

Série 13

David Wiedemann

26 mai 2021

Soit $V(t)$ une primitive de $v(t)$, on peut réécrire l'équation différentielle par le théorème fondamental de l'analyse par :

$$\int_1^x v(s)ds = \frac{v(x)^2}{x}$$
$$V(x) - V(1) = \frac{v(x)^2}{x}$$

En dérivant par rapport à x , on trouve l'équation différentielle

$$v(x) = \frac{2v(x)v'(x)x - v(x)^2}{x^2}$$
$$v(x) = 2v'(x)x - v$$
$$v'(x) = \frac{v(x)}{2x} + \frac{1}{2}x$$

On voit facilement qu'une solution à l'équation différentielle homogène associée est de la forme

$$y(t) = C\sqrt{t}$$

On peut chercher une solution particulière à l'équation différentielle en considérant un polynôme quelconque de degré 2.

Soit $w(t) = at^2 + bt + c$, en substituant dans l'équation différentielle, on trouve

$$2at + b = \frac{at^2 + bt + c}{2t} + \frac{1}{2}t$$
$$2at + b = \frac{1}{2}at + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}t + \frac{c}{2t}$$

Ainsi, en comparant les exposants, on obtient la condition

$$2a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

De plus, il est clair que $c = b = 0$.

Ainsi, on trouve que $\frac{t^2}{3}$ est une solution particulière de l'équation différentielle.

On en déduit que la forme de la solution générale est

$$v(t) = \frac{t^2}{3} + Ce^{\frac{1}{4}t^2}$$

On utilisant la condition initiale que $v(1) = 0$, on déduit que

$$\frac{1}{3} + C\sqrt{1} = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{3}$$

Ainsi la solution à l'équation différentielle est

$$v(t) = \frac{t^2 - \sqrt{t}}{3}$$