

GEOM DIFF

David Wiedemann

Table des matières

1	Rappels de geometrie euclidienne	6
1.1	Proprietes de la norme	6
2	Isometries et Similitudes	6
2.1	Proprietes de base des matrices orthogonales O_n	8
2.2	Etude de O_2	8
2.3	Etude de O_3	9
3	Geometrie des courbes	9
3.1	Exemples de courbes parametrees	10
3.2	Champs de vecteurs le long d'une courbe	11
3.3	Reparametrage d'une courbe	12
4	Courbure d'une courbe	14
4.1	Contact entre deux courbes	16
5	Repere de Frenet	17
5.1	Theoreme fondamental des courbes de \mathbb{R}^3	19
6	Courbes dans le plan oriente	20
7	Surfaces	23
7.1	Le concept de variete	23
7.2	Sous-Varietes de \mathbb{R}^n	24
7.2.1	Rappel de calcul differentiel	25
7.3	Le theoreme du rang constant	25
7.4	Exemples de Sous-varietes	26
7.5	Sur les differentielles et gradients	26
8	Geometrie des Surfaces	28
8.1	Courbes tracees sur une surface	29
8.2	Angle entre deux courbes	30
8.3	Aire d'une surface	30

8.4	Geometrie intrinseque/extrinseque des surfaces	30
8.5	Geodesiques et courbure des courbes sur une surface	34
8.6	Formule de variation premiere pour la longueur	37
8.7	Courbure normale d'une surface	38
8.8	Courbures principales, moyenne et de Gauss	39
9	Geometrie Hyperbolique	40
9.1	Projection stereographique de H	43
9.2	Le modele du demi-plan de Poincarre	43
9.3	Droites hyperboliques (dans \mathbb{H}^2)	45

List of Theorems

1	Definition (Espace Euclidien)	6
1	Proposition (Cauchy-Schwartz)	6
2	Definition	6
3	Definition (similitude)	6
3	Theorème	7
5	Corollaire	7
4	Definition (Groupe special orthogonal)	8
5	Definition	8
8	Proposition	8
9	Theorème (Theoreme d'Euler)	9
6	Definition	9
7	Definition (Courbe parametrique)	9
8	Definition	10
9	Definition (Longueur d'une courbe)	10
10	Proposition	11
10	Definition (Champ vectoriel)	11
11	Definition (Le vecteur tangent)	11
11	Proposition (Regle de Leibniz)	12
12	Corollaire	12
12	Definition (Quantite)	12
13	Definition (Derivation naturelle)	13
14	Definition	13
15	Definition (Abscisse Curviligne)	14
17	Proposition	14
20	Proposition (Formule de l'acceleration)	15
16	Definition	15
17	Definition (Torsion)	15
22	Theorème (Formules de Serret-Frenet)	15

23	Theorème	16
18	Definition (Contact de courbes)	16
24	Theorème	16
19	Definition (Cercle osculateur)	17
25	Proposition	17
20	Definition (Reguliere au sens de Frenet)	17
27	Proposition	17
28	Proposition	18
21	Definition (Courbe a pente constante)	18
29	Proposition	18
22	Definition	20
23	Definition (Angle oriente)	20
24	Definition (L'operateur J)	20
25	Definition (Produit exterieur)	20
26	Definition	21
27	Definition	21
28	Definition (Fonction angulaire)	21
33	Proposition	21
34	Theorème (Theoreme fondamental des courbes planes)	22
29	Definition	22
35	Theorème (Theoreme des 4 sommests)	22
30	Definition (Variete)	23
31	Definition (Surface topologique)	23
32	Definition	24
33	Definition	24
34	Definition (Systeme de coordonnees)	24
35	Definition (Sous-Variete)	24
36	Definition (Dimension d'une sous variete)	24
37	Definition	25
36	Theorème (Theoreme du rang constant)	25
38	Definition	25
39	Definition (Rang maximal)	25
37	Lemme	25
38	Theorème (Theoreme du rang constant)	26
39	Corollaire (Theoreme d'inversion locale)	26
40	Theorème	26
40	Definition (Groupe de Lie)	26
41	Proposition	27
42	Corollaire	27
43	Corollaire	28
41	Definition (Point singulier)	28

44	Theorème	28
42	Definition	28
43	Definition (Tenseur metrique)	29
44	Definition (Intersection Transversale)	29
45	Proposition	29
45	Definition	29
46	Proposition	30
47	Proposition	30
46	Definition	30
47	Definition	30
48	Lemme	31
48	Definition (distance intrinseque)	31
49	Definition	31
50	Definition	31
54	Proposition	32
51	Definition	32
52	Definition	33
57	Theorème	33
53	Definition (Pseudosphere)	34
54	Definition (Geodesique)	34
59	Proposition	34
60	Theorème	34
55	Definition	35
56	Definition (Courbure normale)	35
62	Theorème (de Meusnier)	35
57	Definition	36
58	Definition (Deuxieme forme fondamentale)	36
63	Proposition	36
64	Corollaire	37
65	Theorème (Formule de variation premiere)	37
66	Corollaire	37
67	Corollaire	38
59	Definition (Courbure normale)	38
60	Definition (Surface complete)	39
68	Theorème (Hoph-Rinow 1930)	39
61	Definition (Typologie des points sur une surface)	39
69	Theorème	40
70	Theorème (Hilbert)	40
62	Definition	40
63	Definition	41
71	Theorème	41

64	Definition (Application conforme)	41
72	Lemme	41
65	Definition	42
79	Proposition	42
66	Definition (Disque de Pointcarre)	43
80	Proposition	43
81	Proposition	44
67	Definition (Transformation de Moebius)	44
82	Proposition	45
83	Lemme	45
84	Proposition	45
85	Proposition	45
86	Lemme	45
68	Definition	45

1 Rappels de geometrie euclidienne

Definition 1 (Espace Euclidien)

Un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel \mathbb{E}^n sur \mathbb{R} muni d'un produit scalaire $\langle \cdot \rangle : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ symétrique, défini positif.

Le produit scalaire standard sur \mathbb{R}^n est $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$ ($\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$).

Proposition 1 (Cauchy-Schwartz)

$\forall x, y \in \mathbb{E}^n, \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$.

Remarque

La norme détermine le produit scalaire via les formules de polarisation

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

1.1 Propriétés de la norme

- $\|x\| \geq 0 \forall x \in \mathbb{E}^n$
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Definition 2

- Si $x, y \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}$, on définit l'angle $\theta \in [0, \pi]$ par $\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \in [-1, 1]$ (par Cauchy-Schwarz).
- On a $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta$

La distance entre $x, y \in \mathbb{E}^n$ est $d(x, y) = \|y - x\|$ (\mathbb{E}^n, d) est un espace métrique.

Les propriétés suivantes sont équivalentes

- $x \perp y$
- $\theta = \frac{\pi}{2}$
- $\|x - y\|^2 = \|x + y\|^2$
- $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$

2 Isométries et Similitudes

Definition 3 (similitude)

Une application $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ est une similitude de rapport $\lambda > 0$ si f est bijective et

$$d(f(x), f(y)) = \lambda d(x, y)$$

Si $\lambda = 1$, on dit que f est une isométrie.

Theorème 3

Si $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ est une similitude, alors il existe $b \in \mathbb{E}^n$ et $g : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ linéaire tel que

$$f(x) = g(x) + b$$

Remarque

$b = f(0)$ et f linéaire $\iff f(0) = 0$

Preuve

On utilisera le theoreme fondamental de la geometrie affine :

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} et $f : V \rightarrow V$ une application bijective.

Alors f est affine si et seulement si f preserve les droites.

On ne donne pas la preuve mais une intuition : on pose $g(x) = f(x) - b$ ($b = f(0)$), donc $g(0) = 0$ et g preserve les droites.

Soit $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ une similitude de \mathbb{E}^n . On affirme que f preserve les droites

$$x, y, z \in \mathbb{E}^n \Rightarrow f(x), f(y), f(z)$$

quitte a renommer les points x, y, z , on a

$$x, y, z \text{ alignes} \iff d(x, z) = d(x, y) + d(y, z) \iff d(f(x), f(z)) = d(f(x), f(y)) + d(f(y), f(z))$$

Donc f affine implique $f(x) = g(x) + b$ ($b = f(0)$, g linéaire).

Il reste a voir que g est une λ -similitude \Rightarrow immediat a verifier. □

Corollaire 5

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une similitude de rapport $\lambda > 0$ si et seulement si il existe $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A^T \cdot A = I$ tel que

$$f(x) = \lambda Ax + b$$

Preuve

$$\begin{aligned} \langle g(e_i), g(e_j) \rangle &= \frac{1}{4} \|g(e_i) + g(e_j)\|^2 - \|g(e_i) - g(e_j)\|^2 \\ &= \frac{1}{4} (\|g(e_i + e_j)\|^2 - \|g(e_i - e_j)\|^2) \\ &= \lambda^2 \langle e_i, e_j \rangle = \lambda^2 \delta_{ij} \end{aligned}$$

Soit A la matrice de g , alors $g(x) = Ax$, on a

$$\lambda^2 \delta_{ij} = \langle Ae_i, Ae_j \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \sum_i a_{ij} e_i, \sum_i a_{ij} e_i \right\rangle \\
&= \sum_i \sum_j a_{ir} a_{js} \delta_{rs} = \sum_r a_{ir} a_{jr}
\end{aligned}
\quad \square$$

2.1 Propriétés de base des matrices orthogonales O_n

Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ les propriétés suivantes sont équivalentes

- $A \in O_n$
- A inversible avec $A^{-1} = A^T$
- Les colonnes/lignes de A forment une base orthonormée.
- $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$
- $\|Ax\| = \|x\|$
- $f(x) = Ax + b$ est une isométrie pour l'espace euclidien pour tout b

Remarque

Si $A \in O_n \Rightarrow \det A = \pm 1$ et $\det : O_n \rightarrow \{\pm 1\}$

Definition 4 (Groupe special orthogonal)

On définit

$$SO(n) = O_n \cap SL_n(\mathbb{R})$$

Definition 5

Une transformation affine $f : V \rightarrow V$, V un \mathbb{R} -ev est directe (ou qu'elle préserve l'orientation) si son déterminant est positif (ou le déterminant de la partie linéaire de f .) Une isométrie directe s'appelle un déplacement de \mathbb{E}^n si $f(x) = Ax + b, A \in SO(n)$

Remarque

$$SE(n) = SO(n) \rtimes \mathbb{R}^n$$

2.2 Etude de O_2

Proposition 8

Une matrice $A \in O_2$ s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

si $\det A = 1$, ou

$$S_\phi = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}$$

Preuve

$A \in O_2$ si et seulement si les colonnes de A forment une base orthonormée. Donc il existe θ tel que la 1ère colonne est de la forme $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ et la forme de la 2ème colonne en suit. \square

2.3 Etude de O_3

Theorème 9 (Theoreme d'Euler)

Tout déplacement (isométrie qui preserve l'orientation) qui fixe un point, fixe un axe et c'est une rotation autour de cet axe.

Preuve

On identifie l'espace euclidien à \mathbb{R}^3 . Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, qui fixe un point on suppose que $f(0) = 0$.

On a $f(x) = Ax$.

On affirme qu'il existe $U \in \mathbb{R}^3, U \neq 0$ tel que $Au = u$.

En effet 1 est valeur propre de A car $\det(A - \text{Id}) = 0$ parce que

$$\det(A - \text{Id}) = \det(A^T) \det(A - \text{Id}) = \det(\text{Id} - A^T) = \det(\text{Id} - A) = (-1)^3 \det(A - \text{Id})$$

\square

Lecture 2: Courbes

Wed 29 Sep

3 Geometrie des courbes

Une courbe peut être conçue comme :

- Le lieu des points géométriques qui satisfont à une certaine contrainte/condition
- La trajectoire d'un point qui se déplace dans le plan ou l'espace.
- Une courbe peut être engendrée par un mécanisme
- Une courbe peut correspondre à un phénomène optique.

Le premier point de vue va conduire à une description implicite de la courbe par une équation dans \mathbb{R}^2 ou deux équations dans l'espace.

Definition 6

Une courbe algébrique dans le plan est un ensemble du type $\Gamma : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = 0\}$.

La courbe est algébrique si $f \in \mathbb{R}[x, y]$

Definition 7 (Courbe paramétrique)

Une courbe paramétrique dans \mathbb{R}^n est une application continue :

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

avec $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, $u \in I$ est le parametre.

L'image de γ est la trace de γ

Definition 8

- La courbe α est de classe C^k ($k \geq 0$) si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^k par $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \dots, \alpha_n(u))$ et $\alpha_j : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^k .
- Si α est C^1 et $u_0 \in I$, le vecteur vitesse est

$$\dot{\alpha}(u_0) = \frac{d\alpha}{du}(u_0)$$

L'acceleration sera $\ddot{\alpha}(u_0) = \frac{d^2\alpha}{du^2}(u_0)$

- La droite tangente a γ en u_0 est la droite par $\alpha(u_0)$ et de direction $\dot{\alpha}(u_0)$

$$T_{\alpha, u_0} : \lambda \mapsto \alpha(u_0) + \lambda \dot{\alpha}(u_0)$$

- La vitesse de α en u_0 est $V_\alpha(u_0)$ (en supposant α differentiable en u_0)
- Le point $\alpha(u_0)$ est regulier si $\dot{\alpha}(u_0) \neq 0$ et singulier si $\dot{\alpha}(u_0) = 0$
- Le point $\alpha(u_2)$ est biregulier si $\alpha \in C^2$ et $\dot{\alpha}(u_0), \ddot{\alpha}(u_0)$ sont lineairement independants .
- Si α est bireguliere en u_0 , le plan par $\alpha(u_0)$ en direction $\dot{\alpha}(u_0), \ddot{\alpha}(u_0)$ est le plan osculateur de α en u_0 .

3.1 Exemples de courbes parametrees

- La cubique

$$\alpha(u) = (au, bu^2, cu^3)$$

—

$$\beta(u) = (u^2, \dots, u^{n+1})$$

- La droite en parametrage affine, par p et q est

$$\gamma(t) = p + t(q - p)$$

- Le cercle C de centre $p \in \mathbb{R}^n$ dans un plan (affine) $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ de rayon r se parametrise

$$C(t) = p + r (\cos(\omega t)b_1 + \sin(\omega t)b_2)$$

ou $\{p, b_1, b_2\}$ est une repere affine orthonorme de Π .

- L'helice circulaire droite est

$$\gamma(u) = (a \cos(u), a \sin(u), bu)$$

Definition 9 (Longueur d'une courbe)

La longueur d'une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 est

$$l(\gamma) = \int_a^b V_\gamma(u) du$$

Proposition 10

La longueur verifie les proprietes suivantes :

- Additivite : Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe C^1 , alors $l(\gamma|_{[a, c]}) + l(\gamma|_{[c, b]}) = l(\gamma|_{[a, b]})$
- La longueur est invariante par isometrie.
- Pour f une similitude de rapport $\lambda > 0$, alors

$$l(f \circ \gamma) = \lambda l(\gamma)$$

—

$$l(\gamma|_{[a, b]}) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$$

avec egalite si et seulement si γ est le segment $[\gamma(a), \gamma(b)]$.

Preuve

- Suit de

$$l(\gamma|_{[a, b]}) = \int_a^b V_\gamma(u) du = \int_a^c V_\gamma(u) du + \int_c^b V_\gamma(u) du$$

- On sait que $f(x) = \lambda Ax + b$, A orthogonal, donc pour $\tilde{\gamma}(u) = f(\gamma(u))$

$$\tilde{\gamma}' = \lambda A \gamma'(u)$$

$$l(\tilde{\gamma}) = \int_a^b V_{\tilde{\gamma}}(u) du = \lambda l(\gamma)$$

- Soit $p = \gamma(a)$, $q = \gamma(b)$.

On note $w = \frac{q-p}{\|q-p\|}$ et on definit

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad g(u) = \langle \gamma(u) - p, w \rangle$$

Alors

$$\frac{dg}{du} = \langle \dot{\gamma}(u), w \rangle \leq \|\dot{\gamma}(u)\| \|w\| = V_\gamma(u)$$

Ainsi,

$$\int_a^b \frac{dg}{du} du = g(b) - g(a) = \langle q - p, w \rangle = \|q - p\|$$

□

3.2 Champs de vecteurs le long d'une courbe**Definition 10 (Champ vectoriel)**

Un champ de vecteurs le long d'une courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la donnee $\forall u \in I$ d'un vecteur $W(u) = \sum_j w_j(u) e_j$.

Ce champ est de classe C^k si $w_j : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^k .

Definition 11 (Le vecteur tangent)

Si γ est reguliere on definit

$$T_\gamma(u) = \frac{\dot{\alpha}(u)}{V_\gamma(u)}$$

Si γ est bireguliere, alors le champ normal principal est donne par

$$N_\gamma(u) = \frac{\ddot{\alpha}(u) - \langle \ddot{\alpha}(u), t \rangle t}{\|\ddot{\alpha}(u) - \langle \ddot{\alpha}(u), t \rangle t\|}$$

Proposition 11 (Regle de Leibniz)

—

$$\frac{d}{du} \langle Z(u), W(u) \rangle = \langle \dot{Z}(u), W(u) \rangle + \langle Z(u), \dot{W}(u) \rangle$$

Corollaire 12

— Si $\langle Z(u), W(u) \rangle = c$, alors

$$\langle \dot{W}, Z \rangle = - \langle W, \dot{Z} \rangle$$

— Si $\|w\| = c \Rightarrow \langle \dot{w}, w \rangle = 0$

Lecture 3: Reparametrage

Wed 06 Oct

3.3 Reparametrage d'une courbe

On veut formaliser la notion que deux courbes α, β de \mathbb{R}^n representent la "meme" courbe geometrique.

On veut $\alpha(u) = \beta(t)$ avec $u = h(t) (= u(t))$.

Plus precisement, si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($u \in I, t \in J$), alors α est un reparametrage si il existe un diffeomorphisme $h : J \rightarrow I, t \mapsto u = u(t) = h(t)$, tel que $\alpha = \beta \circ h$.

Remarque

La condition que deux courbes sont un reparametrage l'une de l'autre est une relation d'equivalence et une classe d'equivalence est une courbe geometrique

Definition 12 (Quantite)

Une quantite ou une propriete d'une courbe est geometrique si elle est invariante par reparametrage.

Sinon la quantite est dite cinematique.

Exemple

1. La trace d'une courbe est une propriete geometrique

2. La notion de regularite, biregularite sont geometriques
3. Le plan osculateur est une notion geometrique.
4. La longueur d'une courbe est geometrique.

Preuve

On suppose $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n, \alpha(u) = \beta(t), t = h(u)$.

On a

$$l_\alpha = \int_I V_\alpha(u) du, l_\beta = \int_J V_\beta(t) dt$$

avec $V_\alpha = \left\| \frac{d\alpha}{du} \right\|, V_\beta = \left\| \frac{d\beta}{dt} \frac{du}{dt} \right\| = \left| \frac{du}{dt} \right| V_\alpha(u)$.

Donc $V_\beta(t) dt = \pm V_\alpha(u) du$ et donc $l_\beta = l_\alpha$. □

En general, si $S_\beta(t)$ est une quantite geometrique, alors $\frac{d}{dt} S_\beta$ n'est en general pas geometrique, mais $\frac{1}{V_\beta(t)} \frac{d}{dt} S_\beta$

Preuve

On a $S_\beta(t) = S_\alpha(u)$ et $\frac{1}{V_\beta(t)} \frac{d}{dt} = \frac{1}{V_\alpha(u)} \frac{d}{du}$ □

Exemple

Le vecteur unitaire tangent $\vec{T}_\beta(t)$ est une quantite geometrique.

Preuve

On a $T_\beta(t) = \frac{\dot{\beta}(t)}{\|\dot{\beta}(t)\|} = \frac{1}{V_\beta(t)} \frac{d\beta}{dt}$.

Ainsi, $T_\alpha(u) = \frac{1}{V_\alpha(u)} \frac{d\alpha}{du}$ □

Definition 13 (Derivation naturelle)

On definit

$$\frac{1}{V_\beta(t)} \frac{d}{dt}$$

comme etant la derivation naturelle le long de la courbe.

Contreexemples

La vitesse, le vecteur vitesse et l'acceleration sont des quantites cinematiques.

Definition 14

On dit que $V_\alpha(u) du$ est la differentielle naturelle le long de la courbe

Exemple

1. Masse d'un fil metalique inhomogene.

La quantite utile est la densite lineaire de masse $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}_+$.

La masse sera alors $M = \int_I \rho(u) V_\alpha(u) du$

2. Centre de gravite

$$G = \frac{1}{M} \int_I \alpha(u) \rho(u) V_\alpha(u) du$$

Definition 15 (Abscisse Curviligne)

Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe reguliere et $u_0 \in I$.

L'abscisse curviligne ou parametre naturel de α par rapport au point initial $\alpha(u_0)$ est la fonction

$$S = S_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$$

definie par

$$S = \int_{u_0}^u V_\alpha(\zeta) d\zeta$$

On dit que α est parametree naturellement si $S_\alpha(u) = u \iff V_\alpha(u) = 1$

Proposition 17

Toute courbe C^1 reguliere peut se reparametriser natruellement.

Preuve

Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, C^1 reguliere et $u_0 \in I$.

On pose

$$s = s(u) = \int_{u_0}^u V_\alpha(u) du$$

Alors la fonction s definit un diffeomorphisme

$$s : I \rightarrow J$$

□

4 Courbure d'une courbe

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe parametree reguliere de classe C^2 .

Le vecteur de courbure est le champ le long de γ

$$\vec{K}_\gamma(u) = \frac{1}{V_\gamma(u)} \dot{\vec{T}}_\gamma(u)$$

La courbure de γ est alors la fonction

$$k_\gamma = \left\| \vec{K}_\gamma(u) \right\|$$

Remarque

Si γ est parametree naturellement, alors

$$k_\gamma(u) = \left\| \frac{d^2 \gamma}{du^2} \right\|$$

Remarque

Le vecteur de courbure et la courbure sont des quantites geometriques.

Proposition 20 (Formule de l'acceleration)

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^2 , alors son acceleration est

$$\ddot{\gamma} = \dot{V}_\gamma(t) + V_\gamma^2(t) \vec{K}_\gamma(t)$$

Preuve

On a

$$\dot{\gamma}(t) = V_\gamma(t) \vec{T}_\gamma(t)$$

Donc

$$\ddot{\gamma} = \dot{V}_\gamma(t) \vec{T}_\gamma(t) + V_\gamma(t) \dot{\vec{T}}_\gamma(t) = V' K + V^2 K \quad \square$$

Remarque

On a toujours $\vec{k} \perp \vec{T}$

Definition 16

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bireguliere de classe C^3 .

On definit le repere mobile de Frenet de γ est le repere $\{\gamma(t), T, N_\gamma(t), B_\gamma(t)\}$

ou

$$T_\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}}{V_\gamma(t)}, \quad N_\gamma(t) = \frac{\ddot{\gamma} - \langle \dot{\gamma}, T \rangle T}{\|\ddot{\gamma} - \langle \dot{\gamma}, T \rangle T\|} \quad B = T \times N$$

Definition 17 (Torsion)

La torsion de γ est

$$\tau_\gamma(t) = \frac{1}{V_\gamma(t)} \langle \dot{B}, N \rangle$$

Theoreme 22 (Formules de Serret-Frenet)

$$\begin{cases} \frac{1}{V_\gamma} \dot{T}_\gamma = \kappa_\gamma N \\ \frac{1}{V_\gamma} \dot{N} = -\kappa_\gamma T_\gamma + \tau_\gamma B_\gamma \\ \frac{1}{V_\gamma} \dot{B} = -\tau_\gamma N_\gamma \end{cases}$$

Preuve

1. Par definition, du vecteur de courbure.

2.

$$\frac{1}{V} N' = \frac{1}{V} (\langle N', T \rangle T + \langle N', B \rangle B)$$

or

$$\begin{aligned} \langle N', T \rangle &= -\langle N, T' \rangle \\ \langle N', B \rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\langle N', B \rangle = V_\gamma$$

De meme

$$B' = \langle B', T \rangle T + \langle B', N \rangle N + \langle B', B \rangle B \quad \square$$

Lecture 4: ...

Wed 13 Oct

Theorème 23

La courbure de γ est la variation naturelle de la direction de γ

Preuve

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe C^2 que l'on suppose paramétrée naturellement.

On fixe $p = \gamma(s_0)$ et on note

$$\phi(s) = \phi_{s_0}(s) = (T_\gamma(s), \hat{T}_\gamma(s_0))$$

On a par trigonometrie elementaire que

$$\|T(s) - T(s_0)\| = 2 \sin\left(\frac{\phi(s)}{2}\right)$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow s_0+} \frac{\phi(s) - \phi(s_0)}{s - s_0} &= \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\phi(s)}{2 \sin(\phi(s)/2)} \frac{2 \sin(\frac{\phi(s)}{2})}{s - s_0} \\ &= \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\phi(s)}{2 \sin(\frac{\phi(s)}{2})} \frac{\|T(s) - T(s_0)\|}{s - s_0} \\ &= \lim_{s \rightarrow s_0+} \left\| \frac{T(s) - T(s_0)}{s - s_0} \right\| = \kappa(s_0) \end{aligned}$$

Donc on prouve que $\frac{d}{ds}|_{s_0+} \phi(s) = \kappa(s_0)$

4.1 Contact entre deux courbes

Definition 18 (Contact de courbes)

Soit $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux courbes C^k .

Ces deux courbes ont un contact d'ordre k en $t_0 \in I$ si

$$\alpha(t_0) = \beta(t_0) \text{ et } \frac{d^n}{dt^n} \alpha(t) = \frac{d^n}{dt^n} \beta(t)$$

Theorème 24

α et β ont un contact d'ordre 2 en $t_0 \iff$

$$\alpha(t_0) = \beta(t_0), T_\alpha(t) = T_\beta(t), V_\alpha(t_0) = V_\beta(t_0)$$

et

$$\kappa_\alpha(t_0) = \kappa_\beta(t_0)$$

Definition 19 (Cercle osculateur)

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ bireguliere et $u_0 \in I$.

On appelle cercle osculateur de γ en u_0 le cercle contenu dans le plan osculateur de γ et de centre et rayon

$$p = \gamma(u_0) + \rho(u_0)\mathcal{N}_\gamma(u_0)$$

et rayon $\rho(u_0) = \frac{1}{\kappa_\gamma(u_0)}$

Proposition 25

Le cercle osculateur est l'unique cercle qui a un contact d'ordre 2.

5 Repere de Frenet

Definition 20 (Reguliere au sens de Frenet)

La courbe γ est reguliere au sens de Frenet si $\gamma \in C^2$ et γ est bireguliere et $u \rightarrow N_\gamma(u)$ est C^1 .

Remarque

- Si γ est bireguliere et C^3 , alors γ est Frenet-reguliere.
- Si γ est frenet reguliere, alors T_γ et B_γ sont de classe C^1 .

Si γ est Frenet-reguliere, alors la torsion $\tau_\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ est

$$\tau_\gamma = \frac{1}{V_\gamma(u)} \langle \dot{N}, B_\gamma \rangle$$

Proposition 27

γ est une courbe plane $\iff \tau_\gamma = 0$

Preuve

Si γ est plane, alors le plan osculateur est constant $\iff B_\gamma$ est constant $\Rightarrow \dot{B}_\gamma = 0 \Rightarrow \tau_\gamma = 0$.

Supposons que $\tau_\gamma = 0$.

Soit $p = \gamma(u_0) \in \mathbb{R}^3$.

On definit

$$h(u) = \langle \gamma(u) - p, B_\gamma \rangle$$

Notons que $\dot{B}_\gamma = -\tau_\gamma N = 0$ est constant.

Donc

$$\frac{dh}{du} = \langle \dot{\gamma}(u), B \rangle = V_\gamma \langle T_\gamma, B \rangle = 0$$

Donc h est constant et donc $\langle \gamma(u), B \rangle = \langle p, B \rangle \forall u \in I$ qui est l'équation d'un plan. \square

Proposition 28

La torsion mesure la variation angulaire du plan osculateur, c'est à dire que si

$$\theta(s) = (B_\gamma(s), \hat{B}_\gamma(s_0))$$

Preuve

Alors

$$\frac{d}{ds}|_{s_0} \theta(s) = |\tau_\gamma(s_0)|$$

\square

On applique la meme preuve que Serret-Frenet.

Definition 21 (Courbe a pente constante)

Une courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 est dite de pente constante si $\dot{\gamma}(u)$ fait un angle constant avec une direction fixe.

Proposition 29

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ Frenet reguliere, alors γ est de pente constante \iff

$$\frac{\tau}{\kappa} = \text{cste.}$$

Preuve

On suppose que γ est parametree naturellement et $\langle T_\gamma(s), A \rangle = a = \text{constante}$.

$$0 = \frac{d}{ds} \langle T, A \rangle = \langle \dot{T}, A \rangle = \kappa \langle N, A \rangle$$

or $\kappa \neq 0$ donc $\langle N, A \rangle = 0$ ce qui implique que $b = \langle B, A \rangle$.

On a donc

$$0 = \frac{d}{ds} \langle N, A \rangle = \langle \kappa T - \tau B, A \rangle$$

$$\iff \kappa \langle T, A \rangle = \tau \langle B, A \rangle$$

$$\iff \frac{\tau}{\kappa} = \text{constante}$$

Supposons donc que $\frac{\tau}{\kappa} = \text{constante}$.

On pose $\lambda = \frac{\tau}{\kappa}$ et $A = \lambda T + B$, alors

$$\langle T, A \rangle = \lambda \langle T, T \rangle + \langle B, T \rangle = \lambda = \text{constant}$$

Verifions que A est constant, car

$$\frac{dA}{ds} = \lambda \dot{T} + \dot{B} = \lambda \kappa N - \tau N = 0$$

\square

5.1 Theoreme fondamental des courbes de \mathbb{R}^3

Etant donne deux fonctions continues sur l'intervalle I $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\kappa(s) > 0$.

Alors il existe une courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ Frenet reguliere telle que sa courbure et sa torsion sont donnees par κ et τ ie. $\kappa(s) = \kappa_\gamma(s), \tau(s) = \tau_\gamma(s) \forall s \in I$.

Cette courbe est unique a un déplacement pres.

Preuve

On prouve d'abord l'unicite.

On suppose que $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont deux courbes Frenet regulieres, de vitesse 1 tel que $\delta_{\gamma_1} = \delta_{\gamma_2} = \delta$ et $\kappa_{\gamma_1} = \kappa_{\gamma_2} = \kappa$.

Quitte a appliquer une translation et une rotation a γ_2 , on peut supposer que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$.

$$T_1(0) = T_2(0), N_1(0) = N_2(0), B_1(0) = B_2(0)$$

On note $F_i(s) \in SO(3)$ la matrice dont les colonnes sont T_i, N_i, B_i .

Alors on calcule

$$\frac{dF_i}{ds} = F_i(s)\Omega(s)$$

avec

$$\Omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

Cette equation matricielle est equivalente aux equations de Serret-Frenet.

On calcule

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(F_1(s)F_2(s)^{-1}) &= \frac{d}{ds}(F_1F_2^T) \\ &= \dot{F}_1F_2^T + F_1\dot{F}_2^T \\ &= (F_1\Omega)F_2^T + F_1(F_2\Omega)^T \\ &= F_1\Omega F_2^T + F_1\Omega^T F_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or $F_1(0) \cdot F_2(0)^{-1} = \text{Id}$ et donc $F_1(s) = F_2(s) \forall s \in I$.

Donc $T_1(s) = T_2(s) \forall s \in I$. Donc $\gamma'_1 = \gamma'_2$ et donc $\gamma_1 = \gamma_2$.

Existence

Sont donnees $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$, on veut construire γ .

Le theoreme de Cauchy-Lipschitz sur les edo donne l'existence d'une solution au probleme de Cauchy

$$\frac{dF}{ds} = F(s)\Omega(s), F(0) = \text{Id}$$

On affirme que $F(s) \in SO(3) \forall s$.

En effet, on a $F(0)F(0)^T = \text{Id}$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F(s)F(s)^T &= \dot{F}F^T + F\dot{F}^T \\ &= F\Omega F^T - F\Omega^T F^T = 0 \end{aligned} \quad \square$$

Et donc $F(s) \in O(3)$ et $F(s) \in SO(3)$ car l'application \det est continue.
On pose donc $\gamma(s) = \int_0^s T(u)du$

Lecture 5: ...

Wed 20 Oct

6 Courbes dans le plan orienté

Definition 22

On dit que deux bases d'un ev réel de dimension finie.

On dit que deux bases ont la même orientation si la matrice de changement de base a déterminant positif.

C'est une relation d'équivalence appelée une "classe d'orientation"

Un espace vectoriel est orienté si on en a choisi une classe d'orientation.

L'orientation canonique de \mathbb{R}^n est celle associée à la base canonique.

Definition 23 (Angle orienté)

L'angle orienté entre deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} dans un plan orienté est défini par

$\hat{\vec{a}, \vec{b}} = \pm \hat{\vec{a}, \vec{b}}$ avec le signe $+$ si $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ est une base positive (directe) et $-$ sinon.

Definition 24 (L'opérateur J)

On note $J = R_{+\frac{\pi}{2}}$ la rotation dans un plan orienté d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

Dans une base orthonormée directe, on a $J = R_{+\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Definition 25 (Produit extérieur)

Le produit extérieur de deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} dans un plan orienté est

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \langle \vec{a}, J\vec{b} \rangle$$

Remarque

1. $a \wedge b = \|a\| \|b\| \sin \theta$, alors
2. Si on plonge $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \langle \vec{a} \times \vec{b}, e_3 \rangle$$

Definition 26

Si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe de classe C^1 , alors on definit le vecteur normal oriente a γ

$$N^{or}(u)$$

par la condition que

$$T_\gamma \wedge N^{or} > 0 \iff \{T, N^{or}\} \text{ est orthonormee directe}$$

On definit la courbure orientee d'une courbe reguliere de classe C^2 par

$$k(u) = \kappa^{or}(u) = \frac{1}{V} \langle \dot{T}, N^{or} \rangle$$

Definition 27

On dit qu'un arc de courbe γ de classe C^2 dans un plan oriente est convexe si $k > 0$, concave si $k < 0$.

On dit que γ est une "spirale" si la courbure est non nulle et monotone.

Un point d'inflexion si la courbure change de signe en ce point.

Un point est un "sommet" si la derivee de la courbure change de signe

Remarque

Le graphe de $f(x)$ a un point d'inflexion en $f''(x) = 0$ et $f''(x)$ change de signe

Definition 28 (Fonction angulaire)

La fonction angulaire d'une courbe plane (dans un plan oriente).

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe C^2 .

On appelle fonction angulaire de γ la fonction

$$\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

verifiant

1. ϕ est continue
2. $\phi(u) = \angle(\dot{\gamma}(u), \vec{d}) \mod 2\pi$

Remarque

Si on prend $\vec{d} = e_1$, alors

$$T = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}$$

Proposition 33

La courbure orientee est la variation naturelle de la fonction angulaire.

Preuve

On a $T = (\cos \phi, \sin \phi)$, donc

$$N = (-\sin \phi, \cos \phi)$$

et de meme

$$k = \frac{1}{V} \langle \dot{T}, N \rangle \quad \square$$

Theorème 34 (Theoreme fondamental des courbes planes)

Soit $k : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors il existe une courbe $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$, de classe C^2 de courbure $k(s)$ et de vitesse 1.

Cette courbe est unique a isometrie directe pres.

Preuve

Existence

La fonction $k : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ est donnee. On pose

$$\phi(s) = \int_0^s k(u) du$$

Puis on pose $T(s) = (\cos \phi(s), \sin(\phi(s)))$, on a donc $N(s) = (-\sin(\phi(s)), \cos \phi(s))$.

On pose encore

$$X(s) = \int_0^s \cos(\phi(s)) ds, Y(s) = \int_0^s \sin(\phi(s)) ds$$

On pose enfin $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$.

L'existence est donc prouvee.

L'unicite vient de $\frac{d\phi}{ds} = k$ \square

Definition 29

On dit qu'une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe fermee de classe C^k si $\gamma(a) = \gamma(b)$ et les derivees coincident.

Une telle courbe s'appelle aussi courbe periodique, car on peut l'etendre a

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Theorème 35 (Theoreme des 4 sommets)

Toute courbe plane C^2 -fermee admet au moins 4 changement de signes de $\frac{dk}{du}$

Preuve

On montre le resultat dans le cas d'une courbe convexe.

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe C^2 -convexe. Alors on a $k(a) = k(b)$ et on note $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$.

On suppose $V_\gamma(s) = 1$, alors on a

$$\frac{dT}{ds} = kN$$

avec

$$T = (\dot{x}, \dot{y}), N = JT = (-\dot{y}, \dot{x})$$

Ainsi,

$$\ddot{x} = -k\dot{y}, \ddot{y} = k\dot{x}$$

On a alors

$$\int_a^b \dot{k}(s) ds = 0$$

et

$$\int_a^b k(s)\dot{y}(s)ds = -\int_a^b \ddot{y}(s)ds = 0$$

et

$$\int_a^b k(s)\dot{x}(s)ds = 0$$

Supposons que $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est C^2 -fermée avec deux changements de signe de $\dot{k}(s)$, par exemple $\dot{k}(s) > 0$ sur (a, c) et $\dot{k}(s) < 0$ sur (c, b) . Notons $p = \gamma(a) = \gamma(b)$, $q = \gamma(c)$, soit

$$h(x, y) = Ax + By + C = 0$$

l'équation de la droite par p et q .

Alors le signe de $\dot{k}(s)(Ax + By + C)$ est constant.

Mais

$$0 < \int_a^b f(s)ds = A \int_a^b \dot{k}x(s)ds + B \int_a^b \dot{k}y(s)ds + C \int_a^b \dot{k}ds = 0$$

□

Contradiction.

7 Surfaces

7.1 Le concept de variété

Definition 30 (Variété)

Une variété topologique de dimension $n \in \mathbb{N}$ est un espace topologique M tel que

1. Chaque point $p \in M$ admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n
2. L'espace topologique M est séparé (de Hausdorff) et admet une base dénombrable d'ouvert

Definition 31 (Surface topologique)

Une surface topologique est une variété de dimension 2.

7.2 Sous-Varietes de \mathbb{R}^n

Rappels :

Definition 32

Si $U \subset \mathbb{R}^n$, on note $C^k(U, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui sont continues et tel que $\forall j = 1, 2, \dots, n$ les derivees partielles

$$\frac{\partial^k}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}$$

existent et sont continues.

Definition 33

Un diffeomorphisme de classe C^k entre deux ouverts $U, V \subset \mathbb{R}^n$ est une application $f : U \rightarrow V$ tel que

1. f est bijective
2. f et f^{-1} sont de classe C^k

Definition 34 (Système de coordonnées)

On appelle système de coordonnées (generalisees ou curviligne) sur un ouvert U la donnée de n fonctions

$$y_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

qui verifient que la fonction $f = (y_1, \dots, y_n)$ est un diffeomorphisme de classe C^k .

Definition 35 (Sous-Variete)

Un sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variete differentiable de classe C^k si $\forall p \in M$, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ tel que $p \in U$ et un diffeomorphisme $f : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ tel que $f(M \cap U) = V \cap \mathbb{R}^m$ ou \mathbb{R}^m est plonge dans \mathbb{R}^n .

Autre point de vue :

M est une sous-variete de classe C^k si $\forall p \in M$ il existe un système de coordonnées curvilignes de classe C^k y_1, \dots, y_n definie sur un voisinage U de p tel que $q \in U \cap M \iff y_{m+1}(q) = \dots = y_n(q) = 0$.

On regarde $y_j(x) = 0 (j = m+1, \dots, n)$ comme un système d'équations locales qui definissent la sous-variete.

Definition 36 (Dimension d'une sous variete)

m tel que defini ci-dessus est la dimension de M et $n - m$ est la codimension de $M \subset \mathbb{R}^n$.

7.2.1 Rappel de calcul differentiel

Definition 37

Une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$ est differentiable (au sens de Frechet) en $p \in U$ s'il existe une application lineaire $l : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p) - l(h)}{|h|} = 0$$

7.3 Le theoreme du rang constant

Si $A \in M_{n \times m}(K)$ est de rang r alors il existe des matrices inversibles $P \in GL_n(K), Q \in GL_m(K)$ tel que

$$PAQ^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Theoreme 36 (Theoreme du rang constant)

La meme chose se produit localement pour une application differentiable, ie. il existe une reparametrisation tel que tout fonction f s'ecrit comme

$$f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, \dots)$$

Definition 38

On note

$$\text{Rang}(f, p) = \text{Rang}_f(p) = \text{Rang}(df_p)$$

Definition 39 (Rang maximal)

1. f est de rang maximal en p si

$$\text{Rang}_f(p) = \min \{n, m\}$$

2. f est une submersion si $\text{Rang}_f(p) = n \forall p \in U \iff df_p$ est surjective $\forall p$
3. f est une immersion $\iff \text{Rang}_f(p) = m \iff df_p$ est injectif $\forall p \in U$

Lemme 37

Si $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ alors la fonction $U \rightarrow \mathbb{N}, p \mapsto \text{Rang}_f(p)$ est semi-continue inferieurement.

Preuve

Si $\text{Rang}_f(p) > \alpha$, alors il existe une sous matrice S_p de la matrice jacobienne de taille $r \times r$ tel que $\det(S_p) \neq 0$ par continuite des $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ on a $\det S_q \neq 0$ pour q assez proche de $p \Rightarrow \text{Rang}_f(p) \geq r > \alpha$ \square

Theorème 38 (Theoreme du rang constant)

Soit $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, ($U \subset \mathbb{R}^m$) avec $k \geq 1$. Supposons que $\text{Rang}_f(p)$ est constant.

Alors pour tout point $p \in U$ il existe des voisinages $V \subset U$ de p et W de $q = f(p)$ est des difféomorphismes C^k , $\phi : U \rightarrow U'$, $\psi : W \rightarrow W'$ tel que

$$\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$$

satisfait

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots)$$

Corollaire 39 (Theoreme d'inversion locale)

Si $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, $U \subset \mathbb{R}^n$ vérifie que $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme, alors il existe des voisinages U de p et V de $q = f(p)$ tel que $df_q^{-1} = (df_q)^{-1}$.

Lecture 7: Varietes (enfin)

Wed 03 Nov

7.4 Exemples de Sous-varietes

1. Une sous-variete de dimension 0 de \mathbb{R}^n est un sous-ensemble discret (tous les points sont isolés)
2. Un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variete de dimension n .
3. L'ensemble vide est une sous-variete de dimension $n \forall n$

Theorème 40

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application C^k et de rang constant $= r$.

— L'ensemble des points

$$M = \{x \in U | f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^m$$

est une sous-variete differentiable de classe C^k de dimension $m - r$.

— $\forall p \in U$, il existe un voisinage $V \subset U$ de p tel que $N = f(V)$ est une sous-variete

Definition 40 (Groupe de Lie)

Un groupe de Lie est une variete differentiable G tel que la multiplication et l'inverse sont des operations bien definies.

7.5 Sur les differentielles et gradients

Que vaut la differentielle dx_i ? On a que

$$dx_i|_p(h) = x_i(p+h) - x_i(p) = p_i + h_i - p_i = h_i$$

On a que $dx_i(e_j) = \delta_{ij}$, donc $\{dx_i, \dots, dx_n\} \in (\mathbb{R}^n)^*$ est la base duale canonique.

Lecture 8: Surfaces

Wed 10 Nov

Proposition 41

L'espace tangent en un point p d'une sous-variete differentiable $M \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de dimension $m = \dim M$.

Preuve

On se donne un diffeomorphisme local adapte a M au voisinage de p .

C'est-a dire $\phi : U \rightarrow V$ diffeomorphisme entre deux ouverts $U, V \subset \mathbb{R}^n$ qui verifient $p \in U \cap M$ et $\phi(U \cap M) = V \cap E$ ou $E \subset \mathbb{R}^n$ est un sev de dimension m .

Soit v un vecteur tangent a M en p . Alors il existe $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que α represente le vecteur v .

Quite a restreindre $\epsilon > 0$, on peut supposer que $\alpha(t) \in M \forall t$.

Notons $\beta = \phi(\alpha)$ β est un chemin de classe C^1 tel que

$$\beta(t) \in \phi(U \cap M) = E \cap V$$

$$\text{et } \beta(0) = \frac{d\beta}{dt}(0) = d\phi_{\alpha(0)}(\dot{\alpha}(0)) = d\phi_p(v).$$

Mais il est clair que $\dot{\beta}(0) \in E$.

On a donc prouve que $\forall v \in T_p M$ on a

$$d\phi_p(v) \in E$$

Donc $v \in d\phi_p^{-1}(E) = d(\phi^{-1})_q(E)$ et donc $T_p M \subset d\phi_p^{-1}(E)$.

On affirme que $(d\phi_p)^{-1}(E) \subset T_p M$, posons $w = d\phi_p(v) \in E$ et $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow E \cap V$ defini par

$$\beta(t) = q + tw$$

Alors $\alpha(t) = \phi^{-1}(\beta(t))$ represente v

□

Corollaire 42

Si $M = f^{-1}(0)$ ou $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ est une submersion alors

$$T_p M = \ker(df_p)$$

Preuve

On affirme que $T_p M \subset \ker(df_p)$.

En effet, si $v \in T_p M$, alors $v = \dot{\alpha}$ avec $\alpha(0) = p$.

Donc

$$f(\alpha(t)) = c \Rightarrow df_p(v) = 0$$

□

Corollaire 43

Si $\psi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un plongement (ie. ψ est une immersion et $\psi : U \rightarrow M = \psi(U)$ est un homeomorphisme) alors $\forall p = \psi(u) \in M$ on a

$$T_p M = \text{Im}(d\psi_u)$$

Notons que

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_j} = \frac{d}{dt} \psi(u + te_j) \in T_p M$$

8 Geometrie des Surfaces

Definition et exemples

On decrit une surface de deux manieres differentes.

Description implicite

Une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ peut etre definie $S : f(x) = c \iff S = \{x \in \mathbb{R}^3 | f(x) = c\}$ ou $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est differentiable.

On dit que $x \in U$ est un point critique si $df_x = 0$ dans ce cas $c = f(x)$ est une valeur critique.

Definition 41 (Point singulier)

Un point singulier de S est un point critique qui appartient a S .

x est un point singulier de $S \iff f(x) = c, \partial_i(x) = 0 \forall i \in [3]$.

Description parametrique

Une surface parametree est la donnee d'un plongement differentiable $\psi : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$.

On a vu que $\forall p \in \psi(u) \in S$ le plan tangent est

$$T_p S = \text{Im } d\psi_u$$

et ce plan est engendre par $\frac{\partial \psi}{\partial u_1}, \frac{\partial \psi}{\partial u_2}$.

Theoreme 44

Toute surface implicite admet des parametrisations locales au voisinage de tout point regulier.

Definition 42

Si $\psi : \Omega \rightarrow S$ est une surface parametree alors on appelle repere mobile adapte a ψ la donnee des trois champs de vecteurs

$$(u, v) \in \Omega \rightarrow \{b_1(u, v), b_2(u, v), n(u, v)\}$$

ou

$$b_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u}, b_2 = \frac{\partial \psi}{\partial v}, n = \frac{b_1 \times b_2}{\|b_1 \times b_2\|}$$

Definition 43 (Tenseur metrique)

On appelle tenseur metrique (ou premiere forme fondamentale) de la surface parametree $\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ est la matrice de Gram de $\{b_1(u, v), b_2(u, v)\}$

$$G(u, v) = \begin{pmatrix} g_{11}(u, v) & g_{12}(u, v) \\ g_{21}(u, v) & g_{22}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|b\|^2 & \langle b_1, b_2 \rangle \\ \langle b_1, b_2 \rangle & \|b_2\|^2 \end{pmatrix}$$

Lecture 9: ...

Wed 17 Nov

Definition 44 (Intersection Transversale)

Deux sous-varietes $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ s'intersectent transversalement en un point p si $p \in M_1 \cap M_2$ et $T_p M_1 + T_p M_2 = \mathbb{R}^n$

Proposition 45

Si M_1 et M_2 s'intersectent transversalement en p et si $\dim M_1 + \dim M_2 = n$, alors il existe un systeme de coordonnees au voisinage U de p . tel que $M_1 \cap U = \{u \in U \mid u_{m+1} = \dots = u_n = 0\}$

Une surface parametree, reguliere

$$\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$

Ce tenseur depend de $(u, v) \in \Omega$ et est la matrice de Gram pour le produit scalaire standard de \mathbb{R}^3 sur b_1, b_2

Tube autour d'une courbe

On choisit deux champs de vecteurs $w_1, w_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ le long de γ tel que

$$\forall t \{w_1(t), w_2(t)\} = \text{base orthonormee de } \dot{\gamma}^\perp$$

et on pose

$$r(u, t) = \gamma(t) + a(\cos(u)w_1(t) + \sin(u)w_2(t))$$

8.1 Courbes tracees sur une surface

Soit $\psi : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ une surface parametree (reguliere) et $\gamma : I \rightarrow S = \psi(\Omega)$ une courbe reguliere.

On pose $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \Omega, \tilde{\gamma}(t) = \psi^{-1}(\gamma(t))$.

Definition 45

On appelle $\tilde{\gamma}$ la representation de γ dans la carte ψ^{-1}

Proposition 46

La longueur d'un arc γ se calcule à partir de $\tilde{\gamma}$ par la formule

$$l(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E(u(t), v(t)) \frac{du}{dt}^2 + 2F(u(t), v(t)) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G(u, v) \frac{dv}{dt}^2} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum g_{ij}(u(t), v(t))} dt$$

Preuve

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} \psi(\tilde{\gamma}(t)) = \frac{d\psi}{du} \frac{du}{dt} + \frac{d\psi}{dv} \frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt} b_1 + \frac{dv}{dt} b_2 \quad \square$$

8.2 Angle entre deux courbes

Soient $\alpha, \beta : I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha(0) = \beta(0) = p$.

Comment trouver l'angle θ entre $\dot{\alpha}(0)$ et $\dot{\beta}(0)$ dans $T_p S \subset \mathbb{R}^3$ à partir des représentations $\tilde{\alpha} = \psi^{-1} \circ \alpha, \tilde{\beta} = \psi^{-1} \circ \beta$

Proposition 47

L'angle θ entre α et β est donné par

$$\cos \theta = \frac{Eu'_1 v'_2 + F(u'_1 v'_2 + u'_2 v'_1) + Gv'_1 v'_2}{\sqrt{Eu_1'^2 Fu_1' v'_1 + Gv_2'^2} \sqrt{Eu_2'^2 + 2Fu_2' v'_2 + Gv_2'^2}}$$

8.3 Aire d'une surface**Définition 46**

Si $\psi : \Omega \rightarrow S$ est une surface paramétrée régulière et ψ est bijective. Alors l'aire de S est définie par

$$\text{Aire}(S) = \iint \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint \sqrt{\det G} du dv.$$

De plus si $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors l'intégrale de h sur S est

$$\iint_{\Omega} \psi^{-1} \cdot h(u, v) \sqrt{\det G} du dv$$

Et le centre de gravité de S est défini par

$$C = \frac{1}{\text{Aire}(S)} \int_S \psi(u, v) \sqrt{\det G} du dv$$

Lecture 10: géométrie intrinsèque

Wed 24 Nov

8.4 Géométrie intrinsèque/extrinsèque des surfaces**Définition 47**

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière connexe.

La distance intrinsèque dans S entre deux points est définie par

$$d_S(p, q) = \inf \{l(\gamma) : \gamma(0) = p, \gamma(1) = q, C^1 \text{ par morceaux sur } S\}$$

Lemme 48

(S, d_s) est un espace metrique

Definition 48 (distance intrinseque)

On appelle cette distance la distance intrinseque dans S , tandis que la distance euclidienne est la distance intrinseque.

Exemple

Si S est une sphere de rayon a et de centre c , alors $d_S(p, q) = a\theta$ ou θ est l'angle entre $p - c$ et $q - c$

Question :

Comment decider si deux surfaces $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ sont isometriques pour la distance intrinseque.

Definition 49

S_1, S_2 sont intrinsequement isometriques si il existe $f : S_1 \rightarrow S_2$ bijective tel que

$$d_{S_2}(f(p), f(q)) = d_{S_1}(p, q)$$

Exemple

soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe C^2 parametree naturellement et simple (γ injective).

Le cylindre (generalise) de base γ est la surface reglee

$$\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\psi(u, v) = (\gamma(u), v)$$

Le tenseur metrique est tres simple a calculer, avec $b_1 = (\dot{\gamma}(u), 0)$ et $b_2 = (0, 0, 1)$, donc $ds^2 = du^2 + dv^2$.

Donc la longueur des courbes dans S sont egales aux longueurs dans \mathbb{R}^2 .

Donc le cylindre generalise S est isometrique au plan euclidien \mathbb{R}^2 .

Remarque

Si la courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ n'est pas complete ($I \neq \mathbb{R}$), alors la surface S et le plan euclidien sont localement isometrique.

Definition 50

Si $M_1 \subset \mathbb{R}^m$ et $M_2 \subset \mathbb{R}^n$ sont deux sous-varietes differentiables, alors on dit qu'une application $f : M_1 \rightarrow M_2$ est differentiable si il existe un voisinage ouvert U de M_1 et $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que F est differentiable et $F|_{M_1} = f$.

Exemple

Si $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface de classe C^k , alors on appelle application de Gauss

$$\nu : S \rightarrow S_2$$

definie par $\nu(p) =$ le vecteur unite qui est orthogonal a $T_p S$

Remarque

ν est définie au signe près, de plus ν n'est pas toujours définie de façon continue globalement(cf. ruban de Moebius).

Toutefois, si S est définie implicitement, ou si elle est paramétrée injectivement, alors l'application de Gauss

$$\nu : S \rightarrow S^2$$

est bien définie (au signe près) et est une application différentiable(de classe C^{k-1})

Preuve

Si la surface $S = \{f(x) = 0\}$ alors

$$\nu(p) = \pm \frac{1}{\|\nabla f(p)\|} \nabla f(p)$$

De plus, si $\psi : \Omega \rightarrow S$ est injective, alors

$$\nu(p) = \frac{b_1 \times b_2}{\|b_1 \times b_2\|}$$

□

Proposition 54

Soient $\psi_1 : \Omega_1 \rightarrow S_1 \subset \mathbb{R}^3, \psi_2 : \Omega_2 \rightarrow S_2 \subset \mathbb{R}^3$ deux surfaces régulières (C^1) paramétrées injectivement. Alors une application différentiable $f : S_1 \rightarrow S_2$ est une isométrie (globale) si et seulement si

$$G_1(u) = Dh(u)^T G_2(u) Dh(u)$$

Où $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2 = \psi_1 \circ f \circ \psi_2^{-1}$

Definition 51

Si $\psi : \Omega \rightarrow S$ est une paramétrisation bijective, alors $\phi = \psi^{-1} : S \rightarrow \Omega$ s'appelle la carte.

L'application h (comme ci-dessus) s'appelle la représentation de f dans les cartes ψ_1^{-1}, ψ_2^{-1}

Preuve

Si $f : S_1 \rightarrow S_2$ est une application différentiable alors $\forall p \in S_1$, la différentielle $df_p : T_p(S_1) \rightarrow T_p(S_2)$ est bien définie et linéaire.

Il faut voir que $dF_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, dF_p|_{T_p S_1} : T_p S_1 \rightarrow T_p S_2$.

Donc, si $v \in T_p S_1 \implies dF_p(v) \in T_p S_2$.

En effet, dire que $v \in T_p S_1$, signifie que $\exists \gamma$ tel que

$$v = \dot{\gamma}(0), \gamma : I \rightarrow S_1, \gamma \text{ différentiable et } \gamma(0) = p.$$

Mais alors $f \circ \gamma(t) = F(\gamma(t)) \forall t$ vérifie que $dF_p(\dot{\gamma}(0)) = dF_p(v)$.

$f : S_1 \rightarrow S_2$ est une isométrie si et seulement si pour toute courbe $\gamma : I \rightarrow S_1$,

on a

$$l(\gamma) = l(f(\gamma))$$

donc $\|\dot{\gamma}(t)\| = \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|$.

Ou encore

$$\|df_p(v)\| = \|v\| \quad \forall p \in S_1, \forall v \in T_p S_1$$

$$\langle df_p(v), df_p(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

$df_p : T_p S_1 \rightarrow T_p S_2$ est une isometrie entre les plans tangents $\forall p$

Pour une surface parametree $\psi : \Omega \rightarrow S$, le tenseur metrique peut s'ecrire

$$G(u) = D\psi(u)^T D\psi(u)$$

Prouvons donc l'equadiff.

On a

$$\begin{aligned} G_1(u) &= D\psi_1(u)^T D\psi_1(u) \\ &= D(f \circ \psi_1)^T D(f \circ \psi_2) \\ &= D(\psi_2 \circ h)^T D(\psi_2 \circ h) \\ &= (D\psi_2 Dh)^T (D\psi_2 Dh) \\ &= D\psi_2^T G_2 D\psi_2 \end{aligned} \quad \square$$

Exemple (Changement de Cartes)

Si ψ_1 et ψ_2 sont deux parametrisations de la meme surface S au voisinage d'un point p , alors on a

$$G_1 = Dh^T G_2 Dh$$

Definition 52

Une surface S est developpable si au voisinage de chaque point, il existe une carte dont le tenseur metrique est le tenseur euclidien.

Remarque

La surface $S = \psi(\Omega)$ est developpable si et seulement si $\exists h$.

La surface S est conformement plate si au voisinage de chaque point une parametrisation telle que

$$G = \lambda(u)I_n$$

Lecture 11: Courbure

Wed 01 Dec

Theoreme 57

Toute surface reguliere de classe C^2 , $S \subset \mathbb{R}^3$ admet un parametrage conforme

(local) au voisinage de tout point.

Definition 53 (Pseudosphere)

La pseudosphere est la surface de revolution d'une tractrice autour de son asymptote

Mise en equation :

On suppose que l'asymptote est l'axe Oz , que $c = 1$ et que $\|\dot{\gamma}\| = 1$ et $\gamma(0) = (1, 0)$.

On trouve l'equation $\dot{x} + x = 0 \implies x = e^{-t}$, et

$$\dot{x}^2 + \dot{z}^2 = 1 \implies z(t) = \int_0^t \sqrt{1 - e^{-2z}} dz$$

donc la pseudosphere admet la parametrisation

$$\psi : [0, 2\pi] \times [0, \infty) \rightarrow P \subset \mathbb{R}^3$$

avec

$$\psi(\theta, t) = (\cos \theta e^{-t}, \sin \theta e^{-t}, f(t))$$

Le tenseur metrique va valoir

$$G = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut maintenant poser $v = e^t, u = \theta$, alors

$$ds^2 = e^{-2t}(du^2 + dv^2) = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

8.5 Geodesiques et courbure des courbes sur une surface

Definition 54 (Geodesique)

Une geodesique d'une surface reguliere $S \subset \mathbb{R}^3$ est une courbe $\gamma : I \rightarrow S$ de classe C^2 verifiant

$$\ddot{\gamma} \perp T_\gamma S$$

Remarque

Si S est une surface de revolution, γ est geodesique si et seulement si $\ddot{\gamma} \times \nabla f$

Proposition 59

Toute geodesique est parcourue a vitesse constante.

Theorème 60

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ une courbe de classe C^2 parametree a vitesse constante telle que γ minimise la distance entre $p = \gamma(a)$ et $q = \gamma(b)$.

C'est a dire

$$l(\gamma) = d_s(p, q)$$

Alors γ est geodesique.

Definition 55

Soit $\gamma : I \rightarrow S$ une courbe de classe C^2 reguliere.

On note $\nu(t) = \nu(\gamma(t))$ le vecteur unitaire normal a $T_{\gamma(t)}S$.

$$T_\gamma(t) = \frac{1}{V} \dot{\gamma}$$

et

$$\mu(t) = \nu(t) \times T_\gamma(t)$$

On dit que $\{\nu(t), T_\gamma(t), \mu(t)\}$ est le repere de Darboux de la courbe γ relatif a S .

Remarque

- Le repere est orthonorme et direct
- T, μ sont tangents a S et forment une base orthonormee du plan tangent.

Definition 56 (Courbure normale)

On appelle courbure normale de γ en t

$$k_n(t) = \langle K, \nu \rangle$$

et on appelle la courbure geodesique

$$k_\gamma = \langle K, \mu \rangle$$

Theorème 62 (de Meusnier)

La courbure normale d'une courbe C^2 tracee sur une surface S , la courbure normale ne depend que de la direction de $\dot{\gamma}$

Preuve

On a $\gamma : I \rightarrow S$, C^2 , reguliere.

On pose $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \langle \nu, \dot{\gamma} \rangle$ On derive f :

$$0 = \frac{d}{dt} f = \langle \dot{\nu}, \dot{\gamma} \rangle + \langle \nu, \ddot{\gamma} \rangle$$

On a donc

$$0 = \frac{1}{V} \langle \dot{\nu}, \dot{\gamma} \rangle + V \langle \nu, K \rangle$$

Et donc

$$k_\gamma = -\frac{1}{V^2} \langle \dot{\nu}, \dot{\gamma} \rangle$$

On se rappelle que ν est la restriction a γ de l'application de Gauss

$$S \rightarrow S^2$$

$$\text{et } \dot{\nu} = \frac{d}{dt} \nu(\gamma(t)) = d\nu_{\gamma(t)}(\dot{\gamma})$$

Donc

$$k_\gamma = -\frac{\langle d\nu_{\gamma(t)}(\gamma), \dot{\gamma} \rangle}{\|\dot{\gamma}\|}$$

□

On peut donc definir la courbure normale de S en un point p

$$k_n : T_p S \rightarrow \mathbb{R} : v \mapsto \frac{-\langle d\nu_p(v), v \rangle}{\|V\|^2}$$

Definition 57

L'application de Weingarten d'une surface S reguliere de classe C^2 est la differentielle de l'application de Gauss. On la note $L_p : T_p S \rightarrow T_p S : L_p(v) = d\nu_p(v)$. L_p est un endomorphisme de $T_p S$ car de facon generale

$$\nu : S \rightarrow S^2$$

Alors

$$d\nu_p : T_p S \rightarrow T_{\nu(p)} S^2$$

Or $\forall q \in S^2$ on a $T_q S = q^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 | \langle v, q \rangle = 0\}$ Donc

$$T_p S = \{v | \langle \nu(p), v \rangle = 0\} = T_{\nu(p)} S^2$$

Definition 58 (Deuxieme forme fondamentale)

La deuxieme forme fondamentale de S en p est la forme bilineaire

$$h(v, w) = -\langle L_p v, w \rangle, v, w \in T_p S$$

Proposition 63

h est une forme bilineaire symmetrique et de facon equivalente L_p est autoadjointe.

Preuve

On va montrer que

$$h(b_i, b_j) = h(b_j, b_i)$$

pour b_i, b_j une base de $T_p S$.

On se donne une parametrisation au voisinage de $p \in S$.

On a donc

$$\psi : \Omega \rightarrow S$$

et on pose $b_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u}, b_2 = \frac{\partial \psi}{\partial v}$.

$$h_p(b_i, b_j) = -\langle d\nu_p(b_i), b_j \rangle.$$

$$\text{Or } d\nu_p(b_i) = \frac{\partial}{\partial u_i}(\nu \circ \psi(u)).$$

Donc

$$h_p(b_i, b_j) = -\langle \frac{\partial}{\partial u_i} \nu(\psi(u)), \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \rangle$$

$$\text{Or } \langle \nu \psi, \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \rangle = 0$$

Donc

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_i} \langle \nu \circ \psi, \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \rangle = \langle \nu \circ \psi, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_j \partial u_i} \rangle + \frac{\partial}{\partial u_i} \langle \nu \circ \psi, \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \rangle$$

Et donc

$$h(b_i, b_j) = \langle \nu \circ \psi, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j} \rangle = h(b_j, b_i) \quad \square$$

Donc par le theoreme spectral :

Corollaire 64

L_p est orthogonalement diagonalisable et on notes les valeurs propres k_1, k_2

De plus k_1, k_2 sont les valeurs maximales et minimales de la courbure normale.

Lecture 12: Quelquechose

Wed 08 Dec

8.6 Formule de variation premiere pour la longueur

Question : Si on a une famille de courbes sur une surface S , on aimerait determiner la derivee de la longueur de ces courbes.

Plus precisement, on considere une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ (parametree naturellement) et on deforme cette courbe par $f : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ telle que

$$f(u, 0) = \gamma(u) \forall u \in [a, b]$$

On veut calculer

$$\frac{d}{dv} \Big|_{v=0} l(\gamma_v)$$

Supposons que γ, f sont C^2

Theoreme 65 (Formule de variation premiere)

Sous ces hypotheses, on a

$$\frac{d}{dv} \Big|_{v=0} l(\gamma_v) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}(u, 0), \dot{\gamma}(u) \right\rangle - \int_0^b k_g(u) \left\langle \mu(u), \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle du$$

Corollaire 66

Si la deformation f est a extremités fixes et si γ est geodesique, alors

$$\frac{d}{dv} l(\gamma_v) = 0$$

Preuve

On a

$$\frac{d}{dv} l(\gamma_v) = \frac{d}{dv} \int_a^b \|\dot{\gamma}(u)\| du = \int_a^b \frac{\partial}{\partial v} \sqrt{\left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle}$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial v} \sqrt{\left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}_v\|} \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle$$

En $v = 0$, on a

$$\|\dot{\gamma}_v(u)\| = 1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv} l(\gamma_v) &= \int_a^b \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle du \\ \frac{d}{dv} \Big|_{v=0} l(\gamma_v) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle du - \int_a^b \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right\rangle du \\ &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \dot{\gamma} \right\rangle \Big|_{a=0}^b - \int_a^b \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \ddot{\gamma}(u) \right\rangle du \end{aligned}$$

On a $\ddot{\gamma} = K_\gamma$

□

Corollaire 67

Une courbe de classe C^2 $\gamma : I \rightarrow S$ est géodésique \iff

1. $\|\dot{\gamma}(u)\| = \text{constante}$
2. La courbe γ minimise localement la longueur entre ses points.

$$\forall t \in I \exists \epsilon > 0 \text{ tq si } t - \epsilon \leq t_1 \leq t_2 \leq t + \epsilon$$

Alors

$$d_S(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = l(\gamma|_{[t_1, t_2]})$$

8.7 Courbure normale d'une surface

Definition 59 (Courbure normale)

La courbure normale a une surface S en un point p et une direction $v \in T_p S \setminus \{0\}$

$$k_n(v) = \frac{h(v, v)}{\langle v, v \rangle} = - \frac{\langle L_p(v), v \rangle}{\|v\|^2}$$

On remarque que $k_n(\lambda, v) = k_n(v) \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

On regarde souvent k_n comme fonction

$$k_n : \{v \in T_p S \mid \|v\| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Comment calculer L_p ?

Soit $\psi : \Omega \rightarrow S$ une paramétrisation régulière C^2 .

On a le repère adapté $b_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u_1}, b_2 = \frac{\partial \psi}{\partial u_2}, v = \frac{b_1 \times b_2}{\|b_1 \times b_2\|}$

$$L_p b_1 = d\nu\left(\frac{\partial \psi}{\partial u_i}\right) = \frac{\partial \nu}{\partial u_i}$$

Donc

$$L(b_1) = l_{11}b_1 + l_{21}b_2$$

et on en obtient la matrice.

Il est souvent plus simple de calculer h

On a

$$h(v, w) = -\langle Lv, w \rangle$$

Donc

$$h_{ij} = h(b_i, b_j) = -\langle L(b_i), b_j \rangle = -l_{1i} \langle b_1, b_j \rangle - l_{2j} \langle b_2, b_j \rangle = l_{1i}g_{1j} + l_{2j}g_{2j}$$

Et donc

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

Donc on peut calculer L_p grâce à

$$L = -G^{-1}H$$

Definition 60 (Surface complete)

La surface S est complète si toute suite de Cauchy (pour la distance intrinsèque) converge

Theorème 68 (Hoph-Rinow 1930)

Si S est une surface complète et connexe, alors il existe une géodésique minimale entre deux points quelconques.

C'est aussi un corollaire du théorème d'Arzela-Ascoli.

8.8 Courbures principales, moyenne et de Gauss

Par le théorème spectral, L est orthogonalement diagonalisable. Il existe donc une base $\{v_1, v_2\}$ orthonormée de $T_p S$ propre pour L_p .

On note k_1, k_2 les valeurs propres de $-L$ (on suppose $k_1 \leq k_2$).

En effet

$$k_n(v_i) = -\frac{\langle L_p(v_i), v_i \rangle}{\|v\|_i^2} = k_i$$

Definition 61 (Typologie des points sur une surface)

1. Les vecteurs propres de L_p sont les directions principales de S en p .
2. La courbure de Gauss de S en p est

$$K = k_1 k_2 = \det L_p = \frac{\det H}{\det G}$$

3. La courbure moyenne de S en p est

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}\text{Tr} L_p$$

4. Le point p est elliptique si $K(p) > 0$

5. Le point p est hyperbolique si $K(p) < 0$
6. Le point p est parabolique si $k_1 k_2 = 0$ mais $H \neq 0$
7. Le point p est plat si $K = H = 0$
8. Le point p est ombilique si $k_1 = k_2$

Theorème 69

Si S est une surface reguliere de classe C^3 dont tous les points sont ombilliques alors S est un plan ou une sphere.

Lecture 13: Geometrie Hyperbolique

Wed 15 Dec

9 Geometrie Hyperbolique

Constat : La sphere S^n et l'espace euclidien verifient

1. Ces espaces sont homogenes
2. Ce sont des espaces metriques complets
3. Topologiquement simples (simplement connexe)

On dit que (X, d) est un espace homogene si le groupe des isometries agit transitivement

$$\iff \forall p, q \in X \exists f : X \rightarrow X \text{ une bijection isometrique } f(p) = q$$

Question :

Existe-t'il aussi un espace metrique, simplement connexe, complet, homogene et tel que (en dimension 2), on a que

$$K = -1$$

Theorème 70 (Hilbert)

Toute surface de \mathbb{R}^3 a courbure de Gauss constante negative n'est pas complete.

Cependant, il existe une surface (non-plongee dans \mathbb{R}^3) simplement connexe, a courbure constante, homogene, on l'appelle le plan hyperbolique

Varietes Riemanniennes

Definition 62

Une metrique riemannienne sur une variete M est la donnee pour tout $p \in M$ d'un produit scalaire $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_{M,p}$ sur $T_p M$

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

qui varie de facon differentiable.

Donc, une variété Riemannienne est donc un espace qui est infinitésimalement Euclidien.

Si $\gamma : [a, b] \rightarrow (M, g)$ est une courbe C^1 , sa longueur est

$$l_g(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

$$\iff l_g(\gamma) = \int_a^b g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))^{\frac{1}{2}}$$

Alors $d_g(p, q) = \inf \{l_g(\gamma)\}$ est une distance sur M .

Definition 63

La géométrie Riemannienne est l'étude de l'espace métrique (M, d_g)

Theorème 71

Si (M_1, g_1) et (M_2, g_2) sont deux variétés riemanniennes, alors l'application

$$f : M_1 \rightarrow M_2$$

est une isométrie pour la distance intrinsèque $\iff f$ est différentiable et $df_p : T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2$ respecte les produits scalaires.

$$g_2(df(\xi), df(\eta)) = g_1(\xi, \eta)$$

Definition 64 (Application conforme)

$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ est dite conforme si elle respecte les angles :

$$\xi, \eta \in T_p M_1 \setminus \{0\} \implies \text{angle}(\xi, \eta) = \text{angle}(df_p(\xi), df_p(\eta))$$

Lemme 72

f est conforme $\iff g_2(df(\xi), df(\eta)) = \lambda^2(p)g_1(\xi, \eta)$

Exemple

1. Si M est une sous-variété de \mathbb{R}^n , on a la métrique Riemannienne induite par le produit scalaire de \mathbb{R}^n

$$g_p(\xi, \eta) = \langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{R}^n} \forall \xi, \eta \in T_p M \subset \mathbb{R}^n$$

2. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ est un domaine, alors une métrique riemannienne est donnée par G , avec $g_{i,j}(u) = g_u(e_i, e_j)$.

Si $\xi = \sum \xi_i e_i, \eta = \sum \eta_i e_i \in T_m \Omega$.

Alors

$$g_u(\xi, \eta) = \sum_{i,j} g_{ij} \xi_i \eta_j$$

Remarque

Si on paramétrise une surface par $\psi : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, alors ψ est une isométrie entre Ω , munie du tenseur métrique et S muni de la métrique Riemannienne induite par le plongement $S \subset \mathbb{R}^3$

M peut être une sous-variété d'un espace pseudo-Euclidien $\mathbb{E}^{p,q} = \mathbb{R}^{p+q}$ muni d'une forme quadratique de signature (p, q)

Exemple

L'espace de Minkowski est

$$\mathbb{E}^{2,1} = \mathbb{R}^3$$

muni de la forme quadratique

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

La forme bilinéaire associée est

$$B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$$

Definition 65

La surface $S \subset \mathbb{E}^{2,1}$ dans l'espace de Minkowski est admissible (de type espace) si pour tout point $p \in S$, la restriction de B à $T_p S$ est définie positive.

Alors $g_p(\xi, \eta) = B(\xi, \eta)$ est un produit scalaire sur $T_p M$, donc une surface admissible $S \subset \mathbb{E}^{2,1}$ est une variété riemannienne de dimension 2.

Remarque

Si $S \subset \mathbb{E}^{2,1}$ est admissible et $\psi : \Omega \rightarrow S$ un paramétrage, alors le tenseur métrique sur Ω se calcule par

$$g_{ij}(u) = g_u(e_i, e_j) = B(d\psi_u(e_i), d\psi_u(e_j))$$

Exemple

On définit

$$H = \{x \in \mathbb{E}^{2,1} | Q(x) = -1\}$$

H est la surface de révolution de la branche de l'hyperbole $x^2 - z^2 = -1$

Remarque

H est la sphère de Rayon 1

Si on paramétrise H comme surface de révolution de l'hyperbole, on peut calculer le tenseur métrique

$$G = dt^2 + \sinh^2(t)d\theta^2$$

Proposition 79

Si le tenseur métrique d'une surface est de la forme

$$g = dt^2 + a^2(t)d\theta^2$$

Alors la courbure de Gauss est $K = -\frac{a''}{a}$

9.1 Projection stereographique de H

$\pi : H \rightarrow \mathbb{D}^2$ par $p \in H$ $u = \pi(p) \in \mathbb{D}^2$.

On note $\psi : \mathbb{D}^2 \rightarrow H$ son inverse.

C'est un parametrage de H .

Le plan hyperbolique H est donc isometrique a $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ muni de la metrique

$$g = ds^2 = \frac{4dz^2}{(1 - z^2)^2}$$

La longueur (hyperbolique) d'un chemin $\gamma(t) = z(t)$ est

$$l(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{2|\dot{z}(t)|}{(1 - |z(t)|^2)} dt$$

Definition 66 (Disque de Pointcarre)

Le disque \mathbb{D}^2 avec la metrique Riemannienne.

On veut montrer que \mathbb{D}^2 est complet et homogene et on veut une formule pour calculer $d_{\mathbb{D}^2}(z_1, z_2) = ?$

9.2 Le modele du demi-plan de Poincarre

C'est un autre modele conforme :

$$\mathbb{H}^2 = \{w \in \mathbb{C} | \text{Im } w > 0\}$$

avec le tenseur metrique

$$ds^2 = \frac{|dw|^2}{\text{Im } w^2}$$

Proposition 80

\mathbb{D}^2 et \mathbb{H}^2 avec les metriques proposees sont isometriques

Preuve

On cherche une isometrie sous $h : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$.

On sait que h est conforme, donc h est holomorphe.

Par le theoreme de l'application conforme de Riemann elle existe.

On peut decider que $h(i) = 0$.

On veut aussi que $h(\partial\mathbb{H}^2) = \partial\mathbb{D}^2$, on peut prendre

$$h(w) = \frac{w - i}{w + i}$$

Il reste a prouver que h est une isometrie

$$\frac{dw}{\operatorname{Im} w} = \frac{zdz}{1 - |z|^2} \text{ si } z = h(w) \quad \square$$

Lecture 14: Rudiments de Geometrie hyperbolique

Wed 22 Dec

Rappel : La sphere unite $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

On a des cartes (parametrisations) conformes classiques telles que

1. Carte de Mercator
2. Carte stereographique

Proposition 81

Le disque de Poincarre est isometrique au demi-plan de Poincarre.

Preuve

On a une application bi-holomorphe $\phi : \mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{D}^2$

$$\phi(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

Il suffit de montrer que $w = \phi(z)$ implique

$$\frac{|dz|}{\operatorname{Im} z} = \frac{2|dw|}{(1 - |w|^2)} \quad \square$$

Digression : Groupe de Moebius

En notation complexe, une similitude du plan euclidien $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ s'ecrit

$$f(z) = az + b = |a|e^{i\alpha}z + b$$

ou

$$f(z) = a\bar{z} + b$$

En ajoutant l'inversion $z \rightarrow \frac{1}{\bar{z}}$ on obtient le groupe de Moebius.

Definition 67 (Transformation de Moebius)

Une application de Moebius est une application de la forme

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

avec $ad - bc \neq 0$.

On note $Mob^+(2)$ l'ensemble des transformations de Moebius et on les appelle aussi des Homographie.

Proposition 82

Les transformations de Moebius forment un groupe et l'application

$$GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow Mob^+(2)$$

est un homomorphisme de groupe.

On a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow Mob^+(2) \rightarrow 1$$

$$\text{On note } PGL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C}) / \mathbb{C}^*$$

Une homographie f agit sur $\hat{\mathbb{C}}$ par $f(\infty) = \frac{a}{c}, f(\frac{-d}{c}) = \infty$.

Lemme 83

La derivee complexe de $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ est

$$f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

Proposition 84

\mathbb{H}^2 et \mathbb{D}^2 sont isometriques

Preuve

On a que $\phi : H^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ est une isometrie.

□

Proposition 85

Les homographies et anti-homographies reelles sont les isometries du demi-plan de Poincarre.

9.3 Droites hyperboliques (dans \mathbb{H}^2)**Lemme 86**

La distance entre deux points de meme partie reelle dans \mathbb{H}^2 est

$$d(z_1, z_2) = \left| \log \left(\frac{\text{Im } z_1}{\text{Im } z_2} \right) \right|$$

Preuve

Le chemin le plus court entre deux points z_1 et z_2 de \mathbb{H}^2 est la droite verticale ou l'arc de cercle orthogonal a $\partial\mathbb{H}^2$ passant par z_1 et z_2

□

Definition 68

Une droite hyperbolique de \mathbb{H}^2 est une demi-droite verticale ou un demi-cercle orthogonal a $\partial\mathbb{H}^2$

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{\sin x}$$