Série 5, Exercice 3

David Wiedemann

15 octobre 2020

1

Supposons que $a^n \neq a^m, \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$, alors la suite définie par

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

est contenue dans A, mais possède une infinité d'éléments distincts, ce qui contredit l'hypothèse que A est fini.
Donc il existe, $m, n \in \mathbb{N}$, tel que $a_n = a_m$

2

Si $a^m = 1_A$, alors $a^m - 1_A = 0_A$ et on a fini.
Supposons donc $n > m$ et $a^n = a^m \neq 1_A$.
On a que $n - m > 0$, donc a^{n-m} est bien défini.

$$a_n = a^n = a^{n-m}a^m = a^m = a_m$$

Donc

$$a^{n-m}a^m = a^m \Rightarrow a^{n-m} = 1_A.$$

3

Donc, pour tout $a \in A$, il existe$n \in \mathbb{N}$ tel que

$$a^n = 1_A$$

Alors l'inverse de l'élément a est l'élément

$$a^{n-1}$$

Donc l'ensemble $A \setminus \{0_A\}$ est stable par inversion, donc A est un corps.