# Analyse I

David Wiedemann

## Table des matières

# List of Theorems

**Lecture 1: Introduction**

Mon 14 Sep

# 1 Introduction

## 1.1 Buts du Cours

**Officiel :**
Suites, series, fonctions, derivees, integrales , ...

**Secrets :**
Apprendre le raisonnement rigoureux
Creativite
Esprit Critique
Ne croyez rien tant que c'est pas prouve

On construit sur ce qu'on a fait, on recommence pas toujours a $0$, par rapport a d'autres domaines(lettres par exemple)

**Theorème 1 (env. -400)**
*Il n'existe aucin nombre ( fraction) x tel que* $x^2 = 2$.

Ca contredit pythagore nn ?
On va demontrer le theoreme. [1]

**Lemme 2 (Lemme)**
*Soit* $n \in \mathbb{N}$ *Alors* $n$ *pair* $\iff$ $n^2$ *pair.*

**Preuve**
$\Rightarrow$ *Si n pair* $\Rightarrow n^2$ *pair.*
*Hyp.* $n = 2m(m \in \mathbb{N})$
*Donc* $n^2 = 4m^2$, *pair.*

*Par l'absurde,* $n$ *impair.* $n = 2k + 1(k \in \mathbb{N})$.

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

*impair. Donc si* $n$ *est impair, alors* $n^2$ *est forcement impair. Absurde.* $\square$

**Preuve**
*Supposons par l'absurde* $\exists x$ *t.q.* $x^2 = 2$ *et* $x = \frac{a}{b}(a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$.
*On peut supposer* $a$ *et* $b$ *non tous pairs.(sinon reduire).*

$$x^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$$

1. On demontre d'abord un lemme

*pair.*
*Lemme : $a$ pair, i.e. $a = 2n (n \in \mathbb{N})$.*

$$a^2 = 4n^2 = 2b^2 \Rightarrow 2n^2 = b^2, i.e. b^2 pair.$$

*Lemme : $b$ pair.*
*Donc $a$ et $b$ sont les deux pairs, on a une contradiction.*
$\lightning$ $\square$

En conclusion, le theoreme est bel et bien vrai, et contredit donc pythagore. Donc les fractions ( $\mathbb{Q}$ ) ne suffisent pas a decrire/mesurer les longueurs geometriques. Il faut les nombres reels, on les comprends seulement vraiment depuis 2 siecles.
C'est important de chercher ce genre d'erreurs.
Prochain but : definir les nombres reels ($\mathbb{R}$). L'interaction entre les fractions et les nombres reels.

# 2 Definir $\mathbb{R}$

On commence avec la definition axiomatique des nombres reels.

**Axiom 3 (Nombres Reels)**
*$\mathbb{R}$ est un corps, en d'autres termes :*
*Ils sont munis de deux operations : plus et fois.*

- *Associativite $x + (y + z) = (x + y) + z (x, y, z \in \mathbb{R})$* [2]
- *Commutativite $x + y = y + x$.*
- *Il existe un element neutre $0$ t.q. $0 + x = x, x \in \mathbb{R}$.* [3]
- *Distributivite $x(yz) = (xy)z$*
- *Il existe un element inverse, unique $-x \in \mathbb{R}$ t.q. $x + (-x) = 0$*

Remarque : Il existe beaucoup d'autres corps que $\mathbb{R}$, par exemple $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\{0, 1, 2\} \mod 3$

Attention : $\{0, 1, 2, 3\} \mod 4$ n'est pas un corps !
Presque tous marchent, ils satisfont 8 des 9 axiomes.

---

2. L'associativite n'est pas forcement vraie(octonions)
3. Il y a aucune difference entre les regles pour l'addition que pour la multiplication.

**Lemme 4 (Theorem name)**
$\forall x \exists! y$ *t.q.* $x + y = 0$.

**Preuve**
*Supposons* $x + y = 0 = x + y'$
*A voir :* $y = y'$.

$$\begin{aligned} y &= y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' \\ &= (x + y) + y' = 0 + y' = y' \end{aligned}$$

*CQFD.* □

**<u>Exercice</u>**
Demontrer que $0$ est unique.

**Proposition 5 (Annulation de l'element neutre)**
$0 \cdot x = 0$

**Preuve**

$$x = x \cdot 1 = x(1 + 0) = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$$

$$0 = x + (-x) = x + (-x) + x \cdot 0$$ □

$\Rightarrow 0 = x \cdot 0$
[4]

**Corollaire 6 (x fois moins 1 egale -x)**

$$x + x \cdot (-1) = 0$$

**Preuve**
*A voir :* $x \cdot (-1)$ *satisfait les proprietes de* $-x$.
*Or*

$$x + x(-1) = x(1 - 1) = x \cdot 0 = 0.$$ □

**<u>Exercice</u>**
Montrer que $\forall x : -(-x) = x$ et que ceci implique $(-a)(-b) = ab$.

---

Rien de tout ca n'a quelque chose a voir avec $\mathbb{R}$.
Il nous faut plus d'axiomes!!

4. $a - b = a + (-b)$

**Axiom 7 (Nombres Reels II)**
*$\mathbb{R}$ est un corps ordonne. Ce qui revient a dire que les assertions suivantes sont verifiees.*

— *$x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$*

— *$(x \leq y et y \leq x) \Rightarrow x = y$*
— *pour tout couple de nombres reels $x$ et $y$ : ou bien $x \leq y$ ou bien $x \geq y$.*

Exemple de corps ordonnnes :
(1) $\mathbb{R}$, (2) $\mathbb{Q}$, (3) $\{0, 1, 2\} \mod 3$ n'est pas un corps ordonne.
**Exercice**
$x \leq y \iff -x \geq -y$ **Exercice**
$x \leq y$ et $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$
$x \leq y$ et $z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz$.

---

Il nous manque encore un axiome, et c'est le dernier : pour mercredi !

## Lecture 2: Cours Mercredi

Wed 16 Sep

### 2.1 Exemple d'utilisation

**Definition 1 (valeur absolue)**

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

**Proposition 8 (Inegalite du triangle)**
*Elle dit que*
$$\forall x, y : |x + y| \leq |x| + |y|$$

**Preuve**
*Cas $x, y \geq 0$ : alors $x + y \geq 0$*

$$\iff x + y \leq x + y$$

*Ce qui est toujours vrai.*
*Cas $x \geq 0$ et $y < 0$.*
*Si $x + y \geq 0$, alors*

$$\iff |x + y| \leq x - y$$
$$\iff x + y \leq x - y$$
$$y \leq -y$$

*c'est vrai car $y < 0$.*
*Si $x + y < 0$, alors*

$$\iff -x - y \leq x - y \qquad \square$$

*Donc $-x \leq x$ vrai car $x \geq 0$ .*

**Definition 2 (Bornes)**
*Terminologie : Soit $A \subseteq E$ , $E$ corps ordonne.*

— *Une borne superieure ( majorant) pour $A$ et un nombre $b$ tq*

$$a \leq b \forall a \in A.$$

— *Une borne inferieure ( minorant) pour $A$ et un nombre $b$ tq*

$$a \geq b \forall a \in A.$$

*On dira que l'ensemble $A$ est borne si il admet une borne.*

**Axiom 9 (Axiome de completude)**

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \neq \emptyset$$

*et majoree $\exists s \in \mathbb{R}$ t.q*

1. *$s$ est un majorant pour $A$.*
2. *$\forall$ majorant $b$ de $A$, $b \geq s$.*

*Cet axiome finis la partie axiomatique du cours.*

**Remarque**

1. *$\forall s' < s \exists a \in A : a > s'$.*
2. *$s$ est unique.*

**Definition 3 (Supremum)**
*Ce $s$ s'appelle le supremum de $A$, note $sup(A)$.*

**Remarque**
*$\exists$ ( pour $A$ minore et $\neq \emptyset$) une borne inferieure plus grande que toutes les autres, notee $inf(A)$ ( infimum).*

$$\inf(A) = -\sup(-A)$$

**Remarque**
*Si $\sup(A) \in A$, on l'appelle le maximum.*

**Remarque**
*Si $\inf(A) \in A$, on l'appelle le minimum.*

**Proposition 14**
$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x.$

**Preuve**
*Par l'absurde,*
*Alors*
$$\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : n < x$$
$\Rightarrow \mathbb{N}$ *borne et* $\neq \emptyset \Rightarrow \exists s = \sup(\mathbb{N})$
$$s - \frac{1}{2} < s \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > s - \frac{1}{2}$$
$n + 1 \in \mathbb{N}$ *et* $n + 1 > s - \frac{1}{2} + 1 = s + \frac{1}{2}$
*donc* $n + 1 > s$ *absurde.* □

**Corollaire 15 (Propriete archimedienne)**
1. $\forall x \forall y > 0 \exists n \in \mathbb{N} : ny > x.$
2. $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon$

**Preuve**
*Pour 2, appliquer la proposition a* $x = \frac{1}{\epsilon} \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{1}{\epsilon}$
*Alors*
$$\Rightarrow \epsilon > \frac{1}{n}$$
*Pour montrer le 1.*
*Considerer* $\frac{x}{y}$ □

On peut maintenant montrer que la racine de deux existe.

**Theorème 16 (La racine de deux existe)**
$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

**Preuve**
$$A := \{y | y^2 < 2\}$$
*Clairement* $A \neq \emptyset$ *car* $1 \in A$. *De plus, A est majore :* $2$ *est une borne.* (*si* $y > 2, y^2 > 4 > 2 \Rightarrow y \notin A$).
*Donc* $\exists x = \sup(A)$
*Supposons ( par l'absurde) que* $x^2 < 2$

*Soit* $0 < \epsilon < 1, \frac{2-x^2}{4x}$.
*Clairement, par hypothese* $2 - x^2 > 0$ *et idem pour* $4x$ *car* $x \geq 1$. *Soit* $y = x + \epsilon$, *alors*

$$y^2 = x^2 + 2\epsilon x + \epsilon^2 < x^2 + \frac{2-x^2}{2} + \frac{2-x^2}{2} = 2$$

$\Rightarrow y \in A$ *Mais* $y = x+\epsilon > x$. *Absurde car* $x = \sup(A)$. *Donc* $x^2 \geq 2$. *Deuxiemement, supposons ( absurde)* $x^2 > 2$.
*Soit* $0 < \epsilon < \frac{x^2-2}{2x} > 0$.
*Posons* $b = x - \epsilon$.

$$\begin{aligned} b < x \Rightarrow \exists y \in A : y > b \\ \Rightarrow y^2 > b^2 = x^2 - 2\epsilon x + \epsilon^2 > x^2 - \underbrace{2\epsilon x}_{<x^2-2} \\ > x^2 - (x^2 - 2) = 2. \end{aligned}$$

*Conclusion :* $y^2 > 2$ *contredit* $y \in a$.
*Donc* $x^2 = 2$. □

**Remarque**
*Preuve similaire :*

$$\forall y > 0 \exists! x > 0 : x^2 = y$$

**Proposition 18 ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$)**

$$\forall x < y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y$$

**Lemme 19**

$$\forall x \exists n \in \mathbb{Z} : |n - x| \leq \frac{1}{2}$$

*Ou encore :*

$$\forall x \exists [x] \in \mathbb{Z} tq$$

$$\begin{cases} [x] \leq x \\ [x] + 1 > x \end{cases}$$

**Preuve**

$$\exists n \in \mathbb{Z} : n > x(Archimede).$$

*Soit* $[x] = \inf\{n \in \mathbb{Z} : n > x\} - 1$ □

**Preuve (Preuve de la densite)**
*Archimede :* $\exists q \in \mathbb{N} : q > \frac{1}{y-x}$.
*Donc*

$$qy - qx > 1.$$
$$\Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : qx < p < qy$$

*par exemple :*

$$p = [qy]$$

*si* $qy \notin \mathbb{Z}$ *ou bien*

$$p = qy - 1$$

*si* $qy \in \mathbb{Z}$ □

## Lecture 3: Suites

Wed 23 Sep

$$\begin{aligned} 0,999 \\ 0,9 \\ 0.99 \\ 0.999 \\ 0.9999 \\ \vdots \end{aligned}$$

**Proposition 20 (Densite des irrationnels)**
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*, les irrationnels sont dense dans* $\mathbb{R}$*.*

**Preuve**
*Soit* $x < y$ *( dans* $\mathbb{R}$*).*
*Cherche* $z \notin \mathbb{Q}$ *tq* $x < z < y$*.*

$$\exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} tq x < \frac{p}{q} < y$$

*Propr. archimedienne* $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\underbrace{\frac{p}{q} + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{n}}_{:=z} < y$$

*car*

$$\exists n : \frac{1}{n} < \underbrace{y - \frac{1}{q}}_{>0} / \sqrt{2}$$

*Il reste a voir que :* $z = \frac{p}{q} + \sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$

$$\sqrt{2} = n(z - \frac{p}{q})$$
$$z \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \lightning$$

□

# 3 Suites et limites

**Definition 4 (Suite)**
*Une suite* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est une application* ( $=$ *fonction*) $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

**Remarque**
*Suite* $(x_n) \neq$ *ensemble* $\{x_n\}$ *Il arrive qu'on indice* $x_n$ *par une partie de* $\mathbb{N}$. *Mais suite* $=$ *suite infinie*

**Exemple**
$x_n = \frac{1}{n}(n = 1, 2, \ldots)$
$x_n = (-1)^n; x_n = n!; F_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$
$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415$

---

## 3.1 Convergence

**Definition 5 (Convergence de suites)**
*L'expression* $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$ *signifie :*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$$

*On dit alors que* $(x_n)$ *converge ( vers* $l$*). Sinon,* $(x_n)$ *diverge.*

**Lemme 23 (Unicite de la limite)**
*Si* $(x_n)$ *converge, il existe un unique* $l \in \mathbb{R}$ *tq* $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$

**Preuve**
*Supposons* $l, l'$ *limites. Si* $l \neq l'$*, alors* $|l - l'| > 0$ *Donc* $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \frac{|l-l'|}{2}$
*De meme* $\exists n_1 \forall n > n_1 : |x_n - l'| < \frac{|l-l'|}{2}$
*Soit* $n > n_0, n_1$ *Alors :*

$$|l - l'| = |l - x_n + x_n - l'| \leq \underbrace{|l - x_n|}_{<|l-l'|/2} + \underbrace{|x_n - l'|}_{|x_n - l'|}$$

*Donc*
$$|l - l'| < 2 \cdot \frac{|l - l'|}{2}$$

$\lightning$ □

**Exemple**

1. *Si* $(x_n)$ *est constante* ( $\exists a \forall n : x_n = a$) *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ ( *Archimede*)

**Definition 6**
*Terminologie :*
$(x_n)$ *est bornee, majoree, minoree, rationnelle, ... etc si l'ensemble* $\{x_n\}$ *l'est.*
*La suite* $(x_n)$ *est croissante si* $x_n \leq x_{n+1} \forall n$ *Idem decroissante Dans les deux cas, on dit que la suite* $(x_n)$ *est monotone*

> **Lemme 25**
> *Toute suite convergente est bornee.*

**Preuve**
*Posons* $\epsilon = 7$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |x_n - l| < 7 \qquad \square$$

*Soit* $B_1 \geq |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|$
*Posons* $B = max(B_1, |l| + 7)$ *Alors* $|x_n| \leq B \forall n$.

Attention la reciproque n'est pas vraie!!

**Exemple**
$x_n = (-1)^n$ *definit une suite bornee non convergente.*

**Preuve**
*Supposons* $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n = l$.
*Posons* $\epsilon = \frac{1}{10}$ *alors* $\exists n_0 \forall n > n_0 : |(-1)^n - l| < \frac{1}{10}$
$n > n_0$ *pair* $\Rightarrow |1 - l| < \frac{1}{10}$
$n > n_0$ *impair* $\Rightarrow |-1 - l| < \frac{1}{10}$
*ceci implique*

$$\Rightarrow |1 - (-1)| \leq |1 - l| + |-1 - l| < \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \qquad \square$$

> **Proposition 27**
> *Supposons* $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$ *et* $\lim_{n\to+\infty} x'_n = l'$
> *Alors* 1. : $\lim_{n\to+\infty}(x_n + x'_n) = l + l'$*, et* 2. : $\lim_{n\to+\infty} x_n \cdot x'_n = l \cdot l'$

**Preuve**
*1 :*
*Soit* $\epsilon > 0$ *Cherche* $n_0$ *tq* $\forall n > n_0 : |x_n + x'_n - (l + l')| < \epsilon$.
*Appliquons les deux hypothese a* $\frac{\epsilon}{2}$ : $\exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ *et*

$\frac{\epsilon}{2}$ : $\exists N' \forall n > N' : |x'_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ *Posons* $n_0 = \max(N, N')$
*Si* $n > n_0$*, alors*

$$|x_n + x'_n - (l + l')| \leq |x_n - l| + |x'_n - l'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

*2 :*
*Par le lemme,* $\exists B$ *tq.* $|x_n|, |x'_n| < B \forall n$.
*Soit* $\epsilon > 0$*. Appliquons les hypotheses a* $\frac{\epsilon}{2B}$.

$$\exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2B}$$

*Si* $n > n_0 := \max(N, N')$ :

$$\begin{aligned} |x_n x'_n - ll'| &\leq |x_n x'_n - x_n l'| + |x_n l' - ll'| \\ &= \underbrace{|x_n|}_{<B} \cdot \underbrace{|x'_n - l'|}_{<\frac{\epsilon}{2B}} + \underbrace{|l'|}_{<B} \cdot \underbrace{|x_n - l|}_{<\frac{\epsilon}{2B}} < \epsilon \end{aligned}$$

□

> **Lemme 28**
> *On a utilise : lemme Si* $x_n \leq B \forall n$ *et* $\lim_{n \to +\infty} x_n = l$ *alors* $l \leq B$

**Preuve**
*Par l'absurde :*
*Si* $l > B$*, posons* $\epsilon = l - B > 0$
$\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$
*en particulier* $x_n > l - \epsilon = B$ ↯

□

## Lecture 4: lundi

Mon 28 Sep

**Remarque**

- $\lim_{n \to +\infty} |x_n| = |\lim_{n \to +\infty} x_n|$*, ce qui est sous-entendu ici est que la limite existe.*

- $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *convergence et limite sont inchangees si on modifie un nombre fini de termes.*
  *En particulier* $(x_n)_{n=17}^{\infty}$*, rien ne change.*
- $x_n \to l$ $(n \to \infty)$*, equivalent a* $\lim_{n \to +\infty} x_n = l$
- *On dit que* $(x_n)$ *converge vers* $+\infty$ *et on note* $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$*, si* $(x_n)$ *diverge de la facon suivante :*

  $$\forall R \in \mathbb{R}, \exists n_0 \forall n > n_0 : x_n > R$$

  *La definition est la meme si* $x_n$ *converge vers* $-\infty$

**Proposition 30 (Inversion d'une limite)**
*Supposons que* $(x_n)$ *converge vers* $l \neq 0$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{l}$

**Corollaire 31**
*Si* $(x_n)$ *converge vers* $l$ *et*
*Si* $(y_n)$ *converge vers* $m \neq 0$ *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{l}{m}$$

*Car* $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$

**Lemme 32**
*Sous les hypotheses de la proposition,*

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n \neq 0$$

**Preuve**
*Appliquons la convergence a* $\epsilon = \frac{|l|}{2}$ ( *car* $l \neq 0$)

$$|x_n - l| < \epsilon \Rightarrow x_n \neq 0$$

□

**Preuve**
*Preuve de la proposition*
*Soit* $\epsilon > 0$.
*On veut estimer*

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{l}\right| = \underbrace{\frac{|l - x_n|}{|x_n - l|_{\geq \frac{|l|}{2}|l|}} <?\epsilon}$$

*pour* $n$ *comme dans le lemme. On veut donc*

$$|l - x_n| < \epsilon \frac{|l|^2}{2}$$

*Donc* $\exists n_1 \forall n \geq n_1$, *on a bien* $|l - x_n| < \epsilon$ □

**Exemple**
*On peut a present calculer*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_d n^d}{b_0 + \ldots + b_f n^f}$$

$a_d \neq 0, b_f \neq 0$
*Si* $d > f$ *alors lim* $= \pm\infty$
*Si* $d < f$ *alors lim* $= 0$

*Si* $d = f$*, alors* $lim = \frac{a_d}{b_f}$
*Justification*
*La suite peut s'ecrire*

$$\frac{a_d + a^{d-1}\frac{1}{n} + \ldots + a_0\frac{1}{n^{d-1}}}{b_0\frac{1}{n^d + \ldots + b_f n^{f-d}}}$$

*Si* $f = d, \to \frac{a_d}{b_f}$

*Si* $f > d, \to 0$
*Si* $f < d, \to \pm\infty$*, selon signe de* $\frac{a_d}{b_f}$

**Proposition 34**
*Soit* $a \in \mathbb{R}$ *avec* $|a| < 1$*, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$$

**Proposition 35**
*Si* $(x_n)$ *est monotone et bornee, alors elle converge.*

**Preuve**
*Soit* $(x_n)$ *croissante. Affirmation,* $x_n \to s := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$
*Soit* $\epsilon > 0, \exists n : x_n > s - \epsilon$ *( def. de sup)*
$\forall n \geq n_0 : s - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq s \Rightarrow |x_n - s| < \epsilon$
*Idem, si elle etait decroissante.* □

**Preuve**
*Remarque :* $(x_n) \to 0 \iff (|x_n| \to 0)$.

$$\ldots |x_n - 0| < \epsilon$$

*Donc on va traiter le cas* $a > 0$*, alors* $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ *est decroissante.*
*Bornee ( par zero et* $1$*)* $\Rightarrow$ *elle admet une limite* $l$*.*
*Or* $\lim_{n\to+\infty} a^n = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} a^{n+1}}_{a\cdot\lim_{n\to+\infty} a^n}$ *Donc* $l = al$*. Si* $l \neq 0, 1 = a$ *absurde, donc* $l$ *nul.* □

**Exemple**
*Def* $(x_n)$*en posant* $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$
*Observons que* $x_n \geq 2 > 0 \forall n$
*Si* $(x_n)$ *converge, alors*

$$l = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}(2 + \frac{1}{x_n}) = 2 + \frac{1}{l}$$

*Donc*

$$l^2 - 2l - 1 = 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{1+1} = l$$

*Or $l \geq 2 \Rightarrow l = 1+\sqrt{2}$ si $l$ existe.*
*A present, estimons $|x_n - l|$ :*

$$\left|x_n - 1 - \sqrt{2}\right| = \left|2 + \frac{1}{x_{n-1}} = (2+\frac{1}{l})\right| = \frac{|l - x_{n-1}|}{x_{n-1}l} \leq \frac{|x_{n-1} - l|}{4}$$
$$\leq \ldots \leq \frac{|x_{n-2} - l|}{4^2} \leq \frac{|2-l|}{4^n} \to 0$$

*car $\frac{1}{4^n} \to 0$*

**Lemme 37 (Deux gendarmes)**
*Soit $(x_n), (y_n), (z_n)$ trois suites avec*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l = \lim_{n\to+\infty} z_n$$

*si $x_n \leq y_n \leq z_n \forall n$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = l$$

**Preuve**
*repose sur le fait que*

$$|x_n - l|, |z_n - l| < \epsilon \Rightarrow l - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \epsilon$$

*montre $|y_n - l| < \epsilon$* □

# 4 Limsup et liminf

**Definition 7 (Limsup et liminf)**
*Soit $(x_n)$ une suite quelconque.*
*On definit la limite superieure par :*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \inf_n \sup \{x_k, k \geq n\}$$

*Attention : Ici on convient que*

$$\sup(A) = +\infty$$

*si $A$ non majore*

$$\inf(A) = -\infty$$

*si $A$ non minore*

*On definit la limite superieure par :*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \sup_n \inf \{x_k, k \geq n\}$$

Notez : $z_n := \sup\{x_k : k \geq n\}$

Cela definit une suite decroissante et donc $(z_n)$ converge vers son inf.

Conclusion : $\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} z + n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} x_k$

## Lecture 5: mercredi 30

Wed 30 Sep

**Theorème 38**
*$(x_n)$ converge $\iff$ $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$ Dans ce cas, la limite prend cette meme valeur.*

**Preuve**
$\Leftarrow$ :
*Soit* $z_n = \sup\{x_p : p \geq n\}$,

$$y_n = \inf\{x_p : p \geq n\}$$

*Rappel :* $(z_n) \to LS$ *et* $(y_n) \to LI$
*Or,* $y_n \leq x_n \leq z_n$. *Donc par les 2 gendamrmes*

$$\Rightarrow (x_n) \to LS = LI$$

$\Rightarrow$ :
*Hypothese :* $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$.
*A voir :* $LS = LI = l$.
*Montrons par exemple que*

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = l$$

( *i.e.* $LS = l$)
*Soit* $\epsilon > 0$.

$$\exists N \forall n \geq N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$
$$\textit{et } \forall n \geq N : |z_n - LS| < \frac{\epsilon}{4}$$

*Def. de* $z_N \Rightarrow \exists p \geq N : |x_p| > z_N - \frac{\epsilon}{4}$
*A present*

$$|LS - l| \leq \underbrace{|LS - z_N|}_{<\frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|z_n - x_p|}_{<\frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|x_p - l|}_{<\frac{\epsilon}{2}}$$

*avec* $p \geq N$ *et* $N \geq N$ *Donc* $\forall \epsilon > 0$ :

$$|LS - l| < \epsilon$$

*Donc* $LS = l$ □

**Theorème 39 (Premiere regle de d'Alembert)**
*Supposons* $x_n \neq 0 \forall n$
*Supposons que* $\rho = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ *existe*
*Si* $\rho < 1$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$
*Si* $\rho > 1$, *alors* $(x_n)$ *diverge.*

**Remarque**
*Si $\rho = 1$, on ne peut rien concluer*

**Exemple**

- $x_n = n$ *diverge, mais* $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$
- $x_n = \frac{1}{n}$ *converge mais* $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$

**Preuve**
*Supposons* $\rho < 1$.
*A voir :* $x_n \to 0$.
*Soit* $\rho < r < 1$. *Convergence pour* $\epsilon = r - \rho$ : $\left|\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - \rho\right| < r - \rho$

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < r$$

*i.e.* $|x_{n+1}| < r\,|x_n|$ *de meme* $|x_{n+2}| < r\,|x_{n+1}| < r^2\,|x_n|$

*Conclusion* $\forall m \geq n_0 : |x_m| < r^{m-n_0}\,|x_{n_0}|$
*Donc*

$$\forall m \geq n_0 : |x_m| < r^m\,|x_{n_0}|\,r^{-n_0}$$

*Onn sait que* $\lim_{m\to+\infty} r^m = 0$ *donc*

$$0 \leq |x_m| \leq r^m c$$

*avec c constante Cas* $\rho > 1$.
*On va montrer que* $|x_n|$ *est non bornee.*
*Soit* $1 < r < \rho$.

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |x_{n+1}/x_n| > r$$

*Donc*

$$|x_{n+1}| > r\,|x_n|$$

*comme avant :*

$$x_m > r^{m-n_0}\,|x_{n_0}| \qquad \square$$

**Remarque**
*Si* $r > 1$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} r^n = +\infty$ $r^n$ *est croissante donc il suffit de montrer que la suite est non bornee.*
*Si elle etait bornee, soit* $l = \lim_{n\to+\infty} r^n \in \mathbb{R}$
*Mais* $l = \lim_{n\to+\infty} r^{n+1} = rl$
*Donc* $l \neq 0 \Rightarrow 1 = r$ *absurde.*

**Definition 8 (Sous-suite)**
*Soit* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *une suite.*
*Une sous-suite de* $(x_n)$ *est une suite de la forme* $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, *ou* $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ *est une suite strictement croissante de* $N$.

**Exemple**
*Si* $(x_n)$ *est une suite, considerer :*

$$x_2, x_3, x_5, x_7, x_{11}, x_{13}, \ldots$$

*Ici,* $n_k = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$

> **Proposition 44**
> *Si* $x_n$ *converge, alors toute sous-suite converge vers la meme limite.*

**Preuve**
*Soit* $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$. *Soit* $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ *une sous-suite et* $\epsilon > 0$.
*A voir :* $\exists k_0 \forall k > k_0 : |x_{n_k} - l| < \epsilon$
*Or* $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$.
*Donc il suffit de choisir* $k_0$ *tq* $n_{k_0} \geq n_0$.
*( puisque la suite* $(n_k)$ *est croissante.)* □

> **Theorème 45 (Bolzano-Weierstrass)**
> *Toute suite bornee admet une sous-suite convergente*

**Preuve**
*On va construire une sous-suite qui converge vers* $s := \limsup_{n\to\infty} x_n$
*Ici,* $(x_n)$ *est la suite en question et on pose*

$$z_n = \sup\{x_p : p \geq n\}$$

*Par recurrence,* $n_1$ *quelconque.*
*Supposons* $n_{k-1}$ *construit et construisons* $n_k$ *:*

$$\exists N \forall n \geq N : |z_n - s| < \frac{1}{k}$$

*Choisissons un* $n \geq N$, $n_{k-1} + 1$

$$\exists p \geq n \text{ t.q. } x_p > z_n - \frac{1}{k}$$

*On definit* $n_k = p$ *(* $n_k > n_{k-1}$*)*
*Or,* $\underbrace{|x_{n_k} - s|}_{<\frac{1}{k}} \leq \underbrace{|x_{n_k} - z_n|}_{<\frac{1}{k}} + \underbrace{|z_n - s|}_{<\frac{1}{k}}$
*Donc* $(x_{n_k} \to s (k \to \infty)$ □

**Definition 9 (Point d'accumulation)**
*x est un point d'accumulation de la suite* $x_n$ *s'il existe une sous-suite qui converge vers* $x$.

**Exemple**

$$x = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

$$x = \liminf_{n\to\infty} x_n$$

## 4.1 Suites de Cauchy

**Definition 10 (Suites de Cauchy)**
*La suite $(x_n)$ est dire de Cauchy si*

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < \epsilon$$

Attention :
Il ne suffit pas de comparer $x_n$ et $x_{n+k}$ pour $k$ fixe.

**Exemple**
$x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

Cauchy $\iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall k \in \mathbb{N} : |x_n - x_{n+k}| < \epsilon$

**Lemme 48**
*Si $(x_n)$ converge, elle est de Cauchy.*

**Preuve**
*Soit $\epsilon > 0$, soit $l$ la limite.*
*Hypothese :*
*avec $\frac{\epsilon}{2}$ : $\exists N \forall n \geq N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$*
*Si $n, n' \geq N$*

$$|x_n - x_{n'}| \leq |x_n - l| + |x_{n'} - l| < \epsilon$$ □

**Theorème 49 (Convergence des suites de Caucjy)**
*Toute suite de Cauchy converge*

**Preuve**
*Soit $(x_n)$ de Cauchy.*

**Lemme 50**
*$(x_n)$ est bornee.*

**Preuve**
*Soit $\epsilon = 10$*

$$\forall N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < 10$$

*Donc $|(x_n)|$ est bornee par*

$$\max(|x_N| + 10, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|)$$ □

*Appliquer Bolzano-Weierstrass*

$$\exists \textit{ sous-suite } (x_{n_k})$$

*qui converge, soit $l$ sa limite. A voir $(x_n)$ converge vers $l$.*
*soit $\epsilon > 0 \exists k_0 \forall k \geq k_0 \, |x_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2}$*

$$\exists N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < \frac{\epsilon}{2}$$

*Si $n \geq N, n_{k_0}$ alors*

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < \epsilon$$

□

### Lecture 6: lundi

Mon 05 Oct

**Remarque**
*Ecriture decimale : $3.1415\ldots$ ou encore $0.333\ldots$ veut dire*

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \ldots$$

*une somme infinie de fractions. La difference entre le $n$ ieme terme et le $n'$ ieme terme :*

$$\leq 10^{-n} \to 0 \Rightarrow \textit{ Cauchy}$$

*Cette limite est une "somme infinie".*

# 5 Series

But : definir les “sommes infinies” .

$$\to \begin{cases} \text{Existe ?} \\ \text{Valeur ?} \end{cases}$$

**Exemple**

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$$

*ou encore*

$$\exp(x) = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots$$

*ou*

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

**Definition 11 (Serie)**
*Le symbole $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ représente*

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots \textit{ et est défini par}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k$$

On appelle

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

une série et on dit qu'elle converge/diverge lorsque la suite $s_n := x_0 + \ldots + x_n$ le fait.

**Corollaire 53**

*Si* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *existent, alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

**Preuve**

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} s_n, s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} t_n, t_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$$

*Alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n, \text{ où}$$

$$u_n = (x_0 + y_0) + \ldots + (x_n + y_n) = s_n + t_n$$

*Donc la limite*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(s_n + t_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

□

**Corollaire 54**

*Pour* $a \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a x_n = a \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, *si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

*existe.*

*Sans preuve.*

**Corollaire 55**

$$\sum_{n=n_0}^{ify} x_n \text{ existe si } \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

*existe et vaut*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n - (x_0 + x_1 + \ldots + x_{n_0-1})$$

*n*

**Corollaire 56 (Critere de Cauchy pour les séries)**

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n converge \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : \left| \sum_{p=N}^{n} x_p \right| < \epsilon$$

( *Dans ce cas,* $|\sum_{n=N}^{\infty} x_n| \leq \epsilon$)

**Preuve**
*Appliquer Cauchy à la suite* $s_n$ *:*

$$\exists n_0 \forall n, n' > n_0 : |s_n - s_{n'}| < \epsilon$$

*Alors*

$$\left| \sum_{p=n'+1}^{n} x_p \right| < \epsilon$$

**Exemple**
*Ecriture decimale,*

**Proposition 58**
*Si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

*converge, alors*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$$

**Preuve**
*Appliquer Cauchy à* $\left| \underbrace{s_n - s_{n-1}}_{=x_n} \right|$
*Attention, la réciproque est FAUSSE.* □

**Proposition 59 (Serie Geometrique)**
*Soit $r \in \mathbb{R}$ avec $|r| < 1$, alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

**Preuve**
*Soit*

$$s_n = r^0 + r^1 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r^n}$$

*Or*

$$\lim_{n \to +\infty} r^{n+1} = 0 \qquad \square$$

*Donc* $s_n \to \frac{1}{1-r}$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1$$

**Proposition 60 (Série Harmonique)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge ( vers } +\infty)$$

**Preuve**
*Considérons*

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \underbrace{\frac{1}{2^n + 1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{2^{n+1} - 2^n = 2^n \text{ termes.}} + \ldots$$

*Tous ces termes sont* $\geq \frac{1}{2^{n+1}}$
*Cette somme est :*

$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} \geq 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \qquad \square$$

*Contredit Cauchy pour* $\epsilon = \frac{1}{2}$.

*Astuce utile :*

$$\sum_{n=}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1$$

**Preuve**

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \qquad \square$$

*Donc ca converge.*
*C'est une série téléscopique*

**Proposition 61 (Critère de Comparaison)**
*Supposons* $0 \leq x_n \leq y_n$.
*Si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \textit{ converge, alors } \sum_{n=0}^{\infty} x_n \textit{ aussi .}$$

**Preuve**

$$s_n = x_0 + \ldots + x_n$$

*est croissante. Donc converge* $\iff$ $(s_n)$ *bornée.*
*Mais* $y_0 + \ldots + y_n$ *converge* $\Rightarrow$ *bornée et* $s_n \leq y_0 + \ldots + y_n \Rightarrow (s_n)$ *bornée* $\square$

**Remarque**
*De plus,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

*Si, par contre,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \textit{ diverge } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n \textit{ diverge}$$

**Corollaire 63**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

*converge.*

**Preuve**
$\forall n \geq 2 : \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$
*Or*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \textit{ converge.}$$

*Donc, par comparaison,* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge*

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge .}$$

□

## Lecture 7: mercredi

Wed 07 Oct

**Definition 12 (Séries Alternées)**
$(x_n)$ *est alternée si* $x_n \cdot x_{n+1} \leq 0 \forall n$

**Theorème 64**
*Soit* $(x_n)$ *alternée,* $|x_n|$ *décroissante, et*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$$

*Alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ converge.}$$

**Exemple**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

*converge. ( série harmonique alternée)* [5]

**Preuve**
*On utilise cauchy.*
*Soit* $n, m \in \mathbb{N}$.

$$\underbrace{x_n + x_{n+1}}_{\geq 0} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m-1} + x_{n+m}$$

*Cas* $x_n \geq 0$ *:*
*Cas où* $n$ *pair*

$$0 \leq \sum_{p=n}^{n_m} x_p \leq x_n$$

*Si* $m$ *impair :*
*idem*
*Que* $n$ *soit pair ou impair*

$$\left| \sum_{p=n}^{n+m} x_p \right| \leq |x_n|$$

5. En fait la série converge vers $-\log 2$

*Or, soit* $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \Rightarrow$$

$\exists N \forall n > N | \, |x_n| \leq \epsilon.$

*Donc* $\forall n > N, m|$

$$|x_n + \ldots + x_{n+m}| < \epsilon \qquad \square$$

#### 5.0.1 Un calcul naif ( avec la série harmonique alternée)

Soit $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, existe par le théorème.
Note : $S < 0$.

$$s_n = \underbrace{-1 + \frac{1}{2}}_{=-\frac{1}{2}} \underbrace{- \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{<0} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n}$$

$s_n < -\frac{1}{n}, \forall n$ pair $\Rightarrow S \leq -\frac{1}{2}$

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$$

à chaque terme $x_n$, on associe $x_{2n}$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \ldots$$
$$= \frac{1}{2}(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots) = \frac{1}{2}S$$

Donc $S = \frac{1}{2}S \Rightarrow S = 0$ Faux !
Conclusion :
On ne peut pas permuter ( en général) les termes d'une série convergente ( somme infinie)

**Definition 13**
*On dit que la somme de*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

*converge absolument si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

*converge.*
*Note : la valeur*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

*ne nous intéresse pas*

**Remarque**
*Si* $x_n \geq 0 \forall n$*, aucune différence entre "convergence" et "convergence absolue".*

**Exemple**

— *La série harmonique alternée converge, mais pas absolument.*

> **Lemme 68**
> *Convergence absolue implique la convergence.*

**Preuve**
$\forall n : 0 \leq x_n + |x_n| \leq 2|x_n|$
*Donc convergence absolue* $\Rightarrow$

$$\sum (x_n + |x_n|)$$

*converge.*
*Or* $-\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ *converge .*
*Somme des deux sommes ci-dessus, implique que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

□

> **Theorème 69**
> *Si*
> $$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$
> *converge absolument, alors toute permutation converge vers la même somme.*

**Exemple**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

*Clarification :*
*Soit* $\sigma$ *une permutation de* $\mathbb{N}$*, i.e. bijection.*
*La nouvelle série sera*

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ pour } y_n = x_{\sigma(n)}$$

*Notons* $s_n = x_0 + \ldots + x_n$ *et*

$$t_n = y_0 + \ldots + y_n = x_{\sigma(0)} + \ldots + x_{\sigma(n)}$$

*Le théorème dit : si* $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ *existe, alors* $\lim s_n = \lim t_n$.

**Preuve**
*1er cas "facile" .*
*Supposons* $x_n \geq 0 \forall n$.
*Alors* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sup \{s_n | n \in \mathbb{N}\}$
*On va montrer que* $\underbrace{\sup_n s_n}_{=:s} \geq \underbrace{\sup_n t_n}_{=:t}$ *et que* $\sup_n s_n \leq \sup_n t_n$
*Pour* $s \geq t$ *:*
*Soit* $\epsilon > 0$. *Or , par déf,* $\exists n t_n > t - \epsilon$
*ie*

$$y_0 + \ldots + y_n > t - \epsilon$$

*ie*

$$x_{\sigma(0)} + \ldots + x_{\sigma(n)} > t - \epsilon$$

*Soit* $m = max_{i=0,\ldots,n} \sigma(i)$, *alors*

$$s_m \geq t - \epsilon$$

*donc*

$$s = \sup s_n > t - \epsilon$$

*vrai* $\forall \epsilon > 0 \Rightarrow s \geq t$
*En considérant* $\sigma^{-1}$, *on obtient de même* $t \geq s \Rightarrow s = t$, *donc le théorème vrai SI* $x_n \geq 0$.
*2ème cas :* $x_n \leq 0 \forall n$, *idem*
*Cas général :*
*Posons* $x_n = x'_n + x''_n$, *ou* $x'_n = \max(x_n, 0)$ *et* $x''_n = \min(x_n, 0)$, *alors*

$$x_{\sigma(n)} = x'_{\sigma(n)} + x''_{\sigma(n)}$$

*On conclut en appliquant le cas ( 1) a* $x'_n$ *et ( 2) ou* $x''_n$ $\square$

**Theorème 71**
*Supposons que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

*converge, mais pas absolument.*
$\forall l \in \mathbb{R} \exists$ *permutation* $\sigma$ *t.q.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = l.$$

## Lecture 9: mercredi

Wed 14 Oct

**Definition 14**
*On dit qu'une fonction* $f$ *est définie au voisinage de* $x \in \mathbb{R}$, *si* $\exists \epsilon > 0 :$ $f$ *définie sur*

$$]x - \epsilon, x[ \text{ et } ]x, x + \epsilon[$$

**Exemple**
*$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$ défini au voisinage de 0.*

**Definition 15**
*Soit $f$ définie au voisinage de $x_0$.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

*signifie*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

**Theorème 73**
*Soit $f$ définie au voisinage de $x_0$*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \text{ suite } (a_n)_{n=1}^{\infty}$$

*qui converge vers $x_0$ et $a_n \neq x_0, \forall n$, on a*

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

**Remarque**
*A priori, $f$ n'est pas définie en $a_n$, mais $\exists n_0, \forall n > n_0 : a_n \in$ domaine de définition car $f$ définie au voisinage de $x_0$*

**Preuve**
$\Rightarrow$
*Soit $a_n \neq x_0$, une suite convergent vers $x_0$. A voir : Soit $\epsilon > 0$, cherche $n_0 \forall n > n_0$ : $|f(a_n) - l| < \epsilon$.*
*Par hypothese, $\exists \delta > 0 \forall x$*

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \quad (1)$$

*Appliquer $\lim a_n = x_0$ à $\delta$ :*

$$\exists n_0, \forall n > n_0 : |a_n - x_0| < \delta$$

*Appliquer à présent 1 à $x = a_n$*
$\Leftarrow$
*Soit $\epsilon > 0$, on cherche $\delta > 0$*
*Supposons par l'absurde qu'aucun $\delta$ satisfait la définition.*
*En particulier, $\delta = \frac{1}{n}$*

$$\exists x_n : 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - l| \geq \epsilon$$

*Or*

$$x_n \neq x_0 \text{ et } (x_n) \to x_0$$

*Par hypothèse*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$$

*En particulier, pour $\epsilon$,*

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : |f(x_n) - l| < \epsilon$$

□

**Corollaire 75**
*Si* $\lim_{x\to x_0} l$ *et* $\lim_{x\to x_0} f'(x) = l'$, *alors*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + f'(x) = l + l'$$

*Idem pour produit.*

**Corollaire 76**
*Si* $f(x) \geq a, \quad \forall x$ *au voisinage de* $x_0$ *et*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l, \text{ alors } l \geq a$$

**Corollaire 77**
*Si*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

*Alors*

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$$

**Corollaire 78**
*Pour*

$$\lim \frac{g(x)}{f(x)}$$

*il suffit de traiter* $\lim \frac{1}{f(x)}$.

**Lemme 79**
*Si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \neq 0$, *alors*

$$\exists \epsilon > 0 \forall x \in ]x_0 - \epsilon, x_0[ \cup ]x_0, x_0 + \epsilon[$$

*tel que* $f(x) \neq 0$

**Preuve**

$$|f(x) - l| < \frac{|l|}{2}$$

*dans un voisingae de $x_0$, alors $f(x) \neq 0$* □

**Corollaire 80**
*Si* $\lim f(x) = l = \lim g(x)$ *et*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \forall x \text{ au voisinage de } x_0$$

*Alors*
$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

**Corollaire 81 (Cauchy)**
*Soit $f$ définie au voisinage de $x_0$, alors*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existe} \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \text{ avec}$$

$$0 < |x_i - x_0| < \delta \quad (i = 1, 2)$$

*on a*
$$|f(x_i) - f(x_2)| < \epsilon$$

**Lemme 82**
*Si* $\lim f(a_n)$ *existe* $\forall$ *suite* ( $a_n \neq x_0$) *convergeant vers* $x_0$,*alors*

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

*existe*

**Preuve**
*Il suffit de montrer que toutes ces limites $f(a_n)$ ont la même valeur.*
*En effet, on peut alors appliquer le théorème et* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
*Sinon,* $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l \neq l' = \lim_{n \to +\infty} f(a'_n)$ *pour deux telles suites $a_n$ et $a'_n$.*
*A présent*

$$b_n = \begin{cases} a_n \text{ si a pair} \\ a'_n \text{ si a impair} \end{cases}$$ □

*or $f(b_n)$ converge absurde car elle admet deux sous-suites avec limites distinctes $l, l'$.*

**Preuve**
*Preuve du corollaire ci-dessus.*
*Grace au lemme, il suffit de montrerr que* $\forall$ *suite* $a_n \to x_0$, *la suite* $f(a_n)$ *est de Cauchy.*
*Par hypothèse,* $\exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 : 0 < |x_i - x_0| < \delta$ *implique*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

*Or,* $\exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - x_0| < \delta$.
*Applique* $a_n = x_1$ *et* $a_m = x_2$ *donne que* $f(a_n)$ *est de cauchy.* □

**Corollaire 83**
*Si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *et* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l'$, *alors* $l = l'$.

**Remarque**
*On a implicitement utilisé les concept de* $+, \cdot, \leq$ *sur les fonctions.*

---

*Ce n'est pourtant pas un corps.*
*Par exemple,* $\forall x, y \in$ *corps*

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$$

Les fonctions ont une opération supplémentaire

$$f \circ g$$

est définie par

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

Soit $g : A \to B$ des parties de $\mathbb{R}$, et $f : B \to \mathbb{R}$ avec $g$ défini au voisinage de $x_0$ et $f$ au voisinage de $g_0$.

**Proposition 85**
*Supposons* $g(x) \neq g_0 \forall x$ *au voisinage de* $x_0$
*Si* $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$ *et* $\lim_{y \to y_0} f(y) = l$, *alors*

$$\lim_{x \to x_0} f \circ g(x) = l$$

**Preuve**
*Soit* $\epsilon > 0$, *à voir* $\exists \delta > 0 \forall x$ :

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - l| < \epsilon$$

*2eme hup nous dit*

$$\exists \eta > 0 \forall y : |y - y_0| < \eta \Rightarrow |f(y) - l| < \epsilon$$

*Idee : appliquer la premiere hypothèse à* $\eta$ *et poser* $y = g(x)$.
*Ca marche, tant que* $y \neq y_0$. □

**Exemple**
*Exemple délicat :*
*Soit*

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

*Clairement* $\lim_{x \to 0} = 0$.
*On pose que*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

*On voit que* $\lim_{y \to 0} f(y) = 0$.
*Or*

$$\lim_{x \to 0} f(g(x))$$

*n'existe pas.*

## Lecture 9: mercredi

Wed 14 Oct

**Definition 16**
*On dit qu'une fonction $f$ est définie au voisinage de $x \in \mathbb{R}$, si $\exists \epsilon > 0 : f$ définie sur*

$$]x - \epsilon, x[ \text{ et } ]x, x + \epsilon[$$

**Exemple**
$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$ *défini au voisinage de 0.*

**Definition 17**
*Soit $f$ définie au voisinage de $x_0$.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

*signifie*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

**Theorème 88**
*Soit $f$ définie au voisinage de $x_0$*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \text{ suite } (a_n)_{n=1}^{\infty}$$

*qui converge vers $x_0$ et $a_n \neq x_0, \forall n$, on a*

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$$

**Remarque**

*A priori, $f$ n'est pas définie en $a_n$, mais $\exists n_0, \forall n > n_0 : a_n \in$ domaine de définition car $f$ définie au voisinage de $x_0$*

**Preuve**

$\Rightarrow$

*Soit $a_n \neq x_0$, une suite convergent vers $x_0$. A voir : Soit $\epsilon > 0$, cherche $n_0 \forall n > n_0$ : $|f(a_n) - l| < \epsilon$.*

*Par hypothese, $\exists \delta > 0 \forall x$*

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \quad (1)$$

*Appliquer $\lim a_n = x_0$ à $\delta$ :*

$$\exists n_0, \forall n > n_0 : |a_n - x_0| < \delta$$

*Appliquer à présent 1 à $x = a_n$*

$\Leftarrow$

*Soit $\epsilon > 0$, on cherche $\delta > 0$*

*Supposons par l'absurde qu'aucun $\delta$ satisfait la définition.*

*En particulier, $\delta = \frac{1}{n}$*

$$\exists x_n : 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - l| \geq \epsilon$$

*Or*

$$x_n \neq x_0 \text{ et } (x_n) \to x_0$$

*Par hypothèse*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$$

*En particulier, pour $\epsilon$,*

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : |f(x_n) - l| < \epsilon$$

□

**Corollaire 90**

*Si $\lim_{x \to x_0} l$ et $\lim_{x \to x_0} f'(x) = l'$, alors*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + f'(x) = l + l'$$

*Idem pour produit.*

**Corollaire 91**

*Si $f(x) \geq a, \quad \forall x$ au voisinage de $x_0$ et*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \text{ alors } l \geq a$$

**Corollaire 92**
*Si*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$
*Alors*
$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$$

**Corollaire 93**
*Pour*
$$\lim \frac{g(x)}{f(x)}$$
*il suffit de traiter* $\lim \frac{1}{f(x)}$.

**Lemme 94**
*Si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq 0$, *alors*
$$\exists \epsilon > 0 \forall x \in ]x_0 - \epsilon, x_0[ \cup ]x_0, x_0 + \epsilon[$$
*tel que* $f(x) \neq 0$

**Preuve**

$$|f(x) - l| < \frac{|l|}{2}$$

*dans un voisingae de* $x_0$, *alors* $f(x) \neq 0$ □

**Corollaire 95**
*Si* $\lim f(x) = l = \lim g(x)$ *et*
$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \forall x \text{ au voisinage de } x_0$$
*Alors*
$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

**Corollaire 96 (Cauchy)**
*Soit* $f$ *définie au voisinage de* $x_0$, *alors*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existe } \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \text{ avec}$$
$$0 < |x_i - x_0| < \delta \quad (i = 1, 2)$$

*on a*

$$|f(x_i) - f(x_2)| < \epsilon$$

**Lemme 97**
*Si* $\lim f(a_n)$ *existe* $\forall$ *suite* ( $a_n \neq x_0$) *convergeant vers* $x_0$*,alors*

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

*existe*

**Preuve**
*Il suffit de montrer que toutes ces limites* $f(a_n)$ *ont la même valeur.*
*En effet, on peut alors appliquer le théorème et* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
*Sinon,* $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l \neq l' = \lim_{n \to +\infty} f(a'_n)$ *pour deux telles suites* $a_n$ *et* $a'_n$.
*A présent*

$$b_n = \begin{cases} a_n \text{ si } a \text{ pair} \\ a'_n \text{ si } a \text{ impair} \end{cases}$$

□

*or* $f(b_n)$ *converge absurde car elle admet deux sous-suites avec limites distinctes* $l, l'$.

**Preuve**
*Preuve du corollaire ci-dessus.*
*Grace au lemme, il suffit de montrerr que* $\forall$ *suite* $a_n \to x_0$*, la suite* $f(a_n)$ *est de Cauchy.*
*Par hypothèse,* $\exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 : 0 < |x_i - x_0| < \delta$ *implique*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

*Or,* $\exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - x_0| < \delta$.
*Applique* $a_n = x_1$ *et* $a_m = x_2$ *donne que* $f(a_n)$ *est de cauchy.* □

**Corollaire 98**
*Si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *et* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l'$*, alors* $l = l'$.

**Remarque**
*On a implicitement utilisé les concept de* $+, \cdot, \leq$ *sur les fonctions.*

---

*Ce n'est pourtant pas un corps.*
*Par exemple,* $\forall x, y \in$ *corps*

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$$

Les fonctions ont une opération supplémentaire

$$f \circ g$$

est définie par

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

Soit $g : A \to B$ des parties de $\mathbb{R}$, et $f : B \to \mathbb{R}$ avec $g$ défini au voisinage de $x_0$ et $f$ au voisinage de $g_0$.

**Proposition 100**
*Supposons* $g(x) \neq g_0 \forall x$ *au voisinage de* $x_0$
*Si* $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$ *et* $\lim_{y\to y_0} f(y) = l$, *alors*

$$\lim_{x\to x_0} f \circ g(x) = l$$

**Preuve**
*Soit* $\epsilon > 0$, *à voir* $\exists \delta > 0 \forall x$ :

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - l| < \epsilon$$

*2eme hup nous dit*

$$\exists \eta > 0 \forall y : |y - y_0| < \eta \Rightarrow |f(y) - l| < \epsilon$$

*Idee : appliquer la premiere hypothèse à* $\eta$ *et poser* $y = g(x)$.
*Ca marche, tant que* $y \neq y_0$. □

**Exemple**
*Exemple délicat :*
*Soit*

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

*Clairement* $\lim_{x\to 0} = 0$.
*On pose que*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

*On voit que* $\lim_{y\to 0} f(y) = 0$.
*Or*

$$\lim_{x\to 0} f(g(x))$$

*n'existe pas.*

## Lecture 10: fonctions

Mon 19 Oct

### 5.1 Continuité

**Definition 18**
*Soit $f$ définie au voisinage de $x_0$.*
*Alors $f$ est dite continue en $x_0$ si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Donc $f$ continue ( en $x_0$) si on peut "sortir $f$ de la limite" ( en $x_0$ )

**Proposition 102**
*$f$ continue en $x_0 \iff$ toute suite $a_n$ tendant vers $x_0$, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

**Preuve**
*Théorème de traduction pour $l = f(x_0)$* □

**Remarque**
*Pour parler de continuité en $x_0$, il faut que $f$ soit définie en $x_0$ et au voisinage de $x_0$*

**Corollaire 104**
*Si $f$ et $g$ sont continues en $x_0$, alors $f + g$ et $f \cdot g$ aussi.*

**Preuve**
*Idem que avant* □

**Corollaire 105**
*Si de plus $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est cont. en $x_0$.*

**Remarque**
*On a montré que alors dans ce cas il existe un voisinage de $x_0$ où $g(x) \neq 0$*

**Proposition 107**
*Soit $g$ continue en $x_0$ et $f$ continue en $g(x_0)$, alors $f \circ g$ est continue en $x_0$.*

**Preuve**
*Ecrivons la définition de $g$ continue en $x_0$ :*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$$

*Soit $\epsilon > 0$. Cherche $\eta > 0$ tq $\forall x$ :*

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(\underbrace{g(x)}_{=y}) - f(g(x_0))| < \epsilon$$

*Continuité de $f$ en $g(x_0)$ appliquée à $\epsilon$ donne $\theta > 0$ tq $\forall y$*

$$|y - g(x_0)| \Rightarrow |f(y) - f(g(x_0))| < \epsilon$$

*continuité de $g$ en $x_0$ appliquée à $\theta$*

$$\exists \eta > 0 \forall x \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \theta \qquad \square$$

*Pour $y = g(x)$ on a montré ce qu'il fallait.*

**Definition 19 (Terminologie Supplémentaire)**
*$f$ est définie au voisinage à gauche de $x_0$ si $\exists \epsilon > 0$ tq $f$ est définie sur $]x_0 - \epsilon, x_0[$.*
*De même à droite : $]x_0, x_0 + \epsilon[$*

**Definition 20**
*Soit $f$ définie au voisinage à droite de $x_0$*

$$\lim_{x \to x_0 >} = l$$

*signifie*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x > x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

*La limite à gauche est définie de la même manière.*

**Definition 21**
*$f$ est continue à droite en $x_0$ si*

$$\lim_{x \to x_0 >} f(x) = f(x_0)$$

*Idem à gauche.*

**Exercice 108**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existe} \iff \text{les limites à gauche et à droite existent et coincident.}$$

**Definition 22**
*$f$ est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en $a$, à gauche en $b$.*

**Definition 23 (Notation)**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

*si*

$$\forall R \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > R$$

*Idem pour $-\infty$*

**Definition 24 (Notation)**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

*signifie*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall x > n_0 : |f(x) - l| < \epsilon$$

On note $C([a, b])$ ou parfois $C^0([a, b])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$

> **Theorème 109**
> *Toute fonction continue sur $[a, b]$ est bornée.*

**Preuve**
*Supposons par l'absurde $f$ non-bornée ( disons sans perte de généralité non majorée).*
*Donc $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n : f(x_n) > n$.*
*On a une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de $[a, b]$*
*Par Bolzano-Weierstrass implique qu'on a une sous-suite $x_{n_k}$ qui converge vers $x \in [a, b]$*
*$f$ continue en $x \iff f(x) = \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k})$* □

> **Theorème 110**
> *Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue atteint son $\sup$ donc max.*

**Preuve**
*On sait déjà que $f$ est bornée, soit donc $s := \sup \{f(x) | x \in [a, b]\}$*
*Si par l'absurde $f(x) \neq s \forall x \in [a, b]$ posons*

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - s}$$

*$g$ est continue et donc $g$ est bornée, disons par $B$.*
*Absurde car implique $|f(x) - s| > \frac{1}{B}$.* □

> **Proposition 111**
> *Soient $f, g$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$.*
> *Soit $A \subseteq I$ une partie dense. Si*
>
> $$f|_A = g|_A$$
>
> *Alors $f = g$ sur tout $I$*

**Preuve**
*Soit $x \in I$. Par densité,*

$$\exists (a_n)$$

*suite de $A$ avec $\lim_{n\to+\infty} a_n = x$.*

$$\textit{Continuité } f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} g(a_n) = g(x) \qquad \square$$

## Lecture 11: limites de fonctions

Wed 21 Oct

Comment définir $3^\pi$ ?

**Exemple**
*Supposons que $f$ soit définie et continue sur $I \setminus \{x_0\}$, où $I$ est un intervalle ouvert et $x_0 \in I$.*
*Si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe, on obtient une fonction continue sur $I$ en définissant $f(x_0) := \lim_{x\to x_0} f(x)$.*
*Ca s'appelle le "prolongement par continuité".*

Un exemple de preuve de continuité :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ sur } ]0, +\infty[$$

Soit $\epsilon > 0$, cherche $\delta$
Veut : $\forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon$.
Or, $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} < \epsilon$ si $\delta = \sqrt{x_0}\epsilon > 0$

**Remarque**
*Ce $\delta$ montre la continuité en $y \forall y \geq x_0$*

**Definition 25**
*$f$ est dite uniformément continue sur $I$ ( où $I$ est un intervalle ou plus généralement $I \subseteq \mathbb{R}$) si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x_0 \in I$ :*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Comparer à $f$ continue sur $I$ :

$$\forall x_0 \in I \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x :$$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Le point clé est que le delta dépend que de $\epsilon$ et pas de $x_0$.

**Exemple**
*$f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1, +\infty[$*
*Et aussi sur $[\frac{1}{100}, +\infty[$.*

**Exemple**
*$f(x) = x^2$ non uniformément continu sur $[0, +\infty[$. Considérons*

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|(x + x_0)$$

**Proposition 116**
*Si $f$ et $g$ sont uniformément continues sur $I$, alors $f+g$ aussi.kéw Attention : Faux pour $f.g$ et pour $\frac{1}{f}$.*

**Exercice 117**
*Supposons $f$ uniformément continue sur $[a,b]$ et $[b,c]$, alors $f$ uniformément continue sur $[a,c]$*

**Theorème 118**
*Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue, alors $f$ est uniformément continue sur $[a,b]$*

**Remarque**
*Donc $f(x)=\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,1]$.*

**Preuve**
*Si, par l'absurde, $f$ n'est pas uniformément continue, alors :*

$$\exists\epsilon>0\forall\delta>0\exists x,x_0:$$
$$|x-x_0|<\delta \text{ mais } |f(x)-f(x_0)|\geq\epsilon$$

*Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on applique ca à $\delta=\frac{1}{n}$, alors*

$$\Rightarrow\exists y_n,z_n:|y_n-z_n|<\frac{1}{n};|f(y_n)-f(z_n)|\geq\epsilon$$

*Car $y_n$ suite de $[a,b]$, par Bolzano-Weierstrass $\Rightarrow\exists$ sous-suite $y_{n_k}$ convergente.*
*Alors $\lim_{k\to+\infty}z_{n_k}=y$ car $|z_{n_k}-y_{n_k}|<\frac{1}{n_k}$.*
*Le théorème de traduction implique*

$$\lim_{k\to+\infty}f(y_{n_k})=f(y)=\lim_{k\to+\infty}f(z_{n_k})$$

*Mais $|f(y_{n_k}-f(z_{n_k}))\geq\epsilon$.*
$\lightning$ $\square$

**Theorème 120 (Théorème de la valeur intermédiaire (TVI))**
*Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue.*
*$\forall c$ entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists x\in[a,b]:f(x)=c$.*

**Preuve**
*Sans perte de géneralité, $f(a)<c<f(b)$; et $c=0$ ( sinon remplacer $f$ par $f-c$).*
*Supposons par l'absurde $f(a)<0<f(b)$ mais $f(x)\neq 0\forall x$.*
*Alors $\frac{1}{f}$ est continue. Donc bornée. Donc $\exists\alpha>0$ tq $|f(x)|\geq\alpha\forall x$.*
*On sait que $f$ est uniformément continue sur $[a,b]$.*
*Appliquer à $\alpha$.*
*Donc, $\exists\delta>0\forall y,z:|y-z|<\delta\Rightarrow|f(y)-f(z)|<\alpha$.*

*Prenons* $n \in \mathbb{N}$ *avec* $\frac{b-a}{n} < \delta$ *( Archimède)*
*Posons* $a_i = a + i\frac{b-a}{n}(i = 0, 1, \ldots, n)$.
*Domc* $\forall i \forall y, z \in [a_i, a_{i+1}]$

$$|f(y) - f(z)| < \alpha$$

□

*Donc* $\forall i$*, soit* $f$ *est* $\leq -\alpha$ *sur tout* $[x_i, x_{i+1}]$ *soit* $\geq \alpha$ *pour tout* $[x_i, x_{i+1}]$.

*Or* $f(a) < 0$ *donc* $\leq -\alpha$ *Donc* $f \leq -\alpha$ *sur* $[a_0, a_1]$
*Or* $f(a) < 0$ *donc* $\leq -\alpha$ *Donc* $f \leq -\alpha$ *sur* $[a_1, a_2]$*, etc.*
*Or* $f(a_n) = b$*, donc* $\lightning$

## Lecture 12: Fonctions

Mon 26 Oct

**Corollaire 121**
$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \geq 0 : \exists y \geq 0 : y^n = x$
*Comme ce* $y$ *est unique ( axiome de* $<$*) on peut donc définir* $\sqrt[n]{x} = y$

**Preuve**
*Considérons la fonction* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(y) = y^n$.
$f$ *est continu,* $f(0) = 0, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
*Rappel : i.e.*

$$\exists y_0 \forall y \geq y_0 : f(y) \geq x$$

*TVI pour* $[0, y]$ *:* $\exists z$ *tq* $f(z) = x$. □

**Rappel**

- $ax + b = 0$ adment une solution ( en $x$) si $a \neq 0$
- $ax^2 + bx + c$ admet parfois une solution
- $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ admet une solution ( $a \neq 0$)
- degré 4 admet parfois une solution
- degré 5 : pas de formule avec "juste" des racines.

**Corollaire 122**
*Tout polynôme de degré impair admet des racines.*

**Preuve**

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

$n$ *impair,* $a_n \neq 0$
*Or* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *( si* $a_n > 0$ $-\infty$ *si* $a_n < 0$)
*En effet*

$$a_n x^n (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{-1} + \ldots)$$

*Donc* $\exists x_1 : f(x_1) > 0$ *( resp.* $< 0$*).*
*De même,* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *( resp* $+\infty$*).*
*Donc*

$$\exists x_2 : f(x_2) < 0$$

□

*TVI sur* $[x_2, x_1] \Rightarrow \exists x : f(x) = 0$

**Corollaire 123**
*Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue.*
$f([a,b]) = [m, M]$ *où* $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$*et* $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$

**Proposition 124 (1er theoreme de la fonction implicite)**
*Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue, strictement monotone.*
*Donc ( corrolaire précédent) ,* $f$ *est bijective*

$$f : [a,b] \to [m, M]$$

*i.e.* $\exists f^{-1} : [m,M] \to [a,b]$
*Alors* $f^{-1}$ *est continue*

**Preuve**
*Sans perte de géneralité,* $f$ *strictement croissante.*

**Lemme 125**
*Soit* $g : [m,M] \to [a,b]$ *surjective et strictement croissante.*
*Alors* $g$ *est continue*

**Preuve**
*En* $x_0$
*Soit* $\epsilon > 0 : \exists x_1 : g(x_1) > g(x_0) - \epsilon$
*De même,* $\exists x_2 : g(x_2) < g(x_0) + \epsilon$*.*
*Donc sur* $[x_1, x_2]$ $f$ *prend des valeurs entre* $g(x_0) - \epsilon$ *et* $g(x_0) + \epsilon$ □

*Appliquer à* $g = f^{-1}$*.*
*C'est surjectif, par définition du domaine de* $f^{-1}$*, i.e. l'image de* $f$*.*

**Corollaire 126**
*Soit* $f : [a,b] \to [a,b]$ *continue.*
*Alors* $\exists x \in [a,b] : f(x) = x$*.*

**Preuve**
*Considérer* $g$

$$g : [a,b] \to \mathbb{R}$$

*avec*

$$g(x) = x - f(x)$$

*Donc*

$$g(a) = a - f(a) \leq 0$$
$$g(b) = b - f(b) \geq 0$$

*TVI* $\Rightarrow \quad \exists x : g(x) = 0$ *i.e.* $f(x) = x$ $\square$

# 6 Suites de Fonctions

But : donner un sens à

*"$f_n$ converge vers une fonction $f$"*

**Definition 26**
*$(f_n)$ converge ponctuellement vers $f$ si*

$$\forall x : \quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

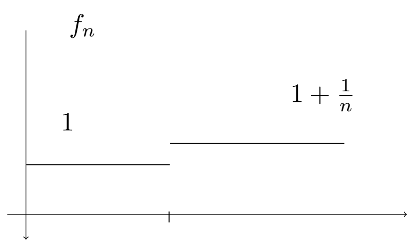


Figure 1 – fonction1

**Exemple**

—

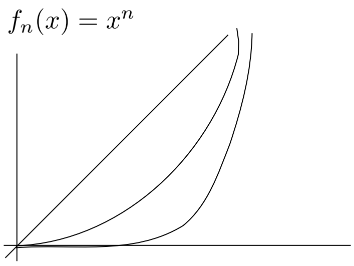


FIGURE 2 – fonction2

— *Ponctuellement,* $f_n \to f$ *où*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

**Remarque**

$$\lim_{x \to 1} f_n(x) = 1$$

*On pourrait donc prendre*

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to 1} f_n(x) = 1$$

*Par contre*

$$\lim_{x \underbrace{\to}_{<} 1} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$$

*Donc, attention à la continuité !*

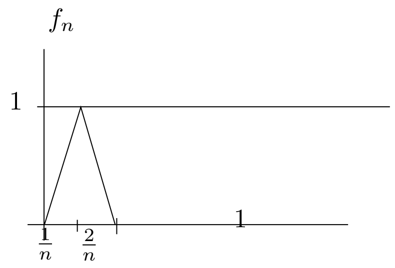


Figure 3 – fonction3

— *$f_n$ est continue pour tout $n$,*

$$\max f_n = 1$$

*Or $f_n \to 0$ ponctuellement.*

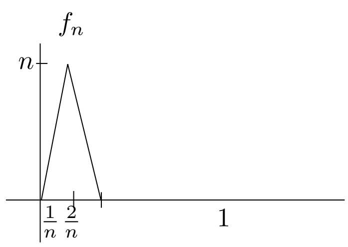


Figure 4 – fonction4

— *Or, à nouveau, $f_n \to f = 0$*

**Definition 27 (Convergence uniforme de fonctions)**
*Une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément sur $A \subseteq \mathbb{R}$ sur $f$ si :*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

## Lecture 13: Suites de Fonctions 2

Wed 28 Oct

**Remarque**

*La convergence uniforme implique la convergence ponctuelle*

> **Proposition 130**
> *Soit $(f_n)$ une suite de fonctions qui converge uniformément.*
> *Supposons que*
> $$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\lim_{x\to x_0} f_n(x)}_{=l_n}$$
> *existe.*
> *Alors*
> $$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

**Preuve**

*Soit $f$ la limite de $(f_n)$.*
*Hyp : $\forall n : l_n = \lim_{x\to x_0} f_n(x)$existe et $l = \lim_{n\to+\infty} l_n$.*
*But : $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.*
*Soit donc $\epsilon > 0$, alors*

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |l_n - l| < \frac{\epsilon}{3}$$

*De plus, par convergence uniformee*

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 \begin{cases} |l_n - l| < \frac{\epsilon}{3} \\ \forall x : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \end{cases}$$

*Donc*

$$\exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - l_{n_0}| < \frac{\epsilon}{3}$$

*Soit $0 < |x - x_0| < \delta$, on veut*

$$|f(x) - l| < \epsilon$$

*Or*

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - l_{n_0}| + |l_{n_0} - l| < \epsilon$$ □

> **Theorème 131**
> *Toute limite uniforme de fonctions continues est continue.*

**Preuve**

*Soit $f$ la limite uniforme de $(f_n)$, $f_n$ est continue $\forall n$.*
*Soit $x_0$ avec $f_n$ définie au voisinage de $x_0$.*
*A voir : $f$ continue en $x_0$, i.e.*

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = f(x_0)$$ □

**Theorème 132 (Dini)**
*Soit $(f_n)$ une suite décroissante de fonctions continues.*
*Si $(f_n)$ converge ponctuellement vers $f$ continue, alors $f_n$ converge uniformément vers $f$ sur $[a, b]$.*

**Exercice 133**
*Trouver un contre exemple sans l'hypothèse décroissante.*

**Preuve**
*Par l'absurde,*

$$\exists \epsilon > 0 \forall n_0 \exists n \geq n_0 \exists x_n : |f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$$

*Par Bolzano-Weierstrass* $\Rightarrow$

$$(x_{n_k}) \text{ qui converge vers } x$$

*et tel que*

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \epsilon$$

*Convergence de $f_n(x)$ implique*

$$\exists k : |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

*Continuité de $f_{n_k}$ et de $f$ en $x$*

$$\exists \delta > 0 \forall y : |x - y| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \\ |f_{n_k}(y) - f_{n_k}(x)| < \frac{\epsilon}{3} \end{cases}$$

*Choisir un $k'$ tel que $|x_{n'_k} - x| < \delta$*
*Comme*
- $|f(x) - f(x_{n_k})| < \frac{\epsilon}{3}$
- $|f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_{n'_k})| < \frac{\epsilon}{3}$
- $f \leq f_{n'_k} \leq f_{n_k}$

*Donc*

$$|f_{n'_k}(x_{n'_k}) - f(x_{n'_k})| < \epsilon \qquad \square$$

*Absurde.*

# 7 Dérivation

**Definition 28**
*Soit $f$ définie au voisinage de $x_0$.*
*On dit que $f$ est dérivable en $x_0$ si*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*existe.*
*Alors cette limite s'appelle la dérivée de $f$ en $x_0$, notée $f'(x_0)$.*

**Remarque**
*Si $f$ est dérivable partout, alors on obtient une fonction $f'$.*
*On définit de même la dérivée gauche et droite.*

**Proposition 135**
*Si $f$ et $g$ sont dérivables en $x_0$, alors $f+g$ aussi et*

$$(f+g)' = f' + g'$$

**Preuve**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) + g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$ □

**Proposition 136**
*Soit $f$ définie au voisinage de $x_0$. Alors*

$$f \text{ dérivable en } x_0 \iff \exists a \in \mathbb{R} \exists \text{ fonction } r \text{ au voisinage de } x_0 \text{ tel que}$$

1. $f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)$
2. $\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$

*Dans ce cas, $a = f'(x_0)$*

## Lecture 14: Derivees

Mon 02 Nov

**Corollaire 137**
*$f$ dérivable en $x_0$ implique $f$ continue en $x_0$.*

**Preuve**
$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{continue pour tout } x} + \underbrace{r(x)}_{\text{continu en } x_0}$ □

**Proposition 138**
*Soient $f, g$ dérivables en $x_0$*

- *$f + g$ est dérivable en $x_0$ et $(f+g)' = f' + g'$*
- *$fg$ est dérivable en $x_0$ et*

$$(fg)' = f'g + fg' \text{ ( règle de Leibnitz)}$$

- *Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en $x_0$ et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

**Preuve**

— *Somme est déja faite*
— *Produit :*

$$\begin{aligned}&\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\&=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}+\frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\&=\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)}\underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)}+f(x_0)\underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\to g'(x_0)}\end{aligned}$$

— *Quotient :*
*Il suffit d'appliquer Leibnitz à* $f$ *et* $\frac{1}{g}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\left(f\frac{1}{g}\right)'=f'\frac{1}{g}+f\left(\frac{1}{g}\right)'$$

*Il suffit de montrer que*

$$\left(\frac{1}{g}\right)=-\frac{g'}{g^2}$$

*Soit donc* $g(x_0)\neq 0$.

$$\frac{\frac{1}{g(x)-\frac{1}{g(x_0)}}}{x-x_0}=\frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}$$

□

**Exemple**
*Soit* $n\in\mathbb{Z}$, $n<0$, $f(x)=x^n=\frac{1}{x^{|n|}}$ *Donc*

$$(x^{|n|})'=|n|x^{|n|-1}$$

*Donc, par la proposition*

$$f'(x)=\frac{-|n|x^{|n|-1}}{x^{2|n|}}$$

*Or* $|n|=-n$, *alors*

$$f'(x)=nx^{-n-1+2n}=nx^{n-1}$$

**Proposition 140**
*Donc, on trouve*

$$\forall n\in\mathbb{Z}, f(x)=x^n\Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$$

*Attention, ne pas écrire* $(x^n)'$

**Theorème 141 (Chain Rule)**

$$(f \circ g)' = (f' \circ g).g'$$

*Soit $g$ dérivable en $x_0$ et $f$ en $g(x_0)$, alors $f \circ g$ esst dérivable en $x_0$ avec la formule ci-dessus.*

**Preuve**

*Definissons $h$ par*

$$h(y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(g(x_0))}{y-g(x_0)} \text{ si } y \neq g(x_0) \\ f'(g(x_0)) \text{ si } y = g(x_0) \end{cases}$$

*Alors $h$ est continue en $g(x_0)$ ( par définition de $f$ dérivable en $g(x_0)$).*

*On a alors*

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} h(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \end{aligned}$$

□

**Theorème 142**

*Soit $f :]a, b[ \to ]c, d[$ bijective, continue.*

*Si $f$ est dérivable en $x_0$ et $f'(x_0) \neq 0$, alors $f^{-1}$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

**Preuve**

$$\begin{aligned} L &= \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\ &= \left( \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - x_0} \right)^{-1} \end{aligned}$$

*En posant $x = f^{-1}(y)$, on obtient*

$$\left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)^{-1}$$

*Or, $f^{-1}$ est continue, donc quand $y \to y_0$, on a que $x \to x_0$.*

*Donc, la limite pour $y \to y_0$ de L est*

$$\lim_{x \to x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)^{-1} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

## Lecture 15: Derivees

Wed 04 Nov

**Exemple**

*Soit* $f(x) = \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$.

*Donc la dérivée est*

$$f'(x) = \frac{1}{q(x^{\frac{1}{q}})^{q-1}} = \frac{1}{q}x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}$$

*On sait donc dériver des puissances rationelles quelconques*

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} = g(h(x))$$

*donc*

$$\begin{aligned} f'(x) &= p(x^{\frac{1}{q}})^{p-1}\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1} \\ &= \frac{p}{q}x^{\frac{p-1}{q}+\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1} \end{aligned}$$

## 7.1 Applications de la dérivée

### 7.1.1 Recherche d'extremums

**Definition 29 (Point Critique)**

*$x$ est un point critique de $f$ si $f$ est dérivable en $x$ et $f'(x) = 0$.*

**Remarque**

*Bien que $x = 0$ soit un point critique de $f(x) = x^3$, cette fonction est strictement croissante.*

**Definition 30**

*$x$ est un maximum local de $f$ si il existe un voisinage de $x$ sur lequel $x$ est un ( vrai) maximum.*

La définition pour les minimas est équivalente.
Plus généralement, on parlera d'extremums.

**Proposition 145**

*Soit $f$ dérivable en $x_0$ ( donc définie dans son voisinage).*
*Si $x_0$ est un extremum local de $f$, alors c'est un point critique.*

**Remarque**

1. *La réciproque est fausse.*
2. *Si $f$ n'est pas dérivable, on peut très bien avoir un max / min.*
3. *Dérivable à droite ( gauche) pas suffisant.*

**Preuve**

*Sans perte de géneralité, $x_0$ est un max local de $f$.*
*Dérivée à gauche :*

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

*De même, dérivée à droite*

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

*Donc,* $f'(x_0) = 0$. $\square$

**Proposition 147 (Méthode de recherche d'extremum)**
*Pour* $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$.
*Les candidats sont*

1. *Les points critiques dans* $]a, b[$
2. *Les points non-différentiables*
3. *Les bornes :* $a, b$

**Theorème 148 (theoreme de Rolle)**
*Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continnue et dérivable sur* $]a, b[$. *Si* $f(a) = f(b)$ *alors* $\exists x \in ]a, b[ : f'(x) = 0$

**Preuve**
$\exists x_1 \in [a, b] : \sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_1)$.
*Si* $x_1 \in ]a, b[$, *alors* $f'(x_1) = 0$ *par la proposition.*
*Cas restant :* $x_1 = a$ *ou* $b$.

$$\exists x_2 \in [a, b] \; min \; : \inf_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_2)$$

*Le seul cas restant est donc :*

$$\max \textit{ et } \min \textit{ atteints en } a \textit{ ou } b.$$

*Or* $f(a) = f(b)$, *donc* $\max f = \min f$, *donc* $f$ *constante.* $\square$

**Theorème 149 (théorème des accroissements finis TAF)**
*Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue et dérivable sur* $]a, b[$.
*Alors* $\exists x \in ]a, b[ : f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

**Preuve**
*Posons* $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ $g$ *est aussi continue dérivable.*
*Or*

$$g(a) = f(a) \textit{ et } g(b) = f(a)$$

*Donc* $g$ *satisfait l'hypothèse de rolle.*
*Donc, par Rolle*

$$\exists x \in ]a, b[ : g'(x) = 0$$

*Or*

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$\square$

**Corollaire 150**
*Si $f' = 0$, alors $f$ constante.*
*Plus précisément :*
*Soit*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

*continue dérivable sur $]a, b[$ tel que $f'(x) = 0 \forall x \in ]a, b[$, alors $f$ est constante sur $[a, b]$*

**Preuve**
*Si, par l'absurde, il existe $x, y \in [a, b]$ avec $f(x) \neq f(y)$.*
*Par TAF pour $[x, y]$, il existe $z \in ]x, y[$ :*

$$f'(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \neq 0$$

*Absurde.* $\square$

**Corollaire 151**
*$f' > 0$ ( sur un intervalle) implique $f$ strictement croissante.*

**Preuve**
*Soit $x < y$, à voir $f(x) < f(y)$.*
*Or, par TAF $\Rightarrow \exists z \in ]x, y[$*

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0$$

$\square$

**Corollaire 152**
*$f' \geq 0$ ( sur un intervalle) $\iff$ $f$ croissante ( pas forcément strictement)*

**Preuve**
*$\Leftarrow$ :*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

*$\Rightarrow$ :*
*Par l'absurde :*

$$\exists x < y \text{ tel que } f(x) > f(y)$$

*Par TAF $\Rightarrow \exists z \in ]x, y[$ tel que*

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < 0$$

$\square$

*Ce qui est absurde.*

## Lecture 16: Lundi 09

Mon 09 Nov

**Definition 31 (Fonctions Lipschitzienne)**
*La fonction $f$ est Lipschitz sur un intervalle $I$ si il existe $l$ tel que $\forall x, y \in I$*

$$|f(x) - f(y)| \leq l \cdot |x - y|$$

**Remarque**
*Si $f$ est Lipschitz, $f$ est continue, même uniformément continue sur $I$, poser $\delta = \frac{\epsilon}{l}$.*
*On dit aussi "L-lipschitz".*

**Corollaire 154**
*Si $f$ est dérivable et $|f'| \leq L$ sur $I$, alors $f$ est L-lipschitz sur $I$*

**Preuve**
*TAF sur $[x, y]$, donc*

$$\exists z \in ]x, y[ : f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$$

□

**Remarque**
*$f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$ est uniformément continue, mais sa dérivée est non-bornée sur $]0, 1[$.*

**Corollaire 156 (Théorème de Darboux)**
*Soit $f$ continu en $x_0$. Si $f$ est dérivable au voisinage de $x_0$ et si*

$$\lim_{x \to x_0} f'(x)$$

*existe, alors $f$ est dérivable en $x_0$.*

**Preuve**
*TAF sur $[x_0, x]$.*
*Donc il existe $z \in ]x_0, x[$ tel que*

$$f'(z) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*Posons $l = \lim_{x \to x_0} f'(x)$, donc*

$$l = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*Donc $f'(x_0)$ existe et est égal à $l$.* □

**Remarque**
*Nous avons prouvé que $f'(x_0)$ existe et de plus $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$.*
*Donc la dérivée est continue.*

**Theorème 158 (Theoreme de Cauchy)**
*Soient* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue et dérivable sur* $]a, b[$.
*Supposns que* $g'$ *ne s'annule pas sur* $[a, b]$, *alors*

$$\exists c \in ]a, b[ \text{ tel que } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

**Preuve**
*Considérons*

$$h(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a))\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

*On a*

$$h(a) = 0$$
$$h(b) = 0$$

*Rolle ( pour* $h$*) implique* $\exists c \in ]a, b[$ *tel que*

$$h'(c) = 0$$

*Or*

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c)$$

□

*i.e.* $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

## 7.2 Principe de Bernoulli-L'Hospital

Idée :
Calculer des limites du type $\frac{0}{0}$.

**Theorème 159 (Bernoulli-L'Hospital)**
*Soient* $f, g : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ *dérivables avec*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = 0 = \lim_{x \to a+} g(x)$$

*Supposons*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*existe et* $g'(x) \neq 0$ *au voisinage à droite de* $a$.
*Alors*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Preuve**
*On étend* $f$ *et* $g$ *par continuité sur* $[a, b[$ *en posant* $f(a) = 0 = g(a)$.
*Soit* $a < x < b$. *Appliquons Cauchy sur* $[a, x]$.

*Donc* $\exists c \in ]a,x[$ *tel que* $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$.
*Par hypothèse, la limite*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

*existe.* □

> **Theorème 160 (BH pour l'infini)**
> *Soient* $f, g : ]a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ *dérivable.*
> *Supposons* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} g(x)$ *Si* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe, alors*
>
> $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Preuve**
*Sans perte de géneralité* $a > 0$.
*On définit* $\phi, \psi : ]0, \frac{1}{a}[ \to \mathbb{R}$ *par*

$$\phi(x) = f(\frac{1}{x}), \psi(x) = g(\frac{1}{x})$$

*BH pour* $\frac{\phi}{\psi}$ *sur* $]0, \frac{1}{a}$

$$\lim_{x\to 0+} = \lim_{x\to 0+} \frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}$$

□

## Lecture 17: BH

Wed 11 Nov

## 7.3 Bernoulli-L'hospital pour infini sur infini

> **Theorème 161**
> *Soient* $f, g : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ *derivables tel que*
>
> $$\lim_{x\to a+} f(x) = +\infty = \lim_{x\to a+} g(x)$$
>
> *Si* $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe, alors* $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *existe aussi, avec la meme valeur*

**Preuve**
*Le principe est que pour calculer la limite d'une expression* $A$ *( pour* $x \to a$*), on peut remplacer* $A$ *par*

$$ABC$$

*pour autant que* $\lim_{x\to a+} BC = 1$.
*Soit* $\epsilon > 0$. *Posons* $l = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *A montrer : Pour* $x$ *suffisamment proche de* $a$

$$|\frac{f(x)}{g(x)} - l| < \epsilon$$

*On sait que* $\exists y \forall a < c < y$

$$|\frac{f'(c)}{g'(c)} - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

*Par Cauchy sur* $[x, y]$*, on a*

$$\forall a < x < y : |\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

*Ecrivons donc*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \frac{f(x)}{f(x) - f(y)} \frac{g(x) - g(y)}{g(x)}$$

*En effet, pour notre* $y$ *:*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{f(x) - f(y)} = \lim_{x \to a+} \frac{1}{1 - \frac{g(y)}{f(x)}} = 1$$

□

# 8 Polynome de Taylor et developpements limites

But : Approximer des fonctions par polynomes.

**Definition 32 (Polynome de Taylor)**
*Soit* $I$ *un intervalle ouvert,* $a \in I$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ $n$ *fois derivable.*
*Le polynome de Taylor de* $f$ *en* $a$ *et d'ordre* $n$ *est*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

**Theorème 162 (Formule de Taylor)**
*Supposons* $f$ $n+1$ *fois derivable*

$$\forall x \exists t \in ]a, x[ \text{ tel que}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-a)^{n+1}$$

**Remarque**
*Excellent si* $f$ *raisonnable car* $\frac{1}{(n+1)!}$ *tres petit.*

**Preuve**
*On note* $T(y)$ *pour le polynome de taylor.*
*Soit*

$$g(y) = f(y) - T(y) + \frac{T(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}}(y-a)^{n+1}$$

*On remarque que*

$$g^{(k)}(a) = \text{ cst. } (n+1)(n)\dots(n+1-k)(y-a)^{n+1-k} = 0$$

*Or,* $g(x) = 0$.
*On applique donc Rolle a* $g$ *sur* $[a, x]$ *Par Rolle,* $\exists x_1 \in ]a, x[$ *tel que* $g'(x_1) = 0$.
*Rolle pour* $g'$ *sur* $[a, x_1]$.

$$\exists x_2 \in ]a, x_1[ \text{ tel que } g''(x_2) = 0$$

*etc...*
*Rolle pour* $g^{(n)}$ *sur* $[a, x_n]$*, donc*

$$\exists t \in ]a, x_n[ \text{ tel que } g^{(n+1)}(t) = 0$$

*Donc*

$$0 = g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) + \frac{T(x) - f(x)}{(x-a)^{n+1}}(n+1)!$$

*Donc*

$$-T(x) + f(x) = f^{(n+1)}(t)(x-a)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}$$

□

## Lecture 18: Developpements Limites

Mon 16 Nov

De maniere generale, si

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$$

Alors

$$P^{(k)}(a) = k! c_k$$

**Definition 33 (Developpement limite)**
*Soit* $f$ *une fonction definie au voisinage de* $a$.
*Un developpement limit ( DL) d'ordre* $n$ *pour* $f$ *en* $a$ *est la donnee d'un polynome*

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(x-a)^j$$

*( la partie principale) et d'une fonction* $r$ *( le reste) tel que*

1. $f(x) = \sum a_j(x-a)^j + r(x)$
2. $\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n}$

**Remarque**
*Le cas* $n = 1$ *correspond a notre critere de differentiabilite de* $f$ *en* $a$.
*Admettre un DL d'ordre 1 en* $a \iff f$ *derivable en* $a$.

**Remarque**
*Admettre un DL d'ordre 0 en* $a \iff \lim_{x\to a} f(x)$ *existe.*

**Remarque**
*Si on note* $r(x) = \epsilon(x)(x-a)^n$, *on obtient*

1. $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j(x-a)^j + \epsilon(x)(x-a)^n$
2. $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$

*Ceci montre que si* $f$ *admet un DL d'ordre* $n$, *alors* $\forall k \leq n$

$$f^{(k)}(a) = k! a_k$$

**Proposition 167**
*Si un DL d'ordre* $n$ *existe, il est unique.*

**Preuve**
*Suffit de montrer l'unicite de la partie principale. Or, les coefficients* $a_j$ *sont determines par les derivees de* $f$,

$$f^{(k)}(a)(k \leq n)$$

*qui existent bel et bien par la remarque precedente.* □

**Proposition 168**
*Si* $f$ *admet un DL d'ordre* $n$ *en* $a$, *elle adment aussi un DL d'ordre* $m \leq n$ *en* $a$.

**Preuve**
*On a qu'a tronquer la partie principale de la somme.* □

**Theorème 169**
*Soit* $f \in C^{n+1}(I)$, $I$ *intervalle ouvert,* $a \in I$.
*Alors* $f$ *admet un DL d'ordre* $n$ *en* $a$, *et la partie principale est le polynome de Taylor.*

**Preuve**
*On va juste utiliser que* $f^{(n+1)}$ *est bornee sur un voisinage de* $a$.
*A voir :*

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{n+1!} f^{(n+1)(t)(x-a)^{n+1}}}{(x-a)^n} = 0$$

□

**Exercice 170**
*Si* $f$ *et* $g$ *admettent des DL d'ordre* $n$ *en* $a$, *alors* $f+g$, $f \cdot g$ *et* $f \circ g$*(ici :* $f$ *admet DL en* $g(a)$*) aussi.*
*Les parties principales seront la somme, respectivement produit, resp. composition des parties principales.*

**Exemple (Un Bel Exemple)**
*Soit*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \exp(-\frac{1}{x^2}) \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

*On voit que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

> **Lemme 172**
> $f^{(k)} = f.\frac{P}{Q}$*, pour deux polynomes $P, Q$.*

*Conclusion :*
*$f$ est une fonction $C^\infty$ avec $f^{(k)}(0) = 0 \forall k$.*
*Tous les polynomes de Taylor de $f$ en $0$ sont nuls,*

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} 0(x-a)^k = 0$$

*$f$ admet un DL d'ordre $n$ en zero $\forall n$, partie principale 0.*

## Lecture 19: Developpements Limites

Wed 18 Nov

### 8.1 Utilisations de la 2eme derivee

> **Proposition 173**
> *Soit $f$ deux fois derivable et $a$ un point critique ( i.e. $f'(a) = 0$)*
> *Si $f''(a) < 0$, alors $a$ est un maximum local strict.*
> *Idem pour $f''(a) > 0$.*
> *Attention la reciproque fausse*

**Preuve**
*$f'$ est strictement decroissante sur un voisinage de $a$.* □

### 8.2 Convexite, Concavite

**Definition 34 (Convexe)**
*Une fonction $f$ est convexe, si $\forall x < y \forall \lambda \in [0, 1]$*

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

> **Proposition 174**
> *$f$ convexe $\iff$*
>
> $$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1] \text{ avec}$$
> $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

$\forall x_1, \ldots, x_n$

**Preuve**

$\Rightarrow$

*La convexite correspond au cas* $n = 2$

*Supposons vrai pour* $n-1$ ( $k \geq 3$) *Ecrivons*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = (1-\lambda_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i + \lambda_n x_n$$

*Par Hypothese de recurrence*

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq (1-\lambda_n) f(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i) + \lambda_n f(x_n)$$

□

**Theorème 175**

*Si* $f$ *est derivable et* $f'$ *est croissante, alors* $f$ *est convexe.*

**Corollaire 176**

*Si* $f$ *est deux fois derivable et* $f'' \geq 0$*, alors* $f$ *est convexe.*

**Preuve**

$f'$ *existe, croissante.*

*A montrer.*

*Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

*sans perte de géneralité* $a < b$

*Posons* $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ *TAF sur* $[a, x]$ *et* $[x, b]$ *:*

$$\exists a < x_1 < x < x_2 < b \text{ tel que}$$

$$f(x) - f(a) = f'(x_1)(x-a)$$

*de meme*

$$f(b) - f(x) = f'(x_2)(b-x)$$

*On a donc*

$$\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) = \lambda(f(x) - f'(x_1)(x-a)) + (1-\lambda)\left(f(x) + f'(x_2)(\lambda(b-a))\right) = f(x) + (b-a)\lambda(1-\lambda) f'(x_2) - (b$$

*Or* $f'$ *croissant.*

□

**Lecture 20: Series Entieres**

Mon 23 Nov

# 9 Series Entieres

But :
Etudier des fonctions du type

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

Motivations :

— Fonctions familiaires,utiles du type $\sin, \cos, \exp, \ldots$
— polynomes de Taylor $\to$ serie de Taylor ?

**Remarque**
*Nous travaillons surtout avec $x_0 = 0$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*
*Pour retrouver le cas general : se ramener a $f(x-x_0)$.*

**Definition 35**
*On dit qu'un serie de fonctions*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

*converge uniformement absolument sur $I$ vers $f$ si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$$

*converge uniformement, i.e.*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall x \in I :$$
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |f_n(x)| < \epsilon$$

**Theorème 178**
*Supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ converge pour $y \neq 0$.*
*Alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

*converge $\forall x \in ]-|y|, |y|[$.*
*De plus, pour tout $0 < r < |y|$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformement et absolument sur $[-r, r]$*

**Preuve**
*Il suffit de montrer le deuxieme point.*
*Puisque $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ converge, on sait que $(a_n y_n) \to 0$ et donc $a_n y^n$ est bornee. Donc*

$\exists B > 0 \forall n : |a_n y_n| \leq B$.
*Fixons* $0 < r < |y|$ *et considerons* $x \in [-r, r]$.
*Remarque :*
$|a_n x^n| = |a_n y^n| |\frac{x}{y}|^n \leq B(\frac{r}{|y|})^n$.
*Pour convergence absolue, par comparaison, on etudie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B(\frac{r}{|y|})^n$$

*Converge, car c'est une serie geometrique de raison* $\frac{r}{|y|} < 1$ □

**Corollaire 179**
$\forall 0 < r < |y|$. *On obtient une fonction continue* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *de* $x \in [-r, r]$

**Remarque**
*Bien que* $f(y)$ *existe par hypothese, l'existence et la continuite en* $\pm y$ *peut etre problematique.*

Considerons $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

**Definition 36**
*Le rayon de convergence de cette serie entiere est*

$$R := \sup \left\{ |y| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \textit{ converge} \right\}$$

**Corollaire 181**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

*est une fonction continue ( et qui existe) sur* $]-R, R[$.
*De plus* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *diverge* $\forall x$ *avec* $|x| > R$

**Remarque**

1. *Pour* $|x| = R$, *tout peut arriver*
2. *Pour* $\sum a_n (x - x_0)^n$, *on obtient un intervalle de convergence* $]x_0 - R, x_0 + R[$.

**Corollaire 183**

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

*, avec* $R = +\infty$ *si* $\limsup = 0$

**Preuve**

*Critere de la racine pour* $|x| < R$ *:*

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \textit{ converge}$$ □

**Theorème 184**

*Soit* $f(x) = \sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* $R \neq 0$.

1. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ *a le meme rayon de convergence* $R$.
2. $f$ *est derivable sur* $]-R, R[$ *et sa derivee est* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

**Preuve**

*On fixe* $0 < r < R$ *et on travaille sur* $[-r, r]$.
*Pour tout* $n$*, appliquer Taylor a la fonction* $x^n$ *au point* $x_0$.
*Donc* $\exists t$ *(entre* $x_0$ *et* $x$*) tel que*

$$x^n = x_0^n + n x_0^{n-1}(x - x_0) + \frac{1}{2!} n(n-1) t^{n-2} (x - x_0)^2 (x - x_0)$$

*On trouve*

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = n x_0^{n-1} + \frac{1}{2} n(n-1) t^{n-2}$$

*On s'interesse a* $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x_0^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} n(n-1)(x - x_0) t_{x,n}^{n-2}$$

*Il reste a demontrer*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} a_n t^{n-2}$$

*converge et reste borne sur* $[-r, r]$.
*Alors*

$$\lim_{x\to x_0} (x - x_0) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} a_n t^{n-1} = 0$$

*Rappel : $t$ se trouve entre $x$ et $x_0$, en particulier dans $[-r, r]$, donc*

$$|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} a_n t^{n-2}| \leq \frac{1}{2} |\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) r^{n-2} a_n|$$

*Il suffit donc de prouver que cette derniere serie converge, donc de montrer*

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n|a_n|r^n < +\infty$$

□

*Donc il suffit de montrer que $r$ est dans le rayon de convergence.*
*Or $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n(n-1)} = 1$. Donc le rayon de convergence est $R$.*

## Lecture 21: Series de Taylor

Wed 25 Nov

**Remarque**
*Si $f$ est $C^\infty$, on peut definir sa serie de Taylor en $x_0$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

*C'est donc une serie entiere.*

Attention, en general, cette serie n'est pas $f$ !
En revanche, si $f$ est definie par une serie entiere $\sum a_n x^n$, alors sa serie de Taylor est elle-meme $\sum a_n x^n$.

**Corollaire 186**
*Soit $f(x) = \sum a_n x^n$ et soit $R$ son rayon de convergence.*
*Alors $f$ est $C^\infty$ sur $]-R, R[$*

**Preuve**
*Par recurrence, puisque la derivee est a nouveau une serie entiere, il suffit de montrer le cas $n = 1$.*

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 1.a_1$$

□

**Proposition 187**

1. $\exp(x) > 0 \forall x$
2. $\exp$ *est croissante et convexe*
3. $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$
4. $\exp(x+y) = \exp x \exp y$

5. $\exp -x = \frac{1}{\exp x}$

**Preuve**

*Derivons* $x \mapsto \exp x \exp -x$, *on a*

$$\exp' x \exp -x + \exp x \exp' -x - 1 = 0$$

*De plus*

$$\exp 0 \exp -0 = 1$$

*Donc* $\exp x \neq 0 \forall x$ *et* $\exp -x = \frac{1}{\exp x}$ *Fixons* $y$. *Derivons* $x \mapsto \frac{\exp x+y}{\exp x}$, *on trouve*

$$\frac{\exp x + y - \exp x + y \exp x}{\exp x} = 0$$

*Donc la fonction est constante. De plus, en* $x = 0$, *on trouve* $\exp y$, *donc* $\forall x$

$$\exp y \exp x = \exp x + y$$

*On a*

$$\exp x = \exp \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = \left(\exp \frac{x}{2}\right)^2 > 0$$

*On a finalement*

$$\exp x \geq x$$

*pour* $x \geq 0$, *de meme*

$$\exp -x = \frac{1}{\exp x}$$

□

*il en suit les deux limites.*

**Corollaire 188**

$\exp$ *est une bijection entre les reels et les reels strictements positifs et admet donc un inverse* $C^\infty$ *notee* $\log$

**Theorème 189 (Lemme d'Abel)**

*Soit* $f(x) = \sum a_n x^n$.

*On suppose* $R \neq 0$.

*Si* $\sum a_n R^n$ *converge, alors* $f$ *est continue ( a gauche) en* $R$.[a]

a. Meme theoreme en $-R$

**Preuve**

*On suppose que* $f(R)$ *converge.*

*Spg* $f(R) = 0$.

*Notons* $b_n = a_n R^n$ *et* $g(w) = \sum b_n w^n$

*Donc, il s'agit de prouver :*

$$\lim_{w \to 1-} g(w) = 0.$$

*Soit $s_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$, donc $s_n \to 0$.*
*Pour $g(w) = \sum b_n w^n$, or*

$$b_0 + b_1 w + \ldots b_n w^n = s_0 + (s_1 - s_0)w + \ldots + (s_n - s_{n-1})w^n$$

*Or*

$$= s_0(1-w) + s_1 w(1-2) + \ldots s_{n-1} w^{n-1}(1-w) + s_n w^n$$

*Donc $g(w) = (1-w)\sum s_n w^n$*
*Il suffit donc de prouver que*

$$\sum s_n w^n$$

*converge et reste bornee independament de $\omega \in [0,1]$.*
*Or $s_n$ converge.*

$$|\sum_{n=n_0}^{\infty} s_n w^n| \leq \epsilon \sum w^n = \epsilon w^{n_0} \frac{1}{1-w}$$

*Or*

$$|g(w)| \leq (1-w)\left\{|\sum^{n_0-1} s_n w^n| + \epsilon w^{n_0} \frac{1}{1-w}\right\} \qquad \square$$

*Donc $g(w)$ converge vers 0.*

## Lecture 22: Integrales

Mon 30 Nov

### 9.1 Deux P.S sur $\exp$

But : definir $x^y\ \forall xy \in \mathbb{R}(x \geq 0)$
Compatible avec $x^n = xx \ldots x$ et compatible avec les regles concernant $x^n$ :

$$x^{n+m} = x^n x^m$$
$$(x^n)^m = x^{nm}$$

**Definition 37**
*Pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ quelconque, on pose*

$$x^y = \exp(y \log x)$$

**Remarque**

1. $\log$ *est definit pour $x > 0$, car* $\exp$ *est une bijection de* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$
2. *Cette definition satisfait nos contraintes.*
   *P. ex. : $n \in \mathbb{N}$*

   $n \in \mathbb{N}, \exp(n \log x) = \exp(\log x + \ldots + \log x) = \exp(\log x) \ldots \exp(\log x) = x^n$

On definit les fonctions trigonometriques hyperboliques par

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

et

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

**Exercice 191**
*Quelle est la serie entiere qui definit ca ?*

**Proposition 192**
*Supposons que $f$ ( soit derivable et) satisfasse $f' = f'$.*
*Alors $f(x) = c \exp x$ ( avec $c = f(0)$) .*

**Preuve**
*Posonns $g(x) = f(x)e^{-x}$*
*Alors $g$ est derivable et*

$$g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0$$

*On sait que $g$ est constantem donc $f(x) = c \exp x$.* □

# 10 Integration

But : Calculer et definir des aires ( = surfaces) , puis volumes, hypervolumes, etc.
Rapport avec la derivation ( thm. fondamental de l'analyse).

**Definition 38 (Subdivisions)**
*Considerons l'intervalle $[a, b]$, avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*
*Une subdivision $\sigma$ de $[a, b]$ est une suite finie $x_0, x_1, \dots, x_n$, tel que*

$$x_0 = a < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$$

**Definition 39 (Somme de Darboux inferieure)**
*La somme de Darboux inferieure associee a $f$ et $\sigma$ est*

$$\underline{S}_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

*avec*

$$m_i = \inf \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

*Defini pour toute fonction $f$ bornee sur $[a, b]$.*

$\underline{S}_\sigma(f)$ est une tentative ( a priori trop petite) de definir l'aire determinee par $f$ sur $[a, b]$.

**Definition 40 (Somme de Darboux superieure)**
*La somme de Darboux inferieure associee a $f$ et $\sigma$ est*

$$\overline{S}_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

*avec*

$$M_i = \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

*Defini pour toute fonction $f$ bornee sur $[a, b]$.*

**Definition 41**

$$\underline{S}(f) = sup\{\underline{S}_\sigma(f)\}$$

$$\overline{S}(f) = sup\{\overline{S}_\sigma(f)\}$$

**Definition 42**
*La fonction $f$ est dite integrable sur $[a, b]$, si $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$.*

L'integrale de $f$ sur $[a, b]$, note $\int_a^b f$ est alors ce nombre $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$

## Lecture 23: Intuition derriere l'integration

Wed 02 Dec

**Proposition 193**
*Soient $\sigma$ et $\tau$ deux subdivisions avec $\sigma \subseteq \tau$.*
*Alors*

$$\overline{S}_\sigma(f) \geq \overline{S}_\tau(f)$$

*et*

$$\underline{S}_\sigma(f) \leq \underline{S}_\tau(f)$$

**Preuve**
*Par recurrence, il suffit de considerer le cas ou $\tau$ a un point de plus que $\sigma$.*
*En enumerant $\tau$ $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} = b$.*
*Posons que $\sigma$ ne possede pas $x_i$.*
*Pour calculer $\overline{S}_\tau(f)$, on introduit*

$$M_j = \sup\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$$

*Pour la somme superieur de $\sigma$, on pose*

$$M'_j = M_j \forall j \leq i - 1$$

*et*

$$M'_i = \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]\} = \max(M_i, M_{i+1})$$

*Donc*

$$\overline{S}_\sigma(f) = \sum_{j=1}^{i-1} M'_j(x_i - x_{i-1}) + \max(M+_i, M_{i+1})(x_{i+1} - x_{i-1}) + sumM_j(x_j - x_{j-1})$$

□

*Le terme au milieu est plus grand ou egal au terme correspondant de la somme pour* $\tau$.

**Corollaire 194**
$\forall \sigma, \tau$*, on a*

$$\overline{S}_\sigma(f) \geq \underline{S}_\tau(f)$$

**Preuve**
$\sigma, \tau \subseteq \sigma \cup \tau$.
*La proposition implique que*

$$\overline{S}_\sigma(f) \geq \overline{S}_{\sigma\cup\tau}(f) \geq \underline{S}_{\sigma\cup\tau}(f) \geq \underline{S}_\tau(f)$$ □

En conclusion

$$f \text{ integrable } \iff \forall \epsilon > 0 \exists \sigma \overline{S}_\sigma(f) < \underline{S}_\sigma(f) + \epsilon$$

**Theorème 195**
*Toute fonction continue est integrable sur un intervalle ferme.*

**Preuve**
*Soit* $\epsilon > 0$. *On cherche* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ *une subdivision* $\sigma$ *tel que*

$$\overline{S}_\sigma(f) < \underline{S}_\sigma(f) + \epsilon$$

*On sait que* $f$ *est uniformement continue et bornee.*
*Donc* $\exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{(b-a)}$ .
*Choisissons* $\sigma$ *tel que* $\forall i = 1, \ldots, n$ $x_i - x_{i-1} < \delta$.
*Alors* $f$ *varie au plus de* $\frac{\epsilon}{(b-a)}$ *sur* $[x_{i-1}, x_i]$.
*Donc* $M_i - m_i \leq \frac{\epsilon}{b-a} \forall i$. *Donc*

$$\overline{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \epsilon$$

□

**Theorème 196**
*Soit* $f$ *integrable sur* $[a, b]$ ( $f$ *borne*) .
*Si* $\tilde{f}$ *coincide avec* $f$ *sauf en un point* $c \in [a, b]$*, alors* $\tilde{f}$ *est ausi integrable et* $\int \tilde{f} = \int f$.

**Preuve**
*Donc il suffit de montrer :*

$$\forall \sigma \forall \epsilon > 0 \exists \tau \supseteq \sigma : \overline{S}_\tau(\tilde{f}) < \overline{S}_\tau(f) + \epsilon$$

*On ajoute deux points a* $\sigma$ *pour obtenir* $\tau$ *tel que* $c \in [x_{i-1}, x_i]$ *avec* $x_i - x_{i-1} < \delta$ *pour* $\delta = \frac{\epsilon}{|f(c) - \tilde{f}(c)|}$.
*Alors*

$$|\overline{S}_\tau(f) - \overline{S}_\tau(\tilde{f})| = |M_i - \tilde{M}_i|(x_i - x_{i-1}) \leq |\tilde{f}(c) - f(c)|\delta < \epsilon \qquad \square$$

**Corollaire 197**
*Si* $f$ *est continue sauf en un nombre fini de points,* $f$ *est integrable.*

**Definition 43**
*La finesse ( ou maille) de* $\sigma$ *est* $h(\sigma) = \max \{(x_i - x_{i-1}) : i = 1, \ldots, n\}$

**Definition 44**
*Soit* $\sigma$ *une subdivision de* $[a, b]$ *et soit* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \forall i$.
*La somme de Riemann associee a ce choix est*

$$R = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

## Lecture 24: Integrales

Mon 07 Dec

**Proposition 198**
*Soit* $f \in C^0([a, b])$ *et* $(\sigma_j)$ *une suite de subdivisions.*
*On suppose que la maille tend vers 0.*
*Alors*

$$\lim_{j \to +\infty} R_{\sigma_j} = \int_a^b f$$

*pour toute somme de Riemann* $R_{\sigma_j}$ *associee a* $\sigma_j$.

**Exemple**
*Soit* $\sigma_j = (x_0, \ldots, x_j)$ *avec*

$$x_i = a + i\frac{b-a}{j}$$

*On a alors*

$$R = \sum_{i=1}^{j} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

**Preuve**
*L'uniforme continuite dit*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y :$$

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon \qquad \square$$

*Donc, si $h(\sigma)<\delta$, alors $f(\xi_i), m_i, M_i$ different au plus de $\epsilon$.*

**Lemme 200**
*Soient $f_1 \leq f_2$ integrables sur $[a,b]$.*
*Alors $\int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2$.*

**Preuve**
$\forall\sigma\forall[x_{i-1},x_i] : m_i(f_1) \leq m_i(f_2)$.
*Fini.* $\square$

**Lemme 201**
*Si $f$ est integrable sur $[a,b]$, alors $|f|$ aussi et $\int_a^b |f| \geq |\int_a^b f|$*

**Preuve**
*Suit de l'inegalite triangulaire pour les sommes.* $\square$

**Lemme 202**
*Si $f$ est integrable sur $[a,b]$ et $a<c<d<b$, alors $f$ integrable sur $[c,d]$.*

**Preuve**
*A montrer, $\forall\epsilon>0$, on cherche $\sigma$ subdivision de $[c,d]$ tel que $\overline{S}_\sigma(f) < \underline{S}_\sigma(f)+\epsilon$.*
*Or, par hypothese, $\exists\tau$ sbdivision de $[a,b]$ tel que*

$$\overline{S}_\tau < \underline{S}_\tau(f)+\epsilon$$

*Posons $\rho = \tau \cup \{c,d\}$.*
*On sait que $\overline{S}_\rho(f) \leq \overline{S}_\tau(f)$.*
*Posons $\sigma$ la subdivision $\rho$ sans les elements avant c et apres d.*

$$\overline{S}_\sigma(f)-\underline{S}_\sigma(f) = \overline{S}_\rho(f)-\underline{S}_\rho(f) - \sum_{i=1}^{k}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1}) - \sum_{i=l+1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})$$

$\square$

**Proposition 203**
*Soit $f$ integrable sur $[a,b]$ et $a<c<b$. Aors*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

*De plus, si $f$ est integrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$, alors $f$ est integrable sur $[a,b]$*

**Preuve**
*Soit* $\epsilon > 0$.
*Puisque* $f$ *est integrable sur* $[a, c]$ *et* $[c, b]$, $\exists\sigma$ *et* $\tau$.
*On a alors*

$$\overline{S}_\sigma(f) < \underline{S}_\sigma(f) + \frac{\epsilon}{2}$$

$\sigma \cup \tau$ *est une subdivision de* $[a, b]$ *et*

$$\overline{S}_{\sigma\cup\tau} = \overline{S}_\sigma + \overline{S}_\tau$$

*Donc, puisque vrai pour tout* $\epsilon$, *on a fini.*
*On a seulement utilise les hypotheses que* $f$ *est integrable sur* $[a, c]$ *et sur* $[c, b]$, *donc la 2eme partie de la proposition est aussi demontree.* □

**Remarque**
*Si* $a > b$, *on definit*

$$\int_a^b f = -\int_a^b f$$

*On note aussi*

$$\int_a^a f = 0$$

**Corollaire 205**

$$\forall a, b, c : \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

**Lemme 206**
*Soit* $f$ *integrable sur* $[a, b]$. *Alors*

$$\inf(f)(b-a) \leq \int_a^b f \leq \sup f(b-a)$$

**Preuve**
*Il suffit de considerer* $\underline{S}_{[a,b]}$ *et* $\overline{S}_{[a,b]}$ □

**Proposition 207 (Theoreme de la moyenne)**
*Soit* $f$ *une fonction continue sur* $[a, b]$.
*Alors* $\exists c \in ]a, b[$ *tel que*

$$\int_a^b = f(c)(b-a)$$

**Preuve**
*Le lemme ci-dessus implique que*

$$\inf f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq \sup f$$

*Comme $f$ est continue sur $[a,b]$, $\inf f$ et $\sup f$ sont des valeurs de $f$.*
*Donc $\frac{\int_a^b f}{b-a}$ est une valeur intermediaire, donc par TVI, on a fini.* □

**Definition 45 (Primitive)**
*Soit $f$ une fonction.*
*On dit qu'une fonction $F$ est une primitive de $f$ si $F$ est derivable et $F' = f$.*

**Remarque**

1. *Si une primitive $F$ existe, alors il y en a plusieurs : $F + c$*
2. *TAF im plique que toute autre primitive est de cette forme.*

$$F_2' = f = F' \Rightarrow (F_2 - F)' = 0 \Rightarrow F_2 - F \text{ est constant par TAF}$$

3. *De nombreuses fonctions sont sans primitives : theoreme de Darboux.*

**Corollaire 209**
*Toute fonction continue est la derivee d'une fonction ( derivable)*

**Theorème 210 (Theoreme Fondamental)**
*Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.*
*Definissons $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ par*

$$F(x) = \int_a^x f$$

*Alors $F$ est une primitive de $f$.*

**Preuve**
*On sait deja que $F(x) = \int_a^x f$ est bien defini.*
*Soit $x_0 \in ]a,b[$, alors pour $x \in [a,b]$ :*

$$\underbrace{F(x) - F(x_0)}_{x-x_0} = \frac{\int_a^x f - \int_a^{x_0} f}{x - x_0} = \frac{\int_x^{x_0} f}{x - x_0}$$

*Pour la derniere egalite, il suffit de distinguer les cas.*
*A demontrer : $\lim_{x\to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f}{x-x_0}$ existe et vaut $f(x)$.*
*Par le theoreme de la moyenne, $\exists c_x \in [x_0, x]$*

$$\int_{x_0}^x f = f(x)(x - x_0)$$ □

*Donc, reste a montrer* $\lim_{x \to x_0} f(c_x) = f(x_0)$.
*Or* $\lim_{x \to x_0} c(x) = x_0$.
*Comme $f$ est continue, on conclut par limite de composition.*

**Theorème 211 (Fondamental, reformulation)**
*Soit $f$ continue sur $[a, b]$ et $G$ une primitive de $f$.*
*Alors*
$$\int_a^b f = G(b) - G(a)$$

**Preuve**
*Posons* $F(x) = \int_a^x f$ *TAF* $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : G = F + c$. *Or* $F(a) = 0 \Rightarrow c = G(a)$
*Et* $\int_a^b f = F(b) = G(b) - G(A)$. $\square$

## Lecture 25: Theoreme Fondamental

Wed 09 Dec

**Theorème 212**
*Soit $f_n$ une suite de fonctions integrables sur $[a, b]$ qui converge uniformement vers $f$.*
*Alors $f$ est integrable et*
$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

Si la convergence n'est pas uniforme, alors ce theoreme est faux.

**Preuve**
*La convergence uniforme implique*
$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0$$
$$\forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$
*Soit $\sigma$ une subdivision de $[a, b]$, alors*
$$|m_i(f_n) - m_i(f)| \leq \epsilon$$
*de meme*
$$|M_i(f_n) - M_i(f)| \leq \epsilon$$
*Donc*
$$|\underline{S}_\sigma(f_n) - \underline{S}_\sigma(f)| \leq \sum \epsilon(x_i - x_{i-1}) = \epsilon(b - a)$$
*Pour montrer que $f$ est integrable.*
*Soit* $\epsilon > 0$
*On cherche $\sigma$ tel que* $\overline{S}_\sigma(f) < \underline{S}_\sigma(f) + \epsilon$.

*Appliquer l'enonce precedent a* $\frac{\epsilon}{3(b-a)}$.
*Donc* $\exists n$ *tel que*

$$\overline{S}_\sigma(f) \leq \overline{S}_\sigma(f_n) + \epsilon < \overline{S}_\sigma(f_n) + 2\epsilon \leq \overline{S}_\sigma(f) + 3\epsilon$$

*Donc* $f$ *integrable.*

$$\int_a^b f = \overline{S}_f = \lim_{n\to\infty} \inf_\sigma \overline{S}_\sigma(f)$$

## 10.1 Recherche de Primitives

- *Cas simples :*
  - *si* $f = \cos$*, alors* $F = \sin$ *est une primitive.*
  - *Si* $f(x) = x^n$*,* $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ *est une primitive.* □

### 10.1.1 Changement de Variable

Idee : Utiliser $(F \circ \phi)' = F' \circ \phi \cdot \phi'$.

**Proposition 213**
*Soit* $f \in C^0([a, b])$ *et* $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *derivable et* $\phi(\alpha) = a$ *et* $\phi(\beta) = b$.
*Alors*

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f \circ \phi).\phi'$$

**Preuve**
*Par le theoreme fondamental,* $f$ *admet une primitive* $F$.
*Alors*

$$F \circ \phi$$

*est une primitive de* $F' \circ \phi \cdot \phi'$.
*Donc, le theoreme fondamental pour* $F' \circ \phi \cdot \phi'$ *donne :*

$$\int_\alpha^\beta F' \circ \phi \cdot \phi' = [F \circ \phi]_\alpha^\beta = F(b) - F(a) = \int_a^b f$$ □

### 10.1.2 Integration Par Parties

**Proposition 214**
*Soient* $f, g$ *differentiables, alors*

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$$

## Lecture 26: Recherche de Primitives

Mon 14 Dec

**Exemple**

$$\int_a^b e^x \cos x dx$$

*On a*

$$\begin{aligned}\int_a^b e^x \cos x dx &= \cos x e^x\big|_a^b + \int_a^b e^x \sin x \\ &= \cos x e^x\big|_a^b + \sin x e^x\big|_a^b - \int_a^b e^x \cos x dx\end{aligned}$$

*Donc on trouve*

$$\int_a^b e^x \cos x dx = \frac{1}{2}\left(e^x(\sin x + \cos x)\right)$$

**Exemple**

$$\int_a^b \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

*Cas* $n = 1$ *:*

*On a* $\tan = 1 + \tan^2$, *donc*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

*Donc*

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctan\big|_a^b$$

*A present, on peut calculer par recurrence*

$$I_n = \int_a^b \frac{dx}{1+x^{2^n}}$$

*Par recurrence, trouvons* $I_{n+1}$ *a partir de* $I_n$.

$$\begin{aligned}I_n &= \int_a^b \frac{dx}{(1+x^2)^n} \\ &= [x(1+x^2)^{-n}]_a^b + \int_a^b n\frac{2x^2}{(1+x^2)^{n+1}}dx \\ &= [x(1+x^2)^{-n}]_a^b + 2n\int_a^b \frac{(x^2+1)-1}{(1+x^2)^{n+1}}dx \\ &= [x(1+x^2)^{-n}]_a^b + 2n\int_a^b \frac{dx}{(x^2+1)^n} - 2n\int_a^b \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}\end{aligned}$$

*Donc*

$$I_{n+1} = [\frac{x}{2n(1+x^2)^n}]_a^b + \frac{(2n-1)}{2n}I_n$$

**Theorème 217 (Estimation du Reste Dans Taylor)**
*Soit $f \in C^{(n+1)}$, alors*

$$f(x) = \sum \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

**Preuve**
*Cas $n = 0$*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt = f(a) + [f]_a^x = f(x)$$

*Supposons vrai pour $n$.*
*On suppose vrai pour $n$, montrer pour $n+1$.*
*Hypothese de recurrence :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

*Soit $h(t) = f^{(n+1)}(t)$, donc $h'(t) = f^{(n+2)}(t)$, et $g'(t) = (x-t)^n$, donc $g(t) = \frac{-1}{n+1}(x-t)^{n+1}$.*
*On a*

$$\sum \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{n!} \left[ f^{(n+1)}(t) \frac{-1}{n+1}(x-t)^{n+1} \right]_{t=a}^{x} - \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+2)(t)\frac{-1}{n+1}(x-t)^{n+1}} dt$$

□

*Ici, le dernier terme est bel et bien le reste integral pour $n+1$.*

## 10.2 Integration de Fonctions Rationelles

## Lecture 27: Decomposition en Elements Simples

Wed 16 Dec

**Remarque**
*Liste des Simplifications de $\frac{P(x)}{Q(x)}$*

1. *Reduire la fraction*
2. *Quitte a multiplier par une constante, $Q(x)$ est unitaire.*
3. *Decomposer $Q(x)$ en facteurs de degre $1$ et $2$*
4. *sans perte de géneralité, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ satisfait $\deg P < \deg Q$*
5. *Decomposition en elements simples.*

Sous ces hypotheses, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ est une somme de termes de la forme

$$\frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + 2cx + d)^p}$$

Il faut donc trouver des primitives pour les fractions ci-dessus.
Considerons

$$\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+1)^p}$$

On separe la fraction en deux.
Premiere fraction facile par changement de variable. Considerons donc

$$\frac{1}{(x^2+1)^p}$$

Facile si $p=1$ ( arctangente) , sinon on a

$$\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+2cx+d)^p}$$

L'idee est de pose $x^2+2cx+d=y^2+1$ pour $y$ fonction affine de $x$.