Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-04-12 au 2021-04-16

Série 13 du lundi 12 avril 2021

Exercices de révision sur la première partie du cours

Exercice 1.

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) := \int_0^x \mathrm{e}^{xy^2}\, \mathrm{d}y. \tag{1}$$

Calculer le polynôme p de degré 4 pour obtenir $|f(x) - p(x)| = o(|x|^4)$.

Solution :

On cherche le polynôme de Taylor à l'ordre 4 de f :

$$p := x \mapsto \sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = x \mapsto f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4 \tag{2}$$

Il est immédiat de trouver que $f(0) = 0$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{xx^2} + \int_0^x y^2 \mathrm{e}^{xy^2}\, \mathrm{d}y\ ; \tag{3}$$

$$f''(x) = \mathrm{e}^{x^3} 3x^2 + x^2 \mathrm{e}^{x^3} + \int_0^x y^4 \mathrm{e}^{xy^2}\, \mathrm{d}y = \mathrm{e}^{x^3} 4x^2 + \int_0^x y^4 \mathrm{e}^{xy^2}\, \mathrm{d}y\ ; \tag{4}$$

$$f'''(x) = \mathrm{e}^{x^3} 12x^4 + \mathrm{e}^{x^3} 8x + x^4 \mathrm{e}^{x^3} + \int_0^x y^6 \mathrm{e}^{xy^2}\, \mathrm{d}y = \mathrm{e}^{x^3} 13x^4 + \mathrm{e}^{x^3} 8x + \int_0^x y^6 \mathrm{e}^{xy^2}\, \mathrm{d}y\ ; \tag{5}$$

$$\begin{aligned} f''''(x) &= \mathrm{e}^{x^3} 39x^6 + \mathrm{e}^{x^3} 52x^3 + \mathrm{e}^{x^3} 24x^3 + \mathrm{e}^{x^3} 8 + x^6 \mathrm{e}^{x^3} + \int_0^x y^8 \mathrm{e}^{xy^2}\, \mathrm{d}y \\ &= (40x^6 + 76x^3 + 8)\mathrm{e}^{x^3} + \int_0^x y^8 \mathrm{e}^{xy^2}\, \mathrm{d}y\ ; \end{aligned} \tag{6}$$

donc en particulier $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 0$ et $f''''(0) = 8$. Finalement, puisque f'''' est dérivable sur $\mathbb{R}$, le polynôme recherché est

$$p(x) = x + \frac{8}{4!}x^4 = x + \frac{1}{3}x^4, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

et il satisfait bien

$$\lim_{x \to 0} \frac{|f(x) - p(x)|}{|x|^4} = 0. \tag{8}$$

Exercice 2.

Notons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1) Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ unitaire (i.e. $\|\boldsymbol{v}\| = 1$) ; pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ donné nous notons $g_{\boldsymbol{x}} := t \mapsto f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v})$, définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$|g'_{\boldsymbol{x}}(0)| \leqslant \|\nabla f(\boldsymbol{x})\|.$$

Donner un critère d'égalité.

2) Soit $\gamma \in C^1([0,1], \mathbb{R}^n)$ une courbe paramétrée telle que $\forall s \in [0,1]$, $\|\gamma'(s)\| = 1$. Montrer que

$$|f(\gamma(0)) - f(\gamma(1))| \leqslant \int_0^1 \|\nabla f(\gamma(s))\| \, \mathrm{d}s.$$

Solution :

1) Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, et $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ unitaire. Puisque $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, elle est différentiable en $\boldsymbol{x}$ et ainsi la dérivée directionnelle $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x})$ existe. On peut donc représenter cette dérivée directionnelle par : $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x}$ (« $\cdot$ » désigne le produit scalaire entre vecteurs de $\mathbb{R}^n$). Par définition, $g'_{\boldsymbol{x}}(0) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x})$ donc

$$|g'_{\boldsymbol{x}}(0)| = |\nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}| \leqslant \|\nabla f(\boldsymbol{x})\| \|\boldsymbol{v}\| = \|\nabla f(\boldsymbol{x})\|. \tag{9}$$

L'inégalité dans (9) est une égalité si et seulement si $\boldsymbol{v}$ est colinéaire avec $\nabla f(\boldsymbol{x})$.

2) Pour tout $t \in [0,1]$ on note $g(t) := f(\gamma(t))$; on a $g'(t) = \mathrm{D} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. Le théorème fondamental du calcul intégral donne

$$f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s) \, \mathrm{d}s = \int_0^1 \nabla f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) \, \mathrm{d}s. \tag{10}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on obtient :

$$\left| \int_0^1 \nabla f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) \, \mathrm{d}s \right| \leqslant \int_0^1 |\nabla f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s)| \, \mathrm{d}s \leqslant \int_0^1 \|\nabla f(\gamma(s))\| \underbrace{\|\gamma'(s)\|}_{=1} \, \mathrm{d}s, \tag{11}$$

d'où le résultat demandé.

Exercice 3.

Nous définissons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^3 - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ sinon.} \end{cases} \tag{12}$$

Étudiez la différentiabilité de f en $(0,0)$.

Solution :

La première dérivée partielle existe :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3 - x \times 0}{\sqrt{x^2 + 0^2}} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{|x| x} = 0. \tag{13}$$

La seconde dérivée partielle existe aussi :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{0^3-0\times y}{\sqrt{0^2+y^2}} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0 \tag{14}$$

Si de plus f était différentiable en $(0,0)$, on aurait

$$f(x,y) = f(0+x,0+y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + g(x,y) \tag{15}$$

avec

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0. \tag{16}$$

Or

$$f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0, \tag{17}$$

$$\frac{g(x,y)}{\|(x,y)\|} = \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = \frac{x^3-xy}{x^2+y^2}, \tag{18}$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x,x)}{\|(x,x)\|} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2} \neq 0. \tag{19}$$

Ainsi f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 4.

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) := \frac{x^2 y}{x^2+y^2} + \frac{xy^3}{x^2+y^6}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \tag{20}$$

Étudiez la limite de f en $(0,0)$.

Solution :

D'une part :

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2\times 0}{x^2+0^2} + \frac{x\times 0^3}{x^2+0^6} \right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0. \tag{21}$$

D'autre part :

$$\lim_{y\to 0} f(y^3,y) = \lim_{y\to 0} \left(\frac{y^6\times y}{y^6+y^2} + \frac{y^3\times y^3}{y^6+y^6} \right) = \lim_{y\to 0} \left(\frac{y^5}{y^4+1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \neq 0. \tag{22}$$

Ainsi, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Exercice 5.

Étudier la convergence des intégrales suivantes ; les calculer n'est pas nécessaire.

$$\int_0^{+\infty} \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x \tag{23}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sin x)}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{24}$$

Indication (Intégrale (24)). Changer de variable par une translation de π puis comparer les intégrales.

Solution :

1) Étudions l'intégrale (23). Notons

$$f := y \mapsto \int_0^y \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x. \tag{25}$$

Pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin(\sin x) \geqslant 0$ et $\sin(\sin(x + \pi)) = -\sin(\sin x)$. Ainsi f est positive sur $[0, 2\pi]$, et $f(0) = 0 = f(2\pi)$; elle atteint donc un maximum $\alpha > 0$ sur $[0, 2\pi]$. De plus, elle est 2π-périodique. Par conséquent, $\forall y \in]0, +\infty[$, $\exists (u, v) \in]y, +\infty[$: $f(u) = 0$ et $f(v) = \alpha$. Il est donc impossible que $\lim_{y\to\infty} f(y)$ existe.

2) Étudions l'intégrale (24). Notons $f := \sin \circ \sin$, et prenons $c \in]0, +\infty[$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $[c, x]$ (ou $[x, c]$) est borné et $(x \mapsto f(x)/x)$ y est continue, donc intégrable. Il suffit de montrer l'existence de

$$\lim_{x\to 0} \int_x^c \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \tag{26}$$

et

$$\lim_{x\to +\infty} \int_c^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{27}$$

Étudions la limite (26). Évidemment $f(0) = 0$ et, puisque $f \in \mathrm{C}^{+\infty}(\mathbb{R})$, l'utilisation de la formule de dérivation des fonctions composites donne $f'(0) = 1$ et $f''(0) = 0$. On obtient ainsi le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = t + g(t). \tag{28}$$

avec

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{|t|^2} = 0. \tag{29}$$

Pour tout $x \in]0, c[$,

$$\int_x^c \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^c \left(1 + \frac{g(t)}{t}\right)\mathrm{d}t \tag{30}$$

$$= c - x + \underbrace{\int_x^c \frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t}_{=:I_1(x)} \tag{31}$$

De plus, $\lim_{x\to 0} I_1(x)$ existe car $(t \mapsto g(t)/t)$ est continue sur $]0, c]$ et prolongeable par continuité sur $[0, c]$. Par conséquent, la limite (26) existe.

Étudions la limite (27). Pour $x \in [0, +\infty]$ suffisamment grand, un changement de variable donne :

$$\int_{c+\pi}^{x+\pi} \frac{\sin(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_c^x \frac{\sin(\sin t)}{t + \pi}\,\mathrm{d}t.$$

On peut donc écrire

$$\int_c^{x+\pi} \frac{\sin(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_c^{x+\pi} \frac{\sin(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_c^{x+\pi} \frac{\sin(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t \tag{32}$$

$$\begin{aligned} &= \overbrace{\frac{1}{2}\int_c^{x} \sin(\sin t)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+\pi}\right)\mathrm{d}t}^{=:I_2(x)} \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_c^{c+\pi} \frac{\sin(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &\quad\quad + \underbrace{\frac{1}{2}\int_x^{x+\pi} \frac{\sin(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t}_{=:I_3(x)}\,. \end{aligned} \tag{33}$$

Soit $x \in]c, +\infty[$: $x^{-1} - (x+\pi)^{-1} = \pi(x(\pi + x))^{-1} < \pi x^{-2}$. Or $x \mapsto x^{-2}$ est intégrable sur $]c, +\infty[$, et par conséquent, $\lim_{x\to+\infty} I_2(x)$ existe. De même, $\lim_{x\to+\infty} I_3(x)$ existe car l'intégrande de I_3 est continu sur l'intervalle d'intégration, fermé et borné ; De plus

$$|I_4(x)| \leqslant \frac{\pi}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0. \tag{34}$$

L'intégrale restante de (33) converge car son intégrande est continu sur l'intervalle d'intégration, fermé et borné. Finalement, la limite (27) existe, ce qui conclut le raisonnement.

Remarque. On aurait aussi pu utiliser une série alternée en définissant, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k := \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(\sin t)}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{35}$$

Remarque. On aurait aussi pu utiliser le théorème d'Abel–Dirichlet avec $\int_0^x \sin(\sin t)\,\mathrm{d}t$ borné et $g(x) = x^{-1}$ qui est une fonction C^1, monotone et convergeant vers 0 à l'infini.