Série 12

David Wiedemann

19 mai 2021

Il est clair que $u \in C^1(]t_0, +\infty[)$ car $u'(t) = f(t, u(t))$ et donc, car f est continue sur $I \times \mathbb{R}$, et donc u est continument différentiable sur $]t_0, +\infty[$.
Il nous faut donc uniquement montrer que $u'(t_0) = \lim_{t \to t_0+} u'(t)$, ie. que u' est continue à droite en t_0.
Définissons

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} u'(s)ds$$

Le théorème fondamental de l'analyse donne que

$$F(t) = u(t) - u(t_0).$$

Ainsi, on sait que $\int_{t_0}^{t} u'(s)ds$ existe bien pour tout t.
Or, car pour $c \in I$ de u' sur $[t_0, c]$ est égal à l'intégrale de u' sur $]t_0, c]$, on a

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds.$$

Ainsi, par le théorème fondamental de l'analyse, on déduit également que

$$F'(t) = f(t, u(t)) \forall t \in I$$

Ecrivons maintenant le développement de Taylor de $F(t)$ au point t_0.
Soit $x \in I \setminus \{t_0\}$.

$$F(x) = u(x) - u(t_0) = F(t_0) + f(t, u(t))(x - t_0) + r(x)$$

où $\lim_{x \to t_0} \frac{r(x)}{x - t_0} = 0$. Notons qu'on a $F(t_0) = 0$.

$$\Rightarrow \frac{u(x) - u(t_0)}{x - t_0} = f(t_0, u(t_0)) + \frac{r(x)}{x - t_0}$$

On peut maintenant prendre la limite à droite $x \to t_0$ des deux côtés de l'égalité.
L'égalité de droite devient.

$$\lim_{x \to t_0+} f(t_0, u(t_0)) + \frac{r(x)}{x - t_0} = f(t_0, u(t_0))$$

Tandis qu'à gauche, on a

$$\lim_{x \to t_0+} \frac{u(x) - u(t_0)}{x - t_0} = u'_+(t_0).$$

Et on en déduit l'égalité

$$u'_+(t_0) = u'(t_0) = f(t_0, u(t_0))$$

Ainsi, u' est continue sur I, et donc $u \in C^1(I)$.