Topologie

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Introduction

Mon 21 Feb

1 Quotients topologiques

Un espace topologique (X, τ) est ecrit X si la topologie est claire.
Le singloton $\{*\}$ est note $*$.
La boule unite de $\mathbb{R}^n$ est notee D^n et la version ouverte sera $int(D)^n$.

1.1 La topologie quotient

But : Construire de nouveaux espaces a l'aide d'espaces connus en identifiant des points.
Soit X un espace, Y un ensemble et $q : X \to Y$ surjective.

Definition 1 (Topologie quotient)
La topologie quotient sur Y est la topologie des $V \subset Y$ tel que $q^{-1}(V)$ est ouvert dans X .

Remarque
q est alors continue et on verifie que c'est une topologie.

Exemple
$X = [0, 1]$ et $Y = (0, 1) \cup \{*\}$ et q l'application qui envoie 0 et 1 sur $*$.
Alors q est surjective et donc Y peut etre muni de la topologie quotient et est homeomorphe a un cercle.
On definit $f : S^1 \to Y : e^{2\pi it} \mapsto t$ si $0 < t < 1$ et $*$ sinon.

Proposition 3
Soit $q : X \to Y$ une application continue, surjective et ouverte, alors q est un quotient.

Proposition 4
Soit $V \subset Y$ un sous-ensemble tel que $q^{-1}(V)$ est ouverte dans X. Comme q est surjective, alors $V = q(q^{-1}(V))$ et c'est un ouvert car q envoie les ouverts sur les ouverts.

Proposition 5
Une composition de quotients est un quotient.

Theorème 6
La topologie quotient est la plus fine qui rend q continue. De plus, pour $g : Y \to Z$, g est continue si et seulement si $g \circ q$ est continue.

Proposition 7
Si $q : X \to Y$ est continue, la preimage d'un ouvert de Y est ouvert dans X.
La topologie quotient est celle qui contient le plus d'ouvert possibles.
Clairement, si g est continue, alors $g \circ q$ l'est aussi.
Si $g \circ q$ est continue, soit $W \subset Z$ un ouvert, alors $(g \circ q)^{-1}(W) = q^{-1}(g^{-1}(W))$ est ouvert et par definition $g^{-1}(W)$ est ouvert dans Y.

Proposition 8
Le quotient d'un compact est compact

> **Preuve**
> *L'image d'un compact est compacte.* □

1.2 Relations d'equivalence

Si $q : X \to Y$ est un quotient, on definit sur X une relation d'equivalence $\sim$ par $x \sim x'$ ssi $q(x) = q(x')$, alors les points de Y sont les classes d'equivalence $[x]$.

Definition 2
Si $\simeq$ est une relation d'equivalence sur X, alors $X/\sim$ est l'espace quotient des classes d'equivalence.

Proposition 9 (Proprietes universelles)
Soit $\sim$ une relation d'equivalence sur X et $f : X \to Z$ tel que $x \sim x' \implies f(x) = f(x')$, alors il existe un unique $\overline{f} : X/\sim \to Z$ tel que $\overline{f} \circ q = f$

> **Preuve**
> *Pour que le triangle commute, on doit poser $\overline{f}([x]) = f(x)$ et l'application est bien definie par hypothese et donc unique.*
> *On sait que $\overline{f}$ est continue ssi $\overline{f} \circ q$ l'est.* □

Definition 3
Si $A \subset X$, on pose $x \sim x' \iff x = x'$ ou $x, x' \in A$. Le collapse X/A est l'espace quotient $X/\sim$

Par exemple $I/\{0, 1\}$.

Exemple

$$D^n/\partial D^n = D^n/S^{n-1} = S^n$$

Pour deux espaces bien connus, pointes (X_1, x_1) et (X_2, x_2), on peut construire un nouvel espace en identifiant x_1 et x_2.

Definition 4 (Reunion disjointe)
Soit I un ensemble, X_α un espace pour chaque $\alpha \in I$.
La reunion disjointe $\bigcup X_\alpha$ est l'ensemble $\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \times \{\alpha\}$ dont la topologie est engendree par les sous-ensemble de la forme $U_\alpha \times \{\alpha\}$

Definition 5
Soit I un ensemble et pour tout $\alpha \in I$, (X_α, x_α) un espace pointe.
Le wedge $\bigvee_\alpha X_\alpha$ est le collapse de la reunion disjointe ou on identifie les points de base

Definition 6
Soit X un espace. Le cylindre $Cyl(X)$ est $X \times I$ et le cone CX est le collapse du cylindre a la base.

1.3 Separation et quotients

On definit sur $\mathbb{R} \times \{0;1\}$ une relation d'equivalence $\sim$ par $(x,0) \sim (x,1)$ si $x \neq 0$.
Le quotient est la droite a deux origines dont on ne peut separer les deux origines $(0,1)$ et $(0,0)$ par des ouverts.
Regardons le graphe de $\sim$ dans $\mathbb{R} \times \{0;1\} \times (\mathbb{R} \times \{0,1\})$ (ie. une copie de 4 plans)

Proposition 11
Si $X/\sim$ est separe, alors le graphe de $\sim$ dans $X \times X$ est ferme.

Preuve
La preimage de $\Delta \subset X/\sim \times X/\sim$ par $q \times q$ est $\Gamma_\sim$.
Comme Δ est ferme, sa preimage aussi. $\square$

Lecture 2: Conditions de Separation

Sat 26 Feb

1.4 Conditions de separation du quotient

On donne une condition necessaire et une condition suffisante pour que le quotient soit separe

Proposition 12
Soit $\sim$ une relation d'equivalence sur un espace X. Si $X/\sim$ est separe, le graphe Γ de la relation est ferme dans $X \times X$

Preuve
Si $X/\sim$ est separe, par un lemme, la diagonale $\Delta \subset X/\sim \times X/\sim$ est ferme.

Considerons $q \times q : X \times X \to X/\sim \times X/\sim$. *Cette application est continue et donc* $(q \times q)^{-1}(\Delta)$ *est un ferme de* $X \times X$. *Or cette preimage est l'ensemble des paires de points* $(x, y) \in X \times X$ *tq* $q(x) = q(y) \iff x \sim y$. $\square$

On donne maintenant une condition suffisante permettant de conclure qu'un quotient est separe.

Proposition 13
Soit $\sim$ *une relation d'equivalence sur un espace* X *separe. Si* $q^{-1}(q(x))$ *est compact pour tout point* $x \in X$ *et de plus que pour* $F \subset X$ *ferme* $q^{-1}(q(F))$ *est ferme, alors le quotient est separe.*

Preuve
Soit $\overline{x} = q(x)$ *et* $\overline{y} = q(y)$ *deux points distincts de* $X/\sim$.
Les saturations $q^{-1}(\overline{x}), q^{-1}(\overline{y})$ *sont des compacts par hypothese.*
Comme X *est separe, on peut separer des compacts avec des ouverts disjoints* U *et* V.
On a donc

$$q^{-1}(\overline{x}) \subset U, q^{-1}(\overline{y}) \subset V \text{ et } U \cap V = \emptyset$$

Posons $E = X \setminus U, F = X \setminus V$ *deux fermes de X.*
Par hypothese, les saturations $q^{-1}(q(E))$ *et* $q^{-1}(q(F))$ *sont fermes. Ainsi* $U' = X \setminus q^{-1}(q(E))$ *et* $V' = X \setminus q^{-1}(q(F))$ *sont des ouverts. On observe que* $E \subset q^{-1}(q(E)), F \subset q^{-1}(q(F))$, *alors* $U' \subset U, V' \subset V$.
De plus $q^{-1}(q(x)) \subset U'$ *et* $q^{-1}(q(y)) \subset V'$.
Il reste a montrer que $q(U')$ *et* $q(V')$ *sont ouverts dans* $X/\sim$ *et disjoints.*
Pour le premier point, il suffit de verifier que $q^{-1}(q(U'))$ *est ouvert dans* X.
On pretend que $q^{-1}(q(U')) = U'$.
En effet, $U' \subset q^{-1}(q(U'))$ *est toujours vrai, il faut donc montrer l'inclusion inverse.*
Soit $u \in q^{-1}(q(U'))$, *donc* $q(u) \in q(U')$. *Donc* $q(u) \notin q(E)$ *et donc* $u \in U'$
Le meme resultat est vrai pour V'.

Il faut donc finalement encore montrer que $q(U')$ *et* $q(V')$ *sont des voisinages ouverts, de* $\overline{x}$ *et* $\overline{y}$ *disjoints.*
Supposons qu'il existe $u' \in U', v' \in V'$ *tel que* $q(u') = q(v')$. *Alors* $u' \in q^{-1}(q(v')) \subset q^{-1}(q(V')) = V'$.
Donc $U' \cap V' \neq \emptyset$, *contradiction.* $\square$

Lecture 3: Groupes topologiques

Mon 28 Feb

Corollaire 14
Soit $A \subset X$ un sous-espace compact d'un espace X separe. Alors le collapse $\mathfrak{X}A$ est separe.

Preuve
Il suffit de verifier les proprietes du theoreme.
Soit $\overline{x} \in \mathfrak{X}A$.
Si $x \in A, q^{-1}(x) = A$ est compact. Si $x \notin A, q^{-1}(\overline{x}) = \{x\}$ qui est compact.
Soit F un ferme de X, alors si $F \cap A = \emptyset$, on a que $q^{-1}(q(F)) = F$ ferme, sinon $F \cap A \neq \emptyset$ et alors

$$q^{-1}(q(F)) = F \cup A$$

Comme A est compact et X separe, alors A ferme. □

Exemple
Soit $\sim$ une relation d'equivalence sur $\mathbb{R}^2$ defini par $(x, y) \sim (x', y') \iff (x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2$.
Alors

$$\mathbb{R}^2\sim$$

est un tore, separe, or la proposition ne s'applique pas car $q^{-1}(0,0) = \mathbb{Z}^2$.

Definition 7 (Espaces projectifs)
L'espace projectif reel $\mathbb{R}P^n$ est le quotient de S^n par la relation antipodale $x \sim y \iff x = \pm y$ pour $x, y \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Exemple
- $\mathbb{R}P^0 = \mathfrak{S}^0\sim = *$, $\mathbb{R}P^1 = \mathfrak{S}^1\sim \simeq S^1$.
- *De plus $\mathbb{R}P^2 = S^2/\sim$ est le plan projectif*

Proposition 17
$\mathbb{R}P^n$ est compact et separe

Suit immediatement des propositions.
L'analogue complexe donne

Definition 8 (Espace projectif complexe)
L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ est le quotient de $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par la relation $x \sim y \iff \exists \alpha \in S^1$ tel que $x = \alpha y$.

De meme, pour les quaternions $\mathbb{H}$, on peut definir $\mathbb{H}P^n$, pour les octonions on peut construire $\mathbb{O}P^0, \mathbb{O}P^1 \simeq S^8, \mathbb{C}P^2$

1.5 Quotients par des actions de groupe

Definition 9 (Groupe topologique)
Un groupe topologique est un groupe G tel que les applications de multiplication $\mu : G \times G \to G$ et l'inverse $\iota : G \to G$ sont continues.

Tout groupe peut etre vu comme un groupe topologique discret.

Exemple
Le cercle unite $S^1 \subset \mathbb{C}$ muni de la multiplication complexe est un groupe topologique

Remarque
Les seules spheres qui sont des groupes topologiques sont S^0, S^1, S^3

Lemme 20
Si $H < G$ est un sous-groupe d'un groupe topologique G, la topologie induite en fait un groupe topologique.

Definition 10
Une action d'un groupe topologique G sur un espace X est une application $\mu : X \times G \to X$ telle que

$$\mu(x, 1_G) = x \forall x \in X \text{ et } \mu(x, gg') = \mu(\mu(x,g), g')$$

Definition 11
Soit μ une action de G sur X, l'espace des orbites $\mathfrak{X}G$ et l'espace quotient de X par la relation $x \sim y \iff \exists g \in G$ tel que $y = \mu(x, g)$

Remarque
Si $H < G$ est un groupe topologique, alors H agit sur G par multiplication a droite et $\mathfrak{G}H$ est l'espace des orbites gH. Si H est un sous-groupe normal, ce quotient est un groupe.

Proposition 22
Soit μ une action d'un groupe topologique G sur un espace X, alors

1. *$q : X \to \mathfrak{X}G$ est ouverte*
2. *Si X est compact, le quotient est compact*
3. *Si X et G sont compact et separe, alors $\mathfrak{X}G$ aussi.*

Preuve
Soit $U \subset X$ *ouvert,* $q(U)$ *est ouvert car* $q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{g \in G} U \cdot g$ *et* $U \cdot g$ *est ouvert car la translation est continue et est meme un homeomorphisme.*
La propriete 2 est immediate.

On considere $X \times X \times G \to X \times X$ *en envoyant* $(x, y, g) \mapsto (x, yg)$*, cette application est continue.*
Le graphe Γ *de la relation definie par* μ *est l'image de* $\Delta \times G$*.*
Comme X *est separe,* Δ *est ferme donc compact et* G *est compact.*
Ainsi Γ *est compact dans* $X \times X$ *separe donc* Γ *est ferme.*
Soient xG *et* yG *deux orbites differentes, ie.* $(x, y) \notin \Gamma$*.*
Il existe donc des ouverts $x \in U, y \in V$ *tel que* $U \times V \cap \Gamma = \emptyset$*.*
Comme q *est ouverte,* $q(U), q(V)$ *sont des voisinages ouverts des orbites* xG *et* yG *respectivement. On conclut en remarquant que ces images sont disjointes.*
Sinon on aurait zG *commun, ie.* $zg \in U, zg' \in V$ *pour* $g, g' \in G$ *et alors* $(zg, zgg^{-1}g') \in \Gamma \cap (U \times V)$ $\square$

1.6 $SO(n)$

Proposition 23
Soit G *compact et* X *separe. Soit* μ *une action transitive de* G *sur* X*.*
Alors, si G_x*, alors*

$$\mathfrak{G}G_x = X$$

pour tout $x \in X$*.*

Preuve
On definit $\mu_x : G \to X$ *envoyant* $g \mapsto xg$*, continue.*
On observe que μ_x *envoie* G_x *sur* x *et par transitivite,* μ_x *est surjective.*
Par la propriete universelle du quotient, μ_x *passe au quotient.*
$\bar{\mu}_x$ *est une bijection continue. C'est un homeo car* $\mathfrak{G}G_x$ *est compact,* X *separe.* $\square$

Lecture 4: Attachements de Cellules

Mon 07 Mar

1.7 Recollements

On construit de nouveaux espaces a l'aide de pieces plus simple.
On se donne $f : A \to X, g : A \to Y$ deux applications. On recolle X et Y le long de A

Definition 12 (Recollement)
Le recollement de X *et* Y *le long de* A *est le quotient de* $X \coprod Y$ *par la relation d'equivalence engendree par* $f(a) \sim g(a) \forall a \in A$

Remarque
Il ne suffit pas d'identifier $f(a) \sim g(a)$ pour que la relation soit une relation d'equivalence.
Pour garantir la transitivite, on a des zigszags d'equivalence $f(a) \sim g(a) = g(b) \sim f(b) = f(c) \sim g(c) \dots$

Exemple
Si $A = *$, $f(*) = x_0 \in X, g(*) = y_0 \in Y$, alors le recollement $X \cup_* Y$ est le wedge $X \vee Y$

On notera le recollement $X \cup_A Y$.
Si $q : X \coprod Y \to X \cup_A Y$ est le quotient, alors l'inclusion $i_1 : X \to X \coprod Y$ induit $i = q \circ i_i : X \to X \cup_A Y$ et de meme pour l'inclusion de Y.

Proposition 26
Le recollement $X \cup_A Y$ est le pushout de $Y \leftarrow A \to X$.

> **Preuve**
> *On doit montrer l'existence et l'unicite de θ.*
> *Puisque chaque element de $X \cup_A Y$ admet un representant dans X ou Y, on doit poser $\theta([x]) = \alpha(x) \forall x \in X$ et $\theta([y]) = \beta(y) \forall y \in Y$.*
> *On montre l'existence.*
> *Posons $\Theta : X \coprod Y \to Z$ l'application determinee par α et β.*
> *On verifie que Θ est compatible avec $\sim$. Soit $a \in A$, alors $\Theta(f(a)) = \alpha(f(a)) = \beta(g(a)) = \Theta(g(a))$.*
> *Ainsi Θ passe au quotient et induit θ, qui est donc bien continue.* $\square$

Des maintenant, on suppose que $g : A \subset Y$ est l'inclusion d'un sous-espace ferme.

Lemme 27
Soit $C \subset Y$, alors la saturation de C est

$$f(C \cap A) \coprod (C \cup f^{-1} \circ f(C \cap A))$$

> **Preuve**
> *On va regarder ce qui se passe pour tout $c \in C$.*
> *Si $c \notin A$, alors $q^{-1}(q(c)) = \{c\}$, sinon $q^{-1}(q(c))$ contient $f(c) \in X$ et $f^{-1}(f(c)) \subset Y$* $\square$

Lemme 28
Si $C \subset X$, $q^{-1}(q(C)) = C \coprod f^{-1}(C) \subset X \coprod Y$

Preuve
Comme ci-dessus, si $c \in C$ n'est pas dans l'image de f , on a $q^{-1}(q(c)) = \{c\}$, sinon on a $c \in X$ et $f^{-1}(c) \subset A \subset Y$ $\square$

Proposition 29
Soient X et Y deux espaces separes, $g : A \subset Y$ l'inclusion d'un compact, alors $X \cup_A Y$ est separe.

Preuve
On observe que $X \coprod Y$ est separe. Avant d'appliquer le critere de separabilite, on montre que l'application quotient est fermee. Comme un ferme de $X \coprod Y$ est la reunion disjointe de deux fermes on a deux cas.
Si $C \subset X$ ferme, alors $q(C)$ est ferme $\iff$ $q^{-1}(q(C))$ est fermee. Par le lemme ci-dessus,

$$q^{-1}(q(C)) = C \coprod f^{-1}(C)$$

qui sont fermes.
Si $C \subset Y$, alors $q^{-1}(q(C)) = f(C \cap A) \coprod (C \cup f^{-1}(f(C \cap A)))$ $\square$

On a $f(C \cap A)$ compact et donc ferme puisque Y est separe.
Pour conclure, on verifie les deux conditions du critere.
Pour conclure, on verifie les deux conditions du critere, la saturation d'un ferme est fermee grace aux preparatifs.
Soit $z \in X \coprod Y$, on doit montrer que $q^{-1}(q(z))$ est compact, les lemmes ci-dessus permettent de conclure parce que si $z = a \in A, f^{-1}(f(a))$ est un ferme d'un compact et est donc compacte.

1.8 Attachement de cellules

Ici $g : A \subset CA = {}^{A \times I}\!/\!_{A \times 1}$.
Soit $f : A \to X$, le recollement $X \cup_A CA$ aussi note $X \cup_f CA$ est appele attachement d'une A-cellule sur X le long de f.
Si $A = S^{n-1}$ alors cet attachement est celui d'une n-cellule

Remarque
$CS^{n-1} \simeq D^n$, on note $X \cup_f CS^{n-1} = X \cup_f e^n$ ou $X \cup_f D^n$ et on appelle $e^n \simeq D^n$ une n-cellule (fermee.)

Proposition 31
Si X est separe et A est compact et separe, alors $X \cup_f CA$ est separe.
Si en plus X est compact

Preuve
Le premier point suit de la proposition precedente car CA est separe, le 2eme point suit du critere de compacite car $X \coprod Ca$ est compact. $\square$

Definition 13 (Suspension)
La suspension de A est le quotient ${A \times I}/{(a,0) \sim (a',0) \text{ et } (a,1) \sim (a',1)}$

Lecture 5: Homotopies et groupe fondamental

Sat 12 Mar

2 Homotopies et Groupe Fondamental

2.1 Homotopie

Definition 14 (Homotopie entre applications)
Soient $f, g : X \to Y$ des applications. On dit que f et g sont homotopes et on note $f \simeq g$ s'il existe une application $H : X \times I \to Y$ tel que $H(-,0) = f$ et $H(-,1) = g$.
On appelle H une homotopie.

Proposition 32
La relation $\simeq$ est une relation d'equivalence.

Preuve

Reflexivite

Suit du fait qu'on peut definir une homotopie constante.

$$H : X \times I \to Y : (x,t) \mapsto f(x)$$

Symetrie

La symetrie suit du fait qu'on peut parcourir une homotopie dans l'autre sens.
Ainsi, soit $H : X \times I \to Y$ une homotopie entre f et g. On pose

$$G : X \times I \to Y : (x,t) \mapsto H(x, 1-t)$$

Transitivite

Supposons que $H : X \times I \to Y, G : X \times I \to Y$ sont des homotopies, $f \simeq g \simeq h$. On construit une homotopie $K : X \times I \to Y$ entre f et h

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} H(x, 2t) \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1) \text{ si } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

On voit que K est continue et montre que $f \simeq h$. □

Definition 15 (Classes d'homotopie)
On note $[X, Y]$ *l'ensemble des classes d'homotopies d'applications* $f : X \to Y$.
C'est donc $C(X,Y)/_{\simeq}$.

Lecture 6: Homotopies

Mon 14 Mar

Definition 16 (Espaces Homotopes)
Deux espaces X *et* Y *sont homotopes ou homotopiquement equivalent, note* $X \simeq Y$*, s'il existe* $f : X \to Y$ *et* $g : Y \to X$ *tel que*

$$g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X \text{ et } f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$$

On dit que f *et* g *sont des equivalences homotopiques et qu'elles sont inverses homotopiques l'une de l'autre.*

Proposition 33

$$CX \simeq *$$

Preuve
Posons $CX = X \times I/_{X \times 0}$.
On pose $f : * \to CX$ *par* $f(*) = [x, 1]$ *et on prend* $g : CX \to *$.
On a $g \circ f = \mathrm{Id}_*$*, il reste a voir que* $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_{CX}$*. On construit une homotopie* $H : CX \times I \to CX$*, defini par*

$$H([x, t], s) \mapsto [x, ts]$$

C'est une application (trivialement bien definie) et c'est une homotopie entre $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_{CX}$ □

Remarque
Si f *et sont des applications pointees* $(X, x_0) \to (Y, y_0)$ *qui sont homotopes au sens non pointe, il est faux en general que* $f \simeq_* g$ *au sens pointe.*
Par exemple $f, g : S^1 \to S^1 \bigvee S^1$, f *est donnee par* a *et* g *est donnee par* $b \star a \star b^{-1}$ *(concatenation).*
On a que $f \simeq g$ *pour* $f_t : S^1 \to S^1 \bigvee S^1$ *donne par* $b|_{[1-t,1]} \star a \star \overline{b}|_{[0,t]}$

2.2 Attachement de cellules

But : $f \simeq g : A \to X$, alors

$$X \cup_f CA \simeq X \cup_G CA$$

Proposition 35
Si $f, g : A \to X$ sont homotopes, alors $X \cup_f CA \simeq X \cup_g CA$

Preuve
Pour comparer les deux espaces $Y = X \cup_f CA$ et $Y' = X \cup_g CA$, on construit des applications $h : Y \to Y'$ et $k : Y' \to Y$.
On definit $h : Y \to Y'$ par la propriete universelle du pushout.
On choisit $\iota' : X \to Y'$ l'application donnee par la construction de Y'.
On pose

$$\alpha : CA \to Y'[a,t] \qquad \mapsto \begin{cases} H(a, 2t) \text{ si } t \leq \frac{1}{2} \\ [a, 2t-1] \text{ si } t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si $t = 0$, alors $H(a, 0) = f(a)$ donc le diagramme commute.
Si $t = \frac{1}{2}, H(a, 1) = g(a)$. On construit k comme h, mais avec $H(-, 1-t)$.
On doit montrer que $k \circ h \simeq \mathrm{Id}_Y$ (et de meme $h \circ k \simeq \mathrm{Id}_{Y'}$) □

Corollaire 36
Si $f, g : S^{n-1} \to X$ et $f \simeq g$, alors $X \cup_f e^n \simeq X \cup_g e^n$.

Corollaire 37
Si $f : A \to X$ est homotope a c_x constante, alors $X \cup_f CA \simeq X \bigvee \sum A$

2.3 Homotopie et π_0

Soit $S_0 = \{\pm 1\}$ sphere unite de $\mathbb{R}$.
On etudie les applications pointees de $(S_0, 1) \to (X, x_0)$. Ainsi $f(1) = x_0$ et $f(-1) = x$ abritraire.
Deux telles applications f donnee par x et f' donee par x' sont homotopes (au sens pointe) s'il existe une homotopie pointee

$$H : S^0 \times I \to X$$

H est donc simplement donne par $H(-1, t)$, un chemin dans X de x vers x'.
Donc x et x' sont dans la meme composante connexe par arcs.

Proposition 38
L'ensemble $\pi_0 X$ des composantes connexes par arcs est en bijection avec $[S_0, X]_*$

2.4 Invariance Homotopique

Soit $f : X \to Y$, elle induit une application

$$f_* : [A, X] \to [A, Y]$$

$$[g] \mapsto [f \circ g]$$

Preuve

On veut montrer que l'application ci-dessus est bien definie.

Si $g \sim g'$ via l'homotopie G, alors $f \circ g \simeq f \circ g'$ via $f \circ G$ □

Proposition 39

Si $f \simeq f' : X \to Y$, alors $f_* = f'_*$.

Preuve

On choisit $H : X \times I \to Y$ une homotopie entre $H(-,0) = f$ et $H(-,1) = f'$.

On veut montrer que $f \circ g \simeq f' \circ g$.

On construit $G : A \times I \to X \times I \to Y$ en envoyant

$$(a,t) \mapsto (g(a),t) \mapsto H(g(a),t)$$ □

Corollaire 40

Si $X \simeq Y$, alors $[A,X] \simeq [A,Y]$ comme ensembles.

Preuve

On a $f : X \to Y$ et $f' : Y \to X$ inverses homotopes l'une de l'autre. Alors $[A,X] \to [A,Y] \to [A,X]$ □

Lecture 7: Groupe Fondamental

Mon 21 Mar

2.5 Groupe Fondamental

Un lacet

$$\alpha : I \to X$$

est une application satisfaisant $\alpha(0) = x_0 = \alpha(1)$ ce qui signifie qu'il existe une application induite

$$\overline{\alpha} : S^1 \to X$$

Et on note alors

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1 X = [(S^1, 1), (X, x_0)]$$

$\pi_1 X$ a une structure de groupe donnee par la concatenation de lacets $\alpha \star \beta$

Definition 17 (Pinch and Fold)

L'application pinch

$$pinch : \sum A = {}^{A \times I}\!/\!{}_{\sim} \to {}^{\sum A}\!/\!{}_{A \times \frac{1}{2}} \simeq \sum A \vee \sum A$$

Definition 18 (Fold)
Le pliage est une application

$$\nabla : X \vee X \to X$$

definie par la propriete universelle du pushout du diagramme $X \leftarrow * \to X$ *avec le cone* $\mathrm{Id}_X : X \to X$

La concatenation de deux lacets $\alpha, \beta : S^1 \to X$ est representee par

$$\alpha * \beta : S^1 \xrightarrow{\text{pinch}} S^1 \vee S^1 \xrightarrow{\alpha \vee \beta} X \vee X \xrightarrow{\nabla} X$$

On a vu que la concatenation equipe $[S^1, X]_*$ d'une structure de groupe.
L'associativite du groupe fondamental revient a dire que le diagramma suivant commute : A REMPLIR

En fait le groupe fondamental π_1 est un foncteur $\top_* \to \mathrm{Gr}$, des espaces pointes vers les groupes

Proposition 41
Une application pointee $f : X \to Y$ *induit un homomorphisme de groupes* $f_* : \pi_1 X \to \pi_1$

Preuve
On sait que la postcomposition avec f *induit une application* $f_* : [S_1, X]_* \to [S_1, Y]_*$.
On montre que c'est un homomorphisme.
Soient $\alpha, \beta : S^1 \to X$*, pointees, alors le diagramme suivant commute A REMPLIR*

On a que 1 *et* 2 *commutent et 3 commute aussi par la propriete universelle*$\square$

On souhaite calculer $\pi_1(X \times Y)$, on note $C_*(S^1, X)$ l'ensemble des applications pointees $\alpha : S^1 \to X$.
Le groupe $\pi_1(X)$ en est un quotient $[S^1, X]_* = {C_*(S^1, X)}/{\simeq}$.
La propriete universelle du produit est qu'une application $\omega : S^1 \to X \times Y$ est donnee par ses projections $p_1 \circ \omega$ et $p_2 \circ \omega$, ie.

$$\begin{aligned} F : C_*(S^1, X) \times C_*(S^1, Y) &\to C_*(S^1, X \times Y) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (\omega : S^1 \to X \times Y) \end{aligned}$$

est une bijection d'inverse

$$G : C_*(S^1, X \times Y) \to C_*(S^1, X) \times C_*(S^1, Y)$$

donne par la projection.

Proposition 42
Le foncteur π_1 preserve les produits.

Preuve
Les bijections F et G passent au quotient.
On montre que si $\alpha \simeq \alpha', \beta \simeq \beta'$, alors $F(\alpha, \beta) \simeq F(\alpha', \beta')$ et de meme, si $\omega \simeq \omega'$, alors la postcomposition par p_i donne des applications homotopes.
La compatibilite avec la structure de groupes vient du fait que G est definie par $(p_1)_*$ et $(p_2)_*$ sur les deux composantes. □

2.6 Surfaces

Definition 19 (Surface)
Une surface S est un espace topologique connexe par arcs, compact, sans bord tel que tout point $s \in S$ admet un voisinage ouvert U homeomorphe a D^2 avec $\partial U \simeq S^1$

Definition 20 (Somme connexe)
Soient S et T deux surfaces, la somme connexe $S\#T$ est la surface obtenue en choisissant $s \in S, t \in T$, des voisinages $s \in U \simeq D^2$ et $t \in V$ et un homeomorphisme $f : \partial U \to S^1 \to \partial V$ et en recollant

$$S\#T = {}^{(S \setminus U) \coprod}\!\big/_{x \,\simeq\, f(x)} \quad \forall x \in \partial U$$

Remarque
$S\#T$ est bien defini (sans preuve), de plus

$$T\#S^2 \simeq T$$

Exemple
$T^2\#T^2$ est une surface de genre 2, un tore a deux trous.