Topologie

David Wiedemann

Table des matières

List of Theorems

Lecture 1: Introduction

Mon 21 Feb

1 Quotients topologiques

Un espace topologique (X, τ) est ecrit X si la topologie est claire.
Le singloton $\{*\}$ est note $*$.
La boule unite de $\mathbb{R}^n$ est notee D^n et la version ouverte sera $int(D)^n$.

1.1 La topologie quotient

But : Construire de nouveaux espaces a l'aide d'espaces connus en identifiant des points.
Soit X un espace, Y un ensemble et $q : X \to Y$ surjective.

Definition 1 (Topologie quotient)
La topologie quotient sur Y est la topologie des $V \subset Y$ tel que $q^{-1}(V)$ est ouvert dans X .

Remarque
q est alors continue et on verifie que c'est une topologie.

Exemple
$X = [0, 1]$ et $Y = (0, 1) \cup \{*\}$ et q l'application qui envoie 0 et 1 sur $*$.
Alors q est surjective et donc Y peut etre muni de la topologie quotient et est homeomorphe a un cercle.
On definit $f : S^1 \to Y : e^{2\pi it} \mapsto t$ si $0 < t < 1$ et $*$ sinon.

Proposition 3
Soit $q : X \to Y$ une application continue, surjective et ouverte, alors q est un quotient.

Proposition 4
Soit $V \subset Y$ un sous-ensemble tel que $q^{-1}(V)$ est ouverte dans X. Comme q est surjective, alors $V = q(q^{-1}(V))$ et c'est un ouvert car q envoie les ouverts sur les ouverts.

Proposition 5
Une composition de quotients est un quotient.

Theorème 6
La topologie quotient est la plus fine qui rend q continue. De plus, pour $g : Y \to Z$, g est continue si et seulement si $g \circ q$ est continue.

Proposition 7
Si $q : X \to Y$ est continue, la preimage d'un ouvert de Y est ouvert dans X.
La topologie quotient est celle qui contient le plus d'ouvert possibles.
Clairement, si g est continue, alors $g \circ q$ l'est aussi.
Si $g \circ q$ est continue, soit $W \subset Z$ un ouvert, alors $(g \circ q)^{-1}(W) = q^{-1}(g^{-1}(W))$ est ouvert et par definition $g^{-1}(W)$ est ouvert dans Y.

Proposition 8
Le quotient d'un compact est compact

Preuve
L'image d'un compact est compacte. □

1.2 Relations d'equivalence

Si $q : X \to Y$ est un quotient, on definit sur X une relation d'equivalence $\sim$ par $x \sim x'$ ssi $q(x) = q(x')$, alors les points de Y sont les classes d'equivalence $[x]$.

Definition 2
Si $\simeq$ est une relation d'equivalence sur X, alors $X/\sim$ est l'espace quotient des classes d'equivalence.

Proposition 9 (Proprietes universelles)
Soit $\sim$ une relation d'equivalence sur X et $f : X \to Z$ tel que $x \sim x' \implies f(x) = f(x')$, alors il existe un unique $\overline{f} : X/\sim \to Z$ tel que $\overline{f} \circ q = f$

Preuve
Pour que le triangle commute, on doit poser $\overline{f}([x]) = f(x)$ et l'application est bien definie par hypothese et donc unique.
On sait que $\overline{f}$ est continue ssi $\overline{f} \circ q$ l'est. □

Definition 3
Si $A \subset X$, on pose $x \sim x' \iff x = x'$ ou $x, x' \in A$. Le collapse X/A est l'espace quotient $X/\sim$

Par exemple $I/\{0,1\}$.

Exemple

$$D^n/\partial D^n = D^n/S^{n-1} = S^n$$

Pour deux espaces bien connus, pointes (X_1, x_1) et (X_2, x_2), on peut construire un nouvel espace en identifiant x_1 et x_2.

Definition 4 (Reunion disjointe)
Soit I un ensemble, X_α un espace pour chaque $\alpha \in I$.
La reunion disjointe $\bigcup X_\alpha$ est l'ensemble $\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha \times \{\alpha\}$ dont la topologie est engendree par les sous-ensemble de la forme $U_\alpha \times \{\alpha\}$

Definition 5
Soit I un ensemble et pour tout $\alpha \in I$, (X_α, x_α) un espace pointe.
Le wedge $\bigvee_\alpha X_\alpha$ est le collapse de la reunion disjointe ou on identifie les points de base

Definition 6
Soit X un espace. Le cylindre $Cyl(X)$ est $X \times I$ et le cone CX est le collapse du cylindre a la base.

1.3 Separation et quotients

On definit sur $\mathbb{R} \times \{0;1\}$ une relation d'equivalence $\sim$ par $(x,0) \sim (x,1)$ si $x \neq 0$.
Le quotient est la droite a deux origines dont on ne peut separer les deux origines $(0,1)$ et $(0,0)$ par des ouverts.
Regardons le graphe de $\sim$ dans $\mathbb{R} \times \{0;1\} \times (\mathbb{R} \times \{0,1\})$ (ie. une copie de 4 plans)

Proposition 11
Si $X/\sim$ est separe, alors le graphe de $\sim$ dans $X \times X$ est ferme.

Preuve
La preimage de $\Delta \subset X/\sim \times X/\sim$ par $q \times q$ est $\Gamma_\sim$.
Comme Δ est ferme, sa preimage aussi. □

Lecture 2: Conditions de Separation

Sat 26 Feb

1.4 Conditions de separation du quotient

On donne une condition necessaire et une condition suffisante pour que le quotient soit separe

Proposition 12
Soit $\sim$ une relation d'equivalence sur un espace X. Si $X/\sim$ est separe, le graphe Γ de la relation est ferme dans $X \times X$

Preuve
Si $X/\sim$ est separe, par un lemme, la diagonale $\Delta \subset X/\sim \times X/\sim$ est ferme. Considerons $q \times q : X \times X \to X/\sim \times X/\sim$. Cette application est continue et donc $(q \times q)^{-1}(\Delta)$ est un ferme de $X \times X$. Or cette preimage est l'ensemble des paires de points $(x, y) \in X \times X$ tq $q(x) = q(y) \iff x \sim y$. $\square$

On donne maintenant une condition suffisante permettant de conclure qu'un quotient est separe.

Proposition 13
Soit $\sim$ une relation d'equivalence sur un espace X separe. Si $q^{-1}(q(x))$ est compact pour tout point $x \in X$ et de plus que pour $F \subset X$ ferme $q^{-1}(q(F))$ est ferme, alors le quotient est separe.

Preuve
Soit $\overline{x} = q(x)$ et $\overline{y} = q(y)$ deux points distincts de $X/\sim$.
Les saturations $q^{-1}(\overline{x}), q^{-1}(\overline{y})$ sont des compacts par hypothese.
Comme X est separe, on peut separer des compacts avec des ouverts disjoints U et V.
On a donc

$$q^{-1}(\overline{x}) \subset U, q^{-1}(\overline{y}) \subset V \text{ et } U \cap V = \emptyset$$

Posons $E = X \setminus U, F = X \setminus V$ deux fermes de X.
Par hypothese, les saturations $q^{-1}(q(E))$ et $q^{-1}(q(F))$ sont fermes. Ainsi $U' = X \setminus q^{-1}(q(E))$ et $V' = X \setminus q^{-1}(q(F))$ sont des ouverts. On observe que $E \subset q^{-1}(q(E)), F \subset q^{-1}(q(F))$, alors $U' \subset U, V' \subset V$.
De plus $q^{-1}(q(x)) \subset U'$ et $q^{-1}(q(y)) \subset V'$.
Il reste a montrer que $q(U')$ et $q(V')$ sont ouverts dans $X/\sim$ et disjoints. Pour le premier point, il suffit de verifier que $q^{-1}(q(U'))$ est ouvert dans X. On pretend que $q^{-1}(q(U')) = U'$.
En effet, $U' \subset q^{-1}(q(U'))$ est toujours vrai, il faut donc montrer l'inclusion inverse.
Soit $u \in q^{-1}(q(U'))$, donc $q(u) \in q(U')$. Donc $q(u) \notin q(E)$ et donc $u \in U'$ Le meme resultat est vrai pour V'.

Il faut donc finalement encore montrer que $q(U')$ et $q(V')$ sont des voisinages ouverts, de $\overline{x}$ et $\overline{y}$ disjoints.
Supposons qu'il existe $u' \in U', v' \in V'$ tel que $q(u') = q(v')$. Alors $u' \in q^{-1}(q(v')) \subset q^{-1}(q(V')) = V'$.
Donc $U' \cap V' \neq \emptyset$, contradiction. $\square$

Lecture 3: Groupes topologiques

Mon 28 Feb

Corollaire 14
Soit $A \subset X$ un sous-espace compact d'un espace X separe. Alors le collapse $\mathfrak{X}A$ est separe.

Preuve
Il suffit de verifier les proprietes du theoreme.
Soit $\overline{x} \in \mathfrak{X}A$.
Si $x \in A, q^{-1}(x) = A$ est compact. Si $x \notin A, q^{-1}(\overline{x}) = \{x\}$ qui est compact.
Soit F un ferme de X, alors si $F \cap A = \emptyset$, on a que $q^{-1}(q(F)) = F$ ferme, sinon $F \cap A \neq \emptyset$ et alors

$$q^{-1}(q(F)) = F \cup A$$

Comme A est compact et X separe, alors A ferme. □

Exemple
Soit $\sim$ une relation d'equivalence sur $\mathbb{R}^2$ defini par $(x, y) \sim (x', y') \iff (x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2$.
Alors

$$\mathbb{R}^2 \sim$$

est un tore, separe, or la proposition ne s'applique pas car $q^{-1}(0, 0) = \mathbb{Z}^2$.

Definition 7 (Espaces projectifs)
L'espace projectif reel $\mathbb{R}P^n$ est le quotient de S^n par la relation antipodale $x \sim y \iff x = \pm y$ pour $x, y \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Exemple
- $\mathbb{R}P^0 = \mathfrak{S}^o\sim = *$, $\mathbb{R}P^1 = \mathfrak{S}^1\sim \simeq S^1$.

- *De plus $\mathbb{R}P^2 = S^2/\sim$ est le plan projectif*

Proposition 17
$\mathbb{R}P^n$ est compact et separe

Suit immediatement des propositions.
L'analogue complexe donne

Definition 8 (Espace projectif complexe)
L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ est le quotient de $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par la relation $x \sim y \iff \exists \alpha \in S^1$ tel que $x = \alpha y$.

De meme, pour les quaternions $\mathbb{H}$, on peut definir $\mathbb{H}P^n$, pour les octonions on peut construire $\mathbb{O}P^0, \mathbb{O}P^1 \simeq S^8, \mathbb{C}P^2$

1.5 Quotients par des actions de groupe

Definition 9 (Groupe topologique)
Un groupe topologique est un groupe G tel que les applications de multiplication $\mu : G \times G \to G$ et l'inverse $\iota : G \to G$ sont continues.

Tout groupe peut etre vu comme un groupe topologique discret.

Exemple
Le cercle unite $S^1 \subset \mathbb{C}$ muni de la multiplication complexe est un groupe topologique

Remarque
Les seules spheres qui sont des groupes topologiques sont S^0, S^1, S^3

Lemme 20
Si $H < G$ est un sous-groupe d'un groupe topologique G, la topologie induite en fait un groupe topologique.

Definition 10
Une action d'un groupe topologique G sur un espace X est une application $\mu : X \times G \to X$ telle que

$$\mu(x, 1_G) = x \forall x \in X \text{ et } \mu(x, gg') = \mu(\mu(x, g), g')$$

Definition 11
Soit μ une action de G sur X, l'espace des orbites $\mathfrak{X}G$ et l'espace quotient de X par la relation $x \sim y \iff \exists g \in G$ tel que $y = \mu(x, g)$

Remarque
Si $H < G$ est un groupe topologique, alors H agit sur G par multiplication a droite et $\mathfrak{G}H$ est l'espace des orbites gH. Si H est un sous-groupe normal, ce quotient est un groupe.

Proposition 22
Soit μ une action d'un groupe topologique G sur un espace X, alors

1. *$q : X \to \mathfrak{X}G$ est ouverte*
2. *Si X est compact, le quotient est compact*
3. *Si X et G sont compact et separe, alors $\mathfrak{X}G$ aussi.*

Preuve
Soit $U \subset X$ ouvert, $q(U)$ est ouvert car $q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{g \in G} U \cdot g$ et $U \cdot g$ est ouvert car la translation est continue et est meme un homeomorphisme.
La propriete 2 est immediate.

On considere $X \times X \times G \to X \times X$ en envoyant $(x, y, g) \mapsto (x, yg)$, cette application est continue.
Le graphe Γ de la relation definie par μ est l'image de $\Delta \times G$.
Comme X est separe, Δ est ferme donc compact et G est compact.
Ainsi Γ est compact dans $X \times X$ separe donc Γ est ferme.
Soient xG et yG deux orbites differentes, ie. $(x, y) \notin \Gamma$.
Il existe donc des ouverts $x \in U, y \in V$ tel que $U \times V \cap \Gamma = \emptyset$.
Comme q est ouverte, $q(U), q(V)$ sont des voisinages ouverts des orbites xG et yG respectivement. On conclut en remarquant que ces images sont disjointes.
Sinon on aurait zG commun, ie. $zg \in U, zg' \in V$ pour $g, g' \in G$ et alors $(zg, zgg^{-1}g') \in \Gamma \cap (U \times V)$ $\square$

1.6 $SO(n)$

Proposition 23
Soit G compact et X separe. Soit μ une action transitive de G sur X.
Alors, si G_x, alors

$$\mathfrak{G} G_x = X$$

pour tout $x \in X$.

Preuve
On definit $\mu_x : G \to X$ envoyant $g \mapsto xg$, continue.
On observe que μ_x envoie G_x sur x et par transitivite, μ_x est surjective.
Par la propriete universelle du quotient, μ_x passe au quotient.
$\bar{\mu}_x$ est une bijection continue. C'est un homeo car $\mathfrak{G} G_x$ est compact, X separe. $\square$

Lecture 4: Attachements de Cellules

Mon 07 Mar

1.7 Recollements

On construit de nouveaux espaces a l'aide de pieces plus simple.
On se donne $f : A \to X, g : A \to Y$ deux applications. On recolle X et Y le long de A

Definition 12 (Recollement)
Le recollement de X et Y le long de A est le quotient de $X \coprod Y$ par la relation d'equivalence engendree par $f(a) \sim g(a) \forall a \in A$

Remarque
Il ne suffit pas d'identifier $f(a) \sim g(a)$ pour que la relation soit une relation d'equivalence.
Pour garantir la transitivite, on a des zigszags d'equivalence $f(a) \sim g(a) = g(b) \sim f(b) = f(c) \sim g(c) \dots$

Exemple
Si $A = *,\ f(*) = x_0 \in X, g(*) = y_0 \in Y$*, alors le recollement* $X \cup_* Y$ *est le wedge* $X \vee Y$

On notera le recollement $X \cup_A Y$.
Si $q : X \coprod Y \to X \cup_A Y$ est le quotient, alors l'inclusion $i_1 : X \to X \coprod Y$ induit $i = q \circ i_i : X \to X \cup_A Y$ et de meme pour l'inclusion de Y.

Proposition 26
Le recollement $X \cup_A Y$ *est le pushout de* $Y \leftarrow A \to X$.

Preuve
On doit montrer l'existence et l'unicite de θ.
Puisque chaque element de $X \cup_A Y$ *admet un representant dans* X *ou* Y*, on doit poser* $\theta([x]) = \alpha(x) \forall x \in X$ *et* $\theta([y]) = \beta(y) \forall y \in Y$.
On montre l'existence.
Posons $\Theta : X \coprod Y \to Z$ *l'application determinee par* α *et* β.
On verifie que Θ *est compatible avec* $\sim$*. Soit* $a \in A$*, alors* $\Theta(f(a)) = \alpha(f(a)) = \beta(g(a)) = \Theta(g(a))$.
Ainsi Θ *passe au quotient et induit* θ*, qui est donc bien continue.* $\square$

Des maintenant, on suppose que $g : A \subset Y$ est l'inclusion d'un sous-espace ferme.

Lemme 27
Soit $C \subset Y$*, alors la saturation de* C *est*

$$f(C \cap A) \coprod (C \cup f^{-1} \circ f(C \cap A))$$

Preuve
On va regarder ce qui se passe pour tout $c \in C$.
Si $c \notin A$*, alors* $q^{-1}(q(c)) = \{c\}$*, sinon* $q^{-1}(q(c))$ *contient* $f(c) \in X$ *et* $f^{-1}(f(c)) \subset Y$ $\square$

Lemme 28
Si $C \subset X$ *,* $q^{-1}(q(C)) = C \coprod f^{-1}(C) \subset X \coprod Y$

Preuve
Comme ci-dessus, si $c \in C$ *n'est pas dans l'image de* f *, on a* $q^{-1}(q(c)) = \{c\}$*, sinon on a* $c \in X$ *et* $f^{-1}(c) \subset A \subset Y$ $\square$

Proposition 29
Soient X *et* Y *deux espaces separes,* $g : A \subset Y$ *l'inclusion d'un compact, alors* $X \cup_A Y$ *est separe.*

Preuve
On observe que $X \coprod Y$ *est separe. Avant d'appliquer le critere de separabilite, on montre que l'application quotient est fermee. Comme un ferme de* $X \coprod Y$ *est la reunion disjointe de deux fermes on a deux cas.*
Si $C \subset X$ *ferme, alors* $q(C)$ *est ferme* $\iff$ $q^{-1}(q(C))$ *est fermee. Par le lemme ci-dessus,*

$$q^{-1}(q(C)) = C \coprod f^{-1}(C)$$

qui sont fermes.
Si $C \subset Y$*, alors* $q^{-1}(q(C)) = f(C \cap A) \coprod (C \cup f^{-1}(f(C \cap A)))$ □

On a $f(C \cap A)$ compact et donc ferme puisque Y est separe.
Pour conclure, on verifie les deux conditions du critere.
Pour conclure, on verifie les deux conditions du critere, la saturation d'un ferme est fermee grace aux preparatifs.
Soit $z \in X \coprod Y$, on doit montrer que $q^{-1}(q(z))$ est compact, les lemmes ci-dessus permettent de conclure parce que si $z = a \in A, f^{-1}(f(a))$ est un ferme d'un compact et est donc compacte.

1.8 Attachement de cellules

Ici $g : A \subset CA = {A \times I}/{A \times 1}$.
Soit $f : A \to X$, le recollement $X \cup_A CA$ aussi note $X \cup_f CA$ est appele attachement d'une A-cellule sur X le long de f.
Si $A = S^{n-1}$ alors cet attachement est celui d'une n-cellule

Remarque
$CS^{n-1} \simeq D^n$*, on note* $X \cup_f CS^{n-1} = X \cup_f e^n$ *ou* $X \cup_f D^n$ *et on appelle* $e^n \simeq D^n$ *une* n*-cellule (fermee.)*

Proposition 31
Si X *est separe et* A *est compact et separe, alors* $X \cup_f CA$ *est separe.*
Si en plus X *est compact*

Preuve
Le premier point suit de la proposition precedente car CA *est separe, le 2eme point suit du critere de compacite car* $X \coprod Ca$ *est compact.* □