Chapitre 1

Géométrie des courbes

1.1 Qu'est ce qu'une courbe ?

La notion mathématique de *courbe* ou de *ligne* formalise l'idée intuitive d'un objet du plan ou de l'espace qui est continu et n'a qu'une dimension. Euclide en donne la définition suivante dans le livre I des *Eléments* : *une ligne est une longueur sans largeur.* Les droites, les cercles et les ellipses sont des exemples familiers de courbes. Dans la vie courante, un fil de fer ou la trajectoire d'un projectile sont des exemples concrets.

La formalisation de la notion de courbes conduit à plusieurs concepts qu'il faudra distinguer. Le premier est celui de « lieu géométrique » des points satisfaisant certaines propriétés : cette idée nous conduit à la notion *implicite* d'une courbe comme ensemble des points satisfaisant une équation (dans le plan) ou deux équations (dans l'espace). Le second concept est celui de courbe comme « trajectoire » : on ne regarde plus la courbe comme un ensemble de points, mais comme un « point mobile », c'est-à-dire une fonction d'un paramètre à valeur dans le plan ou dans l'espace : c'est le point de vue *paramétrique* ou *cinématique* en théorie des courbes. L'acte de tracer une courbe au crayon noir sur une feuille blanche se décrit par le point de vue paramétrique, le résultat de cette action, la courbe qu'on a tracée, correspond au point de vue implicite. Dans ce chapitre, nous privilégions le point de vue paramétrique.

1.2 Notions fondamentales

Dans ce chapitre, on suppose que l'espace est muni d'un système de coordonnées fixe, on l'identifie donc à $\mathbb{R}^n$ et on admet que n est un entier quelconque. On supposera, sauf mention du contraire, que le système de coordonnées est orthonormé, la norme d'un vecteur $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ est alors donnée par

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Définitions. Une *courbe paramétrée* dans $\mathbb{R}^n$ est une application continue $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$:

$$\alpha : u \mapsto (\alpha_1(u), \alpha_2(u), ..., \alpha_n(u)) \in \mathbb{R}^n, \qquad u \in I$$

où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle appelé l'*intervalle de paramétrage* de la courbe.

La variable u parcourant l'intervalle I s'appelle le *paramètre* (elle est aussi parfois notée par les lettres s, t, φ ou θ) et l'ensemble

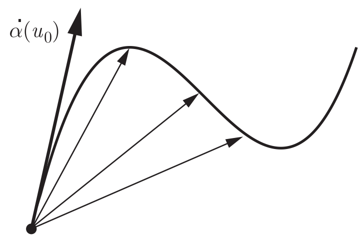
$$\alpha(I) = \{\alpha(u) \,\big|\, u \in I\} \subset \mathbb{R}^n$$

s'appelle la *trace* ou le *support* de la courbe paramétrée α.

On dit que la courbe α est *différentiable* en $u_0 \in I$ si la limite

$$\frac{d\alpha}{du}(u_0) := \lim_{u \to u_0} \frac{\alpha(u) - \alpha(u_0)}{u - u_0}$$

existe. Cette limite s'appelle alors le *vecteur vitesse* de la courbe α en u_0 et on le note $\dot{\alpha}(u_0)$ ou $\alpha'(u_0)$.
Remarquons que la direction du vecteur vitesse est tangente à la courbe en $\alpha(u_0)$ car cette direction est la limite des direcions prises par une suite de cordes reliant le point $p = \alpha(u_0)$ à un point de la courbe se rapprochant du point p.



La *vitesse* de α en u_0 est la norme du vecteur vitesse, on la note

$$V_\alpha(u_0) = \|\dot{\alpha}(u_0)\|.$$

Lemme 1.1 *La courbe $\alpha(u) = (\alpha_1(u), ..., \alpha_n(u))$ est différentiable en u_0 si et seulement si les fonctions $\alpha_i(u)$ sont dérivables en u_0. De plus*

$$\dot{\alpha}(u_0) = \left(\frac{d\alpha_1}{du}(u_0), ..., \frac{d\alpha_n}{du}(u_0)\right),$$

et

$$V_\alpha(u_0) = \sqrt{\left(\frac{d\alpha_1}{du}(u_0)\right)^2 + \cdots + \left(\frac{d\alpha_n}{du}(u_0)\right)^2}.$$

□

ATTENTION. La seconde formule est fausse si l'on travaille dans un système de coordonnées non orthonormé.

Définitions. Voyons quelques définitions supplémentaires.

(a) La courbe $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ est dite de *classe* C^1 si elle est différentiable en tout point de I et si les dérivées

$$\dot{\alpha}_j = \frac{d\alpha_j}{du}$$

sont continues sur l'intervalle I pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$.

(b) La courbe est dite de *classe* C^k (où k est un entier) si les dérivées d'ordre m

$$\frac{d^m \alpha_j}{du^m}(u)$$

existent et sont continues pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$ et tout $m = 1, 2, \ldots, k$.

Si une courbe est de classe C^k pour tout entier k, on dit qu'elle est de classe C^∞. Si la courbe est simplement continue, on dit qu'elle est de *classe* C^0.

(c) Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ est une courbe de classe C^2, alors son *accélération* est le vecteur défini par

$$\ddot{\alpha}(u) = \frac{d^2\alpha}{du^2}(u)\,.$$

(d) Soit α une courbe de classe C^1 et u_0 une valeur du paramètre. On dit que le point $p = \alpha(u_0)$ est *singulier* si $\dot{\alpha}(u_0) = \mathbf{0}$ (de façon équivalente, p est singulier si et seulement si $V_\alpha(u_0) = 0$). Le point $p = \alpha(u_0)$ est *régulier* s'il n'est pas singulier.

Une courbe est *régulière* si elle est de classe C^1 et si tous ses points sont réguliers.

(e) Le point $p = \alpha(u_0)$ sur une courbe de classe C^2 est *birégulier* si $\dot{\alpha}(u_0)$ et $\ddot{\alpha}(u_0)$ sont linéairement indépendants.

Une courbe est *birégulière* si elle est de classe C^2 et si tous ses points sont biréguliers.

(f) Le *plan osculateur* à la courbe α au point $p = \alpha(u_0)$ est le plan passant par p et qui est parallèle aux vecteurs $\dot{\alpha}(u_0)$ et $\ddot{\alpha}(u_0)$. Ce plan n'est défini que si p est un point birégulier.

(g) Un point p sur une courbe $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ est un *point double* s'il existe deux valeurs distinctes du paramètre ($u_1, u_2 \in I$, $u_1 \neq u_2$) telles que

$$p = \alpha(u_1) = \alpha(u_2)\,.$$

(h) Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ est une courbe et si $J \subset I$ est un intervalle, alors on dit que la restriction de α à J est un *arc* de la courbe *arc de courbe* α (un arc de courbe n'est donc rien d'autre qu'un « morceau de courbe »).

(i) On dit qu'un arc de courbe est *simple* s'il ne contient pas de point double.

(j) La *droite tangente* à la courbe γ au point régulier $\gamma(u_0)$ est la droite $T_{u_0}\gamma$ parcourue à vitesse constante, passant par $\gamma(u_0)$ dans la direction du vecteur vitesse $\dot{\gamma}(u_0)$:

$$T_{u_0}\gamma : \lambda \mapsto \gamma(u_0) + \lambda\dot{\gamma}(u_0), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.1
1) La *cubique* dans $\mathbb{R}^3$ est la courbe $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\alpha(u) = (au, bu^2, cu^3),$$

où a, b, c sont des constantes non nulles. Cette courbe est de classe C^∞, son vecteur vitesse est

$$\dot{\alpha}(u) = (a, 2bu, 3cu^2)$$

et son accélération est

$$\ddot{\alpha}(u) = (0, 2b, 6cu).$$

La cubique est donc birégulière et sa vitesse est

$$V_\alpha(u) = \|\dot\alpha(u)\| = \sqrt{a^2 + 4b^2u^2 + 9c^2u^4}.$$

2) La courbe $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\beta(u) = (u^2, u^3, \ldots, u^{n+1})$$

est de classe C^∞. Son vecteur vitesse est

$$\dot\beta(u) = (2u, 3u^2, \ldots, (n+1)u^n),$$

et sa vitesse est $V_\beta(u) = \left\|\dot\beta(u)\right\| = \sqrt{4u^2 + \cdots + ((n+1)u^n)^2}$. Cette courbe a un unique point singulier en $\beta(0) = (0, 0, \ldots, 0)$.

3) La droite passant par les points distincts $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ et $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ admet le paramétrage affine $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ suivant :

$$\delta(t) = p + t\,\overrightarrow{pq} = (p_1 + t(q_1 - p_1), p_2 + t(q_2 - p_2), ..., p_n + t(q_n - p_n)).$$

En posant $\mathbf{w} = \overrightarrow{pq} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, on a $\delta(t) = (p_1 + tw_1, ..., p_n + tw_n)$. Le vecteur vitesse et la vitesse sont donnés pour tout t par

$$\dot\delta(t) = \mathbf{w} \quad \text{et} \quad V_\delta(t) = \|\mathbf{w}\|,$$

et l'accélération est nulle. La courbe est donc régulière, de classe C^∞ et sa vitesse est constante. Son accélération est nulle et la droite n'est donc pas birégulière.

4) La même droite admet de nombreux autres paramétrages, par exemple :

$$\varepsilon(t) = p + t^3\mathbf{w} = (p_1 + t^3w_1, ..., p_n + t^3w_n) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Dans ce cas,

$$\dot\varepsilon(t) = 3t^2\mathbf{w} \quad \text{et} \quad V_\varepsilon(t) = 3t^2\|\mathbf{w}\|.$$

La courbe est de classe C^∞ et elle possède un unique point singulier en $\varepsilon(0) = p$.

5) Ou encore

$$\eta(t) = p + \sqrt[3]{t}\mathbf{w} = (p_1 + \sqrt[3]{t}w_1, ..., p_n + \sqrt[3]{t}\,w_n) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Cette courbe n'est alors pas de classe C^1, elle n'est en effet pas différentiable en $t = 0$. Nous avons pour $t \neq 0$:

$$\dot\eta(t) = \frac{1}{3}t^{-2/3}\mathbf{w} \quad \text{et} \quad V_\eta(t) = \frac{1}{3}t^{-2/3}\|\mathbf{w}\|,$$

et donc $V_\eta(t) \to \infty$ lorsque $t \to 0$.

6) Le cercle de centre p et rayon r dans le plan $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ admet le paramétrage

$$c(t) = p + r\cos(\omega\,t)\mathbf{b}_1 + r\sin(\omega\,t)\mathbf{b}_2 \qquad (0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega})$$

où $p, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ est un repère orthonormé dans le plan Π et $\omega > 0$ est une constante appelée la *vitesse angulaire* (on vérifie en effet facilement que $\|c(t) - p\| = r$). La vitesse de cette courbe est

$$\dot{c}(t) = -\omega\, r \sin(\omega\, t)\mathbf{b}_1 + \omega\, r \cos(\omega\, t)\mathbf{b}_2 \quad \text{et} \quad V_c(t) = \omega r.$$

Son accélération est

$$\ddot{c}(t) = -\omega^2\, r \cos(\omega\, t)\mathbf{b}_1 - \omega^2\, r \sin(\omega\, t)\mathbf{b}_2.$$

La courbe est birégulière, elle est de classe C^∞, et sa vitesse est constante.

7) Le *graphe* d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est la courbe $\gamma_f : I \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma_f(x) = (x, f(x)).$$

Remarquons que la variable x est à la fois une coordonnée du plan et le paramètre de la courbe. Si f est continûment dérivable, alors la courbe est de classe C^1 et

$$\dot{\gamma}_f(x) = (1, f'(x)) \quad \text{et} \quad V_\gamma(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Cette courbe est toujours régulière puisqu'en tout point $V_\gamma(x) \geq 1$.

8) L'*hélice circulaire* est la courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

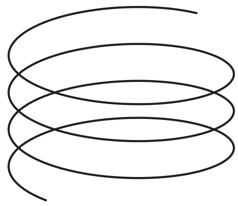
$$\gamma(u) = (a\, \cos(u),\ a\, \sin(u),\ b\, u),$$

avec a et b non nuls. Son vecteur vitesse et son accélération sont donnés par

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(u) &= (-a \sin u, a \cos u, b) \\ \ddot{\gamma}(u) &= a(-\cos u, -\sin u, 0)\,. \end{aligned}$$

L'hélice circulaire est donc une courbe birégulière et la vitesse est constante :

$$\| \dot{\gamma} \| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Hélice circulaire

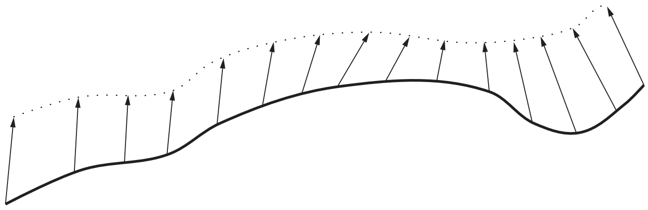
1.3 Champs de vecteurs le long d'une courbe

Définition. Un *champ de vecteurs* le long d'une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est la donnée d'un vecteur

$$\mathbf{W}(u) = w_1(u)\mathbf{e}_1 + w_2(u)\mathbf{e}_2 + \cdots + w_n(u)\mathbf{e}_n$$

pour toute valeur du paramètre $u \in I$. Ce vecteur est en général considéré comme un vecteur fixe d'origine $\gamma(u)$, mais on peut aussi le voir comme un vecteur libre.

Le champ de vecteurs $\mathbf{W}(u)$ est dit *de classe* C^k si les dérivées de $w_1, w_2, \ldots w_n$ existent et sont continues jusqu'à l'ordre k.



Champ de vecteurs le long d'une courbe.

Exemples de champs de vecteurs

(1) Si γ est de classe C^1, alors son vecteur vitesse définit un champ $u \mapsto \dot\gamma(u)$.

(2) Si γ est de classe C^2, alors son accélération définit un champ $u \mapsto \ddot\gamma(u)$.

(3) Si $\mathbf{W}(u)$ est un champ de vecteurs de classe C^k, alors sa dérivée $\dot{\mathbf{W}}(u)$ est un champ de vecteurs de classe C^{k-1} et $\ddot{\mathbf{W}}(u)$ est de classe C^{k-2}.

(4) Si $\mathbf{W}(u)$ et $\mathbf{Z}(u)$ sont deux champs de vecteurs le long de la courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions, alors
$$u \mapsto f(u)\mathbf{W}(u) + g(u)\mathbf{Z}(u)$$
est un nouveau champ de vecteurs le long de la courbe.

(5) En dimension 3, un autre champ est donné par $u \to \mathbf{W}(u) \times \mathbf{Z}(u)$.

(6) Si $\gamma, \beta : I \mapsto \mathbb{R}^n$ sont deux courbes ayant même intervalle de paramétrage, alors on peut définir un champ
$$\mathbf{W}(u) = \beta(u) - \gamma(u),$$
ce champ s'appelle le *champ de poursuite* de la courbe β depuis la courbe γ.

(7) Un champ important est le *vecteur tangent* d'une courbe régulière $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. C'est le champ de vecteurs le long de la courbe obtenu en normalisant le vecteur vitesse :
$$\mathbf{T}(\gamma, u) := \frac{\dot\gamma(u)}{\|\dot\gamma(u)\|} = \frac{\dot\gamma(u)}{V_\gamma(u)}.$$

(8) Le *vecteur normal principal* d'une courbe birégulière γ de classe C^2 est le champ de vecteurs le long de la courbe défini par
$$\mathbf{N}(\gamma, u) := \frac{\ddot\gamma(u) - \langle \ddot\gamma(u), \mathbf{T}(u)\rangle \mathbf{T}(u)}{\|\ddot\gamma(u) - \langle \ddot\gamma(u), \mathbf{T}(u)\rangle \mathbf{T}(u)\|}.$$

Exercice. Vérifier que en chaque point d'une courbe birégulière, les vecteurs $\mathbf{T}(\gamma, u)$ et $\mathbf{N}(\gamma, u)$ forment un repère orthonormé du plan osculateur.

Lemme 1.2 (Règle de Leibniz) *Soient $\mathbf{W}(u)$ et $\mathbf{Z}(u)$ deux champs de vecteurs de classe C^1 le long de la courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, alors*
$$\frac{d}{du}\Big\langle \mathbf{W}(u), \mathbf{Z}(u) \Big\rangle = \Big\langle \dot{\mathbf{W}}(u), \mathbf{Z}(u) \Big\rangle + \Big\langle \mathbf{W}(u), \dot{\mathbf{Z}}(u) \Big\rangle.$$

Si $n = 3$, alors on a de même

$$\frac{d}{du}\left(\mathbf{W}(u) \times \mathbf{Z}(u)\right) = \dot{\mathbf{W}}(u) \times \mathbf{Z}(u) + \mathbf{W}(u) \times \dot{\mathbf{Z}}(u),$$

et si $n = 2$,

$$\frac{d}{du}\left(\mathbf{W}(u) \wedge \mathbf{Z}(u)\right) = \dot{\mathbf{W}}(u) \wedge \mathbf{Z}(u) + \mathbf{W}(u) \wedge \dot{\mathbf{Z}}(u).$$

Preuve. Démontrons la première formule. Pour simplifier on écrit

$$\mathbf{W}(u) \cdot \mathbf{Z}(u) = \langle \mathbf{W}(u), \mathbf{Z}(u) \rangle.$$

On a alors par bilinéarité

$$\begin{aligned}
&\mathbf{W}(u+\varepsilon) \cdot \mathbf{Z}(u+\varepsilon) - \mathbf{W}(u) \cdot \mathbf{Z}(u) \\
&\quad = \Big(\mathbf{W}(u+\varepsilon) \cdot \mathbf{Z}(u+\varepsilon) - \mathbf{W}(u) \cdot \mathbf{Z}(u+\varepsilon)\Big) + \Big(\mathbf{W}(u) \cdot \mathbf{Z}(u+\varepsilon) - \mathbf{W}(u) \cdot \mathbf{Z}(u)\Big) \\
&\quad = \Big(\mathbf{W}(u+\varepsilon) - \mathbf{W}(u)\Big) \cdot \mathbf{Z}(u+\varepsilon) + \mathbf{W}(u) \cdot \Big(\mathbf{Z}(u+\varepsilon) - \mathbf{Z}(u)\Big).
\end{aligned}$$

Il suffit de diviser cette identité par ε et faire tendre ε vers 0 pour obtenir le lemme. Les autres formules se vérifient de la même manière.

□

Corollaire 1.3 (a) *Si $\mathbf{W}_1(u)$ et $\mathbf{W}_2(u)$ sont deux champs de vecteurs de classe C^1 le long de γ tel que $\langle \mathbf{W}_1(u), \mathbf{W}_2(u) \rangle$ est constant, alors on a*

$$\langle \mathbf{W}_1(u), \dot{\mathbf{W}}_2(u) \rangle = -\langle \dot{\mathbf{W}}_1(u), \mathbf{W}_2(u) \rangle$$

pour tout $u \in I$.

(b) *Si $\mathbf{W}(u)$ est un champ de vecteurs de classe C^1 le long de γ tel que $\|\mathbf{W}\|$ est constant, alors $\dot{\mathbf{W}}(u)$ est orthogonal à $\mathbf{W}(u)$ pour tout $u \in I$.*

Preuve. L'affirmation (a) est une conséquence immédiate de la règle de Leibniz et (b) découle de (a).

□

1.4 Longueur et abscisse curviligne

Définition. La *longueur* d'un arc de courbe $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 est l'intégrale de sa vitesse :

$$\ell(\gamma) = \int_a^b V_\gamma(t)\, dt, \quad \text{où } V_\gamma = \|\dot{\gamma}(t)\|.$$

Exemple 1.2

1) Il est clair que si la vitesse est constante : $V_\gamma(t) \equiv v$, alors on a

$$\ell(\gamma) = v \cdot (b - a).$$

Ainsi, *la longueur d'un chemin parcouru à vitesse constante est égale à la vitesse fois le temps de parcours* :

$$\text{longueur} = \text{vitesse} \times \text{temps}.$$

2) Comme cas particulier, nous avons le segment $[p, q]$ paramétré par $\delta(t) = (p_1 + t(q_1 - p_1), \ldots, p_n + t(q_n - p_n))$, avec $t \in [0, 1]$.
On a vu que $V_\delta(t) = \|\overrightarrow{pq}\| = \|q - p\|$ et donc

$$\ell(\delta) = \|q - p\|.$$

3) L'arc de cercle de centre p et rayon r dans $\mathbb{R}^2$ est paramétré par $c(\theta) = (p_1 + r\cos(\theta), p_2 + r\sin(\theta))$, où θ varie de θ_0 à θ_1. La vitesse de cette courbe est constante : $V_c(\theta) = r$, et donc

$$\ell(c) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} V_c \, d\theta = r\,(\theta_1 - \theta_0).$$

On a donc montré que *la longueur d'un arc de cercle est égale au produit du rayon par l'angle qui sous-tend l'arc.*

4) La longueur du graphe $\gamma_f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ de la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$\ell(\gamma_f) = \int_a^b V_\gamma(x)\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Voyons à présent quelques propriétés importantes de la longueur.

Proposition 1.4 *Si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une similitude de rapport $\lambda > 0$ et $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est un arc de courbe de classe C^1, alors $\tilde{\gamma} := g \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est aussi de classe C^1 et*

$$\ell(\tilde{\gamma}) = \lambda \ell(\gamma).$$

En particulier la longueur d'une courbe est invariante par isométrie.

Preuve. On sait que toute similitude g est de la forme $g(x) = \lambda Ax + \mathbf{b}$, où $\mathbf{b}$ est un vecteur et A une matrice orthogonale. On a donc $\tilde{\gamma}(u) = \lambda A\gamma(u) + \mathbf{b}$, et, par la règle de Leibniz,

$$\dot{\tilde{\gamma}}(u) = \lambda \dot{A}\gamma(u) + \lambda A\dot{\gamma}(u) + \dot{\mathbf{b}} = \lambda A\dot{\gamma}(u)$$

puisque A et $\mathbf{b}$ sont constantes. Comme A est une matrice orthogonale, on a

$$V_{\tilde{\gamma}}(u) = \|\dot{\tilde{\gamma}}(u)\| = \|\lambda A\dot{\gamma}(u)\| = \lambda\,\|\dot{\gamma}(u)\| = \lambda V_\gamma(u),$$

et donc

$$\ell(\tilde{\gamma}) = \int_a^b V_{\tilde{\gamma}}(u) du = \lambda \int_a^b V_\gamma(u) du = \lambda \ell(\gamma).$$

□

Proposition 1.5 (additivité de la longueur) *Soit $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^1 et $c \in [a, b]$. Notons $\beta := \alpha|_{[a,c]} : [a, c] \to \mathbb{R}^n$ et $\gamma := \alpha|_{[c,b]} : [c, b] \to \mathbb{R}^n$ les restrictions de α aux intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$. Alors*

$$\ell(\alpha) = \ell(\beta) + \ell(\gamma).$$

Preuve. Cette proposition découle de la propriété correspondante de l'intégrale, nous laissons le lecteur compléter les détails.

$\square$

Proposition 1.6 *Pour tout arc de courbe $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 on a*

$$d(\alpha(a), \alpha(b)) \leq \ell(\alpha).$$

Cette proposition dit que *le plus court chemin reliant deux points est le segment de droite entre ces deux points.*

Preuve. Si $\alpha(b) = \alpha(a)$ il n'y a rien à montrer. Sinon on pose $\mathbf{w} := \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{\|\alpha(b)-\alpha(a)\|}$ et on introduit la fonction

$$f(u) := \langle \alpha(u) - \alpha(a), \mathbf{w} \rangle.$$

Par la règle de Leibniz, on a

$$\dot{f}(u) = \frac{df}{du} = \langle \dot{\alpha}(u), \mathbf{w} \rangle + \langle \alpha(u) - \alpha(a), \dot{\mathbf{w}} \rangle = \langle \dot{\alpha}(u), \mathbf{w} \rangle,$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\dot{f}(u) = \langle \dot{\alpha}(u), \mathbf{w} \rangle \leq \|\dot{\alpha}(u)\| \, \|\mathbf{w}\| = \|\dot{\alpha}(u)\| = V_\alpha(u)$$

(car $\|\mathbf{w}\| = 1$). On a donc

$$\begin{aligned} d(\alpha(a), \alpha(b)) &= \|\alpha(b) - \alpha(a)\| \\ &= f(b) - f(a) \\ &= \int_a^b \dot{f}(u) du \\ &\leq \int_a^b V_\alpha(u) du = \ell(\alpha). \end{aligned}$$

$\square$

Définition. Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1 et $u_0 \in I$ une valeur du paramètre. L'*abscisse curviligne* (ou *paramètre naturel*) sur α correspondant au *point initial* $p_0 = \alpha(u_0)$ est la fonction $s_\alpha : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$s_\alpha(u) = \int_{u_o}^{u} V_\alpha(\tau) d\tau.$$

L'abscisse curviligne mesure donc la longueur du chemin parcouru sur la courbe depuis le point initial, elle est négative avant le point initial et positive après :

$$s_\alpha(u) = \begin{cases} \ell(\alpha|_{[u_0,u]}) & \text{si } u \geq u_0 \\ -\ell(\alpha|_{[u_0,u]}) & \text{si } u \leq u_0. \end{cases}$$

Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, nous noterons l'abscisse curviligne par $s(u)$ au lieu de $s_\alpha(u)$.

1.5 Changement de paramétrage d'une courbe

La notion de courbe que nous avons introduite plus haut est une notion *cinématique*[1], i.e. fondée sur la notion de paramétrage. Il est naturel, d'un point de vue géométrique, d'admettre qu'une « même » courbe puisse avoir plusieurs paramétrages distincts.

Définition. Soit $\alpha(t)$ $(t \in I)$ une courbe paramétrée. On dit qu'une courbe $\beta(u)$ $(u \in J)$ est une *reparamétrage* de α s'il existe une bijection

$$h : I \to J$$

transformant le paramètre t en $u = h(t)$ et telle que

a) h est continûment différentiable ;

b) $h'(t) > 0$ quel que soit $t \in I$;

c) $\alpha = \beta \circ h$.

Observons que les deux courbes ont alors la même trace $\alpha(I) = \beta(J)$. Les vecteurs vitesses sont reliés par

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\beta}{du}\frac{du}{dt} = h'(t)\frac{d\beta}{du} \tag{1.1}$$

et les vitesses par

$$V_\alpha(t) = h'(t)V_\beta(u).$$

En particulier, comme $\dfrac{du}{dt} = h'(t) \neq 0$, on voit que les courbes α et β ont les mêmes points singuliers.

Les formules ci-dessus montrent en particulier que lorsqu'on reparamétrise une courbe, celle-ci ne change pas de sens de parcours (car les vecteurs vitesses des deux courbes ont même direction et même sens). On peut toutefois inverser le sens de parcours d'une courbe par une procédure similaire à un reparamétrage.

Définition. On dit qu'une courbe $\beta(u)$ $(u \in J)$ est une *inversion*, ou un *antireparamétrage*, de la courbe $\alpha(t)$ $(t \in I)$ s'il existe une bijection

$$h : I \to J$$

transformant le paramètre t en $u = h(t)$ et telle que

a) h est continûment différentiable ;

b) $h'(t) < 0$ quel que soit $t \in I$;

c) $\alpha = \beta \circ h$.

Voici un exemple simple : considérons les courbes du plan $\mathbb{R}^2$

$$\alpha(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \qquad (0 < \theta < \pi)$$

et

$$\gamma(x) = (x, \sqrt{1 - x^2})\,, \qquad (-1 < x < 1).$$

1. Le mot *cinématique* vient du grec κίνησις, qui signifie « mouvement ».

Ces deux courbes ont la même trace, qui est le demi-cercle unité :

$$\left\{(x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1, y > 0\right\}.$$

La fonction $h : (0, \pi) \to (-1, 1)$ définie par $h(\theta) = x = \cos(\theta)$ fait le lien entre les deux paramétrages car

$$\gamma(h(\theta)) = (x, \sqrt{1 - x^2}) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) = \alpha(\theta).$$

Comme $h'(\theta) = \dfrac{dx}{d\theta} = -\sin(\theta) < 0$, on voit que la courbe α est une inversion de γ.

Observons par ailleurs que si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, alors $h'(\theta) = 0$. L'inversion h cesse d'être admissible aux extrémités de l'intervalle. Cela correspond au fait que la vitesse de γ

$$V_\gamma(x) = \left\| \frac{d\gamma}{dx} \right\| = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

tend vers l'infini lorsque $x \to \pm 1$.

1.6 Quantités géométriques et quantités cinématiques

Définition. Une quantité ou une notion attachée à une courbe est dite *géométrique* si elle est invariante par rapport aux changements de paramètre, et elle est dite *cinématique* dans le cas contraire.

Par exemple, la vitesse et l'accélération sont des notions cinématiques alors que la notion de point singulier, de point régulier et de direction tangente sont des notions géométriques.

Lemme 1.7 *Le vecteur tangent* $\mathbf{T}(\alpha, t)$ *est une quantité géométrique.*

Preuve. Cette affirmation est géométriquement évidente, puisque $\mathbf{T}$ est un champ de vecteurs unitaire indiquant la direction de la courbe. Voyons tout de même une preuve formelle de ce lemme :

Soit $\beta(u)$ $(u \in J)$ un reparamétrage de la courbe α. Il existe alors une fonction $h : I \to J$ telle que $h'(t) > 0$ et $\alpha(t) = \beta(h(t))$. On sait que $V_\alpha(t) = V_\beta(u) h'(t)$, par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\alpha, t) = \frac{1}{V_\alpha(t)} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{V_\alpha(t)} \frac{d\beta(h(t))}{dt} \\ &= \frac{h'(t)}{V_\alpha(t)} \frac{d\beta(u)}{du} \\ &= \frac{1}{V_\beta(u)} \frac{d\beta(u)}{du} \\ &= \mathbf{T}(\beta, u). \end{aligned}$$

□

La longueur d'une courbe est également une quantité géométrique ; plus généralement, nous avons la proposition suivante.

Proposition 1.8 *Soient α et β deux courbes de classe C^1. Si β est un reparamétrage ou une inversion de α, alors $\ell(\beta) = \ell(\alpha)$.*

Preuve. Considérons d'abord le cas où $\beta(u)$ $(a' \leq u \leq b')$ est un reparamétrage de la courbe $\alpha(t)$ $(a \leq t \leq b)$; on a

$$\begin{aligned} \ell(\beta) = \int_{a'}^{b'} V_\beta(u)\, du &= \int_a^b V_\beta(u) \frac{du}{dt}\, dt \\ &= \int_a^b V_\alpha(t)\, dt \\ &= \ell(\alpha)\,. \end{aligned}$$

Dans le cas où $\beta(u)$ est une inversion de $\alpha(t)$, alors $\dfrac{du}{dt} < 0$ et on a

$$\begin{aligned} \ell(\beta) = \int_{a'}^{b'} V_\beta(u)\, du &= \int_b^a V_\beta(u) \frac{du}{dt}\, dt \\ &= -\int_b^a V_\alpha(t)\, dt \\ &= \int_a^b V_\alpha(t)\, dt \\ &= \ell(\alpha)\,. \end{aligned}$$

□

Considérons par exemple l'arc du cercle unité compris entre les points $(1,0)$ et (x_0, y_0) (où l'on suppose $y > 0$), alors la longueur de cet arc de cercle est donnée par

$$\ell = \theta = \mathrm{Arcos}(x_0)\,.$$

Si cette courbe est paramétrée comme un graphe, i.e. par $\gamma(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$, $(x_0 < x < 1)$, alors la vitesse est $V_\gamma(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et la longueur est donc donnée par

$$\ell = \int_{x_0}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\,.$$

La proposition 1.8 nous permet de déduire du résultat précédent l'identité analytique :

$$\int_{x_0}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \mathrm{Arcos}(x_0)\,,$$

que nous avons obtenue (presque) sans aucun calcul, mais par un raisonnement purement géométrique.

1.7 Paramétrage naturel d'une courbe régulière

Théorème 1.9 *Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe régulière de classe C^1 et $t_0 \in I$ une valeur du paramètre. Alors il existe une unique reparamétrage $h : I \to J$, telle que $0 \in J$, $h(t_0) = 0$ et telle que $\beta := \alpha \circ h^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$ soit de vitesse 1 : $V_\beta(s) = 1$.*

Preuve. Montrons d'abord l'unicité de ce reparamétrage. On a vu plus haut (p. 11) que

$$V_\alpha(t) = h'(t)V_\beta(s).$$

Comme $V_\beta(s) = 1$ et $h' > 0$, on a donc $h'(t) = V_\alpha(t)$ et comme $h(t_0) = 0$, on doit avoir

$$s = h(t) = \int_{t_0}^{t} V_\alpha(\tau)d\tau.$$

Ainsi $h(t)$ coïncide avec l'abscisse curviligne $s(t)$.

Pour montrer l'existence du reparamétrage, on *définit* à présent h par $h(t) = s(t) = \int_{t_0}^{t} V_\alpha(\tau)d\tau$ et l'intervalle J par $J = h(I)$. Alors $h(t_0) = 0$ et $h'(t) = V_\alpha(t)$. En utilisant la formule (1.1) de la page 11, on voit que la courbe $\beta := \alpha \circ h^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$ vérifie

$$V_\beta(s) = V_\alpha(t)\,\frac{1}{h'(t)} = 1.$$

□

Définition. On dit qu'une courbe régulière γ est *paramétrée naturellement* si sa vitesse vaut 1, i.e. si $\left\|\dot{\gamma}(s)\right\| = 1$ pour tout s. Le théorème précédent nous dit que toute courbe régulière peut se reparamétrer de façon naturelle.

Dès qu'un point initial et un sens de parcours ont été choisis sur la courbe, le paramétrage naturel est unique et il est donné par l'abscisse curviligne.

Recette Pour trouver le paramétrage naturel d'une courbe α, il faut effectuer les opérations suivantes :

1) Identifier ou choisir le point initial u_0.
2) Calculer la vitesse $V_\alpha(u) = \|\dot{\alpha}(u)\|$.
3) Intégrer V_α pour obtenir l'abscisse curviligne s : $s(u) = \int_{u_0}^{u} V_\alpha(\tau)d\tau$.
4) Inverser la relation $s = s(u)$ (i.e. exprimer u en fonction de s : $u = u(s)$).
5) On obtient alors le paramétrage naturel $\beta(s) = \alpha(u(s))$.

Exemple 1.3 La *chaînette* est la courbe plane paramétrée par $\alpha(u) = (u, \cosh u)$. Le vecteur vitesse est $\dot{\alpha}(u) = (1, \sinh(u))$, et donc

$$V_\alpha(u) = \|\dot{\alpha}(u)\| = \sqrt{1 + \sinh^2(u)} = \cosh(u)\,.$$

L'abscisse curviligne depuis le point initial $\alpha(0) = (0, 1)$ est donnée par l'intégrale

$$s(u) = \int_0^u V_\alpha(t)dt = \int_0^u \cosh(t)dt = \sinh(u),$$

et on a donc

$$u(s) = \operatorname{argsh}(s) = \log(s + \sqrt{1 + s^2}).$$

Remarquons que $\cosh(u) = \sqrt{1+\sinh^2(u)} = \sqrt{1+s^2}$. En substituant cette relation dans le paramétrage de α, on obtient le paramétrage naturel de la chaînette :

$$\beta(s) = \alpha(u(s)) = (u(s), \cosh u(s)) = (\operatorname{argsh}(s), \sqrt{1+s^2}).$$

On vérifie facilement que $\|\dot{\beta}(s)\| = 1$.

Les courbes pour lesquelles on peut effectivement calculer le paramétrage naturel sont plutôt rares ; mais cette notion joue un rôle théorique fondamental. Il faut en particulier se souvenir des relations suivantes qui relient le paramètre naturel s au paramètre donné u.

$$\boxed{ds = V(u) \cdot du \qquad , \qquad \frac{d}{ds} = \frac{1}{V(u)}\frac{d}{du}.} \tag{1.2}$$

Remarque. L'abscisse curviligne joue un rôle fondamental en théorie des courbes, car c'est dans le paramétrage naturel que les relations fondamentales entre les différentes quantités géométriques liées à une courbe sont le plus clairement mises en évidence. Pour cette raison, les livres traitant de courbes choisissent souvent d'écrire les formules relativement à la seule abscisse curviligne. Nous n'avons pas fait ce choix et avons préféré écrire les formules par rapport à un paramètre général en raison de la difficulté pratique de calculer le paramétrage naturel pour la plupart des courbes. Nous invitons toutefois le lecteurs à récrire lui-même les formules des prochains paragraphes dans le cas spécial d'une courbe paramétrée naturellement ; il constatera ainsi lui-même combien les formules et les calculs théoriques se simplifient.