GEOM DIFF

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Intro

Wed 22 Sep

1 Rappels de geometrie euclidienne

Definition 1 (Espace Euclidien)
Un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel $\mathbb{E}^n$ sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire $\langle\cdot\rangle : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ symmetrique, defini positif.

Le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ est $\langle x, y\rangle = \sum_i x_i y_i (\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij})$.

Proposition 1 (Cauchy-Schwartz)
$\forall x, y \in \mathbb{E}^n, \langle x, y\rangle \leq \|x\| \, \|y\|$.

Remarque
La norme determine le produit scalaire via les formules de polarisation

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

1.1 Proprietes de la norme

— $\|x\| \geq 0 \forall x \in \mathbb{E}^n$
— $\|x\| = 0 \iff x = 0$
— $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
— $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Definition 2
— *Si $x, y \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}$, on definit l'angle $\theta \in [0, \pi]$ par $\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} \in [-1, 1]$ (par Cauchy-Schwarz) .*
— *On a $\langle x, y\rangle = \|x\| \, \|y\| \cos\theta$*

La distance entre $x, y \in \mathbb{E}^n$ est $d(x, y) = \|y - x\|$ $(\mathbb{E}^n, d)$ est un espace metrique.
Les proprietes suivantes sont equivalentes
— $x \perp y$
— $\theta = \frac{\pi}{2}$
— $\|x - y\| = \|x + y\|$
— $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$

2 Isometries et Similitudes

Definition 3 (similitude)
Une application $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ est une similitude de rapport $\lambda > 0$ si f est bijective et

$$d(f(x), f(y)) = \lambda d(x, y)$$

Si $\lambda = 1$, on dit que f est une isometrie.

Theorème 3
Si $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ est une similitude, alors il existe $b \in \mathbb{E}^n$ et $g : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ lineaire tel que

$$f(x) = g(x) + b$$

Remarque
$b = f(0)$ *et* f *lineaire* $\iff f(0) = 0$

Preuve
On utilisera le theoreme fondamental de la geometrie affine :
Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et $f : V \to V$ une application bijective.
Alors f est affine si et seulement si f preserve les droites.
On ne donne pas la preuve mais une intuition : on pose $g(x) = f(x) - b(b = f(0))$, donc $g(0) = 0$ et g preserve les droites.
Soit $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ une similitude de $\mathbb{E}^n$. On affirme que f preserve les droites

$$x, y, z \in \mathbb{E}^n \Rightarrow f(x), f(y), f(z)$$

quitte a renommer les points x, y, z, on a

$$x, y, z \text{ alignes } \iff d(x,z) = d(x,y) + d(y,z) \iff d(f(x), f(z)) = d(f(x), f(y)) + d(f(y), f(z))$$

Donc f affine implique $f(x) = g(x) + b$ ($b = f(0), g$ lineaire).
Il reste a voir que g est une λ-similitude $\Rightarrow$ immediat a verifier. $\square$

Corollaire 5
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une similitude de rapport $\lambda > 0$ si et seulement si il existe $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in M_n(\mathbb{R}), A^T \cdot A = I$ tel que

$$f(x) = \lambda A x + b$$

Preuve

$$\begin{aligned}\langle g(e_i), g(e_j) \rangle &= \frac{1}{4} \|g(e_i) + g(e_j)\|^2 - \|g(e_i) - g(e_j)\|^2 \\ &= \frac{1}{4}(\|g(e_i + e_j)\|^2 - \|g(e_i - e_j)\|^2) \\ &= \lambda^2 \langle e_i, e_j \rangle = \lambda^2 \delta_{ij}\end{aligned}$$

Soit A la matrice de g, alors $g(x) = Ax$, on a

$$\lambda^2 \delta_{ij} = \langle Ae_i, Ae_j \rangle$$

$$= \left\langle \sum_i a_{ij} e_i, \sum_i a_{ij} e_i \right\rangle$$
$$= \sum_i \sum_j a_{ir} a_{js} \delta_{rs} = \sum_r a_{ir} a_{jr} \qquad \square$$

2.1 Proprietes de base des matrices orthogonales O_n

Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ les proprietes suivantes sont equivalentes

— $A \in O_n$
— A inversible avec $A^{-1} = A^T$
— Les collonnes/lignes de A forment une base orthonormee.
— $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$
— $\|Ax\| = \|x\|$
— $f(x) = Ax + b$ est une isometrie pour l'espace euclidien pour tout b

Remarque
Si $A \in O_n \Rightarrow \det A = \pm 1$ *et* $\det : O_n \to \{\pm 1\}$

Definition 4 (Groupe special orthogonal)
On definit
$$SO(n) = O_n \cap SL_n(\mathbb{R})$$

Definition 5
Une transformation affine $f : V \to V$, V un $\mathbb{R}$ -ev est directe (ou qu'elle preserve l'orientation) si son determinant est positif (ou le determinant de la partie lineaire de f .) Une isometrie directe s'appelle un deplacement de $\mathbb{E}^n$ si $f(x) = Ax + b, A \in SO(n)$

Remarque

$$SE(n) = SO(n) \rtimes \mathbb{R}^n$$

2.2 Etude de O_2

Proposition 8
Une matrice $A \in O_2$ s'ecrit
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
si $\det A = 1$*, ou*
$$S_\phi = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}$$

Preuve
$A \in O_2$ si et seulement siles colonnes de A forment une base orthonormee. Donc il existe θ tel que la 1ere colonne est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ et la forme de la 2eme colonne en suit. □

2.3 Etude de O_3

Theorème 9 (Theoreme d'Euler)
Tout deplacement (isometrie qui preserve l'orientation) qui fixe un point, fixe un axe et c'est une rotation autour de cet axe.

Preuve
On identifie l'espace euclidien a $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, qui fixe un point on suppose que $f(0) = 0$.
On a $f(x) = Ax$.
On affirme qu'il existe $U \in \mathbb{R}^3, U \neq 0$ tel que $Au = u$.
En effet 1 est valeur propre de A car $\det(A - \mathrm{Id}) = 0$ parce que

$$\det(A - \mathrm{Id}) = \det(A^T)\det(A - \mathrm{Id}) = \det(\mathrm{Id} - A^T) = \det(\mathrm{Id} - A) = (-1)^3 \det(A - \mathrm{Id})$$

□

Lecture 2: Courbes

Wed 29 Sep

3 Geometrie des courbes

Une courbe peut etre concue comme :
- Le lieu des points geometriques qui satisfont a une certaine contrainte/-condition
- La trajectoire d'un point qui se deplace dans le plan ou l'espace.
- Une courbe peut etre engendree par un mechanisme
- Une courbe peut correspondre a un phenome optique.

Le premier point de vue va conduire a une description implicite de la courbe par une equation dans $\mathbb{R}^2$ ou deux equations dans l'espace.

Definition 6
Une courbe algebrique dans le plan est un ensemble du type $\Gamma : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = 0\}$.
La courbe est algebrique si $f \in \mathbb{R}[x,y]$

Definition 7 (Courbe parametrique)
Une courbe parametrique dans $\mathbb{R}^n$ est une application continue :

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$$

avec $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, $u \in I$ est le parametre.

L'image de γ est la trace de γ

Definition 8

- *La courbe α est de classe $C^k (k \geq 0)$ si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^k par $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \ldots, \alpha_n(u))$ et $\alpha_j : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^k .*
- *Si α est C^1 et $u_0 \in I$, le vecteur vitesse est*
$$\dot{\alpha}(u_0) = \frac{d\alpha}{du}(u_0)$$
L'acceleration sera $\ddot{\alpha}(u_0) = \frac{d^2\alpha}{du}$
- *La droite tangente a γ en u_0 est la droite par $\alpha(u_0)$ et de direction $\dot{\alpha}(u_0)$*
$$T_{\alpha,u_0} : \lambda \mapsto \alpha(u_0) + \lambda\dot{\alpha}(u_0)$$
- *La vitesse de α en u_0 est $V_\alpha(u_0)$ (en supposant α differentiable en u_0)*
- *Le point $\alpha(u_0)$ est regulier si $\dot{\alpha}(u_0)$ et singulier si $\dot{\alpha}(u_0)$*
- *Le point $\alpha(u_2)$ est biregulier si $\alpha \in C^2$ et $\dot{\alpha}(u_0), \ddot{\alpha}(u_0)$ sont lineairement independants .*
- *Si α est bireguliere en u_0 , le plan par $\alpha(u_0)$ en direction $\dot{\alpha}(u_0), \ddot{\alpha}(u_0)$ est le plan osculateur de α en u_0.*

3.1 Exemples de courbes parametrees

- La cubique
$$\alpha(u) = (au, bu^2, cu^3)$$
- $$\beta(u) = (u^2, \ldots, u^{n+1})$$
- La droite en parametrage affine, par p et q est
$$\gamma(t) = p + t(q - p)$$
- Le cercle C de centre $p \in \mathbb{R}^n$ dans un plan (affine) $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ de rayon r se parametrise
$$C(t) = p + r\left(\cos(\omega t)b_1 + \sin(\omega t)b_2\right)$$
ou $\{p, b_1, b_2\}$ est une repere affine orthonorme de Π.
- L'helice circulaire droite est
$$\gamma(u) = (a\cos(u), a\sin(u), bu)$$

Definition 9 (Longueur d'une courbe)
La longueur d'une courbe $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 est
$$l(\gamma) = \int_a^b V_\gamma(u)du$$

Proposition 10
La longueur verifie les proprietes suivantes :
- *Additivite : Si* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *est une courbe* C^1*, alors* $l(\gamma|_{[a,c]} l(\gamma|_{[c,b]}) l(\gamma_{[a,b]})$
- *La longueur est invariante par isometrie.*

- *Pour* f *une similitude de rapport* $\lambda > 0$*, alors*
$$l(f \circ \gamma) = \lambda l(\gamma)$$
-
$$l(\gamma_{[a,b]}) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$$
avec egalite si et seulement si γ*est le segment* $[\gamma(a), \gamma(b)]$.

Preuve
- *Suit de*
$$l(\gamma_{[a,b]}) = \int_a^b V_\gamma(u)du = \int_a^c V_\gamma(u)du + \int_c^b V_\gamma(u)du$$
- *On sait que* $f(x) = \lambda Ax + b$ *,* A *orthogonal, donc pour* $\tilde{\gamma}(u) = f(\gamma(u))$
$$\tilde{\gamma'} = \lambda A \gamma'(u)$$
$$l(\tilde{\gamma}) = \int_a^b V_{\tilde{\gamma}}(u)du = \lambda l(\gamma)$$
- *Soit* $p = \gamma(a), q = \gamma(b)$.
On note $w = \frac{q-p}{\|q-p\|}$ *et on definit*
$$g : [a,b] \to \mathbb{R} \quad g(u) = \langle \gamma(u) - p, w \rangle$$
Alors
$$\frac{dg}{du} = \langle \dot{\gamma}(u), w \rangle \leq \|\dot{\gamma}(u)\| \, \|w\| = V_\gamma(u)$$
Ainsi,
$$\int_a^b \frac{dg}{du} du = g(b) - g(a) = \langle q - p, w \rangle = q - p$$
□

3.2 Champs de vecteurs le long d'une courbe

Definition 10 (Champ vectoriel)
Un champ de vecteurs le long d'une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *est la donnee* $\forall u \in I$ *d'un vecteur* $W(u) = \sum_j w_j(u) e_j$.
Ce champ est de classe C^k *si* $w_j : I \to \mathbb{R}$ *est de classe* C^k.

Definition 11 (Le vecteur tangent)
Si γ est reguliere on definit

$$T_\gamma(u) = \frac{\dot\alpha(u)}{V_\gamma(u)}$$

Si γ est bireguliere, alors le champ normal principal est donne par

$$N_\gamma(u) = \frac{\ddot\alpha(u) - \langle \ddot\alpha(u), t\rangle\, t}{\|\ddot\alpha(u) - \langle \ddot\alpha(u), t\rangle\, t\|}$$

Proposition 11 (Regle de Leibniz)

—

$$\frac{d}{du}\langle Z(u), W(u)\rangle = \left\langle \dot Z(u), W(u)\right\rangle + \left\langle Z(u), \dot W(u)\right\rangle$$

Corollaire 12

— *Si* $\langle Z(u), W(u)\rangle = c$ *, alors*

$$\left\langle \dot W, Z\right\rangle = -\left\langle W, \dot Z\right\rangle$$

— *Si* $\|w\| = c \Rightarrow \langle \dot w, w\rangle = 0$

Lecture 3: Reparametrage

Wed 06 Oct

3.3 Reparametrage d'une courbe

On veut formaliser la notion que deux courbes α, β de $\mathbb{R}^n$ representent la "meme" courbe geometrique.
On veut $\alpha(u) = \beta(t)$ avec $u = h(t)(= u(t))$.
Plus precisement, si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ et $\beta : J \to \mathbb{R}^n$ ($u \in I$, $t \in J$), alors α est un reparametrage si il existe un diffeomorphisme $h : J \to I$, $t \mapsto u = u(t) = h(t)$, tel que $\alpha = \beta \circ h$.

Remarque
La condition que deux courbes sont un reparametrage l'une de l'autre est une relation d'equivalence et une classe d'equivalence est une courbe geometrique

Definition 12 (Quantite)
Une quantite ou une propriete d'une courbe est geometrique si elle est invariante par reparametrage.
Sinon la quantite est dite cinematique.

Exemple

1. *La trace d'une courbe est une propriete geometrique*

2. *La notion de regularite, biregularite sont geometriques*
3. *Le plan osculateur est une notion geometrique.*
4. *La longueur d'une courbe est geometrique.*

Preuve
On suppose $\alpha : I \to \mathbb{R}^n, \beta : J \to \mathbb{R}^n,\ \alpha(u) = \beta(t), t = h(u)$.
On a

$$l_\alpha = \int_I V_\alpha(u)du, l_\beta = \int_J V_\beta(t)dt$$

avec $V_\alpha = \left\| \frac{d\alpha}{du} \right\|, V_\beta = \left\| \frac{d\beta}{du}\frac{du}{dt} \right\| = |\frac{du}{dt}|V_\alpha(u)$.
Donc $V_\beta(t)dt = \pm V_\alpha(u)du$ *et donc* $l_\beta = l_\alpha$. □

En general, si $S_\beta(t)$ est une quantite geometrique, alors $\frac{d}{dt}S_\beta$ n'est en general pas geometriuqe, mais $\frac{1}{V_\beta(t)}\frac{d}{dt}S_\beta$

Preuve
On a $S_\beta(t) = S_\alpha(u)$ *et* $\frac{1}{V_\beta(t)}\frac{d}{dt} = \frac{1}{V_\alpha(u)}\frac{d}{du}$ □

Exemple
Le vecteur unitaire tangent $\overrightarrow{T}_\beta(t)$ *est une quantite geometrique.*

Preuve
On a $T_\beta(t) = \frac{\dot\beta(t)}{\left\|\dot\beta(t)\right\|} = \frac{1}{V_\beta(t)}\frac{d\beta}{dt}$.
Ainsi, $T_\alpha(u) = \frac{1}{V_\alpha(u)}\frac{d\alpha}{du}$ □

Definition 13 (Derivation naturelle)
On definit

$$\frac{1}{V_\beta(t)}\frac{d}{dt}$$

comme etant la derivation naturelle le long de la courbe.

Contreexemples

La vitesse, le vecteur vitesse et l'acceleration sont des quantites cinematiques.

Definition 14
On dit que $V_\alpha(u)du$ *est la differentielle naturelle le long de la courbe*

Exemple

1. *Masse d'un fil metalique inhomogene.*
   La quantite utile est la densite lineaire de masse $\rho : I \to \mathbb{R}_+$.
   La masse sera alors $M = \int_I \rho(u)V_\alpha(u)du$
2. *Centre de gravite*

$$G = \frac{1}{M}\int_I \alpha(u)\rho(u)V_\alpha(u)du$$

Definition 15 (Abscisse Curviligne)
Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *une courbe reguliere et* $u_0 \in I$.
L'abscisse curviligne ou parametre naturel de α *par rapport au point initial* $\alpha(u_0)$ *est la fonction*

$$S = S_\alpha : I \to \mathbb{R}$$

definie par

$$S = \int_{u_0}^{u} V_\alpha(\zeta) d\zeta$$

On dit que α est parametree naturellement si $S_\alpha(u) = u \iff V_\alpha(u) = 1$

Proposition 17
Toute courbe C^1 *reguliere peut se reparmetriser natruellement.*

Preuve
Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, C^1 *reguliere et* $u_0 \in I$.
On pose

$$s = s(u) = \int_{u_0}^{u} V_\alpha(u) du$$

Alors la fonction s *definit un diffeomorphisme*

$$s : I \to J$$

□

4 Courbure d'une courbe

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe parametree reguliere de classe C^2.
Le vecteur de courbure est le champ le long de γ

$$\overrightarrow{K}_\gamma(u) = \frac{1}{V_\gamma(u)} \dot{\overrightarrow{T}}_\gamma(u)$$

La courbure de γ est alors la fonction

$$k_\gamma = \left\| \overrightarrow{K}_\gamma(u) \right\|$$

Remarque
Si γ *est parametree naturellement, alors*

$$k_\gamma(u) = \left\| \frac{d^2\gamma}{du^2} \right\|$$

Remarque
Le vecteur de courbure et la courbure sont des quantites geometriques.

Proposition 20 (Formule de l'acceleration)
Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^2, alors son acceleration est

$$\ddot{\gamma} = \dot{V}_\gamma(t) + V_\gamma^2(t)\overrightarrow{K}_\gamma(t)$$

Preuve
On a

$$\dot{\gamma}(t) = V_\gamma(t)\overrightarrow{T}_\gamma(t)$$

Donc

$$\ddot{\gamma} = \dot{V}_\gamma(t)\overrightarrow{T}_\gamma(t) + V_\gamma(t)\dot{\overrightarrow{T}}(t) = V'K + V^2K \qquad \square$$

Remarque
On a toujours $\overrightarrow{k} \perp \overrightarrow{T}$

Definition 16
Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ bireguliere de classe C^3.
On definit le repere mobile de Frenet de γ est le repere $\{\gamma(t), T, N_\gamma(t), B_\gamma(t)\}$ ou

$$T_\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}}{V_\gamma(t)}, \quad N_\gamma(t) = \frac{\ddot{\gamma} - \langle\dot{\gamma}, T\rangle T}{\|\ddot{\gamma} - \langle\dot{\gamma}, T\rangle T\|} \quad B = T \times N$$

Definition 17 (Torsion)
La torsion de γ est

$$\tau_\gamma(t) = \frac{1}{V_\gamma(t)}\left\langle \dot{B}, N \right\rangle$$

Theorème 22 (Formules de Serret-Frenet)

$$\begin{cases} \frac{1}{V_\gamma}\dot{T}_\gamma = \kappa_\gamma N \\ \frac{1}{V_\gamma}\dot{N} = -\kappa_\gamma T_\gamma + \tau_\gamma B_\gamma \\ \frac{1}{V_\gamma}\dot{B} = -\tau_\gamma N_\gamma \end{cases}$$

Preuve

1. *Par definition, du vecteur de courbure.*
2.
$$\frac{1}{V}N' = \frac{1}{V}\left(\langle N', T\rangle T + \langle N', B\rangle B\right)$$
   or
$$\begin{aligned} \langle N', T\rangle &= -\langle N, T'\rangle \\ \langle N', B\rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\langle N', B\rangle = V_\gamma$$

De meme

$$B' = \langle B', T\rangle\, T + \langle B', N\rangle\, N + \langle B', B\rangle\, B \qquad \square$$

Lecture 4: ...

Wed 13 Oct

Theorème 23
La courbure de γ est la variation naturelle de la direction de γ

Preuve
Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe C^2 que l'on suppose parametree naturellement.
On fixe $p = \gamma(s_0)$ et on note

$$\phi(s) = \phi_{s_0}(s) = (T_\gamma(s), \hat{T}_\gamma(s_0))$$

On a par trigonometrie elementaire que

$$\|T(s) - T(s_0)\| = 2\sin(\frac{\phi(s)}{2})$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to s_0+} \frac{\phi(s)-\phi(s_0)}{s-s_0} &= \lim_{s\to s_0} \frac{\phi(s)}{2\sin(\phi(s)/2)} \frac{2\sin(\frac{\phi(s)}{2})}{s-s_0} \\
&= \lim_{s\to s_0} \frac{\phi(s)}{2\sin(\frac{\phi(s)}{2})} \frac{\|T(s)-T(s_0)\|}{s-s_0} \\
&= \lim_{s\to s_0+} \left\| \frac{T(s)-T(s_0)}{s-s_0} \right\| = \kappa(s_0)
\end{aligned}$$

Donc on prouve que $\frac{d}{ds}|_{s_0+}\phi(s) = \kappa(s_0)$

4.1 Contact entre deux courbes

Definition 18 (Contact de courbes)
Soit $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^n$ deux courbes C^k.
Ces deux courbes ont un contact d'ordre k en $t_0 \in I$ si

$$\alpha(t_0) = \beta(t_0) \text{ et } \frac{d^n}{dt^n}\alpha(t) = \frac{d^n}{dt^n\beta(t)}$$

Theorème 24
α et β ont un contact d'ordre 2 en t_0 $\iff$

$$\alpha(t_0) = \beta(t_0), T_\alpha(t) = T_\beta(t), V_\alpha(t_0) = V_\beta(t_0)$$

et

$$\kappa_\alpha(t_0) = \kappa_\beta(t_0)$$

Definition 19 (Cercle osculateur)
Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *bireguliere et* $u_0 \in I$.
On appelle cercle osculateur de γ *en* u_0 *le cercle contenu dans le plan osculateur de* γ *et de centre et rayon*

$$p = \gamma(u_0) + \rho(u_0)\mathcal{N}_\gamma(u_0)$$

et rayon $\rho(u_0) = \frac{1}{\kappa_\gamma(u_0)}$

Proposition 25
Le cercle osculateur est l'unique cercle qui a un contact d'ordre 2.

5 Repere de Frenet

Definition 20 (Reguliere au sens de Frenet)
La courbe γ *est reguliere au sens de Frenet si* $\gamma \in C^2$ *et* γ *est bireguliere et* $u \to N_\gamma(u)$ *est* C^1.

Remarque

- *Si* γ *est bireguliere et* C^3*, alors* γ *est Frenet-reguliere.*
- *Si* γ *est frenet reguliere, alors* T_γ *et* B_γ *sont de classe* C^1 .

Si γ *est Frenet-reguliere, alors la torsion* $\tau_\gamma : I \to \mathbb{R}$ *est*

$$\tau_\gamma = \frac{1}{V_\gamma(u)} \left\langle \dot{N}, B_\gamma \right\rangle$$

Proposition 27
γ *est une courbe plane* $\iff \tau_\gamma = 0$

Preuve
Si γ *est plane, alors le plan osculateur est constant* $\iff B_\gamma$ *est constant* $\Rightarrow \dot{B}_\gamma = 0 \Rightarrow \tau_\gamma = 0$.
Supposons que $\tau_\gamma = 0$.
Soit $p = \gamma(u_0) \in \mathbb{R}^3$.
On definit

$$h(u) = \langle \gamma(u) - p, B_\gamma \rangle$$

Notons que $\dot{B}_\gamma = -\tau_\gamma N = 0$ *est constant.*
Donc

$$\frac{dh}{du} = \langle \dot{\gamma}(u), B \rangle = V_\gamma \langle T_\gamma, B \rangle = 0$$

Donc h est constant et donc $\langle \gamma(u), B\rangle = \langle p, B\rangle \, \forall u \in I$ qui est l'equation d'un plan. $\square$

Proposition 28
La torsion mesure la variation angulaire du plan osculateur, c'est a dire que si
$$\theta(s) = (B_\gamma(s), \hat{} B_\gamma(s_0))$$

Preuve
Alors
$$\frac{d}{ds}|_{s_0}\theta(s) = |\tau_\gamma(s_0)|$$
$\square$

On applique la meme preuve que Serret-Frenet.

Definition 21 (Courbe a pente constante)
Une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 est dite de pente constante si $\dot\gamma(u)$ fait un angle constant avec une direction fixe.

Proposition 29
Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ Frenet reguliere, alors γ est de pente constante $\iff$
$$\frac{\tau}{\kappa} = \text{ cste.}$$

Preuve
On suppose que γ est parametree naturellement et $\langle T_\gamma(s), A\rangle = a =$ constante .
$$0 = \frac{d}{ds}\langle T, A\rangle = \left\langle \dot T, A\right\rangle = \kappa \langle N, A\rangle$$
or $\kappa \neq 0$ donc $\langle N, A\rangle = 0$ ce qui implique que $b = \langle B, A\rangle$.
On a donc
$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{ds}\langle N, A\rangle &= \langle \kappa T - \tau B, A\rangle \\ &\iff \kappa\langle T, A\rangle = \tau\langle B, A\rangle \\ &\iff \frac{\tau}{\kappa} = \text{ constante} \end{aligned}$$
Supposons donc que $\frac{\tau}{\kappa} =$ constante .
On pose $\lambda = \frac{\tau}{\kappa}$ et $A = \lambda T + B$, alors
$$\langle T, A\rangle = \lambda\langle T, T\rangle + \langle B, T\rangle = \lambda = \text{ constant}$$
Verifions que A est constant, car
$$\frac{dA}{ds} = \lambda\dot T + \dot B = \lambda\kappa N - \tau N = 0$$
$\square$

5.1 Theoreme fondamental des courbes de $\mathbb{R}^3$

Etant donne deux fonctions continues sur l'intervalle I $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}$ *avec* $\kappa(s) > 0$.
Alors il existe une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *Frenet reguliere telle que sa courbure et sa torsion sont donnees par* κ *et* τ *ie.* $\kappa(s) = \kappa_\gamma(s), \tau(s) = \tau_\gamma(s) \forall s \in I$.
Cette courbe est unique a un deplacement pres.

Preuve
On prouve d'abord l'unicite.
On suppose que $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{R}^3$ *sont deux courbes Frenet regulieres, de vitesse* 1 *tel que* $\delta_{\gamma_1} = \delta_{\gamma_2} = \delta$ *et* $\kappa_{\gamma_1} = \kappa_{\gamma_2} = \kappa$.

Quitte a appliquer une translation et une rotation a γ_2*, on peut supposer que* $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$.

$$T_1(0) = T_2(0), N_1(0) = N_2(0), B_1(0) = B_2(0)$$

On note $F_i(s) \in SO(3)$ *la matrice dont les colonnes sont* T_i, N_i, B_i.
Alors on calcule

$$\frac{dF_i}{ds} = F_i(s)\Omega(s)$$

avec

$$\Omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

Cette equation matricielle est equivalente aux equations de Serret-Frenet.
On calcule

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(F_i(s)F_2(s)^{-1}) &= \frac{d}{ds}(F_1 F_2^T) \\ &= \dot{F}_1 F_2^T + F_1 \dot{F}_2^T \\ &= (F_1\Omega)F_2^T + F_1(F_2\Omega)^T \\ &= F_1\Omega F_2^T + F_1\Omega^T F_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or $F_1(0) \cdot F_2(0)^{-1} = \mathrm{Id}$ *et donc* $F_1(s) = F_2(s) \forall s \in I$.
Donc $T_1(s) = T_2(s) \forall s \in I$. *Donc* $\gamma_1' = \gamma_2'$ *et donc* $\gamma_1 = \gamma_2$.

Existence

Sont donnes $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}$*, on veut construire* γ.
Le theoreme de Cauchy-Lipschitz sur les edo donne l'existence d'une solution au probleme de Cauchy

$$\frac{dF}{ds} = F(s)\Omega(s), F(0) = \mathrm{Id}$$

On affirme que $F(s) \in SO(3) \forall s$.
En effet, on a $F(0)F(0)^T = \mathrm{Id}$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} F(s)F(s)^T &= \dot{F}F^T + F\dot{F}^T \\ &= F\Omega F^T - F\Omega^T F^T = 0 \qquad \square\end{aligned}$$

Et donc $F(s) \in O(3)$ et $F(s) \in SO(3)$ car l'application det *est continue.*
On pose donc $\gamma(s) = \int_0^s T(u)du$

Lecture 5: ...

Wed 20 Oct

6 Courbes dans le plan oriente

Definition 22
On dit que deux bases d'un ev reel de dimension finie.
On dit que deux bases ont la meme orientation si la matrice de changement de base a determinant positif.
C'est une relation d'equivalence appellee une "classe d'orientation"

Un espace vectoriel est oriente si on en a choisi une classe d'orientation.
L'orientation canonique de $\mathbb{R}^n$ est celle associee a la base canonique.

Definition 23 (Angle oriente)
L'angle oriente entre deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ dans un plan oriente est defini par $\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}} = \pm \widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}$ avec le signe + si $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right\}$ est une base positive (directe) et − sinon.

Definition 24 (L'operateur J)
On note $J = R_{+\frac{\pi}{2}}$ la rotation dans un plan oriente d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

Dans une base orthonormee directe, on a $J = R_{+\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Definition 25 (Produit exterieur)
Le produit exterieur de deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ dans un plan oriente est

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \left\langle \overrightarrow{a}, J\overrightarrow{b} \right\rangle$$

Remarque

1. *$a \wedge b = \|a\| \|b\| \sin\theta$, alors*
2. *Si on plonge $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \left\langle \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, e_3 \right\rangle$$

Definition 26
Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe de classe C^1, alors on definit le vecteur normal oriente a γ

$$N^{or}(u)$$

par la condition que

$$T_\gamma \wedge N^{or} > 0 \iff \{T, N^{or}\} \text{ est orthonormee directe}$$

On definit la courbure orientee d'une courbe reguliere de classe C^2 par

$$k(u) = \kappa^{or}(u) = \frac{1}{V}\left\langle \dot{T}, N^{or} \right\rangle$$

Definition 27
On dit qu'un arc de courbe γ de classe C^2 dnas un plan oriente est convexe si $k > 0$, concave si $k < 0$.
On dit que γ est une "spirale" si la courbure est non nulle et monotone.
Un point d'inflexion si la courbure change de signe en ce point.
Un point est un "sommet" si la derivee de la courbure change de signe

Remarque
Le graphe de $f(x)$ a un point d'inflexion en $f"(x) = 0$ et $f"(x)$ change de signe

Definition 28 (Fonction angulaire)
La fonction angulaire d'une courbe plane (dans un plan oriente).
Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe C^2.
On appelle fonction angulaire de γ la fonction

$$\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$$

verifiant

1. *ϕ est continue*
2. *$\phi(u) = \widehat{\dot\gamma(u), \overrightarrow{a}} \mod 2\pi$*

Remarque
Si on prend $\overrightarrow{a} = e_1$, alors

$$T = \frac{\dot\gamma}{\|\dot\gamma\|}$$

Proposition 33
La courbure orientee est la variation naturelle de la fonction angulaire.

Preuve
On a $T = (\cos\phi, \sin\phi)$, donc

$$N = (-\sin\phi, \cos\phi)$$

et de meme

$$k = \frac{1}{V}\left\langle \dot{T}, N \right\rangle \qquad \square$$

Theorème 34 (Theoreme fondamental des courbes planes)
Soit $k : [0, L] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors il existe une courbe γ : $[0, L] \to \mathbb{R}^2$, de classe C^2 de courbure $k(s)$ et de vitesse 1.
Cette courbe est unique a isometrie directe pres.

Preuve
Existence

La fonction $k : [0, L] \to \mathbb{R}$ est donnee. On pose

$$\phi(s) = \int_0^s k(u)du$$

Puis on pose $T(s) = (\cos\phi(s), \sin(\phi(s)))$, on a donc $N(s) = (-\sin(\phi(s))), \cos\phi(s)$.
On pose encore

$$X(s) = \int_0^s \cos(\phi(s))ds, Y(s) = \int_0^s \sin(\phi(s))ds$$

On pose enfin $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$.
L'existence est donc prouvee.
L'unicite vient de $\frac{d\phi}{ds} = k$ $\square$

Definition 29
On dit qu'une courbe $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est une courbe fermee de classe C^k si $\gamma(a) = \gamma(b)$ et les derivees coincident.

Une telle courbe s'appelle aussi courbe periodique, car on peut l'etendre a

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

Theorème 35 (Theoreme des 4 sommests)
Toute courbe plane C^2-fermee admet au moins 4 changement de signes de $\frac{dk}{du}$

Preuve
On montre le resultat dans le cas d'une courbe convexe.
Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe C^2-convexe. Alors on a $k(a) = k(b)$ et on note $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$.
On suppose $V_\gamma(s) = 1$, alors on a

$$\frac{dT}{ds} = kN$$

avec

$$T = (\dot{x}, \dot{y}), N = JT = (-\dot{y}, \dot{x})$$

Ainsi,

$$\ddot{x} = -k\dot{y}, \ddot{y} = k\dot{x}$$

On a alors

$$\int_a^b \dot{k}(s) = 0$$

et

$$\int_a^b k(s)\dot{y}(s)ds = -\int_a^b \ddot{y}(s)ds = 0$$

et

$$\int_a^b k(s)\dot{x}(s)ds = 0$$

Supposons que $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *est* C^2*-fermee avec deux changements de signe de* $\dot{k}(s)$*, par exemple* $\dot{k}(s) > 0$ *sur* (a, c) *et* $\dot{k}(s) < 0$ *sur* (c, b)*. Notons* $p = \gamma(a) = \gamma(b), q = \gamma(c)$*, soit*

$$h(x, y) = Ax + By + C = 0$$

l'equation de la droite par p *et* q*.*
Alors le signe de $\dot{k}(s)(Ax + By + C)$ *est constant.*
Mais

$$0 < \int_a^b f(s)ds = A\int_a^b \dot{k}x(s)ds + B\int_a^b \dot{k}y(s)ds + C\int_a^b \dot{k}ds = 0$$

□

Contradiction.

7 Surfaces

7.1 Le concept de variete

Definition 30 (Variete)
Une variete topologique de dimension $n \in \mathbb{N}$ *est un espace topologique* M *tel que*

1. *Chaque point* $p \in M$ *admet un voisinage homeomorphe a un ouvert de* $\mathbb{R}^n$
2. *L'espace topologique* M *est separe (de Hausdorff) et admet une base denombrable d'ouvert*

Definition 31 (Surface topologique)
Une surface topologique est une variete de dimension 2.

Lecture 6: varietes

Wed 27 Oct

7.2 Sous-Varietes de $\mathbb{R}^n$

Rappels :

Definition 32
Si $U \subset \mathbb{R}^n$, on note $C^k(U, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $f : U \to \mathbb{R}^n$ qui sont continues et tel que $\forall j = 1, 2, \ldots, n$ les derivees partielles

$$\frac{\partial^k}{\partial x^{i_1} \ldots, \partial x^{i_k}}$$

existent et sont continues.

Definition 33
Un diffeomorphisme de classe C^k entre deux ouverts $U, V \subset \mathbb{R}^n$ est une application $f : U \to V$ tel que

1. *f est bijective*
2. *f et f^{-1} sont de classe C^k*

Definition 34 (Systeme de coordonnees)
On appelle systeme de coordonnees (generalisees ou curviligne) sur un ouvert U la donnee de n fonctions

$$y_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

qui verifient que la fonction $f = (y_1, \ldots, y_n)$ est un diffeomorphisme de classe C^k.

Definition 35 (Sous-Variete)
Un sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variete differentiable de classe C^k si $\forall p \in M$, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ tel que $p \in U$ et un diffeomorphisme $f : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ tel que $f(M \cap U) = V \cap \mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{R}^m$ est plonge dans $\mathbb{R}^n$.
Autre point de vue :
M est une sous-variete de classe C^k si $\forall p \in M$ il existe un systeme de coordonnees curvilignes de classe C^k $y_1, \ldots, y_n$ definie sur un voisinage U de p tel que $q \in U \cap M \iff y_{m+1}(q) = \ldots = y_n(q) = 0$.
On regarde $y_j(x) = 0 (j = m + 1, \ldots, n)$ comme un systeme d'equations locales qui definissent la sous-variete.

Definition 36 (Dimension d'une sous variete)
m tel que defini ci-dessus est la dimension de M et $n - m$ est la codimension de $M \subset \mathbb{R}^n$.

7.2.1 Rappel de calcul differentiel

Definition 37
Une application $f : U \to \mathbb{R}^n$ *definie sur un ouvert* $U \subset \mathbb{R}^m$ *est differentiable (au sens de Frechet) en* $p \in U$ *s'il existe une application lineaire* $l : R^m \to \mathbb{R}^n$ *tel que*

$$\lim \frac{f(p+h) - f(p) - l(h)}{|h|} = 0$$

7.3 Le theoreme du rang constant

Si $A \in M_{n\times m}(K)$ est de rang r alors il existe des matrices inversibles $P \in GL_n(K), Q \in GL_m(K)$ tel que

$$PAQ^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Theorème 36 (Theoreme du rang constant)
La meme chose se produit localement pour une application differentiable, ie. il existe une reparametrisation tel que tout fonction f *s'ecrit comme*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_r, \ldots)$$

Definition 38
On note

$$\mathrm{Rang}(f,p) = \mathrm{Rang}_f(p) = \mathrm{Rang}(df_p)$$

Definition 39 (Rang maximal)

1. f *est de rang maximal en* p *si*

$$\mathrm{Rang}_f(p) = \min\{n, m\}$$

2. f *est une submersion si* $\mathrm{Rang}_f(p) = n \forall p \in U \forall p \in U \iff df_p$ *est surjective* $\forall p$
3. f *est une immersion* $\iff \mathrm{Rang}_f(p) = m \iff df_p$ *est injectif* $\forall p \in U$

Lemme 37
Si $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ *alors la fonction* $U \to \mathbb{N}, p \mapsto \mathrm{Rang}_f(p)$ *est semi-continue inferieurement.*

Preuve
Si $\mathrm{Rang}_f(p) > \alpha$, *alirs il existe une sous matrice* S_p *de la matrice jacobienne de taille* $r \times r$ *tel que* $\det(S_p) \neq 0$ *par continuite des* $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ *on a* $\det S_q \neq 0$ *pour* q *assez proche de* $p \Rightarrow \mathrm{Rang}_f(p) \geq r > \alpha$ ☐

Theorème 38 (Theoreme du rang constant)
Soit $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n), (U \subset \mathbb{R}^m)$ *avec* $k \geq 1$. *Supposons que* $\mathrm{Rang}_f(p)$ *est constant.*
Alors pour tout point $p \in U$ *il existe des voisinages* $V \subset U$ *de* p *et* W *de* $q = f(p)$ *est des diffeomorphismes* $C^k, \phi : U \to U', \psi : W \to W'$ *tel que*

$$\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$$

satisfait

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots)$$

Corollaire 39 (Theoreme d'inversion locale)
Si $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n) k \geq 1, U \subset \mathbb{R}^n$ *verifie que* $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est un isomorphisme, alors il existe des voisinages* U *de* p *et* V *de* $q = f(p)$ *tel que* $df_q^{-1} = (df_q)^{-1}$.

Lecture 7: Varietes (enfin)

Wed 03 Nov

7.4 Exemples de Sous-varietes

1. Une sous-variete de dimension 0 de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble discret (tous les points sont isoles)
2. Un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variete de dimension n.
3. L'ensemble vide est une sous-variete de dimension n $\forall n$

Theorème 40
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *une application* C^k *et de rang constant* $= r$.

— *L'ensemble des points*

$$M = \{x \in U | f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^m$$

est une sous-variete differentiable de classe C^k *de dimension* $m - r$.

— $\forall p \in U$, *il existe un voisinage* $V \subset U$ *de* p *tel que* $N = f(V)$ *est une sous-variete*

Definition 40 (Groupe de Lie)
Un groupe de Lie est une variete differentiable G *tel que la multiplication et l'inverse sont des operations bien definies.*

7.5 Sur les differentielles et gradients

Que vaut la differentielle dx_i ? On a que

$$dx_i|_p(h) = x_i(p + h) - x_i(p) = p_i + h_i - p_i = h_i$$

On a que $dx_i(e_j) = \delta_{ij}$, donc $\{dx_i, \ldots, dx_n\} \in (\mathbb{R}^n)^*$ est la base duale canonique.

Lecture 8: Surfaces

Wed 10 Nov

> **Proposition 41**
> *L'espace tangent en un point p d'une sous-variete differentiable $M \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de dimension $m = \dim M$.*

Preuve

On se donne un diffeomorphisme local adapte a M au voisinage de p.
C'est-a dire $\phi : U \to V$ diffeomorphisme entre deux ouverts $U, V \subset \mathbb{R}^n$ qui verifient $p \in U \cap M$ et $\phi(U \cap M) = V \cap E$ ou $E \subset \mathbb{R}^n$ est un sev de dimension m.
Soit v un vecteur tangent a M en p. Alors il existe $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que α represente le vecteur v.
Quite a restreindre $\epsilon > 0$, on peut supposer que $\alpha(t) \in M \forall t$.
Notons $\beta = \phi(\alpha)$ β est un chemin de classe C^1 tel que

$$\beta(t) \in \phi(U \cap M) = E \cap V$$

et $\beta(0) = \frac{d\beta}{dt}(0) = d\phi_{\alpha(0)}(\dot{\alpha}(0)) = d\phi_p(v)$.
Mais il est clair que $\dot{\beta}(0) \in E$.
On a donc prouve que $\forall v \in T_pM$ on a

$$d\phi_p(v) \in E$$

Donc $v \in d\phi_p^{-1}(E) = d(\phi^{-1})_q(E)$ et donc $T_pM \subset d\phi_p^{-1}(E)$.
On affirme que $(d\phi_p)^{-1}(E) \subset T_pM$, posons $w = d\phi_p(v) \in E$ et $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to E \cap V$ defini par

$$\beta(t) = q + tw$$

Alors $\alpha(t) = \phi^{-1}(\beta(t))$ represente v □

> **Corollaire 42**
> *Si $M = f^{-1}(0)$ ou $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est une submersion alors*
>
> $$T_pM = \ker(df_p)$$

Preuve

On affirme que $T_pM \subset \ker(df_p)$.
En effet, si $v \in T_pM$, alors $v = \dot{\alpha}$ avec $\alpha(0) = p$.
Donc

$$f(\alpha(t)) = c \Rightarrow df_p(v) = 0$$ □

Corollaire 43
Si $\psi : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *est un plongement(ie.* ψ *est une immersion et* $\psi : U \to M = \psi(U)$ *est un homeomorphisme) alors* $\forall p = \psi(u) \in M$ *on a*

$$T_pM = \mathrm{Im}(d\psi_u)$$

Notons que

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_j} = \frac{d}{dt}\psi(u + te_j) \in T_pM$$

8 Geometrie des Surfaces

Definition et exemples

On decrit une surface de deux manieres differentes.

Description implicite
Une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ peut etre definie $S : f(x) = c \iff S = \{x \in \mathbb{R}^3 | f(x) = c\}$ ou $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est differentiable.
On dit que $x \in U$ est un point critique si $df_x = 0$ dans ce cas $c = f(x)$ est une valeur critique.

Definition 41 (Point singulier)
Un point singulier de S *est un point critique qui appartient a* S.
x *est un point singulier de* $S \iff f(x) = c, \partial_i(x) = 0 \forall i \in [3]$.

Description parametrique
Une surface parametree est la donnee d'un plongement differentiable $\psi : \Omega \to S \subset \mathbb{R}^3$.
On a vu que $\forall p \in \psi(u) \in S$ le plan tangent est

$$T_pS = \mathrm{Im}\, d\psi_u$$

et ce plan est engendre par $\frac{\partial \psi}{\partial u_1}, \frac{\partial \psi}{\partial u_2}$.

Theorème 44
Toute surface implicite admet des parametrisations locales au voisinage de tout point regulier.

Definition 42
Si $\psi : \Omega \to S$ *est une surface parametree alors on appelle repere mobile adapte a* ψ *la donnee des trois champs de vecteurs*

$$(u, v) \in \Omega \to \{b_1(u, v), b_2(u, v), n(u, v)\}$$

ou

$$b_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u}, b_2 = \frac{\partial \psi}{\partial v}, n = \frac{b_1 \times b_2}{\|b_1 \times b_2\|}$$

Definition 43 (Tenseur metrique)
On appelle tenseur metrique (ou premiere forme fondamentale) de la surface parametree $\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ *est la matrice de Gram de* $\{b_1(u,v), b_2(u,v)\}$

$$G(u,v) = \begin{pmatrix} g_{11}(u,v) & g_{12}(u,v) \\ g_{21}(u,v) & g_{22}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|b\|^2 & \langle b_1, b_2 \rangle \\ \langle b_1, b_2 \rangle & \|b_2\|^2 \end{pmatrix}$$

Lecture 9: ...

Wed 17 Nov

Definition 44 (Intersection Transversale)
Deux sous-varietes $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ *s'intersectent transversalement en un point* p *si* $p \in M_1 \cap M_2$ *et* $T_pM_1 + T_pM_2 = \mathbb{R}^n$

Proposition 45
Si M_1 *et* M_2 *s'intersectent transversalement en* p *et si* $\dim M_1 + \dim M_2 = n$*, alors il existe un systeme de coordonnees au voisinage* U *de* p*. tel que* $M_1 \cap U = \{u \in U | u_{m+1} = \ldots = u_n = 0\}$

Une surface parametree, reguliere

$$\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$$

Ce tenseur depend de $(u,v) \in \Omega$ et est la matrice de Gram pour le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^3$ sur b_1, b_2

Tube autour d'une courbe

On choisit deux champs de vecteurs $w_1, w_2 : I \to \mathbb{R}^3$ le long de γ tel que

$$\forall t \, \{w_1(t), w_2(t)\} = \text{ base orthonormee de } \dot{\gamma}^{|}$$

et on pose

$$r(u,t) = \gamma(t) + a(\cos(u) w_1(t) + \sin u w_2(t))$$

8.1 Courbes tracees sur une surface

Soit $\psi : \Omega \to S \subset \mathbb{R}^3$ une surface parametree (reguliere) et $\gamma : I \to S = \psi(\Omega)$ une courbe reguliere.
On pose $\tilde{\gamma} : I \to \Omega, \tilde{\gamma}(t) = \psi^{-1}(\gamma(t))$.

Definition 45
On appelle $\tilde{\gamma}$ *la representation de* γ *dans la carte* ψ^{-1}

Proposition 46
La longueur d'un arg γ se calcule a partir de $\tilde{\gamma}$ par la formule

$$l(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E(u(t), v(t)) \frac{du}{dt}^2 + 2F(u(t, v(t))) \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(u, v)\frac{dv}{dt}^2}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum g_{ij}(u(t), v(t))}$$

Preuve

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\psi(\tilde{\gamma}(t)) = \frac{d\psi}{du}\frac{du}{dt} + \frac{d\psi}{dv}\frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt}b_1 + \frac{dv}{dt}b_2 \qquad \square$$

8.2 Angle entre deux courbes

Soient $\alpha, \beta : I \to S \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha(0) = \beta(0) = p$.
Comment trouver l'angle θ entre $\dot{\alpha}(0)$ et $\dot{\beta}(0)$ dans $T_pS \subset \mathbb{R}^3$ a partir des representations $\tilde{\alpha} = \psi^{-1} \circ \alpha, \tilde{\beta} = \psi^{-1} \circ \beta$

Proposition 47
L'angle θ entre α et β est donne par

$$\cos\theta = \frac{Eu_1'v_2' + F(u_1'v_2' + u_2'v_1') + Gv_1'v_2'}{\sqrt{Eu_1'^2Fu_1'v_1' + Gv_2'^2}\sqrt{Eu_2'^2 + 2Fu_2'v_2' + Gv_2'^2}}$$

8.3 Aire d'une surface

Definition 46
Si $\psi : \Omega \to S$ est une surface parametree reguliere et ψ est bijective. Alors l'aire de S est definie par

$$\textit{Aire } (s) = \iint \sqrt{EG - F^2} dudv = \iint \sqrt{\det G} dudv.$$

De plus si $h : S \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors l'integrale de h sur S est

$$\iint_\Omega \psi^{-1}.h(u, v)\sqrt{\det G} dudv$$

Et le centre de gravite de S est defini par

$$C = \frac{1}{\text{Aire}(S)} \int_S \psi(u, v)\sqrt{\det G} dudv$$

Lecture 10: geometrie intrinseque

Wed 24 Nov

8.4 Geometrie intrinseque/extrinseque des surfaces

Definition 47
Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface reguliere connexe.
La distance intrinseque dans S entre deux points est definie par

$$d_S(p, q) = \inf\left\{l(\gamma) : \gamma(0) = p, \gamma(1) = q, C^1 \textit{ par morceaux sur } S\right\}$$

Lemme 48
(S, d_s) est un espace metrique

Definition 48 (distance intrinseque)
On appelle cette distance la distance intrinseque dans S, tandis que la distance euclidienne est la distance intrinseque.

Exemple
Si S est une sphere de rayon a et de centre c, alors $d_S(p,q) = a\theta$ ou θ est l'angle entre $p - c$ et $q - c$

Question :
Comment decider si deux surfaces $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ sont isometriques pour la distance intrinseque.

Definition 49
S_1, S_2 sont intrinsequement isometriques si il existe $f : S_1 \to S_2$ bijective tel que

$$d_{S_2}(f(p), f(q)) = d_{S_1}(p,q)$$

Exemple
soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe C^2 parametree naturellement et simple (γ injective). Le cylindre (generalise) de base γ est la surface reglee

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$\psi(u,v) = (\gamma(u), v)$$

Le tenseur metrique est tres simple a calculer, avec $b_1 = (\dot\gamma(u), 0)$ et $b_2 = (0,0,1)$, donc $ds^2 = du^2 + dv^2$.
Donc la longueur des courbes dans S sont egales aux longueurs dans $\mathbb{R}^2$.
Donc le cylindre generalise S est isometrique au plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

Remarque
Si la courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ n'est pas complete ($I \neq \mathbb{R}$), alors la surface S et le plan euclidien sont localement isometrique.

Definition 50
Si $M_1 \subset \mathbb{R}^m$ et $M_2 \subset \mathbb{R}^n$ sont deux sous-varietes differentiables, alors on dit qu'une application $f : M_1 \to M_2$ est differentiable si il existe un voisinage ouvert U de M_1 et $F : U \to \mathbb{R}^n$ tel que F est differentiable et $F|_{M_1} = f$.

Exemple
Si $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface de classe C^k, alors on appelle application de Gauss

$$\nu : S \to S_2$$

definie par $\nu(p) =$ le vecteur unite qui est orthogonal a $T_P S$

Remarque
ν est definie au signe pres, de plus ν n'est pas toujours definie de facon continue globalement(cf. ruban de Moebius).

Toutefois, si S est definie implicitement, ou si elle est parametree injectivement, alors l'application de Gauss

$$\nu : S \to S^2$$

est bien definie (au signe pres) et est une application differentiable(de classe C^{k-1})

Preuve
Si la surface $S = \{f(x) = 0\}$ alors

$$\nu(p) = \pm \frac{1}{\|\nabla f(p)\|} \nabla f(p)$$

De plus, si $\psi : \Omega \to S$ est injective, alors

$$\nu(p) = \frac{b_1 \times b_2}{\|b_1 \times b_2\|}$$

□

> **Proposition 54**
> *Soient $\psi_1 : \Omega_1 \to S_1 \subset \mathbb{R}^3, \psi_2 : \Omega_2 \to S_2 \subset \mathbb{R}^3$ deux surfaces regulieres (C^1) parametree injectivement. Alors une application differentiable $f : S_1 \to S_2$ est une isometrie (globale) si et seulement si*
>
> $$G_1(u) = Dh(u)^T G_2(u) Dh(u)$$
>
> *Ou $h : \Omega_1 \to \Omega_2 = \psi_1 \circ f \circ \psi_2^{-1}$*

Definition 51
Si $\psi : \Omega \to S$ est une parametrisiation bijective, alors $\phi = \psi^{-1} : S \to \Omega$ s'appelle la carte.
L'application h (comme ci-dessus) s'appelle la representation de f dans les cartes ψ_1^{-1}, ψ_2^{-1}

Preuve
Si $f : S_1 \to S_2$ est une applicaiton differentiable alors $\forall p \in S_1$, la differentielle $df_p : T_p(S_1) \to T_q S_2$ est bien definie et lineaire.
Il faut voir que $dF_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, dF_p|_{T_P S_1} : T_P S_1 \to T_q S_2$.
Donc, si $v \in T_p S_1 \implies dF_p(v) \in T_q S_2$.
En effet, dire que $v \in T_p S_1$, signifie que $\exists \gamma$ tel que

$$v = \dot{\gamma}(0), \gamma : I \to S_1, \gamma \text{ differentiable et } \gamma(0) = p.$$

Mais alors $f \circ \gamma(t) = F(\gamma(t)) \forall t$ verifie que $dF_p(\dot{\gamma}(0)) = dF_p(v)$.
$f : S_1 \to S_2$ est une isometrie si et seulement si pour tout courbe $\gamma : I \to S_1$,

on a

$$l(\gamma) = l(f(\gamma))$$

donc $\|\dot{\gamma}(t)\| = \left\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\right\|$.
Ou encore

$$\|df_p(v)\| = \|v\| \, \forall p \in S_1, \forall v \in T_pS_1$$
$$\langle df_p(v, df_p(w)) = \langle v, w\rangle\rangle$$
$$df_p : T_pS_1 \to T_qS_2 \text{ est une isometrie entre les plans tangents } \forall p$$

Pour une surface parametree $\psi : \Omega \to S$*, le tenseur metrique peut s'ecrire*

$$G(u) = D\psi(u)^T D\psi(u)$$

Prouvons donc l'equadiff.
On a

$$\begin{aligned} G_1(u) &= D\psi_1(u)^T D\psi_1(u) \\ &= D(f \circ \psi_1)^T D(f \circ \psi_2) \\ &= D(\psi_2 \circ h)^T D(\psi_2 \circ h) \\ &= (D\psi_2 Dh)^T (D\psi_2 Dh) \\ &= D\psi_2^T G_2 D\psi_2 \end{aligned}$$

□

Exemple (Changement de Cartes)
Si ψ_1 *et* ψ_2 *sont deux parametrisations de la meme surface* S *au voisinage d'un point* p*, alors on a*

$$G_1 = Dh^T G_2 Dh$$

Definition 52
Une surface S *est developpable si au voisinage de chaque point , il existe une carte dont le tenseur metrique est le tenseur euclidien.*

Remarque
La surface $S = \psi(\Omega)$ *est developpable si et seulement si* $\exists h$.
La surface S *est conformement plate si au voisinage de chaque point une parametrisation telle que*

$$G = \lambda(u) I_n$$

Lecture 11: Courbure

Wed 01 Dec

Theorème 57
Toute surface reguliere de classe $C^2, S \subset \mathbb{R}^3$ *admet un parametrage conforme*

(local) au voisinage de tout point.

Definition 53 (Pseudosphere)
La pseudosphere est la surface de revolution d'une tractrice autour de son asymptote

Mise en equation :
On suppose que l'asymptote est l'axe Oz, que $c = 1$ et que $\|\dot{\gamma}\| = 1$ et $\gamma(0) = (1, 0)$.
On trouve l'equation $\dot{x} + x = 0 \implies x = e^{-t}$, et

$$\dot{x}^2 + \dot{x}^2 = 1z(t) = \int_0^t \sqrt{1 - e^{-z}} dz$$

donc la pseudosphere admet la parametrisation

$$\psi : [0, 2\pi] \times [0, \infty) \to P \subset \mathbb{R}^3$$

avec

$$\psi(\theta, t) = (\cos\theta e^{-t}, \sin\theta e^{-t}, f(t))$$

Le tenseur metrique va valoir

$$G = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut maintenant poser $v = e^t, u = \theta$, alors

$$ds^2 = e^{-2t}(du^2 + dv^2) = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

8.5 Geodesiques et courbure des courbes sur une surface

Definition 54 (Geodesique)
Une geodesique d'une surface reguliere $S \subset \mathbb{R}^3$ est une courbe $\gamma : I \to S$ de classe C^2 verifiant

$$\ddot{\gamma} \perp T_\gamma S$$

Remarque
Si S est une surface de revolution, γ est geodesique si et seulement si $\ddot{\gamma} \times \nabla f$

Proposition 59
Toute geodesique est parcourue a vitesse constante.

Theorème 60
Soit $\gamma : [a, b] \to S$ une courbe de classe C^2 parametree a vitesse constante telle que γ minimise la distance entre $p = \gamma(a)$ et $q = \gamma(b)$.
C'est a dire

$$l(\gamma) = d_s(p, q)$$

Alors γ est geodesique.

Definition 55
Soit $\gamma : I \to S$ une courbe de classe C^2 reguliere.
On note $\nu(t) = \nu(\gamma(t))$ le vecteur unitaire normal a $T_{\gamma(t)}S$.

$$T_\gamma(t) = \frac{1}{V}\dot{\gamma}$$

et

$$\mu(t) = \nu(t) \times T_\gamma(t)$$

On dit que $\{\nu(t), T_\gamma(t), \mu(t)\}$ est le repere de Darboux de la courbe γ relatif a S.

Remarque

- *Le repere est orthonorme et direct*
- *T, μ sont tangents a S et forment une base orthonormee du plan tangent.*

Definition 56 (Courbure normale)
On appelle courbure normale de γ en t

$$k_n(t) = \langle K, \nu \rangle$$

et on appelle la courbure geodesique

$$k_\gamma = \langle K, \mu \rangle$$

Theorème 62 (de Meusnier)
La courbure normale d'une courbe C^2 tracee sur une surface S, la courbure normale ne depend que de la direction de $\dot{\gamma}$

Preuve
On a $\gamma : I \to S$, C^2, reguliere.
On pose $f : I \to \mathbb{R}, f(t) = \langle \nu, \dot{\gamma} \rangle$ On derive f :

$$0 = \frac{d}{dt}f = \langle \dot{\nu}, t \rangle + \langle \nu, \dot{T} \rangle$$

On a donc

$$0 = \frac{1}{V}\langle \dot{\nu}, \dot{\gamma} \rangle + V\langle \nu, K \rangle$$

Et donc

$$k_\gamma = -\frac{1}{V^2}\langle \dot{\nu}, \dot{\gamma} \rangle$$

On se rappelle que ν est la restriction a γ de l'application de Gauss

$$S \to S^2$$

et $\dot{\nu} = \frac{d}{dt}\nu(\gamma(t)) = d\nu_{\gamma(t)}(\dot{\gamma})$

Donc

$$k_\gamma = -\frac{\langle d\nu_{\gamma(t)(\gamma), \dot{\gamma}} \rangle}{\|\dot{\gamma}\|}$$

□

On peut donc definir la courbure normale de S en un point p

$$k_n : T_pS \to \mathbb{R} : v \mapsto \frac{-\langle d\nu_p(v), v}{\|V\|^2}$$

Definition 57

L'application de Weingarten d'une surface S reguliere de classe C^2 est la differentielle de l'application de Gauss. On la note $L_p : T_pS \to T_pS : L_p(v) = d\nu_p(v)$. L_p est un endomorphisme de T_pS car de facon generale

$$\nu : S \to S^2$$

Alors

$$d\nu_p : T_pS \to T_{\nu(p)}S^2$$

Or $\forall q \in S^2$ on a $T_qS = q^\perp = \left\{v \in \mathbb{R}^3 | \langle v, q\rangle = 0\right\}$ Donc

$$T_pS = \{v | \langle \nu(p), v\rangle = 0\} = T_{\nu(p)S^2}$$

Definition 58 (Deuxieme forme fondamentale)

La deuxieme forme fondamentale de S en p est la forme bilineaire

$$h(v, w) = -\langle L_pv, w\rangle, v, w \in T_pS$$

Proposition 63

h est une forme bilineaire symmetrique et de facon equivalente L_p est autoadjointe.

Preuve

On va montrer que

$$h(b_i, b_j) = h(b_j, b_i)$$

pour b_i, b_j une base de T_pS.
On se donne une parametrisation au voisinage de $p \in S$.
On a donc

$$\psi : \Omega \to S$$

et on pose $b_1 = \frac{\partial\psi}{\partial u}, b_2 = \frac{\partial\psi}{\partial v}$.
$h_p(b_i, b_j) = -\langle d\nu_p(b_i), b_j\rangle$.
Or $d\nu_p(b_i) = \frac{\partial}{\partial u_i}(\nu \circ \psi(u))$.
Donc

$$h_p(b_i, b_j) = -\langle \frac{\partial}{\partial u_i} kl(\nu \circ \psi(u)), \frac{\partial\psi}{\partial u_j}$$

Or $\langle \nu\psi, \frac{\partial\psi}{\partial u_j}\rangle = 0$
Donc

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_i}\langle \nu \circ \psi, \frac{\partial\psi}{\partial u_j} = \langle \nu \circ \psi, \frac{\partial^2\psi}{\partial u_j \partial u_i}\rangle + \partial\frac{\partial}{\partial u_i}(\nu \circ \psi), \frac{\partial\psi}{\partial u_j}$$

Et donc

$$h(b_i, b_j) = \langle \nu \circ \psi, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j} = h(b_j, b_i)$$

□

Donc par le theoreme spectral :

Corollaire 64
L_p est orthogonalement diagonalisable et on notes les valeurs propres k_1, k_2

De plus k_1, k_2 sont les valeurs maximales et minimales de la courbure normale.

Lecture 12: Quelquechose

Wed 08 Dec

8.6 Formule de variation premiere pour la longueur

Question : Si on a une famille de courbes sur une surface S, on aimerait determiner la derivee de la longueur de ces courbes.
Plus precisement, on considere une courbe $\gamma : [a, b] \to S($ parametree naturellement) et on deforme cette courbe par $f : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to S$ telle que

$$f(u, 0) = \gamma(u) \forall u \in [a, b]$$

On veut calculer

$$\frac{d}{dv}|_{v=0} l(\gamma_v)$$

Supposons que γ, f sont C^2

Theorème 65 (Formule de variation premiere)
Sous ces hypotheses, on a

$$\frac{d}{dv}|_{v=0} l(\gamma_v) = \langle \frac{\partial f}{\partial v}(u, 0), \dot{\gamma}(u) - \int_0^b k_g(u) \langle \mu(u), \frac{\partial f}{\partial v} \rangle du$$

Corollaire 66
Si la deformation f est a extremites fixees et si γ est geodesique, alors

$$\frac{d}{dv} l(\gamma_v) = 0$$

Preuve
On a

$$\frac{d}{dv} l(\gamma_v) = \frac{d}{dv} \int_a^b \|\dot{\gamma}(u)\| \, du = \int_a^b \frac{\partial}{\partial v} \sqrt{\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \rangle}$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial v} \sqrt{\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \rangle} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}_v\|} \langle \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \rangle$$

En $v = 0$, on a

$$\|\dot{\gamma}_v(u)\| = 1$$

Ainsi,

$$\frac{d}{dv} l(\gamma_v) = \int_a^b \langle \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \rangle du$$

$$\frac{d}{dv}|_{v=0} l(\gamma_v) \int_a^b \frac{\partial}{\partial u} \langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \rangle du - \int_a^b \langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} du$$

$$= \langle \frac{\partial f}{\partial v}, \dot{\gamma} \rangle|_{a=0}^b - \int_a^b \langle \frac{\partial f}{\partial v}, \ddot{\gamma}(u) \rangle du$$

On a $\ddot{\gamma} = K_\gamma$ □

Corollaire 67

Une courbe de classe C^2 $\gamma : I \to S$ est geodesique $\iff$

1. *$\|\dot{\gamma}(u)\| =$ constante*
2. *La courbe γ minimise localement la longueur entre ses points.*

$$\forall t \in I \exists \epsilon > 0 \ tq \ si \ t - \epsilon \leq t_1 \leq t_2 \leq t_2 + \epsilon$$

Alors

$$d_S(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = l(\gamma|_{[t_1,t_2]})$$

8.7 Courbure normale d'une surface

Definition 59 (Courbure normale)

La courbure normale a une surface S en un point p et une direction $v \in T_pS \backslash \{0\}$

$$k_n(v) = \frac{h(v,v)}{\langle v, v \rangle} = -\frac{\langle L_p(v), v \rangle}{\|v\|^2}$$

On remarque que $k_n(\lambda, v) = k_n(v) \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
On regarde souvent k_n comme fonction

$$k_n : \{v \in T_pS | \, \|v\| = 1\} \to \mathbb{R}$$

Comment calculer L_p ?

Soit $\psi : \Omega \to S$ une parametrisation reguliere C^2.
On a le repere adapte $b_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u_1}, b_2 = \frac{\partial \psi}{\partial u_2}, v = \frac{b_1 \times b_2}{\|b_1 \times b_2\|}$

$$L_p b_1 = d\nu(\frac{\partial \psi}{\partial u_i}) = \frac{\partial \nu}{\partial u_i}$$

Donc

$$L(b_1) = l_{11} b_1 + l_{21} b_2$$

et on en obtient la matrice.

Il est souvent plus simple de calculer h

On a
$$h(v,w) = -\langle Lv, w\rangle$$
Donc
$$h_{ij} = h(b_i, b_j) = -\langle L(b_i), b_j\rangle = -l_{1i}\langle b_1, i\rangle - l_{2j}\langle b_2, b_j\rangle = l_{1i}g_{1i} + l_{2i}g_{2j}$$
Et donc
$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$
Donc on peut calcule L_p grace a
$$L = -G^{-1}H$$

Definition 60 (Surface complete)
La surface S est complete si toute suite de Cauchy (pour la distance intrinseque) converge

Theorème 68 (Hoph-Rinow 1930)
Si S est une surface complete et connexe, alors il existe une geodesique minimale entre deux points quelconques.

C'est aussi un corollaire du theoreme d'Arzela-Ascoli.

8.8 Courbures principales, moyenne et de Gauss

Par le theoreme spectral, L est orthogonalement diagonalisable. Il existe donc une base $\{v_1, v_2\}$ orthonormee de T_pS propre pour L_p.
On note k_1, k_2 les valeurs propres de $-L$ (on suppose $k_1 \leq k_2$) .
En effet
$$k_n(v_i) = -\frac{\langle L_p(v_i), v_i\rangle}{\|v\|_i^2} = k_i$$

Definition 61 (Typologie des points sur une surface)

1. *Les vecteurs propres de L_p sont les directions principales de S en p.*
2. *La courbure de Gauss de S en p est*
$$K = k_1 k_2 = \det L_p = \frac{\det H}{\det G}$$
3. *La courbure moyenne de S en p est*
$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr} L_p$$
4. *Le point p est elliptique si $K(p) > 0$*

5. *Le point p est hyperbolique si $K(p) < 0$*
6. *Le point p est parabolique si $k_1 k_2 = 0$ mais $H \neq 0$*
7. *Le point p est plat si $K = H = 0$*
8. *Le point p est ombillique si $k_1 = k_2$*

Theorème 69
Si S est une surface reguliere de classe C^3 dont tous les points sont ombilliques alors S est un plan ou une sphere.

Lecture 13: Geometrie Hyperbolique

Wed 15 Dec

9 Geometrie Hyperbolique

Constat : La sphere S^n et l'espace euclidien verifient

1. Ces espaces sont homogenes
2. Ce sont des espaces metriques complets
3. Topologiquement simples (simplement connexe)

On dit que (X, d) est un espace homogene si le groupe des isometries agit transitivement

$$\iff \forall p, q \in X \exists f : X \to X \text{ une bijection isometrique } f(p) = q$$

Question :
Existe-t'il aussi un espace metrique, simplement connexe, complet, homogene et tel que (en dimension 2), on a que

$$K = -1$$

Theorème 70 (Hilbert)
Toute surface de $\mathbb{R}^3$ a courbure de Gauss constante negative n'est pas complete.
Cependant, il existe une surface (non-plongee dans $\mathbb{R}^3$) simplement connexe, a courbure constante, homogene, on l'appelle le plan hyperbolique

Varietes Riemanniennes

Definition 62
Une metrique riemannienne sur une variete M est la donnee pour tout $p \in M$ d'un produit scalaire $g_p = \langle , \rangle_{M,p}$ sur T_pM

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

qui varie de facon differentiable.

Donc, une variete Riemannienne est donc un espace qui est infinitesimalement Euclidien.
Si $\gamma : [a,b] \to (M,g)$ est une courbe C^1, sa longueur est

$$l_g(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

$$\iff l_g(\gamma) = \int_a^b g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)\dot{\gamma}(t))^{\frac{1}{2}}$$

Alors $d_g(p,q) = \inf \{l_g(\gamma)\}$ est une distance sur M.

Definition 63
La geometrie Riemannienne est l'etude de l'espace metrique (M, d_g)

Theorème 71
Si (M_1, g_1) *et* (M_2, g_2) *sont deux varietes riemanniennes, alors l'application*

$$f : M_1 \to M_2$$

est une isometrie pour la distance intrinseque $\iff$ f *est differentiable et* $df_p : T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$ *respecte les produits scalaires.*

$$g_2(df(\xi), df(\eta)) = g_1(\xi, \eta)$$

Definition 64 (Application conforme)
$f : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ *est dite conforme si elle respecte les angles :*

$$\xi, \eta \in T_pM_1 \setminus \{0\} \implies angle(\xi, eta) = angle(df_p(\xi), df_p(\eta))$$

Lemme 72
f *est conforme* $\iff$ $g_2(df(\xi), df(\eta)) = \lambda^2(p) g_1(\xi, eta)$

Exemple

1. *Si* M *est une sous-variete de* $\mathbb{R}^n$, *on a la metrique Riemannienne induite par le produit scalaire de* $\mathbb{R}^n$

$$g_p(\xi, , \eta) = \langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{R}^n} \forall \xi, \eta \in T_pM \subset \mathbb{R}^n$$

2. *Si* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *est un domaine, alors une metrique riemannienne est donnee par* G, *avec* $g_{i,j}(u) = g_u(e_i, e_j)$.
Si $\xi = \sum \xi_i e_i, \eta = \sum \eta_i e_i \in T_m\Omega$.
Alors

$$g_u(\xi, \eta) = \sum_{i,j} g_{ij} \xi_i \eta_j$$

Remarque
Si on parametrise une surface par $\psi : \Omega \to S \subset \mathbb{R}^3$, alors ψ est une isometrie entre Ω, munie du tenseur metrique et S munit de la metrique Riemannienne induite par le plongement $S \subset \mathbb{R}^3$

M peut etre une sous-variete d'un espace pseudo-Euclidien $\mathbb{E}^{p,q} = \mathbb{R}^{p+q}$ muni d'une forme quadratique de signature (p, q)

Exemple
L'espace de Minkovski est

$$\mathbb{E}^{2,1} = \mathbb{R}^3$$

muni de la forme quadratique

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

La forme bilineaire associee est

$$B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y) \to x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$$

Definition 65
La surface $S \subset \mathbb{E}^{2,1}$ dans l'espace de Minkovski est admissible (de type espace) si pour tout point $p \in S$, la restriction de B a T_pS est definie positive.
Alors $g_p(\xi, \eta) = B(\xi, \eta)$ est un produit scalaire sur T_pM, donc une surface admissible $S \subset \mathbb{E}^{2,1}$ est une variete riemannienne de dimension 2.

Remarque
Si $S \subset \mathbb{E}^{2,1}$ est admissible et $\psi : \Omega \to S$ un parametrage, alors le tenseur metrique sur Ω se calcule par

$$g_{ij}(u) = g_u(e_i, e_j) = B(d\psi_u(e_i), d\psi_u(e_j))$$

Exemple
On definit

$$H = \left\{x \in \mathbb{E}^{2,1} | Q(x) = -1\right\}$$

H est la surface de revolution de la branche de l'hyperbole $x^2 - z^2 = -1$

Remarque
H est la sphere de Rayon i

Si on parametrise H comme surface de revolution de l'hyperbole, on peut calculer le tenseur metrique

$$G = dt^2 + \sinh^2(t)d\theta^2$$

Proposition 79
Si le tenseur metrique d'une surface est de la forme

$$g = dt^2 + a^2(t)d\theta^2$$

Alors la courbure de Gauss est $K = -\frac{a"}{a}$

9.1 Projection stereographique de H

$\pi : H \to \mathbb{D}^2$ par $p \in H$ $u = \pi(p) \in \mathbb{D}^2$.
On note $\psi : \mathbb{D}^2 \to H$ son inverse.
C'est un parametrage de H.
Le plan hyperbolique H est donc isometrique a $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ muni de la metrique

$$g = ds^2 = \frac{4dz^2}{(1-z^2)^2}$$

La longueur (hyperbolique) d'un chemin $\gamma(t) = z(t)$ est

$$l(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{2|\dot{z}(t)|}{(1-|z(t)|^2)} dt$$

Definition 66 (Disque de Pointcarre)
Le disque $\mathbb{D}^2$ avec la metrique Riemannienne.

On veut montrer que $\mathbb{D}^2$ est complet et homogene et on veut une formule pour calculer $d_{\mathbb{D}^2}(z_1, z_2) =?$

9.2 Le modele du demi-plan de Poincarre

C'est un autre modele conforme :

$$\mathbb{H}^2 = \{w \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} w > 0\}$$

avec le tenseur metrique

$$ds^2 = \frac{|dw|^2}{\operatorname{Im} w^2}$$

Proposition 80
$\mathbb{D}^2$ et $\mathbb{H}^2$ avec les metriques proposees sont isometriques

Preuve
On cherche une isometrie sous $h : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{D}^2$.
On sait que h est conforme, donc h est holomorphe.
Par le theoreme de l'application conforme de Riemann elle existe. $\square$