Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-03-29 au 2021-04-02

Série 11 du lundi 29 mars 2021

Exercice 1.

Écrire le développement limité à l'ordre 3 et au point $(1,1)$ de la fonction

$$f = (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{xy},$$

en utilisant le développement limité à l'ordre 3 de la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^u$ en 0.

Indication. Écrire $f(x,y) = \mathrm{e}^{1+u}$, où $u \coloneqq (x-1)+(y-1)+(x-1)(y-1)$. Justifier toutes les étapes.

Solution :

D'après la formule de Taylor en dimension 1, $\forall u \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{1+u} = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^u = \mathrm{e} + \mathrm{e}u + \frac{1}{2}\mathrm{e}u^2 + \frac{1}{6}\mathrm{e}u^3 + g(u) \tag{1}$$

avec $g \in o_0(|u|^3)$ et $g(0) = 0$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, écrivons $x =: 1+a$ et $y =: 1+b$. Considérons la norme euclidienne, et utilisons $g \in o_0(|u|^3)$. Soit $\epsilon > 0$; si $a+b+ab \neq 0$,

$$\frac{|g(a+b+ab)|}{\|(a,b)\|^3} = \frac{|g(a+b+ab)|}{|a+b+ab|^3} \times \frac{|a+b+ab|^3}{\|(a,b)\|^3} \leqslant \frac{|g(a+b+ab)|}{|a+b+ab|^3}(1+1+\|(a,b)\|)^3 \leqslant \epsilon, \tag{2}$$

si $\|(a,b)\|$ est suffisamment petit. Cette conclusion reste valable si $a+b+ab=0$, avec $(a,b) \neq (0,0)$. Ainsi $(a,b) \mapsto g(a+b+ab) \in o_{(0,0)}(\|(a,b)\|^3)$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{xy} &= \mathrm{e}^{(1+a)(1+b)} && (3)\\
&= \mathrm{e}^{1+a+b+ab} && (4)\\
&= \mathrm{e} + \mathrm{e}(a+b+ab) + \frac{1}{2}\mathrm{e}(a+b+ab)^2 + \frac{1}{6}\mathrm{e}(a+b+ab)^3 + g(a+b+ab) && (5)\\
&= \mathrm{e} + \mathrm{e}(a+b+ab) + \frac{1}{2}\mathrm{e}(a^2+b^2+2ab+2a^2b+2ab^2)\\
&\qquad + \frac{1}{6}\mathrm{e}(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) + o_{(0,0)}(\|(a,b)\|^3) && (6)\\
&= \mathrm{e} + \mathrm{e}(a+b) + \frac{1}{2}\mathrm{e}(a^2+b^2+4ab) + \frac{1}{6}\mathrm{e}(a^3+9a^2b+9ab^2+b^3) + o_{(0,0)}(\|(a,b)\|^3) && (7)\\
&= \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) + \mathrm{e}(y-1) + \mathrm{e}\frac{(x-1)^2}{2} + \mathrm{e}\frac{(y-1)^2}{2} && (8)\\
&\quad + 2\mathrm{e}(x-1)(y-1) + \mathrm{e}\frac{3}{2}(x-1)^2(y-1) + \mathrm{e}\frac{3}{2}(y-1)^2(x-1)\\
&\qquad + \mathrm{e}\frac{(x-1)^3}{6} + \mathrm{e}\frac{(y-1)^3}{6} + o_{(0,0)}(\|(x,y)-(1,1)\|^3).
\end{aligned}$$

Le polynôme de Taylor d'ordre 3 de f au point $(1,1)$ est donc

$$\begin{multline}
\mathrm{e}+\mathrm{e}(x-1)+\mathrm{e}(y-1)+\mathrm{e}\frac{(x-1)^2}{2}+\mathrm{e}\frac{(y-1)^2}{2}+2\mathrm{e}(x-1)(y-1)\\
+\mathrm{e}\frac{3}{2}(x-1)^2(y-1)+\mathrm{e}\frac{3}{2}(y-1)^2(x-1)+\mathrm{e}\frac{(x-1)^3}{6}+\mathrm{e}\frac{(y-1)^3}{6}. \tag{9}
\end{multline}$$

Exercice 2.

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,x_3)=\left((x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2\right)^{1/2}.$$

Écrire le polynôme de Taylor de degré 2 de f en $(0,0,0)$.

Solution :

La fonction f est de classe C^2 sur un ouvert contenant $\mathbf{0}$. Par exemple $f\in\mathrm{C}^2(\mathrm{B}(\mathbf{0},r))$ avec $r\in\,]0,\sqrt{14}[$ puisque $\|\mathbf{0}-(1,2,3)\|=\sqrt{14}$. En fait, elle est même infiniment dérivable sur cette boule. D'après le cours, le polynôme demandé est donc

$$p:\boldsymbol{x}\mapsto\sum_{0\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant 2}\frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}f}{\partial\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{0})\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{10}$$

Cette somme inclut les termes suivants :

$$\begin{aligned}
&|\boldsymbol{\alpha}|=0, &&\boldsymbol{\alpha}=(0,0,0), &&\boldsymbol{\alpha}!=1\ ; &&(11)\\
&|\boldsymbol{\alpha}|=1, &&\boldsymbol{\alpha}=(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1), &&\boldsymbol{\alpha}!=1\ ; &&(12)\\
&|\boldsymbol{\alpha}|=2, &&\boldsymbol{\alpha}=(2,0,0),\ (0,2,0),\ (0,0,2), &&\boldsymbol{\alpha}!=2\ ; &&(13)\\
&|\boldsymbol{\alpha}|=2, &&\boldsymbol{\alpha}=(0,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0), &&\boldsymbol{\alpha}!=1. &&(14)
\end{aligned}$$

Soit $\boldsymbol{x}\in\mathrm{B}(\mathbf{0},r)$. Calculons les dérivées partielles de f en $\boldsymbol{x}$ jusqu'à l'ordre 2. Pour tout $i,j\in\{1,2,3\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=(x_i-i)\frac{1}{f(\boldsymbol{x})}\ ; \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x})=\frac{\delta_{ij}}{f(\boldsymbol{x})}-(x_i-i)(x_j-j)\frac{1}{f^3(\boldsymbol{x})}. \tag{16}$$

Évaluons ces dérivées partielles au point $\mathbf{0}$: $f(\mathbf{0})=\sqrt{14}$ et, pour tout $i,j\in\{1,2,3\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{0})=\frac{-i}{\sqrt{14}}\ ; \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{0})=\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{14}}-\frac{ij}{14\sqrt{14}}. \tag{18}$$

On obtient alors l'expression de p :

$$\begin{aligned}
p(\boldsymbol{x}) &= f(\mathbf{0}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{0})x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{0})x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{0})x_3 && (19)\\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{0})x_1x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(\mathbf{0})x_1x_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(\mathbf{0})x_2x_3\right)\\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{0})x_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{0})x_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(\mathbf{0})x_3^2\right)\\
&= \sqrt{14} - \frac{1}{\sqrt{14}}(x_1 + 2x_2 + 3x_3) - \frac{1}{14\sqrt{14}}(2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 6x_2x_3) && (20)\\
&\qquad + \frac{1}{28\sqrt{14}}(13x_1^2 + 10x_2^2 + 5x_3^2).
\end{aligned}$$