Série 10

David Wiedemann

6 décembre 2020

1

On reprend les mêmes notations que dans l'énoncé.
On notera G multiplicativement.
Montrons que l'application est injective.
En effet, soient $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ et supposons que

$$(\phi(g_1), \ldots, \phi(g_r)) = (\psi(g_1), \ldots, \psi(g_r))$$

Soit $a \in G$, car $G = \langle g_1, \ldots, g_r \rangle$, on sait qu'il existe des $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{N}$ tel que $a = \prod_i g_i^{a_i}$, on a alors que

$$\phi(a) = \phi\left(\prod_i g_i^{a_i}\right) = \prod_i \phi(g_i^{a_i}) = \prod_i \phi(g_i)^{a_i} = \prod_i \psi(g_i)^{a_i} = \prod_i \psi\left(g_i^{a_i}\right) = \psi\left(\prod_i g_i^{a_i}\right) = \psi(a)$$

On en conclut que $\phi = \psi$, et donc l'application est injective.

2

Par l'exercice 2, on sait que $S_3 = \langle (12), (23) \rangle$, et donc, en particulier, $S_3 = \langle (12), (23), (13) \rangle$.
On en déduit

$$\forall \Sigma \in S_3, \exists a, b, c \in \{0, 1\}\, \Sigma = (12)^a (23)^b (13)^c$$

Montrons qu'un automorphisme de $\mathrm{Aut}(S_3)$ peut seulement permuter ces 3 2-cycles.
On sait que S_3 est seulement composé de deux-cycles et de trois-cycles.
Supposons d'abord qu'il existe $\phi \in \mathrm{Aut}(S_3)$ tel que

$$\phi((ab)) = (abc)$$

Alors, on voit que

$$\mathrm{Id} = \phi(\mathrm{Id}) = \phi((ab)(ab)) = \phi((ab))\phi((ab)) = (abc)(abc) = (acb)$$

Ce qui est une contradiction.
Le raisonnement est le même si on suppose que $\phi((ab)) = (acb)$.
Car un produit de deux 2-cycles dans S_3 est un 3-cycle, on a montré que $\phi((ab))$ doit être un autre 2-cycle.
Car ϕ est un automorphisme, ϕ doit permuter les 2-cycles. On définit donc l'application

$$\Psi : \phi \in \mathrm{Aut}(S_3) \to \begin{pmatrix} (12) & (23) & (13) \\ \phi(12) & \phi(23) & \phi(13) \end{pmatrix}$$

On voit que $\Psi(\mathrm{Id}_{S_3}) = \mathrm{Id}_{(12),(23),(13)}$, où Id_{S_3} est l'automorphisme identité de S_3 et $\mathrm{Id}_{(12),(23),(13)}$ est la permutation identité de $S_{(12),(23),(13)}$.
Posons $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(S_3)$, montrons que $\Psi(\alpha \circ \beta) = \Psi(\alpha) \cdot \Psi(\beta)$.
Par définition de Ψ, on obtient

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha \circ \beta) &= \begin{pmatrix} (12) & (23) & (13) \\ \alpha \circ \beta((12)) & \alpha \circ \beta((23)) & \alpha \circ \beta((13)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (12) & (23) & (13) \\ \alpha((12)) & \alpha((23)) & \alpha((13)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (12) & (23) & (13) \\ \beta((12)) & \beta((23)) & \beta((13)) \end{pmatrix} \\ &= \Psi(\alpha) \cdot \Psi(\beta) \end{aligned}$$

Où, la deuxième égalité suit par définition de la composition de permutations.
Montrons que cette application est injective.
Pour ceci, on montre que le ker de l'application est réduit à l'identité.
En effet, supposons que $\phi \in \mathrm{Aut}(S_3)$ et $\Psi(\phi) = \mathrm{Id}$, alors, pour tout $\sigma \in S_3$, il existe $x, y, z \in \{0, 1\}$ et $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$ avec a, b, c deux-à-deux différents tel que

$$\phi(\sigma) = \phi((ab)^x(bc)^y(ac)^z) = \phi((ab))^x\phi((bc))^y\phi((ac))^z = (ab)^x(bc)^y(ac)^z$$

Donc $\ker \Psi = \{\mathrm{Id}_{S_3}\}$, et donc Ψ est injective.

3

Grace à la partie 2, il suffit de montrer que la conjugaison par un cycle correspond à la permutation de deux-cycles.
Vérifions d'abord la conjugaison d'un deux-cycle.

$$\begin{aligned} (ab)(ab)(ab) &= (ab) \\ (ab)(bc)(ab) &= (ac) \\ (ab)(ac)(ab) &= (bc) \end{aligned}$$

De manière plus générale, notons $C_{(ab)}$ l'opération de conjugaison par le 2-cycle (ab), et posons (cd) et (ef) deux 2-cycles [1]. On voit

$$C_{(ab)}((cd)(ef)) = (ab)(cd)(ef)(ab) = (ab)(cd)(ab)(ab)(ef)(ab) = C_{(ab)}((cd))C_{(ab)}((ef))$$

On a donc montré que la conjugaison d'une permutation par un 2-cycle est une permutation des 2-cycles qui forment la permutation.

Si l'on conjugait par un 3-cycle, il suffit d'ecrire le 3-cycle comme un produit de deux 2-cycles, pour un 3-cycle (abc) et une permutation $\sigma \in S_3$, on a alors

$$C_{(abc)}(\sigma) = (abc)\sigma(acb) = (ab)(bc)\sigma(bc)(ab) = C_{(ab)} \circ C_{(bc)}(\sigma)$$

Ce qui est à nouveau une permutation des 2-cycles qui forment σ.

Montrons que l'opération de conjugaison est un automorphisme.
Prenons C_σ, la conjugaison par $\sigma \in S_3$.
Il est clair que $C_\sigma(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$, et par les vérifications ci-dessus, il est également clair que

$$C_\sigma(\alpha \cdot \beta) = \sigma \cdot \alpha \cdot \sigma^{-1} \cdot \sigma \cdot \beta \cdot \sigma^{-1} = C_\sigma(\alpha) \cdot C_\sigma(\beta)$$

Car $C_\sigma : S_3 \mapsto S_3$, par l'exercice 1 de la série 5, il suffit de montrer que C_σ est injective pour montrer qu'elle est bijective.
Montrons que le ker de l'application est réduit à l'identité.
Prenons $\alpha \in S_3$, et supposons

$$C_\sigma(\alpha) = \mathrm{Id}$$

Alors, on a

$$\sigma \cdot \alpha \cdot \sigma^{-1} = \mathrm{Id} \Rightarrow \sigma \cdot \alpha = \sigma \Rightarrow \alpha = \mathrm{Id}$$

Donc l'opération de conjugaison est un automorphisme.

On remarque donc que la conjugaison par un deux cycle est une permutation des deux-cycles qui forment la transposition.
On a donc également une injection entre l'ensemble des conjugaisons et l'ensemble des automorphismes de S_3.
On a donc trouvé une injection allant de l'ensemble des automorphismes de S_3 vers l'ensemble des conjugaisons et une injection allant de l'ensemble des conjugaisons vers l'ensemble des automorphismes.
Car toutes les conjugaisons sont des automorphismes, on conclut par Cantor-Schroeder-Bernstein que tous les automorphismes de S_3 sont des conjugaisons de 2-cycles.

1. Cette opération se généralise à un produit de 3 deux-cycles