Analyse avancée II
Mathématiques 1ère année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 22 au 26 février 2021

Série 2 du mercredi 24 février 2021

Exercice 1.

Soit un entier $n > 0$.

1) Vérifier que pour tout $t \in]0, \pi]$:

$$\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} + \cos t + ... + \cos nt. \tag{1}$$

2) En déduire que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Solution :

1) En utilisant la formule de trigonométrie

$$\cos(a) \times \sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b)), \tag{3}$$

on a, pour tout $t \in]0, \pi]$:

$$2\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\right)\sin\frac{t}{2} = \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{t}{2}\cos(kt) \tag{4}$$

$$= \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)\right) \tag{5}$$

$$= \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t. \tag{6}$$

2) Par ce qui précède, la fonction continue $t \mapsto \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t/(2\sin\frac{t}{2})$ peut être prolongée par continuité en 0. Ainsi l'intégrale généralisée devient une intégrale usuelle sur $[0, \pi]$:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right)\mathrm{d}t \tag{7}$$

$$= \left[\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{t=0}^{t=\pi} \tag{8}$$

$$= \frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Exercice 2.

Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ si } t = 0, \\ \dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{t}, \text{ si } 0 < t \leq \pi. \end{cases} \tag{10}$$

1) Vérifier que f est continue.
2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f(t) \sin\left(\left((n + \frac{1}{2}\right)t\right) \mathrm{d}t = 0. \tag{11}$$

3) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

4) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \tag{13}$$

Solution :

1) La fonction f est continue sur $]0, \pi]$; montrons qu'elle l'est aussi à droite en 0. Pour cela, on utilise à deux reprises la règle de Bernoulli–L'Hospital.

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t - 2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1 - \cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2} + t\cos\frac{t}{2}} \tag{14}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin\frac{t}{2}}{4\cos\frac{t}{2} - t\sin\frac{t}{2}} = 0 = f(0). \tag{15}$$

2) Pour n fixé et pour $t \in]0, \pi[$, la fonction f est dérivable et sa dérivée est donnée par

$$f'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}}. \tag{16}$$

On observe que

$$\lim_{t\to\pi^-} \frac{1}{t^2} - \frac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{\pi^2}, \tag{17}$$

donc f' peut être prolongée continûment en π. Par ailleurs, en passant par les développements limités, on a

$$\lim_{t\to 0^+} f'(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{4\sin^2\frac{t}{2} - t^2\cos\frac{t}{2}}{4t^2\sin^2\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{t^4}{24} + \mathcal{O}(t^6)}{t^4 + \mathcal{O}(t^6)} = \frac{1}{24}. \tag{18}$$

N.B. on aurait également pu appliquer à nouveau la règle de Bernoulli–L'Hospital. On sait désormais que la fonction $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \begin{cases} -\dfrac{\cos \frac{t}{2}}{4\sin^2 \frac{t}{2}} + \dfrac{1}{t^2}, \text{ si } 0 < t \leq \pi, \\ \dfrac{1}{24}, \text{ si } t = 0 \end{cases} \tag{19}$$

est continue. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a en intégrant par parties

$$\int_0^\pi f(t) \sin\Big(\Big(n + \frac{1}{2}\Big)t\Big) \,\mathrm{d}t = \left[-\frac{f(t)}{n + \frac{1}{2}} \cos\Big(\Big(n + \frac{1}{2}\Big)t\Big) \right]_{t=0}^{t=\pi} \tag{20}$$

$$+ \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi g(t) \cos\Big(\Big(n + \frac{1}{2}\Big)t\Big) \,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi g(t) \cos\Big(\Big(n + \frac{1}{2}\Big)t\Big) \,\mathrm{d}t \xrightarrow{n \to +\infty} 0. \tag{21}$$

3) L'intégrale généralisée $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$ converge car $t \mapsto \sin(t)/t$ est bornée sur $]0, \pi]$. On a même mieux : la fonction $t \mapsto \sin(t)/t$ pour $t > 0$ se prolonge par continuité en posant qu'elle vaut 1 en $t = 0$; nous admettrons travailler avec ce prolongement dans ce qui suit. De la définition de f, en utilisant le point 2, on obtient pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\sin\big((n + \frac{1}{2})t\big)}{t} \,\mathrm{d}t \tag{22}$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin\big((n + \frac{1}{2})t\big)}{2\sin \frac{t}{2}} \,\mathrm{d}t - \int_0^\pi f(t) \sin\Big(\Big(n + \frac{1}{2}\Big)t\Big) \,\mathrm{d}t \tag{23}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi f(t) \sin\Big(\Big(n + \frac{1}{2}\Big)t\Big) \,\mathrm{d}t \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{\pi}{2}, \tag{24}$$

où, si nécessaire, les fonctions sont prolongées par continuité en $t = 0$ (possible ici).

4) On procède en deux étapes

   a) L'intégrale généralisée $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$ converge (cf. le cours), et donc l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$ aussi (avec le prolongement par continuité ci-dessus en $t = 0$). D'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \tag{25}$$

   b) L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} \,\mathrm{d}t$ converge absolument car

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq \left| \frac{\sin^2(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}. \tag{26}$$

   L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} t^{-2} \,\mathrm{d}t$ converge. L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t^2} \,\mathrm{d}t$ converge absolument car $0 \leq |t^{-2} \sin^2(t)| \leq 1$ sur $]0, 1]$

$$\forall t \in]0, 1], \quad 0 \leq \left| \frac{\sin^2(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2} \qquad \text{and} \qquad \int_0^1 1 \,\mathrm{d}t < +\infty. \tag{27}$$

Ainsi l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
\int_{1/x}^{x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_{1/2x}^{x/2} \frac{\sin 2s}{s}\,\mathrm{d}s && (28)\\
&= \left[-\frac{\cos(2s)}{2s}\right]_{s=1/2x}^{s=x/2} - \int_{1/2x}^{x/2} \frac{\cos(2s)}{2s^2}\,\mathrm{d}s && (29)\\
&= \left[\frac{2\sin^2(s)-1}{2s}\right]_{s=1/2x}^{s=x/2} + \int_{1/2x}^{x/2} \frac{2\sin^2(s)-1}{2s^2}\,\mathrm{d}s && (30)\\
&= \left[\frac{\sin^2(s)}{s}\right]_{s=1/2x}^{s=x/2} + \int_{1/2x}^{x/2} \frac{\sin^2(s)}{s^2}\,\mathrm{d}s - \left[\frac{1}{2s}\right]_{s=1/2x}^{s=x/2} - \int_{1/2x}^{x/2} \frac{1}{2s^2}\,\mathrm{d}s && (31)\\
&= \left[\frac{\sin^2 s}{s}\right]_{s=1/2x}^{s=x/2} + \int_{1/2x}^{x/2} \frac{\sin^2 s}{s^2}\,\mathrm{d}s. && (32)
\end{aligned}$$

Par conséquent, le passage à la limite donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t. \tag{33}$$

Exercice 3.

Démontrer le critère d'Abel–Dirichlet, énoncé ci-dessous. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que :

1) g est de classe C^1, monotone, et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$;
2) la fonction $F : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est bornée.

Alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Solution :

Soit $x > a$. On a, en intégrant par parties :

$$\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = F(x)g(x) - F(a)g(a) - \int_a^x F(t)g'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{34}$$

On a immédiatement $\lim_{x\to\infty} F(x)g(x) = 0$ puisque $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ et F est bornée.

D'autre part, si $C \geq 0$ est une borne de $|F|$, on a pour tout pour $x > a$

$$\int_a^x |F(t)g'(t)|\,\mathrm{d}t = \left|\int_a^x |F(t)|g'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq C\left|\int_a^x g'(t)\,\mathrm{d}t\right| = C|g(x) - g(a)|. \tag{35}$$

Cette dernière quantité est bornée puisque $\lim_{x\to\infty} g(x)$ existe. On a donc que $\int_a^\infty F(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente et donc – a fortiori – convergente. Au final, $\int_a^\infty f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 4.

Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_1^{\infty} t^2 \sin t^4 \,\mathrm{d}t \tag{36}$$

est convergente, en utilisant le critère d'Abel–Dirichlet.

Solution :

Faisons le changement de variables $s = t^4$. On obtient, pour $x > 1$:

$$\int_1^{x} t^2 \sin t^4 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_1^{x^4} s^{-1/4} \sin s \,\mathrm{d}s. \tag{37}$$

On applique alors le critère d'Abel–Dirichlet avec $g(t) = t^{-1/4}$ et $f(t) = \sin(t)$.