Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-03-08 au 2021-03-12

Série 05 du lundi 8 mars 2021

Exercice 1.

1) Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et $F \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé, tous deux non-vides et tels que $E \cap F = \varnothing$. Montrer qu'il existe $\boldsymbol{a} \in E$ et $\boldsymbol{b} \in F$ tels que

$$\inf\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| : \boldsymbol{x} \in E, \boldsymbol{y} \in F\} = \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\| > 0. \tag{1}$$

2) En utilisant le point précédent, montrer que si E est un sous-ensemble strict (i.e. $E \subsetneq \mathbb{R}^n$) non-vide, alors sa frontière ∂E n'est pas vide.

Exercice 2.

Notons $E = \{(x, \sin {}^1\!/_x) : x \in \,]0, +\infty[\}$.

1) Montrer que E est connexe par arcs.
2) Donner une description explicite de $\overline{E}$.
3) Montrer que $\overline{E}$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 3.

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2} e^{-y/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x, y) = 0$.

Exercice 4.

Montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(\frac{1+x^4+y^4}{1+x^2+y^2}\right)}{\sin(x^2 + y^2)} = -1. \tag{3}$$