15.1. $(*)$ Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction croissante.

1) Montrer que f admet un point fixe.
2) Que devient ce résultat si f est supposée décroissante?

15.2. Pour chaque entier $n \geq 0$, on considère la fonction polynomiale $P_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$ définie par $P_0(x) = 0$ et

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right).$$

1.) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ et tout entier $n \geq 0$:

$$0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}.$$

2.) En déduire que la suite $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ converge uniformément vers la fonction $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

3.) Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $Q_n : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ qui converge uniformément vers la fonction $g : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = |x|$.

Indication: Commencer par montrer par récurrence que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$, $\forall x \in [0, 1]$.

15.3. (Une variante de la "permutation des limites"). Soit (f_n) une suite de fonctions sur $[a, b]$ qui converge uniformément et soit $a < x_0 < b$. Cette fois, on ne suppose pas que les f_n soient continues, mais on suppose:

- pour tout n, la limite $\lim_{x \to x_0} f_n(x)$ existe;
- la limite $\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$ existe.

Démontrer $\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x)$.