THÉORIE DES GROUPES - SÉRIE 1

24 septembre 2021

Quiz

Quiz 1.1. Un **poset** $(P, \leq)$ est la donnée d'un ensemble P muni d'une relation $\leq$ telle que $\leq$ est:

1. réflexive: $x \leq x$ pour tout $x \in P$,
2. transitive: si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$ pour tous $x, y, z \in P$,
3. antisymétrique: si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$ pour tous $x, y \in P$.

Comment peut-on construire une catégorie à partir d'un poset $(P, \leq)$ dont les objects sont les éléments de P et les morphismes sont induits par $\leq$?

Quiz 1.2. Considère les posets $[0] = \{0\}$ et $[1] = \{0 < 1\}$.

(i) Quelles sont les données des catégories $[0]$ et $[1]$ obtenues à partir de ces deux posets?

(ii) Soit C une catégorie. Quelle est la donnée d'un foncteur $[0] \to \mathsf{C}$ et celle d'un foncteur $[1] \to \mathsf{C}$?

Exercices

Exercice 1.1. Soit C une catégorie et $c \in \mathsf{C}$ un objet. Montrer que la composition munit l'ensemble $\mathrm{Aut}_{\mathsf{C}}(c)$ des automorphismes de c d'une structure de groupe. (Voir Lemme 14 du cours)

Exercice 1.2. Soit G et H deux groupes.

(i) Vérifier que BG définit bien une catégorie, où BG a un objet $\star$ et est tel que $BG(\star, \star) = G$. (Voir Exemple 7 du cours)

(ii) Montrer que l'ensemble $\mathsf{Gr}(G, H)$ des homomorphismes de groupes de G vers H est isomorphe à l'ensemble $\mathsf{Cat}(BG, BH)$ des foncteurs de BG vers BH.

(iii) Montrer qu'il existe un foncteur $B \colon \mathsf{Gr} \to \mathsf{Cat}$ qui envoie un groupe G sur la catégorie BG.

Exercice 1.3. Soit C et D deux catégories. On considère leur produit $\mathsf{C} \times \mathsf{D}$. (Voir Exemple 1.7.2 du cours)

(i) Montrer qu'il existe des projections $\pi_{\mathsf{C}} \colon \mathsf{C} \times \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ et $\pi_{\mathsf{D}} \colon \mathsf{C} \times \mathsf{D} \to \mathsf{D}$ et que π_{C} et π_{D} sont des foncteurs.

(ii) Montrer la *propriété universelle* du produit $\mathsf{C} \times \mathsf{D}$: pour toute catégorie E et tous foncteurs $F \colon \mathsf{E} \to \mathsf{C}$ et $G \colon \mathsf{E} \to \mathsf{D}$, il existe un unique foncteur $(F, G) \colon \mathsf{E} \to \mathsf{C} \times \mathsf{D}$ tel que le diagramme suivant commute,

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{E} \arrow[dl, "F"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\,(F,G)"] \arrow[dr, "G"] & \\ \mathsf{C} & \mathsf{C} \times \mathsf{D} \arrow[l, "\pi_{\mathsf{C}}"] \arrow[r, "\pi_{\mathsf{D}}"'] & \mathsf{D} \end{tikzcd}$$

i.e., tel que $\pi_{\mathsf{C}} \circ (F, G) = F$ et $\pi_{\mathsf{D}} \circ (F, G) = G$.

Exercice 1.4. Montrer qu'un foncteur $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ préserve les isomorphismes, i.e., si $f\colon c \to d$ est un isomorphisme de C, alors $Ff\colon Fc \to Fd$ est un isomorphisme de D.

Exercice 1.5. Montrer qu'un foncteur $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ est un isomorphisme dans la catégorie Cat si et seulement si $F_{\mathrm{Ob}}\colon \operatorname{Ob}\mathsf{C} \to \operatorname{Ob}\mathsf{D}$ est une bijection et, pour tous objets $c, d \in \mathsf{C}$, F_{Mor} induit une bijection

$$\mathsf{C}(c, d) \xrightarrow{\cong} \mathsf{D}(Fc, Fd).$$

On appelle un tel foncteur un **isomorphisme de catégories** et on dit que les catégories C et D sont **isomorphes**.

Exercice 1.6. Soit $\Bbbk$ un corps.

(i) Construire une catégorie $\mathsf{Mat}_{\Bbbk}$ telle que $\operatorname{Ob}(\mathsf{Mat}_{\Bbbk}) = \mathbb{N}$ et, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\mathsf{Mat}_{\Bbbk}(m, n) = \mathrm{M}_{n \times m}(\Bbbk),$$

où $\mathrm{M}_{n \times m}(\Bbbk)$ est l'ensemble des matrices de tailles $n \times m$ à coefficients dans $\Bbbk$.

(ii) Construire un foncteur $F\colon \mathsf{Mat}_{\Bbbk} \to \mathsf{Vect}_{\Bbbk}$ tel que $F(n) = \Bbbk^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.7. Soit $\Bbbk$ un corps.

(i) Décrire la catégorie opposée de la catégorie $\mathsf{Mat}_{\Bbbk}$ de l'Exercice 1.6.

(ii) Montrer que la catégorie $\mathsf{Mat}_{\Bbbk}$ et son opposée sont isomorphes en construisant explicitement un isomorphisme de catégories.

(iii) Pour une catégorie quelconque C, est-ce vrai que la catégorie C est isomorphe à son opposée? Si oui, donner une preuve. Si non, donner un contre-exemple.