Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 2021-03-22 au 2021-03-26

Série 09 du lundi 22 mars 2021

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \ln(|x_1| + |x_2|), \text{ si } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, \text{ si } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases} \tag{1}$$

Montrer que f est de classe C^1.

Solution :

Rappelons que $|\cdot|$ est dérivable en $\mathbb{R}^*$, de dérivée : $\mathrm{sign} = x \mapsto x/|x|$.

Cas $(x_1, x_2) \neq (0,0)$**.**

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2 \ln(|x_1| + |x_2|) + \frac{|x_1| x_2}{|x_1| + |x_2|}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 \ln(|x_1| + |x_2|) + \frac{|x_2| x_1}{|x_1| + |x_2|}. \tag{3}$$

Cas $(x_1, x_2) = (0,0)$**.**

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{t \cdot 0 \cdot \ln(|t| + |0|) - 0}{t} = \lim_{t \to 0} 0 = 0, \tag{4}$$

puis, en échangeant les rôles de x_1 et x_2,

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0 \tag{5}$$

Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}, \mathbb{R})$. De plus, pour $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ et $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, on a :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) \right| = \left| x_2 \ln(|x_1| + |x_2|) + \frac{|x_1| x_2}{|x_1| + |x_2|} \right| \leqslant r |\ln(2r)| + r, \tag{6}$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) \right| \leqslant r |\ln(2r)| + r. \tag{7}$$

Puisque $\lim_{r \to 0^+} (r \ln(2r) + r) = 0$, le théorème des deux gendarmes assure que, $\forall i \in \{1, 2\}$,

$$\lim_{(x,y) \to \mathbf{0}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0,0). \tag{8}$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, i.e. $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ et soit $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ les trois fonctions données par :

$$
\begin{aligned}
g_1(y_1, y_2, y_3) &= y_1 \cos y_2 \sin y_3, && (9)\\
g_2(y_1, y_2, y_3) &= y_1 \sin y_2 \sin y_3, && (10)\\
g_3(y_1, y_2, y_3) &= y_1 \cos y_3. && (11)
\end{aligned}
$$

On définit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ comme $F(y_1, y_2, y_3) = f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))$ où

$$
\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = (g_1(\boldsymbol{y}), g_2(\boldsymbol{y}), g_3(\boldsymbol{y})) = (g_1(y_1, y_2, y_3), g_2(y_1, y_2, y_3), g_3(y_1, y_2, y_3)). \tag{12}
$$

1) Calculer explicitement $F(\boldsymbol{y})$.
2) Calculer $\nabla F(\boldsymbol{a})$ où $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.
3) Vérifier, dans ce cas particulier, que $\forall k \in \{1, 2, 3\}$,

$$
\frac{\partial F}{\partial y_k}(\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})) \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(\boldsymbol{y}). \tag{13}
$$

Solution :

1) On vérifie facilement que, pour tout $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$
F(\boldsymbol{y}) = g_1(\boldsymbol{y})^2 + g_2(\boldsymbol{y})^2 + g_3(\boldsymbol{y})^2 = y_1^2. \tag{14}
$$

2) Pour tout $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, on a donc

$$
\nabla F(\boldsymbol{a})^\top = \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial F}{\partial y_2}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial F}{\partial y_3}(\boldsymbol{a}) \right) = (2a_1, 0, 0). \tag{15}
$$

3) On a $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) = 2x_1$, $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) = 2x_2$ et $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) = 2x_3$, donc

$$
\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})^\top = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}), \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) \right) = (2x_1, 2x_2, 2x_3). \tag{16}
$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{y}) = \cos y_2 \sin y_3 \ ; && \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(\boldsymbol{y}) = -y_1 \sin y_2 \sin y_3 \ ; && \frac{\partial g_1}{\partial y_3}(\boldsymbol{y}) = y_1 \cos y_2 \cos y_3 \ ; && (17)\\
&\frac{\partial g_2}{\partial y_1}(\boldsymbol{y}) = \sin y_2 \sin y_3 \ ; && \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(\boldsymbol{y}) = y_1 \cos y_2 \sin y_3 \ ; && \frac{\partial g_2}{\partial y_3}(\boldsymbol{y}) = y_1 \sin y_2 \cos y_3 \ ; && (18)\\
&\frac{\partial g_3}{\partial y_1}(\boldsymbol{y}) = \cos y_3 \ ; && \frac{\partial g_3}{\partial y_2}(\boldsymbol{y}) = 0 \ ; && \frac{\partial g_3}{\partial y_3}(\boldsymbol{y}) = -y_1 \sin y_3. && (19)
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_k}\Big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\Big) \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(\boldsymbol{y}) &= 2g_1(\boldsymbol{y}) \cos y_2 \sin y_3 + 2g_2(\boldsymbol{y}) \sin y_2 \sin y_3 + 2g_3(\boldsymbol{y}) \cos y_3 && (20)\\
&= 2y_1 \cos^2 y_2 \sin^2 y_3 + 2y_1 \sin^2 y_2 \sin^2 y_3 + 2y_1 \cos^2 y_3 && (21)\\
&= 2y_1 = \frac{\partial F}{\partial y_1}(\boldsymbol{y}) \ ; && (22)
\end{aligned}
$$

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_k}\Big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\Big)\frac{\partial g_k}{\partial y_2}(\boldsymbol{y}) = 2g_1(\boldsymbol{y})(-y_1 \sin y_2 \sin y_3) + 2g_2(\boldsymbol{y})y_1 \cos y_2 \sin y_3 + 2g_3(\boldsymbol{y}) \times 0 \tag{23}$$

$$= 2(y_1 \cos y_2 \sin y_3)(-y_1 \sin y_2 \sin y_3) + 2(y_1 \sin y_2 \sin y_3)(y_1 \cos y_2 \sin y_3) \tag{24}$$

$$= 0 = \frac{\partial F}{\partial y_2}(\boldsymbol{y})\ ; \tag{25}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_k}\Big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\Big)\frac{\partial g_k}{\partial y_3}(\boldsymbol{y}) = 2g_1(\boldsymbol{y})y_1 \cos y_2 \cos y_3 + 2g_2(\boldsymbol{y})y_1 \sin y_2 \cos y_3 + 2g_3(\boldsymbol{y})(-y_1 \sin y_3) \tag{26}$$

$$= 2(y_1 \cos y_2 \sin y_3)(y_1 \cos y_2 \cos y_3) + 2(y_1 \sin y_2 \sin y_3)(y_1 \sin y_2 \cos y_3) - 2y_1 \cos y_3(y_1 \sin y_3) \tag{27}$$

$$= 0 = \frac{\partial F}{\partial y_3}(\boldsymbol{y}). \tag{28}$$

La formule de dérivation de fonctions composées est donc bien vérifiée dans ce cas particulier.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On note $F := f \circ \|\cdot\|$, c'est-à-dire

$$F : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto f\Big(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\Big) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Calculer le gradient $\nabla F(\boldsymbol{x})$ en tout point $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Solution :

Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $k \in \{1, 2, 3\}$. Par le théorème de dérivation des fonctions composées,

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) = f'(\|\boldsymbol{x}\|)\frac{x_k}{\|\boldsymbol{x}\|}. \tag{30}$$

Ainsi,

$$\nabla F(\boldsymbol{x}) = f'(\|\boldsymbol{x}\|)\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}. \tag{31}$$

Exercice 4.

Soit $\boldsymbol{f} \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une application qui satisfait $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))) = \boldsymbol{x}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ est inversible en tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Solution :

Soit $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}$, qui vérifie $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. La formule de dérivation de fonctions composées donne

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \mathrm{D}\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{32}$$

qui est le produit matriciel de deux matrices carrées $n \times n$ qui dépendent de $\boldsymbol{x}$:

$$\mathrm{D}\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x})B(\boldsymbol{x}). \tag{33}$$

D'autre part $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ est l'application identité sur $\mathbb{R}^n$ et donc $\mathrm{D}(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \mathbb{I}$ (la matrice constante identité). Comme $A(\boldsymbol{x})B(\boldsymbol{x}) = \mathbb{I}$, la matrice $B(\boldsymbol{x}) = \mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ est inversible.