Série 3

David Wiedemann

8 octobre 2020

1

On construit une bijection de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\phi\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{N}\\ m &\to \begin{cases}2m \text{ si } m \geq 0\\ -2m+1 \text{ si } m < 0\end{cases}\end{aligned}$$

On considère que le nombre 0 est pair.
Pour vérifier que cette application définit une injection, on montre la surjectivité et l'injectivité.

Surjectivité

Soit $n \in \mathbb{N}$, si n pair, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Alors k est l'antécédent de k par ϕ.
Si n impair, $\exists j \in \mathbb{N}$ tel que $2j+1 = n$, on pose $k = -j$, alors $-2k+1 = n$ et k est l'antécédent de n.

Injectivité

Supposons $\exists k, j \in \mathbb{Z}$ tel que $\phi(k) = \phi(j)$. Si k et j sont de signe différent, alors soit $\phi(k)$ ou $\phi(j)$ est impair et donc l'égalité ne peut pas tenir.
Supposons donc $k, j > 0$, alors $\phi(k) = 2k$ et $\phi(j) = 2j$ donc $2k = 2j$ et $j = k$.
Si $k, j < 0$, alors $\phi(k) = -2k+1$ et $\phi(j) = -2j+1$ donc $-2k+1 = -2j+1 \Rightarrow k = j$.

On en déduit que l'application ϕ est bijective et que $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

2

Par Cantor-Schroeder-Bernstein, il suffit de trouver une injection de $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ et de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$.

Injection de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$

Soit

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{N} &\to \mathbb{N}^n \\ k &\to (k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ fois}}) \end{aligned}$$

Cette application est clairement injective car $(m, 0, \ldots, 0) = (j, 0, \ldots, 0)$ implique $m = j$.

Injection de $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$

Soit

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{N}^n &\to \mathbb{N} \\ (a_1, \ldots, a_n) &\to \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i} \end{aligned}$$

où $p_1, \ldots, p_n$ sont les n premiers nombres premiers.
L'injectivité de cette application suit directement de l'unicité de la décomposition en nombres premiers.
En effet, si $(a_1, \ldots, a_n) \neq (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{N}^n$, alors l'unicité implique que

$$\prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i} \neq \prod_{i=1}^{n} p_i^{b_i}$$

et donc l'application ϕ est injective.

On en déduit que $|\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}|$

3

On utilise à nouveau Cantor-Schroeder-Bernstein.

Injection de $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

L'application

$$\begin{aligned} K : \mathbb{N} &\to \mathbb{Q} \\ n &\to n \end{aligned}$$

est une injection.

Injection de $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$

On montre un résultat préliminaire.

Théorème 1. *Si $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles infini dénombrables, alors*

$$K = A_1 \times \ldots \times A_n \textit{ est infini dénombrable.}$$

Démonstration. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in K$.
Par hypothèse, $\exists \phi_1, \ldots, \phi_n$ des bijections $\phi_i : A_i \to \mathbb{N}, 0 < i \leq n$. L'application

$$\begin{aligned} \Phi : K &\to \mathbb{N}^n \\ (a_1, \ldots, a_n) &\to (\phi_1(a_1), \ldots, \phi_n(a_n)) \end{aligned}$$

est une bijection.
En effet, soit $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{N}^n$, alors $(\phi^{-1}(b_1), \ldots, \phi^{-1}(b_n)) \in K$ est un antécédent, unique, de $(b_1, \ldots, b_n)$ et il existe $\forall b_i \in \mathbb{N}, 0 < i \leq n$.
Par la partie 2, on sait qu'il existe une bijection de $\Psi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ et donc

$$\Psi \circ \Phi$$

est une bijection de $K \to \mathbb{N}$. □

On est pret à montrer l'injection de $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.
On construit d'abord une bijection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$.
Soit $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ la bijection définie précédemment et soit $t_1 : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ la bijection [1] :

$$t_1 : n \to n - 1$$

On peut donc, par le théorème 1, construire une bijection de $G : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$.

1. L'injectivité et la surjectivité de t_1 sont évidentes.

On définit la surjection [2]

$$
\begin{aligned}
Q : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} &\to \mathbb{Q} \\
(a, b) &\to \frac{a}{b}
\end{aligned}
$$

Par l'exercice 5, de la série 2, on peut construire une injection F

$$F : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Et donc, on obtient que

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}\,| &= |\mathbb{N}| \\
\Rightarrow |\mathbb{Q}| &\leq |\mathbb{N}|
\end{aligned}
$$

On conclut avec Cantor-Schroeder-Bernstein.

4

Théorème 2. *On montre que l'union infinie dénombrable d'ensembles infinis dénombrables est, au plus, infini dénombrable.*

Démonstration. Soit

$$K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$$

et soit $|E_i| \leq |\mathbb{N}|$.
Supposons de plus que $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$, et $E_k \neq \emptyset$
On dénote par s_{ik} le i-ème élément de E_k.
Soit S l'application définie par

$$S : \begin{aligned} K &\mapsto \mathbb{N}^2 \\ s_{ik} &\mapsto (i, k) \end{aligned}$$

Clairement, S est injective.
On a donc que

$$|K| \leq |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$$

et donc que

$$|K| \leq |\mathbb{N}|$$

Supposons maintenant que l'intersection n'est pas nécessairement vide, alors, par l'algorithme suivant, on peut se ramener au cas ci-dessus

2. La surjectivité suit du fait qu'à chaque fraction, on puisse assimiler un 2-uplet.

Pour i dans $\mathbb{N}$
Pour k entre 1 et $|E_k|$
Si s_{ik} apparait pour la deuxième fois
Supprimer la valeur s_{ik} de tous les $E_n, n \in \mathbb{N}$
Ajouter s_{ik} à l'ensemble U
Si $E_k = \emptyset$, alors supprimer E_i et réindexer.

Alors, on a

$$U \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i = K$$

Qui est une réunion infinie dénombrable d'ensembles finis.
Donc on a que

$$|\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i| \leq |\mathbb{N}|$$

□

Montrons d'abord que l'ensemble des polynômes de degré n est de la même cardinalité que $\mathbb{Q}^n$ On dénote par $\mathbb{Q}_n[t]$ l'ensemble des polynômes dans $\mathbb{Q}[t]$ de degré n.
Soit $q(t) \in \mathbb{Q}_n[t]$.

$$q(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i t^{i-1}, \text{ avec } q_i \in \mathbb{Q}$$

Soit

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{Q}_n[t] &\to \mathbb{Q}^n \\ q(t) &\to (q_1, \ldots, q_n) \end{aligned}$$

Cette application est une bijection.

Surjectivité

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Q}^n$, alors le polynôme

$$a(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i t^{i-1}$$

est un antécédent de $(a_1, \ldots, a_n)$.

Injectivité

Soit $a(t), b(t) \in \mathbb{Q}[t], a(t) \neq b(t)$, alors $\exists 0 < i \leq n$ tq $a_i \neq b_i$ (on dénote avec $_i$ le i-ème coefficient du polynôme) , donc

$$Q(a(t)) = (a_1, \ldots, a_n) \neq Q(b(t)) = (a_1, \ldots, a_n)$$

Par la partie 3, on sait que $\mathbb{Q}$ est infini dénombrable, et donc, par le théorème 1, $\mathbb{Q}^n$ l'est aussi. On a donc :

$$|\mathbb{Q}_n[t]| = |\mathbb{Q}^n| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$$

est donc une bijection, et donc $\mathbb{Q}_n[t]$ est infini dénombrable.
Grâce au théorème 2, on sait donc que

$$|\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_i[t]| = |\mathbb{N}|.$$

Et donc l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$ est infini dénombrable.

Attention : le théorème montre que qu il y a une injection de l'union des polynômes dans $\mathbb{N}$, A CORRIGER

On pose

$$A = \{z \in \mathbb{C} | z \text{ algébrique } \}$$

Soit $a(t) \in \mathbb{Q}[t]$, on dénote par $S_{a(t)}$, l'ensemble des solutions de l'équation $a(t) = 0$.
On veut montrer que

$$A = \bigcup_{a(t)\in\mathbb{Q}[t]} S_{a(t)}$$

On montre la double inclusion.
Soit $z \in A$, alors $\exists Z(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tel que $Z(a) = 0$, donc $z \in S_{Z(t)}$, donc

$$z \in \bigcup_{a(t)\in\mathbb{Q}[t]} S_{a(t)}.$$

Soit

$$z \in \bigcup_{a(t)\in\mathbb{Q}[t]} S_{a(t)}$$

donc $\exists b(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tel que $b(a) = 0$, donc a algébrique, donc $a \in A$.

Or $S_{a(t)}$ est fini $\forall a(t) \in \mathbb{Q}[t]$ et donc, par le théorème 2, on a que

$$|\bigcup_{a(t)\in\mathbb{Q}[t]} S_{a(t)}| = |\mathbb{N}|$$

Donc l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.