Théorie des Groupes

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Introduction

Fri 10 Sep

1 Une Introduction à la Théorie des Catégories

Notion Fondamentale : la composition

- Composition d'applications
- l'exemple fondamental d'un groupe est donné par $\mathrm{Aut}(X)$, où la multiplication du groupe est donnée par la composition d'automorphismes.

1.1 Catégories

Definition 1 (Graphe dirigé)
Un graphe dirigé G consiste en un couple de classes G_0 et G_1, muni de deux applications

$$\mathrm{dom} : G_1 \to G_0 \text{ et } \mathrm{cod} : G_1 \to G_0$$

appelées domaine et codomaine. On pense à G_0 comme l'ensemble des sommests et G_1 l'ensemble des arêtes de G.

Par exemple, si $x, y \in G_0, f \in G_1$, alors

$$\mathrm{dom}(f) = x, \quad \mathrm{cod}(f) = y$$

$$X \xrightarrow{\quad f \quad} Y$$

On introduit la notation

$$G(x, y) = \{f \in G_1 | \,\mathrm{dom}(f) = x, \mathrm{cod}(f) = y\}$$

Exemple
Soit X un ensemble, et soit $R \subset X \times X$ une relation sur X. Alors $G_r = (X, R)$ est un graphe dirigé, où

$$\mathrm{dom} : R \to X : (x_1, x_2) \to x_1 \text{ et } \mathrm{cod} : R \to X : (x_1, x_2) \to x_2$$

Observer que $\forall x_1, x_2 \in X$

$$G_R(x_1, x_2) = \begin{cases} \{(x_1, x_2)\} : (x_1, x_2) \in R \\ \emptyset \text{ sinon} \end{cases}$$

Definition 2 (Catégories)
Une catégorie C est un graphe dirigé (C_0, C_1) muni d'applications de composition

$$\gamma_{a,b,c} : C(a, b) \times C(b, c) \to C(a, c) : (f, g) \to g \circ f$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

— *(Existence d'identités) Il existe une application* $\mathrm{Id} : C_0 \to C_1 : c \to \mathrm{Id}_c$ *tel que*

$$f \circ \mathrm{Id}_a = f = \mathrm{Id}_b \circ f \forall f \in C_1(a,b), \forall a, b \in C_0$$

— *(Associativité) Quelque soient* $a, b, c, d \in C_0$ *et* $f \in C(a,b), g \in C(b,c)$ *et* $h \in C(c,d)$

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \in C(a,d)$$

Notation

On note

$$C_0 = \mathrm{Ob}\, C - \text{ les objets de } C$$
$$C_1 = \mathrm{Mor}\, C - \text{ les morphismes}$$

— Si $C, \mathrm{Mor}\, C$ sont des ensembles, alors C est petite.
— Si $C(a,b)$ est un ensemble $\forall a, b \in \mathrm{Ob}\, C$, alors C est localement petite.