Analyse avancée II — Semaine du 2021-03-08 au 2021-03-12
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Enseignant : Fabio Nobile

Série 06 du mercredi 10 mars 2021

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{1}$$

1) Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) = \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big) = 0. \tag{2}$$

2) Peut-on en déduire que $\lim_{(0,0)} f = 0$?

Exercice 2.

1) Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ un point d'accumulation de E. Montrer que $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \ell$ si et seulement s'il existe $R > 0$ et une fonction $g :]0,R[\to \mathbb{R}_+$ tels que $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$ et, pour tout $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0,R) \cap (E \setminus \{\boldsymbol{x}_0\})$, $|f(\boldsymbol{x}) - \ell| \leqslant g(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|)$. Le choix de la norme n'est pas important.
2) Utiliser le critère du point 1 pour montrer que les fonctions suivantes, définies de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$, ont pour limite 0 en $(0,0)$:

$$f_1(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},$$
$$f_2(x,y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Exercice 3.

Soit un sous-ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$.

1) Montrer la caractérisation suivante des fonctions continues. En supposant E ouvert, une fonction $f : E \to \mathbb{R}^m$ est continue (i.e. $f \in \mathrm{C}^0(E,\mathbb{R}^m)$) si et seulement si la préimage $f^{-1}(V)$ de chaque ouvert $V \subset \mathbb{R}^m$ est aussi ouverte.
2) Montrer que si E est compact et $f : E \to \mathbb{R}^m$ est continue, alors l'image $f(E) \subset \mathbb{R}^m$ est compact.
3) Montrer que si E est connexe par arcs et $f : E \to \mathbb{R}^m$ est continue, alors l'image $f(E) \subset \mathbb{R}^m$ est connexe par arcs.