EPFL - Automne 2020	Prof. Z. Patakfalvi
Structures Algébriques	**Exercices**
Série 6	23 Octobre 2020

Veuillez télécharger vos solutions aux exercices à rendre (Exercice 6) sur la page Moodle du cours avant le lundi 2 novembre, 18h.

---

1 Exercices

Exercise 1 (Unicité du produit)**.**
Soient G, H deux groupes. Supposons qu'il existe un groupe F, muni de deux homomorphismes $i\colon F \to G$ et $j\colon F \to H$, qui vérifie la propriété universelle du produit : pour tout groupe K et toute paire d'homomorphismes $\alpha\colon K \to G$ et $\beta\colon K \to H$, il existe un unique homomorphisme $\gamma\colon K \to F$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & G \\ K \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\beta"'] & F \arrow[u, "i"'] \arrow[d, "j"] \\ & H \end{tikzcd}$$

commute. Dans ce cas, montrez qu'il existe un unique isomorphisme

$$\phi\colon G \times H \xrightarrow{\cong} F$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & G & \\ G \times H \arrow[ur, "\mathrm{pr}_G^{G\times H}"] \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_H^{G\times H}"'] & & F \arrow[ul, "j"'] \arrow[dl, "i"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

commute.
Indication : Utilisez la propriété universelle pour construire ϕ et son potentiel inverse.

Exercise 2.
Soient G, H des groupes abéliens. On définit deux homomorphismes

$$\iota_1\colon G \longrightarrow G \times H, \quad g \mapsto (g, 0_H)$$

et

$$\iota_2 \colon H \longrightarrow G \times H, \quad h \mapsto (0_G, h).$$

Montrez que $(G \times H, \iota_1, \iota_2)$ satisfait la propriété universelle suivante : pour tout groupe abélien F et toute paire d'homomorphismes $\alpha \colon G \to F$ et $\beta \colon H \to F$, il existe un unique homomorphisme $\gamma \colon G \times H \to F$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "\iota_1"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
G \times H \arrow[r, "\gamma"] & F \\
H \arrow[u, "\iota_2"] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

commute.

Cette propriété est en un sens la propriété duale de celle décrite dans la Proposition 3.2.9. — Que se passe-t-il dans le cas non-abélien ?

Exercise 3 (Commutativité et associativité du produit)**.**
Soient G_1, G_2, G_3 des groupes.

1. Montrez qu'il existe un unique isomorphisme $\varphi \colon G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$ tel que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
G_1 \times G_2 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{G_i}^{G_1 \times G_2}"'] & & G_2 \times G_1 \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{G_i}^{G_2 \times G_1}"] \\
& G_i &
\end{tikzcd}$$

   commutent pour $i = 1, 2$.

2. Remarquez que le produit $G_1 \times (G_2 \times G_3)$ admet des homomorphismes vers G_1, G_2, G_3 construits de la manière suivante :

$$\mathrm{pr}_{G_1}^{G_1 \times (G_2 \times G_3)} \colon G_1 \times (G_2 \times G_3) \to G_1$$

   et

$$\mathrm{pr}_{G_i}^{G_1 \times (G_2 \times G_3)} \colon G_1 \times (G_2 \times G_3) \xrightarrow{\mathrm{pr}_{G_2 \times G_3}^{G_1 \times (G_2 \times G_3)}} G_2 \times G_3 \xrightarrow{\mathrm{pr}_{G_i}^{G_2 \times G_3}} G_i$$

   pour $i = 2, 3$. De la même manière, le produit $(G_1 \times G_2) \times G_3$ admet un homomorphisme $\mathrm{pr}_{G_j}^{G_1 \times (G_2 \times G_3)}$ vers G_j pour $j = 1, 2, 3$.

Montrez qu'il existe un unique isomorphisme $\psi\colon G_1 \times (G_2 \times G_3) \cong (G_1 \times G_2) \times G_3$ tels que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
G_1 \times (G_2 \times G_3) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}^{G_1 \times (G_2 \times G_3)}_{G_j}"'] & & (G_1 \times G_2) \times G_3 \arrow[dl, "\mathrm{pr}^{(G_1 \times G_2) \times G_3}_{G_j}"] \\
& G_j &
\end{tikzcd}$$

commutent pour $j = 1, 2, 3$.

Indication : Dans les deux points, utilisez la description explicite du produit de groupes pour construire des isomorphismes.

Exercise 4.
Montrez que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercise 5.
Montrez que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont tous de la forme $n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

2 Exercice à rendre

Exercise 6. 1. Soit G un groupe. Construisez une bijection explicite entre $\{\text{homomorphismes } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to G\}$ et $\{g \in G \mid g^2 = e_G\}$.

2. Montrez que $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   Indication : utilisez le point précédent et l'Exercice 2 pour construire un homomorphisme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$.

3 Exercice supplémentaire

Exercise 7.
Soit $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une collection de groupes indexés par les entiers naturels.

1. Considérons l'ensemble
$$\prod_{n\in\mathbb{N}} G_n := \{(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid g_n \in G_n \forall n \in \mathbb{N}\}.$$
   Donnez une structure de groupe à $\prod_n G_n$, qui soit telle que l'application de projection
$$\prod_n G_n \longrightarrow G_m, \quad (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto g_m$$
   soit un morphisme de groupe pour tous les $m \in \mathbb{N}$.

2. Posons maintenant

$$G := \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \quad H := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G.$$

Montrez qu'il existe des homomorphismes injectifs $G \hookrightarrow H$ et $H \hookrightarrow G$, mais que G et H ne sont pas isomorphes. En particulier, l'équivalent de Cantor-Schröder-Bernstein n'est pas vrai pour les groupes.
Indication : s'il existait un isomorphisme $\phi\colon H \to G$, alors $\phi(([1], 0_G))$ serait 2-torsion. En déduire que $([1], 0_G)$ serait divisible par 4 dans H, ce qui est impossible.

3. Soit G comme dans le point précédent. Montrez que $G \cong G \times G$.