Analyse avancée II — Semaine du 2021-03-29 au 2021-04-02
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Série 12 du mercredi 31 mars 2021

Exercice 1.

Soit $x \in]0, +\infty[$. Calculer

$$\int_0^{\pi/2} \ln\big(x^2 \cos^2(t) + \sin^2(t)\big)\, \mathrm{d}t =: g(x). \tag{1}$$

Justifier toutes les étapes.

Indication. Calculer g' et en déduire g, en observant que $g(1) = 0$.

Solution :

D'après le théorème de dérivation des fonctions dépendant d'un paramètre (cf. cours), g est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

$$g'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x\cos^2(t)}{x^2\cos^2(t) + \sin^2(t)}\, \mathrm{d}t \tag{2}$$

(avec $z := \tan(t)$)

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + z^2} \frac{1}{1 + z^2}\, \mathrm{d}z \tag{3}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2x}{1 - x^2}\left(\frac{1}{z^2 + x^2} - \frac{1}{z^2 + 1}\right) \mathrm{d}z \tag{4}$$

$$= \frac{2x}{1 - x^2} \lim_{Z \to +\infty}\left(\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{Z}{x}\right) - \arctan(Z)\right) \tag{5}$$

$$= \frac{\pi}{1 + x}\,. \tag{6}$$

Les intégrales généralisées sont absolument convergentes (en fait les intégrandes sont strictement positifs sur $[0, +\infty[$). En cas de doute sur la manipulation des intégrales généralisées sur $[0, +\infty[$, intégrer d'abord sur $[0, Z]$ puis étudier $\lim_{Z \to +\infty}$.

La continuité de g' en 1 assure que $g'(1) = \pi/2$. On obtient

$$g(x) = g(x) - g(1) = \int_1^x \frac{\pi}{1 + t}\, \mathrm{d}t = \pi \ln\left(\frac{1 + x}{2}\right). \tag{7}$$

Exercice 2.

Définissons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \sin\left(x\sqrt{1 + t^2}\right) \mathrm{d}t. \tag{8}$$

Montrer que f admet un minimum local en 0.

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}$. La formule de dérivation d'intégrale paramétrique (cf. cours) donne

$$f'(x) = \sin\Big(x\sqrt{1+x^2}\Big) + \int_0^x \sqrt{1+t^2}\cos\Big(x\sqrt{1+t^2}\Big)\,\mathrm{d}t \ ; \tag{9}$$

en particulier, $f'(0) = 0$.

Étudions maintenant f'' :

$$f''(x) = \cos\Big(x\sqrt{1+x^2}\Big) \times \left(\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ + \sqrt{1+x^2}\cos\Big(x\sqrt{1+x^2}\Big) - \int_0^x (1+t^2)\sin\Big(x\sqrt{1+t^2}\Big)\,\mathrm{d}t \ ; \tag{10}$$

en particulier, $f''(0) = 2$. Ainsi, f admet bien un minimum local en 0.

Exercice 3.

Définissons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathit{\Gamma}(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{11}$$

1) Montrer que $\mathit{\Gamma}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$; que $\mathit{\Gamma} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$; et que, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\mathit{\Gamma}^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^k(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{12}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathit{\Gamma}(x+1) = x\mathit{\Gamma}(x)$.
   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathit{\Gamma}(n+1) = n!$; i.e. $\mathit{\Gamma}$ permet de généraliser la notion de factorielle à des arguments non entiers.

Solution :

Remarque. Le cours a été détaillé pour une intégrale généralisée dépendant de paramètres, pour un intervalle d'intégration non compact du type $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Cependant la théorie s'adapte à tout intervalle non compact ; l'adaptation au cas $]a, b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$ est directe.

Dans le présent exercice, la question porte sur une intégrale généralisée définie sur l'intervalle non compact $]0, +\infty[$. Il y a donc deux difficultés : en 0 et « en $+\infty$ », mais la théorie du cours reste valable. En cas de doutes, écrire l'intégrale généralisée (avec un paramètre) comme une somme d'une intégrale généralisée sur $]0, 1]$ et d'une intégrale généralisée sur $[1, +\infty[$, puis étudier chacune de ces deux intégrales (avec un paramètre) séparément.

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; notons $\gamma_x := t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$. Observons que γ_x est continue sur $]0,+\infty[$, $0 < \gamma_x(t) \leqslant t^{x-1}$ sur $]0,1]$ et $0 < \gamma_x(t) \leqslant C/t^2$ sur $[1,+\infty[$ pour une certaine constante $C > 0$ dépendante de x. Comme $\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge et que $\int_1^{+\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t$ converge, nous en déduisons que $\int_0^{+\infty} \gamma_x$ converge. Γ est donc bien définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Soient $0 < a < b < +\infty$. Nous allons maintenant montrer que $\Gamma \in \mathrm{C}^\infty(]a,b[)$. Notons $\gamma(t,x) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t}$ et observons que $\gamma \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$ et, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^k \gamma}{\partial x^k}(t,x) = \ln(t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}. \tag{13}$$

Soient $x \in]a,b[$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. Si $t \leqslant 1$, $t^x \leqslant t^a$; si $t \geqslant 1$, $t^x \leqslant t^b$. Ainsi, pour tout $x \in]a,b[$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left|\frac{\partial^k \gamma}{\partial x^k}(t,x)\right| \leqslant |\ln(t)|^k \mathrm{e}^{-t} t^{-1} \max\{t^a, t^b\} := g_k(t). \tag{14}$$

Nous avons donc une fonction majorante de $\left|\frac{\partial^k \gamma}{\partial x^k}\right|$ indépendante de la variable $x \in]a,b[$; montrons que $\int_0^{+\infty} g_k$ converge.
Puisque

$$\lim_{t\to 0^+} t^{1-(a/2)} g_k(t) = \lim_{t\to 0^+} t^{1-(a/2)} |\ln(t)|^k \mathrm{e}^{-t} t^{a-1} = 0 \tag{15}$$

avec $1 - (a/2) < 1$, $\int_0^1 g_k$ converge. Puisque $\lim_{t\to+\infty} t^2 g_k(t) = 0$, $\int_1^{+\infty} g_k$ converge. Finalement, $\int_0^{+\infty} g_k$ converge. Par conséquent, $\Gamma \in \mathrm{C}^k(]a,b[)$: appliquer les résultats du cours et effectuer une récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Ce résultat étant valable pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in]a,+\infty[$ et $k \in \mathbb{N}$, nous en déduisons $\Gamma \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. De plus,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{16}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   a) Intégrons par parties :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^{+\infty} x t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x). \tag{17}$$

   Notons que cette manœuvre est licite parce que $\int_0^{+\infty} x t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe. En cas de doutes, intégrer d'abord sur $[t_1, 1]$ (en effectuant l'intégration par parties) puis étudier $\lim_{t_1\to 0^+}$; ensuite faire de même sur $[1, t_2]$ puis étudier $\lim_{t_2\to+\infty}$.
   b) Nous constatons que $\Gamma(1) = 1$. On en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

Exercice 4.

Calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \tag{18}$$

par la méthode suivante. Pour $x \geqslant 0$, notons $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Calculer $g'(x)$ pour $x > 0$, puis en déduire $I = g(0)$. Justifier soigneusement la continuité de g en 0 et la différentiabilité de g sur $]0, +\infty[$.

Solution :

Pour un quelconque $x \geqslant 0$, notons $h_x : t \mapsto \mathrm{e}^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}$. La fonction $h_x \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}_+^*)$ est prolongeable par continuité en 0 en lui y donnant la valeur 1. Nous travaillerons avec ce prolongement. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{t\to+\infty} t^2|h_x(t)| = 0$; par conséquent l'intégrale est absolument convergente et g est ainsi définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ existe (cf. cours), g est même définie sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction

$$h : \left(\begin{array}{c} [0, +\infty[^2 \to \mathbb{R} \\ (t, x) \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t = 0 \\ \mathrm{e}^{-tx} \dfrac{\sin(t)}{t} \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right) \tag{19}$$

est continue. De plus $\frac{\partial h}{\partial x}$ existe et est continue sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$; $\frac{\partial h}{\partial x}(t, x) = -\mathrm{e}^{-tx}\sin(t)$ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, et $\frac{\partial h}{\partial x}$ est prolongeable par continuité sur $[0, +\infty[^2$.

Soit $x \in [0, +\infty[$; vérifions que $\int_0^{+\infty} h(t, x)\,\mathrm{d}t$ converge uniformément. Une double intégration par parties donne, pour tout $(t_1, t_2) \in]0, +\infty[^2$ tel que $t_1 < t_2$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{e}^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-tx} \left[\frac{\cos(t)}{t} \right]_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \cos(t) \left(x \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{t} + \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{t^2} \right) \mathrm{d}t \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{t} [\mathrm{e}^{-tx} \cos(t) + x\mathrm{e}^{-tx} \sin(t)]_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} x^2 \mathrm{e}^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} (x\sin(t) + \cos(t)) \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{21}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{e}^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = &-\left[(\cos(t) + x\sin(t)) \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{(1 + x^2)t} \right]_{t=t_1}^{t=t_2} \\ &- \int_{t_1}^{t_2} (x\sin(t) + \cos(t)) \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{(1 + x^2)t^2}\,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{22}$$

et, pour tout $T > 0$,

$$\begin{aligned} \int_T^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = &(x\sin(T) + \cos(T)) \frac{\mathrm{e}^{-Tx}}{(1 + x^2)T} \\ &- \int_T^{+\infty} (x\sin(t) + \cos(t)) \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{(1 + x^2)t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{23}$$

L'intégrale du membre de droite de (23) est absolument convergente car, d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$|x\sin(t) + \cos(t)| \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{(1 + x^2)t^2} \leqslant (x^2 + 1)^{1/2} (\sin^2(t) + \cos^2(t))^{1/2} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{(1 + x^2)t^2} \leqslant \frac{1}{t^2} \tag{24}$$

et $\int_T^{+\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t$ est convergente. En fait, cet argument prouve même que

$$\lim_{T\to+\infty}\int_T^{+\infty}(x\mathrm{e}^{-tx}\sin(t)+\mathrm{e}^{-tx}\cos(t))\frac{1}{(1+x^2)t^2}\,\mathrm{d}t=0 \tag{25}$$

uniformément en $x\in[0,+\infty[$. Par ailleurs,

$$\left|x\mathrm{e}^{-Tx}\sin(T)+\mathrm{e}^{-Tx}\cos(T)\right|\frac{1}{(1+x^2)T}\leqslant\frac{1}{T}\xrightarrow{T\to+\infty}0 \tag{26}$$

uniformément en $x\in[0,+\infty[$. Ceci prouve que $\int_0^{+\infty}h(t,x)\,\mathrm{d}t$ converge uniformément pour $x\in[0,+\infty[$.

Montrons maintenant que, pour tout $a\in\,]0,+\infty[$, $\int_0^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{d}t$ converge uniformément pour $x\in\,]a,+\infty[$. En effet, $\forall t\in[0,+\infty[$, $|-\mathrm{e}^{-tx}\sin(t)|\leqslant\mathrm{e}^{-at}$ et $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge.

Grâce aux théorèmes du cours, il en résulte que $g\in\mathrm{C}^0([0,+\infty[)\cap\mathrm{C}^1(]0,+\infty[)$. De plus, $\forall x\in\,]0,+\infty[$,

$$g'(x)=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{x^2+1}(x\sin(t)+\cos(t))\right]_{t=0}=-\frac{1}{x^2+1}. \tag{27}$$

Ainsi $g(x)=-\arctan(x)+c$; puisque g est continue en 0, $c=g(0)$. On peut donc écrire

$$g(0)=\lim_{x\to+\infty}g(x)+\arctan(x)=\frac{\pi}{2}+\lim_{x\to+\infty}g(x)=\frac{\pi}{2} \tag{28}$$

car, pour tout $x>0$,

$$|g(x)|\leqslant\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\xrightarrow{x\to+\infty}0 \tag{29}$$