Mecanique

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Cours de Physique Generale

Wed 16 Sep

1 Physique

— Science dont le but est d'etudier et de comprendre les composants de la matiere et leurs interactions mutuelles.

— Sur la base des proprietes observees de la matiere et des interactions, le physicien tente d'expliquer les phenomenes naturels observables.

— Les "explications" sont donnees sous forme de lois aussi fondamentales que possible : elles resument notre comprehension des phenomenes physiques.

— Les maths sont le language qu'on utilise pour decrire ces phenomenes.

Exemple

Une particule se deplace sur un axe droit.
Au temps t_1 position $x_1 = x(t_1)$. Au temps t_2 position $x_2 = x(t_2)$. $\Delta x = x_2 - x_1$ et $\Delta t = t_2 - t_1$
Donc la vitesse moyenne

$$v_{moyenne} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Mais on peut faire diminuer Δt, pour connaitre la vitesse moyenne sur un temps infinitesimal :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$$

Donc la vitesse instantanee est la derivee de la fonction $x(t)$ par rapport a t.

On peut faire la meme chose avec l'acceleration
Au temps t_1, vitesse $v_1 = v(t_1)$.
Au temps t_2, vitesse $v_2 = v(t_2)$.
Donc l'acceleration moyenne est

$$a_{moyenne} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Et donc par le meme raisonnement, l'acceleration instantanee est

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} := \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

1.1 Exemple de loi physique : l'addition des vitesse

Si je marche a la vitesse v_{marche} sur un tapis , alors la vitesse par rapport au sol est

$$V = v_{marche} + v_{tapis}$$

C'est la loi d'addition des vitesses de galilee.
Ici, c'est une addition vectorielle qu'il faut faire.

Cette loi est

- independante des vitesses
- independante des objets en presence
- independante du temps (hier, aujourd'hui, demain)
- etc...

1.2 Lois de conservation

Ce sont les lois les plus fondamentales.

- Conservation de l'energie
- Conservation de la quantite de mouvement
- Conservation du moment cinetique

Ces lois sont valables dans toutes les situations (classiques, relativistes ou quantiques) .
Ne peuvent pas etre formulees mathematiquement de facon unique.
Resultent des principes "d'invariance" (ou de symmetrie) tres generaux.

1.3 Invariance par changement de referentiel

- Changement de referentiel (ou d'observateur) : Referentiel $O'x'y'z'$ en mouvement par rapport au referentiel $Oxyz$
- Les lois de la physqiue sont-elles invariantes par rapport a n'importe quel changement de referentiel ?
  Autrement dit, si les observateurs O et O' font la meme experience, obtiendront-ils le meme resultat ?
- Principe de Galilee :
  Les lois de la physique sont les memes (i.e. invariantes) pour deux observateurs en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport a l'autre.

2 La mecanique classique

1. Mecanique :
   science du mouvement (ou du repos) de systemes materiels caracterises par des variables d'espace et de temps.

2. Cinematique :
   Description du mouvement.

3. Dynamique :
   Etude de la relation entre le mouvement et les causes de sa variation(forces, lois de Newton, th. du moment cinetique).

4. Statique :
   Etude et description de l'equilibre.

3 Objectifs du cours de mecanique generale

• Apprendre a mettre sous forme mathematique un probleme, une situation physique :

— Definir le probleme, le modeliser

— Choisir une description mathematique

— Poser les equations regissant la physique du probleme

— Resoudre et/ou discuter la solution

• Developper un "savoir-faire" pratique, mais egalement un esprit scientifique :

— Reperer le sens physique derriere les equations

— Savoir formaliser mathematiquement la donnee d'un probleme physique.

4 Le modele du "point materiel"

Definition 1 (Point materiel)
un systeme est assimile a un point geometrique auquel on attribue toute la masse de ce systeme, et dont l'etat est decrit en tout temps par une (seule) position et une (seule) vitesse.

• Notion introduite par Newton.

On approxime un systeme a quelquechose de plus simple, le point peut etre "gros" (exemple :la terre, le soleil).
Pas applicable dans toutes les situations ; le modele a des limites..

5 Mouvement Rectiligne Uniforme

Mouvement d'un point materiel se deplacant en ligne droite a vitesse constante. On definit un axe x associe a la trajectoire rectiligne, avec une origine O.

$$v(t) := \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = v_0 = \text{constante}$$

La solution s'obtient en integrant le dessus : $x(t) = v_0 t + x_0$, ou $x_0 = \text{constante}$.
On appelle le resultat de cette integration l'equation horaire.

6 Mouvement rectiligne uniformement accelere

Ici
$$a(t) := \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) = a_0 = constante$$
C'est une equadiff d'ordre 2 faisant intervenir la derivee seconde de $x(t)$.
Solution

$$x(t) = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$$
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = a_0 t + v_0$$

ou x_0 et v_0 sont des constantes.

7 Lois de newton

— mouvement rectiligne uniforme $\Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$

— $\vec{F} = m\vec{a}$

— Action reaction $\vec{F} = -\vec{F}$

8 Force de pesanteur et chute des corps

• L'attraction terrestre donne lieu a une force verticale (le poids) proportionelle a la masse m :
$$F = mg$$

$g \approx 9.8 \frac{m}{s^2}$
• Application de la 2eme loi de Newton :
Si le poids est la seule force appliquee a un point materiel

$$F = ma \Rightarrow a = g = constante$$

Dans le vide, les corps ont un mouvement uniformement accelere

Lecture 3: Oscillateurs Harmoniques

Wed 23 Sep

9 Oscillateurs Harmoniques

Considerer des systemes ayant des mouvements oscillatoires.
Exemples :

— masse pendue a un ressort.
— pendule simple, pendule de torsion.
— vibrations.
— Resonateurs quartz (montres)
— oscillations du champ
— etc...

Remarque 1
Un mouvement oscillatoire permet de mesurer un intervalle de temps.

9.1 Modelisation de la force d'un ressort

La force exercee par un ressort est proportionelle a son deplaccement par rapport a sa position de repos.

Force de rappel :

$$\vec{F} = -k\vec{\Delta x}$$

k = constante elastique du ressort [N/m]

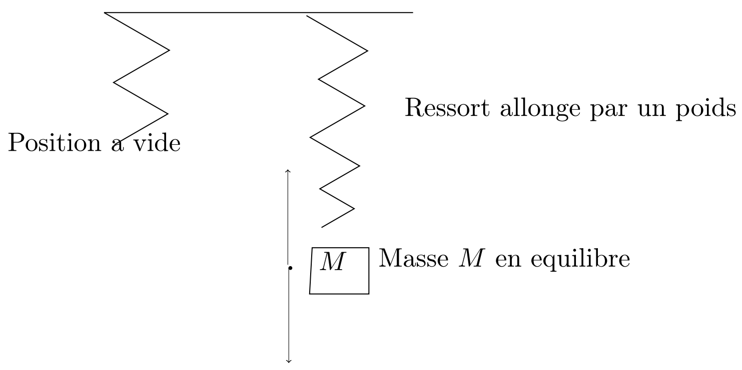

FIGURE 1 – ressort

Remarque 2
Ce modele n'est que valable pour des petits allongements

9.2 Oscillateurs harmoniques a une dimension

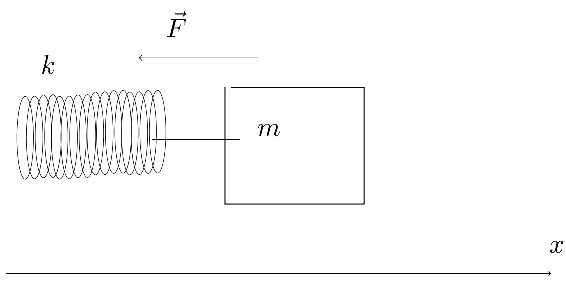

FIGURE 2 – Ressort plan horizontal

$$\text{Loi de Hooke } F_x = -kx$$
$$\text{2eme loi de Newton } F = ma$$

On arrive a

$$m\ddot{x} = -kx$$

But : connaissant k, m et les conditions initiales, determiner $x(t)$ pour tout temps t.

Exemple 3
Posons $m = 1kg, k = 1\frac{N}{m} = 1\frac{kg}{s^2}$
Conditions initiales : $x(0) = 1m, v(0) = 0\frac{m}{s}$

$$\Rightarrow a(0) = \frac{F(0)}{m} = k\frac{x(0)}{m} = -1\frac{m}{s^2}$$

Accroissement de v *entre* t *et* $t + \Delta t$ *:* $\Delta v = a(t)\Delta t$ *car* $a(t) = dv(t)/dt$

$$\Rightarrow v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t$$

Accroissement de x *entre* t *et* $t + \Delta t$ *:*

$$\Rightarrow x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t$$

Verification analytique :
On pose $x(t) = \cos(\omega_0 t) \Rightarrow x(0) = 1$
$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 \sin(\omega_0 t) \Rightarrow v(0) = 0.$
$a(t) = \frac{dv}{dt} - \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x(t)$
Comme $a(t) = -\frac{k}{m}x(t)$*, on doit avoir :*

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

C'est la pulsation propre de l'oscillateur libre.

Solution generale et dependance par rapport aux conditions initiales

Periode :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Frequence

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Solution generale de $\ddot{x} = \omega_0^2 x = 0$:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

ou

$$x(t) = C\sin(\omega_0 t + D)$$

Deux constantes d'integration a determiner en utilisant les conditions initiales

$$A = x_0$$

et

$$B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

ou bien $x_0^2 = x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega_0})^2$ et $\tan(D) = \omega_0 \frac{x_0}{v_0}$

Resolution de l'equation differentielle :

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \\ x(0) &= A \cdot 1 + B \cdot 0 = A = x_0 \\ \dot{x}(0) &= -A\omega_0 \sin(0) + B\omega_0 \cos(0) \\ &= B\omega_0 = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= C\sin(\omega_0 t + D), x_0, v_0 \\ x(0) &= C\sin(D) = x_0 \\ \dot{x}(0) &= C\omega_0 \cos(D) = v_0 \\ \frac{1}{\omega_0}\tan(D) &= \frac{x_0}{v_0} \\ &\Rightarrow \tan(D) = \omega_0 \frac{x_0}{v_0} \\ C^2(\sin^2(D) + \cos^2(D)) &= x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \\ &\Rightarrow C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \end{aligned}$$

9.3 Oscillateur harmonique amorti

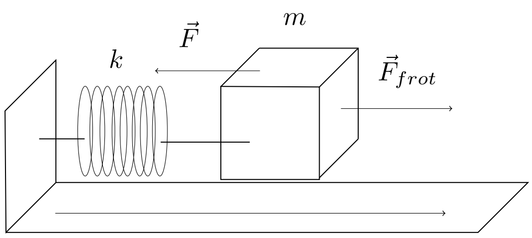

FIGURE 3 – oscillateur amorti

Par b on definira la force de frottement.
Deuxieme loi de Newton : $F + F_{frot} = ma$, alors

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

Resolution

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0 \text{ avec } \gamma = \frac{b}{2m} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ammortissement sous-critique $\gamma < \omega_0$ $x(t) = e^{-\gamma t}[A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)]$
avec $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma_2}\omega_0$

Ammortissement critique $\gamma = \omega_0$ $x(t) = e^{-\gamma t}[A + Bt]$

Ammortissement sur-critique $\gamma > \omega_0$ $x(t) = e^{\gamma t}[A\exp(\omega_2 t) + B\exp(-\omega_2 t)]$
avec $\omega_2 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

FIGURE 4 – types d'ammortissement

9.4 Oscillateur force

En pratique tout oscillateur s'amortit, mais on peut entretenir les oscillations a l'aide d'une force exterieure.

Exemples

- Balancoire pousse par un enfant.
- Voiture (avec suspension) passant sur des bosses
- Atome (electron lie) recevant un rayonnement electromagnetique

On ajoute une force periodique $\vec{F}_{ext}$ Par exemple $F_{ext} = f\sin(\omega t)$ avec $f = 1N$

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_{ext}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = a_0\sin(\omega t) \text{ avec } \gamma = \frac{b}{2m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Solution :

$$x(t) = x_{transitoire}(t) + \rho\sin(\omega t - \Phi)$$

avec

$$\rho = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

et

$$\tan(\Phi) = 2\gamma\frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

9.5 Phenomes de resonnance

Resonnances desirables

- Circuitselectriques dans un tuner
- Tuyaux d'orgue
- Balancoire de jardin
- Amortisseurs d'une voiture
- Suspension du tambour d'une essoreuse a linge
- Structure de genie civil