Série 5

David Wiedemann

30 mars 2021

1

Dans ce qui suit, f et g seront deux fonctions de W, λ sera un scalaire réel et x_0 un point quelconque de U.
On notera $Df(x_0)$ et $Dg(x_0)$ les jacobiennes respectives de f et g en x_0.
Finalement, on dénotera par $r_f(x)$ et $r_g(x)$ les restes respectifs de f et g, qui satisfont

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_f(x)}{\|x - x_0\|} = \lim_{x \to x_0} \frac{r_g(x)}{\|x - x_0\|} = 0$$

De manière générale, on supposera donc que f et g s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + r_f(x) \\ g(x) &= g(x_0) + Dg(x_0)(x - x_0) + r_g(x) \end{aligned}$$

L'existence d'un élément neutre multiplicatif est évidente, on vérifie donc les autres propriétés.

Addition

Montrons que W est fermé sous l'opération d'addition

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= f(x_0) + g(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + Dg(x_0)(x - x_0) + r_f(x) + r_g(x) \\ (f + g)(x) &= (f + g)(x_0) + (Df(x_0) + Dg(x_0))(x - x_0) + (r_f)(x) + r_g(x) \end{aligned}$$

Où on a utilisé que l'addition de matrices est linéaire. Notons que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_f(x) + r_g(x)}{\|x - x_0\|} = 0$$

et ainsi $f + g$ est différentiable en x_0, et on en déduit que $f + g$ est différentiable sur U .

Multiplication par un Scalaire

Montrons que W est stable sous la multiplication par un scalaire.

$$\lambda \cdot f(x) = \lambda f(x_0) + \lambda \cdot Df(x_0)(x - x_0) + \lambda \cdot r_f(x)$$

et car

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\lambda r_f(x)}{\|x - x_0\|} = 0$$

On en déduit que $\lambda \cdot f(x)$ est différentiable en x_0 et est donc différentiable sur U.

Element Neutre additif

Il est clair que la fonction constante $e(x) = 0$ est différentiable, en effet toutes ses dérivées partielles sont nulles et donc continues, ainsi, par un théorème du cours, e est différentiable et il est clair que

$$e(x) + f(x) = f(x) = f(x) + e(x)$$

pour tout $x \in U$.

Element Opposé

Pour $f \in W$, la fonction $(-f)$ définie par

$$(-f)(x) = -f(x)$$

satisfait clairement

$$(-f)(x) + f(x) = 0 = e(x) = f(x) + (-f)(x)$$

De plus, $-f$ est différentiable car, elle satisfait

$$(-f)(x) = (-f)(x_0) - Df(x_0)(x - x_0) - r_f(x)$$

Associativité de l'Addition

L'associativité de l'addition sur W suit directement de l'associativité de l'addition sur $\mathbb{R}$

Associativité de la Multiplication par un Scalaire

L'associativité de la multiplication par un scalaire suit directement de l'associativité de la multiplication sur $\mathbb{R}$ et du fait que W est stable par multiplication.
En effet, pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a clairement

$$(a(b(f))) = a \cdot (b \cdot f) = (ab \cdot f)$$

Distributivité

On a, pour $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b) \cdot f(x) = a \cdot f(x) + b \cdot f(x)$$

et car, $a \cdot f$ et $b \cdot f$ sont différentiables , leur somme l'est aussi.
De même, on a que

$$a \cdot (f(x) + g(x)) = a \cdot f(x) + a \cdot g(x)$$

et car $a \cdot f$ et $a \cdot g$ sont différentiables, leur somme l'est aussi. Ainsi, W est un espace vectoriel.

2

Soit f et $g \in W$ comme dans la partie précédente

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + r_f(x) \\ g(x) &= g(x_0) + Dg(x_0)(x - x_0) + r_g(x) \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) = {} & f(x_0)g(x_0) + f(x_0)Dg(x_0)(x - x_0) + f(x_0)r_g(x) \\ & + g(x_0)Df(x_0)(x - x_0) + Df(x_0)(x - x_0)Dg(x_0)(x - x_0) + Df(x_0)(x - x_0)r_g(x) \\ & + r_f(x)g(x_0) + r_f(x)Dg(x_0)(x - x_0) + r_f(x)r_g(x) \end{aligned}$$

Il faut donc montrer que

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x} \to x_0} \frac{1}{\|x - x_0\|} & (Df(x_0)(x - x_0)Dg(x_0)(x - x_0) + Df(x_0)(x - x_0)r_g(x) + f(x_0)r_g(x) \\ & + r_f(x)g(x_0) + r_f(x)Dg(x_0)(x - x_0) + r_f(x)r_g(x)) \end{aligned}$$

On procède terme par terme, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x} \to x_0} \quad & \frac{1}{\|x - x_0\|} |(Df(x_0)(x - x_0)Dg(x_0)(x - x_0))| \\ & \leq \frac{1}{\|x - x_0\|} (\|Df(x_0)\| \, \|x - x_0\| \, \|Dg(x_0)\| \, \|x - x_0\|) = 0 \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
De même

$$\lim_{\vec{x} \to x_0} \frac{r_g(x)}{\|x - x_0\|} (Df(x_0)(x - x_0) + f(x_0)) = 0$$

et

$$\lim_{\vec{x}\to x_0} \frac{r_f(x)}{\|x-x_0\|}(Dg(x_0)(x-x_0)+g(x_0)+r_g(x)) = 0$$

Ainsi, en posant

$$\begin{aligned} r_h(x) := {} & Df(x_0)(x-x_0)Dg(x_0)(x-x_0) + Df(x_0)(x-x_0)r_g(x) + f(x_0)r_g(x) \\ & + r_f(x)g(x_0) + r_f(x)Dg(x_0)(x-x_0) + r_f(x)r_g(x) \end{aligned}$$

On obtient, en utilisant la linéarité de la multiplication matricielle :

$$\begin{aligned} (f\cdot g)(x) &= (f\cdot g)(x_0) + f(x_0)Dg(x_0)(x-x_0) + g(x_0)Df(x-x_0) + r_h(x) \\ (f\cdot g)(x) &= (f\cdot g)(x_0) + \left(f(x_0)Dg(x_0) + g(x_0)Df(x_0)\right)(x-x_0) + r_h(x) \end{aligned}$$

Et car, $r_h(x)$ satisfait

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_h(x)}{\|x-x_0\|} = 0$$

On en déduit que $f\cdot g$ est différentiable et que

$$D(f\cdot g)(x_0) = g(x_0)Df(x_0) + f(x_0)Dg(x_0).$$

Ce qui conclut la démonstration.