Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-04-19 au 2021-04-23

Série 16 du mercredi 21 avril 2021

Exercice 1.

Notons

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \tag{1}$$

la sphère de $\mathbb{R}^3$ de rayon 1 centrée en l'origine.

1) Identifier les points $(x_0, y_0, z_0) \in S$ au voisinage (ouvert) U desquels on peut décrire S comme le graphe d'une fonction Z définie, pour tout $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$, par $Z = \Gamma(x, y)$. Pour les points où une telle fonction Γ existe, écrire Γ explicitement. Pour les autres points, prouver qu'une telle fonction n'existe pas.
2) Donner l'équation du plan tangent à S en un point quelconque $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

Exercice 2.

Considérons l'équation

$$-1 + x^2 + yz^5 + \arctan(xyz) + \ln \frac{\sqrt{1 + x + z}}{3z} + \ln \sqrt[3]{y^2 + z^3} = 0 \tag{2}$$

1) Montrer que (2) définit, au voisinage du point $(1, 0)$, une fonction implicite $z = \phi(x, y)$ telle que $\phi(1, 0) = 7$.
2) Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = \phi(x, y)$ au point $(1, 0)$.

Exercice 3.

Considérons le système d'équations

$$\begin{cases} x - y^3 + z + 8 = 0, \\ x^3 + y^4 - z^5 - 16 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

1) Montrer que (3) définit, au voisinage du point $x = 0$, deux fonctions implicites $y = \phi_1(x)$ et $z = \phi_2(x)$, telles que $(\phi_1(0), \phi_2(0)) = (2, 0)$.
2) Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 de chacune des deux courbes $y = \phi_1(x)$ et $z = \phi_2(x)$.
3) Quelle autre paire de fonctions implicites (3) définit-il :
   a) $x = \phi_1(y)$ et $z = \phi_2(y)$ au voisinage de 2, avec $(\phi_1(2), \phi_2(2)) = (0, 0)$, ou bien
   b) $x = \phi_1(z)$ et $y = \phi_2(z)$ au voisinage de 0, avec $(\phi_1(0), \phi_2(0)) = (0, 2)$?

Exercice 4.

Soit $\boldsymbol{h} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction définie par

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} u_1^2 + u_2 + w_1^2 \\ e^{u_1} - 1 + u_2 + w_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

1) Montrer que $\boldsymbol{h}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = (0, 0)^\top$ et que $\boldsymbol{h} \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.
2) Soit $\epsilon > 0$; notons $\mathrm{B}(\mathbf{0}, \epsilon) \subset \mathbb{R}^2$ la boule ouverte de rayon ϵ centrée sur $\mathbf{0}$. Montrer que, si $\epsilon > 0$ est suffisamment petit, $\exists \boldsymbol{f} \in \mathrm{C}^2(\mathrm{B}(\mathbf{0}, \epsilon), \mathbb{R}^2)$ telle que, $\forall \boldsymbol{w} \in \mathrm{B}(\mathbf{0}, \epsilon)$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$.
3) Calculer $\mathrm{D}\, \boldsymbol{f}(\mathbf{0})$.