans le cas 2).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Sachant que $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 5$, calculer $\det \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ g & h & i \\ 4d+3g & 4e+3h & 4f+3i \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soient V un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$, et $f : V \to V$ un endomorphisme. On dit qu'un sous-espace vectoriel $U \subseteq V$ est *invariant* par f si $f(U) \subseteq U$. Montrer que les espaces propres de $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ sont invariants par f.

Exercice 5. Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & \mathrm{i} & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$,

2. $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

Exercice 6. (*) Une matrice $A \in K^{n\times n}$ est appelée *diagonalisable* si l'endomorphisme $\phi : K^n \mapsto K^n$ défini comme $\phi(x) = Ax$ est diagonalisable.

Démontrer que A est diagonalisable si et seulement s'il existe $U \in K^{n\times n}$ inversible telle que $U^{-1}AU$ est une matrice diagonale.