Série 1 du lundi 22 février 2021

Exercice 1.

Démontrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{1/2} \left(\frac{\sin(t^n)}{\ln(t^n)}\right)^n \mathrm{d}t \tag{1}$$

est convergente pour tout entier n positif.

Exercice 2.

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln t}{t^2} & \text{si } 0 < t \leqslant 1, \\ \ln t & \text{si } t > 1. \end{cases} \tag{2}$$

1) Montrer que les deux intégrales généralisées $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ divergent, i.e. que les limites

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

n'existent pas dans $\mathbb{R}$.

2) Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{1/x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \int_{1/x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Exercice 3.

Montrer les affirmations suivantes :

1) Si $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ est $C^1([0,\pi])$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{5}$$

2) Si $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ est continue, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{6}$$

Indication. D'après le théorème de Weierstraß, pour tout $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ et $\varepsilon \in]0,+\infty[$, il existe un polynôme p_ε tel que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon$.

Exercice 4.

Soit $b > 0$ dans $\mathbb{R}$, une fonction continue $f : [0,b] \to \mathbb{R}$, et une fonction périodique et continue $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant la période 1.

1) Si $p \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ et $\int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t = 1$, prouver que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^b f(t)p(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{7}$$

2) Si $M = \int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t$, prouver que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^b f(t)p(nt)\,\mathrm{d}t = M \int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Remarque. Cet exercice est une généralisation du précedent. Il peut-être démontré en utilisant les sommes de Darboux.