Série 1

David Wiedemann

28 février 2021

1

Faisons d'abord l'observation que pour tout $\gamma > 0$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\gamma} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\gamma x^{\gamma-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\gamma x^\gamma} = 0$$

Où on a utilisé la règle de Bernoulli-L'Hospital.
Notons donc maintenant que pour tout $\alpha > 1$, il existe, par densité des réels un $\beta \in \mathbb{R}$ qui satisfait $\alpha > \beta > 1$. En Choisissant un β satisfaisant cette propriété, on trouve que

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha} \ln(x) x^\beta = 0$$

Ainsi, par un théorème du cours, l'intégrale doit exister.

On procède par intégration par parties pour trouver le résultat, on a ainsi

$$\int_1^\infty x^{-\alpha} \ln(x) dx = \left[\frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1} \ln(x)\right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1} \frac{1}{x} dx$$

Le premier terme vaut 0, il vient

$$\begin{aligned}\int_1^\infty x^{-\alpha} \ln(x) dx &= -\int_1^\infty \frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha} dx \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)^2}\end{aligned}$$

2

Pour la suite posons $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$ et $g : [-1, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = k^{-\alpha} \ln(k) \text{ si } x \in [k, k+1[$$

On fait d'abord l'observation que

$$f'(x) = x^{-\alpha-1} (1 - \alpha \ln(x))$$

Ainsi on a, par un théorème d'analyse I, que l'extremum local se situe en

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \alpha \ln(x) = 0 \Rightarrow x = e^{\frac{1}{\alpha}}$$

Ou l'on ne considére pas la solution $x = 0$ car elle n'appartient pas à l'ensemble de définition.
De plus, on note que $1 - \alpha \ln(x) < 0 \quad \forall x > e^{\frac{1}{\alpha}}$ et $1 - \alpha \ln(x) > 0 \quad \forall x \in [1, e^{\frac{1}{\alpha}}[$ et ainsi $x = e^{\frac{1}{\alpha}}$ est un extremum global [1].

Par hypothèse, $\alpha > 1$, et ainsi la position du maximum est constamment plus petite que $e^{\frac{1}{1}} = e$.
Si $f(x)$ est décroissante sur $[e^{\frac{1}{\alpha}}, +\infty[$, $f(x-1)$ est décroissante sur $[e^{\frac{1}{\alpha}} + 1, +\infty[$ et donc en particulier sur $[4, +\infty[$, il en suit que

$$g(x) \leq f(x-1) \quad \forall x > 4$$

Notons maintenant que

$$\sum_{k=1}^{N} k^{-\alpha} \ln(k) = \int_{1}^{N+1} g(x)dx$$

pour $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Ainsi, pour tout $X \in [4, +\infty[$

$$0 \leq \int_{4}^{X} g(x)dx \leq \int_{4}^{X} x^{-\alpha} \ln(x)dx$$

où on a utilisé que $g(x)$ est positive sur l'intervalle.
Par le critère de comparaison, on en déduit que

$$\int_{4}^{\infty} g(x)dx$$

converge, car majorée et minorée.
On finit la preuve en notant que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-\alpha} \ln(k) = 2^{-\alpha} \ln(2) + 3^{-\alpha} \ln(3) + \int_{4}^{\infty} f(x)dx$$

Et ainsi la série converge.

3

Etant donne que $f(x-1)$ atteindra son maximum en $e^{\frac{1}{\alpha}} + 1$,on peut considèrer un encadrement à partir de $x = 4$.
Avant de l'expliciter, on constate que

$$\forall x > 4 \quad f(x-1) \geq g(x) \geq f(x)$$

1. Ces deux propriétés suivent de $\ln(x)$ étant une fonction strictement croissante

Ces inégalités suivent directement de $f(x)$ étant décroissante.

Etant donné que, par la section 1, $\int_4^{+\infty} f(x)dx$ converge, on a, par un théorème du cours

$$\int_4^{+\infty} f(x-1)dx \geq \int_4^{+\infty} g(x)dx = \sum_{k=4}^{\infty} k^{-\alpha}\ln(\alpha) \geq \int_4^{\infty} f(x)dx$$

En évaluant les integrales, on trouve ainsi que

$$\frac{3^{1-\alpha}(\alpha-1)\log(3)+1}{(\alpha-1)^2} \geq \sum_{k=4}^{\infty} k^{-\alpha}\ln(k) \geq \frac{4^{1-\alpha}(\alpha-1)\log(4)+1}{(\alpha-1)^2}$$

Finalement, en ajoutant les trois premiers termes de la somme on trouve

$$\begin{aligned}
&2^{-\alpha}\ln(2) + 3^{-\alpha}\ln(3) + \frac{3^{1-\alpha}(\alpha-1)\log(3)+1}{(\alpha-1)^2} \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}\ln(k) \\
&\geq 2^{-\alpha}\ln(2) + 3^{-\alpha}\ln(3) + \frac{4^{1-\alpha}(\alpha-1)\log(4)+1}{(\alpha-1)^2}
\end{aligned}$$