

**Exercice 1.**

Soit  $\phi : A \rightarrow B$  un homomorphisme d'anneaux. Montrer que:

- (a) Si  $a \in A$  inversible, alors  $\phi(a)$  est inversible.
- (b) Si  $a, b \in A$  tel que  $a \sim b$ , alors  $\phi(a) \sim \phi(b)$ .
- (c) Si  $a \in A$  irréductible, déterminer si  $\phi(a)$  est irréductible ou non.

**Exercice 2.** (a) Soit  $A$  un anneau intègre. Si  $a_1, \dots, a_n \in A$  sont des racines distinctes de  $f(x) \in A[x]$ , montrer que  $\prod_{i=1}^n (x - a_i)$  divise  $f(x)$ .

- (b) Soient  $p$  et  $q$  deux nombres premiers impairs et distincts dans  $\mathbb{Z}$ . Montrer que le polynôme  $t^2 - [1]_{pq}$  de  $(\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z})[t]$  possède quatre racines distinctes  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ , mais que  $(t - a_1)(t - a_2)(t - a_3)(t - a_4)$  ne divise pas  $t^2 - [1]_{pq}$ .
- (c) Soient  $f, g \in \mathbb{Z}[t]$  des polynômes primitifs. Montrer que si  $f$  divise  $g$  dans  $\mathbb{Q}[t]$ , alors  $f$  divise  $g$  dans  $\mathbb{Z}[t]$ .
- (d) Décomposer les polynômes  $X^4 + 1$  et  $X^8 - 1$  sur les anneaux  $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{F}_2$  et  $\mathbb{F}_{11}$ .

**Exercice 3 (Polynômes irréductibles I).** (a) Montrer que  $\frac{2}{9}x^5 + \frac{5}{3}x^4 + x^3 + \frac{1}{3}$  est un polynôme irréductible de  $\mathbb{Q}[x]$ .

- (b) Montrer que  $x^4 + [2]_5$  est un polynôme irréductible de  $\mathbb{F}_5[x]$  et conclure que  $x^4 + 15x^3 + 7$  est un polynôme irréductible de  $\mathbb{Q}[x]$ .
- (c) Montrer que  $x^2 + y^2 + 1$  est un polynôme irréductible de  $\mathbb{R}[x, y]$ .
- (d) Montrer que  $x^2 + y^2 + [1]_2$  n'est pas un polynôme irréductible de  $\mathbb{F}_2[x, y]$ .
- (e) Montrer que  $y^4 + x^3 + x^2y^2 + xy + 2x^2 - x + 1$  est un polynôme irréductible de  $\mathbb{Q}[x, y]$ .
- (f) Montrer que  $4x^3 + 120x^2 + 8x - 12$  est un polynôme irréductible de  $\mathbb{Q}[x]$ .
- (g) Montrer que  $t^6 + t^3 + 1$  est un polynôme irréductible de  $\mathbb{Q}[t]$ .
- (h) Montrer que  $y^4 + xy^3 + xy^2 + x^2y + 3x^2 - 2x$  est un polynôme irréductible de  $\mathbb{Q}[x, y]$ .

**Exercice 4 (Polynômes irréductibles II).**

Soit  $f(t) = t^4 + 4t^3 + 3t^2 + 7t - 4$  dans  $\mathbb{Z}[t]$ .

- (a) Montrer que  $\pi_2(f)$ , la réduction modulo 2, n'est pas irréductible.
- (b) Montrer que  $\pi_3(f)$ , la réduction modulo 3, n'est pas irréductible.
- (c) Utiliser les décompositions des parties précédentes pour conclure néanmoins que  $f$  est irréductible.

## 1 Supplementary exercise

Cet exercice était l'exercice bonus de l'année 2021.

**Exercice 5.** (a) Montrer que  $F[[t]]$  est un anneau factoriel où  $F$  est un corps.

(b) Montrer que  $x^{2021} - t^{42} \in (F[[t]])[x]$  est irréductible.

(c) Montrer que  $x^{2021} + y^{2021} - t^{42} \in (F[[t]])[x, y]$  est irréductible.