Série 6

David Wiedemann

6 avril 2021

1

Montrons d'abord que le produit de convolution existe pour tout x dans $\mathbb{R}$.
Par hypothèse, f est à support compact, notons $[a, b] \subset \mathbb{R}$ l'intervalle compact sur lequel elle ne s'annulle pas.
Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \\ &= \int_a^b f(t)g(x-t)dt \end{aligned}$$

f et g étant continue sur $\mathbb{R}$, elles le sont en particulier sur $[a, b]$, respectivement $[x-b, x-a]$, et donc $f * g(x)$ existe et est bien défini pour tout x.
Montrons maintenant que $f * g \in C^k(\mathbb{R})$.
Soit $h(x, t) \in C^k(\mathbb{R}^2)$, un théorème du cours donne que si $\frac{\partial h}{\partial x}$ existe, alors

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_c^d h(x, t)dt = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} h(x, t)dt$$

où $[c, d]$ est à nouveau un intervalle fermé quelconque.
En appliquant ce théorème au produit de convolution en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et en utilisant que $g \in C^k(\mathbb{R})$, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \leq k$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \frac{\partial^n}{\partial x^n} g(x_0 - t)dt &= \int_a^b \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(t)g(x_0 - t)dt \\ &= \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_a^b f(t)g(x_0 - t)dt \\ &= \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x_0 - t) \\ &= \frac{\partial^n}{\partial x^n} f * g(x_0) \end{aligned}$$

On en déduit que $f * g \in C^k(\mathbb{R})$.

2

Montrons d'abord que f_n est $C_c^\infty(\mathbb{R})$.
Grâce à la partie 1, on sait déjà que $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, il suffit donc de montrer qu'il existe un compact $I = [a', b']$ en dehors duquel f_n s'annulle.
Faisons l'observation que $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n s'annulle (en particulier) en tout point $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Ainsi, pour $x > b + 1$

$$\begin{aligned} f * g_n(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g_n(x-t) dt \\ &= \int_a^b f(t) g_n(x-t) dt \\ &= \int_a^b f(t) \cdot 0 dt = 0 \end{aligned}$$

Et le même raisonnement montre que pour $x < a - 1$, on a également

$$f * g_n(x) = 0$$

Ainsi, il existe un intervalle fermé en dehors duquel $f * g$ s'annulle et on en déduit que $f * g$ est également à support compact. Montrons maintenant que f_n converge uniformément vers f.

Soit $\epsilon > 0$, on va montrer qu'il existe un n^* tel que $\forall n > n^*$, $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \epsilon, \forall x \in \mathbb{R}$.
On utilisera que f est continue, et donc uniformément continue sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$.
Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x, y \in [a, b], |x - y| < \frac{1}{n}$ implique $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
Pour garder la notation compacte, on notera $c = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} g}$.
On a donc

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g_n(x-t) dt \\ &= c \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t) n g(n(x-t)) dt \\ &= c \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} (f(x) + (f(t) - f(x))) n g(n(x-t)) dt \\ &= c \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(x) n g(n(x-t)) dt + c \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} (f(t) - f(x)) n g(n(x-t)) dt \\ &= c \int_{-1}^{1} f(x) g(t) dt + c \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} (f(t) - f(x)) n g(n(x-t)) dt \\ &= f(x) + c \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} (f(t) - f(x)) n g(n(x-t)) dt \end{aligned}$$

Faisons maintenant l'observation que par hypothèse, $|f(t) - f(x)| < \epsilon$, et ainsi

$$\begin{aligned}\left| c \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} (f(t) - f(x)) n g(n(x-t)) \right| &\leq c \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \epsilon n \left| g(n(x-t)) \right| dt \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

Ou la dernière égalité tient parce que $g(x)$ est une fonction positive.
On en déduit que

$$f_n(x) - f(x) \leq f(x) + |\epsilon| - f(x) = \epsilon$$

Et de même que

$$f_n(x) - f(x) \geq f(x) - |\epsilon| - f(x) = -|\epsilon|$$

Et donc f_n converge uniformément vers f.

3

Tout d'abord, notons qu'il est clair que g est non négative, en effet, la fonction e^x étant strictement positive, on voit que l'image de g est positive.
Montrons maintenant que g est à support compact, en effet, si $x \in \mathbb{R} \backslash [-1, 1]$, alors en particulier $x \notin]-1, 1[$ et donc $g(x) = 0$ par définition.
Montrons maintenant que g est infiniment différentiable.
Montrons d'abord par récurrence que $\forall x \in]-1, 1[, \forall k \in \mathbb{N}, \frac{d^k g}{dx^k} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}}$, où P et Q sont deux polynômes.
Le cas $n = 1$ est clair, en effet,

$$\frac{dg}{dx} = \left(\frac{-2x}{(x^2 - 1)} \right) e^{\frac{1}{x^2-1}}$$

Supposons le résultat démontré pour n et montrons le résultat pour $n + 1$, ainsi on a

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1} g}{dx^{n+1}} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^n g}{dx^n} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} e^{\frac{1}{x^2-1}} \right) \\ &= \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q(x)^2} e^{\frac{1}{x^2-1}} + \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{-2x}{x^2 - 1} e^{\frac{1}{x^2-1}} \\ &= \frac{(x^2 - 1)(P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)) - 2xP(x)Q(x)}{Q(x)^2 (x^2 - 1)} e^{\frac{1}{x^2-1}}\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $g \in C_c^\infty(]-1, 1[)$.
Montrons maintenant que $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{x \to 1^-} \frac{d^k g}{dx^k} = \lim_{x \to -1^+} \frac{d^k g}{dx^k} = 0$ (ie.

que les limites à gauche et à droite existent et sont nulles).
La fonction g étant paire, il suffit de montrer une des deux limites.
Considérons la k-ième dérivée de g,

$$\lim_{x \to 1-} \frac{d^k g}{dx^k} = \lim_{x \to 1-} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{\frac{1}{x^2-1}}$$

Posons $u = \frac{1}{x^2-1}$, alors on a

$$\lim_{x \to 1-} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{\frac{1}{x^2-1}} = \lim_{u \to -\infty} \frac{P(\sqrt{1+\frac{1}{u}})}{Q(\sqrt{1+\frac{1}{u}})} e^u = 0$$

car l'exponentielle décroit plus rapidement que tout polynôme.
Ainsi

$$\lim_{x \to 1-} \frac{d^k g}{dx^k} = \lim_{x \to 1+} \frac{d^k g}{dx^k} = 0$$

et

$$\lim_{x \to -1-} \frac{d^k g}{dx^k} = \lim_{x \to -1+} \frac{d^k g}{dx^k} = 0$$

Et on en déduit que $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.