EPFL - Automne 2020	Prof. Z. Patakfalvi
Structures Algébriques	**Exercices**
Série 7	30 Octobre 2020

Veuillez télécharger vos solutions aux exercices à rendre (Exercices 2.1 et 2.2) sur la page Moodle du cours avant le lundi 9 novembre, 18h.

Les Exercices à rendre sont signalés par un ♠.

Exercice 1.
Montrez que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ contient exactement 6 éléments.

Exercice 2.

1. ♠ Montrez que $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sont isomorphes entre eux si et seulement $(n, m) = 1$.
   Indication : Si $(n, m) = 1$, construisez un homomorphisme $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et étudiez ensuite son noyau. Si $(n, m) \neq 1$, étudiez les ordres des éléments des deux groupes.

2. ♠ (Théorème des restes chinois.) Soit $n_1, \ldots, n_r$ des entiers ≥ 2 et deux-à-deux premiers entre eux. Montrez que
$$\mathbb{Z}/(n_1 \cdots n_r)\mathbb{Z} \;\cong\; \prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$$
   et donnez la forme explicite de cet isomorphisme.
   Indication : Utilisez le point précédent par induction.

3. Trouvez les solutions dans $\mathbb{Z}$ du système de congruences
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{57} \\ x \equiv 2 \pmod{121} \end{cases}$$
   Indication : Utilisez le point précédent.

4. Soient $n_1, \ldots, n_r$ des entiers ≥ 2 et deux-à-deux premiers entre eux. Montrez que
$$(\mathbb{Z}/(n_1 \cdots n_r)\mathbb{Z})^\times \cong \prod_{i=1}^{r} (\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z})^\times .$$
   Indication : Donnez à $\mathbb{Z}/(n_1 \cdots n_r)\mathbb{Z}$ et à $\prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ des opérations de multiplication de telle manière que l'isomorphisme de groupes du deuxième point soit aussi un isomorphisme de monoïdes.

Exercice 3 (Fonction phi d'Euler)**.**
Pour rappel, la fonction phi d'Euler $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie dans la Définition 3.1.17 du cours.

1. Montrez que si $a, b \geq 2$ sont premiers entre eux, alors
$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b).$$
Indication : utilisez l'Exercice 2.4.

2. Montrez que si p est un nombre premier et $k \geq 1$, alors
$$\phi(p^k) = (p-1)p^{k-1}.$$

3. Déduisez que si $p_1, \ldots, p_r$ sont des premiers distincts et que $k_1, \ldots, k_r \geq 1$, alors
$$\phi\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i}\right) = \prod_{i=1}^{r} (p_i - 1)p_i^{k_i - 1}.$$

Exercice 4.
Soit $n \geq 2$ un entier.

1. Montrez que les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont donnés par les sous-ensembles
$$d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{[rd]_n \mid r \in \mathbb{Z}\}$$
où $0 < d \leq n$ divise n.
Indication : inspirez-vous de la preuve de l'Exercice 5 de la Série 6.

2. Si $n = dm$, montrez que $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

3. Montrez que $[k] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ génère le groupe entier $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si $(k, n) = 1$.
Indication : utilisez une relation de Bézout.

4. Déduisez que pour tout $n \geq 2$,
$$n = \sum_{d \mid n} \phi(d).$$
Indication : remarquez que chaque élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ engendre un sous-groupe ; et que le nombre d'élément engendrant ce sous-groupe peut être calculé grâce à la fonction phi d'Euler.

Exercice 5.
Trouvez tous les sous-groupes de S_3 et de A_4 qui sont engendrés par un élément.

Exercice 6.
Trouvez la signature de la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

ainsi que des cycles

$$(1\ 3\ 4\ 5) \quad \text{et} \quad (2\ 3\ 1)(6\ 5\ 4).$$