Notes de cours

MATH-105(a)
Analyse avancée II

(Section MA)

Boris Buffoni, Fabio Nobile

2020-2021
Dernière mise à jour : 26 février 2021

EPFL

Table des matières

Notations

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : \; x \geq 0\}$

$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : \; x > 0\}$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{- + \infty, +\infty\}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$

Chapitre 0

Intégrales Généralisées

Ce chapitre reprend le dernier sujet du cours d'Analyse Avancée I, notamment la construction de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue où continue par morceaux sur un intervalle borné et fermé. On rappelle qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ avec $a < b$ dans $\mathbb{R}$ est dite *continue par morceaux* si $\lim_{t\to x^+} f(t)$ existe (sous-entendu, dans $\mathbb{R}$) pour tout $x \in [a, b[$, $\lim_{t\to x^-} f(t)$ existe pour tout $x \in]a, b]$ et f est continue en x pour tout $x \in [a, b]$ avec au plus un nombre fini d'exceptions. Cette définition se généralise à un intervalle I quelconque avec une infinité de points : une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux (c.p.m.) si f est continue par morceaux sur tout intervalle $[a, b] \subset I$ avec $a < b$.

On se pose ici la question de comment généraliser la définition de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ dans le cas où l'intervalle d'intégration est borné mais pas fermé, et la fonction f n'est pas définie en a ou en b, comme dans les exemples suivantes :

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx, \qquad \int_0^1 \ln(x)dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}dx,$$

ou encore, comment généraliser la définition de l'intégrale sur un intervalle non borné, par exemple :

$$\int_0^\infty \sin(x)dx, \qquad \int_0^\infty \sin(x^2)dx, \qquad \int_0^\infty e^{-x}dx, \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx, \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx,$$

où on entendra toujours ∞ par $+\infty$, dans ce chapitre.

0.1 Intégrale généralisée sur un intervalle borné

On commence par définir l'intégrale généralisée sur un intervalle borné et "demi-ouvert" (ouvert à droite et fermé à gauche ou bien ouvert à gauche et fermé à droite).

Définition 0.1. *Pour $a < b$ dans $\mathbb{R}$, soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ c.p.m. et $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b[$. Si $\lim_{x\to b^-} F(x)$ existe, on dit que $\int_a^b f(x)dx$ existe (ou converge) et on pose*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b^-} F(x).$$

Si $\lim_{x\to b^-} F(x)$ *n'existe pas, on dit que* $\int_a^b f(x)dx$ *diverge.*

De façon similaire, soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ *c.p.m., et* $F(x) = \int_x^b f(t)dt$, $x \in]a,b]$. *Si* $\lim_{x\to a^+} F(x)$ *existe, on dit que* $\int_a^b f(x)dx$ *existe (ou converge) et on pose*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Autrement on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ *diverge.*

Exemple 0.2. *On étudie l'existence de l'intégrale généralisée*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soit $F(x) = \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$, $x \in]0,1]$ *qui est bien définie car la fonction* $f(t) = t^{-\alpha}$ *est continues sur* $[x,1]$ *pour tout* $x \in]0,1]$. *Pour* $\alpha \neq 1$ *on a*

$$F(x) = \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\bigg|_x^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

tandis que pour $\alpha = 1$ *on a*

$$F(x) = \ln t\big|_x^1 = -\ln x.$$

Donc

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

et l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ *existe pour tout* $\alpha < 1$.

On vérifie facilement que si la fonction f admet une extension par continuité sur $[a,b]$ alors l'intégrale généralisé de f existe et coïncide avec l'intégrale sur l'intervalle fermé $[a,b]$ de l'extension par continuité de la fonction. Plus précisément, on a le résultat suivant, dont la preuve est laissée comme exercice.

Lemme 0.3. *Pour* $a < b$ *dans* $\mathbb{R}$, *soit* $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m. telle que* $\lim_{x\to b^-} f(x)$ *existe et définissons la fonction c.p.m. sur* $[a,b]$

$$f_b(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,b[, \\ \lim_{t\to b^-} f(t), & x = b. \end{cases}$$

Alors, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ *existe et* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_b(x)dx$.

On a le même résultat pour une fonction $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ *c.p.m. telle que* $\lim_{x\to a^+} f(x)$ *existe.*

On considère maintenant le cas d'un intervalle ouvert (à gauche et à droite).

Définition 0.4. *Soit* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m.,* $a < b$. *Pour* $c \in]a,b[$, *si* $\int_a^c f(x)dx$ *et* $\int_c^b f(x)dx$ *existent, alors on pose* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, *auquel cas* $\int_a^b f(x)dx$ *est dite exister ou converger, sinon* $\int_a^b f(x)dx$ *est dite diverger.*

Il est facile de montrer que l'existence (ou non) de $\int_a^b f(x)dx$ ne dépend pas du choix de $c \in]a,b[$. En fait, soit $\tilde{c} \in]a,b[$, $\tilde{c} \neq c$. Alors

$$\int_a^{\tilde{c}} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{\tilde{c}} f(x)dx$$

existe ssi $\int_a^c f(x)dx$ existe, car f est c.p.m. sur $[c,\tilde{c}] \cup [\tilde{c},c]$. De même,

$$\int_{\tilde{c}}^b f(x)dx = \int_{\tilde{c}}^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

existe ssi $\int_c^b f(x)dx$ existe, et

$$\int_a^{\tilde{c}} f(x)dx + \int_{\tilde{c}}^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{\tilde{c}} f(x)dx + \int_{\tilde{c}}^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Exemple 0.5. *Dire si l'intégrale suivante*

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(x)dx$$

existe ou non.

On est tenté de calculer

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi/2^-} \int_{-x}^{x} \tan(t)dt &= \lim_{x\to\pi/2^-} \int_{-x}^{x} (-\ln(\cos t))'dt = \lim_{x\to\pi/2^-} \Big(-\ln(\cos x) + \ln(\cos(-x)) \Big) \\ &= \lim_{x\to\pi/2^-} \ln\left(\frac{\cos(-x)}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\pi/2^-} \ln(1) = 0\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\pi/2^-} \int_0^x \tan(t)dt = \lim_{x\to\pi/2^-} \ln\left(\frac{\cos(0)}{\cos x}\right) = +\infty \\ \textit{et } &\lim_{x\to\pi/2^-} \int_{-x}^0 \tan(t)dt = -\infty.\end{aligned}$$

Donc $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(x)dx$ *diverge. En effet,* $\displaystyle\lim_{\substack{x_1\to-\pi/2^+ \\ x_2\to\pi/2^-}} \int_{x_1}^{x_2} \tan(x)dx$ *dépend de comment* x_1 *et* x_2 *tendent respectivement vers* $-\pi/2$ *et* $\pi/2$. *Prendre par exemple* $\lim_{\epsilon\to0^+} \int_{-\pi/2+\epsilon}^{\pi/2-\epsilon^2} \tan(x)dx = +\infty$ *et* $\lim_{\epsilon\to0^+} \int_{-\pi/2+\epsilon^2}^{\pi/2-\epsilon} \tan(x)dx = -\infty$.

L'intégrale généralisée a les propriétés suivantes :

Lemme 0.6 (Propriétés de l'intégrale généralisée)**.** *Soit* $a < b$ *dans* $\mathbb{R}$, I *de la forme* $[a,b[$, $]a,b]$ *ou* $]a,b[$, *et des fonctions c.p.m.* $f, g : I \to \mathbb{R}$. *Alors*

— $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *l'intégrale généralisée à gauche étant convergente si les deux intégrales généralisées à droite convergent.*

— $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $\forall c \in]a,b[$, *l'intégrale généralisée à gauche étant convergente ssi chacune des deux intégrales à droite converge au cas où elle est généralisée.*

— *si* $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in I$ *et* $\int_a^b f(x)dx$ *et* $\int_a^b g(x)dx$ *existent, alors* $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Pour établir si une intégrale généralisée existe, le critère de comparaison suivant est souvent très utile.

Lemme 0.7 (Critère de comparaison)**.** *Soit* $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions c.p.m. et supposons qu'il existe* $c \in [a,b[$ *tel que*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [c,b[.$$

— *Si* $\int_a^b g(x)dx$ *existe, alors* $\int_a^b f(x)dx$ *existe aussi ;*

— *si* $\int_a^b f(x)dx$ *diverge, alors* $\int_a^b g(x)dx$ *diverge aussi.*

Démonstration. Si $\int_a^b g(x)dx$ existe, alors $\int_c^b g(x)dx$ existe aussi. De plus, pour tout $x \in [c,b[$

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt \leq \int_c^x g(t)dt \leq \int_c^b g(t)dt < +\infty$$

Puisque F est une fonction croissante et bornée supérieurement sur $[c,b[$ on a que $\lim_{x\to b^-} F(x)$ existe. Ainsi $\int_c^b f(t)dt$ converge et

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \lim_{x\to b^-} \int_c^x f(t)dt$$

existe aussi. La seconde affirmation est la contraposée de la première. □

Corollaire 0.8. *Soit* $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m., non négative et bornée. Alors* $\int_a^b f(x)dx$ *existe.*

Démonstration. Il suit immédiatement du fait que $0 \leq f(x) \leq M < +\infty, \quad \forall x \in [a,b[$ et $\int_a^b M dx$ converge. □

Des versions analogues du Lemme 0.7 et Corollaire 0.8 existent pour $f, g :]a,b] \to \mathbb{R}$ ou bien $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$.

Exemple 0.9. *Grâce au Corollaire 0.8, on montre facilement que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\sin\frac{1}{x})^2}{\sqrt{x}}dx$ *converge.*

En effet, $0 \leq f(x) = \dfrac{(\sin\frac{1}{x})^2}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ *et* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ *converge.*

0.2 Intégrale généralisée absolument convergente

Définition 0.10. *Soit* I *un intervalle de la forme* $[a,b[$, $]a,b]$ *ou* $]a,b[$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *c.p.m. On dit que l'intégrale généralisée est absolument convergente si l'intégrale* $\int_a^b |f(x)|dx$ *existe.*

Théorème 0.11. *Si l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente, alors elle existe.*

Démonstration. Soit $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ et $f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}$. On a $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$,

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|, \quad 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|.$$

Donc, par le critère de comparaison, $\int_a^b f_+(x)dx$ et $\int_a^b f_-(x)dx$ existent, et $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (f_+(x) - f_-(x))dx$ existe aussi. □

Corollaire 0.12. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ c.p.m. et* bornée*, où I est un intervalle* borné *comme ci-dessus. Alors $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument et par conséquent, existe.*

Démonstration. On a $0 \leq |f(x)| \leq M < +\infty$, $\forall x \in I$. Comme $\int_a^b M dx$ converge, $\int_a^b |f(x)|dx$ converge aussi et $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument. □

Exercice 0.13. *Montrer que les intégrales généralisées*

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$$

convergent absolument.

Théorème 0.14. *Une condition suffisante pour que $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument avec $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ c.p.m. est qu'il existe $\alpha \in]-\infty, 1[$ tel que*

$$\lim_{x \to b^-} (b - x)^\alpha f(x) = l \in \mathbb{R}.$$

Si $\exists \alpha \geq 1$ tel que $\lim_{x \to b^-} (b - x)^\alpha f(x) = l \neq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Démonstration. Soit $\alpha \in]-\infty, 1[$ tel que $\lim_{x \to b^-} (b - x)^\alpha f(x) = l \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta_\epsilon \in]0, b - a[$ tel que

$$\forall x \in [b - \delta_\epsilon, b[, \quad (l - \epsilon)(b - x)^{-\alpha} < f(x) < (l + \epsilon)(b - x)^{-\alpha}.$$

Si $\alpha < 1$, alors $\int_a^b (b - x)^{-\alpha} dx$ converge et, puisque $0 \leq |f(x)| < (|l| + \epsilon)(b - x)^{-\alpha}$ pour $x \in [b - \delta_\epsilon, b[$, on en déduit grâce au Lemme 0.7 que $\int_a^b |f(x)|dx$ converge, donc $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument.

Si, par contre, $\alpha \geq 1$ et $l \neq 0$, en prenant $\epsilon \in]0, |l|[$ on a que $\int_{b-\delta_\epsilon}^b (b - x)^{-\alpha} dx$ diverge, f est non nul et de signe constant sur $[b - \delta_\epsilon, b[$ et $|f(x)| > (|l| - \epsilon)(b - x)^{-\alpha}$, $\forall x \in [b - \delta_\epsilon, b[$. Grâce au Lemme 0.7 on déduit que $\int_{b-\delta_\epsilon}^b |f(x)|dx$ diverge, et $\int_{b-\delta_\epsilon}^b f(x)dx$ et $\int_a^b f(x)dx$ divergent aussi. □

Remarque 0.15. *On a présenté le Théorème 0.14 pour un intervalle I de la forme $[a, b[$. Il y a deux conditions suffisantes analogues en a pour I de la forme $]a, b]$. Si I est de la forme $]a, b[$, on choisit $c \in]a, b[$ et on étudie séparément l'intégrale généralisée sur $[c, b[$ et celle sur $]a, c]$.*

Exercice 0.16. *Étudier, en utilisant le critère de puissance du Théorème 0.14 si l'intégrale généralisée $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx$ converge ou non.*

0.3 Intégrale généralisée sur un intervalle non borné

Soit I de la forme $[a, \infty[$, $]-\infty, a]$, $]a, \infty[$, $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, \infty[$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ c.p.m. On définit l'intégrale généralisée de f sur I de façon similaire à ce qu'on a fait pour I borné.

Définition 0.17. *Si $I = [a, \infty[$ et $\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^\infty f(x)dx$ existe et on pose*

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{x\to\infty} F(x).$$

On dit que $\int_a^\infty f(x)dx$ est absolument convergente si $\int_a^\infty |f(x)|dx$ existe.

Si $I =]-\infty, a]$ et $\lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)dt$ existe, on dit que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ existe et on pose

$$\int_{-\infty}^a f(t)dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)dt.$$

On dit que $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ est absolument convergente si $\int_\infty^a |f(x)|dx$ existe.

Soit I de la forme $]a, \infty[$, $]-\infty, a[$ ou $\mathbb{R}$, et soit $c \in I$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_I f(t)dt$ existe si les intégrales généralisées de f sur $I_1 = I \cap]-\infty, c]$ et sur $I_2 = I \cap [c, \infty[$ existent les deux, auquel cas on pose

$$\int_I f(t)dt = \int_{I_1} f(t)dt + \int_{I_2} f(t)dt$$

(ceci ne dépend pas du choix de c dans I). On dit que $\int_I f(x)dx$ est absolument convergente si $\int_I |f(x)|dx$ converge.

Si une intégrale généralisée existe, on dit aussi qu'elle converge, sinon on dit qu'elle diverge.

Exemple 0.18. *On étudie l'existence de l'intégrale généralisée*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^x = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}, \qquad \alpha \neq 1$$

$$F(x) = \ln x \qquad \alpha = 1$$

Donc

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} < \infty, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha \in]-\infty, 1] \end{cases}$$

et l'intégrale généralisée $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ *existe pour tout* $\alpha > 1$.

Il est intéressant de comparer ce dernier exemple avec l'exemple 0.2. On voit que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ existe pour tout $\alpha < 1$ alors que l'intégrale généralisée $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ existe pour tout $\alpha > 1$.

L'intégrale généralisée sur un intervalle non borné a les mêmes propriétés que celui sur un intervalle borné. En particulier, étant donné un un intervalle I non borné et des fonctions c.p.m. $f, g : I \to \mathbb{R}$.

- linéarité : $\int_I (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_I f(x)dx + \beta \int_I g(x)dx, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, l'intégrale généralisée à gauche étant convergente si les deux intégrales généralisées à droite convergent.
- $\int_I f(x)dx = \int_{I\cap]-\infty,c]} f(x)dx + \int_{I\cap[c,\infty[} f(x)dx, \quad \forall c \in I$, l'intégrale généralisée à gauche étant convergente ssi chacune des deux intégrales à droite converge au cas où elle est généralisée.
- relation d'ordre : si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in I$ et $\int_I f(x)dx$ et $\int_I g(x)dx$ existent, alors $\int_I f(x)dx \leq \int_I g(x)dx$.

Les critères de comparaison énoncés au Lemme 0.7 et au Théorème 0.14 se généralisent aussi au cas d'un intervalle non borné.

Lemme 0.19 (Critères de comparaison – intervalles non bornés)**.**

- *Soit* $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *c.p.m. et supposons qu'il existe* $c \in [a, \infty[$ *tel que*

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [c, +\infty[.$$

Si $\int_a^\infty g(x)dx$ *existe alors* $\int_a^\infty f(x)dx$ *existe. Si* $\int_a^\infty f(x)dx$ *diverge alors* $\int_a^\infty g(x)dx$ *diverge.*

- *Soit* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *c.p.m.*

$$\text{Si } \exists \beta > 1 : \lim_{x\to\infty} x^\beta f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \text{alors} \int_a^\infty f(x)dx \text{ converge absolument.}$$

$$\text{Si } \exists \beta \in]-\infty, 1] : \lim_{x\to\infty} x^\beta f(x) = l \neq 0 \quad \text{alors} \int_a^\infty f(x)dx \text{ diverge.}$$

Remarque 0.20. *Attention, comparez les conditions sur* β *avec les conditions du Théorème 0.14 sur* α *! Il y a des résultats analogues pour* I *de la forme* $]-\infty, a]$. *Si* I *est de la forme* $]a, \infty[$, $]-\infty, a[$ *ou* $]-\infty, \infty[$, *on choisit* $c \in I$ *et on étudie séparément l'intégrale généralisée sur* $I \cap [c, +\infty[$ *et celle sur* $I \cap]-\infty, c]$.

Exercice 0.21. *Étudier à l'aide du Lemme 0.19 l'existence des intégrales suivantes*

$$\int_1^\infty x^\alpha e^{-x} dx,\ \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx.$$

On remarque qu'une intégrale généralisée peut être convergente mais pas absolument convergente, comme l'exemple suivant le montre.

Exemple 0.22. *On montre dans cet exemple que l'intégrale généralisée $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente mais pas absolument convergente.*

Soit $F(x) = \int_\pi^x \frac{\sin t}{t} dt$. On a

$$\begin{aligned} F(x) &= -\int_\pi^x \frac{\cos t}{t^2} dt + \frac{-\cos t}{t}\Big|_\pi^x \\ &= -\int_\pi^x \frac{\cos t}{t^2} dt + \frac{\cos \pi}{\pi} - \frac{\cos x}{x} \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{-\int_\pi^x \frac{\cos t}{t^2} dt}_{\substack{\text{absolument convergent} \\ \text{donc la limite existe}}} -\frac{1}{\pi} - \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}}_{=0}$ *existe.*

En revanche, $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ ne converge pas absolument. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$

$$\begin{aligned} F(k\pi) &= \int_\pi^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &\geq \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{(j+1)\pi} \underbrace{\int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin x| dx}_{=2} \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2}{(j+1)\pi} \xrightarrow{k\to\infty} +\infty. \end{aligned}$$

Remarque 0.23. *Si $\int_a^\infty f(x)dx$ converge et $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe, alors nécessairement $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ (cf le critère du Lemme 0.19 avec $\beta = 0$). En revanche le fait que $\int_a^\infty f(x)dx$ converge absolument n'implique pas que f est bornée.*

Par exemple, considérons la fonction $\phi(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$ et la fonction $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}_+$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty n\phi\left(n^3(x-n)\right)$$

qui est continue mais pas bornée sur $[0,\infty[$.

Puisque

$$\int_0^\infty n\phi\left(n^3(x-n)\right)dx = n^{-2}\int_{-n^4}^\infty \phi(y)dy = n^{-2}\int_{-1}^1 \phi(y)dy = n^{-2},$$

on a que pour tout $x \in [0,\infty[$

$$F(x) = \int_0^x |f(t)|dx \leq \int_0^{\lceil x\rceil} \leq \sum_{n=1}^{\lceil x\rceil}\int_0^\infty n\phi\left(n^3(x-n)\right)dx \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$$

Donc, F *est non décroissante est bornée supérieurement et la limite* $\lim_{x\to\infty} F(x)$ *existe. Il en suit que l'intégrale généralisée* $\int_0^\infty f(x)dx$ *converge absolument, même si* $\limsup_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque 0.24. *Soit un intervalle* I *qui n'est pas simultanément borné fermé, et une fonction c.p.m.* $f : I \to [0,\infty[$. *Comme* $f \geq 0$*, la limite (ou chacune des deux limites) intervenant dans la définition d'intégrale généralisée tend vers un nombre réel* ≥ 0 *ou vers* $+\infty$. *On peut donc dans ce cas écrire* $\int_I f(x)dx < \infty$ *si l'intégrale généralisée converge et* $\int_I f(x)dx = \infty = +\infty$ *si elle diverge.*

0.4 Intégrales et séries numériques

L'intégrale généralisée peut être utilisé aussi pour étudier la convergence d'une série numériques $\sum_{n=1}^\infty a_n$. L'idée est de construit la fonction c.p.m. $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = a_n$ pour $x \in [n, n+1[$ ou bien la fonction c.p.m. $\tilde{f} : [1,\infty[\to \mathbb{R}$, telle que $\tilde{f}(x) = a_n$, pour $x \in [n-1, n[$. Alors, pour tout $N \geq 0$,

$$\sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} a_n dx = \int_1^{N+1} f(x)dx = \int_0^N \tilde{f}(x)dx$$

et on peut utiliser les critères de comparaison pour les intégrales généralisées afin d'établir la convergence de la série.

Exemple 0.25. *On veut étudier la convergence de la série numérique* $S = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ *pour* $N \to \infty$.

Soit $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ *c.p.m. définie par* $f(x) = 1/n^2$ *si* $x \in [n, n+1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ *de telle sorte que* $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \int_1^{N+1} f(x)dx$. *On vérifie facilement que* $0 \leq f(x) \leq 1/(x-1)^2$ *sur* $[2,\infty[$ *et* $\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ *converge, d'où on déduit que* $\int_1^\infty f(x)dx$ *converge et*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \lim_{N\to\infty}\int_1^{N+1} f(x)dx < +\infty.$$

On peut encore utiliser les propriétés des intégrales généralisées pour donner des bornes par dessous et par dessus à la série S. *En effet, on a* $\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}$ *pour tout* $x \in [1,\infty[$

du coup

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \int_1^2 f(x)dx + \int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}dx = 2,$$
$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_1^{\infty} f(x)dx \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1,$$

On conclut donc $1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$.

Exercice 0.26. *Étudier si la série* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ *converge ou non.*

Chapitre 1

L'espace $\mathbb{R}^n$ et sa topologie

1.1 Espaces vectoriels normés

On rappelle ici les notions générales d'espace vectoriel, norme, distance et produit scalaire.

Définition 1.1 (Espace vectoriel réel). *Un ensemble V est un* espace vectoriel réel *si les opérations de somme et multiplication par un scalaire (réel) sont définies sur V avec les propriétés suivantes :*

1. *somme :* $V \times V \to V, \quad (x, y) \in V \times V \mapsto z = x + y \in V,$
   - $\forall x, y \in V, \quad x + y = y + x,$
   - $\forall x, y, z \in V, \quad (x + y) + z = x + (y + z),$
   - $\exists$ *élément nul* $0 : \quad x + 0 = x,$
   - $\forall x \in V, \exists$ *élément opposé* $-x : \quad x + (-x) = 0,$
2. *multiplication par un scalaire :* $\mathbb{R} \times V \to V, \quad (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times V \mapsto z = \lambda x \in V,$
   - $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x,$
   - $\forall x \in V, \quad 1 \cdot x = x,$
   - $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in V, \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,$
   - $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V, \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.$

Définition 1.2 (Norme). *Soit V un espace vectoriel réel. Une norme sur V est une application $N : V \to \mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\forall x \in V, \quad N(x) \geq 0, \quad$ *et* $\quad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
2. $\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{R}, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x),$
3. $\forall x, y \in V, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y) \quad$ *(inégalité triangulaire).*

On note souvent une norme par $\|\cdot\|$ $\quad (N(x) = \|x\|)$.

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé** et souvent noté $(V, \|\cdot\|)$. On dit que deux normes N_1 et N_2 sur un espace vectoriel V sont équivalentes s'ils existent deux constants $\underline{c}, \bar{c} > 0$ telles que $\underline{c} N_1(x) \leq N_2(x) \leq \bar{c} N_1(x)$ pour tout $x \in V$.

Définition 1.3 (distance). *Soit X un ensemble. Une* distance *ou* métrique *sur X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\forall x, y \in X, \quad d(x,y) \geq 0, \quad$ *et* $\quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
2. $\forall x, y \in X, \quad d(x,y) = d(y,x),$
3. $\forall x, y, z \in X, \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad$ *(inégalité triangulaire).*

Un ensemble X muni d'une distance (X, d) est appelé **espace métrique**. Si $(V, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, alors l'application

$$d : V \times V \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in V,$$

est une distance (vérifiez-le) appelée *la distance induite par la norme* $\|\cdot\|$. Donc $(V, d(x,y) = \|x - y\|)$ est un espace métrique.

Exercice 1.4. *Soit V un espace vectoriel, $d(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}_+$ une distance sur V et $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ une fonction différentiable telle que $h(0) = 0$, $h'(x) > 0$ pour $x > 0$ et $h'(x)$ décroissante sur $[0,\infty)$. Montrer que $\tilde{d} = h \circ d$ est aussi une distance sur V. Vérifier que les hypothèses sont satisfaites par la fonction $h(x) = x/(1+x)$, mais que la distance $\tilde{d} = h \circ d$ n'est pas induite par une norme même si ceci est vrais pour d.*

Définition 1.5 (Produit scalaire). *Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel V est une application $b : V \times V \to \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

1. *(symétrie)* $\quad \forall x, y \in V, \quad b(x,y) = b(y,x),$
2. *(bi-linéarité)* $\quad \forall x, y \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x,z) + \beta b(y,z),$
3. *(positivité)* $\quad \forall x \in V, \quad b(x,x) \geq 0, \quad$ *et* $\quad b(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Un produit scalaire satisfait l'importante inégalité suivante :

Lemme 1.6 (Inégalité de Cauchy–Schwarz). *Soit V un espace vectoriel réel et $b : V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire sur V. Alors*

$$\forall x, y \in V, \quad |b(x,y)| \leq b(x,x)^{\frac{1}{2}} b(y,y)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in V$

$$0 \leq b(\alpha x + y, \alpha x + y) = \alpha^2 b(x,x) + 2\alpha b(x,y) + b(y,y) = p_2(\alpha)$$

où $p_2(\alpha)$ est un polynôme de degré 2 en α. Par la positivité de b, on obtient la condition suivante pour le discriminant : $\Delta \leq 0$ ce qui implique $b^2(x,y) - b(x,x)b(y,y) \leq 0$, d'où la thèse. $\square$

Grâce à cette propriété, un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est toujours un espace normé.

Théorème 1.7. *Soit $b : V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire sur un espace vectoriel réel V. Alors $\|x\|_b = b(x,x)^{\frac{1}{2}} : V \to \mathbb{R}_+$ est une norme et $(V, \|\cdot\|_b)$ un espace vectoriel normé.*

Démonstration. Il faut vérifier que $\|\cdot\|_b$ satisfait toutes les propriétés d'une norme selon la Définition 1.2. Les propriétés 1. et 2. suivent directement de la positivité du produit scalaire (propriété 3. de 1.5) et de sa bi-linéarité (propriété 2. de 1.5).

Quant à l'inégalité triangulaire (propriété 3.) elle est une conséquence de l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\begin{aligned}\|x+y\|_b^2 &= b(x+y,x+y) = b(x,x)+2b(x,y)+b(y,y)\\ &\leq b(x,x)+b(y,y)+2b(x,x)^{\frac{1}{2}}b(y,y)^{\frac{1}{2}}\\ &= (\|x\|_b+\|y\|_b)^2\end{aligned}$$

□

1.2 L'espace $\mathbb{R}^n$

On note $\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}^{n \text{ fois}}$ l'ensemble des n-uples $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, avec $x_i \in \mathbb{R}$, pour $i = 1,\ldots,n$, muni des opérations de

— somme : pour tout $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)$, $\quad \mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$,

— multiplication par un scalaire : pour tout $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n), \lambda \in \mathbb{R}$, $\quad \lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$.

Ainsi, $\mathbb{R}^n$ a une structure d'espace vectoriel réel. Sur $\mathbb{R}^n$, on peut introduire plusieurs normes. Voici les plus communes :

— **Norme euclidienne :**

$$\|\mathbf{x}\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

— **Norme p :**

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1,$$

— **Norme ∞ :**

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|.$$

La norme euclidienne correspond à la norme p avec $p = 2$, i.e. $\|\mathbf{x}\|_E = \|\mathbf{x}\|_2$. On vérifie (exercice) que toutes les applications $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, pour tout $p \geq 1$ et $p = \infty$, sont des normes. Par contre, $\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ avec $0 < p < 1$ n'est pas une norme lorsque $n \geq 2$ (elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire).

Toutes les normes $\|\cdot\|_p$, $p \geq 1$, sont équivalentes, c'est-à-dire, $\forall p,q \geq 1$, il existe $0 < c_1(p,q) < c_2(p,q)$:

$$c_1(p,q)\|\mathbf{x}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_q \leq c_2(p,q)\|\mathbf{x}\|_p, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Plus généralement, sur $\mathbb{R}^n$, **toutes les normes sont équivalentes**, c'est-à-dire, si $\|\cdot\|$ et $|||\cdot|||$ sont deux normes sur $\mathbb{R}^n$, alors $\exists\, 0 < c_1 < c_2$ tels que.

$$c_1\|\mathbf{x}\| \leq |||\mathbf{x}||| \leq c_2\|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

La preuve de ce résultat sera proposée plus loin dans le cours.

Seule la norme euclidienne $\|\mathbf{x}\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ parmi toutes les normes $\|\cdot\|_p$, $p \geq 1$ est une norme induite par un produit scalaire, nommément le **produit scalaire euclidien** :

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mathbf{y}^\top \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{x}.$$

Dans ces deux dernières expressions, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont des vecteurs colonnes, $\mathbf{y}^\top$ est la transposée de $\mathbf{y}$ et le produit est la multiplication matricielle. En effet, $\|\mathbf{x}\|_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$ et l'inégalité de Cauchy Schwarz sur $\mathbb{R}^n$ devient :

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2.$$

1.3 Suites dans $\mathbb{R}^n$

Définition 1.8 (**Suite convergente**). *Soit* $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$. *On dit que* $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge s'il existe* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\| = 0$, *c.-à-d. :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N > 0 : \quad \forall k \geq N, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \epsilon.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$.

Puisque toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$, la convergence de la suite $\mathbf{x}^{(k)}$ **ne dépend pas** de la norme choisie. De même que la valeur limite $\mathbf{x}$ (si elle existe) ne dépend pas de la norme. En particulier, si on prend la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans la définition de $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$, on en tire la propriété suivante.

Lemme 1.9. *Une suite* $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ *converge vers* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *si et seulement si* $\{x_j^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *converge vers* $x_j \in \mathbb{R}$ *pour toute composante* $j = 1, \ldots, n$.

Démonstration. Soit $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$, et considérons la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans la définition de convergence d'une suite de $\mathbb{R}^n$. Alors,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N > 0 : \quad \forall k \geq N, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j - x_j^{(k)}| \leq \epsilon,$$

ce qui implique que $\lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} = x_j$, $\forall j = 1, \ldots, n$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} = x_j$, $\forall j = 1, \ldots, n$. Alors,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N_j > 0 : \quad \forall k \geq N_j, \quad |x_j - x_j^{(k)}| \leq \epsilon.$$

En prenant $\bar{N} = \max\{N_1, \ldots, N_n\}$ on a $\max_{j=1,\ldots,n} |x_j - x_j^{(k)}| \leq \epsilon$ pour tout $k \geq \bar{N}$, ce qui implique $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$. □

Définition 1.10 (**Suite de Cauchy**)**.** *Une suite* $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ *est dite de* ***Cauchy*** *si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0 : \quad \forall k, j \geq N, \quad \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(j)}\| \leq \epsilon.$$

En suivant la même démonstration du lemme 1.9, on peut montrer qu'une suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ est de Cauchy si et seulement si chaque suite $\{x_j^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, n$ est de Cauchy.

Théorème 1.11. *Une suite* $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ *est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration. Ceci est vrai pour $n = 1$ (voir cours d'Analyse I). En utilisant la norme $\|\cdot\|_\infty$ et le lemme 1.9, on a : $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge $\iff$ $\{x_i^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour tout i $\iff$ $\{x_i^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour tout i $\iff$ $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. □

Théorème 1.12 (Bolzano–Weierstrass sur $\mathbb{R}^n$)**.** *Soit* $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ *une suite* ***bornée****, c.-à-d.,* $\exists M \in]0, +\infty[$ *tel que* $\|\mathbf{x}^{(k)}\| \leq M,\ \forall k \geq 0$. *Alors il existe une sous-suite* $\{\mathbf{x}^{(k_j)}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *qui est convergente.*

Démonstration. On utilise le théorème de Bolzano–Weierstrass sur $\mathbb{R}$: puisque $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, en particulier $\{x_1^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée où $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$. Donc on peut extraire une sous-suite $x_1^{(k_j)}$ qui converge vers $x_1 \in \mathbb{R}$. Prenons maintenant la suite $y_2^{(j)} = x_2^{(k_j)}$. Puisqu'elle est bornée, on peut extraire une sous-suite $y_2^{(j_\ell)}$ qui converge vers $x_2 \in \mathbb{R}$. Ainsi $\lim_{\ell\to\infty} x_2^{(k_{j_\ell})} = x_2$ et $\lim_{\ell\to\infty} x_1^{(k_{j_\ell})} = x_1$. En itérant ce raisonnement n fois, on peut extraire une sous-suite de $\mathbf{x}^{(k)}$ dont chaque composante converge vers $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. □

Ce qui est important dans la preuve de ce théorème est que l'on fait un nombre **fini** d'itérations (n est fini). Si n était ∞ la preuve ne porterait pas à conclusion.

1.4 Topologie de $\mathbb{R}^n$

1.4.1 Concepts de base

On s'intéresse ici à l'étude et classification des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. On commence par définir les *boules*. On travaille par la suite avec la norme euclidienne $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2$ mais toutes les définitions ci après s'appliquent à n'importe quelle norme puisque toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.13 (Boule de $\mathbb{R}^n$)**.** *Pour tout* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *et* $\delta > 0$, *on appelle*

— $B(\mathbf{x}, \delta) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta\}$ *: la boule ouverte centrée en* $\mathbf{x}$ *et de rayon* δ,

— $S(\mathbf{x}, \delta) = \partial B(\mathbf{x}, \delta) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \delta\}$ *: la sphère centrée en* $\mathbf{x}$ *et de rayon* δ,

— $\overline{B}(\mathbf{x}, \delta) = B(\mathbf{x}, \delta) \cup S(\mathbf{x}, \delta) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta\}$ *: la boule fermée centrée en* $\mathbf{x}$ *et de rayon* δ.

La Figure 1.1 montre la forme des boules de $\mathbb{R}^2$ selon la norme qu'on choisit. On considère maintenant un sous-ensemble quelconque E de $\mathbb{R}^n$.

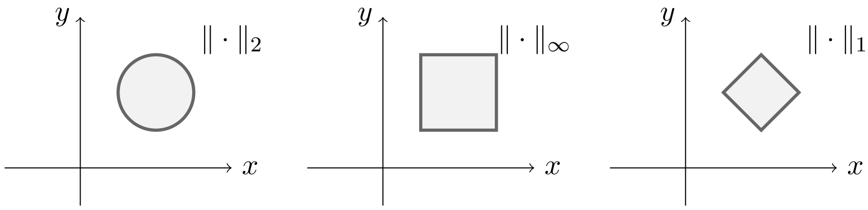


Figure 1.1 – Forme des boules de $\mathbb{R}^2$ pour des normes différentes

Définition 1.14 (sous-ensembles ouverts, fermés, bornés)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. On dit que*

— *E **est ouvert** s'il est vide ou si $\forall \mathbf{x} \in E, \quad \exists \delta > 0$ tel que $B(\mathbf{x}, \delta) \subset E$.*

— *E **est fermé** si son complémentaire $E^c = \mathbb{R}^n \backslash E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \notin E\}$ est ouvert.*

— *E **est borné** s'il existe $M > 0$ tel que $\|\mathbf{x}\| \leq M, \ \forall \mathbf{x} \in E$.*

On vérifie facilement que si un sous-ensemble E est ouvert par rapport a une norme, il est aussi ouvert par rapport à n'importe quelle autre norme puisque toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. La même conclusion est vraie pour les ensembles fermé ou bornés. L'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^n$ est appelé la **topologie** de $\mathbb{R}^n$ (induite par une norme).

Remarque 1.15. *Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$,*

— *$B(\mathbf{x}, \delta)$ est* ouvert *car $\forall \mathbf{z} \in B(\mathbf{x}, \delta), \ B(\mathbf{z}, \delta - \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|) \subset B(\mathbf{x}, \delta)$;*

— *de même, $\overline{B}(\mathbf{x}, \delta)$ est* fermé *car $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{B}(\mathbf{x}, \delta), \ B(\mathbf{z}, \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| - \delta) \subset \mathbb{R}^n \backslash \overline{B}(\mathbf{x}, \delta)$.*

Étant donné un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$, on peut classifier les points $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ par rapport à E de la façon suivante :

Définition 1.16. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. On dit que*

— *$\mathbf{x}$ est un **point intérieur** de E si*

$$\exists \delta > 0 : \quad B(\mathbf{x}, \delta) \subset E.$$

*L'ensemble des points intérieurs de E est noté $\mathring{E}$ ou $\operatorname{int}(E)$ et appelé l'***intérieur** *de E.*

— *$\mathbf{x}$ est un **point frontière** si*

$$\forall \delta > 0, \quad B(\mathbf{x}, \delta) \cap E \neq \emptyset \quad \text{et} \quad B(\mathbf{x}, \delta) \cap E^c \neq \emptyset.$$

L'ensemble des points frontières de E est noté ∂E et appelé la **frontière** *ou le* **bord** *de E.*

— *$\mathbf{x}$ est un **point adhérent** à E si*

$$\forall \delta > 0, \quad B(\mathbf{x}, \delta) \cap E \neq \emptyset.$$

*Un point adhérent est soit un point intérieur, soit un point frontière. L'ensemble des points adhérents à E est noté $\overline{E}$, et appelé l'***adhérence** *ou la* **fermeture** *de E, et coïncide avec $\overline{E} = E \cup \partial E = \mathring{E} \cup \partial E$.*

— $\mathbf{x}$ *est un* ***point isolé*** *de* E *si*

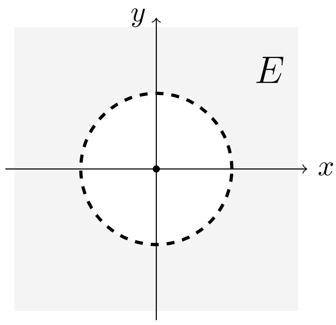
$$\exists\delta > 0 : \quad B(\mathbf{x}, \delta) \cap E = \{\mathbf{x}\}$$

— $\mathbf{x}$ *est un* ***point d'accumulation*** *de* E *si* $\forall\delta > 0,\ \ B(\mathbf{x}, \delta)$ *contient au moins un point de* E *autre que* $\mathbf{x}$*, c.-à-d.* $B(\mathbf{x}, \delta) \cap (E\backslash\{\mathbf{x}\}) \neq \emptyset$*. (Rappel :* $E\backslash\{\mathbf{x}\} = E$ *si* $\mathbf{x} \notin E$*.)*

Il s'ensuit que si $\mathbf{x}$ *est un point d'accumulation de* E*, alors* $\forall\delta > 0$*,* $B(\mathbf{x}, \delta)$ *contient une infinité de points de* E*. Les points d'accumulation de* E *sont tous les points de* $\overline{E} = E \cup \partial E$ *qui ne sont pas isolés.*

On remarque que pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, on a $B(\mathbf{y}, \delta)\cap E \neq \emptyset \Leftrightarrow B(\mathbf{y}, \delta)\cap\overline{E} \neq \emptyset$. En effet, l'implication $\Rightarrow$ est clair car $E \subset \overline{E}$. Pour montrer l'implication $\Leftarrow$, soit $\mathbf{z} \in B(\mathbf{y}, \delta)\cap\overline{E}$. Puisque $\mathbf{z}$ est point adhérent à E, il existe $\mathbf{w} \in B(\mathbf{z}, \delta - \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|) \cap E \subset B(\mathbf{y}, \delta) \cap E$. Donc $B(\mathbf{y}, \delta) \cap E \neq \emptyset$.

Exercice 1.17. *Soit* $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\} \cup \{(0, 0)\}$ *le sous-ensemble montré en figure. Déterminer son intérieur* $\mathring{E}$*, sa frontière* ∂E*, son complémentaire* E^c*, son adhérence* $\overline{E}$*, ainsi que tous ses points isolés et d'accumulation.*



Quelques remarques sur les ensemble ouverts :

— $\mathring{E}$ est ouvert.

Démonstration. En effet, si $\mathbf{x} \in \mathring{E}$, il existe $\delta > 0$ tel que $B(\mathbf{x}, \delta) \subset E$. Vérifions que $B(\mathbf{x}, \delta) \subset \mathring{E}$, ce qui prouvera que $\mathring{E}$ est ouvert. Pour tout $\mathbf{z} \in B(\mathbf{x}, \delta)$, on a $B(\mathbf{z}, \delta - \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|) \subset B(\mathbf{x}, \delta) \subset E$, et donc $\mathbf{z} \in \mathring{E}$. □

— E est ouvert si et seulement si $E = \mathring{E}$.

— Toute réunion quelconque (même *infinie*, dénombrable ou non) de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert.

Démonstration. Soit $E = \bigcup_\alpha E_\alpha$ avec E_α ouvert. Pour tout $\mathbf{x} \in E$, il existe $\alpha : \mathbf{x} \in E_\alpha$. Mais, E_α étant ouvert, $\exists \delta > 0 : B(\mathbf{x}, \delta) \subset E_\alpha \subset E$. Donc E est ouvert. □

— Toute intersection *finie* de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert.

Démonstration. Soit $E = \bigcap_{i=1}^m E_i$, avec E_i ouvert. Si $\mathbf{x} \in E$, alors $\mathbf{x} \in E_i \quad \forall i = 1, \ldots, m$ et, puisque chaque E_i est ouvert, $\exists \delta_i : B(\mathbf{x}, \delta_i) \subset E_i$. Soit $\delta = \min\{\delta_1, ..., \delta_m\}$ alors $B(\mathbf{x}, \delta) \subset B(\mathbf{x}, \delta_i) \subset E_i$, $\forall i$ et donc $B(\mathbf{x}, \delta) \subset \bigcap_{i=1}^m E_i = E$. □

— $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont ouverts.

Quelques remarques sur les ensembles fermés :

— $\mathbb{R}^n \backslash \overline{E} = \text{int}(\mathbb{R}^n \backslash E)$ et $\overline{\mathbb{R}^n \backslash E} = \mathbb{R}^n \backslash \mathring{E}$.

— L'adhérence $\overline{E}$ d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est toujours fermé.

Démonstration. La preuve est par "passage au complémentaire" : son complémentaire $\mathbb{R}^n \backslash \overline{E} = \text{int}(\mathbb{R}^n \backslash E)$ est en effet ouvert. □

— E est fermé si et seulement si $E = \overline{E}$. (Preuve : par passage aux complémentaires.)

— Toute intersection quelconque (même *infinie*, dénombrable ou non) de sous-ensembles fermés est fermée. (On passe aux complémentaires pour montrer cette propriété et la suivante.)

— Toute union *finie* de sous-ensembles fermés est fermée.

— $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont fermés.

— E est fermé si et seulement si toute suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ convergente, converge vers un élément de E.

Démonstration. Soit E fermé et $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ une suite convergente vers $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Alors $\mathbf{x}$ adhère à E et, puisque E est fermé, $\mathbf{x} \in E$.

Réciproquement, supposons que E n'est pas fermé, autrement dit, que $\mathbb{R}^n \backslash E$ n'est pas ouvert. Il existe donc $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \backslash E$ tel que $\forall \delta > 0 \;\; B(\overline{\mathbf{x}}, \delta) \not\subset (\mathbb{R}^n \backslash E)$. En choisissant $\delta = 1/k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient $\mathbf{x}^{(k)} \in B(\overline{\mathbf{x}}, 1/k) \cap E$. La suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ dans E converge alors vers $\overline{\mathbf{x}} \notin E$. □

On montre de même que $\mathbf{x} \in \overline{E}$ ssi il existe une suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ qui converge vers $\mathbf{x}$.

1.4.2 Ensembles compacts

On peut donner plusieurs définitions équivalentes d'un ensemble compact en $\mathbb{R}^n$. On présente ici la définition la plus "facile", mais non pas celle qui caractérise le mieux la notion de compacité.

Définition 1.18 (Compacité)**.** *Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est* ***compact*** *s'il est à la fois borné et fermé. L'ensemble vide sera considéré comme compact.*

Les deux autres caractérisations (équivalentes en $\mathbb{R}^n$) sont montrées dans les théorèmes suivants.

Théorème 1.19 (Caractérisation de la compacité par sous-suites convergentes)**.** *Un sous-ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact (fermé et borné) si et seulement si de toute suite d'éléments de E on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de E.*

Démonstration.

1. Soit E compact (fermé et borné). Par le théorème de Bolzano–Weierstrass, de toute suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ bornée (car E est borné), on peut extraire une sous-suite $\{\mathbf{x}^{(k_j)}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset E$ convergente telle que $\lim_{j\to\infty} \mathbf{x}^{(k_j)} = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Puisque E est fermé, $\mathbf{x} \in E$.
2. Supposons que E n'est pas compact, autrement dit, qu'il n'est pas fermé ou qu'il n'est pas borné (ou ni l'un ni l'autre). Si E n'est pas fermé, il existe $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \backslash E$ et une suite $\{\mathbf{y}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{y}^{(k)} = \overline{\mathbf{x}}$. Une telle suite n'a aucune sous-suite qui converge vers un élément de E (car $\overline{\mathbf{x}} \notin E$). Si E n'est pas borné, il existe une suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\|\mathbf{x}^{(k)}\| > k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Toute sous-suite $\{\mathbf{x}^{(k_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ satisfait $\|\mathbf{x}^{(k_j)}\| > k_j \geq j$ et $\{\mathbf{x}^{(k_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

$\square$

Théorème 1.20 (de Heine-Borel-Lebesgue – Caractérisation des compacités par recouvrements finis)**.** *Un sous-ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact (fermé et borné) si et seulement si de toute famille de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ constituant un recouvrement de E, c.-à-d. $E \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, avec U_α ouvert, on peut extraire une famille **finie** qui est encore un recouvrement de E.*

La démonstration de ce théorème est laissée comme exercice.

Exemple 1.21. $\mathbb{R}^2$ *n'est pas compact. En fait, on peut écrire* $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B(0,k)$ *mais de ce recouvrement, on ne peut pas extraire de sous-recouvrement* fini*.*

Exemple 1.22. $E = \overline{B}(0,1)\backslash\{0\}$ *n'est pas compact. En fait, on peut écrire* $E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \left(\overline{B}(0,\frac{1}{k})\right)^c$ *qui est un recouvrement de E mais duquel on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini.*

Quelques remarques sur les ensembles compacts :

— La caractérisation du théorème 1.19, qui peut être prise comme définition alternative de compacité, dit qu'un ensemble E est compact si et seulement si toute suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de E admet une sous-suite qui converge vers un élément de E, c'est-à-dire qu'il existe (au moins) un point $\mathbf{x} \in E$ (point d'accumulation de la suite) tel que toute boule $B(\mathbf{x},\delta)$, $\delta > 0$ contient une infinité de terms de la suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Donc E est suffisamment contraignant (compact) pour que toute suite de E s'accumule quelque part dans E.

— La caractérisation du théorème 1.20 est la définition la plus générale de compacité, mais aussi la plus abstraite. Elle exprime le fait qu'on puisse décrire un ensemble compact par un nombre *fini* de termes et est à la base de toute étape d'approximation.

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble quelconque. Clairement, pour tout $\varepsilon > 0$, $\bigcup_{\mathbf{x}\in E} B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ est un recouvrement de E. Si E est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini, c.-à-d. il existe $s = s(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ et $\{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(s)}\} \in E$ tels que $E \subset \bigcup_{i=1}^{s} B(\mathbf{x}^{(i)}, \varepsilon)$. Donc, E est bien approché par l'ensemble fini $\hat{E} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(s)}\}$ au sens que pour tout $\mathbf{x} \in E$, $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \hat{E}) = \inf_{i=1,\ldots,s} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)}\| < \varepsilon$. Le nombre $s = s(\varepsilon)$ est appelé *nombre de recouvrement* de E et est un indicateur de la difficulté d'approcher E par un ensemble fini.

1.4.3 Ensembles connexes et connexes par arcs

Intuitivement, un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est connexe s'il est fait "d'un seul morceau". Plus rigoureusement, on dit qu'un ensemble E ouvert est connexe si on ne peut pas le séparer en deux parties *ouvertes* non vides et *disjointes*. La définition générale pour un ensemble quelconque est la suivante :

Définition 1.23 (Connexité)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. On dit que E est* ***connexe*** *s'il n'existe pas deux ouverts $A, B \subset \mathbb{R}^n$ disjoints ($A \cap B = \emptyset$) tels que $A \cap E \neq \emptyset$, $B \cap E \neq \emptyset$ et $E \subset A \cup B$.*

En particulier $\emptyset$ est connexe. Les ensembles connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, par exemple $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $[0,1]$, $]0,1[$, $[0,1[$, $]-\infty,0[$,$[0,\infty[$, etc. Une notion un peu plus forte de connexité est celle de *connexité par arcs.*

Définition 1.24. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide. On appelle chemin de E une application $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to E$, $t \mapsto \boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t)) \in E$, dont les fonctions $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont continues.*

Définition 1.25 (Connexité par arcs)**.** *Un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est connexe par arcs si pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, il existe un chemin $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to E$ tel que $\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}(1) = \mathbf{y}$ (et $\boldsymbol{\gamma}(t) \in E, \forall t \in [0,1]$). Nous considérerons $\emptyset$ comme connexe par arcs.*

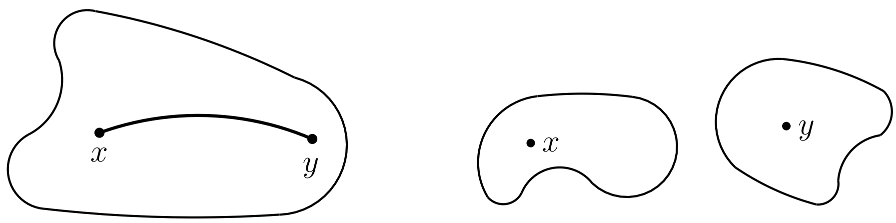


Figure 1.2 – Gauche : ensemble connexe par arcs. Droite : ensemble non connexe

On peut montrer que tout ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ connexe par arcs est aussi connexe. La réciproque n'est toutefois pas vraie. On verra dans le chapitre suivant que les propriétés de compacité, connexité et connexité par arcs sont des propriétés topologiques, préservées par les applications continues. Autrement dit, si $E \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble compact (resp. connexe ou connexe par arcs) et $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue, alors $\mathbf{f}(E) \subset \mathbb{R}^m$ est compact (resp. connexe ou connexe par arcs).