

Veuillez télécharger vos solutions aux exercices à rendre (Exercice 1) sur la page Moodle du cours avant le lundi 5 octobre, 18h.

---

## 1 Exercices à rendre

### Exercice 1.

Soient  $A$  un ensemble constitué de 6 éléments et  $R \subset A \times A$  une relation d'équivalence. On suppose que  $R$  définit 3 classes d'équivalence sur  $A$ . Combien d'éléments  $R$  contient-il ? (Il y a plusieurs possibilités, trouvez chacune d'elles et justifiez vos réponses).

## 2 Exercices supplémentaires

### Exercice 2.

Soient  $A$  un ensemble et  $R \subset A \times A$  une relation d'équivalence. Pour chaque  $a \in A$  on définit la classe d'équivalence de  $a$  par

$$R_a := \{b \in A \mid (a, b) \in R\} \subset R.$$

Démontrer les assertions suivantes :

1.  $(a, b) \in R$  si et seulement si  $R_a = R_b$ .
2.  $(a, b) \notin R$  si et seulement si  $R_a \cap R_b = \emptyset$ .

### Exercice 3 (Propriété universelle de l'ensemble quotient).

Soient  $A$  un ensemble et  $R \subset A \times A$  une relation d'équivalence. On dispose d'une application quotient

$$q: A \longrightarrow A/R, \quad a \mapsto R_a.$$

Démontrez l'assertion suivante : si  $f: A \rightarrow B$  est une fonction d'ensembles vérifiant

$$(a, a') \in R \Rightarrow f(a) = f(a')$$

alors il existe une unique application  $f_R: A/R \rightarrow B$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ q \downarrow & \nearrow f_R & \\ A/R & & \end{array}$$

commute (c'est-à-dire  $f = f_R \circ q$ ).

**Exercise 4.**

Considérons l'ensemble  $A := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ , muni de la relation  $R \subset A \times A$  donnée par

$$((a, b), (c, d)) \in R \Leftrightarrow ad = bc.$$

1. Vérifiez que  $R$  est une relation d'équivalence.
2. Montrez que la fonction

$$f: A \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad (a, b) \mapsto \frac{a}{b}$$

induit une fonction  $f_R: A/R \longrightarrow \mathbb{Q}$  qui est bijective.

**Exercise 5.**

Soit  $A \twoheadrightarrow B$  une surjection entre ensembles. Montrer qu'il existe une injection  $B \hookrightarrow A$ .

**Exercise 6.**

Quels sont les sous-ensembles  $E$  de  $\mathbb{N}$  tels que  $|E| = |\mathbb{N}|$  ?