I. Une introduction à la théorie des catégories

Semaines 1 à 3

1 Catégories

Définition 1.1. Un *graphe dirigé* (ou *carquois*) G consiste en un couple de classes G_0 et G_1, muni de deux applications

$$\mathrm{dom} : \mathsf{G}_1 \to \mathsf{G}_0 \quad \text{et} \quad \mathrm{cod} : \mathsf{G}_1 \to \mathsf{G}_0,$$

appelées *domaine* et *codomaine.*

Notation et terminologie 1.2. On supprime les applications dom and cod de la notation pour un graphe dirigé, et le note simplement $\mathsf{G} = (\mathsf{G}_0, \mathsf{G}_1)$.

Les éléments de G_0 sont les *sommets* et ceux de G_1 les *arêtes* de G. Pour $f \in \mathsf{G}_1$, si $\mathrm{dom}(f) = x$ et $\mathrm{cod}(f) = y$, on dit que x et y sont le *domaine* et *codomaine* de f, ce que l'on représente graphiquement ainsi:

$$x \xrightarrow{f} y.$$

Pour $x, y \in \mathsf{G}_0$, on pose

$$\mathsf{G}(x, y) = \{f \in \mathsf{G}_1 \mid \mathrm{dom}(f) = x \text{ et } \mathrm{cod}(f) = y\}.$$

Exemple 1.3. Soit X un ensemble, et soit $R \subset X \times X$ une relation sur X. Alors $\mathsf{G}_R = (X, R)$ est un graphe dirigé, où

$$\mathrm{dom} : R \to X : (x_1, x_2) \mapsto x_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{cod} : R \to X : (x_1, x_2) \mapsto x_2.$$

Observer que $\mathsf{G}_R(x, x')$ est soit vide, soit un singleton.

Par exemple, soit T l'ensemble des utilisateurs de Twitter. Poser

$$R = \{(t_1, t_2) \in T \times T \mid t_1 \text{ est un suiveur du compte de } t_2\}.$$

Le graphe dirigé G_R décrit alors toute la structure du réseau des utilisateurs de Twitter, qui fait l'objet de beaucoup d'analyses mathématiques et statistiques actuellement.

Définition 1.4. Une *catégorie* C est un graphe dirigé $(\mathsf{C}_0, \mathsf{C}_1)$, muni d'applications de *composition*

$$\gamma_{a,b,c} : \mathsf{C}(a, b) \times \mathsf{C}(b, c) \to \mathsf{C}(a, c) : (f, g) \mapsto g \circ f$$

$\forall a, b, c \in \mathsf{C}_0$, vérifiant les axiomes suivants.

1. (Existence d'identités) Il existe une application $\mathrm{Id} : \mathsf{C}_0 \to \mathsf{C}_1 : c \mapsto \mathrm{Id}_c$ telle que $\mathrm{Id}_C \in \mathsf{C}(c, c)$ et
$$f \circ \mathrm{Id}_a = f = \mathrm{Id}_b \circ f \quad \forall f \in \mathsf{C}_1(a, b), \forall a, b \in \mathsf{C}_0.$$

2. (Associativité) Quelques soient $a, b, c, d \in \mathsf{C}_0$ et $f \in \mathsf{C}(a, b)$, $g \in \mathsf{C}(b, c)$, et $h \in \mathsf{C}(c, d)$,
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \in \mathsf{C}(a, d).$$

Notation et terminologie 1.5. En général on supprime les applications de composition et d'identité de la notation pour une catégorie, que l'on note simplement $\mathsf{C} = (\mathsf{C}_0, \mathsf{C}_1)$.

Les éléments de C_0 et C_1 sont applelés les *objets* et les *morphismes* de la catégorie C, respectivement. Pour cette raison, on utilise presque toujours la notation

$$\mathrm{Ob}\,\mathsf{C} = \mathsf{C}_0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Mor}\,\mathsf{C} = \mathsf{C}_1.$$

Si $a, b \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$ et $f \in \mathsf{C}(a, b)$, on écrit souvent $f : a \to b$, même si f n'est pas une application ou fonction dans le sens usuel du terme.

Une catégorie C est dite *petite* si $\mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$ et $\mathrm{Mor}\,\mathsf{C}$ sont des ensembles (et non des classes propres) et *localement petite* si $\mathsf{C}(a, b)$ est un ensemble quelques soient $a, b \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$.

Exemples 1.6. Quelques catégories "concrètes", i.e., telles que les objets sont des ensembles, éventuellement munis de structure supplémentaire, et les morphismes sont des applications ensemblistes qui respectent cette structure supplémentaire...

1. La catégorie Ens, dont les objets sont les ensembles et les morphismes sont les applications ensemblistes.

2. La catégorie Gr, dont les objets sont les groupes et les morphismes sont les homomorphismes de groupe.

3. La catégorie Ab, dont les objets sont les groupes abéliens et les morphismes sont les homomorphismes de groupe.

4. La catégorie $\mathsf{Vect}_{\Bbbk}$, dont les objets sont les espaces vectoriels sur le corps $\Bbbk$ et les morphismes sont les applications linéaires.

Exemples 1.7. Quelques catégories pas forcément concrètes...

1. Soit X un ensemble, et soit $R \subset X \times X$ une relation sur X. Alors le graphe dirigé G_R admet des applications de composition naturelle, qui vérifient l'associativité, si la relation R est transitive et admet une application identité compatible avec cette composition si la relation est également réflexive. Appelons la catégorie ainsi obtenue C_R.

2. Pour tout groupe G, il y a une catégorie $\mathsf{B}G$, spécifié par $\mathrm{Ob}\,\mathsf{B}G = \star$ et $\mathsf{B}G(\star, \star) = G$, où la composition est donnée par la multiplication dans le groupe G et $\mathrm{Id}_\star = e$, l'élément neutre de G.

3. Soient C et D des catégories. Leur *produit* est la catégorie notée $\mathsf{C} \times \mathsf{D}$ spécifiée par
$$\mathrm{Ob}(\mathsf{C} \times \mathsf{D}) = \mathrm{Ob}\,\mathsf{C} \times \mathrm{Ob}\,\mathsf{D}$$

et
$$(\mathsf{C}\times\mathsf{D})\big((c,d),(c',d')\big)=\mathsf{C}(c,c')\times\mathsf{D}(d,d')\quad\forall c,c'\in\operatorname{Ob}\mathsf{C},d,d'\in\operatorname{Ob}\mathsf{D},$$
où la composition est donnée par celle de C dans la première composante et par celle de D dans la deuxième, et $\mathrm{Id}_{(c,d)}=(\mathrm{Id}_c,\mathrm{Id}_d)$.

4. A partir de n'importe quelle catégorie C, on peut construire sa *catégorie de morphismes* $\mathsf{C}^{\rightarrow}$, où $\operatorname{Ob}\mathsf{C}^{\rightarrow}=\operatorname{Mor}\mathsf{C}$ et où pour tout couple $f:a\to b, g:c\to d$ de morphismes de C,
$$\mathsf{C}^{\rightarrow}(f,g)=\big\{(h:a\to c,k:b\to d)\in\operatorname{Mor}\mathsf{C}\times\operatorname{Mor}\mathsf{C}\mid g\circ h=k\circ f:a\to d\big\}.$$
La composition dans $\mathsf{C}^{\rightarrow}$ est définie en appliquant la composition de C séparément dans les deux composantes. De même, $\mathrm{Id}_f=(\mathrm{Id}_a,\mathrm{Id}_b)$ si $f:a\to b$ dans C.

Remarque 1.8. Dans la situation de l'exemple 4 ci-dessus, lorsque $g\circ h=k\circ f$, on dit que "le diagramme
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "k"] & d \end{tikzcd}$$
commute."

Définition 1.9. Soit C une catégorie. Sa *catégorie opposée*, notée C^{op}, est spécifiée par
$$\operatorname{Ob}\mathsf{C}^{\mathrm{op}}=\operatorname{Ob}\mathsf{C}\quad\text{ et }\quad\mathsf{C}^{\mathrm{op}}(a,b)=\mathsf{C}(b,a)\quad\forall a,b\in\operatorname{Ob}\mathsf{C},$$
avec application de composition
$$\gamma^{\mathrm{op}}_{a,b,c}:\mathsf{C}^{\mathrm{op}}(a,b)\times\mathsf{C}^{\mathrm{op}}(b,c)\to\mathsf{C}^{\mathrm{op}}(a,c)$$
égale à
$$\gamma_{c,b,a}:\mathsf{C}(c,b)\times\mathsf{C}(b,a)\to\mathsf{C}(c,a)$$
quelques soient $a,b,c\in\operatorname{Ob}\mathsf{C}$.

Remarque 1.10. Observer que $(\mathsf{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}=\mathsf{C}$ pour toute catégorie C.

Notation et terminologie 1.11. Si $f\in\mathsf{C}(a,b)$, on notera parfois le morphisme correspondant dans C^{op} par $f^{\mathrm{op}}\in\mathsf{C}^{\mathrm{op}}(b,a)$. En termes de cette notation, la composition de C^{op} vérifie
$$f^{\mathrm{op}}\circ g^{\mathrm{op}}=(g\circ f)^{\mathrm{op}}$$
lorsque $f\in\mathsf{C}(a,b)$ et $g\in\mathsf{C}(b,c)$.

Définition 1.12. Soit C une catégorie. Un morphisme $f:a\to b$ dans C est un *isomorphisme* s'il admet un *inverse*, i.e., il existe un morphisme $g:b\to a$ tel que $g\circ f=\mathrm{Id}_a$ et $f\circ g=\mathrm{Id}_b$. On dit alors que les objets a et b sont *isomorphes*.

Un isomorphisme dont le domaine est égal au codomaine est un *automorphisme*. Une catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphismes est un *groupoïde*.

Notation 1.13. Soit C une catégorie, et soit $c \in \operatorname{Ob} \mathsf{C}$. Poser

$$\operatorname{Aut}(c) = \{f \in \mathsf{C}(c,c) \mid f \text{ est un isomorphisme}\}.$$

On utilise le symbôle $\xrightarrow{\cong}$ pour désigner les isomorphismes.

Lemme 1.14. *Soit C une catégorie. Pour tout $c \in \operatorname{Ob} \mathsf{C}$, la composition de morphismes munit $\operatorname{Aut}(c)$ d'une structure de groupe.*

Exemples 1.15. Les isomorphismes dans

1. la catégorie Ens sont les bijections;
2. la catégorie Gr sont les isomorphismes de groupe;
3. la catégorie Ab sont les isomorphismes de groupe abélien;
4. la catégorie $\mathsf{Vect}_{\Bbbk}$ sont les isomorphismes linéaires;
5. la catégorie C_R, où R est une relation réfléxive et transitive sur un ensemble X, sont tous les $(x, x') \in R$ tels que $(x', x) \in R$ aussi;
6. la catégorie $\mathsf{B}G$ sont tous les morphismes, i.e., $\mathsf{B}G$ est un groupoïde.

2 Foncteurs

Définition 2.1. Soient C and D des catégories. Un *foncteur* F de C vers D, noté $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, consiste en un couple d'applications

$$F_{\mathrm{Ob}} : \operatorname{Ob} \mathsf{C} \to \operatorname{Ob} \mathsf{D} \quad \text{et} \quad F_{\mathrm{Mor}} : \operatorname{Mor} \mathsf{C} \to \operatorname{Mor} \mathsf{D}$$

tel que pour tout morphisme $f : a \to b$ dans C,

$$F_{\mathrm{Mor}}(f) : F_{\mathrm{Ob}}(a) \to F_{\mathrm{Ob}}(b),$$

$$F_{\mathrm{Mor}}(\mathrm{Id}_c) = \mathrm{Id}_{F_{\mathrm{Ob}}(c)}$$

pour tout $c \in \operatorname{Ob} \mathsf{C}$, et

$$F_{\mathrm{Mor}}(g \circ f) = F_{\mathrm{Mor}}(g) \circ F_{\mathrm{Mor}}(f)$$

quelques soient $f \in \mathsf{C}(a,b)$, $g \in \mathsf{C}(b,c)$, et $a, b, c \in \operatorname{Ob} \mathsf{C}$.

Ainsi, si $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ est un foncteur, alors par restriction et corestriction, il y a des applications

$$F_{\mathrm{Mor}} : \mathsf{C}(a,b) \to \mathsf{D}\big(F_{\mathrm{Ob}}(a), F_{\mathrm{Ob}}(b)\big), \quad \forall a, b \in \operatorname{Ob} \mathsf{C}.$$

Notation 2.2. Afin de simplifier la notation, nous laissons en général tomber les indications Ob et Mor sur les composantes d'un foncteur.

Lemme 2.3. *Soient $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ et $F' : \mathsf{D} \to \mathsf{E}$ des foncteurs. Alors le couple d'applications*

$$F'_{\mathrm{Ob}} \circ F_{\mathrm{Ob}} : \operatorname{Ob} \mathsf{C} \to \operatorname{Ob} \mathsf{E} \quad \textit{et} \quad F'_{\mathrm{Mor}} \circ F_{\mathrm{Mor}} : \operatorname{Mor} \mathsf{C} \to \operatorname{Mor} \mathsf{E}$$

définit un foncteur de C vers E, que nous notons $F' \circ F : \mathsf{C} \to \mathsf{E}$. Par ailleurs, cette composition de foncteurs est associative.

Exemples 2.4. 1. (Les foncteurs identité) Pour toute catégorie C, il y a un foncteur $\mathrm{Id}_{\mathsf{C}} : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ dont les composantes sont les applications identité

$$\mathrm{Id}_{\mathrm{Ob}\,\mathsf{C}} : \mathrm{Ob}\,\mathsf{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathsf{C} \quad \text{et} \quad \mathrm{Id}_{\mathrm{Mor}\,\mathsf{C}} : \mathrm{Mor}\,\mathsf{C} \to \mathrm{Mor}\,\mathsf{C}.$$

Il est facile de voir que pour tout foncteur $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$,

$$\mathrm{Id}_{\mathsf{D}} \circ F = F = F \circ \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}.$$

2. (Les foncteurs oubli) On travaille souvent (et parfois de manière implicite) avec des foncteurs, en général notés U, qui "oublient" de la structure sur les objets et morphismes. Par exemple, il y a un foncteur

$$U : \mathsf{Gr} \to \mathsf{Ens}$$

qui "oublie" la multiplication, les inverses, et l'élément neutre d'un groupe et ne retient que son ensemble sous-jacent. Quant aux morphismes, le foncteur U "oublie" qu'ils respectent la multiplication et ne retient que le fait que ce sont des applications ensemblistes.

De manière semblable, il y a foncteur

$$U : \mathsf{Vect}_{\Bbbk} \to \mathsf{Ab}$$

qui "oublie" la multiplication par scalaire de la structure d'un espace vectoriel et ne retient que le groupe abélien sous-jacent. Concernant les morphismes, le foncteur U "oublie" que les applications linéaires respectent la multiplication par scalaire et ne retient que le fait que ce sont des homomorphismes de groupe abélien.

3. Pour tout corps $\Bbbk$, il y a un foncteur $L : \mathsf{Ens} \to \mathsf{Vect}_{\Bbbk}$ spécifié de la manière suivante. Pour tout ensemble X, l'espace vectoriel $L(X)$ est celui engendré par X, i.e., l'espace vectoriel de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de X. Plus formellement,

$$L(X) = \Big\{\omega \in \mathsf{Ens}(X, \Bbbk) \mid \#\{x \in X \mid \omega(x) \neq 0\} < \infty\Big\},$$

muni d'une addition définie par $(\omega+\omega')(x) = \omega(x)+\omega'(x)$ et d'une multiplication par scalaire définie par $(\lambda \cdot \omega)(x) = \lambda \cdot \omega(x)$ quelques soient $\omega, \omega' \in L(X)$, $\lambda \in \Bbbk$, et $x, x' \in X$.

Pour toute application ensembliste $f : X \to Y$, l'application linéaire $L(f) : L(X) \to L(Y)$ est spécifiée par

$$L(f)(\omega) : Y \to \Bbbk : y \mapsto \sum_{x \in f^{-1}(y)} \omega(x)$$

pour tout $\omega \in L(X)$.

4. Puisque tout groupe abélien est un groupe et les morphismes de la catégorie Ab sont simplement des homomorphismes de groupe dont le domaine et le codomaine sont abéliens, il y a un foncteur $\mathsf{Ab} \to \mathsf{Gr}$ dont les composantes sont des inclusions. Autrement dit, Ab est une *sous-catégorie* de Gr.

5. Soit X un ensemble. Pour tout ensemble Y, soit $\mathrm{Map}(X, Y)$ l'ensemble de toutes les applications de X vers Y. Il y a des foncteurs

$$- \times X : \mathsf{Ens} \to \mathsf{Ens} \quad \text{et} \quad \mathrm{Map}(X, -) : \mathsf{Ens} \to \mathsf{Ens}$$

spécifié sur les objets par

$$- \times X(Y) = Y \times X \quad \text{et} \quad \mathrm{Map}(X, -)(Y) = \mathrm{Map}(X, Y)$$

pour tout ensemble Y et sur les morphismes par

$$- \times X(f) = f \times \mathrm{Id}_X : Y \times X \to Z \times X : (y, x) \mapsto \big(f(y), x\big)$$

et

$$\mathrm{Map}(X, -)(f) : \mathrm{Map}(X, Y) \to \mathrm{Map}(X, Z) : (g : X \to Y) \mapsto (f \circ g : X \to Z)$$

pour toute application ensembliste $f : Y \to Z$.

Il y a également un foncteur

$$\mathrm{Map}(-, X) : \mathsf{Ens}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ens}$$

spécifié sur les objets par

$$\mathrm{Map}(-, X)(Y) = \mathrm{Map}(Y, X)$$

pour tout ensemble Y et sur les morphismes par

$$\mathrm{Map}(-, X)(f) : \mathrm{Map}(Z, X) \to \mathrm{Map}(Y, X) : (g : Z \to X) \mapsto (g \circ f : Y \to X)$$

pour toute application ensembliste $f : Y \to Z$.

6. Pour toute catégorie C, il y a des foncteurs *domaine* et *codomaine*,

$$\mathrm{Dom} : \mathsf{C}^{\to} \to \mathsf{C} \quad \text{et} \quad \mathrm{Cod} : \mathsf{C}^{\to} \to \mathsf{C},$$

spécifiés sur les objets $f : a \to b$ de $\mathsf{C}^{\to}$ par

$$\mathrm{Dom}(f) = a \quad \text{et} \quad \mathrm{Cod}(f) = b$$

et sur les morphismes $(h, k) : f \to g$ par

$$\mathrm{Dom}(h, k) = h \quad \text{et} \quad \mathrm{Cod}(h, k) = k.$$

7. Tout homomorphisme de groupe $\varphi : G \to H$ induit un foncteur $\mathsf{B}\varphi : \mathsf{B}G \to \mathsf{B}H$, qui envoie l'unique objet de $\mathsf{B}G$ sur l'unique objet de $\mathsf{B}H$ et tel que $(\mathsf{B}\varphi)_{\mathrm{Mor}} = \varphi : G \to H$. Par ailleurs, si $F : \mathsf{B}G \to \mathsf{B}H$ est un foncteur, alors $F_{\mathrm{Mor}} : G \to H$ est un homomorphisme de groupe.

Remarque 2.5. Observer que le Lemme 2.3 et l'Exemple 2.4(1) impliquent qu'il y a une catégorie Cat dont les objets sont les petites catégories et les morphismes sont les foncteurs, où la composition est définie comme dans le Lemme 2.3.

3 Transformations naturelles

Définition 3.1. Soient $F, F' : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ des foncteurs. Une *transformation naturelle* τ de F vers F', notée $\tau : F \to F'$, consiste en une application

$$\tau : \mathrm{Ob}\,\mathsf{C} \to \mathrm{Mor}\,\mathsf{D} : c \mapsto \tau_c$$

telle que pour tout $c \in \operatorname{Ob} \mathsf{C}$,

$$\tau_c \in \mathsf{D}\big(F(c), F'(c)\big)$$

et pour tout morphisme $f : b \to c$ dans C, le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
F(b) \arrow[r, "\tau_b"] \arrow[d, "F(f)"'] & F'(b) \arrow[d, "F'(f)"] \\
F(c) \arrow[r, "\tau_c"] & F'(c)
\end{tikzcd}$$

Si τ_c est un isomorphisme pour tout $c \in \operatorname{Ob} \mathsf{C}$, alors τ est un *isomorphisme naturel*.

Lemme 3.2. *Soient $F, F', F'' : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ des foncteurs, et soient $\sigma : F \to F'$ et $\tau : F' \to F''$ des transformations naturelles. Alors l'application*

$$\operatorname{Ob} \mathsf{C} \to \operatorname{Mor} \mathsf{D} : c \mapsto \tau_c \circ \sigma_c$$

définit une transformation naturelle de F vers F'', que nous notons $\tau \circ \sigma : F \to F''$. Par ailleurs, cette composition de transformations naturelles est associative.

Exemples 3.3.

1. (Les transformations naturelles identité) Pour tout foncteur $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, il y a une transformation naturelle $\mathrm{Id}_F : F \to F$ (en fait, un isomorphisme naturel) donnée par

$$\operatorname{Ob} \mathsf{C} \to \operatorname{Mor} \mathsf{D} : c \mapsto \mathrm{Id}_{F(c)}.$$

Il est facile de voir que pour tout transformation naturelle $\tau : F \to G$,

$$\mathrm{Id}_G \circ \tau = \tau = \tau \circ \mathrm{Id}_F.$$

2. Soit $U : \mathsf{Vect}_{\Bbbk} \to \mathsf{Ens}$ le foncteur qui oublie toute la structure algébrique d'un espace vectoriel et ne retient que l'ensemble sous-jacent. Soit $L : \mathsf{Ens} \to \mathsf{Vect}_{\Bbbk}$ le foncteur de l'Exemple 2.4(3).

Il y a une transformation naturelle $\eta : \mathrm{Id}_{\mathsf{ens}} \to U \circ L$ donnée par

$$\operatorname{Ob} \mathsf{Ens} \to \operatorname{Mor} \mathsf{Ens} : X \mapsto \Big(\eta_X : X \to U\big(L(X)\big)\Big),$$

où

$$\eta_X(x) : X \to \Bbbk : x' \mapsto \begin{cases} 1 & : x' = x \\ 0 & : x' \neq x. \end{cases}$$

Il y a également une transformation naturelle $\varepsilon : L \circ U \to \mathrm{Id}_{\mathsf{Vect}_{\Bbbk}}$ donnée par

$$\operatorname{Ob} \mathsf{Vect}_{\Bbbk} \to \operatorname{Mor} \mathsf{Vect}_{\Bbbk} : V \mapsto \big(\varepsilon_V : L \circ U(V) \to V\big)$$

où

$$\varepsilon_V : L\big(U(V)\big) \to V : \big(\omega : U(V) \to \Bbbk\big) \mapsto \sum_{v \in V} \omega(v) \cdot v,$$

où la somme à droite, calculée dans l'espace vectoriel V, est bien définie par la condition de finitude sur ω.

3. Soit X un ensemble, et soient $- \times X, \mathrm{Map}(X,-) : \mathsf{Ens} \to \mathsf{Ens}$ les foncteurs de l'Exemple 2.4(5).

   Il y a une transformation naturelle $\eta : \mathrm{Id}_{\mathsf{Ens}} \to \mathrm{Map}(X,-) \circ (- \times X)$ donnée par
$$\mathrm{Ob}\,\mathsf{Ens} \to \mathrm{Mor}\,\mathsf{Ens} : Y \mapsto \big(\eta_Y : Y \to \mathrm{Map}(X, Y \times X)\big),$$
   où
$$\eta_Y(y) : X \to Y \times X : x \mapsto (y,x)$$
   pour tout $y \in Y$.

   Il y a également une transformation naturelle $\varepsilon : (- \times X) \circ \mathrm{Map}(X,-) \to \mathrm{Id}_{\mathsf{Ens}}$ donnée par
$$\mathrm{Ob}\,\mathsf{Ens} \to \mathrm{Mor}\,\mathsf{Ens} : Y \mapsto \big(\varepsilon_Y : \mathrm{Map}(X,Y) \times X \to Y\big),$$
   où
$$\varepsilon_Y(f,x) = f(x)$$
   pour tout $f \in \mathrm{Map}(X,Y)$ et tout $x \in X$, i.e., ε_Y est *l'application d'évaluation.*

4. Pour toute catégorie C, il y a une transformation naturelle $\tau : \mathrm{Dom} \to \mathrm{Cod}$ donnée par l'application identité
$$\mathrm{Ob}\,\mathsf{C}^{\to} \to \mathrm{Mor}\,\mathsf{C}.$$
   Il est facile de vérifier que τ est un isomorphisme naturel si et seulement si C est un groupoïde.

5. Soient $\varphi, \psi : G \to H$ deux homomorphismes de groupe. Il y a une transformation naturelle $\tau : \mathsf{B}\varphi \to \mathsf{B}\psi$ (qui est en fait un isomorphisme naturel) si et seulement s'il existe $h \in H$ tel que $\psi(g)h = h\varphi(g)$ pour tout $g \in G$. Dans ce cas, la transformation naturelle τ est donnée par
$$\mathrm{Ob}\,\mathsf{B}G = \{\star\} \to \mathrm{Mor}\,\mathsf{B}H = H : \star \mapsto h.$$

Remarque 3.4. Observer que le Lemme 3.2 et l'Exemple 3.3(1) impliquent que pour un couple de catégories C et D, où C est petite, il y a une catégorie $\mathsf{Fun}(\mathsf{C},\mathsf{D})$ dont les objets sont les foncteurs de C vers D et les morphismes sont les transformations naturelles, où la composition est définie comme dans le Lemme 3.2.

Définition 3.5. Un foncteur $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ est une *équivalence de catégories* s'il existe un foncteur $F' : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ tel que $F' \circ F$ est isomorphe à Id_{C} dans $\mathsf{Fun}(\mathsf{C},\mathsf{C})$ et $F \circ F'$ est isomorphe à Id_{D} dans $\mathsf{Fun}(\mathsf{D},\mathsf{D})$. Autrement dit, il existe des isomorphismes naturels
$$\sigma : \mathrm{Id}_{\mathsf{C}} \xrightarrow{\cong} F' \circ F \quad \text{et} \quad \tau : \mathrm{Id}_{\mathsf{D}} \xrightarrow{\cong} F \circ F'.$$

S'il existe une équivalence de catégories $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, on dit que les catégories C et D sont *équivalentes.*

Il n'est pas difficile de montrer que la notion d'équivalence de catégories est en fait une relation d'équivalence.

Exemples 3.6.
1. Soit Un la catégorie avec un seul objet $\star$ et un seul morphisme $\mathrm{Id}_\star$. Soit C la catégorie avec $\mathrm{Ob}\,\mathsf{C} = \{a,b\}$ et deux morphismes non-identité $f : a \to b$ et $g : b \to a$, qui sont des isomorphismes mutuellement inverses. Alors les catégories Un et C sont équivalentes.

2. Soient G et H des groupes. Alors les catégories $\mathsf{B}G$ et $\mathsf{B}H$ sont équivalentes si et seulement si les groupes G et H sont isomorphes.

4 Adjonctions

Définition 4.1. Un couple de foncteurs $L : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ et $R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ forme une *adjonction* s'il existe des transformations naturelles

$$\eta : \mathrm{Id}_{\mathsf{C}} \to R \circ L \quad \text{et} \quad \varepsilon : L \circ R \to \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}$$

telles que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} L(c) \arrow[r, "L(\eta_c)"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{L(c)}"'] & L \circ R \circ L(c) \arrow[d, "\varepsilon_{L(c)}"] \\ & L(c) \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} R(d) \arrow[r, "\eta_{R(d)}"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{R(d)}"'] & R \circ L \circ R(d) \arrow[d, "R(\varepsilon_d)"] \\ & R(d) \end{tikzcd}$$

commutent pour tout $c \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$ et tout $d \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{D}$.

Notation et terminologie 4.2. Si le couple (L, R) forme une adjonction, on dit que (L, R) est un *couple adjoint* et que L est un *adjoint à gauche* de R, tandis que R est un *adjoint à droite* de L. On note cette relation entre L et R par

$$L \dashv R$$

et

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, shift left, "L"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{D} \arrow[l, shift left, "R"] \end{tikzcd}.$$

Les diagrammes commutatifs de la Définition 4.1 sont appelés les *identités triangulaires.*

Proposition 4.3. *Un couple de foncteurs $L : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ et $R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ entre catégories localement petites forme une adjonction si et seulement s'il existe un isomorphisme naturel entre les foncteurs*

$$\mathsf{D}\big(L(-), -\big) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D} \to \mathsf{Ens} : (c, d) \mapsto \mathsf{D}\big(L(c), d\big)$$

et

$$\mathsf{C}\big(-, R(-)\big) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D} \to \mathsf{Ens} : (c, d) \mapsto \mathsf{C}\big(c, R(d)\big).$$

Remarque 4.4. On verra dans la preuve de la Proposition 4.3 qu'un couple de transformations naturelles $\eta : \mathrm{Id}_{\mathsf{C}} \to R \circ L$ et $\varepsilon : L \circ R \to \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}$ vérifiant les identités triangulaires donne lieu à des isomorphismes naturels $\alpha : \mathsf{D}\big(L(-), -\big) \to \mathsf{C}\big(-, R(-)\big)$ et $\beta : \mathsf{C}\big(-, R(-)\big) \to \mathsf{D}\big(L(-), -\big)$ spécifiés par

$$\alpha_{(c,d)} : \mathsf{D}\big(L(c), d\big) \to \mathsf{C}\big(c, R(d)\big) : (L(c) \xrightarrow{f} d) \mapsto (c \xrightarrow{\eta(c)} R \circ L(c) \xrightarrow{R(f)} R(d))$$

et

$$\beta_{(c,d)} : \mathsf{C}\big(c, R(d)\big) \to \mathsf{D}\big(L(c), d\big) : (c \xrightarrow{g} R(d)) \mapsto (L(c) \xrightarrow{L(g)} L \circ R(d) \xrightarrow{\varepsilon(d)} d).$$

Dans le sens inverse, étant donné des isomorphismes naturels $\alpha : \mathsf{D}\big(L(-),-\big) \to \mathsf{C}\big(-,R(-)\big)$ et $\beta : \mathsf{C}\big(-,R(-)\big) \to \mathsf{D}\big(L(-),-\big)$, on peut définir des transformations naturelles $\eta : \mathrm{Id}_{\mathsf{C}} \to R\circ L$ et $\varepsilon : L\circ R \to \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}$ vérifiant les identités triangulaires par

$$\eta : \mathrm{Ob}\,\mathsf{C} \to \mathrm{Mor}\,\mathsf{C} : c \mapsto \alpha(\mathrm{Id}_{L(c)})$$

et

$$\varepsilon : \mathrm{Ob}\,\mathsf{D} \to \mathrm{Mor}\,\mathsf{D} : d \mapsto \beta(\mathrm{Id}_{R(d)}).$$

Notation et terminologie 4.5. Etant donné des isomorphismes naturels

$$\alpha : \mathsf{D}\big(L(-),-\big) \to \mathsf{C}\big(-,R(-)\big) \quad \text{et} \quad \beta : \mathsf{C}\big(-,R(-)\big) \to \mathsf{D}\big(L(-),-\big),$$

on écrit souvent

$$f^\sharp = \alpha(f) \quad \text{et} \quad g^\flat = \beta(g)$$

pour $f : L(c) \to d$ et $g : c \to R(d)$. On dit parfois que $f^\sharp$ (respectivement, $g^\flat$) est la *transposée* de f (respectivement, de g).

Exemples 4.6.

1. Les transformations naturelles

   $$\eta : \mathrm{Id}_{\mathsf{Ens}} \to U\circ L \quad \text{et} \quad \varepsilon : L\circ U \to \mathrm{Id}_{\mathsf{Vect}_{\Bbbk}}$$

   de l'Exemple 3.3(2) vérifient les identités triangulaires. Par conséquent, il y a une adjonction

   $$\begin{tikzcd} \mathsf{Ens} \arrow[r, shift left, "L"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Vect}_{\Bbbk} \arrow[l, shift left, "U"] \end{tikzcd}.$$

   Ainsi, par la Proposition 4.3, il existe un isomorphisme naturel

   $$\mathsf{Vect}_{\Bbbk}\big(L(X),V\big) \cong \mathsf{Ens}\big(X,U(V)\big)$$

   pour tout ensemble X et $\Bbbk$-espace vectoriel V. Autrement dit, tout application linéaire est naturellement entièrement déterminée par ces valeurs sur une base du domaine, un résultat très connu et très important que vous connaissez certainement déjà.

2. Les transformations naturelles

   $$\eta : \mathrm{Id}_{\mathsf{Ens}} \to \mathrm{Map}(X,-)\circ(-\times X) \quad \text{et} \quad \varepsilon : (-\times X)\circ \mathrm{Map}(X,-) \to \mathrm{Id}_{\mathsf{Ens}}$$

   de l'Exemple 3.3(3) vérifient les identités triangulaires. Par conséquent, il y a une adjonction

   $$\begin{tikzcd} \mathsf{Ens} \arrow[r, shift left, "-\times X"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Ens} \arrow[l, shift left, "\mathrm{Map(X,-)}"] \end{tikzcd}.$$

   Ainsi, par la Proposition 4.3, pour tout ensemble X, il existe un isomorphisme naturel

   $$\mathsf{Ens}\big(Y\times X, Z\big) \cong \mathsf{Ens}\big(Y, \mathrm{Map}(X,Z)\big).$$

   pour tout couple d'ensembles Y et Z.

Lemme 4.7. *Si un foncteur $L : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ admet un adjoint à droite, alors cet adjoint est unique à isomorphisme naturel près, i.e., s'il existe des foncteurs $R, R' : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ tels que $L \dashv R$ et $L \dashv R'$, alors il existe un isomorphisme naturel $\tau : R \xrightarrow{\cong} R'$. De même, si un foncteur $R : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ admet un adjoint à gauche, alors cet adjoint est unique à isomorphisme naturel près.*

5 Produits et coproduits

Définition 5.1. Soit C une catégorie, et soient $b, c \in \operatorname{Ob}\mathsf{C}$. Un *produit* de b et c consiste en un objet a de C et de deux morphismes $p : a \to b$ et $q : a \to c$ tels que pour tout couple de morphismes $f : d \to b$ et $g : d \to c$, il existe un unique morphisme $h : d \to a$ tel que $p \circ h = f$ et $q \circ h = g$, ce que nous résumons par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[dr, dotted, "\exists! h"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& a \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & c \\
& b &
\end{tikzcd}$$

Terminologie 5.2. La condition "il existe un unique morphisme h tel que..." est appelée la *propriété universelle* du produit.

Lorsque le produit de deux objets existe, il est unique à isomorphisme près, grâce à l'unicité exigée par la propriété universelle du produit.

Lemme 5.3. *Soit C une catégorie, et soient $b, c \in \operatorname{Ob}\mathsf{C}$. Si $b \xleftarrow{p} a \xrightarrow{q} c$ et $b \xleftarrow{p'} a' \xrightarrow{q'} c$ sont des produits de b et c, alors il existe un isomorphisme $h : a \xrightarrow{\cong} a'$ tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] \arrow[dd, "h", "\cong"'] & \\
b & & c \\
& a' \arrow[ul, "p'"] \arrow[ur, "q'"'] &
\end{tikzcd}$$

commute.

Notation 5.4. Puisque le produit de deux objets est unique à isomorphisme près lorsqu'il existe, on se permet un petit abus de notation, en écrivant

$$b \xleftarrow{p_1} b \times c \xrightarrow{p_2} c$$

pour "le" produit de b et c. Souvent on abuse la notation encore plus et note le produit simplement par $b \times c$.

Exemples 5.5. Le produit de deux objects dans

1. la catégorie Ens est leur produit cartésien;
2. la catégorie Gr est le produit cartésien muni de la multiplication définie composante par composante;
3. la catégorie Ab est construit comme dans Gr;

4. la catégorie $\mathsf{Vect}_{\Bbbk}$ est le produit cartésien muni de la multiplication par scalaire et l'addition définies composante par composante;

5. la catégorie Cat est celui de l'Exemple 1.7(3).

Définition 5.6. Soit C une catégorie, et soient $b, c \in \operatorname{Ob}\mathsf{C}$. Un *coproduit* de b et c consiste en un objet a de C et de deux morphismes $i : b \to a$ et $j : c \to a$ tels que pour tout couple de morphismes $f : b \to d$ et $g : c \to d$, il existe un unique morphisme $h : a \to d$ tel que $h \circ i = f$ et $h \circ j = g$, ce que nous résumons par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[d, "j"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ b \arrow[r, "i"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & a \arrow[dr, dotted, "\exists! h"] & \\ & & d \end{tikzcd}$$

La condition "il existe un unique morphisme h tel que..." est la propriété universelle du coproduit, qui nous garantit que lorsque le coproduit de deux objets existe, il est unique à isomorphisme près.

Lemme 5.7. *Soit C une catégorie, et soient $b, c \in \operatorname{Ob}\mathsf{C}$. Si $b \xrightarrow{i} a \xleftarrow{j} c$ et $b \xrightarrow{i'} a' \xleftarrow{j'} c$ sont des coproduits de b et c, alors il existe un isomorphisme $h : a \xrightarrow{\cong} a'$ tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dd, "h", "\cong"'] & \\ b \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & & c \arrow[ul, "j"'] \arrow[dl, "j'"] \\ & a' & \end{tikzcd}$$

commute.

Notation 5.8. Puisque le coproduit de deux objets est unique à isomorphisme près lorsqu'il existe, on se permet un petit abus de notation, en écrivant

$$b \xrightarrow{i_1} b \coprod c \xleftarrow{i_2} c$$

pour "le" coproduit de b et c. Souvent on abuse la notation encore plus et note le coproduit simplement par $b \coprod c$.

Remarque 5.9. Soit C une catégorie, et soient $b, c \in \operatorname{Ob}\mathsf{C}$. Si $b \xleftarrow{p} a \xrightarrow{q} c$ est un produit de b et c dans C, alors $b \xrightarrow{p^{\mathrm{op}}} a \xleftarrow{q^{\mathrm{op}}} c$ est un coproduit dans C^{op}.

Exemples 5.10. Le coproduit de deux objects dans

1. la catégorie Ens est leur réunion disjointe;

2. la catégorie $\mathsf{Vect}_{\Bbbk}$ est leur somme directe.

Nous verrons les cas de Ab et Gr plus tard. Il s'avère que le coproduit de deux groupes abéliens dans Ab n'est pas isomorphe à leur coproduit dans Gr...

Si un foncteur est un adjoint à gauche (respectivement, à droite), il préserve les coproduits (respectivement, les produits). Plus formellement, nous démontrerons la proposition suivante.

Proposition 5.11. *Soit* $\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, shift left, "L"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{D} \arrow[l, shift left, "R"] \end{tikzcd}$ *une adjonction.*

1. *Soient $b, c \in \operatorname{Ob}\mathsf{C}$. Si le coproduit $b \xrightarrow{i_1} b \coprod c \xleftarrow{i_2} c$ existe, alors son image sous le foncteur L,*
$$L(b) \xrightarrow{L(i_1)} L(b \coprod c) \xleftarrow{L(i_2)} L(c),$$
est un coproduit de $L(b)$ et $L(c)$ dans D.

2. *Soient $d, e \in \operatorname{Ob}\mathsf{D}$. Si le produit $d \xleftarrow{p_1} d \times e \xrightarrow{p_2} e$ existe, alors son image sous le foncteur R,*
$$R(d) \xleftarrow{R(p_1)} R(d \times e) \xrightarrow{R(p_2)} R(e)$$
est un produit de $R(d)$ et $R(e)$ dans C.

Notation 5.12. Souvent on résume l'énoncé précédent de façon un peu informelle comme
$$L(b \coprod c) \cong L(b) \coprod L(c) \quad \text{et} \quad R(d \times e) \cong R(d) \times R(e).$$

Exemples 5.13.

1. Considérer l'adjonction de l'Exemple 4.6(1), $\begin{tikzcd} \mathsf{Ens} \arrow[r, shift left, "L"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Vect}_{\Bbbk} \arrow[l, shift left, "U"] \end{tikzcd}$. La Proposition 5.11 implique que pour tout couple d'ensembles X et Y,
$$L(X \coprod Y) \cong L(X) \oplus L(Y),$$
où $X \coprod Y$ est la réunion disjointe de X et de Y, ce que l'on peut facilement démontrer directement aussi.

2. Considérer l'adjonction de l'Exemple 4.6(2), $\begin{tikzcd} \mathsf{Ens} \arrow[r, shift left, "- \times X"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Ens} \arrow[l, shift left, "\mathrm{Map}(X,-)"] \end{tikzcd}$. La Proposition 5.11 implique que pour tout couple d'ensembles Y et Z,
$$(Y \coprod Z) \times X \cong (Y \times X) \coprod (Z \times X),$$
où $- \coprod -$ désigne de nouveau la réunion disjointe.

II. Groupes quotient

Semaine 6

1 Quelques rappels de première année

Soit G un groupe.

1. Un sous-groupe N de G est appelé *normal*, noté $N \triangleleft G$, si $aba^{-1} \in N$ pour tout $a \in G$ et tout $b \in N$.

2. Si $\varphi : G \to H$ est un homomorphisme, alors le *noyau* de φ,
$$\ker \varphi = \{a \in G \mid \varphi(a) = e\} < G,$$
est un sous-groupe normal de G. L'homomorphisme φ est injectif si et seulement si $\ker \varphi = \{e\}$.

3. Si $H < G$, on pose
$$G/H = \{aH \mid a \in G\},$$
l'ensemble des *classes à gauche* de H dans G, qui vérifie
$$aH \cap bH \neq \emptyset \Longrightarrow aH = bH,$$
i.e., G se décompose en une réunion disjointe de classes à gauche, lesquelles ont toutes cardinalité égale â celle de H. Pour simplifier la notation, on écrit souvent $\bar{a} = aH$. Il y a une application
$$q_H : G \to G/H : a \mapsto \bar{a}$$
qui envoie un élément de G sur sa classe à gauche.

4. Si $N \triangleleft G$, alors G/N admet une structure de groupe telle que l'application $q_N : G \to G/N$ soit un homomorphisme de groupe, spécifiée par
$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}.$$

5. Soit $N \triangleleft G$, et soit $\varphi : G \to H$. Si $N < \ker \varphi$, il existe un unique homomorphisme $\widehat{\varphi} : G/N \to H$ tel que $\widehat{\varphi} \circ q_N = \varphi$, ce que l'on résume par le diagramme suivant.
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "q_N"'] & H \\ G/N \arrow[ur, dotted, "\exists!\, \widehat{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$
L'égalité $\widehat{\varphi} \circ q_N = \varphi$ implique que $\widehat{\varphi}(\bar{a}) = \varphi(a)$ pour tout $\bar{a} \in G/N$.

2 Une perspective catégorique sur les quotients

Nous considérerons des cas spéciaux de la question suivante au fil des chapitres du cours.

Question 2.1. Soient deux homomorphismes de groupe de même domaine

$$G_1 \xleftarrow{\varphi_1} G_0 \xrightarrow{\varphi_2} G_2.$$

Existe-t-il un groupe G et des homomorphismes

$$G_1 \xrightarrow{\psi_1} G \xleftarrow{\psi_2} G_2$$

tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & G_2 \arrow[d, "\psi_2"] \\ G_1 \arrow[r, "\psi_1"] & G \end{tikzcd}$$

commute et qui vérifie la propriété universelle suivante: pour tout couple d'homomorphismes

$$G_1 \xrightarrow{\omega_1} H \xleftarrow{\omega_2} G_2$$

tels que

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & G_2 \arrow[d, "\omega_2"] \\ G_1 \arrow[r, "\omega_1"] & H \end{tikzcd}$$

commute, il existe un unique homomorphisme. $\omega : G \to H$ tel que

$$\begin{tikzcd} & G_2 \arrow[d, "\psi_2"'] \arrow[ddr, bend left, "\omega_2"] & \\ G_1 \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[drr, bend right, "\omega_1"'] & G \arrow[dr, dotted, "\exists!\omega"] & \\ & & H \end{tikzcd}$$

commute.

Terminologie 2.2. Si $G_1 \xrightarrow{\psi_1} G \xleftarrow{\psi_2} G_2$ vérifie la propriété universelle formulée dans la question ci-dessus, on l'appelle la *somme amalgammée* ou le *push-out* de $G_1 \xleftarrow{\varphi_1} G_0 \xrightarrow{\varphi_2} G_2$.

Remarque 2.3. Le cas du push-out où $G_0 = \{e\}$ est exactement celui du coproduit de deux groupes (Définition I.5.6). Nous traiterons le coproduit (et, plus généralement, les push-outs) dans Ab dans le chapitre IV et celui dans Gr dans le chapitre VI.

Dans cette section, on cherche à comprendre les push-outs lorsque $G_1 = \{e\}$, le groupe trivial.

Remarque 2.4. Observer qu'un diagramme

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & G \arrow[d, "\psi"] \\ \{e\} \arrow[r] & G' \end{tikzcd}$$

dans Gr commute si et seulement si $\operatorname{Im}\varphi \subset \ker\psi$.

Proposition 2.5. *Soit $\varphi : H \to G$ un homomorphisme de groupe. Soit $N_\varphi \lhd G$ le plus petit sous-groupe normal de G qui contient $\operatorname{Im}\varphi$. Alors*

$$\{e\} \xrightarrow{\iota} G/N_\varphi \xleftarrow{q_{N_\varphi}} G,$$

où ι est l'unique homomorphisme du groupe trivial vers G/N_φ, est le push-out de

$$\{e\} \xleftarrow{\pi} H \xrightarrow{\varphi} G,$$

où π est l'unique homomorphisme de H vers le groupe trivial.

Remarque 2.6. Dans le cas où $\varphi : H \to G$ est l'inclusion d'un sous-groupe normal, le groupe construit dans la Proposition 2.5 est exactement le quotient G/H et la propriété universelle qu'il vérifie est celle du Rappel 5 de la Section 1. Ainsi, les quotients et les coproduits sont deux cas particuliers de push-outs.

3 Les théorèmes d'isomorphisme

Théorème 3.1 (Le premier théorème d'isomorphisme)**.** *Si $\varphi : G \to H$ est un homomorphisme de groupe, alors φ induit un isomorphisme*

$$G/\ker\varphi \xrightarrow{\cong} \operatorname{Im}\varphi.$$

Théorème 3.2 (Le deuxième théorème d'isomorphisme)**.** *Soit G un groupe. Pour tout $H < G$ et tout $N \lhd G$,*

1. $HN = \{ab \mid a \in H, b \in N\} < G$;
2. $H \cap N \lhd H$; *et*
3. $H/H \cap N \cong HN/N$.

Notation 3.3. Soit G un groupe. On pose

$$\mathscr{S}(G) = \{H \mid H < G\},$$

l'ensemble de tous les sous-groupes de G, et

$$\mathscr{N}(G) = \{N \mid N \lhd G\},$$

l'ensemble de tous les sous-groupes normaux de G.

Théorème 3.4 (Le troisième théorème d'isomorphisme)**.** *Soient G un groupe et $N \triangleleft G$. Alors*

1. $\mathscr{S}(G/N) = \{H/N \mid H \in \mathscr{S}(G) \text{ tq } N < H\}$;
2. $\mathscr{N}(G/N) = \{K/N \mid K \in \mathscr{N}(G) \text{ tq } N < K\}$; *et*
3. *si $K \in \mathscr{N}(G)$ et $N < K$, alors $G/K \cong (G/N)/(K/N)$.*

4 Groupes résolubles

Définition 4.1. Un groupe G est *résoluble* s'il existe une suite finie de sous-groupes

$$\{e\} = G_r < G_{r-1} < \cdots < G_1 < G_0 = G$$

telle que

1. $G_k \triangleleft G_{k-1}$, et
2. G_{k-1}/G_k est abélien

pour tout $1 \leq k \leq r$.

Lemme 4.2. *Soient G un groupe et $N \triangleleft G$. Alors*

$$G/N \text{ est abélien} \Longleftrightarrow \{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b, \in G\} \subset N.$$

Proposition 4.3. *Soient G un groupe et $N \triangleleft G$. Si N et G/N sont résolubles, alors G l'est également.*

Tout groupe abélien est évidemment résoluble, mais ce ne sont de loin pas tous les groupes résolubles.

Proposition 4.4. *Pour tout $n \leq 4$, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est résoluble, mais $\mathfrak{S}_5$ ne l'est pas.*

III. Actions de groupe

Semaines 7, 8, et 9

1 Quelques rappels de première année

Soit G un groupe, et soit X un ensemble.

1. Une *action de groupe* du groupe G sur l'ensemble X consiste en un homomorphisme de groupe
$$\varphi : G \to \mathrm{Aut}(X).$$

2. De maniére équivalente (en faisant appel â l'adjonction de l'Exemple I.4.6(2)), une action de G sur X consiste en une application
$$\varphi^\flat : G \times X \to X$$
telle que
$$\varphi^\flat(a \cdot b, x) = \varphi^\flat\big(a, \varphi^\flat(b,x)\big) \quad \text{et} \quad \varphi^\flat(e,x) = x \quad \forall\, a,b \in G, x \in X.$$
Autrement dit, les diagrammes suivants commutent, où $\mu : G \times G \to G$ est la multiplication du groupe G.
$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "\mu \times \mathrm{Id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_G \times \varphi^\flat"'] & G \times X \arrow[d, "\varphi^\flat"] \\ G \times X \arrow[r, "\varphi^\flat"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "x \mapsto (e,x)"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_X"'] & G \times X \arrow[d, "\varphi^\flat"] \\ & X \end{tikzcd}$$
Pour $a \in G$ et $x \in X$, on écrit
$$a \cdot x = \varphi^\flat(a,x) = \varphi(a)(x).$$

3. Soit $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(X)$ une action de groupe. Soit $a \in G$.
   (a) *L'ensemble des points fixés par* a, noté X^a, est le sous-ensemble de X défini par
$$X^a = \{x \in X \mid a \cdot x = x\}.$$
   (b) *L'ensemble des points fixes de l'action* φ, noté $(X,\varphi)^G$ ou simplement X^G, est le sous-ensemble de X défini par
$$X^G = \{x \in X \mid a \cdot x = x\ \forall\, a \in G\} = \bigcap_{a \in G} X^a,$$

4. Soit $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(X)$ une action de groupe. Soit $x \in X$.
   (a) *L'orbite* de x, notée O_x, est le sous-ensemble de X défini par
   $$O_x = \{a \cdot x \mid a \in G\}.$$
   (b) *L'ensemble des orbites* de l'action est
   $$(X, \varphi)_G = \{O_x \mid x \in X\},$$
   que l'on note souvent simplement X_G.
   (c) Le *stabilisateur* de x, noté G_x, est le sous-groupe de G défini par
   $$G_x = \{a \in G \mid a \cdot x = x\}.$$

   Il y a une jolie dualité entre orbites et stabilisateurs: pour tout $x \in X$, l'application suivante est bien définie et une bijection.
   $$G/G_x \to O_x : \bar{a} \mapsto a \cdot x$$
   Par ailleurs, X se décompose en une réunion disjointe d'orbites, i.e., il existe $\overline{X} \subseteq X$ tel que
   $$X = \coprod_{x \in \overline{X}} O_x.$$

5. Soit $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(X)$ une action de groupe. La décomposition du point précédent et la bijection entre G/G_x et O_x nous permet de formuler *l'Equation de classe*:
   $$\#X < \infty \quad \Longrightarrow \quad \#X = \sum_{x \in \overline{X}} (G : G_x),$$
   où $(G : G_x) = |G/G_x|$ est *l'index* de G_x dans G.

6. Soit $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(X)$ une action de groupe, où X est fini. Le *Lemme de Burnside* exprime la relation entre orbites et ensembles de points fixes.
   $$X = \coprod_{x \in \overline{X}} O_x \quad \Longrightarrow \quad \#\overline{X} = \frac{1}{\#G} \sum_{a \in G} \#X^a.$$

2 Un cadre catégorique pour les actions de groupe

Définition 2.1. Soit C une catégorie, et soit $c \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$. Soit G un groupe. Une *action* de G sur c consiste en un homomorphisme de groupe
$$\varphi : G \to \mathrm{Aut}(c).$$
Un objet de C muni d'une action de G est un *G-objet de* C.

Remarque 2.2. Si C est une catégorie concrète, i.e., une catégorie dont les objets sont des ensembles munis de structure supplémentaire et les morphismes sont des applications ensemblistes qui respectent cette structure (voir l'Exemple I.1.6), alors on peut exploiter l'adjonction de l'Exemple I.4.6 pour décortiquer la notion d'action de G sur un objet de c.

Soient $U_{\mathsf{C}} : \mathsf{C} \to \mathsf{Ens}$ et $U_{\mathsf{Gr}} : \mathsf{Gr} \to \mathsf{Ens}$ les foncteurs oubli. Si $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(c)$ est une action de G sur $c \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$, alors

$$U_{\mathsf{Gr}}(\varphi) \in \mathsf{Ens}\big(U_{\mathsf{Gr}}(G), U_{\mathsf{Gr}}(\mathrm{Aut}(c))\big) \subseteq \mathsf{Ens}\Big(U_{\mathsf{Gr}}(G), \mathrm{Map}\big(U_{\mathsf{C}}(c), U_{\mathsf{C}}(c)\big)\Big).$$

L'adjonction de l'Exemple I.4.6 nous donne alors une transposée

$$\psi = U_{\mathsf{Gr}}(\varphi)^\flat \in \mathsf{Ens}\big(U_{\mathsf{Gr}}(G) \times U_{\mathsf{C}}(c), U_{\mathsf{C}}(c)\big),$$

qui vérifie

$$\psi(a \cdot b, x) = \psi\big(a, \psi(b, x)\big) \quad \text{et} \quad \psi(e, x) = x \quad \forall\, a, b \in U_{\mathsf{Gr}}(G), x \in U_{\mathsf{C}}(c).$$

L'application ψ vérifie d'autres propriétés, liées à la structure supplémentaire de l'objet c; voir les exemples ci-dessous.

Exemples 2.3. Soit G un groupe.

1. Un G-ensemble est un ensemble muni une action de groupe sur un ensemble, telle que définie dans la Section 1.

2. Si $V \in \mathsf{Vect}_{\Bbbk}$, alors $\mathrm{Aut}(V) = \mathrm{GL}(V)$, le *groupe général linéaire* de V, i.e., le groupe de tous les isomorphismes linéaires de V. Si $\dim V = n < \infty$, alors le choix d'une base de V détermine un isomorphisme de groupe entre $\mathrm{GL}(V)$ et $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$, le groupe des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\Bbbk$ et inversibles.

   Un G-espace vectoriel est donc un espace vectoriel V muni d'un homomorphisme $\varphi : G \to GL(V)$, autrement dit une *représentation de G sur V*.

   Appliquant l'analyse de la Remarque 2.2 à cet exemple, on voit que la donnée d'une reprśentation de G sur V est équivalente à celle d'une application ensembliste

   $$\psi : G \times V \to V : (a, v) \mapsto a \cdot v$$

   (où on supprime les foncteurs oubli pour alléger la notation) telle que

   $$\psi(a \cdot b, v) = \psi\big(a, \psi(b, v)\big), \quad \psi(e, v) = v \quad \forall\, a, b \in G, v \in V$$

   et $\psi(a, -) : V \to V$ est linéaire pour tout $a \in G$.

3. Soit Top la catégorie dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes sont les applications continues. Si X est un espace topologique, alors $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Homeo}(X)$, le groupe de tous les homéomorphismes de X vers X.

   Un G-espace topologique est donc un espace topologique X muni d'un homomorphisme de groupes $\varphi : G \to \mathrm{Homeo}(X)$.

Appliquant l'analyse de la Remarque 2.2 à cet exemple, on voit que la donnée d'une action de G sur X est équivalente à celle d'une application ensembliste

$$\psi : G \times X \to X$$

(où on supprime les foncteurs oubli pour alléger la notation) telle que

$$\psi(a \cdot b, x) = \psi\big(a, \psi(b, x)\big), \quad \psi(e, x) = x \quad \forall\, a, b \in G, x \in X$$

et $\psi(a, -) : X \to X$ est continue pour tout $a \in G$.

Soit G est un *groupe topologique*, i.e., G est muni d'une topologie et d'une structure de groupe telles que ses applications de multiplication $\mu : G \times G \to G$ et d'inversion $\sigma : G \to G$ soient continues. Lorsque l'on parle alors d'une action de G sur un espace topologique X, on exige en général de plus que ψ soit continue.

Lemme 2.4. *Soient* C *une catégorie et* G *un groupe. Pour tout* $c \in \operatorname{Ob}\mathsf{C}$*, il y a une bijection*

$$\mathsf{Gr}\big(G, \operatorname{Aut}(c)\big) \cong \{F \in \operatorname{Ob}\mathsf{Fun}(\mathsf{B}G, \mathsf{C}) \mid F(\star) = c\},$$

i.e., les actions de G *sur* c *sont en correspondance bijective avec des foncteurs de* $\mathsf{B}G$ *vers* C *qui envoient l'unique objet de* $\mathsf{B}G$ *sur* c.

(Voir l'Exemple I.1.7(2) pour la définition de $\mathsf{B}G$ et la Remarque I.3.4 pour la définition de Fun.)

Remarque 2.5. On verra que la bijection est donnée explicitement dans un sens par

$$\mathsf{Gr}\big(G, \operatorname{Aut}(c)\big) \to \{F \in \operatorname{Ob}\mathsf{Fun}(\mathsf{B}G, \mathsf{C}) \mid F(\star) = c\} : \big(\varphi : G \to \operatorname{Aut}(c)\big) \mapsto (F_\varphi : \mathsf{B}G \to \mathsf{C}),$$

où $F_\varphi(\star) = c$ et $F_\varphi(a) = \varphi(a) : c \to c$ pour tout $a \in G = \operatorname{Mor}\mathsf{B}G$. Dans l'autre sens, on a

$$\{F \in \operatorname{Ob}\mathsf{Fun}(\mathsf{B}G, \mathsf{C}) \mid F(\star) = c\} \to \mathsf{Gr}\big(G, \operatorname{Aut}(c)\big) : (F : \mathsf{B}G \to \mathsf{C}) \mapsto \big(\varphi_F : G \to \operatorname{Aut}(c)\big),$$

où $\varphi_F(a) = F(a) : c \to c$.

Notation et terminologie 2.6. Soient C une catégorie et G un groupe. La catégorie $\mathsf{Fun}(\mathsf{B}G, \mathsf{C})$ est appelée la *catégorie des G-objets dans* C. Les morphismes dans $\mathsf{Fun}(\mathsf{B}G, \mathsf{C})$ sont appelés *G-équivariants.*

Pour simplifier la notation, on écrira souvent

$${}_G\mathsf{C} = \mathsf{Fun}(\mathsf{B}G, \mathsf{C}).$$

Remarque 2.7. Un morphisme G-équivariant, i.e., un morphisme dans ${}_G\mathsf{C}$, est une transformation naturelle $\tau : F \to F'$, où $F, F' : \mathsf{B}G \to \mathsf{C}$, i.e., une application $\tau : G = \operatorname{Ob}\mathsf{B}G \to \operatorname{Mor}\mathsf{C}$ telle que pour tout $a \in G$,

$$\begin{tikzcd}
F(\star) \arrow[r, "\tau_\star"] \arrow[d, "F(a)"'] & F'(\star) \arrow[d, "F'(a)"] \\
F(\star) \arrow[r, "\tau_\star"] & F'(\star)
\end{tikzcd}$$

commute.

Soient $c = F(\star)$ et $c' = F'(\star)$. Poser $f = \tau_\star \in \mathsf{C}(c, c')$. Traduisant le diagramme commutatif ci-dessus en termes de notation de la Remarque 2.5, on obtient un diagramme commutatif dans C.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_F(a)"'] & c' \arrow[d, "\varphi_{F'}(a)"] \\ c \arrow[r, "f"] & c'. \end{tikzcd}$$

Ainsi les morphismes G-équivariants entre G-objets dans C sont des morphismes de C qui respectent la structure supplémentaire donnée par la G-action sur le domaine et le codomaine.

Il y un foncteur oubli $U : {}_G\mathsf{C} \to \mathsf{C}$, défini sur les objets par

$$U\big(c, \varphi : G \to \mathrm{Aut}(X)\big) = c.$$

Exemples 2.8. Soit G un groupe.

1. Soient (X, φ) et (X', φ') deux G-ensembles. Un morphisme G-équivariant de (X, φ) vers (X', φ') consiste en une application $f : X \to X'$ telle que $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$ pour tout $a \in G$ et $x \in X$, où applique l'action φ à gauche et φ' à droite.

2. Soient (V, φ) et (V', φ') deux représentations de G, où V et V' sont tous les deux des $\Bbbk$-espaces vectoriels. Un morphisme G-équivariant de (V, φ) vers (V', φ') consiste en une application linéaire $f : V \to V'$ telle que $f(a \cdot v) = a \cdot f(v)$ pour tout $a \in G$ et $x \in X$, où applique l'action φ à gauche et φ' à droite.

3. Soient (X, φ) et (X', φ') deux G-espaces topologiques. Un morphisme G-équivariant de (X, φ) vers (X', φ') consiste en une application continue $f : X \to X'$ telle que $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$ pour tout $a \in G$ et $x \in X$, où applique l'action φ à gauche et φ' à droite.

3 Foncteurs de point fixe et d'orbites

Définition 3.1. Soient C une catégorie et G un groupe.

1. Le *foncteur d'action triviale*, noté $\mathrm{Triv}_G : \mathsf{C} \to {}_G\mathsf{C}$, est défini sur les objets par

$$\mathrm{Triv}_G(c) = \big(c, G \xrightarrow{\mathrm{cst}_{\mathrm{Id}_c}} \mathrm{Aut}(c)\big),$$

   où $\mathrm{cst}_{\mathrm{Id}_c}(a) = \mathrm{Id}_c$ pour tout $a \in G$, et par l'identité sur les morphismes.

2. Le *foncteur de point fixe*, noté $(-)^G : {}_G\mathsf{C} \to \mathsf{C}$, est l'adjoint à droite de Triv_G, lorsqu'il existe.

3. Le *foncteur d'orbites*, noté $(-)_G : {}_G\mathsf{C} \to \mathsf{C}$, est l'adjoint à gauche de Triv_G, lorsqu'il existe.

Remarque 3.2. Soit G un groupe. Si C est une catégorie concrète, alors la transposée de l'action de G sur $\mathrm{Triv}_G(c)$ vérifie

$$\psi = U_{\mathsf{Gr}}(\mathrm{cst}_{\mathrm{Id}_c})^\flat : U_{\mathsf{Gr}}(G) \times U_{\mathsf{C}}(c) \to U_{\mathsf{C}}(c) : (a, x) \mapsto x, \quad \forall\, a \in G.$$

Exemples 3.3. Dans le cas où $\mathsf{C} = \mathsf{Ens}$, les foncteurs de point fixe et d'orbites existent et étendent les constructions rappelées dans la section 1, de la manière suivante.

1. Etant donné un morphisme G-équivariant $f : (X,\varphi) \to (X',\varphi)$, l'application ensembliste
$$f^G : (X,\varphi)^G \to (X',\varphi')^G$$
est simplement donnée par la restriction et corestriction de f aux points fixe. On vérifie aisément que ceci définit bien un foncteur.

   Pour contrôler que $\mathrm{Triv}_G \dashv (-)^G$, on définit des transformations naturelles
$$\eta : \mathrm{Id}_{\mathsf{Ens}} \to (-)^G \circ \mathrm{Triv}_G \quad \text{ et } \quad \varepsilon : \mathrm{Triv}_G \circ (-)^G \to \mathrm{Id}_{{}_G\mathsf{Ens}}$$
par
$$\eta : \mathrm{Ob}\,\mathsf{Ens} \to \mathrm{Mor}\,\mathsf{Ens} : X \mapsto \Big(\eta_X = \mathrm{Id}_X : X \to \big(\mathrm{Triv}_G(X)\big)^G\Big)$$
et
$$\varepsilon : \mathrm{Ob}\,{}_G\mathsf{Ens} \to \mathrm{Mor}\,{}_G\mathsf{Ens} : (X,\varphi) \mapsto \Big(\varepsilon_{(X,\varphi)} : \mathrm{Triv}_G\big((X,\varphi)^G\big) \to (X,\varphi)\Big),$$
où l'application ensembliste sous-jacente à $\varepsilon_{(X,\varphi)}$ est juste l'inclusion de l'ensemble des points fixe dans X.

   On vérifie sans trop de peine que η et ε satisfont aux identités triangulaires de la Définition I.4.1 et que donc $\mathrm{Triv}_G \dashv (-)^G$, comme souhaité. Par conséquent, il y a un isomorphisme naturel
$${}_G\mathsf{Ens}\big(\mathrm{Triv}_G(X), (X',\varphi')\big) \cong \mathsf{Ens}\big(X, (X',\varphi')^G\big)$$
pour tout ensemble X et tout G-ensemble (X',φ').

2. Etant donné un morphisme G-équivariant $f : (X,\varphi) \to (X',\varphi)$, l'application ensembliste
$$f_G : (X,\varphi)_G \to (X',\varphi')_G$$
est simplement définie par $f_G(O_x) = O_{f(x)}$. On vérifie aisément que l'application f_G est bien définie et que ceci définit bien un foncteur.

   Pour contrôler que $(-)_G \dashv \mathrm{Triv}_G$, on définit des transformations naturelles
$$\eta : \mathrm{Id}_{{}_G\mathsf{Ens}} \to \mathrm{Triv}_G \circ (-)_G \quad \text{ et } \quad \varepsilon : (-)_G \circ \mathrm{Triv}_G \to \mathrm{Id}_{\mathsf{Ens}}$$
par
$$\eta : \mathrm{Ob}\,{}_G\mathsf{Ens} \to \mathrm{Mor}\,{}_G\mathsf{Ens} : (X,\varphi) \mapsto \Big(\eta_{(X,\varphi)} : (X,\varphi) \to \mathrm{Triv}_G\big((X,\varphi)_G\big)\Big),$$
où l'application ensembliste sous-jacente à $\eta_{(X,\varphi)}$ envoie chaque x sur son orbite O_x, et
$$\varepsilon : \mathrm{Ob}\,\mathsf{Ens} \to \mathrm{Mor}\,\mathsf{Ens} : X \mapsto \Big(\varepsilon_X = \mathrm{Id}_X : \big(\mathrm{Triv}_G(X)\big)_G \to X\Big).$$

   On vérifie sans trop de peine que η et ε satisfont aux identités triangulaires de la Définition I.4.1 et que donc $(-)_G \dashv \mathrm{Triv}_G$, comme souhaité. Par conséquent, il y a un isomorphisme naturel
$$\mathsf{Ens}\big((X,\varphi)_G, X'\big) \cong {}_G\mathsf{Ens}\big((X,\varphi), \mathrm{Triv}_G(X')\big)$$
pour tout G-ensemble (X,φ) et tout ensemble X'.

Remarque 3.4. Les foncteurs de point fixe et d'orbites existent aussi pour $\mathsf{C} = \mathsf{Vect}_{\Bbbk}$ et $\mathsf{C} = \mathsf{Top}$.

4 Création d'actions libres et co-libres

(Au cours nous ne traiterons que le cas des actions libres, laissant la notion d'action co-libre aux étudiants intéressés. La notion d'action co-libre ne sera donc pas examinable.)

Définition 4.1. Soient G un groupe et C une catégorie.

1. Le *foncteur de G-action libre*, noté $\mathrm{Free}_G : \mathsf{C} \to {}_G\mathsf{C}$, est l'adjoint à gauche du foncteur oubli $U : {}_G\mathsf{C} \to \mathsf{C}$, lorsqu'il existe.
2. Le *foncteur de G-action co-libre*, noté $\mathrm{CoFree}_G : \mathsf{C} \to {}_G\mathsf{C}$, est l'adjoint à droite du foncteur oubli $U : {}_G\mathsf{C} \to \mathsf{C}$, lorsqu'il existe.

Exemples 4.2. Dans le cas où $\mathsf{C} = \mathsf{Ens}$, les foncteurs de G-action libre et co-libre existent et sont définis ainsi.

1. Pour tout ensemble X, le G-ensemble $\mathrm{Free}_G(X)$ est spécifié par
$$\mathrm{Free}_G(X) = \big(G \times X, G \xrightarrow{\varphi_X} \mathrm{Aut}(G \times X)\big),$$
où
$$\varphi_X(a) : G \times X \to G \times X : (b, x) \mapsto (ab, x).$$
On appelle $\mathrm{Free}_G(X)$ le *G-ensemble libre de base X*.
Etant donné une application $f : X \to X'$, le morphisme G-équivariant $\mathrm{Free}_G(f)$ est défini sur les ensembles sous-jacents par
$$\mathrm{Free}_G(f) = \mathrm{Id}_G \times f : G \times X \to G \times X' : (a, x) \mapsto \big(a, f(x)\big).$$
On vérifie aisément que cette application est bien G-équivariante et que ceci définit bien un foncteur.
Pour contrôler que $\mathrm{Free}_G \dashv U$, on définit des transformations naturelles
$$\eta : \mathrm{Id}_{\mathsf{Ens}} \to U \circ \mathrm{Triv}_G \quad \text{et} \quad \varepsilon : \mathrm{Triv}_G \circ U \to \mathrm{Id}_{{}_G\mathsf{Ens}}$$
par
$$\eta : \mathrm{Ob}\,\mathsf{Ens} \to \mathrm{Mor}\,\mathsf{Ens} : X \mapsto \Big(\eta_X : X \to U\big(\mathrm{Free}_G(X)\big)\Big)$$
où $\eta_X(x) = (e, x)$ pour tout $x \in X$, et
$$\varepsilon : \mathrm{Ob}\,{}_G\mathsf{Ens} \to \mathrm{Mor}\,{}_G\mathsf{Ens} : (X, \varphi) \mapsto \Big(\varepsilon_{(X,\varphi)} : \mathrm{Free}_G(X) \to (X, \varphi)\Big),$$
où l'application ensembliste sous-jacente à $\varepsilon_{(X,\varphi)}$ est simplement φ.
On vérifie sans trop de peine que η et ε satisfont aux identités triangulaires de la Définition I.4.1 et que donc $\mathrm{Free}_G \dashv U$, comme souhaité. Par conséquent, il y a un isomorphisme naturel
$${}_G\mathsf{Ens}\big(\mathrm{Free}_G(X), (X', \varphi')\big) \cong \mathsf{Ens}(X, X')$$
pour tout ensemble X et tout G-ensemble (X', φ'). Autrement dit, un morphisme G-équivariant de source un G-ensemble libre de base X est déterminé par ses valeurs sur X; comparer à l'Exemple I.4.6 (1).

2. Pour tout ensemble X, le G-ensemble $\mathrm{CoFree}_G(X)$ est spécifié par

$$\mathrm{CoFree}_G(X) = \Big(\mathrm{Map}(G,X), G \xrightarrow{\psi_X} \mathrm{Aut}\big(\mathrm{Map}(G,X)\big)\Big),$$

   où
$$\psi_X(a) : \mathrm{Map}(G,X) \to \mathrm{Map}(G,X) : (f : G \to X) \mapsto \big(f(a \cdot -) : G \to X\big).$$

   On appelle $\mathrm{CoFree}_G(X)$ le *G-ensemble co-libre de base X*.

   Etant donné une application $f : X \to X'$, le morphisme G-équivariant $\mathrm{CoFree}_G(f)$ est défini sur les ensembles sous-jacents par

$$\mathrm{CoFree}_G(f) : \mathrm{Map}(G,X) \to \mathrm{Map}(G,X') : g \mapsto f \circ g.$$

   On vérifie aisément que cette application est bien G-équivariante et que ceci définit bien un foncteur.

   Pour contrôler que $U \dashv \mathrm{CoFree}_G$, on définit des transformations naturelles

$$\eta : \mathrm{Id}_{{}_G\mathsf{Ens}} \to \mathrm{CoFree}_G \circ U \quad \text{et} \quad \varepsilon : U \circ \mathrm{CoFree}_G \to \mathrm{Id}_{\mathsf{Ens}}$$

   par
$$\eta : \mathrm{Ob}\, {}_G\mathsf{Ens} \to \mathrm{Mor}\, {}_G\mathsf{Ens} : (X,\varphi) \mapsto \Big(\eta_{(X,\varphi)} : (X,\varphi) \to \mathrm{CoFree}_G\big(X\big)\Big),$$

   où l'application ensembliste sous-jacente à $\eta_{(X,\varphi)}$ est

$$\eta_{(X,\varphi)} : X \to \mathrm{Map}(G,X) : x \mapsto (G \to X : a \mapsto a \cdot x).$$

   et
$$\varepsilon : \mathrm{Ob}\,\mathsf{Ens} \to \mathrm{Mor}\,\mathsf{Ens} : X \mapsto \Big(\varepsilon_X : U\big(\mathrm{CoFree}_G(X)\big) \to X\Big),$$

   où $\varepsilon_X(f) = f(e)$ pour tout $f \in \mathrm{Map}(G,X)$.

   On vérifie sans trop de peine que η et ε satisfont aux identités triangulaires de la Définition I.4.1 et que donc $(-)_G \dashv \mathrm{Triv}_G$, comme souhaité. Par conséquent, il y a un isomorphisme naturel
$$\mathsf{Ens}(X,X') \cong {}_G\mathsf{Ens}\big((X,\varphi), \mathrm{CoFree}_G(X')\big)$$

   pour tout G-ensemble (X,φ) et tout ensemble X'.

De nouveau, il y a des foncteurs libres et co-libres aussi pour, par exemple, $\mathsf{Vect}_{\Bbbk}$ et Top.

Lemme 4.3. *Soient G un groupe et C une catégorie.*

1. *Si Free_G existe, alors le foncteur oubli $U : {}_G\mathsf{C} \to \mathsf{C}$ préservent les produits. En particulier,*
$$U\big((c,\varphi) \times (c',\varphi')\big) \cong c \times c'$$

   quelques soient les actions φ et φ'.

2. *Si CoFree_G existe, alors le foncteur oubli $U : {}_G\mathsf{C} \to \mathsf{C}$ préservent les coproduits. En particulier,*
$$U\big((c,\varphi) \coprod (c',\varphi')\big) \cong c \coprod c'$$

   quelques soient les actions φ et φ'.

Exemple 4.4. Dans le cas où $\mathsf{C} = \mathsf{Ens}$, on vient de voir que les foncteurs de G-action libre et co-libre existent. Par conséquent, si (X, φ) et (X', φ') sont deux G-ensembles, alors l'ensemble sous-jacent au produit $(X, \varphi) \times (X', \varphi')$ est le produit cartésien $X \times X'$. On peut vérifier facilement que l'action de G dont $X \times X'$ doit être muni est *l'action diagonale*, définie par la composition

$$G \xrightarrow[a \mapsto (a,a)]{\Delta} G \times G \xrightarrow{\varphi \times \varphi'} \mathrm{Aut}(X) \times \mathrm{Aut}(X') \hookrightarrow \mathrm{Aut}(X \times X').$$

De manière plus terre à terre, quelques soient $a \in G$, $x \in X$, et $x' \in X'$,

$$a \cdot (x, x') = (a \cdot x, a \cdot x').$$

De même, si (X, φ) et (X', φ') sont deux G-ensembles, alors l'ensemble sous-jacent au coproduit $(X, \varphi) \coprod (X', \varphi')$ est la réunion disjointe $X \coprod X'$. On peut vérifier facilement que l'action de G dont $X \coprod X'$ doit être muni est celle définie par

$$G \times (X \coprod X') \cong (G \times X) \coprod (G \times X') \xrightarrow{\varphi \coprod \varphi'} X \coprod X'.$$

5 Changements de groupe

Définition 5.1. Soit C une catégorie. Pour tout homomorphisme de groupe $\gamma : G \to G'$, il y a un *foncteur de restriction*

$$\gamma^* : {}_{G'}\mathsf{C} \to {}_{G}\mathsf{C}$$

défini sur les objets par

$$\gamma^*\big(c, G' \xrightarrow{\varphi'} \mathrm{Aut}(c')\big) = (c, G \xrightarrow{\varphi' \circ \gamma} \mathrm{Aut}(c'))$$

et qui est l'identité sur les morphismes.

On peut facilement vérifier que γ^* est bien un foncteur.

Exemples 5.2. Soient G un groupe et C une catégorie.

1. Si $\iota : \{e\} \to G$ est l'unique homomorphisme de groupe vers G dont le domaine est $\{e\}$, alors la composée de $\iota^* : {}_{G}\mathsf{C} \to {}_{\{e\}}\mathsf{C}$ avec l'isomorphisme de catégories évident ${}_{\{e\}}\mathsf{C} \xrightarrow{\cong} \mathsf{C}$ est le foncteur oubli $U : {}_{G}\mathsf{C} \to \mathsf{C}$.

2. Si $\pi : G \to \{e\}$ est l'unique homomorphisme de G vers le groupe trivial, alors la composée de $\pi^* : {}_{\{e\}}\mathsf{C} \to {}_{G}\mathsf{C}$ avec l'isomorphisme de catégories évident $\mathsf{C} \xrightarrow{\cong} {}_{\{e\}}\mathsf{C}$ est égale au foncteur $\mathrm{Triv}_G : \mathsf{C} \to {}_{G}\mathsf{C}$.

Proposition 5.3. *Pour tout homomorphisme de groupe $\gamma : G \to G'$, le foncteur de restriction $\gamma^* : {}_{G'}\mathsf{Ens} \to {}_{G}\mathsf{Ens}$ admet un adjoint â gauche et un adjoint à droite.*

(Au cours nous ne parlerons pas de l'adjoint à droite du foncteur de restriction, lequel ne sera donc pas une notion examinable.)

Cette proposition est vrai aussi pour, par exemple, $\mathsf{Vect}_{\Bbbk}$ et Top, mais nous ne verrons que le cas $\mathsf{C} = \mathsf{Ens}$ dans ce cours.

IV. Groupes abéliens

Semaines 10 à 13

1 Constructions catégoriques dans Ab

1.1 Caractérisation catégorique des groupes abéliens

Lemme 1.1. *Un groupe G est abélien si et seulement si sa multiplication $\mu : G \times G \to G$ est en fait un homomorphisme de groupes.*

1.2 Sommes directes

La catégorie Ab vérifie la propriété remarquable que le produit de deux groupes abéliens est aussi leur coproduit. Plus précisément, on démontrera le lemme suivant.

Lemme 1.2. *Pour tout couple de groupes abéliens A et B,*

$$A \xrightarrow{i_1} A \times B \xleftarrow{i_2}, B$$

où $i_1(a) = (a, 0)$ et $i_2(b) = (0, b)$ pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, est un coproduit dans Ab.

Remarque 1.3. Ce lemme répond à la Question II.1.1, dans le cas où G_0 est le groupe trivial et G_1 et G_2 sont abéliens.

Notation et terminologie 1.4. Lorsque l'on considère $A \times B$ comme le coproduit de A et B, au lieu du produit, on le note $A \oplus B$ et l'appelle la *somme directe* de A et B. Aussi pour distinguer le cas produit du cas coproduit, on écrit un élément (a, b) de $A \oplus B$ comme une "somme formelle" $a + b$. Traduisant l'addition composante par composante de $A \times B$ en termes de cette notation, on obtient

$$(a + b) + (a' + b') = (a + a') + (b + b') \quad \forall\, a + b, a' + b' \in A \oplus B.$$

Remarque 1.5. Parfois on considère la somme directe comme une opération interne à l'ensemble des sous-groupes d'un groupe abélien A. Si B et C sont des sous-groupes de A, leur *somme*, notée $B + C$, est le sous-groupe de A dont l'ensemble sous-jacent est

$$\{b + c \mid b \in B, c \in C\},$$

l'ensemble de toutes les sommes (dans A, donc non-formelles cette fois) d'un élément de B et d'un élément de C. On vérifie facilement que $B + C$ est un sous-groupe de A.

Si $B \cap C = \{0\}$, on dit que la somme est *directe*, et l'on la note $B \oplus C$. Cette notation et cette terminologie ne sont pas en conflit avec celles introduites ci-dessus, car il s'avère que $B \oplus C$ défini ainsi est bien le coproduit de B et C dans Ab.

Remarque 1.6. Selon la propriété universelle du coproduit (Définition I.5.6), pour tout $C \in \operatorname{Ob} \mathsf{Ab}$,

$$\forall\, f \in \mathsf{Ab}(A, C),\ g \in \mathsf{Ab}(B, C),\ \exists!\, h \in \mathsf{Ab}(A \oplus B, C) \text{ tq } h \circ i_1 = f,\ h \circ i_2 = g,$$

autrement dit, l'application

$$\mathsf{Ab}(A \oplus B, C) \to \mathsf{Ab}(A, C) \times \mathsf{Ab}(B, C) : h \mapsto (h \circ i_1, h \circ i_2)$$

est une bijection.

Cette remarque sert de motivation pour une généralisation de la notion de somme directe à une famille de groupes abéliens de cardinalité quelconque. Pour cela nous aurons besoin de la notion d'un produit quelconque d'ensembles ou de groupes.

Définition 1.7. Soit X un ensemble, et soit $\{Y_x \mid x \in X\} \subset \operatorname{Ob} \mathsf{Ens}$. Le *produit* des Y_x, noté $\prod_{x \in X} Y_x$, est l'ensemble

$$\Big\{\omega \in \mathsf{Ens}\big(X, \bigcup_{x \in X} Y_x\big) \mid \omega(x) \in Y_x \ \forall\, x \in X\Big\}.$$

Soit $\{G_x \mid x \in X\} \subset \operatorname{Ob} \mathsf{Gr}$. Le *produit* des G_x, noté $\prod_{x \in X} G_x$, est le groupe dont le sous-ensemble sous-jacent est

$$\Big\{\omega \in \mathsf{Ens}\big(X, \bigcup_{x \in X} G_x\big) \mid \omega(x) \in G_x \ \forall\, x \in X\Big\},$$

muni de la multiplication définie par

$$(\omega \cdot \omega')(x) = \omega(x) \cdot \omega'(x)$$

pour tout $x \in X$, oú la multiplication à droite de cette égalité est celle de G_x.

Remarque 1.8. Il n'est pas difficile de voir que, si X est un ensemble fini, alors les constructions de la définition ci-dessus sont isomorphes à leurs formulations en termes de produits cartésiens.

Remarque 1.9. Le produit d'une famille quelconque d'ensembles ou de groupes vérifie une propriété universelle qui généralise celle de la définition du produit de deux objets (Définition I.5.1)

Définition 1.10. Soit X un ensemble, et soit $\{A_x \mid x \in X\} \subset \operatorname{Ob} \mathsf{Ab}$. Une *somme directe* des groupes abéliens A_x consiste en un groupe abélien B muni d'homomorphismes $i_x : A_x \to B$ pour tout $x \in X$ tels que l'application

$$\mathsf{Ab}(B, C) \longrightarrow \prod_{x \in X} \mathsf{Ab}(A_x, C) : h \mapsto (h \circ i_x)_{x \in X}$$

soit une bijection pour tout $C \in \operatorname{Ob} \mathsf{Ab}$.

Proposition 1.11. *Soit X un ensemble, et soit $\{A_x \mid x \in X\} \subset \operatorname{Ob} \mathsf{Ab}$. La somme directe des A_x existe et est unique à isomorphisme près.*

Notation 1.12. L'unicité à isomorphisme près nous permet d'abuser un peu de la notation et écrire $\bigoplus_{x \in X} A_x$ pour "la" somme directe des A_x.

Remarque 1.13. On verra lors de la démonstration de la Proposition 1.11 que l'on peut écrire

$$\bigoplus_{x\in X} A_x = \Big\{\omega \in \mathsf{Ens}\big(X, \bigcup_{x\in X} A_x\big) \mid \omega(x) \in A_x \ \forall\, x \in X \text{ et } \#\{x \mid \omega(x) \neq 0\} < \infty\Big\},$$

muni d'une addition définie par $(\omega + \omega')(x) = \omega(x) + \omega'(x)$ pour tout $x \in X$, où l'addition à droite est celle de A_x.

Pour tout $x' \in X$, l'homomorphisme $i_{x'} : A_{x'} \to \bigoplus_{x\in X} A_x$ est spécifié par

$$i_{x'}(a) : X \to \bigcup_{x\in X} A_x : x'' \mapsto \begin{cases} a & : x'' = x' \\ 0 & : x'' \neq x' \end{cases}$$

pour tout $a \in A_{x'}$.

On utilise assez souvent une notation genre "sommes formelles" pour les éléments de $\bigoplus_{x\in X} A_x$, i.e.,

$$\omega : X \to \bigcup_{x\in X} A_x \quad \text{est noté} \quad \sum_{x\in X} a_x \cdot x, \text{ où } a_x = \omega(x) \in A_x \quad \forall\, x \in X.$$

Lemme 1.14. *Soit X un ensemble, et soit $\{A_x \mid x \in X\} \subset \operatorname{Ob} \mathsf{Ab}$. Alors*

$$\#X < \infty \iff \bigoplus_{x\in X} A_x \cong \prod_{x\in X} A_x.$$

Un cas particulier très important de somme directe...

Définition 1.15. Soit X un ensemble. La somme directe $\bigoplus_{x\in X} \mathbb{Z}$ est *le groupe abélien libre de base X*, noté $F_{\mathsf{Ab}}(X)$.

Remarque 1.16. Par Remarque 1.13,

$$F_{\mathsf{Ab}}(X) = \Big\{\omega \in \mathsf{Ens}\big(X, \mathbb{Z}\big) \mid \#\{x \mid \omega(x) \neq 0\} < \infty\Big\},$$

et un élément de $F_{\mathsf{Ab}}(X)$ peut aussi être noté $\sum_{x\in X} n_x \cdot x$, oú $n_x \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in X$ et $\#\{x \mid n_x \neq 0\} < \infty$.

Théorème 1.17. *La définition du groupe abélien libre s'étend en un foncteur $F_{\mathsf{Ab}} : \mathsf{Ens} \to \mathsf{Ab}$, qui est l'adjoint à gauche du foncteur oubli $U : \mathsf{Ab} \to \mathsf{Ens}$.*

Le Théorème 1.17 implique en particulier que pour tout ensemble X et tout groupe abélien A, il y a une bijection naturelle

$$\mathsf{Ens}\big(X, U(A)\big) \cong \mathsf{Ab}\big(F_{\mathsf{Ab}}(X), A\big),$$

i.e., un homomorphisme de groupe abélien dont la source est libre de base X est entièrement déterminé par ces valeurs sur cette base (voir l'Exemple I.4.6(1) pour comparer avec le cas des espaces vectoriels).

Corollaire 1.18. *Soient X et Y des ensembles. Alors*

$$F_{\mathsf{Ab}}(X \coprod Y) \cong F_{\mathsf{Ab}}(X) \oplus F_{\mathsf{Ab}}(Y).$$

(Voir l'Exemple I.5.13(1) pour comparer avec le cas des espaces vectoriels.)

1.3 Le foncteur Hom

Lemme 1.19. *Il y a un foncteur* $\mathrm{Hom} : \mathsf{Ab}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{Ab} \to \mathsf{Ab}$ *spécifié sur les objets par*

$$\mathrm{Hom}(A, B) = \mathsf{Ab}(A, B),$$

muni de l'addition définie par $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ *pour tout* $a \in A$*, où l'addition à droite est celle de* B*, et sur les morphismes par*

$$\mathrm{Hom}(f^{\mathrm{op}}, g) : \mathrm{Hom}(A', B) \to \mathrm{Hom}(A, B') : (A' \xrightarrow{h} B) \mapsto (A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{h} B \xrightarrow{g} B')$$

pour tout $f^{\mathrm{op}} \in \mathsf{Ab}^{\mathrm{op}}(A', A)$ *et tout* $g \in \mathsf{Ab}(B, B')$.

Remarque 1.20. Par restriction, pour tout groupe abélien A, il y a des foncteurs

$$\mathrm{Hom}(A, -) : \mathsf{Ab} \to \mathsf{Ab}$$

et

$$\mathrm{Hom}(-, A) : \mathsf{Ab}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}.$$

(Comparer avec le cas de Ens dans l'Exemple I.2.4(5).)

Proposition 1.21. *Soit* X *un ensemble, et soit* $\{A_x \mid x \in X\} \subset \mathrm{Ob}\,\mathsf{Ab}$. *Pour tout groupe abélien* B*, il y a un isomorphisme de groupes abéliens*

$$\mathrm{Hom}\,\Big(\bigoplus_{x\in X} A_x, B\Big) \cong \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}(A_x, B).$$

2 Suites exactes

Définition 2.1. Une suite d'homomorphismes de groupe abélien

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{n+2}} A_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \cdots$$

est *exacte* si $\mathrm{Im}\,\varphi_{n+1} = \ker \varphi_n$ pour tout n.

Une *courte suite exacte* dans Ab est une suite exacte d'homomorphismes de groupe abélien dont seulement au plus trois groupes, qui sont consécutifs dans la suite, sont non-triviaux. On écrit une telle suite

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0\ .$$

Remarque 2.2. La suite $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$ est exacte si et seulement si ι est injectif, et π est surjectif, et $\mathrm{Im}\,\iota = \ker \rho$.

Définition 2.3. Une suite exacte $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$ dans Ab est *scindée* s'il existe $\sigma \in \mathsf{Ab}(C, B)$ tel que $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_C$. On dit alors que σ est une *section* de π.

Lemme 2.4. *Une suite exacte* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$ *dans* Ab *est scindée si et seulement il existe une* retraction *de l'homomorphisme, i.e., il exists* $\rho \in \mathsf{Ab}(B, A)$ *tel que* $\rho \circ \iota = Id_A$.

Remarque 2.5. Si la suite exacte $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$ est scindée, avec section $\sigma : C \to B$ et retraction $\rho : B \to A$, alors il y a des isomorphismes mutuellement inverses

$$A \oplus C \to B : a + c \mapsto \iota(a) + \sigma(c) \quad \text{et} \quad B \to A \oplus C : b \mapsto \rho(b) + \pi(b).$$

Exemples 2.6.

1. Pour tout couple de groupes abéliens A et B, il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} A \oplus B \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0 ,$$

où $\iota(a) = a + 0$ et $\pi(a + b) = b$.

2. Etant donné une suite exacte $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$, les groupes A et C ne déterminent pas le groupe B! Par exemple, les deux suites suivantes sont toutes les deux exactes:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

où ι et π sont définis comme dans l'exemple (1), et

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\iota'} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi'} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 ,$$

où $\iota'\big([m]_2\big) = [2m]_4$ et $\pi'\big([n]_4\big) = [n]_2$. Ici, $[n]_p$ veut dire la classe de l'entier n modulo p.

Proposition 2.7 (Le Lemme des Cinq)**.** *Soit*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\psi"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\omega"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\iota'"] & B' \arrow[r, "\pi'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif dans Ab*, où les deux suites horizontales sont exactes. Si φ and ω sont des isomorphismes, alors ψ est aussi un isomorphisme.*

3 Torsion et divisibilité

Soit $(A, +, 0)$ un groupe abélien.

Notation 3.1. Puisque nous écrivons ce groupe abélien additivement, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $a \in A$,

$$na = \begin{cases} \overbrace{a + .. + a}^{n \text{ sommands}} & : n > 0, \\ 0 & : n = 0, \\ \underbrace{(-a) + .. + (-a)}_{|n| \text{ sommands}} & : n < 0. \end{cases}$$

3.1 Torsion

Définition 3.2. Soit $a \in A$. L'élément a est un *élément de torsion* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $na = 0$.
Si a est un élément de torsion, alors *l'ordre* de a est

$$\mathfrak{o}(a) = \min\{n \mid na = 0\}.$$

Notation 3.3. On pose

$$T(A) = \{a \in A \mid a \text{ est un élément de torsion}\}$$

et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n(A) = \{a \in A \mid na = 0\}.$$

Observer que $T(A) = \bigcup_{n \in N} T_n(A)$.

Lemme 3.4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-ensemble $T_n(A)$ de A est en fait un sous-groupe de A, tout comme $T(A)$.*

Notation et terminologie 3.5. Soit p un premier. On pose

$$A(p) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_{p^k}(A) = \{a \in A \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ tq } p^k a = 0\},$$

et l'on l'appelle le *sous-groupe de p-torsion* de A.

Que $A(p)$ est sous-groupe de A, quelque soit p, est une conséquence immédiate du Lemme 3.4.

3.2 Divisibilité

Définition 3.6. Soit p un premier. Un groupe abélien A est *p-divisible* si pour tout $a \in A$, il existe $b \in A$ tel que $pb = a$. Il est *divisible* s'il est p-divisible pour tout premier p.

Remarque 3.7. Un groupe abélien A est divisible si et seulement si $nA = A$ pour tout entier n.

4 La structure des p-groupes abéliens

Dans toute cette section, p désigne un nombre premier.

Définition 4.1. Un groupe abélien A est un *p-groupe abélien* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|A| = p^k$.

Remarque 4.2. Tout quotient d'un p-groupe abélien est clairement aussi un p-groupe abélien.

Lemme 4.3. *1. Si $|A(p)| < \infty$, alors $A(p) = T_{p^N}(A)$, où*

$$N = \max\{k \mid \exists\, a \in A(p) \text{ tq } \mathfrak{o}(a) = p^k\}.$$

2. Si $|A(p)| < \infty$, alors $A(p)$ est un p-groupe abélien.

Lemme 4.4. *Soit A un p-groupe abélien, et soit $b \in A \smallsetminus \{0\}$. S'il existe un entier positif k tel que $p^k b \neq 0$ et $\mathfrak{o}(p^k b) = p^m$, alors $\mathfrak{o}(b) = p^{k+m}$.*

Lemme 4.5. *Soit A un p-groupe abélien, et soit $a \in A$ tel que $\mathfrak{o}(a)$ soit maximal. Pour tout $\bar{b} \in A/ < a >$, il existe $b \in \bar{b}$ tel que $\mathfrak{o}(b) = \mathfrak{o}(\bar{b})$.*

5 La classification des groupes abéliens finis

Le but de cette section est d'établir la classification complète des groupes abéliens finis. Ce résultat a déjà été démontré au cours d'Algèbre linéaire avancée II, mais d'une autre manière.

Notation 5.1. Pour tout entier positif n, poser

$$\mathcal{P}_n = \{p \text{ premier } \mid p \text{ divise } n\},$$

l'ensemble des diviseurs premiers de n.

Théorème 5.2. *Si A est un groupe abélien fini d'ordre n, alors pour tout nombre premier p qui divise n, il existe une unique suite d'entiers positifs*

$$r_{p,1} \geq r_{p.2} \geq \cdots \geq r_{p,m_p}$$

tels que

$$A \cong \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \mathbb{Z}/p^{r_{p,1}}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p^{r_{p,m_p}}\mathbb{Z}.$$

Lemme 5.3. *Si A est un groupe abélien tel que $A = T_n(A)$ et $n = lm$, où $(l,m) = 1$, alors $A = T_l(A) \oplus T_m(A)$.*

Lemme 5.4. *Si A est un groupe abélien tel que $A = T_n(A)$, alors $A = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}_n} A(p)$.*

V. Les sous-groupes de Sylow

Semaines 13 et 14

Dans tout ce chapitre, p désignera un nombre premier.

1 Les p-groupes

Nous commençons par rappeler des notations utilisées tout au long de ce chapitre.

Notation 1.1. Si G est un groupe fini, $|G|$ est *l'ordre* de G, i.e., la cardinalité de G.
Si H est un sous-groupe d'un groupe fini G, alors $(G : H)$ est *l'index* de H dans G, i.e., $|G|/|H|$.

Définition 1.2. Une groupe fini G est un *p-groupe* si $|G|$ est une puissance de p. Un *p-sous-groupe* d'un groupe G est un sous-groupe non-trivial H de G tel que $|H|$ est une puissance de p. Un p-sous-groupe H d'un groupe fini G est dit *de Sylow* si $|H|$ est la puissance maximale de p qui divise $|G|$, i.e., il existe $n > 0$ tel que $|H| = p^n$, et p^{n+1} ne divise pas $|G|$.

Notation 1.3. Pour tout groupe G, poser

$$\mathscr{S}_p(G) = \big\{H \in \mathscr{S}(G) \mid \exists\, k > 0 \text{ tq } |H| = p^k\big\},$$

l'ensemble de tous les p-sous-groupes de G.
Si p divise $|G|$, notons l'ensemble des p-sous-groupes de Sylow par

$$Syl_p(G) = \big\{H \in \mathscr{S}_p(G) \mid |H| = p^n\big\}$$

où $n = \max\big\{k \mid p^k \text{ divise } |G|\big\}$.

2 Existence de p-sous-groupes de Sylow

Le but de cette section est de démontrer le théorème d'existence suivant.

Théorème 2.1. *Si G est un groupe fini tel que p divise $|G|$, alors $Syl_p(G) \neq \emptyset$.*

La preuve de ce théorème est basée sur les deux lemmes ci-dessous. Mais d'abord encore un rappel de première année...

Notation et terminologie 2.2. Le *centre* d'un groupe G est le sous-groupe

$$Z(G) = \{a \in G \mid ab = ba\ \forall b \in G\}.$$

Remarque 2.3. Le centre d'un groupe est toujours abélien. Par ailleurs, pour tout groupe G,

$$Z(G) = \ker \gamma_G,$$

où $\gamma_G : G \to \mathrm{Aut}(G)$ est l'homomorphisme spécifié par

$$\gamma_G(a) : G \to G : b \mapsto aba^{-1}$$

pour tout $a \in G$.

Lemme 2.4. *Soit G un groupe fini tel que p divise $|G|$. Si p divise $(G : H)$ pour tout sous-groupe propre H de G, alors p divise aussi l'ordre du centre $Z(G)$ de G.*

Lemme 2.5. *Si G est un groupe abélien fini tel que p divise $|G|$, alors il existe $a \in G$ tel que $\mathfrak{o}(a) = p$.*

3 Propriétés des p-sous-groupes de Sylow

Soit G un groupe fini tel que p divise $|G|$. L'ensemble $Syl_p(G)$ vérifie quelques propriétés remarquables. Pour les formuler correctement, nous avons besoin de la notion suivante.

Définition 3.1. Soient G un groupe et $H < G$. Le *normalisateur* de H dans G, noté $N_G(H)$, est le sous-groupe de G spécifié par

$$N_G(H) = \{a \in G \mid aba^{-1} \in H \; \forall \, b \in H\}.$$

Remarque 3.2. Quelques soient G et $H < G$, le normalisateur $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G par rapport auquel H est un sous-groupe normal, i.e.,

$$H \lhd N_G(H) \quad \text{et} \quad \big(H \lhd K < G \Longrightarrow K \subseteq N_G(H)\big).$$

Puisque $H \lhd N_G(H)$, le quotient $N_G(H)/H$ admet toujours une structure de groupe.

Théorème 3.3. *Soit G un groupe fini tel que p divise $|G|$.*

1. *Quelques soient $H \in \mathscr{S}_p(G)$ et $P \in Syl_p(G)$, il existe $Q \in Syl_p(G)$ et $a \in G$ tels que*

$$Q = aPa^{-1} \quad \text{et} \quad H < Q.$$

2. *Quelques soient $P, Q \in Syl_p(G)$, il existe $a \in G$ tel que $Q = aPa^{-1}$.*
3. *La cardinalité de $Syl_p(G)$ est égale à $\big(G : N_G(P)\big)$, quelque soit $P \in Syl_p(G)$.*
4. *Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que la cardinalité de $Syl_p(G)$ est égale à $mp + 1$.*

Le lemme suivant nous aidera à démontrer ce théorème.

Lemme 3.4. *Soient G un groupe fini tel que p divise $|G|$, $P \in Syl_p(G)$, et $H \in \mathscr{S}_p(G)$. Si $H < N_G(P)$, alors $H < P$.*

L'outil principal de la preuve sera l'action de groupe suivante.

Notation et terminologie 3.5. Soit G un groupe, et soit $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{S}(G)$. Si $aKa^{-1} \in \mathscr{T}$ pour tout $a \in H$ et tout $K \in \mathscr{T}$, alors il y a une action de H sur $\mathscr{T}$,

$$\beta_{H,\mathscr{T}} : H \to \mathrm{Aut}(\mathscr{T}),$$

spécifiée par

$$\beta_{H,\mathscr{T}}(a) : \mathscr{T} \to \mathscr{T} : K \mapsto aKa^{-1}$$

pour tout $a \in H$.

Pour tout $K \in \mathscr{T}$, on notera l'orbite de K sous l'action $\beta_{H,\mathscr{T}}$ par

$$O_K^H = \{aKa^{-1} \mid a \in H\}$$

et son stabilisateur par

$$H_K = \{a \in H \mid aKa^{-1} = K\}.$$

Rappel 3.6. Si $\mathscr{T}$ est fini, l'équation de classe (voir III.1.4-5) dit que si $\mathscr{T} = \coprod_{i \in I} O_{K_i}^H$, alors

$$\#\mathscr{T} = \sum_{i \in I} (H : H_{K_i}) = \sum_{i \in I} \#O_{K_i}^H.$$