3.1. Démontrer soigneusement les faits suivants discutés au cours. Vous pouvez utiliser les axiomes, la propriété archimédienne, la récurrence ...

- $\forall\, x, y \in \mathbf{R} : x + 1 < y \Rightarrow \exists\, n \in \mathbf{Z} : x < n < y$.
- $\forall\, x \in \exists!\, n \in \mathbf{Z} : x \in [n, n + 1)$.

C'est cet unique entier n qui définit la partie entière $[x]$ de x.

3.2. Rappelons que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Prouver *de deux façons différentes* que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

3.3. Y a-t-il des exercices de la première semaine que vous n'avez pas résolus? Alors c'est le moment de leur régler leur compte!