5.1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbf{R}$ et tout entier $n \geq 1$ on a la formule (**binôme de Newton**):

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \qquad (\text{ convention } 0! = 1)$$

Indications:

(a) Montrer que la formule est vraie pour $n = 1$.

(b) Supposer que la formule est vraie pour $n = 1, 2, \ldots, N$ et montrer qu'elle reste encore vraie pour $n = N + 1$, où $N \geq 1$ (**raisonnement par induction** ou **par récurrence**).

5.2. On définit $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est convergente et que $\lim_{n\to\infty} x_n > 2$.

(Le nombre $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ est important en analyse; c'est le nombre e).

Indications:

(a) En utilisant la formule du binôme de Newton, démontrer que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}. \qquad (\text{rappel: } 0! = 1 \text{ par convention})$$

(b) Sachant que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2$, en déduire que la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée.

(c) En utilisant la formule du binôme de Newton, démontrer que la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est croissante.

5.3. Montrer que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ définie par $x_0 = 3$, $x_1 = 2$ et

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + x_{n-1}}$$

converge. Calculer sa limite.

On suppose connue la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

<u>Indication</u>

Montrer par récurrence que $1 < x_{n+1} < x_n < x_{n-1}$.