Prof. Friedrich Eisenbrand 10 Mai 2021

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2021

Série 11

Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Piazza 2 semaines après. La solution de l'exercice (*) sera discutée dans les séances d'exercices du mardi. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. Soient $A, B, P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que P est inversible et $A = P^{-1}BP$. Montrer que $e^A = P^{-1}e^B P$.

Exercice 2. Trouver e^{tA} pour chacune des matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, où $x, y \in \mathbb{C}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ qui satisfait $A^2 = 0$.

d) Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ qui satisfait $A^2 = A$.

Exercice 3. On considère le système

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = x_1(t) - 2x_2(t)$$
$$\frac{d}{dt}x_2(t) = -2x_1(t) + x_2(t)$$

avec les conditions initiales: $x_1(0) = \alpha$ et $x_2(0) = \beta$.

a) Écrire le système en notation de vecteur matrice comme $x' = Ax$ et $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

b) Trouver les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A,

c) Trouver la matrice S telle que $e^{tA} = Se^{t\Lambda}S^{-1}$, où

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

d) Résoudre l'equation $x(t) = e^{tA}x(0)$ pour trouver une solution du système orignal.

Exercice 4.

a) Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. Trouver e^{tA}, où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

b) Trouver la solution du système suivant :

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 5x_2 \\ x_2' &= -5x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

sujet aux conditions initiales $x_1(0) = 2$ et $x_2(0) = -1$.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Résoudre l'equation $x' = Ax$ avec conditions initiales $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -5 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Soit $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire associée à cette matrice A. Trouver des sous-espaces $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ qui satisfont les conditions du Lemme 5.20, c'est-à-dire $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, $T(V_i) \subseteq V_i$ et $T_{|V_i} = N_i + \lambda_i I$, où $N_i \colon V_i \to V_i$ est nilpotente, pour $i = 1, 2$.

Exercice 7. (*)

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et soient J une forme normale de Jordan de A, P la matrice de passage associée ($A = PJP^{-1}$).

Le but de cet exercice est de montrer que le nombre de blocs de Jordan sur J associé à une valeur propre λ est exactement $\dim\ker(A - \lambda I)$.

a) Soit $S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}$ une matrice blocs diagonale. Montrer que

$$\text{rang}(S) = \text{rang}(S_1) + \text{rang}(S_2)$$

Généraliser pour p blocs sur la diagonale. (*Indice* : Considérer les lignes linéairement indépendantes de S_1, S_2).

b) Soit $B = U + \lambda I \in \mathbb{C}^{q\times q}$ un bloc de Jordan, où U est l'application de décalage. Montrez que la seule valeur propre de B est λ et que l'espace propre associé est engendré par e_1. Déduisez $\dim \operatorname{Im}(B - \lambda I) = q - 1$.

c) Soient $B_1, \ldots, B_k$ l'ensemble des blocs de Jordan sur J associé à une valeur propre λ. Déduire de a) et b) que $\dim \operatorname{Im}(J - \lambda I) = n - k$. En déduire que $\dim\ker(A - \lambda I) = k$.