

## Question Ouverte 2

David Wiedemann

2 mai 2021

Notons d'abord que, parce que  $U^T U = \text{Id}$ , la base  $u_1, \dots, u_n$  forme une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$ .

Pour simplifier, on notera

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Notons  $V = \langle u_{l+2}, \dots, u_n \rangle$ , alors on a que

$$\min_{\substack{x \in S^{n-1} \\ x \perp u_{l+2}, \dots, x \perp u_n}} f(x) = \min_{x \in S^{n-1} \cap V^\perp} f(x).$$

Notons d'abord que la valeur  $\lambda_{l+1}$  est bien atteinte par  $f$  sur  $S^{n-1}$ , en effet

$$f(u_{l+1}) = u_{l+1}^T A u_{l+1} = u_{l+1}^T U D U^T u_{l+1} = \lambda_{l+1}$$

Soit donc  $x \in V^\perp \cap S^{n-1}$ , et soit  $x = (x_1, \dots, x_{l+1}, 0, \dots, 0)$  l'expression de  $x$  dans la base  $\{u_1, \dots, u_n\}$ .

Alors on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \left( \sum_{i=1}^n x_i u_i^T \right) \cdot A \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i u_i \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i u_i^T \right) \cdot U \cdot D \cdot U^T \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i u_i \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i (U^T u_i)^T \right) \cdot D \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i (U^T u_i) \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i (U^T u_i)^T \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i (U^T u_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \lambda_i (U u_i^T)^T \cdot (U^T u_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \lambda_i \delta_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \\
&= \sum_{i=1}^{l+1} \lambda_i x_i \\
&\geq \sum_{i=1}^{l+1} \lambda_{l+1} x_i \quad \text{On utilise que } \lambda_{l+1} \leq \lambda_i \forall 1 \leq i \leq l+1 \\
&\geq \lambda_{l+1} \sum_{i=1}^{l+1} x_i \\
&\geq \lambda_{l+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout élément dans  $x \in V^\perp$ , on a montré que

$$x^T A x \geq \lambda_{l+1}$$

Et que  $\lambda_{l+1}$  est atteint, ce qui montre que

$$\min_{\substack{x \in S^{n-1} \\ x \perp u_{l+2}, \dots, x \perp u_n}} f(x) = \lambda_{l+1}$$