1er octobre 2020 *version 1*

Série 03 : Oscillations, systèmes de coordonnées

Questions conceptuelles

a) Soit O le centre d'une montre. On définit un axe x selon l'aiguille des minutes et un axe z selon l'aiguille des heures. Comment est orienté l'axe y qui forme un repère orthonormé droit $Oxyz$ quand il est 9h ? et à 15h ?

b) Sachant que le soleil se lève à l'est et se couche à l'ouest, le vecteur de vitesse angulaire de rotation de la Terre est-il orienté du pôle nord au pôle sud, ou bien du pôle sud au pôle nord ?

1 Trajectoire elliptique

Un point matériel de masse m se déplace dans le plan défini par le repère orthonormé Oxy de façon à ce que son vecteur position soit donné par

$$\vec{r} = A\cos(\omega t)\,\hat{i} + B\sin(\omega t)\,\hat{j}$$

où A, B et ω sont des constantes positives et $\hat{i}$ et $\hat{j}$ sont les vecteurs unitaires des axes Ox et Oy.

a) Montrer que le point matériel parcourt une ellipse. Esquissez les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ au long de la trajectoire. Montrer que si $A \neq B$, les vecteurs $\vec{r}(t)$ et $\vec{v}(t)$ ne sont en général pas orthogonaux.

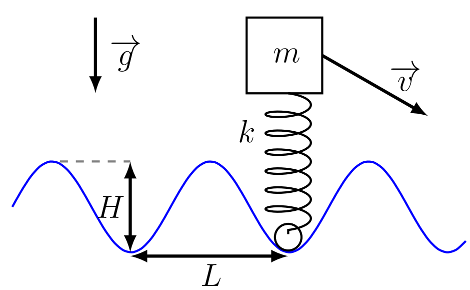
b) Donnez l'expression de la force déterminant ce mouvement.

c) De quel type de force s'agit-il ? Quelle est la différence avec la force gravitationnelle ?

Indication : l'équation d'une ellipse de demi-axes A et B est : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$.

2 Champ de bosses

On modélise le passage d'une voiture sur un champ de bosses (route en « tôle ondulée ») de la façon suivante : un point matériel de masse m, avance avec une vitesse dont la composante horizontale, v_x, est constante. La masse est reliée à un dispositif comportant un ressort de constante élastique k et de longueur au repos l_0. Au bout du ressort, une roue sans masse, de rayon négligeable suit le profil du sol.



Le dispositif qui maintient le ressort vertical n'est pas spécifié. On suppose que ce dispositif n'intervient pas dans le mouvement de la masse. Les valeurs des paramètres du problème sont telles que la roue ne décolle pas et que la voiture ne tape jamais la roue. Le profil du parcours (la tôle ondulée) a une forme sinusoïdale. La hauteur des bosses est H et leur longueur L.

a) Choisir une position initiale. Exprimer la position verticale de la roue $h(t)$ en fonction du temps.

b) En utilisant $h(t)$, déduire l'équation du mouvement de la voiture dans la direction verticale z.

c) Mettre l'équation du mouvement vertical sous la forme $\ddot{u}+\omega_0^2 u = \alpha_0 \sin(\omega t)$ à l'aide d'un changement de variable $z \to u$ (une redéfinition de l'origine du temps peut aussi être nécessaire).

d) Considérer une solution stationnaire du type $u(t) = \rho \sin(\omega t - \varphi)$, où $\varphi = 0$, et trouver l'amplitude ρ des oscillations verticales de la voiture. Que peut-on dire de la vitesse de la voiture pour que le confort soit optimal ?

3 Changement de repère et systèmes de coordonnées

(Exercice non traité pendant la séance)

a) Soit un vecteur $\vec{v}$ dont les coordonnées dans un repère $Oxyz$ s'écrivent $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Comment s'écrira ce vecteur dans un repère $Ox'y'z'$ où les axes z et z' sont identiques et où θ est l'angle entre x et x' ainsi qu'entre y et y' ?

b) Quelles sont les projections du rayon vecteur $\overrightarrow{OP}$ sur les axes cartésiens des figures ci-dessous, en fonction des coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) ou sphériques (r, θ, ϕ).

c) Ecrire en coordonnées cartésiennes (x, y, z), cylindriques (ρ, ϕ, z) et sphériques (r, θ, ϕ) l'équation d'une sphère de rayon R centrée à l'origine, l'équation d'un cylindre parallèle à l'axe z, de longueur L et de rayon R, centré à l'origine, et l'équation d'un cône de révolution de hauteur h et de rayon R à sa base, dont l'axe est parallèle à l'axe z, ouvert vers les z positifs, et dont le sommet est placé à l'origine O.