Analyse avancée II
Mathématiques 1$^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 1$^{\text{er}}$ au 5 mars 2021

Série 4 du mercredi 3 mars 2021

Exercice 1.

Montrer que l'adhérence $\overline{E}$ d'un ensemble arbitraire $E \subset \mathbb{R}^n$ est l'ensemble fermé minimal contenant E.

Exercice 2.

Considérons les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\Omega_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x_1^2 + x_2^2 < 16\}, \tag{1}$$
$$\Omega_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 = 1\}, \tag{2}$$
$$\Omega_3 := \left\{(x_1, x_2) \in \left]0, 1\right[\times \mathbb{R} : \sin \frac{1}{x_1} < x_2 < 2\right\}, \tag{3}$$
$$\Omega_4 := \{(x_1, x_2) \in \left]0, 1\right[\times \mathbb{R} : x_2 \in \left]1, 5\right[\text{ si } x_1 \in \mathbb{Q}; x_2 \in \left]0, 5\right[\text{ sinon}\}, \tag{4}$$
$$\Omega_5 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\} \cup \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 \leqslant 1\right\}. \tag{5}$$

Ces ensembles sont-ils ouverts ? Sont-ils fermés ? Sont-ils bornés ? Quel est leur bord ? Justifiez vos réponses.

Exercice 3.

Notons $E = \{(x, \sin {}^{1}\!/_{x}) : x \in \left]0, +\infty\right[\}$.

1) Montrer que E est connexe par arcs.
2) Donner une description explicite de $\overline{E}$.
3) Montrer que $\overline{E}$ n'est pas connexe par arcs.