

Série 6

David Wiedemann

21 octobre 2020

1

Soit $g \in G$ un élément satisfaisant $g^2 = e_G$, où e_G dénote l'élément neutre.

On construit alors l'application de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vers G .

$$\phi_g : \begin{array}{l} [0] \rightarrow e_G \\ [1] \rightarrow g \end{array}$$

Montrons que tous les homomorphismes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vers G .

En effet, supposons qu'il existe un homomorphisme ϕ tel que $\phi(1)^2 \neq e_G$, alors

$$e_G = \phi([0]) = \phi([1] + [1]) = \phi([1])^2 \neq e_G$$

Ce qui est une contradiction. Donc tous les homomorphismes sont de la forme ϕ_g .

Dénotons par $G_2 = \{g \in G \mid g^2 = e_G\}$, alors on définit l'application

$$\begin{array}{l} G_2 \mapsto \text{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, G) \\ g \mapsto \phi_g \end{array}$$

2

Posons, comme dans l'exercice 2, $G = H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On sait que le groupe $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ contient 4 éléments :

$$1, 3, 5, 7$$

Clairement, 1 sera l'élément neutre, les 3 éléments restants sont tous des 2-torsions. Donc par la section 1, les seuls morphismes de $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ sont de la forme ϕ_g .

Définissons donc $\alpha = \phi_3$ et $\beta = \phi_5$.

Car $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont des groupes abéliens, les hypothèses de l'exercice 2 s'appliquent et il existe un unique homomorphisme ϕ de

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \mapsto (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$$

Il ne reste plus qu'à vérifier qu'il s'agit d'un morphisme bijectif.

Si on traduit l'exercice 2 aux conditions de cet exercice, on obtient un diagramme tel que celui-ci :

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \\
 \iota_1 \downarrow & \searrow \phi_3 & \\
 \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\phi} & (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \\
 \iota_2 \uparrow & \nearrow \phi_5 & \\
 & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &
 \end{array}$$

Dans l'exercice 2, on a trouvé que $\phi(g, h) = \phi_3(g) \cdot \phi_5(h)$ où $g \in G, h \in H$. Pour montrer la bijectivité de ϕ , on montre la surjectivité et l'injectivité. Clairement, chaque élément de $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ est atteint, en effet :

$$\phi(0, 0) = \phi_3(0) \cdot \phi_5(0) = 1$$

$$\phi(1, 0) = \phi_3(1) \cdot \phi_5(0) = 3$$

$$\phi(0, 1) = \phi_3(0) \cdot \phi_5(1) = 5$$

$$\phi(1, 1) = \phi_3(1) \cdot \phi_5(1) = 7$$

De la liste ci-dessus, il suit également que ϕ est injective.