Algèbre linéaire avancée II
printemps 2021

Série 8

Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Piazza 2 semaines après. La solution de l'exercice (*) sera discutée dans les séances d'exercices du mardi. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de A sont positives. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $A = B^T B$.

Exercice 2. Soit $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (resp. $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$) tel que les colonnes de U forment une base orthonormale par rapport au produit scalaire standard (resp. par rapport au produit hermitien standard).

1. Montrer que U est une matrice orthogonale (resp. unitaire).
2. Montrer que les lignes de U forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$).

Exercice 3. Soit A la matrice hermitienne

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i & -3i \\ 2+i & 0 & 1-i \\ 3i & 1+i & 0 \end{bmatrix}$$

Trouver une matrice $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ telle que $P^* \cdot A \cdot P$ est une matrice diagonale. Les éléments de la matrice P sont de la forme $a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. Pour chaque forme suivante Q, décider si Q est définie positive, définie négative ou indéfinie. Si Q est indéfinie, trouver un vecteur x tel que $Q(x) > 0$ et un vecteur y tel que $Q(y) < 0$.

a) $Q(x) = 13x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$

b) $Q(x) = 11x_1^2 + 16x_1x_2 - x_2^2$

Exercice 5. Déterminer les valeurs singulières des matrices suivantes. Pour les matrices A_3 à A_6, donner aussi la décomposition en valeurs singulières (SVD).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

1. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice orthogonale, alors une décomposition de A en valeurs singulières est $A = AI_nI_n$.

2. Les valeurs singulières d'une matrice diagonale $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sur la diagonale sont les valeurs diagonales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Exercice 7. (*) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique. Montrer que A est semi-définie positive si et seulement si tous ses mineurs symétriques sont non négatifs, c'est-à-dire $\det(B_K) \geq 0$ pour tout $K \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Rappel: Soit $K = \{l_1, \ldots, l_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ où $1 \leq l_1 < l_2 < \cdots < l_k \leq n$. La matrice $B_K \in \mathbb{R}^{k\times k}$ est la matrice $(B_K)_{ij} = A_{l_i l_j}$, $1 \leq i, j \leq k$.