

Fluides et Electromagnetisme

David Wiedemann

Table des matières

1	Notations du cours et maths necessaires	3
1.1	Scalaire et Vecteurs	3
1.2	L'operateur ∇ (nabla) et la definition du gradient, de la divergence et du rotationnel	3
1.3	Formules d'integration	4
2	Fluides au repos	4
2.1	Introduction	4
2.2	Densite de fluide	5
3	Pression dans un fluide	5
3.1	Pression hydrostatique	5
3.2	Densite de force associee a la pression	6
3.3	Poussee d'Archimede	6
3.4	Tension superficielle	6
3.4.1	Origine et definition de la tension superficielle	6
3.4.2	Quelques consequences immediates de la tension superficielle	7
3.5	Interface solide/liquide/gaz	7
3.6	Loi de laplace	8
4	Dynamique des fluides	9
4.1	Types d'ecoulement	9
4.2	Derivee convective	9
4.3	Equations fluides	9
4.3.1	Equations de continuite(description Eulerienne)	10
4.4	Equation d'Euler	10
4.5	Equation d'etat	11
4.6	Theoreme de Bernoulli	11
4.7	Applications de Bernoulli	13
4.8	Ecoulement d'un fluide visqueux	14
4.8.1	Definition de la viscosite	14

4.8.2	Force de viscosite par unite de volume et equation de Navier-Stokes incompressible	15
4.8.3	Resolution Navier-Stokes avec l'ecoulement de Poiseuille .	17
5	Phenomenes Ondulatoires	19
5.1	Onde transverse et longitudinale et l'equation d'onde	19
5.2	Ondes sinusoidales	19
5.3	Ondes stationnaires	20
5.4	Ondes en $3D$	20
5.5	Quelques consequences du principe de superposition	21
5.6	Vitesse de phase et de groupe	21

List of Theorems

4	Theorème (Theoreme du gradient)	4
5	Theorème (Theoreme de La divergence(de Gauss))	4
6	Theorème (Theoreme de Stokes)	4
10	Theorème (Theoreme de Bernoulli)	13

1 Notations du cours et maths necessaires

1.1 Scalaires et Vecteurs

On distingue les quantites scalaires (pression, masse, la charge electrique) et les quantites vectorielles (vitesse, force) .

Dans un repere 3D, les vecteurs de base unitaires e_x, e_y, e_z

On definit un champ scalaire(resp. vectoriel) par une fonction $p(\vec{r}, t)$ qui depend de la position et du temps.

1.2 L'operateur ∇ (nabra) et la definition du gradient, de la divergence et du rotationnel

En coordonnees cartesiennes, on a

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

On note

$$\frac{\partial p}{\partial x}(\vec{r}, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(x+h, y, z, t) - p(x, y, z, t)}{h}$$

— Le gradient, note ∇f d'un champ scalaire $f(\vec{r}, t)$ est un champ vectoriel donne par

$$\nabla f(\vec{r}, t) = e_x \frac{\partial f}{\partial x} + e_y \frac{\partial f}{\partial y} + e_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

— La divergence, notee $\nabla \cdot \vec{u}$ d'un champ vectoriel $\vec{u}(\vec{r}, t)$ est un champ scalaire donne par

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

— Le rotationnel $\nabla \times \vec{u}$ d'un champ vectoriel est un champ vectoriel donne par

$$\nabla \times \vec{u}(\vec{r}, t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (u_x, u_y, u_z)$$

Remarque

On peut utiliser ∇ comme un vecteur, mais il faut faire attention a ce que les operations sont pas commutatives.

Remarque

Souvent, on ecrit ∂_x pour $\frac{\partial}{\partial x}$

Remarque

Les expressions du gradient, divergence, rotationnel sont independantes du systeme de coordonnees

1.3 Formules d'intégration

Theorème 4 (Theoreme du gradient)

Soit un volume V quelconque dans l'espace et soit S la surface fermée limitant le volume V (on note $S = \partial V$).

A chaque element de la surface, on assimile un vecteur orthogonal a la surface en ce point. On le note $d\vec{S}$ et il represente le "petit element" de surface.

Alors on a

$$\int \int_S f d\vec{S} = \int \int \int_V \nabla f dV$$

Theorème 5 (Theoreme de La divergence(de Gauss))

Le flux d'un champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r}, t)$ au travers d'une surface S :

$$\phi = \int \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Soit une surface fermée $S = \partial V$ et $d\vec{S}$ qui point vers l'exterieur de V , alors on a

$$\int \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int \int \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV$$

Theorème 6 (Theoreme de Stokes)

On definit la circulation d'un champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r}, t)$ le long d'une courbe fermée Γ :

$$\Sigma = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Dans ce cas la, on a

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

L'orientation relative de $d\vec{l}$ et $d\vec{S}$ est donnee par la regle de la main droite.

2 Fluides au repos

2.1 Introduction

On appelle un fluide un corps qui est a l'etat liquide, gazeux, ou plasma, systeme d'un grand nombre de particules qui est susceptible de s'ecouler facilement.

Autrement dit, un corps deformable/qui n'a pas de forme propre.

Pour beaucoup d'applications : un fluide est décrit par sa densité de masse $\rho(\vec{r}, t)$, la pression ($p(\vec{r}, t)$) et la vitesse $\vec{u}(\vec{r}, t)$

Dans ce chapitre, on suppose $\vec{u}(\vec{r}, t) = 0$, $\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r})$ et $p(\vec{r}, t) = p(\vec{r})$

2.2 Densité de fluide

Supposons un récipient avec un fluide dedans et un système de coordonnées.

On note

$$\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

pour la densité moyenne.

On prend ensuite la limite $\Delta V \rightarrow dV$ et on obtient ainsi

$$\rho(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow dV} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Lecture 2: Pression dans un fluide

Fri 26 Feb

3 Pression dans un fluide

La pression dans un fluide est définie par la force par unité de surface exercée par le fluide sur une paroi ou sur une autre partie du fluide. Cette force sera perpendiculaire à la surface. On note

$$\vec{dF} \left[\frac{N}{m^2} = \text{Pascal} = \text{Pa} \right] = p d\vec{S}$$

La pression est donnée par un champ scalaire.

L'isotropie de la pression suit naturellement dans le cas où il n'y a pas de forces de cisaillement (= forces tangentielles à la surface)

3.1 Pression hydrostatique

On veut déterminer $p(\vec{r})$ pour un fluide au repos.

On supposera un fluide incompressible (la densité est constante).

On considère un récipient contenant un fluide et un pavé droit de dimension dy, dx et $z_2 - z_1$.

On utilise

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

selon z .

On a donc une force F_1 s'appliquant en haut et F_2 s'appliquant en bas et finalement F_g , on a donc

$$F_1 + F_g - F_2 = 0$$

$$p(z_1)dx dy + \rho dx dy (z_2 - z_1)g - p(z_2)dx dy = 0$$

$$p(z_2) = p(z_1) + \rho g(z_2 - z_1)$$

pour z_1 et $z_2 = h$, on trouve

$$p(h) = p(0) + \rho g h = p_0 + \rho g h$$

Ainsi, la variation d'un fluide au repos ne depend que de la profondeur, mais est independante de la forme du fluide et ne varie pas perpendiculairement a la pesanteur.

Lecture 3: Hydrostatique

Tue 02 Mar

3.2 Densite de force associee a la pression

Calculons la force exercee sur un volume de fluide infinitesimal du a la pression.

On suppose qu'on connait $p(\vec{r})$.

$$\vec{F}_1 = p(\vec{r}(-\frac{dx}{2}, 0, 0))dydz \vec{e}_x$$

Donc

$$\sum_{i=1}^6 \vec{F}_i = (-p(\frac{dx}{2}, 0, 0) - p(-\frac{dx}{2}, 0, 0)/dx)dx dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x}dV \vec{e}_x + \dots = -\nabla p dV$$

donc la densite de force associee a la pression est $-\nabla p$.

3.3 Poussee d'Archimede

Tout corps plonge dans un fluide recoit de la part de celui-ci une poussee verticale egale au poids du fluide deplace

3.4 Tension superficielle

Experience :

On a des tubes de largeurs differentes, ouverts en haut et plonge dans l'eau.

On note que le niveau d'eau monte a un niveau de $h \propto \frac{1}{r}$

Semble etre une contradiction de la pression hydrostatique.

On verra que ce phenomene est du a la tension superficielle. La loi $p(h) = p_0 + \rho g h$ reste valable dans le fluide, mais pas necessairement a la surface.

3.4.1 Origine et definition de la tension superficielle

On considere a nouveau un fluide, il est constitue de particules ayant des interactions entre elles (inter moleculaires, etc)

Il y a moins de telles liaisons pour une molécule à la surface du fluide. Pour amener cette molécule là-bas et pour augmenter la surface, il faut faire un travail.

Experience :

Soit un film de liquide (eau savonneuse) tendu dans un cadre ABCD.

Si on tend le cadre, il ya une force qui s'y oppose.

Le travail est donc proportionnel au changement de surface

$$\Delta W = \gamma \Delta S = \gamma BC \Delta k \cdot 2$$

Le 2 apparait parce que il y a 2 surfaces (liquide/gaz)

Donc on a

$$F = 2F_\gamma = 2BC\gamma$$

L'interface liquide/gaz est un peu comme une membrane elastique, mais la force est independante de la deformation.

Experience

Mesure de γ On plonge un cylindre attache a un newton metre dans le liquide.

On mesure la force necessaire pour faire apparaitre un film lie au cylindre et on prend la difference entre cette force et la force F_G .

3.4.2 Quelques consequences immediates de la tension superficielle

Les bulles de savon minimisent leur surface et c'est pour cela qu'elles sont spheriques.

Meme chose pour les bulles d'eau en apesanteur.

Meme chose pour les cheveux mouilles qui collent.

Certains objets (trombone, punaises) ou des insectes qui flottent (qui marchent sur la surface)

Lecture 4: Interfaces solide/liquide

Fri 05 Mar

3.5 Interface solide/liquide/gaz

On considere une goutte sur une surface.

En equilibre la somme des forces sur la ligne tripe est nulle.

Selon l'axe horizontal, on trouve

$$\gamma_{sg} = \gamma_{sl} + \cos \theta \gamma_{lg}$$

Cette propriete s'appelle la loi de Young. Si $0 < \theta < 90$, on a un bon mouillage.

Si $\gamma_{sg} - \gamma_{sl} > \gamma_{lg}$, on a $\cos \theta > 1$, cette situation est non-stationnaire. On parle alors de mouillage total.

Si $-\gamma_{lg} < \gamma_{sg} - \gamma_{sl} < 0$, alors $-1 < \cos \theta < 0$ et donc $90 < \theta < 180$, \Rightarrow mauvais mouillage.

Si $\gamma_{sq} - \gamma_{sl} < -\gamma_{lg}$, alors $\cos \theta < -1$, on parle alors de super-hydrophobie ou effet lotus.

3.6 Loi de laplace

Notons qu'à l'intérieur d'un ballon, il y a une surpression.
Et à l'intérieur d'une goutte d'eau, d'une bulle de savon, ... ?
On suppose une goutte de liquide sphérique en apesanteur. Les forces s'appliquant sur la goutte donnent

$$\sum F_i^{ext} = 0 = \vec{F}_{p_2} + \underbrace{\vec{F}_{p_1}}_{=\pi R^2 p_1 \vec{e}_z} + \underbrace{\vec{F}_\gamma}_{=-2\pi R \gamma \vec{e}_z}$$

Pour \vec{F}_{p_2} , on a

$$\vec{F}_{p_2} = \int \int -p_2 \vec{dS} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -p_2 \vec{e}_r R^2 \sin \theta d\theta d\phi = \vec{e}_z \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -p_2 R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi = -\pi R^2 p_2 \vec{e}_z$$

Donc

$$\sum F^{ext} = -2\pi R \gamma \vec{e}_z + \pi R^2 p_1 \vec{e}_z$$

Et donc

$$p_1 - p_2 = \frac{2\gamma}{R}$$

Lecture 5: Hydrostatique continuation

Tue 09 Mar

Exemple (Bulle de Savon-deux interfaces)

On note p_1 la pression interne, p_2 la pression externe et p_0 la pression dans l'interface, on a donc

$$p_0 = p_2 + \frac{2\gamma}{R_e} \text{ et } p_1 = p_0 + \frac{2\gamma}{R_i}$$

$$p_1 = p_2 + \frac{2\gamma}{R_i} + \frac{2\gamma}{R_e}$$

comme $R_i = R_e = R$, $p_1 = p_2 + \frac{4\gamma}{R}$

Exemple (Capillarité)

On considère $h \gg l$ et que l'interface liquide/gaz est quasiment sphérique.

On a $p_1 = p_2 + 2\frac{\gamma}{R}$ et $p_3 = p_2 + \rho g h$.

$$p_1 = p_3 = p_{atm}$$

On trouve que $\frac{2\gamma}{R} = \rho g h$ et donc

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g R} = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r} = \alpha \frac{1}{r}$$

4 Dynamique des fluides

On considere des fluides decris par

$$\rho(\vec{r}, t), p(\vec{r}, t), \vec{u}(\vec{r}, t)$$

Vitesse d'un element fluide infinitesimal(vitesse moyenne de toutes les particules dans cet element) .

4.1 Types d'ecoulement

- $\vec{u}(\vec{r}, t) = 0$, ecoulement statique
- $\partial_t \vec{u} = 0, \partial_t \rho = 0, \partial_t p = 0$, ecoulement stationnaire
- Ecoulement laminaire "couches successive de fluide se deplacent doucement et regulierement l'un a cote de l'autre. (a basse vitesse)
- Ecoulement turbulent si non-laminaire.
Mouvement irregulier et chaotique. (typiquement a haute vitesse d'ecoulement)

4.2 Derivee convective

Attention

$\partial_t \vec{u}$ = variation de \vec{u} par unite de temps a un endroit fixe \neq acceleration de l'element fluide a (\vec{r}, t)

On considere la trajectoire d'un element fluide au cours du temps.

On veut connaitre la variation temporelle de p au long de la trajectoire.

au temps t : $p(\vec{r}, t)$

au temps $t + dt$: position $\vec{r} + \vec{u}(\vec{r}, t)dt$, pression $p(\vec{r} + \vec{u}(\vec{r}, t)dt, t + dt)$

$$\begin{aligned} &= p(x + u_x dt, y + u_y dt, z + u_z dt, t + dt) \\ &= p(x, y, z, t) + \partial_x p u_x dt + \partial_y p u_y dt + \partial_z p u_z dt + \partial_t p dt \\ &= p(\vec{r}, t) + (\vec{u} \cdot \nabla) p dt + \partial_t p dt \end{aligned}$$

On appelle $(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla)p := \frac{D}{Dt}p$

De meme, la variation temporelle de \vec{u} le long de la trajectoire (= l'acceleration)

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt}$$

4.3 Equations fluides

Pour determiner l'evolution des cinq fonctions ρ, p, \vec{u} il faut 5 equations.

4.3.1 Equations de continuité (description Eulerienne)

Principe de conservation de masse en absence de sources/pertes. On considère un volume V fixe dans notre liquide, il définit une surface S fermée.

variation de masse dans V = Flux de masse à travers S

On a

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = - \int \int_S \rho(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t) d\vec{S}$$

Lecture 6: Equations de continuité

Fri 12 Mar

On a trouvé que

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = \int \int \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t)$$

Pour la partie de droite, on a

$$- \int \int_S \rho(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t) d\vec{S} = - \int \int \int_V \nabla(\rho \vec{u}) dV$$

Donc

$$\int \int \int_V \frac{\partial}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) dV = 0$$

Pour tout volume V

Et donc

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

4.4 Equation d'Euler

On fait un bilan de la quantité de mouvement. On considère un fluide parfait (pas de frottement interne).

La quantité de mouvement dans $V(t)$, on a

$$\vec{P} = \int \int \int_{V(t)} \rho \vec{u} dV$$

Seconde loi de Newton :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \text{forces externes sur la partie du fluide contenue dans } V(t)$$

On va montrer que

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \int \int \int_{V(t)} \frac{D}{Dt} (\rho \vec{u}) + \rho \vec{u} (\nabla \cdot \vec{u}) dV \\ &= \int \int \int_{V(t)} \rho \vec{g} dV - \int \int_{S(t)} p d\vec{S} \end{aligned}$$

$$= \int \int \int_{V(t)} \rho \vec{g} dV - \int \int \int_{V(t)} \nabla p dV$$

Donc

$$\frac{D}{Dt}(\rho \vec{u}) + \rho \vec{u}(\nabla \cdot \vec{u}) = \rho \vec{g} - \nabla p$$

$$\begin{aligned} & \rho \frac{D}{Dt} \vec{u} + \vec{u} \frac{D}{Dt} \rho + \rho \vec{u}(\nabla \cdot \vec{u}) \\ &= \rho \frac{D}{Dt} \vec{u} + \vec{u} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{u}) \right) \end{aligned}$$

Le dernier terme est nul par l'équation de continuité, et on trouve

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p$$

Remarque

En général, les fluides ont de la viscosité.

De plus, tout comme l'équation de continuité, l'équation d'Euler est non-linéaire, la solution à l'équation différentielle est généralement extrêmement compliquée.

4.5 Equation d'état

équations :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p$$

Il nous manque encore une équation pour décrire un fluide en mouvement : l'équation d'état, qui dépend du type de fluide.

$$\frac{D}{Dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0$$

ou γ est l'indice d'adiabaticité.

Lecture 7: Theoreme de Bernoulli

Tue 16 Mar

4.6 Theoreme de Bernoulli

On considère un écoulement laminaire au travers d'un tube

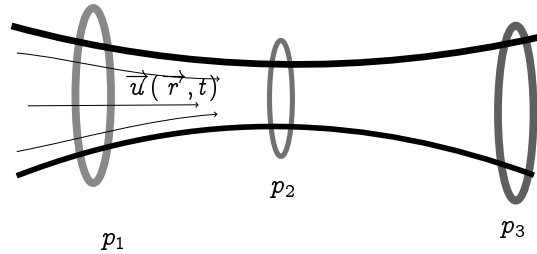


FIGURE 1 – tube 2

On s'intéresse à la pression au travers du tube.

On remarque que la pression a diminué dans la partie étroite du tube si $\vec{u} \neq 0$.

On explique ce phénomène par le théorème de Bernoulli.

On considère un fluide parfait (pas de viscosité), on considère aussi qu'il est incompressible, et qu'il est en écoulement stationnaire (toutes les dérivées partielles sont égales à 0), dans un champ de pesanteur \vec{g} constant.

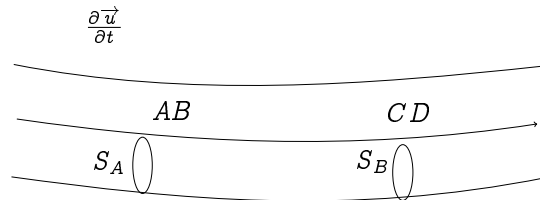


FIGURE 2 – tube de courant

On considère un tube de courant dans ce fluide et on le suit.

À $t = t_0$: on a une section $ABCD$, en $t = t_0 + \Delta t$: $A'B'C'D'$. On choisit S_A et Δt très petit, donc la distance entre AB et $A'B' \approx \vec{u}_A \Delta t$.

On utilise maintenant que

$$\text{Masse de } ABCD = \text{Masse de } A'B'C'D',$$

$$\begin{aligned} m_{A'B'C'D'} &= m_{ABCD} - S_A u_A \Delta t \rho + S_C u_c \Delta t \rho \\ S_A u_A \Delta t \rho &= S_C u_c \Delta t \rho \end{aligned}$$

Donc si la section diminue, la vitesse augmente. On definit

$$V_{ABA'B'} = S_A u_A \Delta t = V_{CDC'D'} =: \Delta V$$

Vu qu'on considere un fluide parfait, pour notre tube de courant, on a

$$\Delta E_{cin} + \Delta E_{pot} = \Delta W$$

Le changement d'energie cinetique est donne par

$$\Delta E_{cin} = \frac{1}{2} \rho u_c^2 \Delta V - \frac{1}{2} \rho u_A^2 \Delta V$$

Et pour l'energie potentielle

$$\Delta E_{pot} = \rho \Delta V g z_c - \rho \Delta V g z_A$$

Le travail ΔW est du au travail des forces de pression ($\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$)

Donc

$$\Delta W = p_A S_A u_A \Delta t - p_C S_C u_C \Delta t$$

Donc

$$\Delta W = (p_A - p_C) \Delta V$$

Donc

$$\frac{1}{2} \rho u_C^2 - \frac{1}{2} \rho u_A^2 + \rho g z_c - \rho g z_A = p_A - p_C$$

Et donc

Theorème 10 (Theoreme de Bernoulli)

$$\frac{1}{2} \rho u_A^2 + \rho g z_A + p_A = \frac{1}{2} \rho u_C^2 + \rho g z_c + p_c$$

Ce qui implique que $\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g z + p$ est constant le long d'une ligne de courant.

4.7 Applications de Bernoulli

La difference de pression entre le point 1 et 2 permet de mesure la vitesse.

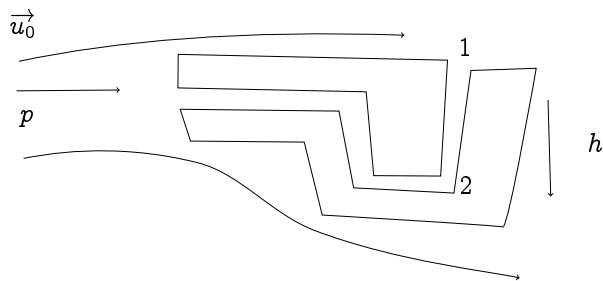


FIGURE 3 – Tube de Pitot

Lecture 8: Ecoulement d'un fluide visqueux

Fri 19 Mar

4.8 Ecoulement d'un fluide visqueux

On se restreins au cas des fluides incompressibles.

4.8.1 Definition de la viscosite

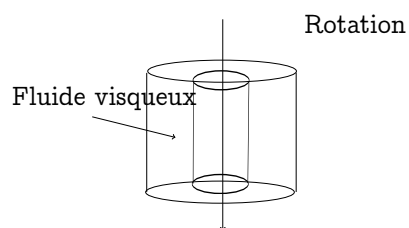


FIGURE 4 – viscosimetre

Exemple (Viscosimetre de Couette)

Observation :

Pour la meme frequence angulaire, le moment de force necessaire pour faire tourner le cylindre depend du type de fluide.

Imaginons l'experience suivante ("Ecoulement de Couette"), on a

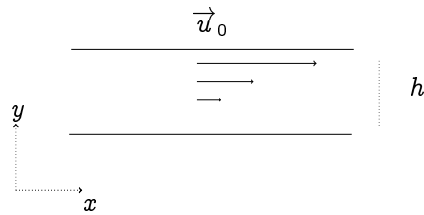


FIGURE 5 – ecoulement de couette

Il nous faut une force externe (force de cisaillement), on remarque que

$$F_{ext} \propto S \frac{u_0}{h}$$

On definit η par

$$F_{ext} = \eta S \frac{u_0}{h}$$

η s'appelle le coefficient de viscosite dynamique ($[\eta] = \frac{N}{m^2} s = Pa \cdot s$).

On a

$$F_{ext} = \eta S \frac{u_0}{h} = \eta S \frac{\partial u}{\partial y}$$

Les fluides qui obeissent cette loi s'appellent les fluides Newtoniens.

4.8.2 Force de viscosite par unite de volume et equation de Navier-Stokes incompressible

Supposons $\vec{u}(\vec{r}, t) = u_x(y) \vec{e}_x$

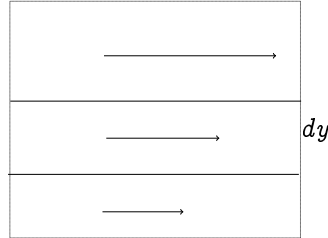


FIGURE 6 – viscosite par volume

La force de viscosite sur un elelement

$$\begin{aligned}
 F_{visc} &= -\eta S \frac{\partial u_x}{\partial y}(y) e_x + \eta S \frac{\partial u_x}{\partial y}(y + dy) e_x \\
 &= \eta S dy \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}(y + dy) - \frac{\partial u_x}{\partial y}}{dy} e_x \\
 &= dV \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} e_x
 \end{aligned}$$

Et donc le terme

$$\eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

est la force par unite de volume.

Dans le cas general, pour un fluide incompressible (sans preuve) est donne par

$$\eta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \vec{u} = \eta \Delta \vec{u}$$

Les equations pour un fluide incompressible et visqueux sont donc :

$$\rho = \text{const}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$\rho \frac{D \vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \eta \Delta \vec{u} \rightarrow \text{Navier-Stokes incompressible}$$

Les conditions de bords sont donnees par

$$\vec{u} = 0$$

a l'interface avec des parois immobile.

4.8.3 Resolution Navier-Stokes avec l'écoulement de Poiseuille

Écoulement laminaire dans un tube

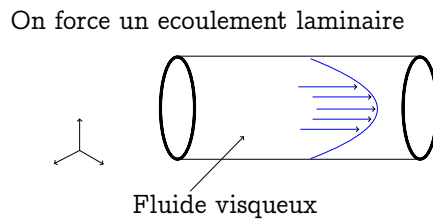


FIGURE 7 – glicerine dans un tube

Dans un cas plus simple

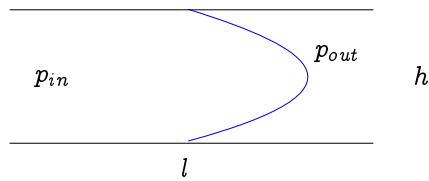


FIGURE 8 – écoulement plaques

On suppose ρ constant, on néglige la pesanteur et on pose

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}_x(y) \vec{e}_x$$

Lecture 9: Resolution Ecoulement de Poiseuille

Tue 23 Mar

Verifions que l'equation de continuite est satisfaite.

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Ceci est clair par hypothese.

De manierege generale

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \eta \Delta \vec{u}$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_x(y) \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_x(y) \\ 0 \\ 0 \uparrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $0 = -\nabla p + \eta \Delta \vec{u}$, et donc selon y .

$$0 = \frac{-\partial p}{\partial y} \Rightarrow p = f(x, z)$$

de meme selon z , et donc la pression depend seulement de x .

Ainsi

$$0 = \underbrace{\frac{-\partial p}{\partial x}}_{\text{depend de } x} + \underbrace{\eta \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_x(y)}_{\text{une fonction de } y}$$

Donc $p(x) = f(x) = -c_1 x + c_2$

Donc

$$p = p_{in} - \frac{p_{in} - p_{out}}{l} x = p_{in} - \frac{\Delta P}{l} x$$

Determinons $u_x(y)$

$$\eta \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_x = \frac{\partial p}{\partial x} = -c_1$$

Et donc

$$u_x = -\frac{c_1}{2\eta} y^2 + ay + b$$

Les conditions de bord donnent

$$u(-\frac{h}{2}) = -\frac{c_1}{2\eta} \frac{h^2}{4} - a \frac{h}{2} + b = 0$$

$$u(\frac{h}{2}) = -\frac{c_1}{2\eta} \frac{h^2}{4} + a \frac{h}{2} + b = 0$$

Donc

$$u_x(y) = \frac{c_1}{2\eta} (\frac{h^2}{4} - y^2) = \frac{\Delta p}{2\eta l} (\frac{h^2}{4} - y^2)$$

Calculons le debit volumique D de l'ecoulement

$$D = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy \int_0^{s_z} dz u_x(y)$$

$$= \frac{\Delta p s_z h^3}{12\eta l}$$

5 Phenomenes Ondulatoires

5.1 Onde transverse et longitudinale et l'equation d'onde

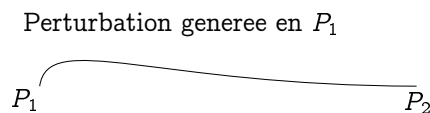


FIGURE 9 – corde suspendue

Exemple (Corde tendue avec extremités fixees)

La perturbation se fait presque sans perturbation.

On definit la perturbation par $y_0(x, t)$.

En $t = 0$, on a $y_0(x, 0) = f(x)$.

Si la propagation se deplace juste, on a

$$y_0(x, t) = f(x - ct)$$

Si le maximum de $f(x)$ se trouve en x_0 , le maximum de $f(x - ct)$ se trouve en $x = x_0 + ct$.

c s'appelle la vitesse de propagation de l'onde.

Description mathematique pour des petites perturbations : On va montrer que

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2}$$

Etant donne que c'est une equation differentielle lineaire, si f et g sont une solution, alors $f + g$ le sont aussi.

5.2 Ondes sinusoidales

Cas particulier des ondes sont les ondes de la forme

$$y_0(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \phi)$$

5.3 Ondes stationnaires

Notons que

$$A \cos(\omega t - kx + \phi)$$

ne respecte pas les conditions de bord.

Comme les ondes sont réfléchies, on cherche une solution de la forme

$$y_0(x, t) = \tilde{A}_1 e^{i(\omega t - kx)} + \tilde{A}_2 e^{i(\omega t + kx)}$$

Lecture 10: Ondes Stationnaires

Fri 26 Mar

Une onde stationnaire est de la forme

$$y_0(x, t) = d \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cos\left(\frac{\pi c}{n} t + \phi\right)$$

la fréquence est donnée par

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{cn}{2\lambda}$$

Ici, c est la vitesse de l'onde ($c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$) Le mouvement arbitraire de la corde est une somme infinie des modes normaux

5.4 Ondes en 3D

En 3 dimensions, l'équation d'onde devient

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} = c^2 \Delta y_0$$

Les ondes sinusoidales deviennent des ondes sinusoidales planes

$$y_0(\vec{r}, t) = A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

ou \vec{k} est le vecteur d'ondes.

Une surface equiphase est définie par

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const}$$

On peut choisir $e_x \parallel \vec{k}$ et alors on a

$$\omega t - \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \omega t - kx$$

Et donc

$$x = \frac{\omega}{k} t - \frac{\phi_0}{k}$$

Donc les surfaces equiphases sont des plans et donc l'onde (et les surfaces equiphases) se déplacent selon \vec{k} , avec la vitesse $\frac{\omega}{k} = c$

5.5 Quelques consequences du principe de superposition

Superposition de deux ondes de frequence $\omega + \Delta\omega$ et $\omega - \Delta\omega$, de vecteurs d'onde $k + \Delta k$ et $k - \Delta k$ et de dephasage ϕ_1 et ϕ_2 , de meme amplitude.

$$y_0 = Ae^{i(\omega+\Delta\omega)t-(k+\Delta k)x+\phi_1} + Ae^{i(\omega-\Delta\omega)t-(k-\Delta k)x+\phi_2}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} Ae^{i(\omega t - kx)} & \left(e^{i(\phi_1 - \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} + \Delta\omega t - \Delta kx)} + e^{i(\phi_2 - \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} - \Delta\omega t + \Delta kx)} \right) \\ &= 2Ae^{i(\omega t - kx + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2})} \left(e^{i(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} + \Delta\omega t - \Delta kx)} + e^{i(-\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} - \Delta\omega t + \Delta kx)} \right) \\ &= 2Ae^{i(\omega t - kx + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2})} \cos\left(\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} + \Delta\omega t - \Delta kx\right)\right) \end{aligned}$$

La partie reelle est donc donne par

$$y_0 = 2A \cos(\omega t - kx + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}) \cos(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} + \Delta\omega t - \Delta kx)$$

Dans le cas $\Delta\omega = 0 \Rightarrow \Delta k = 0$ et donc

$$y_0 = 2A \cos(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}) \cos(\omega t - kx + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2})$$

5.6 Vitesse de phase et de groupe

$\Delta\omega \neq 0$ mais $\Delta\omega \ll \omega$.

La vitesse de l'enveloppe V_G est appelee la vitesse de groupe

$$v_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \simeq \frac{d\omega}{dk}$$

pour $\omega = ck$ on a une onde sans dispersion.

Pour une onde avec dispersion ($\frac{\omega}{k} \neq \text{const.}$) on a la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$ on a en general

$$v_G = \frac{d\omega}{dk}$$