

---

**Algèbre linéaire avancée II**  
printemps 2021

---

**Série 2**

Tous les exercices sauf celui marqué d'une (\*) seront corrigés. La correction sera postée sur Piazza 2 semaines après. La solution de l'exercice (\*) sera discutée dans les séances d'exercices du mardi. Un des exercices (\*) sera une question ouverte de l'examen final.

---

**Exercice 1.**

- i) Soit  $K$  un corps. Un polynôme  $p(x)$  divise chaque  $f(x) \in K[x]$  si et seulement si  $p(x) = a$  pour un élément  $a \neq 0$  de  $K$ .
- ii) Soit  $K$  un corps et  $f(x), g(x) \in K[x]$ . On considère les assertions suivantes: a)  $f(x) = ag(x)$ ,  $a \in K$ . b)  $f(x)$  et  $g(x)$  ont les mêmes racines (avec multiplicité).  
Montrer que a) implique b). Est-ce que b) implique a)? (Justifiez votre réponse)

**Exercice 2.** Soit  $K$  un corps et  $f(x) \in K[x]$  un polynôme de degré 3. Montrer que  $f(x)$  est irréductible si et seulement si  $f(x)$  n'a pas de racines en  $K$ .

**Exercice 3.** Factoriser  $f(x) \in K[x]$  en polynômes irréductibles.

- a)  $f(x) = 3x^4 + 2$ ,  $K = \mathbb{Z}_5$ .
- b)  $f(x) = 3x^4 + 2$ ,  $K = \mathbb{Z}_{11}$ .
- c)  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ ,  $K = \mathbb{Z}_7$ .
- d)  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ ,  $K = \mathbb{Z}_3$ .
- e)  $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$ ,  $K = \mathbb{Z}_{13}$ .
- f)  $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$ ,  $K = \mathbb{Z}_{17}$ .

**Exercice 4.** Calculer  $\gcd(f, g)$  et  $p, q \in F[x]$  t.q.  $\gcd(f, g) = p \cdot f + q \cdot g$ :

- 1.  $f(x) = x^2 + 2$ ,  $g(x) = x^3 + 4x^2 + x + 1$ ,  $K = \mathbb{Z}_5$

2.  $f(x) = x^2 + 1, g(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, K = \mathbb{Z}_2$
3.  $f(x) = x^2 - x - 2, g(x) = x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 7x - 6, K = \mathbb{Q}.$

**Exercice 5.** (\*) Soit  $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}, \deg(f) \geq 2$ .

- i) Si  $\deg(f)$  est impair, alors  $f(x)$  n'est pas irréductible.
- ii) Si  $f(x)$  est irréductible, alors  $\deg(f) = 2$ .
- iii) Montrer comment ii) implique que chaque polynôme  $f(x) \in \mathbb{R}[x], \deg(f) \geq 1$  possède une racine complexe.