

Série 10 du mercredi 24 mars 2021

Exercice 1.

Définition 1 (Fonction höldérienne). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, borné, convexe et non-vide. Pour $\alpha \in]0, 1]$, on dit qu'une fonction $\mathbf{h} : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ est α -höldérienne si

$$\exists C \in]0, +\infty[, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \quad \|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{y})\| \leq C \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha. \quad (1)$$

Les fonctions 1-höldériennes sont appelées « lipschitziennes ».

Conservons les notations de la définition 1.

- 1) Soit $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ dont les dérivées partielles sont bornées.
 - a) Pour quelles valeurs de $\alpha \in]0, 1]$ f est-elle α -höldérienne ?
 - b) Montrer que f est uniformément continue sur E .
- 2) Soit $\mathbf{f} \in C^1(E, \mathbb{R}^m)$ dont les dérivées partielles sont bornées. Les résultats du point 1 sont-ils toujours valables ?

Indication. Soit $K \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé borné et $\mathbf{g} \in C^0(K, \mathbb{R}^m)$. Alors

$$\left\| \int_K \mathbf{g} \right\| \leq \int_K \|\mathbf{g}\|, \quad (2)$$

où l'intégrale $\int_K \mathbf{g} \in \mathbb{R}^m$ s'obtient en intégrant chaque composante de \mathbf{g} . Ce résultat est vrai pour n'importe quelle norme.

- 3) Montrer le résultat de l'indication ci-dessus pour la norme euclidienne de \mathbb{R}^m .

Exercice 2.

On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3)$$

- 1) Calculer les grandeurs suivantes pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(x, y) ; \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, y) ; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, 0). \quad (6)$$

- 2) Montrer que les dérivées partielles secondes mixtes (5)–(6) sont définies sur \mathbb{R}^2 mais diffèrent en $(0, 0)$.
- 3) Le point 2 contredit-il le théorème de Schwarz ?

Exercice 3.

Pour $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on note

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad (7)$$

On appelle f le « laplacien de f ». On définit $g \in C^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)). \quad (8)$$

Vérifier que, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$\Delta f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta). \quad (9)$$