Analyse II

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Introduction

Mon 22 Feb

1 Intégrales généralisées

Peut-on définir une intégrale sur un intervalle ouvert plutot que sur un intervalle fermé ? ie.

$$f : [a, b[\to \mathbb{R} \text{ c.p.m.}$$

Definition 1 (Intégrales généralisées (sur un intervalle borné non fermé))
Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *continue par morceaux (* $a < b$*).*
En particulier, f *est c.p.m. sur tout intervalle* $[a, x]$*,* $a < x < b$ *Soit* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$*.*
On dit que l'integrale generalisee $\int_a^b f(x)dx$ *existe (ou converge) si* $\lim_{x \to b} F(X)$ *existe, dans ce cas, on note*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} F(x) - F(a)$$

Si $\lim_{x \to b-} F(x)$ *n'existe pas, alors on dit que*

$$\int_a^b f(t)dt$$

diverge. Definition analogue pour le cas $]a, b]$*.*

On souhaite definir $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} tan(x)dx = 0$.
Dans certains cas cette integrale vaut 0. Mais si on calcule

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\frac{\pi}{2}+\epsilon^2} \frac{\pi}{2} - \epsilon tan(t)dt = \lim_{\epsilon \to 0+} (-\ln(\cos(\frac{\pi}{2} - \epsilon)) + \ln(\cos(-\frac{\pi}{2} + \epsilon^2))) = -\infty$$

Il faut donc une definition qui est coherente.

Definition 2 (Integrale sur un intervalle borne ouvert)
Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m et* $c \in]a, b[$*.*
Si les integrales generalisees $\int_a^c f(t)dt$ *et* $\int_c^b f(t)dt$ *existent, alors on definit l'integrale*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Si une des deux integrales diverge, alors le tout diverge.

Lecture 2: Integrales Generalisees

Wed 24 Feb

Theorème 1 (Critere de Comparaison)
Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m. et supposons* $\exists c \in [a, b[$ *tel que*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in [c, b[$$

Si $\int_a^b g(x)dx$ *existe alors* $\int_a^b f(x)dx$ *existe aussi*
Si $\int_a^b f(x)dx$ *diverge alors* $\int_a^b g(x)dx$ *diverge aussi.*

Preuve
Si $\int_a^b g(x)dx$ *existe, alors* $\int_c^b g(x)dx$ *existe.*
Donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{x\to b-}\int_a^x f(t)dt \\ &= \lim_{x\to b-}(\int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt) \\ &= \int_a^c f(t)dt + \lim_{x\to b-}\int_c^x f(t)dt \\ &\leq \int_a^c f(t)dt + \lim_{x\to b-}\int_c^x g(t)dt < +\infty\end{aligned}$$

En notant $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, F *est non decroissante, et bornee superieurement sur l'intervalle* $[a, b[\Rightarrow \lim_{x\to b-} F(x)$ *existe.* $\square$

Exemple
$f(x) = \left|\sin(\frac{1}{x})\right|$ *sur* $]0, 1]$*, on a*

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

1 est integrable, et donc l'integrale de $f(x)$ *existe.*

1.1 Integrales absoluments convergentes

Definition 3 (Integrale absolument convergente)
Soit I *un intervalle du type* $[a, b[,]a, b]$ *ou* $]a, b[$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *c.p.m.*
On dit que l'integrale generalisee de f *sur* I *est absolument convergente si*

$$\int_I |f(x)|dx$$

existe.

Theorème 3 (absolument convergente implique convergente)
Si l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ *converge absolument, alors il converge.*

Preuve
Notons $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ *et* $f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}$ *et on a* $|f(x)| = f_+(x) + f_-$.
Donc

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)| \text{ et } 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)| \forall x \in I$$

Par critere de comparaison, si

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ existe } \Rightarrow \text{ alors } \int_a^b f_+(x)dx, \int_a^b f_-(x) \text{ existent}$$

et donc $\int_a^b f(x)dx$ □

Remarque

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *c.p.m Si* f *est bornee sur* I*, alors*

$$\int_I f(x)dx$$

existe.

Theorème 5 (Critere de comparaison (II))

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *c.p.m.*
S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1[$ *tel que*

$$\lim_{x \to b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \in \mathbb{R}$$

Alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

existe.
S'il existe $\alpha \geq 1$ *tel que*

$$\lim_{x \to b-} f(x)(b-x)^\alpha = l \neq 0$$

alors

$$\int_a^b f(x)dx$$

diverge.

Preuve

Par definition de la limite $\forall \epsilon > 0, \exists b-a > \delta_\epsilon > 0$ *tel que*

$$|f(x)(b-x)^\alpha - l| < \epsilon \forall x$$

$$\Rightarrow l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha \leq l + \epsilon$$

et donc

$$0 \leq |f(x)| \leq \frac{|l| + \epsilon}{(b-x)^\alpha}$$

Puisque le terme de droite est integrable, on conclut par le critere de comparaison. Pour la deuxieme partie, soit $\alpha \geq 1$ *et* $l \neq 0$.
Supposons $l > 0$*, on a*

$$l - \epsilon \leq f(x)(b-x)^\alpha$$

Le meme raisonnement que ci-dessus donne que l'integrale de f *diverge.* □

1.2 Integrale generalisee sur un intervalle non borne

Definition 4 (Integrale sur un intervalle non borne)
Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *c.p.m.*
On dit que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *existe si*

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(x)dx$$

existe et dans ce cas, on note

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

idem si $f :]-\infty, a[\to \mathbb{R}$. *Soit* $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *c.p.m. on dit que* $\int_a^\infty f(x)dx$ *existe s'il existe* $c \in]a, \infty[$ *tel que*

$$\lim_{x \to a+} \int_x^c f(t)dt \text{ et } \lim_{y \to +\infty} \int_c^y f(t)dt$$

existent.

Lecture 3: L'espace R^n

Mon 01 Mar

2 L'espace R^n

2.1 Espace vectoriel norme

Soit un ensemble V sur lequel on definit deux operations

1. somme : $+ : V \times V \to V$
2. multiplication par un scalaire $\mathbb{R} \times V \to V$

On definit R^n par $R^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ldots \times \mathbb{R}$

Definition 5 (Norme d'un vecteur)
C'est une application $N : V \to \mathbb{R}$, *c'est une application qui satisfait*
- $\forall x \in V : N(x) \geq 0$ *et* $N(x) = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V : N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
- $\forall x, y \in V, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

On utilise souvent la notation $N(x) = \|x\|$

Definition 6 (Espace vetoriel norme)
Un espace vectoriel norme est note $(V, \|.\|)$

Definition 7
Soit V *un espace vectoriel et* N_1, N_2 *deux normes sur* V.
On dit que N_1 *et* N_2 *sont equivalentes si* $\exists c_1, c_2 > 0$ *tel que*

$$c_1 N_2(x) \leq N_1(x) \leq c_2 N_2(x) \forall x \in V$$

Definition 8 (Distance)
Soit X un ensemble.
Une distance est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ qui satisfait les proprietes suivantes

— $\forall x, y \in X, d(x,y) \geq 0,\ d(x,y) = 0 \iff x = y$
— *La distance est symmetrique*
— $\forall x, y, z \in V, d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Un espace X muni d'une distance est appele un espace metrique et est note (X, d).

On peut toujours definir une distance sur un espace vectoriel norme, defini par

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

On appelle cette distance, la distance induite par la norme.
Tout espace vectoriel norme est aussi un espace metrique.

Definition 9 (Produit Scalaire)
Soit V un espace vectoriel.
Un produit scalaire est une application $b : V \times V \to \mathbb{R}$ qui satisfait les proprietes suivantes

— $\forall x, y \in V, b(x,y) = b(y,x)$
— $\forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x,z) + \beta b(y,z)$
— $\forall x \in V, b(x,x) \geq 0, b(x,x) = 0 \iff x = 0$

Theorème 6 (Inegalite de Cauchy-Schwarz)
Soit V un espace vectoriel et $b : V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire. Alors

$$\forall x, y \in V | b(x,y) \leq \sqrt{b(x,x) b(y,y)}$$

Preuve
$\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}.$

$$0 \leq b(\alpha x + y, \alpha x + y) = \alpha^2 b(x,x) + 2\alpha b(x,y) + b(y,y)$$

Donc on a

$$\Delta = b(x,y)^2 - b(x,x)b(y,y)$$ □

Theorème 7
Soit $b : V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire, alors l'application $x \to \sqrt{b(x,x)} = \|x\|_b$ est une norme sur V.

Donc, si V est muni d'un produit scalairel, alors V est un espace norme et donc V est un espace metrique pour la distance induite par le produit scalaire.

2.2 Normes sur R^n

— La norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
— Norme "max" $\|x\|_\infty = \max |x_i|$
— Norme 1 : $\|x\|_1 = \sum |x_i|$
— Normes $p \in [1, +\infty[$ $\|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
Pour p infinie, on retrouve la norme infinie

On montre en exercices que toutes les normes p sont equivalentes.
De meme, on montre que toutes les normes sur R^n sont equivalentes. Par contre, seulement la norme 2 est deduite d'un produit scalaire.

Definition 10 (Suites convergentes)
Soit $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$.
On dit que cette suite converge s'il existe $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k \to +\infty} \left\| x^{(k)} - x \right\| = 0$$

Lecture 4: Boules sur R^n

Wed 03 Mar

2.3 Suites sur R^n

Remarque
Supposons que $\{x^{(k)}\} \to \overrightarrow{x}$ *par rapport a la norme euclidienne. Et oit* $||| \cdot |||$ *une autre norme sur* $\mathbb{R}^n$. *Puisque toutes les normes sont equivalentes sur* $\mathbb{R}^n$ $|||\overrightarrow{x}||| \leq c||\overrightarrow{x}||_2$ *Donc toutes les suites converge peu importe la norme.*

En particulier, on peut choisir la norme infinie.

Lemme 9
Une suite $\{x^{(k)}\}$ *converge si et seulement si toutes les composantes convergent.*

Definition 11 (Suites de Cauchy)
On dit qu'une suite $\{x^{(k)}\}$ *est de Cauchy si*

$$\forall \epsilon > 0 \exists N > 0 : \forall k, l \geq N \left\| x^{(k)} - x^{(l)} \right\| \leq \epsilon$$

Theorème 10
Une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Preuve
Si la suite $x^{(k)}$ *converge* $\iff$ $\left\{x_i^{(k)}\right\}$ *converge pour tout* $i = 1, \ldots, n$ *donc toutes ces suites sont de Cauchy et donc* $x^{(k)}$ *converge.* $\square$

Theorème 11 (Bolzano-Weierstrass)
Soit $\{x^{(k)}\}$ *une suite bornee.*
Alors il existe une sous-suite $\{x^{(k_j)}\}$ *qui converge*

Preuve
Si $\{x^{(k)}\}$ *est bornee, en particulier chaque suite* $x^{(k)_i}$ *sera bornee.*
En $i = 1$*, la suite* $x^{(k)}$ *est bornee, donc il existe une sous-suite convergente vers une valeur* x_1*.*
On considere les index de cette sous-suite et on reapplique l'argument ci-dessus en $i = 2$*, etc.* □

2.4 Topologie de $\mathbb{R}^n$

Definition 12 (Boule)
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $\delta > 0$*, la boule ouverte centree en* x *et de rayon* δ

$$B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \delta\}$$

La boule fermee

$$\overline{B}(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \delta\}$$

La sphere centree en x *et de rayon* δ

$$S(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| = \delta\}$$

2.5 Classification des points d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$

Le complementaire de E est

$$E^c = \{y \in \mathbb{R}^n, y \notin E\}$$

On dit que x est un point interieur de E si $\exists \delta : B(x, \delta) \subset E$, on dit que x est un point frontiere de E si $\forall \delta B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$ et $B(x, \delta) \cap E^c \neq \emptyset$ On dit que E^o est l'ensemble des points interieurs de E, E^o est appele l'interieur de E.

On note ∂E l'ensemble des points frontieres, appele la frontiere ou le bord de E.
On dit que x est un point adherent de E si $\forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$ On note $\bar{E}$ l'ensemble des points adherents de E, appele l'adherence de E.
On a $\bar{E} = E \cup \partial E$
On dit que x est un point isole si

$$\exists \delta > 0 B(x, \delta) \cap E = \{x\}$$

On dit que x est un point d'accumulation de E, si $\forall \delta > 0$

$$B(x, \delta) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Donc, en particulier, si on prend $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$

$$\exists x^{(k)} \in E, \text{ tel que } \left\|x^{(k)} - x\right\| \leq \frac{1}{k}$$

La suite $x^{(k)}$ converge vers x.

Definition 13
Soit E un ensemble de $\mathbb{R}^n$, on dit que E est ouvert si tous ses points sont interieurs

Definition 14
E est ferme si E^c est ouvert.

Lecture 5: Ensembles compacts/connexes par arcs

Mon 08 Mar

2.6 Caracterisation des ensembles ouverts

- $\overset{\circ}{E}$ est toujours ouvert.
- E est ouvert si et seulement si $E = \overset{\circ}{E}$
- L'union (meme infinie) d'ensembles ouverts est ouverte.
  Soit $E = \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$ et K_α sont ouverts.
  Alors $\forall x \in E$, $x \in K_\alpha$ et donc il existe une boule ouverte centree en x et contenue dans K_α.
- L'intersection finie d'ensembles ouverts est ouverte.
  Soit $E = \bigcap K_i$, alors $\forall x \in E, x \in K_i \forall i$, mais chaque K_i est ouvert, donc en prendant $\delta = \min\{\delta_1, \ldots\}$, $B(x, \delta) \in E$ et donc E est ouvert.

2.7 Caracterisation des ensembles fermes

- $\mathbb{R}^n \setminus \overline{E} = \overset{\circ}{E}, \overline{E^c} = \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{E}$
- $\overline{E}$ est toujours ferme.
- L'intersection (meme infinie) d'ensembles fermes est fermee.
- L'union finie d'ensembles fermes est fermee.
- E est ferme si et seulement si toute suite $\left\{x^{(k)}\right\}$ convergente, converge vers un element $x \in E$.

  Preuve
  Soit E ferme et $\left\{x^{(k)}\right\}$ une suite convergente vers $x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon :$ $\forall k > N_\epsilon, \left\|x - x^{(k)}\right\| \leq \epsilon$.
  Donc $\forall \epsilon B(x, \epsilon) \cap E \neq \emptyset$, donc $x \in \overline{E} = E$.
  Supposons que E n'est pas ferme, donc E^c n'est pas ouvert. Donc $\exists x \in E^c : \forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$.
  Si on prend $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \exists x^{(k)} \in B(x, \delta) \cap E$ et $\left\{x^{(k)}\right\}$ converge vers x, donc $x \in E$ ↯ ☐

2.8 Ensembles compacts

Definition 15 (Ensemble compact)
On dit que E est compact si E est a la fois ferme et borne.

Theorème 12 (Caracterisation par sous-suites convergentes)
Un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute suite $\left\{x^{(k)}\right\} \subset E$ on peut extraire une sous-suite convergente vers un element $x \in E$

Theorème 13 (Caracterisation par recouvrements finis)
Un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute famille $\{K_\alpha, \alpha \in A\}$ d'ouverts tel que $E \subset K_\alpha$, on peut extraire une sous-famille finie qui est encore un recouvrement de E.

Definition 16 (Chemin dans E)
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. On appelle chemin de E une application $\gamma : [0, 1] \to E$, $\gamma(t) = (\gamma_1, \ldots)$, tel que γ_i est continu pour tout i.
E

Definition 17 (Ensembles connexes par arcs)
Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est connexe par arcs si $\forall x, y \in E$, il existe un chemin γ tel que $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

3 Fonctions de plusieurs variables

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. On appelle fonction sur E a valeurs reelles une application $f : E \to \mathbb{R}$

$$\forall x \in E, x \to f(x) \subset \mathbb{R}^n$$

On note $D(f)$ le domaine de f, $\operatorname{Im} f$ l'image, $g(f)$ le graphe .

3.1 Notion de limite

Definition 18 (Limite)
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E. On dit que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta$$

Alors

$$\|f(x) - l\| < \epsilon$$

Theorème 14 (Des deux gendarmes)
Soit $f, g, h : E \to \mathbb{R}^n$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *un point d'accumulation de* E.
Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$ *et* $\exists \alpha > 0$

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) 0 < \|x - x_0\| \leq \alpha$$

Alors $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existe et est egale a* l.

Lecture 6: Fonctions continues

Wed 10 Mar

3.2 Caracterisation de limite par suites

Theorème 15 (Limites/Suites)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *un point d'accumulation de* E. *La limite* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ *si et seulement si pour toute suite suite* $\left\{x^{(k)}\right\} \subset E$ *qui converge vers* x_0, *on a* $\lim_{k\to+\infty} f(x^{(k)}) = l$.

Preuve
Soit $\left\{x^{(k)} : \lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = x_0\right\}$, *on sait que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ *donc*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in E, \|x - x_0\| < \delta, |f(x) - l| < \epsilon$$

il existe N *tq* $\forall k > n$ *tq* $\left\|x^{(k)} - x_0\right\| < \delta$
Si la limite $\lim_{k\to+\infty} f(x^{(k)}) = l$ *pour toute suite* $x^{(k)}$.
Par l'absurde, supposons que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *n'existe pas.*

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E, x \neq x_0 : \|x - x_0\| < \delta$$

et

$$|f(x) - l| \geq \epsilon$$

□

Si on prend $\delta = \frac{1}{k}$, *alors* $\exists x^{(k)} \neq x_0 : \left\|x^{(k)} - x_0\right\| < \frac{1}{k}$ *tel que* $|f(x^{(k)}) - l| \geq \epsilon$.
Or cette suite $x^{(k)}$ *converge vers* x_0, $\lightning$

3.3 Proprietes de l'operation de limite

Soit $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E et $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$, alors l'operation de limite est lineaire, respecte les regles de multiplication.

Theorème 16 (Critere de Cauchy)
Idem qu'en analyse I.

3.4 Fonctions a valeurs dans R^m

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Definition 19 (Limite)
On dit que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \overrightarrow{l} \in \mathbb{R}^m$ *existe si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E \setminus \{x_0\}, 0 < \|x - x_0\| < \delta$$

on a

$$\|f(x) - l\| < \epsilon$$

De plus, chaque composante de f converge vers la composante correspondante de la limite.

4 Fonctions continues

Definition 20 (Continuite en un point)
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, $f : E \to \mathbb{R}^m$, et $x_0 \in E$.
Si x_0 est un point d'accumulation de E, on dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Si x_0 est un point isole, on admet que f est continue en x_0

4.0.1 Definitions Equivalentes

- $\forall \epsilon > 0, \exists \delta : \forall x \in E, \|x - x_0\|, \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$
- pour toute suite $x^{(k)} \subset E$ qui converge vers x_0 on a que $\lim_{k \to +\infty} f(x^{(k)}) = f(x_0)$

Definition 21 (Continuite sur E)
On dit que $f : E \to \mathbb{R}^m$ est continue sur E si elle est continue en tout point $x \in E$.
Dans ce cas, on note $f \in C^0(E)$

Definition 22 (continuite uniforme sur E)
On dit que f est uniformement continue sur E si $\forall \epsilon$, $\exists \delta$ tel que $\forall x \in E, \forall y \in E$ $\|y - x\| < \delta$, on a $\|f(y) - f(x)\| < \epsilon$

Evidemment, la continuite uniforme implique la continuite.

Lecture 7: Prolongement par continuite

Mon 15 Mar

4.1 Prolongement par continuite

Definition 23 (Prolongement par continuite)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continue, avec $E \neq \overline{E}$, soit $x_0 \in \overline{E} \setminus E$. Une fonction $\tilde{f} : E \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}^m$ est appellee un prolongement si $\tilde{f}$ est continue en x_0 et

coincide avec f sur E.

Le prolongement par continuite est uniquement defini par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in E$ et $\tilde{f}(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$ si la limite existe.

> **Theorème 17 (Prolongement par continuite sur l'adherence)**
> *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et $f : E \to \mathbb{R}^n$ continue sur E. Supposons que $\forall x \in \overline{E} \setminus E$ la limite $\lim_{y \to x} f(y)$ existe. Alors on peut definir un prolongement $\tilde{f} : \overline{E} \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{f}(x) = f(x) \forall x \in E$ et $\tilde{f}(x) = \lim_{y \to x} f(y)$ sinon, de plus $\tilde{f}$ est continue sur $\overline{E}$.*

Preuve
Si $x \in E$, $f(x)$ est continue en x donc $\tilde{f}(x) = f(x)$ est continue en x. On a

$$\tilde{f}(x) = \lim_{y \to x, y \in E} f(y) = \lim_{y \to x, y \in E} \tilde{f}(y)$$

Pour montrer que $\tilde{f}$ est continue en x, il faut montrer que $\tilde{f}(x) = \lim_{y \to x, y \in \overline{E}} \tilde{f}(y)$
Il faut montrer que pour toute suite $x^{(k)} \subset \overline{E}$ convergeant en $x \in \overline{E} \setminus E$ on a

$$\lim_{k \to +\infty} \tilde{f}(x^{(k)}) = \tilde{f}(x)$$

On construit une deuxieme suite $y^{(k)}$ convergent vers x.
Si $x^{(k)} \in E$, alors $y^{(k)} = x^{(k)}$.
Si $x^{(k)} \in \overline{E} \setminus E$ on peut toujours trouver une valeur $y^{(k)} \in E$ tel que $\left\| y^{(k) - x^{(k)}} \right\| \leq 2^{-k}$, $\left\| f(y^{(k)} - \tilde{f}(x^{(k)})) \right\| \leq 2^{-k}$.
On aura donc

$$\left\| y^{(k)} - x \right\| \leq \left\| y^{(k)} - x^{(k)} \right\| + \left\| x^{(k)} - x \right\|$$

Ainsi $y^{(k)} \subset E$ converge vers x, et ainsi

$$\lim_{k \to +\infty} \tilde{f}(x^{(k)}) = \lim_{k \to +\infty} (\tilde{f}(x^k) - \tilde{f}(y^k)) + \lim_{k \to +\infty} \tilde{f}(y^{(k)}) = \lim_{k \to +\infty} \tilde{f}(y^{(k)}) \qquad \square$$

> **Theorème 18**
> *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide $f : E \to \mathbb{R}^n$ uniformement continue. Alors f peut etre prolongee par continuite sur $\overline{E}$ et le prolongement $\tilde{f} : \overline{E} \to \mathbb{R}^m$ est uniformement continu.*

Definition 24
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, $f : E \to \mathbb{R}$ Si $\sup f = \infty$ on dit que f n'est pas bornee superieurement.
Si $M < \infty$ on appelle M la borne superieure de f.
S'il existe $x_M \in E, f(x_M) = M$ alors on dit que M est le maximum de f sur E et x_M est un point maximum de f. Meme definition pour borne inferieure.

Theorème 19
Soit E non vide et compact, $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint son maximum et son minimum sur E.

Preuve
Par l'absurde f n'est pas bornee, il existe $x^{(k)}$ tel que $|f(x^{(k)})| > k$
Mais E est compact, donc il existe une sous-suite $x^{(k_i)}$ qui converge, or f est continue, donc

$$\lim_{i\to+\infty} f(x^{(k_i)}) = f(x) < \infty \lightning$$

Supposons que f n'atteint pas ses bornes
Il existe $x^{(k)}$ qui converge vers le sup, or E est ferme. □

Theorème 20
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, compact, connexe par arcs, et $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint toutes les valeurs entre son minimum et maximum.

Preuve
f est continue sur un compact donc f atteint son min et son max.
Puisque E est connexe, il existe γ un chemin du minimum au maximum. On conclut par TVI sur la fonctionm $f \circ \gamma$ □

Theorème 21
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et compact avec $f : E \to \mathbb{R}^m$ continue. Alors f est uniformement continue sur E.

Lecture 8: Derivee partielles et directionnelle

Wed 17 Mar

5 Derivees de fonctions a plusieurs variables

5.1 Derivees Directionelles

Definition 25 (Derivees directionnelle)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{x_0} \in \mathring{E}$ et $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur arbitraire.
On dit que f est derivable dans la direction $\overrightarrow{v}$, au point x_0, si

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

existe et on note $D_v f(x_0)$.

Si on prend $\|\overrightarrow{v}\|$ (norme euclidienne) , alors on appelle $D_v f(x_0)$ la derivee directionnelle de f dans la direction $\overrightarrow{v}$ au point x_0.
en particulier, on peut prendre $\overrightarrow{v} = e_i$, dans ce cas on utilise la notation

$$D_{e_i} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$$

et on appelle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ la i-eme derivee partielle de f au point x_0.

Definition 26 (Gradient)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x_0 \in \overset{\circ}{E}$.
Si toutes les derivees partielles de f en x_0 existent, alors on appelle le vecteur gradient

$$\nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^n, \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Definition 27 (Matrice Jacobienne)
On appelle matrice Jacobienne $Df(x_0) \in \mathbb{R}^{1\times n}$

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

5.2 Fonctions Differentiables

Definition 28 (Differentiabilite)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overset{\circ}{E}$. On dit que f est differentiable (ou derivable) en x_0 si il existe une application lineaire $L_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et une fonction $g : E \to \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + L_{x_0}(x - x_0) + g(x) \forall x \in E$$

et $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\|x-x_0\|} = 0$.

Theorème 22
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differentiable en $x_0 \in \overset{\circ}{E}$, alors

- *Toutes les derivees partielles de f en x_0 existent.*
- *On a*

$$L_{x_0}(x - x_0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - x_0) = Df(x_0)(x - x_0)$$

- *Toutes les derivees directioneelles existent et*

$$D_v f(x_0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)v_i = \nabla f(x_0)^T \overrightarrow{v} = Df(x_0)\overrightarrow{v}$$

- *f est continue en x_0.*

Preuve

- *On a*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0) + L_{x_0}(x_0 + te_i - x_0) + g(x_0 + te_i)}{t} \end{aligned}$$

$$= L_{x_0}(e_i) + \lim_{t\to 0} \frac{g(x_0+te_i)}{t}$$
$$= L_{x_0} a_i$$

— *On a*

$$f(x) = f(x_0) + L_{x_0}(x - x_0) + g(x)$$

Donc

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x\to x_0} L_{x_0}(x - x_0) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)$$

—

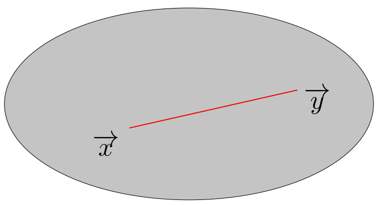
$$D_v f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{Df(x_0)tv + g(x_0+tv)}{t}$$
$$= Df(x_0)\overrightarrow{v}$$

□

Lecture 9: Derivees secondes

Wed 24 Mar

Cas scalaire :
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $x, y \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ derivable sur E.



On denote par $[x, y]$ le segment (ferme) entre x et y et $]x, y[$ le segment ouvert entre x et y.

Theorème 23 (Theoreme des accroissements finis dans $\mathbb{R}^n$)
Soit $x, y \in E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$, alors il existe $z \in [x, y]$ tel que

$$f(y) - f(x) = \nabla f(z)^T (y - x) = Df(z)(y - x)$$

Preuve
Soit $g(t) = f(x + t(y - x))$ pour $t \in [0, 1]$.
On a alors

$$g'(t) = \frac{d}{dt} g(t) = \frac{d}{dt} f(\phi(t))$$

ou $phi(t) = x + t(y - x)$.
Puisque f et ϕ sont derivables, on conclut que g est aussi derivable.
Donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= Df(\phi(t)) \cdot D\phi(t) \\ &= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t(y - x))(y_i - x_i) \\ &= \nabla f(x + t(y - x))^T (y - x) = Df(x + t(y - x))(y - x) \end{aligned}$$

Le taf applique a g donne $\exists s \in]0, 1[$ tel que

$$g(1) - g(0) = g'(s)$$

Donc

$$f(y) - f(x) = Df(x + s(y - x))(y - x) \qquad \square$$

On conclut en posant $z = x + s(y - x)$.

Le cas vectoriel :

Theorème 24 (Taf dans le cas vectoriel)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
On essaie de representer $f(y) - f(x)$ a l'aide des derivees de f.
On peut ecrire TAF pour chaque composante, mais les z_k ne sont en general pas les memes.
Cependant, on peut toujours ecrire pour $f \in C^1(E)$

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 Df(x + s(y - x))(y - x) ds$$

5.3 Derivees d'ordre superieur

Definition 29 (Derivees partielles secondes (cas scalaire))
Soit $f : E \to \mathbb{R}$, E ouvert.
Supposons que pour un indice $i = \{1, \dots n\}$ fixe, la derivee partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existe $\forall x \in E$.

Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admet la derivee partielle selon x_j, alors on dit que f a une derivee partielle seconde en x et on note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(x)$$

Definition 30 (Matrice hessienne)
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tel que toutes les derivees partielles existent que toutes les derivees secondes existent

$$H_f(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_1})(y) & \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_2})(y) & \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_1})(y) & \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_2})(y) & \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_3}(\frac{\partial f}{\partial x_1})(y) & \frac{\partial}{\partial x_3}(\frac{\partial f}{\partial x_2})(y) & \dots \end{pmatrix}$$

Definition 31 (Espace $C^2(E)$)
On dit que $f : E \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 si toutes les derivees partielles secondes sont continues.

Definition 32 (Derivees directionnelles secondes)
Soit $v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$. Alors, etant donne $D_v f : E \to \mathbb{R}$, on peut essayer de calculer la derivee directionnelle de $D_v f$ dans la direction $w \in \mathbb{R}^n$.
Si une telle derivee exise, on dit que f admet une derivee directionnelle seconde dans les directions v et w au point x et on note

$$D_{wv} f(x) = D_w(D_v f)(x)$$

Lemme 25
Soit $f \in C^2(E)$, E ouvert et $v, w \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\| = \|w\| = 1$.
Alors $D_{wv} f$ existe en tout $x \in E$ et

$$\begin{aligned} D_{wv} f(x) &= w^T H_f(x) v \\ &= \sum_{i=1}^n w_i (\sum_{j=1}^n H_f(x)_{ij} v_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) w_i v_j \end{aligned}$$

Preuve
Si $f \in C^2$ alors $f \in C^1$, alors $D_v f(x) = \nabla f(x)^T v = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i$.
Mais puisque $f \in C^2$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^1 \forall i$, donc

$$\begin{aligned} D_w(D_v f)(x) = \nabla(D_v f)^T w &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(D_v f) w_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)) v_j w_i \end{aligned} \quad \square$$

Ce qui donne le resultat desire.

Theorème 26 (Theoreme de Schwarz)
Soit $f : E \to \mathbb{R}$. Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ fixes.
Supposons que $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent sur E et sont continues en $x \in E$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

Lecture 10: Derivees d'ordre superieur

Mon 29 Mar

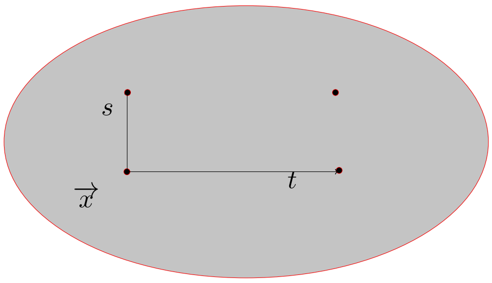


Figure 1 – thmschwarz

Preuve
Soit $s, t > 0$ suffisamment petit tel que

$$x + se_i, x + te_j, x + se_i + te_j \in E$$

Posons

$$\begin{aligned}
\Delta(s,t) &= f(x + se_i + te_j) - f(x + se_i) - f(x + te_j) + f(x) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + se_i)t - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)t \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j} st \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} f(x + te_j)s - \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)s
\end{aligned}$$

Plus formellement, on peut ecrire

$$\Delta(s,t) = (f(x + se_i + te_j) - f(x + se_i)) - (f(x + te_j) - f(x))$$

On definit

$$g(\xi) = f(x + \xi e_i + te_j) - f(x + \xi e_i)$$

et donc

$$\Delta(s,t) = g(s) - g(0)$$

et g est derivable car f est derivable

$$g'(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \xi e_i + te_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \xi e_i)$$

par le TAF, on a

$$\begin{aligned} g(s) - g(0) &= g'(\tilde{s})s \\ &= (\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \tilde{s}e_i + te_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \tilde{s}e_i))s \end{aligned}$$

On definit maintenant

$$\phi(y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \tilde{s}e_i + ye_j)$$

Alors on a

$$\Delta(s,t) = (\phi(t) - \phi(0))s$$

A nouveau, ϕ est derivabe, et donc on a

$$\begin{aligned} \Delta(s,t) &= \phi'(\tilde{t})ts \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}(x + \tilde{s}e_i + \tilde{t}e_j)ts \end{aligned}$$

Si on prend $t = s$, on a

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2}\Delta(s,s) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\left(x + \tilde{s} + \tilde{t}e_j\right)s^2\right)$$

On peut appliquer exactement le meme raisonnement dans l'autre sens, et on obtient le resultat desire. $\square$

5.4 Derivees d'ordre superieur

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, $f : E \to \mathbb{R}$ et on fixe $i_1, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, n\}$. On definit la derivee partielle par rapport aux variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}$, on note alors

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \ldots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_p}}(\ldots(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}})))(x)$$

Corollaire 27

Soit $i_1, \dots, i_p$ fixe et σ une permutation des nombres $\{1, \dots, p\}$.
Si $\frac{\partial^p}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}}$ et $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_{\sigma(p)}} \dots \partial x_{i_{\sigma(1)}}}$ existent et sont continues en x pour toute permutation alors ils sont egaux

5.5 Developpement limite et formule de Taylor

On veut generaliser la definition pour la dimension 1, on veut un polynome de degre p dans les variables $(x_1, \dots, x_n)$, en utilisant la notation multi-entiers, on note

$$p(x) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n),|\alpha|\leq 2} c_\alpha x^\alpha$$

De maniere generale, on peut donc ecrire

$$q(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,|\alpha|\leq p} c_\alpha x^\alpha$$

Le developpement limite d'ordre p d'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ autour d'un point $x \in \overset{\circ}{E}$, aura donc la forme

$$f(y) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,|\alpha|\leq p} c_\alpha (y-x)^\alpha + R_p(y)$$

Ou R_p satisfait

$$\lim_{y\to x} \frac{R_p(y)}{\|y-x\|^p} = 0$$

Soit $f : E \to \mathbb{R}$, $f \in C^{p+1}(E)$, E un ouvert non vide et soient $x, y \in E$ tel que $[x.y] \in E$, soit $g(t) = f(x+t(y-x))$, pour $t \in [0,1]$, on voit que $g \in C^{p+1}([0,1])$. On peut donc ecrire

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \dots + \frac{g^p(0)}{p!}t^p + R_p(y)$$

On a donc

$$g'(t) = \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x_t)\frac{d(x_t)i_1}{dt} = \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(xt)(y_{i_1} - x_{i_1}) = \sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(y-x)^\alpha$$

De meme, on trouve

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}f(x_t)) \\ &= \sum_{|\alpha|=2} \frac{2!}{\alpha!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha}(x_t)(y-x)^\alpha \end{aligned}$$

La formule de Taylor s'ecrit donc

$$\begin{aligned} f(y) = g(1) &= \sum_{k=0}^{p} \frac{g^k(0)}{k!} t + R_p(y) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{k!} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(x)(y-x)^\alpha + R_p(1) \end{aligned}$$

La formule de lagrange donne

$$R_p(1) = \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x + \theta(y-x))(y-x)^\alpha$$

Lecture 11: Integrales qui dependent de parametres

Wed 31 Mar

6 Integrales qui dependent de parametres

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$, soit $f : I \times E \to \mathbb{R}$, $t \in I$ et $x = (x_1, \ldots)$ tel que $\forall x \in E$ $\int_I f(t, \overrightarrow{x})dt$ existe.
On peut definir la fonction $g : E \to \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{x} \to g(x) = \int_I f(t, \overrightarrow{x})dt$$

— Si f est continue sur $I \times E$ est-ce que g est continue ? Autrement dit, pour $x_0 \in E$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \int_I f(t, \overrightarrow{x})dt \underbrace{=}_{?} \int_i \lim_{x \to x_0} f(t, x)dt = g(x_0)$$

— Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe sur $I \times E$ est-ce que $\frac{\partial}{\partial x_i} g$ existe sur E et

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \underbrace{=}_{?} \int_I \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x)dt$$

Exemple
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t, x) \to x^2 e^{-x^2 t}$
Soit

$$g(x) = \int_0^\infty x^2 e^{-x^2 t} dt$$

Pour $x = 0$, $f(t, 0) = 0 \forall t$, $g(0) = 0$, *pour* $x \neq 0$,

$$g(x) = (-e^{-x^2 t})|_{t=0}^{\infty} = 1$$

ainsi, g *n'est pas continue.*

6.1 Integrales sur un intervalle ferme borne

Theorème 29

Soit $E \in \mathbb{R}^n$ ouvert et

$$f : [a,b] \times E \to \mathbb{R}$$

continue.

Alors la fonction $g : E \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_a^b f(t,x)dt$$

est bien definie $\forall x \in E$ et est continue sur E..

Preuve

Pour tout $x \in E$, la fonction $t \to f_x(t)$ est continue et donc integrable.
Montrons que g est continue sur E.
Fixons $x_0 \in E$, $\exists \eta > 0 \overline{B}(x_0, \eta) \subset E$.
Alors la restriction de f a $A = [a,b] \times \overline{B}(x_0, \eta)$.
Donc A est compact, et donc $f|_A$ est uniformement continue.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta \in]0, \eta] : \forall (s,y), (t,x) \in A, |s-t| \leq \delta, \|y-x\| \leq \delta$$

On a

$$|f(s,y) - f(t,x)| \leq \epsilon$$

En particulier, on peut choisir $s = t, y = x_0$, alors

$$\begin{aligned}|g(x) - g(x_0)| &= |\int_a^b f(t,x) - f(t,x_0)dt| \\ &\leq \int_a^b |f(t,x) - f(t,x_0)|dt \\ &\leq \epsilon(b-a)\end{aligned}$$

Remarque

— *Le theoreme est valable aussi si l'ensemble E est ferme, il suffit de considerer $\overline{B}(x, \delta) \cap E$ et meme pour n'importe quel sous-ensemble E.*

Theorème 31

Soit a, b fini, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, et $f : [a,b] \times E \to \mathbb{R}$ continue tel que, pour i fixe

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : [a,b] \times E \to \mathbb{R}$$

existe et est continue.

Alors $g(x) = \int_a^b f(t,x)dt$ existe pour tout x et $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$ existe pour tout x et

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} f(t,x)dt$$

Preuve

Soit $x_0 \in E$ et $\eta > 0 : \overline{B}(x_0, \eta) \subset E$, on definit

$$A = [a,b] \times \overline{B}(x_0, \eta) \text{ un compact}$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_A$ est uniformement continue.
On a donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in]0, \eta] : \forall t \in [a,b], \forall x \in \overline{B}(x_0, \delta)$$
$$|\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$$

On veut montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{s \to 0} \frac{g(x_0 + se_i) - g(x_0)}{s}$$

existe et est egal a

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0)dt$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&|\frac{g(x_0+se_i)-g(x_0)}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0)dt| \\
&= |\frac{1}{s}\int_a^b f(t,x_0+se_i) - f(t,x_0)dt - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0)dt| \\
&= |\int_a^b \frac{1}{s}\int_0^s \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x - +\sigma e_i)d\sigma - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0)dt| \\
&= |\int_a^b \frac{1}{s}\int_0^s \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0+\sigma e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0)d\sigma dt| \\
&\leq \int_a^b \frac{1}{|s|}\int_0^s \underbrace{|\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0+\sigma e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_0)|}_{\leq \frac{\epsilon}{b-a}} d\sigma dt \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

□

6.2 Integrales avec des bornes variables

Soit

$$g(x) = \int_{a)(x)}^{b(x)} f(t,x)dt$$

On suppose que

$$f :]\alpha, \beta[\times E \to \mathbb{R}$$

et que

$$a, b : E \rightarrow]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$$

Theorème 32
Soit E un ouvert non vide et supposons que tutes les derivees partielles de x_i existent et sont continues pour tout i, de plus supposons que a, b sont $C^1(E)$, alors $g \in C^1(E)$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial b}{\partial x_i}(x) f(b(x), x) - \frac{\partial a}{\partial x_i} f(a(x), x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) dt$$

Sans preuve.

Idee de la demonstration : Reecrire

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{a(x)}^{c} f(t, x) dt + \int_{c}^{b(x) f(t,x)} dt \\ &= G(b(x), x) - G(a(x), x), \text{ avec } G(s, x) = \int_{c}^{s} f(t, x) dt \end{aligned}$$

On montre que $G \in C^1$, alors $g \in C^1$ et donc

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} G(b(x), x) - \frac{\partial}{\partial x_i} G(a(x), x)$$

6.3 Integrales generalisees

Cas $I = [a, b[$ En general, on a pas la continuite de $g(x)$.

Definition 33
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide et $f : [a, b[\times E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On dit que $\int_a^b f(t, x) dt$ converge uniformement sur E si $\int_a^b f(t, x) dt$ existe $\forall x$ et $\forall \epsilon > 0 \exists \bar{c} \in]a, b[$ (independant de x) tel que

$$\forall c \in [\bar{c}, b[\text{ et } \forall x \in E, |\int_c^b f(t, x) dt| \leq \epsilon$$

Theorème 33
Soit $f : [a, b] \times E \rightarrow \mathbb{R}$ continue et l'integrale $\int_a^b f(t, x) dt$ converge uniformement sur E. Alors la fonction $g(x) = \int_a^b f(t, x) dt$ existe $\forall x \in E$ et est continue sur E.
De plus si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe, et est continue sur $[a, b[\times E$, et $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) dt$ converge uniformement, alors $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ existe et est continue sur E.

L'idee de la demonstration est

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(x_0)| &= |\int_a^b (f(t,x) - f(t,x_0))dt| \\
&\leq \int_a^{\overline{c}} |f(t,x) - f(t,x_0)|dt + \int_{\overline{c}}^b |f(t,x) - f(t,x_0)|dt \\
&\leq \int_a^{\overline{c}} |f(t,x) - f(t,x_0)|dt + 2\epsilon
\end{aligned}$$

Et on s'est ramene au cas d'un intervalle ferme.

Remarque

Si il existe $h : [a,b[\to \mathbb{R}$ integrable et telle que

$$|f(t,\overrightarrow{x})| \leq h(t)$$

Alors f est uniformement integrable.

Lecture 12: Fonctions Bijectives et diffeomorphismes

Mon 12 Apr

7 Fonctions Bijectives

Soit $\overrightarrow{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to F \subset \mathbb{R}^n$.
Si $\overrightarrow{f}$ est une bijection entre E et F alors $\forall \overrightarrow{y} \in F, \exists ! \overrightarrow{x} \in E : f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y}$
On peut donc definir une application inverse $\overrightarrow{g} : F \to E$ tel que $\forall \overrightarrow{y} \in F, f(g(\overrightarrow{y})) = \overrightarrow{y}$ et de maniere equivalente, $\forall x \in E, g(f(x)) = x$

Pourquoi etudier les bijections ?

- **Exemple 1**
  On souhaite resoudre le probleme $f(x) = y$ pour un $y \in F$ donne. Si f est une bijection, on sait qu'il existe une solution.

- **Changement de variable**
  Soit $f : E \to F$ bijective et $\phi : F \to \mathbb{R}$.
  On peut reecrire ϕ en fonction de variables $x \in E$, $\tilde{\phi} = \phi \circ f$, donc $x \mapsto \tilde{\phi}(x) = \phi(f(x)), \forall x \in E$.
  Vice versa etant donne $\tilde{\phi} : E \to \mathbb{R}, \overrightarrow{x} \mapsto \tilde{\phi}(x)$.
  On peut la reecrire en fonction de $y \in F$.
  On aura donc
  $$\phi(y) = \tilde{\phi}(g(y))$$
  On utilise ceci, en partie pour les coordonnees polaires.

Definition 34 (Homeomorphisme)

Soit $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non-vides. On dit que $f : E \to F$ est un homeomorphisme si elle est bijective et f et son inverse $g : F \to E$ sont continues.

Definition 35 (Diffeomorphisme)
Soit $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non-vides. On dit que $f : E \to F$ est un diffeomorphisme global si elle est bijective et f et son inverse $g : F \to E$ sont C^1.
De maniere plus generale, on dit que f est un $k-$diffeomorphisme si f et son inverse sont de classe C^k.

Definition 36 (Diffeomorphisme local)
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide et $x_0 \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.
On dit que f est un diffeomorphisme local en x_0, si il existe un ouvert $U \subset E$ contenant x_0 et un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ contenant $y_0 \in f(x_0)$ tel que $\overrightarrow{f} : U \to V$ est un diffeomorphisme.

Clairement, si f est un diffeomorphisme global, c'est en particulier un diffeomorphisme local en tout point $x \in E$, mais la reciproque n'est pas vraie en general. On a toutefois le resultat suivant

> **Theorème 35**
> *Soit $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ouverts non vides et $f : E \to F$ bijective et un diffeomorphisme local en tout point $x \in E$. Alors, f est un diffeomorphisme global.*

Question

Sous quelles conditions, $\overrightarrow{f}$ est elle un diffeomorphisme local en $x \in E$.
Dans le cas $n = 1$, f est un diffeomorphisme local en $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction affine

$$\overrightarrow{f}(x) = Ax + b$$

Quand est-ce que f est inversible, ou, etant donne $y \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = y$ a une solution unique, si et seulement si $\det A \neq 0$

De maniere plus generale, vu que f est C^1, on a

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + R_f(\overrightarrow{x})$$

Autour de x_0, on a donc

$$f(x) \approx f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$$

et donc f est un diffeormorphisme local si et seulement si $\det(Df(x_0)) \neq 0$

> **Theorème 36 (Condition necessaire d'inversion locale)**
> *Soit $f : E subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, avec E ouvert non vide, un diffeomorphisme local en x_0. Alors,* $\det(Df(x_0)) \neq 0$.

Preuve
Par definition de diffeomorphisme local, il existe un ouvert $U \subset E$ contenant x_0 et un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ contenant $y_0 = f(x_0)$ tel que $f : U \to V$ est une bijection et soit $g : V \to U$ la fonction inverse de classe C^1 par hypothese.
Puisque $g(f(x)) = x \forall x \in U$, on a

$$D(g(f(x))) = Dg(f(x))Df(x) = \mathrm{Id}$$ □

Et donc $Df(x_0)$ est inversible.

Theorème 37
Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ ferme et $\phi : K \to \mathbb{R}^n$ telle que
- $\phi(K) \subset K$
- *Il existe $\rho \in]0,1[$ tel que $\forall x, y \in K$*

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \rho \|x - y\|$$

(dans ce cas, on dit que l'application est contractante)
Alors ϕ possede un unique point fixe $\exists! v \in K$ tel que $v = \phi(v)$

Definition 37 (Norme spectrale)
On definit

$$|||A||| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\|$$

Definition 38 (Norme de frobenius)
On note

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2}$$

Lemme 38
Soit a, b finis et $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ continue. Alors

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

Theorème 39 (Condition suffisante d'inversion locale)
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide, $f : E \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $x_0 \in E$. Si $\det Df(x_0) \neq 0$, alors f est un diffeomorphisme local en x_0. De plus si $g : V \to U$ est un inverse local, avec $U \subset E$ un ouvert contenant x_0 et V

un ouvert contenant $y_0 = f(x_0)$, on a

$$Dg(f(x)) = Df(x)^{-1} \forall x \in U$$

On va utiliser le theoreme du point fixe de Banach.

Preuve

On montre l'existence d'un inverse local.
Par hypothese $x \to Df(x)$ est continue. Donc

$$\exists r_1, \det(Df(x_0)) \neq 0 \forall x \in B(x_0, r) \cap E$$

Considerons

$$x \to \mathrm{Id} - Df(x_0)^{-1} Df(x) =: A(x)$$

On a a nouveau que $A(x)$ est continue et $A(x_0) = 0$.
Donc, il existe $r_2 > 0$ tel que $\forall x \in B(x_0, r_2) \cap E \frac{-1}{2n} \leq A_{ij}(x) \leq \frac{1}{2n}$ Donc $\forall x \in B(x_0, r_2) \cap E \, |||A(x)||| \leq \|A(x)\|_F = \sqrt{\sum_{ij} A_{ij}(x)^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j} \frac{1}{4n^2}} = \frac{1}{2}$.
Donc il existe $r \leq \min\{r_1, r_2\}$ tel que

— $B(x_0, r) \subset E$
— $\det Df(x) \neq 0 \forall x \in B(x_0, r)$
— $|||A(x)||| \leq \frac{1}{2} \forall x \in B(x0, r)$

On veut montrer que f est localement inversible, donc $\forall y \in V \exists! x \in U : f(x) = y$.
On a

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff 0 = y - f(x) \\ &\iff 0 = Df(x_0)^{-1}(y - f(x)) \\ &\iff x = x + Df(x_0)^{-1}(y - f(x)) \end{aligned}$$

On a

$$D\phi^y(x) = D^y(x - Df(x_0)^{-1}(f(x) - y)) = A(x)$$

On montre donc que ϕ^y est contractante, donc

$$\forall x_1, x_2 \in \overline{B}(x_0, r)$$

On veut calculer

$$\begin{aligned} \|\phi^y(x_1) - \phi^y(x_2)\| &= \left\| \int_0^1 D\phi^y(x_1 + t(x_2 - x_1))(x_2 - x_1) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|D\phi^y(\ldots)(x_2 - x_1) dt\| \\ &\leq \int_0^1 |||D\phi^y(\ldots)||| \, \|x_2 - x_1\| \, dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\| \end{aligned}$$

□

Donc ϕ^y est contractante sur $B(x_0, r)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.
Il nous faut encore montrer que $\phi^y(\overline{B}(x_0, r)) \subset \overline{B}(x_0, r)$

Lecture 13: theoreme d'inversion locale

Wed 14 Apr

Preuve

On a montre l'existence d'une fonction inverse en trouvant un point fixe de la fonction

$$\phi^y(x) = x - (Df(x_0))^{-1}(f(x) - y)$$

Il existe $r > 0$ tel que

- $\overline{B}(x_0) \subset E$
- $|||D\phi^y(x)||| \leq \frac{1}{2}$
- $\det(Df(x)) \neq 0 \forall x \in \overline{B}(x_0, r)$

On a montre que pour tout point $y \in \mathbb{R}^n, \phi^y$ est contractante sur $\overline{B}(x_0, r)$ et que $\phi^y(\overline{B}(x_0, r)) \subset B(x_0, r)$ pour un $y \in B(y_0, \tilde{r})$.
On a donc l'existence d'un unique point $x \in B(x_0, r) : x = \phi^y(x) \iff f(x) = y$, ou encore

$$\forall y \in B(y_0, r) =: V \exists! x \in B(x_0, r) \cap f^{-1}(V) : f(x) = y$$

Or $B(x_0, r) \cap f^{-1}(V) =: U$ est un ouvert, et donc $f : U \to V$ est inversible et on peut donc definir une fonction inverse g.
Montrons maintenant que g est continue en montrant qu'elle est Lipschitz sur V. On veut montrer qu'il existe $L > 0$ tel que $\forall y_1, y_2 \in V$

$$\|g(y_1) - g(y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|$$

En notant $\|x_1 - x_2\|$ les preimages, on peut reecrire

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_2\| &= \|\phi^{y_1}(x_1) - \phi^{y_2}(x_2)\| \\
&\leq \|\phi^{y_1}(x_1) - \phi^{y_1}(x_2)\| + \|\phi^{y_1}(x_2) - \phi^{y_2}(x_2)\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| + \left\|Df(x_0)^{-1}(y_2 - y_1)\right\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| + \left|\left|\left|Df(x_0)^{-1}\right|\right|\right| \|y_2 - y_1\|
\end{aligned}$$

Et donc on a

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2 \left|\left|\left|Df(x_0)^{-1}\right|\right|\right| \|y_1 - y_2\|$$

On montre que g est de classe C^1 (en utilisant le fait que f est de classe C^1).
Soit $y, y_1 \in V$ et $x = g(y), x_1 = g(y_1)$.
On veut montrer que g est differentiable en y. On essaie d'ecrire un developpement limite de g en y.
On a

$$\underbrace{f(x_1)}_{y_1} = \underbrace{f(x)}_{y} + Df(x)(x_1 - x) + R_f(x_1)$$

$$Df(x)(x_1 - x) = y_1 - y - R_f(x_1)$$
$$x_1 - x = Df(x)^{-1}(y_1 - y) - Df(x)^{-1}Rf(x_1)$$
$$g(y_1) - g(y) = Df(x)^{-1}(y_1 - y) - \underbrace{Df(x)^{-1}R_f(x_1)}_{R_g(y_1)}$$

On veut montrer que $\lim_{y_1 \to y} \frac{R_g(y_1)}{\|y_1 - y\|} = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{y_1 \to y} \frac{R_g(y_1)}{\|y_1 - y\|} &\leq \lim_{y_1 \to y} \frac{\left|\left|\left|Df(x)^{-1}\right|\right|\right| \|R_f(x_1)\|}{\|y_1 - y\|} \\ &= \lim_{y_1 \to y} \left|\left|\left|Df(x)^{-1}\right|\right|\right| \frac{\|x_1 - x\|}{\|y_1 - y\|} \frac{\|R_f(x_1)\|}{\|x_1 - x\|} \\ &= \lim_{y_1 \to y} \left|\left|\left|Df(x)^{-1}\right|\right|\right| 2 \left|\left|\left|Df(x_0)^{-1}\right|\right|\right| \frac{\|R_f(x_1)\|}{\|x_1 - x\|} \end{aligned}$$

Donc g *est differentiable en* $y \in V$ *et*

$$Dg(y) = Df(x)^{-1} \text{ ou } x = g(y)$$

□

7.1 Fonctions Implicites et Hypersurfaces de $\mathbb{R}^n$

Considerons une fonction $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

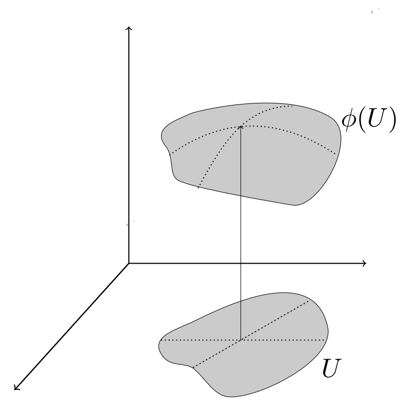


Figure 2 – hypersurfaces

En particulier si ϕ est differentiable en $x_0 \in U$, alors

$$\phi(x) = \underbrace{\phi(x_0) + D\phi(x_0)(x - x_0)}_{T^1_\phi(x) \text{ fonction affine en } x} + R_\phi(x)$$

Donc le graphe $G(T^1_{\phi,x_0}) = \left\{z \in \mathbb{R}^{n+1}, z = (x,y), x \in \mathbb{R}^n, y \in T^1_{\phi,x_0}\right\}$ se reecrit comme l'ensemble

$$\left\{z \in \mathbb{R}^{n+1} : y - y_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi(x_0)}{\partial x_i}(x - x_0) = 0\right\}$$

En definissant

$$v = (-\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_0), \dots, 1), z = (x_1, x_2, \dots, x_n, y)$$

On peut ecrire

$$G(T^1_{\phi,x_0}) = \left\{z \in \mathbb{R}^{n+1} : v \cdot (z - z_0) = 0\right\}$$

Ce graphe definit un hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ appele l'hyperplan tangent au graphe de ϕ en $z_0 = (x_0, y_0)$ On essaie de resoudre le probleme inverse, ie. decrire le plan d'une surface comme le plan d'une fonction.

Definition 39 (Hypersurfaces de classe C^k)
On dit que $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est une hypoersurface de classe C^k autour de z_0 si elle est le graphe d'une fonction de classe C^k autour de z_0, cad, qu'il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contenant z_0, un indice $i \in \{1, \dots, n+1\}$, un ouvert $U \in \mathbb{R}^n$ et une fonction $\phi : U \to \mathbb{R}$ tel que

$$\Sigma \cap V = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i = \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})\right\}$$

En particulier, on considere des surfaces definies par

$$\Sigma = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = 0\right\}$$

On se demande quand est-ce que Σ est une hypersurface (au moins localement autour d'un point z_0).
Si Σ est une hypersurface autour d'un point $z_0 \in \Sigma$, il existe $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contenant z_0 et $\phi : U \to \mathbb{R}$ tel que

$$\Sigma \cap V = \{x : x_i = \phi(x_{ni})\}$$

Alors on dit que la fonction ϕ est definie implicitement par la relation $f(x) = 0$.