EPFL Automne 2020
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 7

Tous les exercices seront corriges. La correction sera postee sur le moodle apres 2 semaines.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le dimanche de la semaine suivante celle ou la serie a ete postee. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme de fichier pdf (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien a cet effet dans la semaine de la serie.

Exercice 1. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $\mathbb{N}$ a valeurs reelles (ie. les suites a valeurs reelles) et $\mathcal{F}_f(\mathbb{N},\mathbb{R})$ le sous-espace de fonctions a support fini : on rappelle que $f:\mathbb{N}\mapsto\mathbb{R}$

$$\mathrm{supp}(f)=\{n\in\mathbb{N},\ f(n)=0\}\text{ est fini.}$$

Pour $m\in\mathbb{N}$ un sous-ensemble, on note $1_{\{m\}}$ la fonction indicatrice de m :

$$1_{\{m\}}(n)=\begin{cases}1 & \text{si } n=m\\ 0 & \text{si } n\neq m.\end{cases}.$$

1. Montrer que la famille
$$\{1_{\{m\}},\ m\geqslant 0\}$$
est une base de $\mathcal{F}_f(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soit K un corps, $V=K^5$ et

$$W=\{(a,b,c,d,e)\in V,\ a+b=c+d,\ a+2c=0,2c+b+4d=0\}.$$

1. Donner une base de W (attention cela peut dependre de $\mathrm{car}(K)$).

Exercice 3. Soit $d\geqslant 0$ un entier et

$$\mathbb{R}[x]_{\leqslant d}=\{a_dx^d+a_{d-1}x^{d-1}+\cdots+a_1.x+a_0,\ a_i\in\mathbb{R}\},$$

l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ de degree $\leqslant d$.

1. Montrer que $\{1,x,\cdots,x^d\}$ forme une base de $\mathbb{R}[x]_{\leqslant d}$ en considerant les limites de ces polynomes quand $x\to\infty$.

2. Soit $\{P_i(x),\ i = 0, \cdots, d\}$ une famille de $d+1$ polynomes tels que $\deg P_i = i$. Montrer que $\{P_i(x),\ i = 0, \cdots, d\}$ forme une base de $\mathbb{R}[x]_{\leqslant d}$.
3. Soient $x_0, \cdots, x_d \in \mathbb{R}$, $d+1$ nombres reels distincts et pour $i = 0, \cdots, d$ soit

$$Q_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - x_j)$$

(par exemple $Q_1(x) = (x - x_2).(x - x_3). \cdots .(x - x_d)$). Montrer que $\{Q_i,\ d = 0, \cdots, d\}$ forme une base de $\mathbb{R}[x]_{\leqslant d}$.
4. On prend $d = 3$, $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_2 = 3$. Ecrire le polynome $x^3 + x^2 + x + 1$ comme combinaison lineaire des Q_i.

Exercice 4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un parametre. On considere la famille des polynomes dans $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 3}$ donnee par

$$\mathcal{F} = \{(\lambda^2 - 1)x^3 + x^2, \lambda.x^3 + x - \lambda, (1 - \lambda)x^3 + x + 1, \lambda)\}.$$

1. Pour quelles valeurs de λ cette famille est elle libre ?
2. Pour quelles valeurs de λ cette famille est elle generatrice ?
3. Pour quelles valeurs de λ cette famille est elle une base ?

Exercice 5.
1. Soit K un corps et $k \subset K$ un sous-corps. Montrer que K est un k-espace vectoriel.
2. Soit K un corps fini de caracteristique $p > 0$ et

$$\mathbb{F}_p = \mathrm{Can}_K(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.1_K \subset K$$

le sous-corps premier. Montrer que $|K| = p^d$ pour $d \geqslant 1$ un entier (on montrera que d est une dimension).
3. On suppose que K est encore contenu dans un autre corps fini L. Ainsi $\mathbb{F}_p \subset K \subset L$ et on a donc (par la question precedente) $|L| = p^{d'}$ avec $d' \geqslant 1$. Montrer que d divide d' (le quotient d'/d est une certaine dimension).

Exercice 6. ($\star$) Soient $X, Y \subset V$ des SEV d'un EV de dimension finie et $X + Y \subset V$ leur somme (qui est un SEV). On rappelle que X et Y sont dit en somme directe si $X \cap Y = \{0_V\}$ et on ecrit $X \oplus Y$.

1. Montrer que $\dim X + \dim Y = \dim(X + Y) + \dim(X \cap Y)$.
2. On suppose dans toute la suite que $\dim X + \dim Y = \dim V$. Montrer que si $X \cap Y = \{0_V\}$ alors $V = X + Y$ et donc $V = X \oplus Y$.
3. Montrer que si $X + Y = V$ alors $X \cap Y = \{0_V\}$ et donc $V = X \oplus Y$.

Pour resoudre ce probleme, on pourra appliquer le Thm Noyau-Image a l'application lineaire

$$\bullet + \bullet : \begin{array}{ccc} X \times Y & \mapsto & V \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}.$$

Exercice 7. Soient V, W deux K-ev de dimensions finie, $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ et $W^* = \mathrm{Hom}(W, K)$ leurs duals, $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_j,\ j \leqslant d\}$, $\mathscr{B}' = \{\mathbf{f}_i,\ i \leqslant d'\}$ des bases et $\mathscr{B}^* = \{\mathbf{e}_i^*,\ i \leqslant d\}$, $\mathscr{B}'^* = \{\mathbf{f}_i^*,\ i \leqslant d'\}$ les bases duales.

On se donne une application lineaire $\varphi : V \mapsto W$ et soit

$$\varphi^* : W^* \mapsto V^*$$

l'application duale (definie pour $\ell' \in W^*$ par $\varphi^*(\ell') = \ell' \circ \varphi \in V^*$).

Soient $\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \subset \mathrm{Hom}(V, W)$ et $\mathcal{B}_{\mathscr{B}'^*,\mathscr{B}^*} \subset \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ les bases des espaces d'application lineaires correspondants.

On suppose que les coordonnees de φ dans la base $\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ sont donnees par $(m_{ij})_{i \leqslant d', j \leqslant d}$ et celles de φ^* dans la base $\mathcal{B}_{\mathscr{B}'^*,\mathscr{B}^*}$ sont donnees par $(m^*_{ij})_{i \leqslant d, j \leqslant d'}$. On va montrer que

$$\forall i \leqslant d, j \leqslant d',\ m^*_{ij} = m_{ji}.$$

1. Soit $\ell \in V^*$ une forme lineaire et $(l_i)_{i \leqslant d} \in K^d$ ses coordonnees dans la base $\mathscr{B}^*$. Montrer que
$$l_i = \ell(\mathbf{e}_i).$$
2. Verifier que φ^* est lineaire.
3. Montrer que l'application
$$\bullet^* : \varphi \mapsto \varphi^*$$
est lineaire (de $\mathrm{Hom}(V, W)$ vers $\mathrm{Hom}(W^*, V^*)$).
4. Montrer que $m_{ij} = \mathbf{f}_i^*(\varphi(\mathbf{e}_j)) = \varphi^*(\mathbf{f}_i^*)(\mathbf{e}_j)$.
5. Montrer que $m_{ij} = m^*_{ji}$.

Exercice 8. Soit V de dimension finie. Soit $V^{**} = (V^*)^*$ le bi-dual de V (le dual du dual V^* de V). On considere l'application :

$$\mathrm{eval}_\bullet : \begin{array}{ccc} V & \mapsto & V^{**} = (V^*)^* \\ v & \mapsto & \mathrm{eval}_v \end{array}$$

ou

$$\mathrm{eval}_v : \ell \mapsto \ell(v) \in K$$

est l'application qui a une forme lineaire ℓ associe sa valeur au vecteur v.

1. Montrer que eval_v est bien une forme lineaire sur V^*.
2. Montrer que $\mathrm{eval}_\bullet$ est un isomorphisme.

Remarque. Cet isomorphisme entre V et V^{**} ne depend pas du choix d'une base : il est canonique.