Analyse Numérique

Semestre de Printemps 2022 - Section MA

Prof. Annalisa Buffa

Séance 6 - 1 avril 2022

Exercice 1 (Matlab)

On se donne $n+1$ points, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dans l'intervalle $[-1,1]$ et on cherche l'interpolation polynomiale de degré n de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+9x^2}$. Supposons que le polynôme d'interpolation soit donné par : $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Afin d'obtenir les valeurs des a_k pour construire $p(x)$, on peut résoudre le système suivant $Va = y$, où V est la matrice de Vandermonde et où $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

1. Définir la matrice V avec la commande `vander` pour $n = 2, \ldots, 20$ avec noeuds équirépartis. Tracer le graphe en échelle semilogarithmique (commande semilogy) du nombre de conditionnement de V (utiliser la commande `cond`) en fonction de n.
2. Soit $n = 10$, utiliser le code suivant pour résoudre le système linéaire $Va = y$:

```
f=@(x) 1./(1+(3*x).^2);
n=10;
x=linspace(-1,1,n+1);
V=vander(x);
[L,U,P]=lu(V);
b=f(x');
y=L\(P*b);
a=U\y
```

   Ce moyen de résoudre un système linéaire est appelé factorisation LU. Cette factorisation va être étudiée plus tard en cours.
   À partir du vecteur $a = [a_n, \ldots, a_0]$ obtenu par la résolution du système linéaire, utiliser la commande `polyval` pour évaluer la solution obtenue dans 500 noeuds équirépartis. Comparer graphiquement $p_{10}(x)$ avec la fonction $f(x)$ et commenter le résultat obtenu avec cette technique. Pourquoi a-t-on ce résultat ? Comment pourrait-on l'améliorer ?
3. Calculer l'interpolation de f sur les nœuds de Chebyshev pour $n = 2, 4, 6, \ldots, 20$ et calculer l'erreur $\max_x |f(x) - p_n(x)|$. Tracer le graphe des erreurs en fonction de $n = 2, 4, 6, \ldots, 20$ en échelle semilogarithmique et bilogarithmique.
4. Que peut-on affirmer sur le taux de convergence ?

Exercice 2 (Matlab)

On appelle **nœuds de Gauss-Legendre** les racines du n-ième polynôme de Legendre définie par la relation de récurrence suivante :

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \quad \text{et} \quad nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x).$$

En général, les racines du polynôme de Legendre n'ont pas de solution analytique, mais elles peuvent être approchées numériquement. Ceci a été fait dans le fichier fourni `GaussLegendre.m` que vous pourrez utiliser dans cet exercice pour calculer les noeuds de Gauss-Legendre.

On va étudier la stabilité du polynôme d'interpolation de Lagrange sur noeuds équirépartis et sur noeuds de Gauss-Legendre, et celle du polynôme d'interpolation linéaire par morceaux. On considère la fonction

$$f(x) = \sin(x) + x,$$

qu'on interpole sur l'intervalle $[0, 10]$ en $n+1$ noeuds x_i, $i = 1, ..., n+1$. On considère deux jeux de données (x_i, y_i) et (x_i, z_i), $i = 1, ..., n+1$, où $y_i = f(x_i)$ et z_i est une perturbation de y_i donnée par $z_i = y_i + \varepsilon_i$ avec ε_i une erreur aléatoire uniforme dans $(-0.1, 0.1)$. Cette perturbation peut par exemple être due à des erreurs de mesures. Une fois la fonction f et n définis, on obtient ces données par les commandes

```
x=linspace(0,10,n+1);
y=f(x);
pert=-0.1+0.2*rand(1,n+1);
z=y+pert;
```

où `rand(1,n+1)` (voir `help rand`) renvoie un vecteur de $n+1$ nombres aléatoires uniformes sur $(0, 1)$. Noter que les valeurs renvoyées par `rand` sont évidemment différentes à chaque exécution.

1. On considère $n+1$ noeuds équirépartis avec $n = 4$. En utilisant les commandes `polyfit` et `polyval`, calculer et tracer le polynôme de degré n obtenu pour chaque jeu de données, ainsi que la "vraie" fonction f. Faire de même pour $n = 15$. Que se passe-t-il ?
2. Répéter le point a) en utilisant cette fois-ci les noeuds de Gauss-Legendre obtenus grâce à la fonction `GaussLegendre` fournie. Commenter les résultats obtenus.
3. En utilisant la fonction `interp1`, calculer le polynôme linéaire par morceaux $p_{1,h}$ sur n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur $h = \frac{10}{n}$ (noeuds équirépartis comme au point 1.) pour $n = 6$ et $n = 14$. Comparer graphiquement les polynômes obtenus avec la "vraie" fonction f d'où les données proviennent.
4. Refaire les questions 1., 2. et 3. avec la fonction

   $$f(x) = \frac{1}{1 + \exp(4x)}$$

   sur l'intervalle $[-5, 5]$, et seulement avec le jeu de données non perturbées. Pour $n = 2, 3, \dots, 40$, calculer de plus les erreurs d'approximation $E = \max_{x \in [-5,5]} |f(x) - \Pi f(x)|$, où Πf est le polynôme d'interpolation obtenu dans chaque cas. Visualiser les erreurs en fonction de n sur un graphe en échelle logarithmique. Commenter les résultats obtenus.

Exercice 3 (à la main)

On considère la fonction

$$f(x) = e^{2x}, \qquad x \in [0, 1].$$

Soit N un nombre entier, $H = 1/N$, et $\Pi_1^H f$ le polynôme composite linéaire par morceaux qui interpole la fonction f aux noeuds $x_i = iH$, $i = 0, 1, \dots, N$.

1. Calculer le nombre minimal N de sous-intervalles pour que l'erreur d'interpolation E_1^H soit inférieure à 10^{-4}, avec $E_1^H(f) = \max_{x \in [0,1]} \left| f(x) - \Pi_1^H f(x) \right|$.

2. Soit $\Pi_n f$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n qui interpole f aux noeuds $x_i = i/n,\ i = 0, 1, \ldots, n$. Est-ce que l'erreur d'interpolation $E_n(f) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - \Pi_n f(x)|$ tend vers zéro lorsque $n \to \infty$? Est-ce que le nombre de noeuds nécessaires pour que l'erreur soit plus petite que 10^{-4} est du même ordre de grandeur que celui du point 1. ? Justifier vos réponses.

Exercice 4

Considèrons l'interpolation de Chebyshev pour trouver un polynôme d'interpolation de degré 3, $p_3^C(x)$, qui interpole la fonction $f(x) = x^{-3}$ sur l'intervalle $[3, 4]$.

1. Étant donnés les deux premiers polynômes de Chebyshev $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$, prouver la formule récursive suivante :

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1\,.$$

2. Quel sont les points $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$ qui serviront de noeuds d'interpolation pour $p_3^C(x)$?
3. Trouver une borne supérieure pour l'erreur $|x^{-3} - p_3^C(x)|$ qui est valide pour tout x dans l'intervalle $[3, 4]$.
4. Combien de chiffres après la virgule seront corrects lorsque $p_3^C(x)$ est utilisé pour approximer x^{-3} ?
5. Calculer numériquement $p_3^C(x)$ avec Matlab, et tracer le graphe de l'erreur et la borne supérieure de l'erreur en fonction de x en échelle semilogarithmique.
6. Comparer le polynôme d'interpolation obtenu en utilisant les noeuds Chebyshev celui qui utilise les noeuds équirépartis sur l'intervalle $[3, 4]$.