Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Semaine du 22 au 26 février 2021

Série 2 du mercredi 24 février 2021

Exercice 1.

Soit un entier $n > 0$.

1) Vérifier que pour tout $t \in]0, \pi]$:

$$\frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} + \cos t + \ldots + \cos nt. \tag{1}$$

2) En déduire que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Exercice 2.

Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ si } t = 0, \\ \dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{t}, \text{ si } 0 < t \leqslant \pi. \end{cases} \tag{3}$$

1) Vérifier que f est continue.
2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t = 0. \tag{4}$$

3) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

4) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

Exercice 3.

Démontrer le critère d'Abel–Dirichlet, énoncé ci-dessous. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que :

1) g est de classe C^1, monotone, et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$;

2) la fonction $F : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est bornée.

Alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 4.

Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_1^{\infty} t^2 \sin t^4 \,\mathrm{d}t \tag{7}$$

est convergente, en utilisant le critère d'Abel–Dirichlet.