Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-03-08 au 2021-03-12

Série 06 du mercredi 10 mars 2021

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{1}$$

1) Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) = \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big) = 0. \tag{2}$$

2) Peut-on en déduire que $\lim_{(0,0)} f = 0$?

Solution :

1) Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2 + (1-\frac{y}{x})^2} = 0 \tag{3}$$

et pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, on a $\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$, on a finalement que

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) = \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big) = 0. \tag{4}$$

2) Non : $\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} 1 = 1 \neq 0 = f(0,0)$.

Exercice 2.

1) Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E. Montrer que $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \ell$ si et seulement s'il existe $R > 0$ et une fonction $g :]0, R[\to \mathbb{R}_+$ tels que $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$ et, pour tout $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, R) \cap (E\backslash\{\boldsymbol{x}_0\})$, $|f(\boldsymbol{x}) - \ell| \leqslant g(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|)$. Le choix de la norme n'est pas important.
2) Utiliser le critère du point 1 pour montrer que les fonctions suivantes, définies de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$, ont pour limite 0 en $(0,0)$:

$$f_1(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},$$
$$f_2(x,y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Solution :

1) Prouvons séparément chaque implication.

« $\Longrightarrow$ » Soit $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \ell$ et choisissons $R > 0$ tel que $|f(\boldsymbol{x}) - \ell| < 1$ pour tout $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, R) \cap (E \backslash \{\boldsymbol{x}_0\})$.

Définissons la fonction g par

$$g(r) = \sup \Big\{ |f(\boldsymbol{x}) - \ell| : \boldsymbol{x} \in \overline{B}(\boldsymbol{x}_0, r) \cap (E \backslash \{\boldsymbol{x}_0\}) \Big\},$$

qui est ≤ 1 sur $]0, R[$. Clairement, $\forall \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, R) \cap (E \backslash \{\boldsymbol{x}_0\}), |f(\boldsymbol{x}) - \ell| \leqslant g(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|)$. Montrons que $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$. On a que

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta \in]0, R[:\ \ \forall \boldsymbol{x} \in E\ \ \Big(0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - \ell| \leqslant \epsilon\Big),$$

ce qui implique $|g(r)| \leqslant \epsilon$ pour tout $0 < r \leqslant \delta$ et donc $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$.

« $\Longleftarrow$ » Soit $g :]0, R[\to \mathbb{R}_+$ tel que $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$ et $|f(\boldsymbol{x}) - \ell| \leqslant g(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|)$ pour tout $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, R) \cap (E \backslash \{\boldsymbol{x}_0\})$. Puisque $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} g(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|) = 0$, le théorème des deux gendarmes implique $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \ell$.

2) Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, posons $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. On a

$$|f_1(x, y)| \leq \frac{r^3 + r^3}{r^2} = 2r := g_1(r)$$

et

$$|f_2(x, y)| \leq \frac{|xy|}{r} \leq \frac{r^2}{r} = r := g_2(r)$$

avec $\lim_{r\to 0^+} g_1(r) = \lim_{r\to 0^+} g_2(r) = 0$.

Exercice 3.

Soit un sous-ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$.

1) Montrer la caractérisation suivante des fonctions continues. En supposant E ouvert, une fonction $f : E \to \mathbb{R}^m$ est continue (i.e. $f \in \mathrm{C}^0(E, \mathbb{R}^m)$) si et seulement si la préimage $f^{-1}(V)$ de chaque ouvert $V \subset \mathbb{R}^m$ est aussi ouverte.
2) Montrer que si E est compact et $f : E \to \mathbb{R}^m$ est continue, alors l'image $f(E) \subset \mathbb{R}^m$ est compact.
3) Montrer que si E est connexe par arcs et $f : E \to \mathbb{R}^m$ est continue, alors l'image $f(E) \subset \mathbb{R}^m$ est connexe par arcs.

Solution :

1) Prouvons l'équivalence en deux étapes.

« $\Longrightarrow$ » Supposons $f : E \to \mathbb{R}^m$ continue. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $U = f^{-1}(V) \subset E$. Montrons que U est ouvert. Soit $\boldsymbol{x} \in U$. Puisque $\boldsymbol{x} \in E$ avec E ouvert, il existe $\delta_1 > 0$ tq $\mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \delta_1) \subset E$. Posons $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \in V$. Puisque V est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(\boldsymbol{y}, \varepsilon) \subset V$. Puisque f est continue au point $\boldsymbol{x}$, il existe $\delta \in]0, \delta_1[$ tel que $f(\mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \delta)) \subset \mathrm{B}(\boldsymbol{y}, \varepsilon) \subset V$. On a alors $\mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \delta) \subset U$, ce qui montre que U est ouvert.

« $\Longleftarrow$ » Soit $\boldsymbol{x} \in E$. Montrons que f est continue en $\boldsymbol{x}$. Soit $\varepsilon > 0$. La boule $\mathrm{B}(f(\boldsymbol{x}), \varepsilon)$ est ouverte dans $\mathbb{R}^m$. Ainsi $A = f^{-1}(\mathrm{B}(f(\boldsymbol{x}), \varepsilon))$ est ouvert (par hypothèse) et contient $\boldsymbol{x}$. Par conséquent il existe $\delta > 0$ tel que $\mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \delta) \subset A$, d'où $f(\mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \delta)) \subset \mathrm{B}(f(\boldsymbol{x}), \varepsilon)$. Ceci s'écrit aussi $\forall z \in \mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \delta)$, $\|f(z) - f(\boldsymbol{x})\| < \varepsilon$.

2) Utilisons la caractérisation séquentielle de la compacité. Soit une suite $(\boldsymbol{y}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset f(E)$; prouvons qu'elle admet une sous-suite qui converge vers un élément de $f(E)$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, choisissons $\boldsymbol{x}_k \in E$ tel que $f(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{y}_k$. Puisque E est supposé compact, la suite $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(\boldsymbol{x}_{s(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $\boldsymbol{x} \in E$. La continuité de f donne

$$\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{y}_{s(k)} = \lim_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{x}_{s(k)}) = f(\boldsymbol{x}) \in f(E) \tag{5}$$

et donc la sous-suite $(\boldsymbol{y}_{s(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\boldsymbol{x}) \in f(E)$.
On peut aussi montrer ce resultat en utilisant la caracterisation de la compacité par recouvrements finis. Soit donc $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement d'ouverts. Puisque f est continue, $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour tout $\alpha \in A$. Si $x \in E$, alors $f(x) \in f(E)$ et il existe $\beta \in A$ tel que $f(x) \in V_\beta$. Donc $x \in U_\beta$. Ainsi, $\left(U_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ est un recouvrement d'ouverts de E. Puisque E est compact, il existe un sous-recouvrement fini $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots U_{\alpha_p}$ de E. Clairement, $V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \ldots V_{\alpha_p}$ est aussi un recouvrement de $f(E)$. En effet, si $y \in f(E)$, alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Il existe $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ tel que tel que $x \in U_{\alpha_k}$ et donc $y \in V_{\alpha_k}$.
Finalement, on peut aussi montrer directement que $f(E)$ est borné et fermé.

a) $f(E)$ *borné*. Par contradiction, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\boldsymbol{y}_n \in f(E)$ tel que $\|\boldsymbol{y}_n\| \geq n$. Soit $\boldsymbol{x}_n \in E$ tel que $f(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{y}_n$. E étant compact, de la suite $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $\{\boldsymbol{x}_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $\boldsymbol{x} \in E$. Puisque f est continue, on a $f(\boldsymbol{x}) = \lim_{i\to\infty} f(\boldsymbol{x}_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} \boldsymbol{y}_{n_i} = \infty$ ce qui est contradictoire.

b) $f(E)$ *fermé*. On va montrer que $\overline{f(E)} \subseteq f(E)$ donc que $\overline{f(E)} = f(E)$. Soit $\boldsymbol{y} \in \overline{f(E)}$, et $(\boldsymbol{y}_n)_{n=0}^{\infty} \subset f(E)$ une suite qui converge vers $\boldsymbol{y}$; montrons que $\boldsymbol{y} \in f(E)$. On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boldsymbol{y}_n \in f(E)$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \boldsymbol{x}_n \in E$ tq $f(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{y}_n$. E est borné, d'après le théorème de Bolzano–Weierstrasse dans $\mathbb{R}^n$, il existe une sous suite $(\boldsymbol{x}_{n_i})_{i=0}^{\infty}$ qui converge vers $\boldsymbol{x} \in E$ car E est fermé. Comme f est continue, $f(\boldsymbol{x}) = f(\lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{x}_{n_i}) = \lim\limits_{i\to\infty} f(\boldsymbol{x}_{n_i}) = \lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{y}_{n_i} = \boldsymbol{y}$. On a donc montré qu'il existe $\boldsymbol{x} \in E$ tel que $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ donc $\boldsymbol{y} \in f(E)$ et $f(E)$ est fermé.

3) Soit $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in f(E)$; on choisit $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E$ tels que $f(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}_1$ et $f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_2$. Puisque E est connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma \in \mathrm{C}^0([0, 1], E)$ tel que $\gamma(0) = \boldsymbol{x}_1$ et $\gamma(1) = \boldsymbol{x}_2$. En tant que composition de fonctions continues, $f \circ \gamma \in \mathrm{C}^0([0, 1], f(E))$. De plus, $f(\gamma(0)) = \boldsymbol{y}_1$ et $f(\gamma(1)) = \boldsymbol{y}_2$. Par conséquent, $f(E)$ est connexe par arcs.