

# Mecanique

David Wiedemann

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Physique</b>	<b>4</b>
1.1	Exemple de loi physique : l'addition des vitesses . . . . .	4
1.2	Lois de conservation . . . . .	5
1.3	Invariance par changement de référentiel . . . . .	5
<b>2</b>	<b>La mécanique classique</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Objectifs du cours de mécanique générale</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Le modèle du "point matériel"</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Mouvement Rectiligne Uniforme</b>	<b>7</b>
<b>6</b>	<b>Mouvement rectiligne uniformément accéléré</b>	<b>7</b>
<b>7</b>	<b>Lois de Newton</b>	<b>7</b>
<b>8</b>	<b>Force de pesanteur et chute des corps</b>	<b>7</b>
<b>9</b>	<b>Quelques notions mathématiques</b>	<b>8</b>
9.1	Fonctions . . . . .	8
9.2	Équations Différentielles . . . . .	8
<b>10</b>	<b>Vecteurs</b>	<b>9</b>
<b>11</b>	<b>Trigonométrie</b>	<b>9</b>
<b>12</b>	<b>Oscillateurs Harmoniques</b>	<b>9</b>
12.1	Modélisation de la force d'un ressort . . . . .	10
12.2	Oscillateurs harmoniques à une dimension . . . . .	10
12.3	Oscillateur harmonique amorti . . . . .	13
12.4	Oscillateur forcé . . . . .	14
12.5	Phénomènes de résonance . . . . .	14

<b>13</b>	<b>Dynamique du point materiel</b>	<b>14</b>
13.1	Produit scalaire . . . . .	15
13.2	Projections et composantes d'un vecteur . . . . .	16
13.3	Repere direct . . . . .	17
13.4	Produit vectoriel . . . . .	17
13.5	Mouvement avec vitesse scalaire constante . . . . .	20
13.6	Systeme de coordonnees . . . . .	21
<b>14</b>	<b>Description des rotations spatiales</b>	<b>21</b>
14.1	Interprétation du vecteur $\omega$ . . . . .	23
14.1.1	Cas particulier . . . . .	23
14.2	Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques . . . . .	23
14.3	Pendule Mathématique . . . . .	23
14.4	Coordonnées sphériques . . . . .	24
14.5	Bille en équilibre dans un anneau en rotation . . . . .	25
<b>15</b>	<b>Travail, énergie, forces conservatives</b>	<b>25</b>
15.1	Forces de Frottement . . . . .	25
15.2	Forces de frottement sec . . . . .	26
15.3	Coefficients de frottement . . . . .	26
15.4	Impulsion et quantité de mouvement . . . . .	26
15.5	Travail et énergie cinétique . . . . .	27
15.6	Travail et Puissance d'une force . . . . .	27
15.7	Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	28
15.8	Voiture en accélération . . . . .	28
15.9	Conservation de l'énergie mécanique . . . . .	28
15.10	Travail de la force de pesanteur . . . . .	29
15.11	Travail de la force de rappel d'un ressort . . . . .	29
15.12	Travail d'une force centrale en $\frac{1}{r^2}$ . . . . .	29
15.13	Forces conservatives . . . . .	29
15.14	Energie potentielle . . . . .	30
15.15	Théorème de l'énergie . . . . .	30
15.16	Lugeur . . . . .	30
15.17	L'énergie mécanique : intégrale première . . . . .	31
<b>16</b>	<b>Gravitation, Moment Cinétique</b>	<b>31</b>
16.1	Lois de Kepler . . . . .	31
16.2	Le développement de la dynamique . . . . .	32
16.3	Mouvement central et loi des aires . . . . .	32
16.4	Mouvement central . . . . .	32
16.5	Déduction de la force de Gravitation en $\frac{1}{r^2}$ . . . . .	33
16.6	Loi de gravitation universelle . . . . .	33

16.7	Champ de gravitation . . . . .	33
16.8	Energie potentielle gravifique . . . . .	34
16.9	Mouvement dans un potentiel central . . . . .	34
16.10	Intégrales premières d'un mouvement central . . . . .	35
16.11	2eme loi et theoreme du moment cinétique . . . . .	35
16.12	Système de points matériels . . . . .	35
16.13	Système à l'équilibre . . . . .	36
16.14	Centre de masse . . . . .	37

## List of Theorems

1	Definition (Point materiel) . . . . .	6
2	Definition (Referentiel) . . . . .	15
3	Definition (Repere) . . . . .	15
4	Definition (Produit scalaire) . . . . .	15
5	Definition (Produit vectoriel) . . . . .	17
6	Definition (Produit Mixte) . . . . .	18
7	Definition (Double produit vectoriel) . . . . .	18
8	Definition (Systeme de coordonnees) . . . . .	21
4	Theorème . . . . .	21
5	Theorème (Formule de Poisson) . . . . .	22
6	Theorème . . . . .	24
9	Definition . . . . .	32
7	Theorème (Gravitation Universelle) . . . . .	33

# 1 Physique

- Science dont le but est d'étudier et de comprendre les composants de la matiere et leurs interactions mutuelles.
- Sur la base des proprietes observees de la matiere et des interactions, le physicien tente d'expliquer les phenomenes naturels observables.
- Les "explications" sont donnees sous forme de lois aussi fondamentales que possible : elles resument notre comprehension des phenomenes physiques.
- Les maths sont le langage qu'on utilise pour decrire ces phenomenes.

## Exemple

Une particule se deplace sur un axe droit.

Au temps  $t_1$  position  $x_1 = x(t_1)$ . Au temps  $t_2$  position  $x_2 = x(t_2)$ .  $\Delta x = x_2 - x_1$  et  $\Delta t = t_2 - t_1$

Donc la vitesse moyenne

$$v_{moyenne} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Mais on peut faire diminuer  $\Delta t$ , pour connaitre la vitesse moyenne sur un temps infinitesimal :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$$

Donc la vitesse instantanee est la derivee de la fonction  $x(t)$  par rapport a  $t$ .

On peut faire la meme chose avec l'acceleration

Au temps  $t_1$ , vitesse  $v_1 = v(t_1)$ .

Au temps  $t_2$ , vitesse  $v_2 = v(t_2)$ .

Donc l'acceleration moyenne est

$$a_{moyenne} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Et donc par le meme raisonnement, l'acceleration instantanee est

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} := \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

## 1.1 Exemple de loi physique : l'addition des vitesse

Si je marche a la vitesse  $v_{marche}$  sur un tapis , alors la vitesse par rapport au sol est

$$V = v_{marche} + v_{tapis}$$

C'est la loi d'addition des vitesses de galilee.  
Ici, c'est une addition vectorielle qu'il faut faire.

Cette loi est

- independante des vitesses
- independante des objets en presence
- independante du temps ( hier, aujourd'hui, demain)
- etc...

## 1.2 Lois de conservation

Ce sont les lois les plus fondamentales.

- Conservation de l'energie
- Conservation de la quantite de mouvement
- Conservation du moment cinetique

Ces lois sont valables dans toutes les situations ( classiques, relativistes ou quantiques) .

Ne peuvent pas etre formulees mathematiquement de facon unique.

Resultent des principes "d'invariance" (ou de symmetrie) tres generaux.

## 1.3 Invariance par changement de referentiel

- Changement de referentiel ( ou d'observateur) : Referentiel  $O'x'y'z'$  en mouvement par rapport au referentiel  $Oxyz$
- Les lois de la physique sont-elles invariantes par rapport a n'importe quel changement de referentiel ?  
Autrement dit, si les observateurs  $O$  et  $O'$  font la meme experience, obtiendront-ils le meme resultat ?
- Principe de Galilee :  
Les lois de la physique sont les memes (i.e. invariantes) pour deux observateurs en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport a l'autre.

## 2 La mécanique classique

1. Mécanique :  
science du mouvement ( ou du repos) de systemes materiels caracterises par des variables d'espace et de temps.
2. Cinématique :  
Description du mouvement.
3. Dynamique :  
Etude de la relation entre le mouvement et les causes de sa variation (forces, lois de Newton, th. du moment cinétique).
4. Statique :  
Etude et description de l'équilibre.

## 3 Objectifs du cours de mécanique generale

- Apprendre a mettre sous forme mathematique un probleme, une situation physique :
  - Définir le probleme, le modeliser
  - Choisir une description mathematique
  - Poser les equations regissant la physique du probleme
  - Resoudre et/ou discuter la solution
- Developper un “savoir-faire” pratique, mais egalement un esprit scientifique :
  - Reperer le sens physique derriere les equations
  - Savoir formaliser mathematiquement la donnee d'un probleme physique.

## 4 Le modele du “point materiel”

### Definition 1 (Point materiel)

*un systeme est assimile a un point geometrique auquel on attribue toute la masse de ce systeme, et dont l'etat est decrit en tout temps par une ( seule) position et une ( seule) vitesse.*

- Notion introduite par Newton.

On approxime un systeme a quelquechose de plus simple, le point peut etre “gros” ( exemple :la terre, le soleil).

Pas applicable dans toutes les situations ; le modele a des limites..

## 5 Mouvement Rectiligne Uniforme

Mouvement d’un point materiel se deplacant en ligne droite a vitesse constante. On definit un axe  $x$  associe a la trajectoire rectiligne, avec une origine  $O$ .

$$v(t) := \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = v_0 = \text{constante}$$

La solution s’obtient en integrant le dessus :  $x(t) = v_0 t + x_0$ , ou  $x_0 = \text{constante}$ . On appelle le resultat de cette integration l’equation horaire.

## 6 Mouvement rectiligne uniformement accelere

Ici

$$a(t) := \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) = a_0 = \text{constante}$$

C’est une equadiff d’ordre 2 faisant intervenir la derivee seconde de  $x(t)$ .

Solution

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0 \\ v(t) &= \frac{dx}{dt} = a_0 t + v_0 \end{aligned}$$

ou  $x_0$  et  $v_0$  sont des constantes.

## 7 Lois de newton

— mouvement rectiligne uniforme  $\Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$

—  $\vec{F} = m \vec{a}$

— Action reaction  $\vec{F} = -\vec{F}$

## 8 Force de pesanteur et chute des corps

• L’attraction terrestre donne lieu a une force verticale ( le poids) proportionnelle a la masse  $m$  :

$$F = mg$$

$$g \approx 9.8 \frac{m}{s^2}$$

- Application de la 2eme loi de Newton :

Si le poids est la seule force appliquee a un point materiel

$$F = ma \Rightarrow a = g = \text{constante}$$

Dans le vide, les corps ont un mouvement uniformement accelere

## Lecture 2: Notions Mathematiques

Wed 16 Sep

# 9 Quelques notions mathematiques

## 9.1 Fonctions

$$F(x) \underbrace{\longrightarrow}_{\text{derivee}} F'(x) = \frac{dF}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Quand on parle d'un point dans l'espace, on aura tjrs 3 coordonnees

$$\begin{aligned} x(t) &\longrightarrow x'(t) := \dot{x}(t) := \dot{x} \\ x''(t) &:= \ddot{x}(t) := \ddot{x} \end{aligned}$$

---


$$\frac{d}{dt}(x^2(t)) = 2x(t)\dot{x}(t) = 2x\dot{x}$$

Si je fais

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

## 9.2 Equations Differentielles

$$F''(x) = C$$

Pour resoudre

$$F'(x) = Cx + D$$

$$F(x) = \frac{1}{2}Cx^2 + Dx + E$$

$$mg = F = ma = m\ddot{x}$$

---


$$\ddot{x} = -c^2 x$$

On devine la solution :

$$x(t) = A \sin(Ct) + B \cos(Ct)$$



$$\dot{x} = AC \cos(Ct) - BC \sin(Ct)$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= -AC^2 \sin(Ct) - BC^2 \cos(Ct) \\ &= -C^2 [A \sin(Ct) + B \cos(Ct)] = -C^2 x(t)\end{aligned}$$

## 10 Vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3$$

Le point  $(x_1, x_2, x_3)$  on l'atteint en faisant une combinaison lineaire de  $(e_1, e_2, e_3)$ .

## 11 Trigonometrie

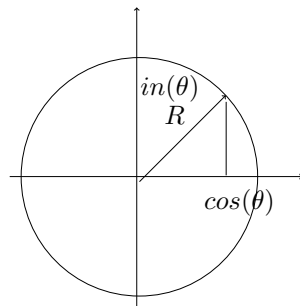


FIGURE 1 – cercletrigo

### Lecture 3: Oscillateurs Harmoniques

Wed 23 Sep

## 12 Oscillateurs Harmoniques

Considerer des systemes ayant des mouvements oscillatoires.  
Exemples :

- masse pendue a un ressort.
- pendule simple, pendule de torsion.
- vibrations.
- Resonateurs quartz ( montres)
- oscillations du champ
- etc...

### Remarque

*Un mouvement oscillatoire permet de mesurer un intervalle de temps.*

## 12.1 Modelisation de la force d'un ressort

La force exercee par un ressort est proportionnelle a son deplacement par rapport a sa position de repos.

Force de rappel :

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{x}$$

$k$  = constante elastique du ressort [N/m]

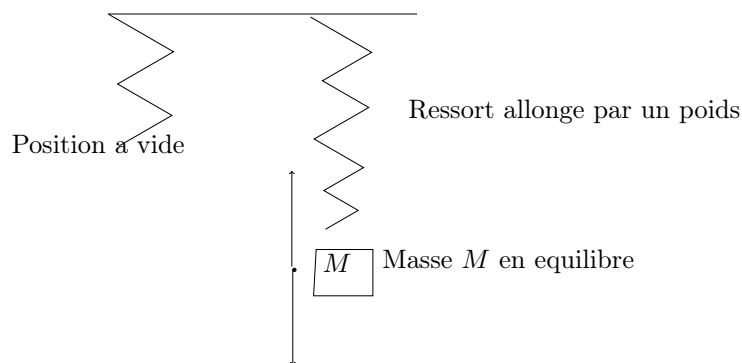


FIGURE 2 – ressort

### Remarque

*Ce modele n'est que valable pour des petits allongements*

## 12.2 Oscillateurs harmoniques a une dimension

Loi de Hooke  $F_x = -kx$

2eme loi de Newton  $F = ma$

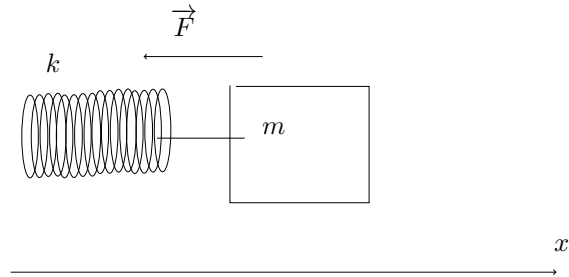


FIGURE 3 – Ressort plan horizontal

On arrive a

$$m\ddot{x} = -kx$$

But : connaissant  $k, m$  et les conditions initiales, determiner  $x(t)$  pour tout temps  $t$ .

### Exemple

Posons  $m = 1\text{kg}, k = 1\frac{N}{m} = 1\frac{kg}{s^2}$

Conditions initiales :  $x(0) = 1m, v(0) = 0\frac{m}{s}$

$$\Rightarrow a(0) = \frac{F(0)}{m} = k\frac{x(0)}{m} = -1\frac{m}{s^2}$$

Accroissement de  $v$  entre  $t$  et  $t + \Delta t$  :  $\Delta v = a(t)\Delta t$  car  $a(t) = dv(t)/dt$

$$\Rightarrow v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t$$

Accroissement de  $x$  entre  $t$  et  $t + \Delta t$  :

$$\Rightarrow x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t$$

Verification analytique :

On pose  $x(t) = \cos(\omega_0 t) \Rightarrow x(0) = 1$

$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 \sin(\omega_0 t) \Rightarrow v(0) = 0$ .

$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x(t)$

Comme  $a(t) = -\frac{k}{m}x(t)$ , on doit avoir :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

C'est la pulsation propre de l'oscillateur libre.

***Solution generale et dependance par rapport aux conditions initiales***

*Periode :*

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

*Frequence*

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Solution generale de  $\ddot{x} = \omega_0^2 x = 0$  :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

ou

$$x(t) = C \sin(\omega_0 t + D)$$

Deux constantes d'integration a determiner en utilisant les conditions initiales

$$A = x_0$$

et

$$B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

ou bien  $x_0^2 = x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega_0})^2$  et  $\tan(D) = \omega_0 \frac{x_0}{v_0}$

Resolution de l'equation differentielle :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$x(0) = A \cdot 1 + B \cdot 0 = A = x_0$$

$$\dot{x}(0) = -A\omega_0 \sin(0) + B\omega_0 \cos(0)$$

$$= B\omega_0 = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

---

$$x(t) = C \sin(\omega_0 t + D), x_0, v_0$$

$$x(0) = C \sin(D) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = C\omega_0 \cos(D) = v_0$$

$$\frac{1}{\omega_0} \tan(D) = \frac{x_0}{v_0}$$

$$\Rightarrow \tan(D) = \omega_0 \frac{x_0}{v_0}$$

$$C^2(\sin^2(D) + \cos^2(D)) = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

### 12.3 Oscillateur harmonique amorti

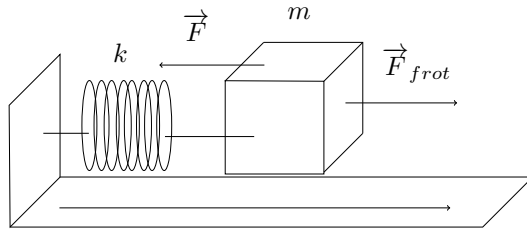


FIGURE 4 – oscillateur amorti

Par  $b$  on definira la force de frottement.

Deuxieme loi de Newton :  $F + F_{frot} = ma$ , alors

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

#### Resolution

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0 \text{ avec } \gamma = \frac{b}{2m} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ammortissement sous-critique	$\gamma < \omega_0$	$x(t) = e^{-\gamma t}[A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)]$ avec $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
Ammortissement critique	$\gamma = \omega_0$	$x(t) = e^{-\gamma t}[A + Bt]$
Ammortissement sur-critique	$\gamma > \omega_0$	$x(t) = e^{-\gamma t}[A \exp(\omega_2 t) + B \exp(-\omega_2 t)]$ avec $\omega_2 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

FIGURE 5 – types d'ammortissement

## 12.4 Oscillateur force

En pratique tout oscillateur s'amortit, mais on peut entretenir les oscillations a l'aide d'une force exterieure.

Exemples

- Balancoire pousse par un enfant.
- Voiture ( avec suspension) passant sur des bosses
- Atome ( electron lie) recevant un rayonnement electromagnetique

On ajoute une force periodique  $\vec{F}_{ext}$  Par exemple  $F_{ext} = f \sin(\omega t)$  avec  $f = 1N$

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_{ext}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = a_0 \sin(\omega t) \text{ avec } \gamma = \frac{b}{2m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Solution :

$$x(t) = x_{transitoire}(t) + \rho \sin(\omega t - \Phi)$$

avec

$$\rho = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

et

$$\tan(\Phi) = 2\gamma \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

## 12.5 Phenomes de resonance

Resonances desirables

- Circuits electriques dans un tuner
- Tuyaux d'orgue
- Balancoire de jardin
- Amortisseurs d'une voiture
- Suspension du tambour d'une essoreuse a linge
- Structure de genie civil

## Lecture 4: Dynamique du point materiel

Wed 30 Sep

## 13 Dynamique du point materiel

Notions abordees :

- reperes, rappels d'analyse vectorielle
- referentiel, position, vitesse, acceleration normale et tangentielle
- rotations, repere en rotation, mouvement circulaire uniforme
- vitesse et acceleration en coordonnees cylindriques et spheriques
- contraintes et forces de liaison

**Definition 2 (Referentiel)**

*Un ensemble de  $N$  points ( $N \geq 4$ ), non coplanaires, immobiles les uns par rapport aux autres.*

- La description du mouvement d'un systeme se fait toujours par rapport a un certain referentiel.
- L'observateur et les appareils de mesure sont immobiles par rapport au referentiel ( ils "font partie" du referentiel)
- Le choix du referentie du referentiel est arbitraire

**Definition 3 (Repere)**

*Origine  $O$  et trois axes orthogonaux definis par des vecteurs de longueur unite*

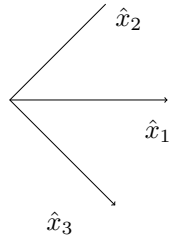


FIGURE 6 – reperes

Vecteurs unitaires

$$|\hat{x}_1| = |\hat{x}_2| = |\hat{x}_3| = 1$$

Vecteurs orthonormaux

$$\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 = \hat{x}_2 \cdot \hat{x}_3 = \hat{x}_3 \cdot \hat{x}_1 = 0$$

Base orthonormee

$$\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

**13.1 Produit scalaire****Definition 4 (Produit scalaire)**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

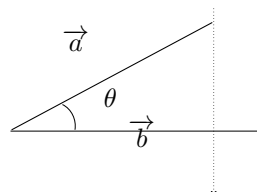


FIGURE 7 – produit scalaire

*En composantes*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \hat{x}_1 + a_2 \hat{x}_2 + a_3 \hat{x}_3) \cdot \dots = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

*Propriétés*

- *Commutativité*
- *Distributivité*
- ...

### 13.2 Projections et composantes d'un vecteur

Projection de  $\vec{OP}$  sur l'axe  $u$  :

$$\vec{OP} \cdot \hat{u} = |\vec{OP}| |\hat{u}| \cos \theta = OP \cos \theta = OP'$$

$$\vec{OP} = \vec{OP'} \hat{u} + \vec{OP''} \vec{v} = \vec{OP} \cdot \hat{u} \hat{u} + \vec{OP} \hat{v} \hat{v}$$

Coordonnées cartésiennes du point  $P$  ou composantes du vecteur  $\vec{OP}$

$$\begin{cases} x = \vec{OP} \cdot \hat{x} \\ y = \vec{OP} \cdot \hat{y} \\ z = \vec{OP} \cdot \hat{z} \end{cases}$$

Donc

$$\vec{OP} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$



### 13.3 Repere direct

Par convention, on n'utilise que des repères dont la chiralité est définie par la "règle du tire bouchon" ou la "règle de la main droite".

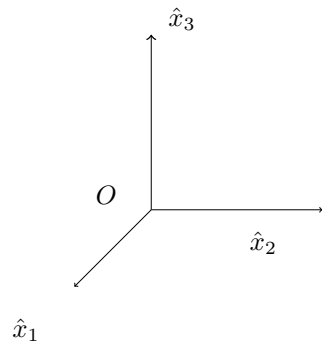


FIGURE 8 – repere droit

### 13.4 Produit vectoriel

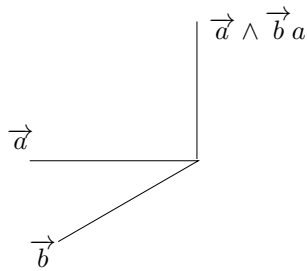


FIGURE 9 – produit vectoriel

**Definition 5 (Produit vectoriel)**

*En composantes*

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Propriétés

- $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$
- $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$
- $\vec{a} \wedge (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})$
- $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$  si  $\vec{a}, \vec{b}$  parallèles

**Definition 6 (Produit Mixte)**

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = \det(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$

Propriétés :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \iff \vec{a}, \vec{b} \text{ et } \vec{c} \text{ coplanaires ( dans le meme plan)}$$

**Definition 7 (Double produit vectoriel)**

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

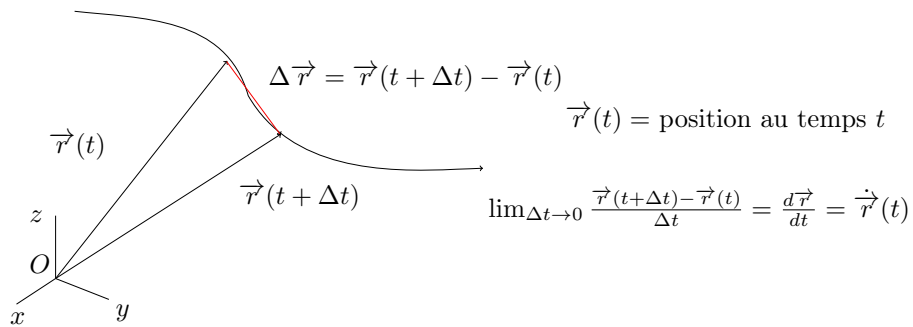


FIGURE 10 – trajectoire

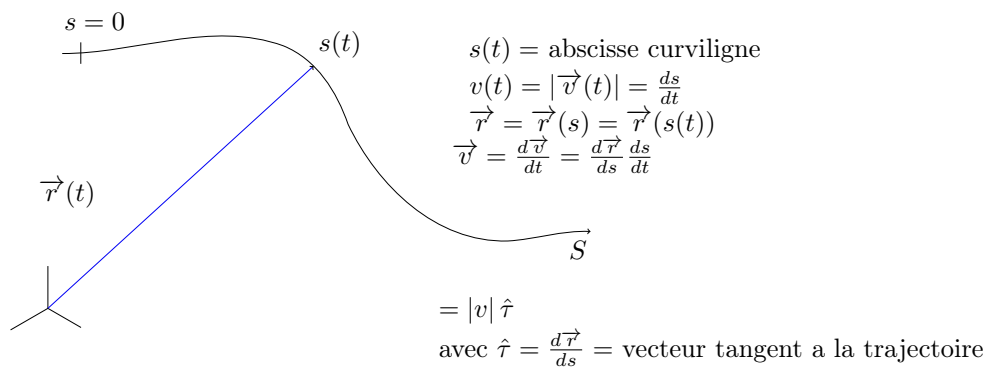


FIGURE 11 – curviligne

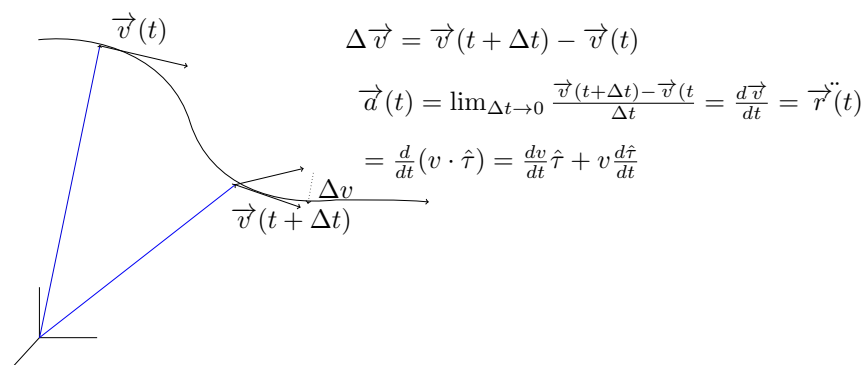


FIGURE 12 – curviligne2

Donc

$$\hat{\tau} \cdot \frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\hat{\tau}^2) = 0 \text{ car } \tau^2 = 1 \forall t$$

On peut approximer le mouvement localement par un cercle

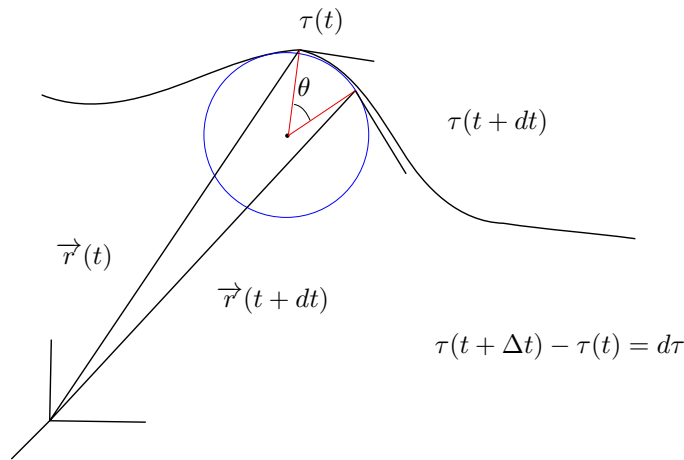


FIGURE 13 – mouvement approxime par cercle

$$\vec{a}_n(t) = v(t) \frac{d\tau}{dt} = v(t) \frac{d\tau}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v(t)^2 \cdot \frac{d\tau}{ds}$$

On peut calculer la norme de  $a_n$

$$\begin{aligned} |\vec{a}_n(t)| &= a_n(t) = v^2 \left| \frac{d\tau}{ds} \right| \\ &= v^2 \frac{d\theta}{R(t)d\theta} \\ &= \frac{v^2(t)}{R(t)} \end{aligned}$$

### 13.5 Mouvement avec vitesse scalaire constante

Considerons un point materiel avec une vitesse scalaire  $v = \frac{ds}{dt}$  constante non nulle

un vecteur vitesse qui change de direction au cours du temps

Acceleration

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v}^2) = 0$$

pas de composante tangentielle :  $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$  Donc  $a$  est toujours perpendiculaire a  $v$ .

Force  $\vec{F} = m \vec{a}$

Donc

$$F = ma = m \frac{v^2}{R}$$

force centripete

## 13.6 Systeme de coordonnees

### Definition 8 (Systeme de coordonnees)

*Parametrisation , a un certain temps  $t$ , de la position des points du referentiel au mouen de trois nombres reels.*

Pour un referentiel donne il e xiste une infinite de systemes de coordonnes

Exemples

- Coordonnes cartesiennes  $(x, y, z)$
- Coordonnees cylindriques  $(\rho, \phi, z)$
- Coordonnes spheriques  $(r, \Theta, \phi)$

Chaque vecteur du repere est parallele a la variation de la position due a une modification de la variable correspondante

## Lecture 5: mercredi

Wed 07 Oct

## 14 Description des rotations spatiales

Une rotation spatiale est caractérisée par un axe de rotation ( dans l'espace), un sens de rotation et un angle de rotation.

Deux points de vue

- Rotation d un systeme physique dans un repère fixe
- Systeme physique décrit dans un repère en rotation

### Theorème 4

*Soit deux repères orthonormés droits de même origine, il existe toujours une rotation qui amène le premier sur le deuxième.*

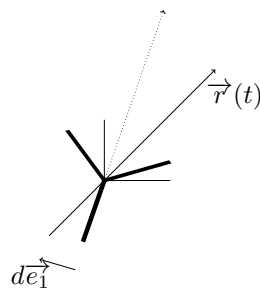


FIGURE 14 – repere

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_1 &= \frac{d\hat{e}_1(t)}{dt} = E_{11}\hat{e}_1 + E_{21}\hat{e}_2 + E_{31}\hat{e}_3 \\ \dot{\hat{e}}_2 &= \frac{d\hat{e}_2(t)}{dt} = E_{12}\hat{e}_1 + E_{22}\hat{e}_2 + E_{32}\hat{e}_3 \\ \dot{\hat{e}}_3 &= \frac{d\hat{e}_3(t)}{dt} = E_{13}\hat{e}_1 + E_{23}\hat{e}_2 + E_{33}\hat{e}_3\end{aligned}$$

est équivalent à dire

$$\dot{\hat{e}}_i = \frac{d\hat{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^3 E_{ji}\hat{e}_j$$

C'est une écriture presque matricielle. On peut écrire

$$\dot{\hat{e}}_i = E\hat{e}_i \text{ avec}$$

$$\begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix}$$

On a un repère orthonormé  $\Rightarrow \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\delta_{ij} &= 0 = \frac{d}{dt}(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) = \dot{\hat{e}}_i \cdot \hat{e}_j + \hat{e}_i \cdot \dot{\hat{e}}_j = (E\hat{e}_i) \cdot \hat{e}_j + \hat{e}_i \cdot (E\hat{e}_j) \\ &= (E_{1i}\hat{e}_1 + E_{2i}\hat{e}_2 + E_{3i}\hat{e}_3) \cdot \hat{e}_j + \hat{e}_i \cdot (E_{1j}\hat{e}_1 + E_{2j}\hat{e}_2 + E_{3j}\hat{e}_3) = E_{ji} + E_{ij}\end{aligned}$$

On a donc 6 contraintes ( ij=11,12,13,22,23,33)

Donc

$$\begin{pmatrix} 0 & E_{12} & E_{13} \\ -E_{12} & 0 & E_{23} \\ -E_{13} & -E_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour un vecteur quelconque  $\vec{r}(t)$ .

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = E\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

On a donc

**Theorème 5 (Formule de Poisson)**

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i$$

## 14.1 Interprétation du vecteur $\omega$

Si  $\vec{r}$  collinéaire à  $\vec{\omega}$  alors  $\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$ , donc  $\vec{r}$  ne bouge pas.  
Donc  $\vec{\omega}$  définit l'axe de rotation au temps  $t$ . Sens de  $\vec{\omega}$  = sens de rotation

$$|d\vec{r}| = |\vec{\omega} \wedge \vec{r}| dt = |\vec{\omega}| dt |\vec{r}| \sin \theta$$

Mais  $|d\vec{r}| = |\vec{v}| \sin \theta$

La norme de  $\vec{\omega}$  est la vitesse angulaire de rotation.

### 14.1.1 Cas particulier

$\vec{\omega} = \text{constante}$

Alors

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

et

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

## 14.2 Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

Vitesse angulaire de rotation du repère

$$\vec{\omega} = \frac{d\phi}{dt} \hat{z} = \dot{\phi} \hat{z}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \overrightarrow{OP} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z \\ \vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\hat{e}}_\rho + \dot{z} \hat{e}_z + z \dot{\hat{e}}_z \end{aligned}$$

Par Poisson

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_\rho &= \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\rho = \dot{\phi} \hat{e}_z \wedge \hat{e}_\rho = \dot{\phi} \hat{e}_\phi \\ \dot{\hat{e}}_\phi &= \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\phi = \dot{\phi} \hat{e}_z \wedge \hat{e}_\phi = -\dot{\phi} \hat{e}_\rho \end{aligned}$$

Donc

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\hat{e}}_\rho + \dot{z} \hat{e}_z + z \dot{\hat{e}}_z = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z$$

Donc

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z$$

## 14.3 Pendule Mathématique

Contraintes

$$\begin{cases} \rho = L = \text{constante} \Rightarrow \dot{\rho} = 0, \ddot{\rho} = 0 \\ z = 0, \dot{z} = 0, \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Donc l'accélération est

$$\vec{a} = -L\dot{\phi}^2 \hat{e}_\rho + L\ddot{\phi} \hat{e}_\phi$$

On a aussi

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{T}$$

Donc

$$\begin{cases} -mL\dot{\phi}^2 = F \cos \phi - T \text{ sur } \hat{e}_\rho \\ mL\ddot{\phi} = -F \sin \phi \text{ sur } \hat{e}_\phi \end{cases}$$

Donc

$$\ddot{\phi} = -\frac{F}{mL} \sin \phi = -\frac{g}{L} \sin \phi$$

Si les oscillations sont faibles, on a

$$\sin \phi \simeq \phi \Rightarrow \ddot{\phi} \simeq -\frac{g}{L} \phi$$

### Theorème 6

*La force de liaison = force exercée sur le point matériel pour qu'il obéisse à une contrainte géométrique*

- *Toujours perp. à la courbe ou à la surface*
- *jamais de composante tangente à la courbe ou la surface (cad dans une direction où le point matériel peut bouger)*
- *La force de liaison devient nulle  $\iff$  la contrainte disparaît.*

## Lecture 6: mercredi

Wed 14 Oct

### 14.4 Coordonnées sphériques

On a

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{z} + \dot{\theta} \hat{e}_\phi$$

Dérivées des vecteurs de base

$$\begin{aligned} \dot{e}_r &= \vec{\omega} \wedge e_r = \dot{\theta} e_\theta + \dot{\phi} \sin \theta e_\phi \\ \dot{e}_\theta &= \vec{\omega} \wedge e_\theta = -\dot{\theta} e_r + \dot{\phi} \cos \theta e_\phi \\ \dot{e}_\phi &= \vec{\omega} \wedge e_\phi = -\dot{\phi} e_r - \dot{\theta} \cos \theta e_\phi \end{aligned}$$

Position vitesse et accélération dans ce repère

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r e_r$$



## 14.5 Bille en équilibre dans un anneau en rotation

Referentiel = le laboratoire

Repere lié au référentiel :  $Oxyz$

Vitesse angulaire de l'anneau  $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$

Coordonnées sphériques :  $r, \theta, \phi$

Contrainte : la bille reste sur l'anneau

$$\begin{cases} r = R, \dot{r} = 0, \ddot{r} = 0 \\ \dot{\phi} = \omega, \ddot{\phi} = 0 \end{cases}$$

Si bille en équilibre :  $\dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0$

Forces s'exerçant sur la bille

$$\begin{cases} \text{poids de la bille : } m\vec{g} = -mg\hat{z} \\ \text{force de liaison } \vec{N} \cdot \vec{N}e_\theta = 0 \end{cases}$$

On obtient que

$$\begin{aligned} m\vec{g} &= -mg \cos \theta e_r + mg \sin \theta e_\theta \\ \vec{N} &= N_r e_r + N_\phi e_\phi \end{aligned}$$

2eme loi de newton :  $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$

$$\begin{cases} \text{sur } e_r : N_r - mg \cos \theta = -mR\omega^2 \sin^2 \theta \\ \text{sur } e_\theta : mg \sin \theta = -mR\omega^2 \sin \theta \cos \theta \\ \text{sur } e_\phi : N_\phi = 0 \end{cases}$$

Pour la deuxième equation, on a

soit  $\sin \theta = 0 (\Rightarrow \theta = 0 \text{ ou } \pi)$

ou  $\cos \theta = \frac{-g}{R\omega^2}$  (seulement si  $|\omega| \geq \sqrt{\frac{g}{R}}$ )

## 15 Travail, énergie, forces conservatives

### 15.1 Forces de Frottement

- Forces exercées sur un corps par le fluide dans lequel il se déplace
- Ces forces s'opposent au mouvement du corps

$$\vec{F}_{frot} = -f(v)\hat{v}, f(v) > 0$$

- Elles résultent d'un grand nombre de phénomènes microscopiques, complexes à décrire
- On décrit donc les forces de frottement par des lois empiriques
  - Tirées de l'expérience
  - Non-fondamentales
  - Approximatives

## 15.2 Forces de frottement sec

- Force  $F$  exercée par une surface sur un solide :

- composant normale à la surface  $N$  = force de liaison
- composante tangente à la surface  $F_{frot}$  = force de frottement sec

Lois de Coulomb :

$$\begin{aligned} \text{si } v = 0 : F_{frot} &\leq F_{frot}^{max} = \mu_s N \\ \text{si } v \neq 0 : \vec{F}_{frot} &= -\mu_c N \frac{\vec{v}}{v} \end{aligned}$$

## 15.3 Coefficients de frottement

- Dépendent de
  - Natures des surfaces
  - Etat des surfaces
  - Température
- En général

$$\mu_c < \mu_s$$

- En première approximation ne dépendent pas de
  - la vitesse ( si  $v \neq 0$  )
  - la dimension des surfaces de contact ( surfaces planes )

Ne dépendent pas de la dimension de la surface de contact

- Surface pas parfaitement plane
- Surface de contact véritable proportionnelle à la charge

## 15.4 Impulsion et quantité de mouvement

- Point matériel de masse  $m$  soumis à une force  $F$  entre les points 1 et 2.
- Definition

$$d\vec{I} = \vec{F} dt \Rightarrow \vec{I}_{12} = \int_1^2 d\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

- Si  $F$  est la résultante des forces s'appliquant sur le point matériel

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \vec{a} \Rightarrow \vec{I}_{12} = \int_1^2 m \vec{a} dt = \int_1^2 m d\vec{v} \\ &= \int_1^2 d(m\vec{v}) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \end{aligned}$$

ou on a défini

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

La variation de la quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la somme des forces. Donc, si  $m$  est constante, on a

$$\vec{F} = m \vec{a} \iff \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

## 15.5 Travail et énergie cinétique

Définition :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow W_{12} = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Si  $F$  est la résultante des forces s'appliquant sur le point matériel ( et si  $m$  constante)

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 m \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt \\ &= \int_1^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) dt = K_2 - K_1 \end{aligned}$$

où on a défini  $K = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$

La variation de l'énergie cinétique est égale au travail de la somme des forces.

## 15.6 Travail et Puissance d'une force

$$W_{12} = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F \cos \alpha ds = \int_1^2 F_t ds$$

Seule la composante de  $\vec{F}$  tangente à la trajectoire travaille, la composante normale à la trajectoire ne travaille pas.

Puissance instantanée d'une force

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

## Lecture 7: Energie cinétique

Wed 21 Oct

$$d\vec{I} = \vec{F} dt \Rightarrow \vec{I}_{12} = \int_1^2 \delta W$$

Puissance instantanée d'une force

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

## 15.7 Théorème de l'énergie cinétique

On a montré que le travail d'une force est égale à la différence des énergies cinétiques.

Pour un point matériel :

$$K_2 - K_1 = W_{12} \iff \frac{dK}{dt} = P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Pour un système de points matériels, on aura

$$K_2^{tot} - K_1^{tot} = W_{12}^{tot,ext} + W_{12}^{tot,int} \iff \frac{dK^{tot}}{dt} = P^{tot,ext} + P^{tot,int}$$

## 15.8 Voiture en accélération

Forces extérieures s'exerçant sur la voiture

- poids  $mg$
- réaction du sol  $N$
- frottements de la route sur les roues
- frottements de l'air sur la carrosserie

On peut appliquer la deuxième loi de Newton

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{route} + \vec{F}_{air} \Rightarrow \begin{cases} N = mg \\ ma = F_{route} - F_{air} \end{cases}$$

Clairement,  $F_{route}$  ne travaille pas (roulement sans glissement)

aucune force extérieure ne travaille sauf  $F_{air}$

Le travail de  $F_{air}$  est négatif et cause une diminution d'énergie cinétique mais l'énergie augmente  $\Rightarrow$  il y a des forces internes dont le travail est positif

$$\frac{dK^{voiture}}{dt} = \underbrace{P^{tot,ext}}_{<0} + P^{tot,int} > 0$$

## 15.9 Conservation de l'énergie mécanique

- Si  $W_{12} \neq 0$  alors l'énergie cinétique  $K$  n'est pas conservée
- Cependant, dans certains cas particuliers,  $\vec{F}$  ne dépend que de la position et "dérive du potentiel", c'est-à-dire qu'il existe une énergie potentielle  $V(\vec{r})$  tel que

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 \iff \vec{F}(\vec{r}) = - \begin{pmatrix} \partial V(\vec{r}) / \partial x \\ \partial V(\vec{r}) / \partial y \\ \partial V(\vec{r}) / \partial z \end{pmatrix}$$

Si on peut écrire notre force ainsi, on la nomme conservative

Dans ce cas, on a

$$W_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) = K_2 - K_1$$

On remarque alors que  $K_1 + V(\vec{r}_1)$  est constante, on note donc

$$E = K + V(\vec{r})$$

### 15.10 Travail de la force de pesanteur

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -mg\hat{e}_z \cdot d\vec{r} \\ &= - \int_1^2 mgdz = -[mgz]_1^2 \\ &= mgz_1 - mgz_2 \end{aligned}$$

Le travail ne dépend que des coordonnées  $z$  des points 1 et 2 : il ne dépend pas de la trajectoire.

On peut s'imaginer une trajectoire de 1 à 2 et de 2 à 1

$$W_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 1} = \int_1^2 m\vec{g} \cdot d\vec{r} + \int_2^1 m\vec{g} \cdot d\vec{r} = W_{12} + W_{21} = 0$$

On note

$$\oint m\vec{g} \cdot d\vec{r} = 0$$

### 15.11 Travail de la force de rappel d'un ressort

On a

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{x} = -kx\hat{e}_x$$

Donc on pose

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -kx dx \\ &= -[\frac{1}{2}kx^2]_1^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \end{aligned}$$

### 15.12 Travail d'une force centrale en $\frac{1}{r^2}$

On pose

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 -\frac{GmM}{r^2} \hat{e}_r \cdot d\vec{l} = -\frac{GmM}{r_1} + \frac{GmM}{r_2}$$

### 15.13 Forces conservatives

Ce sont les forces dont le travail ne dépend que des points de départ et d'arrivée (quels que soient ces points), et non de la trajectoire entre les deux

#### Propriétés

- $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \forall$  courbe fermée
- $\exists$  une fonction  $V(\vec{r})$  tel que

$$\int_1^2 = -[V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)], \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2$$

- $\exists$  une fonction  $V(\vec{r})$  ( potentiel) tell que

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

### 15.14 Energie potentielle

potentiel dont une force conservative dérive = energie potentielle du point matériel soumis a cette force.

L'énergie potentielle est définie à une constante arbitraire près.

On a

$$V = \int_{\text{position du point matériel}}^{\text{position de référence}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

### 15.15 Théorème de l'énergie

- Point matériel soumis à
  - des forces conservatives  $F_k = -\vec{\nabla} V_k(\vec{r})$
  - des forces conservatives de résultante  $\vec{F}^{NC}$
- Energie mécanique

$$E(\vec{r}, \vec{v}) = K(\vec{v}) + V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + \sum_k V_k(\vec{r})$$

- Entre les points 1 et 2, on a

$$\begin{aligned} K_2 - K_1 &= W_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) + W_{12}^{NC} \\ \Rightarrow E_2 - E_1 &= W_{12}^{NC} \iff \frac{dE}{dt} = P^{NC} = \vec{F}^{NC} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Donc la variation de l'énergie mécanique est égale au travail des forces non-conservatives.

- Si seules des forces conservatives travaillent

$$E = \text{constante}$$

### 15.16 Lugeur

Un lugeur part au repos au point 1 : quelle est sa vitesse au point 2 Point de départ 1 :  $z_1 = h, v_1 = 0$

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + m g z_1 = m g h$$

Point de d'arrivée 2 :  $z_2 = 0, v_2 = ?$

$$E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

Or par le th de l'énergie cinétique, on a

$$E_2 - E_1 = W_{12}^{NC} = \int_1^2 \vec{F}_{frot} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -F_{frot} ds = -mg\mu_c \cos \alpha \frac{h}{\sin \alpha}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_2^2 - mgh &= -mg\mu_c \frac{h}{\tan \alpha} \\ \frac{1}{2}mv_2^2 &= mgh(1 - \frac{\mu_c}{\tan \alpha}) \end{aligned}$$

Donc

$$v_2 = \sqrt{2gh(1 - \frac{\mu_c}{\tan \alpha})}$$

### 15.17 L'énergie mécanique : intégrale première

Si  $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(\vec{r})$  est constante, alors, par dérivation

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2 + V(\vec{r})) = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) + \frac{dV(\vec{r})}{dt} \\ &= m\vec{a} \cdot \vec{v} + \left( \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) \\ &= m\vec{a} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot \vec{v} = (m\vec{a} - \vec{F}) \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Et donc  $\vec{F} = m\vec{a}$

## Lecture 8: Gravitation

Wed 28 Oct

## 16 Gravitation, Moment Cinétique

### 16.1 Lois de Kepler

- 2ème loi :(lois des aires) Le rayon-vecteur du Soleil à une planète balaie des aires égales en des temps égaux
- 1ère loi :( 1609) Les Trajectoires des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers.
- 3ème loi :( 1609) Les carrés des périodes de révolution sont proportionnels aux cubes des grands axes :

$$\frac{\text{période}^2}{\text{grand axe}^3} = \text{constante}$$

## 16.2 Le développement de la dynamique

- Qu'est-ce qui fait bouger les planètes
  - Avant Galilée/Newton
    - Le mouvement naturel d'un corps est l'immobilité
    - Une planète doit constamment être poussée dans la direction de son mouvement
  - Après Galilée
    - Le mouvement naturel d'un corps est rectiligne uniforme
- Newton tire les conséquences des lois de Kepler
  - La 2ème loi et la planète de l'orbite impliquent que la force (et donc l'accélération) subie par une planète pointe toujours vers le soleil
  - En utilisant de plus la 3ème loi, Newton montre que la force est proportionnelle à  $\frac{1}{r^2}$
  - A partir de là, il prédit une trajectoire elliptique !

## 16.3 Mouvement central et loi des aires

### Definition 9

Un point  $P$  de masse  $m$  a un mouvement central si son accélération passe toujours par un même point  $O \iff \vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}$  reste toujours parallèle à  $\vec{a}(t)$

Conséquences Le vecteur moment cinétique  $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$  reste constant et le mouvement est plan.

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v}) = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge m\vec{a} = 0$$

L'aire balayée par unité de temps par le vecteur  $\vec{r}(t)$  est constante (loi des aires)

$$dA = \frac{1}{2} r v dt \sin(\vec{r}, \vec{v}) \iff \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v}| = \frac{L}{2m}$$

Donc on a

mouvement central  $\iff$  moment cinétique constant  $\iff$  loi des aires + mouvement dans un plan

## 16.4 Mouvement central

Composante horizontale

$$F_p = \vec{F} \cdot \hat{e}_\rho = -mg \cos \alpha \sin \alpha$$

Le support de  $\vec{F}_p$  passe toujours par  $O$

$$|\vec{F}_p| = mg \cos \alpha \sin \alpha$$



## 16.5 Dédution de la force de Gravitation en $\frac{1}{r^2}$

Supposons une orbite circulaire.

Calculons le moment cinétique

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \vec{r} \wedge m \vec{v} = m \vec{r} \wedge (\omega \wedge \vec{r}) \\ &= mr^2 \vec{\omega}\end{aligned}$$

Par la 2ème loi de Kepler  $\vec{L} = \text{constante}$ , on en déduit

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \text{constante} \Rightarrow |\vec{v}| = v = \omega r$$

Donc on a un mouvement circulaire uniforme.

Par la 3ème loi de Kepler

$$T^2 = Cr^3$$

Par la deuxième loi de Newton

$$F = ma = m \frac{v^2}{r} = \frac{m}{r} \left( \frac{2\pi r}{T} \right)^2 = \frac{m}{r} \frac{r \pi^2 r^2}{C r^3} = \frac{4\pi^2}{C} m \frac{1}{r^2}$$

Posons  $\xi = \frac{4\pi^2}{C}$ , on a donc

$$= \xi m \frac{1}{r^2}$$

Donc

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\xi}}$$

## 16.6 Loi de gravitation universelle

### Theorème 7 (Gravitation Universelle)

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{e}_r - G \frac{Mm}{r^3} \vec{r}$$

## 16.7 Champ de gravitation

Une masse ponctuelle  $M$  produit un champ gravitationnel  $\vec{g}(\vec{r})$  à la position  $r$  :

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Quel est le champ gravitationnel produit par une masse  $M$  non ponctuelle supposée sphérique de rayon  $R$  et homogène ? (par exemple la terre)

Réponse : Si  $r \geq R$ , le même champ que produirait une masse  $M$  ponctuelle située au centre de la terre (conséquence de la forme en  $\frac{1}{r^2}$ )

## 16.8 Energie potentielle gravifique

Energie potentielle

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}$$

Approximation à la surface de la terre (  $h \ll R$  )

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{R+h} = \frac{R-h}{R^2-h^2} \simeq \frac{R-h}{R^2} = \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2} \\ \Rightarrow V(r) &= -\frac{GMm}{r} \simeq -\frac{GMm}{R} + \frac{GM}{R^2}mh \end{aligned}$$

On a

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}$$

$$\Rightarrow \text{Force} = F_1\hat{x}_1 + F_2\hat{x}_2 + F_3\hat{x}_3$$

On a donc

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{2x_i}{2r} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{x_i}{r}$$

Et donc

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

## 16.9 Mouvement dans un potentiel central

Si le potentiel ne dépend que de la distance à l'origine,  $V = V(r)$ , alors on a une force centrale

$$\vec{F} = -\nabla V(r)$$

Force centrale  $\iff$  vecteur moment cinétique constante  $\Rightarrow$  mouvement plan

Dans le plan du mouvement, on a

$$\begin{cases} \vec{r} = r\hat{e}_r \\ \vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \end{cases}$$

Constantes du mouvement

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = mr\hat{e}_r \wedge (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\hat{e}_z$$

de meme

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta)^2 + V(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

## 16.10 Intégrales premières d'un mouvement central

Point matériel soumis à une force centrale

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dr}\hat{e}_r$$

$\vec{m}\vec{a} = \vec{F}$  projeté sur  $\hat{e}_\theta$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \iff \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

$\vec{m}\vec{a} = \vec{F}$  projeté sur  $\hat{e}_r$  On obtient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)\right) = 0$$

## Lecture 9: Systemes de points Materiels

Wed 04 Nov

### 16.11 2eme loi et theoreme du moment cinétique

La résultante des forces appliquées au point matériel  $P$  :

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$$

Quantité de mouvement du point matériel de masse  $m$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

En dérivant, et en appliquant la deuxième loi de Newton, on trouve

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Le moment de la force résultante  $\vec{F}$  par rapport à un point  $O$  du référentiel

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = \sum \vec{r} \wedge \vec{F}_i$$

Moment cinétique du point matériel par rapport au point  $O$  :

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

Le théorème du moment cinétique dit

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

### 16.12 Systeme de points matériels

On suppose que chaque point matériel  $P_a$  du système subit :

- une force extérieure  $F_a^{ext}$  dont l'origine est extérieure au système
- des forces intérieures  $F^{\beta \rightarrow \alpha}$  exercées par les autres points  $P_\beta$  du système

On peut appliquer la troisième de Newton, à  $\alpha$  et  $\beta$ . Donc

$$\vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \vec{F}^{\alpha \rightarrow \beta} = 0$$

et

$$\vec{M}^{\beta \rightarrow \alpha} + \vec{M}^{\alpha \rightarrow \beta} = (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \wedge \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha} = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha} &= 0 \\ \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{M}^{\beta \rightarrow \alpha} &= 0 \end{aligned}$$

On définit la quantité de mouvement totale

$$\vec{p} = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha}$$

Si on dérive  $\vec{p}$ , on obtient

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext} = \vec{F}^{ext}$$

On trouve donc

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{ext}$$

De la même manière, on trouve,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{M}_{O,\alpha}^{ext} = \vec{M}_O^{ext}$$

On a donc trouvé les lois générales de la dynamique pour un système de points matériels

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F}^{ext} \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \vec{M}_O^{ext} \end{aligned}$$

### 16.13 Système à l'équilibre

Un système est à l'équilibre si

$$\begin{cases} \vec{r}_{\alpha}(t) = \text{constante} \\ \vec{v}_{\alpha}(t) = \text{constante} \end{cases}$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{cases} \vec{p} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = 0 \\ \vec{L}_O = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = 0 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \end{cases}$$

et donc

$$\vec{F}^{ext} = 0 \text{ et } \vec{M}_O^{ext} = 0$$

On appellera un système “partiellement isolé” selon une direction fixe  $\hat{u}$  :

$$\begin{aligned} \vec{F}^{ext} \cdot \hat{u} = 0 &\Rightarrow \vec{p} \cdot \hat{u} = \text{constante} \\ \vec{M}_O^{ext} \cdot \hat{u} = 0 &\Rightarrow \vec{L}_O \cdot \hat{u} = \text{constante} \end{aligned}$$

## 16.14 Centre de masse

Le centre de masse est un point de l'espace  $G$  défini par

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}$$

où  $M$  est la somme des masses.

Si les masses  $m_{\alpha}$  sont constantes, la vitesse du centre de masse est

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \frac{\vec{p}}{M} \Rightarrow \vec{p} = M \vec{v}_G$$

Donc

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{ext} \Rightarrow M \vec{a}_G = \vec{F}^{ext}$$

C'est le theoreme du centre de masse.