Série 1

David Wiedemann, Nino Courtecuisse, Matteo Mohammedi

11 mars 2022

1

On montre la double implication.

$\Longleftarrow$

Pour montrer que p est une application quotient, il suffit de montrer que $F \subset B$ est fermé si et seulement si $p^{-1}(F)$ est fermé .
Puisque p est continue (c'est la composition de q avec l'inclusion $A \hookrightarrow X$), si F est fermé alors $p^{-1}(F)$ est fermé.

De plus, si $p^{-1}(F)$ est fermé, alors c'est un ensemble fermé saturé et par hypothèse il existe un fermé saturé $E \subset X$ tel que $E \cap A = p^{-1}(F)$ d'ou $q(E) \cap B = F$ et ainsi F est fermé.
On a alors bien que $q(E)$ est un fermé puisque E etait un fermé saturé.

$\Longrightarrow$

Supposons maintenant que p est un quotient, soit $F \subset A$ un fermé p-saturé.
Ainsi, puisque p est un quotient, $p(F)$ est un fermé de B.
On pose alors $E' = \operatorname{cl}_Y p(F)$, ie. l'intersection sur tous les fermés de Y contenant $p(F)$ et on définit $E = q^{-1}(E')$.
Remarquons d'abord que

- E est q-saturé, car c'est une préimage d'un ensemble de $Y = X/\sim$, et ainsi une reunion de classes d'équivalence
- E est fermé, en effet, c'est la préimage d'un fermé.

On prétend que $F = E \cap A$.
En effet, l'inclusion $F \subset E \cap A$ suit du raisonnement suivant :
Soit $f \in F$, alors $p(f) \in p(F) \subset \operatorname{cl}_Y(p(F))$, et donc $f \in p^{-1}(\operatorname{cl}_Y(p(F))) \subset q^{-1}(\operatorname{cl}_Y(p(F)))E$ et de plus $f \in A$ puisque $F \subset A$, on en deduit que $f \in E \cap A$.

On montre donc l'inclusion $F \supset E \cap A$.
Puisque $F \subset A$ est un fermé saturé, $p(F) \subset B$ est fermé et donc il existe un fermé $K \subset Y$ tel que $K \cap B = p(F)$ (par définition de la topologie quotient) et donc $q^{-1}(K) \cap A = F$.

De plus $E' = \mathrm{cl}_Y(p(F)) \subset K$ et donc $q^{-1}(E') \cap A \subset q^{-1}(K) \cap A = F$.
Ce qui montre la double inclusion des ensembles.

2

Comme indiqué sur piazza, on supposera que l'application p est un quotient, sinon l'énoncé est faux en prenant le contre exemple $X = \mathbb{R}, A = [0, 1)$ et $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.

Soit $A \subset X$ comme dans l'énoncé.
Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur X, on notera $\sim'$ la relation d'équivalence induite sur A.
On notera $\iota : A \hookrightarrow X$ l'inclusion et $q_A : A \to A/\sim'$, $q_X : X \to X/\sim$ les applications canoniques.
On montre le resultat en deux temps, on montrera que

- $q_X \circ \iota$ passe au quotient de q_A et induit une application $g : A/\sim' \to X/\sim$
- L'application q_A passe au quotient de $q_X \circ \iota$

et on conclura.

$q_X \circ \iota$ passe au quotient de q_A

En effet, si $a \sim' b \in A$, on a que $q_X \circ \iota(a) = q_X(a) = q_X(b)$ car $\sim'$ est la restriction de $\sim$, ainsi on a une application induite

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "q_X \circ \iota"] \arrow[d, "q_A"'] & X/\sim \\ A/\sim' \arrow[ur, dashed, "\exists! f"'] & \end{tikzcd}$$

q_A passe au quotient de $q_X \circ \iota$

Remarquons que $q_X \circ \iota = p$ et est donc par hypothese une application quotient.

On a bien que si $p(a) = p(b)$, alors $a \sim b \iff a \sim' b \iff q_A(a) = q_A(b)$ et on a une deuxieme application induite

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "q_X \circ \iota"] \arrow[d, "q_A"'] & A/\sim' \\ X/\sim \arrow[ur, dashed, "\exists! g"'] & \end{tikzcd}$$

Finalement, on obtient les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd}
X/{\sim} & \\
A \arrow[u, "q_X \circ \iota"] \arrow[r, "q_A"] \arrow[d, "q_X \circ \iota"'] & A/{\sim'} \arrow[ul, dotted, "\exists! f"'] \\
X/{\sim} \arrow[ur, dotted, "\exists! g"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A/{\sim'} & \\
A \arrow[u, "q_A"] \arrow[r, dashed, "q_X \circ \iota"] \arrow[d, "q_A"'] & X/{\sim} \arrow[ul, dotted, "\exists! g"'] \\
A/{\sim'} \arrow[ur, dotted, "\exists! f"'] &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, on a que $g \circ f \circ p = p$ et par une derniere application de la propriete universelle, on trouve que $g \circ f = \mathrm{Id}_{A/{\sim'}}$, le même raisonnement montre que $f \circ g = \mathrm{Id}_{X/{\sim}}$.
Ainsi f est un homeomorphisme ce qui conclut la preuve.

3

Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ décrite dans l'énoncé et soit $\sim'$ la relation restreinte a I.
On a clairement que $\sim'$ identifie les points 0 et 1 et donc $\sim'$ est la même relation d'équivalence que décrite dans l'énoncé.
On vérifie les deux hypotheses de la partie 2 de l'exercice

— $q|_A$ est bien surjectif, soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x - \lfloor x \rfloor \in I$ et $x - \lfloor x \rfloor \sim x$.

— Montrons que c'est une application quotient en appliquant le critère de la partie 1, soit F un fermé saturé de I, on prétend que la saturation de F dans $\mathbb{R}$ par $\sim$ reste un fermé.
En effet, puisque I est fermé dans $\mathbb{R}$, F est aussi un fermé dans $\mathbb{R}$.
On distingue deux cas :

Si $0 \in F$

On montre que le complément de la saturation de F est un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $b \in q^{-1}(q(F))^c = (F + \mathbb{Z})^c$, et soit $b \sim a$ avec $a \in I$, soit $U \ni a$ un ouvert dans I séparant a de F.
Alors la q-saturation de U est donnee par $\mathbb{Z} + U$ et contient donc b, de plus elle est clairement disjointe de $q^{-1}(q(F))$.

Si $0 \notin F$

Soit $b \in q^{-1}(q(F))$, si $b \notin \mathbb{Z}$, on considère le même ouvert U que ci-dessus et on le choisit disjoint de 0 et de 1 (ce qui est toujours possible puisque $F \cup \{0, 1\}$ reste un fermé).

Si $b \in \mathbb{Z}$, alors on choisit deux ouverts U et V de I disjoints de F tel que $0 \in U$ et $1 \in V$.

Il est alors clair que la saturation de $U \cup V$ dans $\mathbb{R}$ reste un ouvert qui sera disjoint de F.

Ainsi par la partie 1, on deduit que p est un quotient et ainsi on peut appliquer le critère établi en 2 et conclure que $\mathbb{R}/\sim \,= I/\sim' \,= I/\{0, 1\} = S^1$.