EPFL - Semestre de Printemps 2021-2022	J. Scherer
Topologie	**Série 6**
Mathématiques	le 30 mars 2022

Exercice 1. Sous-groupe normal engendré par... Soit G un groupe et $g_i, i \in I$ des éléments de G. On considère $H = \langle g_i, i \in I \rangle$ le sous-groupe engendré par les g_i et $N = \lhd g_i, i \in I \rhd$ le sous-groupe normal engendré par les g_i, i.e. le plus petit sous-groupe normal de G contenant les g_i.

1. Montrer que N est l'intersection de tous les sous-groupes normaux de G contenant les g_i.
2. Montrer que H est un sous-groupe de N, mais que $H \neq N$ en général. On pourra utiliser une permutation dans un groupe symétrique ou un mot dans un groupe libre.

Exercice 2. Groupe abélien libre. Soit $F(a, b)$ le groupe libre à deux générateurs a et b. On considère le relateur $aba^{-1}b^{-1}$. On pose $A = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$.

1. Montrer que tout élément de A admet un représentant de la forme $a^n b^m$ pour $n, m \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que A est un groupe abélien.
3. Montrer que $A \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le groupe abélien libre à deux générateurs.

Remarque. Le noyau du quotient $F(a, b) \to A$ est en fait un groupe libre à une infinité de générateurs, alors que le sous-groupe engendré par $aba^{-1}b^{-1}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Exercice 3. Présentations. Pour chacun des trois exemples suivants, compter le nombre d'éléments et identifier le groupe en question.

1. $D = \langle a, b \mid a^2, b^4, abab \rangle$
2. $Q = \langle a, b \mid a^4, a^2b^2, abab^3 \rangle$
3. $\star$ $S = \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (ab)^3, (bc)^3, (ac)^2 \rangle$
4. Construire un groupe G tel qu'un homomorphisme $G \to H$ corresponde au choix de trois éléments $x, y, z \in H$ avec x d'ordre 3, y d'ordre 6, z d'ordre 11 et enfin $xy = yx$.

Exercice 4. Collapse d'une arête. On considère ici un graphe comme un espace topologique dont les arêtes sont homéomorphes à I et les extrémités sont identifiées si elles correspondent au même sommet. Plus formellement si Γ est un graphe dont les arêtes $e \in E$ et les sommets $s \in S$, il s'agit d'une réunion disjointe de copies de I, autant qu'il y a d'arêtes et d'une réunion disjointe de points, autant qu'il y a de sommets : $\coprod_E([0,1], e) \coprod \coprod_S(*, s)$, que l'on quotiente par les relations $(0, e) \sim (*, s)$ si s est l'origine de l'arête e et $(1, e) \sim (*, s)$ si s est son but.

1. Soit Γ le graphe de Cayley du groupe cyclique C_3 pour le choix d'un générateur. Montrer que le collapse d'une arête a produit une équivalence d'homotopie $q\colon \Gamma \to \Gamma/a$. On demande donc de construire un inverse et de construire les homotopies.
2. Soit Γ le graphe ayant six sommets A, B, C, D, E et F et les cinq arêtes suivantes :

$$a = \{A, C\}, b = \{B, C\}, c = \{C, D\}, d = \{D, F\} \text{ et } e = \{D, E\}$$

Montrer que $q\colon \Gamma \to \Gamma/a$ est une équivalence d'homotopie. On demande donc de construire un inverse et de construire les homotopies. Même question pour l'arête “centrale” c.

Exercice 5. La propriété universelle du pushout.

1. Soit X, Y, Z des espaces topologiques, et $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ deux applications continues. Montrer qu'il existe une unique application continue $f \coprod g : X \coprod Y \to Z$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\
Y \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X \coprod Y \arrow[dr] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

où $i : X \hookrightarrow X \coprod Y$ et $j : Y \hookrightarrow X \coprod Y$ sont les inclusions canoniques.

2. Soit T un espace topologique, et $X, Y, Z \subset T$ des sous-espaces de T. Si $f : X \to Z$ et $g : Y \to Z$ sont des applications continues, montrer qu'il existe une unique application $f \cup g : X \cup Y \to Z$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \cap Y \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\subset"'] & X \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\
Y \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X \cup Y \arrow[dr] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

où $i : X \hookrightarrow X \cup Y$ et $j : Y \hookrightarrow X \cup Y$ sont les inclusions canoniques.

3. Soit $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$ des espaces topologiques pointés, et $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ deux applications pointées. Montrer qu'il existe une unique application pointée $f \vee g : X \vee Y \to Z$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "x_0"] \arrow[d, "y_0"'] & X \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\
Y \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X \vee Y \arrow[dr] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

où $i : X \hookrightarrow X \vee Y$ et $j : Y \hookrightarrow X \vee Y$ sont les inclusions canoniques.

4. Soit X, Z des espaces topologiques et $\phi : S^{n-1} \to X$, $f : X \to Z$, $g : D^n \to Z$ des applications continues. Montrer qu'il existe une unique application $f \cup_\phi g : X \cup_\phi e^n \to Z$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\
D^n \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X \cup_\phi e^n \arrow[dr] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

où $i : X \hookrightarrow X \cup_\phi e^n$ et $j : D^n \hookrightarrow X \cup_\phi e^n$ sont les inclusions canoniques.

Exercice 6. La bouteille de Klein. Le but est de montrer que la somme connexe $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ est homéomorphe à la bouteille de Klein K. Des dessins clairs et des explications concernant les opérations de découpage et d'identification sont demandées (une paramétrisation explicite n'est pas nécessaire, mais les dessins ne suffisent pas). Notre définition de K est le quotient du carré par la relation déquivalence indiquée par le mot $abab^{-1}$, autrement dit on identifie les côtés opposés horizontaux a et a' par $(s,0) \sim (1-s,1)$ et les verticaux b et b' par $(0,t) \sim (1,t)$.

1. Montrer que le mot x^2y^2 définit un espace homéomorphe à K. On pourra voir le carré comme quotient d'une réunion disjointe de deux triangles isocèles rectangles.
2. Montrer que la somme connexe de deux plans projectifs réels est homéomorphe à une bouteille de Klein.

L'exercice 6 est à rendre le mercredi 6 avril. C'est le deuxième exercice obligatoire pour note. L'exercice à rendre en 2021 était l'Exercice 2.