EPFL - Automne 2020	Prof. Z. Patakfalvi
Structures Algébriques	**Exercices**
Série 11	27 Novembre 2020

Exercice 1.
Trouvez les normalisateurs de tous les sous-groupes de S_3.

Exercice 2.
Pour $n, i > 0$, trouvez le normalisateur de $\langle \tau\sigma^i \rangle$ dans D_{2n}.
Indication : servez-vous des calculs de l'Exercice 6 de la série 9.

Exercice 3.
Trouvez les normalisateurs de tous les sous-groupes de A_4.
Indication : Remarquez que si vous trouvez le normalisateur de $\langle (1\ 2\ 3) \rangle$, alors vous avez trouvé à un isomorphisme près le normalisateurs de n'importe quel autre sous-groupe cyclique d'ordre 3.

Exercice 4.
Prouvez que l'unique sous-groupe normal non-trivial de A_4, est aussi normal dans S_4.
Indication : commencez par prouver le résultat suivant, qui sera aussi utile pour les autres exercices : étant donné une tour de sous-groupes $F \leq H \leq G$, on a $N_G(F) \cap H = N_H(F)$.

Exercice 5.

1. Soit $H \leq S_4$ un sous-groupe tel que $H \not\subset A_4$. Montrez que $|H \cap A_4| = |H \cap (1\ 2)A_4|$.
   Indication : Montrez qu'il existe $g \in (1\ 2)A_4$, et que la multiplication par g donne une bijection entre les deux ensembles considérés.
2. Déduisez que si $H \leq A_4$, alors $[N_{S_4}(H) : N_{A_4}(H)]$ vaut 1 ou 2.
3. Déterminez les normalisateurs dans S_4 des sous-groupes de A_4.

Exercice 6.
Montrez que D_8 et Q_8 ne sont pas isomorphes entre eux.
Indication : considérez les ordres des éléments des deux groupes.

Exercice 7.

1. Trouver $Z(Q_8)$.
2. Faites la liste des sous-groupes de Q_8, et montrez qu'ils sont tous normaux.
   Indication : quotientez Q_8 par les sous-groupes cycliques et utilisez le théorème de correspondence.
3. Pour chaque $H \trianglelefteq Q_8$, déterminez à quel groupe abélien est isomorphe le quotient Q_8/H.
4. Trouvez les classes de conjugaison de Q_8.
   Indication : utilisez l'Exercice 6.1 de la série 8.

Exercice 8.
Fixons un entier $n \geq 1$.

1. Soient $\sigma, \sigma' \in S_n$ deux transpositions distinctes. Montrez que $\sigma\sigma'$ est soit un 3-cycles, soit un produit de deux 3-cycles.
2. Déduisez que A_n est généré par les 3-cycles.