

## Série 6 Exercice à rendre

David Wiedemann

16 mars 2021

### 1

On considère une suite  $\{x_i\} \subset E$ <sup>1</sup> convergeant vers  $x$ .  
Par un théorème du cours, on sait que  $x \in \overline{E}$ .  
On considère maintenant les deux suites  $(f(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(g(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ .  
Car  $f$  et  $g$  sont continues,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = f(x) \text{ et } \lim_{i \rightarrow +\infty} g(x_i) = g(x)$$

Ainsi, on a que, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  satisfaisant que pour tout  $i > N$ , on a

$$|f(x_i) - f(x)| < \epsilon$$

Or  $x_i \in E$  pour tout  $i$  et donc

$$|f(x_i) - f(x)| = |g(x_i) - f(x)| < \epsilon$$

Ainsi  $g(x_i)$  converge vers  $f(x)$ , et donc,  $g(x) = f(x)$ .

Car ceci est vrai pour toute suite de  $E$  et tout élément  $x \in \overline{E}$ , on en déduit que

$$f(x) = g(x) \forall x \in \overline{E}$$

### 2

On considère à nouveau une suite  $\{x_i\} \subset E$  convergeant vers  $x \in \overline{E}$ .  
Par continuité, on sait à nouveau que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} f(x_i) = f(x) \text{ et } \lim_{i \rightarrow +\infty} g(x_i) = g(x)$$

Notons que, par hypothèse, on a

$$f(x_i) \leq g(x_i) \forall i \in \mathbb{N}$$

---

1. On n'exclut pas les suites constantes

Ainsi, par une propriété du cours, on a bien que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} f(x_i) \leq \lim_{i \rightarrow +\infty} g(x_i)$$

et donc

$$f(x) \leq g(x)$$

Etant donné que ceci est valable pour toute suite  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset E$  et tout  $x \in \overline{E}$ , on a montré que

$$f(x) \leq g(x) \forall x \in \overline{E}$$

### 3

Montrons d'abord que  $E := \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) > 0\}$  est un ensemble ouvert.

Soit  $y = (y_1, \dots, y_n) \in E$ .

Par l'absurde, supposons que  $E$  n'est pas ouvert, alors  $\exists y \in E$  tel que  $\forall \delta > 0 \exists x \in B(y, \delta)$  satisfaisant  $h(x) \leq 0$ .

Soit  $\epsilon = \frac{1}{2}h(y)$ , alors, par la continuité de  $h$ , il existe  $\delta > 0$ , satisfaisant

$$\|y - x\| < \delta \Rightarrow |h(y) - h(x)| < \epsilon$$

Or, par hypothèse,  $h(x) \leq 0$  et donc

$$|h(y) - h(x)| = |h(y)| + |h(x)| > \epsilon$$

ce qui constitue une contradiction à l'hypothèse. On en déduit que  $E$  est un ensemble ouvert.

Montrons maintenant que  $F := \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$ .

Notons d'abord que, par symétrie, l'ensemble  $E' := \{x \in \mathbb{R}^n : -h(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) < 0\}$  est également ouvert.

Car l'union de deux ensembles ouverts est ouverte,  $E \cup E'$  est ouvert.

Ainsi, le complémentaire  $(E \cup E')^c$  est fermé.

Or, il est clair que  $(E \cup E')^c = F$  et donc  $F$  est fermé.