Question Ouverte Mini-Examen 1

David Wiedemann

13 avril 2021

Supposons par l'absurde que $p(x)$ divise $q(x)$ sur E mais pas sur F.
Sans perte de généralité, on peut supposer que $\deg(p) > 0$ et que $\deg(q) > 0$, en effet, F étant un corps, il est trivial qu'un polynôme constant divise tout autre polynôme sur ce corps.
De même, on peut supposer que $p(x) \neq 0 \neq q(x)$, en effet, le polynome nul ne divise aucun autre polynome.
Par hypothèse, il existe $h(x) \in E[x]$ tel que

$$q(x) = p(x) \cdot h(x)$$

En appliquant la division Euclidienne des polynômes sur l'anneau $F[x]$, étant donné qu'on a supposé que $p(x)$ ne divise pas $q(x)$ sur $F[x]$, on trouve

$$\exists h'(x), r(x) \in F[x] \text{ tel que } q(x) = p(x) \cdot h'(x) + r(x)$$

où $\deg(r(x)) < \deg(p(x))$.
$h'(x)$ et $r(x)$ étant des polynômes sur $F[x]$, ce sont en particulier des polynômes sur $E[x]$ et ainsi on a

$$q(x) = p(x) \cdot h(x) = p(x) \cdot h'(x) + r(x)$$

Ou encore (car l'ensemble des polynômes est un anneau et qu'on peut donc appliquer la distributivité)

$$p(x) \cdot (h(x) - h'(x)) = r(x)$$

Or, par hypothèse, $h(x) \neq h'(x)$ (car sinon $h(x) \in F[x]$), et donc $\deg(h(x) - h'(x)) \geq 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \deg\left(p(x) \cdot (h(x) - h'(x)\right) &= \deg(r) \\ \deg(p(x)) + \deg\left(h(x) - h'(x)\right) &= \deg(r) \end{aligned}$$

et donc

$$\deg(r) \geq \deg(p(x))$$

Ce qui contredit la division Euclidienne.
Ainsi, on a une contradiction, et le résultat est démontré.