Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-05-03 au 2021-05-07

Série 20 du mercredi 5 mai 2021

Exercice 1.

Notons $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. Définissons $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

f est-elle intégrable au sens de Riemann ?

Exercice 2.

Considérons le pavé $R \coloneqq [0,1] \times [0,1]$ et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } x = \frac{1}{2} \text{ et } y \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \tag{2}$$

1) f est-elle Riemann-intégrable sur $[0,1]^2$?
2) La fonction $y \to f(x,y)$ est-elle Riemann-intégrable sur $[0,1]$ pour tout $x \in [0,1]$?
3) La fonction $x \to f(x,y)$ est-elle Riemann-intégrable sur $[0,1]$ pour tout $y \in [0,1]$?

Exercice 3.

Soit R un pavé de $\mathbb{R}^n$. Notons $\mathcal{R}(R)$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui sont intégrables au sens de Riemann sur R.

1) Soient $f, g \in \mathcal{R}(R)$ telles que, $\forall x \in R$, $f(x) \leqslant g(x)$. Montrer que $\int_R f \leqslant \int_R g$.
2) Montrer que $\mathcal{R}(R)$ est un espace vectoriel et que

$$\forall (f, g, \lambda) \in \mathcal{R}(R) \times \mathcal{R}(R) \times \mathbb{R}, \quad \int_R (\lambda f + g) = \lambda \int_R f + \int_R g. \tag{3}$$