

Série 1

David Wiedemann

19 septembre 2020

Lemme 1. *On montre d'abord que :*

$$\forall a(t), b(t) \in \mathbb{R}[t], \deg(ab) = \deg(a) + \deg(b)$$

Démonstration. Soit $\deg(a(t)) = A$ et $\deg(b(t)) = B$

On pose que

$$a(t) = \sum_{i=0}^A a_i t^i$$

et

$$b(t) = \sum_{i=0}^B b_i t^i$$

Alors

$$a(t) \cdot b(t) = a_A \cdot b_B t^{A+B} + \dots \underbrace{=}_{\text{Propriété des nombres réels}} a_A \cdot b_B t^{A+B} + \dots$$

Clairement, c'est l'élément résultant de la multiplication des deux éléments de plus haut degré de $a(t)$ et $b(t)$ qui aura le plus haut degré. \square

Lemme 2. *Soit $a(t), b(t) \in \mathbb{R}[t]$ et $\deg(a(t)) > \deg(b(t))$ alors $\deg(a(t) + b(t)) \leq \deg(a(t))$.*

On peut donc finalement montrer que la division Euclidienne dans $\mathbb{R}[t]$ existe et est unique.

Démonstration. Unicité

Supposons que $\exists b, r, b', r' \in \mathbb{R}[t]$ et $\deg(r'), \deg(r) < \deg(q)$ tel que

$$\begin{aligned} a(t) &= q(t) \cdot b(t) + r(t) = q(t)b'(t) + r'(t) \\ 0 &= q(t)(b(t) - b'(t)) + (r(t) - r'(t)) \end{aligned}$$

Par hypothèse, $q(t) \neq 0$, donc par lemme 2 et par l'hypothèse que $\deg(q) > \deg(r)$, il faut que

$$q(t)(b(t) - b'(t)) = 0$$

et donc que $b(t) - b'(t) = 0$, donc $b(t)$ est unique.
Donc

$$\begin{aligned} q(t)(b(t) - b'(t)) + (r'(t) - r(t)) &= 0 \\ r'(t) - r(t) &= 0 \\ r'(t) &= r(t) \end{aligned}$$

Donc $b(t)$ et $r(t)$ sont uniques.

Existence

On procede par induction sur le degre de $a(t)$.

Clairement si $\deg(a(t)) = 0$ et $\deg(q(t)) = 0$, alors $a(t) = k_1$ et $q(t) = k_2$, alors

$$b(t) = \frac{k_1}{k_2} \Rightarrow a(t) = b(t) \cdot q(t) + 0.$$

Donc $r(t) = 0$.

Si $\deg(q(t)) > 0$, alors

$$b(t) = 0 \text{ et } r(t) = a(t) \Rightarrow a(t) = q(t) \cdot 0 + r(t).$$

Par recurrence, supposons que le cas $\deg(a(t)) = n$ est vrai et montrons pour $\deg(a(t)) = n + 1$.

Posons que $a(t) = k(t) + a_{n+1}t^{n+1}$, avec $\deg(k(t)) = n$ et que $q(t) = q'(t) + q_m t^m$, alors Soit, $\deg(q(t)) > \deg(a(t))$, dans ce cas, il suffit de poser que $b(t) = 0$ et que $r(t) = a(t)$.

Supposons donc que $\deg(a(t)) \geq \deg(q(t))$, on peut ecrire :

$$a(t) = \frac{a_{n+1}}{q_m} t^{n+1-m} q(t) - \frac{a_n}{q_m} t^{n-m+1} (q'(t)) + k(t)$$

Dans cette expression, on peut voir que

$$\deg\left(\frac{a_n}{q_m} t^{n-m+1} q'(t)\right) < n + 1$$

En effet, le degre de $q'(t)$ est au pire $m - 1$, donc par le lemme 1, le terme de plus haut degre sera de degre $n - m + 1 + m - 1 = n$.

Donc le terme ci-dessus $\frac{a_n}{q_m} t^{n-m+1} q'(t)$ admet, par hypothese de recurrence, $c(t)$ et $r_c(t)$ tel que

$$\frac{a_n}{q_m} t^{n-m+1} q'(t) = c(t) \cdot q(t) + r_c(t)$$

Le degre de $k(t)$ est aussi inferieur a $n+1$, et donc, par le meme raisonnement, $\exists d(t), r_d(t)$ tel que $k(t) = q(t) \cdot d(t) + r_d(t)$.

On a donc

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{a_{n+1}}{q_m} t^{n+1-m} q(t) - \frac{a_n}{q_m} t^{n-m+1} (q'(t)) + k(t) \\ &= \frac{a_{n+1}}{q_m} t^{n+1-m} q(t) - c(t) \cdot q(t) - r_c(t) + q(t) \cdot d(t) + r_d(t) \\ &= q(t) \left(\frac{a_{n+1}}{q_m} t^{n+1-m} - c(t) + d(t) \right) - r_c(t) + r_d(t) \end{aligned}$$

□