EPFL Automne 2020

Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 9

Tous les exercices seront corriges. La correction sera postee sur le moodle apres 2 semaines.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le dimanche de la semaine suivante celle ou la serie a ete postee. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme de fichier pdf (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien a cet effet dans la semaine de la serie.

Soit K un corps ; dans la suite si n est un entier on ecrira "n" pour $n_K = n.1_K$. De meme si n n'est pas divisible par $\mathrm{car}(K)$ (de sorte que n_K est inversible), on ecrira n^{-1} ou $1/n$ pour l'inverse multiplicatif de n_K : par exemple si $\mathrm{car}K \neq 3$, on ecrira $2/3 = 2.3^{-1}$ pour $2_K.3_K^{-1}$.

Exercice 1. Soit

$$\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2} & \mapsto & \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2} \\ P(t) & \mapsto & 2P'(t) - P(t) \end{array}.$$

Soit $\mathscr{B}^0 = \{1, t, t^2\}$ la base canonique et $\mathscr{B} = \{1 + t, t^2, t^2 + 1\}$

1. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base.
2. Calculer les matrices de passage $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}^0\mathscr{B}}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}\mathscr{B}^0}$.
3. Determiner la matrice de α par rapport a la base $\mathscr{B}$.

Exercice 2. soit K un corps de caracteristique $\neq 3$ et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} K^2 & \mapsto & K^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x/3 + 4y/3, -x/3 + 5y/3) \end{array}.$$

Soit $\mathscr{B} := \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\} = \{(2, 1), (1, 2)\}$

1. Calculer la matrice M de φ dans la base canonique.
2. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de K^2 et calculer la matrice N de φ dans cette base de deux manieres :
   — Par la formule de changement de base pour les matrices.
   — Directement exprimant $\varphi(\mathbf{f}_i)$ $i = 1, 2$ en combinaison lineaire de $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$.

— Montrer que si $\mathrm{car}(K) = 3$ alors $\mathscr{B}$ n'est pas une base.

3. Calculer N^n pour tout entier $n \geqslant 0$.
4. Montrer que si $C \in \mathrm{GL}_2(K)$ et $U \in M_2(K)$ alors pour tout $n \geqslant 0$
$$(C.U.C^{-1})^n = C.U^n.C^{-1}.$$
5. En deduire une expression de la puissance M^n pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 3. Soit la matrice
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
On la considere comme un endomorphisme π de l'espace K^4 exprimee dans la base canonique.

1. Trouver une base de $\ker \varphi$ et une base de $\operatorname{Im} \varphi$.
2. Montrer que $\pi^2 = \pi$. Ainsi (voir la serie precedente) π est un projecteur et on a
$$K^4 = \operatorname{Im} \pi \oplus \ker \pi.$$
3. En choisissant une base convenable de K^4, montrer que M est semblable (ie. conjuguee) a la matrice
$$P_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
et donner une matrice C telle que
$$P_2 = C.M.C^{-1}$$
(on cherchera C comme une matrice de passage).

Exercice 4. Soit $A = (a_{ij})_{i,j \leqslant 2} \in M_2(K)$ une matrice et $[A.]$, l'application de multiplication a gauche par A :
$$[A.] : M \in M_2(K) \mapsto A.M \in M_2(K).$$
1. Montrer que $[A.]$ est lineaire.
2. Calculer la matrice de $[A.]$ dans la base canonique de $M_2(K)$
$$\mathscr{B}_{22}^0 = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}.$$

3. Montrer que A est inversible ssi $[A.]$ est inversible.
4. Montrer que $A^2 = \mathbf{0}_2$ ssi $\mathrm{Im}([A.]) \subset \ker([A.])$.
5. On considere l'application

$$A \in M_2(K) \mapsto [A.] \in \mathrm{End}(M_2(K)).$$

Montrer qu'elle est lineaire et injective.

Exercice 5. On reprend l'exercice 6 de la serie precedente. Soit K un corps, $d \geqslant 1$ et $\mathbf{b} = (b_0, \cdots, b_{d-1}) \in K^d$ la matrice $d \times d$

$$M_{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b_{d-1} \end{pmatrix} \in M_d(K).$$

1. Soit $\varphi : K^d \mapsto K^d$ l'application lineaire dont la matrice est M dans la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$.
2. Montrer que $\{\mathbf{e}_1, \varphi(\mathbf{e}_1), \cdots, \varphi^{d-1}(\mathbf{e}_1)\}$ est une base de K^d. Que vaut $\varphi^d(\mathbf{e}_1)$ dans cette base ?
3. Montrer qu'il existe $a_0, a_1, a_2, a_{d-1} \in K$ tels que

$$\underline{0}_d = \varphi^d + a_{d-1}\varphi^{d-1} + \cdots + a_1.\varphi + a_0.\mathrm{Id}_{K^d}.$$

(tester cette egalite sur les elements d'une base).

4. Montrer que

$$\mathbf{0}_d = M_{\mathbf{b}}^d + a_{d-1}M_{\mathbf{b}}^{d-1} + \cdots + a_1.M_{\mathbf{b}} + a_0.\mathrm{Id}_d.$$

Exercice 6. ($\star$) On a vu en cours que si deux matrices $M, N \in M_{d' \times d}(K)$ sont equivalentes alors elles ont le meme rang. On va montrer ici la reciproque :

Théorème. *Si M et $N \in M_{d' \times d}(K)$ sont de meme rang alors elles sont equivalentes.*

Pour cela on va reprendre la preuve du Theoreme Noyau-image. Soient $\mathscr{B}_d^0$ et $\mathscr{B}_{d'}^0$ les bases canoniques de K^d et $K^{d'}$ respectivement et soit $\varphi : K^d \mapsto K^{d'}$ l'application lineaire telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{d'}^0, \mathscr{B}_d^0}(\varphi) = M$$

ie. φ est l'application lineaire telle que pour $j = 1, \cdots, d$,

$$\varphi(\mathbf{e}_j) = (m_{ij})_{i \leqslant d'} = (m_{1j}, \cdots, m_{d'j}).$$

Soit $r = \mathrm{rang}(M) = \mathrm{rang}(\varphi)$ et soit

$$\mathscr{B}_{\mathrm{Im}} := \{\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_r\} \subset \varphi(K^d) \subset K^{d'}$$

une base de l'image de φ dans $K^{d'}$ et soit une famille de K^d

$$\mathscr{L} := \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_r\} \subset K^d$$

formee d'antecedents des $\mathbf{f}_i,\ i \leqslant r$:

$$\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{f}_i.$$

1. Montrer que $\mathscr{L}$ est libre et que si $\{\mathbf{e}_{r+1}, \cdots, \mathbf{e}_{r+k}\}$ est une base de $\ker\varphi$ ($k = \dim\ker\varphi$) alors

$$\mathscr{B} := \mathscr{L} \cup \{\mathbf{e}_{r+1}, \cdots, \mathbf{e}_{r+k}\} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_r, \cdots, \mathbf{e}_{r+k}\} \subset K^d$$

   est une base de K^d.
2. Soit $\mathscr{B}' \supset \mathscr{B}_{\mathrm{Im}}$ une base de $K^{d'}$ contenant la base $\mathscr{B}_{\mathrm{Im}}$ de $\mathrm{Im}(\varphi)$. Montrer que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}(\varphi)$ de φ calculee dans les bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ est de la forme

$$M_r := \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 & \cdots \\ & \mathrm{Id}_r & & \vdots & 0 & \cdots \\ & & & 0 & \vdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

   ou Id_r est la matrice identite $r \times r$ et le reste de la matrice est compose de 0.
3. Montrer que M est equivalente a M_r et conclure que deux matrices $d' \times d$ de meme rang sont equivalentes.

Exercice 7. Soit $M = (m_{ij})_{ij \leqslant d}$, une matrice carree. On defini la *trace* de M par

$$\mathrm{tr}(M) := \sum_{i=1}^{d} m_{ii} = m_{11} + m_{22} + \cdots + m_{dd}.$$

(la somme des coefficients diagonaux de M).

1. Montrer que la trace $\mathrm{tr} : M_d(K) \mapsto K$ definit une forme lineaire sur $M_d(K)$.
2. Montrer que pour $M, N \in M_d(K)$

$$\mathrm{tr}({}^tM) = \mathrm{tr}(M),\ \mathrm{tr}({}^tM.N) = \sum_{i,j=1,\cdots,d}\sum m_{ij}n_{ij}.$$

   En particulier $\mathrm{tr}({}^tM.M) = \sum_{i,j=1,\cdots,d}\sum m_{ij}^2$.

5. Soient
$$M=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\\1&1&3/2\end{pmatrix}\ et\ N=\begin{pmatrix}1&4&3\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}.$$
Montrer (avec le minimum de calculs) que M et N sont equivalentes mais pas semblables.
6. Calculer le trace de la matrice associee a la multiplication par $[A.] : M_2(K)\mapsto M_2(K)$ dans l'exercice 4.

Exercice 8. Soit $\mathscr{B}^0_{dd} := \{E_{ij},\ i,j\leqslant d\}\subset M_d(K)$ l'ensemble des matrices elementaires (on rappelle que c'est la base canonique de $M_d(K)$). Une matrice carree M est diagonale si elle s'ecrit
$$M=\sum_{i=1}^{d} m_{ii}.E_{ii},\ m_{ii}\in K$$
(en d'autre termes si les coefficients m_{ij} de M dans la base canonique sont nuls pour $i\neq j$, c'est a dire ssi (i,j) ne se trouve pas sur la premiere diagonale).

On note
$$\mathrm{Diag}_d(K)\subset M_d(K)$$
l'ensemble des matrices diagonales.

1. Montrer que $\mathrm{Diag}_d(K)$ est un SEV de $M_d(K)$. Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que $\mathrm{Diag}_d(K)$ est un sous-anneau de $M_d(K)$ (et donc une sous-algebre).
3. Montrer que le groupe des unites de cette sous-algebre (les matrices diagonales inversible) vaut
$$\mathrm{Diag}^\times_d(K)=\{M=\sum_{i=1}^{d} m_{ii}.E_{ii},\ m_{ii}\in K^\times\}$$
et que ce groupe est isomorphe au groupe multiplicatif produit $(K^\times)^d$.

Exercice 9. On rappelle que (voir la definition generale pour les groupes) le centre
$$Z_d(K)\subset \mathrm{GL}_d(K)$$
du groupe lineaire est le sous-groupe (distingue) forme des matrices inversible qui commutent avec toutes les matrices inversibles :
$$C\in Z_d(K)\Longleftrightarrow \forall M\in \mathrm{GL}_d(K),\ C.M=M.C.$$
On a vu en cours que le groupe des matrices scalaires non-nulles
$$K^\times \mathrm{Id}_d=\{\lambda.\mathrm{Id}_d,\ \lambda\in K^\times\}\subset \mathrm{GL}_d(K)$$

est exactement l'ensemble des matrices inversibles qui commutent avec toutes les matrices de $M_d(K)$ et en particulier avec celles de $\mathrm{GL}_d(K)$. On a donc

$$K^\times \mathrm{Id}_d \subset Z_d(K).$$

On va montrer qu'en fait

$$Z_d(K) = K^\times \mathrm{Id}_d.$$

Pour cela on introduit les matrices de *transvections* : soit

$$\mathscr{B}^0_{dd} = \{E_{ij},\ i,j \leqslant d\} \subset M_d(K)$$

l'ensemble des matrices elementaires. Une matrice de transvection est une matrice de la forme

$$Tr_{ij,\lambda} := \mathrm{Id}_d + \lambda.E_{ij},\ \lambda \in K,\ i \neq j.$$

1. Montrer que $Tr_{ij,\lambda}$ est inversible et calculer son inverse (on cherchera l'inverse sous forme de matrice de transvection en utilisant la relation de produit des matrices elementaires : $E_{ij}.E_{kl} = \delta_{j=k}E_{il}$).
2. Montrer que
$$Z_d(K) = K^\times \mathrm{Id}_d$$
en utilisant le fait qu'une matrice du centre commute avec toutes les matrices transvections et avec toutes les matrices diagonales inversibles.