Analyse avancée II — Semaine du 22 au 26 février 2021

Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année

Enseignant : Fabio Nobile

Série 1 du lundi 22 février 2021

Exercice 1.

Démontrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{1/2} \left(\frac{\sin(t^n)}{\ln(t^n)}\right)^n \mathrm{d}t \tag{1}$$

est convergente pour tout entier n positif.

Exercice 2.

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln t}{t^2} & \text{si } 0 < t \leqslant 1, \\ \ln t & \text{si } t > 1. \end{cases} \tag{2}$$

1) Montrer que les deux intégrales généralisées $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ divergent, i.e. que les limites

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

n'existent pas dans $\mathbb{R}$.

2) Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{1/x}^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \int_{1/x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Exercice 3.

Montrer les affirmations suivantes :

1) Si $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ est $C^1([0, \pi])$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{5}$$

2) Si $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ est continue, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{6}$$

Indication. D'après le théorème de Weierstraß, pour tout $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ et $\varepsilon \in]0,+\infty[$, il existe un polynôme p_ε tel que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon$.

Exercice 4.

Soit $b > 0$ dans $\mathbb{R}$, une fonction continue $f : [0,b] \to \mathbb{R}$, et une fonction périodique et continue $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant la période 1.

1) Si $p \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ et $\int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t = 1$, prouver que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^b f(t)p(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{7}$$

2) Si $M = \int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t$, prouver que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^b f(t)p(nt)\,\mathrm{d}t = M \int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Remarque. Cet exercice est une généralisation du précedent. Il peut-être démontré en utilisant les sommes de Darboux.

Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 22 au 26 février 2021

Série 2 du mercredi 24 février 2021

Exercice 1.

Soit un entier $n > 0$.

1) Vérifier que pour tout $t \in \,]0, \pi]$:

$$\frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} + \cos t + \ldots + \cos nt. \tag{1}$$

2) En déduire que

$$\int_0^\pi \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Exercice 2.

Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ si } t = 0, \\ \dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{t}, \text{ si } 0 < t \leqslant \pi. \end{cases} \tag{3}$$

1) Vérifier que f est continue.
2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f(t) \sin\left(\left((n + \frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t = 0. \tag{4}$$

3) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

4) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

Exercice 3.

Démontrer le critère d'Abel–Dirichlet, énoncé ci-dessous. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a, +\infty[\,\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que :

1) g est de classe C^1, monotone, et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$;

2) la fonction $F : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est bornée.

Alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 4.

Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_1^{\infty} t^2 \sin t^4\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

est convergente, en utilisant le critère d'Abel–Dirichlet.

Série 3 du lundi 1er mars 2021

Exercice 1.

1) Démontrer l'inégalité de Young :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \tag{1}$$

où $p \in \left]1, +\infty\right[$ et q est tel que $1/p + 1/q = 1$.

Indication. Utiliser le fait que la fonction $\ln : \left]0, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ est concave et appliquer ln à la relation d'inégalité.

2) Démontrer que si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ où $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ et si $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ est le produit scalaire euclidien, alors on a l'inégalité de Hölder :

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q \tag{2}$$

où $p \in [1, +\infty]$ et $1/p + 1/q = 1$ (avec la convention $1/+\infty = 0$).

Indication. Lorsque $p, q \in \left]1, +\infty\right[$, poser $\lambda = \|\boldsymbol{x}\|_p^{-1/q} \|\boldsymbol{y}\|_q^{1/p}$ et utiliser le point 1 après avoir écrit $|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda |x_i| \times \frac{1}{\lambda} |y_i|$.

3) Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme pour $p \in [1, +\infty]$ mais, lorsque $n \geq 2$, pas pour $p \in \left]0, 1\right[$.

Indication. Pour $p \in]1, \infty[$, partir de $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p^p \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i||x_i + y_i|^{p-1}$ et utiliser le point 2 ci-dessus.

4) Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty]$ et $q \in \mathbb{R}$ tel que $1/p + 1/q = 1$. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant n^{1/q} \, \|\boldsymbol{x}\|_p \quad \text{si } p \neq 1, \tag{3}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \leqslant n^{1/p} \, \|\boldsymbol{x}\|_\infty \quad \text{si } p \neq +\infty, \tag{4}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1. \tag{5}$$

En déduire que toutes les normes $\{\|\cdot\|_p : p \in [1, +\infty]\}$ sont équivalentes.

Exercice 2.

Soient $f, g \in C^0([0, 1])$. On définit

$$\phi(f, g) = \int_0^1 fg \tag{6}$$

1) Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur $C^0([0, 1])$.

2) Montrer que $|\phi(f,g)| \leqslant \phi(f,f)^{1/2}\phi(g,g)^{1/2}$ en suivant la démonstration de l'inégalité de Cauchy–Schwarz donnée au cours.

Exercice 3.

1) Soit un espace métrique (M,d) et une fonction continue $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. On suppose que : (I) $h(0) = 0$; (II) h est dérivable sur $]0,+\infty[$; (III) $h' > 0$ sur $]0,+\infty[$; (IV) et h' est décroissante sur $]0,+\infty[$. Prouver que $\tilde{d} = h \circ d$ est aussi une distance sur M.
2) Si $V \neq \{0\}$ est un espace vectoriel équipé d'une norme N, d est la distance induite par N et $h(x) = x/(1+x)$ pour $x \geq 0$, prouver que $\tilde{d} = h \circ d$ est une distance, mais qu'elle n'est induite par aucune norme.

Exercice 4.

Soit V l'ensemble de toutes les suites réelles dont seulement un nombre fini d'éléments sont non-nuls.

1) Montrer que V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2) Définissons l'application sur V

$$N : v \mapsto \sqrt{\sum_{i\in\mathbb{N}} v_i^2}.$$

Prouver que N est une norme sur V.
3) Le théorème de Bolzano–Weierstrass, tel que formulé sur $\mathbb{R}^n$, est-il toujours vrai sur V équipé de la norme N ?

Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 1er au 5 mars 2021

Série 4 du mercredi 3 mars 2021

Exercice 1.

Montrer que l'adhérence $\overline{E}$ d'un ensemble arbitraire $E \subset \mathbb{R}^n$ est l'ensemble fermé minimal contenant E.

Exercice 2.

Considérons les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\Omega_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x_1^2 + x_2^2 < 16\}, \tag{1}$$

$$\Omega_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 = 1\}, \tag{2}$$

$$\Omega_3 := \left\{(x_1, x_2) \in \left]0, 1\right[\times \mathbb{R} : \sin \frac{1}{x_1} < x_2 < 2\right\}, \tag{3}$$

$$\Omega_4 := \{(x_1, x_2) \in \left]0, 1\right[\times \mathbb{R} : x_2 \in \left]1, 5\right[\text{ si } x_1 \in \mathbb{Q}; x_2 \in \left]0, 5\right[\text{ sinon}\}, \tag{4}$$

$$\Omega_5 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\} \cup \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 \leqslant 1\right\}. \tag{5}$$

Ces ensembles sont-ils ouverts ? Sont-ils fermés ? Sont-ils bornés ? Quel est leur bord ? Justifiez vos réponses.

Exercice 3.

Notons $E = \{(x, \sin 1/x) : x \in \left]0, +\infty\right[\}$.

1) Montrer que E est connexe par arcs.
2) Donner une description explicite de $\overline{E}$.
3) Montrer que $\overline{E}$ n'est pas connexe par arcs.

Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-03-08 au 2021-03-12

Série 05 du lundi 8 mars 2021

Exercice 1.

1) Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et $F \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé, tous deux non-vides et tels que $E \cap F = \varnothing$. Montrer qu'il existe $\boldsymbol{a} \in E$ et $\boldsymbol{b} \in F$ tels que

$$\inf\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| : \boldsymbol{x} \in E, \boldsymbol{y} \in F\} = \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\| > 0. \tag{1}$$

2) En utilisant le point précédent, montrer que si E est un sous-ensemble strict (i.e. $E \subsetneq \mathbb{R}^n$) non-vide, alors sa frontière ∂E n'est pas vide.

Exercice 2.

Notons $E = \{(x, \sin {}^1/_x) : x \in \,]0, +\infty[\}$.

1) Montrer que E est connexe par arcs.
2) Donner une description explicite de $\overline{E}$.
3) Montrer que $\overline{E}$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 3.

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2} e^{-y/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x, y) = 0$.

Exercice 4.

Montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(\frac{1+x^4+y^4}{1+x^2+y^2}\right)}{\sin(x^2 + y^2)} = -1. \tag{3}$$

Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-03-08 au 2021-03-12

Série 06 du mercredi 10 mars 2021

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{1}$$

1) Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) = \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big) = 0. \tag{2}$$

2) Peut-on en déduire que $\lim_{(0,0)} f = 0$?

Exercice 2.

1) Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E. Montrer que $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \ell$ si et seulement s'il existe $R > 0$ et une fonction $g :]0, R[\to \mathbb{R}_+$ tels que $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$ et, pour tout $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, R) \cap (E\backslash\{\boldsymbol{x}_0\})$, $|f(\boldsymbol{x}) - \ell| \leqslant g(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|)$. Le choix de la norme n'est pas important.
2) Utiliser le critère du point 1 pour montrer que les fonctions suivantes, définies de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$, ont pour limite 0 en $(0,0)$:

$$f_1(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2},$$
$$f_2(x,y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Exercice 3.

Soit un sous-ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$.

1) Montrer la caractérisation suivante des fonctions continues. En supposant E ouvert, une fonction $f : E \to \mathbb{R}^m$ est continue (i.e. $f \in \mathrm{C}^0(E, \mathbb{R}^m)$) si et seulement si la préimage $f^{-1}(V)$ de chaque ouvert $V \subset \mathbb{R}^m$ est aussi ouverte.
2) Montrer que si E est compact et $f : E \to \mathbb{R}^m$ est continue, alors l'image $f(E) \subset \mathbb{R}^m$ est compact.
3) Montrer que si E est connexe par arcs et $f : E \to \mathbb{R}^m$ est continue, alors l'image $f(E) \subset \mathbb{R}^m$ est connexe par arcs.

Série 07 du lundi 15 mars 2021

Exercice 1.

Soit $E = ([0,1] \times [0,1]) \setminus \{(0,0)\}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\forall (x,y) \in E$.

1) f est-elle continue sur E ?
2) f est-elle uniformément continue sur E ?

Exercice 2.

Soient V et W deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $f : V \to W$ une fonction. On considère V muni des normes $\|\cdot\|_V$, $|||\cdot|||_V$ et W muni des normes $\|\cdot\|_W$, $|||\cdot|||_W$. On suppose que

$$\exists C_1 > 0, \forall v \in V : \quad |||v|||_V \leqslant C_1 \|v\|_V, , \tag{1}$$
$$\exists C_2 > 0, \forall v \in V : \quad |||w|||_W \leqslant C_2 \|w\|_W. \tag{2}$$

On dit alors que la norme $\|\cdot\|_V$ est « plus forte que $|||\cdot|||_V$ », ou de manière équivalente, $|||\cdot|||_V$ est « plus faible que $\|\cdot\|_V$ ». De même pour W.

Montrer que

1) Si $f : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ est continue, alors $f : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, |||\cdot|||_W)$ est continue.
2) Si $f : (V, |||\cdot|||_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ est continue, alors $f : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ est continue.

Rappel 1. $f : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ est continue si

$$\forall \epsilon > 0, \forall v \in V, \exists \delta = \delta(v,\epsilon) > 0 : \forall \tilde{v} \in V, \quad (\|\tilde{v} - v\|_V < \delta \implies \|f(\tilde{v}) - f(v)\|_W < \epsilon). \tag{3}$$

Exercice 3.

Définition 1 (Fonction höldérienne)**.** On dit qu'une fonction $\boldsymbol{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est α-höldérienne, pour $\alpha \in \,]0,1]$, si

$$\sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in E} \frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^\alpha} < \infty. \tag{4}$$

On vérifie facilement que cette définition ne dépend pas de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

1) Montrer que si $\boldsymbol{f}$ est α-höldérienne, alors $\boldsymbol{f}$ est uniformément continue sur E.
2) Utiliser cette propriété pour montrer que la fonction $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$,

$$f : (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{|x_1 - x_2|} \tag{5}$$

est uniformément continue sur $[-1,1]^2$.

Indication. Utiliser la propriété que, $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, $\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$.

Exercice 4.

Considérons l'espace $M(m,n)$ des matrices réelles de taille $m \times n$. Montrer que

1) $M(m,n)$ est un espace vectoriel (pour les opérations usuelles de somme des matrices et proportion par un scalaire) ;
2) l'application $\|\cdot\| : M(m,n) \to \mathbb{R}^+$, $\|A\| := \sup_{0 \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}$ est une norme [1] sur $M(m,n)$;
3) l'application $|||\cdot||| : M(m,n) \to \mathbb{R}^+$, $|||A||| := \sqrt{\sum_{i,j} A_{i,j}^2}$, définit aussi une norme [2] sur $M(m,n)$.
4) Trouver deux constantes strictement positives C_1, C_2 telles que, $\forall A \in M(m,n)$,

$$C_1\|A\| \leqslant |||A||| \leqslant C_2\|A\|. \tag{6}$$

1. Cette norme est appelée « norme spectrale ».
2. Cette norme est appelée « norme de Frobenius ».

Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-03-15 au 2021-03-19

Série 08 du mercredi 17 mars 2021

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = 0, \\ \dfrac{\cos\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_3^3\right) - 1}{x_1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $\nabla f(0,0,0)$. f est-elle différentiable en $(0,0,0)$?

Exercice 2.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{|x|^\alpha y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donner les valeurs de α pour lesquelles f est

1) continue en $(0,0)$;
2) différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3.

On définit

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \\ x^2 \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

Montrer que

1) les dérivées directionnelles de f existent dans $\mathbb{R}^2$;
2) f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$;
3) les dérivées directionnelles de f sont discontinues en $(0,0)$.

Série 09 du lundi 22 mars 2021

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \ln(|x_1| + |x_2|), \text{ si } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, \text{ si } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases} \tag{1}$$

Montrer que f est de classe C^1.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ et soit $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ les trois fonctions données par :

$$g_1(y_1, y_2, y_3) = y_1 \cos y_2 \sin y_3, \tag{2}$$
$$g_2(y_1, y_2, y_3) = y_1 \sin y_2 \sin y_3, \tag{3}$$
$$g_3(y_1, y_2, y_3) = y_1 \cos y_3. \tag{4}$$

On définit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ comme $F(y_1, y_2, y_3) = f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))$ où

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = (g_1(\boldsymbol{y}), g_2(\boldsymbol{y}), g_3(\boldsymbol{y})) = (g_1(y_1, y_2, y_3), g_2(y_1, y_2, y_3), g_3(y_1, y_2, y_3)). \tag{5}$$

1) Calculer explicitement $F(\boldsymbol{y})$.
2) Calculer $\nabla F(\boldsymbol{a})$ où $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.
3) Vérifier, dans ce cas particulier, que $\forall k \in \{1, 2, 3\}$,

$$\frac{\partial F}{\partial y_k}(\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})) \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(\boldsymbol{y}). \tag{6}$$

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On note $F := f \circ \|\cdot\|$, c'est-à-dire

$$F : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Calculer le gradient $\nabla F(\boldsymbol{x})$ en tout point $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Exercice 4.

Soit $\boldsymbol{f} \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une application qui satisfait $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))) = \boldsymbol{x}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ est inversible en tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-03-22 au 2021-03-26

Série 10 du mercredi 24 mars 2021

Exercice 1.

Définition 1 (Fonction höldérienne)**.** Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, borné, convexe et non-vide. Pour $\alpha \in \,]0,1]$, on dit qu'une fonction $\boldsymbol{h} : E \to \mathbb{R}^m$ est α-höldérienne si

$$\exists C \in \,]0,+\infty[, \forall \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in E, \quad \|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})\| \leqslant C\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^{\alpha}. \tag{1}$$

Les fonctions 1-höldériennes sont appelées « lipschitziennes ».

Conservons les notations de la définition 1.

1) Soit $f \in \mathrm{C}^1(E,\mathbb{R})$ dont les dérivées partielles sont bornées.
   a) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \,]0,1]$ f est-elle α-höldérienne ?
   b) Montrer que f est uniformément continue sur E.
2) Soit $\boldsymbol{f} \in \mathrm{C}^1(E,\mathbb{R}^m)$ dont les dérivées partielles sont bornées. Les résultats du point 1 sont-ils toujours valables ?

   Indication. Soit $K \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé borné et $\boldsymbol{g} \in \mathrm{C}^0(K,\mathbb{R}^m)$. Alors

   $$\left\|\int_K \boldsymbol{g}\right\| \leqslant \int_K \|\boldsymbol{g}\|, \tag{2}$$

   où l'intégrale $\int_K \boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^m$ s'obtient en intégrant chaque composante de $\boldsymbol{g}$. Ce résultat est vrai pour n'importe quelle norme.
3) Montrer le résultat de l'indication ci-dessus pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^m$.

Exercice 2.

On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} \text{ sinon.} \end{cases} \tag{3}$$

1) Calculer les grandeurs suivantes pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(x,y)\ ; \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,y)\ ; \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,0). \tag{6}$$

2) Montrer que les dérivées partielles secondes mixtes (5)–(6) sont définies sur $\mathbb{R}^2$ mais diffèrent en $(0,0)$.

3) Le point 2 contredit-il le théorème de Schwarz ?

Exercice 3.

Pour $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on note

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{7}$$

On appelle f le « laplacien de f ». On définit $g \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$g(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)). \tag{8}$$

Vérifier que, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$\Delta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta). \tag{9}$$

Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-03-29 au 2021-04-02

Série 11 du lundi 29 mars 2021

Exercice 1.

Écrire le développement limité à l'ordre 3 et au point $(1,1)$ de la fonction

$$f = (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{xy},$$

en utilisant le développement limité à l'ordre u de la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^u$ en 0.

Indication. Écrire $f(x,y) = \mathrm{e}^{1+u}$, où $u := (x-1)+(y-1)+(x-1)(y-1)$. Justifier toutes les étapes.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,x_2,x_3) = \left((x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2\right)^{1/2}.$$

Écrire le polynôme de Taylor de degré 2 de f en $(0,0)$.

Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-03-29 au 2021-04-02

Série 12 du mercredi 31 mars 2021

Exercice 1.

Soit $x \in]0, +\infty[$. Calculer

$$\int_0^{\pi/2} \ln\big(x^2 \cos^2(t) + \sin^2(t)\big)\, \mathrm{d}t =: g(x). \tag{1}$$

Justifier toutes les étapes.

Indication. Calculer g' et en déduire g, en observant que $g(1) = 0$.

Exercice 2.

Définissons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \sin\Big(x\sqrt{1+t^2}\Big)\, \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Montrer que f admet un minimum local en 0.

Exercice 3.

Définissons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathit{\Gamma}(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t. \tag{3}$$

1) Montrer que $\mathit{\Gamma}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$; que $\mathit{\Gamma} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$; et que, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\mathit{\Gamma}^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^k(t) t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t. \tag{4}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathit{\Gamma}(x+1) = x\mathit{\Gamma}(x)$.
   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathit{\Gamma}(n+1) = n!$; i.e. $\mathit{\Gamma}$ permet de généraliser la notion de factorielle à des arguments non entiers.

Exercice 4.

Calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t \tag{5}$$

par la méthode suivante. Pour $x \geqslant 0$, notons $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$. Calculer $g'(x)$ pour $x > 0$, puis en déduire $I = g(0)$. Justifier soigneusement la continuité de g en 0 et la différentiabilité de g sur $]0, +\infty[$.

Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-04-12 au 2021-04-16

Série 13 du lundi 12 avril 2021

Exercices de révision sur la première partie du cours

Exercice 1.

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) := \int_0^x \mathrm{e}^{xy^2} \,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

Calculer le polynôme p de degré 4 pour obtenir $|f(x) - p(x)| = o(|x|^4)$.

Exercice 2.

Notons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1) Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ unitaire (i.e. $\|\boldsymbol{v}\| = 1$) ; pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ donné nous notons $g_{\boldsymbol{x}} := t \mapsto f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v})$, définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$|g'_{\boldsymbol{x}}(0)| \leqslant \|\nabla f(\boldsymbol{x})\|.$$

Donner un critère d'égalité.

2) Soit $\gamma \in C^1([0,1], \mathbb{R}^n)$ une courbe paramétrée telle que $\forall s \in [0,1]$, $\|\gamma'(s)\| = 1$. Montrer que

$$|f(\gamma(0)) - f(\gamma(1))| \leqslant \int_0^1 \|\nabla f(\gamma(s))\| \,\mathrm{d}s.$$

Exercice 3.

Nous définissons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^3 - xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

Étudiez la différentiabilité de f en $(0,0)$.

Exercice 4.

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) := \frac{x^2 y}{x^2+y^2} + \frac{xy^3}{x^2+y^6}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \tag{3}$$

Étudiez la limite de f en $(0,0)$.

Exercice 5.

Étudier la convergence des intégrales suivantes ; les calculer n'est pas nécessaire.

$$\int_0^{+\infty} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sin x)}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Indication (Intégrale (5)). Changer de variable par une translation de π puis comparer les intégrales.

Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-04-12 au 2021-04-16

Série 14 du mercredi 14 avril 2021

Exercice 1.

Définissons la fonction

$$F := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1) Montrer que l'application F admet une fonction inverse locale autour du point $(0, 1)$, et que cette fonction inverse est de classe C^1.
2) F est-elle globalement inversible ?

Indication. Vous pouvez utiliser le théorème sur l'existence d'un inverse local.

Exercice 2.

Soient $U, V, W \subset \mathbb{R}^n$ ouverts ; soient $\phi \in \mathrm{C}^1(U, V)$ et $\psi \in \mathrm{C}^1(V, W)$ deux difféomorphismes. Montrer que $\psi \circ \phi$ est un difféomorphisme.

Exercice 3.

Soient $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Supposons $f'(x_0) \neq 0$. Il existe alors deux ouverts $U \ni x_0$ et $V \ni f(x_0)$, et $g : V \to U$ une fonction inverse locale de f en x_0. Montrer que $g \in \mathrm{C}^2(V, U)$.

Exercice 4.

Définition 1 (Difféomorphisme et orientation)**.** Soient $U, V \subset \mathbb{R}^n$ ouverts et $\psi : U \to V$ un difféomorphisme.

— Si $\det(\mathrm{D}\,\psi)$ est strictement positif partout, on dit que ψ « préserve l'orientation ».
— Si $\det(\mathrm{D}\,\psi)$ est strictement négatif partout, on dit que ψ « renverse l'orientation ».

1) Montrer que si U est connexe par arcs, alors soit ψ préserve l'orientation, soit ψ renverse l'orientation.
2) Donner des exemples d'ouverts U et V qui ne sont pas connexes par arcs et d'un difféomorphisme $\psi : U \to V$ qui ne préserve ni ne renverse l'orientation.

Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-04-19 au 2021-04-23

Série 15 du lundi 19 avril 2021

Exercice 1.

Notons $U := \mathbb{R}_+^* \times]0,\pi[\times]0,2\pi[$; on considère l'application $\boldsymbol{f} : U \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1) $\boldsymbol{f}$ est-elle un difféomorphisme local ?
2) Trouver, si elle est définie, l'application réciproque de $\boldsymbol{f}$.
3) Donner l'ensemble $\boldsymbol{f}^{-1}(]0,+\infty[^3)$ et calculer la matrice jacobienne de $\boldsymbol{f}^{-1}$. Trouver le jacobien de $\boldsymbol{f}^{-1}$ en fonction du jacobien de $\boldsymbol{f}$.

Exercice 2.

Considérons l'équation

$$1 - y^2 + x^2 y e^y = 0. \tag{2}$$

1) Montrer que (2) définit dans un voisinage du point $x = 0$ une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 1$.
2) Montrer que ϕ admet un minimum local en 0.

Exercice 3.

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe une fonction $y \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x, y(x)) = 0. \tag{3}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$; notons $b := y(a)$. Supposons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0, \quad \text{et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) > 0. \tag{4}$$

Montrer que y atteint un maximum local en a.

Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-04-19 au 2021-04-23

Série 16 du mercredi 21 avril 2021

Exercice 1.

Notons

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \tag{1}$$

la sphère de $\mathbb{R}^3$ de rayon 1 centrée en l'origine.

1) Identifier les points $(x_0, y_0, z_0) \in S$ au voisinage (ouvert) U desquels on peut décrire S comme le graphe d'une fonction Z définie, pour tout $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$, par $Z = \Gamma(x, y)$. Pour les points où une telle fonction Γ existe, écrire Γ explicitement. Pour les autres points, prouver qu'une telle fonction n'existe pas.
2) Donner l'équation du plan tangent à S en un point quelconque $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

Exercice 2.

Considérons l'équation

$$-1 + x^2 + yz^5 + \arctan(xyz) + \ln \frac{\sqrt{1 + x + z}}{3z} + \ln \sqrt[3]{y^2 + z^3} = 0 \tag{2}$$

1) Montrer que (2) définit, au voisinage du point $(1, 0)$, une fonction implicite $z = \phi(x, y)$ telle que $\phi(1, 0) = 7$.
2) Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = \phi(x, y)$ au point $(1, 0)$.

Exercice 3.

Considérons le système d'équations

$$\begin{cases} x - y^3 + z + 8 = 0, \\ x^3 + y^4 - z^5 - 16 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

1) Montrer que (3) définit, au voisinage du point $x = 0$, deux fonctions implicites $y = \phi_1(x)$ et $z = \phi_2(x)$, telles que $(\phi_1(0), \phi_2(0)) = (2, 0)$.
2) Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 de chacune des deux courbes $y = \phi_1(x)$ et $z = \phi_2(x)$.
3) Quelle autre paire de fonctions implicites (3) définit-il :
   a) $x = \phi_1(y)$ et $z = \phi_2(y)$ au voisinage de 2, avec $(\phi_1(2), \phi_2(2)) = (0, 0)$, ou bien
   b) $x = \phi_1(z)$ et $y = \phi_2(z)$ au voisinage de 0, avec $(\phi_1(0), \phi_2(0)) = (0, 2)$?

Exercice 4.

Soit $\boldsymbol{h} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction définie par

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} u_1^2 + u_2 + w_1^2 \\ e^{u_1} - 1 + u_2 + w_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

1) Montrer que $\boldsymbol{h}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = (0, 0)^\top$ et que $\boldsymbol{h} \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.
2) Soit $\epsilon > 0$; notons $\mathrm{B}(\mathbf{0}, \epsilon) \subset \mathbb{R}^2$ la boule ouverte de rayon ϵ centrée sur $\mathbf{0}$. Montrer que, si $\epsilon > 0$ est suffisamment petit, $\exists \boldsymbol{f} \in \mathrm{C}^2(\mathrm{B}(\mathbf{0}, \epsilon), \mathbb{R}^2)$ telle que, $\forall \boldsymbol{w} \in \mathrm{B}(\mathbf{0}, \epsilon)$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$.
3) Calculer $\mathrm{D}\, \boldsymbol{f}(\mathbf{0})$.

Série 17 du lundi 26 avril 2021

Exercice 1.

Déterminer les extrema – en précisant leur type – de la fonction f définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{xy} + x^2 + 2y^2. \tag{1}$$

Exercice 2.

Considérons la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dont les coefficients $(A_{ij})_{i,j=1}^n$ sont définis par

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } |i-j| \geqslant 2, \\ -1 \text{ si } |i-j| = 1, \\ 2 \text{ si } i = j. \end{cases} \tag{2}$$

Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$; définissons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ par :

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{x}. \tag{3}$$

Démontrer que A est inversible et que f atteint son minimum en $\boldsymbol{a} \coloneqq A^{-1}\boldsymbol{b}$.

Exercice 3.

Considérons la fonction f définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2} - 8x^2 - 4y^4. \tag{4}$$

1) Caractériser les points stationnaires de f.
2) f a-t-elle un minimum global ?

Exercice 4.

Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ compact, convexe et non-vide, et $\boldsymbol{y} \in E^\complement$. Considérons la fonction $f_{\boldsymbol{y}} : E \to \mathbb{R}$, définie pour tout $\boldsymbol{x} \in E$ par $f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$.

1) Montrer qu'il existe un unique $\boldsymbol{x_y} \in E$ tel que

$$\forall \boldsymbol{x} \in E, \quad f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x_y}) \leqslant f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}). \tag{5}$$

   Montrer de plus que $\boldsymbol{x_y} \in \partial E$.

2) Montrer que $\boldsymbol{x_y}$ satisfait

$$\forall \boldsymbol{x} \in E, \quad \langle \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x_y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_y}\rangle \leqslant 0, \tag{6}$$

   où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque. Le point $\boldsymbol{x_y}$ est appelé la « projection de $\boldsymbol{y}$ sur E ».

Série 18 du mercredi 28 avril 2021

Exercice 1.

Considérons la fonction f définie pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{1}$$

et l'ensemble

$$S := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\}. \tag{2}$$

1) Montrer que f atteint un minimum global sur S.
2) Calculer ce minimum par une méthode géométrique.

Exercice 2.

Parmi tous les triangles rectangles ayant la même aire, déterminer celui qui a la plus petite hypoténuse.

Exercice 3.

1) Soient $q \in \mathbb{R}_+^*$ et $\boldsymbol{x} \in \,]0, +\infty[^n$. Montrer que

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = q^n \implies \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \geqslant (1 + q)^n. \tag{3}$$

Sous quelles conditions a-t-on égalité, i.e. $\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) = (1 + q)^n$?

2) Soient $x_0, x_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x_0 < x_{n+1}$. Trouver, s'ils existent, les points $\boldsymbol{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ en lesquels

$$\sup\left\{ \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\prod_{i=0}^{n}(x_i + x_{i+1})} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ ; \ \forall i \in \{0, \dots, n\},\ x_i < x_{i+1} \right\} \tag{4}$$

est atteint.

Indication. Utiliser le résultat du point 1.

Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-05-03 au 2021-05-07

Série 19 du lundi 3 mai 2021

Exercice 1.

1) Calculer

$$\min\{\|\boldsymbol{x}\|^2 : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\} \tag{1}$$

par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

2) Vérifier le résultat en exprimant x_1 et x_2 comme des fonctions de x_3 qui satisfont les deux contraintes.

Exercice 2.

Soient $f, g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Notons $\Sigma_g := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : g(\boldsymbol{x}) \geqslant 0\}$. Supposons que (I) $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, $g(\boldsymbol{v}) = 0 \implies \nabla g(\boldsymbol{v}) \neq 0$; (II) f ait un minimum local sur Σ_g, et notons $\boldsymbol{x}^* \in \Sigma_g$ un argument de ce minimum local. Pour tout $(\boldsymbol{x}, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, définissons $\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \lambda) := f(\boldsymbol{x}) - \lambda g(\boldsymbol{x})$, la fonction lagrangienne.

Montrer qu'il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \nabla_{\boldsymbol{x}} \mathcal{L}(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*) = 0, \\ \lambda^* \geqslant 0, \\ \lambda^* g(\boldsymbol{x}^*) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Les conditions (2) sont connues comme les conditions de Karush–Kuhn–Tucker (KKT).

Exercice 3.

Soient $f, g \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Notons $\Sigma_g := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$, supposé non vide. Soit $(x^*, y^*) \in \Sigma_g$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\nabla g(x^*, y^*) \neq 0 \ ; \tag{3}$$

$$\exists \lambda^* \in \mathbb{R}, \quad \nabla f(x^*, y^*) = \lambda^* \nabla g(x^*, y^*) \ ; \tag{4}$$

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{v} \cdot \nabla g(x^*, y^*) = 0 \implies \boldsymbol{v}^\top \big(H_f(x^*, y^*) - \lambda^* H_g(x^*, y^*)\big) \boldsymbol{v} > 0. \tag{5}$$

Montrer que $f(x^*, y^*)$ est un minimum local lié de f sur Σ_g.

Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-05-03 au 2021-05-07

Série 20 du mercredi 5 mai 2021

Exercice 1.

Notons $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. Définissons $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ pour tout $(x, y) \in [0,1]^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

f est-elle intégrable au sens de Riemann ?

Exercice 2.

Considérons le pavé $R := [0,1] \times [0,1]$ et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } x = \frac{1}{2} \text{ et } y \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \tag{2}$$

1) f est-elle Riemann-intégrable sur $[0,1]^2$?
2) La fonction $y \to f(x,y)$ est-elle Riemann-intégrable sur $[0,1]$ pour tout $x \in [0,1]$?
3) La fonction $x \to f(x,y)$ est-elle Riemann-intégrable sur $[0,1]$ pour tout $y \in [0,1]$?

Exercice 3.

Soit R un pavé de $\mathbb{R}^n$. Notons $\mathcal{R}(R)$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui sont intégrables au sens de Riemann sur R.

1) Soient $f, g \in \mathcal{R}(R)$ telles que, $\forall x \in R$, $f(x) \leqslant g(x)$. Montrer que $\int_R f \leqslant \int_R g$.
2) Montrer que $\mathcal{R}(R)$ est un espace vectoriel et que

$$\forall (f, g, \lambda) \in \mathcal{R}(R) \times \mathcal{R}(R) \times \mathbb{R}, \quad \int_R (\lambda f + g) = \lambda \int_R f + \int_R g. \tag{3}$$

Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-05-10 au 2021-05-14

Série 21 du lundi 10 mai 2021

Exercice 1.

Soient $R \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un pavé et $f : R \to \mathbb{R}$.

1) Supposons que f est continue. Montrer que son graphe $\mathcal{G}(f) := \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) : \boldsymbol{x} \in R\}$ est un sous-ensemble négligeable de $\mathbb{R}^n$.
2) Supposons que f est bornée et intégrable au sens de Riemann. $\mathcal{G}(f)$ est-il toujours un sous-ensemble négligeable de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 2.

1) Notons $A_1 := \{n^{-1} : n \in \mathbb{N}^*\}$. A_1 est-il mesurable au sens de Jordan ? Si oui, calculer $\operatorname{Vol} A_1$.
2) Notons $A_2 := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
   a) Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Trouver un recouvrement par pavés $\{R_j : j \in \mathbb{N}\}$ de A_2 tel que $\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{Vol} R_j < \epsilon$.
   b) A_2 est-il mesurable au sens de Jordan ? Si oui, calculer $\operatorname{Vol} A_2$.

Exercice 3.

1) Montrer que l'union d'une famille finie d'ensembles négligeables est négligeable.
2) L'union d'une famille infinie dénombrable d'ensembles négligeables est-elle négligeable ?

Série 22 du mercredi 12 mai 2021

Exercice 1.

Définissons le triangle $T \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,1] : -2y \leqslant x \leqslant y\}$. Calculer

$$\iint_T x^3 y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

Exercice 2.

On considère le parallélogramme $P \subset \mathbb{R}^2$ de sommets $(0,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ et $(1,1)$. Calculer

$$\iint_P x^2 \sin y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Exercice 3.

Définissons

— $D \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;

— P le parallélogramme de sommets $A \coloneqq (0,2)$, $B \coloneqq (1,1)$, $C \coloneqq (3,2)$ et $D \coloneqq (2,3)$;

— f la fonction « ordonnée » définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) \coloneqq y$.

Pour $X \in \{D, P\}$, calculer

$$\int_X f. \tag{3}$$

Exercice 4.

Notons T le tétraèdre de $\mathbb{R}^3$ de sommets $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$. Calculer

$$\iiint_T \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(x+y+z+1)^2}. \tag{4}$$

Série 23 du 2021-05-17

Exercice 1.

Notons $D \coloneqq \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 : \|v\| \in \,]1,2[\}$. Calculer

$$\iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{2+\cos(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

Exercice 2.

Notons $D \coloneqq \{(x,y) \in \,]0,+\infty[^2 : 9x^2+4y^2 < 36\}$. Calculer

$$\iint_D x^2y^4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Exercice 3.

Soit $a \in \,]0,1[$; notons $D(a) \coloneqq [0,a]^2$. En utilisant le changement de variables $x \coloneqq u-v$, $y \coloneqq u+v$, exprimer l'intégrale

$$I(a) = \iint_{D(a)} \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{3}$$

à l'aide d'intégrales de la forme $\int_{\cdots}^{\cdots} \ldots \mathrm{d}u$. Montrer ensuite que $\lim_{a\to1^-} I(a) = \frac{\pi^2}{6}$. La fonction $f : [0,1]^2 \setminus \{(1,1)\} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{1-xy}$ est-elle absolument intégrable sur $[0,1]^2 \setminus \{(1,1)\}$?

Rappel 1. Soit $u \in \,]-1,1[$.

$$\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \arcsin u \tag{4}$$

et

$$\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin u. \tag{5}$$

On peut démontrer (5) en dérivant le membre de gauche et le membre de droite.

Série 24 du 2021-05-19

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

1)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{1}$$

2)

$$\iint_{]0,+\infty[^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}. \tag{2}$$

Exercice 2.

1) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nous définissons la fonction I par

$$I(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3}$$

Donner le domaine de définition de I.

2) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nous définissons la fonction J par

$$J(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{4}$$

Donner le domaine de définition de J.

Exercice 3.

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)^2 - 5u(t) + 6, \quad \forall t \in [0,+\infty[, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{5}$$

Prouver l'existence d'une solution locale en en calculant une par séparation de variables. Donner les valeurs de u_0 pour lesquelles il existe une solution globale.

Exercice 4.

On considère le problème à valeur initiale

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)^{1/3}, \quad \forall t \in [0, +\infty[, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Trouver la totalité des solutions globales de classe $\mathrm{C}^1([0, +\infty[)$. De même, trouver la totalité des solutions globales de classe $\mathrm{C}^2([0, +\infty[)$.

Remarque. $u \in \mathrm{C}^1([0, +\infty[)$ signifie que : (I) $u \in \mathrm{C}^0([0, +\infty[) \cap \mathrm{C}^1(]0, +\infty[)$; (II) la dérivée à droite $u'_+(0) = \lim_{t \to 0^+}(u(t) - u(0))/t$ existe ; et (III) $u'_+(0) = \lim_{t \to 0^+} u'(t)$. Dans ce contexte, on note alors $u'(0) := u'_+(0)$. De même, $u \in \mathrm{C}^2([0, +\infty[)$ signifie que $u \in \mathrm{C}^1([0, +\infty[)$ et $u' \in \mathrm{C}^1([0, +\infty[)$, où u' est définie en 0 dans le sens ci-dessus.

Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-05-24 au 2021-05-28

Série 25 du 2021-05-26

Exercice 1.

Trouver la solution de l'équation de Ricatti définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(x) = y^2(x) - 2\mathrm{e}^x y(x) + \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x. \end{cases} \tag{Ricatti}$$

Indication. Utiliser le changement de variables $z(x) = y(x) - \mathrm{e}^x$.

Exercice 2.

Considérons le problème de Cauchy défini pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} u(0) = 1, \\ u'(t) = t^4 + 2t - t^2 u(t). \end{cases} \tag{1}$$

1) Prouver que (1) admet une unique solution globale.
2) Calculer cette solution globale.

Exercice 3.

Trouver les intégrales de l'équation différentielle définie pour tout $t \in \,]3, +\infty[$ par

$$(t-3)u'(t) - 3u(t) = t + 5. \tag{2}$$

Exercice 4.

Trouver les intégrales de l'équation différentielle définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$u'(t) = -u(t) + \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^t + 3\sin t + 2\mathrm{e}^{-t}. \tag{3}$$

Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-05-31 au 2021-06-04

Série 26 du lundi 31 mai 2021

Exercice 1.

Soient $t_0, u_0 \in \mathbb{R}$. Discuter l'existence et – le cas échéant – l'unicité d'une solution globale des problèmes de Cauchy suivants.

1)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) = \frac{t^2 u(t)^3}{1 + u(t)^2}, \tag{1a}$$

$$u(t_0) = u_0. \tag{1b}$$

2)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) = \arctan(tu(t)), \tag{2a}$$

$$u(t_0) = u_0. \tag{2b}$$

Exercice 2.

Soit $b \in \mathbb{R}$; notons $I := \,]b, +\infty[$. Soient $(t_0, u_0) \in I \times \,]0, +\infty[$ et $f \in \mathrm{C}^0(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument. Supposons les existences de $a \in \,]0, +\infty[$ et $l \in \mathrm{C}^0(I, [a, +\infty[)$ tels que $\forall (t, x) \in I \times \,]0, +\infty[,\ xf(t, x) \geqslant l(t)(1 + x^4)$. Considérons le problème à valeur initiale suivant.

$$\forall t \in \,]t_0, +\infty[, \quad u'(t) = f(t, u(t)), \tag{3a}$$

$$u(t_0) = u_0. \tag{3b}$$

1) Justifier l'existence d'une solution locale à (3).
2) Prouver qu'aucune solution globale n'existe.

Exercice 3.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soient u, $\beta \in \mathrm{C}^0([a, b[)$. Supposons que u soit différentiable sur $]a, b[$ et que

$$\forall t \in \,]a, b[, \quad u'(t) \leqslant \beta(t) u(t). \tag{4}$$

Prouver que

$$\forall t \in [a, b[, \quad u(t) \leqslant u(a) \exp\left(\int_a^t \beta\right). \tag{5}$$

Indication. Considérer le facteur intégrant h défini pour tout $t \in [a, b[$ par $h(t) := \exp(-\int_a^t \beta)$. Étudier la dérivée de $h \times u$.

Remarque. Ce résultat est connu comme le « lemme de Grönwall ».

Exercice 4.

Soient $(t_0, u_0, u_0') \in \mathbb{R}^3$ et un intervalle ouvert $I \ni t_0$. Soit $f \in \mathrm{C}^0(I \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ une fonction globalement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument. Définissons un premier problème de Cauchy comme suit.

$$\forall t \in I, \quad u''(t) = f\Big(t, \left(\begin{smallmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{smallmatrix}\right)\Big) \; ; \tag{6a}$$

$$u(t_0) = u_0 \; ; \quad \text{et} \tag{6b}$$

$$u'(t_0) = u_0'. \tag{6c}$$

Soient a, b, $c \in \mathrm{C}^0(I)$. Définissons également le second problème de Cauchy suivant.

$$\forall t \in I, \quad u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = c(t) \; ; \tag{7a}$$

$$u(t_0) = u_0 \; ; \quad \text{et} \tag{7b}$$

$$u'(t_0) = u_0'. \tag{7c}$$

1) Montrer que (6) admet une solution globale unique $u \in \mathrm{C}^2(I)$.
2) En déduire l'existence et l'unicité de la solution globale du problème de Cauchy (7).

Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-05-31 au 2021-06-04

Série 27 du mercredi 2 juin 2021

Exercice 1.

Trouvez toutes les fonctions w telles que

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad tw''(t) - w'(t) + (1-t)w(t) = 0. \tag{1}$$

Détaillez votre raisonnement.

Indication. La fonction exponentielle est une solution de (1).

Exercice 2.

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et a, $b \in \mathrm{C}^0(I)$. Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\forall t \in I, \quad u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = 0. \tag{2}$$

Soient u_1, u_2 deux solutions linéairement indépendantes de (2).

1) Montrer que les zéros de u_1 sont distincts des zéros de u_2.
2) Justifier que les ensembles des zéros de u_1 et de u_2 sont discrets.
3) Prouver qu'entre deux zéros consécutifs de u_1 existe exactement un zéro de u_2, et vice-versa.

Exercice 3.

Soient α, $\omega \in \mathbb{R}$. Trouver la solution générale de l'équation différentielle du 2^{nd} ordre suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + 2y'(t) + \alpha y(t) = \cos(\omega t). \tag{3}$$

Exercice 4.

Soit $f \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\exists M \in]0, +\infty[, \, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant M|x|. \tag{4}$$

Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $u \in \mathrm{C}^1([a, b[)$ telle que

$$\forall t \in [a, b[, \quad u'(t) = f(u(t)). \tag{5}$$

Montrer soigneusement l'existence de $\lim_{b^-} u$.

Indication. Le lemme de Grönwall peut être utile (cf. série 26, exercice 3). Montrer que u est uniformément continue sur $[a, b[$.