Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-04-12 au 2021-04-16

Série 14 du mercredi 14 avril 2021

Exercice 1.

Définissons la fonction

$$F := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1) Montrer que l'application F admet une fonction inverse locale autour du point $(0,1)$, et que cette fonction inverse est de classe C^1.
2) F est-elle globalement inversible ?

Indication. Vous pouvez utiliser le théorème sur l'existence d'un inverse local.

Solution :

Calculons la matrice jacobienne de F et son déterminant[1] :

$$\mathrm{D}\,F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \implies \det(\mathrm{D}\,F(x,y)) = 4x^2 + 4y^2 \implies \det(\mathrm{D}\,F(0,1)) \neq 0. \tag{2}$$

Il existe donc une fonction inverse locale dans un voisinage du point $(0,1)$.

Cependant, F n'est pas inversible globalement puisque non-injective. Par exemple, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, les deux points (x,x) et $(-x,-x)$ sont différents mais ont même image par F : $(0, 2x^2)$. On peut néanmoins trouver une fonction inverse locale dans un voisinage de (x,x) et une fonction inverse locale dans un voisinage de $(-x,-x)$.

Exercice 2.

Soient $U, V, W \subset \mathbb{R}^n$ ouverts ; soient $\phi \in \mathrm{C}^1(U,V)$ et $\psi \in \mathrm{C}^1(V,W)$ deux difféomorphismes. Montrer que $\psi \circ \phi$ est un difféomorphisme.

Solution :

Nous savons que $\phi^{-1} \circ \psi^{-1} \in \mathrm{C}^1(W,U)$; montrons qu'elle est également l'inverse de $\psi \circ \phi$. Par associativité de la composition :

$$(\psi \circ \phi) \circ (\phi^{-1} \circ \psi^{-1}) = (\psi \circ (\phi \circ \phi^{-1}) \circ \psi^{-1}) = (\psi \circ \mathbb{I} \circ \psi^{-1}) = \mathbb{I}. \tag{3}$$

De même $(\phi^{-1} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \phi) = \mathbb{I}$.

Exercice 3.

Soient $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Supposons $f'(x_0) \neq 0$. Il existe alors deux ouverts $U \ni x_0$ et $V \ni f(x_0)$, et $g : V \to U$ une fonction inverse locale de f en x_0. Montrer que $g \in \mathrm{C}^2(V,U)$.

1. Couramment appelé « jacobien » de F.

Solution :

Notons $V \subset \mathbb{R}$ le voisinage de $f(x_0)$ où l'inverse locale g est définie. D'après le théorème d'existence d'une fonction inverse locale, $g \in \mathrm{C}^1(V, \mathbb{R})$. On peut calculer sa dérivée g' en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées. Puisque $g \circ f = \mathbb{I}$ partout dans $g(V) = U$, on a

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f' = 1. \tag{4}$$

Donc, $\forall x \in V$,

$$g'(f(g(x))) \times f'(g(x)) = 1 \qquad \text{et} \qquad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \tag{5}$$

$$\implies g' = \frac{1}{f' \circ g}. \tag{6}$$

Comme $(g' \circ f) \cdot f' = 1$, nous pouvons affirmer que f' ne s'annule pas sur $g(V)$. Cela nous permet de justifier que la fonction $(f')^{-1} \in \mathrm{C}^1(g(V), \mathbb{R})$. Alors $g' \in \mathrm{C}^1(V, \mathbb{R})$ en tant que composition de fonctions de classe C^1.

Remarque. Il est important de noter que dans l'expression (6), la fonction g est toujours de classe C^1 pourvu que les hypothèses du théorème d'inversion locale soient vérifiées. Par induction, $f \in \mathrm{C}^k \implies g \in \mathrm{C}^k$. Ce résultat s'étend aux fonctions de plusieurs variables.

Exercice 4.

Définition 1 (Difféomorphisme et orientation)**.** Soient $U, V \subset \mathbb{R}^n$ ouverts et $\psi : U \to V$ un difféomorphisme.

— Si $\det(\mathrm{D}\,\psi)$ est strictement positif partout, on dit que ψ « préserve l'orientation ».

— Si $\det(\mathrm{D}\,\psi)$ est strictement négatif partout, on dit que ψ « renverse l'orientation ».

1) Montrer que si U est connexe par arcs, alors soit ψ préserve l'orientation, soit ψ renverse l'orientation.
2) Donner des exemples d'ouverts U et V qui ne sont pas connexes par arcs et d'un difféomorphisme $\psi : U \to V$ qui ne préserve ni ne renverse l'orientation.

Solution :

1) Supposons l'existence de $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U$ tels que $\det(\mathrm{D}\,\psi)(\boldsymbol{a}) < 0$ et $\det(\mathrm{D}\,\psi)(\boldsymbol{b}) > 0$. Comme U est connexe par arcs et $\det(D\psi)$ est continu, l'image de U par $\det(D\psi)$ est un intervalle. Puisque cet intervalle contient une valeur strictement négative et une valeur strictement positive, $\det(D\psi)$ doit s'annuler sur U. Or ceci est impossible puisque ψ est un difféomorphisme ; cette contradiction prouve le résultat.
2) Considérer $U =]1, 2[\cup]{-4}, -3[$, $V =]1, 2[\cup]3, 4[$ et $\psi = |\cdot|$. N.B. ψ n'est pas différentiable en 0, mais ce point n'appartient pas à U.