Série 5, Exercice 6

David Wiedemann

26 octobre 2020

Soit A et B deux groupes d'ordre 3.
Regardons la loi de composition $\star$ sur A, on va montrer que la manière de construire cette loi de composition est unique.

Posons $A = \{e_A, a, a'\}$, on dénote par e_A l'élément neutre.
Clairement $e_A \star a = a, e_A \star a' = a', a \star e_A = a, a' \star e_A = a'$ car sinon e_A ne serait pas l'élément neutre.
Supposons maintenant que $a \star a' \neq e_A$.
Si $a \star a' = a$, alors ceci force $a \star a = e_A$ et $a' \star a' = e_A$ car sinon a et a' seraient non-inversible.
Ce qui implique que

$$\begin{aligned} a \star a \star a' \star a' &= e_A \\ a \star e_A \star a' &= e_A \\ a \star a' &= e_A \end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction à l'hypothèse.

On trouve de la même manière que $a \star a' = a'$ contredit l'hypothèse que $a \star a' \neq e_A$.

Donc $a \star a' = e_A$.

Finalement, on considère $a \star a$, supposons que $a \star a = e_A$, alors a admet deux inverses a et a' ce qui est une contradiciton.
Supposons donc que $a \star a = a$, alors $a \star a \star a' = a \star a'$ et donc $a = e_A$ ce qui est une contradiciton. Ceci force donc $a \star a = a'$.
Avec le même raisonnement, on montre que $a' \star a' = a$.

Donc, il y a une manière unique de construire une loi de composition sur un groupe d'ordre 3.
Afin de mieux visualiser les lois de composition sur un groupe d'ordre 3, on

peut la représenter avec un tableau.

$\star$	e_A	a	a'
e_A	e_A	a	a'
a	a	a'	e_A
a'	a'	e_A	a

et de même pour un groupe $B = \{e_B, b, b'\}$ d'ordre 3 [1]

$\times$	e_B	b	b'
e_B	e_B	b	b'
b	b	b'	e_B
b'	b'	e_B	b

Par la construction ci-dessus, on sait que la loi de composition sur B est unique.
On définit donc la bijection ϕ de A vers B

$$\phi : x \in A \to \begin{cases} e_B \text{ si } x = e_A \\ b \text{ si } x = a \\ b' \text{ si } x = a' \end{cases}$$

Il est évident que ceci est une bijection.
Il reste à vérifier qu'il s'agit d'un morphisme.
On remarque que les tableaux ci-dessus sont symmétriques, cette symmétrie implique que $(A, \star)$ et $(B, \times)$ sont des groupes abéliens.
On vérifie ceci facilement, il suffit de voir que

$$a \star a' = a' \star a = e_A$$

Cette observation nous permet de réduire le nombre de cas à vérifier pour montrer que ϕ est un morphisme.
Pour montrer que ϕ est un morphisme, on vérifie toutes les combinaisons possibles.

$$\begin{aligned} \phi(e_A \star a) &= e_B \times b = \phi(e_A) \times \phi(a) \\ \phi(e_A \star a') &= e_B \times b' = \phi(e_A) \times \phi(a') \\ \phi(a' \star a) &= \phi(a \star a') = \phi(e_A) = e_B = b' \times b = b \times b' = \phi(a') \times \phi(a) = \phi(a) \times \phi(a') \\ \phi(a \star a) &= \phi(a') = b' = b \times b = \phi(a) \times \phi(a) \\ \phi(a' \star a') &= \phi(a) = b = b' \times b' = \phi(a') \times \phi(a') \end{aligned}$$

Donc on a trouvé une application ϕ bijective de A vers B qui satisfait les propriétés d'un morphisme, notamment :

$$\forall x, y \in A \quad \phi(x \star y) = \phi(x) \times \phi(y)$$

Donc ϕ est un isomorphismes entre A et B, et donc les groupes A et B sont isomorphes.

On sait qu'il y a qu'une seule manière de construire une loi de composition sur un groupe d'ordre 3, on sait également que tout groupe d'ordre 3 est de la même forme que A.
Donc on peut construire un isomorphisme entre tous les groupes d'ordre 3 et donc tous les groupes d'ordre 3 sont isomorphes.