Série 1, Exercice 6

David Wiedemann

26 septembre 2020

• Clairement le numérateur est un entier positif, il suffit donc de montrer qu'il est pair.
On distingue donc les cas.

— Supposons m pair et n pair, alors :

$$m = 2i \text{ et } n = 2k$$

Donc

$$\begin{aligned}(m+n)^2 + m + 3n &= (2i+2k)^2 + 2i + 6k \\ &= 2(2(i+k)^2 + i + 3k)\end{aligned}$$

Donc le numérateur est pair.

— Supposons m pair et n impair, alors

$$m = 2i \text{ et } n = 2k+1$$

Donc

$$\begin{aligned}(m+n)^2 + m + 3n &= (2i+2k+1)^2 + 2i + 6k + 3 \\ &= (2i+2k)^2 + 2(2i+2k) + 1 + 2i + 6k + 3 \\ &= (2i+2k)^2 + 2(2i+2k) + 2i + 6k + 4 \\ &= 2(2(i+k)^2 + (2i+2k) + i + 3k + 2)\end{aligned}$$

Donc le numérateur est pair.

— Supposons m impair et n pair, alors

$$m = 2i+1 \text{ et } n = 2k$$

Donc

$$\begin{aligned}(m+n)^2+m+3n &= (2i+2k+1)^2+2i+6k+1\\ &= (2i+2k)^2+2(2i+2k)+1+2i+6k+1\\ &= (2i+2k)^2+2(2i+2k)+2i+6k+2\\ &= 2(2(i+k)^2+(2i+2k)+i+3k+1)\end{aligned}$$

— Finalement, supposons m impair et n impair

$$m = 2i+1 \text{ et } n = 2k+1$$

Donc

$$\begin{aligned}(m+n)^2+m+3n &= (2i+2k+2)^2+2i+6k+4\\ &= 2(2(i+k+1)+i+3k+2)\end{aligned}$$

• Par la définition de D_k, $(m,n) \in D_k$ implique que $(k-n,n) \in D_k$ avec $0 \leq n \leq k$.
Supposons donc $(m,n) \in D_k$, on a :

$$\begin{aligned}C(m,n) = C(k-n,n) &= \frac{1}{2}\cdot\Big((k-n+n)^2+k-n+3n\Big)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\Big(k^2+k+2n\Big)\\ &= \frac{k^2+k}{2}+n\end{aligned}$$

Donc si $n=0$, $C(m,n) = \frac{k^2+k}{2}$ et si $n=k$, $C(m,n) = \frac{k^2+k}{2}+k$, donc les valeurs de $C(m,n)$ sont comprises entre $\frac{k^2+k}{2}$ et $\frac{k^2+k}{2}+k$.
• On est maintenant prêt à montrer la bijectivité de $C : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Pour ceci, on va procéder par étapes :

1. Montrer que $C : D_k \to \{\frac{k^2+k}{2}, \ldots, \frac{k^2+k}{2}+k\}$ est bijective.
2. Montrer que $D_i \cap D_k = \emptyset$, si $i \neq k$.
3. Montrer que $\bigcup_{i=0}^{+\infty} D_i = \mathbb{N}^2$.
4. Montrer que $C(D_k) \cap C(D_i) = \emptyset, i \neq k$
5. Montrer la bijectivité de $C : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.

Pour le point 1.
Trouver un inverse pour $C : D_k \to \{\frac{k^2+k}{2}, \ldots, \frac{k^2+k}{2}+k\}$ est facile, soit $a \in \{\frac{k^2+k}{2}, \ldots, \frac{k^2+k}{2}+k\}$, alors

$$\begin{aligned}C^{-1} : \left\{\frac{k^2+k}{2}, \ldots, \frac{k^2+k}{2}+k\right\} &\to D_k\\ a &\to \left(a-\frac{1}{2}(k^2+k), k+\frac{1}{2}(k^2+k)-a\right)\end{aligned}$$

Clairement, cette application est bijective car k est constante.
Pour le point 2.
Par l'absurde, supposons que $\exists(m,n) \in D_k$ et $(m,n) \in D_i$.
Donc $m+n=i$ et $m+n=k$, donc $i=k$, ce qui est une contradiction à l'hypothèse.
Pour le point 3.
On montre la double inclusion.
L'inclusion de gauche à droite est triviale.
Supposons donc $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. On pose $m+n=i, i \in \mathbb{N}$, donc $m=i-n$.

$$(m,n) = (i-n,n) \in D_i$$

On en déduit $\bigcup_{i=0}^{+\infty} D_i = \mathbb{N}^2$
Sans perte de généralité, on suppose $i<k$, donc $k=i+a, a \in \mathbb{Z}^+$. Montrons que $\sup(C(D_i)) < \sup(C(D_k))$.
Clairement

$$C : D_i \to \left\{\frac{i^2+i}{2}, \dots, \frac{i^2+i}{2}+i\right\}$$

et

$$C : D_k \to \left\{\frac{k^2+k}{2}, \dots, \frac{k^2+k}{2}+k\right\} = \left\{\frac{i^2+2ia+a^2+i+a}{2}, \dots, \frac{i^2+2ia+a^2+i+a}{2}+i+a\right\}$$

On sait que $\sup(C(D_i)) = \frac{i^2+i}{2}$ et que $\inf(C(D_k)) = \frac{i^2+2ia+a^2+i+a}{2}$, donc

$$\begin{aligned}
\inf(C(D_k)) - \sup(C(D_i)) &= \frac{i^2+2ia+a^2+i+a}{2} - \left(\frac{i^2+i}{2}+i\right) \\
&= \frac{i^2+2ia+a^2+i+a}{2} - \frac{i^2+3i}{2} \\
&= \frac{a^2+2ia-2i+a}{2}
\end{aligned}$$

Car $i, a > 0$, la différence est plus grande que 0 et donc l'intersection de $C(D_i) \cap C(D_k)$ est vide.
Donc C est injective sur $D_i \cup D_k, k \neq i$ et donc elle est bijective sur $\bigcup_{i=0}^{+\infty} D_i$

On voit aussi que si $a=1$, on a :

$$\frac{1+2i-2i+1}{2} = 1$$

Donc, il n'existe pas d'éléments de $k \in \mathbb{N}$ qui ne sont pas dans un $C(D_i), i \in \mathbb{N}$, les $C(D_i), i \in \mathbb{N}$ couvrent $\mathbb{N}$.
Donc $C : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une bijection.