EPFL Automne 2020

Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 3

Tous les exercices seront corriges. La correction sera postee sur le moodle apres 2 semaines.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le dimanche de la semaine suivante celle ou la serie a ete postee. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme de fichier pdf (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien a cet effet dans la semaine de la serie.

Exercice 1. Soit le groupe $(\mathbb{Z}, +)$. On rappelle que tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $q.\mathbb{Z}$ pour $q \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que le groupe engendre par 2 et 3 vaut $\langle 2, 3\rangle = \mathbb{Z}$. (on montrera que ce sous-groupe contient 1).
2. Meme question pour 3 et 73.
3. Montrer (en utilisant Bezout) que pour $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\langle m, n\rangle = pgcd(m, n).\mathbb{Z}.$$

Exercice 2. Soit $(G, .)$ un groupe. Pour $k \in G$ on note

$$\mathrm{Ad}_k : g \mapsto k.g.k^{-1}$$

l'automorphisme de conjugaison. Le commutateur de deux elements $g, h \in G$ est l'element

$$[g, h] := g.h.g^{-1}.h^{-1}.$$

Le groupe derive de G est par definition le sous-groupe engendre par les commutateurs

$$D(G) = [G, G] = \langle\{[g, h],\ g, h \in G\}\rangle.$$

1. Que vaut $D(G)$ is G est commutatif ?
2. Montrer que pour tout $k \in G$, et $g, h \in G$, $\mathrm{Ad}_k([g, h]) = [\mathrm{Ad}_k(g), \mathrm{Ad}_k(h)]$.
3. En deduire que $\mathrm{Ad}_k(D(G)) = D(G)$.

4. Soit Z un groupe commutatif et
$$\varphi : G \mapsto Z$$
un morphisme de groupes. Montrer que
$$D(G) \subset \ker(\varphi).$$
Pour cela on commencera a verifier que tout commutateur est contenu dans $\ker(\varphi)$

Exercice 3. Soient G et H des groupes et $\varphi : G \mapsto H$ un morphisme et $\ker(\varphi)$ son noyau.

1. Montrer que pour tout $g_0 \in G$,
$$\mathrm{Ad}_{g_0}(\ker\varphi) = g_0.\ker\varphi.g_0^{-1} = \ker\varphi.$$

Remarque 0.1. Un sous-groupe $H \subset G$ tel que pour tout $g_0 \in G$ on ai
$$\mathrm{Ad}_{g_0}(H) = g_0.H.g_0^{-1} = \{g_0.h.g_0^{-1},\ h \in H\} \subset H$$
(ce qui implique en fait que $\mathrm{Ad}_{g_0}(H) = H$) est dit distingue (ou normal) et onele note
$$H \lhd G.$$
On a ainsi montrer que $D(G)$ ainsi que tout noyau d'un morphisme de groupes $\ker\varphi$ est distingue. REciproquement on peut montrer que tout sous-groupe distingue est le noyau d'un morphisme (cela necessite la notion de groupe quotient).

Exercice 4. Soit X un ensemble et $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble des sous-ensembles de X. On a vu dans la serie precedente que la difference symetrique
$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X) & \mapsto & \mathscr{P}(X) \\ (A, B) & \mapsto & A\Delta B := A \cup B - A \cap B \end{array}$$
defini une loi de composition sur $\mathscr{P}(X)$ qui en fait un groupe abelien d'element neutre l'ensemble vide $\emptyset$.

1. Soit $G_2 := \{+1, -1\}$ (qui forme un groupe commutatif quand on le muni de la multiplication) et soit $\mathcal{F}(X, G_2)$ l'ensemble des fonctions de X a valeurs dans G_2.
A un sous-ensemble $A \subset X$, on associe la fonction a valeurs dans G_2 definie par
$$\mathrm{Ind}_A : x \in X \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin A \\ -1 & \text{si } x \in A \end{cases}.$$
Calculer $\mathrm{Ind}_\emptyset$, Ind_X et si $A^c = X - A$ est le complementaire de A, calculer Ind_{A^c} en fonction de Ind_A.

2. On rappelle que $\mathcal{F}(X, G_2)$ forme un groupe commutatif (par un exercice de la serie 2). Montrer que l'application

$$\mathrm{Ind}_\bullet : A \in \mathscr{P}(X) \mapsto \mathrm{Ind}_A \in \mathcal{F}(X, G_2)$$

est un isomorphisme de groupes pour les structures de groupes definie precedemment.

Exercice 5 ($\star$)**.** (equations dans les groupes). Soit G, H des groupes et $\varphi : G \mapsto H$ un morphisme et $\ker(\varphi)$ son noyau. Etant donne $h \in H$, on cherche a resoudre l'equation d'inconnue $g \in G$:

$$Eq(\varphi, h) : \qquad \varphi(g) = h.$$

L'ensemble des solutions de cette equation n'est autre que la preimage $\varphi^{-1}(\{h\})$...

1. Montrer que

$$\varphi^{-1}(\{h\})$$

est soit vide soit qu'il existe $g_0 \in G$ tel que

$$\varphi^{-1}(\{h\}) = g_0 \star \ker(\varphi)$$

ou

$$g_0 \star \ker(\varphi) = \{g_0 \star k,\ k \in \ker(\varphi)\}.$$

2. Montrer que

$$\varphi^{-1}(\{h\}) = \ker(\varphi) \star g_0$$

avec

$$\ker(\varphi) \star g_0 = \{k \star g_0,\ k \in \ker(\varphi)\}.$$

Quel est l'ensemble de tous les $g_0 \in G$ ayant cette propriete ? Cela vous rappelle t il quelque chose ? (pensez a "equation avec" et "sans second membre", "solution particuliere", "solution generale" ...)

Exercice 6. Soit $(G, .)$ un groupe et $g \in G$, un element ; l'application de translation a gauche par g est l'application

$$t_g : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & G \\ g' & \mapsto & g.g' \end{array}.$$

1. Montrer que l'application translation a gauche

$$t_\bullet : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & \mathrm{Bij}(G) \\ g & \mapsto & t_g \end{array}$$

est un morphisme de groupes de $(G, .)$ vers $(\mathrm{Bij}(G), \circ)$.

2. Montrer que $t_\bullet$ est injectif. Ainsi G est isomorphe au un sous-groupe $t_G \subset \mathrm{Bij}(G)$: le groupe des translations a gauche de G sur lui-meme et donc un groupe peut toujours se realiser comme sous-groupe d'un groupe de permutations d'un ensemble.

Exercice 7. Soit $(M, +)$ un groupe abelien et

$$\mathrm{End}(M) := \mathrm{End}_{Gr}(M) = \mathrm{End}_{Gr}(M, M)$$

l'ensemble des endomorphismes du groupe M : etant donne $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(M)$, on defini l'application de M vers M notee $\varphi + \psi$:

$$\varphi + \psi : m \in M \mapsto (\varphi + \psi)(m) := \varphi(m) + \psi(m) \in M.$$

1. Montrer que $\varphi + \psi \in \mathrm{End}(M)$.
2. Montrer que $(\mathrm{End}(M), +, \circ, \underline{0}_M, \mathrm{Id}_M)$ est un anneau : $\circ$ designe la composition des endomorphismes de groupes, $\underline{0}_M : m \in M \mapsto 0_M \in M$ et Id_M est l'identite de M.