Série 1

David Wiedemann

20 septembre 2020

Lemme 1. *On montre d'abord que :*

$$\forall a(t), b(t) \in \mathbb{R}[t], \deg(ab) = \deg(a) + \deg(b)$$

Démonstration. Pour alléger la notation, on pose que :$deg(a(t)) = A$ et $deg(b(t)) = B$.

$$\begin{aligned}
a(t) \cdot b(t) &= \left(\sum_{i=0}^{A} a_i t^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{B} b_j t^j\right) \\
&= a_A b_B t^A t^B \\
&+ a_A t^A \sum_{j=0}^{B-1} b_j t^j \\
&+ b_B t^B \sum_{i=0}^{A-1} a_i t^i \\
&+ \left(\sum_{i=0}^{A-1} a_i t^i\right) \left(\sum_{j=0}^{B-1} b_j t^j\right)
\end{aligned}$$

Ici, on peut clairement voir que le terme $a_A b_B t^A t^B = a_A b_B t^{A+B}$ est du plus haut degré, et donc le lemme est prouvé. □

Lemme 2. *Soit* $a(t), b(t) \in \mathbb{R}[t]$ *et* $\deg(a(t)) > \deg(b(t))$ *alors* $deg(a(t) + b(t)) \leq \deg(a(t))$.

On peut donc finalement montrer que la division Euclidienne dans $\mathbb{R}[t]$ existe et est unique.

Démonstration.
Unicité
Supposons par l'absurde que $\exists b, r, b', r' \in \mathbb{R}[t]$ et $\deg(r'), \deg(r) < \deg(q)$,

tel que :

$$\begin{aligned}
a(t) &= q(t) \cdot b(t) + r(t) \\
&= q(t)b'(t) + r'(t) \\
0 &= q(t)(b(t) - b'(t)) + \underbrace{(r(t) - r'(t))}_{:=r''}
\end{aligned}$$

Sans perte de généralité, on peut également assumer que $\deg(r) \geq \deg(r')$.
On utilise maintenant le lemme 2 pour remarquer que

$$\deg(r''(t)) \leq \deg(r(t)) < \deg(q(t))$$

$$q(t)(b(t) - b'(t)) = 0$$

et donc que $b(t) - b'(t) = 0$, donc $b(t)$ est unique.
Donc

$$\begin{aligned}
q(t)(b(t) - b'(t)) + (r'(t) - r(t)) &= 0 \\
r'(t) - r(t) &= 0 \\
r'(t) &= r(t)
\end{aligned}$$

Donc $b(t)$ et $r(t)$ sont uniques.

Existence
On procede par induction sur le degre de $a(t)$.
Clairement si $\deg(a(t)) = 0$ et $\deg(q(t)) = 0$, alors $a(t) = k_1$ et $q(t) = k_2$, alors

$$b(t) = \frac{k_1}{k_2} \Rightarrow a(t) = b(t) \cdot q(t) + 0.$$

Donc $r(t) = 0$.
Si $\deg(q(t)) > 0$, alors

$$b(t) = 0 \text{ et } r(t) = a(t) \Rightarrow a(t) = q(t) \cdot 0 + r(t).$$

Par recurrence, supposons que le cas $\deg(a(t)) = n$ est vrai et montrons pour $\deg(a(t)) = n + 1$.
Posons que $a(t) = k(t) + a_{n+1}t^{n+1}$, avec $\deg(k(t)) = n$ et que $q(t) = q'(t) + q_m t^m$, alors Soit, $\deg(q(t)) > \deg(a(t))$, dans ce cas, il suffit de poser que $b(t) = 0$ et que $r(t) = a(t)$.

Supposons donc que $\deg(a(t)) \geq \deg(q(t))$, on peut ecrire :

$$a(t) = \frac{a_{n+1}}{q_m} t^{n+1-m} q(t) - \frac{a_n}{q_m} t^{n-m+1} (q'(t)) + k(t)$$

Dans cette expression, on peut voir que

$$\deg\left(\frac{a_n}{q_m}t^{n-m+1}q'(t)\right) < n+1$$

En effet, le degre de $q'(t)$ est au pire $m-1$, donc par le lemme 1, le terme de plus haut degre sera de degre $n-m+1+m-1=n$.
Donc le terme ci-dessus $\frac{a_n}{q_m}t^{n-m+1}q'(t)$ admet, par hypothese de recurrence, $c(t)$ et $r_c(t)$ tel que

$$\frac{a_n}{q_m}t^{n-m+1}q'(t) = c(t)\cdot q(t) + r_c(t)$$

Le degre de $k(t)$ est aussi inferieur a $n+1$, et donc, par le meme raisonnement, $\exists d(t), r_d(t)$ tel que $k(t) = q(t)\cdot d(t) + r_d(t)$.
On a donc

$$\begin{aligned}
a(t) &= \frac{a_{n+1}}{q_m}t^{n+1-m}q(t) - \frac{a_n}{q_m}t^{n-m+1}(q'(t)) + k(t)\\
&= \frac{a_{n+1}}{q_m}t^{n+1-m}q(t) - c(t)\cdot q(t) - r_c(t) + q(t)\cdot d(t) + r_d(t)\\
&= q(t)\left(\frac{a_{n+1}}{q_m}t^{n+1-m} - c(t) + d(t)\right) - r_c(t) + r_d(t)
\end{aligned}$$

$\square$