# Analyse I

David Wiedemann

## Table des matières



## List of Theorems

**Lecture 1: Introduction**

Mon 14 Sep

# 1 Introduction

## 1.1 Buts du Cours

**Officiel :**

Suites, series, fonctions, derivees, integrales , ...

**Secrets :**

Apprendre le raisonnement rigoureux
Creativite
Esprit Critique
Ne croyez rien tant que c'est pas prouve

On construit sur ce qu'on a fait, on recommence pas toujours a 0, par rapport a d'autres domaines(lettres par exemple)

**Theorème 1 (env. -400)**
*Il n'existe aucin nombre ( fraction) x tel que* $x^2 = 2$.

Ca contredit pythagore nn ?

On va demontrer le theoreme. [1]

**Lemme 2 (Lemme)**
*Soit* $n \in \mathbb{N}$ *Alors* $n$ *pair* $\iff$ $n^2$ *pair.*

**Preuve**
$\Rightarrow$ *Si* $n$ *pair* $\Rightarrow n^2$ *pair.*
*Hyp.* $n = 2m (m \in \mathbb{N})$
*Donc* $n^2 = 4m^2$, *pair.*

*Par l'absurde,* $n$ *impair.* $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$.

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

*impair. Donc si* $n$ *est impair, alors* $n^2$ *est forcement impair. Absurde.* $\square$

**Preuve**
*Supposons par l'absurde* $\exists x$ *t.q.* $x^2 = 2$ *et* $x = \frac{a}{b} (a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$.
*On peut supposer* $a$ *et* $b$ *non tous pairs.(sinon reduire).*

$$x^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$$

1. On demontre d'abord un lemme

*pair.*
*Lemme : a pair, i.e.* $a = 2n(n \in \mathbb{N})$.

$$a^2 = 4n^2 = 2b^2 \Rightarrow 2n^2 = b^2, i.e. b^2 pair.$$

*Lemme : b pair.*
*Donc a et b sont les deux pairs, on a une contradiction.*
$\lightning$ $\square$

En conclusion, le theoreme est bel et bien vrai, et contredit donc pythagore. Donc les fractions ( $\mathbb{Q}$ ) ne suffisent pas a decrire/mesurer les longueurs geometriques. Il faut les nombres reels, on les comprends seulement vraiment depuis 2 siecles.
C'est important de chercher ce genre d'erreurs.
Prochain but : definir les nombres reels ($\mathbb{R}$). L'interaction entre les fractions et les nombres reels.

## 2 Definir $\mathbb{R}$

On commence avec la definition axiomatique des nombres reels.

**Axiom 3 (Nombres Reels)**
$\mathbb{R}$ *est un corps, en d'autres termes :*
*Ils sont munis de deux operations : plus et fois.*

- *Associativite* $x + (y + z) = (x + y) + z (x, y, z \in \mathbb{R})$ [2]

- *Commutativite* $x + y = y + x$.

- *Il existe un element neutre* $0$ *t.q.* $0 + x = x, x \in \mathbb{R}$. [3]
- *Distributivite* $x(yz) = (xy)z$

- *Il existe un element inverse, unique* $-x \in \mathbb{R}$ *t.q.* $x + (-x) = 0$

Remarque : Il existe beaucoup d'autres corps que $\mathbb{R}$, par exemple $\mathbb{Q}, \mathbb{C}$, $\{0, 1, 2\} \mod 3$

Attention : $\{0, 1, 2, 3\} \mod 4$ n'est pas un corps !
Presque tous marchent, ils satisfont 8 des 9 axiomes.

---

2. L'associativite n'est pas forcement vraie(octonions)
3. Il y a aucune difference entre les regles pour l'addition que pour la multiplication.

**Lemme 4 (Theorem name)**
$\forall x \exists ! y$ *t.q.* $x + y = 0$.

**Preuve**
*Supposons* $x + y = 0 = x + y'$
*A voir :* $y = y'$.

$$\begin{aligned} y &= y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' \\ &= (x + y) + y' = 0 + y' = y' \end{aligned}$$

*CQFD.* □

**Exercice**
Demontrer que 0 est unique.

**Proposition 5 (Annulation de l'element neutre)**
$0 \cdot x = 0$

**Preuve**

$$x = x \cdot 1 = x(1 + 0) = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$$

$$0 = x + (-x) = x + (-x) + x \cdot 0$$ □

$\Rightarrow 0 = x \cdot 0$ [4]

**Corollaire 6 (x fois moins 1 egale -x)**

$$x + x \cdot (-1) = 0$$

**Preuve**
*A voir :* $x \cdot (-1)$ *satisfait les proprietes de* $-x$.
*Or*
$$x + x(-1) = x(1 - 1) = x \cdot 0 = 0.$$ □

**Exercice**
Montrer que $\forall x : -(-x) = x$ et que ceci implique $(-a)(-b) = ab$.

---

Rien de tout ca n'a quelque chose a voir avec $\mathbb{R}$.
Il nous faut plus d'axiomes ! !

4. $a - b = a + (-b)$

**Axiom 7 (Nombres Reels II)**
*$\mathbb{R}$ est un corps ordonne. Ce qui revient a dire que les assertions suivantes sont verifiees.*

- $x \leq y$ *et* $y \leq z$ *impliquent* $x \leq z$

- $(x \leq yety \leq x) \Rightarrow x = y$
- *pour tout couple de nombres reels* $x$ *et* $y$ *: ou bien* $x \leq y$ *ou bien* $x \geq y$.

Exemple de corps ordonnnes :
(1) $\mathbb{R}$, (2) $\mathbb{Q}$, (3) $\{0, 1, 2\} \mod 3$ n'est pas un corps ordonne.
**Exercice**
$x \leq y \iff -x \geq -y$ **Exercice**
$x \leq y$ et $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$
$x \leq y$ et $z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz$.

---

Il nous manque encore un axiome, et c'est le dernier : pour mercredi !

# Lecture 2: Cours Mercredi

Wed 16 Sep

## 2.1 Exemple d'utilisation

**Definition 1 (valeur absolue)**

$$|x| = \begin{cases} x \ si \ x \geq 0 \\ -x \ si \ x < 0 \end{cases}$$

**Proposition 8 (Inegalite du triangle)**
*Elle dit que*

$$\forall x, y : |x + y| \leq |x| + |y|$$

**Preuve**
*Cas* $x, y \geq 0$ *: alors* $x + y \geq 0$

$$\iff x + y \leq x + y$$

*Ce qui est toujours vrai.*
*Cas* $x \geq 0$ *et* $y < 0$.
*Si* $x + y \geq 0$, *alors*

$$\begin{aligned} \iff |x + y| &\leq x - y \\ \iff x + y &\leq x - y \\ y &\leq -y \end{aligned}$$

*c'est vrai car $y < 0$.*
*Si $x + y < 0$, alors*

$$\iff -x - y \leq x - y \qquad \square$$

*Donc $-x \leq x$ vrai car $x \geq 0$ .*

**Definition 2 (Bornes)**
*Terminologie : Soit $A \subseteq E$ , $E$ corps ordonne.*

— *Une borne superieure ( majorant) pour $A$ et un nombre $b$ tq*

$$a \leq b \forall a \in A.$$

— *Une borne inferieure ( minorant) pour $A$ et un nombre $b$ tq*

$$a \geq b \forall a \in A.$$

*On dira que l'ensemble $A$ est borne si il admet une borne.*

**Axiom 9 (Axiome de completude)**

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \neq \emptyset$$

*et majoree $\exists s \in \mathbb{R}$ t.q*

1. *$s$ est un majorant pour $A$.*

2. *$\forall$ majorant $b$ de $A$, $b \geq s$.*

*Cet axiome finis la partie axiomatique du cours.*

**Remarque 10**

1. *$\forall s' < s \exists a \in A : a > s'$.*

2. *$s$ est unique.*

**Definition 3 (Supremum)**
*Ce $s$ s'appelle le supremum de $A$, note $sup(A)$.*

**Remarque 11**
*$\exists$ ( pour $A$ minore et $\neq \emptyset$) une borne inferieure plus grande que toutes les autres, notee $inf(A)$ ( infimum).*

$$\inf(A) = -\sup(-A)$$

**Remarque 12**
*Si $\sup(A) \in A$, on l'appelle le maximum.*

**Remarque 13**
*Si $\inf(A) \in A$, on l'appelle le minimum.*

**Proposition 14**
$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x$.

**Preuve**
*Par l'absurde,*
*Alors*

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : n < x$$

$\Rightarrow \mathbb{N}$ *borne et* $\neq \emptyset \Rightarrow \exists s = \sup(\mathbb{N})$

$$s - \frac{1}{2} < s \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > s - \frac{1}{2}$$

$n + 1 \in \mathbb{N}$ *et* $n + 1 > s - \frac{1}{2} + 1 = s + \frac{1}{2}$
*donc* $n + 1 > s$ *absurde.* □

**Corollaire 15 (Propriete archimedienne)**
1. $\forall x \forall y > 0 \exists n \in \mathbb{N} : ny > x$.
2. $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon$

**Preuve**
*Pour 2, appliquer la proposition a* $x = \frac{1}{\epsilon} \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{1}{\epsilon}$
*Alors*

$$\Rightarrow \epsilon > \frac{1}{n}$$

*Pour montrer le 1.*
*Considerer* $\frac{x}{y}$ □

On peut maintenant montrer que la racine de deux existe.

**Theorème 16 (La racine de deux existe)**

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

**Preuve**

$$A := \{y | y^2 < 2\}$$

*Clairement* $A \neq \emptyset$ *car* $1 \in A$. *De plus,* $A$ *est majore : 2 est une borne. (si* $y > 2, y^2 > 4 > 2 \Rightarrow y \notin A$*).*
*Donc* $\exists x = \sup(A)$
*Supposons ( par l'absurde) que* $x^2 < 2$
*Soit* $0 < \epsilon < 1, \frac{2-x^2}{4x}$.

*Clairement, par hypothese* $2-x^2>0$ *et idem pour* $4x$ *car* $x\geq 1$. *Soit* $y=x+\epsilon$, *alors*

$$y^2=x^2+2\epsilon x+\epsilon^2<x^2+\frac{2-x^2}{2}+\frac{2-x^2}{2}=2$$

$\Rightarrow y\in A$ *Mais* $y=x+\epsilon>x$. *Absurde car* $x=\sup(A)$. *Donc* $x^2\geq 2$. *Deuxiemement, supposons ( absurde)* $x^2>2$.
*Soit* $0<\epsilon<\frac{x^2-2}{2x}>0$.
*Posons* $b=x-\epsilon$.

$$\begin{aligned} b<x &\Rightarrow \exists y\in A: y>b \\ \Rightarrow y^2>b^2=x^2-2\epsilon x+\epsilon^2 &> x^2-\underbrace{2\epsilon x}_{<x^2-2} \\ &> x^2-(x^2-2)=2. \end{aligned}$$

*Conclusion :* $y^2>2$ *contredit* $y\in a$.
*Donc* $x^2=2$. □

**Remarque 17**
*Preuve similaire :*

$$\forall y>0\exists!x>0:x^2=y$$

**Proposition 18 ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$)**

$$\forall x<y\in\mathbb{R}\exists z\in\mathbb{Q}:x<z<y$$

**Lemme 19**

$$\forall x\exists n\in\mathbb{Z}:|n-x|\leq\frac{1}{2}$$

*Ou encore :*

$$\forall x\exists[x]\in\mathbb{Z}tq$$

$$\begin{cases}[x]\leq x\\ [x]+1>x\end{cases}$$

**Preuve**

$$\exists n\in\mathbb{Z}:n>x(Archimede).$$

*Soit* $[x]=\inf\{n\in\mathbb{Z}:n>x\}-1$ □

**Preuve (Preuve de la densite)**
*Archimede :* $\exists q \in \mathbb{N} : q > \frac{1}{y-x}$.
*Donc*

$$\begin{aligned} qy - qx &> 1. \\ \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : qx < p &< qy \end{aligned}$$

*par exemple :*

$$p = [qy]$$

*si* $qy \notin \mathbb{Z}$ *ou bien*

$$p = qy - 1$$

*si* $qy \in \mathbb{Z}$ □

## Lecture 3: Suites

Wed 23 Sep

$$\begin{aligned} 0,999 \\ 0,9 \\ 0.99 \\ 0.999 \\ 0.9999 \\ \vdots \end{aligned}$$

**Proposition 20 (Densite des irrationnels)**
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*, les irrationnels sont dense dans* $\mathbb{R}$*.*

**Preuve**
*Soit* $x < y$ *( dans* $\mathbb{R}$*).*
*Cherche* $z \notin \mathbb{Q}$ *tq* $x < z < y$*.*

$$\exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} tq x < \frac{p}{q} < y$$

*Propr. archimedienne* $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\underbrace{\frac{p}{q} + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{n}}_{:=z} < y$$

*car*

$$\exists n : \frac{1}{n} < \underbrace{y - \frac{1}{q}}_{>0} / \sqrt{2}$$

*Il reste a voir que :* $z = \frac{p}{q} + \sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$

$$\sqrt{2} = n(z - \frac{p}{q})$$
$$z \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \lightning$$

□

# 3 Suites et limites

**Definition 4 (Suite)**
*Une suite* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est une application ( = fonction)* $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

**Remarque 21**
*Suite* $(x_n) \neq$ *ensemble* $\{x_n\}$ *Il arrive qu'on indice* $x_n$ *par une partie de* $\mathbb{N}$*. Mais suite = suite infinie*

**Exemple 22**
$x_n = \frac{1}{n}(n = 1, 2, \ldots)$
$x_n = (-1)^n; x_n = n!; F_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$
$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415$

---

## 3.1 Convergence

**Definition 5 (Convergence de suites)**
*L'expression* $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$ *signifie :*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$$

*On dit alors que* $(x_n)$ *converge ( vers* $l$*). Sinon,* $(x_n)$ *diverge.*

**Lemme 23 (Unicite de la limite)**
*Si* $(x_n)$ *converge, il existe un unique* $l \in \mathbb{R}$ *tq* $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$

**Preuve**
*Supposons* $l, l'$ *limites. Si* $l \neq l'$*, alors* $|l - l'| > 0$ *Donc* $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \frac{|l-l'|}{2}$
*De meme* $\exists n_1 \forall n > n_1 : |x_n - l'| < \frac{|l-l'|}{2}$
*Soit* $n > n_0, n_1$ *Alors :*

$$|l - l'| = |l - x_n + x_n - l'| \leq \underbrace{|l - x_n|}_{<|l-l'|/2} + \underbrace{|x_n - l'|}_{|x_n - l'|}$$

*Donc*
$$|l - l'| < 2 \cdot \frac{|l - l'|}{2}$$

$\lightning$ □

**Exemple 24**

1. *Si* $(x_n)$ *est constante (* $\exists a \forall n : x_n = a$*) alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ *( Archimede)*

**Definition 6**

*Terminologie :*

$(x_n)$ *est bornee, majoree, minoree, rationnelle, ... etc si l'ensemble* $\{x_n\}$ *l'est.*

---

*La suite* $(x_n)$ *est croissante si* $x_n \leq x_{n+1} \forall n$ *Idem decroissante Dans les deux cas, on dit que la suite* $(x_n)$ *est monotone*

**Lemme 25**

*Toute suite convergente est bornee.*

**Preuve**

*Posons* $\epsilon = 7$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |x_n - l| < 7 \qquad \square$$

*Soit* $B_1 \geq |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|$

*Posons* $B = max(B_1, |l| + 7)$ *Alors* $|x_n| \leq B \forall n$.

Attention la reciproque n'est pas vraie!!

**Exemple 26**

$x_n = (-1)^n$ *definit une suite bornee non convergente.*

**Preuve**

*Supposons* $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n = l$.

*Posons* $\epsilon = \frac{1}{10}$ *alors* $\exists n_0 \forall n > n_0 : |(-1)^n - l| < \frac{1}{10}$

$n > n_0$ *pair* $\Rightarrow |1 - l| < \frac{1}{10}$

$n > n_0$ *impair* $\Rightarrow |-1 - l| < \frac{1}{10}$

*ceci implique*

$$\Rightarrow |1 - (-1)| \leq |1 - l| + |-1 - l| < \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \qquad \square$$

**Proposition 27**

*Supposons* $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$ *et* $\lim_{n\to+\infty} x'_n = l'$

*Alors* 1. : $\lim_{n\to+\infty}(x_n + x'_n) = l + l'$, *et* 2. : $\lim_{n\to+\infty} x_n \cdot x'_n = l \cdot l'$

**Preuve**

*1 :*

*Soit* $\epsilon > 0$ *Cherche* $n_0$ *tq* $\forall n > n_0 : |x_n + x'_n - (l + l')| < \epsilon$.

*Appliquons les deux hypothese a* $\frac{\epsilon}{2} : \exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ *et*
$\frac{\epsilon}{2} : \exists N' \forall n > N' : |x'_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ *Posons* $n_0 = \max(N, N')$
*Si* $n > n_0$*, alors*

$$|x_n + x'_n - (l + l')| \leq |x_n - l| + |x'_n - l'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

*2 :*
*Par le lemme,* $\exists B$ *tq.* $|x_n|, |x'_n| < B \forall n$.
*Soit* $\epsilon > 0$. *Appliquons les hypotheses a* $\frac{\epsilon}{2B}$.

$$\exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2B}$$

*Si* $n > n_0 := \max(N, N')$ :

$$\begin{aligned} |x_n x'_n - l l'| &\leq |x_n x'_n - x_n l'| + |x_n l' - l l'| \\ &= \underbrace{|x_n|}_{<B} \cdot \underbrace{|x'_n - l'|}_{<\frac{\epsilon}{2B}} + \underbrace{|l'|}_{<B} \cdot \underbrace{|x_n - l|}_{<\frac{\epsilon}{2B}} < \epsilon \end{aligned}$$

□

**Lemme 28**
*On a utilise : lemme Si* $x_n \leq B \forall n$ *et* $\lim_{n \to +\infty} x_n = l$ *alors* $l \leq B$

**Preuve**
*Par l'absurde :*
*Si* $l > B$*, posons* $\epsilon = l - B > 0$
$\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$
*en particulier* $x_n > l - \epsilon - B$ ↯

□