Série 4

David Wiedemann

11 octobre 2020

On dénotera par e_{S_n} l'élément neutre de S_n. On utilisera le résultat démontré dans l'exercice 2 partie 3 :

$$\forall S \in S_n, S \neq e_{S_n} \implies \exists \sigma_1, \ldots, \sigma_k \text{ des permutations disjointes tel que } S = \prod_{i=1}^{k} \sigma_i$$

Théorème 1. *Soit $S \in S_n, S \neq e_{S_n}$ un cycle d'ordre $o(S) = k$, on pose que*

$$S = \prod_{i=1}^{m} \sigma_i$$

Alors,

$$o(\sigma_i) \leq k \quad \forall 0 < i \leq m$$

Démonstration. Supposons qu'il existe σ_m tel que $n = o(\sigma_m) > k$, alors

$$S^k = \prod_{i=1}^{m} \sigma_i^k \neq 0$$

en effet, $\sigma_m^k \neq e_{S_n}$ car par définition n est le plus petit entier tel que $\sigma_m^n = e_{S_n}$ et $k < n$.
Etant donné que σ_m est disjoint des autres cycles, on en déduit le théorème. □

On sait, par l'exercice 2.5 que l'ordre d'un élément de S_n est borné par $n!$.