Série 4

David Wiedemann

12 octobre 2020

1

Il suffit de résoudre le système d'équations.
On résout par substitution.
Si $b = 0$:
On a donc que $ad = \pm 1$

$$\begin{cases} ax + cy = m \\ bx + dy = n \end{cases} \quad \begin{cases} adx + dcy = dm \\ -bcx - dcy = -cn \end{cases}$$

On peut additionner les deux équations, en simplifiant on obtient

$$x = \frac{dm - cn}{\Delta} = \pm(dm - cn)$$

De même, on obtient que

$$\begin{cases} ax + cy = m \\ bx + dy = n \end{cases} \quad \begin{cases} -abx - bcy = -bm \\ abx + ady = an \end{cases} \qquad \text{et donc } y = \frac{an - bm}{\Delta} = \pm(an - bm)$$

2

Ce résultat suit directement du fait que $\mathbb{Z}$ est un anneaux, et donc stable par la multiplication, l'addition et la soustraction.
Par hypothèse, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, donc $\pm(an - bm)$ et $\pm(dm - cn) \in \mathbb{Z}$ et donc $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

3

Celà suit directement de la partie 1, en effet, soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, alors, en résolvant le système d'équations de la partie 1, on peut trouver des coefficients $x, y \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x(a, b) + y(c, d) = (n, m)$$

Donc tout élément de $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ s'exprime comme combinaison linéaire de (a, b) et (c, d), donc $\langle\{(a, b), (c, d)\}\rangle = \mathbb{Z}^2$

4

Car $\Delta \neq 0$, on peut toujours encore admettre les solutions données dans la partie 1.
Supposons, par l'absurde que,

$$\langle\{(a,b),(c,d)\}\rangle = \mathbb{Z}^2$$

et que $\Delta = ad - bc \neq \pm 1$.
Donc, $\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2$, il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tel que $x \cdot (a,b) + y \cdot (c,d) = (m,n)$.
Par la partie 1, on a que

$$x = \frac{dm - cn}{\Delta} \text{ et } y = \frac{an - bm}{\Delta}$$

Pour que $x, y \in \mathbb{Z}$, il faut que $\Delta | dm - cn$ et que $\Delta | an - bm$ et ceci pour toutes les valeurs de m et n, donc en particulier :

$$\begin{aligned} &\Delta | d, \quad (m = 1, n = 0) \\ &\Delta | c, \quad (m = 0, n = -1) \\ &\Delta | a, \quad (m = 0, n = 1) \\ &\Delta | b, \quad (m = -1, n = 0) \end{aligned}$$

Donc, il existe $a', b', c', d' \in \mathbb{Z}$ tel que a

$$\begin{aligned} c = \Delta \cdot c', \quad a = \Delta \cdot a' \\ b = \Delta \cdot b', \quad d = \Delta \cdot d' \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \Delta &= ad - bc \\ \Delta &= \Delta^2 (a'd' - b'c') \\ 1 &= \Delta (a'd' - b'c') \\ \frac{1}{\Delta} &= (a'd' - b'c') \end{aligned}$$

Or, par hypothèse, $\Delta \neq 1, -1, 0$ et donc $a'd' - b'c'$ n'est pas entier.
Donc, $\langle\{(a,b),(c,d)\}\rangle$ n'engendre pas $\mathbb{Z}^2$