

Théorie des Groupes

David Wiedemann

Table des matières

1	Une Introduction à la Théorie des Catégories	4
1.1	Catégories	4
1.2	Exemples de Catégories	5
1.2.1	Catégories concrètes	5
1.2.2	Catégories pas forcément concrètes	6
1.3	Foncteurs	7
1.4	Transformations naturelles	8
1.5	Equivalence de catégories	10
1.6	Adjonctions	11
1.7	Caractérisation des Adjonctions	12
1.7.1	Préparation	12
1.8	Exemple concret d'adjonction	13
1.9	Caractérisation des adjonctions	15
1.10	Produits et Coproduits	18
1.11	Préservation des produits/coproduits	19
2	Groupes Quotients	20
2.1	Quelques rappels de première année	20
2.2	Sens catégorique des quotients de groupe	20
3	Groupes Résolubles	24
4	Actions de groupe	25
4.1	Un cadre catégorique pour les actions de groupe	26
4.2	Généralisation et formalisation du cas $C = \text{Ens}$	28
4.3	Création d'actions libres	28
4.3.1	Le foncteur $\text{Free}_G : \text{Ens} \rightarrow {}_G \text{Ens}$	29
5	Groupes Abéliens	29
5.1	Constructions catégoriques dans Ab	29
5.2	Sommes directes	30
5.3	Le foncteur hom	33
5.4	Suites Exactes	34

List of Theorems

1	Definition (Graphe dirigé)	4
2	Definition (Catégories)	4
3	Definition (Isomorphisme)	7
4	Definition (Foncteur)	7
3	Lemme	7
5	Definition (Transformations naturelles)	8
6	Definition (Equivalence de categories)	10
7	Definition (Adjonctions)	11
7	Proposition	15
8	Definition	18
9	Lemme	18
9	Definition (Coproduct)	19
10	Lemme	19
12	Proposition	19
14	Proposition	21
15	Theorème (Premier theoreme d'isomorphisme)	22
16	Theorème (Le deuxieme theoreme d'isomorphisme)	22
17	Theorème (Troisieme theoreme d'isomorphisme)	23
10	Definition (Groupe resoluble)	24
20	Lemme	24
21	Proposition	24
11	Definition (Action de groupe)	25
12	Definition (Points fixes)	25
13	Definition (Orbite)	25
14	Definition	26
24	Lemme	27
15	Definition	27
16	Definition (Action libre)	28
26	Lemme	29
27	Lemme	30
17	Definition (Produit quelconque d'ensembles)	31
18	Definition (Produit quelconque de groupes)	31
19	Definition (Somme directe quelconque)	31
30	Proposition	31
31	Lemme	32
20	Definition (Groupes abeliens libre)	33
32	Theorème (Foncteur libre)	33
33	Lemme	33
34	Proposition	34
21	Definition (Suite exacte scindee)	34

36	Lemme	34
----	-----------------	----

1 Une Introduction à la Théorie des Catégories

Notion Fondamentale : la composition

- Composition d'applications
- l'exemple fondamental d'un groupe est donné par $\text{Aut}(X)$, où la multiplication du groupe est donnée par la composition d'automorphismes.

1.1 Catégories

Definition 1 (Graphe dirigé)

Un graphe dirigé G consiste en un couple de classes G_0 et G_1 , muni de deux applications

$$\text{dom} : G_1 \rightarrow G_0 \text{ et } \text{cod} : G_1 \rightarrow G_0$$

appelées domaine et codomaine. On pense à G_0 comme l'ensemble des sommets et G_1 l'ensemble des arêtes de G .

Par exemple, si $x, y \in G_0, f \in G_1$, alors

$$\text{dom}(f) = x, \quad \text{cod}(f) = y$$

$$X \xrightarrow{f} Y$$

On introduit la notation

$$G(x, y) = \{f \in G_1 \mid \text{dom}(f) = x, \text{cod}(f) = y\}$$

Exemple

Soit X un ensemble, et soit $R \subset X \times X$ une relation sur X . Alors $G_r = (X, R)$ est un graphe dirigé, où

$$\text{dom} : R \rightarrow X : (x_1, x_2) \mapsto x_1 \text{ et } \text{cod} : R \rightarrow X : (x_1, x_2) \mapsto x_2$$

Observer que $\forall x_1, x_2 \in X$

$$G_R(x_1, x_2) = \begin{cases} \{(x_1, x_2)\} & \text{si } (x_1, x_2) \in R \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

Definition 2 (Catégories)

Une catégorie C est un graphe dirigé (C_0, C_1) muni d'applications de composition

$$\gamma_{a,b,c} : C(a, b) \times C(b, c) \rightarrow C(a, c) : (f, g) \mapsto g \circ f$$

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & f \circ g & & \end{array}$$

- (*Existence d'identités*) Il existe une application $\text{Id} : C_0 \rightarrow C_1 : c \rightarrow \text{Id}_c$ tel que

$$f \circ \text{Id}_a = f = \text{Id}_b \circ f \quad \forall f \in C_1(a, b), \forall a, b \in C_0$$

- (*Associativité*) Quelque soient $a, b, c, d \in C_0$ et $f \in C(a, b), g \in C(b, c)$ et $h \in C(c, d)$

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \in C(a, d)$$

Notation

On note

$C_0 = \text{Ob } C$ – les objets de C

$C_1 = \text{Mor } C$ – les morphismes

- Si $\text{Ob } C, \text{Mor } C$ sont des ensembles, alors C est petite.
- Si $C(a, b)$ est un ensemble $\forall a, b \in \text{Ob } C$, alors C est localement petite.

Lecture 2: Exemples de Categories

Mon 20 Sep

1.2 Exemples de Catégories

Exemple

- *Des catégories concrètes*
- *des catégories non concrètes*

1.2.1 Catégories concrètes

Les objets sont des ensembles munis de structures supplémentaire :

1. Ens dont les objets sont les ensembles et les morphismes sont les applications ensemblistes.

$\text{Ob Ens} =$ la classe de tous les ensembles

$\text{Mor Ens} =$ applications ensemblistes

2. La catégorie Gr , dont les objets sont les groupes et les morphismes sont les homomorphismes de groupe.

$\text{Ob Gr} =$ la classe de tous les groupes

$\text{Mor Gr} =$ la classe de tous les homomorphismes de groupe

La composition est encore donnée par celle des applications ensemblistes et les identités sont celles des groupes vus comme ensembles.

3. La catégorie Ab , dont les objets sont les groupes abéliens et les morphismes sont les homomorphismes de groupe.

$$\text{Ob } Ab = \{A \in \text{Ob } Gr \mid A \text{ abélien} \}$$

$$\text{Mor } Ab = \{\phi \in \text{Mor } Gr \mid \text{dom } \phi, \text{cod } \phi \in \text{Ob } Ab\}$$

4. La catégorie $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$, dont les objets sont les espaces vectoriels sur le corps \mathbb{K} et les morphismes sont les applications linéaires.

$$\text{Ob } \text{Vect}_{\mathbb{K}} = \text{la classe de tous les } \mathbb{K}\text{-espaces vectoriels}$$

$$\text{Mor } \text{Vect}_{\mathbb{K}} = \text{la classe de toutes les applications } \mathbb{K}\text{-linéaires}$$

Dans tous ces cas, la composition est bien définie car elle preserve toujours la structure supplémentaire (ie. le groupe ou l'espace vectoriel)

1.2.2 Catégories pas forcément concrètes

1. Soit X un ensemble, $R \subset X \times X$ une relation sur X . Alors le graphe dirigé G_R admet des applications de composition naturelle, qui vérifient l'associativité.

Soit $x, y, z \in X$ tel que $(x, y), (y, z) \in R$? $(y, z) \circ (x, y)$? Existe-il une arête de x vers $z \iff (x, z) \in R$

Donc on veut que R soit transitive. L'existence de l'identité dans une catégorie implique que $(x, x) \in R \forall x \in X$ ce qui implique que R est réflexive.

2. Pour tout groupe G , il y a une catégorie BG , spécifiée par $\text{Ob } BG = \star$ et $BG(\star, \star) = G$, où la composition est donnée par la multiplication de G

$$\text{Ob } BG = \{\star\}$$

$$\text{Mor } G = \{g \in G\}$$

On définit la composition

$$\gamma : BG(\star, \star) \times BG(\star, \star) \rightarrow BG(\star, \star) \times BG(\star, \star)$$

et on sait que γ (ie. la composition) est associative car la multiplication dans G est associative.

3. Soient C et D des catégories. Leur produit est la catégorie notée $C \times D$ spécifiée par

$$\text{Ob}(C \times D) = \text{Ob } C \times \text{Ob } D$$

et

$$(C \times D)((c, d), (c', d')) = C(c, c') \times D(d, d') \forall c, c' \in \text{Ob } C, d, d' \in \text{Ob } D$$

où la composition est donnée par celle de C dans la première composante et par celle de D dans la deuxième, et $\text{Id}_{(c,d)} = (\text{Id}_c, \text{Id}_d)$.

$(f, g) : (c, d) \times (c', d') \in \text{Mor}(C \times D)$.

Etant donné $(f, g) : (c, d) \rightarrow (c', d')$, $(f', g') : (c', d') \rightarrow (c'', d'')$, on définit

$$(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g)$$

L'associativité suit de la composition associative dans C et D

Definition 3 (Isomorphisme)

Soit C une catégorie. Un morphisme $f : a \rightarrow b$ dans C est un isomorphisme s'il admet un inverse, i.e., il existe un morphisme $g : b \rightarrow a$ tel que $g \circ f = \text{Id}_a$ et $f \circ g = \text{Id}_b$. On dit alors que les objets a et b sont isomorphes.

Un isomorphisme dont le domaine est égal au codomaine est un automorphisme.

Une catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphismes est un groupe.

Lecture 3: Comment comparer 2 catégories

Tue 21 Sep

1.3 Foncteurs

On souhaite une application entre catégories qui preserve la structure de la composition.

Definition 4 (Foncteur)

Soient C et D des catégories. Un foncteur F de C vers D , note $F : C \rightarrow D$ consiste en un couple d'applications

$$F_{\text{Ob}} : \text{Ob } C \rightarrow \text{Ob } D$$

$$F_{\text{Mor}} : \text{Mor } C \rightarrow \text{Mor } D$$

tel que pour tout morphisme $f : a \rightarrow b$ dans C

$$F_{\text{Mor}}(f) : F_{\text{Ob}}(a) \rightarrow F_{\text{Ob}}(b)$$

$$F_{\text{Mor}}(\text{Id}_c) = \text{Id}_{F_{\text{Ob}}(c)}$$

pour tout $c \in \text{Ob } C$, et

$$F_{\text{Mor}}(g \circ f) = F_{\text{Mor}}(g) \circ F_{\text{Mor}}(f)$$

quel que soient $f \in C(a, b)$, $g \in C(b, c)$, et $a, b, c \in \text{Ob } C$

Lemme 3

Soient $F : C \rightarrow D$ et $F' : D \rightarrow E$ des foncteurs. Alors le couple d'applications

$$F'_{\text{Ob}} \circ F_{\text{Ob}} : \text{Ob } C \rightarrow \text{Ob } E$$

et

$$F'_{\text{Mor}} \circ F_{\text{Mor}} : \text{Mor } C \rightarrow \text{Mor } E$$

definit un foncteur de C vers E , que nous notons $F' \circ F : C \rightarrow E$.

- (Les foncteurs identites) Pour toute categorie C , il y a un foncteur $\text{Id}_C : C \rightarrow C$ dont les composantes sont les identites.
- (Les foncteurs oubli) On travaille souvent (et parfois de maniere implicite) avec des foncteurs en general notes U , qui oublient de la structure sur les objets et morphismes. Par exemple, $U : \text{Gr} \rightarrow \text{Ens}$.
Si G est un groupe, $U(G)$ oublie sa multiplication et ses inverses.
Si $\phi : G \rightarrow H$ est un homomorphisme de groupe, alors $U(\phi) : U(G) \rightarrow U(H)$ est simplement l'application sous-jacente.
 U preserve la composition et l'identite, car elles sont definies exactement de la meme maniere dans les deux categories.
- $U : \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Ab}$
Pour $V \in \text{Ob Vect}_{\mathbb{K}} \Rightarrow U(V)$ oublie la multiplication par scalaire et ne retient que son groupe abelien sous-jacent. Puisque les compositions et les identites sont les memes dans les deux categories, U est bien un foncteur.
- Puisque tout groupe abelien est un groupe, on a un foncteur $\text{Ab} \rightarrow \text{Gr}$, etant donne un tel foncteur d'inclusion (qu'on appelle generalement ι) on dit que Ab est une sous-categorie de Gr

Lecture 4: Transformations naturelles

Sun 26 Sep

1.4 Transformations naturelles

Comment comparer deux foncteurs ayant le meme domaine et codomaine ?

Definition 5 (Transformations naturelles)

Soient $F, F' : C \rightarrow D$ des foncteurs. Une transformation naturelle τ de F vers F' est une application

$$\tau : \text{Ob } C \rightarrow \text{Mor } D$$

tel que pour tout $f : b \rightarrow c$ et $\tau_c \in D(F(c), F'(c))$, on a

$$F'(f) \circ \tau_b = \tau_c \circ F(f)$$

Si τ_c est un isomorphisme pour tout c , alors τ est un isomorphisme naturel.

Soient $F, F', F'' : C \rightarrow D$ des foncteurs et soient $\sigma : F \rightarrow F'$ et $\tau : F' \rightarrow F''$ des transformations naturelles. Alors l'application

$$\text{Ob } C \rightarrow \text{Mor } D : c \mapsto \tau_c \circ \sigma_c$$

On definit alors $\tau \circ \sigma : F \rightarrow F''$ par

$$\tau \circ \sigma : \text{Ob } C \rightarrow \text{Mor } D$$

On veut montrer que $\forall f : b \rightarrow c$ dans C , on a

$$\tau_c \circ \sigma_c \circ F(f) = \sigma_b \circ \tau_b \circ F''(f)$$

ce qui suit immédiatement. On construit facilement une transformation naturelle identité. Pour un foncteur $F : C \rightarrow D$, il y a une identité donné par

$$\text{Ob } C \rightarrow \text{Mor } D : c \rightarrow \text{Id}_{F(c)}$$

Il est facile de voir que pour tout autre transformation naturelle $\tau : F \rightarrow G$. Notons que ainsi, pour toute catégories C et D , C petit, il y a une catégorie $\text{Fun}(C, D)$, dont les objets sont les foncteurs de C vers D et les morphismes sont les transformations naturelles.

Exemple

Soit $U : \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Ens}$ le foncteur qui oublie tout la structure algebrique et soit $L : \text{Ens} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ le foncteur qui envoie un ensemble sur l'ensemble de ses combinaisons linéaires.

Il y a une transformation naturelle $\eta : \text{Id}_{\text{Ens}} \rightarrow U \circ L$.

Pour définir $\eta : \text{Id}_{\text{Ens}} \rightarrow U \circ L$, il nous faut une application $\eta : \text{Ob } \text{Ens} \rightarrow \text{Mor } \text{Ens}$ tel que

$$\forall X \in \text{Ob } \text{Ens}, \eta_X : X \rightarrow U(L(X))$$

donc $\forall x \in X, \eta_X(x) : X \rightarrow \mathbb{K}$.

On décide de poser

$$\eta_X(x)(x') = \begin{cases} 1 : x' = x \\ 0 : x' \neq x \end{cases}$$

Est-ce que ce diagramme commute ?

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & U(L(X)) \\ \downarrow f & & \downarrow U(L(f)) \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & U(L(Y)) \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \eta_Y \circ f(x) &= \eta_Y(f(x)) : Y \rightarrow \mathbb{K} \\ y &\rightarrow \begin{cases} 1 : y = f(x) \\ 0 : y \neq f(x) \end{cases} \end{aligned}$$

On a aussi

$$U(L(f)) \circ \eta_X(x) : Y \rightarrow \mathbb{K}$$

$$y \mapsto \sum_{x' \in f^{-1}(y)} \eta_X(x)(x') = \begin{cases} 1 : y = f(x) \\ 0 : \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc bien une transformation naturelle. De plus, on a une transformation naturelle $\epsilon : L \circ U \rightarrow \text{Id}_{\text{Vect}_{\mathbb{K}}}$ Pour $V \in \text{Ob Vect}_{\mathbb{K}}$

$$L \circ U(V) = \{\omega : U(V) \rightarrow \mathbb{K} \mid \{v \mid \omega(v) \neq 0\} \mid < \infty\}$$

Enfait, ω est un élément du dual de V .

Définir $\epsilon_V : L \circ U(V) \rightarrow V$ par

$$\epsilon_V(\omega) = \sum_{v \in V} \omega(v) \cdot v$$

Cette somme est finie et donc bien définie.

On vérifie facilement que ϵ_V est linéaire.

Soit $g : V \rightarrow V'$ une application linéaire, est-ce que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} L \circ U(V) & \xrightarrow{\epsilon_V} & V \\ \downarrow L \circ U(g) & & \downarrow g \\ L \circ U(V') & \xrightarrow{\epsilon_{V'}} & V' \end{array}$$

On a

$$g \circ \epsilon_V(\omega) = \sum_{v \in V} \omega(v) \cdot g(v)$$

Dans l'autre sens

$$\begin{aligned} \epsilon_{V'} \circ (L \circ U(g))(\omega) &= \sum_{v' \in V'} L \circ U(g)(\omega)(v') \cdot v' \\ &= \sum_{v' \in V'} \left(\sum_{v \in g^{-1}(v')} \omega(v) \right) \cdot v' \end{aligned}$$

Lecture 5: Adjonctions

Sat 02 Oct

1.5 Equivalence de categories

Definition 6 (Equivalence de categories)

Un foncteur $F : C \rightarrow D$ est une Equivalence de categories s'il existe un foncteur $F' : D \rightarrow C$ tel que

$$\sigma : \text{Id}_C \xrightarrow{\sim} F' \circ F \text{ et } \tau : \text{Id}_D \xrightarrow{\sim} F \circ F'$$

Remarque

Si F est un isomorphisme de categories, c'est aussi une equivalence de categories.

Exemple

Soit \mathbf{Un} la categorie avec un seul objet $*$ et un seul morphisme Id . Soit C la categorie $\text{Ob } C = \{a, b\}$ et deux morphismes non-identite $f : a \rightarrow b$ et $g : b \rightarrow a$ qui sont des isomorphismes. Alors les categories \mathbf{Un} et C sont equivalentes.

On definit $F : \mathbf{Un} \rightarrow C$ par $F(*) = a, F(\text{Id}) = \text{Id}_a$.

On definit $F' : C \rightarrow \mathbf{Un}$ par $F'(a) = F'(b) = *$.

On a que $F' \circ F = \text{Id}_{\mathbf{Un}}$ donc la transformation naturelle $\sigma = \text{Id}_{\text{Id}_{\mathbf{Un}}}$ est triviale.

Dans l'autre sens, $F \circ F' \neq \text{Id}_C$, cependant $\exists \tau : \text{Id}_C \rightarrow F \circ F'$ defini par

$$\tau : \text{Ob } C \rightarrow \text{Mor } C$$

donne par

$$\tau(a) = \text{Id}_a, \tau(b) = g$$

Verifions la naturalite :

Commencons par $f : a \rightarrow b$, on a

$$\text{Id}_a \circ \text{Id}_a = g \circ f$$

ce qui est vrai par definition de C .

De meme

$$\text{Id}_a \circ g = \text{Id}_a \circ g$$

1.6 Adjonctions

On veut generaliser la notion d'equivalence de categories, dont il y a beaucoup d'exemples interessants (surtout en theorie des groupes)

Definition 7 (Adjonctions)

Un couple de foncteurs $L : C \rightarrow D$ et $R : D \rightarrow C$ forme une adjonction s'il existe des transformations naturelles

$$\eta : \text{Id}_C \rightarrow R \circ L \text{ et } \epsilon : L \circ R \rightarrow \text{Id}_D$$

tel que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{array}{ccc} L(c) & \xrightarrow{L(\eta_c)} & L \circ R \circ L(c) \\ & \searrow \text{Id}_{L(c)} & \downarrow \epsilon_{L(c)} \\ & & L(c) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} R(d) & \xrightarrow{\eta_{R(d)}} & R \circ L \circ R(d) \\ & \searrow \text{Id}_{R(d)} & \downarrow R(\epsilon_d) \\ & & R(d) \end{array}$$

pour tout $c \in \text{Ob } C, d \in \text{Ob } D$.

Analysons ces identites triangulaires.

La premiere identite veut dire $\forall c \in \text{Ob } C, \eta_c : c \rightarrow RL(c)$, on peut lui appliquer L et on trouve

$$L(c) \xrightarrow{L(\eta_c)} LRL(c)$$

On peut maintenant considerer $\epsilon_{L(c)} : LRL(c) \rightarrow L(c)$ pour revenir a $L(c)$

$$L(c) \xrightarrow{L(\eta_c)} LRL(c) \xrightarrow{\epsilon_{L(c)}} L(c)$$

et on veut que cette suite de composition soit egale a $\text{Id}_{L(c)}$.

Pour la deuxieme identite, soit $d \in \text{Ob } D$, on a alors

$$R(d) \xrightarrow{\eta_{R(d)}} RLR(d) \xrightarrow{R(\epsilon_d)} R(d)$$

Si $L : C \leftrightarrow D : R$ est une adjonction avec transformations naturelles associees $\eta : \text{Id}_C \rightarrow RL$ et $\epsilon : LR \rightarrow \text{Id}_D$, alors on dit que L est un adjoint a gauche de R et R est un adjoint a droite de L .

On notera alors $L \dashv R$.

1.7 Caracterisation des Adjonctions

1.7.1 Preparation

Soit $L : C \leftrightarrow D : R$ un couple de foncteurs entre deux categories petites. On peut y associer deux autres foncteurs interessants

- $D(L(-), -) : C^{op} \times D \rightarrow \text{Ens}$
- $C(-, R(-)) : C^{op} \times D \rightarrow \text{Ens}$

qui sont definis comme suit

- Sur les objets,

$$\forall (c, d) \in \text{Ob } C^{op} \times \text{Ob } D \quad D(L(-), -)(c, d) = D(L(c), d)$$

- Sur les morphismes Soient $(f^{op}, g) \in \text{Mor}(C^{op}(c, c') \times D(d, d'))$.

Donc $\exists f \in C(c', c)$, on veut definir une application ensembliste

$$D(L(f^{op}), g) : D(L(c), d) \rightarrow D(L(c'), d')$$

On peut resumer ceci dans le diagramme

$$L(c') \xrightarrow{L(f)} L(c) \xrightarrow{h} d \xrightarrow{g} d'$$

Ainsi, $D(L(f^{op}, g)) := g \circ h \circ L(f) : L(c') \rightarrow d'$.

Est-ce que ce choix definit bien un foncteur ?

- Identites : Pour $h : L(f) \rightarrow d \in C(L(f), d)$ Si $(\text{Id}_c^{op}, \text{Id}_d) \in \text{Mor}(C^{op} \times D)$ alors $D(L(\text{Id}_c^{op}), \text{Id}_d)(h) = \text{Id}_d \circ h \circ \text{Id}_{L_c} = h$.

Donc

$$D(L(\text{Id}_c^{op}, \text{Id}_d)) = \text{Id}_{D(L(c), d)}$$

- Considerons

$$(c, d) \xrightarrow{(f^{op}, g)} (c', d') \xrightarrow{(f'^{op}, g')} (c'', d'')$$

et etudions

$$D(L(c), d) \xrightarrow{D(L(f^{op}, g))} D(L(c'), d') \xrightarrow{D(L(f'^{op}, g'))} D(L(c''), d'')$$

On a donc, pour $h \in D(L(c), d)$

$$D(L(f^{op}, g) \circ D(L(f'^{op}, g')))(h) = g' \circ g \circ h \circ L(f) \circ L(f') \circ g = D(L(f'^{op} \circ f^{op}), g' \circ g)(h)$$

De maniere semblable, \exists foncteur

$$C(-, R(-)) : C^{op} \times D \rightarrow \text{Ens}$$

defini sur les objets par

$$\forall (c, d) \in \text{Ob}(C^{op} \times D) \quad C(-, R(-))(c, d) = C(c, R(d))$$

et $\forall (f^{op}, g) : (c, d) \rightarrow (c', d')$, alors

$$\begin{aligned} C(f^{op}, R(g)) : C(c, R(d)) &\rightarrow C(c', R(d')) \\ (h : c \rightarrow R(d)) &\rightarrow (R(g) \circ h \circ f) \end{aligned}$$

Lecture 6: Caracterisation des Adjonctions

Sun 10 Oct

1.8 Exemple concret d'adjonction

On considere $L : \text{Ens} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ et $U : \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Ens}$.

Ces adjonctions verifient les identites triangulaires et on a une adjonction $L \dashv U$.

Verifions les identites triangulaires.

Soit $V \in \text{Ob Vect}_{\mathbb{K}}$ Considerer

$$U(V) \xrightarrow{\eta_{U(V)}} UL(UV)$$

et

$$U(LU(V)) \xrightarrow{U(\epsilon_V)} U(V)$$

On veut voir que $U(\epsilon_V) \circ \eta_{U(V)} = \text{Id}_{U(V)}$.

Par definition de η ,

$$\begin{aligned} \eta_{U(V)} &\rightarrow UL(U(V)) \\ v &\mapsto (\eta_{U(V)}(v) : U(V) \rightarrow \mathbb{K}) \end{aligned}$$

ou

$$\eta_{U(V)}(v) : V \rightarrow \mathbb{K} : v' \mapsto \delta_{v,v'}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} U(\epsilon_V) : U(LU(V)) &\rightarrow U(V) \\ \omega &\mapsto \sum_{v \in V} \omega(v) \cdot v \end{aligned}$$

Donc, $\forall v \in U(V)$,

$$\begin{aligned} U(\epsilon_V) \circ \eta_{U(V)}(v) &= U(\epsilon_V)(\eta_{U(V)}(v)) \\ &= \sum_{v' \in V} \eta_{U(V)}(v)(v') \cdot v' \\ &= v \end{aligned}$$

Donc $U(\epsilon_V) \circ \eta_{U(V)} = \text{Id}_{U(V)}$.

Montrons l'autre egalite triangulaire.

Soit $X \in \text{Ob Ens}$. Considerons

$$\begin{aligned} L(\eta_X) : L(X) &\rightarrow L(UL(X)) \\ \omega &\mapsto L(\eta_X) : UL(X) \rightarrow \mathbb{K} \\ L(\eta_X) : \psi &\mapsto \sum_{x \in \eta_X^{-1}(\psi)} \end{aligned}$$

Pour $\psi \in UL(X)$ (donc $\psi : X \rightarrow \mathbb{K}$),

$$\eta_X^{-1}(\psi) = \begin{cases} \{x'\} : \text{ si } \psi = \eta_X(x') \\ \emptyset \text{ sinon} \end{cases}$$

donc $L(\eta_X)(\omega) : UL(X) \rightarrow \mathbb{K}$

$$\psi \mapsto \sum_{x \in \eta_X^{-1}(\psi)} = \begin{cases} \omega(x') : \psi = \eta_X(x') \\ 0 : \psi \neq \eta_X(x') \forall x' \in X \end{cases}$$

De plus

$$\begin{aligned} \epsilon_{L(X)} : LU(L(X)) &\rightarrow L(X) \\ UL(X) &\xrightarrow{(\cdot)} \xi \mathbb{K} \mapsto \sum_{\psi \in UL(X)} \xi(\psi) \cdot \psi \end{aligned}$$

Faisons donc le calcul.

Soit $\omega \in L(X)$

$$\epsilon_{L(X)} \circ L(\eta_X)(\omega) = \epsilon_{L(X)}(L(\eta_X)(\omega))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\psi \in UL(X)} L(\eta_X)(\omega)(\psi) \cdot \psi \\
&= \sum_{x \in X} \omega(x) \cdot \eta_X(x)
\end{aligned}$$

Donc $\forall x' \in X$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{L(X)} \circ L(\eta_X)(\omega)(x') &= \left(\sum_{x \in X} \omega(x) \eta_X(x) \right) (x') \\
&= \sum_{x \in X} \omega(x) (\eta_X(x)(x')) = \omega(x')
\end{aligned}$$

1.9 Caractérisation des adjonctions

Proposition 7

Un couple de foncteurs $L : C \rightarrow D$ et $R : D \rightarrow C$ entre catégories localement petites est une adjonction si et seulement si il existe un isomorphisme naturel entre les foncteurs

$$D(L(-), -) : C^{op} \times D \rightarrow \mathbf{Ens} : (c, d) \rightarrow D(L(c), d)$$

et

$$C(-, R(-)) : C^{op} \times D \rightarrow \mathbf{Ens} : (c, d) \rightarrow C(c, R(d))$$

Nous démontrons qu'il existe des transformations naturelles $\alpha : D(L(-), -) \rightarrow C(-, R(-))$ et $\beta : C(-, R(-)) \rightarrow D(L(-), -)$ qui sont mutuellement inverses. On a donc besoin de deux applications

$$\alpha : \mathbf{Ob}(C^{op} \times D) \rightarrow \mathbf{Mor} \mathbf{Ens}$$

et

$$\beta : \mathbf{Ob}(C^{op} \times D) \rightarrow \mathbf{Mor} \mathbf{Ens}$$

tel que $\forall (c, d) \in \mathbf{Ob}(C^{op} \times D)$

$$\alpha_{(c,d)} : D(L(c), d) \rightarrow C(c, R(d))$$

et

$$\beta_{(c,d)} : C(c, R(d)) \rightarrow D(L(c), d)$$

De plus, on veut que

$$\forall (f^{op}, g) \in C^{op} \times D((c, d), (c', d'))$$

$$D(L(c), d) \xrightarrow{\alpha_{c,d}} C(c, R(d)) \xrightarrow{C(f^{op}, R(g))} C(c', R(d'))$$

$$= D(L(c), d) \xrightarrow{D(L(f^{op}), g)} D(L(c'), d') \xrightarrow{\alpha_{(c', d')}} C(c', R(d'))$$

et de meme pour l'application naturelle inverse

$$\begin{aligned} C(c, R(d)) &\xrightarrow{\beta_{c, d}} D(L(c), d) \xrightarrow{D(L(f^{op}), g)} D(L(c'), d') \\ &= C(c, R(d)) \xrightarrow{C(f^{op}, R(g))} C(c', R(d')) \xrightarrow{\beta_{(c', d')}} D(L(c'), d') \end{aligned}$$

Finalement, on soujaite egalement que $\alpha_{(c, d)}$ et $\beta_{(c, d)}$ sont des applications ensemblistes mutuellement inverses.

On va construire α et β a partir des transformations naturelles $\eta : \text{Id}_C \rightarrow RL$ et $\epsilon : LR \rightarrow \text{Id}_D$.

Preuve

Supposer que $C \dashv D$ soit une adjonction avec transformation naturelle associees η, ϵ .

Premier pas : Construction de α et β

Soit $(c, d) \in \text{Ob}(C^{op} \times D)$

$$\alpha_{(c, d)} : D(L(c), d) \rightarrow C(c, R(d))$$

Soit $h : L(c) \rightarrow d \in D(L(c), d)$, notons qu'on a

$$c \xrightarrow{\eta_C} RL(c) \xrightarrow{R(h)} R(d)$$

Definissons donc $\alpha_{(c, d)}(h) = R(h) \circ \eta_C$

Soit $(c, d) \in \text{Ob}(C^{op} \times D)$, on a alors $\forall k : c \rightarrow R(d) \in C(c, R(d))$

$$L(c) \xrightarrow{L(k)} LR(d) \xrightarrow{\epsilon_d}$$

Posons donc

$$\beta_{c, d}(k) = \epsilon_d \circ L(k)$$

Naturalite

Soit $(f^{op}, g) : (c, d) \rightarrow (c', d') \in C^{op} \times D$.

Soit $h \in D(L(c), d)$, on a alors

$$\begin{aligned} C(f^{op}, R(g)) \circ \alpha_{(c, d)}(h) &= C(f^{op}, R(g))(R(h) \circ \eta_c) \\ &= R(g) \circ (R(h) \circ \eta_c) \circ f \\ &= R(g \circ h) \circ \eta_{c'} \circ f \end{aligned}$$

Dans l'autre sens, on a

$$\begin{aligned}\alpha_{(c',d')} \circ D(Lf^{op}, g)(h) &= \alpha_{c',d'}(g \circ h \circ L(f)) \\ &= R(g \circ h \circ L(f)) \circ \eta_c \\ &= R(g \circ h) \circ RL(f) \circ \eta_{c'}\end{aligned}$$

Il faut donc montrer que $\eta_c \circ f = RL(f) \circ \eta_{c'}$

Or $f : c' \rightarrow c$ donne

$$RL(f) \circ \eta_{c'} = \eta_c \circ f$$

commute car η est une transformation naturelle. De meme, le fait que ϵ soit une transformation naturelle implique que β en est aussi une.

α et β sont mutuellement inverses

Considerer pour $(c, d) \in \text{Ob}(C^{op} \times D)$.

On a

$$\begin{aligned}\beta_{(c,d)} \cdot \alpha_{(c,d)}(h) &= \beta_{(c,d)}(R(h) \circ \eta_c) \\ &= \epsilon_d \circ L(R(h) \circ \eta_c) \\ &= \epsilon_d \circ LR(h) \circ L(\eta_c)\end{aligned}$$

On est en train de calculer

$$\begin{aligned}&L(c) \xrightarrow{L(\eta_c)} LRL(c) \xrightarrow{LR(h)} LR(d) \xrightarrow{\epsilon_d} R \\ &= L(c) \xrightarrow{L(\eta_c)} LRL(c) \xrightarrow{\epsilon_{L(c)}} LR(d) \xrightarrow{h} R(d) \\ &= L(c) \xrightarrow{\text{Id}_{L(c)}} h \xrightarrow{} R(d) = h\end{aligned}$$

Donc $h = \epsilon_d \circ LR(h) \circ L(\eta_c)$.

De meme l'autre identite triangulaire implique que $\alpha_{(c,d)} \circ \beta_{(c,d)} = \text{Id}_{C(c,L(d))}$.

Ainsi α et β sont bien des isomorphismes naturels, mutuellement inverses.

Pour completer la caracterisation, il faudrait aussi montrer l'implication inverse.

Pour definir η, ϵ a partir de α, β

— $\eta : \text{Considere } \forall c \in \text{Ob } C$,

$$\begin{aligned}\alpha_{(c,L(c))} : D(L(c), L(c)) &\rightarrow C(c, RL(c)) \\ \text{Id}_{L(c)} &\mapsto \alpha_{(c,L(c))}(\text{Id}_{L(c)})\end{aligned}$$

Et on definit alors $\eta_c : c \rightarrow RL(c)$ par $\eta_c = \alpha_{(c,L(c))}(\text{Id}_{L(c)})$

— $\epsilon : \text{Considerer } \forall d \in \text{Ob } D$,

$$\begin{aligned}\beta_{R(d),d} : C(R(d), R(d)) &\rightarrow D(LR(d), d) \\ \text{Id}_{R(d)} &\mapsto \beta_{R(d),d}(\text{Id}_{R(d)})\end{aligned}$$

□

Lecture 7: Produits et Coproduits

Sat 16 Oct

1.10 Produits et Coproduits

Dans \mathbf{Ens} , on a les constructions suivantes :

$\forall f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Z \in \mathbf{Mor} \mathbf{Ens}$

$$\exists ! h : X \rightarrow Y \times Z$$

tel que $\text{pr}_Y \circ h = f, \text{pr}_Z \circ h = g$.

De meme $\forall f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Z \in \mathbf{Mor} \mathbf{Ens}$

$$\exists ! h : X \amalg Y \rightarrow Z$$

tel que

$$h \circ i_x = f, h \circ i_y = g$$

Formellement, dans une categorie quelconque

Definition 8

Soit C une categorie, et soient $b, c \in \mathbf{Ob} C$. Un produit de b et c consiste en un objet a de C et de deux morphismes $p : a \rightarrow b$ et $q : a \rightarrow c$ tel que pour tout couple de morphisme $f : d \rightarrow b$ et $g : d \rightarrow c$ il existe un unique morphisme $h : d \rightarrow a$ tel que $p \circ h = f$ et $q \circ h = g$.

Remarque

En general, le produit de deux objets n'existe pas, mais s'il existe, il est unique a isomorphisme pres.

Lemme 9

Soit C une categorie, et soient $b, c \in \mathbf{Ob} C$. Si $b \xleftarrow{p} a \xrightarrow{q} c$ et $b \xleftarrow{p'} a' \xrightarrow{q'} c$ sont des produits de b et c , alors il existe un isomorphisme $h : a \rightarrow a'$ qui respecte les morphismes de projection.

Preuve

Puisque $b \xleftarrow{p} a \xrightarrow{q} c$ est un produit de b et c , la propriete universelle du produit nous dit qu'il existe un unique morphisme $h : a' \rightarrow a$.

Puisque $b \xleftarrow{p'} a' \xrightarrow{q'} c$ est un produit de b et c , $\exists ! k : a \rightarrow a'$ tel que

$$p = p' \circ k \text{ et } q = q' \circ k$$

Montrons que h et k sont des isomorphismes mutuellement inverses.

On a que

$$p \circ h \circ k = p' \circ k = p$$

de meme, on a

$$q \circ h \circ k = q$$

L'unicite de la propriete universelle implique que $h \circ k = \text{Id}_A$ et $k \circ h = \text{Id}_{a'}$ \square

On introduit la notation pour “le” produit de $b, c \in \text{Ob } C$ (s’il existe) est noté

$$b \xleftarrow{p}_1 b \times c \xrightarrow{p}_2 c$$

ou parfois simplement $b \times c$.

Definition 9 (Coproduit)

Soit C une catégorie. Un coproduit de b et c est un objet a et deux morphismes $i : b \rightarrow a$ et $j : c \rightarrow a$ tel que pour tout couple de morphismes $f : b \rightarrow d$ et $g : c \rightarrow d$ il existe un unique morphisme $h : a \rightarrow d$ tel que $h \circ i = f$ et $h \circ j = g$ ce que nous resumons par le diagramme suivant.

Lemme 10

Soit c une catégorie, et soient $b, c \in \text{Ob } C$. Si a et a' sont des coproduits de b et c , alors il existe un isomorphisme $h : a \rightarrow a'$ tel que $h \circ j = j', h \circ i = i'$

Remarque

Soit C une catégorie, et soient $b, c \in \text{Ob } C$. Si a est un produit de b et c dans C , alors a est un coproduit dans C^{op} .

1.11 Preservation des produits/coproduits

Proposition 12

Soit $C : L \dashv R : D$

1. Soient $b, c \in \text{Ob } C$, si $b \amalg c$ existe, alors $L(b \amalg c)$ est un coproduit de $L(b)$ et $L(c)$ dans D .
2. Soient $d, e \in \text{Ob } D$. Si le produit $d \times e$ existe, alors son image sous le foncteur R est un produit de $R(d)$ et $R(e)$

Preuve

Supposons que $b \xrightarrow{i}_1 b \amalg c \xleftarrow{i}_2 c$ est un coproduit de b et c dans C , considérons son image sous $L : L(b) \xrightarrow{L(i_1)} L(b \amalg c) \xleftarrow{L(i_2)} L(c)$.

Pour montrer que ceci est un coproduit de $L(b)$ et $L(c)$, il faut vérifier la propriété universelle.

Soit alors un couple de morphismes $L(b) \xrightarrow{f} d \xleftarrow{g} L(c)$ dans D .

A voir : $\exists ! h : L(b \amalg c) \rightarrow d$ qui satisfait la propriété universelle.

Observons que $f : L(b) \rightarrow d, g : L(c) \rightarrow d$ donnent $f^\# : b \rightarrow R(d)$ et $g^\# : c \rightarrow R(d)$.

Par la propriété universelle du produit, $\exists ! k : b \amalg c \rightarrow R(d)$ tel que $k \circ i_2 = g^\#$ et $k \circ i_1 = f^\#$.

Le morphisme $k : b \amalg c \rightarrow R(d)$ correspond à $k^\flat : L(b \amalg c) \rightarrow d$.

On va montrer que $k^\flat \circ L(i_1) = f$ et que $k^\flat \circ L(i_2) = g$.

On a $k^b = \epsilon_d \circ L(k)$.

De meme, on a $L(f^\sharp) = L(k) \circ L(i_1)$.

Il suffit donc de montrer que $f = \epsilon_d \circ L(f^\sharp)$.

Cependant, $f^\sharp = R(f) \circ \eta_b$, donc $L(f^\sharp) = LR(f) \circ L(\eta_b)$.

Reste a voir que k^b est l'unique morphisme faisant commuter ces triangles.

Supposons qu'il existe $l : L(b \amalg c) \rightarrow d$ faisant commuter le diagramme, montrons que $l = k^b$.

De maniere analogue, on trouve que $l^\sharp \circ i_1 = f^\sharp$ et $l^\sharp \circ i_2 = g$.

Par l'unicite de la propriete universelle du coproduit, on en deduit que $l^\sharp = k^\sharp \Rightarrow l = k$. \square

Lecture 8: Groupes Quotients

Sat 23 Oct

2 Groupes Quotients

2.1 Quelques rappels de premiere annee

Soit G un groupe.

- Un sous groupe N de G est normal si $aba^{-1} \in N \forall a \in G, b \in N$, on notera ceci $N \trianglelefteq G$.
- Si $\phi : G \rightarrow H$ est un homomorphisme, alors le noyau de ϕ est un sous-groupe normal de G .
 ϕ est injectif si et seulement si $\ker \phi = \{e\}$
- Si $H < G$, on pose $G/H = \{aH | a \in G\}$. De plus on a

$$aH \cap bH \neq \emptyset \Rightarrow aH = bH$$

On a une application $q_H : G \rightarrow G/H : a \mapsto \bar{a}$

- Si $N \trianglelefteq G$, alors G/N admet une structure de groupe tel que l'application $q_N : G \rightarrow G/N$ soit un homomorphisme de groupe
- Soit $N \trianglelefteq G$ et soit $\phi : G \rightarrow H$. Si $N < \ker \phi$, il existe un unique homomorphisme $\hat{\phi} : G/N \rightarrow H$ tel que $\hat{\phi} \circ q_N = \phi$

2.2 Sens categorique des quotients de groupe

Soient deux homomorphismes de groupe de meme domaine $G_1 \xleftarrow{\phi_1} G_0 \xrightarrow{\phi_2} G_2$.

Existe-t'il un groupe G et des homomorphismes $G_1 \xrightarrow{\psi_1} G \xleftarrow{\psi_2} G_2$ tel que $\psi_2 \phi_2 = \psi_1 \phi_1$ et tel que, pour tout couple d'homomorphismes $G_1 \xrightarrow{\omega_1} H \xleftarrow{\omega_2} G_2$ tel que $\omega_2 \phi_2 = \omega_1 \phi_1$, il existe un unique homomorphisme $\omega : G \rightarrow H$ tel que $\omega \psi_1 = \omega_1$ et $\omega \psi_2 = \omega_2$.

Remarque

Lorsqu'il existe $G_1 \xrightarrow{\psi}_1 G \xleftarrow{\psi}_2 G_2$ qui répondent aux critères de la question, on dit que c'est un pushout de ϕ_1 et ϕ_2 .

Un pushout de $\{e\} \xrightarrow{G}_0 \xleftarrow{\phi}_1 G_1$ consiste en

1. un homomorphisme $\psi_1 : G_1 \rightarrow G$ tel que $\text{Im } \phi_1 \subset \ker \psi_1$, tel que
2. \forall homomorphisme $\omega_1 : G_1 \rightarrow H$ tel que $\text{Im } \phi_1 \subset \ker \omega_1$, $\exists ! \omega : G \rightarrow H$ tel que $\omega_1 = \omega \circ \psi_1$

Proposition 14

Soit $\phi : H \rightarrow G$ un homomorphisme de groupe. Soit $N \trianglelefteq G$ le plus petit sous-groupe normal de G qui contient $\text{Im } \phi$. Alors

$$\{e\} \xrightarrow{i} G/N \xleftarrow{q}_{N_\phi} G$$

où i est l'unique homomorphisme du groupe trivial vers G/N , est le pushout de

$$\{e\} \xleftarrow{\pi} H \xrightarrow{\phi} G$$

où π est l'unique homomorphisme de H vers le groupe trivial.

Preuve

Il faut montrer que

$$\text{Im } \phi \subset \ker q_N$$

et

$$\forall \psi : G \rightarrow G'$$

tel que $\text{Im } \phi \subset \ker \psi$ $\exists ! \hat{\psi} : G/N_\phi \rightarrow G'$ tel que

$$\hat{\psi} \circ q_N = \psi$$

On a

$$\ker q_N = N_\phi \supset \text{Im } \phi$$

Soit $\psi : G \rightarrow G'$ tel que $\text{Im } \phi \subset \ker \psi$.

On veut trouver un homomorphisme $\hat{\psi} : G/N \rightarrow G'$ tel que $\hat{\psi} \circ q_N = \psi$.

Or $N_\phi = \bigcap N$ et $\text{Im } \phi \subset \ker \psi \trianglelefteq G$ d'où $N \subset \ker \psi$.

Par la propriété universelle du quotient, $\exists ! \hat{\psi}$

□

Lecture 9: Theoremes d'isomorphisme

Sat 30 Oct

Theorème 15 (Premier theoreme d'isomorphisme)

Si $\phi : G \rightarrow H$ est un homomorphisme de groupe, alors

$$G / \ker \phi \simeq \text{Im } \phi$$

Preuve

Par corestriction de l'homomorphisme $\phi : G \rightarrow H$, on obtient un homomorphisme surjectif

$$\phi : G \rightarrow \text{Im } \phi$$

Par la propriété universelle du quotient, il existe un unique $\hat{\phi} : G / \ker \phi \rightarrow \text{Im } \phi$ tel que $\hat{\phi} \circ q_{\ker \phi} = \phi$.

Puisque ϕ est surjectif, $\hat{\phi}$ l'est aussi, car $\phi(a) = \hat{\phi}(\bar{a})$.

Pour montrer que $\hat{\phi}$ est injectif, on calcule

$$\ker \hat{\phi} = \{ \bar{a} \in G / \ker \phi \mid \hat{\phi}(\bar{a}) = e \} = \{ \bar{e} \} \quad \square$$

Theorème 16 (Le deuxième theoreme d'isomorphisme)

Pour tout $H < G$ et tout $N \trianglelefteq G$

1. $HN = \{ab \mid a \in H, b \in N\} < G$
2. $H \cap N \trianglelefteq H$; et
3. $H / H \cap N \simeq HN / N$

Preuve

1. Pour montrer que HN est un sous-groupe de G , il faut montrer que $\forall ab, a'b' \in HN$,

$$(ab)^{-1}(a'b') \in HN$$

Or $(ab)^{-1}a'b' = b^{-1}a^{-1}a'b' ; \exists b'' \in N$ tel que $b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b''$, donc

$$= a^{-1}b''a'b' = a^{-1}a'b''b'$$

2. Soit $a \in H, b \in H \cap N$, on veut montrer que $aba^{-1} \in H \cap N$.

Or $b \in H \cap N \Rightarrow aba^{-1} \in H$, de même $b \in H \cap N \Rightarrow aba^{-1} \in N$.

Donc $b \in H \cap N$.

3. $N \trianglelefteq G \Rightarrow N \trianglelefteq HN$, donc \exists un groupe HN / N .

Considérons la composition

$$H \xrightarrow{\iota} HN \xrightarrow{q} HN / N$$

Montrons que $q \circ \iota$ surjectif, en effet $\forall ab \in HN \quad \overline{ab} = abN = aN = \bar{a}$.

Montrons que $\ker q \circ \iota = H \cap N$.

$$\ker(q \circ \iota) = \{a \in H \mid \bar{a} = \bar{e}\}$$

$$= \{a \in H \mid aN = N\}$$

$$= \{a \in H \mid a \in N\}$$

$$= H \cap N$$

□

On conclut par le premier theoreme d'isomoprisme.

Notation

Pour G un groupe,

$$— \mathcal{S}(G) = \{H \leq G\}$$

$$— \mathcal{N}(G) = \{H \trianglelefteq N\}$$

Theoreme 17 (Troisieme theoreme d'isomorphisme)

Soient G un gorupe et $N \trianglelefteq G$. Alors

$$1. \mathcal{S}(G/N) = \{H/N \mid H \in \mathcal{S}(G), N < H\}$$

$$2. \mathcal{N}(G/N) = \{K/N \mid K \in \mathcal{N}(G), N < K\}$$

$$3. \text{ Si } K \in \mathcal{N}(G) \text{ et } N < K, \text{ alors } G/K \simeq G/N/K/N$$

Preuve

$$1. \text{ Si } N < H < G, \text{ alors } H/N < G/N.$$

$$\text{Donc } \{H/N \mid H \in \mathcal{S}(G), N < H\}.$$

$$\text{Soit } \hat{H} < G/N.$$

$$\text{Alors } q^{-1}(\hat{H}) < G \text{ est un ss-groupe.}$$

$$q^{-1}(\hat{H}) = \{a \in G \mid \bar{a} \in \hat{H}\}$$

$$\text{En particulier } N < q^{-1}(\hat{H}) \text{ puisque } \forall a \in N, \bar{a} = \bar{e} \in \hat{H}.$$

$$\text{De plus } q^{-1}(\hat{H})/N = \{\bar{a} \mid a \in q^{-1}(\hat{H})\} = \hat{H}$$

$$2. \text{ On sait que } \mathcal{N}(G/N) = \{H/N \mid H \in \mathcal{S}(G), N < H, H/N \trianglelefteq G/N\}.$$

$$\text{Or } H/N \trianglelefteq G/N \iff \forall \bar{a} \in G/N, \bar{b} \in H/N, \bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}.$$

$$\iff \forall \bar{a}\bar{b}, \bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1} \in H/N \iff \bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1} \in H$$

$$3. \text{ Soit } N \trianglelefteq G, K \trianglelefteq G \text{ tel que } N \trianglelefteq K.$$

$$\text{Considerer } G/N \xleftarrow{q} G \xrightarrow{q} G/K.$$

$$\text{Puisque } N < K = \ker q_K, \text{ par la propriete universelle du quotient } \exists! \hat{q} \text{ tel}$$

$$\text{que } \hat{q} \circ q_N = q_K$$

$$\text{Observons que } \hat{q} \text{ est surjectif.}$$

$$\text{Ensuite calculons } \ker \hat{q}$$

$$\ker \hat{q} = \{aN \mid \hat{q}(aN) = eK\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{aN \mid aK = eK\} \\
&= K/N
\end{aligned}
\quad \square$$

On conclut par le premier theoreme d'isomorphisme

3 Groupes Resolubles

Definition 10 (Groupe resoluble)

Un groupe G est resoluble s'il existe une suite finie de sous-groupes

$$\{e\} = G_r < G_{r-1} < \dots < G_0 = G$$

tel que

- $G_k \trianglelefteq G_{k-1}$
- G_{k-1}/G_k est abelien

pour tout k .

Remarque

Si G est abelien, alors G est resoluble, car on peut prendre $\{e\} < G$

Remarque

La decomposition n'est pas unique.

Lemme 20

Soient G un groupe et $N \trianglelefteq G$. Alors

$$G/N \text{ abelien} \iff \{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G\} \subset N$$

Preuve

En exercice. □

Proposition 21

Soient G un groupe et $N \trianglelefteq G$. Si N et G/N sont resolubles, alors G l'est également.

Preuve

Si $N, G/N$ sont resolubles, alors \exists suites de sous-groupes.

Soit N_i la suite resolvant N et K_i la suite resolvant G/N .

$\exists H_i < G$ tel que $q(H_i) = K_i$.

De plus, puisque $K_i \trianglelefteq K_{i-1}$, on sait également que $H_i \trianglelefteq H_{i-1}$, par le troisieme theoreme d'isomorphisme.

Donc on a suite de sous-groupes de G

$$q^{-1}(K_s) = H_s \trianglelefteq H_{s-1} \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq G_0 = G \quad \square$$

4 Actions de groupe

Definition 11 (Action de groupe)

Une action de groupe G sur l'ensemble X consiste en un homomorphisme de groupe

$$\phi : G \rightarrow \text{Aut } X$$

De maniere equivalente, une action de G sur X consiste en une application

$$\phi^b : G \times X \rightarrow X$$

tel que

$$\phi^b(a \cdot b, x) = \phi^b(a, \phi^b(b, x)) \text{ et } \phi^b(e, x) = x \forall a, b \in G, x \in X$$

Definition 12 (Points fixes)

L'ensemble des points fixes par a , note X^a est le sous-ensemble de X defini par

$$X^a = \{x \in X | ax = x\}$$

L'ensemble des points fixes de l'action ϕ , note $(X, \phi)^G$ ou simplement X^G est le sous-ensemble de X defini par

$$X^G = \{x \in X | ax = x \forall a \in G\} = \bigcap_{a \in G} X^a$$

Definition 13 (Orbite)

Soit $\phi : G \rightarrow \text{Aut } X$ une action de groupe. Soit $x \in X$

1. L'orbite de x , note O_x est le sous-ensemble de X defini par

$$O_x = \{ax | a \in G\}$$

2. L'ensemble des orbites de l'action est

$$(X, \phi)_G = \{O_x | x \in X\}$$

que l'on note souvent simplement X_G .

3. Le stabilisateur de x , note G_x est le sous-groupe de G defini par

$$G_x = \{a \in G | ax = x\}$$

— Soient $x, x' \in X$, si $O_x \cap O_{x'} \neq \emptyset$, alors $O_x = O_{x'}$.

Donc on peut decomposer X en une reunion disjointe d'orbites, $\exists \bar{X} \subset X$

tel que

$$X = \bigcup_{x \in \bar{X}} O_x$$

— $\forall x \in X \exists$ bijection

$$G/G_x \rightarrow O_x : \bar{a} \mapsto a \cdot x$$

— Equation de classe Soit $\phi : G \rightarrow \text{Aut } X$ une action de groupe. La bijection du point precedent donne une equation de classe

$$\#X < \infty \Rightarrow \# = \sum_{x \in \bar{X}} (G : G_x)$$

— Soit $\phi : G \rightarrow \text{Aut } X$ une action de groupe, le lemme de Burnside exprime la relation entre orbites et ensembles de points fixes

$$X = \bigcup_{x \in \bar{X}} O_x \Rightarrow \#\bar{X} = \frac{1}{\#G} \sum_{a \in G} \#X^a$$

Lecture 11: Perspectiue categorique sur les actions de groupe

Sat 06 Nov

4.1 Un cadre categorique pour les actions de groupe

Pour generaliser la notion d'action de groupe a d'autres categories que Ens, quelle definition doit-on essayer de generaliser ?

Definition 14

Soit C une categorie, et soit $c \in \text{Ob } C$. Soit G un groupe. Une action de G sur c consiste en un homomorphisme de groupe

$$\phi : G \rightarrow \text{Aut } c$$

Un objet de C muni d'une action de G est un G -objet de C .

$\phi : G \rightarrow \text{Aut } c$ homomorphisme $\iff \forall a \in G, \phi(a) : c \simeq c$ et $\forall a, b \in G$
 $\phi(ab) = \phi(a) \circ \phi(b)$.

Un tel couple, $(c, \phi : G \rightarrow \text{Aut } c)$ est un G -objet de C .

On peut decortiquer encore plus lorsque C est concrete

Remarque

Si C est une categorie concrete, \exists foncteur oubli $U : C \rightarrow \text{Ens}$.

Si (c, ϕ) est un G -objet de C , alors on a $\phi : G \rightarrow \text{Aut } c$.

Appliquons U a la famille des $\phi(a)$

$$U(\phi(a)) : U(c) \xrightarrow{\simeq} U(c)$$

On a alors une action de G sur l'ensemble $U(c)$.

Donc une action de G sur $c \in \text{Ob } C$ consiste en une action de G sur $U(c)$ qui respect la structure supplementaire.

Exemple

Si $V \in \text{Vect}_{\mathbb{K}}$, alors $\text{Aut } V = GL(V)$ le groupe general lineaire de V , ie., le groupe de tous les isomorphismes lineaires de V .

Un G -ev est donc un espace vectoriel muni d'un homomorphisme $\phi : G \rightarrow GL(V)$

Comment definir de maniere raisonnable un morphisme entre G -objets dans une categorie C ?

Pour repondre a cette question, on formule la definition d'une action de groupe d'une autre maniere, encore plus categorique.

Lemme 24

Soient C une categorie et G un groupe. Pour tout $c \in \text{Ob } C$, il y a une bijection

$$\text{Gr}(G, \text{Aut } c) \simeq \{F \in \text{Ob Fun}(BG, C) \mid F(\star) = c\}$$

Preuve

$\alpha : \text{Gr}(G, \text{Aut } c) \rightarrow \{F : BG \rightarrow C \mid F(\star) = c\}$ Defini comme :

Etant donne $\phi : G \rightarrow \text{Aut } c$ un homomorphisme, on definit $\alpha(\phi)$ comme etant le foncteur

$$\alpha(\phi) : BG \rightarrow C$$

precise par

$$\alpha(\phi)(\star) = c$$

$$\alpha(\phi)(a) = \phi(a) : c \simeq c \quad \forall a \in \text{Mor } BG = G$$

$\alpha(\phi)$ est trivialement un foncteur.

On definit l'inverse a α comme

$$\beta(F) : G \rightarrow \text{Aut } c$$

est l'application definie par $\beta(F)(a) = F(a) : c \rightarrow c$.

On verifie que $\beta(F)(a)$ est un isomorphisme, de plus $\beta(F)$ est un homomorphisme. On montre facilement que $\beta \circ \alpha$ et $\alpha \circ \beta$ sont des identites. \square

Definition 15

Soient C une categorie et G un groupe, la categorie $\text{Fun}(BG, C)$ est appelee la categorie des G -objets dans C . Les morphismes dans $\text{Fun}(BG, C)$, sont appeles G -equivariants.

Un morphisme G -equivariant est une transformation naturelle $\tau : F \rightarrow F'$ ou $F, F' : BG \rightarrow C$, ie. une application $\tau : G = \text{Ob } BG \rightarrow \text{Mor } C$ telle que pour tout $a \in G$

$$F'(a) \circ \tau_* = \tau_* \circ F(a)$$

Grace au lemme ci-dessus, si $(c, \phi), (c', \phi')$ des G -objets de C , donc $\phi : G \rightarrow \text{Aut } c, \phi' : G \rightarrow \text{Aut}(c')$ un morphisme G -equivariant de (c, ϕ) vers (c', ϕ') consiste en

— un morphisme $f \in C(c, c')$ tel que

$$\phi'(a) \circ f = f \circ \phi(a) \forall a \in G$$

4.2 Generalisation et formalisation du cas $C = \text{Ens}$

Soit C une categorie. Soit G un groupe.

Le foncteur d'action triviale de G est

$$\text{Triv}_G : C \rightarrow {}_G C$$

est defini par :

$$\text{triv}_G(c) = (c, \text{cst}_{\text{Id}})$$

et $\forall f \in C(c, c'), \text{triv}_G(f) = f$

Motive par l'analyse du cas $C = \text{Ens}$, on pose

— le foncteur orbite est l'adjoint a gauche de Triv_G , s'il existe

$$(-)_G : {}_G C \rightarrow C$$

— Le foncteur point fixe est l'adjoint a droite de Triv_G , s'il existe

$$(-)^G : {}_G C \rightarrow C$$

Si $(-)_G$ existe, alors \exists un isomomorphisme naturel

$${}_G C((c, \phi), \text{Triv}_G(c')) \simeq C((c, \phi)_G, c')$$

De meme, si $(-)^G : {}_G C \rightarrow C$ existe, alors \exists isomorphisme naturel

$${}_G C(\text{Triv}_G(c'), (c, \phi)) \simeq C(c', (c, \phi)^G)$$

4.3 Creation d'actions libres

\exists adjonction $L : \text{Ens} \dashv \text{Vect}_{\mathbb{K}} : U$.

Il existe egalement un foncteur oublie $U : {}_G C \rightarrow C \forall C$ categorie, G groupe, defini par $U(c, \phi) = c$, existe-il un adjoint a gauche de ce foncteur oubli ?

Ie,

$$C(c, U(c', \phi')) \simeq {}_G C(L(c), (c', \phi'))$$

Definition 16 (Action libre)

Soient G un groupe et C une categorie.

— Le foncteur de G -action libre, note $\text{Free}_G : C \rightarrow {}_G C$ est l'adjoint a gauche du foncteur oubli $U : {}_G C \rightarrow C$ lorsqu'il existe.

Alors, si l'adjoint a gauche de U existe, on aura $\forall c \in \text{Ob } C, (c', \phi') \in \text{Ob } {}_G C$

$${}_G C(\text{Free}_G(c), (c', \phi')) \simeq C(c, c')$$

4.3.1 Le foncteur $\text{Free}_G : \text{Ens} \rightarrow {}_G \text{Ens}$

Soit $\mu : G \times G \rightarrow G$ la multiplication de G ,

Remarque

G est lui même un G -ensemble, quand on le munit de l'action de translation.

$\forall X \in \text{Ob Ens}$, on pose

$$\text{Free}_G(x) = (G \times X, \phi_X)$$

on on definit

$$\phi_X : G \rightarrow \text{Aut}(G \times X) : a \mapsto ((b, x) \mapsto (ab, x))$$

Donc $\text{Free}_G(x) \in \text{Ob } {}_G \text{Ens}$

Sur les morphismes, on definit

$$\text{Free}_G(f) = \text{Id}_G \times f$$

Lecture 12: Orbites et points fixes categoriques

Sat 13 Nov

Lecture 13: Groupes Abeliens

Fri 19 Nov

5 Groupes Abeliens

5.1 Constructions categoriques dans Ab

Comment distinguer les groupes abeliens parmi tous les groupes ?

Lemme 26

Un groupe G est abelien si et seulement si sa multiplication $\mu : G \times G \rightarrow G$ est un homomorphisme

Preuve

$\mu : G \times G \rightarrow G : (a, b) \mapsto ab$.

Alors μ un homomorphisme de groupe $\iff \forall a, b, a', b' \in G$

$$\mu((a, b) \times (a', b')) = \mu(a, b) \times \mu(a', b')$$

Donc

$$\mu((aa', bb')) = aba'b' = aa'bb' = aba'b' \forall a, b, a', b' \in G$$

Ce qui est equivalent a demander que

$$a'b = ba' \forall a', b \in G \quad \square$$

G est abelien.

5.2 Sommes directes

Comment construire des coproduits dans Ab ?

Lemme 27

Pour tout couple de groupes abeliens A et B ,

$$A \xrightarrow{i_1} A \times B \xleftarrow{i_2} B$$

ou $i_1(a) = (a, 0)$ et $i_2(b) = (0, b)$ pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$ est un coproduit dans Ab .

Preuve

Il suffit de vérifier la propriété universelle.

Soient $f \in \text{Ab}(A, C)$, $g \in \text{Ab}(B, C)$, Comment définir $h \in \text{Ab}(A \times B, C)$ tel que $hi_1 = f$, $hi_2 = g$.

Observer que $hi_1 = f \iff h(a, 0) = f(a) \forall a \in A$ et $hi_2 = g \iff h(0, b) = g(b) \forall b \in B$.

Cependant,

$$h(a, b) = h(a, 0) + h(0, b) = f(a) + g(b) \quad \square$$

Définissons donc $h(a, b) = f(a) + g(b)$

Pour distinguer les deux rôles catégoriques de $A \times B$ au lieu du produit, on le note $A \oplus B$ et on l'appelle la somme directe et on écrira les éléments comme une somme formelle $a + b \in A \oplus B$.

Quelle est la relation entre la notion de \oplus ci-dessus et celle de \oplus de 2 sous-groupes d'un groupe abélien ?

Parfois on considère la somme directe comme une opération interne à l'ensemble des sous-groupes d'un groupe abélien. Si B et C sont des sous-groupes de A , leur somme, notée $B+C$ est un sous-groupe de A .

Traduisons la propriété universelle de la somme directe de groupes abéliens

Remarque

Selon la propriété universelle du coproduit

$$\forall f \in \text{Ab}(A, C), \forall g \in \text{Ab}(B, C), \exists ! h \in \text{Ab}(A \oplus B, C)$$

tel que

$$\text{Ab}(A \oplus B, C) \rightarrow \text{Ab}(A, C) \times \text{Ab}(B, C) : h \mapsto (h \circ i_1, h \circ i_2)$$

est une bijection.

Ainsi l'existence de α ne dépend que de l'existence de i_1 et i_2 .

De plus, la propriété universelle de $A \oplus B$ nous donne un inverse α

$$\beta(f, g) = f + g$$

Definition 17 (Produit quelconque d'ensembles)

Soit X un ensemble et soit $\{Y_x | x \in X\} \subset \text{Ob Ens}$. Le produit des Y_x note $\prod_X Y_x$ est l'ensemble

$$\left\{ \omega \in \text{Ens}(X, \bigcup Y_x) \mid \omega(x) \in Y_x \forall x \in X \right\}$$

Ceci se generalise naturellement aux groupes

Definition 18 (Produit quelconque de groupes)

Soit $\{G_x | x \in X\} \subset \text{Ob Gr}$. Le produit des G_x , note $\prod G_x$ est le groupe dont le sous-ensemble sous-jacent est

$$\left\{ \omega \in \text{Ens}(X, \bigcup G_x) \mid \omega(x) \in G_x \forall x \in X \right\}$$

muni de la multiplication definie par

$$(\omega \cdot \omega')(x) = \omega(x) \cdot \omega'(x)$$

Notons que ici, les projections selon les coordonnees sont en particulier des homomorphismes.

Remarque

Le produit d'une famille quelconque d'ensembles ou de groupes verifie une propriete universelle qui generalise celle de la definition du produit de deux objets, notamment Dans $\text{Gr} : \forall \{f_{x'} \in \text{Gr}(H, G_{x'}) \mid x' \in X\}$,

$$\exists ! f \in \text{Gr}(H, \prod G_x)$$

tel que $p_{x'} \circ f = f_{x'} \forall x'$

Generalisons la notion de somme directe aux familles quelconques de groupes abeliens.

Definition 19 (Somme directe quelconque)

Soit X un ensemble, et soit $\{A_x | x \in X\} \subset \text{Ob Ab}$. Une somme directe des groupes abeliens A_x consiste en un groupe abelien B muni d'homomorphismes $i_x : A_x \rightarrow B$ pour tout $x \in X$ tel que l'application

$$\text{Ab}(B, C) \rightarrow \prod_{x \in X} \text{Ab}(A_x, C) : h \mapsto (h \circ i_x)_{x \in X}$$

Proposition 30

Soit X un ensemble, et soit $\{A_x | x \in X\} \subset \text{Ob Ab}$. La somme directe des A_x existe et est unique a isomorphisme pres.

Preuve

Posons $B = \{ \omega \in \prod_{x \in X} A_x \mid \# \{x \in X \mid \omega(x) \neq 0\} < \infty \}$ et $\iota_x : A_x \rightarrow B : a \mapsto \iota_{x'}(a)$ ou

$$\iota_{x'}(a) : X \rightarrow \bigcup_{x \in X} A_x : x \mapsto \begin{cases} a & : x = x' \\ 0 & : x \neq x' \end{cases}$$

On veut définir un inverse $\alpha : \text{Ab}(B, C) \rightarrow \prod_{x \in X} \text{Ab}(A_x, C)$.

On définit $\beta : \prod_{x \in X} \text{Ab}(A_x, C) \rightarrow \text{Ab}(B, C)$ par

$$\beta((f_x)_{x \in X}) = f$$

ou $f : B \rightarrow C : \omega \mapsto \sum_{x \in X} f_x(\omega(x))$ f est un homomorphisme, car :

$$f(\omega + \omega') = \sum_{x \in X} f_x((\omega + \omega')(x)) = \sum_{x \in X} f_x(\omega(x)) + \sum_{x \in X} f_x(\omega'(x)) = f(\omega) + f(\omega')$$

Il reste à voir que c'est bien un inverse

$$\prod_{x \in X} \text{Ab}(A_x, C) \xrightarrow{\beta} \text{Ab}(B, C)$$

$$(f_x)_{x \in X} \mapsto f \mapsto (f \circ \iota_x)_{x \in X}$$

Donc

$$\forall a \in A_{x'} : f \circ \iota_{x'}(a) = \sum_{x \in X} f_x(\iota_{x'}(a)(x)) = f_{x'}(a)$$

On veut montrer que $\beta\alpha = \text{Id}$

$$\text{Ab}(B, C) \xrightarrow{\prod_{x \in X} \text{Ab}(A_x, C)} \xrightarrow{\text{Ab}} (B, C)$$

On a donc

$$\beta((f \circ \iota_x)_{x \in X})(\omega) = \sum_{x \in X} f \circ \iota_x(\omega(x))$$

□

Lecture 14: Groupes Abéliens libres

Fri 26 Nov

Lemme 31

Soit X un ensemble, et soit $\{A_x | x \in X\} \subset \text{Ob Ab}$. Alors

$$\#X < \infty \iff \bigoplus_{x \in X} A_x \simeq \prod_{x \in X} A_x$$

Preuve

$\forall X, \bigoplus A_x < \prod_{x \in X} A_x$, de plus par définition

$$\bigoplus A_x = \left\{ \omega : X \rightarrow \bigcup A_x \mid \omega(x) \neq 0 \text{ pour un nombre fini d'éléments} \right\} \quad \square$$

On a donc égalité.

Notation utile pour sommes directes :

$$\omega \in \bigoplus A_x, \text{ on note } \sum_{x \in X} \omega(x) \cdot x$$

Où on a à droite une somme finie d'éléments

Definition 20 (Groupes abeliens libre)

Soit X un ensemble. La somme directe $\bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}$ est le groupe abelien libre de base X , note $F_{\text{Ab}}(X)$

Theorème 32 (Foncteur libre)

La définition du groupe abelien libre s'étend en un foncteur $F_{\text{Ab}} : \text{Ens} \rightarrow \text{Ab}$, qui est adjoint à gauche du foncteur oublie $U : \text{Ab} \rightarrow \text{Ens}$

Preuve

Il reste à définir F_{Ab} sur les morphismes.

Soit $f \in \text{Ens}(X, Y)$, alors

$$F_{\text{Ab}}(f) : F_{\text{Ab}}(X) \rightarrow F_{\text{Ab}}(Y) : \sum_{x \in X} n_x \cdot x \mapsto \sum_{y \in Y} \left(\sum_{x \in f^{-1}(y)} n_x \right) y$$

La preuve que $F_{\text{Ab}}(g \circ f) = F_{\text{Ab}}(g) \circ F_{\text{Ab}}(f)$ ressemble à celle donnée dans le cas du foncteur $\mathcal{L} : \text{Ens} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$.

Montrons donc que F_{Ab} est l'adjoint à gauche de U .

Etablissons la bijection naturelle $\text{Ab}(F_{\text{Ab}}(X), A) \rightarrow \text{Ens}(X, UA)$.

On définit

$$\alpha(\phi) = U(\phi) \circ \eta_X$$

On définit de plus $\forall f : X \rightarrow UA$

$$\beta(f) : F_{\text{Ab}}(X) \rightarrow A : \sum_{x \in X} n_x x \mapsto \sum_{x \in X} n_x f(x)$$

□

5.3 Le foncteur hom**Lemme 33**

Il y a un foncteur $\text{hom} : \text{Ab}^{op} \times \text{Ab} \rightarrow \text{Ab}$ spécifié sur les objets par

$$\text{hom}(A, B) = \text{Ab}(A, B)$$

muni de l'addition définie composante par composante pour tout $a \in A$,

Preuve

L'addition $f + g$ est bien un homomorphisme et clairement $f + g = g + f$.

Il faut maintenant montrer que

$$\text{hom}(f^{op}, g) : \text{hom}(A', B) \rightarrow \text{hom}(A, B')$$

On a en effet $\forall h, k \in \text{hom}(A', B)$, on a

$$\text{hom}(f^{op}, g)(h + k) = g \circ (h + k) \circ f = g \circ h \circ f + g \circ k \circ f$$

□

On en déduit que hom est bien un foncteur.

Proposition 34

Soit X un ensemble, et soit $\{A_x | x \in X\} \subset \text{Ob Ab}$. Pour tout groupe abelien B , il y a un isomorphisme de groupes abeliens

$$\text{hom}(\bigoplus A_x, B) \simeq \prod_{x \in X} \text{hom}(A_x, B)$$

Preuve

On sait deja qu'il y a une bijection

$$\alpha : \text{Ab}(\bigoplus A_x, B) \rightarrow \prod_{x \in X} \text{Ab}(A_x, B)$$

Il suffit donc de montrer que α est un homomorphisme.

On a en effet

$$\alpha(h) = (h \circ \iota_x)_{x \in X}$$

Soient $h, k \in \text{Ab}(\bigoplus A_x, B)$.

Alors $\alpha(h+k) = ((h+k) \circ \iota_x) = \alpha(h) + \alpha(k)$ □

5.4 Suites Exactes

Une suite d'homomorphismes de groupe abelien

$$\dots \xrightarrow{\phi_{n+2}} A_{n+1} \xrightarrow{\phi_{n+1}} A_n \xrightarrow{\phi(n)} A_{n-1} \dots$$

est exacte si $\text{Im } \phi_{n+1} = \ker \phi_n$ pour tout n .

Une courte suite exacte dans Ab est une suite exacte d'homomorphismes de groupe abeliens dont seulement au plus trois groups, consecutifs, sont non-triviaux. On ecrit une telle suite

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \rightarrow 0$$

Exemple

Pour tout couple de groupes abeliens A et B , il y a une suite exacte

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\iota} A \oplus B \xrightarrow{\pi} B \rightarrow 0$$

Definition 21 (Suite exacte scindee)

Une suite exacte $0 \rightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \rightarrow 0$ dans Ab est scindee s'il existe $\sigma \in \text{Ab}(C, B)$ tel que $\pi \circ \sigma = \text{Id}$. On dit alors que σ est une section de π .

Lemme 36

Une courte suite exacte est scindee si et seulement si il existe une retraction de l'homomorphisme, ie. il existe $\rho \in \text{Ab}(B, A)$ tel que $\rho \circ \iota = \text{Id}$

Preuve

$\exists \sigma \implies \exists \rho$

Considerer $q : B \rightarrow B/\ker \pi$ et $\hat{\pi} : B/\ker \pi \rightarrow C$.

Observer que

$$\hat{\pi}q\sigma\hat{\pi} = \pi\sigma\hat{\pi} = \hat{\pi}$$

Donc

$$q\sigma\hat{\pi} = \hat{\pi}^{-1}\hat{\pi}q\sigma\hat{\pi} = \text{Id}$$

Par consequent $\forall b \in B$

$$q(b - \sigma\hat{\pi}q(b)) = q(b) - q\sigma\hat{\pi}q(b) = q(b) - q(b) = 0$$

Donc $b - \sigma\hat{\pi}q(b) \in \ker \pi = \text{Im } \iota$.

Ce qui nous permet de définir

$$\rho(b) = \text{ l'unique } a \in A \text{ tel que } \iota = b - \sigma\hat{\pi}q(b)$$

Alors ρ est un homomorphisme, alors

$$\iota(a) = b - \sigma\hat{\pi}q(b), \iota(a') = b' - \sigma\hat{\pi}q(b')$$

Alors $\iota(a + a') = b + b' - \sigma\hat{\pi}q(b + b')$.

Et finalement

$$\rho\iota(a) = a$$

car

$$\iota(a) - \sigma\hat{\pi}q\iota(a) = \iota(a)$$

Demonstrons maintenant que l'existence de ρ implique l'existence de σ .

Pour tout $c \in C$, choisir $b_c \in B$ tel que $\pi(b_c) = c$.

Normalement, il n'y a aucune raison que $b_{c+c'} = b_c + b_{c'}$, ie., ces choix de pre-image des elements de C ne nous donnent pas un homomorphisme de C vers B .

Modifions ces choix de la maniere suivante pour obtenir un homomorphisme :

Définir $\sigma : C \rightarrow B$ par $\sigma(c) = b_c - \iota\rho(b_c)$.

Il nous faut voir que $\pi\sigma(c) = c \forall c \in C$.

$$\begin{aligned} \pi\sigma(c) &= \pi(b_c - \iota\rho(b_c)) \\ &= c - \pi\iota\rho(b_c) = c \end{aligned}$$

Si $\pi(b) = c = \pi(b')$, alors on a $b - b' \in \ker \pi = \text{Im } \iota$.

Donc il existe un unique $a \in A$ tel que $b - b' = \iota(a)$ d'où

$$(b - \iota\rho(b)) - b' - \iota\rho(b) = \iota(a) - \iota\rho\iota(a) = a$$

□