Chapitre 3 Interpolation de fonctions.

3.1 Introduction

Exemple : <u>multilayer perceptron</u>

$\underline{x} = x_1 \ldots x_n$ inputs $\qquad \underline{y} = y_1 \ldots y_m$ output

$$(y_1, y_2 \ldots y_m) = f(x_1 \ldots x_n)$$

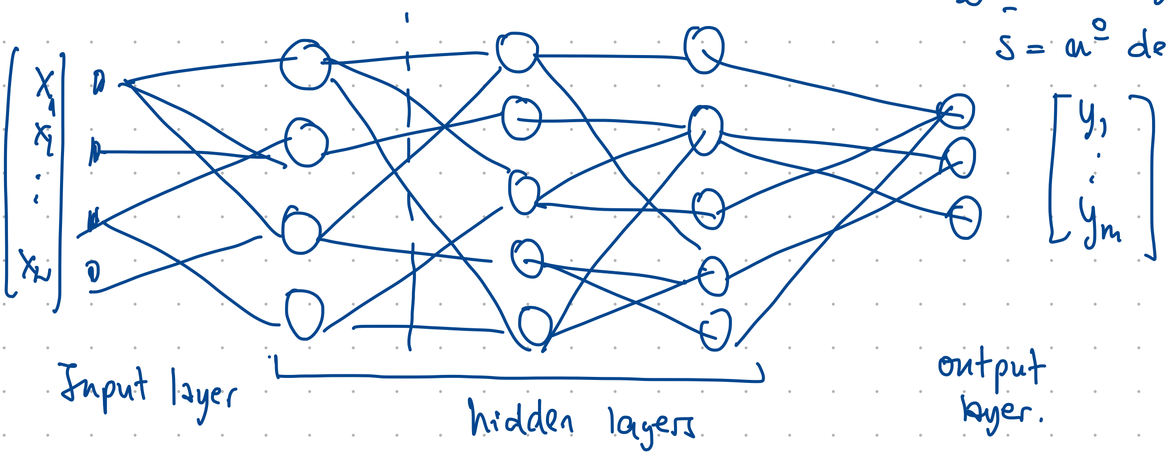
model complexe que on connais pas.

$\underline{x}^0, \underline{x}^1, \underline{x}^2 \ldots \qquad f(\underline{x}^0), f(\underline{x}^1) \ldots f(\underline{x}^N) \qquad N$ # donnés

$\underline{x} \qquad f(\underline{x})$

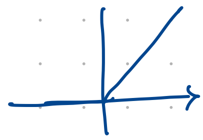
$\ell =$ n° layer.

$s =$ n° de neurons par layer

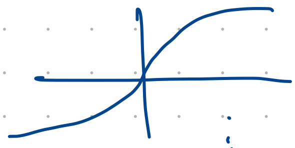


$$\underline{x} \mapsto \underline{B}\,\underline{x} + \underline{b}_0 \longmapsto \rho(\underline{B}\underline{x} + \underline{b}) = \underline{x}_1$$

ρ different type de fonctions (activation function)



$$\rho(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$



$\operatorname{arctg}(x)$

$\vdots$

$$\begin{cases} \underline{x}_1 = \rho(\underline{B}_0 \underline{x}_0 + \underline{b}_0) \\ \underline{x}_2 = \rho(\underline{B}_1 x_1 + \underline{b}_1) \\ \vdots \\ \underline{x}_\ell = (\underline{B}_{\ell-1} x_{\ell-1} + b_{\ell-1}). \end{cases} \Rightarrow \text{output.}$$

$$\underline{B}_i \in \mathbb{R}^{s \times s}, \quad \underline{b}_i \in \mathbb{R}^s$$

$\underline{x} \longmapsto \underline{y}$

toutes les matrices $\underline{B}_i$ et les offset $\underline{b}_i$ sont à trouver.

$\underline{y} = f(\underline{x}) \qquad \underline{y} = f_{NN}(\underline{x})$ par le reseau.

$\underline{x}^1 \dots \underline{x}^N$
$\underline{y}^1 \dots \underline{y}^N$ | donnés.

Je veux utiliser les donnés pour trouver les paramètres de f_{NN}.

Pour trouver les paramètres :

$$\min_{\substack{\text{paràm.} \\ \underline{B}_j,\, \underline{b}_j \\ j=1\dots l}} \sum_{i=1}^{N} \| \underline{y}^i - \underbrace{f_{NN}(\underline{x}^i)}_{\text{resultat du NN appliqué a } \underline{x}^i} \|^2 \quad (*)$$

"__Mettons__" que je trouve les paramètes $\underline{B}_i, b_i$

1) ? $\| f(\underline{x}) - f_{NN}(\underline{x}) \| \leq ?$ quand $\underline{x}$ n'est pas parmi les données ?

2) Combien de données je dois utiliser pour assurer que $\| f(\underline{x}) - f_{NN}(\underline{x}) \| \leq$ tollerance donnés.

3) Est ce que il y a une stratégiè "stable" pour le calculs des paramètres du problèmes.

3.2 Costruction de polynômes de Lagrange.

A partir de maintenant nous allons regarder le problème de l'interpolation à l'aide de __polynômes__

__théoreme__ de Weierstrass.

$f \in C^0(\underline{[a,b]})$ $\exists\, p_n \in \mathbb{P}_n$ (polynôme de degree n) tel que $\lim_{n \to +\infty} \| f - p_n \|_{L^\infty([a,b])} = 0.$

$x_0, x_1 \dots x_n$ $\qquad x_0 = a \quad \dots \quad x_n = b$

donnés $f(x_0), f(x_1) \dots f(x_n)$, je cherche p_n polynôme de degrées n qui approche $f(x)$.

<u>définition</u> Etant donnée une partition de $[a,b]$. $(x_0 \dots x_n)$. On appelle $\{l_i(x)\}_{i=0\dots n}$ polynôme de Lagrange, les polynômes $l_i(x)$ tels que

$$\begin{cases} l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \\ l_i \in \mathbb{P}_n \quad \text{polynôme de degree } n. \end{cases}$$

<u>exemple</u> $x_0 \quad x_1 \quad x_2$ $\qquad l_0(x), \; l_1(x), \; l_2(x).$

$n = 2$

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \qquad l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\boxed{x_0 \dots x_n \qquad l_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0\, j\neq i} (x_i - x_j)}}$$

polynômes de Lagrange.

$\{f(x_i)\}_{i=0\dots n}$ $\qquad p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)$

polynome interpolant de $f(x)$.

$$p_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{l_i(x_j)}_{\delta_{ij}} = f(x_j)$$

p_n interpole exactement $f(x)$ dans les donnés.

La questione mathématique :

$f \in C^k([a,b]) \quad k>0 \qquad \| f - p_n \|_{L^\infty([a,b])} \leq ?$

où $\| u \|_{L^\infty([a,b])} = \| u \| = \max_{x \in [a,b]} |u(x)|$

<u>Proposition</u> Soit donnée une partition $(x_0 \ldots x_n)$ de l'interval $[a,b]$

et soit $d_n(x) \in C^1([a,b])$ tel que

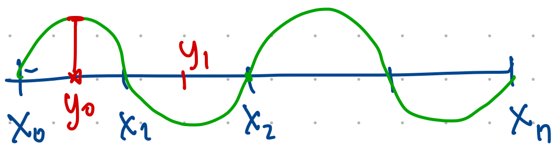
$d_n(x_i) = 0 \quad \forall x_i \quad i = 0 \ldots n.$ Alors

$\exists \xi \in]x_0, x_n[\quad : \quad d_n^{(n)}(\xi) = 0$

<u>Remarque</u> $f(x) - p_n(x)$ si f est régulière

alors $f(x) - p_n(x)$ est régulière et $f(x_i) - p_n(x_i) = 0.$

<u>preuve</u> :



d_n

On doit appliquer le théorème de Rolle n- fois

$d_n(x_0) = d_n(x_1) = 0. \qquad \exists y_0 \quad : \quad d'(y_0) = 0.$

$d_n(x_1) = d_n(x_2) = 0 \qquad \exists y_1 \qquad d'(y_1) = 0.$

$\vdots$

$d_n(x_i) = d(x_{i+1}) = 0 \qquad \exists y_i \qquad d'(y_i) = 0.$

$(y_0 \ldots y_{n-1})$ sont des points t.q. $d'(y_i) = 0 \quad i = 0 \ldots n-1$

je répète la même procédure.

$n-1$ points $z_i \quad : \quad d''(z_i) = 0 \quad i = 0 \ldots n-2$

$\downarrow$ n étapes

$\xi \in]x_0, x_n[\quad : \quad d_n^{(n)}(\xi) = 0.$ $\blacksquare$

__théorème__ (représentation de l'erreur)

Soit $f \in C^{n+1}([a,b])$ et soit p_n le polynôme d'interpolation de f sur la partition $(x_0 .. x_n)$

alors $\forall x \in [a,b]$ $\exists \xi \in]a,b[$:

$$f(x) - p_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \cdot \Pi_n(x) \qquad (*)$$

$$\Pi_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1) .. (x-x_n)$$

__Remarques__ 1) ξ dépend de x.

2) $\Pi_n(x)$ est un polynôme $\deg(\Pi_n) = n+1$

__preuve__ On va démontrer $(*)$ dans tout les $x \in [a,b]$.

• $x = x_i$ $\qquad \underbrace{f(x_i) - p_n(x_i)}_{=0} = f^{(n+1)}(\xi) \cdot 0.$

vrai

• $x \neq x_i$ $\qquad \bar{x} : \Pi_n(\bar{x}) \neq 0$

$\exists \nu \in \mathbb{R}$: $\qquad f(\bar{x}) - p_n(\bar{x}) = \nu \, \Pi_n(\bar{x})$

car je peux prendre $\nu = \dfrac{f(\bar{x}) - p_n(\bar{x})}{\Pi_n(\bar{x})}$

$d_{n+1}(x) = f(x) - p_n(x) - \nu \, \Pi_n(x)$

$d_{n+1}(x)$ s'annulle $\underbrace{x_0, x_1 .. x_n, \bar{x}}_{n+2 \text{ points}}$ par construction

Je applique la proposition d'avant à $d_{n+1}(x)$.

$\exists \xi$: $\qquad d_{n+1}^{(n+1)}(\xi) = 0.$

$$d_{n+1}^{(n+1)} = \left[f(x) - p_n(x) - \nu \, \Pi_n(x) \right]^{(n+1)}$$

$$= f^{(n+1)}(x) - \underbrace{\cancel{p_n^{(n+1)}(x)}}_{=0} - \nu \cdot \left[\Pi_n(x)\right]^{(n+1)}$$

$$[\Pi_n(x)]^{(n+1)} = 1.$$

(à contrôler $\Pi_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1 \ldots)$)

$$\exists\, \xi : \quad f^{(n+1)}(\xi) - \mu \cdot 1 = 0.$$

$$\Longrightarrow \quad \mu = f^{(n+1)}(\xi).$$

$\forall\, \bar{x} \in [a,b]$ $\quad \exists\, \xi \in\,]x_0, x_n[$:

$$f(\bar{x}) - p_n(\bar{x}) = f^{(n+1)}(\xi)\, \Pi_n(\bar{x})$$

Donc, on va essayer d'utiliser la représentation de l'erreur pour trouver une estimation de cette erreur.

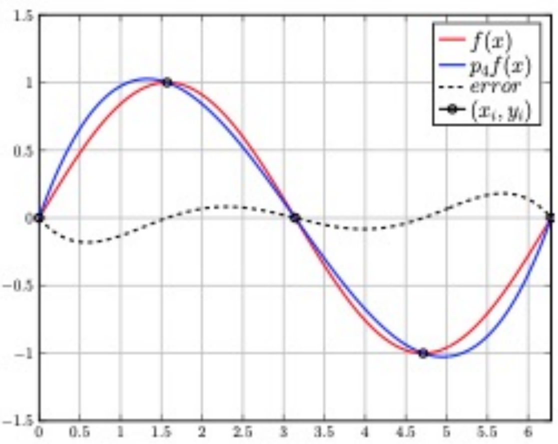
$$\| f(x) - p_n(x) \| = \max_{x \in [a,b]} | f^{(n+1)}(\xi)\, \Pi_n(x) |$$

$$\leq \underbrace{\| f^{(n+1)} \|}_{\text{dépend de } f \text{ et peut exploser avec } n} \cdot \underbrace{\| \Pi_n \|}_{\text{dépend du choix de la partition } x_0 \ldots x_n.}$$

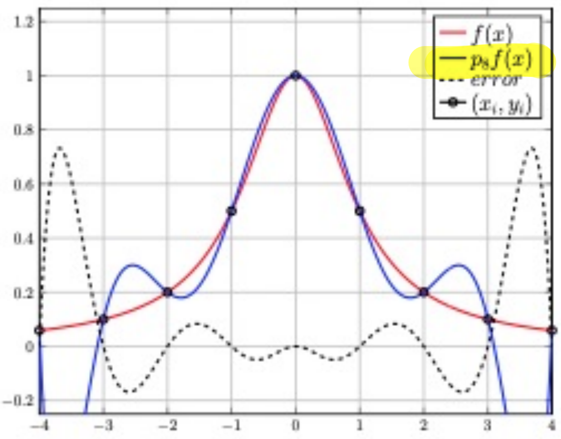
<u>Exemple</u> $\quad x_0 \ldots x_n$ équidistants

$f_1(x) = \sin(x) \quad x \in [0, 2\pi] \qquad \| f^{(n+1)} \| = 1$

$f_2(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in [-4, 4] \qquad \| f^{(9)} \| = 324256$



(a) $f(x) = \sin(x)$.



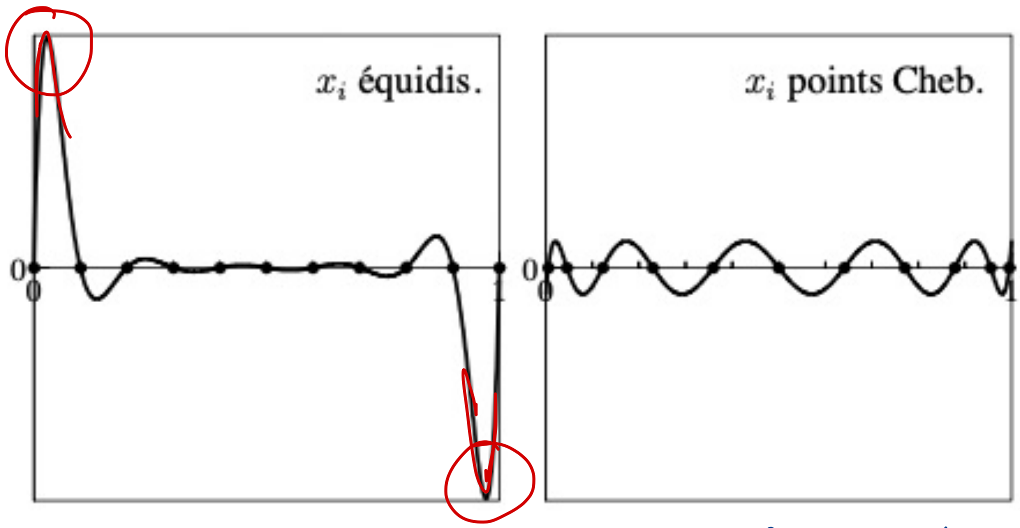
(b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

phénomène de Runge

Exercice $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $n = 9, 10, 11, 12 \ldots$

$f(x) - p_n(x)$ explose avec n !!!

$n = 10$ $\Pi_{10}(x)$



points équidistants

points optimisés
points de Chebychev.

On va étudier comment trouver des points d'interpolation meilleur des points équidistants...

$$\| f - p_n \| \leq \| f^{(n+1)} \| . \| \Pi_n \| .$$

$$\| \Pi_n \| = \left\| \frac{1}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \right\|$$

$x_0 = a$
$x_n = b$.

$$\| (x-a)(x-b) \| \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$

$$\left\| \frac{1}{n+1} (x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \right\| \leq \frac{1}{(n+1)!} (b-a)^{n-1}$$

$$\| \Pi_n \| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot (b-a)^{n+1}$$

$$\| f - p_n \| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} . \| f^{(n+1)} \|$$

Question : pour quel classe de fonctions puis je donc deduire que $\lim_{n \to +\infty} \| f - p_n \| = 0$?

certe est que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $x \in [-4,4]$ ne apartient pas à cette classe pour une partition équidistante.

<u>théorème</u> Soit $(x_0 \dots x_n)$ une partition équidistante de l'intervalle $[-\alpha,\alpha]$, et soit $f : [-\alpha,\alpha] \to \mathbb{R}$ une fonction analytique.
Si f admet un développement en série entière en $x_0 = 0$ de rayon R. avec $R > 3\alpha$
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \| f - p^n \| = 0$.

- En effet si $R > 3\alpha$ $\exists\, a \in \mathbb{R}^+$, $a < 1$:
$$\| f - p_n \| \leq C(R) \cdot a^{n+2}.$$

- $R > 3\alpha$ est une condition suffisante mais pas necessaire.