

24.1. (*) Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 1/b$ si x est s'écrit comme fraction réduite $x = a/b$ pour des entiers $a, b \geq 1$ et $f(x) = 0$ sinon. Montrer que f est intégrable.

24.2. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ avec g positive. Montrer qu'il existe c dans $[a, b]$ avec

$$\int_a^b f \cdot g = f(c) \int_a^b g.$$

24.3. (*) Calculer, en utilisant la méthode des sommes de Darboux, l'intégrale $\int_0^b x^2 dx$.
Indication: que vaut $\sum_{i=1}^n i^2$?