

Analyse II

David Wiedemann

Table des matières

1	Intégrales généralisées	7
1.1	Intégrales absolument convergentes	9
1.2	Intégrale généralisée sur un intervalle non borné	11
2	L'espace R^n	11
2.1	Espace vectoriel normé	11
2.2	Normes sur R^n	13
2.3	Suites sur R^n	13
2.4	Topologie de \mathbb{R}^n	14
2.5	Classification des points d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$	14
2.6	Caractérisation des ensembles ouverts	15
2.7	Caractérisation des ensembles fermés	15
2.8	Ensembles compacts	16
3	Fonctions de plusieurs variables	16
3.1	Notion de limite	16
3.2	Caractérisation de limite par suites	17
3.3	Propriétés de l'opération de limite	17
3.4	Fonctions à valeurs dans R^m	18
4	Fonctions continues	18
4.0.1	Définitions Équivalentes	18
4.1	Prolongement par continuité	18
5	Dérivées de fonctions à plusieurs variables	20
5.1	Dérivées Directionnelles	20
5.2	Fonctions Différentiables	21
5.3	Dérivées d'ordre supérieur	23
5.4	Dérivées d'ordre supérieur	26
5.5	Développement limite et formule de Taylor	27

6	Integrales qui dependent de parametres	28
6.1	Integrales sur un intervalle ferme borne	28
6.2	Integrales avec des bornes variables	30
6.3	Integrales generalisees	31
7	Fonctions Bijectives	32
7.1	Fonctions Implicites et Hypersurfaces de \mathbb{R}^n	37
7.1.1	Cas $n = 2$	39
7.1.2	Cas $n > 1$	41
7.2	Cas Vectoriel	44
8	Extremas de fonctions	47
8.1	Extremas libres	48
8.1.1	Cas $n > 1$	49
8.2	Extremas lies	52
8.3	Extremas sous contraintes multiples	54
8.4	Condition suffisante pour extremas locaux lies	55
9	Integrales multiples au sens de Riemann	56
9.1	Caracterisation equivalente de fonctions integrables	61
9.2	Formule d'integrales iterees	62
9.3	Integrabilite sur un domaine quelconque	63
9.4	Proprietes de l'integrale de Riemann	63
9.5	Ensembles mesurables au sens de Jordan	64
9.5.1	Caracterisation des ensembles	65
9.6	Integrabilite sur un domaine quelconque	66
9.7	Proprietes de l'integrale de Riemann	66
9.8	Ensembles mesurables au sens de Jordan	68
9.8.1	Caracterisation des ensembles	68
9.9	Caracterisation des fonctions integrables	70
9.10	Proprietes de l'integrale de Riemann	71
9.11	Formule des integrales iterees	72
9.12	Formule de changement de variables	73
9.13	Quelques applications	75
9.14	Integrales generalisees	76
10	Equations differentielles ordinaires	76
10.1	Probleme de Cauchy	78
10.2	Methode de separation de variables	79
10.3	Equations lineaires du premier ordre (scalaire)	80
10.4	Deuxieme procede pour trouver la solution	81
10.5	EDO lineaire a coefficients constant	82
10.6	Existence et unicite des solutions	83

List of Theorems

1	Definition (Intégrales généralisées (sur un intervalle borné non fermé))	7
2	Definition (Integrale sur un intervalle borne ouvert)	7
1	Lemme	7
3	Lemme (Critere de Comparaison)	8
4	Theorème (Critere de Comparaison)	8
3	Definition (Integrale absolument convergente)	9
6	Theorème (absolument convergente implique convergente)	9
8	Theorème (Critere de comparaison (II))	10
4	Definition (Integrale sur un intervalle non borne)	11
5	Definition (Norme d'un vecteur)	11
6	Definition (Espace vectoriel norme)	11
7	Definition	11
8	Definition (Distance)	12
9	Definition (Produit Scalaire)	12
9	Theorème (Inegalite de Cauchy-Schwarz)	12
10	Theorème	12
10	Definition (Suites convergentes)	13
12	Lemme	13
11	Definition (Suites de Cauchy)	13
13	Theorème	13
14	Theorème (Bolzano-Weierstrass)	14
12	Definition (Boule)	14
13	Definition	15
14	Definition	15
15	Definition (Ensemble compact)	16
15	Theorème (Caracterisation par sous-suites convergentes)	16
16	Theorème (Caracterisation par recouvrements finis)	16
16	Definition (Chemin dans E)	16
17	Definition (Ensembles connexes par arcs)	16
18	Definition (Limite)	16
17	Theorème (Des deux gendarmes)	17
18	Theorème (Limites/Suites)	17
19	Theorème (Critere de Cauchy)	17
19	Definition (Limite)	18
20	Definition (Continuite en un point)	18
21	Definition (Continuite sur E)	18
22	Definition (continuite uniforme sur E)	18
23	Definition (Prolongement par continuite)	18
20	Theorème (Prolongement par continuite sur l'adherence)	19

21	Theorème	19
24	Definition	19
22	Theorème	20
23	Theorème	20
24	Theorème	20
25	Definition (Derivees directionnelle)	20
26	Definition (Gradient)	21
27	Definition (Matrice Jacobienne)	21
28	Definition (Differentiabilite)	21
25	Theorème	21
26	Theorème (Theoreme des accroissements finis dans \mathbb{R}^n)	23
27	Theorème (Taf dans le cas vectoriel)	23
29	Definition (Derivees partielles secondes (cas scalaire))	23
30	Definition (Matrice hessienne)	24
31	Definition (Espace $C^2(E)$)	24
32	Definition (Derivees directionnelles secondes)	24
28	Lemme	24
29	Theorème (Theoreme de Schwarz)	25
30	Corollaire	27
32	Theorème	29
34	Theorème	29
35	Theorème	31
33	Definition	31
36	Theorème	31
34	Definition (Homeomorphisme)	32
35	Definition (Diffeomorphisme)	33
36	Definition (Diffeomorphisme local)	33
38	Theorème	33
39	Theorème (Condition necessaire d'inversion locale)	33
40	Theorème	34
37	Definition (Norme spectrale)	34
38	Definition (Norme de frobenius)	34
41	Lemme	34
42	Theorème (Condition suffisante d'inversion locale)	34
39	Definition (Hypersurfaces de classe C^k)	38
40	Definition (Fonction Implicite)	38
43	Theorème (Fonction implicite en dimension 2)	41
44	Theorème	42
48	Theorème (Fonctions Implicites - Cas vectoriel)	45
41	Definition (Extremum d'une fonction)	47
42	Definition	50

49	Theorème (Condition suffisant du second ordre)	50
43	Definition (Matrices definies positives)	51
50	Lemme	51
51	Lemme	51
52	Theorème (Condition suffisante d'extremas)	51
55	Theorème (Condition necessaire pour extremas lies)	52
57	Theorème (Conditions necessaires d'optimalite)	54
44	Definition (Partition)	56
45	Definition (Partition tensorielle)	57
46	Definition (Raffinement d'une partition)	57
61	Lemme	58
62	Lemme	59
47	Definition (Somme de Darboux)	59
63	Lemme	59
48	Definition (Fonction integrable au sens de Riemann)	60
65	Lemme	61
66	Theorème	61
67	Theorème (de Fubini)	62
68	Corollaire	63
49	Definition	63
50	Definition (Ensemble mesurable au sens de Jordan)	64
70	Lemme	65
71	Lemme	65
72	Theorème	66
73	Corollaire	66
51	Definition	66
52	Definition (Ensemble mesurable au sens de Jordan)	68
75	Lemme	68
76	Lemme	68
77	Theorème	69
78	Corollaire	69
79	Theorème	69
81	Theorème	70
82	Corollaire	71
83	Corollaire	71
53	Definition (Domaine simple)	72
84	Theorème	72
85	Theorème	74
54	Definition (Fonction absolument integrable)	76
55	Definition (Solution locale)	78
88	Theorème	79

91	Theorème (Theoreme de Cauchy-Peano)	84
56	Definition	84
92	Theorème (de Cauchy-Lipschitz)	84

1 Intégrales généralisées

Peut-on définir une intégrale sur un intervalle ouvert plutôt que sur un intervalle fermé ? ie.

$$f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R} \text{ c.p.m.}$$

Definition 1 (Intégrales généralisées (sur un intervalle borné non fermé))

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux ($a < b$).

En particulier, f est c.p.m. sur tout intervalle $[a, x]$, $a < x < b$ Soit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ existe (ou converge) si $\lim_{x \rightarrow b} F(x)$ existe, dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b} F(x) - F(a)$$

Si $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ n'existe pas, alors on dit que

$$\int_a^b f(t)dt$$

diverge. Definition analogue pour le cas $]a, b]$.

On souhaite définir $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)dx = 0$.

Dans certains cas cette intégrale vaut 0. Mais si on calcule

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{\pi}{2} + \epsilon}^{\frac{\pi}{2} - \epsilon} \tan(t)dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (-\ln(\cos(\frac{\pi}{2} - \epsilon)) + \ln(\cos(-\frac{\pi}{2} + \epsilon))) = -\infty$$

Il faut donc une définition qui est cohérente.

Definition 2 (Intégrale sur un intervalle borne ouvert)

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m et $c \in]a, b[$.

Si les intégrales généralisées $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ existent, alors on définit l'intégrale

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Si une des deux intégrales diverge, alors le tout diverge.

Lemme 1

La valeur de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ ne dépend pas de c , si elle converge.

Preuve

Soit $d \in]a, b[$, différent de c , alors on a

$$\int_a^d f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^d f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f(t)dt + \int_c^d f(t)dt$$

$$= \int_c^d f(t)dt + \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f(t)dt$$

Donc l'integrale existe.

Si elle existe, on trouve

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dt &= \int_a^d f(t)dt + \int_d^b f(t)dt \\ &= \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^d f(t)dt + \lim_{y \rightarrow b-} \int_d^y f(t)dt \\ &= \int_c^d f(t)dt + \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f(t)dt + \lim_{y \rightarrow b-} \int_d^c f(t)dt + \int_c^y f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned} \quad \square$$

Remarque

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Si f admet une extension par continuité sur $[a, b]$, alors on vérifie facilement que

$$\int_a^b f(t)dt$$

existe et coïncide avec

$$\int_a^b \tilde{f}(t)dt$$

ou \tilde{f} est l'extension par continuité de f sur $[a, b]$.

Lemme 3 (Critère de Comparaison)

Soit $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux et supposons qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in [c, b[$$

et si $\int_c^b g(x)dx$ existe, alors $\int_a^b f(x)dx$ existe aussi. De même si $\int_c^b f(x)dx$ diverge, alors $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Lecture 2: Integrales Generalisees

Wed 24 Feb

Theorème 4 (Critère de Comparaison)

Soit $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m. et supposons $\exists c \in [a, b[$ tel que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in [c, b[$$

Si $\int_a^b g(x)dx$ existe alors $\int_a^b f(x)dx$ existe aussi

Si $\int_a^b f(x)dx$ diverge alors $\int_a^b g(x)dx$ diverge aussi.

Preuve

Si $\int_a^b g(x)dx$ existe, alors $\int_c^b g(x)dx$ existe.

Donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t)dt \\ &= \lim_{x \rightarrow b-} \left(\int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt \right) \\ &= \int_a^c f(t)dt + \lim_{x \rightarrow b-} \int_c^x f(t)dt \\ &\leq \int_a^c f(t)dt + \lim_{x \rightarrow b-} \int_c^x g(t)dt < +\infty\end{aligned}$$

En notant $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, F est non décroissante, et bornée supérieurement sur l'intervalle $[a, b[\Rightarrow \lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ existe. \square

Exemple

$f(x) = \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|$ sur $]0, 1]$, on a

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

1 est intégrable, et donc l'intégrale de $f(x)$ existe.

1.1 Intégrales absolument convergentes**Définition 3 (Intégrale absolument convergente)**

Soit I un intervalle du type $[a, b[,]a, b]$ ou $]a, b[$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m.

On dit que l'intégrale généralisée de f sur I est absolument convergente si

$$\int_I |f(x)|dx$$

existe.

Theorème 6 (absolument convergente implique convergente)

Si l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge absolument, alors il converge.

Preuve

Notons $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ et $f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}$ et on a $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$.

Donc

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)| \text{ et } 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)| \forall x \in I$$

Par critère de comparaison, si

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ existe} \Rightarrow \text{alors } \int_a^b f_+(x)dx, \int_a^b f_-(x)dx \text{ existent}$$

et donc $\int_a^b f(x)dx$

\square

Remarque

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m Si f est bornée sur I , alors

$$\int_I f(x)dx$$

existe.

Theorème 8 (Critere de comparaison (II))

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m.

S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1[$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \in \mathbb{R}$$

Alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

existe.

S'il existe $\alpha \geq 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \neq 0$$

alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

diverge.

Preuve

Par definition de la limite $\forall \epsilon > 0, \exists b-a > \delta_\epsilon > 0$ tel que

$$|f(x)(b-x)^\alpha - l| < \epsilon \forall x$$

$$\Rightarrow l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha \leq l + \epsilon$$

et donc

$$0 \leq |f(x)| \leq \frac{|l| + \epsilon}{(b-x)^\alpha}$$

Puisque le terme de droite est integrable, on conclut par le critere de comparaison. Pour la deuxieme partie, soit $\alpha \geq 1$ et $l \neq 0$.

Supposons $l > 0$, on a

$$l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha$$

Le meme raisonnement que ci-dessus donne que l'integrale de f diverge. \square

1.2 Intégrale généralisée sur un intervalle non borné

Definition 4 (Intégrale sur un intervalle non borné)

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m.

On dit que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ existe si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(x)dx$$

existe et dans ce cas, on note

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

idem si $f :]-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $f :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ c.p.m. on dit que $\int_a^\infty f(x)dx$ existe s'il existe $c \in]a, \infty[$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f(t)dt \text{ et } \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_c^y f(t)dt$$

existent.

Lecture 3: L'espace R^n

Mon 01 Mar

2 L'espace R^n

2.1 Espace vectoriel norme

Soit un ensemble V sur lequel on définit deux opérations

1. somme : $+$: $V \times V \rightarrow V$
2. multiplication par un scalaire $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$

On définit R^n par $R^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots \times \mathbb{R}$

Definition 5 (Norme d'un vecteur)

C'est une application $N : V \rightarrow \mathbb{R}$, c'est une application qui satisfait

- $\forall x \in V : N(x) \geq 0$ et $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V : N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$
- $\forall x, y \in V, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

On utilise souvent la notation $N(x) = \|x\|$

Definition 6 (Espace vectoriel norme)

Un espace vectoriel norme est noté $(V, \|\cdot\|)$

Definition 7

Soit V un espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur V .

On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes si $\exists c_1, c_2 > 0$ tel que

$$c_1 N_2(x) \leq N_1(x) \leq c_2 N_2(x) \forall x \in V$$

Definition 8 (Distance)

Soit X un ensemble.

Une distance est une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés suivantes

- $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y$
- La distance est symétrique
- $\forall x, y, z \in V, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Un espace X muni d'une distance est appelé un espace métrique et est noté (X, d) .

On peut toujours définir une distance sur un espace vectoriel normé, défini par

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

On appelle cette distance, la distance induite par la norme.

Tout espace vectoriel normé est aussi un espace métrique.

Definition 9 (Produit Scalaire)

Soit V un espace vectoriel.

Un produit scalaire est une application $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes

- $\forall x, y \in V, b(x, y) = b(y, x)$
- $\forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x, z) + \beta b(y, z)$
- $\forall x \in V, b(x, x) \geq 0, b(x, x) = 0 \iff x = 0$

Theorème 9 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit V un espace vectoriel et $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un produit scalaire. Alors

$$\forall x, y \in V, |b(x, y)| \leq \sqrt{b(x, x)b(y, y)}$$

Preuve

$\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.

$$0 \leq b(\alpha x + y, \alpha x + y) = \alpha^2 b(x, x) + 2\alpha b(x, y) + b(y, y)$$

Donc on a

$$\Delta = b(x, y)^2 - b(x, x)b(y, y)$$

□

Theorème 10

Soit $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un produit scalaire, alors l'application $x \rightarrow \sqrt{b(x, x)} = \|x\|_b$ est une norme sur V .

Donc, si V est muni d'un produit scalaire, alors V est un espace normé et donc V est un espace métrique pour la distance induite par le produit scalaire.

2.2 Normes sur \mathbb{R}^n

- La norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- Norme "max" $\|x\|_\infty = \max |x_i|$
- Norme 1 : $\|x\|_1 = \sum |x_i|$
- Normes $p \in [1, +\infty[$ $\|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

Pour p infinie, on retrouve la norme infinie

On montre en exercices que toutes les normes p sont équivalentes.

De même, on montre que toutes les normes sur \mathbb{R}^n sont équivalentes. Par contre, seulement la norme 2 est déduite d'un produit scalaire.

Definition 10 (Suites convergentes)

Soit $\{x^{(k)}\}_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que cette suite converge s'il existe $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^{(k)} - x\| = 0$$

Lecture 4: Boules sur \mathbb{R}^n

Wed 03 Mar

2.3 Suites sur \mathbb{R}^n

Remarque

Supposons que $\{x^{(k)}\} \rightarrow \vec{x}$ par rapport à la norme euclidienne. Et soit $\|\cdot\|$ une autre norme sur \mathbb{R}^n . Puisque toutes les normes sont équivalentes sur \mathbb{R}^n $\|\vec{x}\| \leq c \|\vec{x}\|_2$ Donc toutes les suites convergent peu importe la norme.

En particulier, on peut choisir la norme infinie.

Lemme 12

Une suite $\{x^{(k)}\}$ converge si et seulement si toutes les composantes convergent.

Definition 11 (Suites de Cauchy)

On dit qu'une suite $\{x^{(k)}\}$ est de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \exists N > 0 : \forall k, l \geq N \quad \|x^{(k)} - x^{(l)}\| \leq \epsilon$$

Theorème 13

Une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Preuve

Si la suite $x^{(k)}$ converge $\iff \{x_i^{(k)}\}$ converge pour tout $i = 1, \dots, n$ donc toutes ces suites sont de Cauchy et donc $x^{(k)}$ converge. \square

Theorème 14 (Bolzano-Weierstrass)*Soit $\{x^{(k)}\}$ une suite bornée.**Alors il existe une sous-suite $\{x^{(k_j)}\}$ qui converge***Preuve***Si $\{x^{(k)}\}$ est bornée, en particulier chaque suite $x^{(k)_i}$ sera bornée.**En $i = 1$, la suite $x^{(k)}$ est bornée, donc il existe une sous-suite convergente vers une valeur x_1 .**On considère les index de cette sous-suite et on réapplique l'argument ci-dessus en $i = 2$, etc. \square* **2.4 Topologie de \mathbb{R}^n** **Définition 12 (Boule)***Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, la boule ouverte centrée en x et de rayon δ*

$$B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \delta\}$$

La boule fermée

$$\overline{B}(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \delta\}$$

La sphere centrée en x et de rayon δ

$$S(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| = \delta\}$$

2.5 Classification des points d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ *Le complémentaire de E est*

$$E^c = \{y \in \mathbb{R}^n, y \notin E\}$$

*On dit que x est un point intérieur de E si $\exists \delta : B(x, \delta) \subset E$, on dit que x est un point frontière de E si $\forall \delta B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$ et $B(x, \delta) \cap E^c \neq \emptyset$. On dit que E° est l'ensemble des points intérieurs de E , E° est appelé l'intérieur de E .**On note ∂E l'ensemble des points frontières, appelé la frontière ou le bord de E .**On dit que x est un point adhérent de E si $\forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$. On note \bar{E} l'ensemble des points adhérents de E , appelé l'adhérence de E .**On a $\bar{E} = E \cup \partial E$* *On dit que x est un point isolé si*

$$\exists \delta > 0 B(x, \delta) \cap E = \{x\}$$

On dit que x est un point d'accumulation de E , si $\forall \delta > 0$

$$B(x, \delta) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Donc, en particulier, si on prend $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$

$$\exists x^{(k)} \in E, \text{ tel que } \|x^{(k)} - x\| \leq \frac{1}{k}$$

La suite $x^{(k)}$ converge vers x .

Definition 13

Soit E un ensemble de \mathbb{R}^n , on dit que E est ouvert si tous ses points sont intérieurs

Definition 14

E est fermé si E^c est ouvert.

Lecture 5: Ensembles compacts/connexes par arcs

Mon 08 Mar

2.6 Caractérisation des ensembles ouverts

- $\overset{\circ}{E}$ est toujours ouvert.
- E est ouvert si et seulement si $E = \overset{\circ}{E}$
- L'union (même infinie) d'ensembles ouverts est ouverte.
Soit $E = \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$ et K_α sont ouverts.
Alors $\forall x \in E, x \in K_\alpha$ et donc il existe une boule ouverte centrée en x et contenue dans K_α .
- L'intersection finie d'ensembles ouverts est ouverte.
Soit $E = \bigcap K_i$, alors $\forall x \in E, x \in K_i \forall i$, mais chaque K_i est ouvert, donc en prenant $\delta = \min \{\delta_1, \dots\}$, $B(x, \delta) \in E$ et donc E est ouvert.

2.7 Caractérisation des ensembles fermes

- $\mathbb{R}^n \setminus \overline{E} = \overset{\circ}{E}, \overline{E^c} = \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{E}$
- \overline{E} est toujours fermé.
- L'intersection (même infinie) d'ensembles fermes est fermée.
- L'union finie d'ensembles fermes est fermée.
- E est fermé si et seulement si toute suite $\{x^{(k)}\}$ convergente, converge vers un élément $x \in E$.

Preuve

Soit E fermé et $\{x^{(k)}\}$ une suite convergente vers $x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : \forall k > N_\epsilon, \|x - x^{(k)}\| \leq \epsilon$.

Donc $\forall \epsilon B(x, \epsilon) \cap E \neq \emptyset$, donc $x \in \overline{E} = E$.

Supposons que E n'est pas fermé, donc E^c n'est pas ouvert. Donc $\exists x \in E^c : \forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$.

Si on prend $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \exists x^{(k)} \in B(x, \delta) \cap E$ et $\{x^{(k)}\}$ converge vers x , donc $x \in E$ \nmid □

2.8 Ensembles compacts

Definition 15 (Ensemble compact)

On dit que E est compact si E est à la fois fermé et borné.

Theorème 15 (Caractérisation par sous-suites convergentes)

Un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute suite $\{x^{(k)}\} \subset E$ on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément $x \in E$

Theorème 16 (Caractérisation par recouvrements finis)

Un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute famille $\{K_\alpha, \alpha \in A\}$ d'ouverts tel que $E \subset K_\alpha$, on peut extraire une sous-famille finie qui est encore un recouvrement de E .

Definition 16 (Chemin dans E)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. On appelle chemin de E une application $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$, $\gamma(t) = (\gamma_1, \dots)$, tel que γ_i est continu pour tout i .

E

Definition 17 (Ensembles connexes par arcs)

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est connexe par arcs si $\forall x, y \in E$, il existe un chemin γ tel que $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

3 Fonctions de plusieurs variables

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. On appelle fonction sur E à valeurs réelles une application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall x \in E, x \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

On note $D(f)$ le domaine de f , $\text{Im } f$ l'image, $g(f)$ le graphe.

3.1 Notion de limite

Definition 18 (Limite)

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E . On dit que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta$$

Alors

$$\|f(x) - l\| < \epsilon$$

Theorème 17 (Des deux gendarmes)

Soit $f, g, h : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E .

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$ et $\exists \alpha > 0$

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad 0 < \|x - x_0\| \leq \alpha$$

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe et est égale à l .

Lecture 6: Fonctions continues

Wed 10 Mar

3.2 Caractérisation de limite par suites**Theorème 18 (Limites/Suites)**

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E . La limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ si et seulement si pour toute suite $\{x^{(k)}\} \subset E$ qui converge vers x_0 , on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^{(k)}) = l$.

Preuve

Soit $\{x^{(k)} : \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = x_0\}$, on sait que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in E, \|x - x_0\| < \delta, |f(x) - l| < \epsilon$$

il existe N tq $\forall k > n$ tq $\|x^{(k)} - x_0\| < \delta$

Si la limite $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^{(k)}) = l$ pour toute suite $x^{(k)}$.

Par l'absurde, supposons que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas.

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E, x \neq x_0 : \|x - x_0\| < \delta$$

et

$$|f(x) - l| \geq \epsilon \quad \square$$

Si on prend $\delta = \frac{1}{k}$, alors $\exists x^{(k)} \neq x_0 : \|x^{(k)} - x_0\| < \frac{1}{k}$ tel que $|f(x^{(k)}) - l| \geq \epsilon$.

Or cette suite $x^{(k)}$ converge vers x_0 , \nexists

3.3 Propriétés de l'opération de limite

Soit $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$, alors l'opération de limite est linéaire, respecte les règles de multiplication.

Theorème 19 (Critère de Cauchy)

Idem qu'en analyse I.

3.4 Fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^m

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definition 19 (Limite)

On dit que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \vec{l} \in \mathbb{R}^m$ existe si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E \setminus \{x_0\}, 0 < \|x - x_0\| < \delta$$

on a

$$\|f(x) - l\| < \epsilon$$

De plus, chaque composante de f converge vers la composante correspondante de la limite.

4 Fonctions continues

Definition 20 (Continuité en un point)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, et $x_0 \in E$.

Si x_0 est un point d'accumulation de E , on dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Si x_0 est un point isolé, on admet que f est continue en x_0

4.0.1 Définitions Equivalentes

- $\forall \epsilon > 0, \exists \delta : \forall x \in E, \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$
- pour toute suite $x^{(k)} \subset E$ qui converge vers x_0 on a que $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^{(k)}) = f(x_0)$

Definition 21 (Continuité sur E)

On dit que $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue sur E si elle est continue en tout point $x \in E$.

Dans ce cas, on note $f \in C^0(E)$

Definition 22 (continuité uniforme sur E)

On dit que f est uniformément continue sur E si $\forall \epsilon, \exists \delta$ tel que $\forall x \in E, \forall y \in E, \|y - x\| < \delta$, on a $\|f(y) - f(x)\| < \epsilon$

Evidemment, la continuité uniforme implique la continuité.

Lecture 7: Prolongement par continuité

Mon 15 Mar

4.1 Prolongement par continuité

Definition 23 (Prolongement par continuité)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue, avec $E \neq \overline{E}$, soit $x_0 \in \overline{E} \setminus E$. Une fonction $\tilde{f} : E \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est appelée un prolongement si \tilde{f} est continue en x_0 et

coincide avec f sur E .

Le prolongement par continuité est uniquement défini par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in E$ et $\tilde{f}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ si la limite existe.

Theorème 20 (Prolongement par continuité sur l'adhérence)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue sur E . Supposons que $\forall x \in \overline{E} \setminus E$ la limite $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$ existe. Alors on peut définir un prolongement $\tilde{f} : \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\tilde{f}(x) = f(x) \forall x \in E$ et $\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$ sinon, de plus \tilde{f} est continue sur \overline{E} .

Preuve

Si $x \in E$, $f(x)$ est continue en x donc $\tilde{f}(x) = f(x)$ est continue en x . On a

$$\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in E} f(y) = \lim_{y \rightarrow x, y \in E} \tilde{f}(y)$$

Pour montrer que \tilde{f} est continue en x , il faut montrer que $\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in \overline{E}} \tilde{f}(y)$.
Il faut montrer que pour toute suite $x^{(k)} \subset \overline{E}$ convergent en $x \in \overline{E} \setminus E$ on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x^{(k)}) = \tilde{f}(x)$$

On construit une deuxième suite $y^{(k)}$ convergent vers x .

Si $x^{(k)} \in E$, alors $y^{(k)} = x^{(k)}$.

Si $x^{(k)} \in \overline{E} \setminus E$ on peut toujours trouver une valeur $y^{(k)} \in E$ tel que $\|y^{(k)} - x^{(k)}\| \leq 2^{-k}$, $\|f(y^{(k)}) - \tilde{f}(x^{(k)})\| \leq 2^{-k}$.

On aura donc

$$\|y^{(k)} - x\| \leq \|y^{(k)} - x^{(k)}\| + \|x^{(k)} - x\|$$

Ainsi $y^{(k)} \subset E$ converge vers x , et ainsi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\tilde{f}(x^{(k)}) - \tilde{f}(y^{(k)})) + \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(y^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}(y^{(k)}) \quad \square$$

Theorème 21

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ uniformément continue. Alors f peut être prolongée par continuité sur \overline{E} et le prolongement $\tilde{f} : \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est uniformément continu.

Définition 24

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ Si $\sup f = \infty$ on dit que f n'est pas bornée supérieurement.

Si $M < \infty$ on appelle M la borne supérieure de f .

S'il existe $x_M \in E$, $f(x_M) = M$ alors on dit que M est le maximum de f sur E et x_M est un point maximum de f . Meme définition pour borne inférieure.

Theorème 22

Soit E non vide et compact, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint son maximum et son minimum sur E .

Preuve

Par l'absurde f n'est pas bornée, il existe $x^{(k)}$ tel que $|f(x^{(k)})| > k$
 Mais E est compact, donc il existe une sous-suite $x^{(k_i)}$ qui converge, or f est continue, donc

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} f(x^{(k_i)}) = f(x) < \infty$$

Supposons que f n'atteint pas ses bornes

Il existe $x^{(k)}$ qui converge vers le sup, or E est fermé. □

Theorème 23

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, compact, connexe par arcs, et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint toutes les valeurs entre son minimum et maximum.

Preuve

f est continue sur un compact donc f atteint son min et son max.
 Puisque E est connexe, il existe γ un chemin du minimum au maximum. On conclut par TVI sur la fonction $f \circ \gamma$ □

Theorème 24

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et compact avec $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue. Alors f est uniformément continue sur E .

Lecture 8: Derivee partielles et directionnelle

Wed 17 Mar

5 Derivees de fonctions a plusieurs variables**5.1 Derivees Directionnelles****Definition 25 (Derivees directionnelle)**

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{E}$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur arbitraire.
 On dit que f est derivable dans la direction \vec{v} , au point x_0 , si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

existe et on note $D_v f(x_0)$.

Si on prend $\|\vec{v}\|$ (norme euclidienne), alors on appelle $D_v f(x_0)$ la derivee directionnelle de f dans la direction \vec{v} au point x_0 .

en particulier, on peut prendre $\vec{v} = e_i$, dans ce cas on utilise la notation

$$D_{e_i} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$$

et on appelle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ la i -eme derivee partielle de f au point x_0 .

Definition 26 (Gradient)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \overset{\circ}{E}$.

Si toutes les derivees partielles de f en x_0 existent, alors on appelle le vecteur gradient

$$\nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^n, \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Definition 27 (Matrice Jacobienne)

On appelle matrice Jacobienne $Df(x_0) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

5.2 Fonctions Differentiables

Definition 28 (Differentiabilite)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overset{\circ}{E}$. On dit que f est differentiable (ou derivable) en x_0 si il existe une application lineaire $L_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + L_{x_0}(x - x_0) + g(x) \forall x \in E$$

et $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\|x - x_0\|} = 0$.

Theoreme 25

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differentiable en $x_0 \in \overset{\circ}{E}$, alors

- Toutes les derivees partielles de f en x_0 existent.
- On a

$$L_{x_0}(x - x_0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - x_0) = Df(x_0)(x - x_0)$$

- Toutes les derivees directionnelles existent et

$$D_v f(x_0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) v_i = \nabla f(x_0)^T \vec{v} = Df(x_0) \vec{v}$$

- f est continue en x_0 .

Preuve

- On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + L_{x_0}(x_0 + te_i - x_0) + g(x_0 + te_i)}{t} \end{aligned}$$

$$= L_{x_0}(e_i) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + te_i)}{t}$$

$$= L_{x_0}a_i$$

— On a

$$f(x) = f(x_0) + L_{x_0}(x - x_0) + g(x)$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} L_{x_0}(x - x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0)$$

—

$$D_v f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Df(x_0)tv + g(x_0 + tv)}{t}$$

$$= Df(x_0)\vec{v}$$

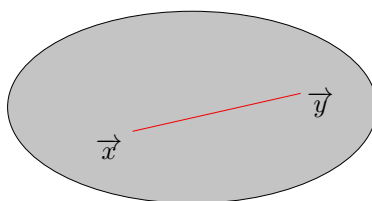
□

Lecture 9: Derivees secondes

Wed 24 Mar

Cas scalaire :

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $x, y \in E$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ derivable sur E .



On denote par $[x, y]$ le segment (ferme) entre x et y et $]x, y[$ le segment ouvert entre x et y .

Theorème 26 (Theoreme des accroissements finis dans \mathbb{R}^n)

Soit $x, y \in E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, alors il existe $z \in [x, y]$ tel que

$$f(y) - f(x) = \nabla f(z)^T(y - x) = Df(z)(y - x)$$

Preuve

Soit $g(t) = f(x + t(y - x))$ pour $t \in [0, 1]$.

On a alors

$$g'(t) = \frac{d}{dt}g(t) = \frac{d}{dt}f(\phi(t))$$

ou $\phi(t) = x + t(y - x)$.

Puisque f et ϕ sont derivables, on conclut que g est aussi derivable.

Donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= Df(\phi(t)) \cdot D\phi(t) \\ &= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t(y - x))(y_i - x_i) \\ &= \nabla f(x + t(y - x))^T(y - x) = Df(x + t(y - x))(y - x) \end{aligned}$$

Le taf applique a g donne $\exists s \in]0, 1[$ tel que

$$g(1) - g(0) = g'(s)$$

Donc

$$f(y) - f(x) = Df(x + s(y - x))(y - x)$$

□

On conclut en posant $z = x + s(y - x)$.

Le cas vectoriel :

Theorème 27 (Taf dans le cas vectoriel)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

On essaie de représenter $f(y) - f(x)$ a l'aide des derivees de f .

On peut écrire TAF pour chaque composante, mais les z_k ne sont en general pas les memes.

Cependant, on peut toujours écrire pour $f \in C^1(E)$

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 Df(x + s(y - x))(y - x)ds$$

5.3 Derivees d'ordre superieur**Definition 29 (Derivees partielles secondes (cas scalaire))**

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, E ouvert.

Supposons que pour un indice $i = \{1, \dots, n\}$ fixe, la derivee partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existe $\forall x \in E$.

Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admet la dérivée partielle selon x_j , alors on dit que f a une dérivée partielle seconde en x et on note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x)$$

Definition 30 (Matrice hessienne)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que toutes les dérivées partielles existent que toutes les dérivées secondes existent

$$H_f(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(y) & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)(y) & \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(y) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)(y) & \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(y) & \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)(y) & \dots \end{pmatrix}$$

Definition 31 (Espace $C^2(E)$)

On dit que $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 si toutes les dérivées partielles secondes sont continues.

Definition 32 (Dérivées directionnelles secondes)

Soit $v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$. Alors, étant donné $D_v f : E \rightarrow \mathbb{R}$, on peut essayer de calculer la dérivée directionnelle de $D_v f$ dans la direction $w \in \mathbb{R}^n$.

Si une telle dérivée existe, on dit que f admet une dérivée directionnelle seconde dans les directions v et w au point x et on note

$$D_{wv} f(x) = D_w(D_v f)(x)$$

Lemme 28

Soit $f \in C^2(E)$, E ouvert et $v, w \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\| = \|w\| = 1$.

Alors $D_{wv} f$ existe en tout $x \in E$ et

$$\begin{aligned} D_{wv} f(x) &= w^T H_f(x) v \\ &= \sum_{i=1}^n w_i \left(\sum_{j=1}^n H_f(x)_{ij} v_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) w_i v_j \end{aligned}$$

Preuve

Si $f \in C^2$ alors $f \in C^1$, alors $D_v f(x) = \nabla f(x)^T v = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i$.

Mais puisque $f \in C^2$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^1 \forall i$, donc

$$\begin{aligned} D_w(D_v f)(x) &= \nabla(D_v f)^T w = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (D_v f) w_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right) v_j w_i \end{aligned}$$

□

Ce qui donne le resultat desire.

Theorème 29 (Theoreme de Schwarz)

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ fixes.

Supposons que $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent sur E et sont continues en $x \in E$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

Lecture 10: Derivees d'ordre superieur

Mon 29 Mar

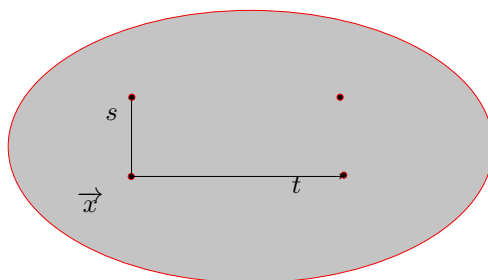


FIGURE 1 – thmschwarz

Preuve

Soit $s, t > 0$ suffisamment petit tel que

$$x + se_i, x + te_j, x + se_i + te_j \in E$$

Posons

$$\begin{aligned} \Delta(s, t) &= f(x + se_i + te_j) - f(x + se_i) - f(x + te_j) + f(x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + se_i)t - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)t \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j} st \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(x + te_j)s - \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)s \end{aligned}$$

Plus formellement, on peut ecrire

$$\Delta(s, t) = (f(x + se_i + te_j) - f(x + se_i)) - (f(x + te_j) - f(x))$$

On definit

$$g(\xi) = f(x + \xi e_i + t e_j) - f(x + \xi e_i)$$

et donc

$$\Delta(s, t) = g(s) - g(0)$$

et g est derivable car f est derivable

$$g'(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \xi e_i + t e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \xi e_i)$$

par le TAF, on a

$$\begin{aligned} g(s) - g(0) &= g'(\tilde{s})s \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \tilde{s} e_i + t e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \tilde{s} e_i) \right) s \end{aligned}$$

On definit maintenant

$$\phi(y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \tilde{s} e_i + y e_j)$$

Alors on a

$$\Delta(s, t) = (\phi(t) - \phi(0))s$$

A nouveau, ϕ est derivable, et donc on a

$$\begin{aligned} \Delta(s, t) &= \phi'(\tilde{t})ts \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}(x + \tilde{s} e_i + \tilde{t} e_j)ts \end{aligned}$$

Si on prend $t = s$, on a

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \Delta(s, s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x + \tilde{s} + \tilde{t} e_j) s^2 \right)$$

On peut appliquer exactement le meme raisonnement dans l'autre sens, et on obtient le resultat desire. \square

5.4 Derivees d'ordre superieur

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et on fixe $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$.

On definit la derivee partielle par rapport aux variables x_{i_1}, \dots, x_{i_p} , on note alors

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \left(\dots \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \right) \right) (x)$$

Corollaire 30

Soit i_1, \dots, i_p fixe et σ une permutation des nombres $\{1, \dots, p\}$.

Si $\frac{\partial^p}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}}$ et $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_{\sigma(p)}} \dots \partial x_{i_{\sigma(1)}}}$ existent et sont continues en x pour toute permutation alors ils sont egaux

5.5 Developpement limite et formule de Taylor

On veut generaliser la definition pour la dimension 1, on veut un polynome de degre p dans les variables (x_1, \dots, x_n) , en utilisant la notation multi-entiers, on note

$$p(x) = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n), |\alpha| \leq 2} c_\alpha x^\alpha$$

De maniere generale, on peut donc ecrire

$$q(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq p} c_\alpha x^\alpha$$

Le developpement limite d'ordre p d'une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ autour d'un point $x \in \overset{\circ}{E}$, aura donc la forme

$$f(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq p} c_\alpha (y-x)^\alpha + R_p(y)$$

Ou R_p satisfait

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{R_p(y)}{\|y-x\|^p} = 0$$

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{p+1}(E)$, E un ouvert non vide et soient $x, y \in E$ tel que $[x, y] \in E$, soit $g(t) = f(x + t(y-x))$, pour $t \in [0, 1]$, on voit que $g \in C^{p+1}([0, 1])$. On peut donc ecrire

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \dots + \frac{g^{(p)}(0)}{p!} t^p + R_p(y)$$

On a donc

$$g'(t) = \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x_t) \frac{d(x_t)_{i_1}}{dt} = \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x_t) (y_{i_1} - x_{i_1}) = \sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(y-x)^\alpha$$

De meme, on trouve

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} f(x_t) \right) \\ &= \sum_{|\alpha|=2} \frac{2!}{\alpha!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha}(x_t) (y-x)^\alpha \end{aligned}$$

La formule de Taylor s'écrit donc

$$\begin{aligned} f(y) &= g(1) = \sum_{k=0}^p \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t + R_p(y) \\ &= \sum_{k=0}^p \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{k!} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(x)(y-x)^\alpha + R_p(1) \end{aligned}$$

La formule de Lagrange donne

$$R_p(1) = \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x + \theta(y-x))(y-x)^\alpha$$

Lecture 11: Integrales qui dependent de parametres

Wed 31 Mar

6 Integrales qui dependent de parametres

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$, soit $f : I \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in I$ et $x = (x_1, \dots)$ tel que $\forall x \in E \int_I f(t, \vec{x}) dt$ existe.

On peut définir la fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\vec{x} \rightarrow g(x) = \int_I f(t, \vec{x}) dt$$

— Si f est continue sur $I \times E$ est-ce que g est continue? Autrement dit, pour $x_0 \in E$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \int_I f(t, \vec{x}) dt \stackrel{?}{=} \int_I \lim_{x \rightarrow x_0} f(t, x) dt = g(x_0)$$

— Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe sur $I \times E$ est-ce que $\frac{\partial}{\partial x_i} g$ existe sur E et

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \stackrel{?}{=} \int_I \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x) dt$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \rightarrow x^2 e^{-x^2 t}$

Soit

$$g(x) = \int_0^\infty x^2 e^{-x^2 t} dt$$

Pour $x = 0$, $f(t, 0) = 0 \forall t$, $g(0) = 0$, pour $x \neq 0$,

$$g(x) = (-e^{-x^2 t})|_{t=0}^\infty = 1$$

ainsi, g n'est pas continue.

6.1 Integrales sur un intervalle ferme borne

Theorème 32

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et

$$f : [a, b] \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

continue.

Alors la fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_a^b f(t, x) dt$$

est bien définie $\forall x \in E$ et est continue sur E .

Preuve

Pour tout $x \in E$, la fonction $t \rightarrow f(t, x)$ est continue et donc intégrable.

Montrons que g est continue sur E .

Fixons $x_0 \in E$, $\exists \eta > 0$ $\overline{B}(x_0, \eta) \subset E$.

Alors la restriction de f à $A = [a, b] \times \overline{B}(x_0, \eta)$.

Donc A est compact, et donc $f|_A$ est uniformément continue.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta \in]0, \eta] : \forall (s, y), (t, x) \in A, |s - t| \leq \delta, \|y - x\| \leq \delta$$

On a

$$|f(s, y) - f(t, x)| \leq \epsilon$$

En particulier, on peut choisir $s = t, y = x_0$, alors

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= \left| \int_a^b f(t, x) - f(t, x_0) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t, x) - f(t, x_0)| dt \\ &\leq \epsilon(b - a) \end{aligned}$$

Remarque

— Le theoreme est valable aussi si l'ensemble E est ferme, il suffit de considerer $\overline{B}(x, \delta) \cap E$ et meme pour n'importe quel sous-ensemble E .

Theorème 34

Soit a, b fini, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, et $f : [a, b] \times E \rightarrow \mathbb{R}$ continue tel que, pour i fixe

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : [a, b] \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

existe et est continue.

Alors $g(x) = \int_a^b f(t, x)dt$ existe pour tout x et $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$ existe pour tout x et

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x)dt$$

Preuve

Soit $x_0 \in E$ et $\eta > 0 : \overline{B}(x_0, \eta) \subset E$, on definit

$$A = [a, b] \times \overline{B}(x_0, \eta) \text{ un compact}$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_A$ est uniformement continue.

On a donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in]0, \eta] : \forall t \in [a, b], \forall x \in \overline{B}(x_0, \delta)$$

$$|\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$$

On veut montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + se_i) - g(x_0)}{s}$$

existe et est egal a

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0)dt$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(x_0 + se_i) - g(x_0)}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0)dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{s} \int_a^b f(t, x_0 + se_i) - f(t, x_0)dt - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0)dt \right| \\ &= \left| \int_a^b \frac{1}{s} \int_0^s \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0 + \sigma e_i) d\sigma - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0)dt \right| \\ &= \left| \int_a^b \frac{1}{s} \int_0^s \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0 + \sigma e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0) \right) d\sigma dt \right| \\ &\leq \int_a^b \frac{1}{|s|} \int_0^s \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0 + \sigma e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_0) \right|}_{\leq \frac{\epsilon}{b-a}} d\sigma dt \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

□

6.2 Integrales avec des bornes variables

Soit

$$g(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x)dt$$

On suppose que

$$f :]\alpha, \beta[\times E \rightarrow \mathbb{R}$$

et que

$$a, b : E \rightarrow]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$$

Theorème 35

Soit E un ouvert non vide et supposons que toutes les dérivées partielles de x_i existent et sont continues pour tout i , de plus supposons que a, b sont $C^1(E)$, alors $g \in C^1(E)$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial b}{\partial x_i}(x)f(b(x), x) - \frac{\partial a}{\partial x_i}(x)f(a(x), x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) dt$$

Sans preuve.

Idee de la demonstration : Reecrire

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{a(x)}^c f(t, x) dt + \int_c^{b(x)} f(t, x) dt \\ &= G(b(x), x) - G(a(x), x), \text{ avec } G(s, x) = \int_c^s f(t, x) dt \end{aligned}$$

On montre que $G \in C^1$, alors $g \in C^1$ et donc

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} G(b(x), x) - \frac{\partial}{\partial x_i} G(a(x), x)$$

6.3 Integrales generalisees

Cas $I = [a, b[$ En general, on a pas la continuite de $g(x)$.

Definition 33

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et $f : [a, b[\times E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On dit que $\int_a^b f(t, x) dt$ converge uniformement sur E si $\int_a^b f(t, x) dt$ existe $\forall x$ et $\forall \epsilon > 0 \exists \bar{c} \in]a, b[$ (independant de x) tel que

$$\forall c \in [\bar{c}, b[\text{ et } \forall x \in E, \left| \int_c^b f(t, x) dt \right| \leq \epsilon$$

Theorème 36

Soit $f : [a, b] \times E \rightarrow \mathbb{R}$ continue et l'integrale $\int_a^b f(t, x) dt$ converge uniformement sur E . Alors la fonction $g(x) = \int_a^b f(t, x) dt$ existe $\forall x \in E$ et est continue sur E .

De plus si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe, et est continue sur $[a, b] \times E$, et $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) dt$ converge uniformement, alors $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ existe et est continue sur E .

L'idée de la démonstration est

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= \left| \int_a^b (f(t, x) - f(t, x_0)) dt \right| \\ &\leq \int_a^{\bar{c}} |f(t, x) - f(t, x_0)| dt + \int_{\bar{c}}^b |f(t, x) - f(t, x_0)| dt \\ &\leq \int_a^{\bar{c}} |f(t, x) - f(t, x_0)| dt + 2\epsilon \end{aligned}$$

Et on s'est ramené au cas d'un intervalle fermé.

Remarque

Si il existe $h : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et telle que

$$|f(t, \vec{x})| \leq h(t)$$

Alors f est uniformément intégrable.

Lecture 12: Fonctions Bijectives et difféomorphismes

Mon 12 Apr

7 Fonctions Bijectives

Soit $\vec{f} : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F \subset \mathbb{R}^n$.

Si \vec{f} est une bijection entre E et F alors $\forall \vec{y} \in F, \exists ! \vec{x} \in E : f(\vec{x}) = \vec{y}$

On peut donc définir une application inverse $\vec{g} : F \rightarrow E$ tel que $\forall \vec{y} \in F, f(g(\vec{y})) = \vec{y}$ et de manière équivalente, $\forall x \in E, g(f(x)) = x$

Pourquoi étudier les bijections ?

— Exemple 1

On souhaite résoudre le problème $f(x) = y$ pour un $y \in F$ donné. Si f est une bijection, on sait qu'il existe une solution.

— Changement de variable

Soit $f : E \rightarrow F$ bijective et $\phi : F \rightarrow \mathbb{R}$.

On peut récrire ϕ en fonction de variables $x \in E$, $\tilde{\phi} = \phi \circ f$, donc $x \mapsto \tilde{\phi}(x) = \phi(f(x)), \forall x \in E$.

Vice versa étant donné $\tilde{\phi} : E \rightarrow \mathbb{R}, \vec{x} \mapsto \tilde{\phi}(x)$.

On peut la récrire en fonction de $y \in F$.

On aura donc

$$\phi(y) = \tilde{\phi}(g(y))$$

On utilise ceci, en partie pour les coordonnées polaires.

Definition 34 (Homeomorphisme)

Soit $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non-vides. On dit que $f : E \rightarrow F$ est un homeomorphisme si elle est bijective et f et son inverse $g : F \rightarrow E$ sont continues.

Definition 35 (Diffeomorphisme)

Soit $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non-vides. On dit que $f : E \rightarrow F$ est un diffeomorphisme global si elle est bijective et f et son inverse $g : F \rightarrow E$ sont C^1 .

De maniere plus generale, on dit que f est un k -diffeomorphisme si f et son inverse sont de classe C^k .

Definition 36 (Diffeomorphisme local)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide et $x_0 \in E$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 .

On dit que f est un diffeomorphisme local en x_0 , si il existe un ouvert $U \subset E$ contenant x_0 et un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ contenant $y_0 \in f(x_0)$ tel que $\vec{f} : U \rightarrow V$ est un diffeomorphisme.

Clairement, si f est un diffeomorphisme global, c'est en particulier un diffeomorphisme local en tout point $x \in E$, mais la reciproque n'est pas vraie en general. On a toutefois le resultat suivant

Theoreme 38

Soit $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non vides et $f : E \rightarrow F$ bijective et un diffeomorphisme local en tout point $x \in E$. Alors, f est un diffeomorphisme global.

Question

Sous quelles conditions, \vec{f} est elle un diffeomorphisme local en $x \in E$.

Dans le cas $n = 1$, f est un diffeomorphisme local en $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction affine

$$\vec{f}(x) = Ax + b$$

Quand est-ce que f est inversible, ou, etant donne $y \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = y$ a une solution unique, si et seulement si $\det A \neq 0$

De maniere plus generale, vu que f est C^1 , on a

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + R_f(\vec{x})$$

Autour de x_0 , on a donc

$$f(x) \approx f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$$

et donc f est un diffeomorphisme local si et seulement si $\det(Df(x_0)) \neq 0$

Theoreme 39 (Condition necessaire d'inversion locale)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec E ouvert non vide, un diffeomorphisme local en x_0 . Alors, $\det(Df(x_0)) \neq 0$.

Preuve

Par definition de diffeomorphisme local, il existe un ouvert $U \subset E$ contenant x_0 et un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ contenant $y_0 = f(x_0)$ tel que $f : U \rightarrow V$ est une bijection et soit $g : V \rightarrow U$ la fonction inverse de classe C^1 par hypothese.
Puisque $g(f(x)) = x \forall x \in U$, on a

$$D(g(f(x))) = Dg(f(x))Df(x) = \text{Id} \quad \square$$

Et donc $Df(x_0)$ est inversible.

Theorème 40

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ ferme et $\phi : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

- $\phi(K) \subset K$
- Il existe $\rho \in]0, 1[$ tel que $\forall x, y \in K$

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \rho \|x - y\|$$

(dans ce cas, on dit que l'application est contractante)

Alors ϕ possede un unique point fixe $\exists! v \in K$ tel que $v = \phi(v)$

Definition 37 (Norme spectrale)

On definit

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\|$$

Definition 38 (Norme de frobenius)

On note

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}^2}$$

Lemme 41

Soit a, b finis et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. Alors

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

Theorème 42 (Condition suffisante d'inversion locale)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $x_0 \in E$.
Si $\det Df(x_0) \neq 0$, alors f est un diffeomorphisme local en x_0 . De plus si $g : V \rightarrow U$ est un inverse local, avec $U \subset E$ un ouvert contenant x_0 et V

un ouvert contenant $y_0 = f(x_0)$, on a

$$Dg(f(x)) = Df(x)^{-1} \forall x \in U$$

On va utiliser le theoreme du point fixe de Banach.

Preuve

On montre l'existence d'un inverse local.

Par hypothese $x \rightarrow Df(x)$ est continue. Donc

$$\exists r_1, \det(Df(x_0)) \neq 0 \forall x \in B(x_0, r) \cap E$$

Considerons

$$x \rightarrow \text{Id} - Df(x_0)^{-1} Df(x) =: A(x)$$

On a a nouveau que $A(x)$ est continue et $A(x_0) = 0$.

Donc, il existe $r_2 > 0$ tel que $\forall x \in B(x_0, r_2) \cap E \frac{-1}{2n} \leq A_{ij}(x) \leq \frac{1}{2n}$ Donc $\forall x \in B(x_0, r_2) \cap E |||A(x)||| \leq \|A(x)\|_F = \sqrt{\sum_{ij} A_{ij}(x)^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j} \frac{1}{4n^2}} = \frac{1}{2}$.

Donc il existe $r \leq \min\{r_1, r_2\}$ tel que

- $B(x_0, r) \subset E$
- $\det Df(x) \neq 0 \forall x \in B(x_0, r)$
- $|||A(x)||| \leq \frac{1}{2} \forall x \in B(x_0, r)$

On veut montrer que f est localement inversible, donc $\forall y \in V \exists! x \in U : f(x) = y$.

On a

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff 0 = y - f(x) \\ &\iff 0 = Df(x_0)^{-1}(y - f(x)) \\ &\iff x = x + Df(x_0)^{-1}(y - f(x)) \end{aligned}$$

On a

$$D\phi^y(x) = D^y(x - Df(x_0)^{-1}(f(x) - y)) = A(x)$$

On montre donc que ϕ^y est contractante, donc

$$\forall x_1, x_2 \in \overline{B}(x_0, r)$$

On veut calculer

$$\begin{aligned} \|\phi^y(x_1) - \phi^y(x_2)\| &= \left\| \int_0^1 D\phi^y(x_1 + t(x_2 - x_1))(x_2 - x_1) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|D\phi^y(\dots)(x_2 - x_1)\| dt \\ &\leq \int_0^1 |||D\phi^y(\dots)||| \|x_2 - x_1\| dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\| \end{aligned} \quad \square$$

Donc ϕ^y est contractante sur $B(x_0, r)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.
 Il nous faut encore montrer que $\phi^y(\overline{B}(x_0, r)) \subset \overline{B}(x_0, r)$

Lecture 13: theoreme d'inversion locale

Wed 14 Apr

Preuve

On a montre l'existence d'une fonction inverse en trouvant un point fixe de la fonction

$$\phi^y(x) = x - (Df(x_0))^{-1}(f(x) - y)$$

Il existe $r > 0$ tel que

- $\overline{B}(x_0) \subset E$
- $\|D\phi^y(x)\| \leq \frac{1}{2}$
- $\det(Df(x)) \neq 0 \forall x \in \overline{B}(x_0, r)$

On a montre que pour tout point $y \in \mathbb{R}^n$, ϕ^y est contractante sur $\overline{B}(x_0, r)$ et que $\phi^y(\overline{B}(x_0, r)) \subset B(x_0, r)$ pour un $y \in B(y_0, \tilde{r})$.

On a donc l'existence d'un unique point $x \in B(x_0, r) : x = \phi^y(x) \iff f(x) = y$, ou encore

$$\forall y \in B(y_0, r) =: V \exists ! x \in B(x_0, r) \cap f^{-1}(V) : f(x) = y$$

Or $B(x_0, r) \cap f^{-1}(V) =: U$ est un ouvert, et donc $f : U \rightarrow V$ est inversible et on peut donc définir une fonction inverse g .

Montrons maintenant que g est continue en montrant qu'elle est Lipschitz sur V . On veut montrer qu'il existe $L > 0$ tel que $\forall y_1, y_2 \in V$

$$\|g(y_1) - g(y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|$$

En notant $\|x_1 - x_2\|$ les preimages, on peut reecrire

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &= \|\phi^{y_1}(x_1) - \phi^{y_2}(x_2)\| \\ &\leq \|\phi^{y_1}(x_1) - \phi^{y_1}(x_2)\| + \|\phi^{y_1}(x_2) - \phi^{y_2}(x_2)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| + \|Df(x_0)^{-1}(y_2 - y_1)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| + \|Df(x_0)^{-1}\| \|y_2 - y_1\| \end{aligned}$$

Et donc on a

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2 \|Df(x_0)^{-1}\| \|y_1 - y_2\|$$

On montre que g est de classe C^1 (en utilisant le fait que f est de classe C^1).
 Soit $y, y_1 \in V$ et $x = g(y), x_1 = g(y_1)$.

On veut montrer que g est differentiable en y . On essaie d'ecrire un developpement limite de g en y .

On a

$$\underbrace{f(x_1)}_{y_1} = \underbrace{f(x)}_y + Df(x)(x_1 - x) + R_f(x_1)$$

$$\begin{aligned}
Df(x)(x_1 - x) &= y_1 - y - R_f(x_1) \\
x_1 - x &= Df(x)^{-1}(y_1 - y) - Df(x)^{-1}R_f(x_1) \\
g(y_1) - g(y) &= Df(x)^{-1}(y_1 - y) - \underbrace{Df(x)^{-1}R_f(x_1)}_{R_g(y_1)}
\end{aligned}$$

On veut montrer que $\lim_{y_1 \rightarrow y} \frac{R_g(y_1)}{\|y_1 - y\|} = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{y_1 \rightarrow y} \frac{R_g(y_1)}{\|y_1 - y\|} &\leq \lim_{y_1 \rightarrow y} \frac{\|Df(x)^{-1}\| \|R_f(x_1)\|}{\|y_1 - y\|} \\
&= \lim_{y_1 \rightarrow y} \|Df(x)^{-1}\| \frac{\|x_1 - x\|}{\|y_1 - y\|} \frac{\|R_f(x_1)\|}{\|x_1 - x\|} \\
&= \lim_{y_1 \rightarrow y} \|Df(x)^{-1}\| 2 \|Df(x_0)^{-1}\| \frac{\|R_f(x_1)\|}{\|x_1 - x\|}
\end{aligned}$$

Donc g est différentiable en $y \in V$ et

$$Dg(y) = Df(x)^{-1} \text{ ou } x = g(y) \quad \square$$

7.1 Fonctions Implicites et Hypersurfaces de \mathbb{R}^n

Considerons une fonction $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

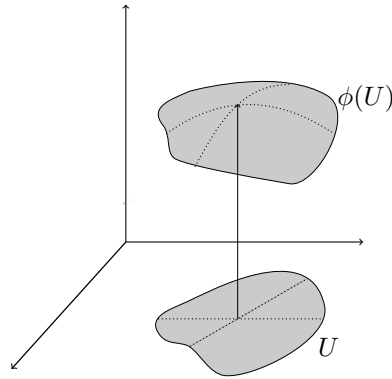


FIGURE 2 – hypersurfaces

En particulier si ϕ est différentiable en $x_0 \in U$, alors

$$\phi(x) = \underbrace{\phi(x_0) + D\phi(x_0)(x - x_0)}_{T_\phi^1(x) \text{ fonction affine en } x} + R_\phi(x)$$

Donc le graphe $G(T_{\phi, x_0}^1) = \{z \in \mathbb{R}^{n+1}, z = (x, y), x \in \mathbb{R}^n, y \in T_{\phi, x_0}^1\}$ se reecrit comme l'ensemble

$$\left\{ z \in \mathbb{R}^{n+1} : y - y_0 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi(x_0)}{\partial x_i} (x - x_0) = 0 \right\}$$

En definissant

$$v = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_0), \dots, 1 \right), z = (x_1, x_2, \dots, x_n, y)$$

On peut ecrire

$$G(T_{\phi, x_0}^1) = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : v \cdot (z - z_0) = 0\}$$

Ce graphe definit un hyperplan de \mathbb{R}^{n+1} appele l'hyperplan tangent au graphe de ϕ en $z_0 = (x_0, y_0)$ On essaie de resoudre le probleme inverse, ie. decire le plan d'une surface comme le plan d'une fonction.

Definition 39 (Hypersurfaces de classe C^k)

On dit que $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est une hypersurface de classe C^k autour de z_0 si elle est le graphe d'une fonction de classe C^k autour de z_0 , cad, qu'il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contenant z_0 , un indice $i \in \{1, \dots, n+1\}$, un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\Sigma \cap V = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i = \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})\}$$

En particulier, on considere des surfaces definies par

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = 0\}$$

On se demande quand est-ce que Σ est une hypersurface (au moins localement autour d'un point z_0).

Si Σ est une hypersurface autour d'un point $z_0 \in \Sigma$, il existe $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contenant z_0 et $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\Sigma \cap V = \{x : x_i = \phi(x_{n+1})\}$$

Alors on dit que la fonction ϕ est definie implicitement par la relation $f(x) = 0$.

Lecture 14: Fonctions Implicites

Mon 19 Apr

Definition 40 (Fonction Implicite)

Soit $f : E \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, avec E un ouvert non vide.

On definit $\Sigma = \{z \in \mathbb{R}^{n+1}, f(z) = 0\}$, et soit $z_0 = (z_{0,1}, \dots, z_{0,n+1}) \in \Sigma$.

On dit que f definit implicitement une fonction autour de z_0 si il existe un ouvert $V \subset E$ contenant z_0 , un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et un indice $i \in \{1, \dots, n+1\}$ et une fonction $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

—

$$z_{0,i} = \phi(z_{0,1}, \dots, z_{0,i-1}, z_{0,i+1}, \dots, z_{0,n+1})$$

$$\text{— } \forall x \in \Sigma \cap V, x_i = \phi(x_{ni})^1$$

$$\text{Alors le graphe } G(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i = \phi(x_{ni})\} = \Sigma \cap V$$

Questions

1. Quand est-ce que $f(x) = 0$ définit une fonction implicite ?
2. Si f définit une fonction implicite, que peut-on dire sur ϕ ?

Commençons par le deuxième point.

Supposons que f définit une fonction implicite $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons aussi que $f, \phi \in C^k$.

7.1.1 Cas $n = 2$

Soit $f = f(x, y)$ et soit

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$$

et $(x_0, y_0) \in \Sigma$

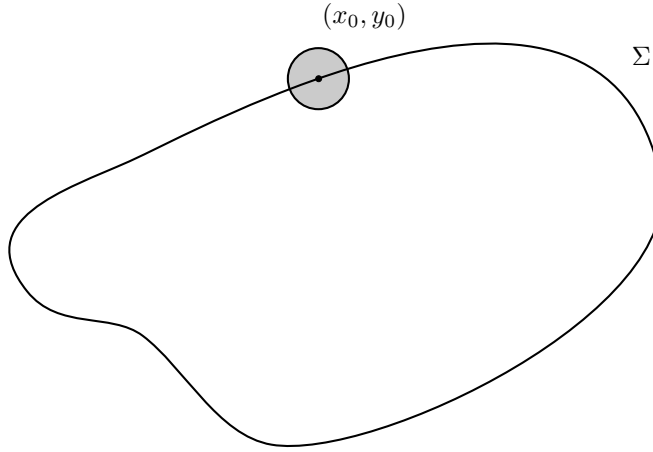


FIGURE 3 – voisinage

Supposons qu'il existe $\phi :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$G(\phi) = \Sigma \cap V$$

1. Avec la notation $z_{ni} = (z_{0,1}, \dots, z_{0,i-1}, z_{0,i+1}, \dots, z_{0,n+1})$

$$\forall x \in U : f(x, \phi(x)) = 0$$

$$y = \phi(x)$$

On note $\tilde{f}(x) = f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in U$, donc

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{f}' &= \frac{d}{dx}(f(x, \phi(x))) \\ &= \frac{df}{dx}(x, \phi(x)) + \frac{df}{dy}(x, \phi(x)) \cdot \phi'(x) \end{aligned}$$

En particulier, en $(x_0, y_0 = \phi(x_0))$, on peut ecrire que

$$\frac{df}{dy}(x_0, y_0) \phi'(x_0) = - \frac{df}{dx}(x_0, y_0)$$

Donc, si $\frac{df}{dy}(x_0, y_0) \neq 0$, alors

$$\phi'(x_0) := - \frac{\frac{df}{dx}(x_0, y_0)}{\frac{df}{dy}(x_0, y_0)}$$

De plus, pour tout x suffisamment proche de x_0

$$\phi'(x) := - \frac{\frac{df}{dx}(x, \phi(x))}{\frac{df}{dy}(x, \phi(x))}$$

par le theoreme de la valeur intermediaire (la derivee partielle selon y) ne s'annulera pas.

On peut iterer l'argument, et donc, si f, ϕ sont de classe C^2 , on peut ecrire

$$0 = \tilde{f}''(x) = \frac{d}{dx}(\tilde{f}'(x))$$

Apres developpement, on remarque que, si $\frac{df}{dy}(x_0, y_0) \neq 0$, on peut encore calculer la derivee seconde de f :

$$\phi''(x) = - \frac{1}{\frac{df}{dy}(x, \phi(x))} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \phi(x)) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, \phi(x)) \phi'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, \phi(x)) (\phi'(x))^2 \right)$$

Donc, meme sans connaitre ϕ explicitement, on peut construire un developpement limite de ϕ .

Graphiquement

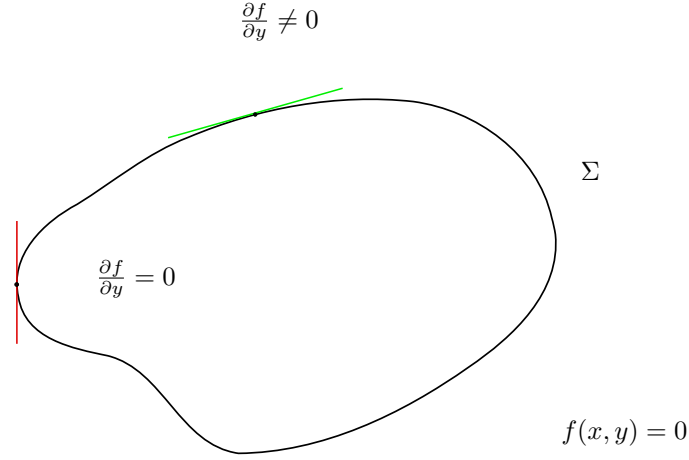


FIGURE 4 – courbe implicite

Theorème 43 (Fonction implicite en dimension 2)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, E ouvert non vide, de classe C^1 , $\Sigma = \{(x, y) \in E : f(x, y) = 0\}$ et $(x_0, y_0) \in \Sigma$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Alors il existe un $\delta > 0$, un ouvert $V \subset E$ contenant (x_0, y_0) et une unique fonction $\phi : U =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}$ tel que

- $y_0 = \phi(x_0)$
- $f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in U$
- $G(\phi) = \Sigma \cap V$

On peut facilement generaliser ce theoreme,

7.1.2 Cas $n > 1$

soit $f : E \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction implicite definie par f (aussi de classe C^1) autour du point $z_0 = (x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, cad $f = f(x, y)$

$$f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in U$$

Soit $f(x) = f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in U$, on a alors

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \phi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)$$

Donc, si $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \neq 0$, alors pour x suffisamment proche de x_0 , on peut ecrire

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}$$

Theorème 44

Soit $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ouvert non vide,

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $\Sigma = \{z \in E, f(z) = 0\}$ et $z = (x_0, y_0)$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, Alors il existe $\delta > 0$, un ouvert $V \subset E$ contenant z_0 et une unique fonction $\phi : U = B(x_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$ tel que

- $y_0 = \phi(x_0)$
- $\forall x \in U, f(x, \phi(x)) = 0$
- $G(\phi) = \Sigma \cap V$

De plus, si f est de classe C^k , alors ϕ est de classe C^k

Exemple

Soit $f(x, y) = x^2 - y$, $\Sigma = \{(x, y) : x^2 - y = 0\}$, alors

$$y = x^2 = \phi(x)$$

f définit une fonction implicite $y = x^2 \forall x \in \mathbb{R}$.

On peut essayer d'écrire $x = \phi(y)$

$$x^2 = y \implies x = \pm\sqrt{y}$$

Notons que, dans un voisinage de 0, on ne peut pas écrire Σ comme une fonction de y .

Exemple

Posons maintenant $f(x, y) = xe^y + ye^x$ et $\Sigma = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$.

Notons que $(x, y) = (0, 0)$, et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$$

On peut donc expliciter y en fonction de x , $y = \phi(x)$ et on a que

$$\phi'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)} = -1$$

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Sigma = \{z \in E, f(z) = 0\}$, $z_0 \in \Sigma$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \neq 0$.

Alors on sait qu'il existe une fonction implicite $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : G(\phi) = \Sigma \cap V$

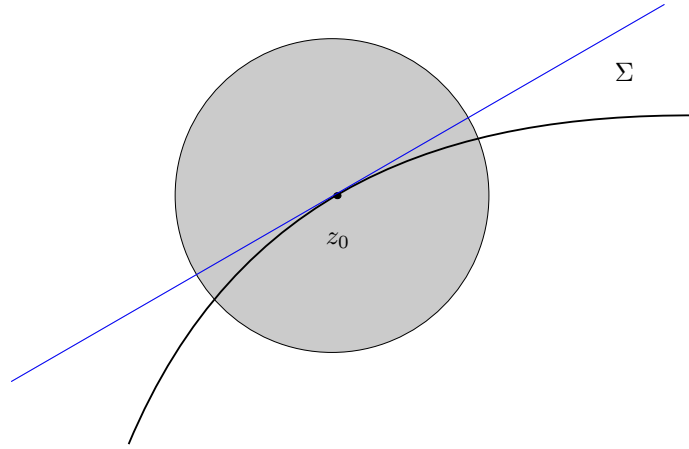


FIGURE 5 – voisinage de z_0

Alors, on peut construire l'hyperplan tangent au graphe $G(\phi)$ en z_0 qui est aussi l'hyperplan tangent à Σ en z_0 .

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\phi, z_0} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = \phi(x_0) + D\phi(x_0)(x - x_0)\} \\
 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = y_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{0i}) \right\} \\
 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = y_0 + \sum_{i=1}^n -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}(x_i - x_{0i}) \right\} \\
 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0)(x_i - x_{0i}) = 0 \right\} \\
 &= \left\{ z \in \mathbb{R}^{n+1} : \frac{\partial f}{\partial z_i}(z_0)(z_i - z_{0i}) = 0 \right\} \\
 &= \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \nabla f(z_0) \cdot (z - z_0) = 0\}
 \end{aligned}$$

Donc l'hyperplan tangent à Σ en z_0 est l'ensemble des point $z \in \mathbb{R}^{n+1} : z - z_0 \perp \nabla f$.

Si ∇f est nul, on ne peut pas définir l'hyperplan tangent, et donc on appelle ces points les points critiques de f .

Lecture 15: fonctions implicites-cas vectoriel

Wed 21 Apr

7.2 Cas Vectoriel

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, avec

$$f(z) = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix}$$

et soit $\Sigma = \{z \in E : f(z) = 0\}$, on peut reecrire ceci comme

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{z \in E : f_i(z) = 0\} \\ &= \bigcap_{i=1}^m \Sigma_i \end{aligned}$$

ou $\Sigma_i = \{z \in E : f_i(z) = 0\}$.

Exemple

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, defini par

$$f(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} f_1(z_1, z_2, z_3) \\ f_2(z_1, z_2, z_3) \end{pmatrix}$$

Alors

$$\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{(z_1, z_2, z_3) \in E : f_1(z_1, z_2, z_3) = 0\} \cap \{(z_1, z_2, z_3) \in E : f_2(z_1, z_2, z_3) = 0\}$$

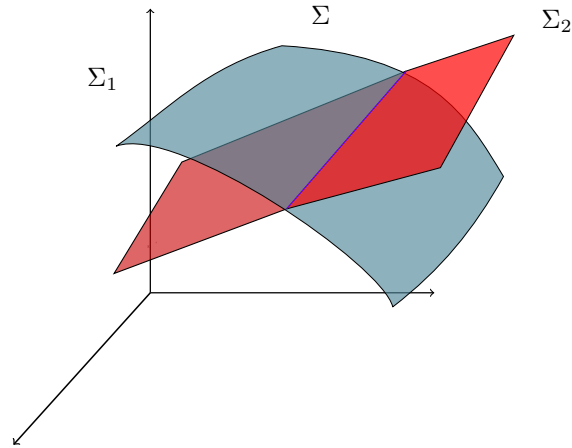


FIGURE 6 – surfaces intersection

*Peut on représenter Σ comme le graphe d'une fonction de n variables ?
Pour $z = (x, y), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$, on veut écrire*

$$y = \phi(x) : G(\phi) = \Sigma \cap V$$

On étudie d'abord le cas d'une fonction affine, soit

$$f_a : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

une fonction affine, on peut donc écrire

$$f_a(z) = Az + b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n+m}, b \in \mathbb{R}^m$$

$$Az + b = [A_1 | A_2] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_1 x + A_2 y + b$$

On considère maintenant

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{z \in \mathbb{R}^{n+m} : f_a(z) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : A_1 x + A_2 y + b = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : A_2 y = -(b + A_1 x)\} \end{aligned}$$

Si A_2 est inversible, on peut écrire y comme fonction unique de x

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : y = -(A_2)^{-1}(b + A_1 x)\}$$

Dans le cas général, pour $f : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 .

$$\Sigma = \{z \in E : f(z) = 0\},$$

On écrit

$$\begin{aligned} f(z) &= \underbrace{f(z_0) + Df(z_0) \cdot (z - z_0)}_{:= f_a(z)} + R_f(z) \\ &= f(z_0) + [D_x f(z_0) | D_y f(z_0)] \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + R_f(z) \end{aligned}$$

La matrice $D_x f(z_0)$ est de taille $m \times n$ et $D_y f(z_0)$ est de taille $m \times m$, on peut donc écrire

$$f(z) \approx f_a(z) = f(z_0) + D_x f(z_0)(x - x_0) + D_y f(z_0)(y - y_0)$$

En posant $f_a(z) = 0$, on s'attend à ce que $f(z) = 0$ définit une fonction implicite $y = \phi(x)$ si $\det(D_y f(z_0)) \neq 0$

Théorème 48 (Fonctions Implicites - Cas vectoriel)

Soit $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ouvert non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 , $\Sigma = \{z \in E : f(z) = 0\}$, $z_0 \in \Sigma$.

Si $\det(D_y f(z_0)) \neq 0$, alors il existe un ouvert $V \subset E$ contenant z_0 , un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, et une fonction $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tel que

- $\phi(x_0) = y_0$
- $\forall x \in U, (x, \phi(x)) \in V, f(x, \phi(x)) = 0$
- $G(\phi) = \Sigma \cap V$

— $\det(D_y f(x, \phi(x))) \neq 0 \forall x \in U$

$$D\phi(x) = -D_y f(x, \phi(x))^{-1} D_x f(x, \phi(x))$$

— Si f est de classe C^k , alors ϕ est aussi de classe C^k .

Preuve

On construit la fonction $F : E \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, avec

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

On veut montrer que f est un difféomorphisme local autour de $z_0 = (x_0, y_0)$:

$$DF(x_0, y_0) = D \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_x f(z_0) & D_y f(z_0) \end{pmatrix}$$

On a

$$\det DF(z_0) = \det D_y f(z_0) \neq 0$$

par hypothèse.

Donc F est un difféomorphisme local.

Il existe donc $V' \subset E$ contenant $z_0 = (x_0, y_0)$ et un ouvert $U' \subset \mathbb{R}^{n+m}$ contenant $(x_0, 0)$ tel que $F : V' \rightarrow U'$ est un difféomorphisme

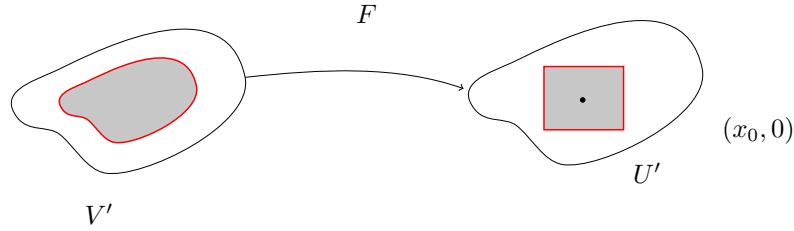


FIGURE 7 – V' vers U'

Il existe $\delta, \tilde{\delta} > 0$ tel que $\hat{U} = \{(x, y) : x \in B(x_0, \delta), y \in B(0, \tilde{\delta})\} \subset U'$.

Soit $V = F^{-1}(\hat{U})$ et on considère la restriction $f : V \rightarrow \hat{U}$, d'inverse $G : \hat{U} \rightarrow V$

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

On peut donc reecrire ceci comme

$$\begin{cases} x = u \\ y = \psi(u, w) = \psi(x, w) \end{cases}$$

L'existence de $\psi : \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est donnee par hypothese. Donc la fonction implicite cherchee est $\phi(x) := \psi(x, 0)$. ϕ est definie sur le voisinage de x :

$$\phi : U = B(x_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

En effet, on veut verifier que $f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in U$, donc

$$(x, 0) = F \circ G(x, 0) = F(G(x, 0)) = F(x, \psi(x, 0)) = (x, f(x, \phi(x)))$$

Et donc $f(x, \phi(x)) = 0 \forall x \in U$.

On verifie encore que $\Sigma \cap V \subset G(\phi)$.

En effet

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \Sigma \cap V \\ (x, y) &= (G \circ F)(x, y) = G(F(x, y)) \\ &= G(x, f(x, y)) = G(x, 0) = (x, \psi(x, 0)) = (x, \phi(x)) \end{aligned}$$

Donc $(x, y) \in G(\phi)$.

ϕ est de classe C^1 par la composition de fonctions de classe C^1 .

Puisque F est un diffeomorphisme sur V , il s'ensuit que $\det DF(x, y) \neq 0 \forall (x, y) \in V$, donc en particulier, on a que

$$\det D_y f(x, \phi(x)) \neq 0 \forall x \in U$$

On pose

$$\tilde{f}(x) = f(x, \phi(x)) = 0$$

Etant donne que

$$\begin{aligned} f(x, \phi(x)) &= 0 \forall x \in U, \text{ avec } f, \phi \in C^1 \\ 0 &= Df(x, \phi(x)) \\ 0 &= D_x f(x, \phi(x)) + D_y f(x, \phi(x)) D\phi(x) \end{aligned} \quad \square$$

On en deduit l'egalite

Lecture 16: Extremas de fonctions

Mon 26 Apr

8 Extremas de fonctions

Definition 41 (Extremum d'une fonction)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $x^* \in E$.

On dit que f admet au point x^* un maximum global (ou absolu) si $\forall x \in$

$$E, f(x) \leq f(x^*)$$

On dit que le maximum global est strict si $\forall x \in E, f(x) < f(x^*)$.

Le maximum est local si $\exists \delta > 0 : \forall x \in B(x^*, \delta) \cap E, f(x) \leq f(x^*)$.

Le maximum local est strict si $\exists \delta > 0 \forall x \in B(x^*, \delta) \cap E \setminus \{x^*\}, f(x) < f(x^*)$.

Les définitions sont les memes pour un minimum.

Par extremum local/global on etend un minimum ou un maximum de la fonction.

8.1 Extremas libres

Si l'ensemble E est ouvert

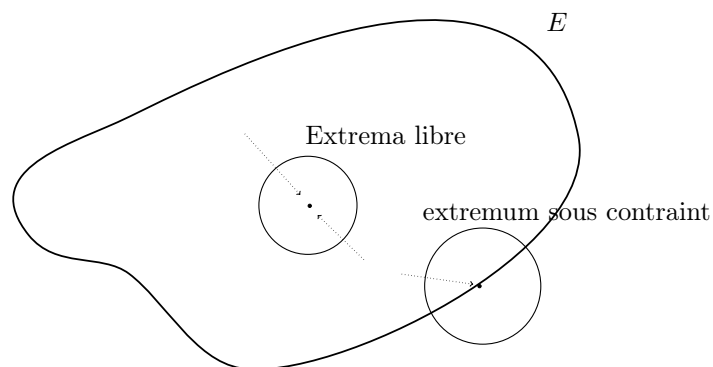


FIGURE 8 – extremum libre et extremum sous contraint

Soit x^* un point d'extremum pour f . On dit que x^* est libre si $x^* \in \overset{\circ}{E}$ et x^* est sous-contraint si $x^* \in \partial E$.

Rappel cas $n = 1$

Soit $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I ouvert

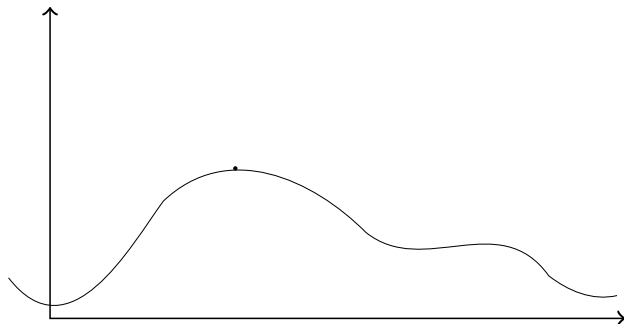


FIGURE 9 – fonction avec extremas

- Si f est derivable en x^* et x^* est un point d'extremum local de f , alors $f'(x^*) = 0$. (condition necessaire du premier ordre) .
- Si f est deux fois derivable qen x^* et x^* est minimum local de f , alors $f'(x^*) = 0, f''(x^*) \geq 0$ (condition necessaire du second ordre)
- Si f est deux fois differentiable sur I , $x^* \in I$ tel que $f'(x^*) = 0$ et $f''(x^*) > 0$, alors x^* est un point minimum local de f (condition suffisante du second ordre).
- Cas difficile a traiter : $f'(x^*) = 0, f''(x^*) = 0$.
On peut soit regarder les derivees d'ordre superieur ou bien etudier le signe de $g(x) = f(x) - f(x^*)$.

8.1.1 Cas $n > 1$

Soit $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, E un ouvert non vide.

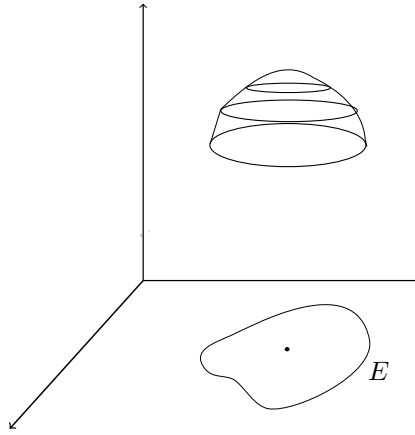


FIGURE 10 – fonctions deux variables extremas

Soit $v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$. Soit x^* un point de maximum local de f , i.e.

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in B(x^*, \delta) \cap E, f(x) \leq f(x^*)$$

On peut considerer

$$g_v(t) = f(x^* + tv), \quad t \in]-\delta, \delta[$$

Si f admet un maximum local en x^* , alors $g_v(t)$ admet un maximum local en $t = 0$.

Si f est differentiable en x^* , alors g_v est derivable en $t = 0$, donc $g'_v(0) = 0$.

Mais $g'_v(0) = D_v f(x^*) = \nabla f(x^*) \cdot v = 0 \forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$.

Donc $\nabla f(x^*) = 0$

Donc la condition necessaire du premier ordre est $\nabla f(x^*) = 0$.

Definition 42

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, E ouvert, differentiable en $x^* \in E$. On dit que x^* est un point stationnaire si $\nabla f(x^*) = 0$.

De plus, si f est deux fois differentiable en x^* , alors g_v est aussi deux fois fois differentiable en $t = 0$, donc $g''_v(0) \leq 0$.

Mais $g''_v(0) = D_{vv} f(x^*) = v^T H_f(x^*) v \leq 0 \forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$ Donc la condition necessaire du second ordre est donc que $v^T H_f(x^*) v \leq 0 \forall v \in \mathbb{R}^n$ (pour que $f(x^*)$ soit un maximum local) .

Theoreme 49 (Condition suffisant du second ordre)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ admettant un extremum local en $x^* \in E$.

Si f est (une fois) differentiable en x^* , alors $\nabla f(x^*) = 0$.

Si f est deux fois différentiable en x^ et*

- x^* est un point de maximum local, alors $v^T H_f(x^*) v \leq 0 \forall v \in \mathbb{R}^n$.*
- Si x^* est un point de minimum local alors $v^T H_f(x^*) v \geq 0 \forall v \in \mathbb{R}^n$.*

Definition 43 (Matrices définies positives)

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, on dit que

- A est définie positive si $x^T A x > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*
- A est semi-définie positive si $x^T A x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$*
- memes définitions pour A (semi-) négative*
- A est indéfinie si $\exists x, y : x^T A x > 0, y^T A y \leq 0$*

A toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, on peut associer une forme quadratique $Q_A(x) = x^T A x$, $x \in \mathbb{R}^n$

Lemme 50

Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est définie positive si et seulement si $\exists c > 0$: $x^T A x \geq c \|x\| \forall x \in \mathbb{R}^n$

Lemme 51

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A est définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres sont positives.

De plus c du lemme précédent est la valeur propre minimale.

Theorème 52 (Condition suffisante d'extremas)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur E , $x^ \in E$ un point stationnaire de f . (cad $\nabla f(x^*) = 0$). Si $H_f(x^*)$ est définie positive, alors x^* est un minimum local de f .*

Si $H_f(x^)$ est définie négative, alors $f(x^*)$ est un maximum local de f .*

Preuve

Puisque $f \in C^2(E)$, on peut écrire un développement limité de f .

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f(x^*) \cdot (x - x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T H_f(x^*)(x - x^*) + R_f(x) \forall x \in E.$$

Alors, il existe $\delta > 0$ tel que $\frac{\|R_f(x)\|}{\|x - x^\|} \leq \frac{c}{4} \forall x \in B(x, \delta) \cap E, x \neq x^*$.*

$$\text{Donc } f(x) \geq f(x^*) + \frac{1}{2}c \|x - x^*\|^2 - \frac{c}{4} \|x - x^*\|^2$$

$$= f(x^*) + \frac{c}{4} \|x - x^*\|^2$$

□

Donc x^ est un minimum local strict de f .*

Lecture 17: Extremas lies

Wed 28 Apr

8.2 Extremas lies

Exemple

Parmi tous les cylindres d'un volume donne \bar{V} , on cherche celui qui a une surface minimale. On a $S(R, H) = 2\pi RH + 2\pi R^2$ et $V(R, H) = \pi R^2 H$, on cherche

$$\min_{R>0, H>0} S(R, H)$$

sous la contrainte $V(R, H) = \bar{V}$

Formulation du probleme

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, E ouvert non vide, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .
 $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , on cherche

$$\min_{x \in E} f(x) \text{ sous la contrainte } g(x) = 0$$

De facon equivalent, si on pose $\Sigma_g = \{x \in E : g(x) = 0\}$,

$$\min_{x \in \Sigma_g} f(x)$$

Exemple

On cherche

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} x^2 + y^2$$

tel que $x + y - 1 = 0$.

Les courbes de niveau de f sont $f(x, y) = c \iff x^2 + y^2 = c$, sous la contrainte
 $g(x, y) = 0 \iff y = 1 - x$.

Si (x^*, y^*) est le point de minimum sous-contrainte, alors on a

$$\nabla f(x^*, y^*) \parallel \nabla g(x^*, y^*)$$

Donc $\nabla g(x^*, y^*)$ est un vecteur orthogonal a Σ_g en (x^*, y^*) (vecteur orthogonal a l'hyperplan tangent a Σ_g en (x^*, y^*)).

$\nabla f(x^*, y^*)$ est un vecteur normal a la courbe de niveau $f(x, y) = f(x^*, y^*)$.

Cette affirmation est equivalent a

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*)$$

Theorème 55 (Condition necessaire pour extremas lies)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide ($n \geq 2$), $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $z^* \in \Sigma_g$

un point d'extremum local lie. Si $\nabla g(z^*) \neq 0$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(z^*) = \lambda \nabla g(z^*).$$

Preuve

Puisque le gradient $\nabla g(z^*) \neq 0$, on peut utiliser le theoreme des fonctions implicites.

$$\nabla g(z^*) \neq 0 \Rightarrow \exists i \in [n] : \frac{\partial g}{\partial z_i}(z^*) \neq 0$$

Supposons $i = n$, on note $y = z_n$, $x = (z_1, \dots, z_{n-1})$.

Grace au theoreme des fonctions implicites, on sait qu'il existe un ouvert $V \subset E$ contenant z^* , un $\delta > 0$ et $\phi : B(x^*, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

- $\phi(x^*) = y^*$
- $\forall x \in B(x^*, \delta), (x, \phi(x)) \in V$, et $g(x, \phi(x)) = 0$.
- $G(\phi) = \Sigma_g \cap V$

On a

$$g(x, y) = 0 \iff y = \phi(x) \forall x \in B(x^*, \delta)$$

On definit $\tilde{f}(x) = f(x, \phi(x))$.

Si z^* est un point d'extremum local lie de f sur Σ_g , alors x^* est un point d'extremum libre de \tilde{f} sur $B(x^*, \delta)$.

Donc, $\nabla_x \tilde{f}(x^*) = 0$, donc

$$\iff 0 = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x^*) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x^*)$$

Mais

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x^*) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^*, y^*)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)}$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(z^*) - \frac{\partial f}{\partial g}(z^*) \frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}}{\frac{\partial g}{\partial y}}(z^*) = 0$$

On pose

$$\lambda = \frac{\partial_y f}{\partial_y g}(z^*) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(z^*) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(z^*)$$

Donc toutes les composantes sont proportionnelles et on a

$$\nabla f(z^*) = \lambda \nabla g(z^*)$$

Remarque

Si z^* est un extremum local lie de f sur Σ_g et $\nabla g(z^*) \neq 0$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \nabla f(z^*) = \lambda \nabla g(z^*) \\ g(z^*) = 0 \end{cases}$$

Ensemble, ceci forme un système de $n + 1$ équations.
 λ est appelé multiplicateur de Lagrange

On définit la fonction de Lagrange (ou le lagrangien)

$$\mathcal{L} : E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathcal{L}(z, \lambda) = f(z) - \lambda g(z)$$

On a que

$$\nabla_{(z, \lambda)} \mathcal{L}(z, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla_z \mathcal{L} \\ \dots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \quad \square$$

Donc, si z^* est un extremum local de f sur Σ_g , alors il existe $\lambda^* \in \mathbb{R} :$
 $\nabla \mathcal{L}(z^*, \lambda^*) = 0$.

Lecture 18: Extremas sous contraintes multiples

Mon 03 May

8.3 Extremas sous contraintes multiples

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, et

$$f, g_1, \dots, g_m : E \rightarrow \mathbb{R}$$

On impose $m < n$, pour que le problème ne soit pas surdéterminé.
 On cherche donc

$$\min_{z \in E} f(z) \text{ sous les contraintes } g_i(z) = 0 \forall 1 \leq i \leq m$$

Soit $g = (g_1, \dots, g_m) : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, et on définit l'ensemble faisable

$$\Sigma_g = \{z \in E : g(z) = 0\}$$

On cherche donc

$$\min_{z \in \Sigma_g} f(z)$$

Théorème 57 (Conditions nécessaires d'optimalité)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide, $f, g_1, \dots, g_m : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $z^* \in \Sigma_g$.

Si $\text{Rang}(Dg(z^*)) = m$ (c.à.d. les vecteurs $\nabla g_1(z^*), \dots, \nabla g_m(z^*)$ sont linéairement indépendants) .

Alors il existe $\vec{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ tel que

$$\nabla f(z^*) = \sum_i \lambda_i^* \nabla g_i(z^*)$$

Donc, (z^*, λ^*) satisfait le systeme

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z_1}(z^*) = \lambda_1^* \frac{\partial g_1}{\partial z_1} + \lambda_2^* \frac{\partial g_2}{\partial z_1}(z^*) + \dots \\ \frac{\partial f}{\partial z_2}(z^*) = \lambda_1^* \frac{\partial g_1}{\partial z_2} + \lambda_2^* \frac{\partial g_2}{\partial z_2}(z^*) + \dots \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial z_n}(z^*) = \lambda_1^* \frac{\partial g_1}{\partial z_n} + \lambda_2^* \frac{\partial g_2}{\partial z_n}(z^*) + \dots \\ g_1(z^*) = 0 \\ \vdots \\ g_m(z^*) = 0 \end{cases}$$

Il y a donc $n + m$ equations avec $n + m$ inconnues.

On peut definir un probleme equivalent, en passant par la fonction lagrangienne, notamment (z^*, λ^*) est un point stationnaire de la fonction de Lagrange :

$$\mathcal{L} : E \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

definie par

$$\mathcal{L}(z, \lambda) = f(z) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(z) = f(z) - \lambda \cdot g(z)$$

8.4 Condition suffisante pour extremas locaux lies

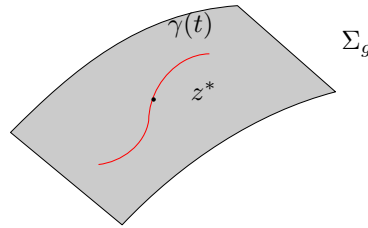


FIGURE 11 – extrema local lie

Soit $\gamma(t)$ un chemin sur Σ_g , $\gamma(0) = z^*$, et

$$\tilde{f}(t) = f \circ \gamma(t) = f(\gamma(t))$$

si $\tilde{f}''(0) > 0$ pour tout chemin alors z^* est un point de minimum local de f sur Σ_g .

On considere

$$w^T(H_f(z^*))w = D_{ww}f(z^*)\forall w \in T_z(\Sigma_g) = \{v \in \mathbb{R}^n : Dg(z^*) \cdot v = 0\}$$

Si on cherche un minimum on s'attend a ce que

$$D_{ww}f(z^*) > 0$$

Sauf qu'il faut corriger le fait que le chemin puisse etre courbe, donc la condition devient :

Soit $z^* \in \Sigma_g$ qui satisfait la condition necessaire, si

$$w^T(H_f(z^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* H_{g_i}(z^*))w > 0$$

Alors z^* est un point de minimum local de f sur Σ_g (lieu aux contraintes $g_i = 0 \forall 1 \leq i \leq n$).

9 Integrales multiples au sens de Riemann

But : Etant donne

- Un sousensemble borne $E \subset \mathbb{R}^n$ et
- une fonction bornee $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

Comme definir

$$\int_E f(x)dx$$

On va d'abord definir l'integrale sur un pave de \mathbb{R}^n , cad un sous-ensemble de \mathbb{R}^n de la forme

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

ou on suppose $a_i \leq b_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$

Le volume de R est defini comme

$$Vol(R) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

On dit que R est un pave degenerate s'il existe $k \in [n]$ tel que $a_k = b_k$.

Dans ce cas, on aura $Vol(R) = 0$.

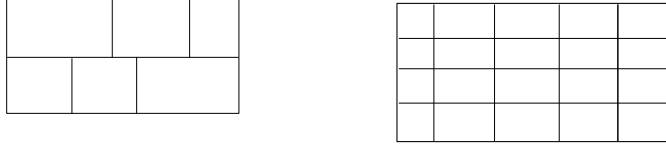


FIGURE 12 – exemple de partition

Definition 44 (Partition)

On appelle partition d'un pave $R \subset \mathbb{R}^n$ une collection finie P de paves tel que

- $\bigcup_{Q \in P} Q = R$
- $\forall Q, Q' \in P, Q \neq Q', \overset{\circ}{Q} \cap \overset{\circ}{Q'} = \emptyset$

Definition 45 (Partition tensorielle)

Une partition P d'un pave R est dite tensorielle s'il existe pour tout $1 \leq j \leq n$.

$$a_j = t_j^0 \leq t_j^1 \leq \dots, t_j^{N_j} = b_j$$

tel que

$$P = \{[t_1^{\alpha_1}, t_1^{\alpha_1+1}] \times [t_1^{\alpha_2}, t_1^{\alpha_2+1}] \times \dots \times [t_1^{\alpha_n}, t_1^{\alpha_n+1}]\} \quad 1 \leq \alpha_i \leq N_i$$

On note alors

$$P = (t_1^0, \dots, t_1^{N_1}) \otimes (t_2^0, \dots, t_2^{N_2}) \otimes \dots \otimes (t_n^0, \dots, t_n^{N_n})$$

Definition 46 (Raffinement d'une partition)

Le raffinement d'une partition P d'un pave R .

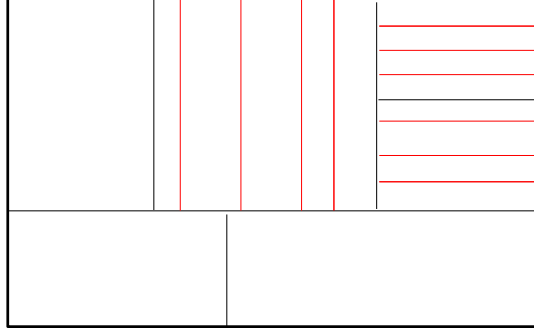


FIGURE 13 – raffinement d'une partition

Soit P et P' deux partitions d'un pave R

On dit que P' est un raffinement de P si pour tout $Q \in P$, la collection

$$P'_Q = \{Q' \in P' : Q' \subset Q\}$$

est une partition du pave Q .

Remarque

Soit P' un raffinement de P .

Si $Q' \in P'$ n'est inclus dans aucun $Q \in P$, alors $\text{vol}(R) = 0$

Remarque

P' est un raffinement de P si et seulement si

$$\forall Q' \in P' \text{ non degeneré } \exists Q \in P : Q' \subset Q$$

Remarque

Si P' est un raffinement tensoriel de P , alors pour tout $Q \in P$, la collection

$$P'_Q = \{Q' \in P' : Q' \subset Q\}$$

est un raffinement tensoriel de Q .

Lemme 61

Soit P, P' deux partitions d'un pave $R \subset \mathbb{R}^n$, alors il existe toujours un raffinement tensoriel P'' de P et P'

Preuve

Pour $P = \{[a_1^{i_1}, b_1^{i_1}] \times \dots, i = 1, \dots, k\}$ et

$$P' = \{[c_1^j, d_1^j] \times \dots, j = 1, \dots, k'\}$$

Prenons l'ensemble

$$\begin{aligned} & \left\{ a_l^1, b_l^1, \dots, a_l^k, b_l^k, c_l^1, d_l^1, \dots, c_l^{k'}, d_l^{k'} \right\} \\ &= \left\{ t_l^0, t_l^1, \dots, t_l^{k+k'} \right\} \text{ tel que } t_l^0 \leq t_l^1 \leq \dots \leq t_l^{k+k'} \end{aligned}$$

Alors

$$P'' = (t_1^0, \dots, t_2^{k+k'}) \otimes (t_2^0, \dots, t_2^{k+k'}) \otimes \dots$$

est une partition tensorielle qui raffine à la fois P et P'

□

Lemme 62

Soit P une partition d'un pavé $R \subset \mathbb{R}^n$.

Alors

$$\text{vol}(R) = \sum_{Q \in P} \text{vol}(Q).$$

Lecture 19: integrales multiples

Wed 05 May

Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pavé ($R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$) et

$$f : R \rightarrow \mathbb{R}$$

borne.

Definition 47 (Somme de Darboux)

Soit P une partition du pavé R , alors on définit les sommes inférieures $\underline{S}(f, P) = \sum_{Q \in P} \inf_{x \in Q} f(x) \text{Vol}(Q)$.

On peut définir les sommes supérieures $\bar{S}(f, P) = \sum_{Q \in P} \sup_{x \in Q} f(x) \text{Vol}(Q)$

Lemme 63

Soit P une partition de R et P'' un raffinement de P , alors

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, P'') \leq \bar{S}(f, P'') \leq \bar{S}(f, P)$$

Pour toute partition P, P' de R on a toujours

$$\underline{S}(f, P) \leq \bar{S}(f, P')$$

Preuve

Puisque P'' est un raffinement de P ,

$$\forall Q \in P \quad Q = \bigcup_{\substack{Q'' \in P'' \\ Q'' \subset Q}} Q'' \quad \text{Vol}(Q) = \sum_{\substack{Q'' \in P'' \\ Q'' \subset Q}} \text{Vol}(Q'')$$

On a

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f, P) &= \sum_{Q \in P} \inf_{x \in Q} f(x) \text{Vol}(Q) \\
&= \sum_{Q \in P} \inf_{x \in Q} f(x) \sum_{\substack{Q'' \in P'' \\ Q'' \subset Q}} \text{Vol}(Q'') \\
&\leq \sum_{Q \in P} \sum_{\substack{Q'' \in P'' \\ Q'' \subset Q}} \inf_{x \in Q''} f(x) \text{Vol}(Q'') \\
&= \sum_{Q'' \in P''} \inf_{x \in Q''} f(x) \text{Vol}(Q'') = \underline{S}(f, P'')
\end{aligned}$$

L'inégalité intermédiaire est évidente, et la troisième se démontre de la même manière.

Il suffit de remarquer que tout couple P, P' de partitions de R admet un raffinement commun, nommons le P'' , alors on a

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, P'') \leq \overline{S}(f, P'') \leq \overline{S}(f, P') \quad \square$$

Definition 48 (Fonction intégrable au sens de Riemann)

Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pavé et $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ bornée. On appelle intégrale de Riemann inférieure $\int_R f(x) dx = \sup \{ \underline{S}(f, P) : P \text{ partition de } R \}$.

On définit de manière analogue l'intégrale de Riemann supérieure

$$\overline{\int}_R f(x) dx = \inf \{ \overline{S}(f, P) : P \text{ partition de } R \}$$

Une fonction f est dite intégrable au sens de Riemann si

$$\overline{\int}_R f(x) dx = \int_{\underline{R}} f(x) dx$$

dans ce cas, on note

$$\int_R f(x) dx$$

On note $\mathcal{R}(R)$ l'ensemble des fonctions $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ bornées et Riemann intégrables..

Remarque

Pour toute fonction $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ bornée,

$$\int_{\underline{R}} f(x) dx \text{ et } \overline{\int}_R f(x) dx$$

sont bien définies.

En effet, $\forall P, P'$ des partitions de R , on a

$$-\infty < \underline{S}(f, P) \leq \int_{\underline{R}} f(x) dx \leq \overline{\int}_R f(x) dx \leq \overline{S}(f, P') < +\infty$$

9.1 Caractérisation équivalente de fonctions intégrables

Lemme 65

Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ et $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ bornée.

f est Riemann-intégrable si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, il existe une partition P_ϵ

$$\overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) < \epsilon$$

Preuve

f intégrable implique qu'il existe une partition P_ϵ tel que ...

$$\int_R f(x) = \int_{\underline{R}} f(x) dx = \sup_{P \text{ partition de } R} \underline{S}(f, P)$$

Alors

$$\exists P'_\epsilon : \underline{S}(f, P'_\epsilon) \geq \int_{\underline{R}} f(x) dx - \frac{\epsilon}{2} = \int_R f(x) dx - \frac{\epsilon}{2}$$

et

$$\int_R f(x) dx = \overline{\int_R f(x) dx} = \inf_{P \text{ partition de } R} \overline{S}(f, P)$$

et donc

$$\exists P''_\epsilon : \overline{S}(f, P''_\epsilon) \leq \int_R f(x) dx + \frac{\epsilon}{2}$$

Soit maintenant P_ϵ un raffinement commun de P'_ϵ et P''_ϵ , alors

$$\overline{S}(f, P_\epsilon) \leq \overline{S}(f, P''_\epsilon) \leq \int_R f(x) dx + \frac{\epsilon}{2}$$

et

$$\underline{S}(f, P_\epsilon) \geq \underline{S}(f, P'_\epsilon) \geq \int_R f(x) dx - \frac{\epsilon}{2}$$

On montre la direction inverse

$$\begin{aligned} \overline{\int_R f(x) dx} &\leq \overline{S}(f, P_\epsilon) \\ \underline{\int_R f(x) dx} &\geq \underline{S}(f, P_\epsilon) \\ \overline{\int_R f(x) dx} - \underline{\int_R f(x) dx} &\leq \overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) \leq \epsilon \end{aligned}$$

Puise que ϵ est arbitraire, on a que $\overline{\int_R f(x) dx} = \underline{\int_R f(x) dx}$ donc f est Riemann intégrable. \square

Theorème 66

Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pavé et $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors f est Riemann-intégrable.

Preuve

R est compact, donc f est uniformément continue

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall x, y \in R, \|x - y\| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

On peut toujours construire une partition P de R tel que

$$\forall Q \in P, \forall x, y \in Q : \|x - y\| < \delta_\epsilon$$

On pose P une partition tensorielle $\forall Q$ a des cotes de longueur h , alors

$$\forall x, y \in Q : \|x - y\| = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} \leq h\sqrt{n} < \delta_\epsilon$$

Il suffit donc de prendre $h < \frac{\delta_\epsilon}{\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) &= \sum_{Q \in P} (\sup_{x \in Q} f(x) - \inf_{x \in Q} f(x)) \text{Vol}(Q) = \sum_{Q \in P} (\max_{x \in Q} f(x) - \min_{x \in Q} f(x)) \text{Vol}(Q) \\ &= \sum_{Q \in P} (f(\overline{x}_Q) - f(\underline{x}_Q)) \text{Vol}(Q) \\ &< \sum_{Q \in P} \epsilon \text{Vol}(Q) = \epsilon \text{Vol}(Q) \end{aligned}$$

Donc $\forall \epsilon > 0$, on a trouve une partition P_ϵ tel que

$$\overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) < \epsilon \quad \square$$

Donc f est Riemann-intégrable.

Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pave et $\hat{R} \subset \mathbb{R}^n$ un autre pave tel que $R \subset \overset{\circ}{\hat{R}}$.

Soit $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et considérons le prolongement par 0 de f sur \hat{R} : $\hat{f} : \hat{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors, f est Riemann intégrable sur R si et seulement si \hat{f} est Riemann-intégrable sur \hat{R} .

9.2 Formule d'intégrales itérées

Soit $R \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $\forall z \in R : z = (\underbrace{z_1, \dots, z_n}_{x \in \mathbb{R}^n}, \underbrace{z_{n+1}, \dots, z_{n+m}}_{y \in \mathbb{R}^m})$.

Notons $R = \underbrace{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]}_{R^{(1)}} \times \underbrace{[a_{n+1}, b_{n+1}] \times \dots \times [a_{n+m}, b_{n+m}]}_{R^{(2)}}$

Theorème 67 (de Fubini)

Soit $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et Riemann-intégrable,

$$f(x, y), x \in R^{(1)}, y \in R^{(2)}.$$

Si $\forall y \in R^{(2)}$ la fonction $f(\cdot, y) : R^{(1)} \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors la

fonction

$$y \mapsto G(y) = \int_{R^{(1)}} f(x, y) dx : R^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}$$

est aussi Riemann-intégrable sur $R^{(2)}$ et

$$\int_R f(z) dz = \int_{R^{(2)}} G(y) dy = \int_{R^{(2)}} \left(\int_{R^{(1)}} f(x, y) dx \right) dy$$

Corollaire 68

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors

$$\int_R f(z) dz = \int_{R^{(1)}} \left(\int_{R^{(2)}} f(x, y) dy \right) dx = \int_{R^{(2)}} \left(\int_{R^{(1)}} f(x, y) dx \right) dy$$

Lecture 20: Propriétés de l'intégrale de Riemann

Mon 10 May

9.3 Intégrabilité sur un domaine quelconque

Definition 49

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ borné et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ bornée.

Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pavé contenant E et $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$ le prolongement de f par au dehors de E ,

$$\tilde{f}(x) = f(x), x \in E, \tilde{f}(x) = 0 \text{ si } x \in R \setminus E$$

On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur E , si $\tilde{f} \in \mathcal{R}(R)$ (est Riemann-intégrable sur R).

Dans ce cas, on note

$$\int_E f(x) dx = \int_R \tilde{f}(x) dx$$

Remarque

Cette définition ne dépend pas du choix de R .

9.4 Propriétés de l'intégrale de Riemann

— Linéarité : $\forall f, g \in \mathcal{R}(E), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

Il s'ensuit que $\mathcal{R}(E)$ est un espace vectoriel

— Monotonie : $\forall f, g \in \mathcal{R}(E)$, si $f(x) \leq g(x) \forall x \in E$, alors

$$\int_E f(x) dx \leq \int_E g(x) dx$$

— Si $f \in \mathcal{R}(E)$, alors $|f| \in \mathcal{R}(E)$, $f_+ = \max \{f, 0\} \in \mathcal{R}(E)$, $f_- = \max \{-f, 0\} \in \mathcal{R}(E)$. On montre d'abord que $f \in \mathcal{R}(E) \Rightarrow f_+ \in \mathcal{R}(E)$.

$f \in \mathcal{R}(E) \Rightarrow \exists R \subset \mathbb{R}^n$ contenant E et $\tilde{f} \in \mathcal{R}(R)$.

Donc $\forall \epsilon$, il existe une partition P_ϵ de R tel que

$$\overline{S}(\tilde{f}, P_\epsilon) - \underline{S}(\tilde{f}, P_\epsilon) < \epsilon$$

$$\forall Q \in P_\epsilon \text{ on a } \sup_Q \tilde{f}_+ - \inf_Q \tilde{f}_+ \leq \sup_Q \tilde{f} - \inf_Q \tilde{f}$$

Si $\sup_Q \tilde{f} \geq \inf_Q \tilde{f} \geq 0$, alors $\tilde{f}_+ = \tilde{f}$ sur Q , et on a egalite.

Si $\inf_Q \tilde{f} \leq \sup_Q \tilde{f} \leq 0$, alors $\tilde{f}_+ = 0$, et on a l'inegalite.

Si $\sup_Q \tilde{f} \geq 0 \geq \inf_Q \tilde{f}$, alors $\sup_Q \tilde{f}_+ - \inf_Q \tilde{f}_+ = \underbrace{\sup_Q \tilde{f} - \inf_Q \tilde{f}}_{=0} \leq \sup_Q \tilde{f} - \inf_Q \tilde{f}$

Ce qui montre l'inegalite, et ce qui implique que \tilde{f}_+ est integrable.

Mais alors f_- est integrable et $|f| = f_+ - f_- \in \mathcal{R}(E)$

— Si $f \in \mathcal{R}(E)$, alors $|\int_E f(x)dx| \leq \int_E |f(x)|dx$ En effet, on a

$f \in \mathcal{R}(E) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}(E)$, de plus

$$f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow \int_E f(x)dx \leq \int_E |f(x)|dx$$

$$-f(x) \leq |f(x)| \forall x \in E \Rightarrow -\int_E f(x)dx \leq \int_E |f(x)|dx$$

— Si $f, g \in \mathcal{R}(E)$, alors $fg \in \mathcal{R}(E)$ Si $f, g \in \mathcal{R}(E)$, f, g sont bornes.

Soit $M \geq 0 : f(x) \leq M, g(x) \leq M \forall x \in E$, alors $\forall \epsilon > 0$, il existe un pave

$R \subset \mathbb{R}^n$ contenant E et une partition P_ϵ de R tel que

$$\overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2M}$$

$$\overline{S}(g, P_\epsilon) - \underline{S}(g, P_\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2M},$$

Maintenant, $\forall Q \in P_\epsilon$, alors

$$\begin{aligned} \sup_Q fg - \inf_Q fg &\leq \sup_Q f \sup_Q g - \inf_Q \inf_g \\ &\leq \underbrace{\sup_Q f}_{\leq M} (\sup_Q g - \inf_Q g) + \underbrace{\inf_Q g}_{\leq M} (\sup_Q f - \inf_Q f) \end{aligned}$$

9.5 Ensembles mesurables au sens de Jordan

Definition 50 (Ensemble mesurable au sens de Jordan)

On dit que $E \subset \mathbb{R}^n$ borne est mesurable au sens de Jordan (ou Jordan-mesurable) si la fonction $\mathbb{I}_E : E \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{I}_E(x) = 1 \forall x \in E$ est integrable sur E au sens de Riemann.

Dans ce cas, on pose $\text{Vol}(E) = \int_E \mathbb{I}_E(x)dx$.

On dit que E est negligeable si E est Jordan mesurable et $\text{Vol}(E) = 0$.

9.5.1 Caractérisation des ensembles

Ensembles mesurables

E mesurable $\iff \int_E \mathbb{I}_E(x) dx$ existe $\mathbb{I}_E \in \mathcal{R}(E)$, donc, $\forall \epsilon > 0$, il existe un pave $R \subset \mathbb{R}^n$ contenant E et une partition P_ϵ de R tel que

$$\begin{aligned} \overline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) - \underline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) &< \epsilon \\ \overline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) - \underline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) &= \sum_{Q \in P_\epsilon} (\sup_Q \mathbb{I}_E - \inf_Q \mathbb{I}_E) \text{Vol}(Q) \\ &= \sum_{\substack{Q \in P_\epsilon \\ Q \cap E \neq \emptyset \\ Q \cap R \setminus E \neq \emptyset}} \text{Vol}(Q) \end{aligned}$$

Lemme 70

Soit $e \subset \mathbb{R}^n$ borne et $R \subset \mathbb{R}^n$ un pave contenant.

Alors E est mesurable au sens de Jordan si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, il existe une partition P_ϵ de R tel que

$$\sum_{\substack{Q \in P_\epsilon \\ Q \cap E \neq \emptyset \\ Q \cap R \setminus E \neq \emptyset}} \text{Vol}(Q) < \epsilon$$

Ensembles négligeables

Lemme 71

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ borne, E est négligeable si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, il existe $K \in \mathbb{N}^*$ et une collection de paves tel que $E \subset \bigcup_{i=1}^L Q_i$ et $\sum_{i=1}^L \text{Vol}(Q_i) \leq \epsilon$

Preuve

E mesurable $\Rightarrow \exists \{Q_1, \dots, Q_L\} : E \subset \bigcup Q_i, \sum \text{Vol}(Q_i) < \epsilon$

Donc E mesurable $\iff \mathbb{I}_E \in \mathcal{R}(E)$ et $\int_E \mathbb{I}_E dx = 0$.

Soit R un pave contenant E , $\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon$ de R .

$$\overline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) - \underline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) \leq \epsilon$$

Donc, il faut que $\mathbb{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) < \epsilon$

$$\mathbb{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) = \sum_{Q \cap E \neq \emptyset} \text{Vol} Q < \epsilon$$

Supposons que $\forall \epsilon > 0$, il existe une collection $\{Q_1, \dots, Q_L\}$ telle que $E \subset \bigcup Q_i, \sum_i \text{Vol}(Q_i) < \epsilon$

Il existe toujours une partition tensorielle P tel que

$$Q_i = \bigcup_{\substack{Q \in P \\ Q \subset Q_i}} Q$$

$$\underline{S}(\mathbb{I}_E, P) \geq 0$$

$$\mathbb{S}(\mathbb{I}_E, P) = \sum_{\substack{Q \in P \\ Q \cap E \neq \emptyset}} \text{Vol } Q = \sum_{i=1}^L \sum_{\substack{Q \in P_\epsilon \\ Q \subset Q_i}} \text{Vol}(Q) < \epsilon$$

Donc

$$\overline{S}(\mathbb{I}_E, P) - \underline{S}(\mathbb{I}_E, P) < \epsilon$$

$$\overline{S}(\mathbb{I}_E, P) < \epsilon \Rightarrow$$

□

Theorème 72

Un ensemble borne $E \subset \mathbb{R}^n$ est mesurable si et seulement si ∂E est négligeable.

Corollaire 73

Soient $E, F \subset \mathbb{R}^n$ borne et mesurables, alors

— $E \cap F, E \cup F, E \setminus F, \overset{\circ}{E}, \overline{E}$ sont mesurables.

Preuve

— $\mathbb{I}_{E \cap F} = \mathbb{I}_E \mathbb{I}_F$, idem pour le reste.

□

Lecture 20: Propriétés de l'intégrale de Riemann

Mon 10 May

9.6 Intégrabilité sur un domaine quelconque

Definition 51

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ borne et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ bornée.

Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pavé contenant E et $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$ le prolongement de f par au dehors de E ,

$$\tilde{f}(x) = f(x), x \in E, \tilde{f}(x) = 0 \text{ si } x \in R \setminus E$$

On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur E , si $\tilde{f} \in \mathcal{R}(R)$ (est Riemann-intégrable sur R).

Dans ce cas, on note

$$\int_E f(x) dx = \int_R \tilde{f}(x) dx$$

Remarque

Cette définition ne dépend pas du choix de R .

9.7 Propriétés de l'intégrale de Riemann

— Linéarité : $\forall f, g \in \mathcal{R}(E), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

Il s'ensuit que $\mathcal{R}(E)$ est un espace vectoriel

— Monotonie : $\forall f, g \in \mathcal{R}(E)$, si $f(x) \leq g(x) \forall x \in E$, alors

$$\int_E f(x)dx \leq \int_E g(x)dx$$

— Si $f \in \mathcal{R}(E)$, alors $|f| \in \mathcal{R}(E)$, $f_+ = \max\{f, 0\} \in \mathcal{R}(E)$, $f_- = \max\{-f, 0\} \in \mathcal{R}(E)$ On montre d'abord que $f \in \mathcal{R}(E) \Rightarrow f_+ \in \mathcal{R}(E)$.

$f \in \mathcal{R}(E) \Rightarrow \exists R \subset \mathbb{R}^n$ contenant E et $\tilde{f} \in \mathcal{R}(R)$.

Donc $\forall \epsilon$, il existe une partition P_ϵ de R tel que

$$\overline{S}(\tilde{f}, P_\epsilon) - \underline{S}(\tilde{f}, P_\epsilon) < \epsilon$$

$$\forall Q \in P_\epsilon \text{ on a } \sup_Q \tilde{f}_+ - \inf_Q \tilde{f}_+ \leq \sup_Q \tilde{f} - \inf_Q \tilde{f}$$

Si $\sup_Q \tilde{f} \geq \inf_Q \tilde{f} \geq 0$, alors $\tilde{f}_+ = f$ sur Q , et on a egalite.

Si $\inf_Q \tilde{f} \leq \sup_Q \tilde{f} \leq 0$, alors $\tilde{f}_+ = 0$, et on a l'inegalite.

Si $\sup_Q \tilde{f} \geq 0 \geq \inf_Q \tilde{f}$, alors $\sup_Q \tilde{f}_+ - \inf_Q \tilde{f}_+ = \underbrace{\sup_Q \tilde{f} - \inf_Q \tilde{f}}_{=0} \leq \sup_Q \tilde{f} - \inf_Q \tilde{f}$

Ce qui montre l'inegalite, et ce qui implique que \tilde{f}_+ est integrable.

Mais alors f_- est integrable et $|f| = f_+ + f_- \in \mathcal{R}(E)$

— Si $f \in \mathcal{R}(E)$, alors $|\int_E f(x)dx| \leq \int_E |f(x)|dx$ En effet, on a

$f \in \mathcal{R}(E) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}(E)$, de plus

$$f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow \int_E f(x)dx \leq \int_E |f(x)|dx$$

$$-f(x) \leq |f(x)| \forall x \in E \Rightarrow -\int_E f(x)dx \leq \int_E |f(x)|dx$$

— Si $f, g \in \mathcal{R}(E)$, alors $fg \in \mathcal{R}(E)$ Si $f, g \in \mathcal{R}(E)$, f, g sont bornes.

Soit $M \geq 0 : f(x) \leq M, g(x) \leq M \forall x \in E$, alors $\forall \epsilon > 0$, il existe un pave

$R \subset \mathbb{R}^n$ contenant E et une partition P_ϵ de R tel que

$$\overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2M}$$

$$\overline{S}(g, P_\epsilon) - \underline{S}(g, P_\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2M},$$

Maintenant, $\forall Q \in P_\epsilon$, alors

$$\begin{aligned} \sup_Q fg - \inf_Q fg &\leq \sup_Q f \sup_Q g - \inf_Q \inf_Q g \\ &\leq \underbrace{\sup_Q f}_{\leq M} (\sup_Q g - \inf_Q g) + \underbrace{\inf_Q g}_{\leq M} (\sup_Q f - \inf_Q f) \end{aligned}$$

9.8 Ensembles mesurables au sens de Jordan

Definition 52 (Ensemble mesurable au sens de Jordan)

On dit que $E \subset \mathbb{R}^n$ borne est mesurable au sens de Jordan (ou Jordan-mesurable) si la fonction $\mathbb{I}_E : E \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{I}_E(x) = 1 \forall x \in E$ est integrable sur E au sens de Riemann.

Dans ce cas, on pose $\text{Vol}(E) = \int_E \mathbb{I}_E(x) dx$.

On dit que E est negligeable si E est Jordan mesurable et $\text{Vol}(E) = 0$.

9.8.1 Caracterisation des ensembles

Ensembles mesurables

E mesurable $\iff \int_E \mathbb{I}_E(x) dx$ existe $\mathbb{I}_E \in \mathcal{R}(E)$, donc, $\forall \epsilon > 0$, il existe un pave $R \subset \mathbb{R}^n$ contenant E et une partition P_ϵ de R tel que

$$\begin{aligned} \overline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) - \underline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) &< \epsilon \\ \overline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) - \underline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) &= \sum_{Q \in P_\epsilon} (\sup_Q \mathbb{I}_E - \inf_Q \mathbb{I}_E) \text{Vol}(Q) \\ &= \sum_{\substack{Q \in P_\epsilon \\ Q \cap E \neq \emptyset \\ Q \cap R \setminus E \neq \emptyset}} \text{Vol}(Q) \end{aligned}$$

Lemme 75

Soit $e \subset \mathbb{R}^n$ borne et $R \subset \mathbb{R}^n$ un pave contenant.

Alors E est mesurable au sens de Jordan si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, il existe une partition P_ϵ de R tel que

$$\sum_{\substack{Q \in P_\epsilon \\ Q \cap E \neq \emptyset \\ Q \cap R \setminus E \neq \emptyset}} \text{Vol}(Q) < \epsilon$$

Ensembles negligeables

Lemme 76

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ borne, E est negligeable si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, il existe $K \in \mathbb{N}^*$ et une collection de paves tel que $E \subset \bigcup_{i=1}^L Q_i$ et $\sum_{i=1}^L \text{Vol}(Q_i) \leq \epsilon$

Preuve

E mesurable $\Rightarrow \exists \{Q_1, \dots, Q_L\} : E \subset \bigcup Q_i, \sum \text{Vol}(Q_i) < \epsilon$

Donc E mesurable $\iff \mathbb{I}_E \in \mathcal{R}(E)$ et $\int_E \mathbb{I}_E dx = 0$.

Soit R un pave contenant E , $\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon$ de R .

$$\overline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) - \underline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) \leq \epsilon$$

Donc, il faut que $\mathbb{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) < \epsilon$

$$\mathbb{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) = \sum_{Q \cap E \neq \emptyset} \text{Vol } Q < \epsilon$$

Supposons que $\forall \epsilon > 0$, il existe une collection $\{Q_1, \dots, Q_L\}$ telle que $E \subset \bigcup Q_i$, $\sum_i \text{Vol}(Q_i) < \epsilon$

Il existe toujours une partition tensorielle P tel que

$$Q_i = \bigcup_{\substack{Q \in P \\ Q \subset Q_i}} Q$$

$$\underline{S}(\mathbb{I}_E, P) \geq 0$$

$$\mathbb{S}(\mathbb{I}_E, P) = \sum_{\substack{Q \in P \\ Q \cap E \neq \emptyset}} \text{Vol } Q = \sum_{i=1}^L \sum_{\substack{Q \in P_\epsilon \\ Q \subset Q_i}} \text{Vol}(Q) < \epsilon$$

Donc

$$\begin{aligned} \overline{S}(\mathbb{I}_E, P) - \underline{S}(\mathbb{I}_E, P) &< \epsilon \\ \overline{S}(\mathbb{I}_E, P) &< \epsilon \Rightarrow \end{aligned}$$

□

Theorème 77

Un ensemble borne $E \subset \mathbb{R}^n$ est mesurable si et seulement si ∂E est negligible.

Corollaire 78

Soient $E, F \subset \mathbb{R}^n$ borne et mesurables, alors

— $E \cap F, E \cup F, E \setminus F, \overset{\circ}{E}, \overline{E}$ sont mesurables.

Preuve

— $\mathbb{I}_{E \cap F} = \mathbb{I}_E \mathbb{I}_F$, idem pour le reste.

□

Lecture 21: caracterisation des fonctions integrables

Wed 12 May

Theorème 79

Un ensemble borne $E \subset \mathbb{R}^n$ est mesurable au sens de Jordan si et seulement si ∂E est negligible.

Preuve

“ \Rightarrow ” E mesurable implique ∂E negligible.

Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pave contenant E , alors $\mathbb{I}_E \in \mathcal{R}(R)$, donc $\forall \epsilon > 0$, il existe une partition P_ϵ du pave R telle que

$$\overline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) - \underline{S}(\mathbb{I}_E, P_\epsilon) = \sum_{Q \in P_\epsilon} \text{Vol } Q < \epsilon$$

Soit $\mathcal{E} = \{Q \in P_\epsilon : Q \cap E \neq \emptyset, Q \cap R \setminus E \neq \emptyset\}$.

Par hypothese,

$$\sum_{Q \in \mathcal{E}} \text{Vol } Q < \epsilon$$

De plus, si $\forall x \in \partial E$, il existe au moins un $Q \in P_\epsilon$ qui le contient. Alors soit $x \in \overset{\circ}{Q}$, soit $x \in \partial Q$.

Si $x \in \overset{\circ}{Q} \Rightarrow Q \in \mathcal{E}$.

$$\partial E \subset \underbrace{\bigcup_{Q \in \mathcal{E}} Q}_A \cup \underbrace{\bigcup_{Q \in P_\epsilon} \partial Q}_B$$

Notons que $\forall Q \in P_\epsilon, \partial Q = \bigcup_{i=1}^{2n} R_i, \text{Vol } R_i = 0$.

Donc on a recouvert ∂E par un nombre fini de pavés et

$$\text{Vol}(A \cup B) = \text{Vol } A + \text{Vol } B \leq \epsilon$$

Donc ∂E est negligeable.

$\Leftarrow \partial E \Rightarrow E$ mesurable.

∂E negligeable $\Rightarrow \mathbb{I}_{\partial E} \in \mathcal{R}(R)$ et $\int_R \mathbb{I}_{\partial E}$.

$\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon$ une partition de R telle que

$$\overline{S}(\mathbb{I}_{\partial E}, P_\epsilon) = \sum_{\substack{Q \in P_\epsilon \\ Q \cap \partial E \neq \emptyset}} \text{Vol } Q$$

Remarque

Si $Q \in \mathcal{E}$, alors $Q \cap \partial E \neq \emptyset$

Ainsi

$$\overline{S}(\mathbb{I}_{\partial E}, P_\epsilon) - \underline{S}(\mathbb{I}_{\partial E}, P_\epsilon) = \sum_{Q \in \mathcal{E}} \text{Vol } Q \leq \sum_{\substack{Q \in P_\epsilon \\ Q \cap \partial E \neq \emptyset}} \text{Vol } Q < \epsilon$$

9.9 Caracterisation des fonctions integrables

Theorème 81

Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pave et $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ bornee tel que l'ensemble des points de discontinuite de f dans R soit negligeable. Alors $f \in \mathcal{R}(R)$.

Preuve

Soit N l'ensemble des points de discontinuite de f dans R et $M = \sup_{x \in R} |f(x)|$.

N negligeable implique que $\forall \epsilon > 0$, il existe une partition P_ϵ de R telle que

$\mathbb{I}_N \in \mathcal{R}(R)$ et $\int_R \mathbb{I}_N = 0$.

Donc $\overline{S}(\mathbb{I}_N, P_\epsilon) < \frac{\epsilon}{1+2M}$.

Soit $K = \bigcup_{\substack{Q \in P_\epsilon \\ Q \cap N = \emptyset}} Q$, une union finie de pavés compacts, donc K est compact.

De plus, f est uniformément continue sur K .

Donc $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon : \forall x, y \in K, \|x - y\| < \delta_\epsilon$, on a que $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{1+2\text{Vol}(R)}$.

On peut toujours raffiner la partition

$$P_K = \{Q \in P_\epsilon, Q \subset K\}$$

de telle sorte que $\forall Q \in P_K, \forall x, y \in Q \|x - y\| < \delta_\epsilon$.

Ainsi, soit $P'_\epsilon = \{Q \in P_\epsilon, Q \cap N \neq \emptyset\} \cup P_K$

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) &= \sum_{Q \in P_K} (\sup f - \inf f) \text{Vol } Q + \sum_{Q \in P_\epsilon, Q \cap N \neq \emptyset} (\sup f - \inf f) \text{Vol } Q \\ &\leq \frac{\epsilon}{1+2\text{Vol } R} \sum_{Q \in P_K} + 2M \sum_{Q \in P_\epsilon, Q \cap N \neq \emptyset} \text{Vol } Q < \epsilon \quad \square \end{aligned}$$

Corollaire 82

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ borne et mesurable et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\overset{\circ}{E}$ et bornée.

Alors $f \in \mathcal{R}(E)$.

Preuve

Soit $R \subset \mathbb{R}^n$ un pavé contenant E , étudions

$$\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}^n$$

le prolongement par 0 de f sur R .

L'ensemble \tilde{N} des points de discontinuité de \tilde{f} est sûrement contenu dans ∂E qui est négligeable, donc $\tilde{f} \in \mathcal{R}(R) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(E)$. \square

Corollaire 83

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ est borne, mesurable et fermée (compact) et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $f \in \mathcal{R}(E)$.

9.10 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ borne mesurable et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable. Alors

$$\inf_{x \in E} f(x) \text{Vol } E \leq \int_E f(x) dx \leq \sup_{x \in E} f(x) \text{Vol } E$$

Preuve

$f(x) \leq \sup_{x \in E} f(x) \forall x \in E$, et la fonction constante $= \sup_{y \in E} f(y)$ est intégrable, donc

$$\int_E f(x) dx \leq \int_E (\sup_{y \in E} f(y)) dy \quad \square$$

Si $E \subset \mathbb{R}^n$ est borne, mesurable, compact et connexe par arcs et $f \in C^0(E)$, alors

$$\exists x_0 \in E : \int_E f(x) dx = f(x_0) \text{Vol } E$$

Preuve

Par le resultat precedent. on a que

$$\min_f \text{Vol } E \leq \int_E f(x) dx \leq \max_E f \text{Vol } E$$

Puisque f prend toutes les valeurs entre $\min_E f$ et $\max_E f$.

Donc $\exists x_0 \in E : f(x_0) \text{Vol } E = \int_E f$. □

Soit $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ bornes tel que $E_1 \cap E_2$ est negligeable.

Soit $f : E_1 \cup E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ borne.

Si $f|_{E_1} \in \mathcal{R}(E_1)$ et $f|_{E_2} \in \mathcal{R}(E_2)$, alors $f \in \mathcal{R}(E_1 \cup E_2)$, alors

$$\int_{E_1 \cup E_2} f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx$$

De plus, si E_1, E_2, E sont mesurables, alors $f|_{E_1} \in \mathcal{R}(E_1)$, $f|_{E_2} \in \mathcal{R}(E_2)$ et on a a nouveau

$$\int_{E_1 \cup E_2} f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx$$

9.11 Formule des integrales iterees

Definition 53 (Domaine simple)

Soit $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $z = (x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$.

On dit que E est un domaine simple par rapport a y s'il existe un compact mesurable $K \subset \mathbb{R}^n$ ($K \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$) et deux fonctions $g, h \in K \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$g(x) \leq h(x) \forall x \in K$$

et E a la forme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : g(x) \leq y \leq h(x), x \in K\}$$

Theorème 84

Soit $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un domaine simple de la forme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}, g(x) \leq y \leq h(x)\}$, $x \in K$, ou $K \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ et $g, h \in C^0(K)$.

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Alors $f \in \mathcal{R}(E)$, et

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_K \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

En particulier, E est mesurable.

Lecture 22: Changements de variable

Mon 17 May

9.12 Formule de changement de variables

En dimension $n = 1$:

Soit $F = [\alpha, \beta]$, $-\infty < \alpha, \beta < \infty$ et $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On souhaite calculer $\int_F f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx$

Soit alors $E = [a, b]$ et $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(E)$ et telle que $\psi(a) = \alpha, \psi(b) = \beta$. Alors on a

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_a^b f(\psi(u))\psi'(u)du$$

Pour generaliser a $n > 1$, on se restreint a des bijections de classe C^1 , voir a des diffeomorphismes.

Soit ψ un diffeomorphisme entre $E = [a, b]$ et $F = [\alpha, \beta]$.

Puisque ψ est un diffeomorphisme, on a que $\psi' \neq 0$ sur E .

Soit $\psi' > 0$ sur E , alors ψ est strictement croissante sur E , et donc

$$\int_E f = \int_a^b f(\psi(u))|\psi'(u)|du$$

Si $\psi' < 0$ sur E , alors ψ est strictement décroissante, alors

$$\begin{aligned} \int_F f(x)dx &= \int_\alpha^\beta f(x)dx \\ &= \int_{\psi(b)}^{\psi(a)} f(u)du \\ &= \int_a^b f(\psi(u))|\psi'(u)|du \end{aligned}$$

Donc peu importe le signe de ψ' , on a

$$\int_F f = \int_E \tilde{f}(u)|\psi'(u)|du$$

Considerons maintenant $n > 1$:

On considere une transformation affine ψ de \mathbb{R}^n .

Donc on peut ecrire

$$x = \psi(u) = Au$$

Alors si on considere un petit carre centre en (u_1, u_2) , il sera transforme en un parallelepiped centre en $A(u_1, u_2)$.

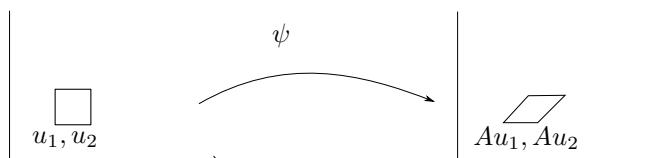


FIGURE 14 – transformation affine

Donc on peut calculer

$$\text{Vol } F = v_1 \times v_2 = (r, Ae_1) \times (r_2 Ae_2) = r_1 r_2 |a_1 \times a_2| = r_1 r_2 |\det A| = \text{Vol } E |\det A|$$

Pour une transformation quelconque, on peut toujours l'écrire localement comme une transformation lineaire., ie

$$x = \psi(u_0) + D\psi(u - u_0) + R(u) = D\psi(u_0)u + \psi(u_0) - D\psi(u_0) + R(u)$$

Donc on a “en gros” que

$$|dx| = |\det D\psi(u_0)| |du|$$

Theorème 85

Soit $U, V \subset \mathbb{R}^n$ ouvertes et $\psi : U \rightarrow V$ tel que

- ψ est un difféomorphisme entre U et V
- U et V soient mesurables.
- Pour tout $r > 0$, $U \cap B(0, r)$ et $V \cap B(0, r)$ soient mesurables.
- Toutes les composantes de $D\psi$ sont bornées sur tout sous-ensemble borne.

Soit encore $E \subset U$ borne non-vide et $F = \psi(E) \subset V$ (aussi un sous-ensemble borne) .

Alors

1. E est mesurable (au sens de Jordan) si et seulement si $F = \psi(E)$ est mesurable.
2. Si E est mesurable et $f : F = \psi(E) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et bornée sur

F , alors $f \in \mathcal{R}(F)$ et

$$\int_F f(x) dx = \int_E f(\psi(u)) |\det D\psi(u)| du$$

9.13 Quelques applications

Exemple (1)

Soit $F = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$.

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

On veut calculer $\int_F f(x, y) dx dy$.

On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \end{pmatrix} : U =]0, \infty[\times]-\pi, \pi[\rightarrow V = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0, x \leq 0\}$$

On a bien que $E = [1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}] = \psi^{-1}(F)$, mesurable et bornée.

Toute composante de ψ et $D\psi$ est bornée sur E .

On a

$$|\det D\psi| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & +\rho \cos \theta \end{pmatrix} \right| = |\rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta| = \rho$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_F f(x, y) dx dy &= \int_F \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy \\ &= \int_E \frac{1}{1 + \rho^2} |\det D\psi(\rho, \theta)| d\rho d\theta \\ &= \int_{[1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]} \frac{1}{1 + \rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_1^2 \frac{\pi}{2} \frac{\rho}{1 + \rho^2} d\rho \end{aligned}$$

Exemple (2)

$F = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$.

Changement en coordonnées polaires.

f est continue sur F donc $f \in \mathcal{R}(F)$.

Soit $\tilde{F} = F \setminus \{y = 0, x \leq 0\}$.

Puisque $F \cap \{y = 0, x \leq 0\}$ est un ensemble de mesure nulle, alors \tilde{F} est mesurable et

$$\int_{\tilde{F}} f(x, y) dx dy = \int_F f(x, y) dx dy$$

Donc

$$\int_F f(x, y) dx dy = \int_{\tilde{F}} f(x, y) dx dy = \int_{\tilde{E}} \frac{1}{1 + \rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^1 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho}{1 + \rho^2} d\theta \right) d\rho$$

9.14 Integrales generalisees

Definition 54 (Fonction absolument integrable)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide (pas forcément borne) et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ (pas forcément borne).

Soit $\{K_j, j \in \mathbb{N}\}$ une suite de sous-ensembles de E tel que

- K_j est borne, compact et mesurable
- $K_j \subset K_{j+1}^\circ$
- $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j = E$

Soit f borne et integrable sur chaque K_j .

On dit que f est absolument integrable sur E si

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{K_j} |f(x)| dx$$

existe (finie) .

Dans ce cas, on pose que $\int_E f(x) dx = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{K_j} f(x) dx$ On peut montrer que si f est absolument integrable sur E , alors $\int_E f(x) dx$ ne depend pas du choix de la suite $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$.

Lecture 23: Equations differentielles Ordinaires

Wed 19 May

10 Equations differentielles ordinaires

Cas scalaire

Soit $f : I \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $E \subset \mathbb{R}$ connexe et ouvert.

Soit $u : I \rightarrow E \subset \mathbb{R}$ de classe $C^1(I)$.

On dit que u est solution de l'equation differentielle ordinaire definie par f si

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in I$$

Cette equation est appelee equation differentielle ordinaire scalaire du premier ordre.

- equation differentielle : equation qui fait intervenir la fonction inconnue ainsi que ses derivees
- ordinaire : l'inconnue de u depend d'une seule variable.
- scalaire : u est une fonction scalaire.
- premier ordre : l'equation fait uniquement intervenir la derivee premiere.

Cas vectoriel

La solution $\vec{u} : I \rightarrow E \subset \mathbb{R}^n$, avec $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

$$\vec{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$$

Et $\vec{f} : I \times E \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Et l'EDO vectorielle aura la forme

$$\vec{u}'(t) = \vec{f}(t, \vec{u}(t)) \quad \forall t \in I$$

$$u_1'(t) = f_1(t, u_1(t), \dots, u_n(t))$$

$$\vdots$$

$$u_n'(t) = f_n(t, u_1(t), \dots, u_n(t))$$

C'est donc un systeme de n EDO scalaires couplees.

EDO d'ordre n (scalaire)

On a

$$u : I \rightarrow \mathbb{R}$$

de classe $C^n(I)$.

$$f : I \times E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subset \mathbb{R}^n \text{ ouvert}$$

Et on peut alors ecrire l'equation differentielle ordinaire d'ordre n

$$u^{(n)} = f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) \quad \forall t \in I$$

La relation entre EDO d'ordre n scalaire et EDO vectorielle de dimension n .

On peut toujours reecire une EDO d'ordre n comme systeme d'EDO couplees :

Soit u une solution du systeme.

On introduit les n fonctions

$$u_1(t) = u(t)$$

$$u_2(t) = u'(t)$$

$$\vdots$$

$$u_n(t) = u^{(n-1)}(t)$$

On peut donc ecrire

$$\vec{u}'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(t) \\ u''(t) \\ \vdots \\ u^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \\ f(t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) \end{pmatrix}$$

Donc en definissant

$$\vec{f} : I \times E \rightarrow \mathbb{R}^n$$

avec

$$\vec{f}(t, \vec{u}) = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ f(t, u_1, u_2, \dots, u_n) \end{pmatrix}$$

Alors, on peut ecrire

$$\vec{u}'(t) = \vec{f}(t, \vec{u}(t))$$

10.1 Probleme de Cauchy

Soit $\vec{f} : I \times E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.

Prenons \vec{f} continue sur $I \times E$, $(t_0, \vec{u}_0) \in I \times E$.

On cherche $\vec{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$\vec{u}'(t) = \vec{f}(t, \vec{u}(t)) \quad \forall t \in I$$

Un probleme de cauchy est une solution $\vec{u}(t)$ telle que

$$\begin{cases} \vec{u}'(t) = \vec{f}(t, \vec{u}(t)) \\ \vec{u}(t_0) = \vec{u}_0 \end{cases}$$

Soit $I_+ = [t_0, T]$, avec $-\infty < t_0 < T \leq +\infty$, $\vec{f} : I_+ \times E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, \vec{f} continue. On cherche $\vec{u} : I_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue sur I_+ et continument differentiable sur $\overset{\circ}{I}_+ =]t_0, T[$ tel que

$$\begin{cases} \vec{u}'(t) = \vec{f}(t, \vec{u}(t)) \\ \vec{u}(t_0) = \vec{u}_0 \end{cases}$$

On definit de la meme maniere le probleme a valeurs finales.

Definition 55 (Solution locale)

On appelle solution locale du probleme de Cauchy un couple (J, \vec{u}) ou J est un intervalle contenu dans I , qui contient t_0 et $\vec{u} \in C^1(J)$ qui satisfait le probleme de Cauchy.

- On dit qu'une solution locale (K, w) du PC prolonge strictement (J, u) si $J \subset K$, $J \neq K$ et $w(t) = u(t) \forall t \in J$
- On dit que un couple (J, u) est une solution maximale si il n'existe pas d'autres solutions locales qui la prolongent.
- On dit que (J, u) est globale si $J = I$.

10.2 Methode de separation de variables

Pour une EDO scalaire du premier ordre, si

$$f : I \times E \rightarrow \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}$$

Si f se laisse ecrire comme

$$f(t, x) = g(t)k(x) \quad g : I \rightarrow \mathbb{R}, k : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}$$

On peut considerer le probleme de cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = g(t)k(u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Methode “informelle”

On cherche

$$\frac{du}{dt} = g(t)k(u)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{k(u)} = g(t)dt \int_{u_0}^u \frac{du}{k(u)} = \int_{t_0}^t g(t)dt$$

Si on definit

$$G(t) = \int_{t_0}^t g(s)ds \quad F(u) = \int_{u_0}^u \frac{1}{k(y)}dy$$

Si F est inversible, alors on a

$$u = F^{-1}(G(t) - G(t_0) + F(u_0))$$

Theorème 88

Soit $I, \tilde{E} \subset \mathbb{R}$ des intervalles ouverts, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $K : \tilde{E} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et tel que $k(u) \neq 0 \forall u \in \tilde{E}$.

Soit $(t_0, u_0) \in I \times \tilde{E}$ et

$$G(t) = \int_{t_0}^t g(s)ds, F(u) = \int_{u_0}^u \frac{1}{k(y)}dy$$

Alors il existe un intervalle $J \subset I$ contenant t_0 tel que $G(J) \subset \text{Im } F$ et une fonction $u : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(J)$ definie par

$$u(t) = F^{-1}(G(t))$$

et le couple (J, u) est solution du probleme de Cauchy.

De plus, cette solution est unique au sens que tout autre solution locale (K, w) du Probleme de Cauchy satisfait

$$w(t) = u(t) \forall t \in J \cap K$$

tant que $k(u(t)) \neq 0$ alors $F^{-1}(G(t))$ donne une solution de l'équation.

Lecture 24: equations lineaires du premier ordre

Wed 26 May

10.3 Equations lineaires du premier ordre (scalaire)

On considere a nouveau des equations differentielles de la forme

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in I \\ u(t_0) = u_0, t_0 \in \overset{\circ}{I} \end{cases}$$

La solution sera de la forme

$$u' : J \subset I \rightarrow \mathbb{R}$$

On dit que l'équation est lineaire si $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et de la forme

$$f(t, u) = g(t) - p(t)u$$

avec $g, p \in C^0(I)$.

f est donc une fonction affine par rapport a la deuxieme variable.

On dit egalement que l'équation differentielle est homogene si $g(t) = 0$ (sans second membre).

On peut donc reecire une edo lineaire du premier ordre

$$\begin{cases} u'(t) + p(t)u(t) = g(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Soit $P : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de p .

$$P(t) = \int_{t_0}^t p(s)ds$$

Notons que

$$\frac{d}{dt} \left(e^{P(t)} u(t) \right) = e^{P(t)} p(t) u(t) + e^{P(t)} u'(t)$$

Donc on remarque que u est solution de l'équation si et seulement si

$$\frac{d}{dt} \left(e^{P(t)} u(t) \right) = e^{P(t)} g(t).$$

Donc, on a

$$e^{P(t)} u(t) - e^{P(t_0)} u(t_0) = \int_{t_0}^t e^{P(s)} g(s) ds$$

Qui est l'unique solution globale de l'équation differentielle.

Si on prend en particulier $P(t) = \int_{t_0}^t p(s)ds$, on trouve

$$u(t) = e^{-P(t)} u_0 + \int_{t_0}^t e^{-(P(t)-P(s))} g(s) ds$$

10.4 Deuxieme procede pour trouver la solution

Idee : etudier separement le probleme homogene et le probleme non-homogene.
Le probleme est donne par

$$u'(t) = -p(t)u(t), \quad t \in I$$

L'integrale generale du probleme homogene est donnee par

$$u(t) = Ce^{-P(t)}, \quad C \in \mathbb{R}$$

en effet

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{P(t)}u(t)) &= e^{P(t)}(p(t)u(t) + u'(t)) \\ e^{P(t)}u(t) &= C \\ u(t) &= Ce^{-P(t)} \end{aligned}$$

Le probleme non homogene

$$u'(t) = -p(t)u(t) + g(t), t \in I$$

Soit $w(t)$ une solution de cette equation, alors

$$z(t) = w(t) + Ce^{-P(t)}$$

est l'integrale generale de l'equation differentielle.

On verifie facilement que $z(t)$ satisfait

$$z'(t) = -p(t)z(t) + g(t).$$

Pour montrer que l'ensemble des solutions $z(t) = w(t) + Ce^{-P(t)}$ est l'integrale generale, on suppose par l'absurde qu'il existe une autre solution $v(t)$ qui ne peut pas s'ecrire sous la forme " $w(t) + Ce^{-P(t)}$ ".

Mais alors $n(t) = v(t) - w(t)$,

$$\begin{aligned} n'(t) &= v'(t) - w'(t) \\ &= -p(t)v(t) + g(t) + p(t)w(t) - g(t) \\ &= -p(t)(v(t) - w(t)) = -p(t)n(t) \end{aligned}$$

Mais donc, $n(t) = Ce^{-P(t)} \Rightarrow v(t) = w(t) + Ce^{-P(t)}$.

Remarque

Une fois qu'on a l'integrale generale, pour resoudre le probleme de Cauchy, il suffit de trouver la bonne valeur de la constante.

Exemple

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) + 1 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Alors, $p(t) = -1, g(t) = 1$

$$P(t) = \int_{t_0}^t p(s) ds = \int_{t_0=0}^t -1 ds = -t$$

Donc,

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-P(t)} u_0 + \int_{0t}^t e^{-(P(t)-P(s))} g(s) ds \\ &= e^t u_0 - \int_0^t e^{t-s} ds = \dots \end{aligned}$$

10.5 EDO lineaire a coefficients constant

Si $p(t) = \alpha, \forall t \in I, \alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{cases} u'(t) + \alpha u(t) = g(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Alors l'integrale generale de l'equation homogene est $Ce^{-\alpha t}$.

Si $g(t)$ est un polynome $g(t) = \sum \gamma_j t^j$.

On peut construire une solution particuliere sous la meme forme

$$w(t) = \sum_j \beta_j t^j$$

En effet

$$\begin{aligned} w'(t) &= \sum_{j=1}^n j \beta_j t^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \beta_{j+1} t^j \\ &= \alpha w(t) + g(t) \\ &= \alpha \sum_{j=0}^n \beta_j t^j + \sum_{j=0}^n \gamma_j t^j = \sum_{j=0}^n (\alpha \beta_j + \gamma_j) t^j \end{aligned}$$

Donc

$$(j+1)\beta_{j+1} = \alpha \beta_j + \gamma_j, \quad j = 0, \dots, n-1$$

et $\beta_n = -\frac{\gamma_n}{\alpha}$.

Si $g(t)$ est exponentiel,

$$-g(t) = e^{\delta t}$$

— Si $\delta \neq -\alpha$, on cherche $w(t) = \beta e^{\delta t}$

$$w'(t) = \beta \delta e^{\delta t} = \alpha w(t) + g(t) = (\alpha \beta + \gamma) e^{\delta t}$$

Et donc on trouve

$$\beta = \frac{\gamma}{\delta + \alpha}$$

— Si $\delta = -\alpha$, il faut chercher une solution particuliere de la forme

$$w(t) = \beta t e^{-\alpha t}$$

Plus generalement, si

$$g(t) = \left(\sum_{j=0}^n \gamma_j t^j \right) e^{\delta t}$$

Alors on cherche $w(t) = \left(\sum_{j=0}^n \beta_j t^j \right) e^{\delta t}$ si $\delta \neq -\alpha$ et $w(t) = t \left(\sum_{j=0}^n \beta_j t^j \right) e^{\delta t}$ si $\delta = -\alpha$.

Si $g(t)$ est une fonction trigonometrique

$$g(t) = \gamma_1 \sin(\omega t) + \gamma_2 \cos(\omega t)$$

on cherche

$$w(t) = \beta_1 \sin(\omega t) + \beta_2 \cos(\omega t)$$

Alors

$$\begin{aligned} w'(t) &= \beta_1 \omega \cos(\omega t) - \beta_2 \omega \sin(\omega t) \\ &= -\alpha w(t) + g(t) \end{aligned}$$

Et on peut donc faire coïncider les coefficients.

Plus generalement, si $g(t) = \left(\sum_{j=0}^n \gamma_j t^j \right) e^{\epsilon t} \sin(\omega t) + \left(\sum_{j=0}^n \tilde{\gamma}_j t^j \right) e^{\delta t} \cos(\omega t)$, on cherche

$$w(t) = \left(\sum_{j=0}^n \beta_j t^j e^{\delta t} \sin(\omega t) \right) + \left(\sum_{j=0}^n \beta_j t^j e^{\delta t} \cos(\omega t) \right)$$

10.6 Existence et unicite des solutions

On considere une equation vectorielle .

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : I \times E \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue.

On cherche $\vec{u} : J \subset I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{cases} \vec{u}'(t) = f(t, \vec{u}(t)), \forall t \in J \\ \vec{u}(t_0) = \vec{u}_0 \end{cases}$$

Theorème 91 (Theoreme de Cauchy-Peano)

Sous les hypotheses ci-dessus, pour tout $(t_0, \vec{u}_0) \in I \times E$. Le probleme de Cauchy admet au moins une solution locale (J, \vec{u}) avec $J \subset I, t_0 \in \overset{\circ}{J}$.

Definition 56

On dit qu'une fonction $\vec{f} : I \times E \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue est localement lipschitz par rapport au deuxieme argument si pour tout $(t_0, u_0) \in I \times E$, il existe $a, b > 0$ avec $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(\vec{u}_0, b) \subset I \times E$ et une constante $L > 0$:

$$\forall t \in [t_0 - a, t_0 + a], \forall \vec{u}, \vec{v} \in \overline{B}(u_0, b)$$

on a

$$\left\| \vec{f}(t, u) - \vec{f}(t, v) \right\| \leq L \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

Theorème 92 (de Cauchy-Lipschitz)

Sous les memes hypotheses, si \vec{f} est localement lipschitzienne par rapport au deuxieme argument, alors on a que $\forall (t_0, \vec{u}_0) \in I \times E$, il existe une unique solution locale (J, \vec{u}) , avec $J \subset I$, contenant t_0 .

(solution locale unique signifie que tout autre solution locale (K, w) avec $K \subset I$, contenant t_0 , on a $w(t) = u(t), \forall t \in K \cap J$)