

Analyse I

David Wiedemann

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Buts du Cours	3
2	Definir \mathbb{R}	4
2.1	Exemple d'utilisation	6
3	Suites et limites	11
3.1	Convergence	11
4	Limsup et liminf	16
4.1	Suites de Cauchy	20

List of Theorems

1	Theorème (env. -400)	3
2	Lemme (Lemme)	3
3	Axiom (Nombres Reels)	4
4	Lemme (Theorem name)	5
5	Proposition (Annulation de l'element neutre)	5
6	Corollaire (x fois moins 1 egale -x)	5
7	Axiom (Nombres Reels II)	6
1	Definition (valeur absolue)	6
8	Proposition (Inegalite du triangle)	6
2	Definition (Bornes)	7
9	Axiom (Axiome de completude)	7
3	Definition (Supremum)	7
14	Proposition	8
15	Corollaire (Propriete archimediennne)	8
16	Theorème (La racine de deux existe)	8
18	Proposition (\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R})	9
19	Lemme	9
20	Proposition (Densite des irrationnels)	10

4	Definition (Suite)	11
5	Definition (Convergence de suites)	11
23	Lemme (Unicité de la limite)	11
6	Definition	12
25	Lemme	12
27	Proposition	12
28	Lemme	13
30	Proposition (Inversion d'une limite)	14
31	Corollaire	14
32	Lemme	14
34	Proposition	15
35	Proposition	15
37	Lemme (Deux gendarmes)	16
7	Definition (Limsup et liminf)	16
38	Théorème	17
39	Théorème (Première règle de d'Alembert)	17
8	Definition (Sous-suite)	18
44	Proposition	19
45	Théorème (Bolzano-Weierstrass)	19
9	Definition (Point d'accumulation)	19
10	Definition (Suites de Cauchy)	20
48	Lemme	20
49	Théorème (Convergence des suites de Cauchy)	20
50	Lemme	20

1 Introduction

1.1 Buts du Cours

Officiel :

Suites, series, fonctions, derivees, integrales , ...

Secrets :

Apprendre le raisonnement rigoureux

Creativite

Esprit Critique

Ne croyez rien tant que c'est pas prouve

On construit sur ce qu'on a fait, on recommence pas toujours a 0, par rapport a d'autres domaines (lettres par exemple)

Theorème 1 (env. -400)

Il n'existe aucun nombre (fraction) x tel que $x^2 = 2$.

Ca contredit pythagore mn ?

On va demontrer le theoreme.¹

Lemme 2 (Lemme)

Soit $n \in \mathbb{N}$ Alors n pair $\iff n^2$ pair.

Preuve

\Rightarrow Si n pair $\Rightarrow n^2$ pair.

Hyp. $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$)

Donc $n^2 = 4m^2$, pair.

Par l'absurde, n impair. $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$).

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

impair. Donc si n est impair, alors n^2 est forcément impair. Absurde. \square

Preuve

Supposons par l'absurde $\exists x$ t.q. $x^2 = 2$ et $x = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$).

On peut supposer a et b non tous pairs. (sinon reduire).

$$x^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$$

1. On demontre d'abord un lemme

pair.

Lemme : a pair, i.e. $a = 2n (n \in \mathbb{N})$.

$$a^2 = 4n^2 = 2b^2 \Rightarrow 2n^2 = b^2, \text{ i.e. } b^2 \text{ pair.}$$

Lemme : b pair.

Donc a et b sont les deux pairs, on a une contradiction.

⚡

□

En conclusion, le theoreme est bel et bien vrai, et contredit donc pythagore. Donc les fractions (\mathbb{Q}) ne suffisent pas a decire/mesurer les longueurs geometriques. Il faut les nombres reels, on les comprends seulement vraiment depuis 2 siecles.

C'est important de chercher ce genre d'erreurs.

Prochain but : definir les nombres reels (\mathbb{R}). L'interaction entre les fractions et les nombres reels.

2 Definir \mathbb{R}

On commence avec la definition axiomatique des nombres reels.

Axiom 3 (Nombres Reels)

\mathbb{R} est un corps, en d'autres termes :

Ils sont munis de deux operations : plus et fois.

— Associativite $x + (y + z) = (x + y) + z (x, y, z \in \mathbb{R})$ ²

— Commutativite $x + y = y + x$.

— Il existe un element neutre 0 t.q. $0 + x = x, x \in \mathbb{R}$.³

— Distributivite $x(yz) = (xy)z$

— Il existe un element inverse, unique $-x \in \mathbb{R}$ t.q. $x + (-x) = 0$

Remarque : Il existe beaucoup d'autres corps que \mathbb{R} , par exemple $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \{0, 1, 2\} \mod 3$

Attention : $\{0, 1, 2, 3\} \mod 4$ n'est pas un corps !

Presque tous marchent, ils satisfont 8 des 9 axiomes.

2. L'associativite n'est pas forcément vraie (octonions)

3. Il y a aucune difference entre les regles pour l'addition que pour la multiplication.

Lemme 4 (Theorem name) $\forall x \exists ! y \text{ t.q. } x + y = 0.$ **Preuve***Supposons $x + y = 0 = x + y'$* *A voir : $y = y'$.*

$$\begin{aligned}
 y &= y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' \\
 &= (x + y) + y' = 0 + y' = y'
 \end{aligned}$$

CQFD.

□

Exercice

Démontrer que 0 est unique.

Proposition 5 (Annulation de l'élément neutre) $0 \cdot x = 0$ **Preuve**

$$x = x \cdot 1 = x(1 + 0) = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + x \cdot 0$$

$$0 = x + (-x) = x + (-x) + x \cdot 0$$

□

$$\Rightarrow 0 = x \cdot 0$$

4

Corollaire 6 (x fois moins 1 égale -x)

$$x + x \cdot (-1) = 0$$

Preuve*A voir : $x \cdot (-1)$ satisfait les propriétés de $-x$.**Or*

$$x + x(-1) = x(1 - 1) = x \cdot 0 = 0.$$

□

ExerciceMontrer que $\forall x : -(-x) = x$ et que ceci implique $(-a)(-b) = ab$.Rien de tout ça n'a quelque chose à voir avec \mathbb{R} .

Il nous faut plus d'axiomes!!

$$4. \ a - b = a + (-b)$$

Axiom 7 (Nombres Reels II)

\mathbb{R} est un corps ordonne. Ce qui revient a dire que les assertions suivantes sont verifiees.

- $x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$
- $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$
- pour tout couple de nombres reels x et y : ou bien $x \leq y$ ou bien $x \geq y$.

Exemple de corps ordonnes :

- (1) \mathbb{R} , (2) \mathbb{Q} , (3) $\{0, 1, 2\} \pmod{3}$ n'est pas un corps ordonne.

Exercice

$$x \leq y \iff -x \geq -y \quad \text{Exercice}$$

$$x \leq y \text{ et } z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$$

$$x \leq y \text{ et } z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz.$$

Il nous manque encore un axiome, et c'est le dernier : pour mercredi !

Lecture 2: Cours Mercredi

Wed 16 Sep

2.1 Exemple d'utilisation

Definition 1 (valeur absolue)

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposition 8 (Inegalite du triangle)

Elle dit que

$$\forall x, y : |x + y| \leq |x| + |y|$$

Preuve

Cas $x, y \geq 0$: alors $x + y \geq 0$

$$\iff x + y \leq x + y$$

Ce qui est toujours vrai.

Cas $x \geq 0$ et $y < 0$.

Si $x + y \geq 0$, alors

$$\iff |x + y| \leq x - y$$

$$\iff x + y \leq x - y$$

$$y \leq -y$$

c'est vrai car $y < 0$.

Si $x + y < 0$, alors

$$\Longleftrightarrow -x - y \leq x - y$$

□

Donc $-x \leq x$ vrai car $x \geq 0$.

Definition 2 (Bornes)

Terminologie : Soit $A \subseteq E$, E corps ordonne.

— *Une borne superieure (majorant) pour A et un nombre b tq*

$$a \leq b \forall a \in A.$$

— *Une borne inferieure (minorant) pour A et un nombre b tq*

$$a \geq b \forall a \in A.$$

On dira que l'ensemble A est borne si il admet une borne.

Axiom 9 (Axiome de completude)

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \neq \emptyset$$

et majoree $\exists s \in \mathbb{R}$ t.q

1. *s est un majorant pour A .*

2. *\forall majorant b de A , $b \geq s$.*

Cet axiome finis la partie axiomatique du cours.

Remarque

1. *$\forall s' < s \exists a \in A : a > s'$.*

2. *s est unique.*

Definition 3 (Supremum)

Ce s s'appelle le supremum de A , note $\sup(A)$.

Remarque

\exists (pour A minore et $\neq \emptyset$) une borne inferieure plus grande que toutes les autres, notee $\inf(A)$ (infimum).

$$\inf(A) = -\sup(-A)$$

Remarque

Si $\sup(A) \in A$, on l'appelle le maximum.

Remarque

Si $\inf(A) \in A$, on l'appelle le minimum.

Proposition 14

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x.$$
Preuve

Par l'absurde,

Alors

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : n < x$$

$\Rightarrow \mathbb{N}$ borne et $\neq \emptyset \Rightarrow \exists s = \sup(\mathbb{N})$

$$s - \frac{1}{2} < s \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > s - \frac{1}{2}$$

$n + 1 \in \mathbb{N}$ et $n + 1 > s - \frac{1}{2} + 1 = s + \frac{1}{2}$

donc $n + 1 > s$ absurde. □

Corollaire 15 (Propriété archimédienne)

1. $\forall x \forall y > 0 \exists n \in \mathbb{N} : ny > x.$

2. $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon$

Preuve

Pour 2, appliquer la proposition à $x = \frac{1}{\epsilon} \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{1}{\epsilon}$

Alors

$$\Rightarrow \epsilon > \frac{1}{n}$$

Pour montrer le 1.

Considérer $\frac{x}{y}$ □

On peut maintenant montrer que la racine de deux existe.

Théorème 16 (La racine de deux existe)

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

Preuve

$$A := \{y | y^2 < 2\}$$

Clairément $A \neq \emptyset$ car $1 \in A$. De plus, A est majorée : 2 est une borne. (si $y > 2, y^2 > 4 > 2 \Rightarrow y \notin A$).

Donc $\exists x = \sup(A)$

Supposons (par l'absurde) que $x^2 < 2$

Soit $0 < \epsilon < 1, \frac{2-x^2}{4x}$.

Clairement, par hypothese $2 - x^2 > 0$ et idem pour $4x$ car $x \geq 1$. Soit $y = x + \epsilon$, alors

$$y^2 = x^2 + 2\epsilon x + \epsilon^2 < x^2 + \frac{2 - x^2}{2} + \frac{2 - x^2}{2} = 2$$

$\Rightarrow y \in A$ Mais $y = x + \epsilon > x$. Absurde car $x = \sup(A)$. Donc $x^2 \geq 2$.

Deuxiemement, supposons (absurde) $x^2 > 2$.

Soit $0 < \epsilon < \frac{x^2 - 2}{2x} > 0$.

Posons $b = x - \epsilon$.

$$\begin{aligned} b < x &\Rightarrow \exists y \in A : y > b \\ \Rightarrow y^2 > b^2 &= x^2 - 2\epsilon x + \epsilon^2 > x^2 - \underbrace{2\epsilon x}_{< x^2 - 2} \\ &> x^2 - (x^2 - 2) = 2. \end{aligned}$$

Conclusion : $y^2 > 2$ contredit $y \in a$.

Donc $x^2 = 2$. □

Remarque

Preuve similaire :

$$\forall y > 0 \exists! x > 0 : x^2 = y$$

Proposition 18 (\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R})

$$\forall x < y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y$$

Lemme 19

$$\forall x \exists n \in \mathbb{Z} : |n - x| \leq \frac{1}{2}$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} \forall x \exists [x] \in \mathbb{Z} & \text{ tq } \\ \begin{cases} [x] \leq x \\ [x] + 1 > x \end{cases} \end{aligned}$$

Preuve

$$\exists n \in \mathbb{Z} : n > x (\text{Archimede}).$$

Soit $[x] = \inf\{n \in \mathbb{Z} : n > x\} - 1$ □

Preuve (Preuve de la densité)

Archimede : $\exists q \in \mathbb{N} : q > \frac{1}{y-x}$.

Donc

$$\begin{aligned}
& qy - qx > 1. \\
\Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : qx < p < qy
\end{aligned}$$

par exemple :

$$p = [qy]$$

si $qy \notin \mathbb{Z}$ ou bien

$$p = qy - 1$$

si $qy \in \mathbb{Z}$

□

Lecture 3: Suites

Wed 23 Sep

0,999

0,9

0.99

0.999

0.9999

⋮

Proposition 20 (Densité des irrationnels)

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, les irrationnels sont dense dans \mathbb{R} .

Preuve

Soit $x < y$ (dans \mathbb{R}).

Cherche $z \notin \mathbb{Q}$ tq $x < z < y$.

$$\exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ tq } x < \frac{p}{q} < y$$

Propr. archimédienne $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} :$

$$\underbrace{\frac{p}{q} + \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{n}}_{:=z} < y$$

car

$$\exists n : \frac{1}{n} < \underbrace{y - \frac{1}{q}}_{>0} / \sqrt{2}$$

Il reste a voir que : $z = \frac{p}{q} + \sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$

$$\sqrt{2} = n(z - \frac{p}{q})$$

$$z \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \quad \text{⚡}$$

□

3 Suites et limites

Definition 4 (Suite)

Une suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ dans \mathbb{R} est une application (= fonction) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Remarque

Suite $(x_n) \neq$ ensemble $\{x_n\}$ Il arrive qu'on indice x_n par une partie de \mathbb{N} . Mais suite = suite infinie

Exemple

$$x_n = \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$$

$$x_n = (-1)^n; x_n = n!; F_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$$

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415$$

3.1 Convergence

Definition 5 (Convergence de suites)

L'expression $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ signifie :

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$$

On dit alors que (x_n) converge (vers l). Sinon, (x_n) diverge.

Lemme 23 (Unicité de la limite)

Si (x_n) converge, il existe une unique $l \in \mathbb{R}$ tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$

Preuve

Supposons l, l' limites. Si $l \neq l'$, alors $|l - l'| > 0$ Donc $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \frac{|l - l'|}{2}$

De meme $\exists n_1 \forall n > n_1 : |x_n - l'| < \frac{|l - l'|}{2}$

Soit $n > n_0, n_1$ Alors :

$$|l - l'| = |l - x_n + x_n - l'| \leq \underbrace{|l - x_n|}_{< |l - l'|/2} + \underbrace{|x_n - l'|}_{|x_n - l'|}$$

Donc

$$|l - l'| < 2 \cdot \frac{|l - l'|}{2}$$

⚡

□

Exemple

1. Si (x_n) est constante ($\exists a \forall n : x_n = a$) alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ (Archimede)

Definition 6

Terminologie :

(x_n) est bornée, majorée, minorée, rationnelle, ... etc si l'ensemble $\{x_n\}$ l'est.

La suite (x_n) est croissante si $x_n \leq x_{n+1} \forall n$ Idem décroissante Dans les deux cas, on dit que la suite (x_n) est monotone

Lemme 25

Toute suite convergente est bornée.

Preuve

Posons $\epsilon = 7$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |x_n - l| < 7 \quad \square$$

Soit $B_1 \geq |x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|$

Posons $B = \max(B_1, |l| + 7)$ Alors $|x_n| \leq B \forall n$.

Attention la reciproque n'est pas vraie!!

Exemple

$x_n = (-1)^n$ definit une suite bornée non convergente.

Preuve

Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = l$.

Posons $\epsilon = \frac{1}{10}$ alors $\exists n_0 \forall n > n_0 : |(-1)^n - l| < \frac{1}{10}$

$n > n_0$ pair $\Rightarrow |1 - l| < \frac{1}{10}$

$n > n_0$ impair $\Rightarrow |-1 - l| < \frac{1}{10}$

ceci implique

$$\Rightarrow |1 - (-1)| \leq |1 - l| + |-1 - l| < \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \quad \square$$

Proposition 27

Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x'_n = l'$

Alors 1. : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + x'_n) = l + l'$, et 2. : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot x'_n = l \cdot l'$

Preuve

1 :

Soit $\epsilon > 0$ Cherche n_0 tq $\forall n > n_0 : |x_n + x'_n - (l + l')| < \epsilon$.

Appliquons les deux hypothèses à $\frac{\epsilon}{2} : \exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ et $\frac{\epsilon}{2} : \exists N' \forall n > N' : |x'_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$. Posons $n_0 = \max(N, N')$. Si $n > n_0$, alors

$$|x_n + x'_n - (l + l')| \leq |x_n - l| + |x'_n - l'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

2 :

Par le lemme, $\exists B$ tq. $|x_n|, |x'_n| < B \forall n$.

Soit $\epsilon > 0$. Appliquons les hypothèses à $\frac{\epsilon}{2B}$.

$$\exists N \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2B}$$

Si $n > n_0 := \max(N, N')$:

$$\begin{aligned} |x_n x'_n - ll'| &\leq |x_n x'_n - x_n l'| + |x_n l' - ll'| \\ &= \underbrace{|x_n|}_{< B} \cdot \underbrace{|x'_n - l'|}_{< \frac{\epsilon}{2B}} + \underbrace{|l'|}_{< B} \cdot \underbrace{|x_n - l|}_{< \frac{\epsilon}{2B}} < \epsilon \end{aligned} \quad \square$$

Lemme 28

On a utilisé : lemme Si $x_n \leq B \forall n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ alors $l \leq B$

Preuve

Par l'absurde :

Si $l > B$, posons $\epsilon = l - B > 0$

$\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$

en particulier $x_n > l - \epsilon = B \nexists$ \square

Lecture 4: lundi

Mon 28 Sep

Remarque

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = |\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n|$, ce qui est sous-entendu ici est que la limite existe.
- $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergence et limite sont inchangées si on modifie un nombre fini de termes.
En particulier $(x_n)_{n=17}^{\infty}$, rien ne change.
- $x_n \rightarrow l$ ($n \rightarrow \infty$), équivalent à $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$
- On dit que (x_n) converge vers $+\infty$ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, si (x_n) diverge de la façon suivante :

$$\forall R \in \mathbb{R}, \exists n_0 \forall n > n_0 : x_n > R$$

La définition est la même si x_n converge vers $-\infty$

Proposition 30 (Inversion d'une limite)

Supposons que (x_n) converge vers $l \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{l}$

Corollaire 31

Si (x_n) converge vers l et

Si (y_n) converge vers $m \neq 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{l}{m}$$

Car $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$

Lemme 32

Sous les hypotheses de la proposition,

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n \neq 0$$

Preuve

Appliquons la convergence à $\epsilon = \frac{|l|}{2}$ (car $l \neq 0$)

$$|x_n - l| < \epsilon \Rightarrow x_n \neq 0$$

□

Preuve

Preuve de la proposition

Soit $\epsilon > 0$.

On veut estimer

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{l} \right| = \underbrace{\frac{|l - x_n|}{|x_n - l|}}_{\geq \frac{|l|}{2} |l|} < ? \epsilon$$

pour n comme dans le lemme. On veut donc

$$|l - x_n| < \epsilon \frac{|l|^2}{2}$$

Donc $\exists n_1 \forall n \geq n_1$, on a bien $|l - x_n| < \epsilon$

□

Exemple

On peut à présent calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_d n^d}{b_0 + \dots + b_f n^f}$$

$$a_d \neq 0, b_f \neq 0$$

Si $d > f$ alors $\lim = \pm \infty$

Si $d < f$ alors $\lim = 0$

Si $d = f$, alors $\lim = \frac{a_d}{b_f}$

Justification

La suite peut s'écrire

$$\frac{a_d + a^{d-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^{d-1}}}{b_0 \frac{1}{n^d + \dots + b_f n^{f-d}}}$$

Si $f = d$, $\rightarrow \frac{a_d}{b_f}$

Si $f > d$, $\rightarrow 0$

Si $f < d$, $\rightarrow \pm\infty$, selon signe de $\frac{a_d}{b_f}$

Proposition 34

Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $|a| < 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$$

Proposition 35

Si (x_n) est monotone et bornée, alors elle converge.

Preuve

Soit (x_n) croissante. Affirmation, $x_n \rightarrow s := \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Soit $\epsilon > 0$, $\exists n : x_n > s - \epsilon$ (def. de sup)

$\forall n \geq n_0 : s - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq s \Rightarrow |x_n - s| < \epsilon$

Idem, si elle était décroissante. □

Preuve

Remarque : $(x_n) \rightarrow 0 \iff (|x_n| \rightarrow 0)$.

$$\dots |x_n - 0| < \epsilon$$

Donc on va traiter le cas $a > 0$, alors $(a^n)_{n=1}^\infty$ est décroissante.

Bornée (par zéro et 1) \Rightarrow elle admet une limite l .

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{n+1}}_{a \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n}$ Donc $l = al$. Si $l \neq 0$, $1 = a$ absurde, donc l

nul. □

Exemple

Def (x_n) en posant $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$

Observons que $x_n \geq 2 > 0 \forall n$

Si (x_n) converge, alors

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x_n}\right) = 2 + \frac{1}{l}$$

Donc

$$l^2 - 2l - 1 = 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{1+1} = l$$

Or $l \geq 2 \Rightarrow l = 1 + \sqrt{2}$ si l existe.

A present, estimons $|x_n - l|$:

$$\begin{aligned} \left| x_n - 1 - \sqrt{2} \right| &= \left| 2 + \frac{1}{x_{n-1}} = \left(2 + \frac{1}{l} \right) \right| = \frac{|l - x_{n-1}|}{x_{n-1}l} \leq \frac{|x_{n-1} - l|}{4} \\ &\leq \dots \leq \frac{|x_{n-2} - l|}{4^2} \leq \frac{|2 - l|}{4^n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

car $\frac{1}{4^n} \rightarrow 0$

Lemme 37 (Deux gendarmes)

Soit $(x_n), (y_n), (z_n)$ trois suites avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$$

si $x_n \leq y_n \leq z_n \forall n$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = l$$

Preuve

repose sur le fait que

$$|x_n - l|, |z_n - l| < \epsilon \Rightarrow l - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \epsilon$$

montre $|y_n - l| < \epsilon$

□

4 Limsup et liminf

Definition 7 (Limsup et liminf)

Soit (x_n) une suite quelconque.

On definit la limite superieure par :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf_n \sup \{x_k, k \geq n\}$$

Attention : Ici on convient que

$$\sup(A) = +\infty$$

si A non majore

$$\inf(A) = -\infty$$

si A non minore

On definit la limite superieure par :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup_n \inf \{x_k, k \geq n\}$$

Notez : $z_n := \sup \{x_k : k \geq n\}$

Cela definit une suite decroissante et donc (z_n) converge vers son inf.

Conclusion : $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} x_k$

Lecture 5: mercredi 30

Wed 30 Sep

Theorème 38

(x_n) converge $\iff \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ Dans ce cas, la limite prend cette meme valeur.

Preuve

$\Leftarrow :$

Soit $z_n = \sup \{x_p : p \geq n\}$,

$$y_n = \inf \{x_p : p \geq n\}$$

Rappel : $(z_n) \rightarrow LS$ et $(y_n) \rightarrow LI$

Or, $y_n \leq x_n \leq z_n$. Donc par les 2 gendarmes

$$\Rightarrow (x_n) \rightarrow LS = LI$$

$\Rightarrow :$

Hypothese : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$.

A voir : $LS = LI = l$.

Montrons par exemple que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = l$$

(i.e. $LS = l$)

Soit $\epsilon > 0$.

$$\exists N \forall n \geq N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{et } \forall n \geq N : |z_n - LS| < \frac{\epsilon}{4}$$

Def. de $z_N \Rightarrow \exists p \geq N : |x_p| > z_N - \frac{\epsilon}{4}$

A present

$$|LS - l| \leq \underbrace{|LS - z_N|}_{< \frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|z_n - x_p|}_{< \frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|x_p - l|}_{< \frac{\epsilon}{2}}$$

avec $p \geq N$ et $N \geq N$ Donc $\forall \epsilon > 0 :$

$$|LS - l| < \epsilon$$

Donc $LS = l$

□

Theorème 39 (Premiere regle de d'Alembert)

Supposons $x_n \neq 0 \forall n$

Supposons que $\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|$ existe

Si $\rho < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

Si $\rho > 1$, alors (x_n) diverge.

Remarque

Si $\rho = 1$, on ne peut rien conclure

Exemple

- $x_n = n$ diverge, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$
- $x_n = \frac{1}{n}$ converge mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$

Preuve

Supposons $\rho < 1$.

A voir : $x_n \rightarrow 0$.

Soit $\rho < r < 1$. Convergence pour $\epsilon = r - \rho : \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - \rho \right| < r - \rho$

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < r$$

i.e. $|x_{n+1}| < r |x_n|$ de meme $|x_{n+2}| < r |x_{n+1}| < r^2 |x_n|$

Conclusion $\forall m \geq n_0 : |x_m| < r^{m-n_0} |x_{n_0}|$

Donc

$$\forall m \geq n_0 : |x_m| < r^m |x_{n_0}| r^{-n_0}$$

On sait que $\lim_{m \rightarrow +\infty} r^m = 0$ donc

$$0 \leq |x_m| \leq r^m c$$

avec c constante Cas $\rho > 1$.

On va montrer que $|x_n|$ est non bornée.

Soit $1 < r < \rho$.

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 : |x_{n+1}/x_n| > r$$

Donc

$$|x_{n+1}| > r |x_n|$$

comme avant :

$$x_m > r^{m-n_0} |x_{n_0}|$$

□

Remarque

Si $r > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = +\infty$ r^n est croissante donc il suffit de montrer que la suite est non bornée.

Si elle était bornée, soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} r^n \in \mathbb{R}$

Mais $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n+1} = rl$

Donc $l \neq 0 \Rightarrow 1 = r$ absurde.

Définition 8 (Sous-suite)

Soit $(x_n)_{n=1}^\infty$ une suite.

Une sous-suite de (x_n) est une suite de la forme $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$, ou $(n_k)_{k=1}^\infty$ est une suite strictement croissante de \mathbb{N} .

Exemple

Si (x_n) est une suite, considerer :

$$x_2, x_3, x_5, x_7, x_{11}, x_{13}, \dots$$

Ici, $n_k = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$

Proposition 44

Si x_n converge, alors toute sous-suite converge vers la meme limite.

Preuve

Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Soit $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ une sous-suite et $\epsilon > 0$.

A voir : $\exists k_0 \forall k > k_0 : |x_{n_k} - l| < \epsilon$

Or $\exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - l| < \epsilon$.

Donc il suffit de choisir k_0 tq $n_{k_0} \geq n_0$.

(puisque la suite (n_k) est croissante.) □

Theorème 45 (Bolzano-Weierstrass)

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente

Preuve

On va construire une sous-suite qui converge vers $s := \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$

Ici, (x_n) est la suite en question et on pose

$$z_n = \sup \{x_p : p \geq n\}$$

Par recurrence, n_1 quelconque.

Supposons n_{k-1} construit et construisons n_k :

$$\exists N \forall n \geq N : |z_n - s| < \frac{1}{k}$$

Choisissons un $n \geq N, n_{k-1} + 1$

$$\exists p \geq n \text{ t.q. } x_p > z_n - \frac{1}{k}$$

On definit $n_k = p$ ($n_k > n_{k-1}$)

$$\text{Or, } \underbrace{|x_{n_k} - s|}_{< \frac{1}{k}} \leq \underbrace{|x_{n_k} - z_n|}_{< \frac{1}{k}} + \underbrace{|z_n - s|}_{< \frac{1}{k}}$$

Donc $(x_{n_k}) \rightarrow s (k \rightarrow \infty)$ □

Définition 9 (Point d'accumulation)

x est un point d'accumulation de la suite x_n s'il existe une sous-suite qui converge vers x .

Exemple

$$x = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$x = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

4.1 Suites de Cauchy

Definition 10 (Suites de Cauchy)

La suite (x_n) est dite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < \epsilon$$

Attention :

Il ne suffit pas de comparer x_n et x_{n+k} pour k fixe.

Exemple

$$x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\text{Cauchy} \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall k \in \mathbb{N} : |x_n - x_{n+k}| < \epsilon$$

Lemme 48

Si (x_n) converge, elle est de Cauchy.

Preuve

Soit $\epsilon > 0$, soit l la limite.

Hypothèse :

$$\text{avec } \frac{\epsilon}{2} : \exists N \forall n \geq N : |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

Si $n, n' \geq N$

$$|x_n - x_{n'}| \leq |x_n - l| + |x_{n'} - l| < \epsilon$$

□

Theorème 49 (Convergence des suites de Cauchy)

Toute suite de Cauchy converge

Preuve

Soit (x_n) de Cauchy.

Lemme 50

(x_n) est bornée.

Preuve

Soit $\epsilon = 10$

$$\forall N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < 10$$

Donc $|(x_n)|$ est bornée par

$$\max(|x_N| + 10, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|)$$

□

Appliquer Bolzano-Weierstrass

\exists sous-suite (x_{n_k})

qui converge, soit l sa limite. A voir (x_n) converge vers l .
 soit $\epsilon > 0 \exists k_0 \forall k \geq k_0 |x_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2}$

$$\exists N \forall n, n' \geq N : |x_n - x_{n'}| < \frac{\epsilon}{2}$$

Si $n \geq N, n_{k_0}$ alors

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < \epsilon$$

□